

*REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE SAAD DAHLAB, BLIDA
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE*



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE

OPTION : STRUCTURE

THEME

VIBRATION DE TORSION DES ARBRES DE MACHINES

Présenté par:

Doumi Noureddine

Encadré par:

M^R Kirade Abdelkader

Année universitaire 2010-2011

يهدف هذا العمل إلى دراسة الاهتزاز
طريقة تفادي الحالات الخطيرة (التحطم) و ذلك بإيجاد تواتر اهتز
للدوار ومقارنته بالتواتر الحدي المسموح به

Résumé

Le but de notre travail est d'étudier les vibrations créent par les machines tournantes et comment éviter les cas dangereux (destruction de la machine) à partir de détermination des fréquences propres de vibration de torsion et prévenir le risque dangereux (fréquence critique)

Summary

The traget of this work is for study of the vibrations resulted from the rotative machines and avoiding the dangerous cases (disaster) through determining of frequency of torsion vibration and preventing the dangerous cases (critical frequency)

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'étude avant tout a ma mère et mon père qui m'aident pendant toute ma vie

Puis à mon seul frère ABDERRAZAK, à mes chères sœurs, a toute ma famille.

A mes chers amis : SALEM, SAMIR, YUCEF, DJAMEL, HOUCINE, ABDELNASSER, AZZEDINE.

A ma promotion d'étude : HASSENE BELLALA, SABRI, TAYEB BOUNADRI, WALID BOUSSAHA, SAID, FAROUK, NASSIM.....etc.

Mon promoteur : KIRAD ABEDELKADER.

DOUMI NOUREDDINE

S O M M A I R

-LISTE DES FIGURES

-RESUME

INTRODUCTION GENERALE1

CHAPITRE I : Introduction sur les vibrations des arbres

1. GENERALITES SUR LA VIBRATION.....2

1.1 La recherche actuelle sur les vibrations4

1.2 Bref historique4

1.3 Importance de l'étude des vibrations.....5

1.4. L'origine de la vibration.....6

a) Les Mauvais alignements.....6

b) Les balourds.....6

c) Les fixations.....7

1.5. Les Différents types de vibration.....7

a)Vibration relative d'arbre.....7

b) Vibration absolues d'arbres.....8

c) vibration dues au déséquilibre.....8

d) vibration dues aux excentricités.....9

1.6. L'effet des vibrations sur une structure.....9

2. ARBRES ET APPUIS D'ARBRES.....12

2.1. Arbres.....12

2.1.1. Généralités.....12

2.1.2. Constructions des arbres.....15

2.2. Appuis d'arbres16

a)-paliers lisses.....	16
b)-palier a roulements.....	16
Chapitre II calcul statique des arbres (torsion)	
Généralités.....	18
1- Contraintes et déformations en torsion.....	19
2-Valeurs de la contrainte.....	19
3-Moment quadratique polaire.....	22
a) section circulaire pleine.....	22
b) section circulaire creuse.....	22
4- Calculs de résistance en torsion.....	22
5-condition de déformation.....	24
Chapitre III modélisation dynamique des arbres	
Vibration de torsion.....	26
1- Modélisations des lignes d'arbres.....	26
2- Modélisation des arbres coudes.....	28
2-1- Rigidités torsionnelle du coude.....	28
2-2 -Longueurs équivalentes d'un coude.....	29
2-3- Moment d'inertie d'un coude.....	30
3- Moment d'inertie Equivalent de l'équipage mobile.....	31
a) masse équivalente du piston et de son axe.....	32
b) Masse équivalente de la bielle.....	33
c) Moment d'inertie équivalente.....	33
d) Modèle d'un coude et des pièces mobiles.....	34
4-Modélisation des arbres non coudes (mise en évidence des vibrations de torsion).....	34

4-1-Arbre a une section constante portant un disque.....	34
4-2-Arbre a une section variable portant un disque.....	37
4-3-Arbre a une section constante portant deux disques.....	39
5-Modélisation des accouplements élastiques.....	42
6-Modélisation des réducteurs.....	42

CHAPITRE V RECHERCHE DES PULSATIONS PROPRES ET DEFORMES MODALES

INTRODUCTION.....	44
1-HYPOTHESES.....	45
2- Equations du mouvement du disque.....	45
3- Méthodes de résolution du système.....	48
3-1-ALGORITHME DE RUTSHAUSER.....	48
a)-Propriétés des matrices tri diagonales.....	48
b)-Algorithme.....	48
3-2-Application de l'algorithme de RUTISHUSER.....	50
a)-Détermination des matrices $[R]$, $[S]$	50
b)-Calcul des éléments de la matrice $[C]=[S] * [R]$	50
c)-Relation entre les éléments de $[C]$ et $[C^{\circ}]$	51
3-3-TEST DE CONVERGENCE QUADRATIQUE.....	51
a)Rapidité de la convergence.....	51
b)-Algorithme de la méthode de RUTISHAUSER accélérée.....	52
3-4-DEFORMES MODALES.....	52
4-VIBRATION DE TORSION DE L'ARBRE (PRISE EN COMPTE LA MASSE DE L'ARBRE).....	54
4-1-MOUVEMENT DE TORSION.....	54

a)-Equation du mouvement.....	54
b) -Résolution mathématique de l'équation de Mouvement.....	56
4-2-MATRICES DE TRANSFERT DUES A LA VIBRATION DE TORSION.....	58
a)-Etablir la matrice de transfert.....	59
b) Matrice de transfert d'un disque.....	60
4-3-DETERMINATION DES FRQUENCES PROPRES DE TORSION DU SYSTEME (ARBRE + DISQUE).....	61
a)Relation de transfert de premier élément.....	62
b) Relation de transfert de second élément.....	62
c)Relation de transfert globale du système.....	62
d) Equation de fréquence.....	63
5-PARTIE CALCUL.....	66
5-1-ORGANISATION DE CALCUL.....	66
5-2-DISCRPTION DU PROGRAMME RUTHISHAUSER.....	66
a)Lecture des donnés.....	65
b) Calcul des éléments.....	65
c)Calcul des valeurs propres.....	65
d) Calcul des pulsations propres.....	66
e)Calcul des déformes modales.....	67
5-3-ORGANIGRAME.....	68
5-4-APPLICATION DE CALCUL.....	73
5-4-1Description de l'installation.....	73
5-4-2 Modélisation de l'installation.....	74
5-4-3Caractéristique inertielles et torsionnelles du modèle	76

5-4-4-Détermination des pulsations propres et déformes modales.....	76
5-5- <u>PROGRAMME</u> : calcul des pulsations propres et déformées modales des Lignes d'arbres non ramifiées en vibration de torsion.....	77
Affichage des résultats.....	81
Conclusion.....	83
-Liste des symboles	
-BIBLIOGRAPHIE	

LISTE DES SYMBOLES :

A	l'air de section
b	largeur de bras
d	diamètre
E	Module de Young
G	Module d'élasticité transversale
h	hauteur du bras
V	vitesse du piston
I	Moment d'inertie du disque
K	Rigidité torsionnelle du coude
N	Nombre de disques
T	temps
X	position

M_b	Masse rotative de la bielle
M_p	Masse du piston
M_m	Masse du maneton
I_c	Moment d'inertie du coude
I_t	Moment d'inertie de tourillon
I_m	Moment d'inertie du maneton
I_{eq}	Moment d'inertie équivalent
I_b	Moment d'inertie du bras
J_m	Moment quadratique de la section du maneton
J_t	Moment quadratique de la section du tourillon
J_p	Moment quadratique polaire
L_e	Longueur équivalente

L_t	Longueur du tourillon
L_m	Longueur du maneton
K_m	Rigidité torsionnelle du maneton
K_t	Rigidité torsionnelle du tourillon
K_b	Rigidité torsionnelle du bras
W_p	Moment résistant polaire
$[M]$	Matrice carrée d'inertie
$[K]$	Matrice carrée des rigidités
$[C^\circ]$	Matrice de transfert de la poutre négligent sa masse
$[D^G]$ globale	Matrice de transfert du système
$[D^m]$	Matrice de transfert du disque

SYMBOLE GREQUE :

α Angle de rotation de la manivelle
compte à partir de
l'axe longitudinale

γ Angle de déviation de la fibre
moment d'inertie de masse d'arbre
par rapport à l'axe zz' par unité de longueur

θ angle de torsion produit par
l'application de deux couples

masse volumique

contrainte normale

σ_{ac} Contrainte normale admissible

contrainte tangentielle

τ_{ac} Contrainte tangentielle admissible

ω Pulsation propre

3.141592654

LISTE DES FIGURES :

<u>FIGURE :</u>	<u>PAGE :</u>
1-1 Vibration absolue d'arbres	11
1-2 Différentes types d'arbres	14
1-3 Quelques formes d'arbres	14
2-1 Diagrammes de contrainte tangentielle	20
2-2 Schémas géométrique de la déformation de l'arbre	21
2-3 Section d'arbres	22
3-1 Exemples de modèle de la ligne d'arbre	27
3-2 Coudes de vilebrequins soumis à deux couples	29
3-3 Dimensions d'un coude de vilebrequins	30
3-4 Modèle à un disque	31
3-5 systèmes de bielle manivelle	32
3-6 Arbre perpendiculaire porte un disque	35
3-7 Arbre perpendiculaire à section variable porte un disque	37
3-8 Arbre perpendiculaire à plusieurs sections variables portent un disque	38
3-9 Arbre portant deux disques	39
3-10 Arbre portant deux disques (schéma de dimensions)	41
3-11 Modélisation d'un accouplement	42
4-1 Notation du modèle	45

Introduction générale

Le but de notre présent mémoire intitulé "**vibration de torsion des arbres de machines**" est d'analyser le problème créé par la vibration de machine.

Le premier chapitre de ce projet se limite à deux parties, le premier, comportant une introduction consacrée aux phénomènes vibratoires et leur importance; Nous avons exposé une étude détaillée et essentielle sur les causes ou l'origine de ces vibrations.

La deuxième donne les définitions principales des arbres et ses appuis et aussi les différents types d'arbres que l'on trouve dans les machines tournantes.

D'une manière générale avant de passer aux calculs statiques et dynamiques, ce là facilite la compréhension des considérations théoriques.

Les arbres doivent être calculés pour remplir un certain nombre de conditions:

- résistance mécanique: en aucun point la contrainte doit dépasser la résistance pratique du métal.
- Rigidité à la torsion: elle doit être telle que les déformations élastiques, dues aux charges appliquées, restent inférieures aux déformations maximales admissibles sous peine d'engendrer des vibrations et un guidage défectueux.

Ces calculs statiques sont décrits dans le deuxième chapitre

Dans le troisième chapitre modélisation dynamique des arbres des machines, On se propose pour cela d'établir les modèles dynamiques et les équations mathématiques.

Dans le quatrième chapitre : recherche des pulsations propres et déformées modales Est le vif du sujet proposé, étant un sujet très vaste, qui demande un temps assez important et des moyens considérables, pour cerner et traiter dans son ensemble. Pour notre part, nous avons limité le sujet sur: une étude des vibrations de torsion des arbres de machines.

Dans ce chapitre, nous avons été guidés par deux cas: D'une part, on néglige la masse de l'arbre, et d'autre part, tenant compte la masse de l'arbre, on aborde le problème avec une autre méthode approchée et ce, en utilisant la méthode des matrices de transfert.

A la fin de ce chapitre on fait une application sur une installation ; moteur, arbre, hélice d'un avion léger.

Un programme informatique pour le calcul des fréquences propres et déformées modales.

1. GENERALITES SUR LA VIBRATION :

Depuis le début du vingtième siècle, les études et les recherches sur les machines, ont participés à l'évolution de la science et des techniques modernes, ces machines sont destinées à rendre le travail de l'homme plus productif et plus facile.

Sur le plan mondial la conception, la réalisation, et la commercialisation de ces machines tournantes telles que: les moteurs, les compresseur, les turbines, réducteurs, rotor d'hélicoptère, et hélices, ..., etc., deviennent de plus en plus importantes, leur utilisation dans les différents. Secteurs à dépassé les prévisions de la statique, grâce à leur avantage, leur développement et leur précision, bien que leur prix atteigne une valeur très élevée par rapport à d'autres moyens.

Parmi les composantes essentielles des machines tournantes, les appuis d'arbres, les arbres représentent les organes les plus vulnérables de ces machines, et exigent une attention plus particulière, afin de maîtriser leur choix, leur paramètre d'exploitation, leur comportement dynamique ... etc.

Donc pour un bon fonctionnement de ces machines, il faut que les arbres soit sous un contrôle continu, mais malheureusement peuvent être touchés par des problèmes pires, qui ne sont pas faciles à résoudre, parce qu'ils influent directement sur leur fonctionnement et peuvent les détériorer.

Généralement, toute machine animée d'un mouvement de rotation est plus exposée aux problèmes d'exploitation, alors il est plus haut intérêt pour le constructeur et l'utilisateur de connaître les causes pour supprimer ou tout au moins limiter ces problèmes, afin de prolonger la durée de vie de l'arbre et d'éviter tout incident grave (la résonance).

Pour augmenter le rendement et la durée de vie de ces machines, il est nécessaire d'éliminer tous les problèmes d'exploitation, qui peuvent surgir au cours de fonctionnement.

Parmi les nombreux problèmes, qui peuvent influencer sur la durée de vie et le mode de fonctionnement des machines tournantes, on peut citer quelques problèmes qui sont plus au moins importants:

- Problèmes de vibrations
- Problèmes de température

- Mode de graissage et les incidents

Mais ce qui nous intéresse dans notre projet sont les problèmes de vibrations.

1.1. LA RECHERCHE ACTUELLE SUR LES VIBRATIONS:

1.2. Bref historique:

L'homme s'est intéressé aux phénomènes vibratoires lorsqu'il a construit les premiers instruments de musique ou la recherche de lois de la production et transmission du son a permis la réalisation de ces instruments.

C'est ainsi que PYTHAGORE (582-507 AV JC) a prouvé expérimentalement que si deux cordes sont identiquement tendues, les tons qu'elles produisent diffèrent d'une octave quand la longueur de l'une est le double de l'autre.

Malgré la connaissance acquise par les anciens, il faut attendre le début du 17^{ème} siècle pour que GALILEE (1564-1642) démontre que le ton d'un son est déterminé par la fréquence de sa vibration.

Ces résultats furent confirmés pour la première fois par BUICK TAYLOR (1685-1731)

Plusieurs mathématiciens renommés ont également étudiés le problème de la corde vibrante parmi les quels nous citons, Bernoulli, d'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE, ROURIER, ... etc.

Leurs études ont montrés qu'une corde peut vibrer latéralement de différentes façon appelées "mode de vibration" le premier mode correspondant à la fréquence la plus basse.

L'équation différentielle régissant les vibrations d'une corde fut établie par ALEMBERT vers 1750, elle porte aujourd'hui le nom de "équation d'onde"

De son côté FOURIER établi en 1822 son mémoire célèbre sur la théorie des séries harmoniques.

A partir de la loi de HOOKE, EULER, et BERNOUILLI ont étudié les vibrations des poutres. Leurs méthodes de calcul, basée sur la conservation d'énergie fut reprise par LORD RAYLEIGH (1842-1919), elle porte depuis son nom. Parmi les chercheurs contemporains mentionnons Stodola (1859-1942) qui a établi une méthode d'analyse des vibrations des poutres lors de ses travaux sur les vibrations des aubes de turbines.

Mais l'histoire des phénomènes vibratoires qui concernait au début la création et la

transmission du son a pris un nouvel essor lorsque le courant alternatif fut adopté comme agent de transport d'énergie; Des lors, l'étude des phénomènes oscillatoires acquit un intérêt exceptionnel qui n'est donc pas étonnant que les électriciens qui prenant alors la relève des mécaniciens et physiciens, aient mis au point les méthodes de calcul les plus commodes et les plus fructueuses.

Ces méthodes ont été transposées depuis à l'étude des vibrations mécaniques et acoustiques. Il est ainsi dégagé progressivement une théorie générale des vibrations indépendantes de leur support physique.

1.3. IMPORTANCE DE L'ETUDE DE VIBRATION :

Les vibrations sont des phénomènes gênants apparaissent sur les machines, elles s'influent directement sur leur durée de vie et sur leur fiabilité et diminuent aussi très souvent leur précision, leur performance et également leur prix de vente.

Les vibrations mécaniques ont ordinairement un caractère parasite, qu'on traitait auparavant comme un inconvénient mineur, ainsi pour éviter les résonances on se contentait de se tenir assez loin des conditions dites " critiques ". Il est d'ailleurs reconnu aujourd'hui que même tenues loin de la résonance, les vibrations altèrent la structure des matériaux, et par suite leur endurance. Il est donc très important de savoir étudier les vibrations et de connaître les méthodes de réduction de leur effet nuisible.

C'est à l'occasion de la rupture causées par les vibrations sur les vilebrequins des moteurs, des ailettes de turbines, des avions en vol que les chercheurs ont d'abords élaboré des méthodes particulières à chaque situation et c'est l'accumulation de l'expérience dans ce domaine qui a rendu possible la création d'une- théorie générale sur les vibrations.

Le moteur d'avion comprend un grand nombre de masses liées par des éléments de différentes rigidités, représentant ainsi un système compliqué, soumis aux vibrations torsionnelles.

Les vibrations à la torsion du moteur diminuent la longévité des éléments et provoquent par fois leur détérioration. De même, le confort de l'appareil se voit altérer par ces vibrations et les bruits qui les accompagnent.

De nombreuses machines ou élément de machines sont sujet durant leur fonctionnement à des vibrations. Les causes de ces vibrations sont assez variées: Mode De

fonctionnement de la machine, imprécisions d'exécution ou de montage, usures, défaut de fonctionnement...

L'étude des problèmes de vibrations a acquis une importance de plus en plus grande dans les calculs des pièces de machines.

C'est un fait bien connu, que seule la théorie des vibrations permet de comprendre entièrement nombres de problèmes, dont l'importance pratique est considérable, tels que: équilibrage des machines, vibrations de torsion des arbres et des trains d'engrenages, vibrations des disques et des Aubes des turbines, mouvement tourbillonnaire de vibration des arbres.

L'étude des vibrations dans les moteurs des avions et la recherche des moyens, pour leur diminution, contribuent à l'amélioration de la fiabilité, il la longévité ainsi que du confort, exigences contemporaines auxquelles on accorde beaucoup d'importance à l'heure actuelle, lorsque les vibrations dépassent les limites admises il se pose la question de l'origine de ces vibrations ce n'est que lorsque les excitateurs et les causes sont connues que l'on peut éliminer efficacement les vibrations, c'est pour cette raison que le point de départ de toute décision est la recherche des causes ou l'origine de ces vibrations.

1.4. L'ORIGINE DE LA VIBRATION:

Toute machine en fonctionnement est source de vibrations et de bruit, les vibrations observées sur une machine peuvent être provoqués par de nombreux phénomènes, les plus importants sont les suivants:

a)- les mauvais alignements: en pratique plus de 50 % des machines ne sont pas alignées, les raisons de ce mauvais alignement sont multiples:

- Echauffement différentiel des éléments de la machine
- Mauvais serrage
- Dilatation et usure des paliers, des arbres, ... etc.

Le mauvais alignement se traduit par des vibrations axiales de fréquence double de la fréquence de rotation.

b)-les balourds : parmi les principales causes des balourds, on cite: - Les dissymétries de conception des pièces

- Les hétérogénéités de matières
- Les défauts d'usinage, les assemblages dissymétriques
- Les conditions de fonctionnement

Les balourds ne peuvent jamais être éliminés entièrement, compte tenue de vitesses de rotation actuelles, le problème de l'équilibrage devient plus important encore.

c)- les fixations : la fixation des machines joue un rôle très important dans l'élimination ou la production des vibrations.

Toute mauvaise fixation de la machine peut être due à une mauvaise assise, à un châssis inadéquat, à une absence de support antivibratoires qui permette à la transmission des vibrations des machines voisines, on peut avoir d'autre causes de vibrations qui sont plus au moins importantes.

1.5. LES DIFFERENTS TYPES DE VIBRATIONS DES MACHINES:

On définit ainsi trois types de vibrations des machines:

- Vibrations relatives d'arbres: ce sont le mouvement relatif de l'arbre par rapport à son palier
- Vibrations absolues de paliers: ce sont les mouvements extérieurs du palier mesurés par rapport à un point fixe
- Vibrations absolues d'arbres: ce sont les mouvements de l'arbre mesurés par rapport à un point fixe

a)- Vibrations relatives d'arbres:

On entend par vibrations relatives d'arbres, les mouvements rapides de l'arbre par rapport à son palier, elles représentent les réactions du rotor aux forces alternatives agissant sur lui par exemple un rotor balourdé est le siège de vibrations d'arbres, son centre de gravité se déplace sur une orbite appelé " orbite cinétique " Les vibrations relatives sont jugées d'après les deux critères:

- **critère 1:** Elles ne doivent pas dépasser un seuil de vibrations prédéterminé.
- **critère 2 :** la vibration de leur évolution dans le temps ne doit pas dépasser un Seuil de gradient prédéterminé.

b)- Vibrations absolues d'arbres:

Il est évident que des rotors légers tournant dans les paliers très rigides et très lourds ne produiront que des vibrations de paliers faibles (FIG-1-1, a) c'est le cas de la plupart des compresseurs rotatifs.

Lorsque la masse du rotor, dans une même structure d'accueil, augmente, le rapport, entre les vibrations relatives d'arbres et les vibrations absolues de paliers (FIG-1-1, b) change. Dans le cas de très grosses machines, turbines par exemple.

Le rapport entre la masse du rotor et la masse du palier augmente encore (FIG-1-1, c).

Si les vibrations absolues de paliers sont plus grandes que vibrations absolues d'arbres, les vibrations relatives d'arbres deviennent alors négligeables, on mesure alors de préférence les vibrations absolues d'arbres.

c). Les vibrations dues aux déséquilibrages:

Equilibrer veut dire améliorer la répartition des masses du rotor de telle manière, que les forces centrifuges $f = m.r.\omega^2$ Autour de l'axe de rotation imposées par la construction ne dépassent pas les tolérances admises, de façon générale un rotor est parfaitement équilibré, si son axe d'inertie principal se confond avec son axe de rotation. Dans tous les autres cas, l'équilibrage dynamique du rotor est perturbé et le rotor est affecté d'un balourd suivant la répartition de balourd, on distingue sur le rotor deux balourds:

- défaut de centre de gravité : il provoque un déplacement parallèle à l'axe principal d'inertie par rapport à l'axe de rotation
- l'axe principal d'inertie fait un angle par rapport à l'axe de rotation

NOTA:

- 1- Les disques ou tambours compresseur sont généralement équilibrés avant le montage des ailettes
- 2- L'arbre compresseur est également équilibré dynamiquement avant le montage avec le rotor (généralement par enlèvement de métal à des endroits bien définis)

d). Vibrations dues aux excentricités:

Les rotors n'étant jamais parfaitement équilibrés, les arbres peuvent prendre en rotation une certaine courbure appelée "excentricité"

L'augmentation de la valeur d'excentricité provient en général:

- Soit d'un mauvais alignement des paliers
- Soit de l'apparition d'un balourd sur un rotor

Les forces excitatrices agissantes sur le rotor contiennent les forces aérodynamiques (hélicoptère), magnétiques (moteur) et mécaniques (machine tournante), la plus importante de ces forces et la force centrifuge du balourd reproduisant le déséquilibre du rotor. La qualité de la balance a été déterminée par des expériences pour différents types de machines en fonction des tours et donnée par des tableaux ou des graphes.

L'augmentation du niveau de vibration entraîne successivement une augmentation de la valeur d'excentricité.

Les faibles jeux radicaux qui existent entre les parties fixes et les parties mobiles des machines rendent indispensables le contrôle de l'excentricité de l'arbre.

En effet, lorsque la valeur de l'excentricité est élevée des vibrations importantes prenant naissance des frottements entre les parties fixes et les parties mobiles peuvent se produire.

*** Effets de frottements:**

Les frottements peuvent être dus à plusieurs causes dont les deux principales sont:

1- Frottements par manque de lubrification, il y a frottement de l'arbre avec le Palier, ce phénomène produit des vibrations à hautes fréquences et à large bande qui ne sont pas liées au régime de rotation de l'arbre.

2 - Les pièces tournantes présentent des aspérités dues au mauvais usinage, ces aspérités provoquent des frottements qui donnent naissance à des vibrations de hautes fréquences.

1.6. L'EFFET DES VIBRATIONS SUR UNE STRUCTURE:

Comme on l'a vu précédemment, le phénomène vibratoire est très souvent préjudiciable aux structures lorsqu'elles sont soumises à des sollicitations dynamiques créées

par des forces extérieures, ou intérieures, ou par des déplacements.

L'amplitude du déplacement engendrée est souvent beaucoup plus importante que celle des sollicitations statiques et les contraintes induites peuvent entraîner la rupture.

Sur les aérodynes (avions, hélicoptères), les problèmes de vibrations se présentent de façon très particulière; En effet (le moteur d'avion, le rotor d'hélicoptère) constitue un puissant générateur de vibrations et sa présence crée des problèmes spécifiques à ce type d'engin.

Généralement pour résoudre le problème que créent les vibrations d'une structure quelconque, procède comme suit:

- Déceler les sources de vibrations
- Rechercher les possibilités de résonance, et ce par la détermination des Caractéristiques dynamiques de la structure c'est à dire les fréquences et modes propres.

L'estimation des fréquences propres permet d'éviter la coïncidence entre ces dernières et les fréquences du système ce qui pourrait conduire au phénomène de résonance qui entraîne le plus souvent la rupture de la structure.

Ainsi, tout signal de vibrations que peut avoir un système peut être interprété comme combinaison linéaire des modes propres de la structure.

En fonction des résultats trouvés on pourra imaginer les moyens d'atténuer le phénomène résonance.

Nul n'imaginera donc, les conséquences désastreuses qu'engendraient les vibrations sur une structure volante et ces répercussions dans le domaine aéronautique.

Aussi, il n'est plus possible d'ignorer les phénomènes vibratoires, il faut donc essayer de les prévoir pour dimensionner les structures au stade des bureaux d'études et les modifier judicieusement, si une fois construites, elles ont des caractéristiques dynamiques gênantes.

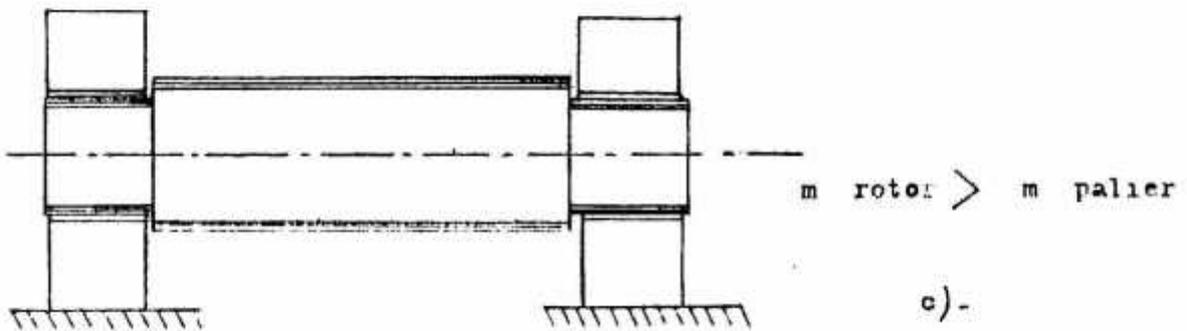
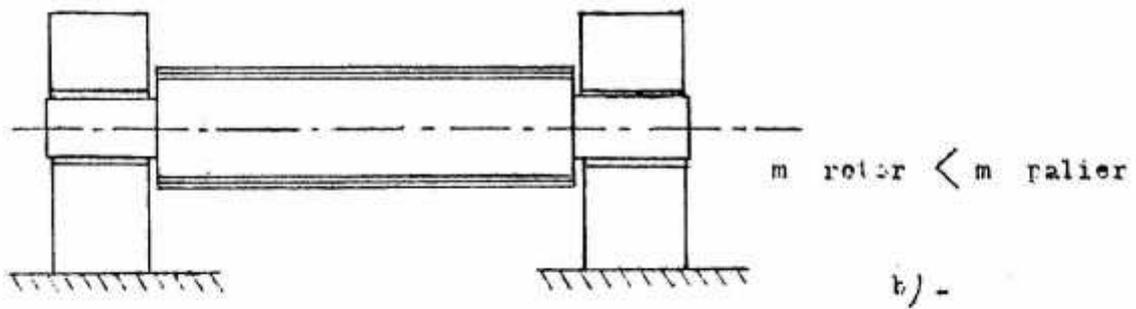
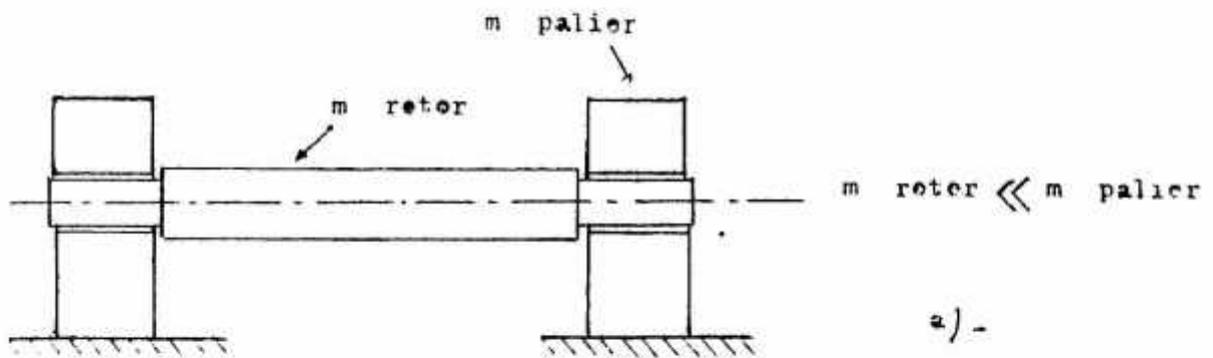


FIG -1-1 - VIBRATION ABSOLUS D'ARBRE

2. ARBRES ET APPUIS D'ARBRES:

Les montages mécaniques le plus courant et les plus anciens comportent deux parties, un élément interne, l'arbre et un élément externe, le palier, on nomme tourillon la partie de l'arbre qui tourne dans le palier.

L'utilisation des paliers dans les machines tournantes sert guider les arbres en rotation, et pour reporter leur charge sur un appui fixe, tant que l'arbre joue le rôle d'une colonne vertébrale dans la machine, ils sont utilisés dans des nombreux moteurs ou autre dispositifs mécaniques.

2.1. ARBRES:

2.1.1. GENERALITES:

Les arbres sont des pièces cylindriques, destinés à tourner. Sur ces pièces viennent se fixer des organes de transmissions (roues dentées, disques, ..., ex

L'arbre constitue le plus souvent la partie mobile de la machine (Arbre d'un moteur par exemple).

La position importante des arbres dans les machines tournantes permet de transmettre des puissances mécaniques reçues par l'intermédiaire des éléments moteurs, ou éléments récepteurs.

Il existe plusieurs types d'arbres, les plus utilisés sont:

- arbres moteurs
- arbres de transmission
- arbres récepteurs (voir figure. 1.2)

a)-arbres moteurs: Il constitue l'organe essentiel de machines motrices ou moteur dont le mouvement principal est un mouvement de rotation (arbre de turbine par exemple)

b)-arbres de transmission : Ce sont des organes intermédiaires, recevant l'énergie mécanique d'un moteur, ils la transmettent à une machine réceptrice (par l'intermédiaire d'organes de transmission: accouplements, réducteurs) et ils peuvent porter engrenages, roues dentées, etc.

c)-arbres récepteurs : Constituant l'organe principal des machines réceptrices,

(compresseurs par exemple), ils reçoivent l'énergie mécanique, soit directement du moteur, soit par l'intermédiaire des arbres de transmission et transmettent cette énergie aux organes récepteurs.

Parmi les différentes formes d'arbres, on peut citer quelques exemples (voir figure 1.3)

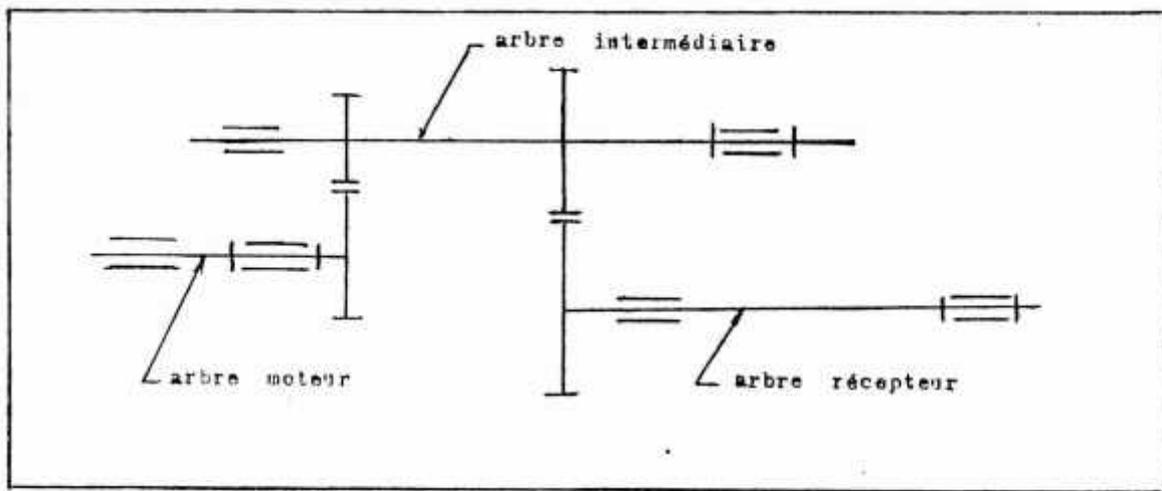


FIG-1-2 DIFFERENTES TYPES D'ARBRES

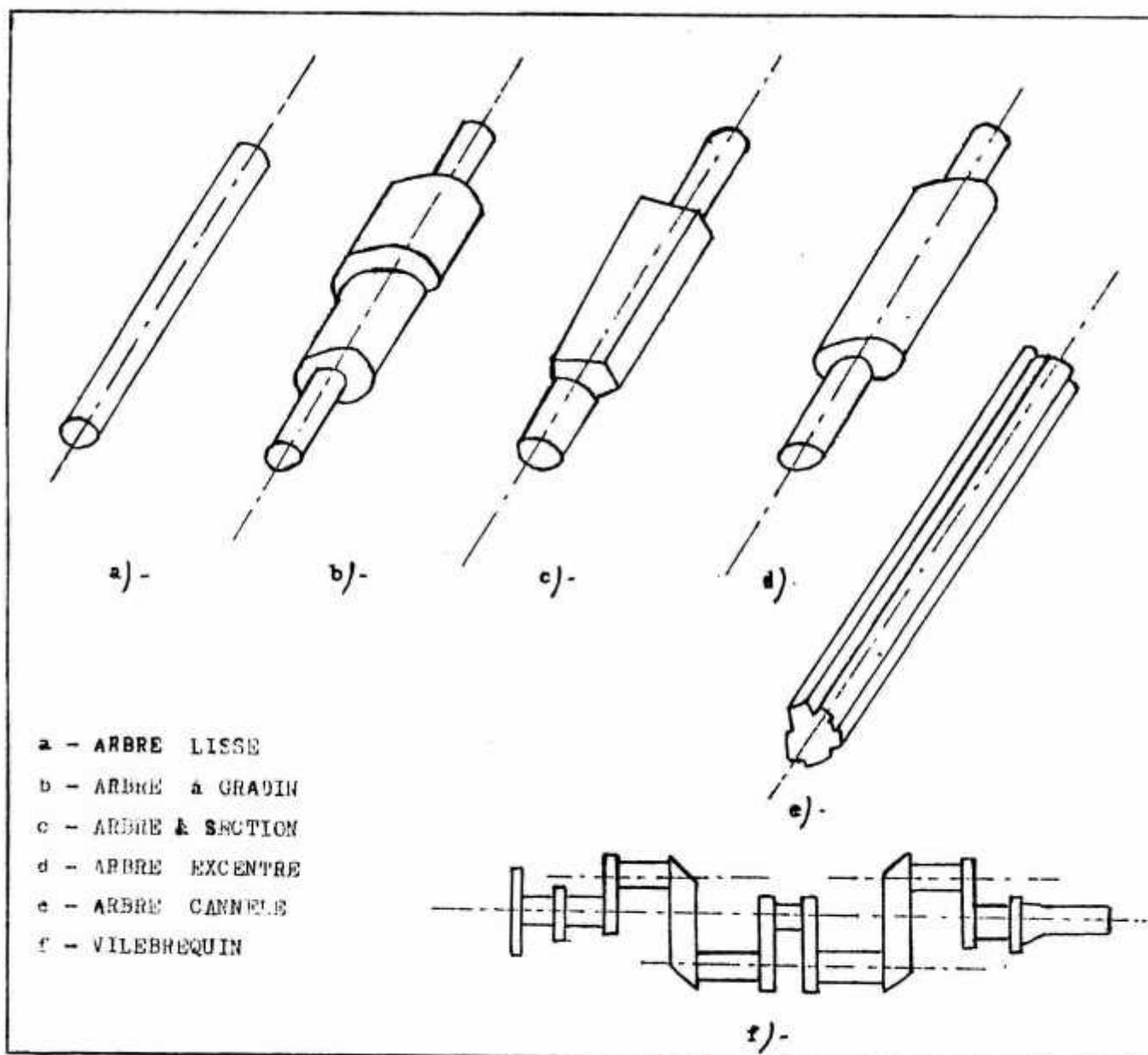


FIG - 1-3 QUELQUES FORMES D'ARBRES

2.1.2. CONSTRUCTION DES ARBRES :

*** Diamètre et vitesse de rotation :**

Les diamètres des arbres de transmission sont normalisés (norme NF E 22.100) et égaux à (en mm) 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120 et 150

Leurs fréquences de rotation le sont aussi (norme NF E 22.003) et ont les valeurs suivantes (en tours par minutes)

25 63 160 400 1000 2500

31.5 80 200 500 1250 3150

40 100 250 630 1600

50 125 315 800 2000

***Materiaux utilisés :**

a)-Aciers non alliés :

Les aciers doux étirés ($R=40$ à 50 daN/mm^2) sont employés sans usinage, grâce à leur faibles tolérances, pour les arbres de transmission, les aciers mi-durs et durs, souvent trempés ($R=55$ à 80 daN/mm^2) sont utilisés, usinés, ou forgés, pour les arbres incorporés aux machines.

b)- fontes ductiles a graphite sphéroïdal :

Alliées ou non ($R=65$ à 100 daN/mm^2), elles permettent l'obtention économique d'arbres de formes complexes (vilebrequins creux à contre poids incorporés de moteur d'automobile obtenus par fonderie)

c)-Aciers alliés:

Au chrome ou au nickel chrome trempés et revenus ($R = 120 \text{ daN/mm}^2$) .il sont réservés pour les fortes charges.

2.2. APPUIS D'ARBRES:

Dans un ensemble mécanique, certaines pièces opèrent un mouvement relatif par rapport à d'autres pièces, elles mêmes fixes ou mobiles, il importe que le guidage assure la précision et la fiabilité de la trajectoire assignée à chaque pièce pour qu'elle remplisse sa fonction. La qualité du guidage choisi est élément déterminant du fonctionnement correct et du bon rendement de l'ensemble d'une générale, on distingue les guidages par glissement (paliers lisses) et les guidages par roulement (paliers à roulements).

Le choix de la solution la mieux adaptée n'est pas toujours simple car de nombreux paramètres doivent être pris en compte, notamment la charge de base dynamique de fonctionnement, l'éventuelle perturbation prévisible (vibrations, chocs...etc.)

a). PALIERES LISSES:

Suivant l'orientation de l'arbre et le sens de la charge à laquelle, ils sont soumis, on distingue:

- Les paliers porteurs (axe horizontal, charge radiale)
- Les paliers de butée (axe horizontal, charge axiale)
- Les boitards (axe vertical, charge radiale)
- Les crapaudines (axe vertical, charge axiale et radiale)

b). paliers à roulement:

Le roulement est un organe mécanique destiné à permettre la transmission des efforts entre deux pièces en rotation l'une par rapport à l'autre avec un frottement minimal.

Il se distingue par un faible encombrement axial, la précision des centrages, la faiblesse des couples de résistance au démarrage et des coefficients de frottement en service.

Le roulement est normalement constitué de quatre éléments de base :

- une bague intérieure (solidaire à l'arbre)
- une bague extérieure
- des éléments roulants (permettant la rotation relative d'une bague par rapport à l'autre)
- une cage maintenant l'écartement des éléments roulants et les empêchant de frotter d'un

contre l'autre.

On classe généralement le roulement en trois familles principales :

- Les roulements à billes
- Les roulements à rouleaux
- Les roulements à aiguilles

***Les différents montages de roulements:**

Est utilisé deux types de roulements:

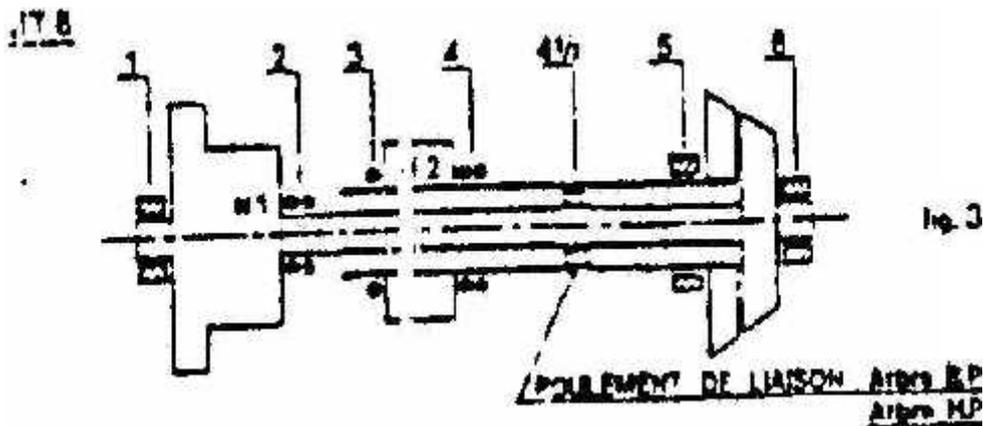
- Roulement à billes
- Roulement à rouleaux

Le roulement à bille: est destiné à encaisser les efforts axiaux de la turbine et de Compresseur, c'est le roulement de la butée.

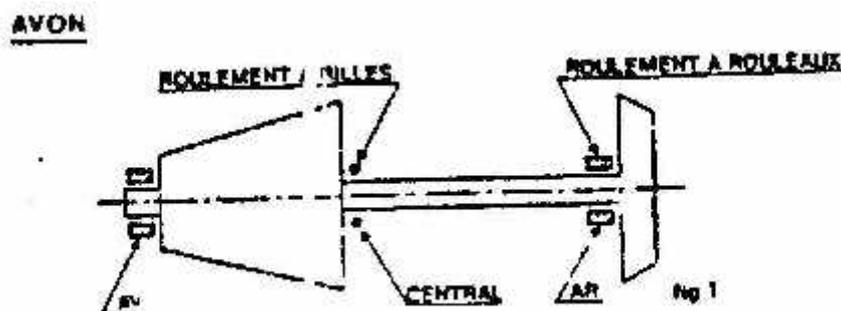
Le roulement a rouleaux : est destiné à encaisser les efforts radiaux de la turbine et de compresseur.

***Exemples de montages:**

a)- **Réacteurs simples attelages:**



b)- **Réacteurs doubles attelages:**



Généralité :

Tous les arbres qu'on rencontre changent plus ou moins de forme (se déforment) sous l'influence de l'action extérieure. L'intensité de ces déformations dépend de la matière des arbres, de leurs formes géométriques, de leurs dimensions et des efforts appliqués.

Lorsque l'on calcule la solidité des parties d'une construction ou d'une machine, les déformations des arbres acquièrent une importance considérable. Ces questions sont étudiées dans les cours de résistance des matériaux.

La résistance des matériaux est la science la plus générale qui étudie la solidité des machines, la création de différents types de machines et mécanismes, avions, hélicoptère, turbines et moteurs, ... etc.

Du point de vue physique, il est clair que le matériau ne puisse pas supporter des contraintes aussi grandes qu'on veut. Aussi, les valeurs des contraintes maximales doivent elles, en portant de la condition de fiabilité de la pièce au cours de l'exploitation, être limitées par certaines quantités permises, ces quantités sont dites contraintes admissibles.

En pratique, on rencontre 3 cas de calcul de résistance:

1°_ Les sollicitations étant connues, l'on demande de trouver, pour le matériau choisi, les dimensions correspondantes de la section transversale de l'arbre

2°_ Les dimensions de la pièce et le matériau sont connus, l'on demande de vérifier si l'arbre pourra supporter une sollicitation donnée.

3°_ Sont connus le matériau, la dimension de la pièce, ainsi que la façon dont elle est chargée. L'on demande de déterminer la valeur admissible de cette charge.

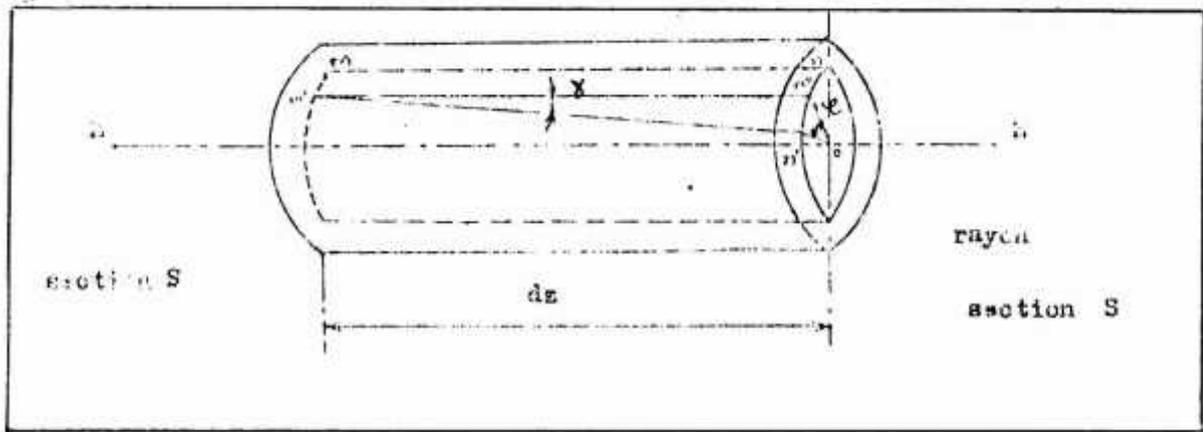
A la base de tous ces calculs est opposée la condition de résistance:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}}$$

* **Torsion:** La torsion a lieu lorsque sur un arbre agissent des forces extérieures qui engendrent un moment par rapport à son axe. La déformation de torsion s'accompagne d'une rotation des sections transversales de l'arbre l'une par rapport à l'autre autour de l'axe de cette dernière.

1. CONTRAINTES ET DEFORMATIONS EN TORSION:

On considère la fig. ci dessous, deux sections droites très voisines s et s' situées à la distance dz. Une portion de fibre telle mn située à la distance r que après déformation



élastique, en m'n', soit α l'angle dont la section s' à tourné par rapport à S

Comme la déformation élastique est très petite, la figure m n' n'' peut être assimilée à un triangle rectangulaire par ailleurs, le glissement de la section s' par rapport s peut être caractérisé par l'angle de déviation γ de la fibre m'n'.

La déviation a donc pour mesure:

$$\gamma \approx \gamma = \frac{m'n''}{m'n'} = \xi \cdot \frac{d}{dz} \dots \dots \dots (3 - 1)$$

2-VALEUR DE CONTRAINTE:

Le glissement dû à la torsion est analogue à celui provoqué par le cisaillement et la contrainte tangentielle correspondante est donnée par l'expression:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

D'après (3-1), on a:

$$\tau = G \cdot \xi \cdot \frac{d}{dz} \dots \dots \dots (3 - 2)$$

Le rapport $\frac{d\alpha}{dz}$ représente l'angle de torsion rapporté à l'unité de longueur, il est appelé

angle unitaire de torsion et il est désigné par θ . Expriment le cisaillement τ dans y les fibres extérieures de l'arbre par les contraintes, on trouve en accord avec la loi de **HOOKE**, pour le cisaillement, le rapport entre les contraintes tangentielles dans les fibres extérieures L et l'angle de torsion

$$\tau = G. \xi. \theta \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

D'après la formule (3-2), on voit qu'en torsion la déformation de cisaillement et les contraintes tangentielles sont directement proportionnelles à la distance jusqu'au centre de gravité de la section.

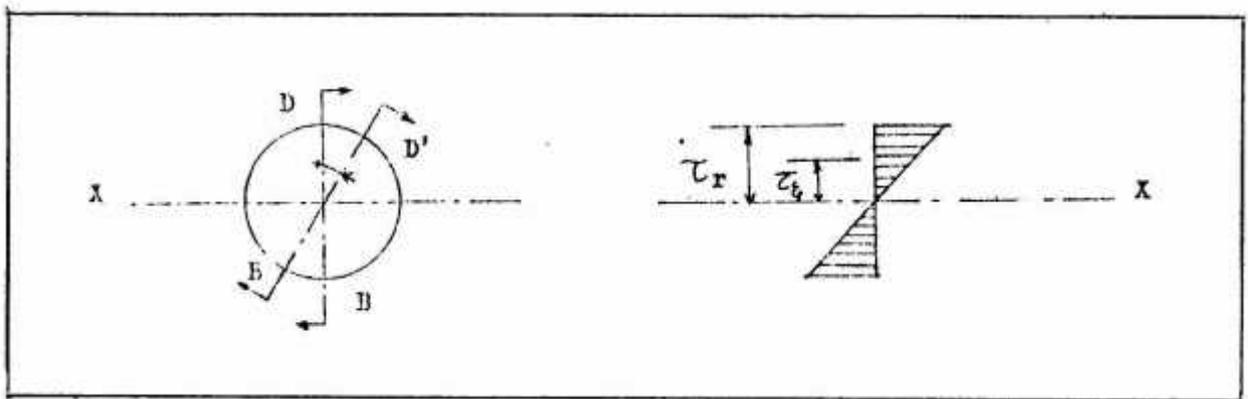


FIG -2-1

Le diagramme des contraintes tangentielles suivant la section droite de l'arbre est représenté sur la (fig.:2-1)

Au centre de gravité d'une section circulaire les contraintes tangentielles sont nulles. Elles sont maximales aux points de la section voisine de la surface de l'arbre.

Le moment de torsion en une section quelconque de l'arbre qui est la résultante de la section simultanée des contraintes tangentielles τ agissant dans les plans

Élémentaires dA se trouvant à la distance ξ du centre de la section peut être exprimé par l'équation:

$$M_t = \int_A \xi \tau dA \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

La distribution des contraintes tangentielles L dans la section se détermine d'après les schémas géométrique des déformations de l'arbre en torsion reproduit sur la (FIG- 2-2)

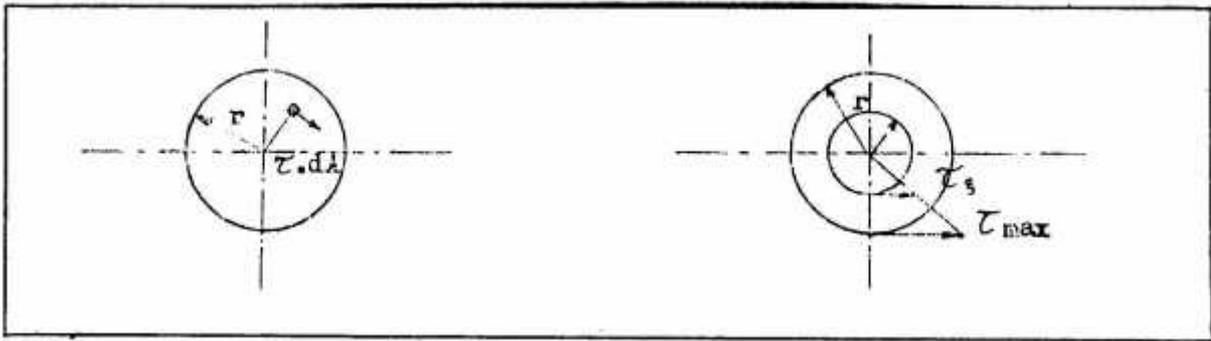


FIG - 2-2

En mettant (3-3) dans (3-4), il vient que:

De là, on obtient une formule permettant de déterminer l'angle de torsion relatif de l'arbre:

$$\theta = \frac{d}{d} = \frac{M}{d} = \frac{M}{G \cdot J_p} \dots \dots \dots (3 - 5)$$

Où GJ_p - est la rigidité de la section transversale de l'arbre en torsion qui se

Mesure en $Kgf.cm^2$

L'angle de rotation total d'un arbre de longueur L est égal à

$$\varphi = \int_0^L \frac{M}{G J_p} \cdot d = \theta \cdot L = \frac{M}{G J_p} \cdot L \dots \dots \dots (3-6)$$

Où $G P/L$ est la rigidité de l'arbre à la torsion qui se mesure en $Kg.f.cm$

En mettant la valeur de θ tirée de (3-5) dans (3-3), trouvons maintenant la contrainte tangentielle 't' en un point quelconque de la section de l'arbre :

$$\tau = \frac{M \cdot \xi}{J_p} \dots \dots \dots (3 - 7)$$

La contrainte tangentielle maximale est de toute évidence égal à : $\tau_{max} = \frac{M}{J_p} \cdot r$

Ou bien à:

$$\tau_{max} = \frac{M}{W} \dots \dots \dots (3 - 8)$$

$W_p = J_p / r$ - est le moment résistant polaire.

3. MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE :

a)- Section circulaire pleine:(fig.: 2.3,a)

On a: $W_P = \frac{I_P}{r}$
 $W_P = \frac{\pi d^4}{32 \cdot d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \quad \text{0.2. } d^3 \dots \dots \dots (3 - 9)$

b) section circulaire creuse : (fig2.3, b)

On a: $W_P = \frac{2 \cdot I_P}{D}$
 $W_P = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^3 (1 - C^4)}{16}$
 $W_P = 0.2 \cdot D^3 (1 - C^4) \dots \dots \dots (3-10)$

Où: $C = \frac{d}{D}$

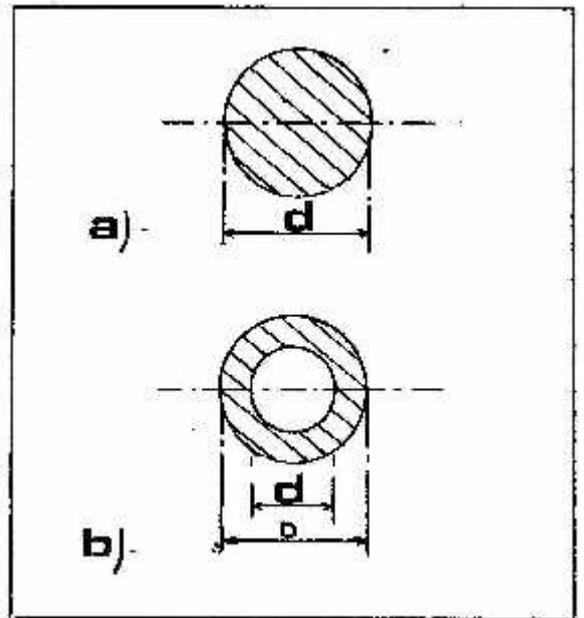


FIG - 2-3

Donc, pour un arbre cylindrique plein, de diamètre d, le moment résistant polaire est donnée par la formule (3-9) et la contrainte tangentielle maximale est

$$\tau_{max} = \frac{16M_t}{\pi d^3} \dots \dots \dots (3-11)$$

Pour un arbre cylindrique creux, W_P détermine d'après la formule (3-10), la contrainte tangentielle maximale est :

$$\tau_m = \frac{1 \cdot M_t}{\pi D^3 (1 - C^4)} \dots \dots \dots (3 - 1)$$

4. CALCUL DE RESISTANCE EN TORSION:

Pour que la pièce résiste en toute sécurité à la torsion, il faut que la contrainte maximale soit inférieure à la contrainte admissible du métal.

D'où la condition de la résistance statique de l'arbre à la torsion est sous forme

$$\tau_m = \frac{M_t}{W_p} \tau_{ad} \dots \dots \dots (3-1)$$

τ_{max} - est la contrainte tangentielle admissible, sous l'action d'une charge statique; On adopte (sans tenir compte de la concentration des contraintes et d'autres facteurs qui Altérant la résistance).

$$\tau_{ad} = (0.5 \text{ à } 0.6) \sigma_{ad}$$

D'après la formule (3-13), le moment résistant de l'arbre en torsion doit être:

$$W_p = \frac{M_t}{\tau_{ad}} \dots \dots \dots (3 - 1)$$

En plus vérification à la résistance, les autre quantités étant connues, on peut également d'après cette formule (3-14) choisir le diamètre de l'arbre ou calculer le moment de torsion.

Si on tient compte que pour une circulaire pleine $W_p = 0,2d^3$

$$\text{Il vient : } d = \sqrt[3]{\frac{M_t}{0,2 \cdot \tau_{ad}}} = 1,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{ad}}} \dots \dots \dots (3 - 1)$$

Pour les arbres creux, on l'avantage de réduire beaucoup le Poids de l'arbre moyennement une légère augmentation du diamètre (arbre de turbine par exemple), $W_p \cong 0,2 \cdot D^3$

Il vient:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_t}{0,2(1-C^4) \tau_{ad}}} \dots \dots \dots (3-16)$$

Si l'on exprime le moment de torsion par la puissance N en ch. et le nombre de tours par minute par n, on aura:

$$M_t = 7 \cdot \frac{N}{n} (k \cdot f \cdot c) \dots \dots \dots (3 - 1)$$

Et la formule (3-15) se transforme en:

$$d = 7 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n \cdot \tau_{ad}}} \dots \dots \dots (3 - 1)$$

Alors que la formule (3-16) s'écrit:

$$D = 7,4 \sqrt[3]{\frac{N}{\pi \cdot \tau_{ad} (1-C^4)}} \dots \dots \dots (3-1)$$

La puissance N est donnée en Kilowatts (**1 ch = 0,736 KW**) le moment de torsion peut exprimer par:

$$M_t = \frac{7}{0,7} \cdot 9 \cdot \frac{N}{\pi} \quad (k \cdot f \cdot c) \dots \dots \dots (3-2)$$

5-Condition de Déformation:

Le diamètre d'un arbre de grande longueur, pour éviter une brusque détente en cas de variation brutale du couple, sera calculé pour que la déformation angulaire entre les sections extrêmes soit inférieure à une valeur maximale; si non l'arbre se comporterait comme un ressort de torsion, telle que l'angle de torsion unitaire .

Reste inférieure à une valeur maximale; par exemple: 0,25 degré par mètre de longueur, valeur qui est couramment adoptée en pareil cas :

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot J_p} \cdot \theta_{ad} \dots \dots \dots (3-2)$$

D'ou le moment d'inertie polaire garantissant une rigidité admissible:

$$J_p = \frac{M_t}{G \cdot \theta_{ad}} \dots \dots \dots (3-2)$$

Par conséquent le diamètre d'un arbre cylindrique pleine d, doit être:

$$d = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_{ad}}} \dots \dots \dots (3-2)$$

Tan disque le diamètre extérieur d'un arbre cylindrique creux D, pour un C donné:

$$d = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot M_t}{\pi(1-C^4) \cdot G \cdot \theta_{ad}}} \dots \dots \dots (3-24)$$

Remarque:

Le calcul à la condition de déformation impose une valeur de diamètre nettement plus grande que le calcul à la condition de sécurité. C'est évidemment cette deuxième valeur du diamètre qu'il faudra adopter. Surtout si l'arbre a une grande longueur.

VIBRATIONS DE TORSION :

Lors delà conception, il est nécessaire de prévoir le comportement vibratoire des structures en cours de fonctionnement afin d'augmenter la fiabilité et de prévenir les ruptures.

L'ensemble mécanique dans l'avion (moteur - arbre - hélice par exemple) représente un système déformable sous l'action des couples de torsion un tel système admet plusieurs modes de vibrations libres.

Chacun de ceux ci étant caractérisé par une fréquence naturelle et des amplitudes relatives pour chaque élément du système.

Le danger principal provient cependant d'une résonance qui risque de se produire entre les vibrations provoquées par le couple moteur et la fréquence de vibration propre de torsion de l'arbre; les vitesses de rotation aux quelles ces phénomènes de résonances se produisent sont dites vitesses critiques de torsion.

Dans tel cas, le fonctionnement peut être très dangereux et entraîne la rupture de l'arbre ou l'usure rapide des autres éléments de machine.

1. MODELISATION DES LIGNES D'ARBRES:

Les recherches ayant trait aux vibrations des machines et des mécanismes, doivent comprendre une étude théorique suivie d'une vérification expérimentale de la conclusion théorique.

L'expérience à montré que dans la recherche théorique concernant un certain aspect du système physique réel, les calculs peuvent être considérablement simplifiés, ne concernant qu'une partie des propriétés (celles faisant l'objet de l'étude) et l'on néglige les autres. Le résultat de cette simplification du système physique réel s'appelle modèle L'étude des vibrations de torsion dans les transmissions des machines procède en général des modèles linéaires par différentes méthodes à masses concentrées, reliées par les élasticités non pesantes.

L'un des problèmes fondamentaux est la détermination des pulsations propres du système, afin d'éviter les résonances aux régimes de fonctionnement.

Caractéristique du modèle:

La complexité de la chaîne de transmission (moteur, réducteur, arbre de transmission, hélice, par exemple) nécessiterait un nombre très élevé de degrés de liberté, ce qui entraînerait un coût du calcul excessif. Ce qui par contre nous paraît faisable est de calculer.

En utilisant le modèle classique "masse ressort". Le modèle le plus couramment utilisé pour les transmissions de mouvement de rotation, consiste en un ensemble de solide de révolution, supposés infiniment régi des, réunis entre eux par des ressorts de torsion sans masses, de rigidité torsionnelle K_i , comme indiqué sur la figure (3-1). Ainsi, il est nécessaire de créer, pour une ligne d'arbre, différents modèles pour:

- Réaliser l'équilibrage d'un vilebrequin.
- Connaître les fréquences propres des vibrations de torsion, de flexion ou Axiales.
- Déterminer les amplitudes en quelques points particulières des oscillations forcés de torsion; de flexion ou axiale.
- Donner une image de l'état de contrainte de la matière ... etc.

Nous nous limiterons à la caractérisation des modèles traduisant les N premières fréquences naturelles de torsion et les amplitudes des oscillations forcées.

Les éléments de ces modèles doivent satisfaire à des règles bien connues:

Proportionnalité entre efforts et déformations; conservation des masses, pour que les lois de la mécanique leur soient applicables et que la résolution numérique des équations conduise à l'utilisation de schémas mathématiques classiques.

Ces modèles représentent une distribution de paramètres et de degrés de liberté qui dépendent de l'expérimentation.

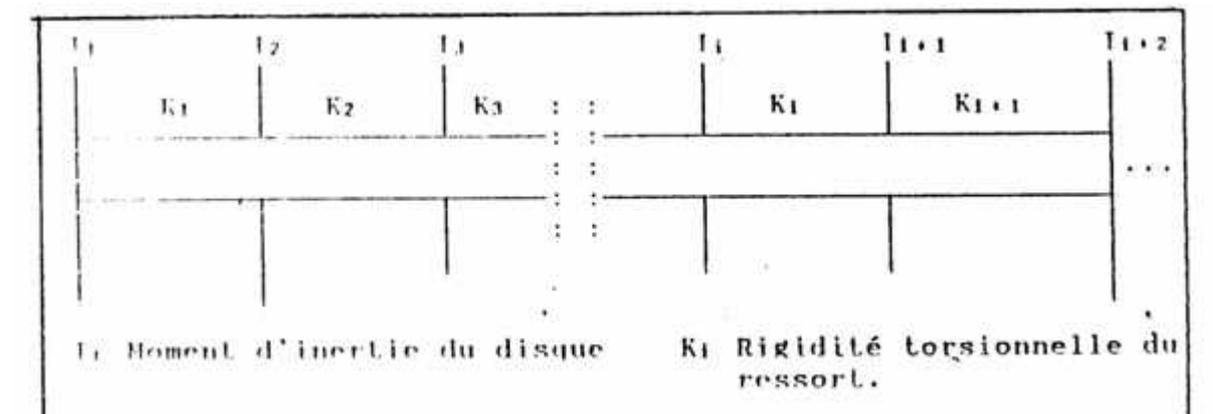


FIG-3-1-Exemple de modèle de ligne d'arbre

2. MODELISATION DES ARBRES COUDES :

Le vilebrequin constitué par des coudes qui ont un mouvement de rotation reliés à des pièces (bielles - pistons) animées d'un mouvement alternatif.

Si l'on veut remplacer le vilebrequin par un arbre cylindrique équivalent, il faut commencer par étudier la rigidité ainsi que le moment d'inertie à la torsion.

2.1. RIGIDITE TORSIONNELLE DU COUDE :

Si l'on considère un coude de vilebrequin soumis à deux couples opposés "C" portés par l'axe du tourillon et appliqués à chaque extrémité, la déformation globale en torsion est la somme des déformations.

Cela se traduit par la rotation relative des deux sections extrêmes du coude d'un angle θ (rad).

La rigidité torsionnelle K du coude est: $K = CI$

Ou encore: $\frac{1}{K} = \frac{2}{K_t} + \frac{2}{K_b} + \frac{1}{K_m}$

K_t : rigidité torsionnelle d'un tourillon.

K_m : rigidité torsionnelle d'un magnéto.

K_b : rigidité équivalente d'un bras.

Si dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que les formules simples de RDM sont applicables aux coudes de vilebrequin, nous pouvons calculer la rigidité K en fonction des dimensions:

$$K_t = \frac{2G J_t}{L_t} \quad , \quad K_m = \frac{G J_m}{L_m} \quad , \quad k_m = \frac{E J_b}{R}$$

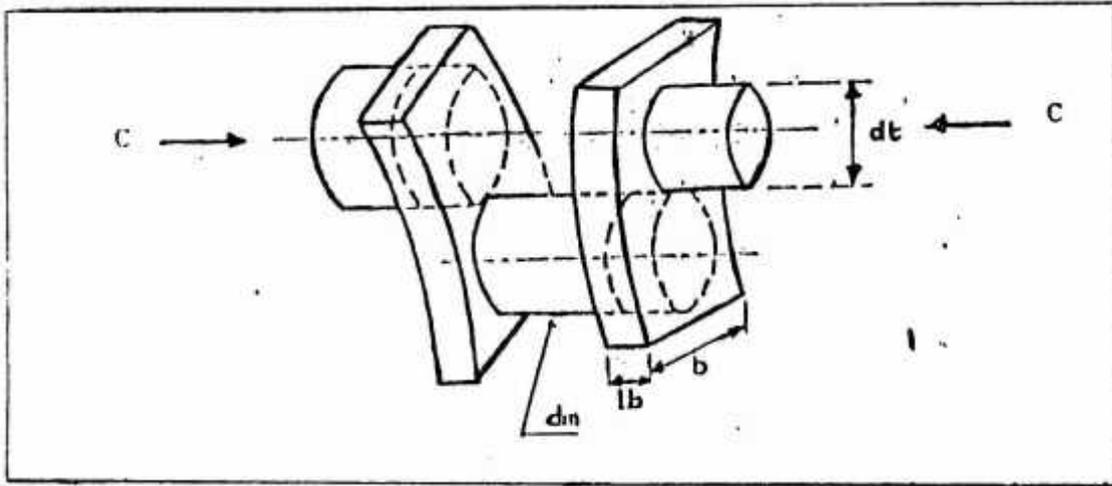


FIG - 3-2 -Coude de vilebrequin soumis à 2 couples C.

$$J_t = \frac{\pi}{3} (d_t^4 - d_{ti}^4) , \quad J_m = \frac{\pi}{3} (d_m^4 - d_{mi}^4) , \quad J_b = \frac{b^3 \cdot L_b}{R}$$

dim: diamètres des alésages dans les tourillons et les manetons s'ils existent.

d_t, d_m : diamètres respectifs des manetons et tourillons

L_b; b : dimensions de la section du bras.

D'ou:

$$\frac{1}{k} = \frac{3 \cdot L_t}{\pi(d_t^4 - d_{ti}^4)G} + \frac{3 \cdot L_m}{\pi(d_m^4 - d_{mi}^4)G} + \frac{2}{Eb^3 \cdot L_b}$$

2.2. Longueur équivalente d'un coude:

Selon la formule classique de la **R.D.M**, réduisant le coude de vilebrequin à une suite de poutre, la longueur équivalente **L_{eq}** de l'arbre du diamètre équivalent en

Torsion **D_{eq}** est égale:

$$L_{eq} = \frac{G D_e^4}{3} \cdot \frac{1}{k}$$

$$\text{Soit : } L_{eq} = D_e^4 \left[\frac{L_t}{d_t^4 - d_{ti}^4} + \frac{L_m}{d_m^4 - d_{mi}^4} + \frac{GR}{Eb^3 \cdot L_b} \cdot 2.3 \right]$$

Un coude est un système complexe et seule la prise en compte des formes réelles permet de déterminer avec précision la longueur équivalente. Pour cela, plusieurs semi-expérimentales ont été proposées pour la détermination de cette dernière, en prenant comme diamètre de l'arbre équivalent au coude, le diamètre du tourillon de vilebrequin.

- Formule de CARTER :

$$L_{eq} = D_e^4 \cdot \left[\frac{L_t + 0.8.L_b}{d_t^4 - d_{ti}^4} + \frac{3.L_m}{4.d_m^4 - d_{ti}^4} + \frac{3.R}{2.Eb^3.L_b} \right]$$

- Formule de KER-WILSON:

$$L_{eq} = D_e^4 \cdot \left[\frac{L_t + 0.4.d_t}{d_t^4 - d_{ti}^4} + \frac{L_m + 0.4.d_m}{d_m^4 - d_{ti}^4} + \frac{R - 0.2(d_t + d_m)}{b^3.L_b} \right]$$

Formule de TIMOSHENKO:

$$L_{eq} = D_e^4 \cdot \left[\frac{L_t + 0.9L_b}{d_t^4 - d_{ti}^4} + \frac{L_m + 0.9L_b}{d_m^4 - d_{ti}^4} + \frac{0.3.R}{L_b.b^3} \right]$$

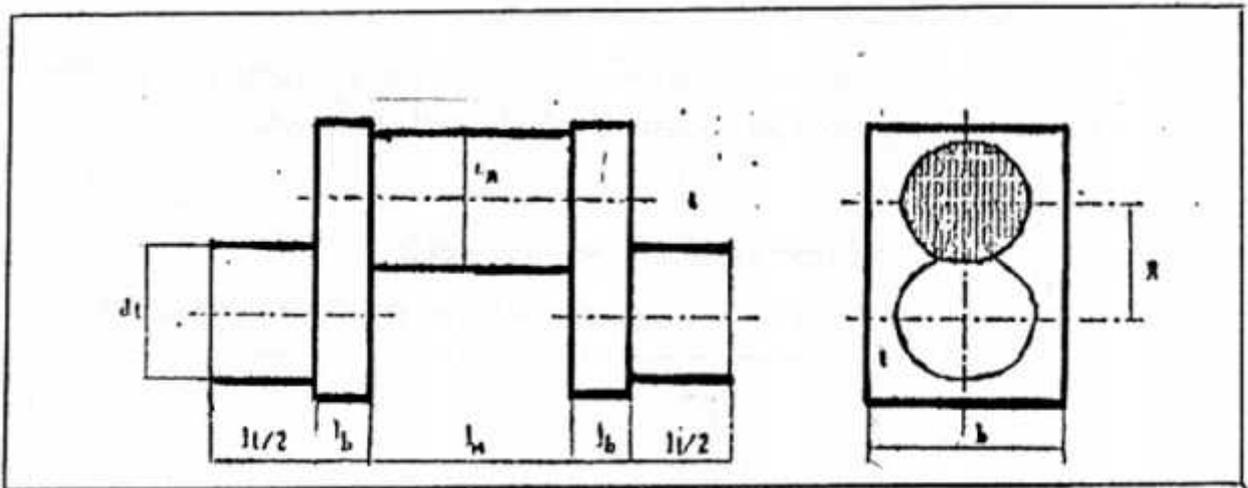


FIG -3-3- Dimension d'un coude de vilebrequin

2.3. Moment D'inertie D'un Coude:

Le moment d'inertie I_C d'un coude de vilebrequin est donnée par:

$$I_C = I_m + 2I_t + 2I_b$$

I_m : Moment d'inertie du maneton par rapport à l'axe du vilebrequin.

$$I_m = (\rho L_m / 4) \left[\frac{d_m^4}{8} + R^2 \cdot d_m^2 \right]$$

en (Kg/m³) : masse volumique du matériau.

I_t : Moment d'inertie d'un demi - tourillon par rapport à l'axe du vilebrequin

I_b : Moment d'inertie d'un bras par rapport à l'axe du vilebrequin.

On effectue un découpage du bras et de son contre poids en éléments simples; puis pour

chaque élément, parés avoir calculé son inertie, par rapport à un axe Passant par son centre de gravité, et parallèle à l'axe du vilebrequin, en appliquant le théorème de **HUYGHENS**.

La somme de ces inerties élémentaires est égale à l'inertie du bras par rapport à l'axe du vilebrequin.

a)-Modèle a un disque:

Le modèle à un disque est constitué par un arbre sans masse de diamètre D_{eq} et de longueur L_{eq} portant un disque d'épaisseur nul et d'inertie le

$$I_C = I_t + I_m + I_{b1} + I_{b2}$$

Avec : I_{b1} et I_{b2} : moment d'inertie des bras 1 et 2

L_{eq1} et L_{eq2} : sont les longueurs équivalentes des deux demi-coudes.

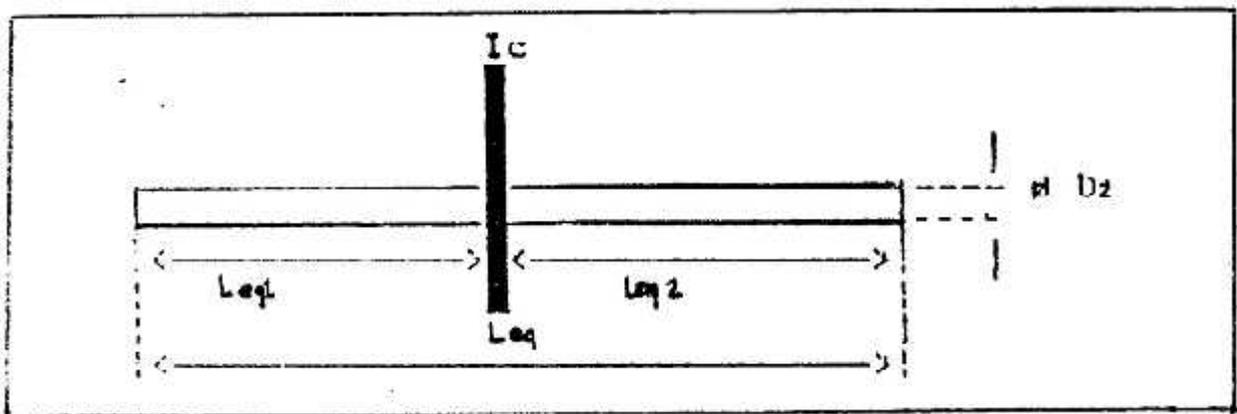


FIG-3-4 modèle a un disque

3. Moment d'inertie Equivalent de L'équipage Mobile:

Pour tenir compte de l'effet de l'attelage mobile sur le système élastique (vilebrequin), nous allons calculer une masse équivalente constante liée au maneton du coude.

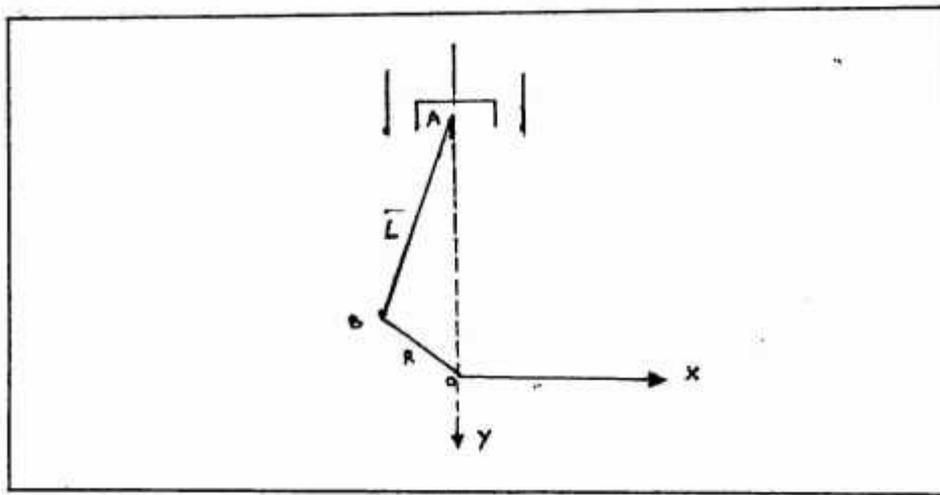


FIG-3-5- SYSTEME DE BIELLE-MANIVELLE

a)- Masse équivalente du piston et de son axe:

L'énergie cinétique du piston à tout instant au cours de son déplacement, doit être égale à l'énergie cinétique de la masse équivalente attachée au mouvement du maneton. La fonction de force due à la pesanteur est identique dans les deux cas :

$$E_C = \frac{1}{2} M_P [\overline{V(A)}]^2$$

Avec: M_P (Kg) - masse du piston et de son axe

$\overline{V(A)}$ - vecteur vitesse du point A par rapport au repère fixe

L'énergie cinétique de la masse équivalente attachée au maneton est:

$$E_C = \frac{1}{2} M_E (\alpha). R^2 . W^2$$

Avec: $M_{eq}(\alpha)$ (Kg) - masse équivalente du piston, fonction de l'angle de Rotation (rd) de la manivelle.

R - rayon de la manivelle.

$w = d / dt$ (rd/s) - vitesse de rotation constante de la manivelle

D'ou:

$$M_{eq}(\alpha) = \frac{M_P [\overline{V(A)}]^2}{R^2 . w^2}$$

La masse équivalente moyenne cherchée sera obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction $M_{eq}(\alpha)$ pour α variant de 0 à $1t$.

$$M_e = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_e(\alpha) \cdot d\alpha$$

b)- Masse équivalente de la bielle:

On posant:

M_b (Kg) - masse de la bielle

(α) - angle de rotation de la manivelle.

$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ (rd/s) - vitesse de rotation constante de la manivelle.

$\vec{\Omega}_b$ - vecteur rotation de la bielle par rapport au Repère fixe

$\overline{I(b/G)}$ -Tenseur d'inertie de la bielle par rapport à Repère lie à la bielle et d'origine

$\overline{V(G)}$ -vecteur vitesse de G par rapport au repère fixe

L'énergie cinétique de la bielle est :

$$E_C = \frac{1}{2} M_b \cdot [\overline{V(G)}]^2 + \frac{1}{2} \overline{\Omega}_b \cdot \overline{I(b/G)} \cdot \overline{\Omega}_b$$

L'énergie cinétique de la masse équivalente ponctuelle M_{eb} attachée au maneton est:

$$E_C = \frac{1}{2} M_e(\alpha) \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

La masse équivalente de la bielle, en fonction de α est donnée par l'expression.

$$M_e(\alpha) = \frac{M_b \cdot [\overline{V(G)}]^2 + \overline{\Omega}_b \cdot \overline{I(b/G)} \cdot \overline{\Omega}_b}{R^2 \cdot \omega^2} \cdot d\alpha$$

La masse équivalente cherchée sera obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction $M_e(\alpha)$ pour α variant de 0 à π .

$$M_e = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{M_b \cdot [\overline{V(G)}]^2 + \overline{\Omega}_b \cdot \overline{I(b/G)} \cdot \overline{\Omega}_b}{R^2 \cdot \omega^2} d\alpha$$

c)- Moment d'inertie équivalent:

$$I_{eq} = (M_{cp} + M_{cb})R^2$$

Avec :

- I_{eq} : moment d'inertie équivalent (N.m. s²)
- M_{cp} : masse équivalente du piston (kg)
- M_{cb} : masse équivalente de la bielle (kg)
- R : rayon de la manivelle (m)

d). Modèle D'un Coude et des Pièces Mobiles Associées:

Modèle à un disque: Le modèle est identique à celui que nous avons défini au paragraphe (4.1.1.3, a). Dans ce cas, le disque a pour moment d'inertie

$$I = I_C + I_{eq}$$

I_C - Moment d'inertie du coude (N.m.s²)

I_{eq} - Moment d'inertie équivalent de l'équipage mobile.

4. MODELISATION DES ARBRES NON COUDES :

(Mise en évidence des vibrations de torsion)

4.1. Arbre a une section constante portant un disque:

Un arbre vertical AB dont l'extrémité B est fixé perpendiculairement au centre d'un disque (FIG:3-6) peut également servir d'exemple d'un système à un degré de liberté,

Les vibrations de torsion se produisent dans l'arbre AB quand le disque tourne autour de l'axe AB

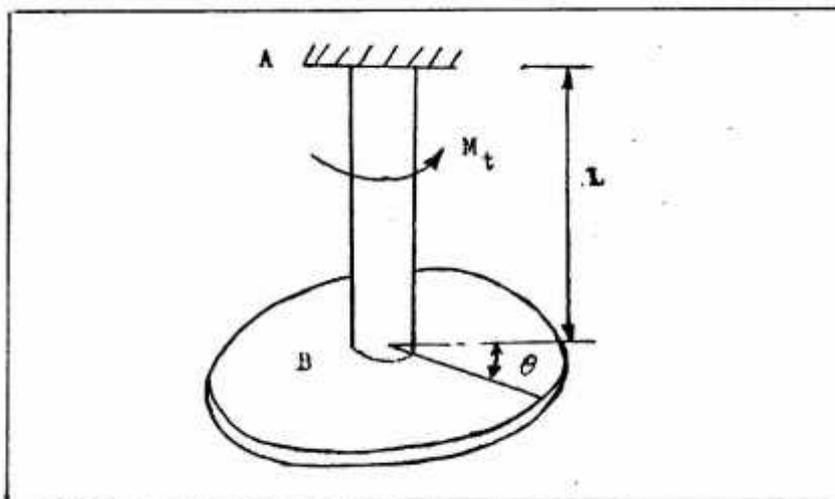


FIG : 3-6

Le moment de torsion engendré dans l'arbre sera:

$$M_t = -k \cdot \theta \dots \dots \dots (4-1)$$

Où, K - la rigidité de torsion de l'arbre

Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation

$$M_i = I \cdot \theta'' \dots \dots \dots (4-2)$$

De l'équation (4-1) et (4-2), on peut établir l'équation du mouvement vibratoire en torsion de ce système:

$$\theta'' + \omega^2 \cdot \theta = 0 \dots \dots \dots (4-3)$$

- La fréquence propre de vibration libre en torsion de l'arbre et disque

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \dots \dots \dots (4-4)$$

I - moment d'inertie du disque

On peut trouver la solution générale de l'équation (4-3) sous la forme:

$$\theta = \phi \cdot \cos(\omega t - \alpha) \dots \dots \dots (4-5)$$

- Amplitude angulaire de la vibration de torsion déterminée par les conditions initiales.

Pour éviter les phénomènes de résonance, il faut calculer les fréquences propres du système.

Si l'arbre examiné comme un système continu en comprenant sa masse, dans

Ce cas le système possède infiniment (1, 2, 3,..... n)

Si nous considérons l'arbre comme un système sans tenir compte de sa masse, le système n'a qu'une fréquence propre de torsion ω calculée d'après la formule (4-4)

Pour calculer ω , il faut connaître les paramètres suivants:

$$K = \frac{G J_p}{L} \dots \dots \dots (4-6)$$

J_p - Moment d'inertie polaire de la section de l'arbre.

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad (\text{Moment d'inertie du disque})$$

Enfin, on peut déterminer la fréquence sous la forme :

$$= d^2 \cdot \sqrt{\frac{G \Pi}{3 L}} \dots \dots \dots (4 - 7)$$

Avec: **G**- Module de cisaillement

L- Longueur de l'arbre

d- Diamètre de l'arbre.

4.2. Arbre a une section variable portant un disque:

En réalité, dans la pratique toujours on rencontre l'arbre constitué sous la forme variable (fig.:3-7)

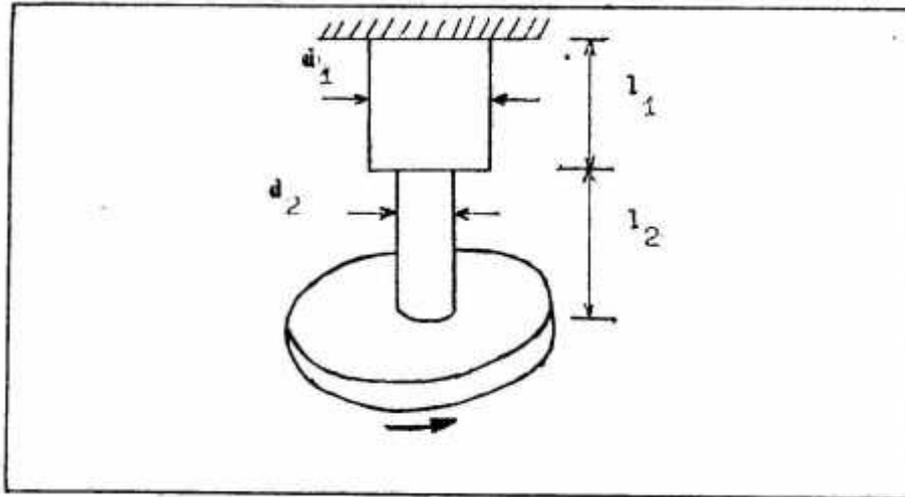


FIG -3-7

Dans ce cas, l'angle de torsion de ce système peut être déterminé

$$= \frac{M_t l_1}{G J_1} + \frac{M_t l_2}{G J_2} \dots \dots \dots (4 - 8)$$

J_1, J_2 - Sont les moments d'inertie des sections de l'arbre de diamètres Respectivement.

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} \quad , \quad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} \dots \dots \dots (4 - 9)$$

De (4-8) et (4-9), on peut former:

$$= \frac{3 \cdot M_t \cdot L_e}{\pi d_1^4} \dots \dots \dots (4 - 10)$$

Où, L_{eq} - est la longueur équivalente de l'arbre de deux tronçons de diamètre d_1 et d_2 :

$$L_e = L_1 = \frac{l_2 \cdot d_1^4}{d_2^4} \dots \dots \dots (4 - 11)$$

Nous constatons qu'on peut transformer un arbre composé de deux tronçons différents du diamètre à un arbre de diamètre d , et de longueur L_{eq}

La rigidité de torsion de l'arbre équivalente est déterminée:

$$k_e = \frac{\pi d_1^4}{3 L_e} \dots\dots\dots (4 - 1)$$

Dans ce cas la fréquence propre du système (arbre + disque) calculée selon la formule:

$$\omega^2 = \frac{k_e}{I} = \frac{\pi d_1^4}{3 I L_e}$$

$$= d_1^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi G}{3 I L_e}} \dots\dots\dots (4 - 13)$$

En général, si l'arbre est composé de n tronçons de longueurs l_1, l_2, \dots, l_n et de diamètres correspondants d_1, d_2, \dots, d_n dans ce cas on peut établir la longueur équivalente de ce système sous la forme:

$$L_e = I_1 = \frac{d_{1,2}^4}{d_2^4} + \frac{d_{1,3}^4}{d_3^4} + \dots + \frac{d_{1,n}^4}{d_n^4} \dots\dots (4 - 1)$$

De ce la, on peut facilement calculer la fréquence propre du système compliqué. (FIG-3-8)

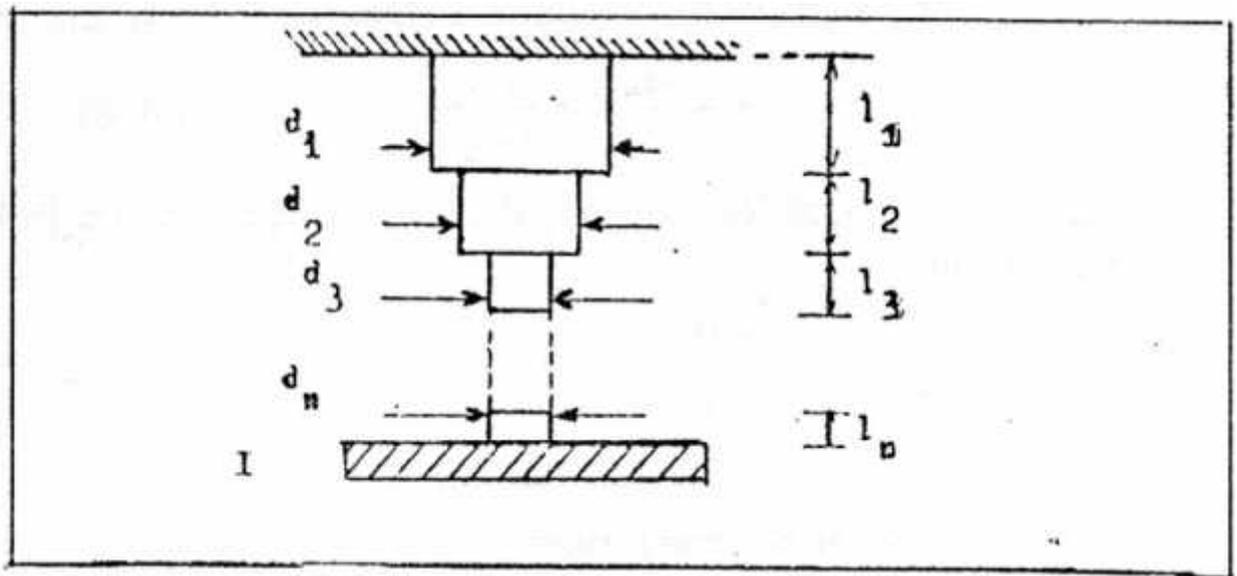


FIG- 3-8

4.3. Arbre a une section constante portant deux disques:

Première Méthode :

Considérons un arbre portant deux disques (FIG-3-9), si l'on applique sur ces disques deux couples de torsion opposés et qu'on les supprimés brusquement.

L'arbre sera soumis à des vibrations de torsion pendant les quelles les disques tournent toujours en sens contraire (système à deux degrés de liberté)

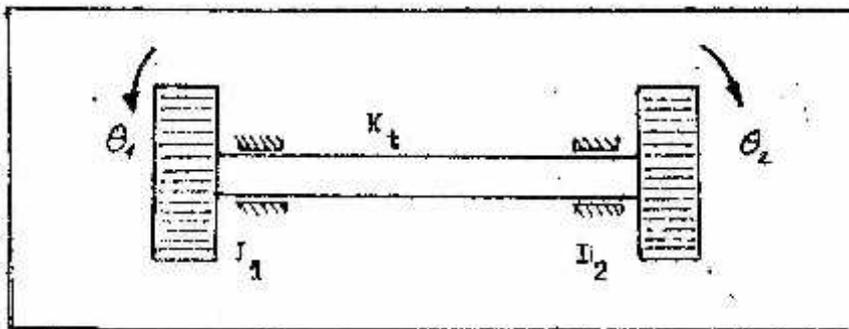


FIG-3-9

En désignant: K - la rigidité torsionnelle de l'arbre.

I_1, I_2 - moments d'inerties de deux disques.

θ_1, θ_2 - La position angulaire de chaque disque par Rapport à leurs positions de repos.

Supposons que le matériau composant le dernier, suit la loi de " HOOKE".

$$\text{Nous avons: } M_t = -K(\theta_1 - \theta_2) \dots \dots \dots (4 - 1)$$

Avec: M_t - couple de torsion de l'arbre

- angle de torsion de l'arbre

Négligeons l'inertie propre de l'arbre, appliquons la loi fondamentale de la dynamique, nous permet d'écrire l'équation du mouvement de la vibration libre de torsion:

$$1) I_1 \cdot \theta_1'' + K(\theta_1 - \theta_2) \dots \dots \dots (4 - 1)$$

$$2) I_2 \cdot \theta_2'' + K(\theta_2 - \theta_1) \dots \dots \dots (4 - 1)$$

θ_i'' - étant l'accélération angulaire du disque.

$\theta'' = \theta_1'' - \theta_2''$ -L'accélération angulaire de déformation de l'arbre.

Par différence des équations (4-16) et (4-17) nous obtenons l'équation différentielle homogène du second ordre en ()

$$I_1 \cdot \theta_1'' - I_2 \cdot \theta_2'' = -2$$

$$I_1 \cdot (\theta_1' + \theta_2') - I_2 \cdot \theta_2'' = 2 \cdot \theta$$

$$I_1 \cdot \theta_1'' + (I_1 + I_2) \cdot \theta_2'' = -2 \quad \theta_1'' + \theta_2'' \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1} \right) = \frac{-2}{I_1} \cdot \theta$$

$$\theta_1'' + \frac{K}{I_2} \cdot \theta \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1} \right) = \frac{-2}{I_1} \theta$$

$$\theta_1'' + K \cdot \left[\frac{I_1 + I_2}{I_1 \cdot I_2} + \frac{2}{I_1} \right] = 0$$

$$\theta_1'' + K \cdot \left[\frac{I_1 + I_2 + 2I_2}{I_1 \cdot I_2} \right] = 0$$

$$\theta_1'' + \left[\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2} \right] \cdot \theta = 0$$

En posant: $k \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 \cdot I_2} \right) = \omega^2$

D'où, $\omega = \sqrt{k \cdot \frac{(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}}$ pulsation propre du système

De l'équation (4-16) et (4-17), on peut transformer sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[M] \cdot [\ddot{\theta}] + [K] \cdot [\theta] = [0]$$

Où, $[M]$ -matrice des inerties du système.

$[K]$ -matrice des rigidités

Supposons que la vibration en torsion du système est libre et harmonique, c'est pourquoi la solution peut être formée sous la forme matricielle suivante

$$[\theta] = [A] \cdot \sin \omega t \dots \dots \dots (4 - 20)$$

$[A]$ - La matrice d'amplitude de l'angle de deux disques.

La période des oscillations du système est : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Et la fréquence des oscillations par seconde sera: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2}$

Deuxième Méthode:

Si le système subit une vibration en torsion, il existe sur le long de l'arbre une section intermédiaire (nn) qui reste fixe pendant la vibration en torsion. Cette section est appelé section neutre ou section nodale.

IL s'agit de déterminer sa position, c'est à dire calcul a et b.

Maintenant considérons le système de deux disques, un disque avec la longueur a et l'autre disque avec la longueur b la période de deux systèmes est identique (FIG:3-10)

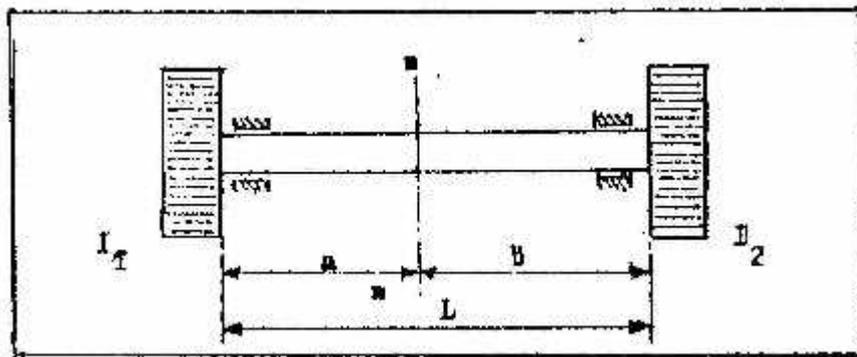


FIG-3-10

On a : $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{K_1}}$, $T_2 = 2 \sqrt{\frac{I_2}{K_2}}$

Puisque : $T_1 = T_2$, on peut tirer:

$$\frac{T_1}{K_1} = \frac{I_2}{K_2} \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

Nous calculons enfin: $K_1 = \frac{\pi d^4 G}{3 \cdot a}$, $k_2 = \frac{\pi d^4 \cdot G}{3 \cdot b}$

La fréquence propre du système déterminée soit avec a, soit avec b:

$$f = \sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = d^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi G}{3 \cdot I_1 \cdot a}}$$

Soit :
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{I_2}} d^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi G}{3 \cdot I_2 \cdot B}}$$

5. MODELISATION DES ACCOUPLEMENTS ELASTIQUES:

Quand les nœuds de vibrations se situent à leur niveau, les accouplements ont une grande souplesse en torsion de là, il faut donner une grande importance à leur Modélisation (FIG:3-11).

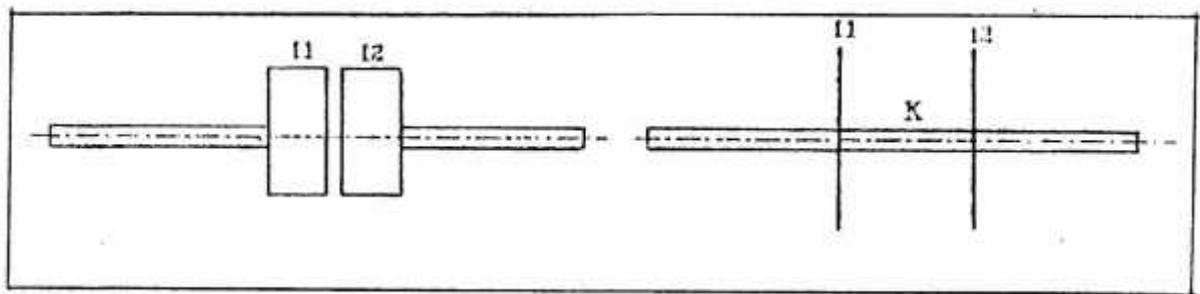


FIG-3-11-Modélisation d'un accouplement

K - Rigidité torsionnelle

I₁ et I₂ - Moments d'inertie des deux parties de l'accouplement

Remarque: on peut négliger I₁ et I₂ car ils sont très faibles

6. MODELISATION DES REDUCTEURS:

C'est un ensemble de roues dentées s'engrenant mutuellement. (Pignons, trains D'engrenages)

On a :

$$T = I_1 \cdot \frac{I_1}{I_1} + I_2 \cdot \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_1}{I_1} = \frac{I_1}{I_1} \left(I_1 + \left(\frac{\omega_2'}{\omega_1'} \right)^2 \cdot I_2 \right)$$

Soit : $T = \frac{I_1}{I_1} \cdot I$ avec : $I = I_1 + \left(\frac{\omega_2'}{\omega_1'} \right)^2 \cdot I_2$

T - énergie cinétique du système équivalent

I - moment d'inertie du système équivalent

i = ω₂' / ω₁' - rapport de réduction du couple

ω₁' e ω₂' - vitesse angulaire de chaque roue.

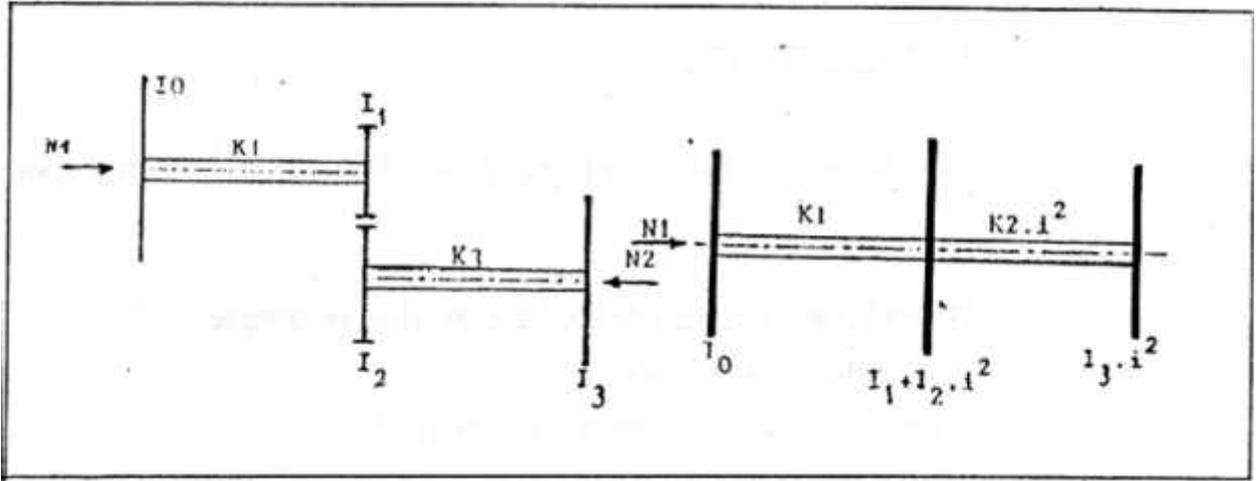


FIG-3-12-MODELISATION D'UN REDUCTEUR

Introduction :

Un mode de vibration est un état privilège de vibration d'une structure où les forces de déformation élastique sont compensées exactement par les forces d'inertie créées le mouvement des masses.

Les efforts excitateurs ne sont alors équilibrés que par les forces d'amortissement engendrées par la vitesse des mouvements vibratoires de la structure: on dit que cette structure vibre à l'état de résonance.

Un mode vibratoire d'une machine est caractérisé par:

- Une fréquence de résonance (ou fréquence propre)
- Un déformée vibratoire modale (ou amplitude relative)
- Un Coefficient d'amortissement.

Les deux premières caractéristiques (fréquence propre et déformée) sont indispensables à connaître pour la résolution qualitative d'un problème de vibration de torsion.

La complexité de forme de la déformée modale (nombre de nœuds) augmente avec le rang du mode vibratoire.

1. HYPOTHESES :

- Le système obéit à la loi de HOOKE (les déformations sont proportionnelles aux Efforts)
- Seules les déformations de torsion sont prises en compte
- Le système est conservatif
- L'axe de rotation est un axe de différentiel fixe.
- Les centres de gravité des disques appartiennent à l'axe De rotation.

2. Équation du mouvement du disque:

Considérons (FIG-4-1) le modèle constitué par une ligne d'arbre comportant n volant de moment d'inertie I_1, I_2, \dots, I_n où sont supposées concentrées toutes les masses, et reliés entre eux par $(n-1)$ portions d'arbre, OU sont concentrées les élasticités, et présentant des rigidités torsionnelle K_1, K_2, \dots, K_{n-1} soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ les angles de rotation des disques au cours de la vibration.

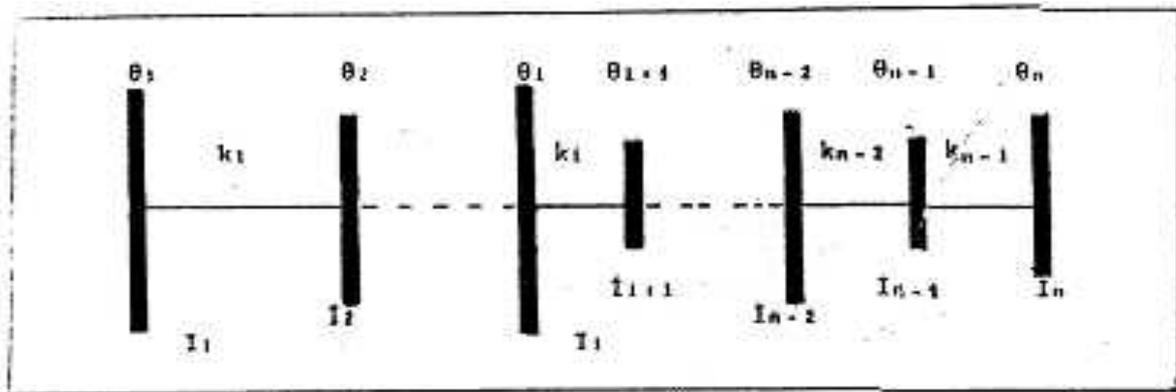


FIG -4-1 –Notation des modèles

La mise en équations est faite à partir de la FIG (4-1)

$$\text{Energie cinétique : } 2E_C = \sum_{i=1}^{i=n} I_i \cdot \theta_i^2$$

Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k_1 (\theta_1 - \theta_2)^2 + \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{k_i}{2} (\theta_i - \theta_{i+1})^2 + \frac{K_{n-1}}{2} (\theta_{n-1} - \theta_n)^2$$

D'où l'équation de LAGRANGE: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} = \frac{\partial U}{\partial \theta_i}$

On peut donc déduire le système différentiel du second ordre a coefficients constants

$$\mathbf{I}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}'_1 + \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\theta}'_i - \mathbf{K}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\theta}_{i-1} + (\mathbf{k}_{i-1} + \mathbf{K}_i) \boldsymbol{\theta}_i - \mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\theta}_{i+1} = \mathbf{0} \quad \dots \dots (4 - 2)$$

$$\mathbf{i} \in [2, \mathbf{n} - 1]$$

$$[\mathbf{M}][\boldsymbol{\theta}'] + [\mathbf{K}][\boldsymbol{\theta}] \dots \dots \dots (4 - 2) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{I}_n \cdot \boldsymbol{\theta}'_n - \mathbf{k}_{n-1} \cdot \boldsymbol{\theta}_{n-1} + \mathbf{K}_{n-1} \cdot \boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{0}$$

Avec : $\boldsymbol{\theta}'_i = \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_i}{dt^2}$

Le système différentiel ci dessus peut se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$[\mathbf{M}][\boldsymbol{\theta}''] + [\mathbf{K}][\boldsymbol{\theta}] = \mathbf{0} \quad \dots(4-22)$$

Avec : $[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$ -matrice carrée des inerties

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 & & & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 & -\mathbf{K}_2 & & \\ & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 & -\mathbf{K}_3 & \\ \hline \mathbf{0} & & & -\mathbf{K}_{n-1} & \mathbf{K}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{K}]$ – matrice carrée des rigidités

Et $[\boldsymbol{\theta}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_n \end{pmatrix} ; [\boldsymbol{\theta}''] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}'_1 \\ \boldsymbol{\theta}'_n \end{pmatrix}$

Le déplacement étant proportionnel aux efforts, la solution de cette équation matricielle est de la forme:

$$[\theta_i] = [A_i] \sin(\omega t + \phi) \quad \dots\dots (4-23)$$

Avec: $[A_i] = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_n \end{pmatrix} \quad (i=1, \dots, n)$

Donc, en reportant la solution (4-23) dans l'équation matricielle, nous obtenons:

$$-[M][A_i]\omega^2 + [K][A_i] = \mathbf{0}$$

$$\left[-[M]\omega^2 + [K]\right][A_i] = \mathbf{0}$$

Ou encore: $\left[-[M]^{-1} \cdot [M] \cdot \omega^2 + [M]^{-1} \cdot [K]\right][A_i] = \mathbf{0}$

C'est un système à un n équations linéaires et homogènes en A_1, A_2, \dots, A_n qui n'est résoluble (c'est à dire que le système ait une solution en A_i non nulle) ; d'après la théorie des équations linéaires que si son déterminant est nul.

Si l'on désigne par [1] la matrice unité, les valeurs de ω^2 sont données par:

$$-\omega^2[1] + [M]^{-1}[K] = 0$$

Où encore, les valeurs de ω^2 cherchées sont les valeurs propres de la matrice:

(En posant ($\lambda = C$))

$$[C] = [M]^{-1} \cdot [K]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{I_1} & -\frac{K_1}{I_1} & & & 0 \\ -\frac{K_1}{I_2} & \frac{K_1 + K_2}{I_2} & -\frac{K_2}{I_2} & & \\ \hline 0 & & & -\frac{K_{n-1}}{I_n} & \frac{K_{n-1}}{I_n} \end{bmatrix}$$

3. METHODE DE RESOLUTION DU SYSTEME:

Il existe plusieurs méthodes de résolution parmi ces méthodes on a la méthode Directe de résolution du système:

- Méthode de **ULRICH – GIRAUDEAU**
- Méthode de **HOLZER**
- Méthode de **RUTISHAUSER**

Nous avons choisi parmi toutes ces méthodes, la méthode de **RUTISHAUSER** car elle présente l'avantage d'être précise et rapidement convergence, lorsque les valeurs propres sont éloignées.

De plus la convergence peut être accélérée par une méthode de déflation.

3.1. ALGORITHME DE RUTISHAUSER:

a)- Propriétés des matrices tri diagonales: soit $[C]$ une matrice tri diagonale

$$\begin{bmatrix} c_1 & b_1 & & & 0 \\ a_1 & c_2 & b_2 & & \\ - & a_2 & c_3 & b_3 & \\ \hline 0 & & & a_{n-1} & c_n \end{bmatrix}$$

Et () le déterminant caractéristique de cette matrice

Si d_i est le facteur de l'élément situé sur la ligne j la colonne; nous obtenons la formule de récurrence:

$$\Delta(\lambda) = (c_n - \lambda)d_{n,n} - a_{n-1}b_{n-1}.d_{n-1,n}$$

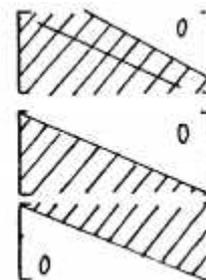
$$\Delta(\lambda) \begin{bmatrix} c_1 - \lambda & b_2 & & & 0 \\ a_1 & c_2 - \lambda & b_2 & & \\ \hline & & a_{n-2} & c_{n-1} - \lambda & b_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & c_n - \lambda \end{bmatrix}$$

Les termes symétriques par rapport à la diagonale n'interviennent que par leur produit. On peut donc les modifier à condition que leur produit reste constant. La matrice $[C \cdot]$ définie ci après a donc les mêmes valeurs propres que $[C]$ mais par les mêmes vecteurs propres:

$$[C^\circ] = \begin{bmatrix} c_1 & a_1 b_1 & & & 0 \\ 1 & c_2 & a_2 b_2 & & \\ \hline & & 1 & c_{n-1} & a_{n-1} \cdot b_{n-1} \\ 0 & & & 1 & c_n \end{bmatrix}$$

b)- Algorithme: Il s'applique plus particulièrement aux matrices quasi-triangulaires.

soit $[C \cdot]$ – une matrice quasi-triangulaire :
 $[R]$ – une matrice triangulaire inférieure :
 $[S]$ – une matrice triangulaire supérieure :



GAUSS a démontré que l'on pouvait décomposer une matrice quasi-triangulaire en un produit $[R] \times [S]$ d'une façon unique.

Si l'une des matrices $[R]$ ou $[S]$ possède des (1) sur sa diagonale principale sous cette condition, on peut donc construire la suite matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ \hline [C_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_1] \\ [S_1] \\ \hline [S_n] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [S_1] \\ [R_1] \\ \hline [R_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_2] \\ \hline [R_{n+1}] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [S_2] \\ \hline [S_{n+1}] \end{bmatrix}$$

Les propriétés des éléments de cette suite sont:

- $[C_{i+1}][C_i]$ ont les mêmes valeurs propres
- $[c_1][c_2] \dots [c_{i+1}]$ sont des matrices quasi-triangulaires
- Lorsque n tend vers l'infini, $[c_n]$ tend vers une matrice triangulaire inférieure.

Les valeurs propres apparaissent donc sur la diagonale principale dans l'ordre décroissant à partir du haut.

3.2. APPLICATION DE L'ALGORITHME DE RUTISHAUSER:

a)- Détermination des matrices [R], [S]:

$$\text{on a : } \begin{bmatrix} C_1^* & \alpha_2^* & & 0 \\ 1 & C_2^* & \alpha_3^* & \\ & & 1 & C_{n-1}^* & \alpha_n^* \\ 0 & & & 1 & C_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & & & 0 \\ 1 & b_2 & & \\ & & \cdot & 1 & b_{n-1} \\ 0 & & & 1 & b_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 & & 0 \\ & 1 & \beta_3 & \\ & & & 1 & \beta_n \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C^*] = [R] \times [S]$$

Nous obtenons les relations:

$$\begin{array}{l} C_1^* = b_1 \\ C_2^* = \beta_2 + b_2 \\ C_n^* = \beta_n + b_n \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_2^* = b_1 \cdot \beta_2 \\ \alpha_3^* = b_2 \cdot \beta_3 \\ \alpha_n^* = b_{n-1} \cdot \beta_n \end{array}$$

Les éléments β_{i+1} sont obtenus à partir des éléments C_{i+1}^* de la matrice [C] par les relations suivantes:

$$\begin{array}{l} b_1 = C_1^* \rightarrow \beta_2 = \frac{\alpha_2^*}{b_1} \\ b_2 = C_2^* - \beta_2 \rightarrow \beta_3 = \frac{\alpha_3^*}{b_2} \\ b_i = C_i^* - \beta_i \rightarrow \beta_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1}^*}{b_i} \\ b_n = C_n^* - \beta_n \end{array}$$

b)- Calcul des éléments de la matrice [c]=[S] x [R]

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 & & 0 \\ & 1 & \beta_3 & \\ & & & 1 & \beta_n \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & & & 0 \\ 1 & b_2 & & \\ & & 1 & b_{n-1} \\ 0 & & & 1 & b_n \end{bmatrix}$$

Les éléments $c_{i,j}$ de la matrice sont donnés par les relations:

$$c_{i,1} = b_i + \beta_{i-1} \quad i \in [1, n-1]$$

$$c_{n,1} = b_n \quad i \in [1, n-1]$$

$$c_{i,1,i} = 1 \quad i \in [1, n - 1]$$

$$c_{i,i+1} = \beta_{i+1} \cdot b_i$$

$$C_{i,j} = 0 \begin{cases} \text{si } i > j + 2 \\ \text{si } j > i + 2 \end{cases}$$

La matrice [C] obtenue est un tri diagonale possédant des (1) sous la diagonale principale comme la matrice [C°]

$$\begin{bmatrix} C_1^\circ & \alpha_2^\circ & & & 0 \\ 1 & C_2^\circ & \alpha_3^\circ & & \\ \hline & & 1 & C_{n-1}^\circ & \alpha_n^\circ \\ 0 & & & 1 & C_n^\circ \end{bmatrix}$$

c)- Relation entre les éléments de [C] ET [C°]:

Elles sont obtenues à partir des relations précédentes que nous résumons:

$$C_1 = C_1^\circ \quad C_i = \beta_{i+1} + b_i$$

$$b_i = C_1^\circ \cdot \beta_i \quad \text{et } \alpha_{i+1} = \beta_{i+1} \cdot b_{i+1}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1}}{b_i}$$

3.3. TEST DE CONVERGENCE QUADRATIQUE:

a)- Rapidité de la convergence:

- La convergence est d'autant plus rapide que la différence entre les valeurs propres est grande. Pour les racines rapprochées, la convergence est médiocre.
- La méthode de **RUTISHAUSER** accélérée à convergence quadratique permet d'obtenir, dans ce cas et pour les matrices tri diagonales, des temps de calcul très faibles avec une précision remarquable.

- Lorsqu'on connaît une valeur propre; il est possible de se ramener à une matrice d'ordre $(n-1)$ qui contient les autres racines, le calcul est fait en même temps que la déflation (diminution de la taille de la matrice) tout en conservant la forme tri diagonale.

b)- Algorithme de la méthode de RUTHISHAUSER accélères:

La convergence quadratique est obtenue comme suit:

- Après chaque itération, on retranche la valeur C_n (l'itération précédente) à tous les termes diagonaux C_{ij}

- Lorsque C_n est nul, ou encore lorsque a_n est nul, la valeur propre VP_n est la somme des C_n retranchés, le test d'arrêt portera sur la valeur de α_n .

- On recommence le processus en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice $[C]$, et en ajoutant VP_n à tous les termes diagonaux de la matrice d'ordre $(n-1)$ on obtient la valeur propre VP_{n-1}

- Le calcul s'arrête lorsque la valeur propre VP_2 est calculée, VP_1 est alors égale à C_1

Les valeurs propres ne sont pas obtenues par ordre croissant, elles apparaissent dans un ordre quelconque

3.4. DEFORMEES MODALES:

Les valeurs propres de la matrice aux pulsations étant connues. IL est possible de déterminer les vecteurs propres correspondants, ces derniers caractérisent les déformées modales (ou les amplitudes relatives des disques) des divers modes de vibration.

La matrice $[C]$ à utiliser, pour le calcul des composantes des vecteurs propres, est celle défini par le produit : $[M]^{-1}[K]$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{I_1} & -\frac{K_1}{I_1} & & & 0 \\ -\frac{K_1}{I_2} & \frac{K_1 + K_2}{I_2} & -\frac{K_2}{I_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & -\frac{K_{n-1}}{I_n} & \frac{K_{n-1}}{I_n} \end{bmatrix}$$

Les composantes des vecteurs propres étant définies à un coefficient près, il est donc nécessaire de fixer une composante, par exemple l'amplitude du disque n°1 sera prise égale 1 rad.

Les composantes des vecteurs propres sont obtenues à partir de l'équation:

$$([C] - \omega_i^2 [1])(X_i) = (0)$$

Avec: ω_i - Pulsation propre N°i, [1] matrice unité

(X_i) - Matrice colonne des composantes du vecteur propre associé à la Valeur propre ω_i^2

(0) - Matrice colonne composée d'éléments tous nuls Nous obtenons ainsi les n relations suivantes:

$$(1) \begin{bmatrix} \frac{K_1}{I_1} - \omega_i^2 \\ 1 \end{bmatrix} X_{i,1} - \frac{K_1}{I_1} X_{i,2} = 0$$

$$(j) \quad j \in [2, n-1] \quad -\frac{K_{j-1}}{I_j} X_{i,j-1} + \left(\frac{K_j + K_{j-1}}{I_j} - \omega_i^2 \right) X_{i,j} - \frac{K_j}{I_j} X_{i,j+1} = 0$$

$$(n) \quad -\frac{K_{n-1}}{I_n} X_{i,n-1} + \left[\frac{K_{n-1}}{I_n} - \omega_i^2 \right] X_{i,n} = 0$$

En posant: $X_{i,1} = r_i$, nous obtenons:

$$X_{i,2} = \frac{1}{K_1} (K_1 - I_1 \cdot \omega_i^2) \cdot r_i$$

$$X_{i,j+1} = \frac{1}{K_j} [(X_{i,j} - X_{i,j-1})K_{j-1} + (K_j - I_j \cdot \omega_i^2)X_{i,j}]$$

$$j \in [1, n - 1]$$

La relation (n) inutilisée est automatiquement vérifiée. Elle permet de contrôler la précision des calculs numériques.

4. VIBRATIONS DE TORSION SE EN COMPTE LA MASSE DE L'ARBRE) :

Pour illustrer ce cas, nous considérons le cas général de la torsion d'un élément de poutre.

En appliquant les théorèmes généraux de la dynamique, on obtient l'équation aux dérivées partielles qui régie ce mouvement. Cette étude va nous permettre de déterminer les matrices de transfert de notre système afin d'aboutir- à l'équation de fréquence recherchée.

Nous nous proposons donc, de donner les grandes lignes de cette méthode de calcul.

4.1. MOUVEMENT DE TORSION :

a)- Equation du mouvement:

Le mouvement de torsion d'une poutre est défini par les grandeurs suivantes:

M - Couple de torsion

θ - Angle de torsion

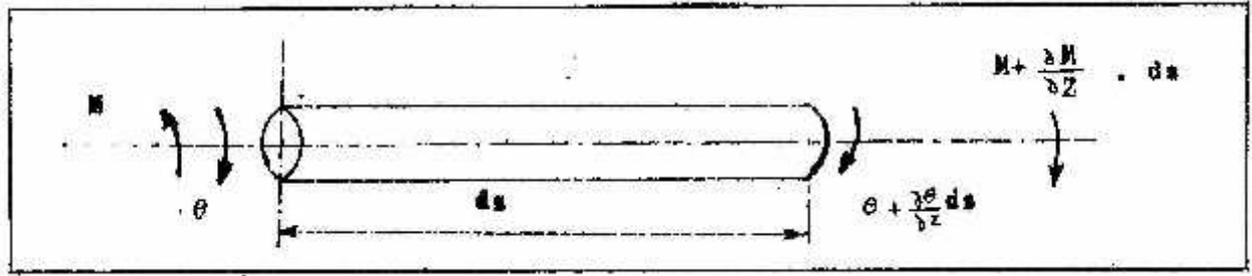
μ - Moment d'inertie de masse de l'inertie de l'arbre par rapport à l'axe Z par

Unité de longueur.

J - Moment d'inertie polaire

G - Module de **COULOMB** ou de cisaillement

Schématiquement, on représente un élément de poutre longueur **d_z** soumis à la torsion comme suit:



Si l'on suppose qu'aucun couple extérieur ne sollicite cet élément. L'application du théorème du moment cinétique:

$$\mu \cdot ds \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = M + \frac{M}{z} - M$$

Soit : $\mu \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial M}{\partial z}$ (4 - 2)

Par ailleurs, le couple **M** et l'angle **θ** sont liés par la relation:

$$M = G \cdot J \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}$$
 (4 - 2)

Cette dernière résulte de la formule de résistance des matériaux où le déplacement **θ** est donné par:

$$\theta = \int_0^L \frac{M \cdot dz}{G \cdot J} = \frac{M \cdot L}{G \cdot J}$$
 (4 - 2)

Avec: **M_{ZI}** - moment dû à un couple unitaire.

En reportant (4-28) dans (4-27) on obtient l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement de torsion qui s'écrit

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(G \cdot J \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$
 (4 - 3)

Dans le cas d'une section constante on a:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = G \cdot J \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$
 (4 - 3)

D'autre part, pour une poutre de section droite circulaire I et J sont liés par la relation:

$$\mu = J \cdot \xi$$
 (4 - 3)

Cette dernière est obtenue en supposant que dans le mouvement de torsion, les sections droites restent des sections droites.

L'équation du mouvement devient alors, pour une poutre de section circulaire:

Ou encore :
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{G}{\xi} \cdot \frac{d^2 \theta}{dz^2}$$

..... (4-33)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = a^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{dz^2}$$

Avec $a = \sqrt{\frac{G}{\xi}}$ - célérité de l'onde de torsion

Remarque: l'utilisation de la relation $\mu = J \cdot \xi$ Peut entraîner des erreurs importantes dans le cas d'Une section quelconque.

b)- Résolution mathématique de l'équation de torsion:

Pour résoudre l'équation (4-31) nous recherchons des solutions qui sont des produits de fonctions de la forme:

$$\theta(z, t) = \phi(z) \cdot f(t)$$

L'équation de torsion s'écrit alors:

$$\mu \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} \cdot \phi = G \cdot J \cdot f \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2}$$

La séparation de la fonction de la variable d'espace de celle de la variable du temps

Conduit à:

$$\frac{GJ}{\mu} \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} = - \frac{1}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} = c t^2$$

L'égalité entre ces deux fonctions est valable quelque soient Z et t ce qui entraîne que la valeur commune des deux termes soit une constante que l'on prendra négative afin que les solutions restent "bornées" dans le temps.

La constante est prise égale à $(-\omega^2)$; il s'ensuit que: $\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 \cdot f$

Et :
$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{\mu\omega^2}{GJ} \cdot \phi$$

On forme alors le système suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{f}' + \omega^2 \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \Phi' + \frac{\mu\omega^2}{GJ} \cdot \Phi = \mathbf{0} \end{cases}$$

Dont les solutions sont données par:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{A} \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{B} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Phi(z) = C \cdot \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\mu}{GJ}} \cdot z\right) + D \cdot \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\mu}{GJ}} \cdot z\right)$$

À une valeur de (ω) est associée la solution:

$$(\mathbf{Z}, t) = (\mathbf{A} \cdot \sin\omega t + \mathbf{B} \cdot \cos\omega t) \cdot (C \cdot \sin \beta Z + D \cdot \cos \beta Z)$$

Avec :
$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \cdot \mu}{GJ}$$

Remarque : Dans le cas d'une poutre de section circulaire β devient égal à:

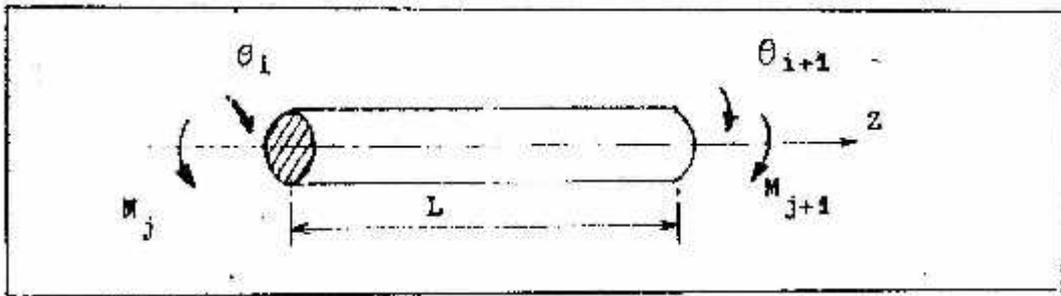
$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \cdot \xi}{G} = \frac{\omega^2}{a^2}$$

4.2. MATRICES DE TRANSFERT DUES A LA VIBRATION DE TORSION:

Nous déterminons la matrice de transfert d'un élément de poutre soumis à la torsion, en établissant la relation de transfert liant les points **j** et **j+ 1** de l'élément suivant:

Au point **j** c'est à dire en **Z=0** s'exerce un couple de torsion **M_j**

Au point **j+ 1** c'est à dire en **Z=L** s'exerce un couple de torsion **M_{j+1}**



En considérons que la poutre présente une section droite circulaire l'équation qui régit le mouvement de torsion s'écrit alors:

$$\frac{d^2 \cdot \phi(Z)}{d^2} + \omega^2 \cdot \frac{\xi}{G} \cdot \phi(Z) = 0 \quad \dots\dots\dots (4 - 3)$$

Avec :

G - module de cisaillement

ξ -masse volumique

En posant: $\beta^2 = \frac{\omega^2 \cdot \xi}{G}$

L'équation (4-34) devient:

$$\frac{d^2 \cdot \phi(Z)}{d^2} + \beta^2 \cdot \phi(Z) \quad \dots\dots\dots (4 - 3)$$

La solution de l'équation (4-35) est formée sous la forme:

$$\phi(z)=A \cdot \text{COS} \beta Z + B \cdot \text{SIN} \beta Z \quad \dots\dots\dots (4-36)$$

Les constantes A, B déterminées par les conditions aux limites de l'arbre.

a)- Etablir la matrice de transfert:

En dérivant (4-36) par rapport à Z, il vient que:

$$\phi'(z) = -\mathbf{A} \cdot \beta + \mathbf{B} \cdot \beta \quad \dots\dots\dots (4 - 3)$$

En utilisant la relation (4-37). L'expression de (4-28) devient:

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \phi'(z) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta \quad \dots\dots\dots (3 - 38)$$

L'expression (4-36) et (4-38) s'écrivent sous la forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta & \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

L'application de cette écriture aux extrémités du tronçon nous donne: - au point j correspondant à Z=O, la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (4 - 39)$$

- au point j+ 1 correspondant à Z=L, la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}_{j+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta & \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad \dots\dots (4 - 40)$$

De (4-40), on peut calculer:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}_j \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}_j \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4-41)$$

En substituant (4-41) dans (4-40), on trouve:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ M \end{pmatrix}_{j+1} = \begin{pmatrix} c & s \\ -G.J.\beta & G.J.\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & \beta \\ c & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{0}{G.J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ M \end{pmatrix}_j$$

Après l'opération de produit de deux matrices, on a:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ M \end{pmatrix}_{j+1} = \begin{pmatrix} c & \frac{s}{G.J.\beta} \\ -G & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & \beta \\ c & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ M \end{pmatrix}_j \quad \dots \dots (4-2)$$

La formule (4-2) est la relation de transfert de l'arbre de point $j+1$ à j , on peut désigner la matrice:

$$[D_t^m] = \begin{pmatrix} c & s\beta & s & /G.J \\ -G.J & c & c & \beta \end{pmatrix}$$

$[D_t^m]$ - est la matrice de transfert d'un élément de poutre soumis à la Torsion.

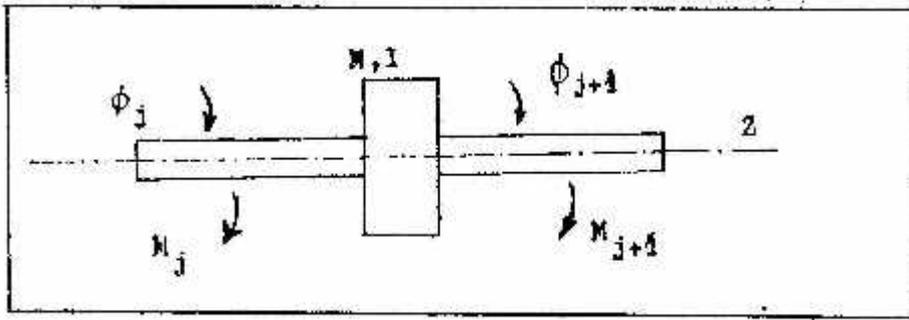
Remarque: Dans le cas où l'on néglige la masse du tronçon c'est à dire lorsque ($\beta=0$) la matrice de transfert notée:

$$[D_t^0] = \begin{bmatrix} 1 & L/G.J \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)- Matrice de transfert d'un disque:

Pour un disque de moment d'inertie I et de masse M , les conditions de part et d'autre du disque sont:

- égalité des déplacements: $\Phi_{j+1} = \Phi_j$
- à discontinuité des couples: $M_{j+1} = M_j - \omega^2 I \Phi_j$



La relation de transfert se traduit par la relation matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ M \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ M \end{bmatrix}_j$$

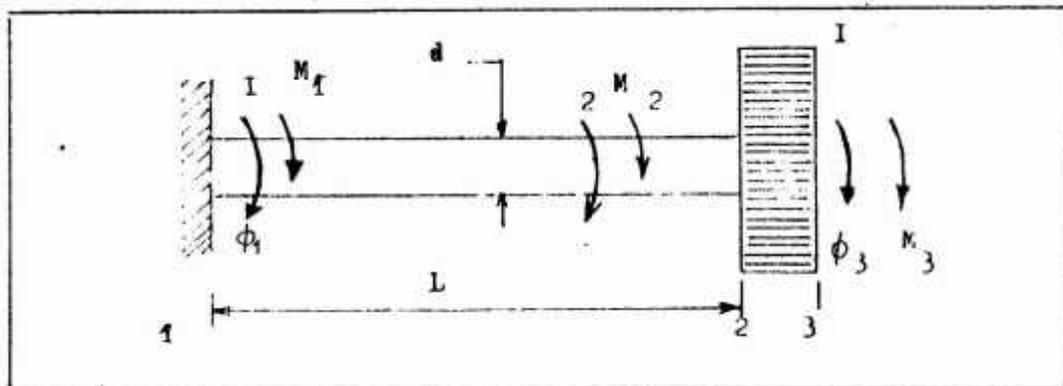
Où encore:

[D] - matrice de transfert du disque.

4.3. APPLICATION DE LA METHODE DES MATRICES DE TRANSFERT A LA DETERMINATION DES FREQUENCES PROPRES DE TORSION DU SYSTEME (arbre + disque):

Dans l'étude des vibrations de torsion, on suppose un disque et un tronçon d'arbre fixé, comme indiqué sur les schémas ci-dessous:

On subdivise notre système en deux éléments, l'un comportant un disque de masse M et de moment d'inertie I, l'autre représentant un tronçon, de tronçon constant d et de longueur L (figure ci-contre)



On établit alors la relation de transfert de chaque élément puis la matrice de transfert globale résultant du produit des matrices.

En explicitant les conditions aux limites, on aboutit à l'équation de fréquence

a)- Relation de transfert du premier élément:

Cet élément est constitué de la poutre la longueur L et de masse M. La relation de transfert entre les points:

$$[\mathbf{r}]_2 = [\mathbf{D}_t^m] \dots \dots \dots (4 - 4)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} c & s \\ -G.J_1 \cdot s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}_1$$

b)- Relation de transfert du second élément:

Cet élément est représenté par le disque, de moment d'inertie I, La relation de transfert reliant les points (3) et (2) s'écrit, connaissant la matrice $[\mathbf{D}_t]$

Ainsi :

$$[\mathbf{r}]_3 = [\mathbf{D}_t] [\mathbf{r}]_2 \dots (4-44)$$

Où encore : $\begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\omega^2 \cdot \mathbf{I} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}_2$

c)- Relation de transfert globale du système:

La relation de transfert du système, lie les points (3) et (1) par l'intermédiaire de la matrice globale de la relation (4-43)

On a: $[\mathbf{r}]_2 = [\mathbf{D}_t^m] \cdot [\mathbf{r}]_1$

Que l'on reporte dans (4-44) :

$$[\mathbf{R}]_2 = [\mathbf{D}_t] \cdot [\mathbf{r}]_2 = [\mathbf{D}_t] \cdot [\mathbf{D}_t^m] \cdot [\mathbf{r}]_1 \dots \dots \dots (4 - 4)$$

On pose : $[\mathbf{D}_t^G] = [\mathbf{D}_t^m] \cdot [\mathbf{D}_t]$

En explicitant cette dernière relation, on obtient:

$$[\mathbf{D}_t^G] = \begin{pmatrix} 1 & \sin L/G.J \\ -\omega^2 I \cos L - G.J \sin L & \cos L - \omega^2 I \sin L/G.J \end{pmatrix}$$

La relation de transfert (4-45) devient:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ M \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} c & \beta / G.J \\ -\omega^2 I c & -\beta . J . s \\ c & -\frac{\omega^2 . I . s}{G.J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi \\ M \end{pmatrix}_1 \dots\dots\dots (4 - 4)$$

d)- Equation de fréquence:

L'équation de fréquences est obtenue en introduisant les conditions aux Limites qu'impose notre système, ainsi;
En Z=0 correspondant à l'encastrement (point 1)

$$\begin{matrix} M_1 = 0 & \Phi_1 = 0 \\ \text{En Z=L correspondant à l'extrémité libre (point 3)} \end{matrix}$$

$$M_3=0 \qquad \Phi_3 = 0$$

En explicitant ces conditions dans la relation (4-46), il vient que:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}_3 = [D^G] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}_1$$

En revenant à l'écriture algébrique, on forme le système suivant:

$$\begin{matrix} \Phi_3 + M_1 s \beta / G.J \\ 0 = M_1 (c - \frac{\omega^2 . I . s}{G.J}) \end{matrix}$$

Comme M_1 est différent de zéro, cette dernière équation n'est valable que si:

$$c - \frac{\omega^2 . I . s}{G.J} = 0 \dots\dots\dots (4 - 4)$$

Cette relation est l'équation de fréquences à la torsion du système soumis à la torsion (lorsque l'on prend en considération la masse de l'arbre)

Donc; d'après la relation (4-47), on a:

$$\beta . t_1 = \frac{mI}{I} \quad (\text{L'équation que l'on résous graphiquement})$$

En posant $\beta L=X$,
, on obtient l'équation:

$$\text{tg } x = \frac{A}{x} \quad \text{OU} \quad A = \frac{m}{I}$$

Enfin, on trouve : $Z_1 = \beta_1 L$

$$Z_2 = \beta_2 L$$

$$Z_3 = \beta_3 L$$

$$\beta_1^2 = \frac{\omega_1^2}{G} \quad \omega_1^2 = \beta_1^2 \frac{G}{\xi} \quad \omega_1 = \beta_1 \cdot \sqrt{\frac{G}{\xi}}$$

$$\beta_2^2 = \frac{\omega_2^2 \xi}{G} \quad \omega_2^2 = \beta_2^2 \frac{G}{\xi} \quad \omega_2 = \beta_2 \cdot \sqrt{\frac{G}{\xi}}$$

$$\text{Donc : } \omega_n = \beta_n \cdot \sqrt{\frac{G}{\xi}}$$

Remarque:

Lorsqu'on néglige la masse de l'arbre, la relation (4-46) précédemment établie, reste valable, à la seule différence, que la matrice de transfert de la poutre (premier élément) est notée $[D^\circ]$

Il vient que alors: $[r]_3 = [D^m] \cdot [D^\circ] \cdot [r]_1$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ M \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L/GJ \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ M \end{bmatrix}_1$$

Ou encore en explicitant les conditions aux limites:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L/GJ \\ -\omega^2 I & 1 - \frac{\omega^2 I L}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}_1$$

$$\text{On forme le système : } \begin{cases} \Phi_1 = \frac{L}{G} \cdot M_1 \\ 0 = \left(1 - \frac{\omega^2 I L}{G}\right) \cdot M_1 \end{cases}$$

La dernière équation n'est vérifiée que si: $\frac{\omega^2 I L}{G} = 0$

La fréquence propre est alors immédiate et donnée par:

$$\omega^2 = \frac{G}{I L} \quad \dots\dots (4-48)$$

Avec: **G**- module de cisaillement

I- moment d'inertie du disque

J- moment d'inertie polaire de

L- longueur de l'arbre.

5- partie de calcul :

5.1. ORGANISATION DES CALCULS:

Pour notre étude de vibration de torsion, en se basant sur les données théoriques précédentes, et avec la méthode de RUTHIS, nous avons réussi à réaliser un programme qui permet de calculer les pulsations propres, ainsi que les déformées modales de n'importe quelle ligne d'arbre non ramifiée.

5.2. Description du programme RUTISHAUSER :

a)-lecture des données :

Les noms des variables utilisées sont:

N : nombre de disque des schémas équivalents

EPSI : valeur permettant de contrôler la convergence de la suite matricielle de RUTISHAUSER; valeur courante:

INERT (I): moment d'inertie par rapport à son axe, du disque "i" (N valeurs à lire; en N.m.s)

RAID (I): rigidité torsionnelle du tronçon séparant les disques i et i+ 1 (N-1) valeur à lire en (Nm/rd)

b)- calcul des éléments (C) et (α) de la matrice [C]:

Les éléments (C) de la diagonale principale de la matrice [C] sont rangés dans le tableau C(I) puis dans D(I), afin d'être conservés jusqu'au test de convergence.

Les éléments () situés au dessus de la diagonale principale de la matrice [C] sont rangés dans le tableau ALPHA(I)

c)-calcul des valeurs propres, test de convergence, test d'arrêt :

Les différentes séquences de calcul apparaissent dans l'ordre suivant:

- Calcul des éléments (C) et (α) de la nouvelle matrice [C] de la suite matricielle de RUTISHAUSER

- Calcul de la variation relative des éléments [C] entre cette itération et la

précédente

- Rangement dans le tableau [**D**] des éléments (**C**) de cette itération, en vue du calcul de la variation relative des éléments (**C**) au cours de la prochaine itération.
- Test de convergence sur la variation relative des éléments (**C**)
- Test de sécurité sur le nombre d'itération (nous

Considérons que 100 itérations suffisent généralement

Noms de variables utilisées:

NB: nombre d'itérations

A: élément (b) de la matrice [R]

B: élément (B) de la matrice [S]

$$s_1 = \sum_{i=0}^N |C_i^1 - C_i^{I+1}| \quad C_i^1 : \text{Éléments } CI \text{ à l'itération } 1$$

$$s_2 = \sum_{i=0}^N C_i^{I+1}$$

Q=s1/s2 : Pour test d'arrêt ou de convergence

d)- calcul des pulsations propres :

Les valeurs propres cherchées sont les éléments du tableau **C(I)** lorsque le test de convergence est satisfait.

Les valeurs propres apparaissent par ordre décroissant; **C(I)** est la plus grande,) est la plus petite.

Les systèmes à (**N**) disques étudiés sont libres à leurs deux extrémités, il n'existe donc que (**N-1**) pulsations différentes de zéro.

Noms de variables utilisées:

OM(J) [rd/s] - Pulsation propre qui correspond au mode (**N-J**)

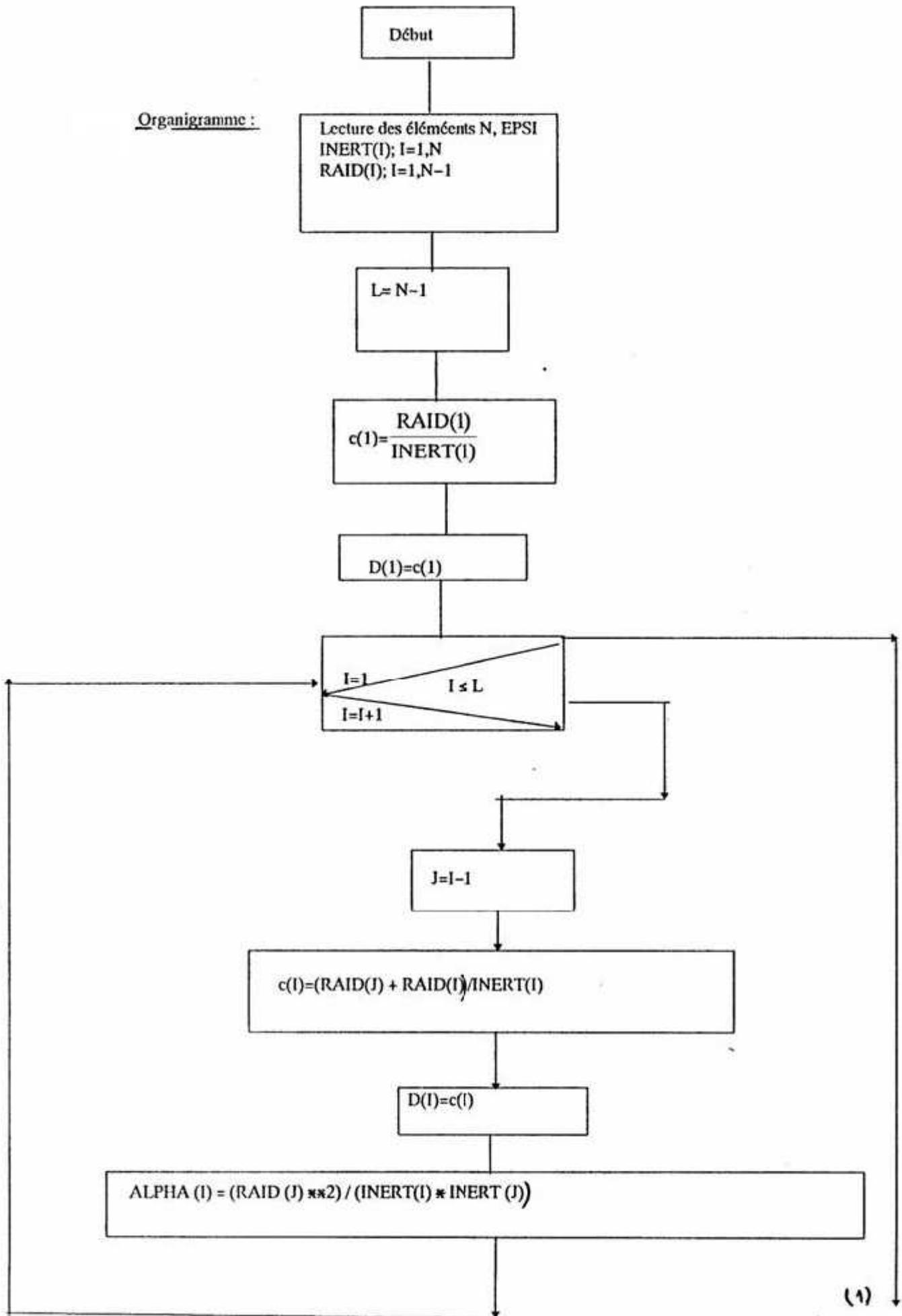
TM(J) [tr/min] - Pulsation propre qui correspond au mode (**N-J**)

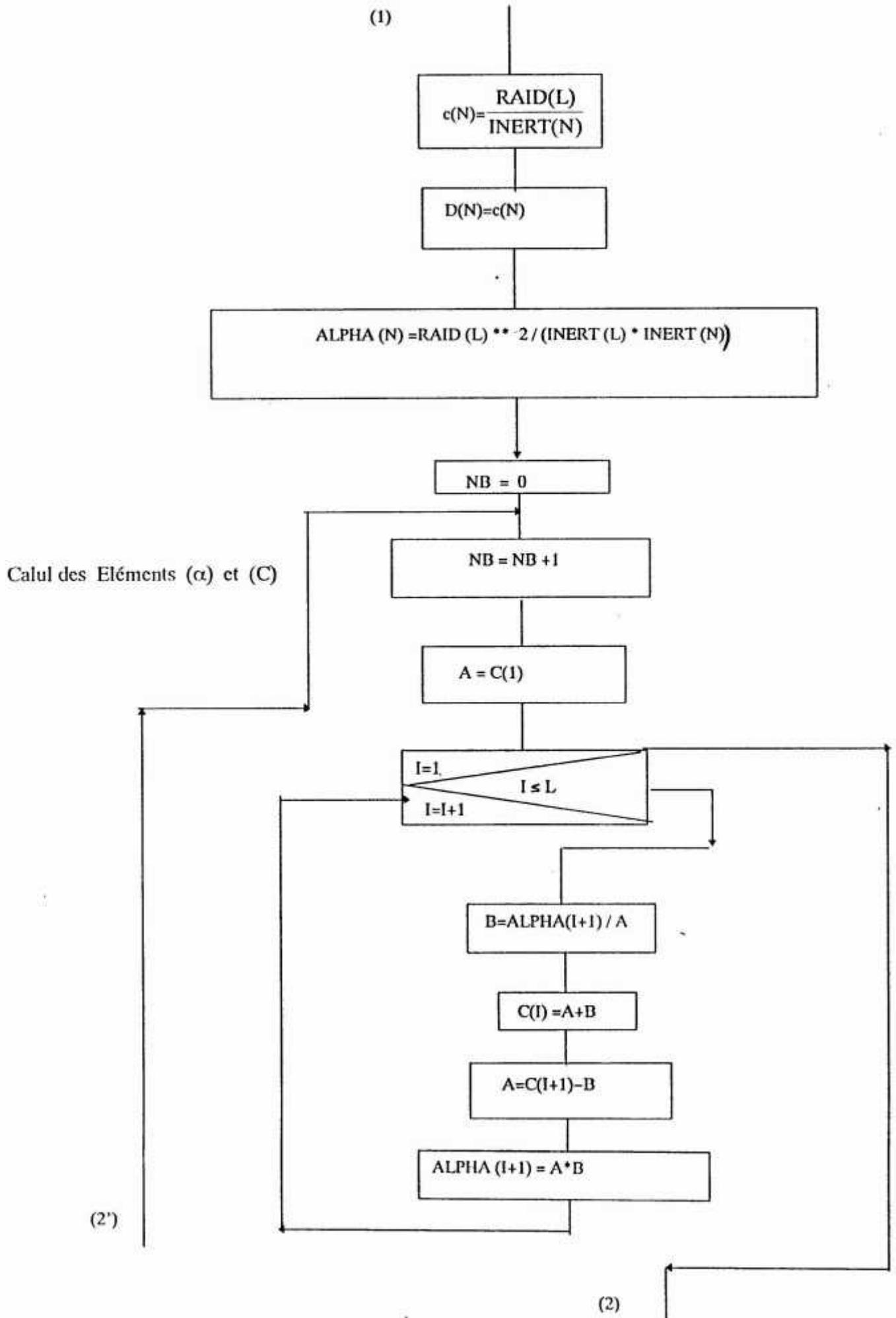
e)- Calcul des déformées modales :

Le nom de variable utilisé est:

X (I, J) : amplitude relative du disque au mode **J**

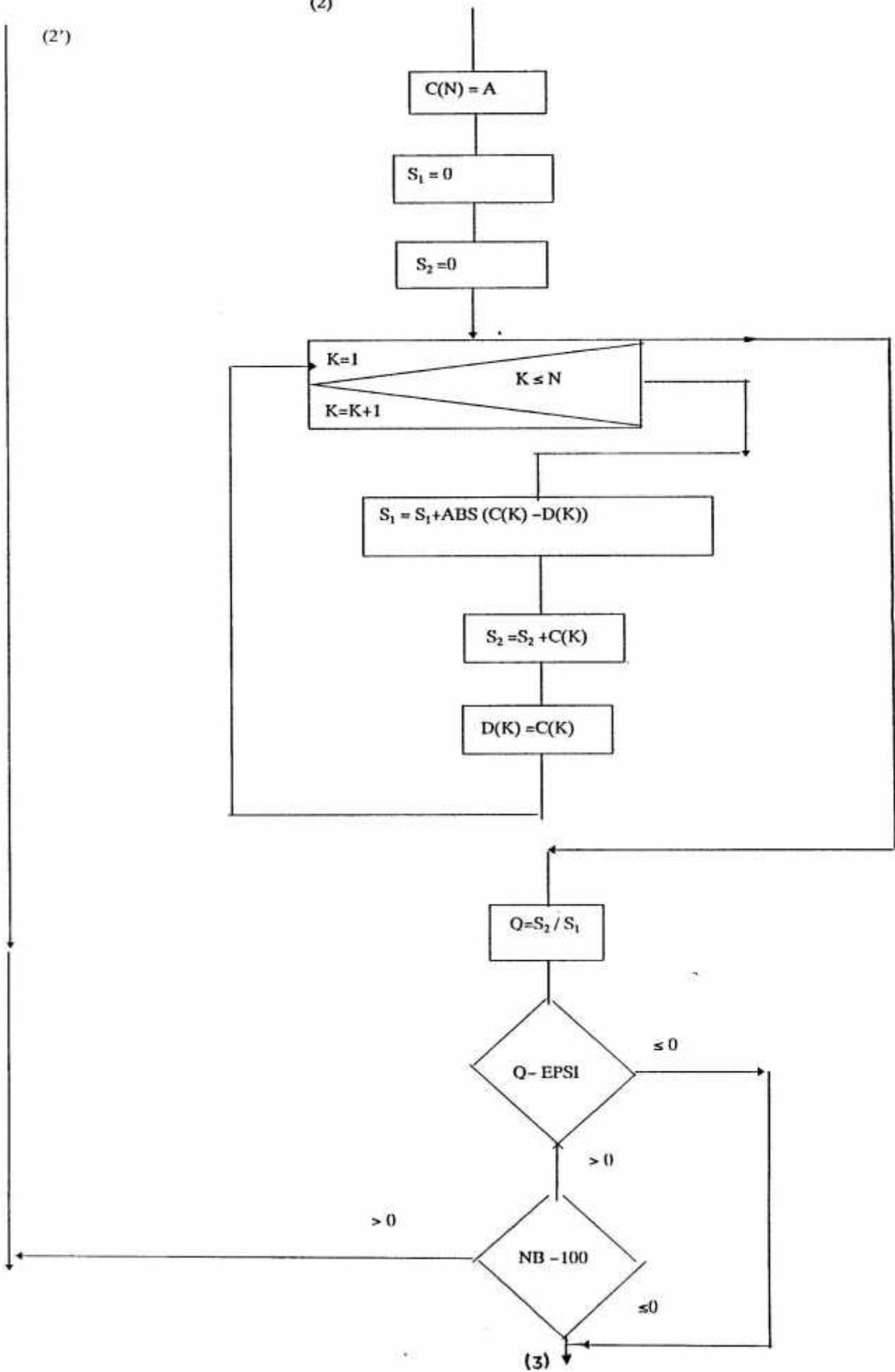
Organigramme :



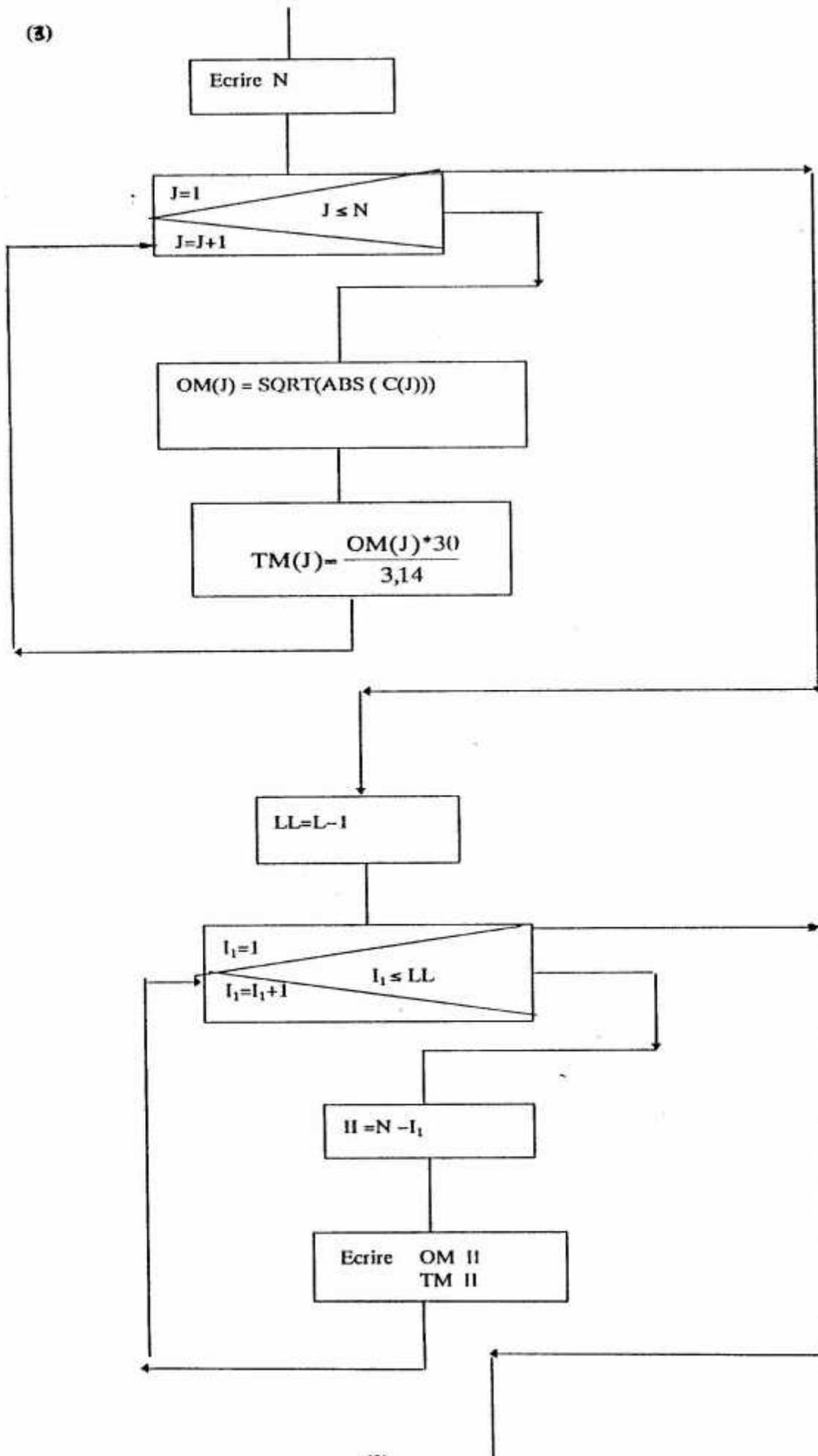


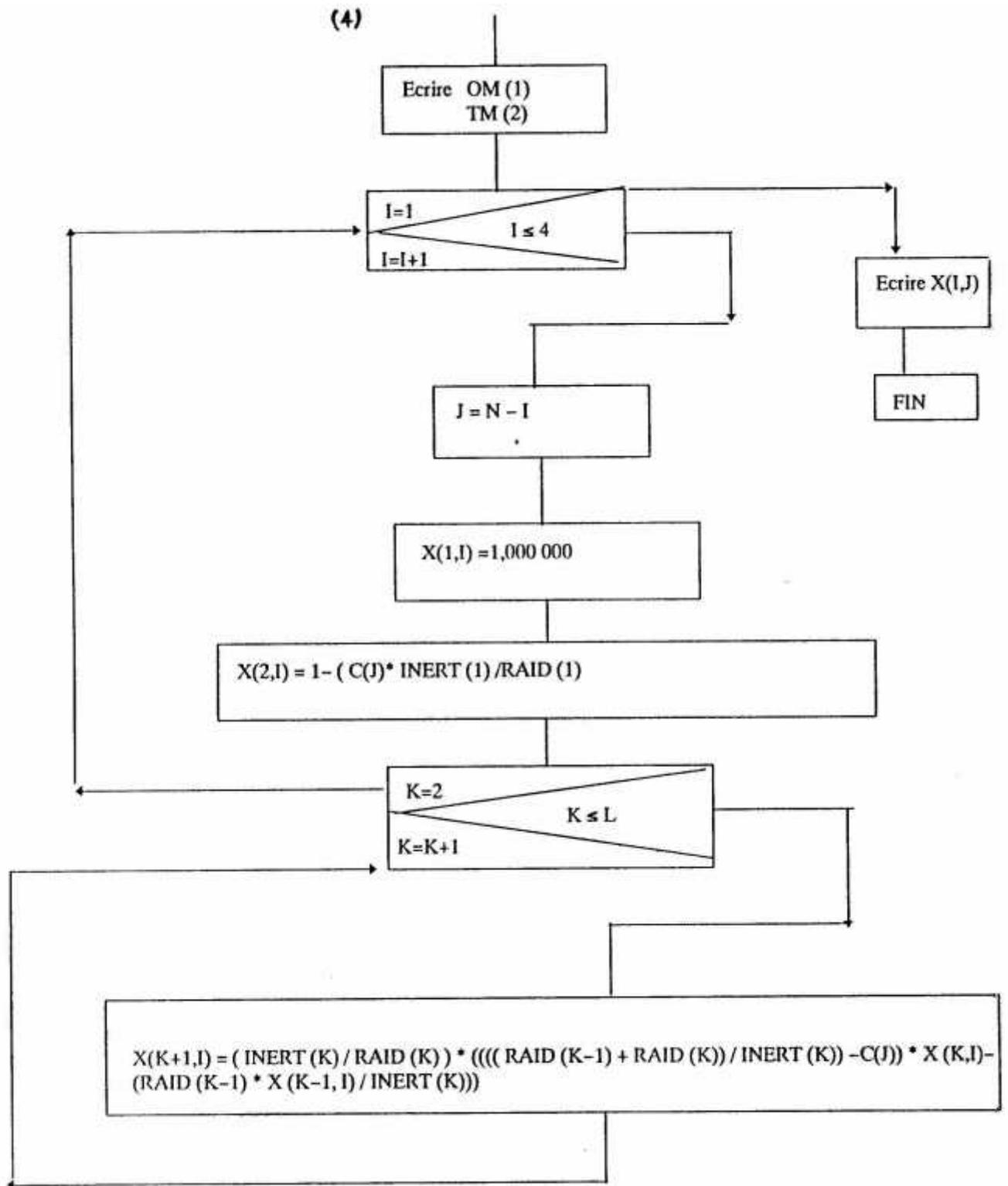
(2')

(2)



(3)





5.4. APPLICATION DE CALCUL :

5.4.1. Description de l'installation : L'étude qui va suivre portera sur une installation motrice arbre hélice pour un avion léger.

*Le moteur:

Utilisé est de puissance moyenne, il comporte 6 cylindres en ligne attachés à un vilebrequin et qui porte à son extrémité un volant de grande inertie utilisé pour homogénéiser le mouvement des pistons.

Le passage du moteur à l'arbre porte hélice se fait par l'intermédiaire qui permet le changement de la vitesse de rotation du vilebrequin à l'hélice.

*L'arbre port hélice : est un tronçon plein de 1,5 m de longueur construit

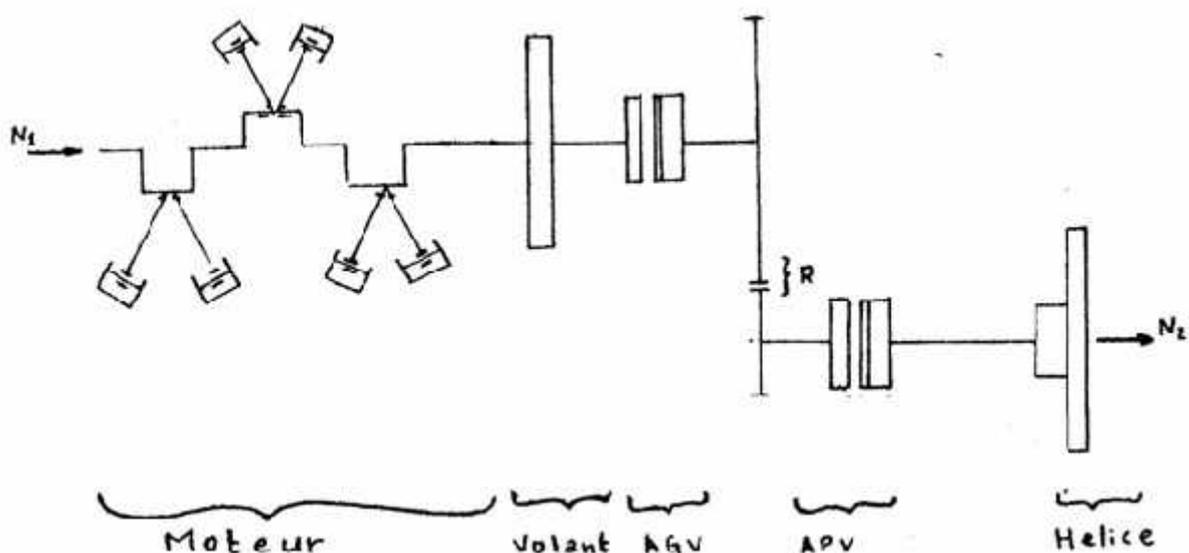
Généralement en acier A-32, de rigidité $G = 8.10^{-10} \text{ N/m}^2$, attaché à la 2^{ème} roue

Du réducteur et porte hélice à son extrémité.

* un accouplement : grand vitesse et disposé entre l'extrémité de l'arbre et le moyeu de hélice pour prévenir un fonctionnement à vide, et pour concentrer les nœuds de vibrations.

*hélice : est un disque de grande inertie; elle peut être par réglable au sol ou en vol suivant la mission de l'avion.

Le schéma de principe de l'installation est le suivant:



Donc, il s'agit de l'installation d'un moteur 6 cylindres en V à cycles à 4 temps à allumage commandé.

5.4.2. Modélisation de L'installation:

Réellement on a une ligne d'arbre essentiellement composés de coude, d'arbre, manivelles, arbres épaulés, accouplement, rotor, réducteur, hélice, ..., etc. seront modélisés par des disques ayant différents inerties (**I**) reliés entre eux par des raideurs (**K**).

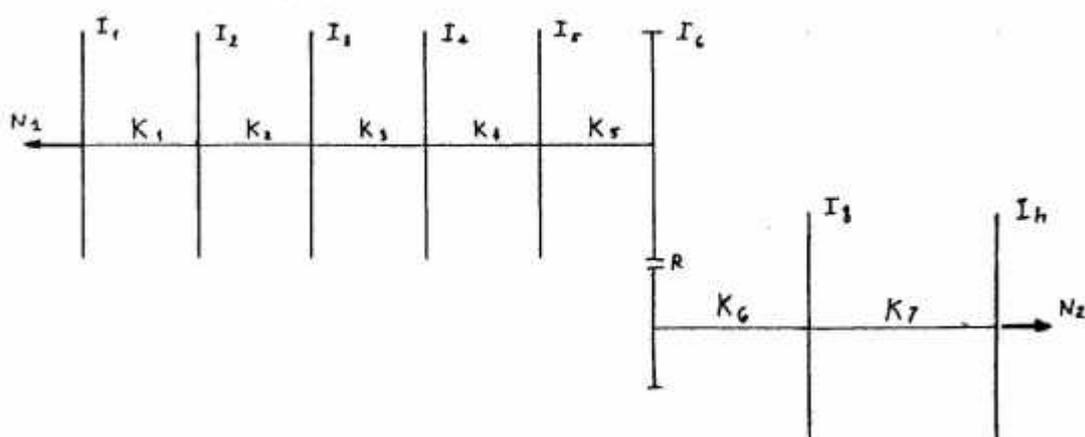
L'ensemble mécanique est modélisé comme suit:

a)- Modélisation du moteur:

Le vilebrequin avec ses manivelles, bielles, pistons et volants, est une pièce trop compliquée pour que l'on puisse déterminer exactement les fréquences naturelles en torsion.

Ainsi, devons-nous pour les déterminer, simplifier le système, en remplaçant les éléments du mécanisme bielles-manivelles par des disques équivalents, et le vilebrequin par un arbre rectiligne ayant la même flexibilité à la torsion.

Le moteur tourne à la vitesse **N₁**, à la sortie du moteur on rajoute un volant dans le but d'emmagasiner et d'absorber l'énergie cinétique.



b)- Modélisation de liaison:

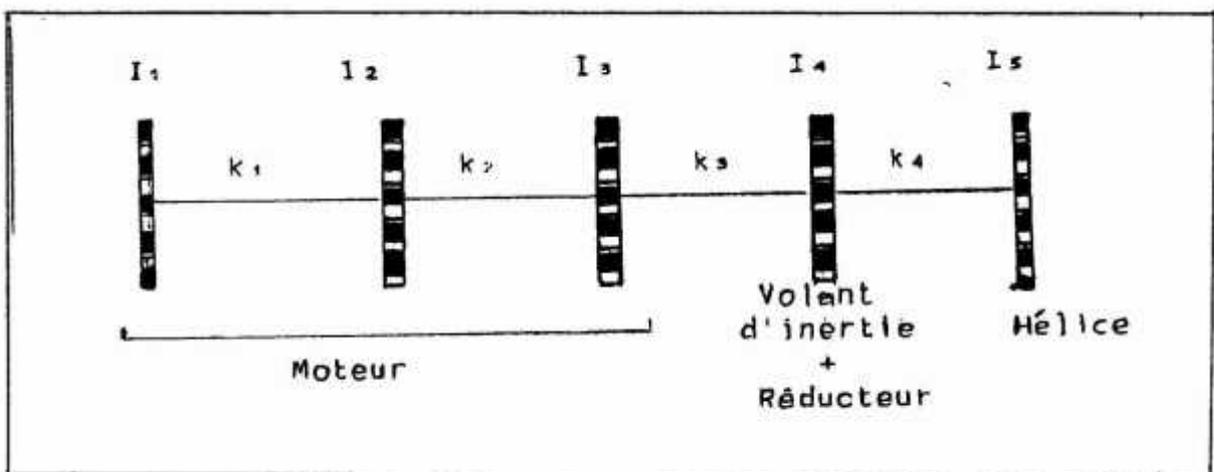
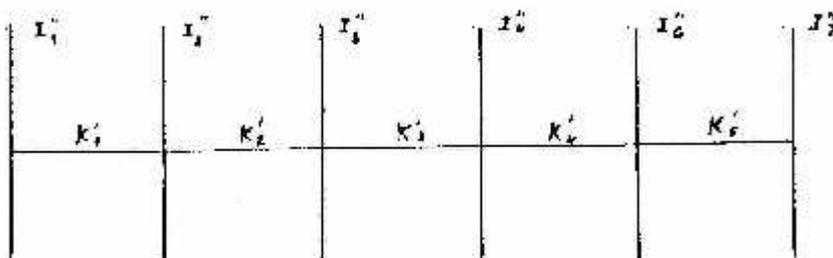
On entend par liaison; les accouplements qu'il faut leur donner une grande importance puisque c'est à leur niveau que se situent les nœuds de vibrations. Le choix d'un bon accouplement donne une meilleure tenue de la ligne d'arbre.

Ils sont généralement modélisés par deux disques séparés par une rigidité, les **AGV** et **APV** se sont des accouplements a grande et petite vitesse respectivement, leur intérêt est de transmettre l'énergie admissible à l'état couplé.

c)- Modélisation de l'hélice:

Par l'intermédiaire de l'**APV**, en vue du régime de l'hélice nominale, le moteur par l'intermédiaire de l'arbre transmettre une partie de son énergie cinétique à travers le vilebrequin permettant à l'hélice d'avoir une bonne tenue aérodynamique, vibratoire, et un bon rendement; elle est modélisée par une inertie **In**

NOTA: Le réducteur et le volant seront rassemblés et modélisés par un seul disque "14 "



5.4.3. Caractéristiques inertielles et torsionnelle du modèle:

- Les moments d'inerties (I), les rigidités à la torsion (K) sont indiquées dans le tableau suivant:

Tableau des moments d'inerties et des rigidités au modèle du moteur V6				
N° de disque	Désignation	Moment d'inerties I en K/m ²	N° de Tronçon	Rigidité torsionnelle K en N.m rd
1	Moteur	0,0184	1	4,88 .10 ⁵
2		0,0184		
3		0,0184		
4	Volant d'inertie + réducteur	0,2000	2	4,88 .10 ⁵
5	Hélice	0,5000	3	8,10 .10 ⁵
			4	0,20 .10 ⁵

5.4.4. Détermination des pulsations propres et déformées modales :

A l'aide du programme de RUTHISHAUSER, on obtient directement les pulsations propres et déformées modales des différents modes.

Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux.

I/PARTIE DONNEES

```

.....
r-----T
I MATRICE INERTIES I
L-----J
T-----T-----T
I DISQUE N°: I INERTIES(kgm2) I
I-----L-----J
I      1      I      .0184      I
L-----L-----L
I      2      I      .0184      I
L-----L-----L
I      3      I      .0184      I
L-----L-----L
I      4      I      .2000      I
L-----L-----L
I      5      I      .5000      I
L-----L-----L

```

```

r-----T
I MATRICE RAIDEURS I
L-----J
T-----T-----T
I TROCONS N°:I RAIDEURS (Nm/rd) I
L-----L-----L
I      1      I 4.88E+5      I
L-----L-----L
I      2      I 4.88E+5      I
L-----L-----L
I      3      I 8.10E+5      I
L-----L-----L
I      4      I .20E+5      I
L-----L-----L

```

II/PARTIE CALCUL ET DETERMINATION

```

T-----T-----T
DETERMINATION DES ELEMENTS(C) ET(ALPHA) I
L-----L-----L-----I
I (I) I C(I) I alpha(I) I
L-----L-----L-----L
I 1 I .2652174E+8 I .000000E+14 I
L-----L-----L-----L
I 2 I .0000000E+8 I 7.034026E+14 I
L-----L-----L-----L
I 3 I .0000000E+8 I 7.034026E+14 I
L-----L-----L-----L
I 4 I .0000000E+8 I 1.782881E+14 I
L-----L-----L-----L
I 5 I .0097600E+8 I .000040E+14 I
L-----L-----L-----L

```

```

T-----I
DETERMINATION DES PULSATIONS PROPRES EN I
L-----L-----L-----L
I MODE N°: I OMEGA(rad/s)I VITESSE(tr/mIN I
L-----L-----L-----L
I 1 I 343.6625 I 3283.399 I
L-----L-----L-----L
I 2 I 2856.2206 L 27288.731 I
L-----L-----L-----L
I 3 I 7154.2304 I 68352.514 I
L-----L-----L-----L
I 4 I 9738.5615 I 93043.577 I
L-----L-----L-----L

```

```

T-----T
I  CALCUL DES DEFORMES MODALES DES QUATRES(4) PREMIER MODES  I
L-----L
T-----T
I  MODE N°: 1 SA PULSATION PROPRES w=343.6625rad/s I
T-----T
I  DISQUE N°      I          AMPLITUDE RELATIVE      I
L-----L-----J
I      1          I          1.0000000              I
L-----L-----J
I      2          I          0.9955469              I
L-----L-----J
I      3          I          0.9786595              I
L-----L-----J
I      4          I          0.9786595              I
L-----L-----J
I      5          I          -0.5012140             I
L-----L-----J
T-----T
I  MODE N°:2 SAPULSATION PROPRES w=2856.2206 rad/s I
T-----T
I  DISQUE N°      I          AMPLITUDE RELATIVE      I
L-----L-----J
I      1          I          1.0000000              I
L-----L-----J
I      2          I          0.6924034              I
L-----L-----J
I      3          I          0.1718258              I
L-----L-----J
I      4          I          -0.1726484             I
L-----L-----J
I      5          I          0.0008773              I
L-----L-----J
T-----T
I  MODE N°:3 SA PULSATION PROPRES w=7154.230rad/s I
T-----T
I  DISQUE N°:    I          AMPLITUDE RELATIVE      I
L-----L-----J
I      1          I          1.0000000              I
L-----L-----J
I      2          I          -0.9298515             I
L-----L-----J
I      3          I          -0.652277              I
L-----L-----J
I      4          I          0.0917269              I
L-----L-----J
I      5          I          -0.0002019             I
L-----L-----J
T-----T
I  MODE N°: 4 SA PULSATION PROPRES w=9728.561rad/s I
T-----T
I  DISQUE N°      I          AMPLITUDE RELATIVE      I
L-----L-----J
I      1          I          1.0000000              I
L-----L-----J
I      2          I          -2.5759190             I
L-----L-----J
I      3          I          3.0594390              I
L-----L-----J
I      4          I          -0.1366283             I
L-----L-----J
I      5          I          0.0003650              I
L-----L-----J

```

CONCLUSION

Le présent mémoire traite les vibrations de machines et vise comme objectifs:

- L'analyse des éléments constituant la machine
- La modélisation dynamique
- La détermination des équations mathématiques
- Utilisation des méthodes de calculs des coefficients, des fréquences propres et amplitudes
- Un programme d'analyse numérique.

La détermination des fréquences propres de vibration de torsion de la ligne d'arbre permet de prévenir les risques dangereux (fréquences critiques) que peuvent causer ces vibrations du point de vue de la résistance des matériaux et les préjudices qu'elles peuvent causer au bon fonctionnement de l'appareil.

Nous entendons par fréquences critiques (vitesses dangereuses) la fréquence pour laquelle, la vitesse de rotation est égale à la fréquence propre du système (résonance).

Ainsi, grâce à la détermination des fréquences propres, on peut modifier ces fréquences de telle sorte que la réponse des efforts que transmet la machine (moteur, rotor) au fuselage soient minimaux.

Toutes les techniques de calcul sont facilement introduites dans les ordinateurs actuels qui permettent non seulement de résoudre rapidement les systèmes d'équations les plus complexes mais surtout d'obtenir les solutions exactes en limitant le nombre des hypothèses simplificatrices au minimum.

A l'aide du programme présenté dans ce mémoire, on obtient directement les pulsations propres et les déformées modales des différents modes.

Donc, nous avons constaté que le calcul des vibrations était indispensable à la machine, afin d'amortir les efforts transmis à la cellule de l'appareil.

BIBLIOGRAPHIE :

-Hélicoptère théorie pratique P.LE FORTS ET J.HAMANN

7^{ème} édition

-Mécanique des vibrations MICHAEL DELPEDRO édition

1985

-Dynamique des machines alternatives R .OUZIAUX DUNOD

Paris

-Techniques de l'ingénieur

-mini projet 4^{ème} année ingénieur Etude des vibrations de torsion d'une installation d'un avion léger composées moteur-arbre-hélice

-Aide mémoire de résistance des matériaux G.PISSARENKO

HUEE édition 1975

-mécanique générale .1^{er} partie K.PEIFFER-N.ROUCHE CIACO

éditeur Louvain-lanéure 1987.

-cours 5^{ème} année ingénieur module vibrations

CHAPITRE I

INTRODUCTION SUR LES VIBRATION DES ARBRES

CHAPITRE II

Calcul statique des arbres (torsion)

CHAPITRE III
MODELISATION DYNAMIQUE
DES ARBRES

CHAPITRE V

RECHERCHE DES PULSATION

PROPRE ET DEFORMES

MODALES