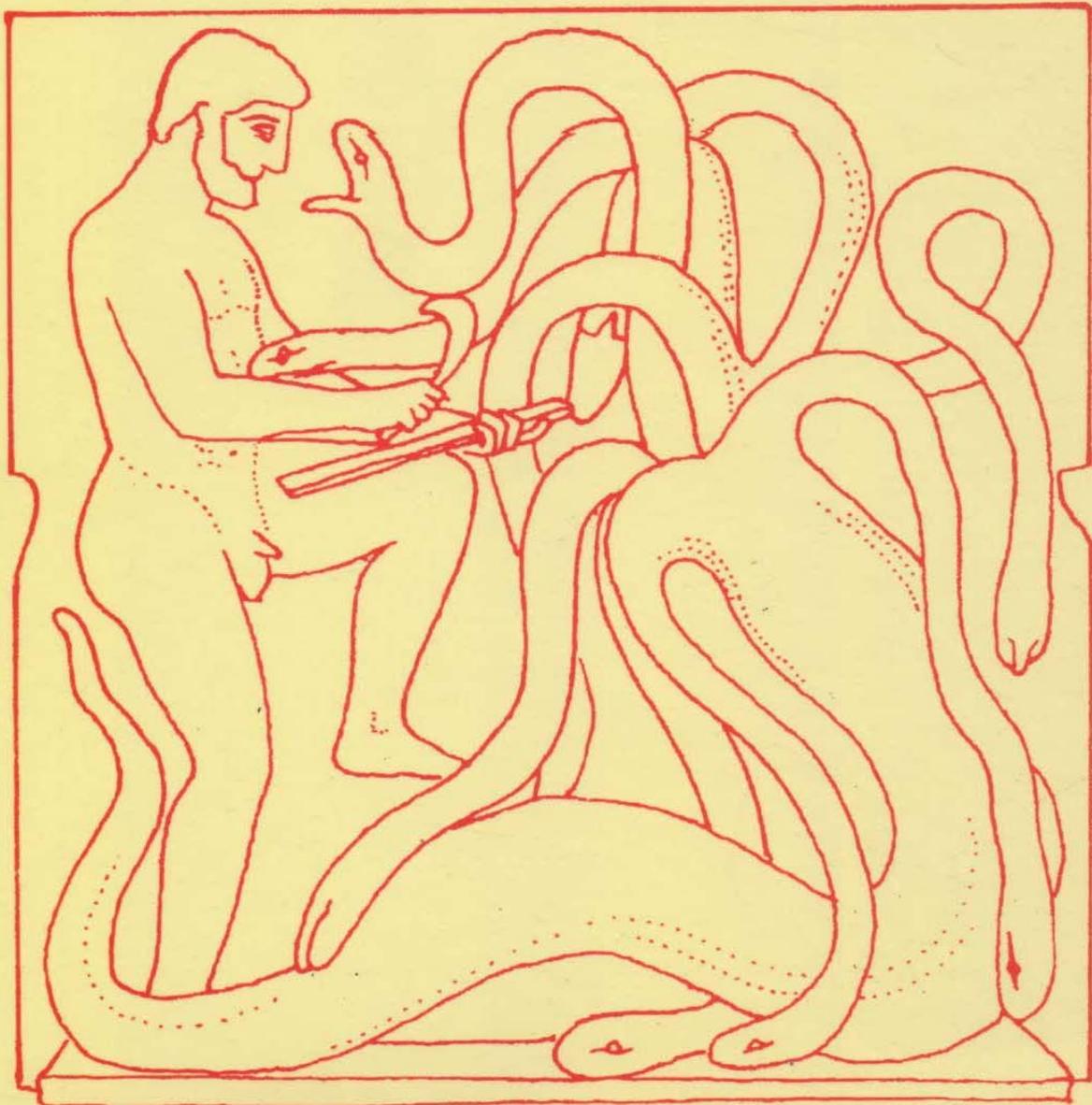


INTRODUCTION À L'ANALYSE ET À LA COMMANDE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

PHILIPPE MÜLLHAUPT



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Table des matières

Préface	v
CHAPITRE 1 Définition et propriétés des systèmes non linéaires	3
1.1 Principe de superposition	3
1.2 Classe de systèmes	4
1.3 Réponse indicielle dissymétrique	6
1.4 Termes d'ordre supérieur	7
1.5 Points d'équilibre isolés multiples	8
1.6 Explosion en temps fini	9
1.7 Réponse harmonique multiple	9
1.8 Orbites chaotiques	9
CHAPITRE 2 Diagramme de phase	13
2.1 Plan de phase pour les systèmes du second ordre	13
Système masse-ressort	14
2.2 Techniques de graphe du plan de phase	14
2.3 Systèmes linéaires du second ordre	15
2.3.1 Solutions numériques	16
2.3.2 Graphe des pentes	16
2.3.3 Elimination du temps (de manière explicite)	17
2.3.4 Elimination du temps (de manière implicite)	18
2.3.5 Méthode des isoclines	19
2.3.6 Exemple : oscillateur de Van der Pol	20
2.4 Cycles limites	21
Classification des cycles limites	22
2.5 Index topologique	22
2.5.1 Types de points d'équilibre	24
2.5.2 Classification des points d'équilibre	24
2.5.3 Théorème de l'index	24
2.5.4 Théorème de Bendixson	25
2.6 Impossibilité du chaos planaire	26
Théorème de Poincaré-Bendixson	27
2.7 Exemple : dynamique de populations	27
2.7.1 Compétition	28
2.7.2 Prédateur-proie	30
2.8 Problèmes	32

CHAPITRE 3	Méthode du premier harmonique	35
3.1	Système linéaire et non-linéarité statique	36
3.1.1	Excitation sinusoïdale en boucle ouverte	37
3.1.2	Caractéristique passe-bas du système linéaire $G(s)$	37
3.1.3	Gain complexe équivalent	38
3.2	Premier harmonique	40
3.2.1	Décomposition en harmoniques	40
3.2.2	Équivalent du premier harmonique	41
3.2.3	Calcul de l'équivalent du premier harmonique	41
3.3	Non-linéarités communes	46
3.3.1	Saturation	46
3.3.2	Zone morte ou jeu	47
3.3.3	Relais	48
3.3.4	Hystérèse	48
3.3.5	Non-linéarités symétriques, continues par morceaux	49
3.4	Système en rétroaction	50
3.4.1	Représentation graphique	52
3.4.2	Double intégrateur et oscillateurs linéaires	53
3.4.3	Théorème de Nyquist	54
3.5	Critère de stabilité	60
3.5.1	Cycle limite stable	60
3.5.2	Cycle limite instable	62
3.6	Fiabilité de l'analyse par le premier harmonique	63
3.7	Oscillateur de Van der Pol revisité	63
3.8	Problèmes	65
CHAPITRE 4	Stabilité au sens de Lyapunov	69
4.1	Point d'équilibre	69
4.2	Stabilité pour les systèmes linéaires	70
4.3	Définition mathématique de la stabilité	70
4.3.1	Notion intuitive de la stabilité	71
4.3.2	Notion de distance	71
4.3.3	Stabilité : définition formelle	72
4.3.4	Stabilité asymptotique	75
4.3.5	Désavantages de la définition	76
4.4	Méthode directe de Lyapunov	76
4.4.1	Candidat de Lyapunov	77
4.4.2	Fonction de Lyapunov	78
4.5	Exemple : robot	78
4.5.1	Loi de commande	79
4.5.2	Lois de la mécanique	79
4.5.3	Candidat de Lyapunov	79
4.5.4	Fonction de Lyapunov	80

4.6	Théorème de stabilité locale.....	80
4.6.1	Preuve (stabilité locale).....	81
4.6.2	Preuve de stabilité locale asymptotique.....	83
4.7	Stabilité globale.....	84
4.8	Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires.....	88
4.9	Stabilité locale et linéarisation.....	89
4.10	Stabilité exponentielle.....	92
4.11	Théorème d'invariance de LaSalle.....	92
4.11.1	Ensemble invariant \mathcal{I}	93
4.11.2	Ensemble d'annulation de la dérivée de la fonction de Lyapunov.....	94
4.11.3	Exemple : le pendule simple.....	96
4.12	Méthodes de construction des fonctions de Lyapunov... ..	99
4.12.1	Méthode de Krasovskii.....	100
4.12.2	Méthode du gradient variable.....	100
4.12.3	Résultat d'instabilité I.....	102
4.12.4	Résultat d'instabilité II.....	103
4.12.5	Résultat d'instabilité III : théorème de Chetaev.....	104
4.13	Techniques de comparaison et majoration.....	105
4.13.1	Les formes quadratiques.....	106
4.13.2	Inflation et déflation.....	107
4.13.3	Le développement limité.....	108
4.13.4	La réintroduction de V	109
4.13.5	L'équation intégrale associée.....	109
4.13.6	Quelques inégalités standard.....	112
4.13.7	Compléter les carrés.....	113
4.13.8	Illustration à l'aide d'un exemple.....	113
4.13.9	Méthodologie.....	116
4.14	Systèmes dépendant explicitement du temps.....	116
4.14.1	Stabilité et stabilité uniforme.....	116
4.14.2	Fonctions de Lyapunov dépendant du temps... ..	120
4.14.3	Comportement asymptotique lorsque $\dot{V}(x, t) \leq 0$	128
4.15	Problèmes.....	140
CHAPITRE 5 Passivité		149
5.1	Notion intuitive.....	149
5.2	Exemple de système statique passif.....	150
5.3	Système statique passif.....	151
5.4	Exemple de système dynamique passif.....	151
5.5	Définition différentielle de la passivité.....	152
5.6	Propriétés.....	153
5.6.1	Connexion parallèle.....	154
5.6.2	Connexion par rétroaction.....	154
5.6.3	Définition intégrale de la passivité.....	155

5.7	Passivité des systèmes linéaires	156
	Preuve du lien entre passivité et réponse harmonique positive réelle.....	157
5.8	Système réel positif	160
5.8.1	Degré relatif et minimum de phase	160
5.8.2	Lien entre Lyapunov et système RP	164
5.9	Stabilité absolue	169
5.9.1	Non-linéarité statique de secteur	169
5.9.2	Définition de la stabilité absolue	170
5.9.3	Conjecture de M. A. Aizerman	171
5.9.4	Critère du cercle	171
5.10	Problèmes	176
CHAPITRE 6 Notions générales de géométrie différentielle		183
6.1	Introduction	183
6.2	Variété, cartes et atlas	184
	Difféomorphisme	186
6.3	Introduction aux divers concepts de dérivations	193
	Différentielles	194
6.4	Vecteurs tangents	196
6.5	Champ de vecteurs	203
6.6	Crochet de Lie	205
6.6.1	Propriétés du crochet de Lie	207
6.6.2	Comportement sous l'effet d'un difféomorphisme	208
6.7	Espace dual	209
6.8	Cotangent et les 1-formes différentielles	209
6.9	Le gradient	211
6.10	Dérivée de Lie d'une fonction	213
6.11	Transformation par changement de coordonnées	214
6.12	Intégration d'une 1-forme le long d'un chemin	215
6.13	Produit tensoriel et forme multilinéaire	217
6.14	Produit scalaire et produit extérieur en dimension deux	218
6.14.1	Forme bilinéaire symétrique	219
6.14.2	Forme bilinéaire antisymétrique (alternée)	219
6.14.3	Produit extérieur de deux formes linéaires	220
6.15	Forme multilinéaire alternée	220
6.16	Forme extérieure et densité	223
6.16.1	Densité d'objets répartis de manière homogène	223
6.16.2	Produit extérieur et densité	225
6.16.3	Dualité et calcul du nombre d'objets rencontrés	225
6.17	Différentiation extérieure	227

6.18	Propriétés de la différentielle extérieure	230
6.18.1	Intégration des formes sur une variété.....	230
6.18.2	Théorème de Stokes.....	231
6.19	Récapitulatif des formules importantes	232
6.20	Problèmes	232
CHAPITRE 7	Théorème de Frobenius	235
7.1	Intégrabilité	235
7.2	Différence entre une 1-forme exacte et intégrable.	238
7.3	Condition d'exactitude et d'intégrabilité	239
7.3.1	Condition d'exactitude.....	239
7.3.2	Condition d'intégrabilité	240
7.4	Interprétation géométrique de l'intégrabilité et de la non-intégrabilité.....	244
7.5	Les deux formes du théorème de Frobenius.....	246
7.6	Méthodes pour intégrer une 1-forme exacte.....	251
7.6.1	Méthode des escaliers	251
7.6.2	Méthode interpolante	252
7.7	Intégration d'une 1-forme intégrable	253
7.7.1	Méthode d'Euler	253
7.7.2	Méthode de Natani	255
7.7.3	Méthode de Cartan	256
7.8	La 1-forme non intégrable et ses champs de vecteurs associés.....	258
7.9	Problèmes	260
CHAPITRE 8	Commande par linéarisation	269
8.1	Linéarisation locale et stabilisation.....	270
8.2	Linéarisation exacte.....	273
8.3	Equation d'erreur.....	274
8.3.1	Fonction.....	274
8.3.2	Equation différentielle.....	275
8.3.3	Placement de pôles et équation d'erreur	278
8.4	Commande d'une chaîne d'intégrateurs.....	280
8.4.1	Stabilisation et poursuite	281
8.4.2	Transit en temps fini avec commande a priori ..	281
8.5	Systèmes linéaires SISO.....	282
8.5.1	Sortie spécifiée.....	282
8.5.2	Sortie non spécifiée, formule d'Ackermann.....	292
8.6	Linéarisation entrée-sortie.....	295
8.7	Linéarisation exacte entrée-état	297
8.7.1	Première méthode basée sur la construction de la sortie plate	298
8.7.2	Seconde méthode fondée sur l'équivalence explicite	300
8.7.3	Lien avec le théorème de Frobenius	304

8.7.4	Exemple : Robot avec joint flexible.....	306
8.7.5	Exemple : Bille roulant sur une barre.....	309
8.8	Problèmes.....	312
CHAPITRE 9	Commande par les méthodes de Lyapunov.....	315
9.1	Introduction.....	315
9.2	Fonction de Lyapunov de commande.....	316
9.3	Stabilité et fonction de classe \mathcal{K}	317
9.4	Stabilité entrée-état et fonction de Lyapunov associée.....	319
9.4.1	Stabilité entrée-état.....	319
9.4.2	Fonction de Lyapunov entrée-état.....	319
9.5	Structure composite.....	322
9.6	Stabilité conditionnelle.....	328
9.7	Structure cascade.....	331
9.7.1	Stabilisation locale de la cascade.....	332
9.7.2	Restriction imposée par le terme de couplage... ..	333
9.7.3	Stabilisation globale de la cascade.....	334
9.7.4	Stabilité entrée-état et cascade.....	339
9.8	Passivation.....	341
9.9	Phénomène du « peaking ».....	345
9.10	« Backstepping ».....	347
9.10.1	Fonction de Lyapunov réduite.....	348
9.10.2	Fonction de Lyapunov complète.....	348
9.10.3	Exemple.....	349
9.11	Problèmes.....	351
	Bibliographie.....	355
	Index.....	359