

- Elie Azoulay - Jean Avignant - Guy Auliac -

# LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE

1<sup>re</sup> année • Tome 1



MIAS • MASS • SM

Cours + exos

Un cours pédagogique

Des exemples pour comprendre

220 exercices corrigés pour s'entraîner

Des résumés pour mémoriser ce qu'il faut savoir

3<sup>e</sup> édition de  
Mathématiques  
Deug Sciences 1

**EdiScience**

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE 1

### Logique élémentaire. Notion d'ensemble.

#### Opérations sur les ensembles

		1
A.	Logique .....	1
1.1	Règle du jeu .....	1
1.2	Propositions .....	1
1.3	Négation d'une proposition .....	1
1.4	Connecteurs logiques .....	2
1.5	Conjonction. Disjonction .....	2
1.6	Implication. Équivalence .....	3
B.	Ensembles. Opérations sur les ensembles .....	6
1.1	Ensemble .....	6
1.2	Appartenance .....	6
1.3	Détermination d'un ensemble .....	6
1.4	Égalité de deux ensembles .....	7
1.5	Inclusion .....	7
1.6	Visualisation des ensembles. Diagrammes .....	7
1.7	Opérations sur les ensembles .....	8
1.8	Propriétés des opérations sur les ensembles .....	10
1.9	Lois de De Morgan et généralisation .....	11
1.10	Différence de deux ensembles .....	11
1.11	Notion de recouvrement et de partition .....	12
1.12	Ensembles usuels en mathématiques .....	12
1.13	Produit d'ensembles .....	13
1.14	Relation. Graphe d'une relation .....	14
C.	Quantificateurs .....	14
1.1	Quantificateurs .....	14
1.2	Quantificateurs et négation .....	15
	Résumé .....	16
	Exercices .....	18
	Corrigés .....	20



CHAPITRE 2		
<b>Applications. Relations d'ordre et d'équivalence.</b>		
<b>Analyse combinatoire</b>		27
2.1	Lois de composition .....	27
2.2	Notion d'application.....	28
2.3	Notion de relation binaire .....	32
2.4	Relation d'équivalence .....	33
2.5	Équivalence compatible avec une loi de composition .....	34
2.6	Homomorphismes .....	35
2.7	Relation d'ordre .....	35
2.8	Ordre total. Ordre induit.....	36
2.9	Majorant. Minorant .....	36
2.10	Puissance d'un ensemble .....	37
2.11	Ensemble dénombrable.....	37
2.12	Dénombrément des différentes applications d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ .....	39
2.13	Applications : binôme de Newton .....	41
	<i>Résumé</i> .....	45
	<i>Exercices</i> .....	47
	<i>Corrigés</i> .....	49
CHAPITRE 3		
<b>Structures algébriques</b>		55
3.1	Groupe .....	55
3.2	Sous-groupe.....	57
3.3	Homomorphisme de groupes .....	59
3.4	Groupe ordonné .....	60
3.5	Anneau .....	61
3.6	Corps .....	63
	<i>Résumé</i> .....	64
	<i>Exercices</i> .....	65
	<i>Corrigés</i> .....	67
CHAPITRE 4		
<b>Construction de <math>\mathbb{R}</math>. Éléments de topologie</b>		75
A.	Construction de $\mathbb{R}$ .....	75
4.1	Axiomes des nombres réels.....	75

4.2	Axiome de Cantor .....	77
4.3	Unicité de $\mathbb{R}$ .....	77
4.4	Conséquences des axiomes .....	78
B.	Topologie de $\mathbb{R}$ .....	80
4.1	Voisinage d'un point .....	80
4.2	Ensemble ouvert .....	80
4.3	Topologie de $\mathbb{R}$ .....	81
4.4	Voisinage de $A \subset \mathbb{R}$ .....	82
4.5	Intérieur de $A$ .....	82
4.6	Adhérence .....	82
4.7	Point d'accumulation .....	82
4.8	Point isolé .....	83
4.9	Notion d'espace séparé .....	83
4.10	Base de voisinage de $x$ .....	83
4.11	Théorème de Bolzano-Weierstrass .....	84
4.12	La droite numérique achevée $\bar{\mathbb{R}}$ .....	84
	Résumé .....	85
	Exercices .....	86
	Corrigés .....	87

## CHAPITRE 5

**Suites numériques et applications**

	<b>Suites numériques et applications</b> .....	<b>93</b>
5.1	Rappels .....	93
5.2	Suites convergentes .....	94
5.3	Suites de limites infinie .....	99
5.4	Point d'accumulation. Valeur d'adhérence .....	102
5.5	Suite de Cauchy .....	103
5.6	Théorèmes fondamentaux sur les suites numériques .....	105
5.7	Utilisation des suites en topologie .....	106
5.8	Suites définies par une relation de récurrence .....	107
5.9	Application lipschitzienne .....	111
5.10	Application à la résolution de l'équation $f(x) = 0$ .....	111
	Résumé .....	118
	Exercices .....	122
	Corrigés .....	127

CHAPITRE 6		
<b>Arithmétique</b>		139
6.1	Introduction .....	139
6.2	Divisibilité, congruence, division euclidienne. Anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .....	139
6.3	Idéal sur $\mathbb{Z}$ . PGCD – Théorème de Bézout .....	142
6.4	Théorèmes fondamentaux sur la divisibilité .....	144
6.5	PPCM .....	144
6.6	Nombres premiers .....	145
6.7	Décomposition en facteurs premiers .....	147
6.8	Systèmes de numération. Système binaire .....	149
6.9	Notions sur les équations diophantiennes .....	150
6.10	Développement décimal périodique d'un rationnel .....	153
	<i>Résumé</i> .....	154
	<i>Exercices</i> .....	156
	<i>Corrigés</i> .....	157
CHAPITRE 7		
<b>Nombres complexes</b>		169
7.1	Définitions .....	169
7.2	Opérations sur les nombres complexes .....	170
7.3	Nombres réels. Nombres imaginaires purs. Notations algébriques et trigonométriques des nombres complexes .....	174
7.4	Formule de Moivre .....	176
7.5	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe .....	177
7.6	Résolution de l'équation du second degré .....	179
7.7	Transformations géométriques simples .....	180
7.8	$e^z$ pour $z$ complexe. Formules d'Euler .....	182
	<i>Résumé</i> .....	184
	<i>Exercices</i> .....	186
	<i>Corrigés</i> .....	190
CHAPITRE 8		
<b>Polynômes. Fractions rationnelles</b>		205
8.1	Définition .....	205
8.2	Addition des polynômes .....	206



8.3	Multiplication des polynômes .....	207
8.4	Multiplication par un scalaire .....	208
8.5	Polynôme dérivé .....	209
8.6	Formules de MacLaurin et de Taylor .....	210
8.7	Division des polynômes suivant les puissances décroissantes ou division euclidienne .....	212
8.8	Recherche du quotient et du reste .....	213
8.9	Division suivant les puissances croissantes .....	214
8.10	PGCD de polynômes .....	216
8.11	Division par $X - a$ .....	219
8.12	Polynômes et équations sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes .....	220
8.13	Théorème de d'Alembert .....	221
8.14	Résolution des équations algébriques .....	221
8.15	Transformée d'une équation .....	223
8.16	Factorisation d'un polynôme à coefficients réels .....	224
8.17	Relations entre coefficients et racines .....	225
8.18	Fractions rationnelles .....	226
<i>Résumé</i> .....		232
<i>Exercices</i> .....		235
<i>Corrigés</i> .....		241

## CHAPITRE 9

**Fonctions d'une variable réelle. Limites.****Continuité**

267

9.1	Limites .....	267
9.2	Relations entre limites de suites et limites de fonctions .....	269
9.3	Propriétés des limites .....	270
9.4	Fonctions équivalentes .....	272
9.5	Continuité .....	275
9.6	Propriétés des fonctions continues sur un intervalle .....	279
9.7	Fonction inverse ou réciproque .....	281
9.8	Continuité uniforme. Fonction lipschitzienne .....	282
<i>Résumé</i> .....		284
<i>Exercices</i> .....		285
<i>Corrigés</i> .....		286

CHAPITRE 10		
<b>Fonctions d'une variable réelle. Dérivée et différentielle</b>		295
10.1	Rappels .....	295
10.2	Relation liant les dérivées de deux fonctions réciproques ...	298
10.3	Fonctions dérivées successives. Formule de Leibniz .....	300
10.4	Fonction convexe .....	301
10.5	Plan d'étude d'une fonction .....	303
<i>Exercices</i> .....		304
<i>Corrigés</i> .....		304
CHAPITRE 11		
<b>Fonctions trigonométriques réciproques</b>		309
11.1	Introduction .....	309
11.2	Fonction Arcsin .....	309
11.3	Fonction Arccos .....	311
11.4	Fonction Arctan .....	312
<i>Résumé</i> .....		314
<i>Exercices</i> .....		315
<i>Corrigés</i> .....		317
CHAPITRE 12		
<b>Primitives. Fonctions exponentielles et logarithmiques.</b>		
<b>Fonctions puissances</b>		329
12.1	Primitives .....	329
12.2	Logarithmes népériens et exponentielles .....	330
12.3	Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque .....	331
12.4	Fonctions puissances .....	333
12.5	Fonctions de la forme $u^v$ .....	334
<i>Exercices</i> .....		335
<i>Corrigés</i> .....		337
CHAPITRE 13		
<b>Fonctions hyperboliques directes et inverses</b>		347
13.1	Fonctions hyperboliques directes .....	347
13.2	Étude des fonctions hyperboliques .....	348
13.3	Relations entre les fonctions hyperboliques .....	352

13.4	Formules de duplication.....	353
13.5	Expression des fonctions hyperboliques de $a$ en fonction de $\operatorname{th} \frac{a}{2} = t$ .....	354
13.6	Fonctions hyperboliques inverses ou réciproques.....	355
	<i>Résumé</i> .....	359
	<i>Exercices</i> .....	362
	<i>Corrigés</i> .....	363

CHAPITRE 14

**Formules de Taylor. Développements limités. Applications** 371

14.1	Théorème de Rolle.....	371
14.2	Théorème des accroissements finis.....	372
14.3	Applications aux variations de fonctions.....	374
14.4	Formules de Taylor.....	375
14.5	Formule de MacLaurin.....	378
14.6	Notions sur les développements limités.....	379
14.7	Principaux développements limités.....	383
14.8	Applications à la recherche des limites.....	387
14.9	Applications à l'étude des courbes d'équation $y = f(x)$ .....	389
14.10	Marche à suivre pour l'étude d'une fonction $x \mapsto f(x)$ et construction de son graphe .....	393
	<i>Résumé</i> .....	394
	<i>Exercices</i> .....	397
	<i>Corrigés</i> .....	402
	<b>Brèves notices sur les mathématiciens</b> .....	425
	<b>Index</b> .....	427



**Elie AZOULAY – Jean AVIGNANT – Guy AULIAC**

# LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE

1<sup>re</sup> année • Tome 1

**MIAS • MASS • SM**

Bien connu des étudiants comme des enseignants, ce cours en quatre tomes est destiné aux étudiants des deux premières années de licence scientifique. Les deux premiers volumes recouvrent l'enseignement généralement traité en première année, les deux derniers volumes, ceux de la deuxième année. Cette nouvelle édition revue et corrigée recouvre également l'essentiel du programme des classes préparatoires.

La compréhension du cours est facilitée par de nombreux exemples. Afin d'aider l'étudiant à bien assimiler les notions, de nombreux exercices et problèmes résolus sont proposés à la fin de chaque chapitre. Par ailleurs, un certain nombre de problèmes récapitulatifs assurent un approfondissement des concepts.

Cet ouvrage, qui a fait ses preuves, est le meilleur garant de réussite aux examens et aux concours.

Cours

Exos

Méthodes

Annales

Aide-mémoire

3<sup>e</sup> édition



9 782100 495405

ISBN 2 10 049540 2

[www.ediscience.net](http://www.ediscience.net)

