



Greiner Müller

MÉCANIQUE QUANTIQUE SYMÉTRIES

Traduit et adapté par Daniel Ardouin
Université de Nantes avec la collaboration
de Thierry Gousset, Université de Nantes

Avant-propos de Hubert Curien



Springer

Table des matières

1. Symétries en mécanique quantique	1
1.1 Symétries en physique classique	1
1.2 Translations spatiales en mécanique quantique	19
1.3 L'opérateur de translation unitaire	20
1.4 L'équation de mouvement pour des états déplacés dans l'espace	22
1.5 Symétrie et dégénérescence d'états	23
1.6 Translations temporelles en mécanique quantique	32
1.7 Complément de mathématiques : définition d'un groupe	34
1.8 Complément de mathématiques : rotations et propriétés théoriques des groupes associés	36
1.9 Un isomorphisme du groupe des rotations	40
1.10 L'opérateur rotation pour des états multi-particules	53
1.11 Notes biographiques	54
2. Représentation de l'algèbre des opérateurs de moment angulaire : générateurs de SO(3)	55
2.1 Représentations irréductibles du groupe des rotations	55
2.2 Représentations matricielles des opérateurs de moment angulaire	60
2.3 Addition de deux moments angulaires	69
2.4 Calcul des coefficients de Clebsch–Gordan	73
2.5 Relations de récurrence pour les coefficients de Clebsch–Gordan	74
2.6 Calcul explicite des coefficients de Clebsch–Gordan	76
2.7 Notes biographiques	83
3. Compléments de mathématiques : propriétés fondamentales des groupes de Lie	85
3.1 Structure générale des groupes de Lie	85
3.2 Interprétation des commutateurs comme produits vectoriels généralisés, théorème de Lie, rang d'un groupe de Lie	96
3.3 Sous-groupes invariants, groupes de Lie simples et semi-simples, idéaux	98
3.4 Groupes de Lie compacts et algèbres de Lie	106
3.5 Opérateurs invariants (opérateurs de Casimir)	106

3.6	Théorème de Racah	107
3.7	Remarques sur les multiplets	107
3.8	Invariance par rapport à un groupe de symétrie	110
3.9	Construction des opérateurs invariants	113
3.10	Remarque sur les opérateurs de Casimir des groupes de Lie abéliens	116
3.11	Relation de complétude des opérateurs de Casimir	116
3.12	Propriétés de quelques groupes	118
3.13	Relation entre les changements de coordonnées et les transformations de fonctions	119
3.14	Notes biographiques	132
4.	Les groupes de symétrie et leur interprétation physique : considérations générales	135
4.1	Notes biographiques	140
5.	Le groupe d'isospin	141
5.1	Opérateurs d'isospin pour un système à plusieurs nucléons ...	147
5.2	Propriétés générales des représentations d'une algèbre de Lie .	156
5.3	Représentation régulière (ou adjointe) d'une algèbre de Lie ..	157
5.4	Loi de transformation dans l'iso-espace	161
5.5	Test expérimental de l'invariance de l'isospin	169
5.6	Notes biographiques	185
6.	L'hypercharge	187
6.1	Notes biographiques	193
7.	Le groupe de symétrie SU(3)	195
7.1	Les groupes $U(n)$ et $SU(n)$	195
7.2	Les générateurs de $SU(3)$	200
7.3	L'algèbre de Lie de $SU(3)$	202
7.4	Sous-algèbres de $SU(3)$ – algèbre de Lie et opérateurs d'échange	212
7.5	Couplage des multiplets de T , U et V	215
7.6	Analyse quantitative de la structure des multiplets	216
7.7	Remarques complémentaires sur la structure géométrique d'un multiplet de $SU(3)$	218
7.8	Nombre d'états sur les couches intérieures des mailles	219
8.	Quarks et SU(3)	231
8.1	Mise en évidence des quarks	234
8.2	Propriétés de transformation des états de quarks	234
8.3	Construction de l'ensemble des multiplets $SU(3)$ à partir des représentations élémentaires $[3]$ et $[\bar{3}]$	241
8.4	Construction de la représentation $D(p, q)$ sur des quarks et anti-quarks	242
8.5	Multiplets de mésons	254

8.6	Règles de réduction pour les produits directs de multiplets de $SU(3)$	258
8.7	Invariance de spin U	263
8.8	Test d'invariance de spin U	265
8.9	La formule de masse de Gell-Mann–Okubo	267
8.10	Coefficients de Clebsch–Gordan de $SU(3)$	269
8.11	Modèles de quarks avec degrés de liberté internes	272
8.12	Formule de masse pour $SU(6)$	300
8.13	Moments magnétiques dans le modèle des quarks	301
8.14	États excités des mésons et baryons	303
8.15	États excités avec moment angulaire orbital	305
9.	Représentations du groupe des permutations et tableaux de Young	309
9.1	Groupe des permutations et particules identiques	309
9.2	Forme standard des diagrammes de Young	313
9.3	Forme standard et dimension des représentations irréductibles du groupe des permutations S_N	316
9.4	Lien entre $SU(2)$ et S_2	326
9.5	Les représentations irréductibles de $SU(n)$	329
9.6	Détermination de la dimension	335
9.7	Les sous-groupes $SU(n-1)$ de $SU(n)$	339
9.8	Décomposition du produit tensoriel de deux multiplets	341
10.	Compléments de mathématiques : caractères	345
10.1	Définition des caractères	345
10.2	Lemmes de Schur	346
10.3	Relations d'orthogonalité entre représentations	347
10.4	Classes d'équivalence	349
10.5	Relations d'orthogonalité pour les caractères des groupes discrets	352
10.6	Relations d'orthogonalité des caractères sur l'exemple du groupe D_3	353
10.7	Réduction d'une représentation	355
10.8	Critère d'irréductibilité	355
10.9	Produit tensoriel de représentations	356
10.10	Généralisation aux groupes de Lie compacts	357
10.11	Digression mathématique : intégration sur le groupe	357
10.12	Groupes unitaires	360
10.13	Passage de $U(N)$ à $SU(N)$ sur l'exemple de $SU(3)$	361
10.14	Intégration sur les groupes unitaires	363
10.15	Caractères des groupes unitaires	366
11.	Charme et $SU(4)$	385
11.1	Particules charmées et $SU(4)$	387
11.2	Propriétés de $SU(4)$	388
11.3	Tables des constantes de structure f_{ijk} et des coefficients d_{ijk} de $SU(4)$	397
11.4	Structure en multiplets du groupe $SU(4)$	399

11.5	Considérations avancées	406
11.6	Le modèle du potentiel pour le charmonium	418
11.7	Les formules de masse de SU(4) [SU(8)]	426
11.8	Les résonances Υ	430
12.	Compléments de mathématiques	435
12.1	Introduction	435
12.2	Racines et algèbres de Lie classiques	439
12.3	Produit scalaire de valeurs propres	444
12.4	Normalisation de Cartan–Weyl	447
12.5	Représentation graphique des racines	448
12.6	Algèbres de Lie de rang 1	449
12.7	Algèbres de Lie de rang 2	449
12.8	Algèbres de Lie de rang $l > 2$	450
12.9	Les algèbres de Lie exceptionnelles	451
12.10	Racines simples et diagrammes de Dynkin	452
12.11	Procédé de Dynkin	454
12.12	Matrice de Cartan	456
12.13	Détermination de toutes les racines à partir des racines simples	457
12.14	Deux algèbres de Lie simples	459
12.15	Représentations des algèbres de Lie classiques	460
13.	Symétries discrètes spéciales	465
13.1	Inversion d'espace (transformation de parité)	465
13.2	États obtenus par inversion et opérateurs	467
13.3	Renversement du temps	468
13.4	Opérateurs anti-unitaires	470
13.5	Systèmes multi-particules	474
13.6	Fonctions propres réelles	475
14.	Symétries dynamiques	477
14.1	L'atome d'hydrogène	477
14.2	Le groupe SO(4)	480
14.3	Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène	481
14.4	L'oscillateur isotrope classique	482
15.	Compléments de mathématiques : groupes de Lie non compacts	497
15.1	Définition et exemples de groupes de Lie non compacts	497
15.2	Le groupe de Lie SO(2, 1)	505
15.3	Application aux problèmes d'interaction	509
Index		513

Table des exemples et des exercices

1.1	Moments angulaires dans différents référentiels	5
1.2	Quantités conservées dans des champs spécifiques	6
1.3	Théorème de Noether	8
1.4	Équations du mouvement invariante par rapport au temps : le lagrangien et les quantités conservées	11
1.5	Conditions d'invariances pour translations, rotations et transformations de Galilée	12
1.6	Lois de conservation dans les champs électromagnétiques homogènes	16
1.7	Éléments de matrice obtenus par déplacement spatial d'états	25
1.8	La relation $(i\hat{p}/\hbar)^n \hat{B}(x)$ et les opérateurs de transformation	26
1.9	Translation d'un opérateur $\hat{A}(x)$	28
1.10	Générateurs des translations dans un champ homogène	29
1.11	Transformation des champs vectoriels par rotation	44
1.12	Transformation des spineurs à deux composantes par rotation	48
1.13	Mesure de la direction des spins de l'électron	52
2.1	Représentation spéciale des opérateurs de spin 1	62
2.2	Calcul des coefficients de Clebsch–Gordan pour le couplage spin-orbite	80
3.1	Algèbre de Lie de SO(3)	88
3.2	Calcul avec des matrices complexes $n \times n$	89
3.3	Démonstration d'une relation de commutation	91
3.4	Générateurs et constantes de structure des transformations de Lorentz exactes	92
3.5	Algèbre de \hat{p}_ν et \hat{J}_ν	97
3.6	Groupe de translation–rotation	98
3.7	Groupes de Lie simples et semi-simples	100
3.8	Réduction de $\exp\{-\frac{1}{2}i\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}\}$	102
3.9	Critères de Cartan pour la semi-simplicité	103
3.10	Semi-simplicité de SO(3)	105
3.11	Un sous-espace invariant du groupe de rotation	107
3.12	Réduction d'un sous-espace invariant	108
3.13	Opérateur de Casimir du groupe de rotation	111
3.14	Quelques groupes de rang 1 ou 2	112
3.15	Construction du hamiltonien à partir des opérateurs de Casimir	117

Table des exemples et des exercices

3.16	Transformations dans un espace à n dimensions avec r paramètres	121
3.17	Générateurs et opérateurs infinitésimaux de $SO(n)$	122
3.18	Représentation matricielle pour l'algèbre de Lie de spin 1	124
3.19	Translations dans un espace à une dimension ; le groupe euclidien $E(3)$ à trois dimensions	128
3.20	Homomorphisme et isomorphisme de groupes et d'algèbres	130
3.21	Transformations des constantes de structure	131
4.1	Lois de conservation par symétrie de rotation et forces indépendantes de la charge	136
4.2	Dégénérescence en énergie pour quelques symétries	139
4.3	Dégénérescence et parité de quelques transformations	139
5.1	Loi d'addition pour des transformations infinitésimales de $SU(2)$	145
5.2	Le deutéron	149
5.3	Indépendance de charge des forces nucléaires	151
5.4	Le triplet du pion	153
5.5	Normalisation des générateurs du groupe	158
5.6	La parité G	164
5.7	Représentation d'une algèbre de Lie, représentation régulière de l'algèbre des opérateurs de moment angulaire	168
5.8	Le théorème de Wigner–Eckart	172
5.9	Production de pion par diffusion proton–deutéron	175
5.10	Production de pions neutres par diffusion deutéron–deutéron	176
5.11	Diffusion pion–nucléon	176
5.12	La décroissance du méson ρ^0	183
6.1	Hypercharge de noyaux	188
6.2	Hypercharge des résonances Δ	188
6.3	Baryons	189
6.4	Anti-baryons	191
6.5	Isospin et hypercharge des résonances baryoniques	191
7.1	L'algèbre de Lie de $SU(2)$	199
7.2	Indépendance linéaire des générateurs $\hat{\lambda}_i$	201
7.3	Symétrie des coefficients d_{ijk}	204
7.4	Antisymétrie des constantes de structure f_{ijk}	206
7.5	Calcul de quelques coefficients d_{ijk} et constantes de structure	207
7.6	Relations entre les constantes de structure et les coefficients d_{ijk}	209
7.7	Les opérateurs de Casimir de $SU(3)$	210
7.8	Relations utiles pour les opérateurs de Casimir de $SU(3)$	211
7.9	Multiplicité des états pour les couches internes des multiplets de $SU(3)$	221
7.10	États de particules au centre de l'octet des baryons	225
7.11	Calcul de la dimension d'une représentation $D(p, q)$	226
7.12	Calcul des opérateurs de Casimir quadratiques pour la représentation $D(p, q)$	228
8.1	Générateurs de $SU(3)$ pour la représentation $[3]$	235
8.2	Propriétés de transformation des états de l'anti-triplet $[\bar{3}]$	238

8.3	Non-équivalence des deux représentations fondamentales de SU(3)	239
8.4	Poids d'un état	243
8.5	Poids maximum d'un triplet [3] et d'un triplet $[\bar{3}]$	244
8.6	Mésons pseudo-scalaires	247
8.7	Exemple : les mésons $*K^0$ et K^0 et leurs décroissances	248
8.8	Les mésons scalaires	255
8.9	Les mésons vectoriels	256
8.10	Les mésons tensoriels	257
8.11	Autres résonances	257
8.12	Réduction des multiplets SU(2)	261
8.13	Construction de la fonction d'onde du neutron	279
8.14	Construction de la fonction d'onde du décuplet de baryons	282
8.15	Construction des fonctions d'onde de saveur et de spin pour l'octet des baryons	292
9.1	Fonctions de base de S_3	318
9.2	Représentations irréductibles de S_4	320
9.3	Multiplets d'un système de trois particules de spin $\frac{1}{2}$	327
9.4	Multiplets d'un système de deux particules du groupe SU(3)	330
9.5	Multiplets de SU(3) formés avec trois particules	331
9.6	Formule de dimension pour SU(3)	337
9.7	Décomposition d'un produit tensoriel	343
9.8	Représentation de SU(2) et spin	344
9.9	Trialité et confinement des quarks	344
10.1	Le groupe D_3	350
10.2	Le groupe des rotations O(3)	351
10.3	Utilisation de la notion de caractère : fonction de partition pour le plasma de quarks et de gluons avec symétrie SU(3) exacte	373
10.4	Démonstration de la formule de récurrence pour la dimension des représentations de SU(n)	378
11.1	Anti-commutateurs des générateurs de SU(N)	389
11.2	Trace d'un produit de générateurs pour SU(N)	391
11.3	Relation de fermeture pour les générateurs \hat{F}_a de SU(N)	393
11.4	Valeur propre de l'opérateur de Casimir \hat{C}_1 d'une représentation fondamentale de SU(N)	396
11.5	Contenu SU(3) d'un multiplet mésonique de SU(4)	411
11.6	Décomposition du produit $[4] \otimes [4] \otimes [4]$	413
11.7	Contenu du multiplet baryonique de SU(4)	414
11.8	Décomposition et dimension des multiplets plus élevés de SU(4)	416
11.9	Complément mathématique. Fonctions d'Airy.	422
12.1	Opérateurs de poids de l'algèbre SU(4)	438
12.2	Démonstration de la relation entre constantes de structure C_{ikl}	444
12.3	Diagramme de Dynkin pour B_l	455
12.4	Matrice de Cartan pour SU(3), SU(4) et G_2	456

12.5	Détermination des racines de G_2 à partir des racines simples	458
12.6	Analyse de $SU(3)$	463
13.1	Effet d'un opérateur anti-unitaire sur les éléments de matrice des fonctions d'onde	470
13.2	Relations de commutation entre \hat{U} et \hat{S}	473
14.1	Énergie et moment angulaire radial de l'atome d'hydrogène	484
14.2	Le vecteur de Runge–Lenz	485
14.3	Propriétés du vecteur de Runge–Lenz \hat{M}	485
14.4	Relation de commutation entre \hat{M} et \hat{H}	486
14.5	Étude du produit scalaire $\hat{L} \cdot \hat{M}$	489
14.6	Calcul de \hat{M}^2	490
14.7	Démonstration de la relation de commutation $[\hat{M}_i, \hat{L}_j]_-$	492
14.8	Démonstration de la relation de commutation $[\hat{M}_i, \hat{H}_j]_-$	494
15.1	Représentation des matrices de $SU(2)$	498
15.2	Représentation des matrices de $SU(1, 1)$	499
15.3	Caractère non compact du groupe de Lorentz	501
15.4	Générateurs de $SO(p, q)$	501
15.5	Opérateur de Casimir pour $SO(2, 1)$	506
15.6	Représentation en coordonnées des opérateurs de $SO(2, 1)$	509

Greiner Müller

MÉCANIQUE QUANTIQUE · SYMÉTRIES

L'ouvrage traite du concept des symétries, concept particulièrement intéressant et fructueux du cours de mécanique quantique avancé. Après une brève introduction aux symétries en mécanique classique, le texte s'attache à leur signification en mécanique quantique, aux conséquences de la symétrie de rotation, ainsi qu'à la théorie générale des groupes de Lie. Le groupe d'isospin, l'hypercharge, la symétrie SU(3), et leurs applications sont ensuite examinés en détail. La présentation du charme, de la symétrie SU(4) ainsi que des symétries dynamiques conduisent finalement le lecteur aux frontières de la recherche en physique des particules.

Cet ouvrage unique comprend, en outre, plus de 120 problèmes et exercices discutés en détail et résolus, constituant ainsi le manuel de référence en la matière.



Walter Greiner est né le 29.10.1935 à Neuenburg en Thuringe (Allemagne). Après l'apprentissage du métier de serrurier, il a effectué des études de physique et de mathématiques aux Universités de Francfort et de Darmstadt. En 1959, il obtient son diplôme de l'Université technique (TH) de Darmstadt (Allemagne). Thèse de doctorat en 1961 à l'Université de Fribourg en Brisgau (Allemagne). Professeur-assistant de 1962 à 1964 à l'Université du Maryland, College Park (USA). Depuis 1964 professeur titulaire à l'Université de Francfort. À partir de 1965 professeur et directeur de l'Institut de Physique théorique de l'Université Johann Wolfgang Goethe (Francfort/Main).



Berndt Müller est né le 8.2.1950 à Markneukirchen (La Saxe). Études de physique à l'Université de Francfort/Main. Thèse de doctorat en 1973. Années postdoctorales à l'Université de Yale, New Haven, et l'Université de Washington, Seattle (USA). 1976 professeur à l'Université de Francfort/Main. 1990 professeur à l'Université Duke, Durham (USA). 1996 James B. Duke professor.

ISBN 3-540-64346-X



9 783540 643463

<http://www.springer.de>