

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Université SAAD DAHLAB – BLIDA 1

Institut d'aéronautique et des études spatiales

Département de construction aéronautique



Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du Diplôme de master

Domaine : Sciences et technologie

Filière : Aéronautique

Spécialité : Avionique

*THEME*

*Commande Optimale et Robuste dédiée à  
un système aéroélastique*



Présenté par :

Haddad Imed Eddine

Moualhi Walid

Encadré par :

Mr. Dilmi Smain

Promotion 2018/2019

## **REMERCIEMENTS**

*En premier lieu, nous remercions ALLAH, le tout-puissant, qui nous a donné le courage et la volonté pour bien mener ce modeste travail à terme.*

*Ainsi, nous nous permettons d'exprimer ici nos sincères reconnaissances à notre promoteur Mr. DILMI SMAIN qui a proposé et dirigé ce travail, pour son suivis et ses conseils.*

*Nos sincères remerciements vont aussi à monsieur le président et messieurs les membres du jury pour avoir expertisé notre travail et nous avoir honorés par leurs présences.*

*Enfin, que tous ceux ou celles qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce long travail ; trouvant ici l'expression de nos remerciements les plus sincères.*

# DÉDICACE

*A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,*

*A mon frère pour son encouragement permanent, et son soutien moral,*

*Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués,*

*A tous les Amis qui m'ont soutenu durant tout mon cursus universitaire et avec lesquels j'ai partagé des moments inoubliables.*

*Merci d'être toujours là pour moi.*

Haddad.ImedEddine

# *Dédicace*

*Ce modeste travail est dédié*

*A la personne qui a tout donné et tout sacrifié pour me mettre là où je suis, et celle qui a toujours été l'éclairage de mon chemin, ma force mes chers parents.*

*A mes très chères frères Fares, Ishak, Hammid, Mokhtar, Ossama, Tayeb, Hemmad et Kader mercie pour votre encouragement et le remonte de moral,*

*A tous mes amis de la cité 06, Farid, Zaki, Amine, Mostapha, Fodil, Kada, Hemmed, Ali, Sami, Sofian et Bachir avec qui j'ai partagé des moments inoubliables,*

*Et surtout tout le groupe Avionique 'Imed, Hossine, Mohamed, Fares, Zohir, Salah, Hemmed, Amine, Raouf, Kader, Fatima, Noria, Nassima, Safia, Doria, Amira, Khawla, Algia, Ferial, Khawla, Sadia'', ont été plus que une famille vous me manquais dès maintenant je vous oublie jamais.*

***Moualhi Walid***

## ملخص

تعالج هذه المذكرة كيفية نمذجة والتحكم في جملة مرنة غير خطية ضمن وسط هوائي غير مستقر، النموذج الذي سيتم دراسته مقطع جناح تنائي الأبعاد بدرجتين من الحرية مع واجهة واحدة للتحكم. تتعلق ديناميكية حركة هذا النموذج بالحركة الأفقية والرئيسية. يعالج مشروعنا على وجه الخصوص الأمر (الطلب) الأمثل من خلال إعادة الحالة (LQR)، الأمر (الطلب) الأمثل مع متوقع الحالة LQG وكذلك باستعمال المقاربة بوضع الانزلاق و وضع الانزلاق المتكامل. هذه المقاربات تقوم بصناعة تحكم قوي قادر على ضمان التوازن، التحكم، الصلابة و كذلك الأداء. من خلال دراسة استقرار الجملة بتطبيق هاته الطرق في التحكم، لقد قمنا بإظهار نجاعة كل من طرق التحكم في الرفع من قيمة السرعة الحرجة للرفرفة و بشكل واضح.

## Résumé

Ce mémoire est basé sur la modélisation et le contrôle d'un système aéroélastique non linéaire pour un écoulement aérodynamique instationnaire. Le modèle à étudier est une section d'aile bidimensionnelle de deux degré de liberté avec une seule surface de commande. La dynamique du mouvement de ce modèle concerne le tangage et le déplacement vertical. Notre projet traite en particulier la commande optimale par retour d'état LQR, la commande optimale avec estimateur d'état LQG ainsi que la commande robuste par mode glissant conventionnel et mode glissant intégral. Ces approches consistent à élaborer un contrôleur robuste capable d'assurer la stabilité, la commande et de satisfaire la robustesse et les performances. A travers l'étude de la stabilité du système en boucle fermée, nous avons montré l'efficacité de chaque commande pour réduire les oscillations et améliorer la vitesse critique de flottement.

## Abstract

This memory is based on modelling and control of a non-linear aeroelastic system for unstable airflow. The model to be studied is a two-dimensional wing section of two degrees of freedom with a single control surface. The dynamics of the movement of this model concern pitch and vertical displacement. In particular, our project deals with the optimal LQR status return control, the optimal control with LQG status estimator and the robust control with conventional sliding mode and integral sliding mode. These approaches consist of developing a robust controller capable of providing stability, control, robustness and performance. Through the study of the stability of the closed loop system. By studying the stability of the closed-loop system, we have shown the effectiveness of each control to reduce oscillations and improve the critical floating speed.

# Listes des acronymes et abréviations

## Lettres grecques

$\alpha$  : Angle d'incidence.

$\beta$  : Angle de déflexion de volet de bord de fuite.

$\rho$  : Densité de l'air.

$\sigma$  : Surface de glissement.

$\varphi$  : Gain.

## Lettres Latines

$x_\beta$  : Déplacement de la gouverne.

$x_\theta$  : Distance entre le centre élastique et le centre de gravité.

$F$  : La force aérodynamique.

$M$  : Le moment aérodynamique.

$T$  : L'énergie cinétique.

$U$  : L'énergie potentielle.

$Q_j$  : La composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté.

$I_{cg}$  : Le moment de l'inertie autour du centre de gravité.

$m$  : La masse de l'aile.

$\delta_h$  : Le déplacement vertical virtuel.

$\delta_\alpha$  : Le déplacement de tangage virtuel.

$\delta W_a$  : Le travail virtuel total.

$h$  : Déplacement vertical.

$z$  : Le Déplacement du profil selon l'axe  $x$ .

$b$  : Demi corde moyen du profile d'aile.

$c$  : La corde du profile d'aile.

$k_h$  : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement vertical.

$k_\alpha$  : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage.

$K_\beta$  : Le coefficient de rigidité structurel pour la gouverne.

$I_{ea}$  : Moment d'inertie autour de l'axe élastique.

$I_\theta$  : Le moment d'inertie du profil autour du centre de gravité.

$I_\beta$  : Le moment d'inertie du profil autour de la charnière.

$r_\theta$  : Le rayon de giration pour le mouvement circulaire.

$s$  : La surface de la section de l'aile.

$V$  : Vitesse de l'écoulement.

$t$  : Temps.

$t_s$  : Temps de réponse.

$V_f$  : vitesse de flottement.

$Q_h$  : La force généralisée  $h$ .

$Q_\alpha$  : La force généralisée  $\alpha$ .

$A^T$  : Écoulement circulatoire (à circulation non-nulle).

$A^{nc}$  : Écoulement non-circulatoire (à circulation nulle).

## Les matrices et vecteurs

$G$  : matrice de Moore-Penrose.

$\hat{x}(t)$  : Vecteur d'états estimés.

## Les fonctions

$\sigma$  : La surface de glissement.

$J$  : fonction de coût.

$V(x)$  : fonction de Lyapunov.

$U_{eq}$  : Commande équivalente.

$U_n$  : Commande de commutation ou commande non-linéaire.

$C(K)$  : fonction de Theodorsen.

## Abréviations

**ASE** : Aéro-Servo-Elasticité.

**BF** : Boucle Fermée.

**BO** : Boucle Ouverte.

**C<sub>g</sub>** : Centre de gravité (Centre de masse).

**C<sub>e</sub>** : Le centre élastique.

**C<sub>α</sub>** : Centre aérodynamique.

**FBW** : Fly By Wire.

**LCO** : Oscillations à cycle limité (Limit Cycle Oscillations).

**MC** : Mode de Convergence.

**MG** : Mode de Glissement.

**LQR** : Linier Quadratique Regulator.

**LQG** : Linier Quadratique Gaussian.

**SMC**: Sliding Mode Control.

**ISMC**: Integral Sliding Mode Control.

# Table des matières

**Remerciements**

**Dédicace**

**Résumé**

**Liste des acronymes et abréviations**

**Table des matières**

**Liste des figures**

**Liste des tableaux**

**Liste des annexes**

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
<b>CHAPITRE I : Généralités sur l'aéro-servo-élasticité</b> .....	3
Introduction.....	3
I.1 Notions générales sur l'aéroélasticité .....	5
I.1.1 Définition.....	5
I.1.2 Les modes aéroélastique.....	5
I.1.3 Flottement.....	6
I.2 Notions de bas sur l'aérodynamique.....	7
I.2.1 Définitions.....	7
I.2.2 Types d'écoulement.....	8
I.2.3 Théorème de Theodorsen .....	9
I.3 Notions sur la commande active des systèmes aéroélastiques.....	9
I.3.1 La commande des systèmes aéroélastiques .....	10
<b>CHAPITRE II : Modélisation de système aéroélastique</b> .....	13
II.1 Introduction .....	13
II.2 La modélisation de système aéroélastique.....	13
II.2.1 Hypothèses dumodèle .....	13

II.2.2 L'énergie cinétique et l'énergie potentielle.....	15
II.2.3 Les forces généralisées.....	15
II.3 La modélisation aérodynamique.....	17
II.3.1 Introduction.....	17
II.3.2 Les Conditions aux limites.....	18
II.3.3 La représentation d'état du modèle.....	20
II.3.4 Conclusion.....	23
<b>CHAPITRE III : La commande optimale et robuste.....</b>	<b>24</b>
III.1 Introduction .....	24
III.2 La commande optimal.....	24
III.2.1 Commende linière quadratique LQR .....	24
III.2.2 Commande Linéaire Quadratique Gaussienne LQG .....	29
a) Principe de la commande LQG.....	29
b) Propriétés .....	30
c) Choix des matrices de covariance et calcul de gain.....	31
III.3 Commande par mode glissant .....	31
III.3.1 Définition.....	31
III.3.2 Propriétés .....	31
III.3.3 Principe de la commande par mode de glissement .....	32
III.3.4 La dynamique du système à commander .....	32
III.3.5 Détermination de la commande .....	33
1) La loi de commande équivalente .....	33
2) La commande discontinue (non-linéaire) $U_n(t)$ .....	35
III.3.8 Phénomène de réticence (chattering) :.....	36
III.3.9 Solution pour le problème de réticence .....	37
III.4 Commande par mode glissant intégrale (ISMIC).....	38
III.4.1 Propriétés de l'ISMIC .....	38
III.4.2 Calcul de la loi de commande.....	38

III.4.3 Principe de conception de la loi de commande et la commande équivalente.....	39
III.4.4 La Surface de glissement .....	40
III.4.5 La commande discontinue $U_n(t)$ de l'ISM .....	41
III.5 Conclusion.....	42
<b>CHAPITRE IV : Résultats et interprétation.....</b>	<b>43</b>
I.1 Introduction.....	43
I.2 Simulation en boucle ouverte.....	43
I.2.1 Interprétation .....	44
I.3 Simulation en boucle fermée avec gain LQR .....	45
I.3.1 Interprétation .....	47
I.4 Simulation en boucle fermé avec la commande LQG : .....	48
I.4.1 Interprétation .....	50
I.5 Simulation avec la commande par mode glissant .....	51
I.5.1 Interprétation .....	53
I.6 Simulation avec commande par mode glissant intégral (ISMIC) .....	54
I.6.1 Interprétation.....	56
I.7 Etude comparative .....	57
I.8 Conclusion.....	58

## **Annexes**

### **Références bibliographiques**

# Liste des figures

## Chapitre I

Figure I.1 : Interactions entre les domaines de l'ASE.

Figure I.2 : Diagramme bloc d'un système aéro-servo-élastique type.

Figure I.3 : planeur vol en croisière.

Figure I.4 : 1 profile subsonique, 2 profile transsonique.

Figure I.5 : Organigramme de l'interaction structure-fluide-commande.

## Chapitre II

Figure II.1 : le modèle aéroélastique.

## Chapitre III

Figure III.1 : Schéma bloc de la commande LQR.

Figure III.2 : Schéma bloc de la commande LQG.

Figure III.3 : La dynamique du système à commander.

Figure III.4 : Phénomène de réticence (chattering).

Figure III.5 : La fonction Saturation et la fonction sigmoïde.

## Chapitre IV

Figure IV.1 : La réponse du système en BO pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=91.74\text{m/s}$ .

Figure IV.2 : La réponse du système en BO pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=92,04\text{ m/s}$ .

Figure IV.3 : La réponse du système en BF avec la commande LQR pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v=92,04\text{ m/s}$ .

Figure IV.4 : La réponse du système en BF LQR pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=108,2\text{m/s}$ .

Figure IV.5 : La réponse du système en BF LQR pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=92,04\text{ m/s}$  avec perturbation de Dryden.

Figure IV.6 : La perturbation de Dryden.

Figure IV.7 : Réponse du système en BF avec la commande LQG pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v= 92,04\text{ m/s}$ .

Figure IV.8 : Réponse du système en BF avec la commande LQG pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v= 108.2\text{m/s}$ .

Figure IV.9 : Réponse du système en BF avec LQG pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=92,04$  m/s avec perturbation de Dryden.

Figure IV.10 : Réponse du système en BF avec SMC pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v= 92,04$  m/s.

Figure IV.11 : Surface de glissement de la commande en BF avec SMC à  $v= 92,04$  m/s.

Figure IV.12 : Réponse du système en BF avec SMC pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=169.16$ m/s.

Figure IV.13 : Réponse du système en BF avec SMC pour  $h$ ,  $\alpha$  et la surface de commande à  $v= 92,04$  m/s en présence de perturbation.

Figure IV.14 : Réponse du système en BF avec ISMC pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v= 92,04$  m/s.

Figure IV.15 : Surface de glissement de la commande en BF avec ISMC à  $v= 92,04$  m/s.

Figure IV.16 : Réponse du système en BF avec ISMC pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v= 108,2$ m/s.

Figure IV.17 : Réponse du système en BF avec ISMC pour  $h$ ,  $\alpha$  et la surface de commande en présence de perturbation à  $v= 92,04$  m/s.

Figure (E.1) : Implémentation de la commande LQR, LQG, SMC et ISMC pour le système non linéaire sous MATLAB SIMILUNK.

Figure (E.2) : Le sous-système de la commande SMC et ISMC sous MATLAB SIMILUNK.

## Liste des Annexes

**Annexe A :** Théorème de Theodorsen.

**Annexe B :** Les fonctions  $T_n$ .

**Annexe C :** Théorème de Lyapunov.

**Annexe D :** Filtre de Kalman.

---

## Introduction général

Les enjeux de sécurité dans les projets de construction aéronautique représentent une préoccupation constante pour les constructeurs. Dans le but de prévenir toutes les situations accidentelles qui risquent de survenir au cours d'un vol [1].

L'un des principaux défis auxquels sont confrontés les concepteurs d'avions aujourd'hui est celui d'aéroélasticité. Les phénomènes d'aéroélasticité peuvent avoir une influence significative sur la conception des véhicules de vol. En effet, ces effets peuvent grandement modifier les exigences de conception qui sont spécifiés pour les disciplines de performance, de charges structurelles, la stabilité de vol et de contrôle [2].

L'étude de ce phénomène, appelé flottement, est extrêmement important compte tenu des ruptures survenues en vol attribuées à l'instabilité de la réponse structurale des surfaces portantes. Ce phénomène de vibration aéroélastique se produit au-delà d'une vitesse critique qui dépend du comportement dynamique de la structure et de la configuration du vol. Il se manifeste par une vibration oscillatoire qui s'amorce spontanément sous l'action de la moindre perturbation et dont l'amplitude croît jusqu'à la rupture. Ce phénomène très dangereux se déclenche sans prévenir, car aucun indice ne permet de déceler l'approche de la vitesse critique. La rapidité avec laquelle la vibration s'amplifie varie selon les cas, mais le plus souvent elle est telle que la rupture survient avant que l'on ait eu le temps de réduire la vitesse pour quitter le domaine d'instabilité. Dans ce cas, les aéroélasticiens emploient le mot "explosif" pour donner une idée de la soudaineté du phénomène [3].

Au début de l'histoire de l'aviation ce problème était minimal à de faibles vitesses de vol, des facteurs de sécurité et des performances modérées sont exigées. Cependant, Les avions actuels devraient repousser les limites physiques en termes de vitesse, d'altitude, de maniabilité, d'endurance, de portée et de coût. Les concepteurs se sont tournés vers des matériaux légers pour une utilisation avec les moteurs de forte puissance pour réduire le poids afin de transporter plus de carburant et de charges utiles. Ces matériaux légers induisent plus de souplesse que les matériaux d'aéronefs conventionnels, qui lorsqu'ils sont utilisés à des vitesses et des altitudes importantes posent des préoccupations aéroélastiques importantes [1].

La suppression de flottement est un sujet très important, et chaque constructeur doit prendre toutes les précautions nécessaires dans le but de l'éviter tout en conservant les performances de l'avion. Pour cela, les techniques passive et active ont été proposées.

---

Cependant, la première reste inefficace suite à leurs impacts négatifs sur les performances de l'avion (Augmentation de poids), mais avec le développement de la commande active, il est devenu possible maintenant de retarder et même de supprimer ce phénomène tout en conservant les performances de l'avion.

L'étude que nous présentons ici se situe dans le cadre d'exploiter la commande active, et l'appliquer sur un système qui est non linéaire, dans le but de réduire les vibrations et de retarder le phénomène de flottement.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres, tel que :

Le premier chapitre est entièrement consacré à une vision générale sur l'aéro-servo-élasticité et le phénomène de flottement ainsi que la solution active proposée pour ce phénomène.

Le deuxième chapitre commencera en premier lieu par l'élaboration des équations qui régissent le comportement dynamique structurelle du système par l'application des équations de Lagrange. Ensuite, les équations des forces aérodynamiques sont obtenues par la théorie de Théodorsen pour un écoulement instationnaire via l'approximation de Roger. La forme d'état du système globale est obtenu par la suite.

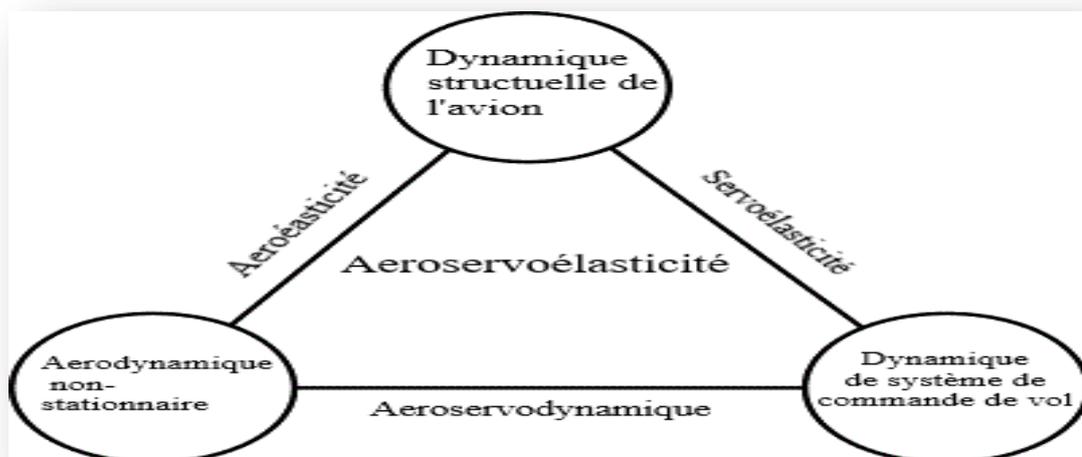
Le troisième chapitre est consacré entièrement à l'étude des lois des commandes envisagées. Il s'agit de la loi de commande optimale LQR et LQG ainsi que la loi de commande par mode glissant conventionnel et intégral.

Le quatrième chapitre sera consacré à la présentation des résultats de simulation et aux différentes interprétations obtenues de l'application des stratégies des lois de commande explicitées en troisième chapitre.

***CHAPITRE I***  
***Généralités sur***  
***l'Aéro-servo-élasticité***

## Introduction

L'aéroservoélasticité (ASE) est une technologie multidisciplinaire qui traite l'interaction de la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamique et le système de contrôle de vol (figure(I.1)). Des modèles mathématiques détaillés sont nécessaires pour prédire avec précision l'interaction ASE et concevoir des systèmes de contrôle actif pour les appliquer sur les structures variables [4].



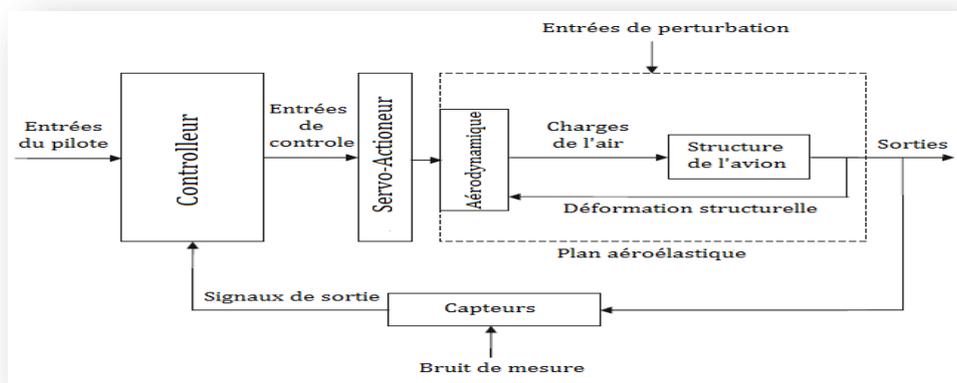
*Figure I.1.* Interactions entre les domaines de l'ASE.

Y a pas longtemps l'influence de "Interactions ASE" sur la stabilité et les performances de la véhicule a été considérée comme des préoccupations majeure pour les constructeur aéronautique. Des exemples récents incluent le YF-16 et le F-18 qui ont présenté des interactions dynamiques défavorables entre les caractéristiques aéroélastiques de la cellule et leur système de commandes de vol [4].

Il y a eu beaucoup de progrès au cours des dernières années par de nombreux chercheurs, trop nombreux pour être cités ici, qui ont démontré l'utilité de la technologie des contrôles actifs pour modifier favorablement la réponse aéroélastique caractéristiques des véhicules aériens. Ces manifestations promettent d'importantes améliorations des performances de l'avion et la stabilité tout en réduisant le poids structurel. Aujourd'hui, L'ASE est en train de devenir un facteur de conception viable pour répondre aux exigences de poids minimum, performances optimisées, et des exigences multiples imposées aux futures modèles. Il est évident que l'avenir exigera des systèmes de contrôle robuste et des structures flexibles, deux ingrédients nécessitant une interdisciplinarité importante communication non

seulement pour éviter les effets négatifs de l'ASE mais aussi d'en tirer la meilleur parti de cet technologie prometteuse. De plus, l'ASE est en train de devenir encore plus multidisciplinaire dans la mesure où les technologies de l'ASE doit maintenant interagir et communiquer avec des experts en fatigue structurale, thermodynamique et propulsion [4].

L'aéroélasticité est étudiée depuis un siècle, mais l'étude de l'impact et l'interaction entre un système de contrôle actif et l'aéroélasticité dynamique d'un avion est un sujet relativement récent. La focalisation sur ce thème était avec l'apparition de la nouvelle conception " Fly-By-Wire " (FBW) ; qui fait boucler les surfaces de commande avec la réponse dynamique du système (Figure (I.2)) [5].



**Figure I.2 :** Diagramme bloc d'un système aéro-servo-élastique type.

L'exemple le plus connu d'une telle interaction est le flottement (Flutter) qui est un accouplement dynamiquement catastrophique entre le mouvement élastique, la charge aérodynamique, et le contrôleur-Surface actionnée. Beaucoup d'accidents ont été considérés comme conséquences d'un accouplement ASE instable ou imprévu. Pour éliminer ce problème, deux types de solutions sont utilisées : Solution Passive qui consiste à l'augmentation de la rigidité de la structure mais qui est coûteuse et pas pratique de point de vue poids et performances. Et une solution active moins coûteuse dans laquelle, des surfaces mobiles de l'aile sont contrôlées d'une façon automatique [5].

D'une façon générale, l'étude de l'ASE nécessite d'avoir des connaissances générales concernant les trois domaines suivants : l'aéroélasticité, l'aérodynamique et les techniques de commande ainsi que les interactions entre eux [5].

## I.1 Notions générales sur l'aéroélasticité

### I.1.1 Définition

L'aéroélasticité étudie les vibrations des structures élastiques dans un écoulement d'air. Une structure souple comme une aile d'avion ou un grand pont, peut se mettre à vibrer à cause de l'écoulement d'air. Celui-ci est dû à la vitesse de l'avion ou bien au vent dans le cas des ouvrages de génie civil [6].

### I.1.2 Les modes aéroélastique

#### a. *Aéroélasticité statique*

Les phénomènes d'aéroélasticité statiques se caractérisent par une absence d'évolution du système aéroélastique au cours du temps. Le meilleur exemple de ce type de phénomènes est la forme d'un avion en vol de croisière (Figure(I.3)). Cette forme dépend des efforts aérodynamiques qui s'exercent sur l'avion. Or ces efforts aérodynamiques dépendent de la forme de l'avion [7].



*Figure I.3* : planeur vol en croisière.

Ces phénomènes peuvent être vus comme un problème d'équilibre entre le fluide et la structure. Ils soulèvent donc les problèmes généraux d'étude des points d'équilibres de systèmes, et peuvent également causer l'endommagement et la rupture du système. Tout d'abord, si les déformations imposées génèrent des contraintes structurelles supérieures à celles acceptées par la structure, le système se déformera de manière irréversible. Ensuite, la modification de la forme de l'avion peut modifier la position du foyer aérodynamique de

l'avion et donc perturber l'équilibre et la stabilité de l'avion : il est donc important de connaître la forme de l'avion en vol.

### **b. Aéroélasticité dynamique**

Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique se caractérisent par une évolution dans le temps du système aéroélastique. Parmi ces phénomènes, on peut distinguer deux familles :

- Les phénomènes dans lesquels l'évolution du système au cours du temps est provoquée par une instabilité propre au système. Ce type de phénomène correspond au flottement.
- Les phénomènes forcés dans lesquels l'évolution temporelle du système est provoquée par une action extérieure.

Notons par ailleurs qu'il est toujours possible de considérer les phénomènes d'aéroélasticité statique comme un cas particulier des phénomènes d'aéroélasticité dynamique [7].

## **I.1.3 Flottement**

### **Définition**

On présente le flottement comme un phénomène dangereux qui se termine en générale par la rupture d'un élément de l'avion, il peut être déterminé comme une instabilité dynamique de la structure. Le flottement apparait suite à une interaction des forces aérodynamiques, élastiques et d'inerties qui se produisent à une vitesse critique appelée vitesse du flottement [8].

### **Types de flottement**

-**Flottement classique** concernant les profils d'ailes résulte d'un couplage des mouvements de torsion et de flexion de l'aile dont les fréquences sont modifiées par les forces aérodynamiques. Si les fréquences de torsion et de flexion se rejoignent pour une vitesse de vent donnée, le mouvement sera amplifié très rapidement et conduira généralement à la destruction de l'engin. Dans ce problème, l'écart de fréquence entre le mouvement de torsion et celui de flexion est fondamental : plus celui-ci est grand, plus la vitesse critique sera grande [9].

-**Flottement de décrochage** qui reste le souci principal pour la conception des tabliers de pont. Cette instabilité sur un mouvement de torsion simple résulte d'un déséquilibre entre l'amortissement structural et un amortissement aérodynamique négatif, consécutivement à de mauvaises caractéristiques aérodynamiques. C'est ce mécanisme qui est à l'origine de la destruction du pont de Tacoma (Scanlan 1971), et non une résonance avec le détachement

tourbillonnaire. La vitesse critique est déterminée lorsque l'amortissement total du système s'annule. Dans le cas des tabliers de pont, seuls les essais de soufflerie sont aujourd'hui pertinents pour étudier ce phénomène, les théories quasi-statiques n'étant pas suffisamment fiables [9].

-**Le galop** ce cas est similaire au flottement de décrochage mais se produit sur un mouvement de translation (Ou de flexion) transverse à la direction du vent. Il a été décrit initialement par Den Hartog en 1934 (Den Hartog 1985) qui a proposé un critère devenu d'usage courant. Les structures concernées sont non profilées et de section à faible rapport d'aspect, certaines passerelles pour piétons par exemple. Il existe également un mécanisme très proche, **le galop de sillage** qui peut apparaître sur une structure flexible placée dans le sillage d'une autre, comme dans les faisceaux de tubes d'échangeur de chaleur ou les séries de cheminées [9].

-**La divergence**, également appelée flottement de fréquence nulle. Ce phénomène est d'une perte de raideur en torsion simple. Bien que théoriquement possible, il reste en pratique très rare. Il conduit à la destruction très rapide de la structure dont la raideur totale devient négative au-dessus de la vitesse critique. Il est rapporté que les essais de Samuel Langley pour faire voler son avion en 1903 ont échoué à cause de ce phénomène.

-**oscillations à cycle limité (Limit Cycle Oscillations ou LCO)** : Elle s'intéresse principalement au comportement non linéaire du flottement à travers le problème de fatigue de la structure. L'objectif est de prédire l'amplitude des réponses du système en fonction de la vitesse [9].

## I.2 Notions de bas sur l'aérodynamique

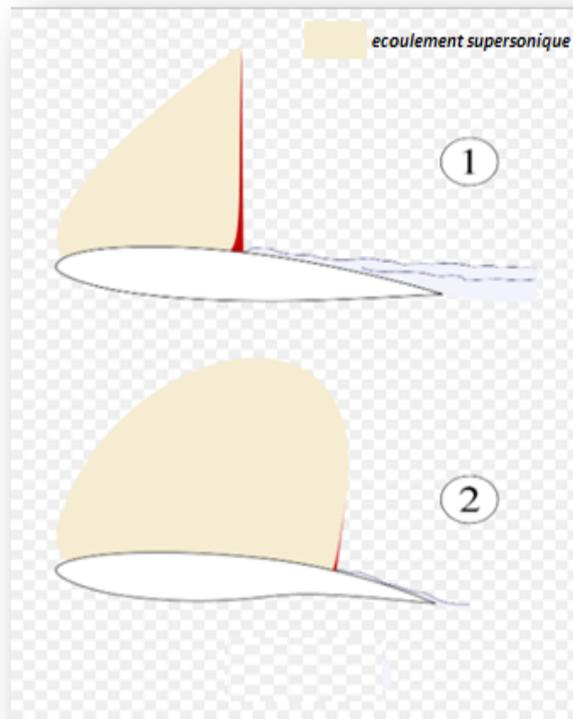
### I.2.1 Définitions

L'aérodynamique branche de la dynamique des fluides qui portent sur la compréhension et l'analyse des écoulements d'air, ainsi que sur leurs effets sur des éléments solides qu'ils environnent. Ces effets peuvent naturellement être provoqués par un corps immobile soumis à un flux d'air animé d'une vitesse ou par un corps se déplaçant dans l'atmosphère ou encore par la combinaison des deux propositions précédentes [10].

## I.2.2 Types d'écoulement

Un écoulement est dit subsonique si sa vitesse est inférieure à celle du son (Figure(I.4)). L'écoulement subsonique est caractérisée par un nombre appelé nombre de Mach  $M=U/a$ , où  $U$  est la vitesse du fluide et  $a$ , la vitesse du son.  $a=\sqrt{\gamma rT}$ .

- $M < 1$  alors l'écoulement est subsonique.
- $M > 1$ , l'écoulement est supersonique ( $1 < M < 5$  environ, l'écoulement est dit transsonique;  $M > 5$ : l'écoulement est hypersonique) [11].



*Figure I.4* : 1 profil subsonique, 2 profil transsonique.

Ou on définit :

**-Aérodynamique stationnaire:** C'est l'étude qui porte principalement sur la compréhension et l'analyse des écoulements d'air stationnaires dont les paramètres aérodynamiques restent invariables avec le temps.

**-Aérodynamique quasi-stationnaire:** C'est l'étude qui porte principalement sur la compréhension et l'analyse des écoulements d'air dont les paramètres aérodynamiques présentent des variations faibles avec le temps, et donc, ces variations peuvent être négligées

et ces écoulements peuvent être considérés comme stationnaires dans le but de faciliter leur étude sans influencer l'exactitude des résultats.

**-Aérodynamique instationnaire:** C'est l'étude qui porte principalement sur la compréhension et l'analyse des écoulements d'air instationnaires dont les paramètres aérodynamiques varient fortement avec le temps, c'est lorsque les effets des écoulements d'air sur les éléments solides qu'ils environnent présentent des changements successifs au niveau des paramètres aérodynamiques.

### I.2.3 Théorème de Theodorsen

L'approche de Theodorsen a été développée pour le calcul des forces aérodynamiques instationnaires d'un profil d'aile en mouvement harmonique de flexion/torsion dans un écoulement incompressible en supposant que :

- La surface portante est assimilée à une plaque plane.
- L'oscillation du profil s'effectue autour du centre élastique.
- Le cadre de l'étude relève de la théorie linéarisée des profils minces en incompressible [12].

## I.3 Notions sur la commande active des systèmes aéroélastiques

Comme cité précédemment, la suppression des problèmes liés à l'aéroélasticité de la structure se fait suivant deux méthodes principales : Une méthode passive, qui consiste à augmenter la rigidité de la structure mais qui est aussi coûteuse et n'est pas pratique. Et une méthode active, qui consiste à introduire des systèmes de commande des surfaces mobiles de l'avion, cette méthode présente une solution efficace aux problèmes de vibrations, assurant une durée de vie plus longue de la structure (ailes, ...), plus de confort à bord de l'avion, et augmentant la vitesse critique de flottement [5].

La méthode active nécessite l'étude des phénomènes aéroélastiques se produisant autour de la structure de l'avion, dans le but d'établir un système de contrôle des surfaces mobiles assurant l'amortissement des vibrations et la dissipation de toute énergie fournie par les charges aéro-dynamiques à la structure. Pour cela, un modèle mathématique de l'avion doit être bien établi, tel que le défi le plus important dans la conception et l'analyse mathématique de l'ASE est de dériver le modèle aérodynamique approprié qui assure la commande du système aéroélastique d'une manière souple, sachant que la modélisation est la représentation

d'un modèle par des moyens mathématique, géométrique, cinématique...etc. et le modèle mathématique permet d'analyser des phénomènes réels et de prévoir des résultats à partir de l'application d'une ou plusieurs théories à un niveau d'approximation donné [5].

D'une manière globale, les éléments essentiels pour une commande active sont :

– *Le type de la commande* : Qui est choisi en tenant compte de plusieurs paramètres (Comme la robustesse et la tolérance aux erreurs ; ...etc.). Parmi ces commandes, ils existent :

- Les commandes PID classiques (Proportional Integral Derivative) ;
- La commande  $H_\infty$  ;
- La commande LQG (Linear Quadratic Gaussian compensator) ;
- La commande LQR (Linear Quadratic Regulator) ;
- La commande par mode glissant ; ...etc.

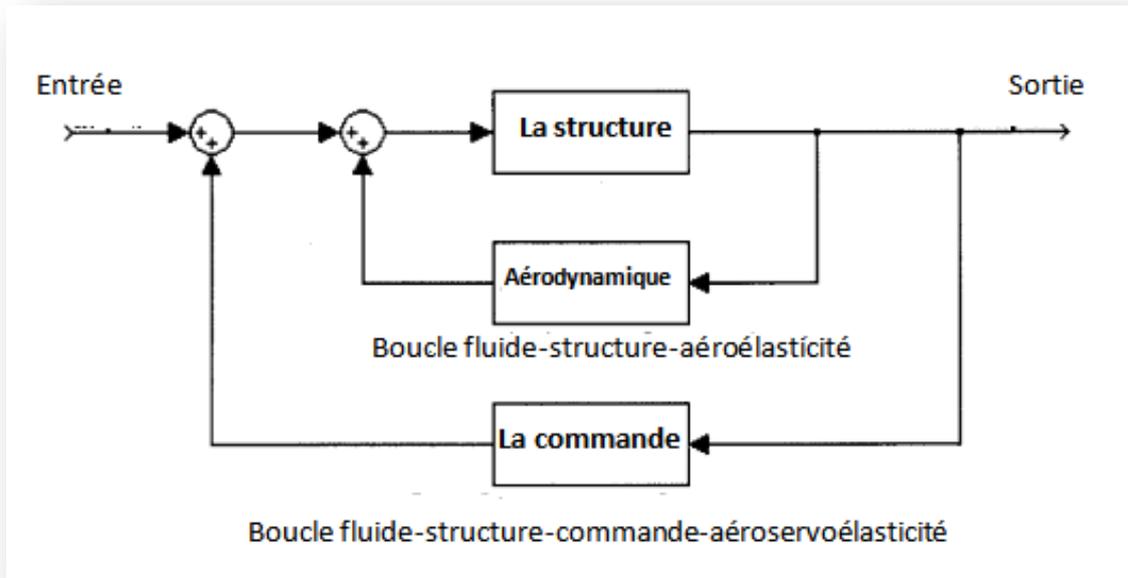
– **Les surfaces de contrôle** : Qui se trouvent au niveau des ailes et des gouvernes de l'aéronef.

– **Les servo-actionneurs** : Qui sont des sous-systèmes dont les fonctions de transfert sont généralement du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>nd</sup> ordre, et qui se mettent entre calculateurs et surfaces de contrôle. Ils doivent avoir un comportement stable, et ils sont très importants pour la conception d'une stratégie de stabilisation.

Ce travail se concentre sur les surfaces de commande de l'aile au bord de fuite qui permettent de réaliser une commande active, de redimensionner la forme de l'aile pour minimiser ou d'éliminer les effets liés à l'interaction fluide/structure tout comme les becs et les volets.

### **I.3.1 La commande des systèmes aéroélastiques**

La commande d'un système aéro-servoélastique contient généralement une boucle interne concernant le contrôle de l'interaction fluide structure (Contrôle d'aéroélasticité) et une boucle externe concernant l'interaction fluide–structure– commande choisie (Figure(I.5)).



*Figure I.5* : Organigramme de l'interaction structure-fluide-commande.

L'un des travaux dans le domaine de la commande active des systèmes aéroélastiques, c'est celui de Tewari A. qui a donné une synthèse générale dans ce sens pour les systèmes linéaires et pour les systèmes non linéaires, en étudiant la stabilité des systèmes ainsi que la suppression du phénomène de flottement et des LCOs, appliquant des différentes lois de commande.

La méthode utilisée dans ce projet pour l'étude de la stabilité des modes flexibles de l'avion est basée sur la loi de commande optimale, qu'est a été étudiée dès le XIX siècle, une des grandes applications de cette commande a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère d'énergie. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité. Notre étude dans ce cadre se portera sur deux commandes qui sont :

- La commande optimale LQR.
- La commande optimale gaussienne.

Dans la commande des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, les lois de commande classiques peuvent être insuffisantes car elles sont moins robustes. Dans ce cas on doit faire appel à des lois de commande avancées [13].

La commande par mode de glissement fait partie de la famille des contrôleurs à structure variable. L'importance des contrôleurs par mode glissant réside dans : La grande précision, la réponse dynamique rapide, la stabilité, la simplicité de la conception et l'implémentation, et la robustesse vis-à-vis la variation des paramètres internes ou externes [14].

*CHAPITRE II*

*Modélisation du système*

*aéroélastique*

**I.**

**II.**

## II.1 Introduction

Le but est de présenter un modèle apte de supprimer l'instabilité due au flottement, pour cela on doit modéliser le système mathématiquement qui permet la description et la prédiction du comportement du système.

Pour établir ce modèle-là, on peut appliquer le théorème de Lagrange ou bien le théorème de Newton en basant sur le calcul de l'énergie cinétique et potentielle du système.

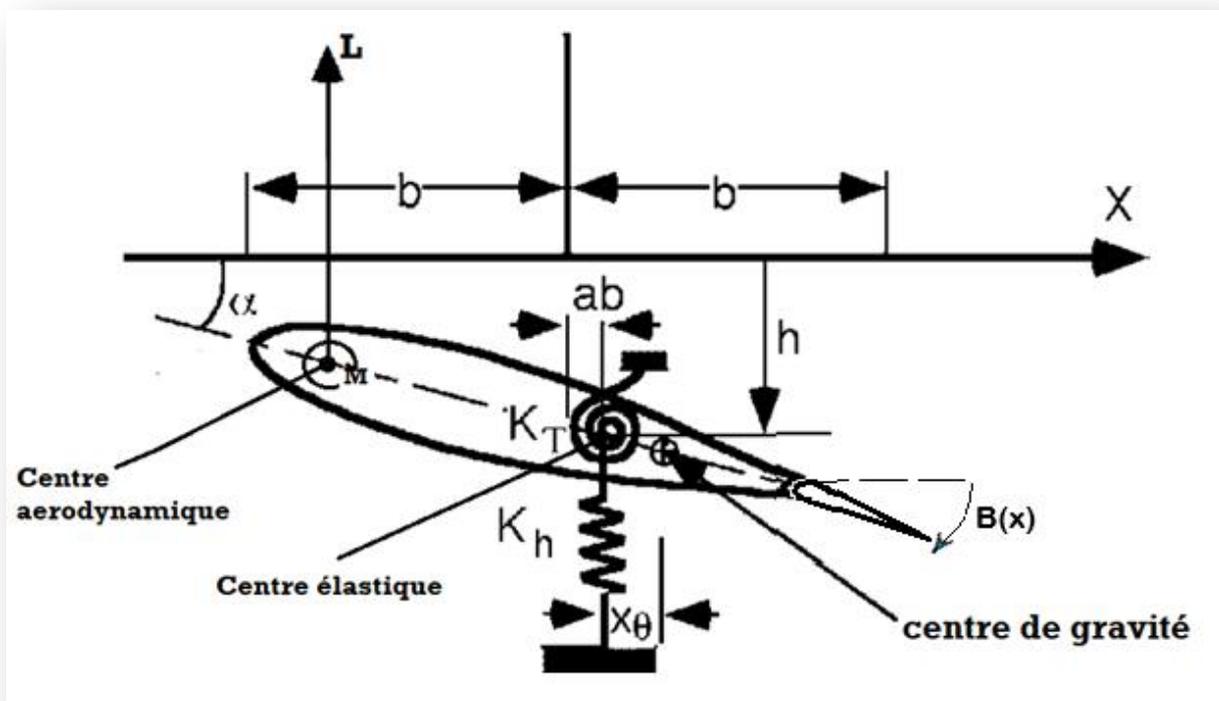
Dans notre étude on va appliquer le formalisme de Lagrange sur une section d'aile bidimensionnelle avec une seule surface de contrôle au bord de fuite.

Les forces aérodynamiques sont obtenues à l'aide de l'approche de Theodorsen pour le profile mince. [12]

## II.2 La modélisation de système aéroélastique

### II.2.1 Hypothèses du modèle

Dans ce chapitre on a adopté un modèle simplifié a deux degrés de libérés, l'un est le mouvement de tangage et l'autre est le mouvement verticale.



Figure(II.1) : Le modèle aéroélastique.

- Le mouvement vertical  $h$  et Le mouvement de tangage  $\alpha$ , sont mesurés à partir du centre élastique.
- On suppose que ces deux déplacements sont faibles.
- L'étude est faite en mode instationnaire.
- La rigidité de la structure est représentées par les deux ressorts de rigidité  $K_h$  (mouvement verticale) et  $K_t$  (torsion).
- $K_t$  et  $K_h$  sont supposées constants.
- $a$  est une distance non-dimensionnelle qui détermine la distance entre l'axe élastique et le centre de gravité par rapport à la mi- corde ( $b$ ).
- La force de portance  $L$  et le moment de tangage  $M$ , sont mesurés à partir du centre aérodynamique. [12]

## II.2.2 L'énergie cinétique et l'énergie potentielle

### a. L'énergie potentiel

L'énergie potentielle est emmagasinée au niveau du ressort attaché à la charnière de la surface de control et à l'axe élastique.

$$U = \frac{1}{2} (K_h h^2 + K_T \alpha^2 + K_\beta \beta^2) \quad (\text{II.1})$$

### b. L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{z}^2 \rho dx \quad (\text{II.2})$$

Avec  $\rho$  représente la masse par unité de longueur du profil d'aile.

$m = \int \rho dx$  : représente la masse.

Le moment d'inertie du profil autour du centre de gravité  $I_\theta = \int \rho x^2 dx = mr_\theta^2$ .

Le moment d'inertie du profil autour de la charnière  $I_\beta$ .

Avec :  $r_\theta$ , le rayon de giration pour le mouvement circulaire.

Alors l'énergie cinétique peut être écrite de cette forme :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + m x_\theta \dot{h} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} I_\theta \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_\beta \dot{\beta}^2 + m x_\beta \dot{h} \dot{\beta} + (I_\beta + m x_\beta (bc - ba)) \alpha \dot{\beta} \quad (\text{II.3})$$

### II.2.3 Les forces généralisées

Les forces généralisées ( $\mathbf{Q}$ ) sont calculées en utilisant la méthode de travail virtuel. Le travail virtuel dû aux forces aérodynamiques de portance ( $\mathbf{L}$ ) et moment ( $\mathbf{M}$ ) :

$$\delta W_a = \int \Delta p \delta z dx = \int \Delta p \{\delta h + x \delta \alpha\} dx = Q_h \delta h + Q_\alpha \delta \alpha \quad (\text{II.4})$$

$\delta h$  : Le déplacement vertical virtuel.

$\delta \alpha$  : Le déplacement de tangage virtuel.

$\delta W_a$ : Le travail virtuel total.

On obtient par l'équation de Lagrange les équations de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial q} = Q, \text{ avec : } q=h, \alpha, \beta$$

Après la dérivation on définit :

$$m\ddot{h} + mx_\theta\ddot{\alpha} + mx_\beta\ddot{\beta} + k_h h = F \quad (\text{II.5})$$

$$m x_\theta \dot{h} + mr_\theta^2 \ddot{\alpha} + (mr_\theta^2 + mx_\beta(bc - ba))\ddot{\beta} + k_T \alpha = M_\alpha \quad (\text{II.6})$$

$$mx_\beta \dot{h} + (mr_\theta^2 + mx_\beta(bc - ba))\ddot{\alpha} + mr_\beta^2 \ddot{\beta} + k_\beta \beta = M_\beta \quad (\text{II.7})$$

On peut les écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & mx_\theta & mx_\beta \\ mx_\theta & mr_\theta^2 & mr_\theta^2 + mx_\beta(bc - ba) \\ mx_\beta & mr_\theta^2 + mx_\beta(bc - ba) & mr_\beta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ M_\alpha \\ M_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Si on suppose que le mouvement est harmonique ( $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 e^{i\omega t}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 e^{i\omega t}$ ) on peut écrire les équations ( II.5), ( II .6)et ( II .7) comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{x_\theta} & \overline{x_\beta} \\ \overline{x_\theta} & \overline{r_\theta^2} & \overline{r_\theta^2} + \overline{x_\beta}(c - a) \\ \overline{x_\beta} & \overline{r_\theta^2} & \overline{r_\beta^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{h}/b \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \overline{r_\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_\beta^2 \overline{r_\theta^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h/b \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{bmatrix} F/mb \\ M_\alpha/m \\ M_\beta/mb^2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\omega_h^2 = k_h / m ,$$

$$\omega_\theta = k_T / I_\theta ,$$

$$\overline{x_\theta} = x_\theta / b ,$$

$$\overline{r_\theta} = r_\theta / b$$

$$\dot{h} = -\omega^2 h \text{ et } \dot{\alpha} = -\omega^2 \alpha$$

On définit les matrices suivantes tel que :

$$\text{La matrice de masse : } \begin{bmatrix} 1 & \overline{x_\theta} & \overline{x_\beta} \\ \overline{x_\theta} & \overline{r_\theta^2} & \overline{r_\theta^2} + \overline{x_\beta}(c - a) \\ \overline{x_\beta} & \overline{r_\theta^2} & \overline{r_\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{La matrice de rigidité : } \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \overline{r_\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_\beta^2 \overline{r_\theta^2} \end{bmatrix}$$

## II.3 La modélisation aérodynamique

### II.3.1 Introduction

Pour calculer les forces aérodynamiques de portance (L) et tangage (M), on va appliquer la théorie aérodynamique de Théodersen pour le calcul des forces aérodynamiques instationnaires d'un profil d'aile en mouvement harmonique de flexion/torsion dans un écoulement incompressible.

Dans cette méthode on suppose que :

- La surface portante est assimilée à une plaque plane.
- L'oscillation du profil s'effectue autour du centre élastique.
- Le cadre de l'étude relève de la théorie linéarisée des profils minces en incompressible.

Le principe de cette méthode est l'application de la méthode des écoulements potentiels en modélisant l'écoulement instationnaire par la superposition de deux écoulements élémentaires : écoulement circulaire (à circulation non-nulle)  $A_c$  et écoulement non-circulaire (à circulation nulle)  $A_{nc}$ . [12]

### II.3.2 Les Conditions aux limites

Le Déplacement du profil selon  $x$  est :

$$z = -h - x\alpha - (x - (bc - ba))\beta U(x - (bc - ba)) \quad (\text{II.10})$$

Avec :

**cb** détermine la distance entre le centre élastique et la charnière.

**ab** : distance entre C.E et la demi-corde.

$U(x - bc)$  : est une fonction d'échelon unitaire.

La Vitesse du profil est donc :

$$\begin{aligned} w_a(x, t) &= -\left(\frac{\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad (\text{II.11}) \\ &= -[h\dot{\alpha} + \dot{\alpha}(x - ab)] - V\alpha - \dot{\beta}(x - bc)U(x - bc) - V\beta U(x - bc) \end{aligned}$$

La force totale et le moment résultant à partir des écoulements à circulation nulle et non-nulle est [12] :

$$F = -\pi\sqrt{\rho}b^2[\dot{h} + V\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha} - \frac{V}{\pi}T_4\beta - \frac{b}{\pi}T_1\beta] - 2\pi\rho VbQC(k) \quad (\text{II.12})$$

$$M_\alpha = \pi\sqrt{\rho}b^2 \left[ ba\dot{h} - Vb\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} - b^2\left(\frac{1}{8}\right)\ddot{\alpha} - \frac{V^2}{\pi}(T_4 + T_{10})\beta + \right. \\ \left. (c - a)T_4 + \frac{Vb}{\pi}\left\{-T_1 + T_8 - \frac{1}{2}T_{11}\right\}\beta + \frac{b^2}{\pi}\{T_7 + (c - a)T_1\}\beta \right] + \\ 2\pi\rho Vb^2T_{12}QC(k) \quad (\text{II.13})$$

$$M_\beta = \pi\rho b^2 \left[ \frac{b}{\pi}T_1\dot{h} + \frac{Vb}{\pi}\{2T_9 + T_1 - (a - \frac{1}{2})T_4\}\dot{\alpha} - \frac{2b^2}{\pi}T_{13}\ddot{\alpha} - \left(\frac{V}{\pi}\right)^2 \right. \\ \left. (T_5 - T_4T_{10})\beta + \frac{Vb}{2\pi^2}T_4T_{11}\beta + \left(\frac{b}{\pi}\right)^2T_3\beta \right] - \rho Vb^2T_{12}QC(k) \quad (\text{II.14})$$

Avec :

$C(k)$  est la fonction de Théodorsen (**voir Annexe A**).

$$Q = V\alpha + h + \dot{\alpha}b\left(\frac{1}{2} - a\right) + \frac{V}{\pi}T_{10}\beta + \frac{b}{2\pi}T_{11}\beta \quad (\text{II.15})$$

$T_n$ , sont des fonctions (**voir Annexe B**).

Notant que  $Q$  peut être réécrit en utilisant cette forme avec les matrices  $S_1$  and  $S_2$

$$Q = V[S_1]\{x_s\} + b[S_2]\{X_s\} \quad (\text{II.16})$$

Avec:

$$S_1 = \left[ 0 \ 1 \ \frac{T_{10}}{\pi} \right] \quad (\text{II.17})$$

$$S_2 = \left[ 1 \ (0.5 - a) \ \frac{T_{11}}{2\pi} \right] \quad (\text{II.18})$$

$$x_s = \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

On peut écrire les forces et les moments aérodynamiques sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{F}{b} \\ \frac{M_\alpha}{b^2} \\ \frac{M_\beta}{b^2} \end{bmatrix} = q[2C(k)\{R\}[S_1]\{x_s\} + \frac{2b}{v}C(k)\{R\}[S_2]\{\dot{x}_s\} + \frac{2b^2}{v^2}[M_{nc}]\{\ddot{x}_s\} + \frac{2b}{v}[B_{nc}]\{\dot{x}_s\} + 2[K_{nc}]\{x_s\}] \quad (\text{II.20})$$

Où :

$$R = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 2\pi(a + 0.5) \\ -T_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{II.21})$$

(*nc*) représente la partie non-circulatoire :

$$M_{nc} = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a & T_1 \\ \pi & -\pi\left(\frac{1}{8} + a^2\right) & -2T_{13} \\ T_1 & -2T_{13} & \frac{T_3}{\pi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

$$B_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi & T_4 \\ 0 & \pi\left(a - \frac{1}{2}\right) & -T_{16} \\ 0 & -T_{17} & \frac{-T_{19}}{\pi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

$$[K_{nc}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15} \\ 0 & 0 & \frac{-T_{18}}{\pi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

A partir de l'équation (II.9) et (II.20) :

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}_s\} + [\bar{K}]\{x_s\} = \left(\frac{q}{m}\right)[2C(k)\{R\}[S_1]\{x_s\} + \left(\frac{2b}{v}\right)C(k)\{R\}[S_2]\{\dot{x}_s\} + \left(\frac{2b^2}{v^2}\right)[M_{nc}]\{\ddot{x}_s\} + \left(\frac{2b}{v}\right)[B_{nc}]\{\dot{x}_s\} + 2[K_{nc}]\{x_s\}] \quad (\text{II.25})$$

### II.3.3 La représentation d'état du modèle

Pour représenter et analyser un modèle ASE, il est nécessaire de transformer les équations en représentation d'état. Pour cela on a besoin d'une approximation pour les forces aérodynamiques instationnaires exprimées dans le domaine fréquentiel en termes de fonctions rationnelles pour la variable de Laplace.

Il existe plusieurs méthodes pour la (RFA) tel que la méthode de Roger, et la méthode de la matrice de Pade.

Cependant, la représentation des forces aérodynamiques instationnaire d'une manière précise va engendre un nombre d'état assez important.

Dans ce chapitre, on va utiliser la méthode de Roger qui est très simple et bien précise dans la transformation des forces aérodynamiques instationnaires à partir de domaine fréquentiel au domaine temporel.

Premièrement, on va exprimer les forces aérodynamiques instationnaires dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{bmatrix} F \\ M_\alpha \\ M_\beta \end{bmatrix} = q[2C(k)\{R\}[S_1]\{x_s\} + \left(\frac{2b}{V}\right) C(k)\{R\}[S_2]\{\dot{x}_s\} + \left(\frac{2b^2}{V^2}\right) [M_{nc}]\{\ddot{x}_s\} \left(\frac{2b}{V}\right) [B_{nc}]\{\dot{x}_s\} + 2[K_{nc}]\{x_s\}] \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{bmatrix} F \\ M_\alpha \\ M_\beta \end{bmatrix} = q[2C(k)\{R\}[S_1] + i2kC(k)\{R\}[S_2] - 2k^2 [M_{nc}] + 2[K_{nc}]]\{x_s\} \quad (\text{II.27})$$

Avec ( $s'$ ) est la variable de Laplace non-dimensionnelle :  $s' = ik = sb / V$

$$\begin{bmatrix} F \\ M_\alpha \\ M_\beta \end{bmatrix} = q[2C(k)\{R\}[S_1] + is'C(k)\{R\}[S_2] + 2s'^2[M_{nc}] + 2[K_{nc}]]\{x_s\} \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{bmatrix} F \\ M \\ M_\beta \end{bmatrix} = qA(s')\{xs\} \quad (\text{II.29})$$

L'approximation de Roger prend la forme suivante :

$$[A_{ap}] = [p_0] + [p_1]s' + [p_2]s'^2 + \sum_{j=3}^N \frac{[p_j]}{s' + \gamma_{j-2}} \quad (\text{II.30})$$

Où  $\gamma_{j-2}$  sont les pôles aérodynamiques qui sont souvent présélectionnés. (II.31)

On définit les forces aérodynamiques calculées :

$$[A(s')] = [F(s')] + i[G(s')] \quad (\text{II.32})$$

La partie réelle est imaginaire de la matrice aérodynamique seront respectivement :

$$[A_{ap}]_{Re} = [p_0] + [p_2]s'^2 + \sum_{j=3}^N \frac{[p_j](s'^2)}{s'^2 + (\gamma_{j-2})^2} \quad (\text{II.33})$$

$$[A_{ap}]_{Im} = [p_1]s' + \sum_{j=3}^N \frac{[p_j](\gamma_{j-2})s'}{-s'^2 + (\gamma_{j-2})^2} \quad (\text{II.34})$$

La matrice  $[p_j]$  est déterminée par la méthode des moindres carrés :

$$\sum_i [A_{aero}]^T [A_{aero}] \{x_p\} = \sum_i [A_{aero}]^T \{B_{aero}\} \quad (\text{II.35})$$

$$[A_{aero}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_i^2 & \dots & \frac{k_i^2}{k_i^2 + (\gamma_{j-2})^2} \\ 0 & k_i & 0 & \dots & \frac{(\gamma_{j-2})k_i}{k_i^2 + (\gamma_{j-2})^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

$$[B_{aero}] = \begin{Bmatrix} F(k_i) \\ G(k_i) \end{Bmatrix}_{mn} \quad (\text{II.37})$$

$$\{x_p\} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}_{mn} \quad (\text{II.38})$$

On peut écrire l'équation sous cette forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_s \\ \dot{x}_{a3} \\ \vdots \\ \dot{x}_{aN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{B} & q\bar{M}^{-1}P_3 & \dots & q\bar{M}^{-1}P_N \\ 0 & I & -\left(\frac{V}{b}\right)\gamma_1 I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & -\left(\frac{V}{b}\right)\gamma_{N-2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \\ x_{a3} \\ \vdots \\ x_{aN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{M}B_{Act} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \beta \quad (\text{II.40})$$

Où :

$$\{x_s\} = \frac{s'}{s' + \gamma_{j-2}} \{x_s\} = \frac{s}{\frac{V}{b}\gamma_{j-2}} \{x_s\} \quad (\text{II.41})$$

$$\{\dot{x}_{aj}\} = \{\dot{x}_s\} - \frac{V}{b}\gamma_{j-2}\{x_{aj}\} \quad (\text{II.42})$$

$$\text{Matrice de masse : } \bar{M} = M - qP_2 \left(\frac{b}{V}\right)^2$$

$$\text{Matrice d'amortissement : } \bar{B} = B - qP_1 \left(\frac{b}{V}\right)$$

$$\text{Matrice de rigidité : } \bar{K} = K - qP_0$$

$$\text{Matrice de l'actionneur : } B_{Act} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{\theta}^2 \overline{r_{\theta}^2} \end{pmatrix}$$

Pour réaliser une application numérique sur les équations de mouvement, les valeurs utilisées sont données dans le tableau suivant :

Le paramètre	La valeur	L'unité
$\rho$	0.002378	Kg /m <sup>3</sup>
a	-0.4	Sans unité
b	0.1	m
c	0.6	m
$x_{\alpha}$	0.2	Sans unité
$x_{\beta}$	0.0125	Sans unité
$r_{\alpha}$	Sqrt(0.25)	Sans unité
$r_{\beta}$	Sqrt(0.00625)	Sans unité
$\mu$	40	Sans unité
$w_h$	50	rad/s
$w_{\alpha}$	100	rad/s
$w_{\beta}$	300	rad/s

**Tableau (II.1) : Les valeurs des différents paramètres de l'aile.**

En appliquant ces valeurs Nous avons la représentation d'état suivante :

$$B = 1.0e+005 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0020 & -0.0800 & 1.1200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A = 1.0e+005 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0293 & 0.0185 & -0.0044 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0034 & 0.0022 & 0.0001 & -0.0054 & -0.0033 & -0.0004 & 0.0077 & 0.0048 & -0.0001 & -0.0038 & -0.0023 \\ 0.0246 & -0.1346 & 0.0800 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0005 & -0.0046 & -0.0030 & -0.0002 & 0.0073 & 0.0045 & 0.0005 & -0.0104 & -0.0065 & 0.0001 & 0.0050 & 0.0030 \\ -0.0084 & 0.3382 & -1.1152 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0013 & 0.0106 & 0.0069 & 0.0003 & -0.0169 & -0.0104 & -0.0012 & 0.0241 & 0.0151 & -0.0002 & -0.0117 & -0.0071 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0006 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 \end{bmatrix}$$

**II.3.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, Le modèle dynamique de la section d’aile flexible a été développé par l’utilisation des équations de Lagrange. Ensuite, le modèle aérodynamique instationnaire a été introduit via la fonction de Théodorsen et ensuite approximés par la méthode de Roger.

Enfin le système a été mis sous la forme d’état convenable pour établir une loi de commande qui sera l’objectif du chapitre suivant.

## ***CHAPITRE III***

# ***Commande optimale et robuste***

**I.**

**II.**

**III.**

### III.1 Introduction

Les exigences imposées aux systèmes de contrôle automatique augmentent de plus en plus. Les systèmes sont devenus plus grands et plus complexes, tout en améliorant les critères de performance, tels que temps de réponse et réduction d'erreur, sont demandés. Quel que soit le rôle du système un effort continu est nécessaire pour améliorer performances tout en rendant le système moins cher, plus efficace [15].

Ces développements ont été grandement facilités ces dernières années par la grande disponibilité de microprocesseurs. Une analyse précise et pertinente de la dynamique du système de contrôle est nécessaires pour déterminer la réaction des nouveaux systèmes, ainsi que pour prévoir les effets des modifications proposées sur la réponse d'un système existant, ou à déterminer les modifications nécessaires pour permettre à un système de donner la réponse requise [15].

Dans ce chapitre, on va appliquer ces lois de commandes sur notre système non linéaire à deux degrés de libertés.

### III.2 La commande optimal

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné.

#### III.2.1 Commende linière quadratique LQR

On parle de commande linéaire quadratique lorsque le système est linéaire et la commande est quadratique, cette commande est définie comme étant une commande optimale par retour d'état, consiste à trouver une loi de commande optimale en boucle fermée qui permet d'assurer les performances désirées qui est illustrer dans la figure (III.1) [16] [17].

##### a. La loi de commande LQR

On suppose que l'état  $x(t)$  complet système peut être exactement mesuré à tout moment et il est aussi disponible pour effectuer la chaine de retour.

Soit le système physique donné par les équations d'états suivantes :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{III.1}$$

$$y = Cx + Du \tag{III.2}$$

Si on suppose que l'état complet peut être mesuré à tout moment, il est possible de mettre en application la loi linéaire de commande:

$$u = -Kx + K_r r \tag{III.3}$$

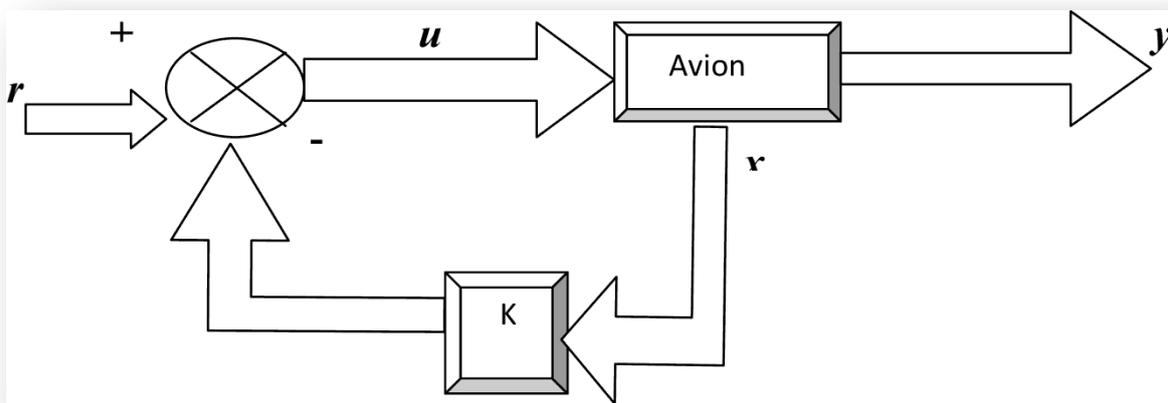


Figure (III.1) : Schéma synoptique de la commande par retour d'état.

$K$  est la matrice de gain de la chaîne de retour.

$r$  est l'entrée commandée par le pilote.

Pour ce type de système, on souligne l'existence d'un théorème sur la stabilisation du système comme suit: Il est possible de trouver une matrice constante  $K$  telle que le système de commande en boucle fermée est asymptotiquement stable. Ceci est vrai si et seulement si le système (III.1) est stabilisé, qui à son tour est vrai si toutes les valeurs propres du système ont des parties réelles négatives.

Si la loi de commande (III,3) est appliquée au système représenté par les équations (III,1) et (III,2), et on obtient la fonction de transfert  $H(s)$  entre la sortie  $y$  et l'entrée  $r$  sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = (C - DK)[sI - (A - BK)]^{-1}B + D \tag{III.4}$$

**Etapas pour trouver le gain optimal  $K$**

Un problème fondamental de conception est le problème du régulateur, où il est nécessaire de réguler les sorties du système à zéro, tout en s'assurant qu'elles démontrent les caractéristiques souhaitables de la réponse dans le temps.

On considère le system linéaire suivant :

$$\dot{x} = A(T)x + B(T)u \tag{III.5a}$$

$$x(\tau_0) = x_0 \tag{III.5b}$$

Dans un premier lieu il faut que le système soit contrôlable pour que la stabilisation et l'exécution aura lieu.

L'objectif de cette commande est de minimiser une fonction de coût quadratique basée sur les énergies de commande et énergie de sortie. Cette fonction de coût est définie selon l'expression suivante :

$$J = \int_{\tau_0}^T (x^T Qx + u^T Ru) d\tau + x^T(T) Q_T x(T) \tag{III.6}$$

Sachant que :

$x^T(T) Q_T x(T)$  : énergie du système.

$Q$  : Matrice de pondération symétrique positive semi-définie.

$Q_T$ : Matrice positive semi-définie.

$R$ : Matrice de pondération positive définie.

$u^T Ru$ : Energie de commande.

Ainsi que :

$$Q = Q^T \geq 0, R = R^T \geq 0, Q_T = Q_T^T \geq 0 \tag{III.7}$$

Dans le but de minimiser la fonction de coût quadratique (III-2), on définit le Hamiltonien de cette fonction  $J$  comme étant de la forme suivante :

$$H = x^T Qx + u^T Ru + \frac{\partial J}{\partial x} (A(T)x + B(T)u) \tag{III.8}$$

Les conditions d'optimalité se présentent alors comme suit :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2Ru + B^T \nabla_x J^*(x, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{(III.9)}$$

On a le control optimal suivant :

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \nabla_x J^*(x, T) \quad \text{(III.10)}$$

Et l'équation Hamiltonienne suivante :

$$-\frac{\partial J^*}{\partial T} = x^T Q x + \frac{1}{4} \frac{\partial J^*}{\partial x} B R^{-1} B^T \nabla_x J^* + \frac{\partial J^*}{\partial x} A x - \frac{1}{2} \frac{\partial J^*}{\partial x} B R^{-1} B^T \nabla_x J^* \quad \text{(III.11)}$$

Puisque il est difficile de résoudre une équation comme celle de l'équation (III-11), alors on pose :

$$J^* = J^*(x(T),) = x(T)^T P(T) x(T) \quad \text{(III.12)}$$

Où  $P(T) = P^T(T) > 0$ , on remplace l'équation (III,12) dans l'équation (III,11) on aura les deux équations suivantes:

$$\frac{\partial J^*(x,t)}{\partial t} = x^T \dot{P}(T) x \quad ; \quad \nabla_x J^*(x, T) = 2P(T)x \quad \text{(III.13)}$$

On remplace de nouveau (III-13) dans (III-11) et on prend comme facteur on aura :

$$x^T [-\dot{P}(T) - P(T)A - A^T P(T) - Q + P(T)BR^{-1}B^T P(T)]x = 0 \quad \text{(III.14)}$$

Par la résolution de l'équation précédente bien, avec la condition  $P(T) = Q_T$  et puisque ceci doit être satisfait pour n'importe quel état  $x$ , on aura l'équation suivante :

$$-\dot{P}(T) = P(T)A + A^T P(T) + Q - P(T)BR^{-1}B^T P(T) \quad \text{(III.15)}$$

Celle-ci est l'équation de Riccati.

Si  $A, B, Q$  et  $R$  sont constantes, alors  $P$  est une constante, ce qui entraîne  $\dot{P} = 0$  et l'équation algébrique de Riccati est ensuite obtenue à partir de la dernière équation :

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad \text{(III.16)}$$

En remplaçant l'équation (III-13) dans l'équation (III-10), on obtient :

$$u^*(x, T) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \frac{\partial J^*(x, T)}{\partial x} = R^{-1}B^T P(T)x = -K(T)x \quad (\text{III.17})$$

Donc, on peut résumer la commande comme suit :

La commande :  $\dot{x} = A(T)x + B(T)u$ ,  $x(T_0) = x_0$

L'indice de performance :  $J = \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) d\tau + x^T(T) Q_T x(T)$

L'équation algébrique de Riccati :  $PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

La commande optimale :  $u(T) = -K(T)x$

Le système en boucle fermée :  $\dot{x} = [A - BK]x(t)$  (III.18)

### b. Choix des matrices de pondération

Voici une méthode simple de choix et de modification des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant :

1. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
2. Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice  $Q$  par un scalaire  $p$  (accélération avec  $p > 1$  et décélération avec  $p < 1$ ), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
3. Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $Q$  correspondant aux premiers.
4. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $R$  leur correspondant.

**III.2.2 Commande Linéaire Quadratique Gaussienne LQG**

Par rapport à la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multi variables basés sur l'estimation des états à l'aide du filtre Kalman (voir Annexe C) [16] [17].

**a) Principe de la commande LQG**

Considérons le système linéaire d'ordre  $n$  suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Mw \\ y = Cx + Du + v \end{cases} \tag{III.19}$$

Où  $w$  et  $v$  représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance  $W$  et  $V$ .

On note aussi  $W_x = MWM^T$  la matrice de covariance du bruit d'état.

A partir du vecteur  $y$  de mesures bruitées, nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère :

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T (z^T Qz + u^T Ru) dt \right] \tag{III.20}$$

La solution de ce problème s'appuie sur le principe de séparation qui établit que la commande optimale est obtenue :

1. En recherchant l'estimé optimal  $\hat{x}$  (au sens de la variance d'erreur minimale) de l'état  $x$  par la méthode du Filtre de KALMAN, c'est-à-dire on estime l'état  $x$  par l'équation classique du filtre de KALMAN à condition que le triplet  $(A, MW^{1/2}, C)$  soit observable et stabilisable.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du) \tag{III.21}$$

Avec :  $K_f = P_f C^T V^{-1}$  où  $P_f$  obéit à l'équation de RICCATI suivante:

$$P_f A^T + AP_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + MWM^T = 0 \tag{III.22}$$

Avec :  $P_f = P_f^T > 0$ .

2. En employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ) :

$$u = -K_c \hat{x}$$

Avec :

$$\begin{cases} K_c = R^{-1} B^T P_c \\ P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + N^T Q N = 0 \end{cases} \quad \text{(III.23)}$$

La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK_c - K_f C + K_f DK_c) & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad \text{(III.24)}$$

**b) Propriétés**

A partir de cette représentation, le principe de séparation apparaît clairement et peut être formulé de la façon suivante :

-les valeurs propres de la boucle fermée peuvent être séparées selon les  $n$  valeurs propres du retour d'état ( $A - BK_c$ ) et les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation ( $A - K_f C$ ) .

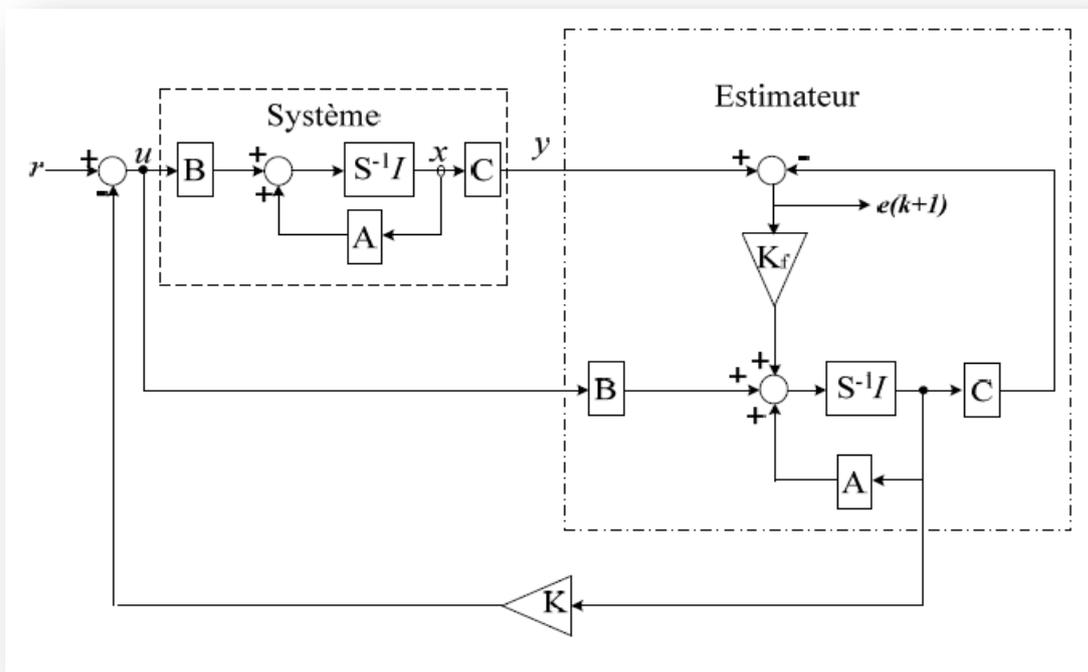


Figure (III.2) : Schéma synoptique de la commande par retour d'état LQG.

**c) Choix des matrices de covariance et calcul de gain**

Quelques grandes lignes permettent de comprendre l'influence du réglage de ces valeurs par rapport à la dynamique et la stabilité du filtrage.

Une forte valeur de  $Q_f$  donne une forte valeur du gain  $K_f$  réduisant l'importance de la modélisation et de la dynamique du filtre. La mesure possède alors un poids relatif plus important. Une trop forte valeur de  $Q_f$  peut cependant créer une instabilité de l'observation.

La matrice  $R_f$  règle quant à elle le poids des mesures. Une forte valeur indique une grande incertitude de la mesure. Par contre, une faible valeur permet de donner un poids important à la mesure.

**III.3 Commande par mode glissant****III.3.1 Définition**

La commande à structure variable est basée sur la commutation de fonctions de variables d'état, utilisées pour créer une variété (ou surface) de glissements, dont le but de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de surface. Quand l'état est maintenu sur cette surface, le système se trouve en régime glissant. Sa dynamique est alors insensible aux perturbations extérieures et aux variations des paramètres tant que les conditions du régime glissant sont assurées [18].

**III.3.2 Propriétés**

- La commande par mode glissant est relativement simple à implémenter (par rapport à d'autres approches de commande).
- Elle fait partie des commandes dites à structure variable
- Elle s'applique à la fois aux systèmes linéaires et aux systèmes non linéaires
- Robuste par rapport aux perturbations externes.
- Robuste aussi par rapport aux incertitudes/variations des paramètres, etc.
- Différentes applications : Régulation, poursuite de trajectoires.
- S'applique avec Observateurs, etc [19].

### III.3.3 Principe de la commande par mode de glissement

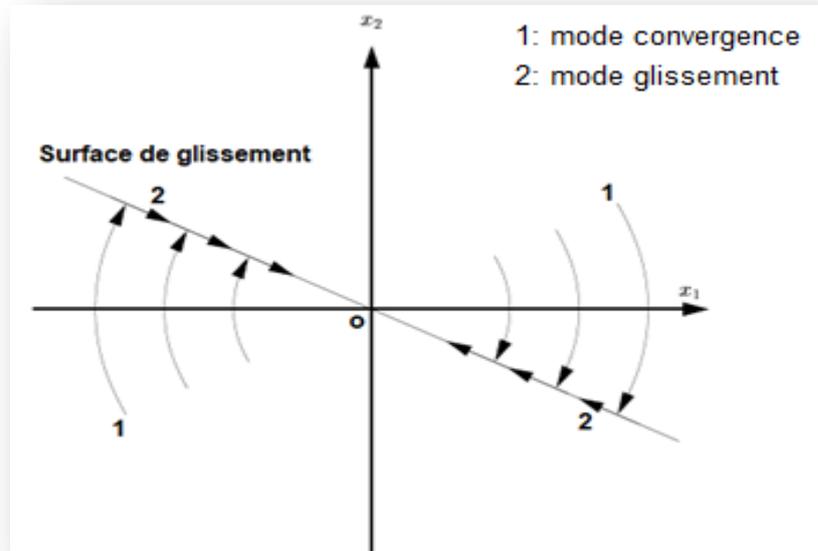
L'idée de base de la commande consiste en trois étapes :

- Le choix de la surface de glissement.
- L'établissement des conditions d'existence et de convergence.
- La détermination de la loi de commande.

### III.3.4 La dynamique du système à commander

L'idée de base de cette commande consiste en deux étapes [19]:

- **Le mode de convergence** : Amener le système sur un hyperplan de commutation stable appelé surface de glissement. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.
- **Le mode glissement** : Converger sur la surface de glissement vers le point d'équilibre désiré, la dynamique dans ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement.



*Figure(III.3)* : La dynamique du système à commander.

### III.3.5 Détermination de la commande

La commande par mode glissant est une somme de deux termes, le premier est appelé commande équivalente et le l'autre appelé commande non linéaire.

La commande doit satisfaire la condition d'existence et de convergence, spécifiquement, la stabilité de la surface de commutation exige le choix d'une fonction scalaire généralisée de Lyapunov  $V(x, t)$  (**voir Annexe D**).

La commande  $u$  est construite de façon à ce que les trajectoires du système soient amenées vers la surface de glissement et soient ensuite maintenues dans un voisinage de celle-ci.

$U$  est une loi de commande à structure variable définie comme suit :

$$U(t) = U_{eq}(t) + U_n(t) \quad (\text{III.25})$$

#### 1) La loi de commande équivalente

Dans le système incertain suivant on considère que tous les états sont mesurables et on écrit le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + M \cdot \varepsilon(t, x) \quad (\text{III.26})$$

$$\text{où : } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

On suppose que :

- le rang de la matrice  $\text{Rang}(B)=m$ , avec :  $1 \leq m < n$ .
- Le système est contrôlable.
- La matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times l}$  est connue, avec :  $\text{Rang}(M) \subset \text{Rang}(B)$  ; cependant il sera possible d'écrire  $M=BD$  pour  $D \in \mathbb{R}^{m \times l}$ .
- La fonction  $\varepsilon(t, x)$  représente les perturbations externes en connaissant seulement sa limite supérieur de  $\varepsilon(t, x)$  pour tout  $x$  et  $t$ .

On peut écrire l'équation (III.26) de la façon suivante afin de faire apparaître  $\varepsilon(t, x)$  dans l'image de la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + BD \cdot \varepsilon(t, x) \quad (\text{III.27})$$

On définit la surface de glissement  $\sigma(t)$  donnée par Staline en 1986 comme suit :

$$\sigma(t) = Gx(t) \quad (\text{III.28})$$

Notant que  $G$  est défini comme suit :  $G=B^tP$  avec  $P$  est la solution du matrice de riccati.

La dérivée de  $\sigma(t)$  s'écrit :

$$\dot{\sigma}(t) = G\dot{x}(t) \quad (\text{III.29})$$

On remplace  $\dot{x}(t)$  dans l'équation (III.29) :

$$\dot{\sigma}(t) = G(Ax(t) + Bu(t) + BD \cdot \varepsilon(t, x)) \quad (\text{III.30})$$

Durant la phase de glissement :  $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$

D'où on définit la commande équivalente :

$$u_{eq}(t) = -(GB)^{-1}G(Ax(t) + GBD \cdot \varepsilon(t, x)) \quad (\text{III.31})$$

Afin de rejeter l'effet de la perturbation  $\varepsilon(t, x)$ , on remplace l'équation (III.31) dans l'équation (III.27) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-(GB)^{-1}(GAx(t) + GBD \cdot \varepsilon(t, x))) + BD \varepsilon(t, x) \\ &= (I - B(GB)^{-1}G)Ax(t) + (I - B(GB)^{-1}G)BD \cdot \varepsilon(t, x), \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

$$\text{Où : } \Gamma = (I - B(GB)^{-1}G) \text{ et } \Gamma \cdot B = 0$$

Après les calculs on trouve :  $\dot{x}(t) = \Gamma Ax(t)$  (III.33)

D'après cette équation on constate que l'effet de la perturbation est rejeté.

$$u_{eq}(t) = -(GB)^{-1}GAx(t) \quad (\text{III.34})$$

**2). La commande discontinue (non-linéaire)  $U_n(t)$**

$U_n(t)$  est une partie non-linéaire qui est responsable pour l'induction du mode glissant sur  $\sigma(t)$ , alors que la commande équivalente va aider le maintien du glissement.

$$U(t) = U_{eq} + U_n$$

$$u(t) = -(GB)^{-1}GAx(t) - \rho(t, x)(GB)^{-1} \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} \quad (III.35)$$

Où  $\rho(t, x)$  est un gain choisie de tel sorte qu'il soit supérieur à l'effet de la perturbation et  $\frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|}$  est la fonction  $sign(\sigma)$ .

$$u(t) = -(GB)^{-1}GAx(t) - \rho(t, x)(GB)^{-1} sign(\sigma) \quad (III.36)$$

Vérifions maintenant si l'équation (III.35) satisfait la condition de convergence définit telle que :

$$\sigma(t)\dot{\sigma}(t) \leq 0$$

Il existe une condition plus forte pour les systèmes qui présente des perturbations appelé  $\mu$  – **reachability** tel-que :

$$\sigma(t)\dot{\sigma}(t) \leq -\mu. \|\sigma(t)\| \quad (III.37)$$

On remplace l'équation (III.35) dans l'équation (III.30) :

$$\dot{\sigma}(t) = GAx(t) + GB\left(- (GB)^{-1}GAx(t) - \rho(t, x)(GB)^{-1} sign(\sigma)\right) + GBD. \varepsilon(t, x) \quad (III.38)$$

$$\dot{\sigma}(t) = -\rho(t, x) sign(\sigma) + GBD. \varepsilon(t, x) \quad (III.39)$$

On multipliant les deux cotés par  $\sigma^T(t)$  :

$$\sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) = -\rho(t, x) \frac{\sigma^T(t).\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} + \sigma^T(t)GBD. \varepsilon(t, x) \quad (III.40)$$

Sachant que :  $\sigma^T(t).\sigma(t) = \|\sigma(t)\|^2$  l'équation (III.40) devient :

$$\sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) = -\rho(t, x)\|\sigma(t)\| + \sigma^T(t)GBD. \varepsilon(t, x) \quad (III.41)$$

$$\sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) \leq \|\sigma(t)\|(-\rho(t, x) + \|GBD \cdot \varepsilon(t, x)\|)$$

Rappelons que le gain  $\rho(t, x)$  doit être supérieur à l'effet de la perturbation :

$$\rho(t, x) \geq \|GBD \cdot \varepsilon(t, x)\| + \mu \quad (\text{III.42})$$

Où :  $\mu$  est un scalaire positif, l'équation (III.41) devient :

$$\sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) \leq -\mu\|\sigma(t)\| \quad (\text{III.43})$$

D'après l'équation (III.40) la condition de convergence est vérifiée, alors il existe le mode glissement sur la surface de glissement.

### III.3.6 Phénomène de réticence (chattering)

Un mode glissant idéal n'existe pas étant donné qu'il nécessite une commande qui commute avec une fréquence infinie.

Dans un cas réel la commutation se fait pendant un temps de commutation en plus la constante de temps des actionneurs. La discontinuité dans la commande produit un comportement dynamique particulier autour de la surface de glissement, appelé phénomène de réticence ('Chattering' en anglais).

À la première étape de l'élaboration de la théorie du contrôle en mode glissant, le chattering était le principal obstacle à sa mise en œuvre. Le chattering est un phénomène néfaste car ils entraînent une faible précision des commandes, une usure importante des pièces mécaniques en mouvement et des pertes de chaleur importantes dans les circuits de puissance.

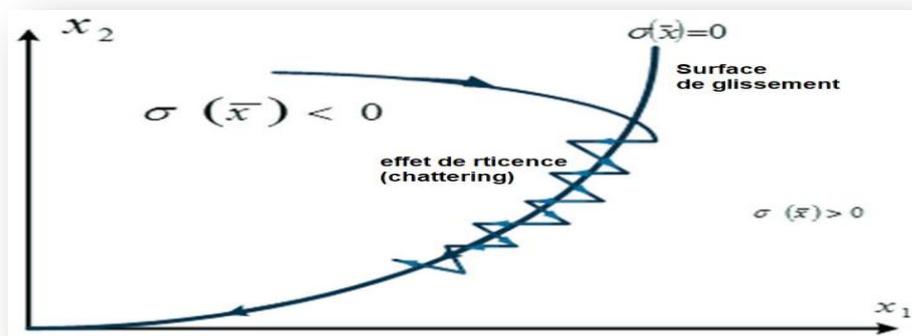
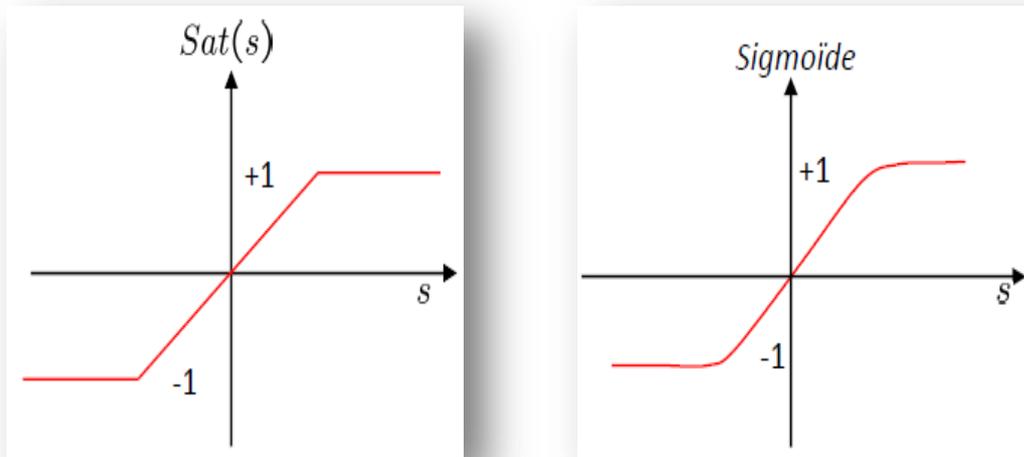


Figure (III.4) : Phénomène de réticence (chattering).

**III.3.7 Solution pour le problème de réticence**

Afin d'éviter le problème de réticence différentes solutions peuvent être envisagées[20] :

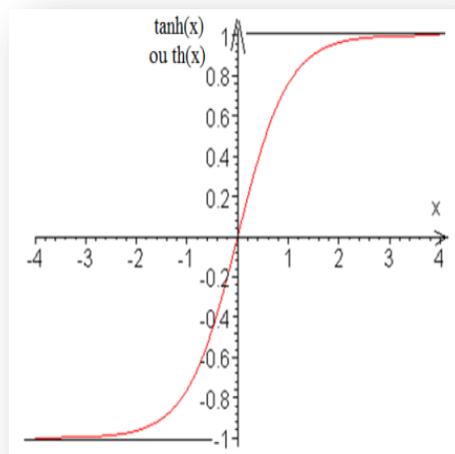
- Remplacer la fonction SIGN par la fonction SAT, tangente-hyperbolique ou bien une approximation sigmoïde.



**Figure(III.5) :** La fonction Sat et la fonction sigmoïde.

- Envisager la commande par mode glissant d'ordre supérieur.

Dans ce travail, on a remplacé la fonction signe par la fonction tangente hyperbolique (tanh).



**Figure(III.6) :** La fonction tangente hyperbolique.

### III.4 Commande par mode glissant intégrale (ISMC)

L'ISMC a été initialement proposé pour renforcer et améliorer le mode glissant. Tout au début de la réponse du système, ce qui signifie que la commande basé sur l'ISMC va fournir des compensations aux incertitudes qui apparaissent dans l'image de la commande correspondantes dans toute la réponse du système.

Un contrôleur discontinu est ajouté au contrôleur de retour d'état nominal afin de maintenir la performance nominale et le système est insensible aux perturbations externes.

#### III.4.1 Propriétés de l'ISMC

On peut résumer les propriétés de cette commande comme suit [20] :

- L'ISM permet de supprimer la phase de convergence et forcer le système sur la phase de glissement durant toute la période de la réponse du système.
- Avec un choix convenable de la surface de glissement, on peut résoudre le problème des incertitudes qui n'apparaissent pas dans l'espace de la commande.

#### III.4.2 Calcul de la loi de commande

Afin d'expliquer l'implémentation de la commande on considère le système suivant :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}) \quad (\text{III.44})$$

$$\text{où : } \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

On suppose que :

- le rang de la matrice  $\mathbf{B}=m$ , avec :  $\mathbf{1} \leq m < n$ .
- Le système est contrôlable.
- La matrice  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times l}$  est connue, avec :  $\text{Rang}(\mathbf{M}) \subset \text{Rang}(\mathbf{B})$  ; cependant il sera possible d'écrire  $\mathbf{M}=\mathbf{B}\mathbf{D}$  pour  $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times l}$ .
- La fonction  $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{x})$  représente les perturbations externes en connaissant seulement sa limite supérieur de  $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{x})$  pour tout  $x$  et  $t$ .
- La fonction  $\mathbf{f}_u(t, \mathbf{x})$  représente les incertitudes qui n'apparaissent pas dans l'espace de la commande.

L'équation (III.41) peut être écrite de la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu_0(t) \quad \text{(III.45)}$$

Où  $u_0$  est une loi de commande :

$$u_0(t) = -Fx(t) \quad \text{(III.46)}$$

Avec  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est le gain de retour d'état ; le but est de concevoir une loi de commande  $u(t)$  qui satisfait les conditions suivantes :

$$x(t) = x_0(t) \text{ pour } f_u(t, x) = 0$$

### III.4.3 Principe de conception de la loi de commande et la commande équivalente

On définit la loi de commande :  $u(t) = u_0(t) + u_n(t)$  (III.47)

À partir des deux équations (III.47) et (III.44) on a :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_0(t) + Bu_n(t) + BD \cdot \varepsilon(t, x) + f_u(t, x) \quad \text{(III.48)}$$

$u_n(t)$  est choisie afin d'éliminer le terme de perturbation  $\varepsilon(t, x)$  dans la phase de glissement, la fonction de commutation est définie de cette forme :

$$\sigma(t) = Gx(t) + z(t) \quad \text{(III.49)}$$

Où :  $G$  est la matrice de commutation choisie d'une tel façon que la matrice  $G \cdot B \neq 0$ .

Le  $Z(t)$  est à spécifier.

Durant la phase de glissement :

$$\sigma = \dot{\sigma}(t) = 0, \text{ alors } \dot{\sigma}(t) = G\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t) \quad \text{(III.50)}$$

En remplaçant l'équation (III.48) dans l'équation (III.50) :

$$\dot{\sigma}(t) = G(Ax(t) + Bu_0(t) + Bu_n(t) + BD \cdot \varepsilon(t, x) + f_u(t, x)) \cdot \dot{z}(t) \quad \text{(III.51)}$$

Durant la phase de glissement  $u_{eq}(t) = -D \cdot \varepsilon(t, x)$ , afin d'éliminer (compenser) l'effet de la perturbation d'où :

$$\dot{z}(t) = -G(Ax(t) + Bu_0(t)), \dot{z}(0) = -Gx(0)$$

$$\text{Alors : } \dot{\sigma}(t) = GB \cdot u_n(t) + GBD \cdot \varepsilon(t, x) \quad (\text{III.49})$$

En remplaçant  $u_{eq}(t)$  dans l'équation (III.48) :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu_0(t) \quad (\text{III.50})$$

Ce qui confirme que la condition  $x(t) = x_0(t)$  pour  $f_u(t, x) = 0$  et  $x(0) = x_0(0)$  est satisfaite.

Dans le cas où  $f_u(t, x) \neq 0$ , la commande équivalente obtenue à partir de l'équation (III.48) devient :

$$\begin{aligned} u_{eq}(t) &= -(GB)^{-1}GBD \cdot \varepsilon(t, x) - (GB)^{-1}Gf_u(t, x) \\ &= -D \cdot \varepsilon(t, x) - (GB)^{-1}Gf_u(t, x) \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

On remplaçant  $u_{neq}(t)$  de l'équation (III.51) dans l'équation (III.48) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_0(t) + (I - B(GB)^{-1}G)f_u(t, x) \quad (\text{III.52})$$

$$\Gamma = (I - B(GB)^{-1}G) \quad (\text{III.53})$$

Le but est de concevoir le paramètre  $G$  d'une manière optimale et une surface de glissement afin d'éliminer l'amplification de l'effet de l'incertitude autrement dit on doit minimiser  $\Gamma$ .

#### III.4.4 La Surface de glissement $\sigma(t)$

A partir des équations (III.49) et (III.50), La fonction de commutation par action intégrale qui va éliminer la phase de convergence est :

$$\sigma(t) = Gx(t) - Gx(0) - G \int_0^t (Ax(\tau) + Bu_0(\tau)) \cdot d(\tau) \quad (\text{III.54})$$

Le terme  $-Gx(0)$  assure que  $\sigma(0) = 0$ , alors la phase de convergence est éliminée. La phase de glissement va exister à partir de  $t=0$  et la réponse du système deviendra plus robuste.

D'après les résultats précédents, dans le cas où l'incertitude est présente dans l'image de la commande, il suffit de choisir la matrice  $\mathbf{G}$  de telle manière que le produit des deux matrices  $\mathbf{G}\mathbf{B}$  est une matrice inversible.

Dans le cas contraire où l'incertitude n'est pas présente dans l'image de la commande, le choix de  $\mathbf{G}$  est particulier :  $\mathbf{G} = \mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T$ .

Rappelons que  $\mathbf{G}$  est la matrice pseudo-inverse de Moore Penrose à droite de la matrice  $\mathbf{B}$ .

Ce choix particulier rapporte deux avantages :

- Le gain lié à la commande  $\mathbf{u}_n(\mathbf{t})$  est minimisé, ce qui va réduire l'effet de chattering.
- Il évite d'amplifier l'effet de la perturbation.

Le choix de  $\mathbf{G}$  permet aussi de simplifier l'expression :

$$\mathbf{G}\mathbf{B} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{I}_m$$

En remplaçant cette équation dans (III.52) :

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{B}^T(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T)$$

La matrice  $\mathbf{\Gamma}$  est une matrice symétrique et idempotente i.e. ( $\mathbf{\Gamma}^2 = \mathbf{\Gamma}$ )

Cette propriétés implique que  $\|\mathbf{\Gamma}\| = \mathbf{1}$  qui ne permet pas d'amplifier  $f_u(t, \mathbf{x})$  tant que  $\|\mathbf{\Gamma}\cdot f_u\| \leq \|f_u\|$ .

### III.4.5 La commande discontinue $\mathbf{U}_n(\mathbf{t})$ de l'ISM

D'après l'équation (III.54) on définit la loi de commande  $u(t)$  [20] :

$$u(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) - \rho(t, \mathbf{x})(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1}\text{sign}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \tag{III.55}$$

Où  $\mathbf{F}$  est le gain de retour d'état assure les performances du système nominal et  $\rho(t, \mathbf{x})$  est le gain qui va forcer le glissement sur la surface.

Cette équation satisfait la condition de convergence vue précédemment.

A partir des équations (III.44) et (III.46) on a :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= GAx(t) + GB(-Fx(t) + u_n(t)) + GBD. \varepsilon(t, x) + Gf_u(t, x) - \\ &\quad GAx + GBFx(t) \\ \dot{\sigma}(t) &= -\rho(t, x) \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} + GBD. \varepsilon(t, x) + Gf_u(t, x) \end{aligned} \quad \text{(III.56)}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) &= -\rho(t, x)\|\sigma(t)\| + \sigma^T(t)D. \varepsilon(t, x) + \sigma^T Gf_u(t, x) \\ &\leq \|\sigma(t)\|(-\rho(t, x) + \|D. \varepsilon(t, x)\| + \|Gf_u(t, x)\|) \end{aligned}$$

Où :  $GB = I$  , le gain  $\rho(t, x)$  doit être supérieur sur toutes les perturbation et les incertitude et  $\mu$  est définie comme un scalaire positif :

$$\rho(t, x) > \|D\|. \|\varepsilon(t, x)\| + \|G\|\|f_u(t, x)\| + \mu \quad \text{(III.57)}$$

$$D'où : \sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) \leq -\mu. \|\sigma(t)\|$$

Alors la condition de convergence est vérifiée.

Pour l'application sur notre modèle,  $F$  sera le gain calculé dans la commande LQR (Linear quadratic regulator), ainsi que le choix de la matrice  $G$  nous permet d'avoir  $GB=I$ .

$\rho$  est définie positif avec :  $\rho \geq 0.1 + \mu$  et finalement la loi de commande devient :

$$u(t) = -Fx(t) - \rho(t, x)\text{sign}(\sigma(t)) \quad \text{(III.58)}$$

### III.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de concevoir la commande par mode glissant et la commande par mode glissant intégrale sur notre modèle aéroélastique en tenant compte les perturbations et les incertitudes.

Les deux commandes ont été élaborées avec succès, les performances et la robustesse de ces deux commandes seront vérifiées dans le prochain chapitre.

## ***CHAPITRE IV***

# ***Simulation et interprétation***

**I.**

**II.**

**III.**

**IV.**

## IV.1 Introduction

Dans ce chapitre on va appliquer les commandes du chapitre trois sur notre modèle aéroélastique et nous allons présenter nos résultats de simulation en boucle ouverte et en boucle fermée sous l'environnement : MATLAB/SIMULINK.

Les paramètres qu'on va visualiser sont :

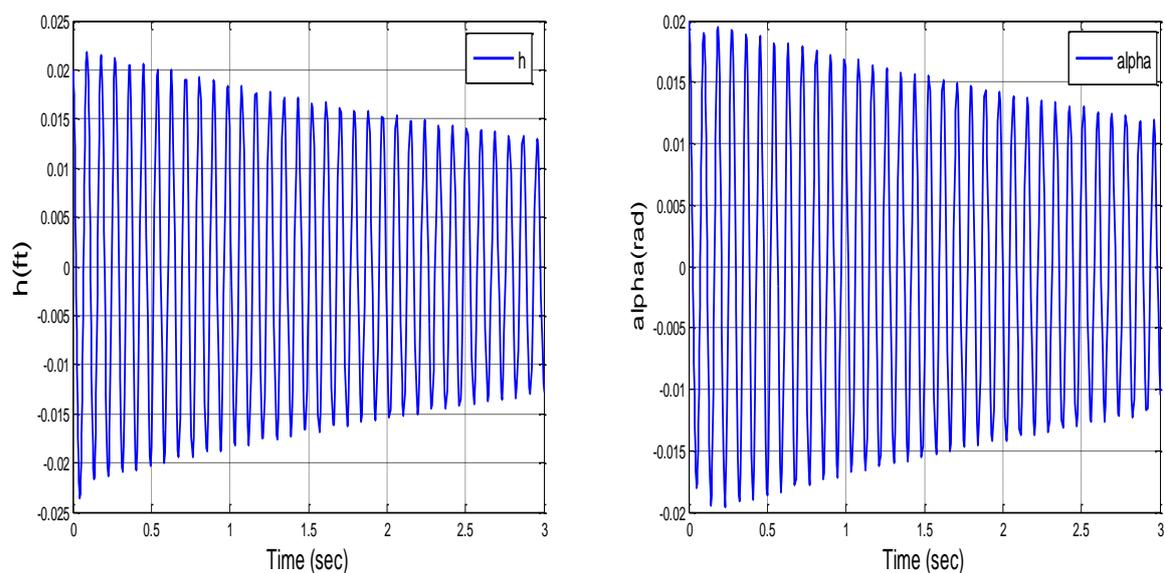
L'angle d'incidence ( $\alpha$ ), le déplacement vertical ( $h$ ) et l'angle de déflexion du volet au bord de fuite ( $\beta$ ).

## IV.2 Simulation en boucle ouverte

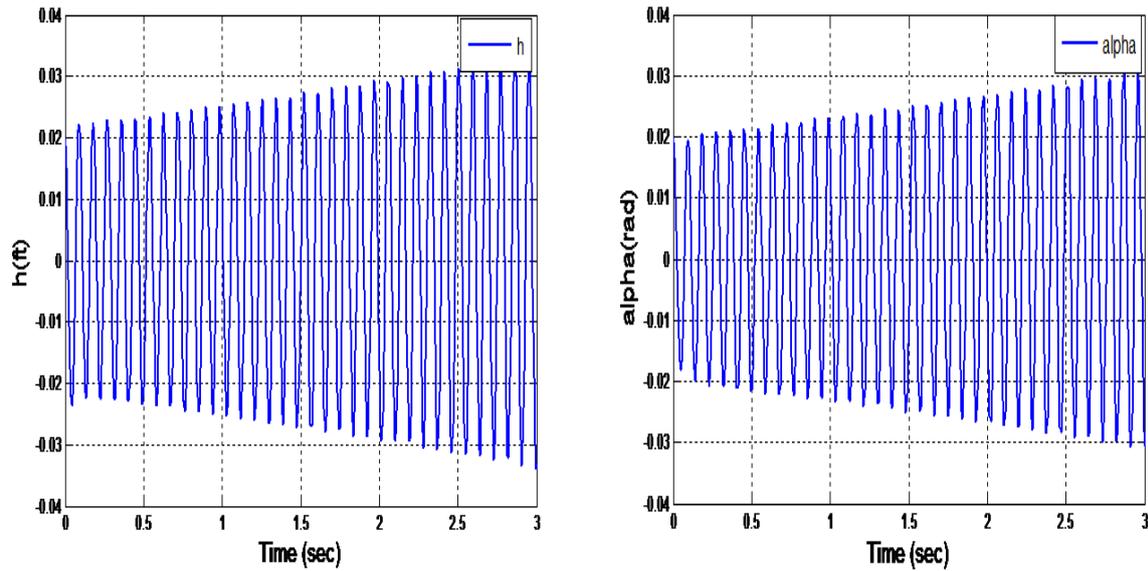
Dans cette partie on va étudier la stabilité en boucle ouverte pour notre système en visualisant la variation des paramètres ( $h$ ,  $\alpha$ ).

La stabilité de profil d'aile sera étudiée sur différentes vitesses d'écoulement afin de déterminer la vitesse critique de flottement.

Les résultats de simulation obtenus en boucle ouverte avec les conditions initiales  $h(0)=0.02\text{ft}$ ,  $\alpha=0.02\text{rad}$ ,



**Figure IV.1 :** La réponse du système en BO pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=91.74\text{m/s}$



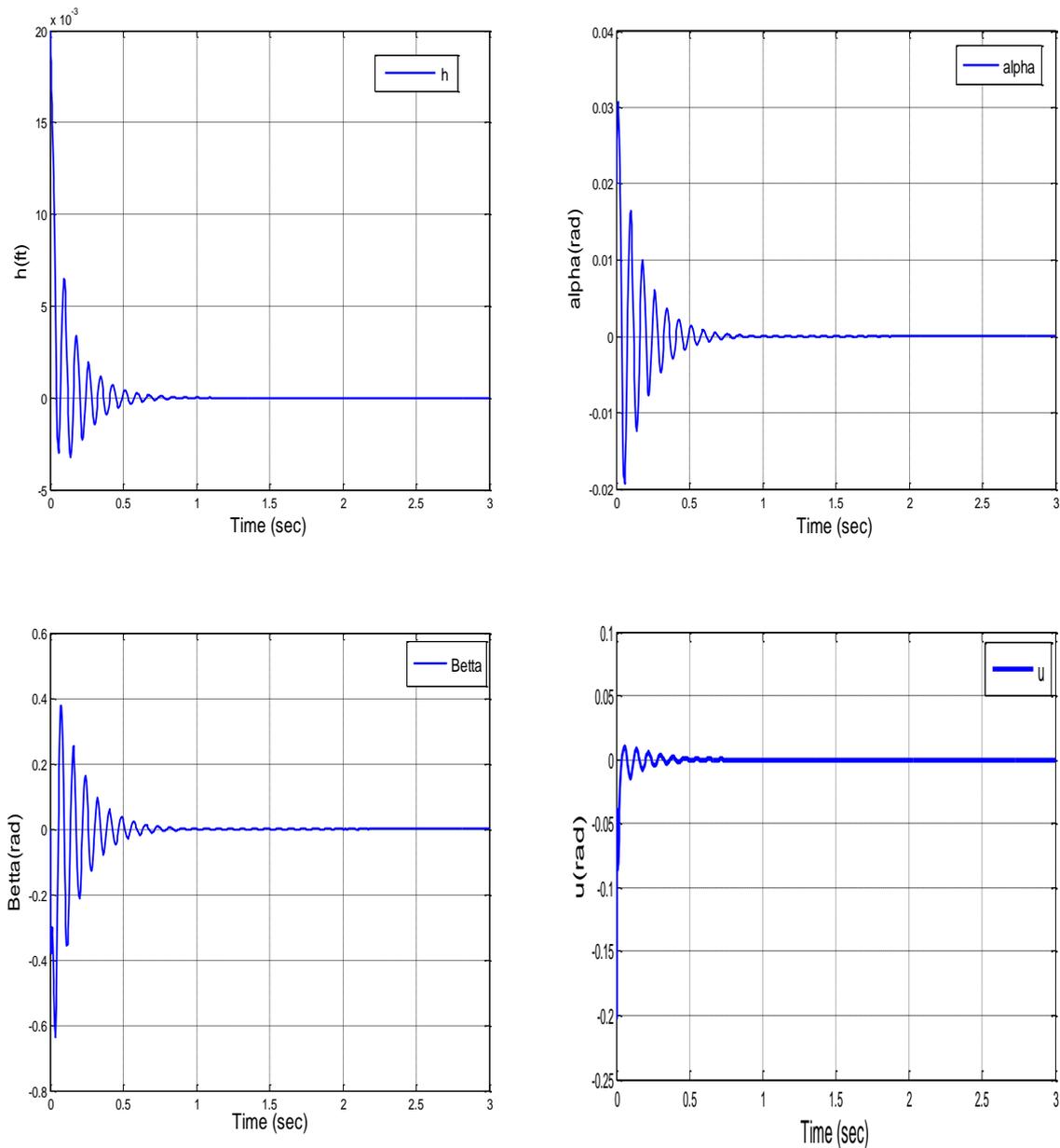
*Figure IV.2* : La réponse du système en BO pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=92,04$  m/s

### IV.2.1 Interprétation

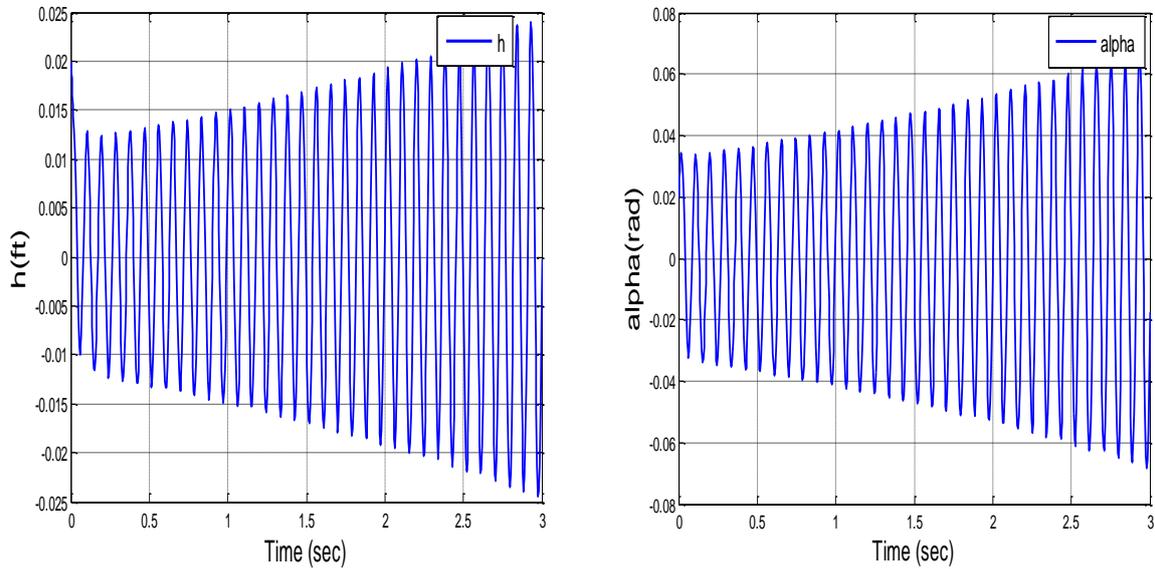
D'après la figure (IV.1) le modèle est stable mais présente des oscillations importantes et converge très lentement pour une vitesse de 91.74 m/s. A la vitesse de 92,04 m/s et selon la figure (IV.2), le système commence à diverger ce qui donne naissance à la vitesse de flottement.

**IV.3 Simulation en boucle fermée avec gain LQR**

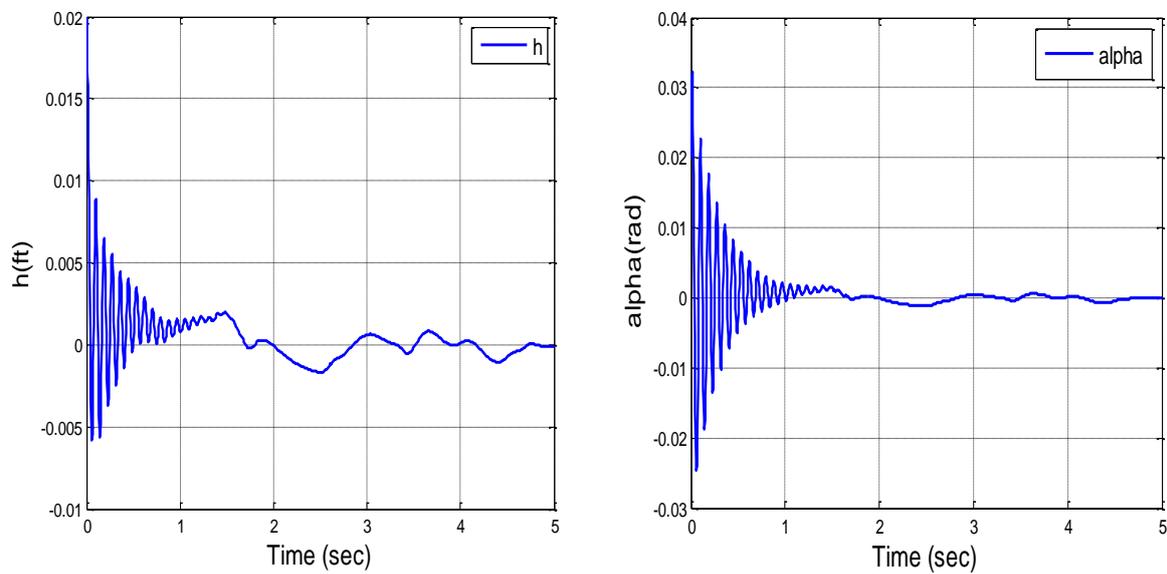
Les résultats de simulation en boucle fermée pour la commande LQR sont présentés comme suit :



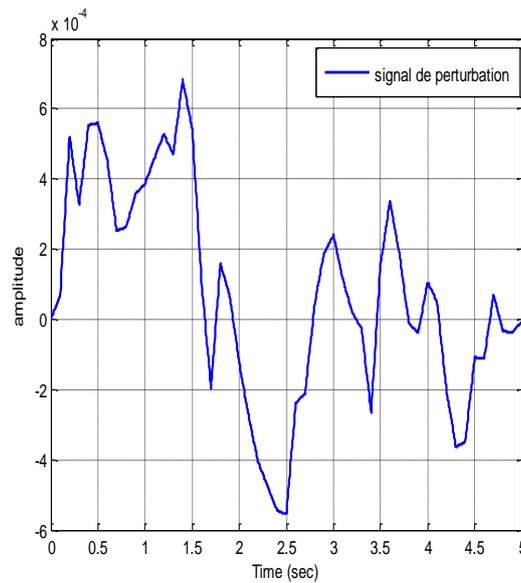
**Figure IV.3 :** La réponse du système en BF avec la commande LQR pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v=92,04$  m/s



**Figure IV.4 :** La réponse du système en BF LQR pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=108,2\text{m/s}$



**Figure IV.5 :** La réponse du système en BF LQR pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=92,04\text{m/s}$  avec perturbation de Dryden



*Figure IV.6* : La perturbation de Dryden

### IV.3.1 Interprétation

D'après la figure (IV.3), à la vitesse de 92,04 m/s le système répond avec des performances acceptables et converge rapidement vers le zéro après une seconde.

La déflexion de la surface de commande se comporte d'une manière convergente avec une amplitude acceptable de  $\pm 36.09^\circ$ , la commande converge vers le zéro avec présence des oscillations au début.

D'après la figure (IV.4), à la vitesse de 108.2m/s le système commence à diverger ce qui illustre la présence du phénomène de flottement.

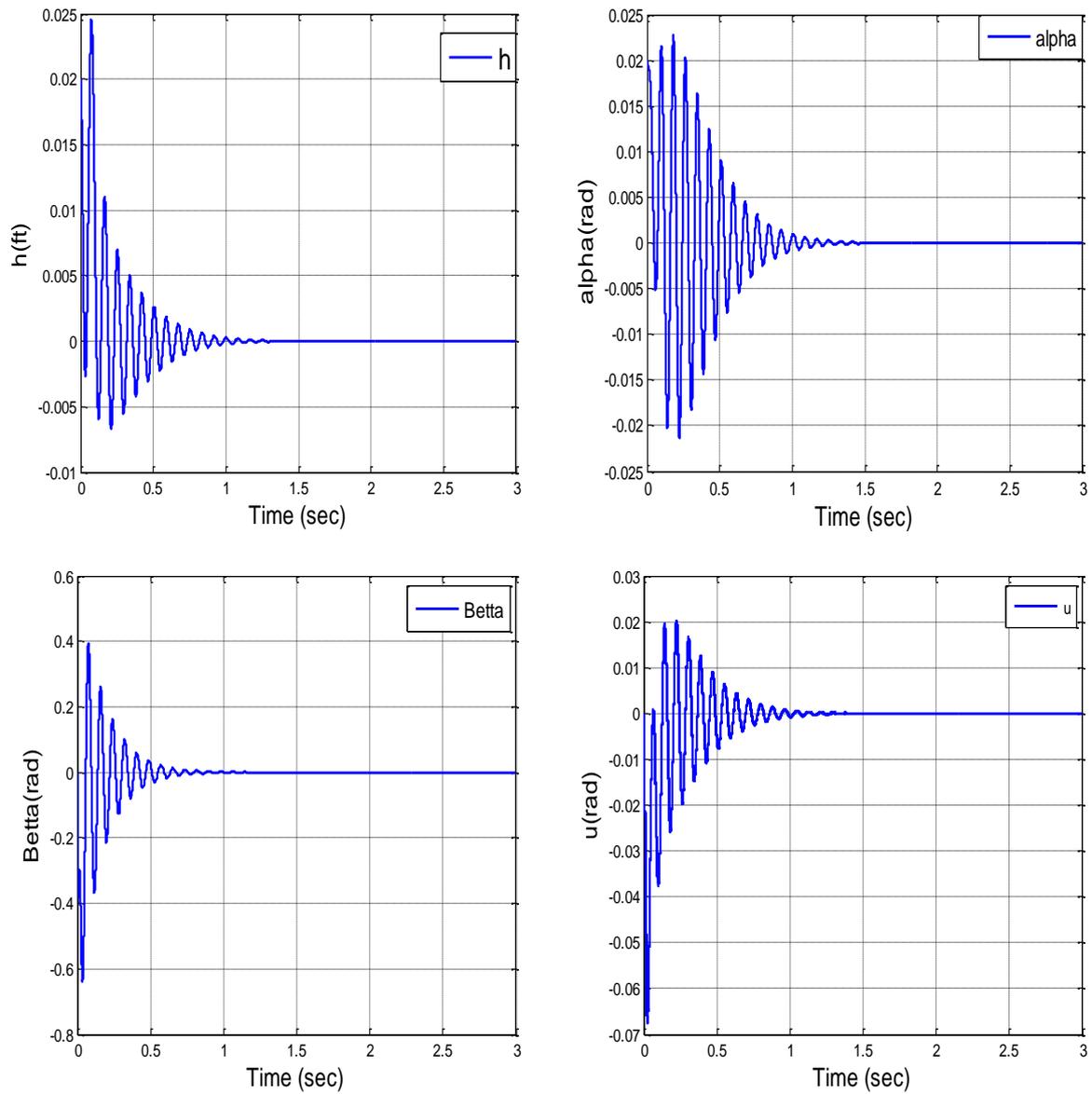
Comparant avec celui de la boucle ouverte, un gain de vitesse d'environ 16.16m/s est obtenu.

Les résultats de simulation de la figure (IV.5) montrent la réponse du système en présence de perturbation au niveau de la sortie, on remarque une dégradation des performances en tangage et en déplacement vertical.

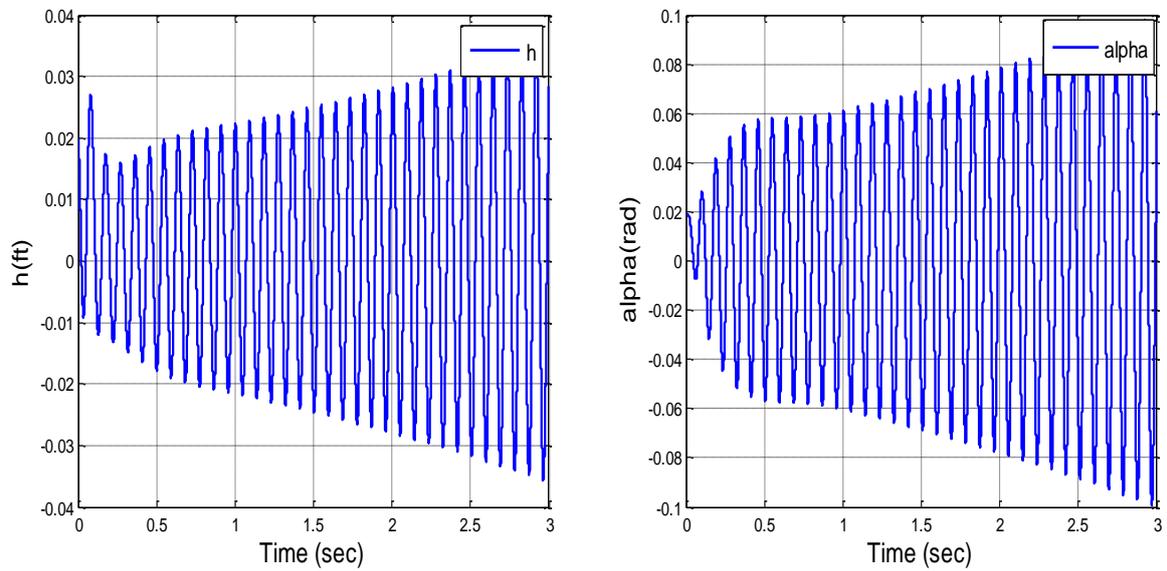
D'après ces résultats on peut conclure que cette commande est moins robuste.

**IV.4 Simulation en boucle fermé avec la commande LQG :**

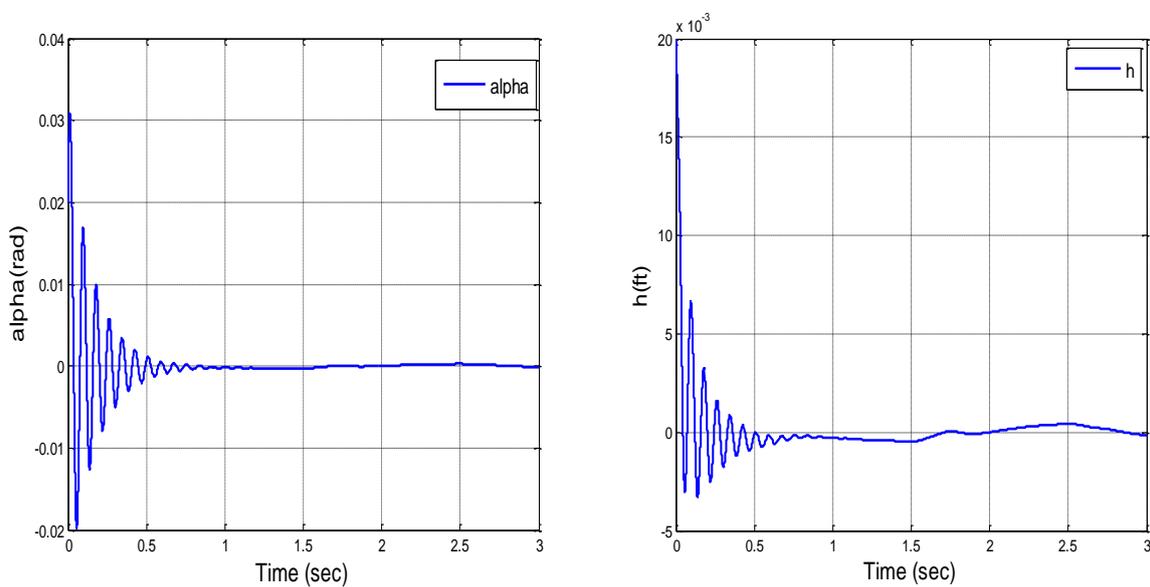
Les résultats de simulation en boucle fermé pour la commande LQG sont présentés comme suit :



**Figure IV.7 :** Réponse du système en BF avec la commande LQG pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v= 92,04$  m/s



**Figure IV.8 :** Réponse du système en BF avec la commande LQG pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=108.2\text{m/s}$



**Figure IV.9 :** Réponse du système en BF avec LQG pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=92,04\text{ m/s}$  avec perturbation de Dryden

**IV.4.1 Interprétation**

D'après la figure (IV.7), à la vitesse de 92,04 m/s le système converge après environ 2s malgré la présence des oscillations au départ dû principalement à l'estimation des états. La déflexion de la surface de commande est convergente avec des oscillations moins acceptables de  $\pm 37.24^\circ$ .

La commande converge après environ 1.5s avec présence des oscillations importantes.

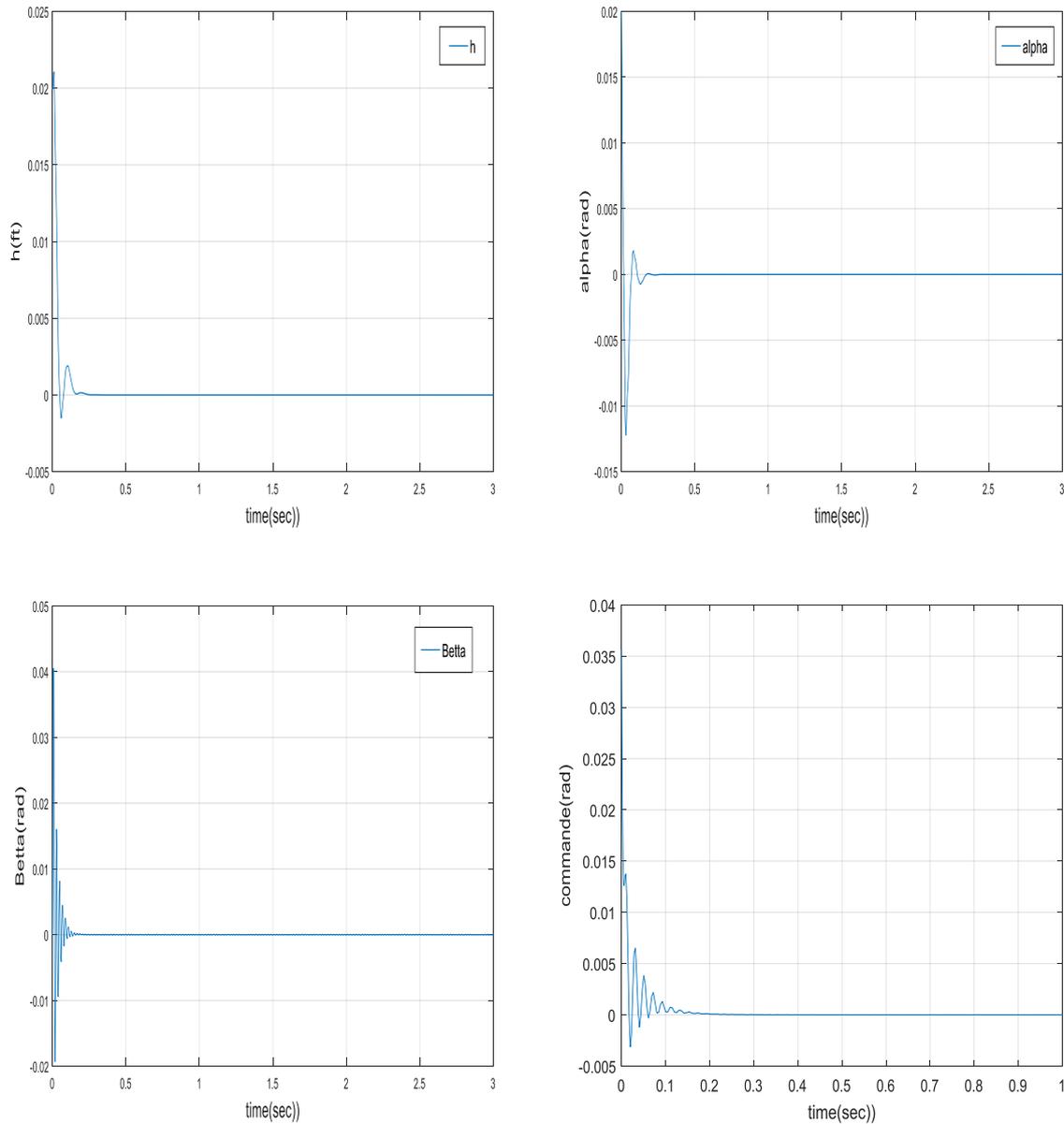
Analysant la figure (IV.8), à la vitesse de 108.2m/s le système devient instable ce qui illustre la présence du phénomène de flottement.

D'après la figure (IV.9), on remarque que la réponse de système avec présence de perturbation devient moins performante.

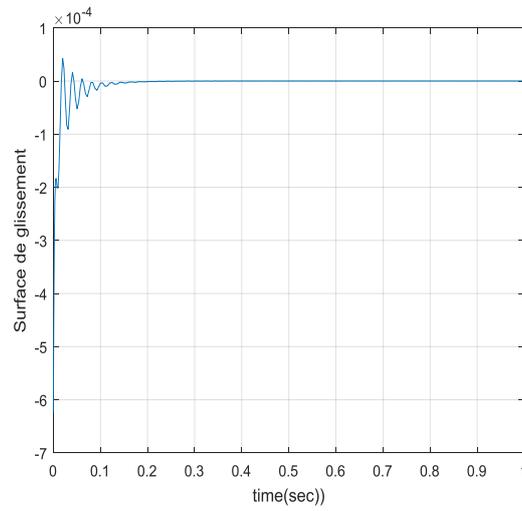
D'après ces résultats on peut conclure que cette commande est moins robuste en présence de perturbation.

**IV.5 Simulation avec la commande par mode glissant**

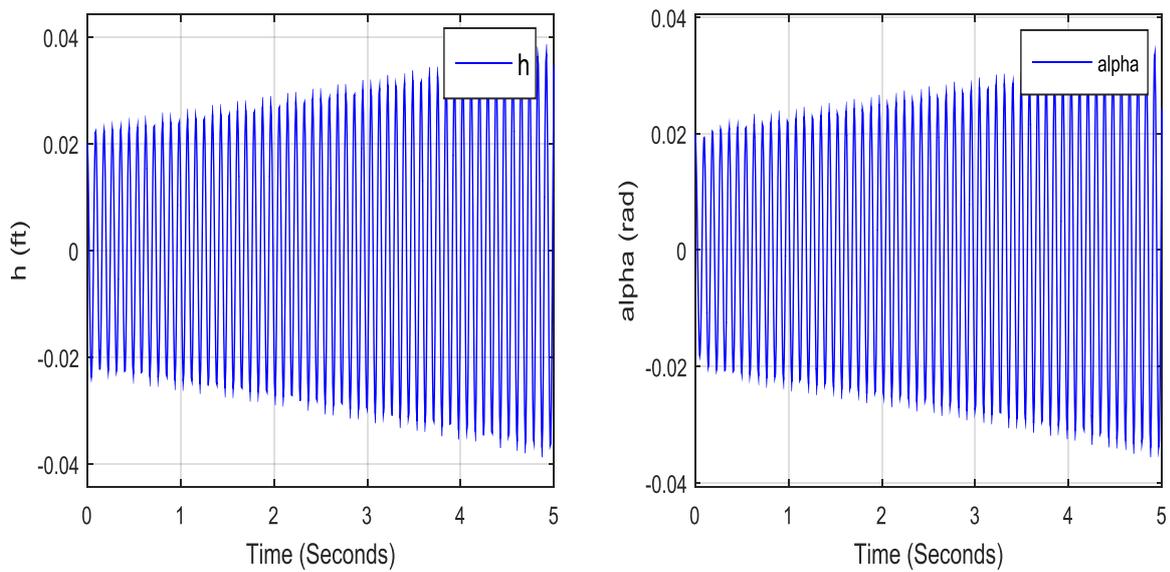
Les résultats de simulation en boucle fermé pour la commande par mode glissant sont présentés comme suit :



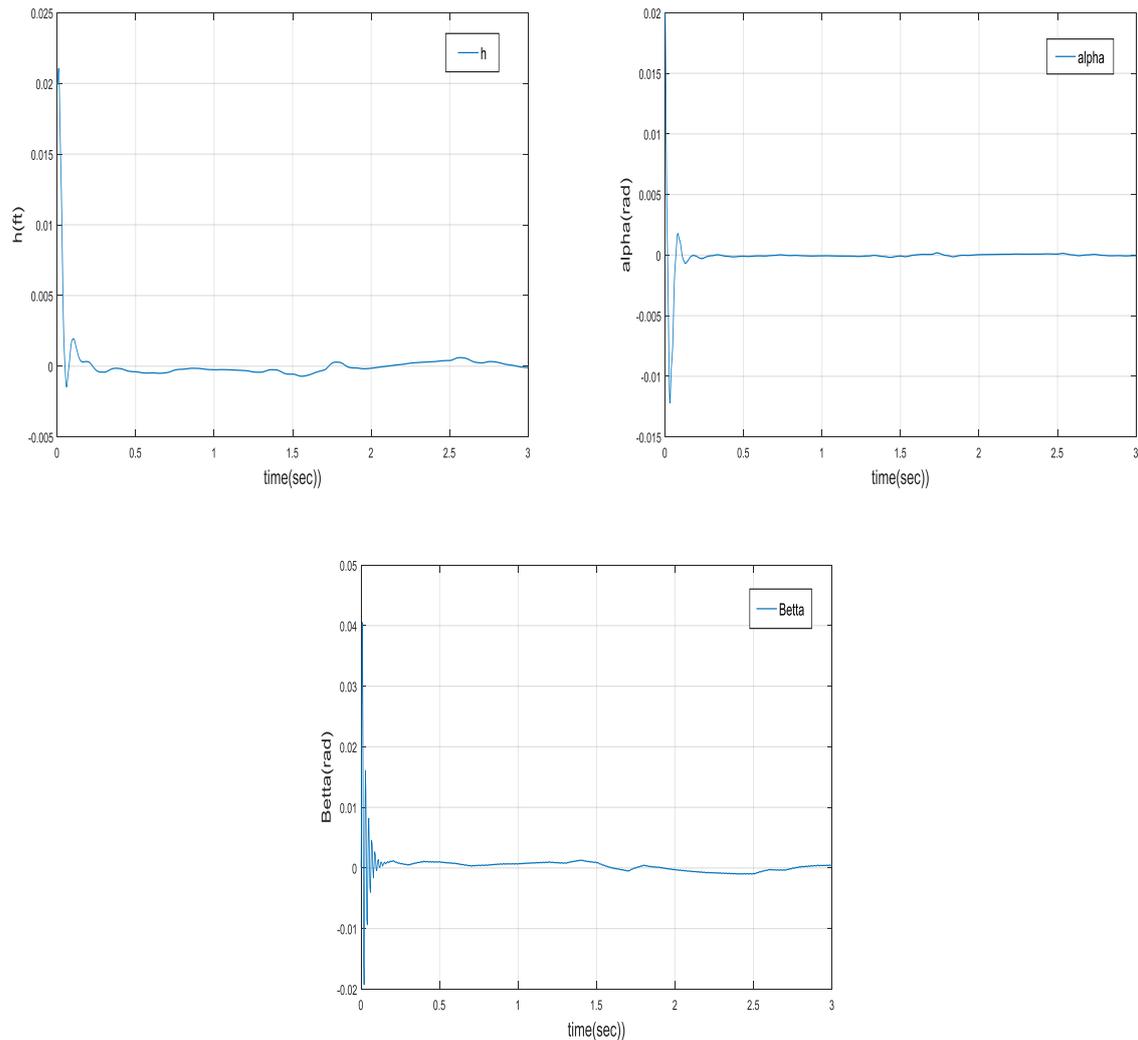
**Figure IV.10 :** Réponse du système en BF avec SMC pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v= 92,04$  m/s



**Figure IV.11** : Surface de glissement de la commande en BF avec SMC à  $v= 92,04$  m/s



**Figure IV.12** : Réponse du système en BF avec SMC pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v=169.16$ m/s



**Figure IV.13 :** Réponse du système en BF avec SMC pour  $h$ ,  $\alpha$  et la surface de commande à  $v= 92,04$  m/s en présence de perturbation

#### IV.5.1 Interprétation

D'après la figure (IV.10), pour une vitesse de simulation égale à 92.04m/s, on remarque que le système converge après 0.25 secondes. La commande converge en 0.2s génère une déflexion de la surface de command  $\beta$  qui varié de  $\pm 2.29^\circ$ .

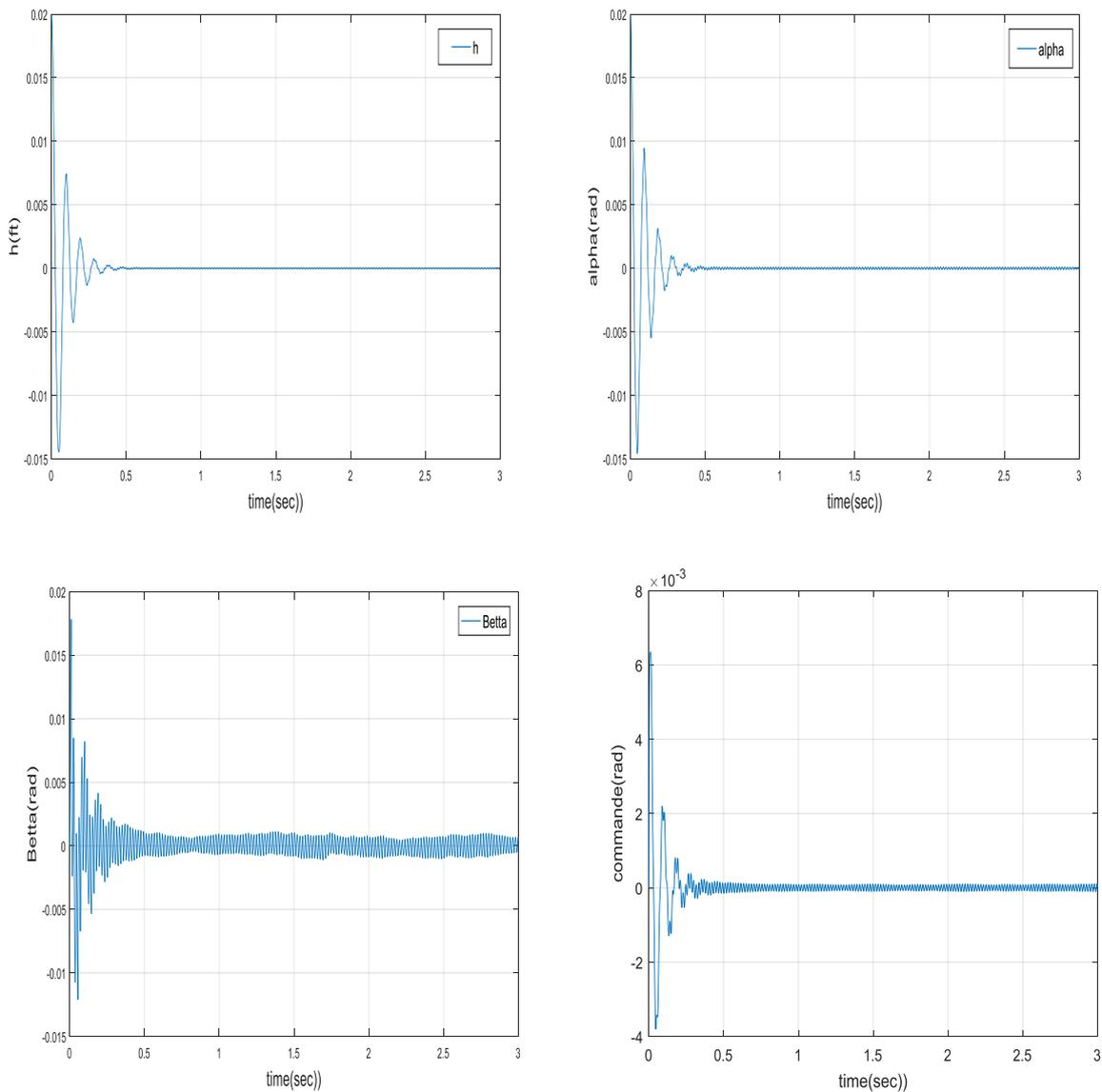
La surface de glissement est présenté par la figure (IV.11), converge après environ 0.5 seconde avant d'atteindre la phase de convergence.

A la vitesse de 169.16m/s le système commence à diverger selon la figure (IV.12).

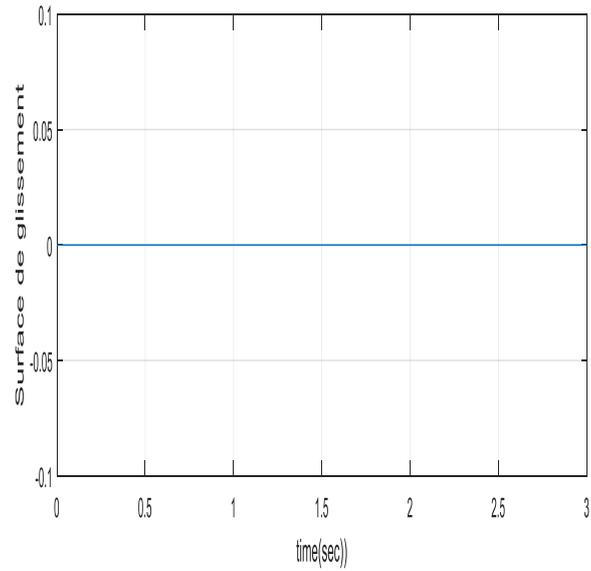
Le test de robustesse de la commande est présenté à la figure (IV.13), on remarque que le système converge malgré la présence de la perturbation.

**IV.6 Simulation avec commande par mode glissant intégral (ISMC)**

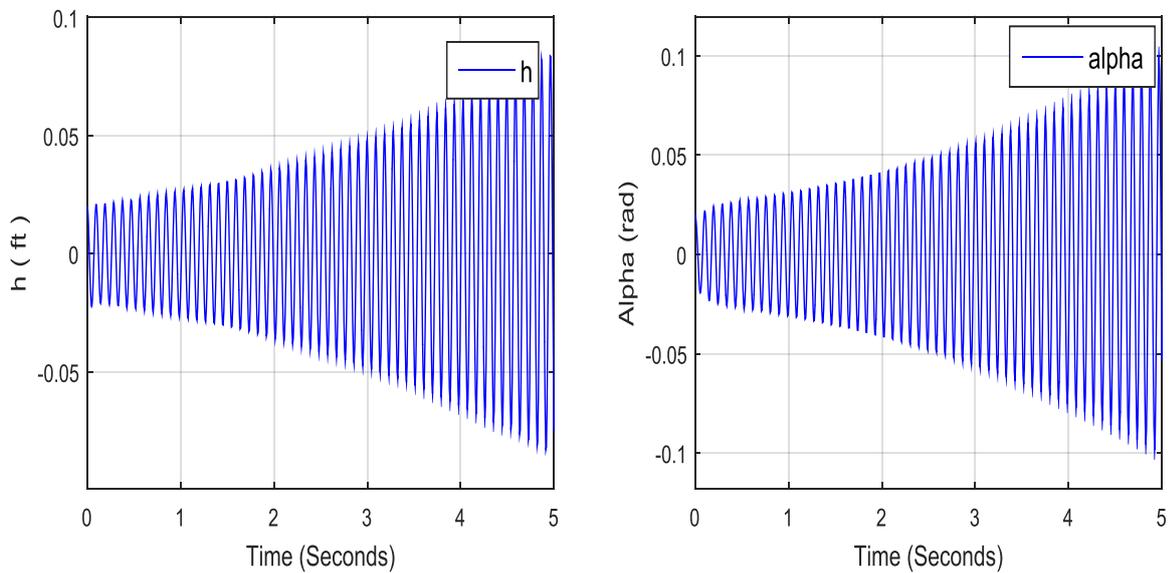
Les résultats de simulation en boucle fermée sont présentés comme suit :



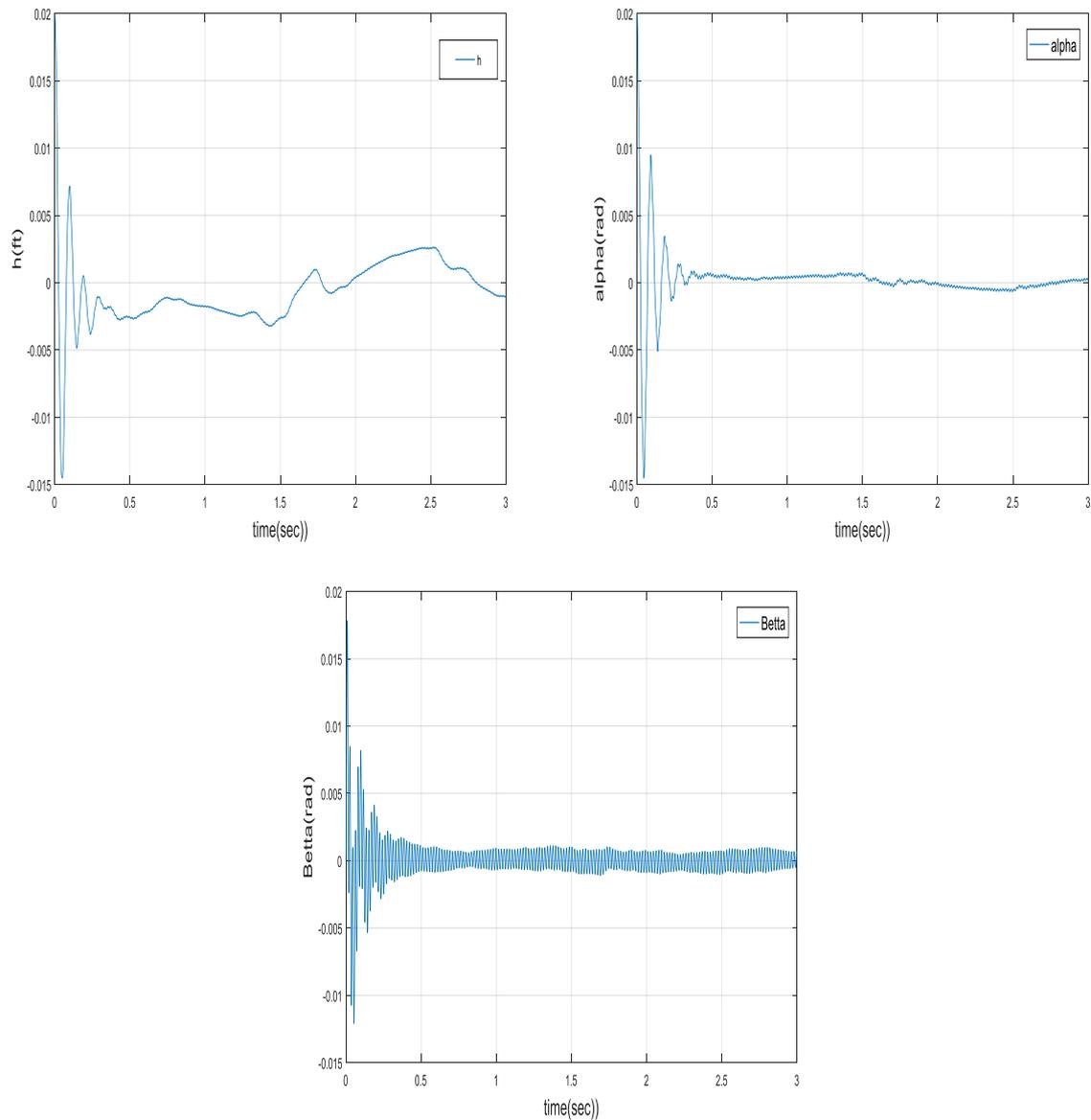
**Figure IV.14 :** Réponse du système en BF avec ISMC pour  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et la commande à  $v = 92,04$  m/s



**Figure IV.15** : Surface de glissement du la commande en BF avec ISMC à  $v= 92,04$  m/s



**Figure IV.16** : Réponse du système en BF avec ISMC pour  $h$  et  $\alpha$  à  $v= 108,2$ m/s



**Figure VI.17 :** Réponse du système en BF avec ISMC pour  $h$ ,  $\alpha$  et la surface de commande en présence de perturbation à  $v= 92,04$  m/s

### IV.6.1 Interprétation

D’après la figure (IV.14), à la vitesse de 92,04 m/s le système est amortie après environ 0.5s avec présence des oscillations au départ, la commande présente des oscillations avec fréquences importantes et génère une déflexion de la surface de command  $\beta$  qui varié de  $\pm 1^\circ$ .

La surface de glissement converge vers le zéro dès le départ ( $t=0$ ), ce qui confirme l’élimination de la phase de convergence illustré dans la figure (IV.15).

D'après la figure (IV.17), en présence de perturbation le système devient moins performant.

### IV.7 Etude comparative

	Pour $v = 92.04 \text{ m/s}$			$V_f \text{ (m/s)} \approx$	Gain en $V_f \text{ (m/s)}$	Robustesse
	$t_{sh} \text{ (s)}$	$t_{s\alpha} \text{ (s)}$	$ \beta _{\max} \text{ (}^\circ\text{)}$			
<i>BO</i>	/	/	/	92.04	/	Non- vérifiée
<i>LQR</i>	1	1.1	36.09	108.2	+16.16	Non- vérifiée
<i>LQG</i>	1.3	1.5	37,24	108.2	+16.16	Non- vérifiée
<i>SMC</i>	0.25	0.25	2.29	169.16	+77.12	vérifiée
<i>ISMC</i>	0.5	0.5	1	108.2	+16.16	vérifiée

**Tableau IV.1 :** Comparaison entre les différentes commandes

Nous pouvons constater d'après le tableau (IV.1) ce qui suit :

➤ Pour une même vitesse de 92.04 m/s (la vitesse de flottement en BO), une amélioration des performances (Le temps de réponse de  $h$  :  $t_{sh}$  et le temps de réponse de  $\alpha$  :  $t_{s\alpha}$ ) du système après l'application de la commande LQR, mais les performances pour la commande LQG ont légèrement dégradé par rapport à la commande LQR, cette dégradation en performances est due au principe de l'observateur qui utilise l'estimation des états.

➤ En gardant la même vitesse, on constate une amélioration des performances du système par rapport aux commandes LQR et LQG après l'application de la commande par mode glissant.

➤ En comparant la commande par mode glissant et la commande par mode glissant intégrale, on remarque une dégradation légère de performances pour la commande par mode glissant.

➤ Un gain de la vitesse de flottement par rapport à la vitesse de flottement en boucle ouverte, de +16.16 m/s pour la commande LQR, la commande LQG et la commande intégrale mode glissant.

- Un gain de vitesse de +77.12 m/s par rapport à la vitesse de flottement en boucle ouverte pour la commande par mode glissant.
- La commande par mode glissant et la commande par mode glissant intégrale sont robustes contre les perturbations contrairement à la commande LQR et la commande LQG.

### **IV.8 Conclusion**

Les résultats numériques et graphiques présentés dans ce chapitre montrent l'utilité de l'implémentation des commandes optimales (LQR, LQG) concernant les performances et la vitesse de flottement mais elles restent inefficaces en présences des perturbations.

L'application de la commande mode glissant intégrale a amélioré la robustesse du système, ainsi que la commande par mode glissant a amélioré encore plus la robustesse et les performances du système et a augmenté la vitesse de flottement à 169.16 m/s.

## Conclusion générale

L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire est basé sur la modélisation mathématique d'une section d'aile souple, avec une seule surface de commande pour un régime aérodynamique instationnaire à deux degrés de liberté via la fonction de Théodorsen.

Quatre types de loi de commande sont utilisés pour la stabilisation et la commande du modèle envisagé : La commande LQR, la commande LQG, la commande par mode glissant, et la commande par mode glissant intégrale, exploitées dans le but de limiter les vibrations, améliorer les performances de système, et de retarder l'apparition du phénomène de flottement.

D'abord, un aperçu général a été présenté dans le premier chapitre concernant l'aéro-servo-élasticité, et les phénomènes d'aéroélasticité notamment celui de flottement, ainsi des notions sur l'aérodynamique.

Le développement mathématique du modèle aeroélastique basé sur l'application de la méthode de Lagrange et afin d'obtenir une représentation d'état linéarisée, on a représenté les forces aérodynamiques par l'application de théorème de Theodorsen pour les écoulements instationnaires dans le 2<sup>e</sup> chapitre.

Cette représentation d'état a permis l'élaboration des lois de commande qui sert à la stabilité du système aeroélastique. Tout ça on a expliqué dans le troisième chapitre.

Le modèle aeroélastique obtenu et les quatre lois de commande élaborées ont permis de simuler la réponse du système.

La simulation en boucle ouverte pour une faible vitesse a permis de détecter la vitesse de flottement, la présence de ce phénomène est dangereuse pour la structure des surfaces portante, car elle peut conduire à la fatigue structurelle ou encore plus la destruction totale.

Afin d'augmenter cette vitesse, on a appliqué quatre commandes : la commande optimale LQR en premier, qui consiste à minimiser un critère d'énergie donné. Ensuite, afin de réduire le nombre d'états mesuré, une deuxième commande est envisagée, c'est la commande LQG qui est basée sur l'estimation des états à l'aide du filtre de Kalman.

Vu que le système est sensible aux perturbations, on a appliqué deux autres commandes en plus : la troisième est la commande par mode glissant qui est basée sur la commutation de fonctions de variables d'état dont le but de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de surface choisie.

Afin d'éliminer la phase de convergence, on a appliqué la commande par mode glissant intégrale qui va forcer le système à glisser sur la surface de glissement tout au début de la réponse du système.

D'après les résultats de la simulation présentés, l'application des commandes optimales a augmenté la vitesse de flottement ainsi que l'application de la commande par mode glissant et la commande par mode glissant intégrale a rendu le système robuste aux perturbations et a augmentée encore plus la vitesse de flottement.

## Perspectives

Nous proposons pour les futurs travaux les points suivants :

### ❖ *De point de vue structure :*

- Modélisation de l'aile complète de l'avion (Et non pas d'une section d'aile uniquement) où le nombre de degrés de liberté sera élevé ;
- Utilisation de la technique de 'morphing' c.à.d. une structure morphologique continue ;

### ❖ *De point de vue commande :*

- Utilisation d'une commande hybride (Commande par mode glissant avec d'autres commandes non linéaires comme la commande par Backstepping).
- Utilisation de la commande par mode glissant d'ordre supérieur.
- Utilisation de la commande adaptative par mode glissant.



## La fonction de Théodorsen

Le principe de cette méthode est l'application de la méthode des écoulements potentiels en modélisation l'écoulement instationnaire par la superposition de deux écoulements élémentaires, écoulement circulaire (à circulation non-nulle)  $A^T$  et écoulement non-circulaire (à circulation nulle)  $A^{nc}$ .

➤ *Écoulement à circulation nulle  $A^{nc}$  :*

Représenté par une distribution de puits et sources. En pratique, elle satisfait la condition de limites instantanée (déplacement du profil) mais fournit une circulation nulle autour du profil. Cet opérateur s'exprime en fonction des dérivées jusqu'à l'ordre 2 du champ de déplacement et ses coefficients peuvent être interprétés comme des effets de masse virtuelle (ou apparente) et de raideur apparente.

➤ *Écoulement à circulation non-nulle  $A^T$  :*

Traduisant la conservation de la circulation totale. Il permet de respecter la condition de Kutta (pression finie au Bord de Fuite) et traduit le fait qu'une modification de circulation du profil est compensée par un lâcher tourbillonnaire de même intensité mais en sens contraire.

Les expressions des forces aérodynamiques de l'écoulement circulaire (écoulement portant) sont en fonctions de l'intensité du tourbillon  $\gamma$ , est déterminée par application de la condition de Kutta au bord de fuite.

$$F_T = -2\pi\rho V b Q \frac{\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \gamma dx_0}{\int_1^\infty \frac{x_0+1}{\sqrt{x_0-1}} \gamma dx_0}$$

$$F_T = -2\pi\rho V b Q C$$

$$M_T = -\rho V b^2 \int_1^\infty i \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0+1}{x_0-1}} - \left(a + \frac{1}{2}\right) \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \right) \gamma dx_0$$

$$M_T = -2\pi\rho V b^2 Q \left[ \frac{1}{2} - C \left(a + \frac{1}{2}\right) \right]$$

## Annexe A

---

Avec  $C$  la fonction de Théodorsen définit tel que :

$$C = \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma dx_0}{\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} \gamma dx_0}$$

Considérons maintenant le fait que le profil est sujet à un mouvement harmonique du profil, on peut poser :

$$\gamma = \gamma_0 e^{i[k(\frac{s}{b} - x_0) + \phi]} = \gamma_0 e^{i[(M - kx_0) + \phi]}$$

Avec :

$$s = Vt, \quad k = \frac{\omega b}{V}, \quad \frac{ks}{b} = \omega t$$

La fonction de Théodorsen  $C(k)$  s'écrit alors:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma_0 e^{i\omega t} e^{-ikx_0} e^{i\phi} dx_0}{\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} \gamma_0 e^{i\omega t} e^{-ikx_0} e^{i\phi} dx_0} \\ &= \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0}{\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0} \\ &= F(k) + iG(k) \end{aligned}$$

La fonction de Théodorsen peut être exprimée avec des fonctions de Bessel :

$$C(k) = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)}$$

Avec :

$J_1, Y_1$  sont des fonctions de Bessel type 2 et  $J_0, Y_0$  sont des fonctions de Bessel de type 1.

## Les fonctions $T_n$

$$T_1 = -\frac{2+c^2}{3}\sqrt{1-c^2} + c \cos^{-1}c$$

$$T_3 = -\frac{1-c^2}{8}(5c^2+4) + \frac{1}{4}c(7+2c^2)\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c - \left(\frac{1}{8}+c^2\right)(\cos^{-1}c)^2$$

$$T_4 = c\sqrt{1-c^2} - \cos^{-1}c$$

$$T_5 = -(1-c^2)(\cos^{-1}c)^2\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c$$

$$T_7 = c\frac{7+2c^2}{8}\sqrt{1-c^2} - \left(\frac{1}{8}+c^2\right)\cos^{-1}c$$

$$T_8 = -\frac{1}{3}(1+2c^2)\sqrt{1-c^2} + c \cos^{-1}c$$

$$T_9 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}(1-c^2)}{3} + aT_4\right]$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos c$$

$$T_{11} = (2-c)\sqrt{1-c^2} + (1-2c)\cos^{-1}c$$

$$T_{12} = (2+c)\sqrt{1-c^2} - (1+2c)\cos^{-1}c$$

$$T_{13} = -\frac{1}{2}[T_7 + (c-a)T_1]$$

$$T_{15} = T_4 + T_{10}$$

$$T_{16} = T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{1}{2}T_{11}$$

$$T_{17} = -2T_9 - T_1 + \left(a - \frac{1}{2}\right)T_4$$

$$T_{18} = T_5 - T_4T_{10}$$

$$T_{19} = -\frac{1}{2}T_4T_{11}$$

## Annexe C

---

### Principe du filtre de Kalman [17]

Nous supposons donc que notre système perturbé peut être modélisé par le modèle d'état suivant appelé modèle de Kalman :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases}$$

Où  $w(t)$  et  $v(t)$  représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, respectivement pour matrice de covariance  $W(t)$  et  $V(t)$ .

Auquel nous adjoindrons les hypothèses suivantes. Nous supposons que :

- La paire (A,C) est observable.
- les signaux  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des bruits blancs gaussiens centrés de densité Spectrale de Puissance (DSP)  $W(t)$  et  $V(t)$  .

### **Théorème de Lyapunov**

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continument (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative [21].

Le problème d'existence ressemble à un problème de stabilité généralisé. La méthode de Lyapunov nous fournit un milieu naturel pour l'analyse. Spécifiquement, la stabilité de la surface de commutation exige le choix d'une fonction scalaire généralisée de Lyapunov  $V(x, t)$  définie positive. C'est la première condition de convergence qui permet aux dynamiques du système de converger vers les surfaces de glissement.

L'état d'équilibre  $x_e = 0$  est stable si il existe une fonction continument dérivable  $U(x)$  telle que :

1.  $V(0) = 0$
2.  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
3.  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$

Cette fonction de Lyapunov est définie comme suit:

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x)$$

Pour que la fonction de Lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative, ou bien le contraire :

$$\dot{S}(x) > 0 \text{ Lorsque } S(x) < 0$$

$$\dot{S}(x) < 0 \text{ Lorsque } S(x) > 0$$

Ceci est vérifié si :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$$

Cette inégalité fondamentale, connue comme une condition d'existence, est utilisée pour résoudre le problème de la synthèse des systèmes à structure variable

## Annexe D

---

Tant que  $S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$  est vérifié, la dynamique du système sur  $S(x)$  ainsi que sa stabilité sont indépendantes de la fonction  $f(x, t)$ . Elles dépendent uniquement des paramètres de la surface choisie. Ceci explique l'invariance de ces lois de commande par rapport aux perturbations agissants sur la partie commande [18].

## Bibliographie

---

[1] Madi Islem, Lebaz Lydia, « Etude et Commande d'un Système Aéroélastique Instationnaire Via la Fonction de Wagner », Institut d'aéronautique et des études spatiales, Université de Blida 1, 2016.

[2] Dewey H.Hodges; G. Alvin Pierce: Introduction to structural dynamics and aeroelasticity, campridge aerospace series 2001.

[3]Cosmas PANDIT PAGWIWOKO, « Vibrations Aéroélastiques des surfaces portantes », L'école centrale de Lyon, 1991.

[4]NASATEchnicalMemorandum, Aeroservoelasticity, <<https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19900009911>>, Consulté le 2019-05-09.

[5] Tewari Ashish, « Aeroservoelasticity Modeling and Control », Institut de Technologie, Kânpur, L'Inde, 2010.

[6]Wikipedia, L'encyclopédie libre, Aérodynamique, <<https://fr.wikipedia.org/wiki/A%C3%A9rodynamique?oldid=135277966>>, Consulté le 08/05/2019.

[7] Blanc Florian, « Méthodes numériques pour l'aéroélasticité des surfaces de contrôle des avions », Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, décembre 2009.

[8] M.Kadja, A.Zaatri, Z.Nemouchi, R.Bessaih, S.Benissad et K.Talbi, « Modelisation et analyse des phenomenes aeroelastique pour aile d'avion en matériaux composite », Université des sciences et de technologie Mohamed Boudiaf, Oran-Algérie, 2016.

[9]LadHyX, Flottement, <<https://www.ladhyx.polytechnique.fr/fr/>>, Consulté le 10/06/2019.

[10] TPE-Aerodynamisme, Aérodynamique, <>, Consulté le 20/06/2019.

[11]Wikipédia, L'encyclopédie libre, écoulement supersonique, <[https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89ecoulement\\_supersonique](https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89ecoulement_supersonique)>, consulter le 02/07/2019

## Bibliographie

---

- [12] T. Theodorsen, "General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter", NACA-TR-496, 1935
- [13] Bae, J.S., Kim, J.Y., Lee, I., Matsuzaki, Y. and Inman, D.J., « Extension of flutter prediction parameter for multimode flutter systems ». Journal of Aircraft, Vol. 42, No. 1 (2005), page 285-288.
- [14] Zhao, Y.H., « Flutter suppression of a high aspect-ratio wing with multiple control surfaces », Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [15] E. Arnold, « Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems », Department of Mechanical Engineering, university of London, 1995.
- [16] Edouard Laroche, « Commande optimale », Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, université de Strasbourg, 2009/2010.
- [17] H. Merabet Boulouiha, « NOTES DE COURS : TECHNIQUES DE COMMANDE AVANCÉE », Faculté Des sciences et de la Technologie ST Département d'Electrotechnique, Centre universitaire de Rélizane Ahmed Zabana, 2014/2015.
- [18] Benchabane, Fatah, « Commande en position et en vitesse par mode de glissant d'un moteur synchrone triphasé a aimants permanent avec minimisation du chattering », Université Mohamed Khider Biskra, 2005.
- [19] Chourouk El Biad, Samy Lafnune, « Commende robuste par mode glissant d'un système mécanique sous-actionner », Laboratoire d'informatique de Robotique et de Microelectronics de Montpellier », 161, rue Ada, 34095, Montpellier, 2014.
- [20] Vadim Utkin, Hoon Lee, « CHATTERING PROBLEM IN SLIDING MODE CONTROL SYSTEMS », Dept. of Electrical Engineering, The Ohio State University, 2015.
- [21] A. Fossard, « Asservissement Non-Linéaire - facicule 3 - méthode de Lyapunov », Polycopié de cours Supaéro, 1970.