

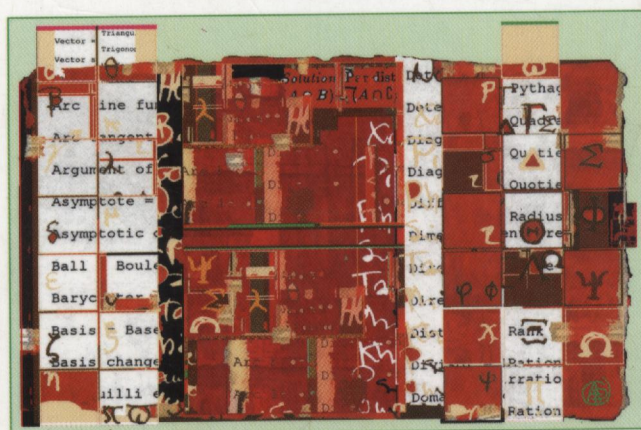
Dominique Foata   Aimé Fuchs

2<sup>e</sup> CYCLE • AGRÉGATION • ÉCOLES D'INGÉNIEURS

# Processus stochastiques

## Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales

### Cours et exercices corrigés



DUNOD

# Table des matières

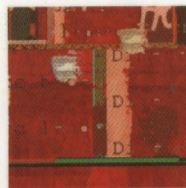
<b>AVANT-PROPOS</b>	xi
<b>CHAPITRE PREMIER • NOTATIONS UTILISÉES ET RAPPELS</b>	1
1.1 Le triplet fondamental	1
1.2 Le théorème binomial	2
1.3 Conditionnement et indépendance	3
1.4 Probabilités discrètes et variables aléatoires	3
1.5 Intégration	4
1.6 Vecteurs aléatoires	5
1.7 Fonctions génératrice et caractéristique	5
1.8 Lois normales et exponentielles, loi gamma	5
1.9 Convergences	6
1.10 Lois des grands nombres	7
1.11 Le théorème « central limit »	7
1.12 Tribu engendrée par des variables aléatoires	7
1.13 Espérances conditionnelles	9
<b>CHAPITRE 2 • TEMPS D'ARRÊT</b>	15
2.1 Généralités sur les processus stochastiques	15
2.2 Notion de temps d'arrêt	17
2.3 Autres propriétés des temps d'arrêt	19
2.4 Processus de variables indépendantes	21
2.5 Identité de Wald	23
2.6 Compléments et exercices	24



<b>CHAPITRE 3 • PROCESSUS DE POISSON</b>	27
3.1 Définitions et premières propriétés	27
3.2 Temps d'attente. Espacements	30
3.3 La seconde définition des processus de Poisson	32
3.4 Âge, temps de vie résiduel	36
3.4.1 La loi de $T'$	36
3.4.2 La loi de $T''$	36
3.4.3 Indépendance	37
3.4.4 Temps d'arrêt	37
3.4.5 Le paradoxe de l'inspection	38
3.5 Distribution conditionnelle des instants d'arrivée	39
3.6 Caractérisation « qualitative » d'un processus de Poisson	41
3.7 Compléments et exercices	43
<b>CHAPITRE 4 • APPLICATIONS DES PROCESSUS DE POISSON</b>	47
4.1 Processus de Poisson marqués	47
4.2 Processus de Poisson marqués non homogènes	50
4.3 Somme de deux processus de Poisson	52
4.4 Processus de Poisson composés	53
4.5 Processus de Poisson et fonctions gamma et bêta	54
4.6 Abandon de l'hypothèse des accroissements stationnaires	56
4.6 Estimation de la densité d'un processus de Poisson	60
4.7 Compléments et exercices	61
<b>CHAPITRE 5 • CHAÎNES DE MARKOV</b>	65
5.1 Définition et premières propriétés	65
5.2 Exemples de chaînes de Markov	67
5.2.1 La chaîne à deux états	67
5.2.2 Le modèle de diffusion d'Ehrenfest	67
5.2.3 Promenade au hasard sur $\mathbb{Z}$ (Lord Rayleigh)	68
5.2.4 Le modèle de la ruine du joueur	68
5.2.5 Le modèle de bonus-malus	68
5.2.6 Évolution déterministe	69
5.3 La relation de Chapman-Kolmogorov	70
5.4 Mesure de probabilité d'une chaîne de Markov	72
5.5 Classification des états; décomposition en classes	75
5.6 États récurrents et transients	76
5.7 La propriété de Markov forte	81
5.8 Périodicité	84
5.9 Compléments et exercices	86



<b>CHAPITRE 6 • APPLICATIONS DES CHAÎNES DE MARKOV</b>	89
6.1 Ensembles clos	89
6.2 Temps d'atteinte	90
6.3 Le modèle de la ruine du joueur	93
6.4 Lois de probabilité stationnaires	95
6.5 Interprétation de la stationnarité	99
6.6 Ergodicité	102
6.7 Matrices bistochastiques	104
6.8 Compléments sur les matrices positives	105
6.9 Compléments et exercices	109
<b>CHAPITRE 7 • MARTINGALES</b>	115
7.1 Premières propriétés	115
7.2 La martingale de Doob	115
7.3 La martingale de Wald	120
7.4 Surmartingales et sous-martingales	120
7.5 Compléments et exercices	123
<b>CHAPITRE 8 • THÉORÈMES D'ARRÊT</b>	127
8.1 Processus arrêté à un instant	127
8.2 Le théorème d'arrêt pour un temps d'arrêt borné	129
8.3 Le théorème d'arrêt pour les martingales dominées	130
8.4 Une troisième variante du théorème d'arrêt	133
8.5 Le théorème d'arrêt pour les martingales uniformément intégrables	134
8.6 Compléments et exercices	135
<b>CHAPITRE 9 • PROBLÈMES DE RUINE</b>	137
9.1 Ruine d'une compagnie d'assurance	137
9.1.1 Majoration par la méthode des temps d'arrêt	138
9.1.2 Majoration à l'aide des inégalités maximales	139
9.2 Le problème de la ruine des joueurs	140
9.3 La probabilité de ruine	141
9.3.1 Cas $p = q = \frac{1}{2}$	142
9.3.2 Cas $p \neq q$	143
9.3.3 Le jeu avec un adversaire infiniment riche	143
9.4 La durée du jeu	143
9.4.1 Cas $p = q = \frac{1}{2}$	143
9.4.2 Cas $p \neq q$	144
9.4.3 Le jeu avec un adversaire infiniment riche	144
9.5 Compléments et exercices	145



Dominique Foata  
Aimé Fuchs

# PROCESSUS STOCHASTIQUES

## Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales

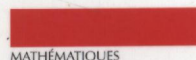
Ce livre s'adresse aux étudiants de maîtrise de mathématiques appliquées et d'informatique (bac+4), ainsi qu'aux élèves des grandes écoles d'ingénieurs, qui s'orientent vers la recherche opérationnelle.

Il présuppose la connaissance d'un cours de probabilités de base, comme celui qui est exposé dans le livre *Calcul des probabilités*, écrit par les mêmes auteurs.

On y trouve un exposé sur les processus de Poisson, les chaînes de Markov et les martingales à temps discret, ainsi qu'une brève introduction au mouvement brownien. Le livre comporte de nombreux exercices, dont la solution est généralement détaillée et un chapitre d'exemples d'applications, dans lesquels les différents processus sont utilisés.

DOMINIQUE FOATA  
et AIMÉ FUCHS

sont professeurs à l'université Louis-Pasteur de Strasbourg. Ils ont publié séparément plusieurs monographies et articles, dans le domaine de la combinatoire classique et algébrique et des fonctions spéciales pour Dominique Foata, et dans celui des probabilités et de la statistique pour Aimé Fuchs.



MATHÉMATIQUES



PHYSIQUE



CHIMIE



SCIENCES DE L'INGÉNIEUR



INFORMATIQUE



SCIENCES DE LA VIE



SCIENCES DE LA TERRE



9 782100 065011

ISBN 2 10 006501 7

<http://www.dunod.com>

