

UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB BLIDA 1

**Faculté de technologie
Département de Génie Mécanique**

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité conception mécanique

**CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITÉ DE
CONTRAINTÉ PAR ABAQUS POUR UNE FISSURE
CENTRALE ET UNE FISSURE DÉBOUCHANTE**

Présenté par

**Hossem Eddine SAIDI
Mohamed Abdellahi OULD AHMED**

Encadrés par

Dr. Hichème FERDJANI Professeur, Université Saad Dahlab BLIDA 1

Blida, Juin 2016

Remerciement

On remercie le **Dieu** tout puissant qui par sa miséricorde et sa clémence nous a guidé jusqu'à la fin de notre travail.

Un très grand merci à notre promoteur Pr. **Hicheme FERDJANI** pour ses conseils et orientations.

On remercie nos parents pour le soutien qui nous ont donnés, et pour la grande patience.

On remercie aussi tous ceux qui ont participé de près ou de loin dans ce modeste travail.

Résumé

Le but de ce travail est de calculer le facteur d'intensité de contrainte K en utilisant le logiciel Abaqus. La méthode numérique utilisée est basée sur l'intégrale J . On distingue deux modèles numériques ; un modèle avec éléments singuliers et un modèle sans éléments singuliers. Cette étude est appliquée à deux problèmes ; le premier est une fissure centrale et le deuxième est une fissure débouchante. Pour chaque problème, on calcule le FIC en utilisant les deux modèles numériques, et on constate l'influence de la singularité en comparant les résultats avec les valeurs théoriques et on déduit le meilleur modèle.

Mots clefs : facteur d'intensité de contrainte, FIC, Abaqus, intégral J , éléments singuliers, fissure.

Abstract

The aim of this study is to calculate the stress intensity factor K using the Abaqus software. The computational method is based on the J-integral theory. We will use two numerical models ; a model with singular elements and an orher without singular elements. This study deals with two problems ;a crack in an infinite plate under tensile loading and a single edge notch tension. For each problem, we calculate SIF using the two numerical models then ; noticing the effect of the singularity by comparing the results to the theoretical values and so deduce the best model.

Key words : stress intensity factor, SIF, Abaqus, J-integral, singular elements, crack.

Liste des symboles

(ξ, η)	Coordonnées du nœud dans le repère local
μ	Module de cisaillement
σ^∞	Charge de traction
Re, Im	Partie réelle et partie imaginaire
E_r	Erreur relative
J	Intégrale de Rice
K	Facteur d'Intensité de Contrainte
K_c	Facteur d'Intensité de Contrainte critique
K_{It}	Valeur théorique du facteur d'intensité de contrainte en mode I
O	Origine du repère
OX_1	Axe confondu avec le prolongement de la fissure
$P_2(t)$	Charge interne
r, θ	Coordonnées polaires
Z_I	Fonction de contraintes de Westergaard
$\Delta\phi$	Laplacien de ϕ
Γ	Contour fermé
γ_0	Énergie superficielle
ν	Coefficient de Poisson
ϕ	Fonction d'Airy
σ_0	Contrainte uniforme appliquée
σ_{ij}	Contrainte
ε_{ij}	Déformation
A	Surface de la fissure
a_c	Taille critique de la fissure
B	Épaisseur de l'éprouvette
E	Module de Young
E_P	Énergie potentielle totale

G	Taux de restitution d'énergie
G_c	Taux de restitution de l'énergie critique
K_c	Ténacité
K_I, K_{II}, K_{III}	Facteurs d'intensité de contrainte en mode I, II et III
N_i	Fonction de forme correspondant au nœud i
n_i	Normale
U_E	Variation de l'énergie de déformation élastique
u_i	Déplacement
v	Déplacement selon X_2
W	Densité d'énergie de déformation
W_{Ext}	Travail des forces extérieures
X_1	Direction parallèle à la fissure
X_2	Direction normale à la fissure
X_3	Direction perpendiculaire à la plaque
x_i	Coordonnées cartésiennes
Y	Coefficient de correction

Table des figures

1.1	Définition des modes d'ouverture	4
1.2	Fissure droite en situation plane	7
1.3	Présence d'une fissure dans un milieu infini	10
1.4	(a) élément isoparamétrique à 8 nœuds dans le repère local, (b) élément isoparamétrique à 8 nœuds dans le repère global, (c) élément triangulaire formé par l'effondrement des nœuds 4, 8,1 en seul point	13
2.1	Modèle complet	19
2.2	Quart modèle	19
2.3	Création de la géométrie	20
2.4	Dessin de la plaque	20
2.5	Définition du matériau	21
2.6	Définition de la section	21
2.7	Attribution de la section	22
2.8	Création de l'assemblage	23
2.9	Esquisse	24
2.10	Plaque avec les demi-cercles partitionnés	24
2.11	Création de la fissure	25
2.12	Pointe de fissure et direction de propagation	26
2.13	Symétrie et singularité	27
2.14	Création de l'étape « traction »	28
2.15	Paramètres de sortie(1)	28
2.16	Paramètres de sortie(2)	29
2.17	Définition de la charge	30
2.18	Symétrie par rapport au plan vertical	31
2.19	Symétrie par rapport au plan horizontal	32
2.20	Plaque avec chargement et conditions aux limites	32
2.21	Décomposition de la plaque	33
2.22	Région 1 : précision du maillage	34
2.23	Région 2 : précision du maillage	34
2.24	Choix des éléments(1)	35
2.25	Choix des éléments(2)	35
2.26	Contrôle du maillage	36
2.27	Contrôle du maillage : éléments non singuliers	37
2.28	Maillage de la plaque	37
2.29	Contrôle du maillage : éléments singuliers(1)	38
2.30	Contrôle du maillage : éléments singuliers(2)	38
2.31	Élément non singulier(a) vs Élément singulier(b)	39
2.32	Contours	40

2.33	Création de "job"	40
2.34	Analyse	41
2.35	Résultats	42
2.36	Partition et raffinement du maillage de la plaque	43
2.37	Convergence de maillage	44
3.1	Fissure de longueur $2a$ dans une plaque infinie	48
3.2	Champ de contrainte au voisinage de la fissure	48
3.3	Fissure interne chargée dans un milieu infini	49
3.4	Principe de superposition	49
3.5	Point m situant dans le plan de la fissure	50
3.6	Évolution de K_I en fonction de h/a	52
3.7	Fissure débouchante	54
3.8	Fissure débouchante : demi-modèle	54
A.1	Maillage et étude de convergence $h = 3$	XII
A.2	Maillage et étude de convergence $h = 4$	XIII
A.3	Maillage et étude de convergence $h = 5$	XIV
A.4	Maillage et étude de convergence $h = 6$	XV
A.5	Maillage et étude de convergence $h = 7$	XVI
A.6	Maillage et étude de convergence $h = 8$	XVII
A.7	Maillage et étude de convergence $h = 9$	XVIII
A.8	Maillage et étude de convergence $h = 10$	XIX
A.9	Maillage et étude de convergence $h = 15$	XX
A.10	Maillage et étude de convergence $h = 20$	XXI
A.11	Maillage et étude de convergence $h = 25$	XXII
A.12	Maillage et étude de convergence $h = 30$	XXIII
A.13	Maillage et étude de convergence $h = 35$	XXIV
A.14	Maillage et étude de convergence $h = 45$	XXV
A.15	Maillage et étude de convergence $h = 100$	XXVI
B.1	Maillage et étude de convergence $a = 0.1$	XXVII
B.2	Maillage et étude de convergence $a = 0.2$	XXVIII
B.3	Maillage et étude de convergence $a = 0.3$	XXIX
B.4	Maillage et étude de convergence $a = 0.4$	XXX
B.5	Maillage et étude de convergence $a = 0.5$	XXXI

Liste des tableaux

2.1	Application numérique	19
2.2	Valeurs de J	41
2.3	Convergence de maillage	44
3.1	Évolution de K_I en fonction de h/a	51
3.2	Application numérique exemple 2	55
3.3	Valeurs de J et K exemple 2	55
3.4	Comparaison des valeurs numériques avec les valeurs théoriques	55

Table des matières

Introduction générale	1
1 Étude bibliographique	3
1.1 Mécanique linéaire et non-linéaire de la rupture	3
1.2 Modes de rupture	4
1.3 Singularité du champ de contraintes	5
1.3.1 Élasticité plane et antiplane	5
1.3.2 Singularité des contraintes en mode I et mode II	6
1.3.3 Singularité des contraintes en mode III	8
1.4 Facteurs d'intensité des contraintes	8
1.5 Taux de restitution d'énergie	8
1.6 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et l'énergie de Griffith .	9
1.7 Intégrale de contour	10
1.8 Méthodes de calcul du facteur d'intensité de contraintes	11
1.8.1 La méthode du principe de superposition	11
1.8.2 La méthode d'extrapolation des déplacements	11
1.8.3 La méthode des éléments finis	12
1.8.4 La méthode de collocation des frontières	15
1.9 Présentation d'ABAQUS	15
2 Modélisation du problème avec Abaqus	18
2.1 Présentation du problème	18
2.2 Construction du modèle dans Abaqus	19
2.2.1 Création de la géométrie	19
2.2.2 Propriétés du matériau	20
2.2.3 Création de l'assemblage	22
2.2.4 Création de la fissure	24
2.2.5 Étapes et paramètres de sortie	27
2.2.6 Chargement et conditions aux limites	29
2.2.7 Maillage	33
2.2.8 Contour	39
2.3 Résultats et discussion	39
2.4 Étude de convergence	43
2.5 Calcul de K_I	45
3 Exemples d'application et validation	47
3.1 Fissure dans une plaque infinie	47
3.1.1 Solution théorique	47
3.1.2 Étude numérique	51

3.1.3	Comparaison avec la valeur théorique	52
3.2	Fissure débouchante	53
3.2.1	Étude numérique	53
3.2.2	Comparaison avec les valeurs théoriques	55
Conclusions et perspectives		57
A Résultats numériques		XII
B Résultats numériques II		XXVII
Bibliographie		XXXIII

Introduction générale

Les fissures sont présentes dans toutes les structures, elles peuvent exister sous forme de défaut de base dans le matériau ou peuvent être induites durant la construction, ces fissures sont responsables de la majorité des ruptures qui se produisent dans les structures et pièces de machines en service, soumises à des efforts statiques ou dynamiques [1].

La mécanique de la rupture a pour objet d'étudier et de prédire l'amorçage et la propagation des fissures dans les solides. C'est une discipline récente. Les débuts de l'étude de la rupture des matériaux fragile (qui se déforment peu avant de se rompre) remontent aux années 1920, avec les travaux précurseurs de Griffith ; mais ces travaux sont tombés dans un oubli relatif avant d'être exhumés dans les années 1950-1960, lorsque la discipline a réellement pris son essor (travaux d'Irwin et Rice). Quant à l'étude de la rupture des matériaux ductiles (qui se déforment beaucoup avant de se rompre), elle n'a débuté qu'à la fin des années 1960 et au cours des années 1970, avec les travaux fondamentaux de Rice et Tracey et Gurson [2]. La mécanique élastique linéaire s'intéresse à la rupture des matériaux fragiles. Elle est très largement utilisée par les ingénieurs car elle permet l'utilisation de critères énergétiques globaux tels que les facteurs d'intensité des contraintes (FIC)[3].

Griffith s'est intéressé en 1920 au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard taux de restitution d'énergie) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau [4].

Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité. Ces études, menées notamment par Irwin [1957], ont permis de définir les FIC, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit [4].

L'apparition de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la mécanique de la rupture d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions plus précises à des

problèmes plus complexes [4]. Apparurent alors une multitude de méthodes permettant de calculer les facteurs d'intensité de contraintes [4]. Parmi de ces méthodes la méthode du principe de superposition, extrapolation des déplacements et la méthode de collocation des frontières.

Dans notre étude, nous allons utiliser le logiciel Abaqus pour calculer le FIC. Le calcul numérique est basée sur l'intégrale de contour J . L'étude va comporter deux modèles numériques :

1. Modèle sans éléments singuliers
2. Modèle avec éléments singuliers

Le champ de contrainte et de déformation en pointe de fissure comprennent des singularité de type $(1/\sqrt{r})$ [5]. Afin de capturer cette singularité, le modèle numérique doit comporter des éléments dit "singuliers". Nous allons voir l'influence de ces éléments sur le FIC.

nous allons prendre comme applications l'étude des deux problèmes suivants :

1. Fissure centrale dans une plaque infinie soumise à une charge de traction uniforme.
2. Fissure débouchante située dans une plaque soumise à une charge de traction uniforme.

Le présent mémoire s'articule de la manière suivante :

Chapitre 1 : il consiste en une étude bibliographique, afin de rappeler les notions de la mécanique de la rupture et de présenter les outils nécessaires à cette étude.

Chapitre 2 : dans ce chapitre, nous allons présenter les étapes nécessaires pour construire le modèle numérique avec le logiciel Abaqus.

Chapitre 3 : nous allons entreprendre dans le dernier chapitre, l'étude théorique et numérique des deux problèmes cités auparavant. Nous allons comparer les résultats numériques avec les résultats théoriques et voir l'importance des éléments singuliers dans le calcul du FIC.

Chapitre 1

Étude bibliographique

Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter un rappel théorique sur la mécanique linéaire de la rupture. Elle concerne les matériaux dont le comportement est élastique linéaire. Dans le cadre de travaux sur les matériaux fragiles comme le verre, les chercheurs du milieu du 20^{me} siècle ont ainsi pu déterminer une grandeur scalaire notée K et appelée Facteur d'Intensité de Contrainte qui caractérise les champs de contraintes et de déformations au voisinage de la fissure. Ce paramètre a permis d'établir un seuil K_c pour déterminer l'amorçage et la propagation il a pu être relié à l'énergie libérée par la fissure au cours de sa propagation [1].

Au cours des années 70, de nombreuses études ont porté sur la recherche d'un paramètre permettant d'étendre la mécanique de la rupture au comportement élastoplastique des matériaux. Parmi les différents paramètres, l'intégrale de contour J , dont la paternité est attribuée à Rice [1].

1.1 Mécanique linéaire et non-linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de rupture [4] :

Rupture fragile : la rupture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique et par la propagation très rapide possible des fissures (mécanique linéaire de la rupture).

Rupture ductile : en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture).

1.2 Modes de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants [4]. Ces modes sont définis comme suit [1] :

Mode I : les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement au plan de fissuration, c'est le mode par ouverture.

Mode II : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, et dans une direction perpendiculaire au front de fissure. Il est appelé aussi mode par glissement droit.

Mode III : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure, c'est le mode de déchirement.

Ces trois modes sont illustrés dans la figure ci-dessous :

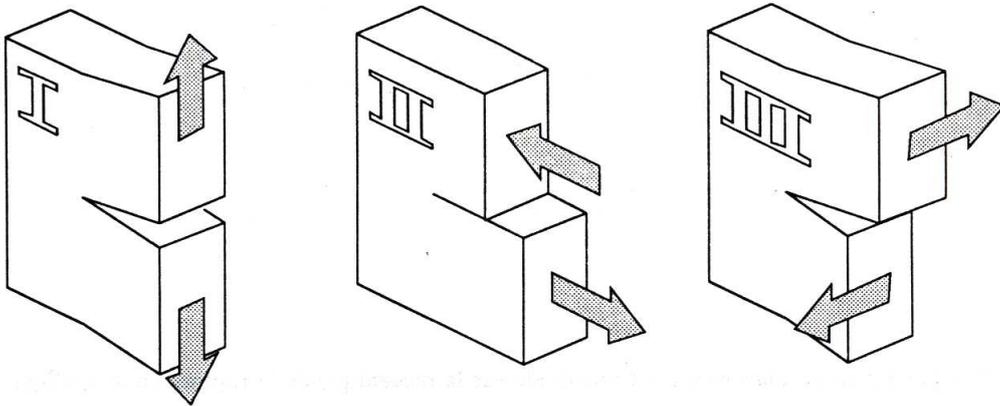


FIGURE 1.1 – Définition des modes d'ouverture

Le mode I est considéré comme le plus dangereux en raison de l'ouverture par traction qui favorise l'initiation et la propagation des fissures. C'est le type le plus répandu dans le cas des matériaux fragiles. Par conséquent, il est le plus étudié [6].

1.3 Singularité du champ de contraintes

Rigoureusement parlant les problèmes de mécanique de la rupture sont toujours tridimensionnels. Cependant la théorie tridimensionnelle complète est difficile, et on étudie la plupart du temps deux situations particulières plus simples : la situation de déformation plane et la situation antiplane [2]. Nous commençons par quelque généralité concernant ces situations particulières.

1.3.1 Élasticité plane et antiplane

Élasticité en déformation plane [2]

On dit qu'on est en situation de déformation plane dans le plan (X_1, X_2) si le déplacement u est indépendant de X_3 , et si sa composante u_3 est nulle. Il en résulte immédiatement que ε est également indépendant de X_3 et que $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. La loi d'élasticité, supposée isotrope, implique qu'il en est de même de σ

Les équations d'équilibre :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 \quad (1.2)$$

L'absence de forces de masse implique qu'il existe une fonction $\phi(x_1, x_2)$ appelée fonction d'Airy, telle que :

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} \quad (1.3)$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{12} = -\phi_{,12} \quad (1.5)$$

L'équation de Beltrami devient :

$$\Delta\Delta\phi = 0 \quad (1.6)$$

Qui exprime que la fonction d'Airy est bi-harmonique.

où :

$$\Delta\phi = \phi_{,11} + \phi_{,22} \quad (1.7)$$

On utilise fréquemment l'expression de σ en coordonnées polaires, que l'on obtient par changement de base :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} + \frac{1}{r}\phi_{,r} \quad (1.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \phi_{,rr} \quad (1.9)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r}\phi_{,\theta}\right)_{,r} \quad (1.10)$$

Élasticité antiplane [2]

On dit que l'on est en situation antiplane si u_1 et u_2 sont nuls et si u_3 ne dépend que de x_1 et x_2 . Toutes les composantes de tenseur de déformation sont alors nulles, sauf $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}u_{3,1}$ et $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}u_{3,2}$. La loi d'élasticité (isotrope) indique qu'il en est de même des composantes de tenseur de contrainte, à l'expression de $\sigma_{13} = \mu u_{3,1}$ et $\sigma_{23} = \mu u_{3,2}$.

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \longrightarrow \Delta u_3 = 0 \quad (1.11)$$

Ainsi u_3 doit être une fonction harmonique. On peut donc écrire :

$$\mu u_3 = \mathbf{Re} f(z) \quad (1.12)$$

Où $f(z)$ est une fonction analytique de z tel que

$$\begin{cases} z = x_1 + ix_2 \\ f'(z) = \sigma_{31} + i\sigma_{32} \end{cases} \quad (1.13)$$

1.3.2 Singularité des contraintes en mode I et mode II

La singularité est de type $1/\sqrt{r}$. On la démontre comme suit [2] :

Considérons une fissure droite en situation de déformation plane. Cherchons la forme asymptotique des contraintes au voisinage de sa pointe. Pour cela, définissons classiquement un repère (O, X_1, X_2) avec O confondu avec la pointe et OX_1 située dans le prolongement de la fissure, et les coordonnées polaires (r, θ) correspondants.

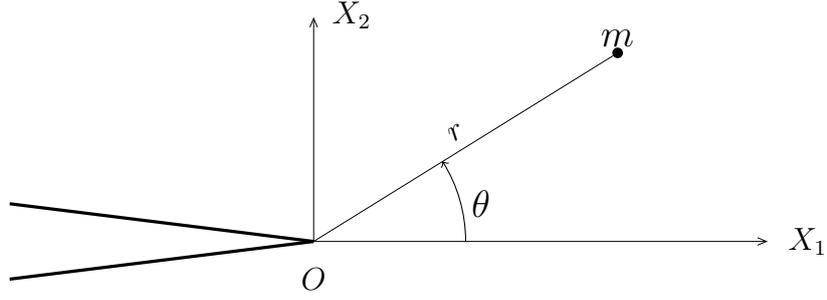


FIGURE 1.2 – Fissure droite en situation plane

La démarche classique, due à Williams (1952), que nous allons suivre, consiste à étudier la fonction d’Airy du problème, qui vérifie les équations suivantes :

$$\Delta\Delta\phi = 0 \quad \text{Équation de Beltrami}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) = \phi_{,rr}(r, \pm\pi) &= 0 \\ \sigma_{r\theta}(r, \pm\pi) = -\left(\frac{1}{r}\phi_{,\theta}\right)_{,r}(r, \pm\pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Conditions de bord libres sur la fissure} \quad (1.14)$$

Cherchons ϕ sous la forme :

$$\phi(r, \theta) = r^{\alpha+2}\psi(\theta) \quad (1.15)$$

On trouve l’expression asymptotique des contraintes :

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.17)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.18)$$

Les coefficients K_I et K_{II} sont appelés facteurs d’intensité de contrainte de mode I et II respectivement.

Ce résultat, fort important, montre que quelle que soit la géométrie du corps étudié. Quel que soit le chargement appliqué, l’expression asymptotique des contraintes dépend (en déformation plane) de deux constantes seulement, K_I et K_{II} .

À partir des contraintes, on peut calculer les déformations puis le déplacement. Le résultat est le suivant en coordonnées polaire :

$$u_r = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(5 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-5 + 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (1.19)$$

$$u_\theta = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7 + 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7 + 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (1.20)$$

1.3.3 Singularité des contraintes en mode III

Envisageons maintenant le cas antiplan. L'expression asymptotique des contraintes est donnée par [2] :

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.21)$$

$$\sigma_{32} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.22)$$

K_{III} est le facteur d'intensité en mode III.

Le déplacement correspondant est donnée par [2] :

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.23)$$

1.4 Facteurs d'intensité des contraintes

Le facteur d'intensité des contraintes (FIC) K est le seul paramètre significatif, qui permet de connaître l'état de contrainte et de déformation en toute pointe de fissure [7]. Irwin montre que le champ de contraintes, au voisinage de la pointe de la fissure, est décrit par un paramètre appelé "facteur d'intensité de contrainte", noté K . La rupture survient lorsque K atteint une valeur critique K_c caractéristique du matériau et appelée "ténacité". Le facteur d'intensité de contrainte s'exprime en mode I sous la forme [8] :

$$K_I = Y \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (1.24)$$

Où a est la longueur initiale de la fissure, σ_0 est la contrainte uniforme appliquée et Y est un facteur géométrique (Coefficient de correction).

Irwin a postulé que la condition $K \geq K_c$ représentait un critère de rupture.

1.5 Taux de restitution d'énergie

Griffith (1920) a été le premier à étudier la rupture d'un point de vue énergétique. Ce taux de restitution d'énergie noté G s'exprime de la manière suivante [9] :

$$G = -\frac{\partial E_P}{\partial A} \quad (1.25)$$

Où E_P est l'énergie potentielle totale

$$E_P = U_E - W_{Fext} \quad (1.26)$$

A : la surface de la fissure créée après propagation $A = B \cdot a$

B : l'épaisseur de l'éprouvette.

a : longueur de la fissure.

U_E : Variation de l'énergie de déformation élastique $U_E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega$

W_{Fext} : Travail des forces extérieures.

Pour le problème de Griffith, qui comporte deux extrémités parfaitement symétriques :

$$G = -\frac{1}{2} \frac{\partial(U_E - W_{Fext})}{\partial A} \quad (1.27)$$

$$G = -\frac{1}{2B} \frac{\partial(U_E - W_{Fext})}{\partial a} \quad (1.28)$$

La rupture se produit lorsque l'énergie totale atteint un optimum. Elle survient, pour une contrainte appliquée donnée lorsque la taille de la fissure tend vers une valeur critique a_c . Dans ce cas, la valeur de l'énergie G correspond au taux de restitution de l'énergie critique G_c dont la valeur pour un matériau fragile est égale à deux fois l'énergie superficielle : $G_c = 2\gamma_0$ [1].

Critère de propagation de Griffith

On a

$G \geq G_c$: Condition nécessaire à la propagation de la fissure.

$G < G_c$: Pas de propagation de la fissure.

1.6 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et l'énergie de Griffith

Formule d'Irwin [2]

Nous allons maintenant établir une formule fort importante, dite la formule d'Irwin (1958), qui relie le taux de restitution d'énergie G aux facteurs d'intensité de contraintes K_I, K_{II}, K_{III} est donnée par :

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (1.29)$$

Avec :

$E' = E$ en contraintes planes.

$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$: En déformations planes.

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$: est le module de cisaillement.

E : est le module de Young.

ν : est le coefficient de Poisson.

1.7 Intégrale de contour

Nous allons maintenant donner une autre expression de G sous forme d'une intégrale de contour. Cette expression, due à Rice (1968), est très utile en pratique [2] :

$$G = J = \int_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) ds \quad (1.30)$$

L'intégrale figurant au second membre est appelé intégrale de Rice, et notée J .

Où :

Γ : Un contour fermé quelconque entourant la pointe de fissure (Figure. I.4)

u_i : Vecteur déplacement.

W : La densité d'énergie de déformation

n : Normale unitaire extérieure au contour.

n_1 : Composante sur l'axe X_1

n_j : Composante sur l'axe X_j

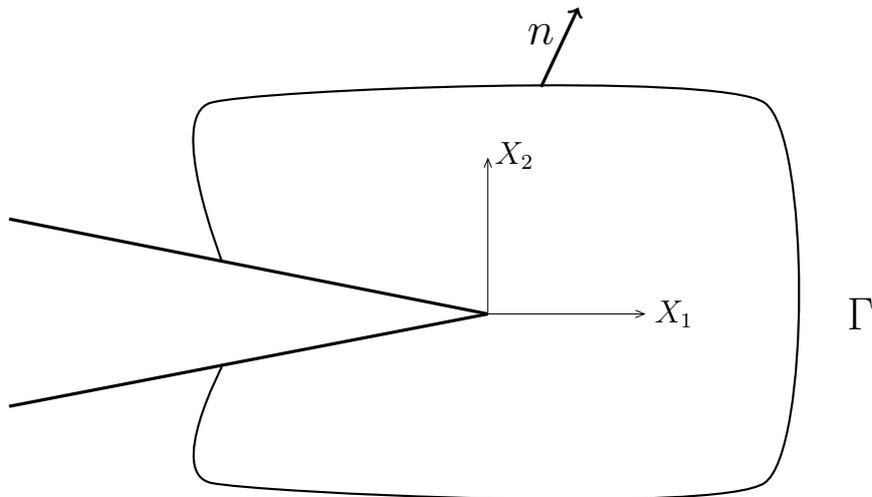


FIGURE 1.3 – Présence d'une fissure dans un milieu infini

Cette intégrale présente de nombreuses caractéristiques intéressantes [1] :

1. Elle est indépendante du choix du contour d'intégration Γ .
2. L'intégrale J représente le taux de décroissance de l'énergie potentielle :

$$J = G = -\frac{\partial E_P}{\partial A} \quad (1.31)$$

3. J quantifie l'intensité des champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure. Pour un matériau élastique cette intégrale est identique à la grandeur G définie par Griffith.

L'égalité de G et J et la formule d'Irwin garantissent que [2] :

$$J = G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (1.32)$$

1.8 Méthodes de calcul du facteur d'intensité de contraintes

Il existe plusieurs techniques pour calculer le facteur d'intensité des contraintes, parmi les plus utilisés, on peut citer :

1. La méthode du principe de superposition.
2. La méthode d'extrapolation des déplacements.
3. La méthode de collocation de frontière.
4. La méthode des éléments finis.

1.8.1 La méthode du principe de superposition

Cette méthode consiste à décomposer le problème posé en une somme de problèmes simples dont les solutions sont connues. Le problème étant un problème d'élasticité linéaire, on peut appliquer le principe de superposition. On a ainsi [10]

$$K_I^{total} = K_I^A + K_I^B + K_I^C + \dots \quad (1.33)$$

1.8.2 La méthode d'extrapolation des déplacements

Le saut de déplacement à travers les lèvres de la fissure pour les points $(r, \theta = +\pi)$ et $(r, \theta = -\pi)$ se calcule à partir d'équation suivante [11] :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta u_2 \cdot \mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (1.34)$$

où

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [k + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\
\Delta u_2 &= u_2(\theta = +\pi) - u_2(\theta = -\pi) \\
k &= 3 - 4\nu \quad \text{en déformation plane} \\
k &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en contrainte plane}
\end{aligned} \tag{1.35}$$

1.8.3 La méthode des éléments finis

Singularité [5]

Toutes les méthodes pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte reposent sur le calcul précis des champs des contraintes et déplacement. Cependant, des résultats plus précis peuvent être obtenus en captant le champ de contrainte singulier en pointe de fissure. Puisque nous savons que dans les matériaux élastiques les contraintes en pointe de fissure sont singulière en $1/\sqrt{r}$, cette singularité peut être construite dans le calcul des éléments finis.

Dans la méthode des éléments finis le champ de déplacement et les coordonnées sont interpolées à l'aide des fonctions de forme.

Soit $x = x_1$, $y = x_2$, $u = u_1$, $v = u_2$. Considérons un élément isoparamétrique à 8 nœuds représenté dans la figure (1.4(b)). En utilisant les fonctions de forme $N_i(\xi, \eta)$ correspondant au nœud i , de coordonnées nodales (x_i, y_i) dans le repère global et (ξ, η) dans le repère local.

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \\
y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Les déplacements sont interpolés de la même manière :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \\
v &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i
\end{aligned} \tag{1.37}$$

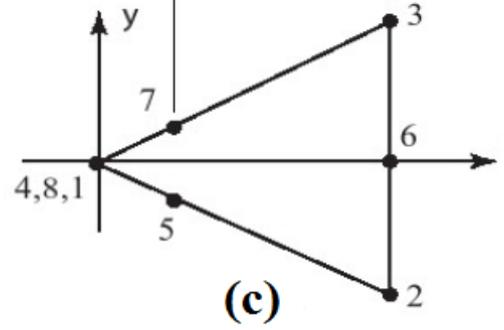
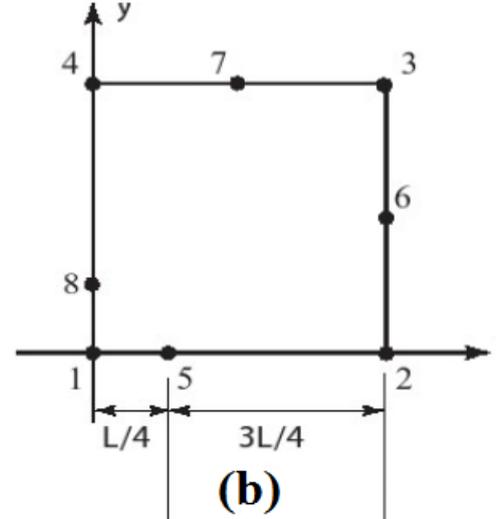
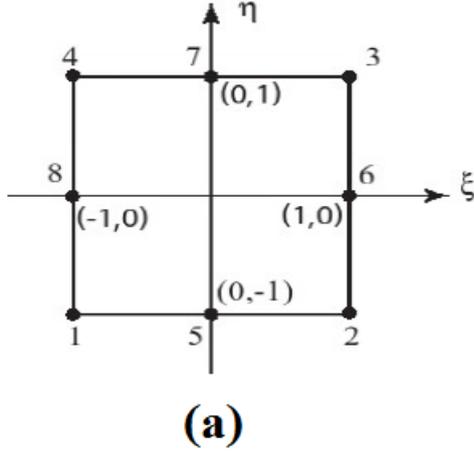


FIGURE 1.4 – (a) élément isoparamétrique à 8 nœuds dans le repère local, (b) élément isoparamétrique à 8 nœuds dans le repère global, (c) élément triangulaire formé par l’effondrement des nœuds 4, 8,1 en seul point

Les fonctions de forme de l’élément isoparamétrique à 8 nœuds sont :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{-(\xi - 1)(\eta - 1)(1 + \eta + \xi)}{4} \\
 N_2 &= \frac{(\xi + 1)(\eta - 1)(1 + \eta - \xi)}{4} \\
 N_3 &= \frac{(\xi + 1)(\eta + 1)(-1 + \eta + \xi)}{4} \\
 N_4 &= \frac{-(\xi - 1)(\eta + 1)(-1 + \eta - \xi)}{4} \\
 N_5 &= \frac{(1 - \xi^2)(1 - \eta)}{2} \\
 N_6 &= \frac{(1 - \eta^2)(1 + \xi)}{2} \\
 N_7 &= \frac{(1 - \xi^2)(1 + \eta)}{2} \\
 N_8 &= \frac{(1 - \eta^2)(1 - \xi)}{2}
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Nous calculons la déformation le long du fond de l'élément à 8 nœuds, à savoir le long $\eta = -1$. Les fonctions de forme pertinentes sur $\eta = -1$ sont :

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \\ N_5 &= 1 - \xi^2 \end{aligned} \quad (1.39)$$

La déformation normale est ε_{xx} :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1,2,5} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} u_i \quad (1.40)$$

$$\text{Où } \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \xi - \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \xi + \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -2\xi$$

Considérons d'abord le cas dans lequel le nœud 5 (nœud à mi- latéral) est situé au centre de l'élément, de sorte que $x_1 = 0$, $x_2 = L$ et $x_5 = \frac{L}{2}$. En appliquant les relations (1.39) et (1.36) on aura

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{\xi(1 + \xi)}{2}L + (1 - \xi^2)\frac{L}{2} \\ &= \frac{L}{2}(\xi + 1) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ainsi, $\xi = (2x - L)/L$ et $\partial \xi / \partial x = 2/L$. Étant donné qu'aucune des $\partial N_i / \partial \xi$ n'est singulier, et que $\partial \xi / \partial x$ est non-singulier aussi, la relation (1.40) résulte en une déformation non singulière.

Maintenant, changeons la position du nœud 5 au quart tel que : $x_1 = 0$, $x_2 = L$ et $x_5 = \frac{L}{4}$.

On aura :

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{\xi(1 + \xi)}{2}L + (1 - \xi^2)\frac{L}{4} \\ &= \frac{L}{4}(\xi^2 + 2\xi + 1) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Résoudre pour ξ et différencier :

$$\xi(x) = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{xL}} \quad (1.44)$$

Soit $u_1 = 0$ alors la relation (1.40) nous donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{xL}}[-2\xi u_5 + (\frac{1}{2} + \xi)u_2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{xL}}[\frac{u_2}{2} + (u_2 - 2u_5)\xi] \end{aligned}$$

Substituant $\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}}$ et en simplifiant, on aura :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{4}{L} \left(\frac{u_2}{2} - u_5 \right) + \frac{1}{\sqrt{xL}} \left(2u_5 - \frac{u_2}{2} \right) \quad (1.45)$$

Ainsi, en déplaçant simplement les nœuds mi-latéraux aux quart de la longueur, résulte la singularité en $1/\sqrt{r}$ cherché.

1.8.4 La méthode de collocation des frontières

La méthode de collocation de frontière est l'une des méthodes de calcul du facteur d'intensités de contrainte à partir du développement asymptotique des champs des contraintes en point de fissure. L'idée générale est que étant donnée les conditions aux limites en contrainte pour un problème donné, on exprime les contraintes en un nombre fini de positions, appelées points de collocation, à l'aide de la forme asymptotique avec des coefficients inconnus [5].

Pour chaque point de collocation, on obtient une équation pour les coefficients inconnus. Il suffit d'avoir au moins autant de points de collocation que de coefficients inconnus, afin de résoudre le système d'équations et obtenir les coefficients recherchés. La valeur du coefficient correspondant à la singularité de contrainte en $1/\sqrt{r}$ est le facteur d'intensité de contrainte [5].

1.9 Présentation d'ABAQUS

ABAQUS est un progiciel de calcul éléments finis développé par ABAQUS, Inc qui a été acquise par Dassault Systèmes et est devenue SIMULIA [12]. Il se compose de [13] :

Abaqus/CAE

C'est l'interface où l'on crée notre modèle. c'est là où on définit la géométrie, le matériau utilisé, l'assemblage, les paramètres physiques qu'on veut calculer, le type d'analyse (statique, dynamique etc...) , le maillage, les conditions aux limites, le chargement et bien d'autres paramètres qui diffèrent suivant l'étude menée. Au final, on aura une visualisation des résultats (déformé, champ de contrainte, champ de déplacement, valeurs des paramètres physique dans un nœud donné, etc...)

Abaqus/Standard

C'est un solveur destiné aux problèmes statiques, quasi-statiques et dynamique à faible vitesse comme l'étude d'équilibre d'une structure ou de la propagation d'une fissure dans une plaque métallique. Abaqus/Standard est pris en charge dans l'environnement de modélisation Abaqus/CAE pour tous les besoins courants en matière de pré traitement et de post-traitement.

Abaqus/explicit

C'est un solveur qui est destiné à l'étude des régimes dynamiques transitoires tels que le choc d'une voiture sur un mur ou bien l'impact d'un tir balistique. Il est mieux adapté pour les problèmes non linéaires comme l'analyse des contacts. Abaqus/ explicit est pris en charge dans l'environnement de modélisation Abaqus/CAE pour tous les besoins courants en matière de pré traitement et de post-traitement.

Abaqus/cfd

Il traite les problèmes de la mécanique des fluide et de transfert de chaleur.

Abaqus Multiphysics

Il est destiné pour résoudre les problèmes multi-phisiques, on site, par exemple les problèmes : :

- Hydrostatique-fluide-mécanique
- Piézoélectrique-mécanique
- Structure-acoustique
- Thermique-électrique
- Thermique-mécanique
- Thermique-fluide-mécanique

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un rappel théorique sur les grandeurs physiques utilisées dans notre étude tel que le FIC K et l'intégral de contour J . Ces paramètres sont très utilisés dans la pratique car il ont une relation directe avec la contrainte et la déformation. Nous avons évoqué aussi la singularité de contrainte qui est modélisée par la suite en éléments finis.

Chapitre 2

Modélisation du problème avec Abaqus

Introduction

Dans ce chapitre, on va utiliser une méthode numérique pour calculer K_I basée sur l'intégral J . Le logiciel qu'on va utiliser est « Abaqus ». Dans cette étude, on va distinguer deux cas :

1. Modèle sans éléments singuliers.
2. Modèle avec éléments singuliers.

L'étude des deux cas est la même sauf pour le maillage. Le calcul de K_I nécessite le calcul de J . Dans un premier temps, on va calculer le K_I avec un premier maillage puis faire une étude de convergence pour choisir le maillage approprié. Cet exemple sera illustré en détaillant toutes les étapes nécessaires qu'on va suivre.

2.1 Présentation du problème

On a une plaque métallique de forme carrée avec dimensions $2h \times 2h$ contenant au milieu une fissure de longueur $2a$. On considère que le matériau est isotrope avec un module de Young E et un coefficient de poisson ν . On applique une charge de traction constante σ le long des deux bords supérieur et inférieur de la plaque (Figure 2.1).

On remarque une symétrie par rapport aux plans médians horizontal et vertical. On pourra donc, simplifier notre modèle et travailler avec le quart comme le montre la figure 2.2.

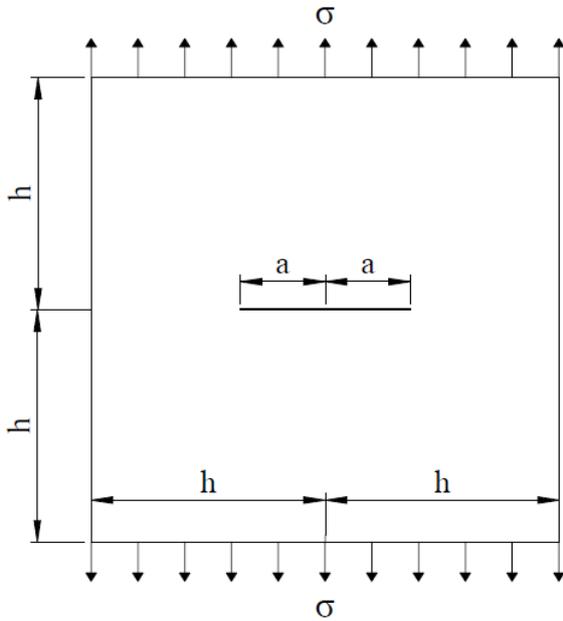


FIGURE 2.1 – Modèle complet

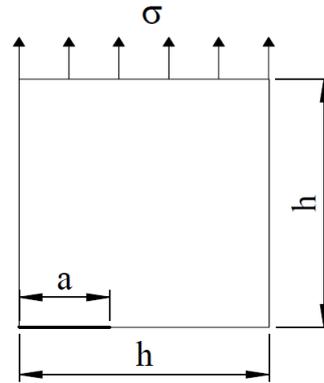


FIGURE 2.2 – Quart modèle

2.2 Construction du modèle dans Abaqus

Les données de l'application numérique sont résumés dans le tableau 2.1

Grandeurs	Valeur	Unité
Longueur de la plaque	$2h$	4 m
Longueur de fissure	$2a$	2 m
Module de Young	E	200 Gpa
Coefficient de Poisson	ν	0.3 $-$
Charge de traction	σ	1 N/m^2

TABLE 2.1 – Application numérique

2.2.1 Création de la géométrie

Dans le module **Part**, on clique sur **Creat Part** (Figure 2.3(a)). Une fenêtre va apparaître, on la remplit comme il est indiqué sur la figure 2.3(b), puis on tape sur **Continue...**

Ensuite, on va dessiner notre plaque à l'aide de la commande **Creat Lines : Rectangle (4 Lines)** et la dimensionner par **Add Dimension**. Enfin, on termine en appuyant sur **Done** (Figure 2.4(a)). Le résultat final est comme suit (Figure 2.4(b)).

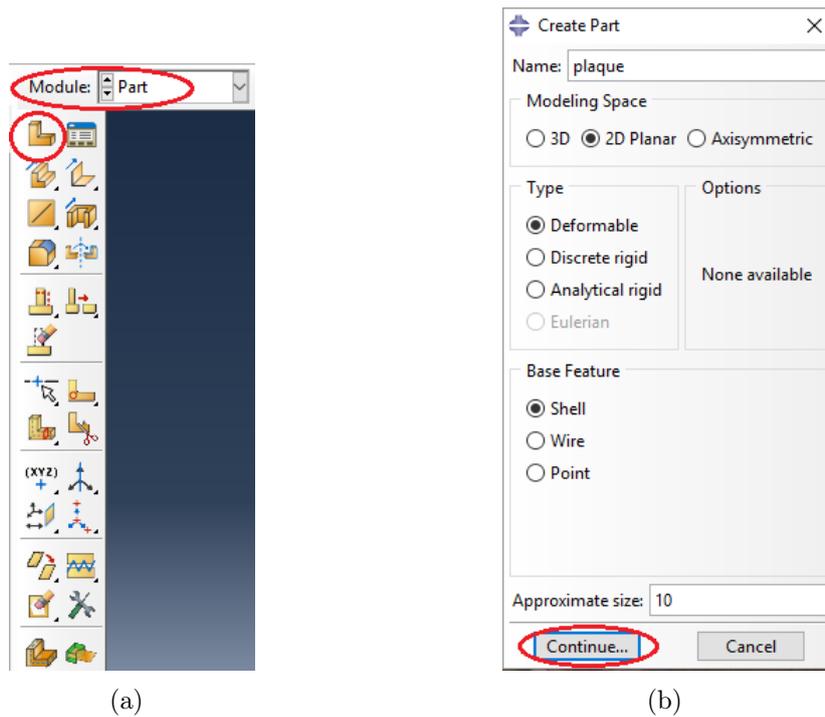


FIGURE 2.3 – Création de la géométrie

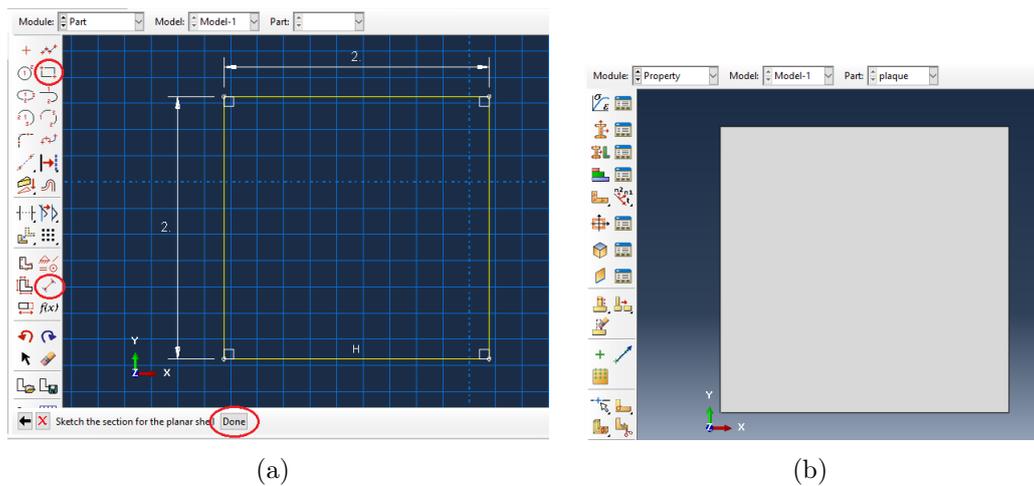


FIGURE 2.4 – Dessin de la plaque

2.2.2 Propriétés du matériau

Dans le module **Property**, on clique sur **Create Material** (Figure 2.5(a)). Après ouverture de la nouvelle fenêtre, on choisit un nom pour notre matériau, par exemple « Métal », puis on va vers **Mechanical** → **Elasticity** → **Elastic** pour définir les caractéristiques élastiques du matériau. Enfin on appuie sur **OK** (Figure 2.5(b)).

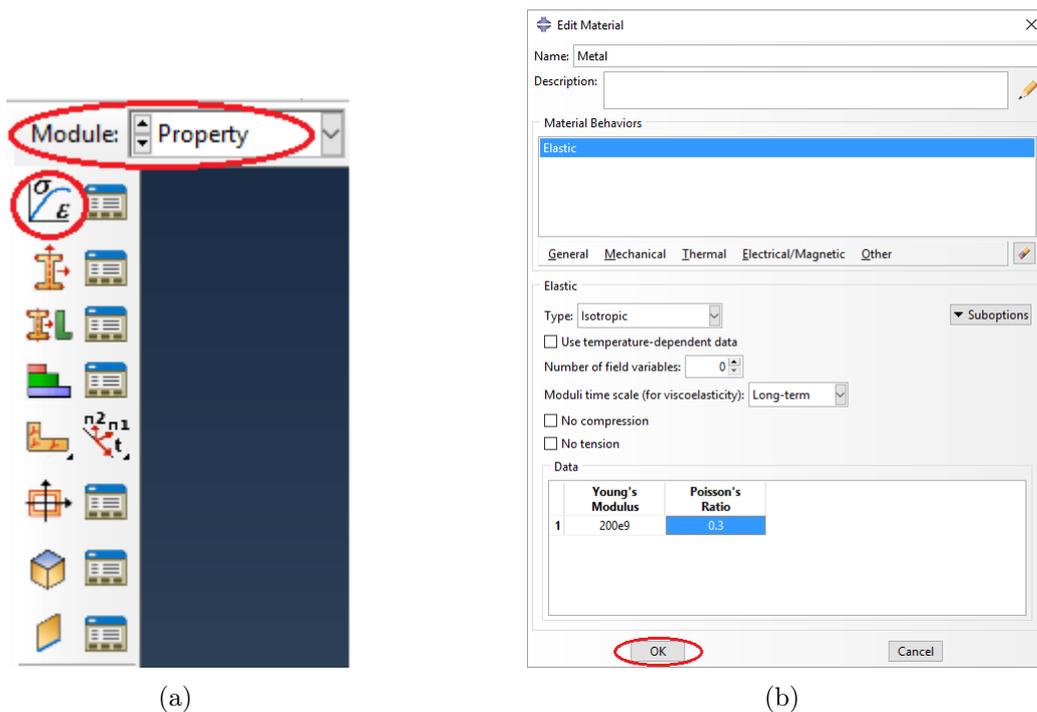


FIGURE 2.5 – Définition du matériau

Après la définition du matériau, On va créer une section. Dans le même module, on appuie sur **Create Section** (Figure 2.6(a)). Ensuite, on va nommer notre section « Section-1 » et sélectionner **Solid** dans **Category** et **Homogeneous** dans **Type**, on termine par **Continue...** (Figure 2.6(b)). Une fenêtre va apparaître, on va choisir dans **Material** notre matériau crée précédemment et on termine par **OK** (Figure 2.6(c)).

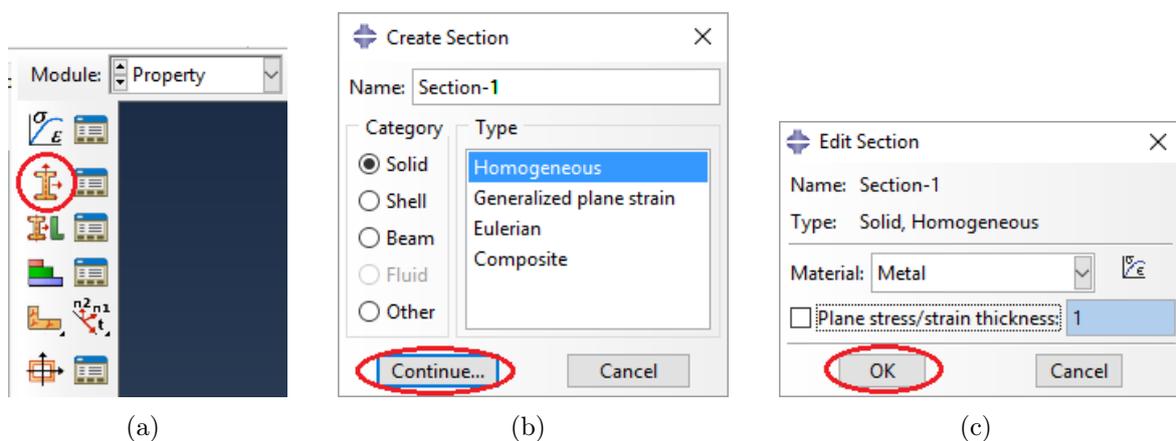


FIGURE 2.6 – Définition de la section

Maintenant, on va attribuer à notre géométrie la section créée précédemment. Dans le même module, on appuie sur **Assign Section** puis on sélectionne la géométrie et on clique

sur **Done** (Figure 2.7(a)). Dans la nouvelle fenêtre, on choisie notre section et on tape sur **OK** (Figure 2.7(b)).

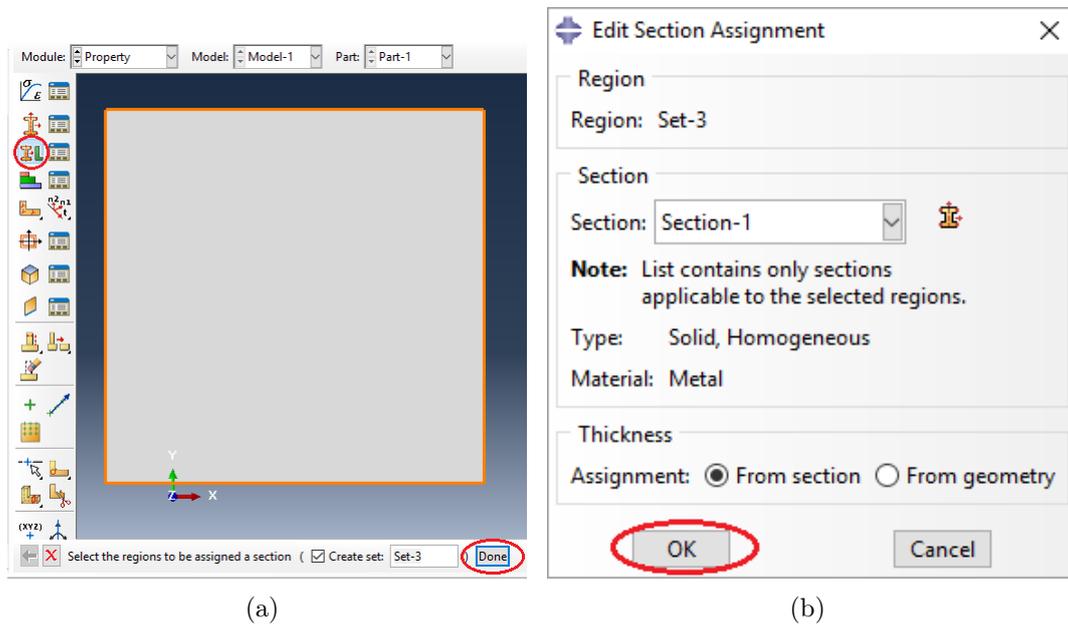


FIGURE 2.7 – Attribution de la section

2.2.3 Création de l'assemblage

Maintenant, on va créer un assemblage. Dans Abaqus, chaque modèle doit contenir un assemblage, même s'il se compose d'une seule partie. Dans le module **Assembly**, on sélectionne **Create Instance** (Figure 2.8(a)). Dans la nouvelle fenêtre, on remarque que notre plaque a été choisie par défaut. Dans **Instance Type**, on sélectionne **Independent (mesh on instance)** et on termine par **OK** (Figure 2.8(b)).

Ce choix signifie que le maillage se fera au niveau de l'assemblage non pas au niveau de la pièce. La création des singularités n'est possible que dans ce cas.

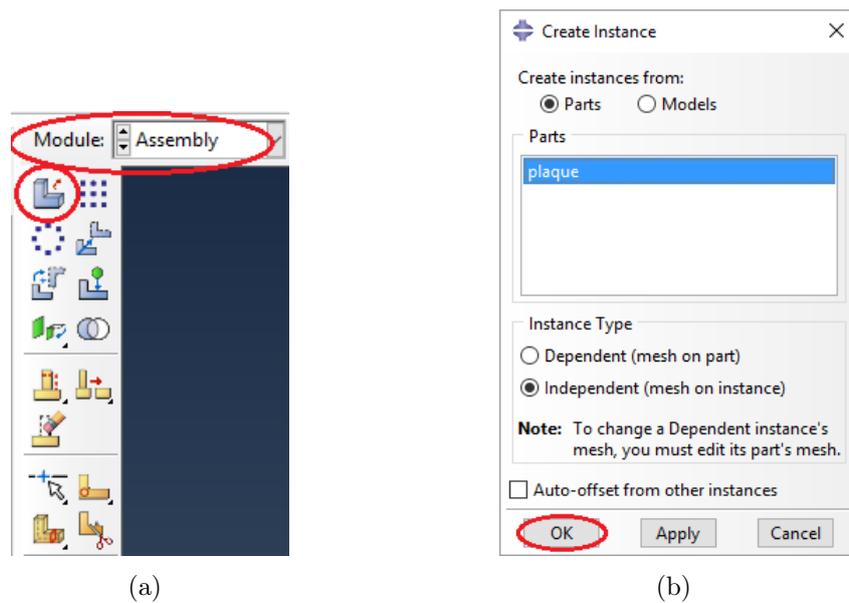


FIGURE 2.8 – Création de l'assemblage

Après la création de l'assemblage, on va faire un esquisse dans notre plaque. Dans cette étape, on va :

1. Créer l'emplacement de la fissure.
2. Dessiner des demi-cercles autour de la pointe de fissure nécessaires pour la création des contours.
3. Partitionner ces demi-cercles de façon à créer la forme des éléments singuliers.
4. Raffiner le maillage.

On reste dans le même module et on clique sur **Partition Face : Sketch** (Figure 2.9(a)). À l'aide des commandes d'esquisse, on va dessiner sur notre plaque comme le montre la figure 2.9(b).

Le résultat final est comme suit (Figure 2.10) :

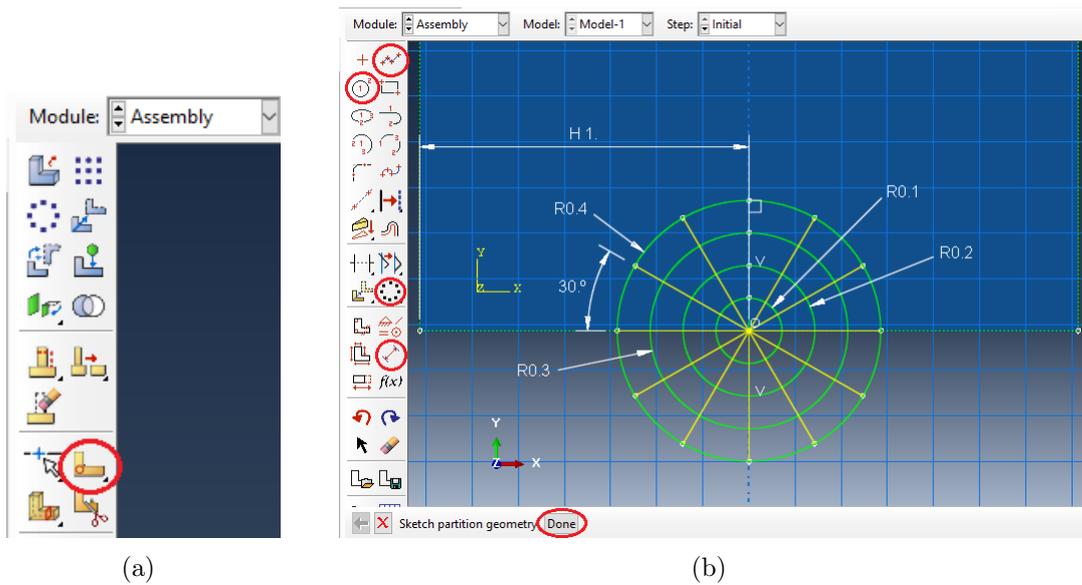


FIGURE 2.9 – Esquisse

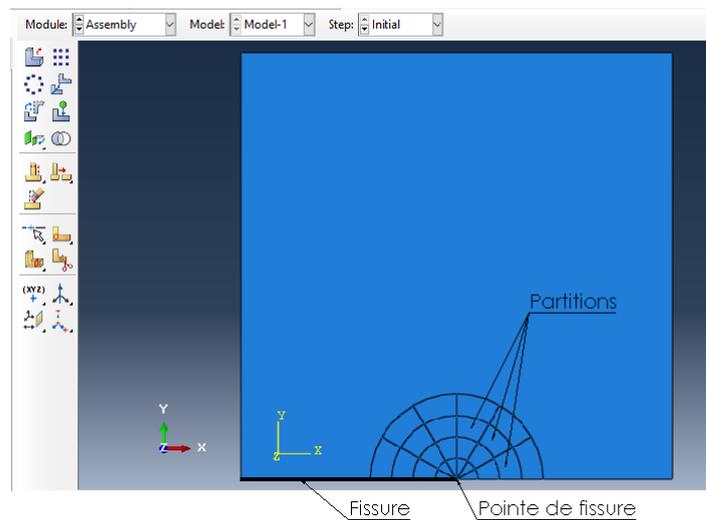
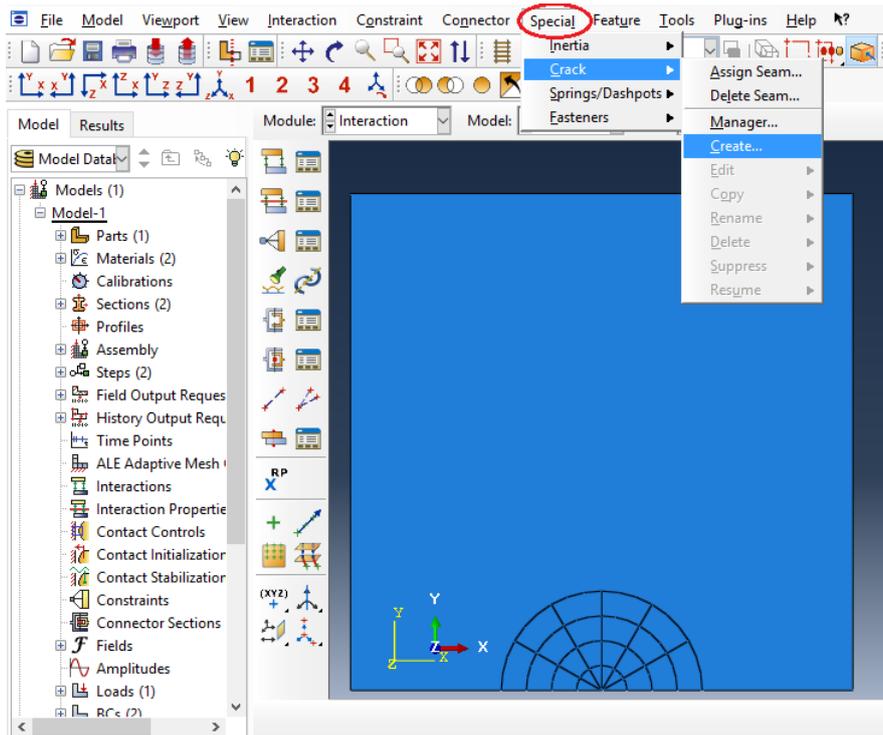


FIGURE 2.10 – Plaque avec les demi-cercles partitionnés

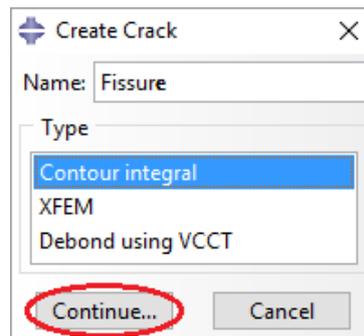
2.2.4 Création de la fissure

Maintenant, on va passer au module **Interaction**. Dans la barre de menu, on va vers **Special** → **Crack** → **Create...** (Figure 2.11(a)).

Dans la nouvelle fenêtre, on va nommer notre fissure « fissure », puis on choisit dans **Type**, **Contour integral** et on appuie sur **Continue...** (Figure 2.11(b)).



(a)

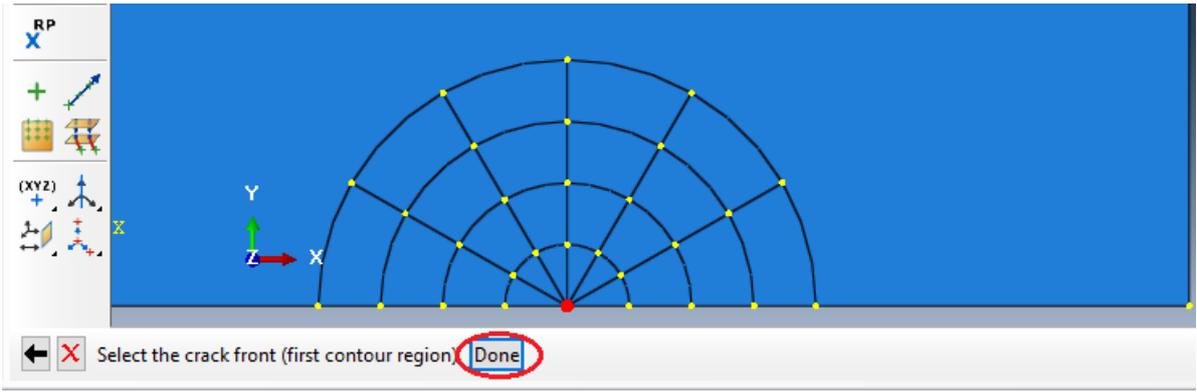


(b)

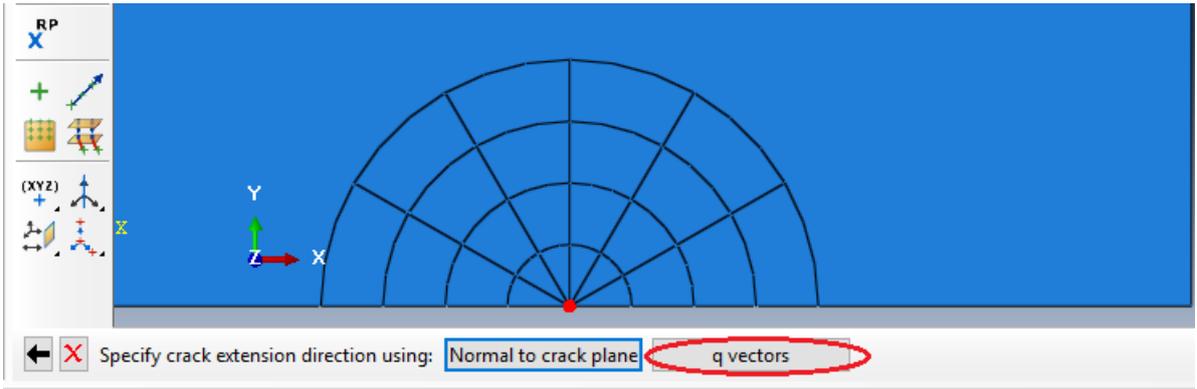
FIGURE 2.11 – Création de la fissure

Maintenant, On va entrer la position de la pointe de fissure. On clique sur le centre des cercles (point en rouge) puis sur **Done** (Figure 2.12(a)).

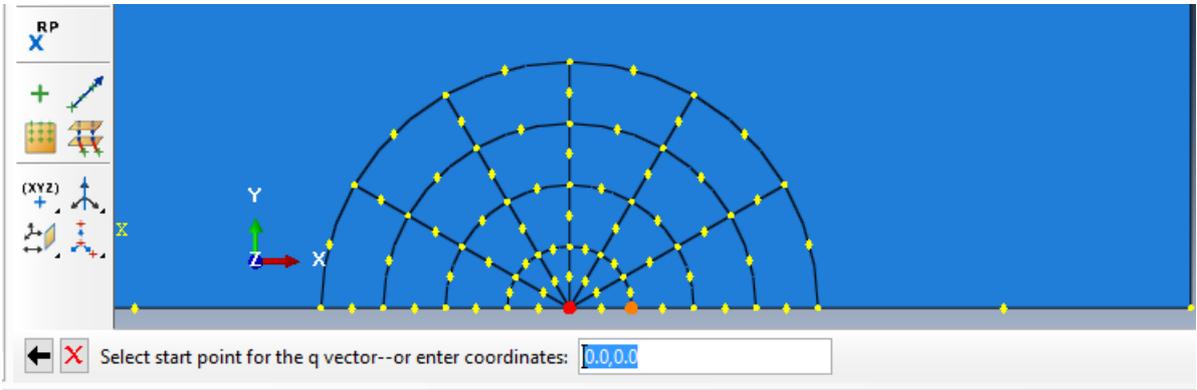
Ensuite, on va choisir la direction de propagation de la fissure. On clique sur **q vectors**, on sélectionne la pointe de fissure comme origine du vecteur direction et un point sur son horizontal à droite comme son extrémité (Figures 2.12(b),2.12(c),2.12(d)).



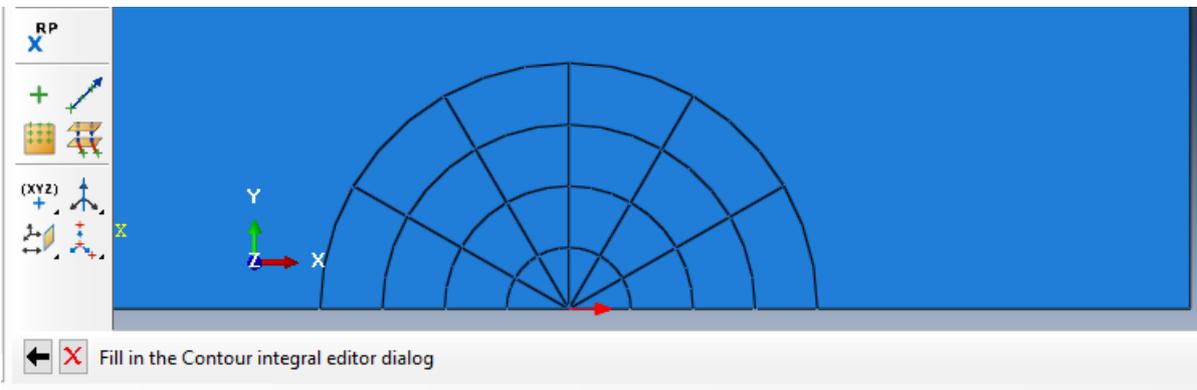
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 2.12 – Pointe de fissure et direction de propagation

Symétrie et singularité

Dans la nouvelle fenêtre **Edit Crack**, on coche **On symmetry plane (half-crack model)** (Figure 2.13(a)). Ici, on a indiqué la présence de la symétrie par rapport au plan de la fissure.

Dans l'onglet **Singularity**, on va définir les paramètres de la singularité. On met 0.25 dans **Midside node parameter (0<t<1)** :, on choisit **Collapsed element side, single node** et on termine par **OK** (Figure 2.13(b)).

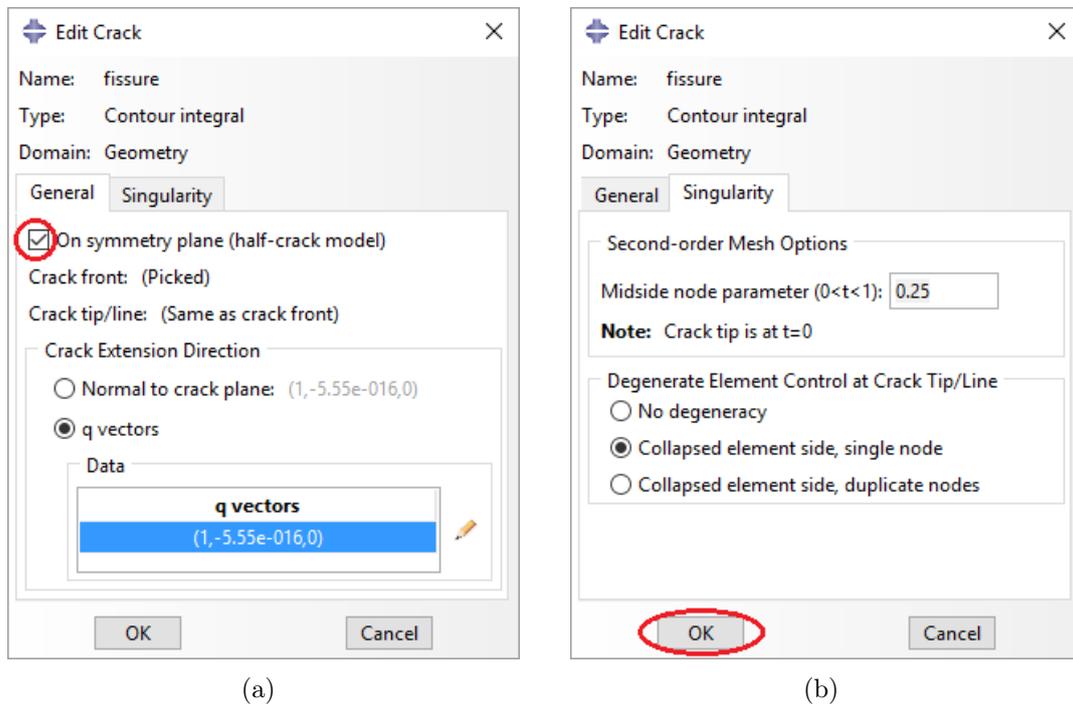


FIGURE 2.13 – Symétrie et singularité

2.2.5 Étapes et paramètres de sortie

Dans notre étude, on aura besoin d'une seule étape de calcul. Dans le module **Step**, on clique sur **Create Step** (Figure 2.14(a)). Ensuite, on va nommer notre étude « traction », et puisque cette dernière est statique, on choisit **Static, General** puis on tape sur **Continue...** (Figure 2.14(b)). Dans la fenêtre sortante **Edit Step** On laisse les paramètres par défaut et on termine par **OK**.

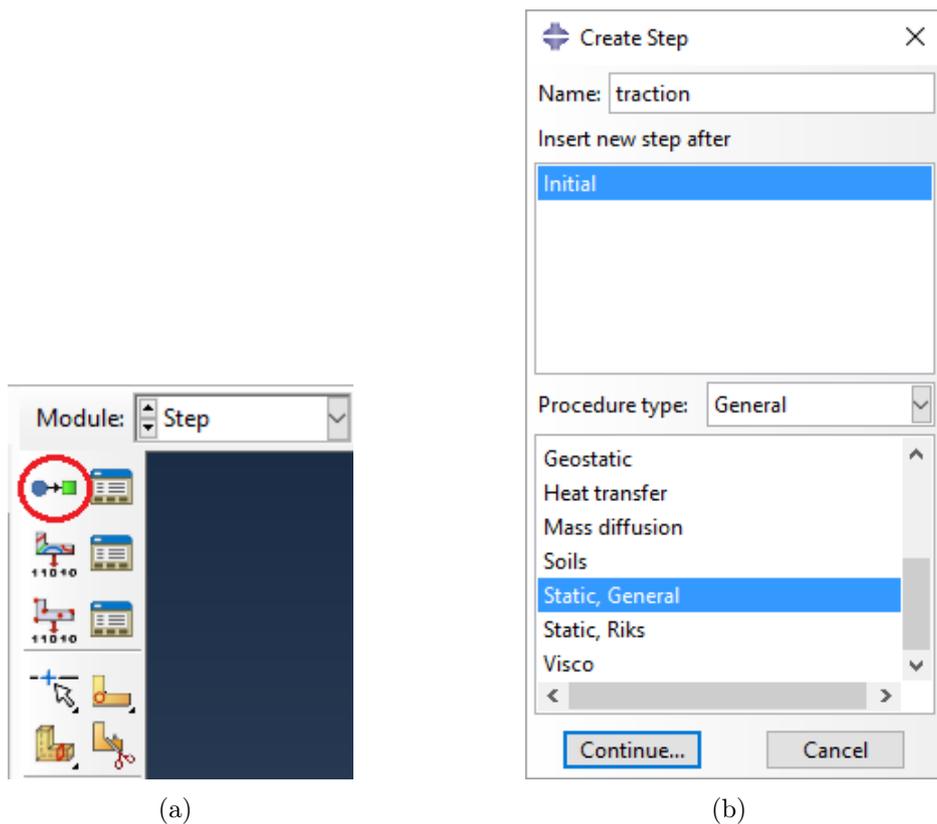


FIGURE 2.14 – Création de l'étape « traction »

Maintenant, on va choisir les paramètres de sortie. On reste dans le même module, on clique sur **History Output Manager** (Figure2.15(a)). Dans la nouvelle fenêtre, on clique sur **Edit...** (Figure2.15(b)).

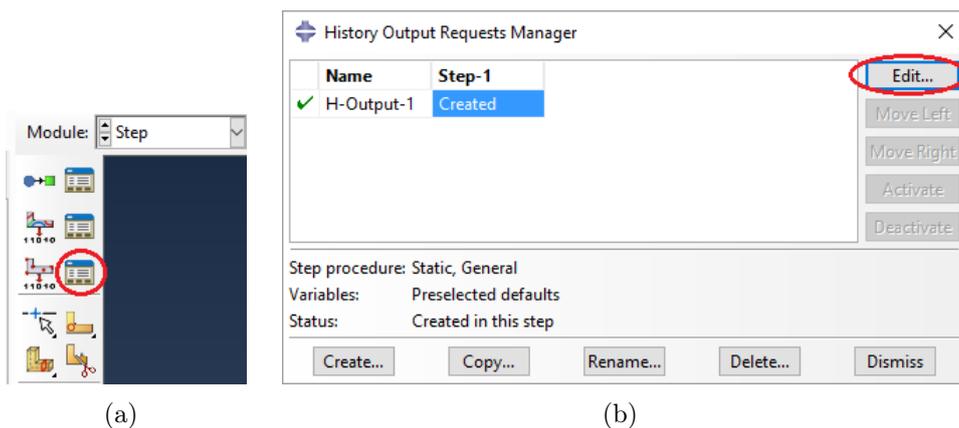


FIGURE 2.15 – Paramètres de sortie(1)

Dans la nouvelle fenêtre, on choisit **Domain** : \rightarrow **Crack** \rightarrow **fissure** . Ici, on a sélectionné la fissure qu'on a créée auparavant. Ensuite, **Frequency** \rightarrow **Last increment**. Pour le nombre de contours, on met 6. Enfin, dans **Type** : , on choisit **J-integral** et on tape sur **OK** (Figure 2.16). À la fin on aura comme résultat 6 valeurs de J (une pour chaque contour).

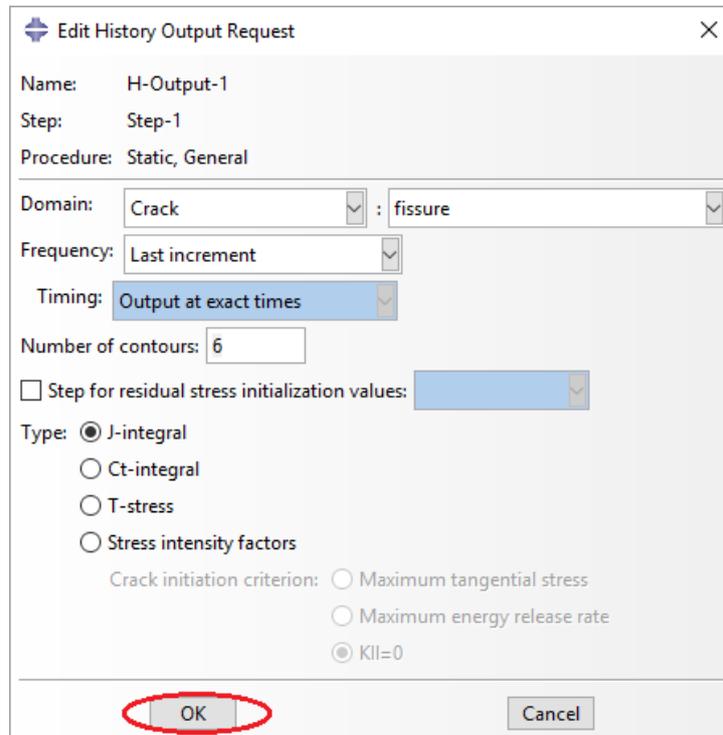


FIGURE 2.16 – Paramètres de sortie(2)

2.2.6 Chargement et conditions aux limites

On va définir maintenant la charge de traction σ . Elle doit être uniformément répartie sur le bord supérieur de la plaque. On sélectionne le module **Load** puis, On clique sur **Create Load** (Figure 2.17(a)). Puis, on va vers **Mechanical** \rightarrow **Pressure** et sur **Continue...** (Figure 2.17(b)). On sélectionne le bord supérieur (en rouge) puis **Done** (Figure 2.17(c)). Enfin, Dans la nouvelle fenêtre, on tape **-1** dans **Magnitude** : (Figure 2.17(d)). Le signe $(-)$ est du à la direction de la charge (signe $(+)$: charge de compression).

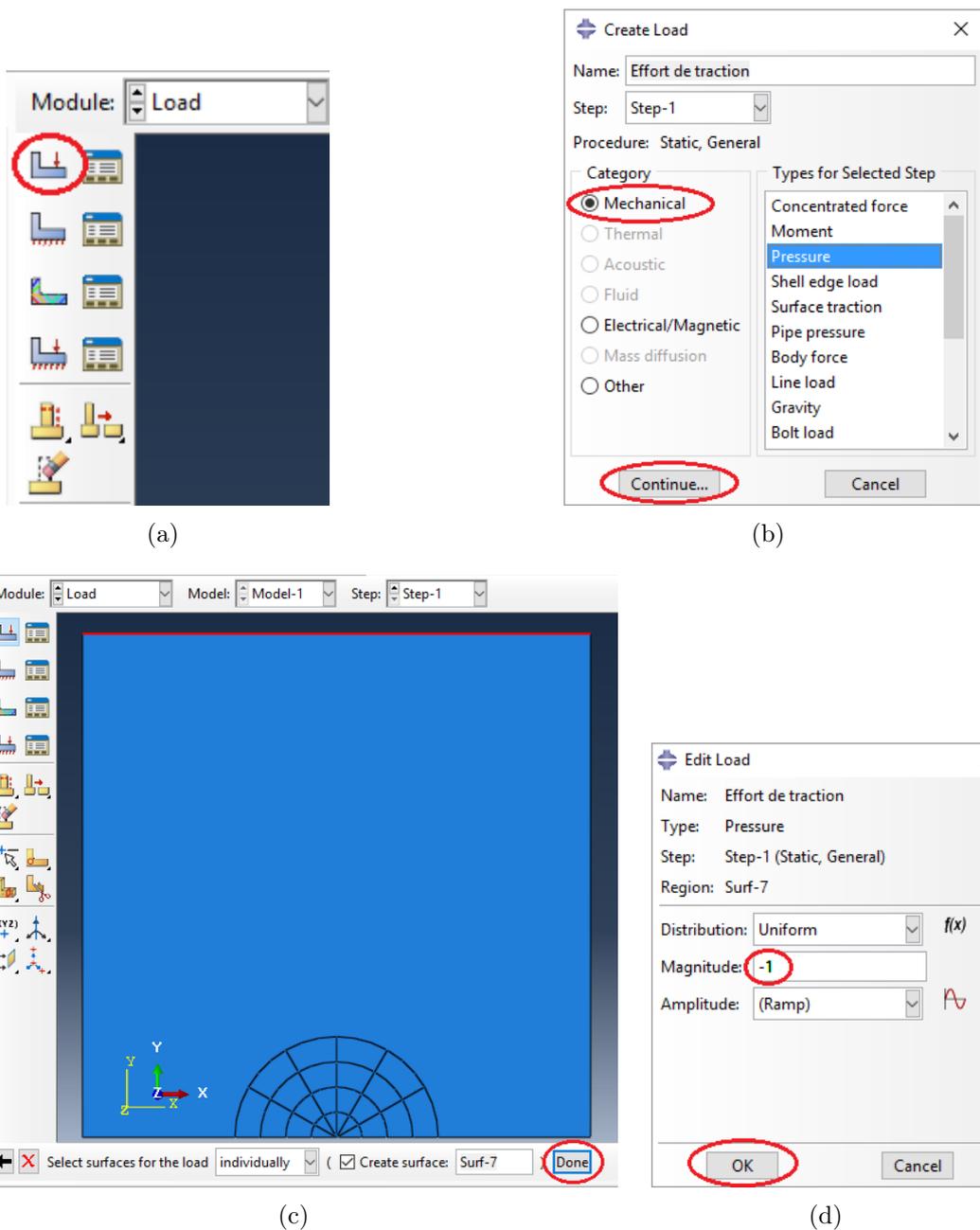


FIGURE 2.17 – Définition de la charge

Maintenant, on va modéliser la symétrie.

Symétrie par rapport au plan vertical

Dans le même module, on sélectionne **Create Boundary Condition** (Figure 2.18(a)). Dans la nouvelle fenêtre, on choisit **Mechanical** → **Displacement/Rotation**, puis **Continue...** (Figure 2.18(b)). On sélectionne ensuite le bord gauche de la plaque (plan de symétrie) et on tape sur **Done** (Figure 2.18(c)). Dans la nouvelle fenêtre, on élimine le déplacement suivant X et la rotation autour de Z comme le montre la figure 2.18(d) et

on termine par **OK** .

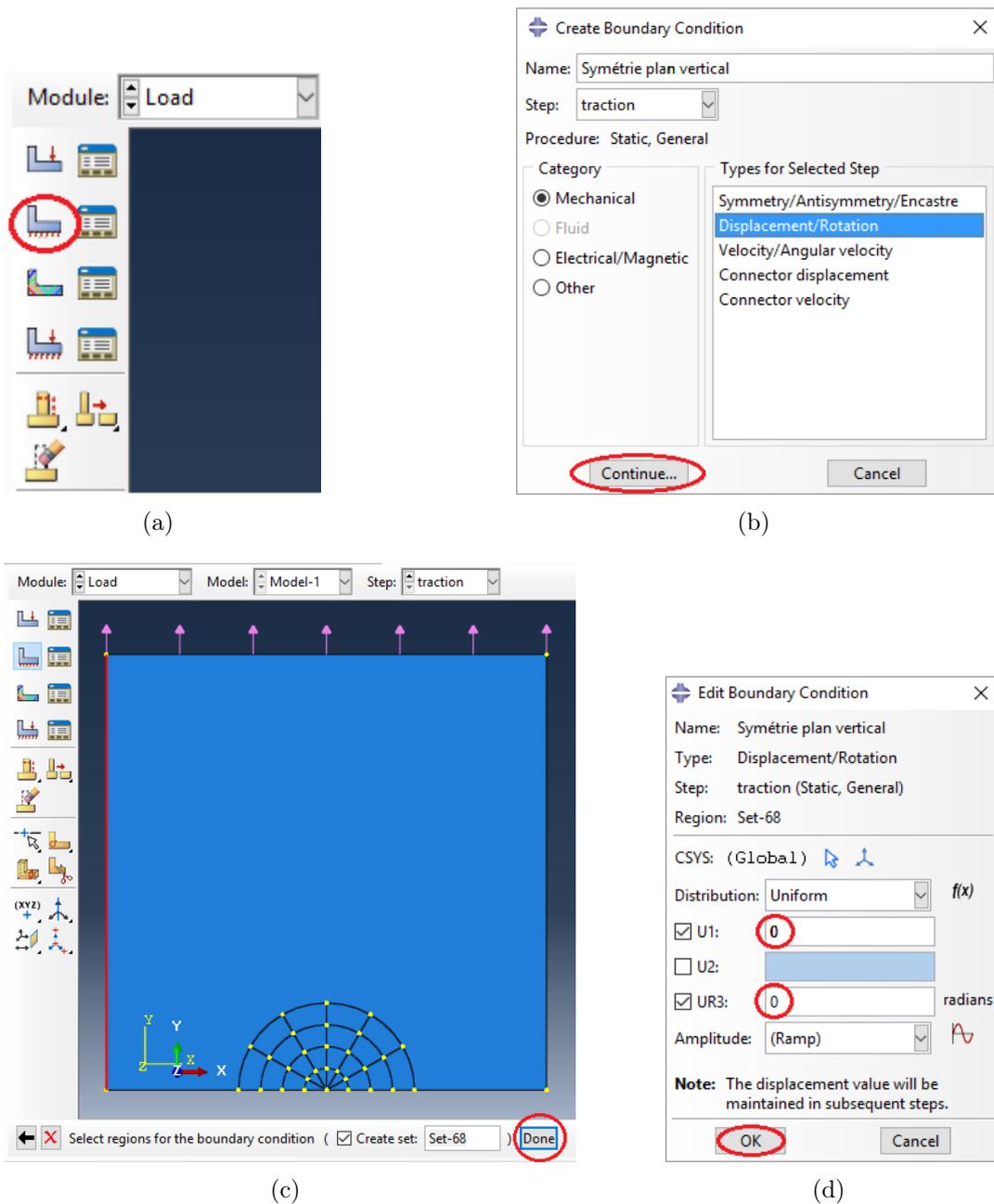


FIGURE 2.18 – Symétrie par rapport au plan vertical

Symétrie par rapport au plan horizontal

On refait les deux premières étapes (Figure 2.18(a) et Figure 2.18(b)). Ensuite, on sélectionne le bord inférieur de la plaque en omettant le segment entre la pointe de la fissure et le bord gauche (Figure 2.19(a)). Enfin, on élimine le déplacement suivant Y et la rotation autour de Z (Figure 2.19(b)).

Notant que le segment qu'on a laissé libre de déplacer constitue la fissure.

Le résultat final est comme suit (Figure 2.20) :

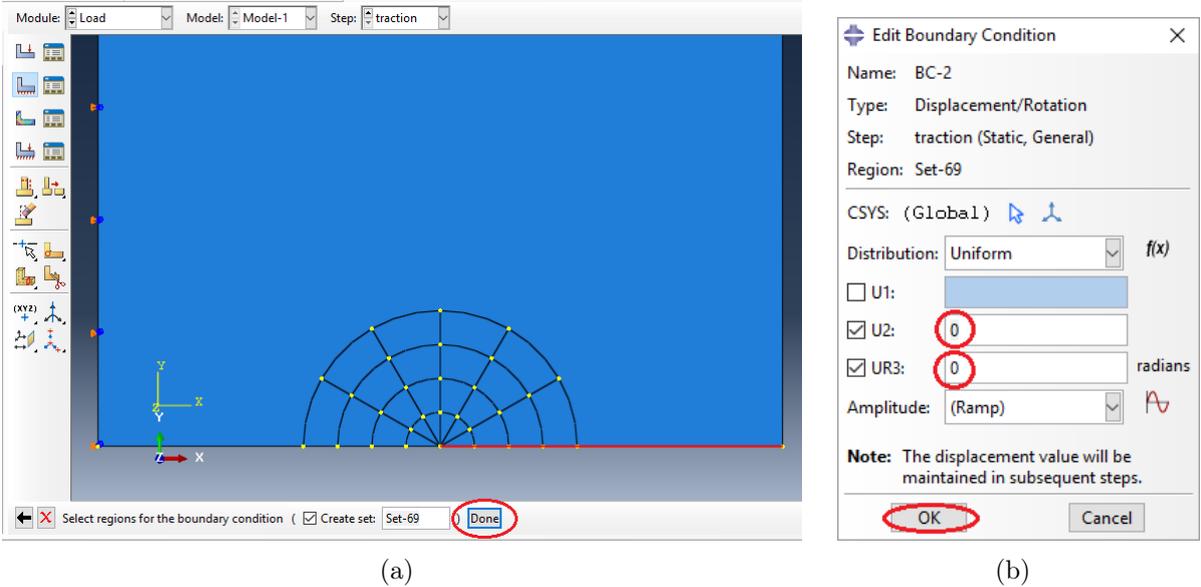


FIGURE 2.19 – Symétrie par rapport au plan horizontal

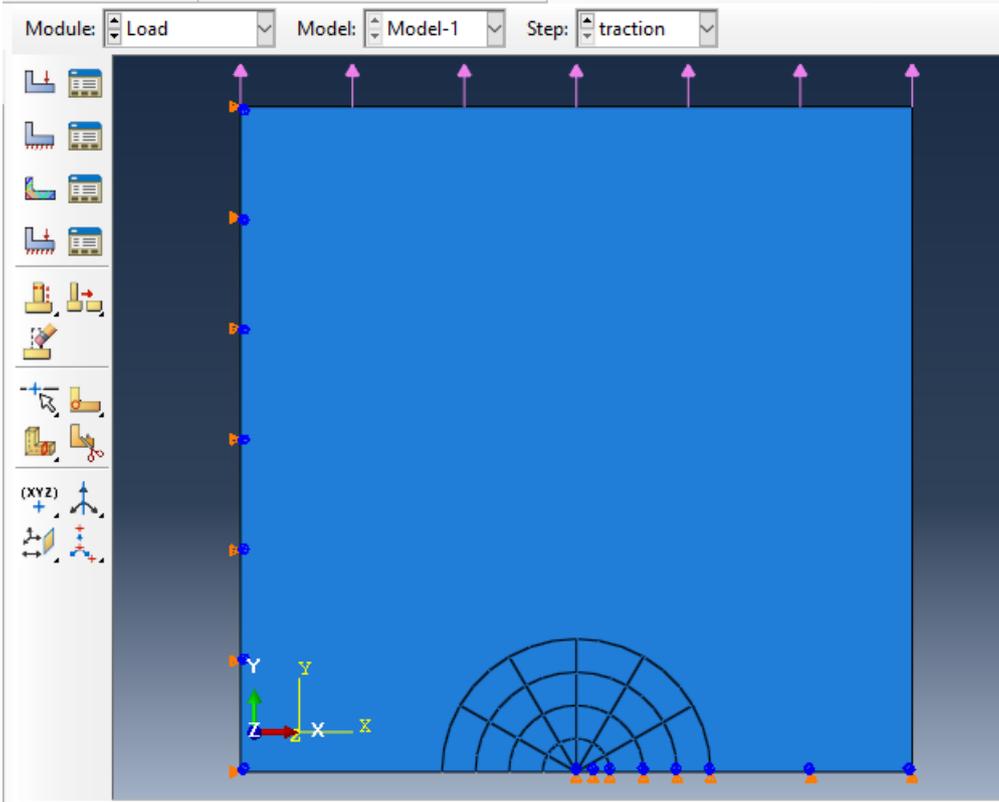


FIGURE 2.20 – Plaque avec chargement et conditions aux limites

2.2.7 Maillage

Pour effectuer le maillage, il faut passer par trois étapes :

1. Définir la précision du maillage.
2. Choix des éléments.
3. Contrôle du maillage.

Définir la précision du maillage

La plaque peut être décomposée en deux régions (Figure 2.21) :

Région 1 : c'est la superficie délimitée par le grand demi-cercle.

Région 2 : c'est toute la plaque sauf la région 1.

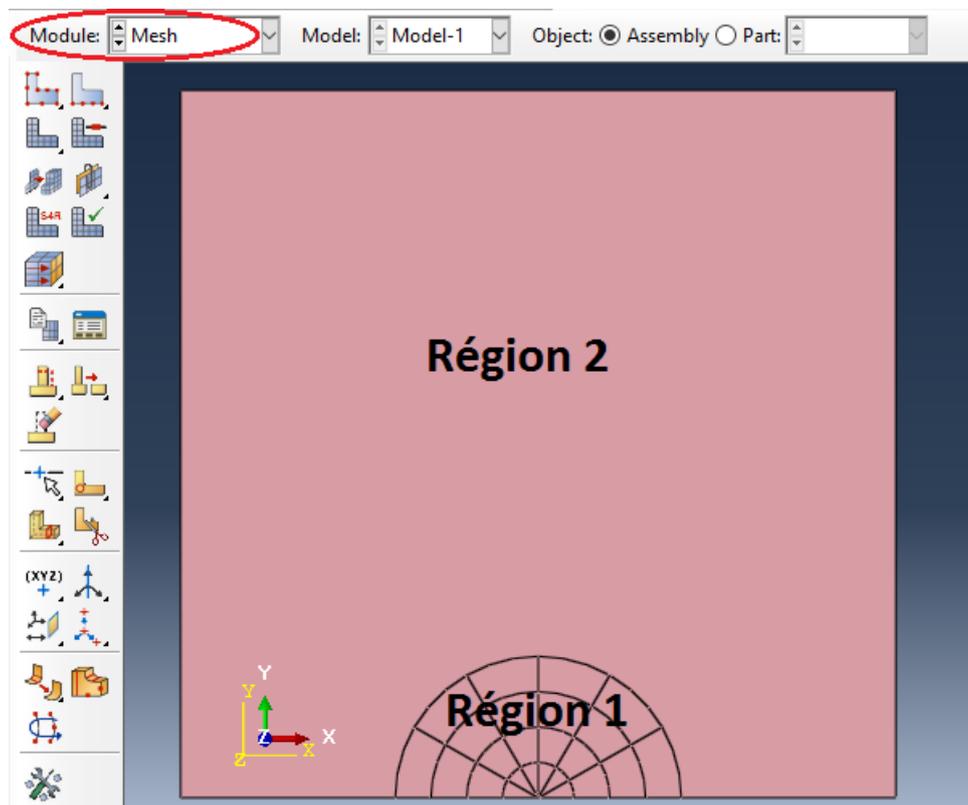


FIGURE 2.21 – Décomposition de la plaque

Région 1 On rappelle qu'on avait décomposé la région 1 en six portions identique. Le maillage de cette région se fera de sorte que les zones formées par l'intersection des demi-cercles avec les segments radiaux contiennent chacune un élément.

Dans le module **Mesh**, On clique sur **Seed Edges**, puis on sélectionne tous les segments

et les arcs de cercle de la région 1 et on appuie sur **Done** (Figure 2.22(a)).

Dans la nouvelle fenêtre, on sélectionne **Methods** → **By number** et on met **1** dans **Number of elements** : On appuie sur **OK** pour terminer (Figure 2.22(b))

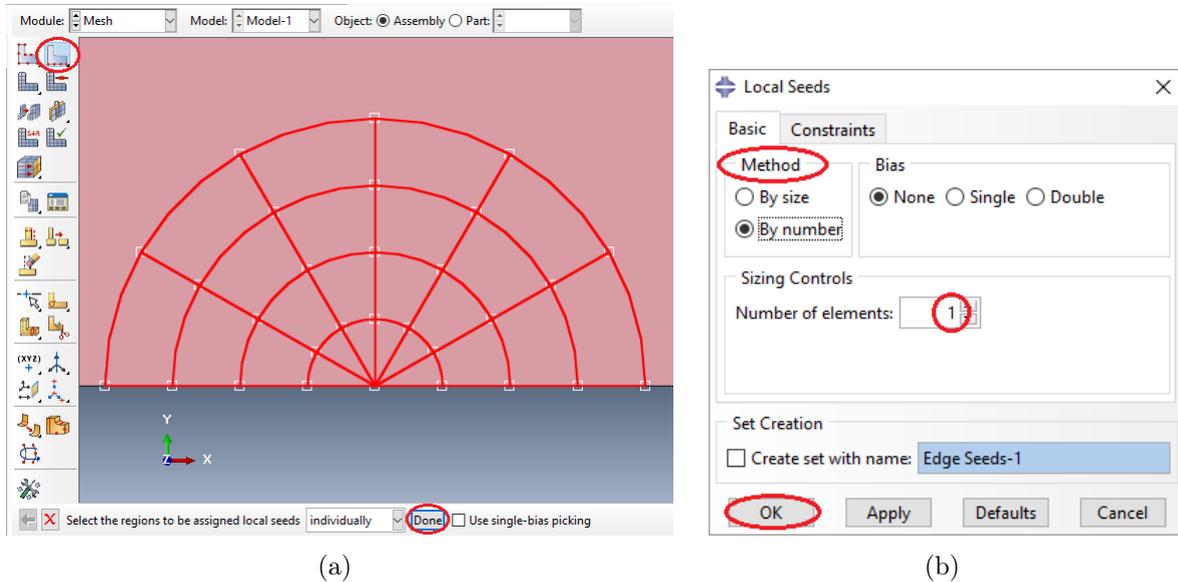


FIGURE 2.22 – Région 1 : précision du maillage

Région 2 Le réglage de la précision du maillage de la région 2 est fait par la commande **Seed Part instance**. Dans la nouvelle fenêtre, dans **Approximate global size** : , on met **0.2**, cette valeur correspond à une approximation sur la taille des éléments. On termine par **OK** (Figure 2.23).

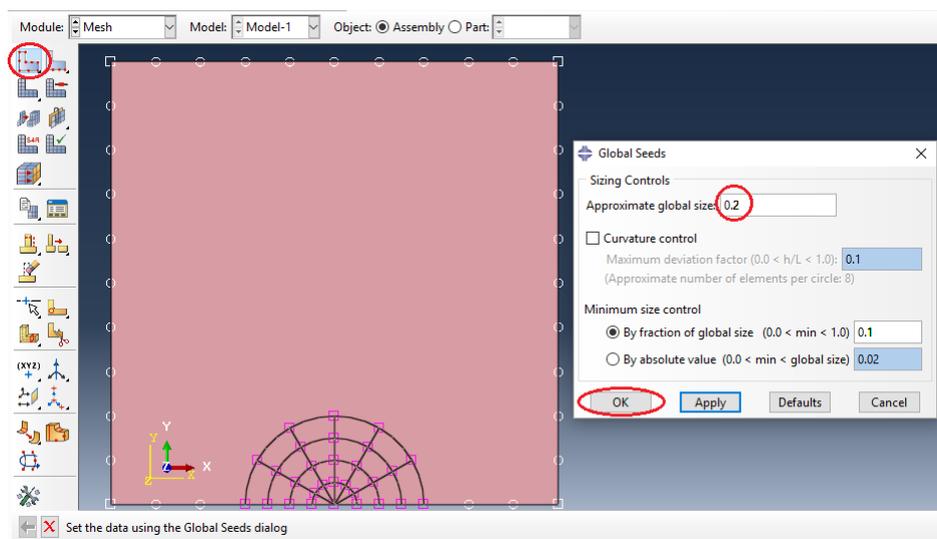


FIGURE 2.23 – Région 2 : précision du maillage

Choix des éléments

Dans notre étude, on va utiliser des éléments de degré 2.

On sélectionne toute la plaque, puis dans la barre de menu : **Mesh** → **Element Type...** (Figure 2.24).

Dans la nouvelle fenêtre, on sélectionne :

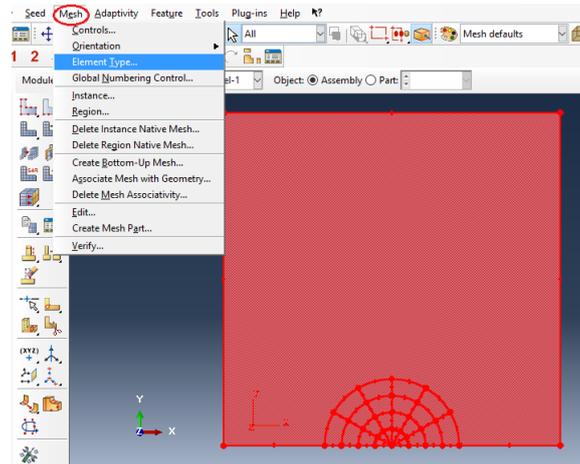


FIGURE 2.24 – Choix des éléments(1)

1. **Standard** dans **Element Library**.
2. **Plane Stress** dans **Family** (situation de contraintes planes).
3. **Quadratic** dans **Geometric Order** (éléments de degré 2).

Les onglets **Quad** et **Tri** correspondent respectivement aux options relatives aux éléments de types quadrilatère et triangle. On laisse le réglage par défaut. On termine par **Ok** (Figure 2.25).

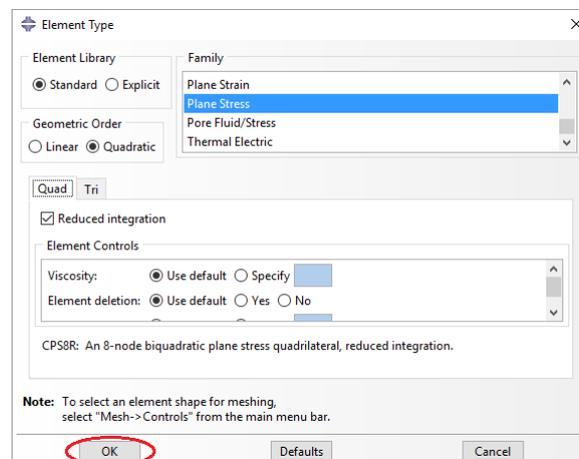


FIGURE 2.25 – Choix des éléments(2)

Contrôle du maillage

Ici, on va distinguer les deux cas cités dans l'introduction.

Modèle sans éléments singuliers Dans ce cas, les éléments entourant la pointe de fissure ne sont pas singuliers.

Dans la barre de menu, On clique sur **Mesh** → **Controls...**, on sélectionne la région 1 et on appuie sur **Done** (Figure 2.26).

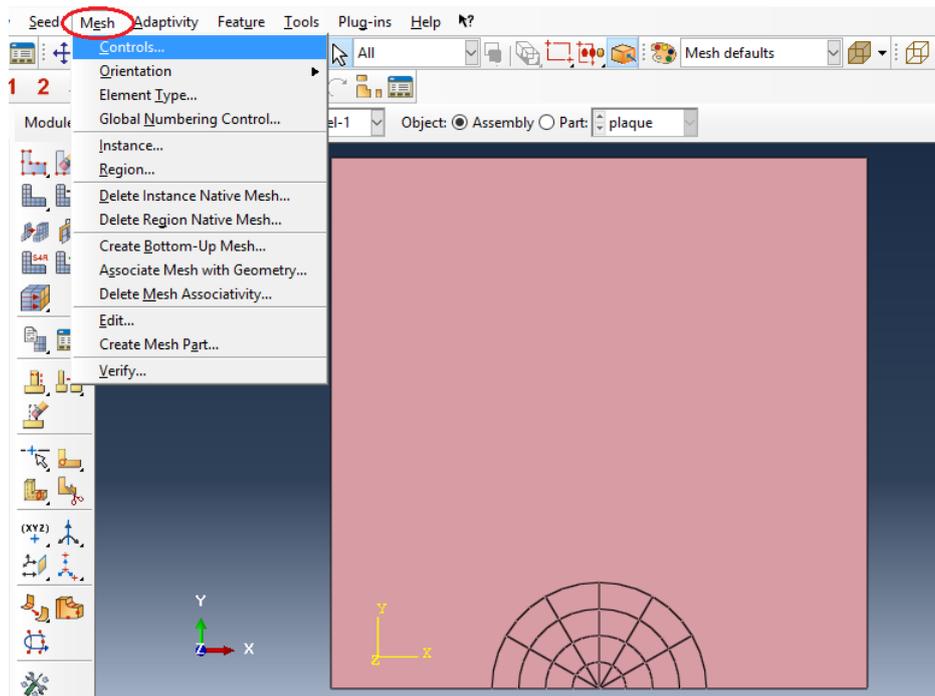


FIGURE 2.26 – Contrôle du maillage

Dans la nouvelle fenêtre, on remplit comme suit (Figure 2.27) :

1. **Quad** dans **Element Shape**.
2. **Free** dans **Technique**.
3. **Advancing Front** dans **Algorithm**.

On passe à la région 2, on fait la même chose sauf pour **Algorithm**, on sélectionne **Medial axis**. Maintenant, le maillage peut être créé. On appuie sur **Mesh Part Instance**, puis sur **Yes** (Figure 2.28(a)). Le résultat final est comme suit (Figure 2.28(b)) :

On constate que 98 éléments ont été créés.

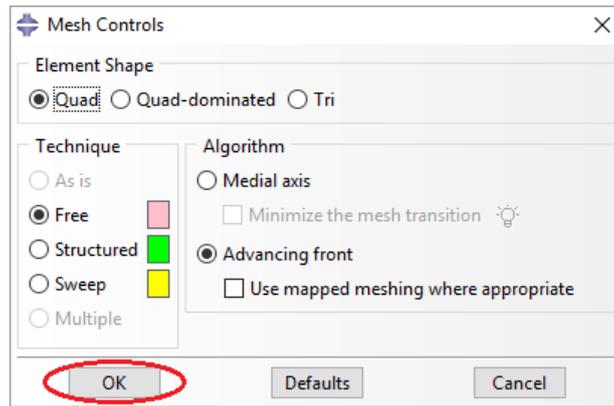


FIGURE 2.27 – Contrôle du maillage : éléments non singuliers

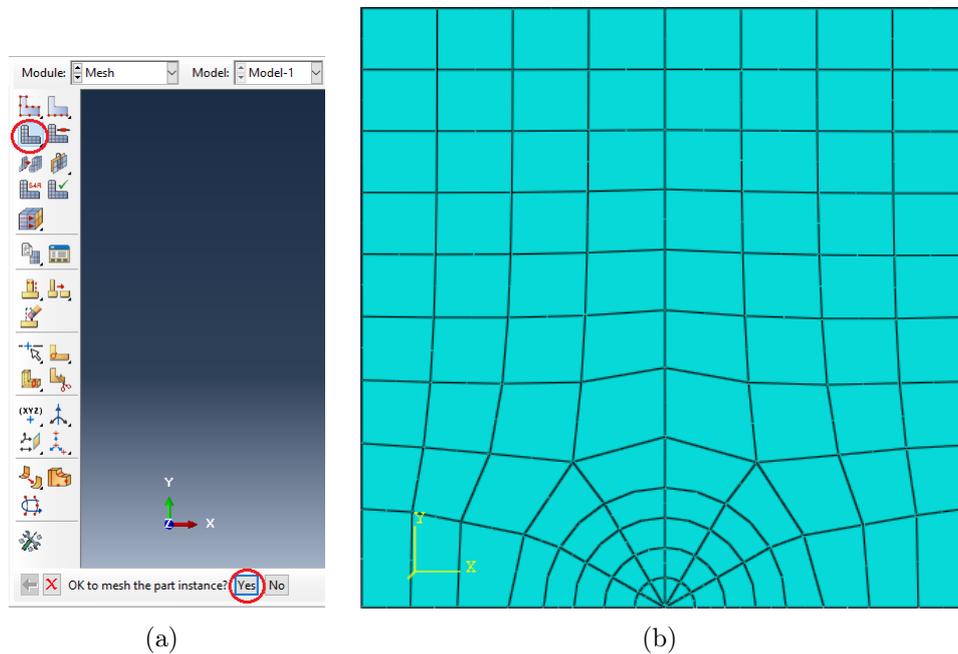


FIGURE 2.28 – Maillage de la plaque

Modèle avec éléments singuliers Dans ce cas, on va créer des éléments singuliers autour de la pointe de fissure. On refait les même étapes du premier cas. Ensuite, on sélectionne les zones entourant la pointe de fissure (en rouge figure 2.29) et on clique sur **Mesh** → **Controls...** (Figure 2.26).

Cette fois-ci, on va sélectionner **Tri** dans **Element shape**, on termine par **OK** (Figure 2.30(a)). Le maillage résultant est comme suit (Figure 2.30(b)) :

À première vue, on voit que le maillage obtenu est identique au premier, mais ce n'est pas le cas. En effet, la différence se situe au niveau du positionnement des nœuds des éléments entourant la pointe de fissure.

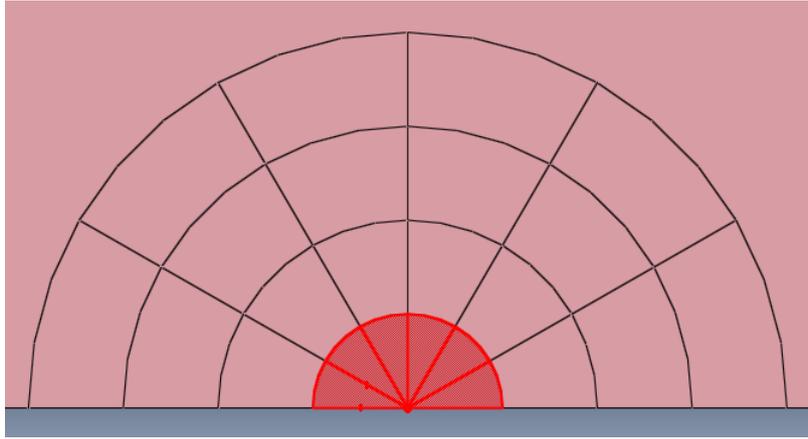
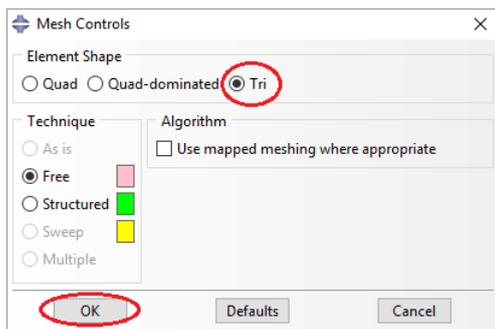
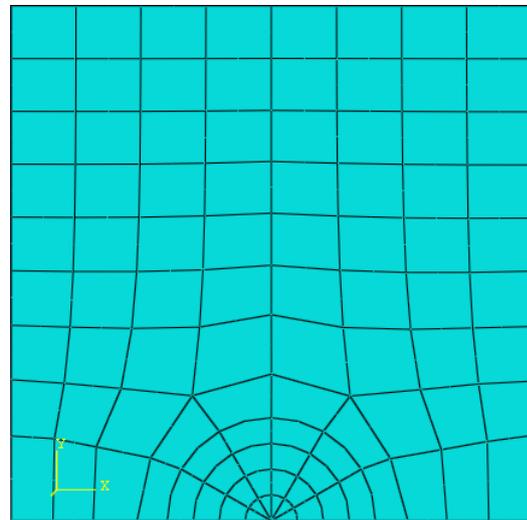


FIGURE 2.29 – Contrôle du maillage : éléments singuliers(1)



(a)



(b)

FIGURE 2.30 – Contrôle du maillage : éléments singuliers(2)

Dans la barre de menu, on va vers **Tools** → **Query...**, on choisit **Element** dans la fenêtre sortante puis on clique sur l'élément qu'on veut obtenir les informations. Le résultat est montré dans les figures 2.31(a) et 2.31(b) :

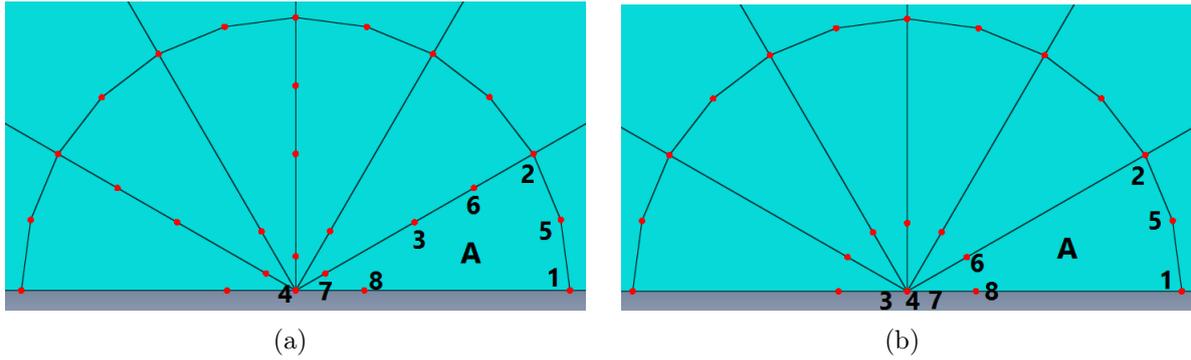


FIGURE 2.31 – Élément non singulier(a) vs Élément singulier(b)

Les figure 2.31(a) et 2.31(b) montrent le positionnement des nœuds de l'élément A dans le cas où il est non singulier et singulier respectivement.

On constate que l'élément A est un élément quadrilatère de degré 2. À la différence du 1^{er} cas, les nœuds 3, 4 et 7 coïncident au niveau de la pointe de fissure et les nœuds 6 et 8 sont à 1/4 de la pointe.

On conclut que l'élément A de la figure 2.31(b) est un élément singulier ainsi que les cinq autres qui entourent la pointe de fissure contrairement à celui de la figure 2.31(a).

2.2.8 Contour

On a mentionné auparavant qu'on a utilisé 6 contours. Ces derniers sont représentés (en rouge) dans les figures 2.32(a), 2.32(b), 2.32(c), 2.32(d), 2.32(e) et 2.32(f)

2.3 Résultats et discussion

Maintenant, on va passer au module **Job**, on clique sur **Create Job** (Figure 2.33(a)). Dans la nouvelle fenêtre, on clique sur **Continue...** (Figure 2.33(b)). Dans la fenêtre **Edit Job**, on laisse tous le paramètres par défaut et on appuie sur **OK** (Figure 2.33(c)).

Après la création du Job, on va lancer l'analyse. Pour cela, on clique sur **Job Manager** (Figure 2.34(a)). Dans la nouvelle fenêtre, on appuie sur **Submit** (Figure 2.34(b)). On attend quelques instants jusqu'à l'affichage de **Completed** dans **Status**. On accède aux résultats par **Results** (Figure 2.34(c)).

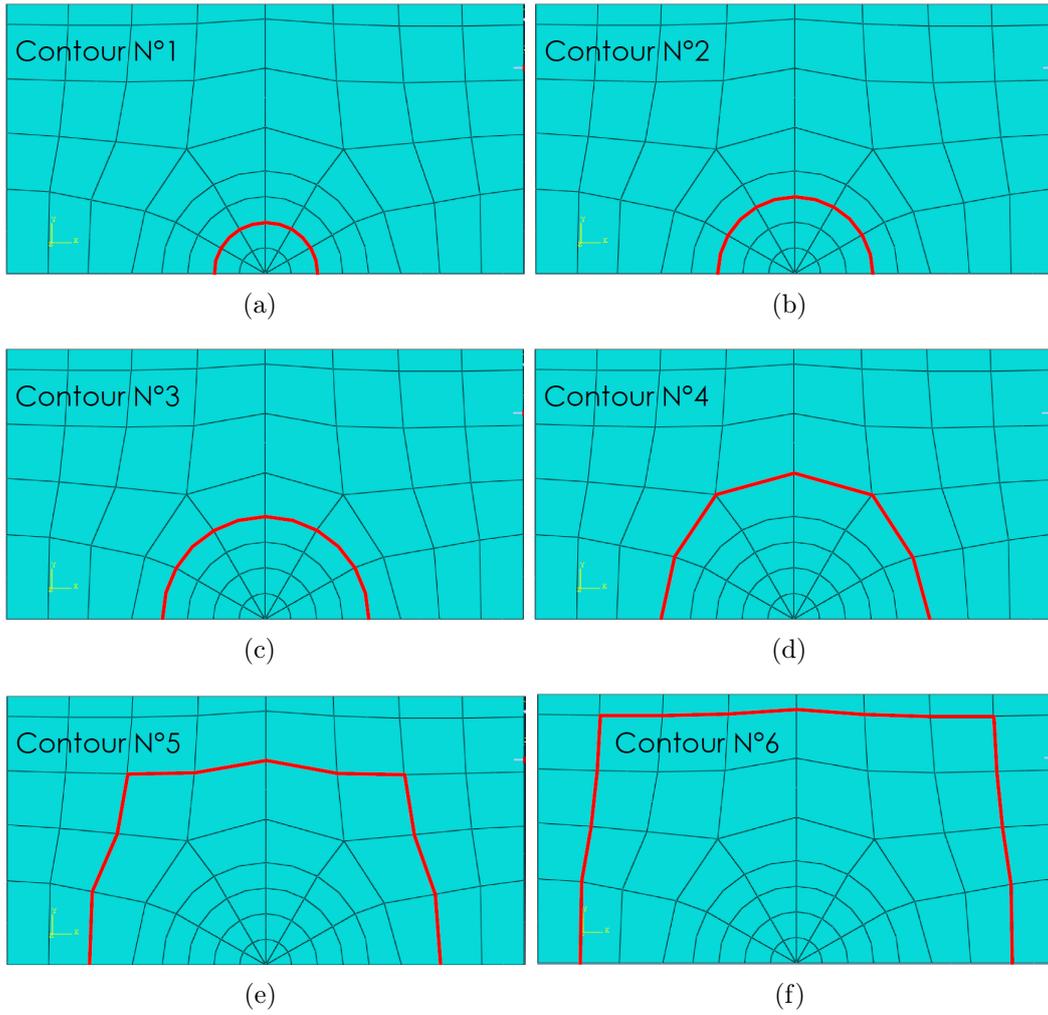


FIGURE 2.32 – Contours

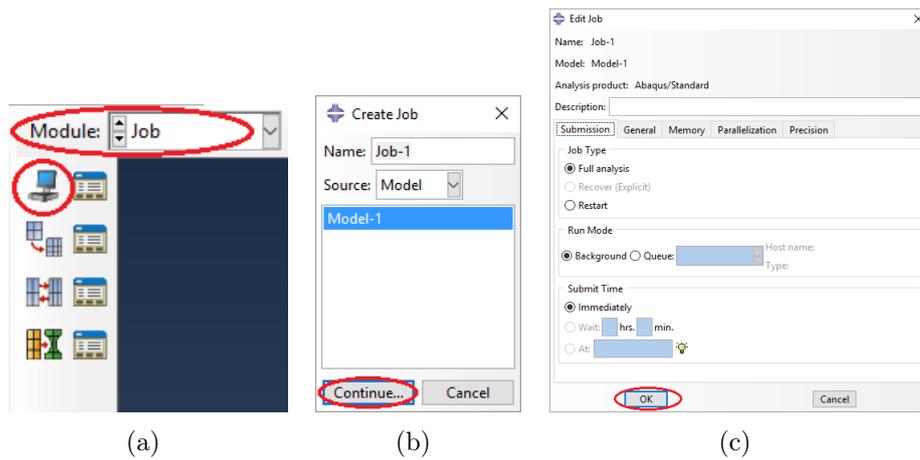


FIGURE 2.33 – Création de "job"

Dans le module **Visualization**, on appuie sur **Create XY Data** (Figure 2.35(a)). Puis sur **Continue...** (Figure 2.35(b)). Dans la nouvelle fenêtre, on sélectionne les six lignes et on

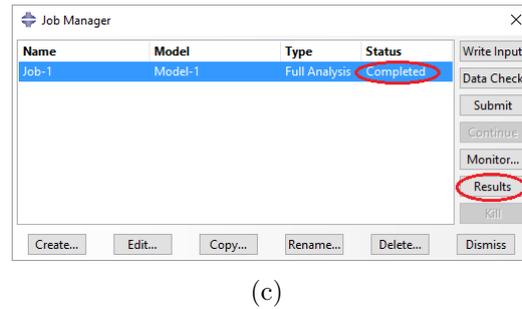
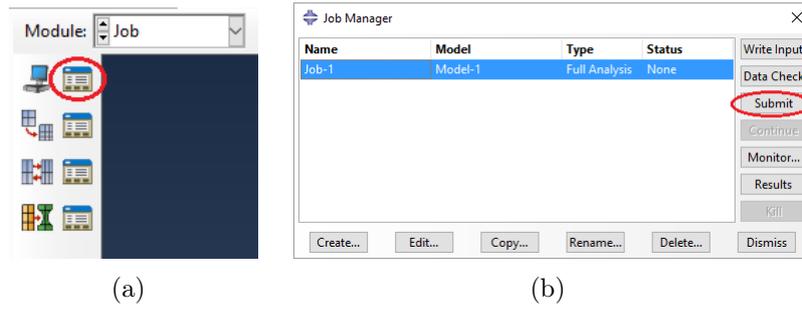


FIGURE 2.34 – Analyse

appuie sur **Save As...** (Figure 2.35(c)). Puis, on décoche **Plot curves on OK** (on n'a pas besoin des courbes), on termine par **OK** (Figure 2.35(d)). On appuie sur **XY Data Manager** (Figure 2.35(e)). Dans la nouvelle fenêtre, on retrouve la liste des valeurs de J relatives à tous les contours du premier jusqu'au sixième : **XYData-1**, **XYData-2**, ..., **XYData-6** (Figure 2.35(f)). On clique sur la valeur qu'on veut pour afficher, on prend pour exemple la valeur du contour N° 1 (Éléments singuliers) : $J = 2.74299 \times 10^{-11} N/m$

Les valeurs de J sont données dans le tableau ci-dessous :

Contour	$J(10^{-11} N/m)$	
	Éléments non singuliers	Éléments singuliers
N° 1	2.61149	2.74299
N° 2	2.76781	2.76773
N° 3	2.77413	2.77247
N° 4	2.77459	2.77284
N° 5	2.77412	2.77238
N° 6	2.77416	2.77242

TABLE 2.2 – Valeurs de J

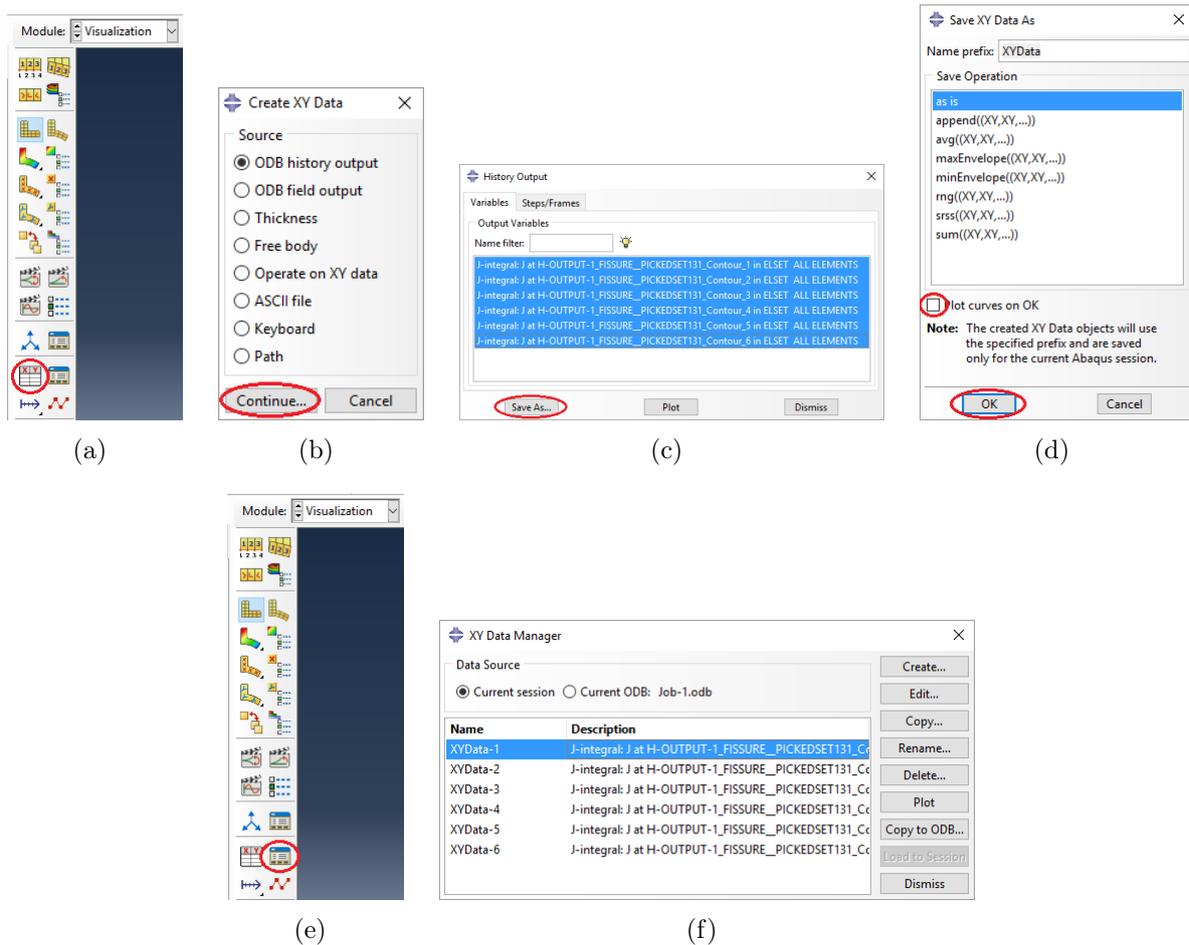


FIGURE 2.35 – Résultats

En théorie, la valeur de J est indépendante du contour choisi. Mais en calcul numérique, ce n'est pas le cas. En effet, d'après le tableau 2.2, les valeurs se rapprochent à partir du contour N° 3 dans les deux cas. Cela signifie que les deux premiers seront écartés. En général, lorsqu'on a un problème élastique, les valeurs de J des deux premiers contours sont écartés [14]. On note aussi qu'il ya des cas où on a besoin de plus de six contours. On prendra comme valeur finale la moyenne des quatre dernières valeurs :

Éléments non singuliers

$$J = \frac{(2.77413 + 2.77459 + 2.77412 + 2.77416) \times 10^{-11}}{4}$$

$$J = 2.77425 \times 10^{-11} N/m$$

Éléments singuliers

$$J = \frac{(2.77247 + 2.77284 + 2.77238 + 2.77242) \times 10^{-11}}{4}$$

$$J = 2.77253 \times 10^{-11} N/m$$

2.4 Étude de convergence

L'étude de convergence est primordiale pour la validité d'un résultat dans un calcul numérique. En effet, dans l'exemple qu'on a illustré auparavant, on a utilisé un maillage relativement grossier. Dans ce qui suit, on va raffiner le maillage jusqu'on aboutit à une stabilisation de J .

On refait l'étape où on a esquissé dans la plaque, mais cette fois ci, on va augmenter le nombre de partitions pour avoir un nombre élevé d'éléments (Figure 2.36(a)).

Le maillage se fera de la même manière qu'auparavant. Il est comme suit (Figure 2.36(b)) :

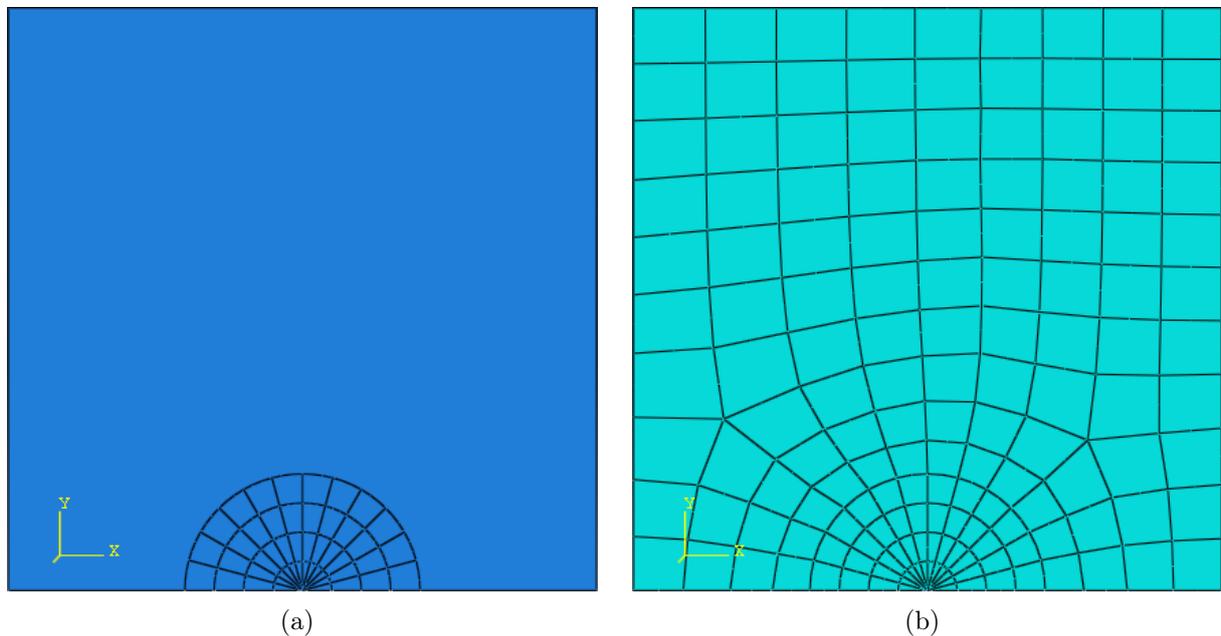


FIGURE 2.36 – Partition et raffinement du maillage de la plaque

Cette fois ci 155 éléments ont été créés. La valeur de J trouvé est de :

Éléments non singuliers	Éléments singuliers
$2.75388 \times 10^{-11} N/m$	$2.78595 \times 10^{-11} N/m$

Nous présentons ci-dessous les calculs obtenus en raffinant à chaque fois le maillage. L'évolution de J en fonction du nombre d'éléments est illustrée dans le tableau 2.3 et la figure 2.37 ci-dessous.

Nombre d'éléments	$J(10^{-11} N/m)$	
	Éléments non singuliers	Éléments singuliers
98	2.77425	2.77253
155	2.75388	2.78595
429	2.72837	2.79167
557	2.72118	2.79250
632	2.71596	2.79296
767	2.70902	2.79342
1409	2.70473	2.79366
1588	2.70188	2.79377
1875	2.69913	2.79388
2421	2.69700	2.79395
2984	2.69601	2.79398
3260	2.69490	2.79400
5299	2.69455	2.79402

TABLE 2.3 – Convergence de maillage

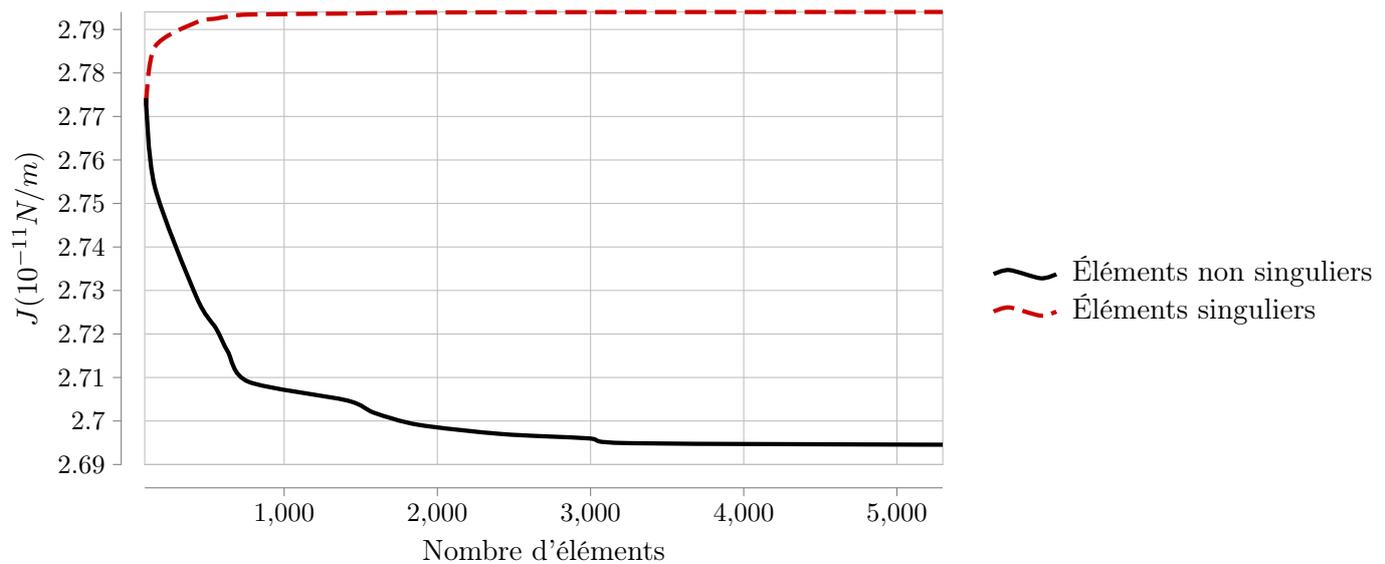


FIGURE 2.37 – Convergence de maillage

On remarque dans le cas où on a des éléments non singuliers une convergence lente, les valeurs de J diminuent jusqu'à une stabilisation à un nombre d'éléments de 3500. Dans le cas où on a des éléments singuliers, la convergence est plus rapide, les valeurs de J augmentent jusqu'à une stabilisation à un nombre d'éléments de 1000. Les deux valeurs de J à la convergence sont :

Éléments non singuliers	Éléments singuliers
$2.69455 \times 10^{-11} N/m$	$2.79402 \times 10^{-11} N/m$

Nous remarquons que les résultats pour les deux types d'éléments différent de 3.7%

2.5 Calcul de K_I

Le calcul de K_I se fait à partir de la relation (1.32)

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu}$$

Situation de contraintes planes : $E' = E$

Mode d'ouverture I : $K_{II} = K_{III} = 0$

L'équation (1.32) devient

$$J = \frac{K_I^2}{E}$$

$$K_I = \sqrt{JE} \tag{2.1}$$

Éléments non singuliers

$$K_I = \sqrt{2.69455 \times 10^{-11} \times 200 \times 10^9}$$

$$K_I = 2.32144 N/m^{3/2}$$

Éléments singuliers

$$K_I = \sqrt{2.79402 \times 10^{-11} \times 200 \times 10^9}$$

$$K_I = 2.36390 N/m^{3/2}$$

Conclusion

Dans notre étude, on a utilisé le logiciel Abaqus. On a constaté que c'est un logiciel très pratique et flexible lorsqu'on calcule K_I par la méthode « Intégral J ». On a trouvé aussi que le maillage doit être suffisamment fin pour avoir un résultat convergent dans les deux cas traités : modèles avec et sans éléments singuliers.

On a également constaté une divergence des résultats entre les deux types d'éléments. Une validation est donc nécessaire pour choisir entre les deux types d'éléments. Cette validation fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Exemples d'application et validation

Introduction

Dans ce chapitre, on va traiter deux exemples. Le premier concerne le calcul du K_I caractérisant une fissure dans une plaque infinie soumise à une charge de traction constante σ^∞ . Le deuxième concerne le calcul de K_I caractérisant une fissure positionnée dans le bord dans une plaque. Pour les deux exemples, on va présenter la solution théorique du problème puis le modèle numérique.

3.1 Fissure dans une plaque infinie

On a une fissure de longueur $2a$ située au milieu d'une plaque infinie. Cette plaque est soumise à une charge de traction constante σ^∞ (Figure 3.1). On va calculer le K_I en traitant les deux cas : modèles avec et sans éléments singuliers et voir l'influence de la singularité sur la valeur de K_I .

3.1.1 Solution théorique

Il existe dans la littérature plusieurs méthodes analytiques. Dans cette étude, on va travailler avec la méthode de Westergaard [15] :

Les composantes de contraintes en un point m en mode I peuvent être exprimées par les relations suivantes [9] :

$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' \quad (3.1)$$

$$\sigma_{yy} = \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I' \quad (3.2)$$

$$\sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} Z_I' \quad (3.3)$$

où :

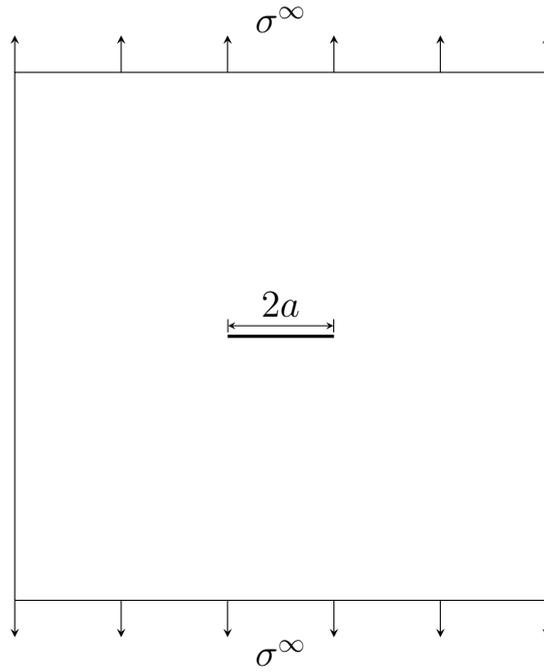


FIGURE 3.1 – Fissure de longueur $2a$ dans une plaque infinie

$$Z_I' = \frac{dZ_I}{dz} \quad , \quad z = x + iy$$

Z_I est la fonction de contraintes de Westergaard. **Re** et **Im** représentent la partie réel et imaginaire respectivement. Le champ de contrainte est représenté dans la figure 3.2 suivante :

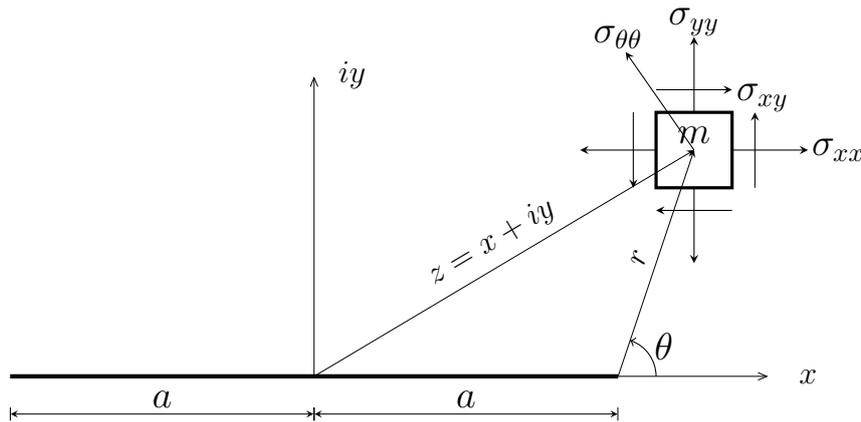


FIGURE 3.2 – Champ de contrainte au voisinage de la fissure

Fonction Z_I pour une fissure interne chargée dans un milieu infini

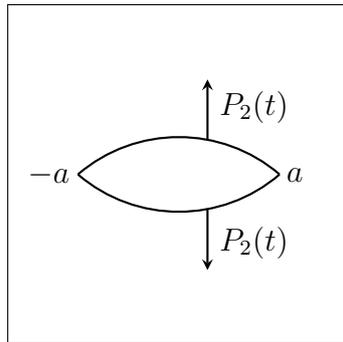


FIGURE 3.3 – Fissure interne chargée dans un milieu infini

Pour ce problème, Z_I est donnée par la relation suivante [9] :

$$Z_I = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a P_2(t) \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{z - t} dt \quad (3.4)$$

Afin de pouvoir utiliser la formule (3.4) pour notre problème. On doit le ramener à un problème avec un chargement sur les lèvres de la fissure, à l'aide du principe de superposition :

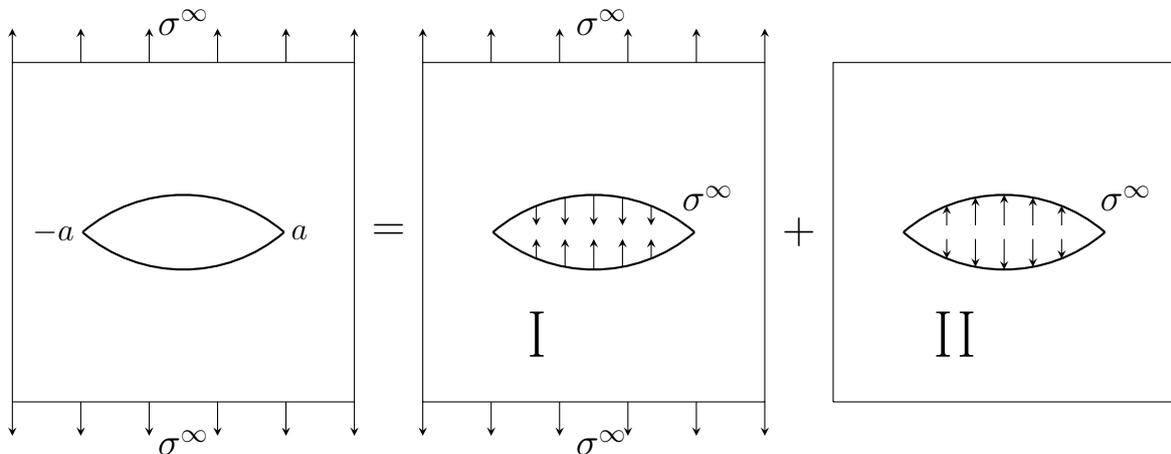


FIGURE 3.4 – Principe de superposition

Le problème I est équivalent à un problème homogène sans fissure. Puisqu'on veut calculer K_I , il suffit de traiter le problème II. On a donc :

$$P_2(t) = \sigma^\infty \quad (3.5)$$

Donc :

$$Z_I = \frac{\sigma^\infty}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{z - t} dt$$

$$\int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{z - t} dt = \pi(z - \sqrt{z^2 - a^2})$$

On aura :

$$Z_I = \sigma^\infty \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (3.6)$$

Maintenant, on va calculer σ_{yy} au niveau du plan de la fissure ($\theta = 0$) (Figure)

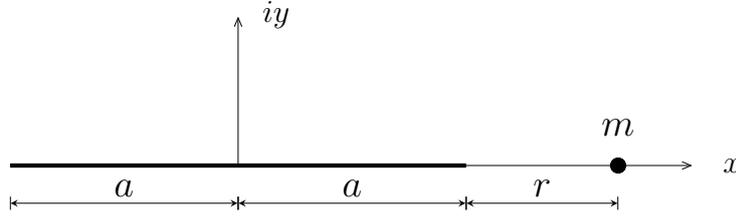


FIGURE 3.5 – Point m situant dans le plan de la fissure

$$\theta = 0 \Rightarrow z = r + a$$

La relation (3.2) devient :

$$\sigma_{yy} = \sigma^\infty \left(\frac{r + a}{\sqrt{r(r + 2a)}} - 1 \right) \quad (3.7)$$

Lorsque $r \rightarrow 0$ $r + a \rightarrow a$ et $r(r + 2a) \rightarrow 2ar$, on aura :

$$\sigma_{yy} = \sigma^\infty \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (3.8)$$

D'un autre côté, on a l'expression asymptotique de $\sigma_{\theta\theta}$ [9] :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.9)$$

On calcule $\sigma_{\theta\theta}$ dans le plan de la fissure $\theta = 0$, on aura :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.10)$$

Dans le plan de la fissure

$$\theta = 0 \Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} \quad (3.11)$$

On aura donc :

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma^\infty \sqrt{\frac{a}{2r}}$$

Ce qui nous donne au final :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (3.12)$$

3.1.2 Étude numérique

Pour le modèle numérique, on va reprendre le même exemple traité dans le chapitre 2. C à d une fissure centrale de longueur $2a$ dans une plaque carrée de coté $2h$. Afin de tendre vers le problème théorique d'une fissure dans un milieu infini, on effectue plusieurs calculs en augmentant à chaque fois le rapport h/a jusqu'à stabilisation de K_I .

Les détails de chaque calcul (maillage, nombre d'éléments et convergence) sont présentés en annexe A.

Les résultats trouvés sont résumés dans le tableau 3.1 et la figure 3.6 ci-dessous :

h/a	$J(10^{-11} N/m)$		$K_I(N/m^{3/2})$	
	Elmt. non Sing.	Elmt.Sing.	Elmt. non Sing.	Elmt.Sing.
2	2.69455	2.79402	2.32144	2.36390
3	2.02516	2.08244	2.01254	2.04080
4	1.80849	1.85280	1.90184	1.92499
5	1.71099	1.74955	1.84986	1.87059
6	1.65877	1.69427	1.82141	1.84080
7	1.62754	1.66122	1.80418	1.82276
8	1.60737	1.63987	1.79297	1.81101
9	1.59359	1.62529	1.78527	1.80294
10	1.58376	1.61489	1.77975	1.79716
15	1.56055	1.59033	1.76666	1.78344
20	1.55245	1.58177	1.76207	1.77863
25	1.54871	1.57781	1.75995	1.77641
30	1.54667	1.57566	1.75879	1.77520
35	1.54545	1.57436	1.75810	1.77446
45	1.54411	1.57294	1.75733	1.77366
100	1.54247	1.57121	1.75640	1.77269

TABLE 3.1 – Évolution de K_I en fonction de h/a

Elmt. non Sing. : Éléments non singuliers.

Elmt.Sing. : Éléments singuliers.

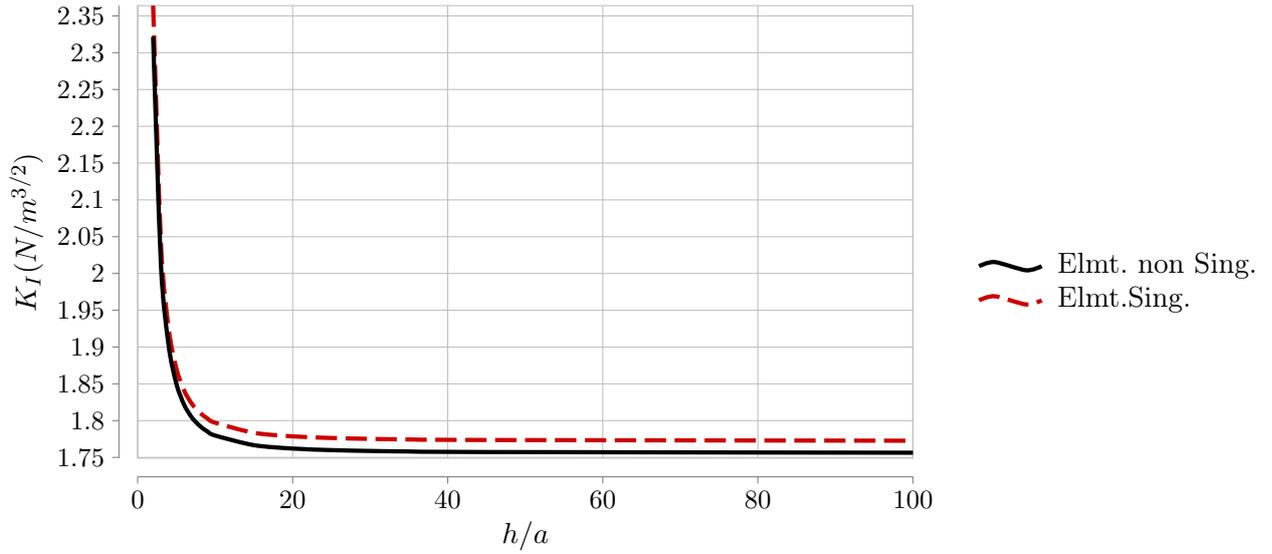


FIGURE 3.6 – Évolution de K_I en fonction de h/a

D'après la figure 3.6, Les deux graphes suivent la même évolution. On peut décomposer cette dernière en deux phases :

Phase 1 : $h/a = [0, 20]$, on constate une diminution rapide de K_I dans les deux cas.

Phase 2 : $h/a = [20, 100]$, on remarque une convergence de K_I vers deux valeurs différentes. On peut donc assimiler la plaque étudiée à une plaque infinie.

On retient les deux valeurs de K_I à la convergence :

Éléments non singuliers	Éléments singuliers
$1.75640N/m^{3/2}$	$1.77269N/m^{3/2}$

3.1.3 Comparaison avec la valeur théorique

On calcule la valeur théorique K_{It}

$$K_{It} = \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K_{It} = 1 \times \sqrt{\pi \times 1}$$

$$K_{It} = 1.77245N/m^{3/2}$$

On calcul l'erreur relative

$$E_r = \frac{\Delta K_I}{K_{It}} = \frac{|K_I - K_{It}|}{K_{It}}$$

Éléments non singuliers

$$E_r = \frac{|1.75640 - 1.77245|}{1.77245}$$

$$E_r = 0.9\%$$

Éléments singuliers

$$E_r = \frac{|1.77269 - 1.77245|}{1.77245}$$

$$E_r = 0.01\%$$

On remarque que l'erreur relative lorsqu'on n'a pas d'éléments singuliers est plus grande que celle avec éléments singuliers. Par conséquent, ce résultat nous permet de valider la méthode avec éléments singuliers, car elle est plus précise.

3.2 Fissure débouchante

Dans cet exemple, la fissure de longueur a est positionnée au bord gauche d'une plaque métallique de dimensions $2h \times b$. Cette plaque est soumise à une charge de traction constante σ (Figure 3.7).

Le K_I est donné par la relation théorique suivante [5]

Si $h/b > 1$

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi a} F(a/b) \\ F(a/b) &= 0.265(1 - a/b)^4 + \frac{0.857 + 0.265a/b}{(1 - a/b)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.1 Étude numérique

Pour l'étude numérique, on va prendre cinq cas. On va fixer les dimensions de la plaque ainsi que la charge appliquée et on varie la longueur de la fissure de 0.1 jusqu'à 0.5. Pour chaque cas, on va suivre les mêmes étapes présentés dans le chapitre 2 sauf pour les conditions aux limites qui vont concerner la symétrie par rapport au plan de la fissure

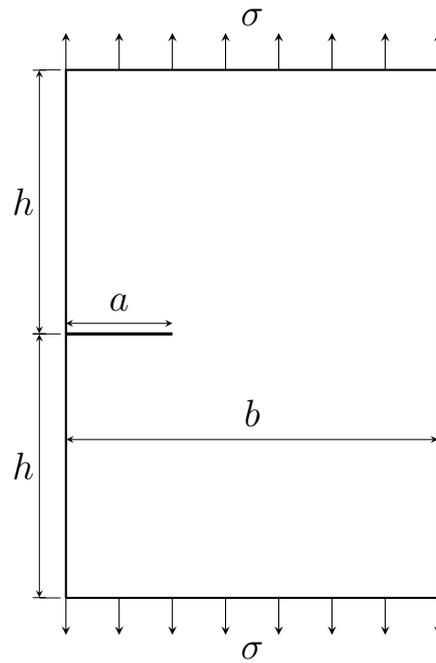


FIGURE 3.7 – Fissure débouchante

seulement, c à d on va travailler avec le demi-modèle (Figure 3.8). Comme le premier exemple, on va étudier les deux cas :

1. Modèle sans éléments singuliers.
2. Modèle avec éléments singuliers.

Les détails de chaque calcul (maillage, nombre d'éléments et convergence) sont présentés en annexe B.

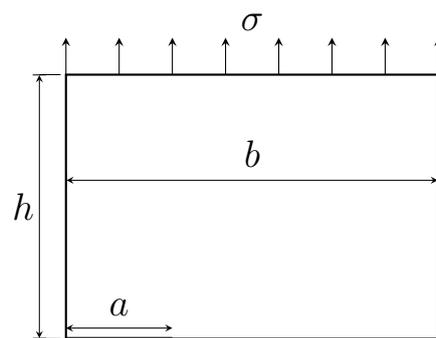


FIGURE 3.8 – Fissure débouchante : demi-modèle

L'application numérique est présentée dans le tableau 3.2 ci-dessous :

Grandeurs		Valeur	Unité
Dimensions de la plaque	$2h \times b$	6×1	m
Longueur de fissure	a	$0.1 - 0.5$	m
Module de Young	E	200	Gpa
Coefficient de Poisson	ν	0.3	–
Charge de traction	σ	1	N/m^2

TABLE 3.2 – Application numérique exemple 2

Les résultats obtenus pour les deux cas à la convergence sont résumés dans le tableau 3.3 suivant :

$a(m)$	$J(10^{-11}N/m)$		$K_I(N/m^{3/2})$	
	Elmt. non Sing.	Elmt.Sing.	Elmt. non Sing.	Elmt.Sing.
0.1	0.211107	0.222121	0.649780	0.666515
0.2	0.565134	0.587320	1.063140	1.083810
0.3	1.253710	1.298270	1.583480	1.611378
0.4	2.704210	2.800930	2.325600	2.366820
0.5	6.034610	6.265810	3.474080	3.540000

TABLE 3.3 – Valeurs de J et K exemple 2

3.2.2 Comparaison avec les valeurs théoriques

À partir de la formule (3.13), on va calculer le K_I pour chaque cas et comparer les résultats avec ceux obtenus numériquement comme il est indiqué dans le tableau 3.4 ci-dessous :

$a(m)$	$K_I(N/m^{3/2})$				
	Valeur théorique	Elmt. non Sing.	$E_r(\%)$	Elmt.Sing.	$E_r(\%)$
0.1	0.677438	0.649780	4.08	0.666515	1.61
0.2	1.094122	1.063140	2.83	1.083810	0.94
0.3	1.614143	1.583480	1.9	1.611378	0.17
0.4	2.361260	2.325600	1.51	2.366820	0.24
0.5	3.528444	3.474080	1.54	3.540000	0.33

TABLE 3.4 – Comparaison des valeurs numériques avec les valeurs théoriques

Les résultats obtenus nous montre que le K_I augmente à chaque fois qu'on augmente la longueur de la fissure. Les résultats lorsqu'on a utilisé la méthode avec éléments singuliers pour les cinq cas sont plus précis que ceux obtenus avec la méthode sans éléments singuliers.

Conclusion

On a traité dans ce chapitre deux exemples de calcul de K_I , le premier est une plaque infinie avec une fissure au milieu, et le deuxième est une plaque avec une fissure au bord gauche au milieu. Dans ces deux exemples, on a suivi les mêmes étapes du chapitre 2 pour trouver le K_I . On a trouvé que la méthode avec éléments singuliers nous a donné des résultats précis avec des erreurs relatives ne dépassant pas les 1.61%, tandis qu'avec l'autre méthode, l'erreur a dépassé 4%.

Conclusions et perspectives

Dans notre travail, nous avons calculé le facteur d'intensité de contrainte en mode I en utilisant le logiciel Abaqus. Ce travail rentre dans le cadre de l'étude des fissures par une approche locale dans le domaine de la mécanique de rupture. Nous avons présenté un état de l'art sur les principales grandeurs et paramètres physiques utilisés dans cette étude ; le FIC et l'intégrale de Rice J . Ce dernier est utilisé dans la méthode des éléments finis. Nous avons distingué deux modèles numériques :

1. Modèle sans éléments singuliers
2. Modèle avec éléments singuliers

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les étapes nécessaires pour le calcul du FIC dans Abaqus. Nous avons défini les propriétés du matériau, établi les conditions aux limites et le chargement, créé le maillage et calculé le K_I .

Dans le dernier chapitre, nous avons établi l'étude de deux problèmes suivants :

1. Fissure centrale dans une plaque infinie.
2. Fissure débouchante.

Pour ces deux problèmes, nous avons fait l'étude numérique et comparé les résultats trouvés avec les valeurs théoriques.

On peut retenir de cette étude que :

1. La singularité des contraintes en pointe de fissure peut être modélisée par éléments finis singuliers en modifiant l'élément singulier isoparamétrique à huit nœuds.
2. Le logiciel Abaqus est facile et flexible à utiliser, ainsi que sa documentation est disponible.
3. L'étude de convergence nous permet de choisir le maillage adéquat qui nous donne un résultat numérique validé.
4. Lorsque la dimension de la plaque est supérieure à celle de la fissure de 20 fois, on peut assimiler la plaque comme une plaque infinie.

5. La méthode avec éléments singuliers nous donne des résultats plus précis que la méthode sans éléments singuliers.

Les perspectives que l'on peut dégager pour la poursuite de ce travail sont les suivantes :

1. Étude d'un troisième problème de calcul de K_I par exemple une fissure dans poutre en flexion.
2. Étude d'autres problèmes impliquant le calcul de K_{II} et le K_{III} .

Annexe A

Résultats numériques

$$h = 3$$

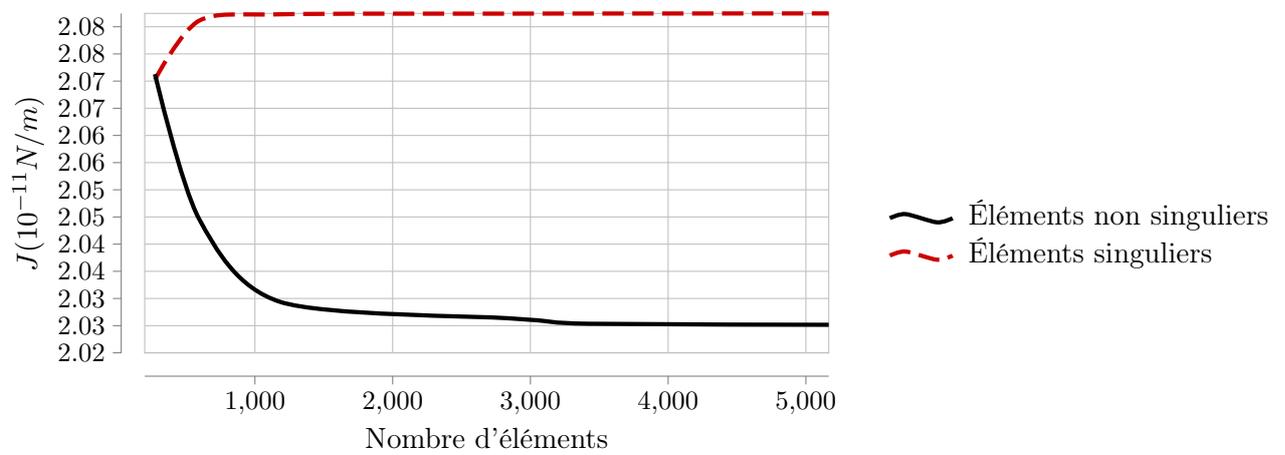
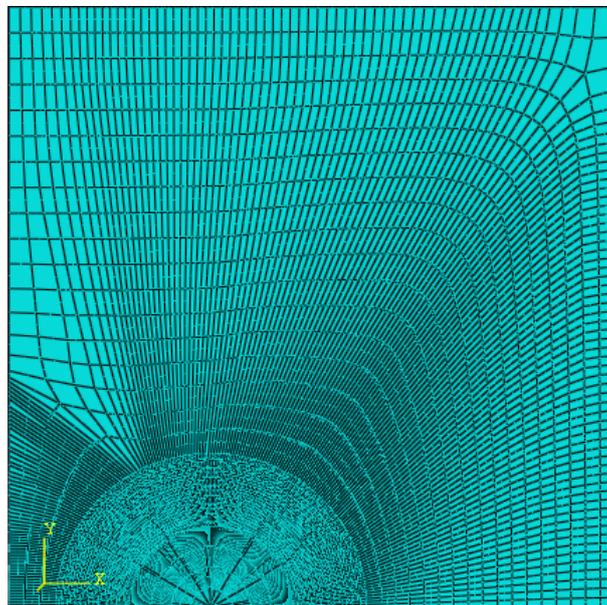


FIGURE A.1 – Maillage et étude de convergence $h = 3$

$$h = 4$$

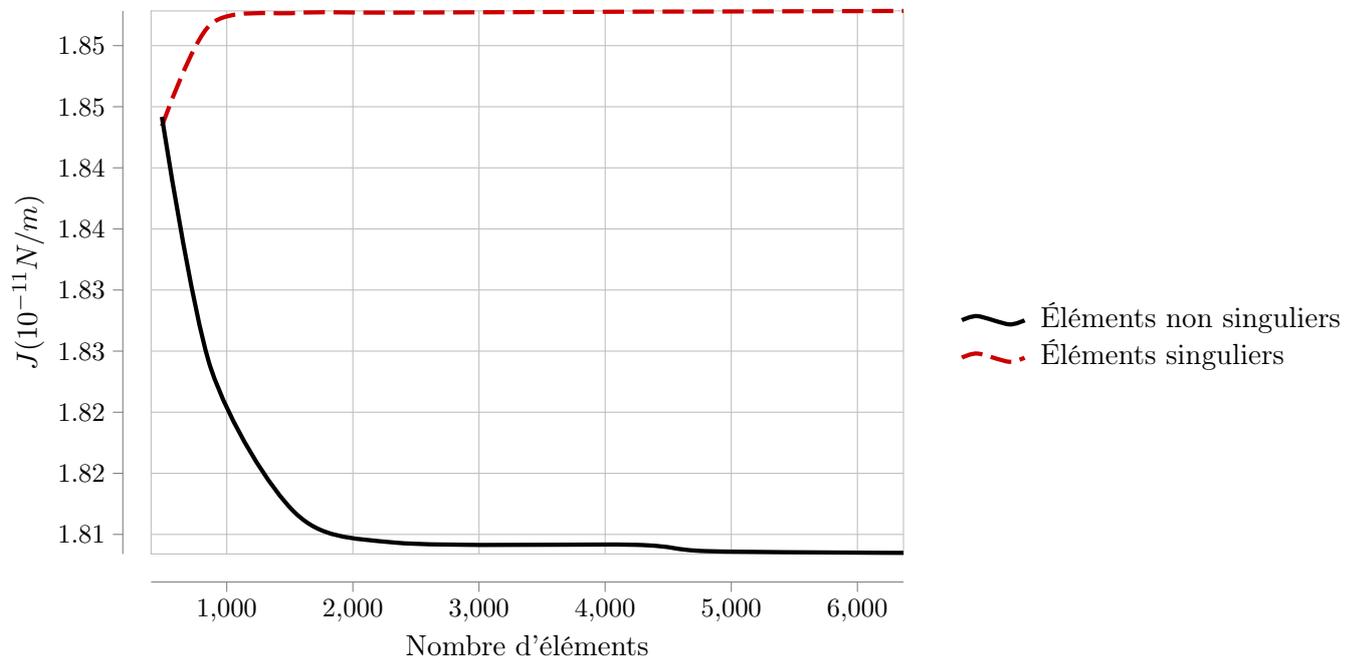
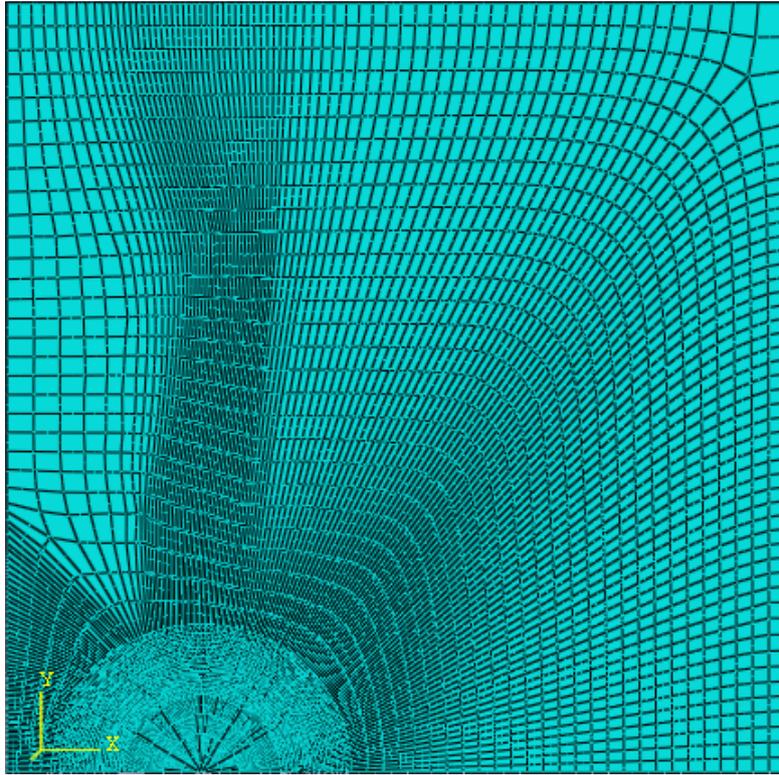


FIGURE A.2 – Maillage et étude de convergence $h = 4$

$$h = 5$$

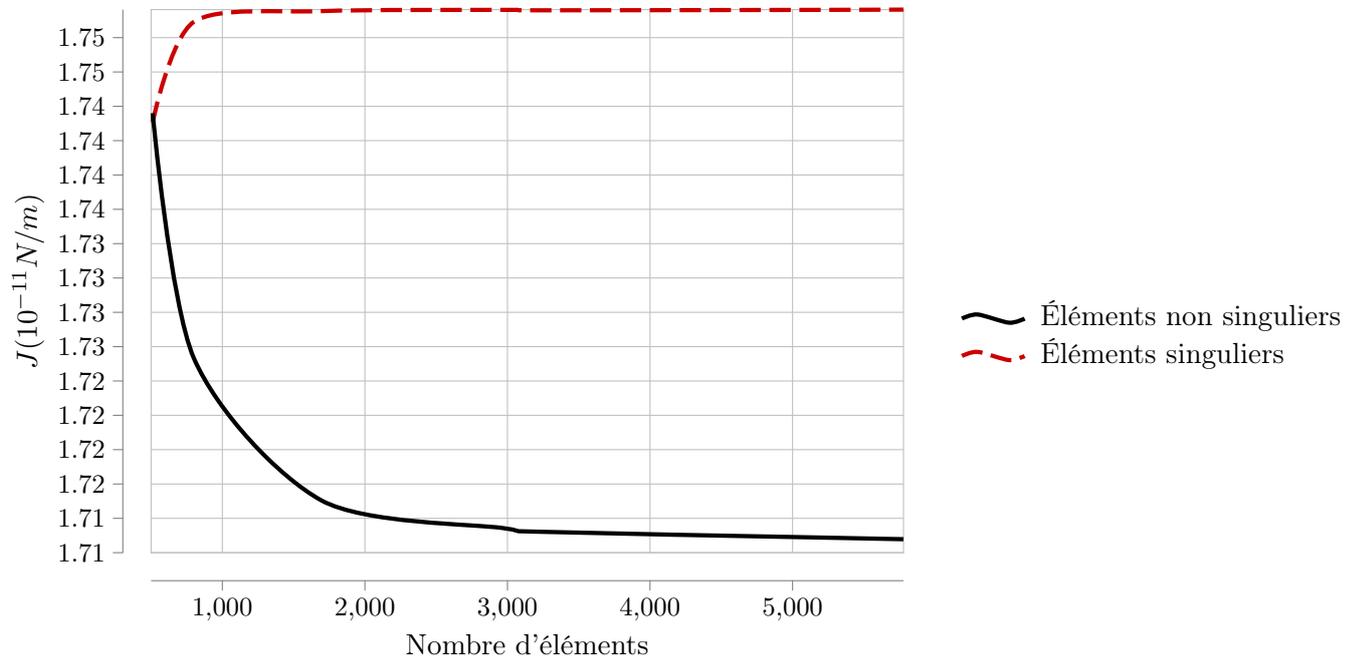
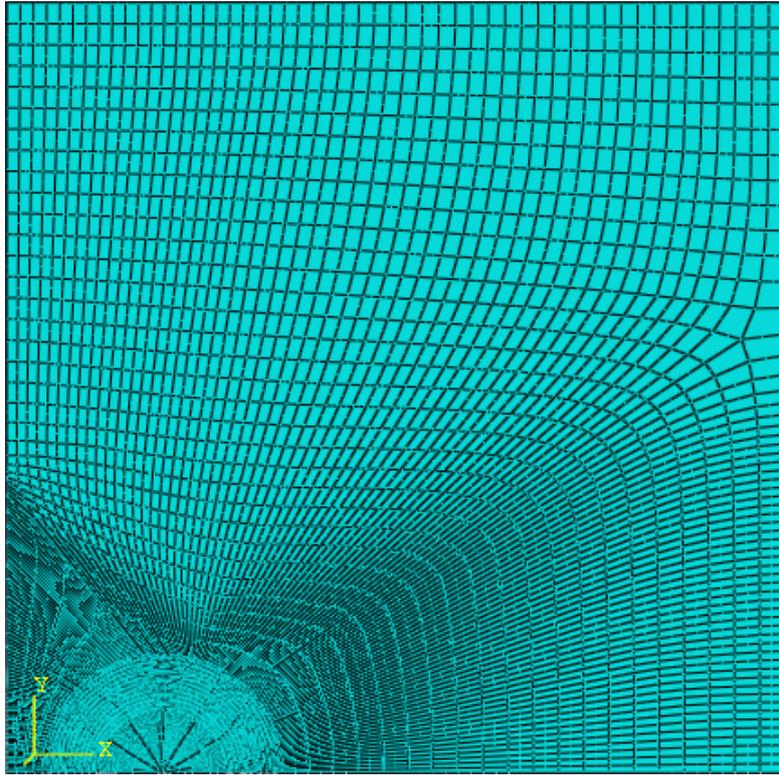


FIGURE A.3 – Maillage et étude de convergence $h = 5$

$$h = 6$$

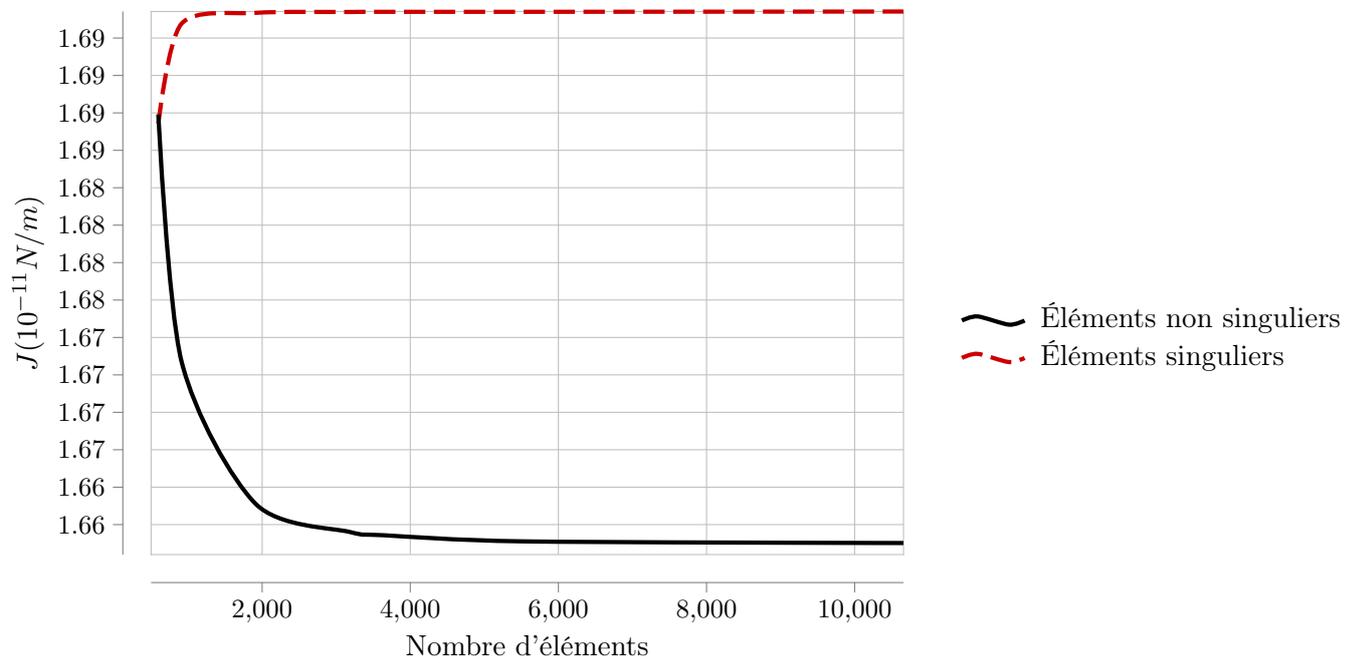
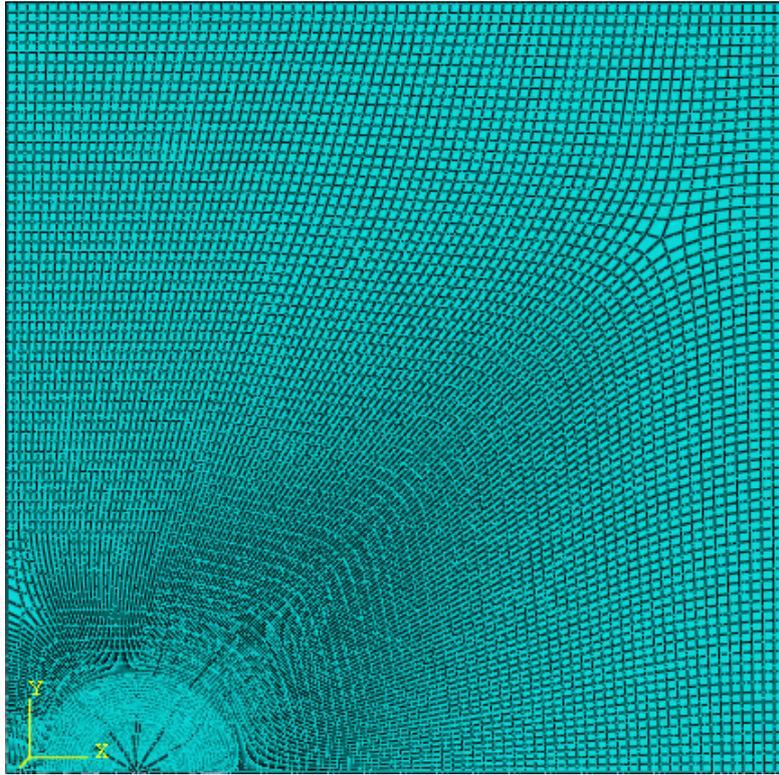


FIGURE A.4 – Maillage et étude de convergence $h = 6$

$$h = 7$$

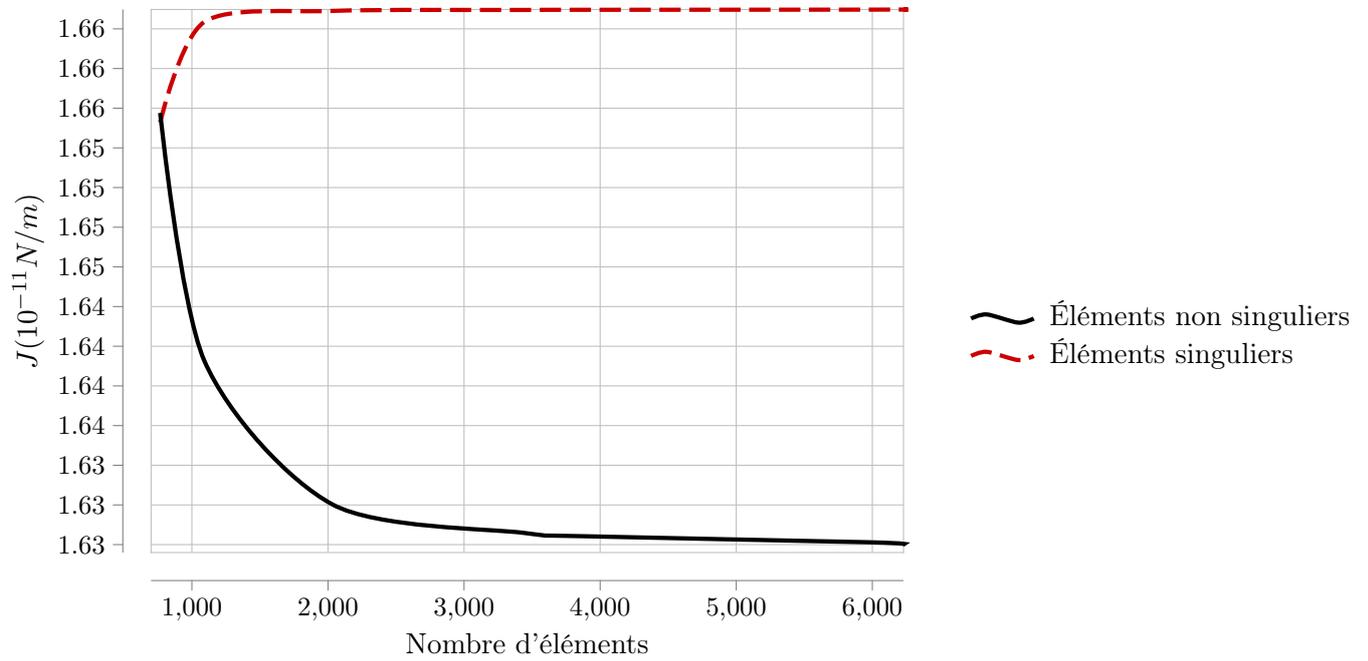
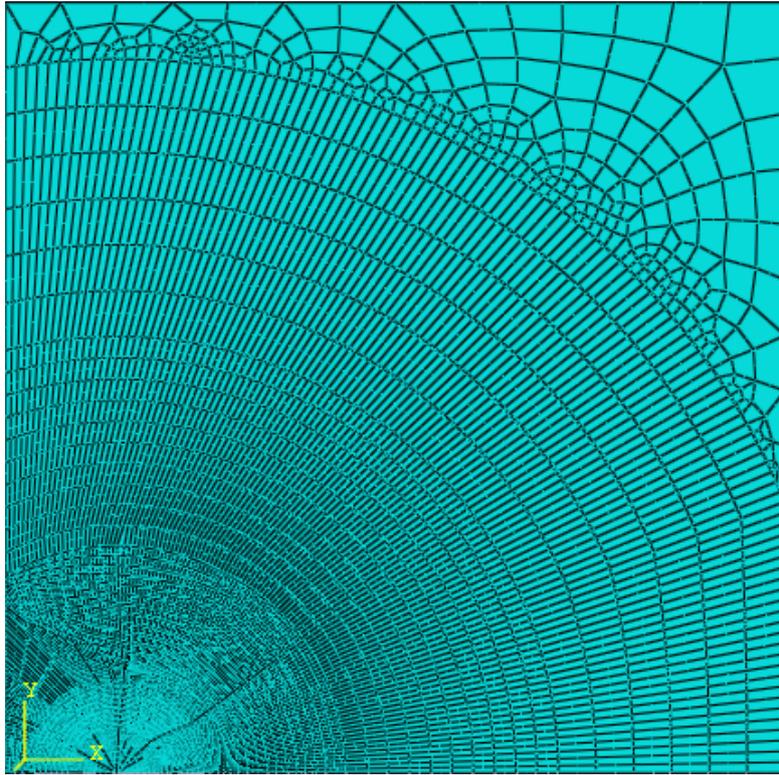


FIGURE A.5 – Maillage et étude de convergence $h = 7$

$$h = 8$$

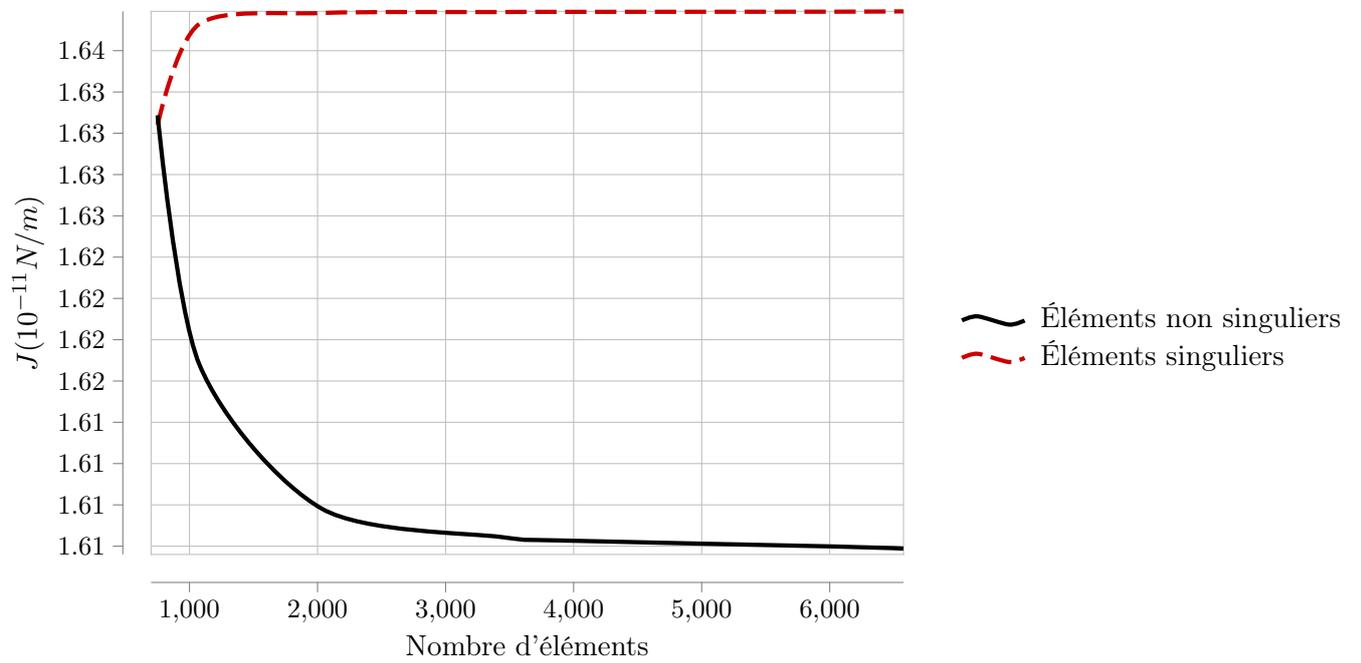
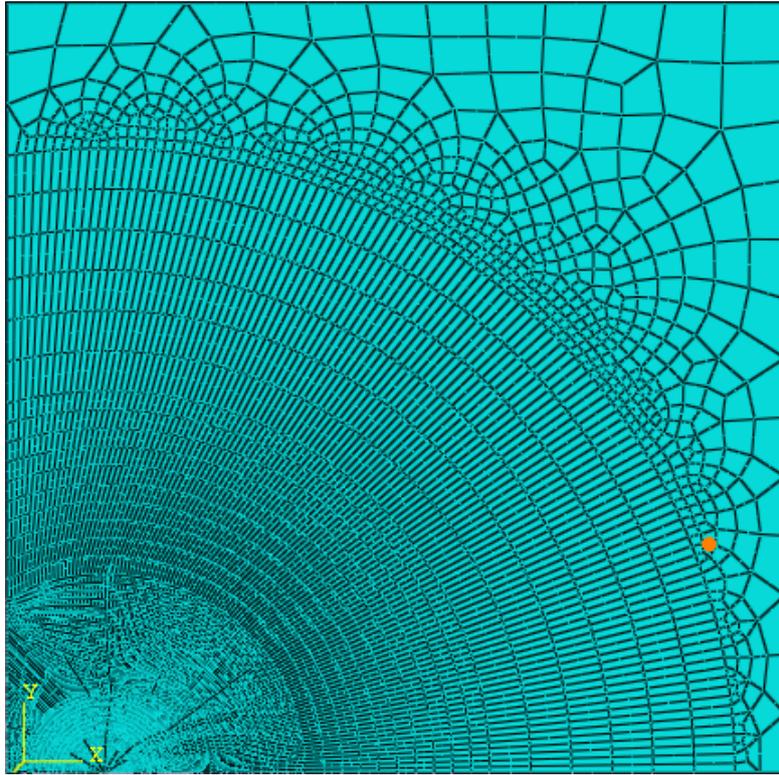


FIGURE A.6 – Maillage et étude de convergence $h = 8$

$$h = 9$$

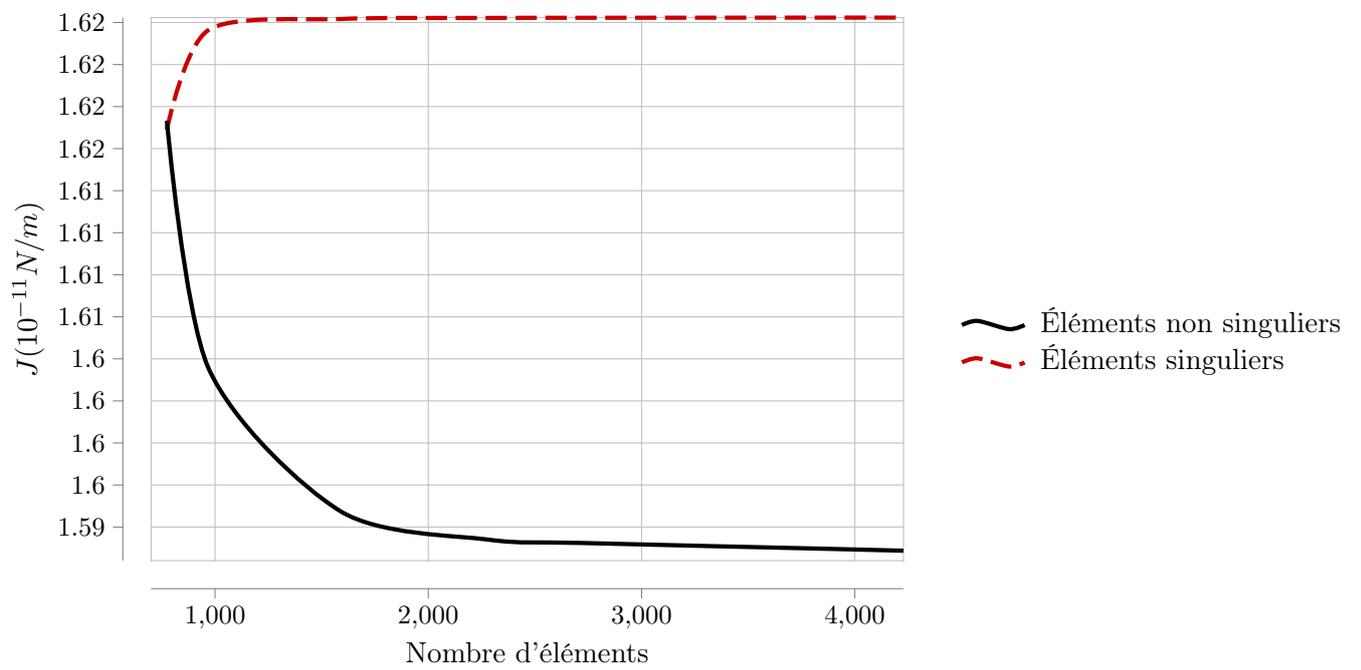
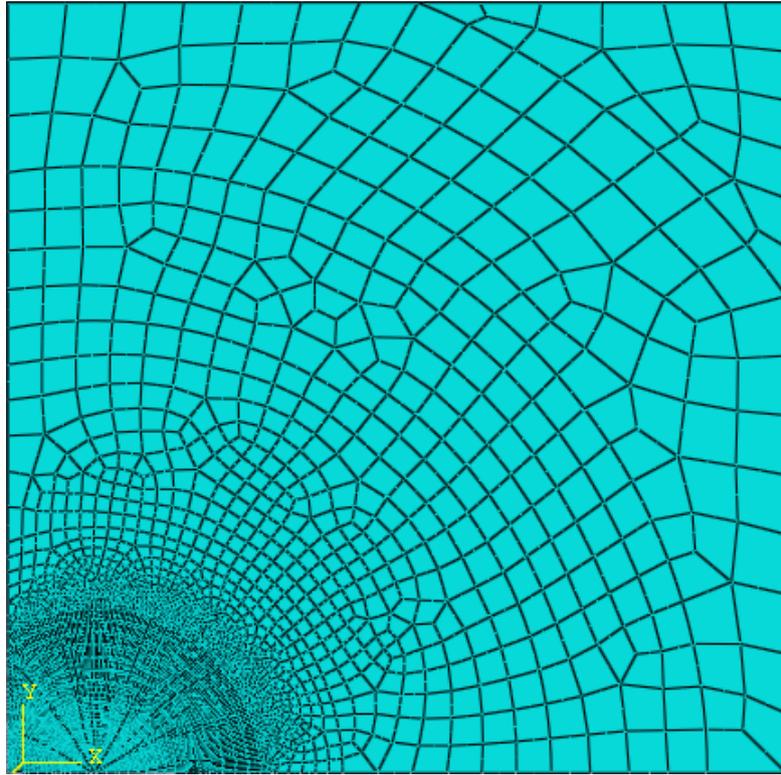


FIGURE A.7 – Maillage et étude de convergence $h = 9$

$$h = 10$$

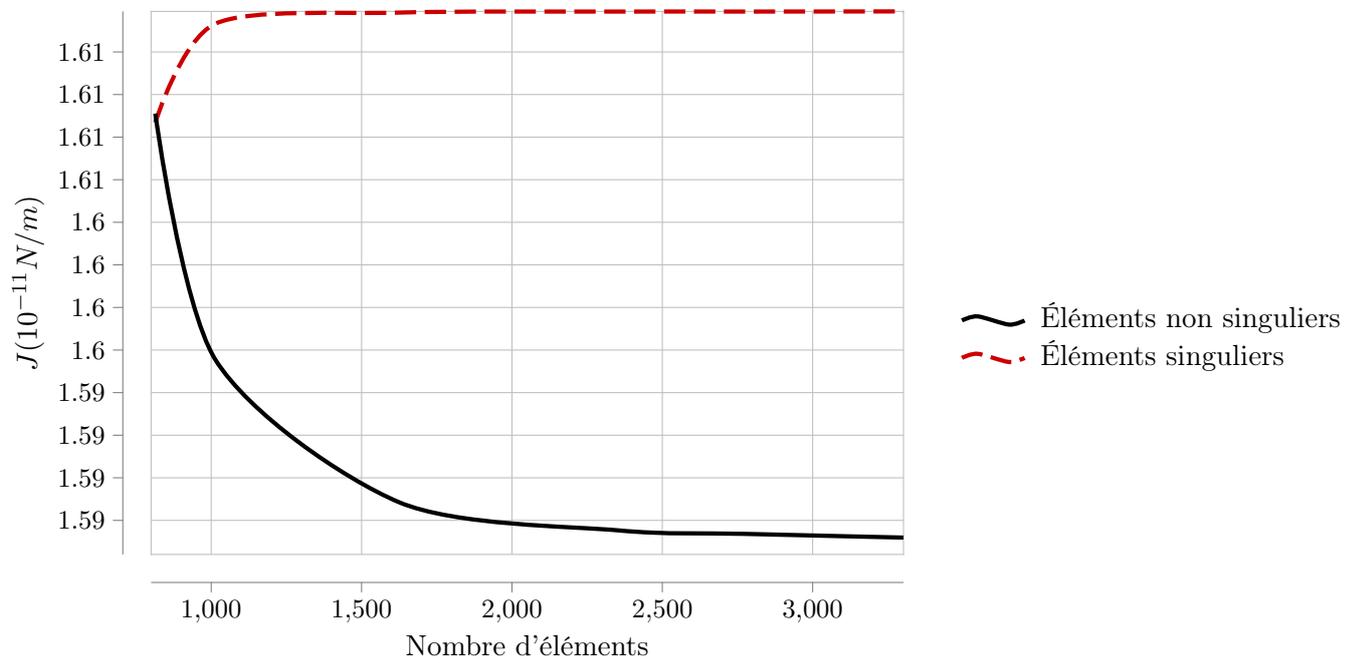
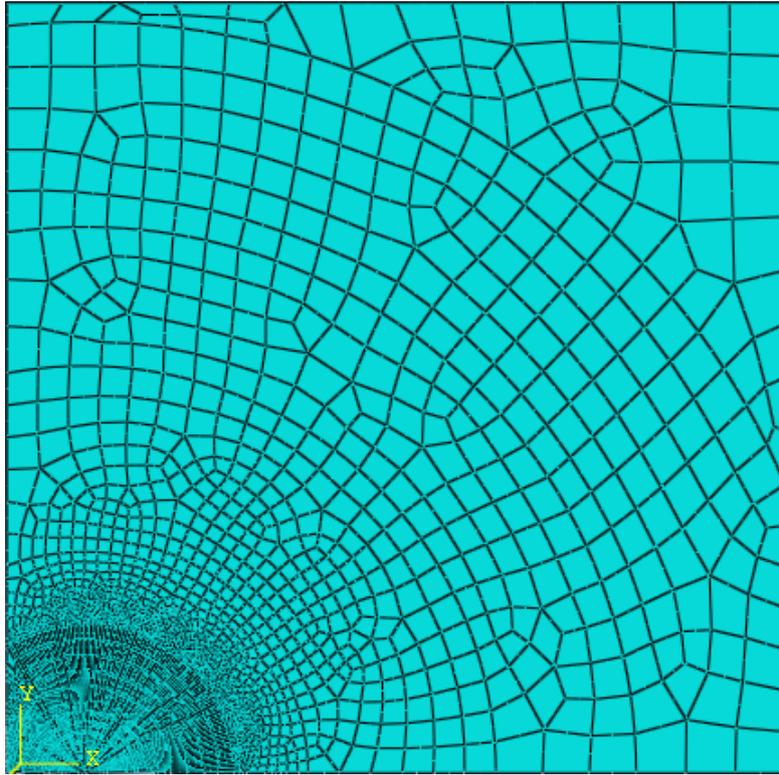


FIGURE A.8 – Maillage et étude de convergence $h = 10$

$$h = 15$$

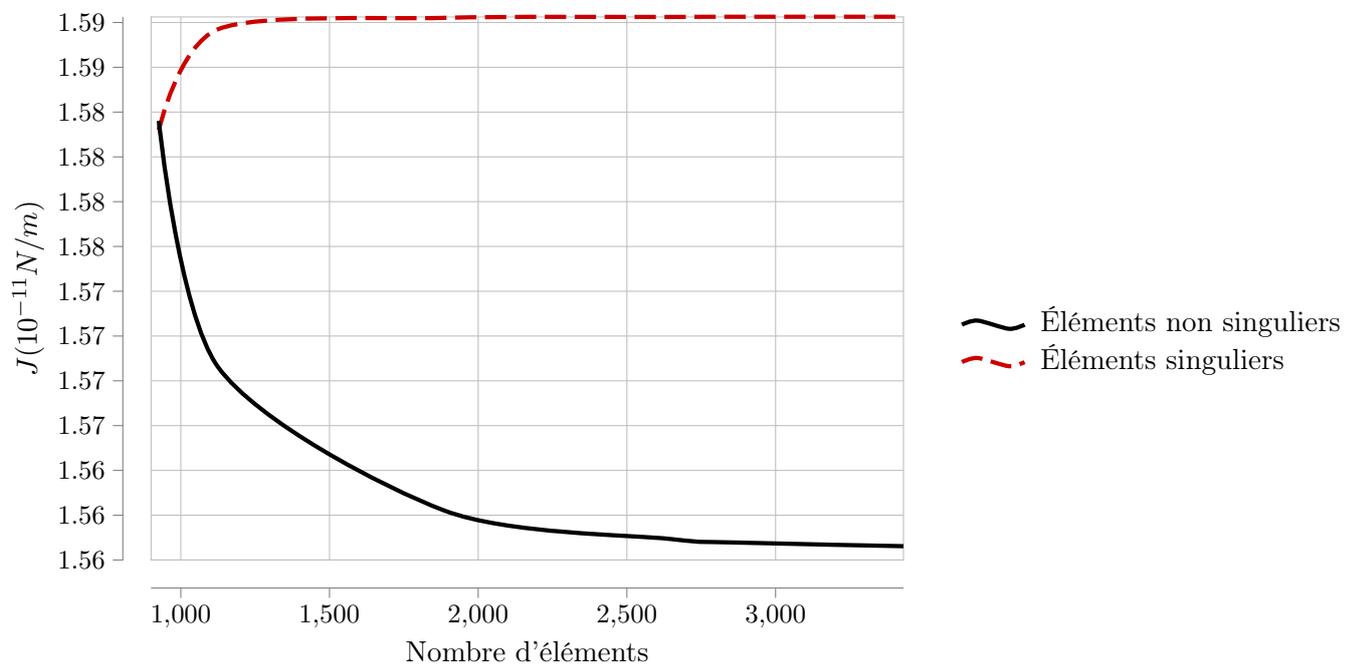
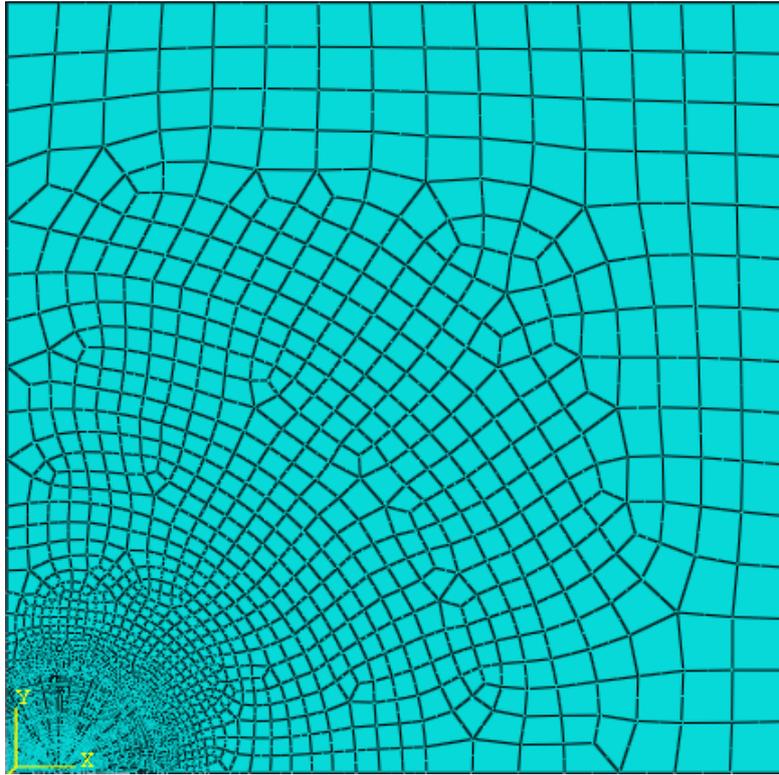


FIGURE A.9 – Maillage et étude de convergence $h = 15$

$h = 20$

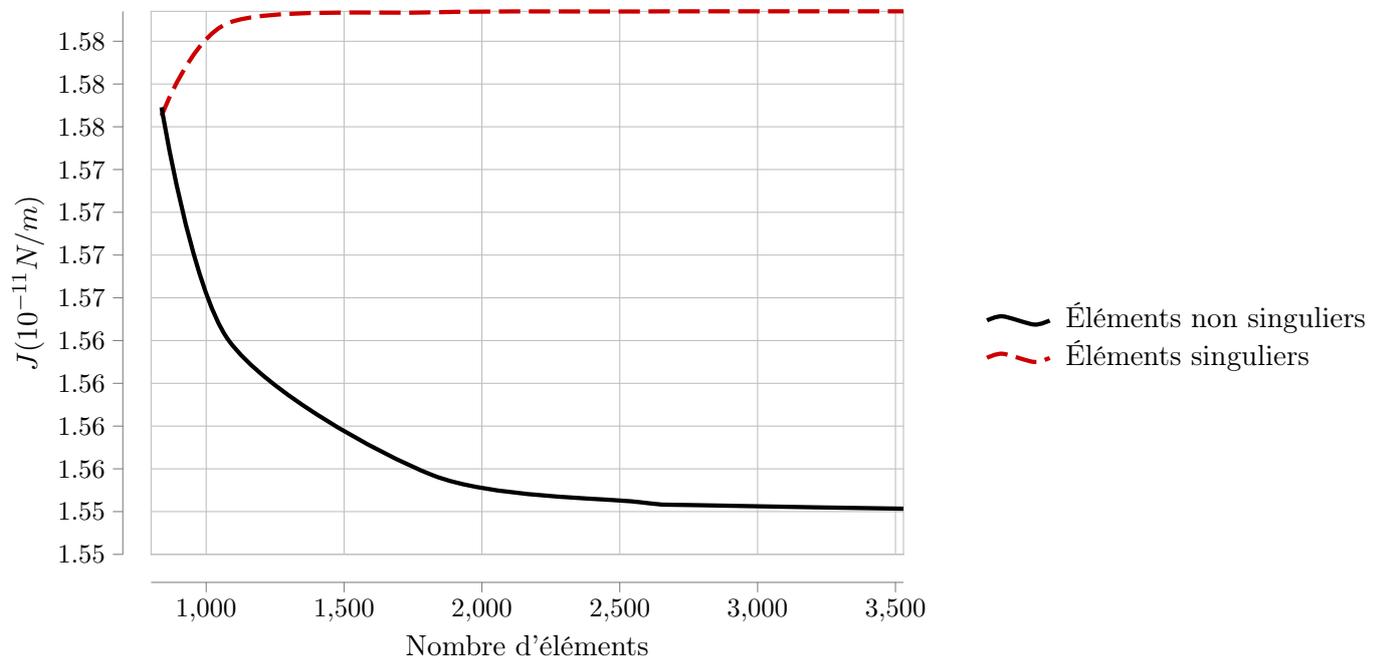
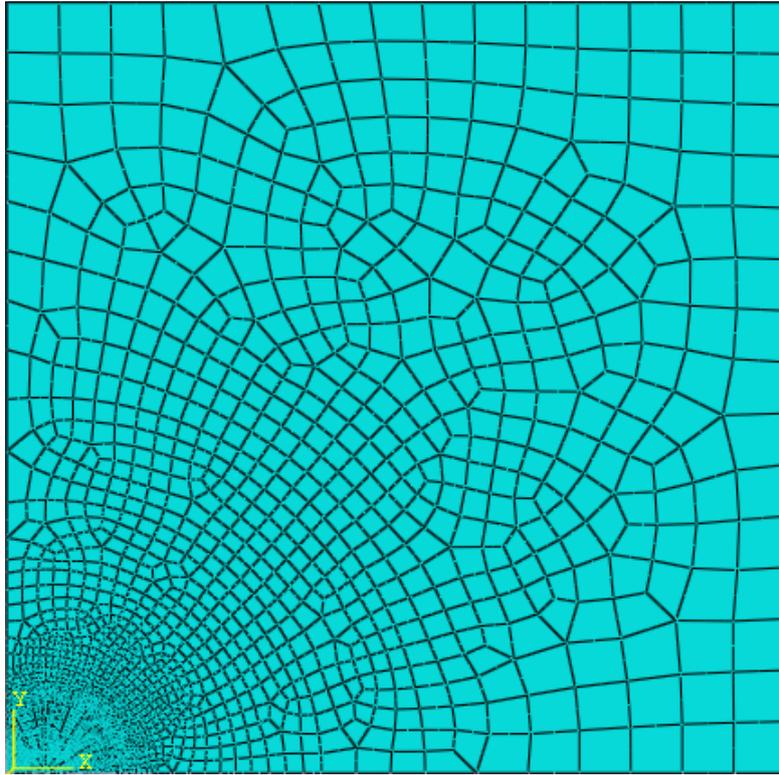


FIGURE A.10 – Maillage et étude de convergence $h = 20$

$$h = 25$$

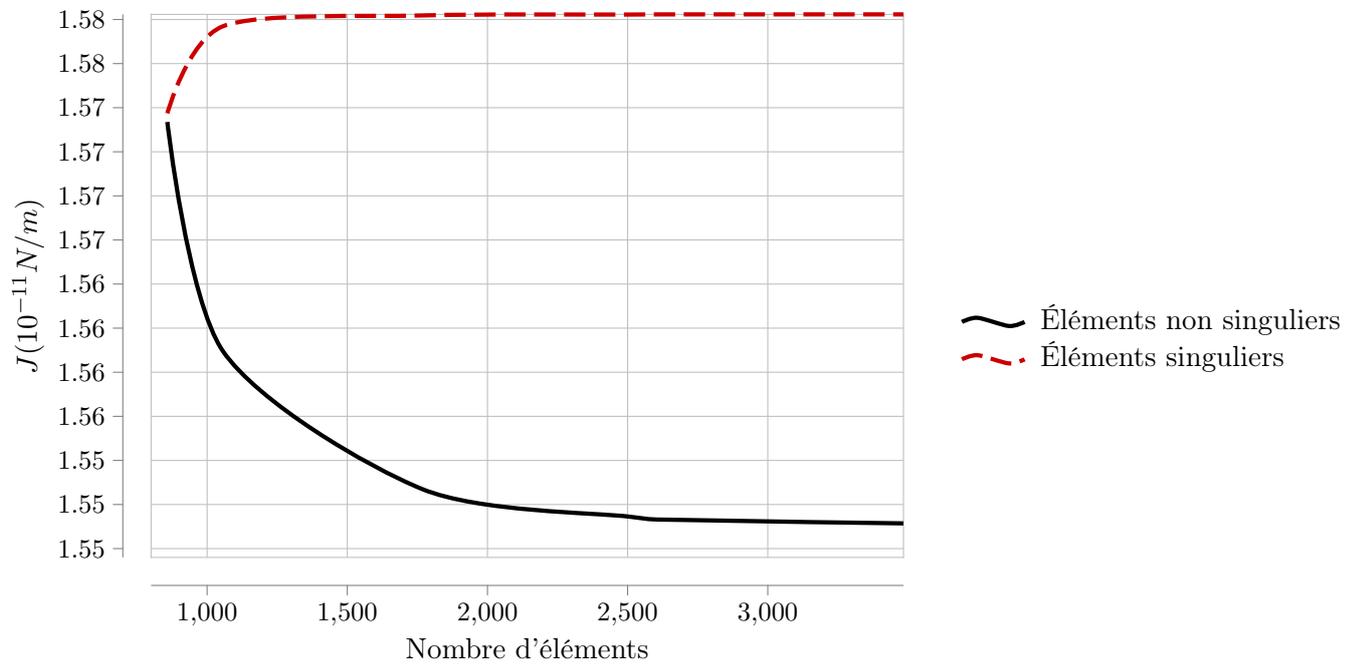
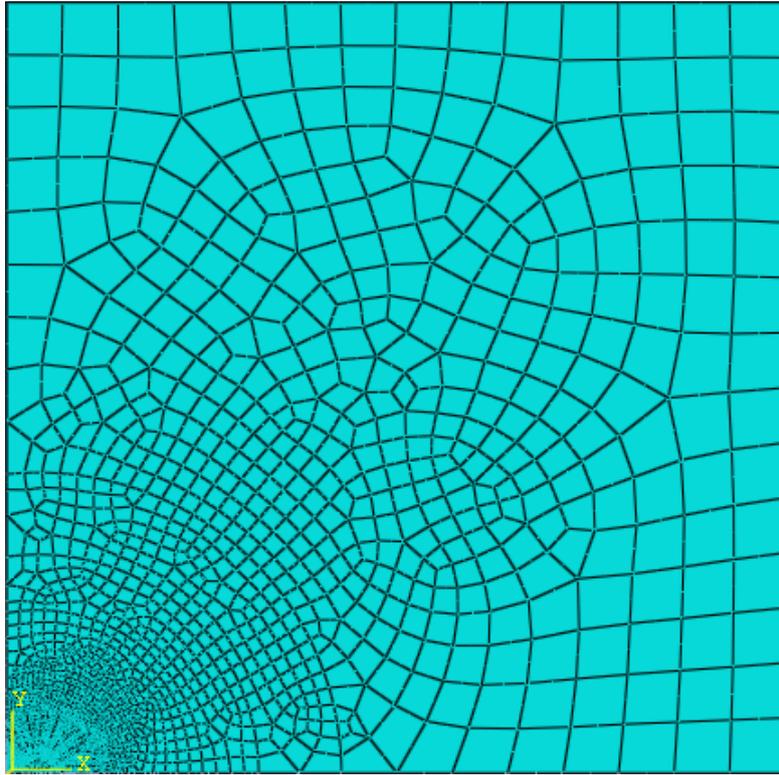


FIGURE A.11 – Maillage et étude de convergence $h = 25$

$$h = 30$$

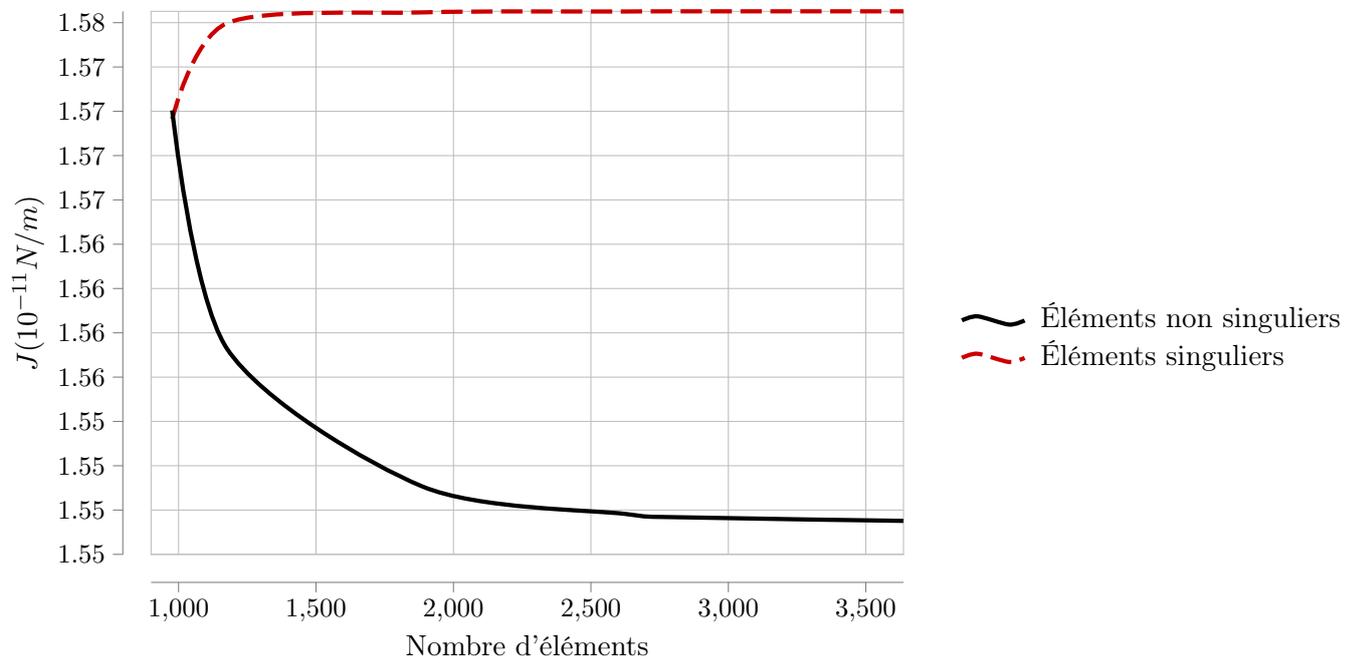
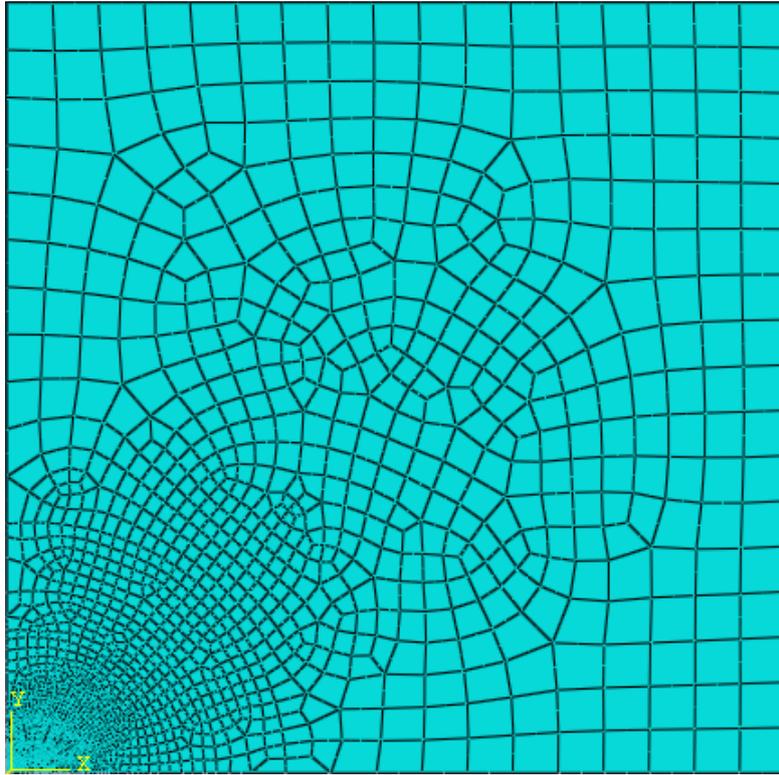


FIGURE A.12 – Maillage et étude de convergence $h = 30$

$$h = 35$$

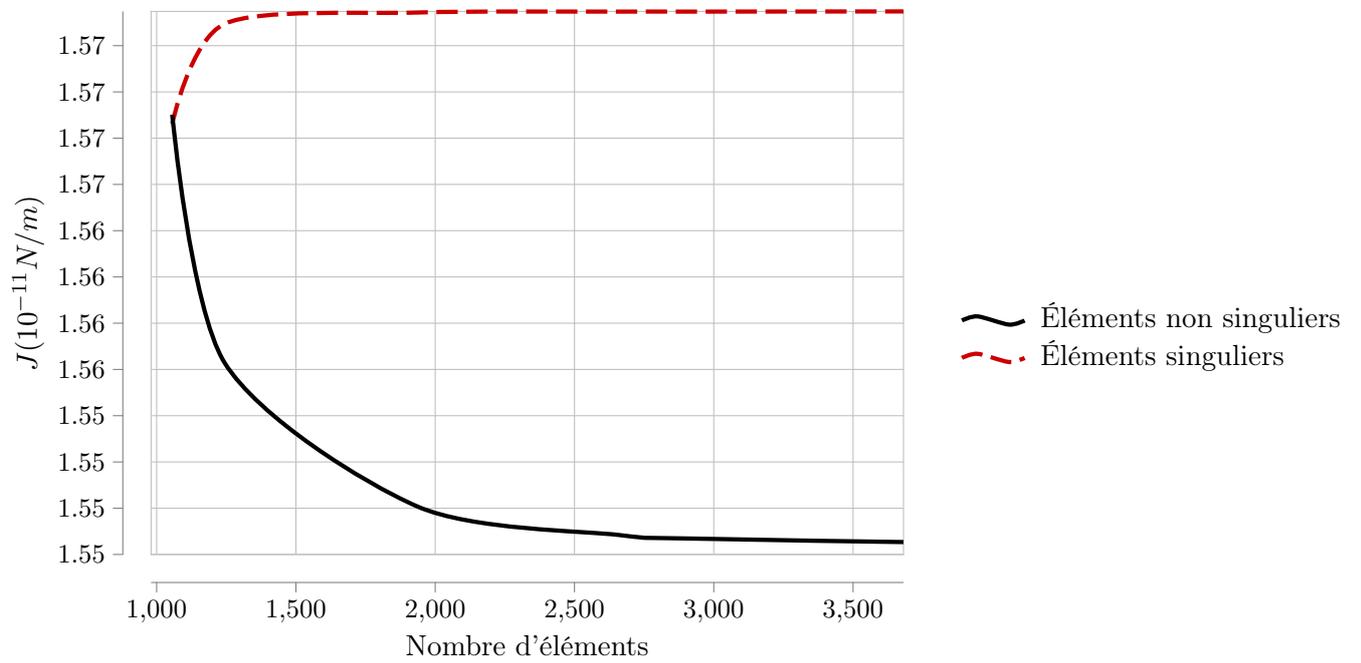
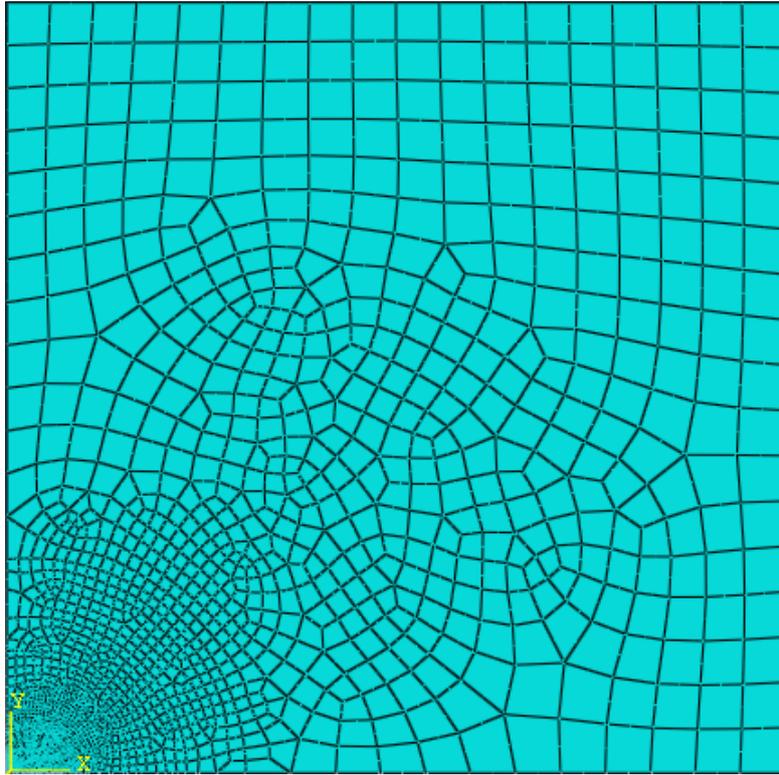


FIGURE A.13 – Maillage et étude de convergence $h = 35$

$$h = 45$$

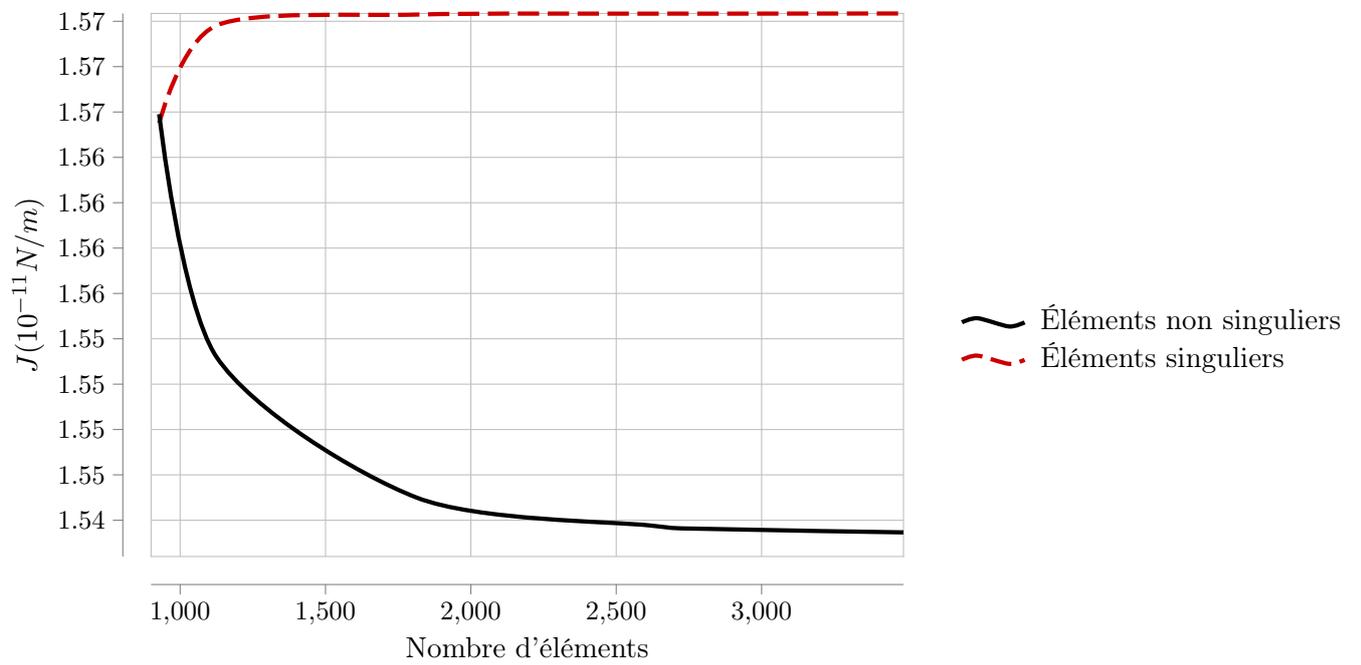
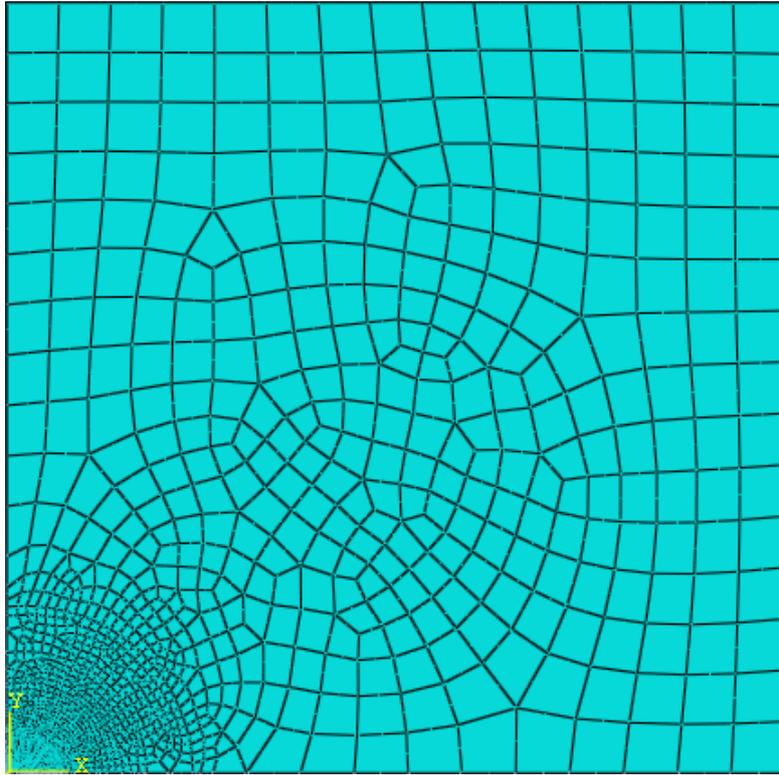


FIGURE A.14 – Maillage et étude de convergence $h = 45$

$h = 100$

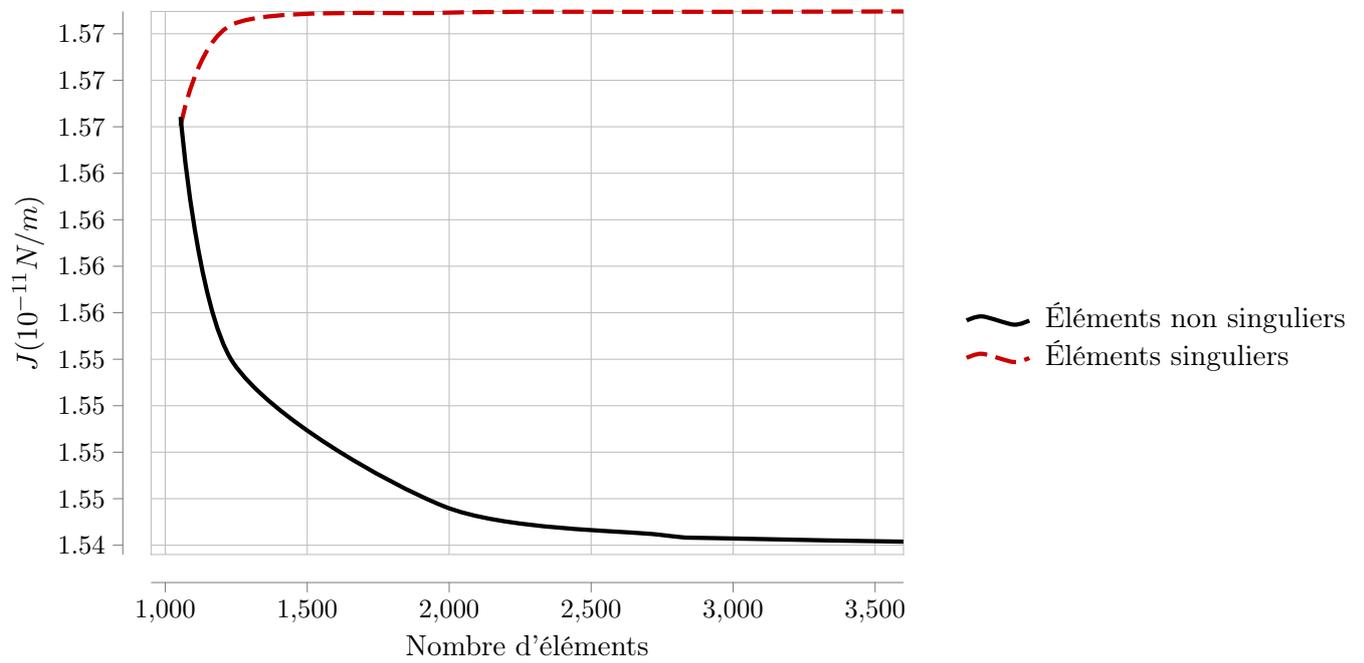
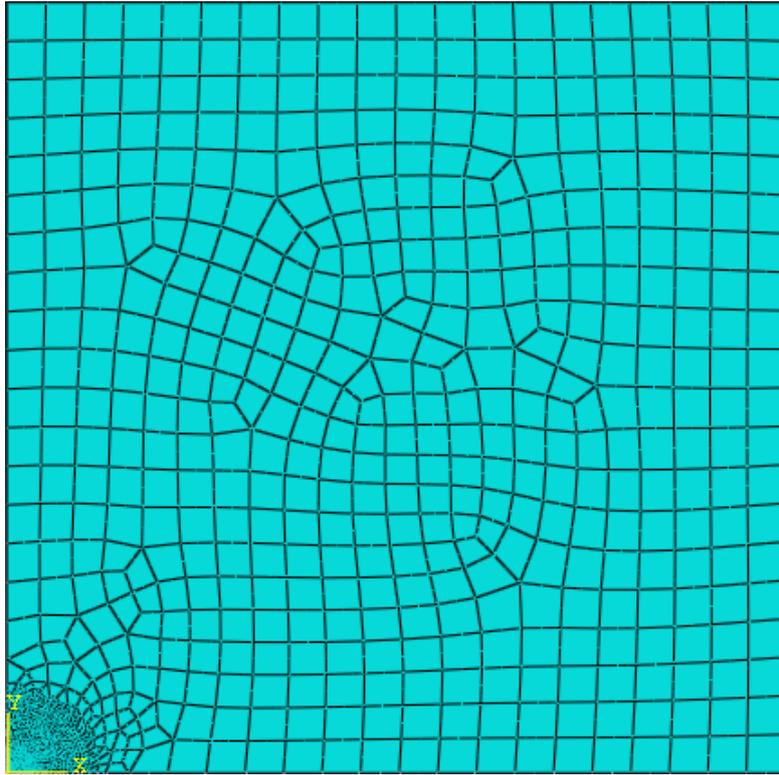


FIGURE A.15 – Maillage et étude de convergence $h = 100$

Annexe B

Résultats numériques II

$$a = 0.1$$

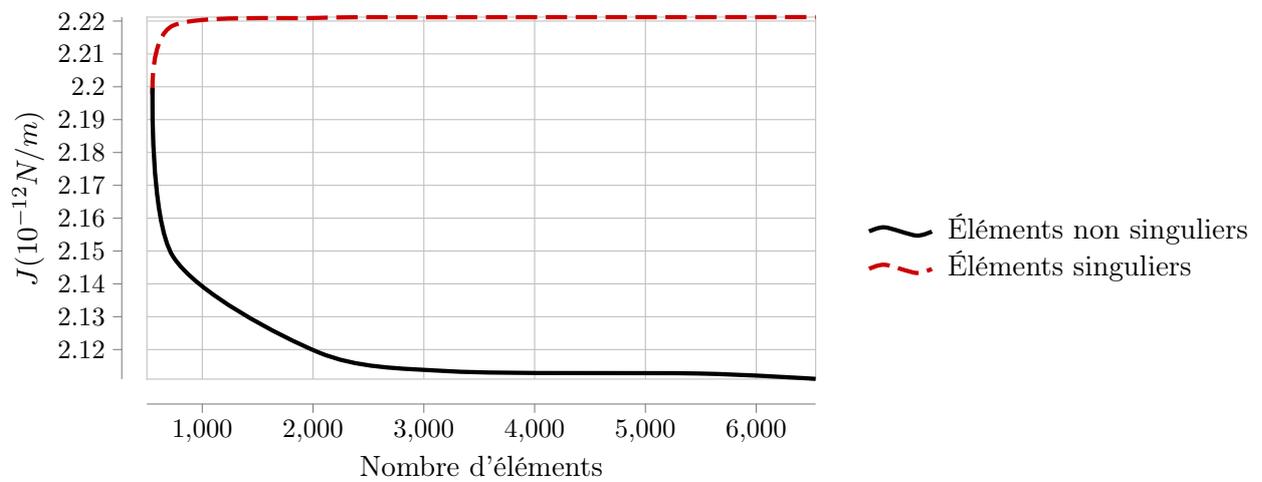
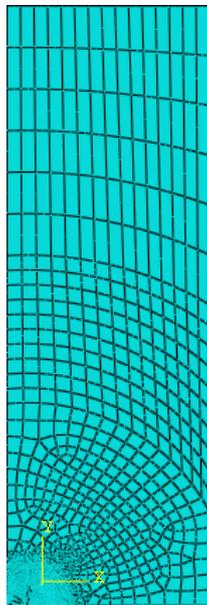


FIGURE B.1 – Maillage et étude de convergence $a = 0.1$

$$a = 0.2$$

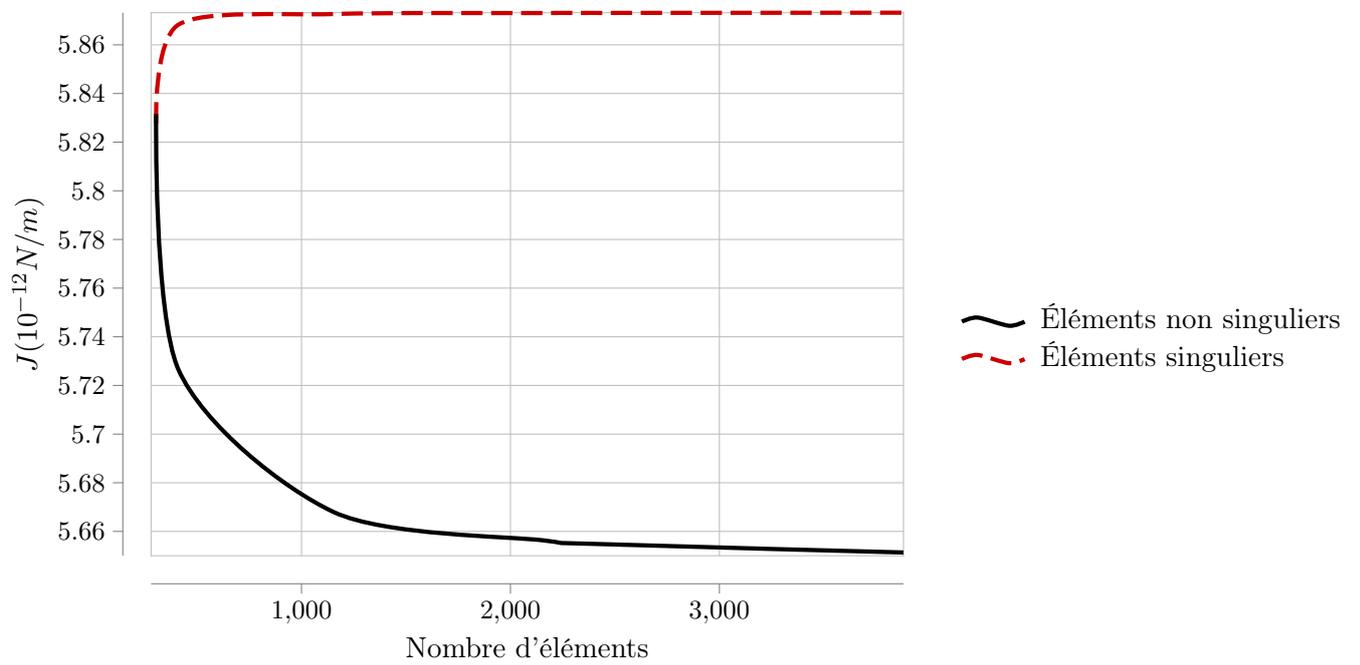
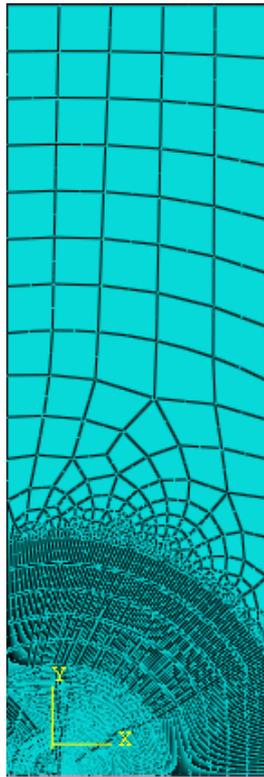


FIGURE B.2 – Maillage et étude de convergence $a = 0.2$

$$a = 0.3$$

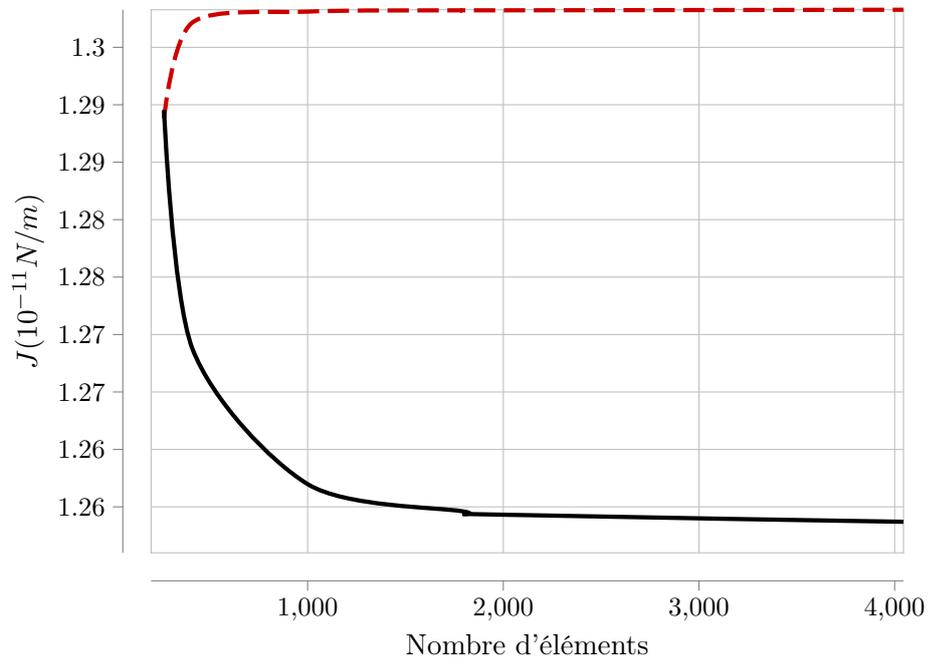
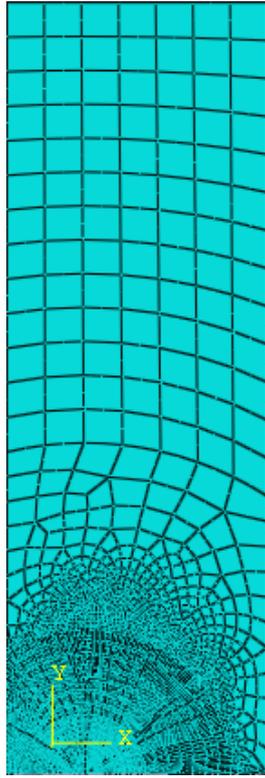


FIGURE B.3 – Maillage et étude de convergence $a = 0.3$

$$a = 0.4$$

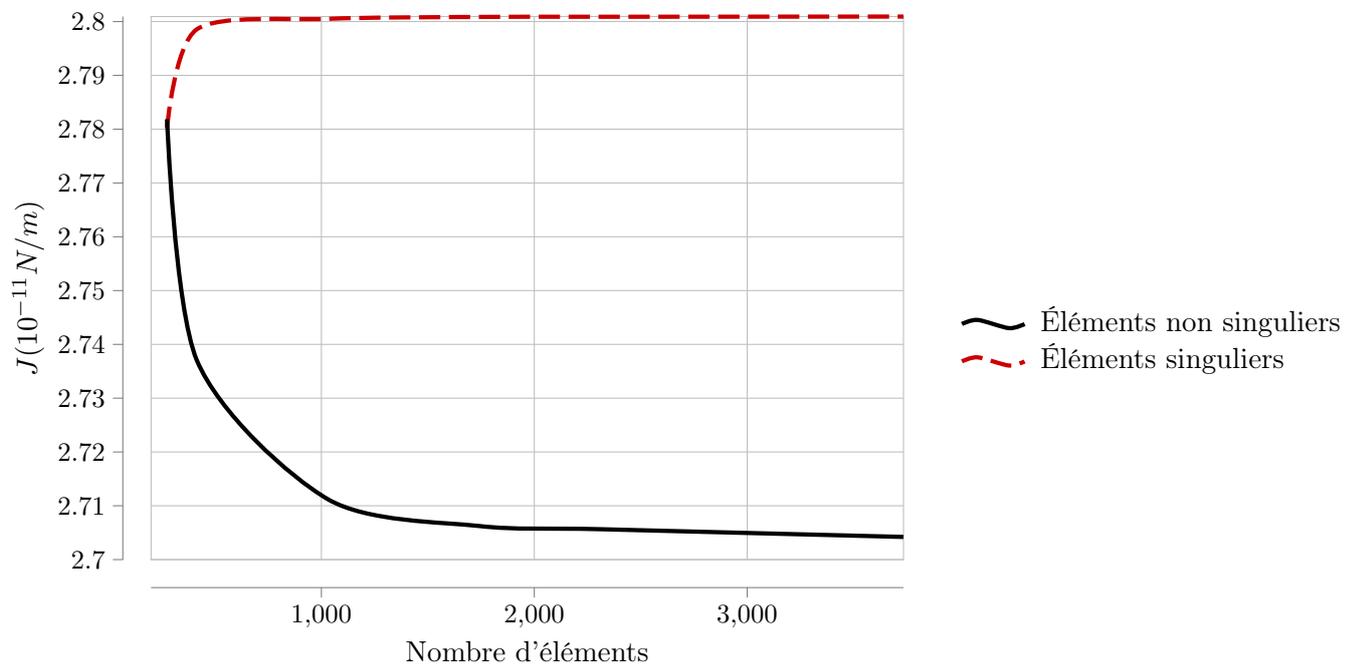
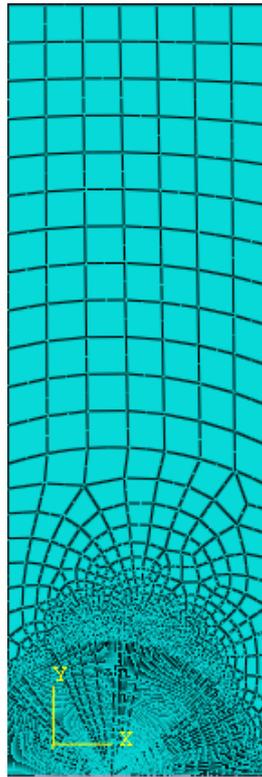


FIGURE B.4 – Maillage et étude de convergence $a = 0.4$

$$a = 0.5$$

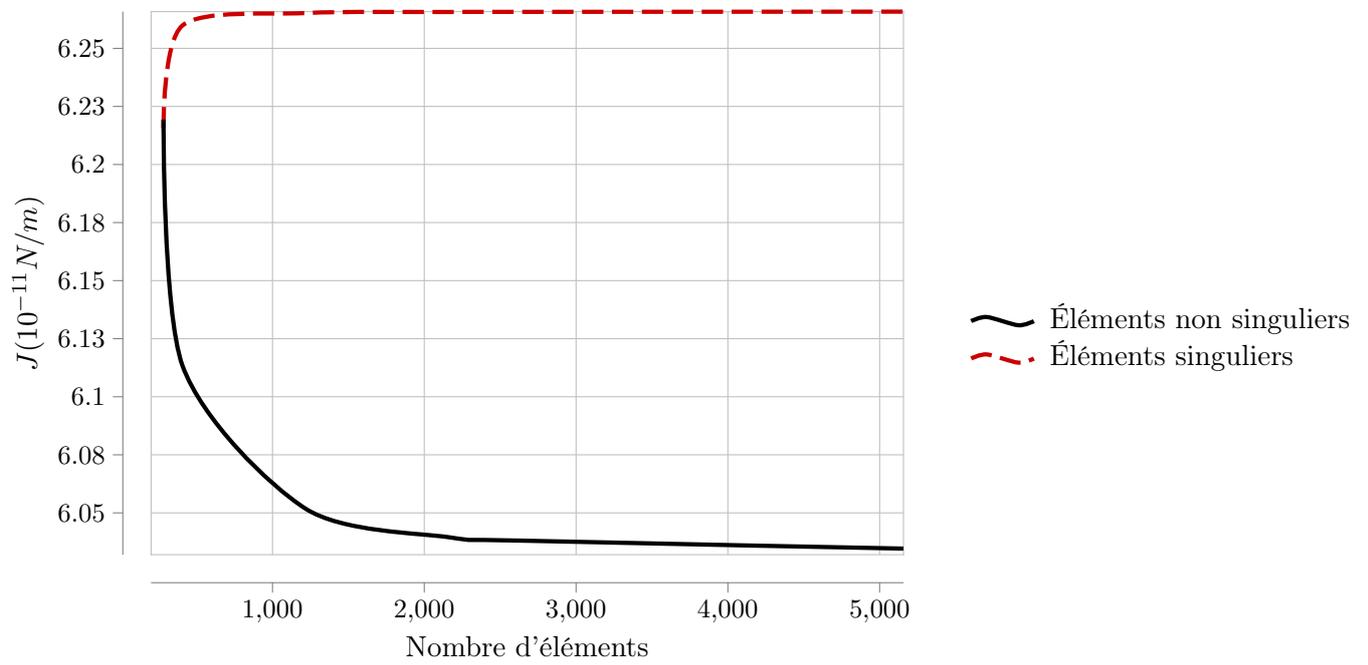
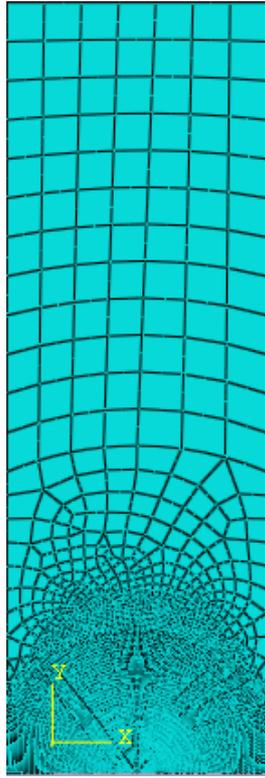


FIGURE B.5 – Maillage et étude de convergence $a = 0.5$

Bibliographie

- [1] Azzouz ACHEWEK. *Étude de la réparation des pipe endommagés par un patch en composite*. Mémoire Magister en génie mécanique, Université de Sidi bel Abbas, 2012.
- [2] Jean-Baptiste LEBLOND. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. LAVOISIER, 2003.
- [3] Thomas ELGUEDJ. *Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement*. Thèse de doctorat, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006.
- [4] Pierre-Olivier BOUCHARD. *Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multi-matériaux*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure des mines de paris, 2000.
- [5] Alan T. ZEHNDER Ph.D. *Lecture Notes on Fracture Mechanics*. Department of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, Ithaca, NY 14853, 2009.
- [6] Youcef DJEBLOUN. *Étude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites*. Mémoire de Magister, Université Mohamed Khider de Biskra, 2004.
- [7] Saverio FIORDALISI. *Modélisation tridimensionnelle de la fermeture induite par plasticité lors de la propagation d'une fissure de fatigue dans l'acier 304L*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique, 2014.
- [8] Nourredine AÏT HOCINE. *Approches globales de la mécanique de la rupture appliquée aux élastomères*. Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, 1996.
- [9] Pr.Hicheme FERDJANI. *Cours mécanique de la rupture fragile*. Université Blida 1, 2016.
- [10] Abderrahim ZEGHLOUL. *Cours concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture*. Université de Lorraine, 2016.

- [11] Lalonde Sébastien. *Modélisation de la propagation des fissures dans les engrenages par la méthode des éléments de frontières*. École de technologie supérieure université du Québec, 2008.
- [12] Wikipédia. Abaqus, 2015. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Abaqus>.
- [13] Dassault Systèmes. Abaqus unified fea, 2016. <http://www.3ds.com/fr/produits-et-services/simulia/produits/abaqus/>.
- [14] Dassault Systèmes. Abaqus 6.12 analysis user's manual volume 2 : Analysis, 2012. p 11.4.2-4.
- [15] H. M. WESTERGAARD. *Bearing pressure and cracks*. J. Appl. Mech., Trans ASME (2),A49, A-52, 1939.