

# Probabilités et Statistique appliquées



Résumé de cours et illustrations



CÉPADUÈS-ÉDITIONS

**B. LACAZE**  
**C. MAILHES**  
**M. MAUBOURGUET**  
**J.-Y. TURNERET**

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Éléments de calcul des probabilités</b>	<b>9</b>
1	Triplet de probabilité $(\mathcal{E}, \mathcal{C}, P)$ .....	9
1.1	Résultats d'expériences et événements .....	9
1.2	Probabilité .....	11
1.3	Interprétation .....	12
2	Dénombrements .....	12
2.1	Utilisation .....	12
2.2	Tirage dans une urne à deux catégories .....	13
3	Probabilités géométriques .....	14
4	Probabilités conditionnelles .....	18
4.1	Définition .....	18
4.2	Théorème des probabilités totales .....	18
4.3	Formule de Bayes .....	19
4.4	Indépendance .....	19
5	Exercices corrigés .....	27
5.1	Triplet de probabilité .....	27
5.2	Combinatoire .....	29
5.3	Urnés .....	32
5.4	Dés et cartes .....	36
5.5	Probabilités géométriques .....	40
5.6	Indépendance .....	44
5.7	Probabilités conditionnelles .....	49
<b>2</b>	<b>Variables Aléatoires</b>	<b>55</b>
1	Définitions .....	55
1.1	Variables aléatoires réelles .....	55
1.2	Variables aléatoires discrètes .....	55
1.3	Variables aléatoires continues .....	56
1.4	Fonction de répartition .....	56
2	Lois fondamentales .....	56

2.1	Loi binomiale $B(n, p)$ .....	56
2.2	Loi de Poisson $P(\lambda)$ .....	57
2.3	Loi uniforme sur $[a, b]$ .....	57
2.4	Loi normale $N(a, b^2)$ .....	57
3	Espérance mathématique .....	58
3.1	Définition .....	58
3.2	Propriétés .....	58
3.3	Moments et relations entre les moments .....	58
3.4	Fonctions génératrices .....	59
3.5	Mesures de position et de dispersion .....	60
4	Exemples de calcul de moments .....	61
4.1	Loi binomiale $B(n, p)$ .....	61
4.2	Loi normale $N(a, b^2)$ .....	61
5	Changements de variable .....	62
5.1	Définition .....	62
5.2	Cas discret .....	62
5.3	Cas continu .....	62
6	Exemples de changements de variable .....	63
7	Exercices corrigés .....	68
7.1	Variable aléatoire discrète : calcul de la loi et de ses paramètres .....	68
7.2	Variable aléatoire continue : calcul de la loi et de ses paramètres .....	73
7.3	Loi définie par morceaux : calcul de la loi et de ses paramètres .....	79
7.4	Changements de variable .....	81
7.5	Loi normale .....	84
7.6	Loi de Poisson .....	87
<b>3</b>	<b>Couples de variables aléatoires</b> .....	<b>89</b>
1	Définitions .....	89
1.1	Couples de variables aléatoires .....	89
1.2	Variables aléatoires discrètes .....	89
1.3	Variables aléatoires continues .....	90
2	Lois marginales .....	90
2.1	Définition .....	90
2.2	Exemples .....	91
3	Lois conditionnelles .....	95
3.1	Cas discret .....	95
3.2	Cas continu .....	95
3.3	Exemples .....	96

4	Indépendance.....	97
4.1	Définition.....	97
4.2	Exemples.....	97
5	Espérance mathématique.....	98
5.1	Définition.....	98
5.2	Propriétés.....	98
5.3	Moments, fonction génératrice des moments et fonction caractéristique.....	99
5.4	Lien avec l'indépendance.....	100
5.5	Interprétation du coefficient de corrélation.....	100
5.6	Espérance mathématique conditionnelle.....	100
5.7	Exemples.....	101
6	Changements de variables.....	102
6.1	Définition.....	102
6.2	Exemple.....	103
7	Somme de variables aléatoires.....	104
7.1	Méthode géométrique.....	104
7.2	Méthode du jacobien.....	105
7.3	Méthode des fonctions caractéristiques.....	106
8	Théorèmes limites.....	107
8.1	Loi des grands nombres.....	107
8.2	Le théorème de la limite centrale.....	107
9	Exercices corrigés.....	109
9.1	Lois discrètes.....	109
9.2	Lois continues.....	112
9.3	Lois conditionnelles - Indépendance.....	119
9.4	Fonctions génératrices, fonctions caractéristiques.....	128
9.5	Changements de variables.....	131
9.6	Calculs de moments.....	139
9.7	Théorèmes limites.....	150
<b>4</b>	<b>Loi normale à <math>n</math> dimensions</b> .....	<b>157</b>
1	Définition.....	157
2	Propriétés.....	157
2.1	Fonction caractéristique.....	158
2.2	Moyenne et matrice de covariance.....	158
2.3	Lois marginales.....	158
2.4	Transformation linéaire.....	158
2.5	Indépendance.....	158
2.6	Lois conditionnelles.....	159
3	Lois liées à la loi normale.....	160

3.1	Loi du $\chi_n^2$ .....	160
3.2	Lois du t (de Student) et du F (de Fisher-Snedecor).....	161
3.3	Caractérisations de la loi normale .....	161
4	Exercices corrigés .....	163
4.1	Exercice de synthèse .....	163
4.2	Calcul de moments .....	169
4.3	Changement linéaire de variables et indépendance .....	176
4.4	Lois construites à partir de la loi normale.....	181
4.5	Changement non linéaire de variables.....	188
<b>5</b>	<b>Estimation de paramètres</b> .....	<b>193</b>
1	Introduction.....	193
2	Exemples .....	194
2.1	Estimation de la moyenne (loi des grands nombres) .....	194
2.2	Estimation de la variance .....	194
3	Inégalité de Rao-Cramer .....	195
3.1	Inégalité de Rao-Cramer .....	195
3.2	Cas particuliers .....	196
3.3	Estimateur efficace.....	196
3.4	Inégalité dans le cas multidimensionnel .....	197
4	Maximum de vraisemblance .....	197
4.1	Définition.....	197
4.2	Exemples .....	197
5	Régression linéaire.....	199
6	Estimation des lois de probabilités.....	203
6.1	Théorème de Bernoulli.....	203
6.2	Théorème de Kolmogorov-Smirnov ( $F(x)$ continue) .....	203
7	Exercices corrigés .....	204
7.1	Variables aléatoires discrètes.....	204
7.2	Variables aléatoires continues .....	214
7.3	Variables aléatoires mixtes .....	231
<b>6</b>	<b>Notions sur les tests statistiques</b> .....	<b>235</b>
1	Introduction.....	235
1.1	Définition.....	235
1.2	Les risques .....	235
1.3	Exemples .....	236
2	Tests paramétriques.....	237
2.1	Test de Neyman-Pearson .....	238
2.2	Procédure de Bayes.....	239

2.3	Tests usuels sur la moyenne et la variance dans le cas gaussien .....	240
3	Tests non paramétriques .....	243
3.1	Test du $\chi^2$ .....	243
3.2	Tests de Kolmogorov .....	244
4	Exercices corrigés .....	246
<b>7</b>	<b>Compléments de calcul des probabilités</b> .....	<b>275</b>
1	Triplet de probabilité $(\mathcal{E}, \mathcal{C}, P)$ .....	275
1.1	Définition .....	275
1.2	Boréliens .....	276
1.3	Produits cartésiens .....	276
2	Variable aléatoire .....	276
3	L'intégrale de Lebesgue .....	277
3.1	L'intégrale de Riemann-Stieltjes .....	277
3.2	L'intégrale de Lebesgue .....	277
4	Convergences .....	279
4.1	Convergence en Loi $(\mathcal{L})$ .....	280
4.2	Convergences en Probabilité $(p)$ et presque sûre $(p.s)$ ....	280
4.3	Convergence en moyenne quadratique $(m.q)$ .....	281
4.4	Comparaison des types de convergence .....	281
4.5	Séries de variables aléatoires .....	282
<b>8</b>	<b>Problèmes généraux</b> .....	<b>283</b>
<b>9</b>	<b>Annexes</b> .....	<b>319</b>
	<b>Bibliographie</b> .....	<b>351</b>

# Probabilités et Statistique appliquées

B. LACAZE, C. MAILHES, M. MAUBOURGUET, J.-Y. TOURNERET

**L**E CALCUL des probabilités intervient dès que l'on désire quantifier une part d'incertitude. Ainsi, le trouve-t-on utilisé en théorie de la fiabilité, des sondages, de l'hérédité ou dans l'étude de l'évolution des systèmes à grand nombre d'éléments...

Le lecteur découvrira pas-à-pas les principes et les techniques du calcul des probabilités et de la statistique. Chaque chapitre comporte un résumé de cours enrichi d'exemples et se termine par des exercices corrigés qui en illustrent toutes les notions définies.

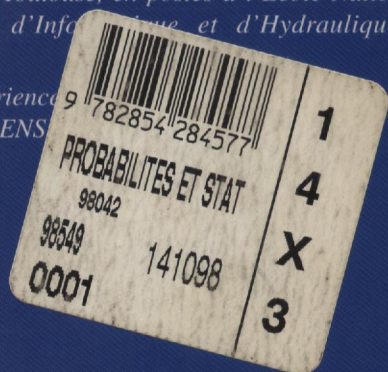
Le niveau mathématique requis est celui d'un premier cycle d'université ou d'une classe préparatoire. Cet ouvrage sera utilisé comme support d'enseignement en écoles d'ingénieurs et dans le cadre des maîtrises de sciences, d'économie et de biologie. Il servira aussi de mise à niveau dans des formations spécialisées.

## LES AUTEURS

Bernard LACAZE est professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse.

Corinne MAILHES, Marie MAUBOURGUET et Jean-Yves TOURNERET sont maîtres de conférences à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, en postes à l'École Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse (ENSEEIH).

Ce livre s'appuie sur une longue expérience dans l'enseignement des probabilités et statistique à l'ENS.



Institut National Polytechnique de Toulouse

Réf. 457

I.S.B.N. : 2.85428.457.7



9 782854 284577