

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ DE BLIDA 1**

**Faculté des Sciences  
Département de Mathématique**



# **Mémoire**

En vue de l'obtention du diplôme de

**MASTER EN MATHÉMATIQUES**

**Spécialité : Recherche Opérationnelle**

Thème

**ETUDE THEORIQUE ET ALGORITHEMIQUE SUR LA  
RECHERCHE DE NOYAUX DANS LES DIGRAPHERS ET DE  
NOYAUX PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES DANS  
CERTAINES CLASSES DE DIGRAPHERS (m-COLORES)**

**Mr Zerrouki Djamel**

**Mr Hadj Sadok Ibrahim**

Devant le jury composé de :

<b>Mr CHELLALI Mustapha</b>	<b>Professeur, Université de Blida 1</b>	<b>Président</b>
<b>Mme RAMOUL Amina</b>	<b>M.C.B, Université de Blida 1</b>	<b>Examinatrice</b>
<b>Mr OULDRABAH Lyes</b>	<b>M.A. A. B. F de Médéa</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr BLIDIA Mostafa</b>	<b>Par Professeur, Université de Blida 1</b>	<b>Promoteur</b>

Année universitaire 2018/2019

## RESUME

Dans ce mémoire, nous étudions le problème d'existence de noyaux dans les digraphes et de noyaux par chemins monochromatiques dans les digraphes m-colorés.

Dans un premier temps, nous allons citer quelques résultats essentiels qui conduisent à la détermination du noyau dans certaines classes de digraphes, nous allons établir aussi des algorithmes polynomiaux de recherche de noyaux dans les digraphes tel que tout circuit possède un arc symétrique et les digraphes tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques.

Dans un second temps, nous étudions la notion de noyaux par chemins monochromatiques dans les digraphes m-colorés, nous montrons l'existence de noyaux par chemins monochromatiques dans certaines classes de digraphes m-colorés comme les arbres orientés et les digraphes transitifs. Nous donnons un algorithme amélioré de recherche de la matrice du digraphe obtenu à partir du digraphe initial par la fermeture transitive par chemins monochromatiques. Puis nous fournissons un algorithme polynomial qui détermine un noyau par chemins monochromatiques dans les digraphes m-colorés sans circuit.

Enfin, nous élaborons un logiciel qui récapitule nos travaux sur la recherche de noyaux les digraphes et de noyaux par chemins monochromatiques dans les digraphes m-colorés étudiés.

## ملخص

في هذه المذكرة، سوف ندرس مشكلة وجود النواة في الرسوم البيانية الموجهة والنواة عن طريق مسارات أحادية اللون في الرسوم البيانية الموجهة  $m$ -ملون.

في البداية، سنذكر بعض النتائج الأساسية التي تؤدي إلى تحديد النواة في فئات معينة من الرسوم البيانية الموجهة، سنقوم أيضا بإنشاء خوارزميات متعددة الحدود للبحث عن النواة في الرسوم البيانية الموجهة ذو خاصية كل دائرة لديها قوس متماثل والرسوم البيانية الموجهة ذو خاصية كل دائرة فردية لديها قوسان متماثلان.

في الخطوة الموالية، سندرس مفهوم النواة عن طريق المسارات أحادية اللون في الرسم البياني الموجه  $m$  - ملون، و سنبرهن أيضا وجود النواة عن طريق المسارات أحادية اللون في بعض فئات الرسوم البيانية الموجهة مثل الأشجار الموجهة والرسوم البيانية المتعدية . سوف نعطي خوارزمية محسنة للبحث عن مصفوفة الرسم البياني الموجه التي تم الحصول عليها من الرسم البياني الموجه الأولي من خلال الإغلاق المتعدي بمسارات أحادية اللون، ثم سنوفر خوارزمية متعددة الحدود لتحديد النواة عن طريق المسارات أحادية اللون في الرسم البياني الموجه  $m$  - ملون دون دائرة.

في الأخير سنقوم بتطوير برنامج يلخص عملنا على البحث عن النواة والنواة عن طريق مسارات أحادية اللون في الرسوم البيانية الموجهة.

# ABSTRACT

In this thesis, we study the problem of existence of kernels in digraphs and kernels by monochromatic paths in digraphs  $m$ -colored.

At first, we will cite some essential results that lead to the determination of the kernel in some classes of digraphs. We will also establish polynomial algorithms for determination of kernels in digraphs such that any circuit has a symmetric arc and digraphs such that any odd circuit has two symmetrical arcs.

In a second step, we will study the notion of kernels by monochromatic paths in the  $m$ -colored digraphs; we show the existence of kernels by monochromatic paths in some classes of digraphs such as oriented trees and transitive digraphs. We give an improved algorithm for finding the matrix of the digraphs obtained from the initial digraphs by the transitive closure by monochromatic paths. Then we give a polynomial algorithm to determine a kernel by monochromatic paths in  $m$ -colored digraphs without circuit.

Finally, we develop a software that summarizes our work on the search for kernels in digraphs and kernels by monochromatic paths in studied digraphs  $m$ -colored.

# Remerciements

Qu'il nous soit permis de remercier dieu pour nous avoir donné la patience et le courage nécessaires, pour finaliser ce présent travail.

Nous remercions vivement Mr **Chellali Mustapha**, Professeur au département de Mathématiques de l'U.S.D de Blida, pour l'intérêt porté à ce travail et pour avoir accepté de présider le jury d'examinations.

Nos remerciements vont aussi à Mr **Ouldrabah Lyes**, Maître assistant à l'U.Y.F de Médéa et à Mme **Ramoul Amina**, Maître de Conférences à l'U.S.D de Blida, pour avoir acceptés d'être membres de ce jury et vouloir examiner notre travail de recherche.

Nous tenons également, à remercier très vivement la personne qui a su nous motiver à entreprendre cette recherche et nous aider de ses précieux conseils ; il nous importe en effet d'exprimer tous nos gratitude et nos reconnaissances à Monsieur **Mostafa Blidia**, notre promoteur et Professeur au département de mathématiques de l'U.S.D de Blida. Ses directives, son ouverture d'esprit, son soutien scientifique et son enthousiasme pour notre projet de recherche nous ont énormément aidés pour finaliser ce travail.

Nous tenons à remercier, aussi chaleureusement tous les enseignants du département de mathématiques et à leur tête monsieur **Omar Tami**, pour leur dévouement durant toutes nos études.

Une thèse est une entreprise de longue haleine, souvent passionnante mais parfois aussi source de moments de découragement. C'est dans de tels instants que l'on apprécie d'autant plus le soutien de sa famille et de ses amis. Nous voudrions leur dire ici : Merci à tous.

# Table des matières

## **RESUME**

### **Remerciements**

### **Table des matières**

### **Table d'illustrations**

### **Introduction**

10

## **NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHERS**

13

### Introduction

13

### Définitions et notations

13

1. Graphes et graphes orientés

13

2. Sous-graphe et graphe partiel

15

3. Chemins et circuit

15

4. Graphe particulier

16

5. Connexité et forte connexité

17

6. Mise en ordre d'un graphe sans circuit

17

7. Distance, écartement, diamètre et rayon

18

8. Ensemble stable, ensemble absorbant

18

9. Représentations non graphiques d'un graphe

19

9.1. Matrice d'adjacence

19

9.2. Matrice d'incidence

19

9.3. Liste des successeurs

19

### Complexité d'algorithme

20

## **NOYAUX DANS LES DIGRAPHERS**

22

### Introduction

22

### Définition 1

22

### Définition 2

23

### Proposition 1

24

### Exemple 1 : Théorie des jeux

25

### Exemple 2 : Problème de décision

25

### I. Digraphes sans circuits et digraphes tels que tout circuit possède un arc symétrique

26

### II. Digraphes sans circuits impairs, digraphes tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques

31

### Etude algorithmique

38

a) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes sans circuit

38

b) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes sans circuit impair

40

c) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes tels que tout circuit possède un arc symétrique	42
d) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques	44
<b>NOYAU PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES DANS DIGRAPHERS <i>m</i>-COLORÉ</b>	46
Introduction	46
Définition 1	46
Définition 2	46
Quelques résultats	48
Représentation matricielle d'un digraphe <i>m</i> -coloré	55
Recherche des chemins monochromatiques	56
Fermeture par chemin monochromatique	58
Détermination d'un noyau par chemins monochromatiques pour les tournois	59
Quelques études établis :	62
Algorithme de recherche de noyau par chemins monochromatiques pour les digraphes <i>m</i> -coloré sans circuit	68
<b>REPRESENTATION DE NGRAPHE1.0</b>	70
Introduction	70
Langage de programmation utilisé	70
1. Description du langage C++	70
2. Code Blocks (IDE)	70
Interface graphique	71
Description du logiciel NGRAPHE1.0	71
1. Barre menu	71
2. Espace de travail	73
3. Zone de dessin	77
<b>Conclusion</b>	79
<b>Référence</b>	80

# Table d'illustrations

FIGURE 1.1 : GRAPHE ORIENTE G	13
FIGURE 2.1 : DIGRAPHE SANS NOYAU	21
FIGURE 2.2 : DIGRAPHE AVEC UN NOYAU	21
FIGURE 2.3 : UN DIGRAPHE AVEC DEUX FONCTIONS DE GRUNDY	22
FIGURE 2.4 : DIGRAPHE SANS FONCTION DE GRUNDY	22
FIGURE 2.5 : UN DIGRAPHE QUI POSSEDE UN NOYAU MAIS QUI N'ADMET PAS DE FONCTION DE GRUNDY	23
FIGURE 2.6 : LA REPRESENTATION GRAPHIQUE DU PROBLEME	25
FIGURE 2.7 : REPRESENTATION DE NOYAU A	28
FIGURE 2.8 : LA MISE EN ORDRE DES SOMMETS DU DIGRAPHE	29
FIGURE 3.1 : UN DIGRAPHE 3-COLORE AVEC UN NOYAU $\{x_1, x_3\}$	46
FIGURE 3.2 : UN DIGRAPHE 3-COLORE QUI N'ADMET PAS DE NOYAU PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES	46
FIGURE 3.3 : LA FERMETURE PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES POUR LE DIGRAPHE DE LA FIGURE 3.1	47
FIGURE 3.4 : CHEMIN MONOCHROMATIQUE RELIANT z A x	50
FIGURE 3.5 : TOURNOI 5-COLORE SANS $C_3$ QUI N'ADMET PAS DE NOYAU PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES	51
FIGURE 3.6 : TOURNOI 4-COLORE SANS $C_3$ QUI N'ADMET PAS DE NOYAU PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES	52
FIGURE 3.7 : DIGRAPHE 3-COLORE D'ORDRE 5	54
FIGURE 3.8 : DIGRAPHE 3-COLORE D'ORDRE 6	62
FIGURE 3.9 : DIGRAPHE SYMETRIQUE M-COLORE	63
FIGURE 3.10 : DIGRAPHE 3-COLORE SANS CIRCUIT IMPAIR	64
FIGURE 3.11 : DIGRAPHE 3-COLORE ET DIGRAPHE 4-COLORE TELS QUE TOUT CIRCUIT POSSEDE UN ARC SYMETRIQUE.	65
FIGURE 4.1 : PRESENTATION DE L'INTERFACE	70
FIGURE 4.2 : PRESENTATION DE FILE MENU	71

<b>FIGURE 4.3 : PRESENTATION DE BOUTON ABOUT</b>	<b>71</b>
<b>FIGURE 4.4: PRESENTATION DE BOUTON « HOW TO USE »</b>	<b>72</b>
<b>FIGURE 4.5 : PRESENTATION DE BOUTON ENTRER LE NOMBRE DE SOMMETS</b>	<b>72</b>
<b>FIGURE 4.6 : PRESENTATION DES BOUTONS D'ENTRER LES FICHIERS</b>	<b>73</b>
<b>FIGURE 4.7 : LES FICHIERS</b>	<b>73</b>
<b>FIGURE 4.8 : DIGRAPHE 4-COLORE</b>	<b>73</b>
<b>FIGURE 4.9 : L'INTERIEUR DES FICHIERS</b>	<b>74</b>
<b>FIGURE 4.10 : PRESENTATION DE BOUTON INSERE LES SUCCESSEURS</b>	<b>75</b>
<b>FIGURE 4.11 : PRESENTATION DE BOUTON INSERE LES SUCCESSEURS</b>	<b>75</b>
<b>FIGURE 4.12 : PRESENTATION DES BOUTONS DE LA RECHERCHE D'UN NOYAU</b>	<b>75</b>
<b>FIGURE 4.13 : PRESENTATION DE DIGRAPHE DE LA FIGURE 4.8 DANS LA ZONE DE DESSIN</b>	<b>76</b>
<b>FIGURE 4.14 : NOYAU DE DIGRAPHE DE LA FIGURE 4.8</b>	<b>77</b>

# Introduction

Un mathématicien confronté à un problème de la vie réelle s'empresse de traduire celui-ci en un problème mathématique, qu'il peut alors tenter de résoudre. Dans sa boîte à outils mathématiques, les graphes peuvent s'avérer fort utiles. Intuitivement, un graphe est un ensemble de points, dont certaines paires sont reliées. Plus formellement, un graphe est défini par deux ensembles, son ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes, une arête étant une paire de sommets reliés. La théorie des graphes introduit ensuite de nombreuses classes de graphes, des familles de graphes qui vérifient certaines propriétés. Les graphes permettent de modéliser de nombreux problèmes dans le domaine des réseaux, par exemple un réseau de transport (un plan de métro est un graphe, où les sommets représentent les stations), un réseau social (chaque sommet représente une personne et une arête relie deux sommets si les personnes correspondantes se connaissent) ou plus simplement un réseau informatique ; mais également des problèmes de chimie ou de génétique. Ces nombreuses applications font de la théorie des graphes un sujet de recherche toujours prolifique.

Les origines de la théorie des graphes, remontent au dix-septième siècle. En effet, le problème des ponts de Königsberg a été introduit en 1735 par Léonard Euler, considéré comme le fondateur de la théorie des graphes. La ville de Königsberg possède sept ponts enjambant la rivière Pregel et Euler s'interroge sur l'existence d'une promenade lui permettant de passer par tous les ponts de la ville une et une seule fois, et de revenir à son point de départ. Euler modélise ce problème par un graphe : un sommet est associé à chaque parcelle de terre délimitée par la rivière et une arête est associée à chaque pont les reliant. Ainsi, une promenade passant par chacun des ponts une et une seule fois est alors un cycle eulérien dans ce graphe.

Parmi les concepts étudiés en théorie des graphes, celui du noyau qui a été introduit pour la première fois, en 1944 par Von Neumann et O. Morgenstern, comme une solution d'un jeu coopératif à  $n$  joueurs, pour le graphe orienté dont les sommets représentent les résultats possibles des décisions et les arcs les préférences efficaces. En effet, ils ont démontré qu'un graphe orienté sans circuits admet un noyau. Le noyau est un sous-ensemble de sommets stable (ses sommets sont non adjacents deux à deux) et absorbant

(tout sommet hors de ce sous ensemble est l'origine d'au moins un arc ayant son extrémité terminale dans le noyau).

Le fait qu'un graphe orienté ne possède pas toujours un noyau a amené beaucoup d'auteurs à s'intéresser à l'existence de noyaux dans un graphe orienté donné. Plusieurs travaux ont été réalisés notamment par C. Berge, M. Blidia, P. Duchet, H. Jacob, H. Meyniel, F. Maffray, V. Neumann Laura et H. Galeana Sánchez.

Les problèmes importants sur les noyaux sont du type, structure des graphes orientés qui admettent un noyau, opérations sur les graphes orientés noyaux-parfaits, algorithmes efficaces pour trouver un noyau et détermination d'orientation dans un graphe non orienté au départ pour qu'il admette un noyau.

Un concept plus général que celui de noyaux dans les graphes orientés est celui de noyaux par chemins monochromatiques dans les graphes orientés  $m$ -colorés introduit pour la première fois par Sands, Sauer et Woodrow, d'autres travaux ont été réalisés sur ce concept par S. Minggang et H. Galeana-Sanchez.

Un autre concept plus générale que celui de noyaux dans les graphes orientés est celui de  $(k, l)$  – noyaux dans les graphes orientés, avec  $k \geq 2$  et  $l \geq 1$  qui a été introduit par Kraśnik.

Ce mémoire comporte quatre chapitres qui sont développés comme suit :

Nous introduisons dans le premier chapitre les définitions de base ainsi que les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes utilisées dans ce manuscrit. A la fin du chapitre, nous parlons de la complexité algorithmique et nous laissons les notions caractéristiques de chaque chapitre à définir dans le chapitre lui-même.

Le deuxième chapitre comportera une étude théorique sur le noyau dans les graphes orientés, et une étude algorithmique de certains résultats établis

Dans le troisième chapitre, nous rappelons en premier la notion noyau par chemins monochromatiques dans les graphes orientés  $m$ -coloré. Nous citons quelques résultats principaux qui concernent cette notion. Nous donnons un algorithme amélioré [13] de recherche de la matrice du graphe orienté obtenu à partir du graphe orienté initial par la fermeture transitive par chemins monochromatiques. Puis nous fournissons un algorithme polynomial qui détermine un noyau par chemin monochromatique dans les

digraphes  $m$ -coloré sans circuit. A la fin de ce chapitre nous donnons de nouveaux résultats sur cette notion dans quelques classes de graphe.

Le chapitre quatre est dédié à la présentation de logiciel qui nous permet de déterminer le noyau et le noyau par chemins monochromatiques dans certains classes de graphes orientés.

Enfin, nous terminons par une conclusion situant d'une part notre contribution et d'autre part les différents axes de recherches futures dans le domaine des noyaux dans les graphes orientés.

# CHAPITRE I

## NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHERS

### Introduction :

Nous introduisons dans ce chapitre les notions usuelles dans le domaine de la théorie des graphes, ainsi que les définitions de base utilisées tout au long de ce mémoire. Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, on reporte le lecteur au livre de C. Berge [1].

### Définitions et notations :

#### 1. Graphes et graphes orientés :

**Un graphe non orienté**  $G$  est défini par un couple  $(X, E)$  où  $X$  est un ensemble fini non vide, appelé « ensemble des sommets » de  $G$ , et  $E$  est un ensemble de paires de sommets distincts, appelé « ensemble des arêtes » de  $G$ . Le cardinal de  $X$  appelé ordre de  $G$  est noté  $n = |X(G)|$  et le cardinal de  $E$  appelé taille de  $G$  est noté  $m = |E(G)|$ .

On appelle **graphe orienté**, tout graphe dont les arêtes sont orientées, on les appelle des arcs, l'ensemble des arcs sera noté par  $U$ .

**Un arc**  $u$  de l'ensemble  $U$  est défini par une paire ordonnée de sommets. Lorsque  $u = (x_i, x_j)$ , on dit que l'arc  $u$  va de  $x_i$  vers  $x_j$ . On dit aussi que  $x_i$  est l'**extrémité initiale** noté  $I(u)$  et  $x_j$  l'**extrémité terminale** noté  $T(u)$  de  $u$ . Un arc de la forme  $u = (x_i, x_i)$ , est appelé **une boucle**.

Un arc  $u = (x_i, x_j) \in U$  est dit **symétrique** si  $u^{-1} = (x_j, x_i) \in U$ .

Les graphes utilisés sont des **graphes simples** (orientés ou non), sans boucles et sans arêtes multiples.

**Un  $p$ -graphe orienté** est un graphe dans lequel il n'existe jamais plus de  $p$  arcs de la forme  $(x_i, x_j)$  entre les deux sommets  $x_i$  et  $x_j$ .

Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés entre eux par un arc (ou une arête).

Un arc est **incident** à un sommet si ce sommet est extrémité de cet arc (ou une arête).

Un sommet  $x_i$  est **successeur** de  $x_j$  si l'arc  $(x_j, x_i) \in U$ , et il est **prédécesseur** de  $x_j$  si l'arc  $(x_i, x_j) \in U$ . L'ensemble des sommets successeurs de  $x_i$  est noté par  $\Gamma^+(x_i)$ , et celui des **sommets prédécesseurs** est noté par  $\Gamma^-(x_i)$ .

L'ensemble des **sommets voisins** (ou des **sommets adjacents**) de  $x_i$  se note  $\Gamma(x_i) = \Gamma^-(x_i) \cup \Gamma^+(x_i)$ .

Si  $\Gamma(x_i) = \emptyset$  (ensemble vide),  $x_i$  est un **sommet isolé**.

Soit  $x_i$  un sommet d'un graphe orienté. On note  $d^+(x_i)$  le **degré extérieur** du sommet  $x_i$ , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant  $x_i$  comme extrémité initiale. On note  $d^-(x_i)$  le **degré intérieur** du sommet  $x_i$ , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant  $x_i$  comme extrémité finale. On définit le **degré** de  $x_i$  par  $d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$ .

**Un puits** est un sommet qui est successeur de tous ses voisins, c.-à-d. qui reçoit tout sommet qui lui est adjacent.

**Une source** est un sommet qui est prédécesseur de tout sommet qui lui est adjacent.

Au vu de ces définitions, il est naturel de représenter un graphe par un ensemble de points représentant les sommets du graphe et un ensemble de segments reliant les sommets, représentant les arcs. La Figure 1.1 illustre un graphe orienté  $G = (X, U)$  d'ordre 5 avec  $X(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  et  $U(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ .

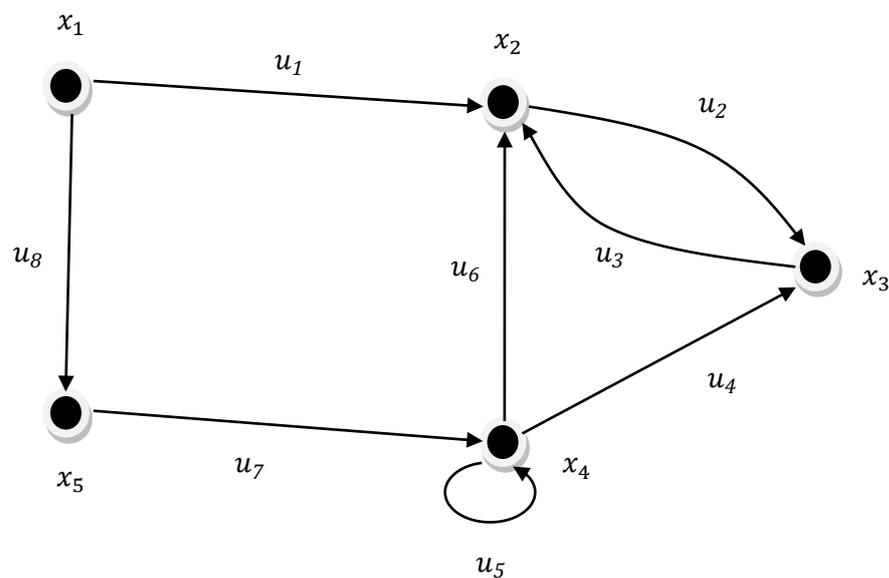


Figure 1.1 : graphe orienté G

## 2. Sous-graphe et graphe partiel :

Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté avec  $X$  l'ensemble des sommets et  $U$  l'ensemble des arcs.

**Le sous-graphe orienté** de  $G$  engendré par  $A \subseteq X$  est le graphe orienté  $G[A]$  qui a pour ensemble de sommets l'ensemble  $A$  et dont les arcs sont ceux de  $U$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ .

Le graphe orienté  $G' = (X, U')$  est un **graphe orienté partiel** de  $G$ , si  $U'$  est inclus dans  $U$ . Autrement dit, on obtient  $G'$  en enlevant un ou plusieurs arcs au graphe orienté  $G$ .

**Le sous-graphe partiel orienté** de  $G$  est un sous-graphe orienté du graphe orienté partiel de  $G$ .

Un **sous-graphe induit** est un sous-graphe en restreignant le graphe à un sous ensemble de sommets.

Tout graphe orienté  $G$  est un sous-graphe induit orienté (resp. graphe orienté partiel) de lui-même.

## 3. Chemins et circuit :

**Un chemin** (resp. **chaîne**) dans un graphe orienté (resp. non orienté)  $G$  est une séquence alternée de sommets et d'arcs (resp. arêtes)  $x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, \dots, x_{i-1}, u_{i-1}, x_i, \dots, x_{k-1}, u_{k-1}, x_k$  telle que  $u_i = (x_i, x_{i+1})$  pour  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ .

**Un chemin** (resp. **chaîne**) est dit **simple** si toutes ses arcs (resp. arêtes) sont distinctes, et il est dit **élémentaire** si tous ses sommets sont distincts.

**Un circuit** (resp. **cycle**) dans un graphe orienté (resp. non orienté)  $G$  est une séquence alternée de sommets et d'arcs (resp. arêtes)  $x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, \dots, x_{i-1}, u_{i-1}, x_i, \dots, x_k, u_k, x_k$  telle que  $u_i = (x_i, x_{i+1})$  et  $x_0 = x_{k+1}$  pour  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ .

**Un circuit** (resp. **cycle**) est dit **simple** si tous ses arcs (resp. arêtes) sont distincts, et il est dit **élémentaire** si tous ses sommets sont distincts.

Le nombre d'arcs (resp. arêtes) d'un chemin (resp. chaîne) est la longueur du chemin (resp. chaîne).

**Une corde** d'un circuit  $C = (x_0, x_1, \dots, x_p, x_0)$  est un arc  $(x_i, x_j)$  dont les extrémités n'appartiennent pas au même arc du circuit  $C$ . Une corde  $(x_i, x_j)$  d'un circuit est dite **courte** si  $j = i + 2$  ou  $i = k$  et  $j = 1$ .

**Un pôle** est un sommet du circuit qui est extrémité terminale d'une corde. **Deux pôles consécutifs** sont deux extrémités terminales de la forme  $x_i, x_{i+1}$  de deux cordes dans un circuit.

Si  $C(x, y)$  représente un chemin de  $x$  à  $y$ ,  $C(x, y) \& C(y, z)$  est le chemin de  $x$  à  $z$  obtenu par concaténation des deux chemins  $C(x, y)$  et  $C(y, z)$  avec  $C(x, y) \cap C(y, z) = \{y\}$ . Si  $z$  est sur le chemin élémentaire  $C(x, y)$ , alors  $C(x, y) \setminus C(z, y)$  est un chemin élémentaire de  $x$  à  $z$ , (i.e. le chemin de  $x$  à  $y$  auquel on enlève le chemin  $C(z, y)$ ).

Un chemin  $C(x_0, x_p)$  d'un graphe orienté  $G = (X, U)$  est **minimal** si  $(x_i, x_j) \notin U$  pour tout  $i, j$  tel que  $1 \leq i + 1 < j \leq p$ .

#### 4. Graphes particuliers :

Un graphe orienté  $G = (X, U)$  est **symétrique** si tous ses arcs sont symétriques.

Un graphe orienté  $G = (X, U)$  est **antisymétrique** si  $(x, y) \in U$  alors  $(y, x) \notin U$  ( $\forall x, y \in X$ ).

Un graphe orienté  $G = (X, U)$  est **transitif** si  $(x, y) \in U$  et  $(y, z) \in U$  alors  $(x, z) \in U$  ( $\forall x, y, z \in X$ ).

Un graphe orienté est dit **complet** si tous ses sommets sont reliés par un arc deux à deux.

**Une clique** est un graphe orienté symétrique complet.

**Un tournoi** est un graphe orienté antisymétrique complet.

Un graphe orienté simple  $G = (X, U)$  est dit **biparti** si l'ensemble  $X$  peut être partitionné en deux sous-ensembles  $X_1$  et  $X_2$  de sorte que les sommets d'un même sous ensemble soient non adjacents.

**Un graphe biparti est dit complet** si tout sommet de  $X_1$  sont adjacent à tout sommet de  $X_2$ . Un tel graphe est noté  $K_{|X_1|, |X_2|}$ .

## 5. Connexité et forte connexité :

Pour un graphe non orienté la relation  $x\mathcal{R}y$  définie par : « il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$  » est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les **composantes connexes** du graphe. Un graphe est dit **connexe** s'il contient une seule composante connexe.

On appelle **graphe réduit**  $G_r$  le quotient du graphe orienté  $G$  par la relation de forte connexité  $G_r = G/\mathcal{R}$ , les sommets de  $G_r$  sont donc les composantes fortement connexes et deux composantes fortement connexes  $C_i$  et  $C_j$  sont reliées par un arc de  $C_i$  vers  $C_j$  si et seulement s'il existe au moins un arc d'extrémité initiale d'un sommet de  $C_i$  et d'extrémité terminale d'un sommet de  $C_j$ . Le graphe  $G_r$  est sans circuit.

Pour un graphe orienté, la relation  $x\mathcal{R}y$  définie par : « il existe un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x$  » est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les **composantes fortement connexes** du graphe orienté. Un graphe orienté est **fortement connexe** s'il est réduit à une seule composante fortement connexe.

**Une composante terminale** d'un graphe orienté est une composante fortement connexe ne contenant pas de sommets extrémités initiales d'un arc sortant de celle-ci vers les autres composantes fortement connexes, autrement dit c'est un sommet terminal du graphe orienté réduit (graphe orienté des composantes fortement connexes).

## 6. Mise en ordre d'un graphe sans circuit :

Soit un graphe orienté  $G = (X, U)$  sans circuit.

Ordonner un graphe orienté revient à disposer dans un certain ordre ses sommets, tel que les arcs soient dans le même sens. On définit pour cela les différents niveaux des sommets du graphe orienté. Alors la mise en ordre d'un graphe orienté sans circuit est la détermination des niveaux  $N_0, N_1, N_2, \dots, N_k$  qui forment une partition de  $X$ .

On construit les sous-ensembles  $N_0, N_1, N_2, \dots, N_k$  par le procédé suivant :

$$N_0 = \{x \in X / \Gamma^-(x) = \emptyset\}$$

$$N_1 = \{x \in X - N_0 / \Gamma^-(x) \subset N_0\}$$

.

$$N_k = \{x \in X - \cup_{i=0}^{k-1} N_i / \Gamma^-(x) \subset \cup_{i=0}^{k-1} N_i\}$$

Ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les sommets i.e  $N_k \neq \emptyset$  et  $N_{k+1} = \emptyset$ .

$(x_i, x_j)$  est un arc avec  $x_i \in N_i$  et  $x_j \in N_j$  si et seulement si  $i < j$ .

## 7. Distance, écartement, diamètre et rayon :

Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté connexe et  $x, y$  deux sommets tel que  $x, y \in X$ .

La **distance** entre  $x$  et  $y$ , noté  $d(x, y)$ , est la plus petite longueur d'un chemin reliant  $x$  à  $y$ .

Si le chemin entre  $x$  et  $y$  n'existe pas, on prendra  $d(x, y) = +\infty$ .

Soit  $A \subset X$  et  $x$  un sommet de  $X$ . On définit  $d(x, A) = \min_{y \in A} d(x, y)$ .

L'**écartement** d'un sommet  $x$  est le nombre  $e(x) = \max_{y \in X} d(x, y)$  avec  $y \neq x$ .

L'**anti écartement** d'un sommet  $x$  est le nombre  $e^*(x) = \max_{y \in X} d(y, x)$  avec  $y \neq x$ .

Le **diamètre** de  $G$  est  $diam(G) = \max_{x \in X} e(x)$ .

Un **centre** (resp. **anti-centre**) est un sommet d'écartement (resp. anti-écartement) minimum.

Le **rayon**  $\rho(G)$  (resp. l'**anti-rayon**  $\rho^*(G)$ ) de  $G$  est l'écartement (resp. l'anti-écartement) d'un centre (resp. anti-centre) de  $G$ .

## 8. Ensemble stable, ensemble absorbant :

Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté.

Le sous-ensemble de sommets  $S \subseteq X$  est dit un **stable** ou indépendant si  $\Gamma^-(S) \cap S = \emptyset$ , autrement dit, les sommets de  $S$  ne sont pas adjacents deux à deux. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble stable maximal est le nombre de stabilité inférieur noté  $i(G)$  (resp. le nombre de stabilité supérieur noté  $\beta(G)$ ).

Le sous-ensemble de sommets  $A \subseteq X$  est dit un **absorbant** si  $\Gamma^-(A) \cup A = X$ , autrement dit tout sommet  $x$  qui n'est pas dans  $A$ , possède au moins un successeur dans  $A$ .

## 9. Représentations non graphiques d'un graphe :

Compte tenu de l'essor des graphes orientés en informatique, il est naturel de s'intéresser aux différentes manières de les représenter. Différents modes de représentation peuvent être envisagés suivant la nature des traitements que l'on souhaite appliquer aux graphes orientés considérés.

### 9.1. Matrice d'adjacence :

Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$ .

**La matrice d'adjacence** de  $G$  est la matrice carrée  $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1..n]^2}$  définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} k & \text{si il y a } k \text{ arcs (arête) allant de } i \text{ à } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si le graphe n'est pas orienté, la matrice est symétrique.

### 9.2. Matrice d'incidence :

**La matrice d'incidence** d'un graphe orienté  $G = (X, U)$  est une matrice à coefficients dans  $\{-1, 0, 1\}$  indexée par l'ensemble  $X \times U$  tel que pour  $(i, j) \in X \times U$  on a :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } I(u_j) = x_i \\ -1 & \text{si } T(u_j) = x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 9.3. Liste des successeurs :

Soit le graphe orienté  $G = (X, U)$  d'ordre  $n$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$ , la représentation par **listes de successeurs** de  $G$  consiste en un tableau de  $n$  listes, une pour chaque sommet de  $X$ . Pour chaque sommet  $x_i \in X$ , la liste des successeurs est une liste de tous les sommets  $x_j$  tel qu'il existe un arc  $(x_i, x_j) \in U$ . Les sommets de chaque liste des successeurs sont généralement listés selon un ordre arbitraire.

## Complexité d'algorithme :

Les problèmes dans la théorie des graphes se rattachent à la grande classe des problèmes d'optimisation combinatoire.

**Un problème d'optimisation combinatoire** est un problème qui consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble de solutions réalisables souvent très élevé.

**Un algorithme** de résolution d'un problème (P) donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires qui transforment les données en résultat.

**La complexité algorithmique** consiste à évaluer le nombre d'opérations caractéristiques de l'algorithme dans le pire des cas. Ce nombre d'opérations élémentaires est exprimé à l'aide de la taille des données (i.e. en fonction du nombre des bits nécessaire pour coder les données en machine).

En introduisant, la notion d'algorithme efficace ou polynomial, dans l'étude des couplages, J. Edmonds utilise la définition de la classe  $P$  des problèmes dits "*faciles*" ou polynomiaux, et c'est Cook puis Karp qui ont défini la classe des problèmes dits "*difficiles*" noté  $NP$  et les problèmes  $NP - complets$ .

Un problème est dit **polynomial** si le nombre  $f(n)$  d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille  $n$ , est borné par un polynôme en  $n$  i.e. si  $f(n) \leq cn^k$ . ou  $c$  et  $k$  sont des constantes, on dira que  $f(n)$  est  $O(n^k)$ , ou encore qu'un tel algorithme a une complexité  $O(n^k)$ .

Un problème est dit de la **classe  $P$**  s'il peut être résolu par un algorithme **polynomial**. Il est dit facile. Sinon le problème est dit difficile.

Un problème d'existence appelé aussi problème de décision est une classe d'énoncés aux quels on doit répondre par oui ou non. En d'autre termes chaque énoncé est une instance du problème dont la solution n'appartient qu'à l'ensemble  $\{0, 1\}$ .

**Un algorithme non déterministe** est un algorithme qui comporte des instructions de choix, si le "bon" choix est effectué, le temps de calcul est polynomial, par contre, si on énumère tous les choix possibles, l'algorithme non déterministe se transforme en un algorithme déterministe nécessitant un temps de calcul exponentiel.

Un problème de décision est dit appartenir à la **classe NP** s'il peut être résolu en un temps polynomial par un algorithme non déterministe.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que  $P \subseteq NP$ . Mais la classe  $NP$  contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution.

Un problème (P1) se réduit en temps polynomial à un problème (P2), s'il existe un algorithme pour (P1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P2) et si cet algorithme de résolution de (P1) est polynomial lorsque la résolution de (P2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la classe  $NP$  est dit **NP-complet**, si tout problème de la classe  $NP$  peut être réduit à ce problème en temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème  $NP$  – *complet*, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe  $NP$ .

Les problèmes **NP-durs** sont les problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes  $NP$  – *complets* et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est  $NP$  – *complet* est  $NP$  – *dur*.

# CHAPITRE II

## NOYAUX DANS LES DIGRAPHES

### Introduction :

Le but de ce chapitre est de définir la notion de noyau et d'exposer les différents théorèmes de son existence dans les digraphes. On va aussi donner quelques algorithmes pour la détermination de noyau dans les digraphes sans circuits, les digraphes sans circuit impairs, les digraphes tels que tout circuit possède un arc symétrique et les digraphes tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques. Les graphes considérés dans ce chapitre sont des graphes orientés sans boucles et sans arcs multiples, dits aussi digraphes.

**Notion :** On appellera digraphe un graphe orienté sans boucles et sans arcs multiples, emprunté au mot anglais "directed graph".

### Définition 1 :

Soit un digraphe  $D = (X, U)$ . On dit qu'un sous ensemble  $N \subseteq X$  est un noyau si et seulement si  $N$  est un stable (*i.e.* :  $\forall x \in N, N \cap \Gamma^-(x) = \emptyset$ ) et  $N$  est un absorbant (*i.e.* :  $\forall x \notin N, N \cap \Gamma^+(x) \neq \emptyset$ ).

Un digraphe  $D$  est noyau parfait si et seulement si tout sous digraphe de  $D$  admet un noyau.

Dans un digraphe, le noyau n'existe pas toujours et s'il existe alors il n'est pas nécessairement unique.

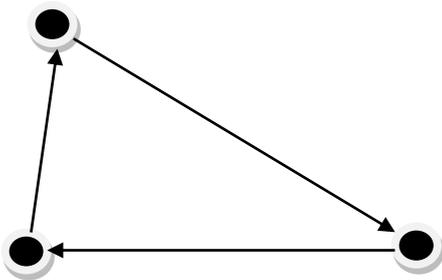


Figure 2.1 : Digraphe sans noyau

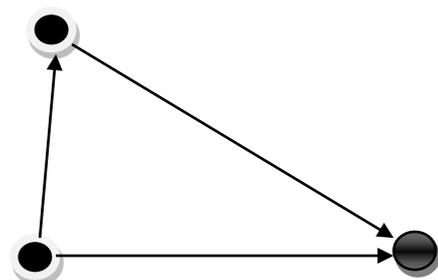


Figure 2.2: Digraphe avec un noyau unique

## Définition 2 :

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe. Une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  est dite une fonction de Grundy si  $\forall x \in X, g(x)$  est le plus petit entier qui n'apparait pas dans  $\{g(y), y \in \Gamma^+(x)\}$ .  
Autrement dit :

- a) Si  $g(x) = k > 0$  alors  $\forall j < k, \exists y \in \Gamma^+(x)$  tel que  $g(y) = j$ .
- b) Si  $g(x) = k$  alors  $\forall y \in \Gamma^+(x)$  on a  $g(y) \neq k$ .

Une fonction de Grundy n'existe pas toujours (Voir Figure 2.4).

Dans un digraphe la fonction de Grundy n'est pas unique (Voir Figure 2.3).

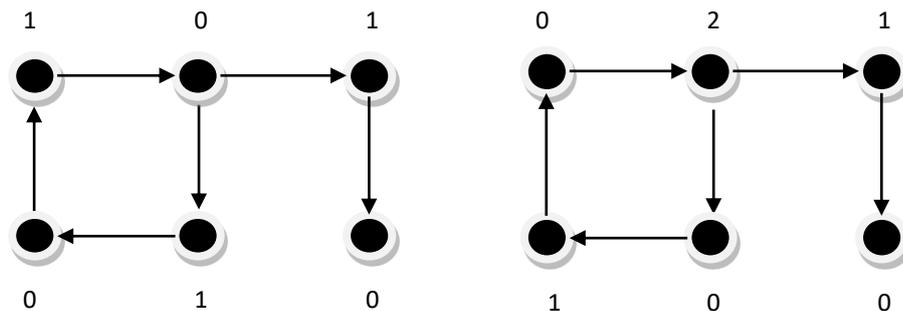


Figure 2.3 : un digraphe avec deux fonctions de Grundy

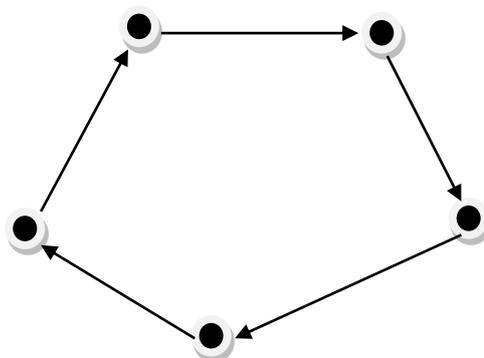


Figure 2.4 : digraphe sans fonction de Grundy

**Proposition 1 :** [1] Si un digraphe  $D$  admet une fonction de Grundy, alors  $D$  admet un noyau. La réciproque est fautive (voir Figure 2.5).

**Preuve :**

Soient  $D = (X, U)$  un digraphe et  $g$  sa fonction de Grundy. On considère l'ensemble  $N = \{x \in X / g(x) = 0\}$ . On montre que  $N$  est un noyau.

**$N$  est un ensemble stable :** Si  $x \in N$ , alors on a  $g(x) = 0$  et  $\forall y \in \Gamma^+(x), g(y) > 0$ , donc d'après b) de la définition 2,  $N \cap \Gamma^+(x) = \emptyset$ , ceci implique que  $N$  est un ensemble stable.

**$N$  est un ensemble absorbant :** Si  $x \notin N$ , alors on a  $g(x) > 0$  et donc d'après a) de la définition 2,  $\exists y \in \Gamma^+(x)$ , tel que  $g(y) = 0$ , par conséquent on a  $N \cap \Gamma^+(x) \neq \emptyset$ , ceci implique que  $N$  est un ensemble absorbant.

$N$  est un ensemble stable et absorbant donc  $N$  est un noyau de  $D$ .

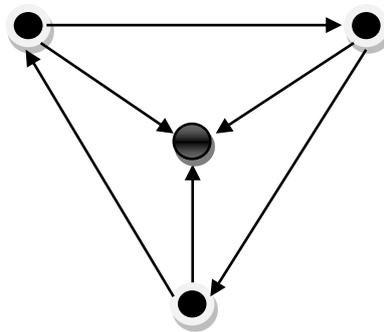


Figure 2.5 : Un digraphe qui possède un noyau mais qui n'admet pas de fonction de Grundy

Le concept de noyau est important en théorie des graphes, tant du point de vue théorique que du point de vue pratique. Il intervient notamment dans les problèmes de théorie des jeux et d'aide à la décision. Afin d'illustrer ces applications, nous citons quelques exemples.

### Exemple 1 : [1] Théorie des jeux

Supposons que  $n$  joueurs, que l'on désignera par  $(1), (2), \dots, (n)$  peuvent se concerter pour choisir une situation  $x$  dans un ensemble  $X$ , si le joueur  $(i)$  préfère la situation  $a$  à la situation  $b$ , on écrira  $a \succsim^i b$  avec  $\succsim^i$  est un pré ordre total. Les préférences individuelles  $\succsim^i$  peuvent ne pas être compatibles, et par conséquent il est nécessaire d'introduire la notion de la préférence efficace  $\succ$ . La situation  $a$  est dite préférée efficacement à  $b$ , s'il existe un ensemble de joueurs qui préfèrent  $a$  à  $b$  et qui sont capables s'ils le veulent de faire prévaloir leur point de vue. Si en outre  $b \succ c$  il existera un ensemble de joueurs qui fera prévaloir  $b$  à  $c$ , mais comme ce n'est pas nécessairement le même, on peut ne pas avoir  $a \succ c$ , et la relation  $\succ$  n'est pas nécessairement transitive.

Considérons le digraphe  $D = (X, U)$  où  $\Gamma^+(x)$  désigne l'ensemble des situations préférées efficacement à  $x$ . Soit  $N$  un noyau du digraphe  $D$  (s'il existe). Von Neumann et Morgenstern ont proposé de limiter le jeu aux éléments de  $N$ . Comme  $N$  est stable, alors toute situation de  $N$  ne peut pas être préférée efficacement à une autre situation de  $N$  et comme  $N$  est absorbant, alors à toute situation  $x \notin N$ , on peut préférer efficacement une situation de  $N$  ce qui écarterait immédiatement la situation  $x$ .

### Exemple 2 : [3] Problème de décision

Un gouvernement ayant décidé de répartir trois milliards de Francs en vue de diminuer la mortalité sur les routes, on propose cinq initiatives : augmentation du nombre de gendarmes, construction d'autoroutes, mise en place des signaux lumineux à tous les carrefours, récompenses aux meilleurs conducteurs et la gratuité des transports publics. Il charge un groupe de recueillir les préférences du public et ce groupe parvient à établir le digraphe suivant où les cinq sommets représentent les cinq initiatives dans l'ordre repris ci-dessus et où un arc  $(x_i, x_j)$  existe s'il est certain que la population préfère l'initiative  $x_j$  à l'initiative  $x_i$ .

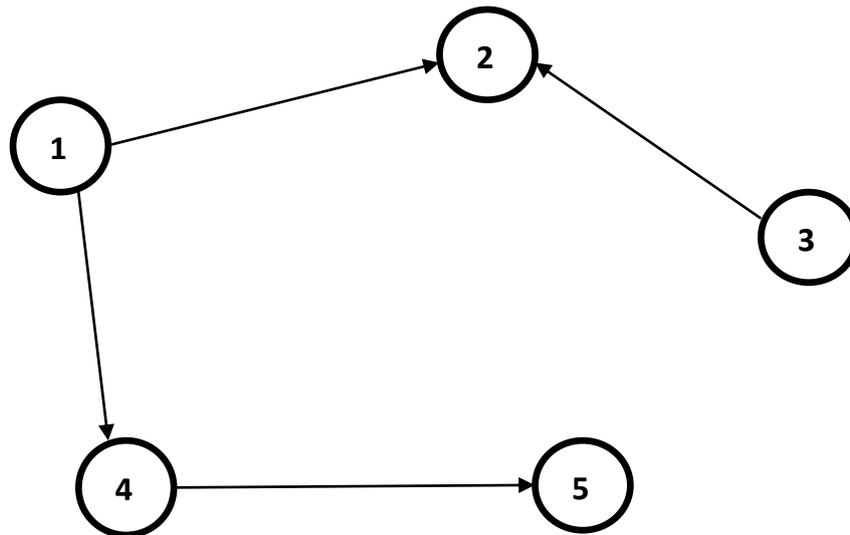


Figure 2.6 : la représentation graphique du problème

L'ensemble qui contient les sommets 2 et 5, constitue le noyau dans le digraphe, c'est l'ensemble qui ne contient pas les mauvaises actions, ce qui justifié l'omission des initiatives 1, 3 et 4. Le décideur peut consacrer un budget de 1.5 milliards de Francs à chacune des initiatives 2 et 5 (si bien sûr, il n'arrive pas à trancher entre les deux initiatives)

## **I. Digraphes sans circuits et digraphes tels que tout circuit possède un arc symétrique :**

**Proposition 2 :** [1] Soit  $D = (X, U)$  un digraphe simple, si  $N$  est un noyau, alors  $N$  est aussi un stable maximal et un absorbant minimal.

**Preuve :**

Considérons  $N$  un noyau du digraphe  $D$ .  $N$  est un ensemble stable et absorbant.

**$N$  est un ensemble stable maximal :** On suppose que  $N$  n'est pas un stable maximale c'est-a-dire  $\exists x \in X - N$  tel que  $x$  n'est relié à aucun sommet de  $N$ . Ceci contredit le fait que  $N$  est un ensemble absorbant.

**N est un ensemble absorbant minimal** : On suppose que  $N$  n'est pas un absorbant minimale, donc  $\exists N' \subset N$ ,  $N' \neq N$  et  $N'$  est un ensemble absorbant. Soit  $x \in N - N'$ , comme  $N'$  est un absorbant, il est clair que  $x$  est relié à un sommet  $N'$ . Ceci contredit le fait que  $N$  est un ensemble stable.

**Proposition 3** : [1] Une condition nécessaire et suffisante pour que dans un digraphe  $D = (X, U)$ , un ensemble  $N \subset X$  soit un noyau et que sa fonction caractéristique  $\varphi_N(x)$  vérifie :

$$\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) \quad \forall x \in X$$

Avec :

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $\Gamma^+(x) = \emptyset$ , on posera par convention  $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$ .

**Preuve** :

**Condition nécessaire** : Soit  $N$  un noyau dans le digraphe  $D = (X, U)$ . Par définition  $N$  est un ensemble stable et un ensemble absorbant.

Soit  $x$  un sommet quelconque de  $X$ .

- Si  $x \in N$ , alors  $\varphi_N(x) = 1$  par définition de la fonction caractéristique de  $N$ . Comme  $N$  est un ensemble stable, alors  $\Gamma^+(N) \cap N = \emptyset$ , donc  $\forall y \in \Gamma^+(x)$ ,  $y \notin N$   $\varphi_N(y) = 0$ , d'où on a  $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$ . Ce qui implique  $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$ .
- Si  $x \notin N$ , alors  $\varphi_N(x) = 0$  par définition de la fonction caractéristique de  $N$ . Comme  $N$  est un absorbant, alors  $\Gamma^-(N) \cup N = X$ , donc  $\exists y \in \Gamma^+(x)$ ,  $y \in N$  tel que  $\varphi_N(y) = 1$ , d'où on a  $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1$ . Ce qui implique que  $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$ .

Ceci implique que dans tous les cas on a :

$$\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) \quad \forall x \in X.$$

**Condition suffisante :** Soit  $N$  un ensemble tel que sa fonction caractéristique vérifie  $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$ ,  $\forall x \in X$ . On montre que  $N$  est un noyau de  $D$ .

- Si  $x \in N$  alors  $\varphi_N(x) = 1$ , ceci implique que  $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$ , alors on a  $N \cap \Gamma^+(x) = \emptyset \Rightarrow N$  est un stable.
- Si  $x \notin N$ , alors on a  $\varphi_N(x) = 0$ , ceci implique que  $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1$ , alors il existe  $y \in \Gamma^+(x) \cap N$ , d'où on a  $N \cap \Gamma^+(x) \neq \emptyset \Rightarrow N$  est un absorbant.

Ceci implique que  $N$  est un noyau du digraphe  $D$ .

**Proposition 4 :** [1] Si  $D = (X, U)$  est un digraphe symétrique, alors il admet un noyau. En outre,  $N \subset X$  est un noyau si et seulement si  $c'$  est un ensemble stable maximal.

**Preuve :**

Soit  $D=(X, U)$  un digraphe symétrique.

**Condition nécessaire :** Si  $N$  un noyau dans  $D$ , alors  $N$  est un stable maximal sinon  $N$  ne serait pas absorbant (voir preuve proposition 2).

**Condition suffisante :** Si  $N$  est stable maximal dans  $D$ , alors  $\forall y \in X - N$ ,  $y$  est forcément lié à un sommet  $x \in N$  par un arc  $(x, y)$ , et comme  $D$  est un digraphe symétrique, alors l'arc  $(y, x)$  existe dans  $D$ . D'où  $N$  est un absorbant donc  $N$  est un noyau.

**Proposition 5 :** [1] Si  $D = (X, U)$  est un digraphe transitif, tout ensemble absorbant minimal est de cardinalité  $\beta(D)$ . En outre, un ensemble  $N \subset X$  est un noyau si et seulement si  $c'$  est un absorbant minimal.

**Preuve :**

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe transitif. On considère le digraphe réduit ou condensé associé à  $D$  tel que les composantes fortement connexes sont représentés par les sommets, et deux sommets sont reliés par un arc s'il existe dans  $D$  un arc entre la composante fortement connexe  $C_i$  et la composante fortement connexe  $C_j$ . On met en ordre les sommets.

Soit  $C_1^T, C_2^T, C_3^T, \dots, C_p^T$  les composantes fortement connexes terminales. Notons que toute composante fortement connexe est complète et symétriques par le fait que le digraphe est transitif. Considérons l'ensemble  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  tel que  $a_i \in C_i^T$  pour  $i = 1 \dots p$ .

Il est clair de voir que  $A$  est un stable car il n'existe pas d'arc entre les  $C_i^T$   $i = 1, \dots, p$ . Donc il suffit de montrer que  $A$  est un absorbant minimal. Comme toute composante fortement connexe terminale est complète et symétrique, alors les sommets de ces composantes fortement connexes sont absorbés par  $A$ . De même pour les sommets qui ne sont pas dans  $\bigcup_{i=1}^p C_i^T$ , ils sont aussi absorbés par  $A$ , car il existe toujours un chemin de  $x \notin \bigcup_{i=1}^p C_i^T$  vers  $A$  et par transitivité  $x$  est absorbé par  $A$ , alors  $A$  est un noyau de  $D$  (voir figure 2.7).

Comme toute absorbant de  $D$  doit contenir au moins un sommet de chaque composante fortement connexe terminale donc  $A$  est un absorbant minimal.

D'après la proposition 2, si  $A$  est un noyau alors il est forcément un absorbant minimal.

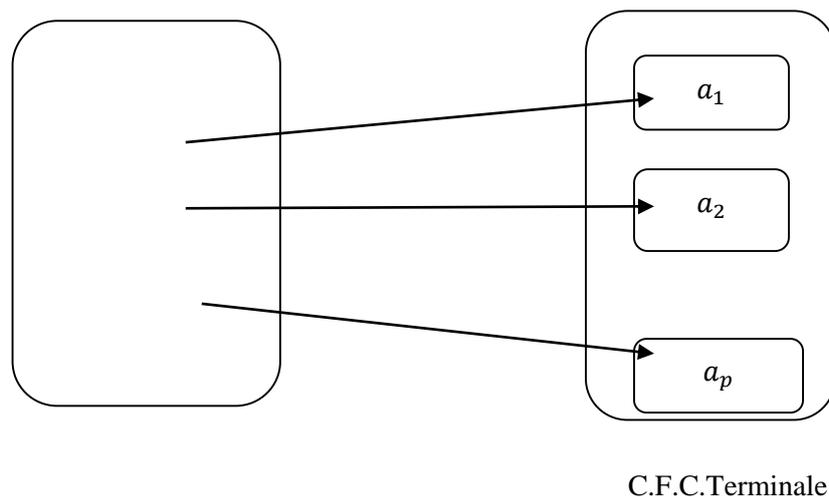


Figure 2.7 : représentation du noyau  $A$

### **Théorème 1 :** [12]

Tout digraphe sans circuit admet un noyau unique.

#### **Preuve :**

Soit un digraphe  $D = (X, U)$  d'ordre  $n$ , sans circuit. On construit les sous-ensembles de sommets suivants :

$$R(\emptyset) = \{x \in X / \Gamma^+(x) = \emptyset\}$$

$$R(1) = \{x \in X - R(0) / \Gamma^+(x) \subset R(0)\}$$

·  
·  
·

$$R(k) = \{x \in X - \cup_{i=0}^{k-1} R(i) / \Gamma^+(x) \subset \cup_{i=0}^{k-1} R(i)\}$$

Ce procédé est appelé la mise en ordre des sommets du digraphe  $D = (X, U)$ . On termine ainsi jusqu'à épuisement de tous les sommets. C.-à-d.  $k$  est le dernier indice tel que  $R(k) \neq \emptyset$ . Puis on crée le noyau à partir de cette construction, de la manière unique suivante : On prend dans le noyau  $N$  les sommets de  $R(0)$ , il est clair que  $R(0)$  est non vide car le digraphe  $D$  est non vide, de plus  $R(0)$  est stable car  $\forall x \in R(0)$ , on a  $\Gamma^+(x) = \emptyset$ . Ensuite on supprime les sommets appartenant à  $R(0)$  ainsi que leurs prédécesseurs (sommets absorbés par  $R(0)$ ), on obtient un sous digraphe sans circuit  $D' = D[X - (R(0) \cup \Gamma^-(R(0)))]$ . On refait le même procédé sur  $D'$ . Ce procédé est réitéré jusqu'à épuisement de tous les sommets. Il est simple de vérifier que l'ensemble  $N$  des sommets formés par les ensembles des sommets qui n'ont pas de successeurs dans les sous digraphes de la procédure est un noyau unique (voir figure 2.8).

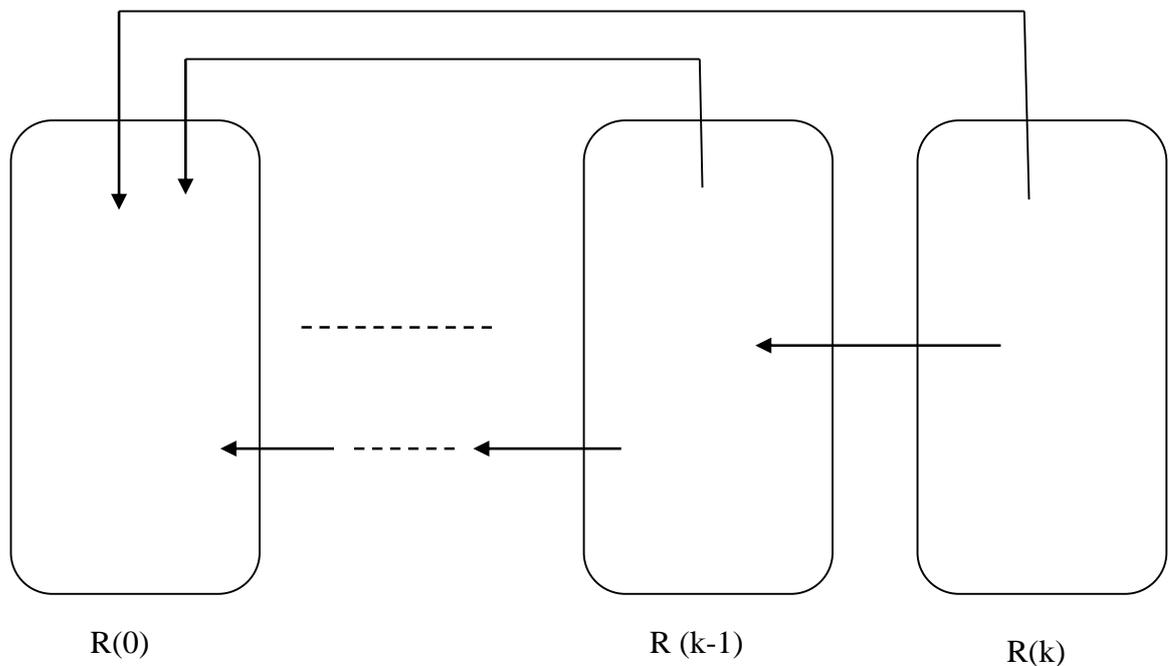


Figure 2.8 : la mise en ordre des sommets du digraphe

## **Théorème 2 : [4]**

Un digraphe tel que tout circuit possède un arc symétrique admet un noyau.

### **Preuve :**

La preuve se fait par induction sur le nombre des sommets.

Soit un digraphe  $D = (X, U)$  d'ordre  $n$ , il est clair de voir que la propriété « tout circuit possède un arc symétrique » est héréditaire, c.-à-d. tout sous digraphe  $D'$  de  $D$  vérifie cette propriété. Donc on suppose que tout sous digraphe d'ordre  $n' < n$  possède un noyau et on montre que  $D$  admet un noyau. On considère le digraphe partiel  $D_p = (X, U')$  obtenue à partir de  $D$  en supprimant tous les arcs symétriques. Il est clair que  $D_p$  est un digraphe sans circuits, alors  $D_p$  possède au moins un sommet  $x$  tel que  $\Gamma^+(x) = \emptyset$ . Soit  $D'$  le sous digraphe obtenu à partir de  $D$  en supprimant le sommet  $x$  et ses prédécesseurs dans  $D$ , c.-à-d.  $D' = D[X - (\{x\} \cup \Gamma^-(x))]$ . Par induction  $D'$  ayant moins de sommets que  $D$ , vérifie la propriété « tout circuit possède un arc symétrique », donc  $D'$  admet un noyau  $N'$ . Il est simple de vérifier que  $N = N' \cup \{x\}$  est un noyau du digraphe  $D$ .

## **II. Digraphes sans circuits impairs, digraphes tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques :**

### **Théorème 3 : [14]**

Un digraphe sans circuit de longueur impair admet un noyau (non nécessairement unique).

### **Preuve :**

La preuve se fait par induction sur le nombre de sommets.

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe sans circuit impairs, considérons son graphe réduit ou condensé. On prend une composante fortement connexe  $C$  terminale de digraphe et on montre qu'elle admet un noyau. Pour cela on partitionne les sommets de  $C$  en deux sous-ensembles à partir d'un sommet quelconque  $x$  de  $C$ .  $C_p$  représente l'ensemble des sommets atteints à partir de  $x$  que par des chemins pairs,  $x$  en fait partie, et  $C_l$  représentant l'ensemble des sommets atteints à partir de  $x$  que par des chemins impairs. Cette partition est toujours possible, c.-à-d.  $C_p \cap C_l = \emptyset$ , sinon il existerait dans  $C$

un sommet  $y$  qui est atteint à la fois à partir de  $x$  par un chemin pair et un chemin impair, et ceci induirait un circuit impair dans  $D$ , ce qui contredit l'hypothèse du théorème. Cette partition fait de la composante fortement connexe  $C$  un digraphe biparti dont  $C_p$  et  $C_l$  sont des noyaux. En effet  $C_p$  (respectivement  $C_l$ ) est un stable sinon tout arc dans  $C_p$  (respectivement dans  $C_l$ ) induirait un circuit impair et comme la composante est fortement connexe tout sommet de cette composante fortement connexe terminale est ou bien dans l'un des ensembles de la partition ou bien est absorbé par l'autre ensemble.

Considérant les composantes fortement connexes terminales  $C_1^T, C_2^T, \dots, C_k^T$  et leurs noyaux  $N_1, N_2, \dots, N_k$ . Dans le sous digraphe engendré par les sommets de  $X - \{\cup_{i=1}^k (C_i^T \cup \Gamma^-(N_i))\}$ , il existe un noyau par hypothèse d'induction qu'on notera  $N'$ , car  $D'$  contient moins de sommets que  $D$  et vérifie la propriété sans circuit impair. Comme  $C_i^T$   $i = 1 \dots k$  sont des composantes fortement connexes terminales, alors on ne peut pas trouver des arcs entre leurs noyaux. De même entre  $N'$  et  $N_i$   $i = 1 \dots k$  par construction, donc l'ensemble  $N = N' \cup \{\cup_{i=1}^k N_i\}$  est stable.  $N$  est aussi un absorbant car tous les sommets sont absorbés ou bien par  $N'$  ou bien par  $\cup_{i=1}^k N_i$ , et qui implique que  $N = N' \cup \{\cup_{i=1}^k N_i\}$  est un noyau de  $D$ .

#### **Théorème 4 : [4]**

Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques admet un noyau.

#### **Preuve :**

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques. Soit  $D'$  le digraphe partiel obtenu en supprimant tous les arcs symétriques de  $D$ . On décompose le digraphe  $D'$  en composantes fortement connexes, puis on le met en ordre.

On choisit un sommet  $x$  quelconque de la composante fortement connexe terminale  $C$  de  $D'$  et on partitionne ses sommets en deux sous-ensembles  $C_p$  et  $C_l$ , le premier on lui attribue les sommets atteints par des chemins pairs à partir de  $x$ ,  $x$  en fait partie de cette ensemble, et le second on lui attribue les sommets atteints à partir de  $x$  par des chemins impairs. D'après le théorème précédant  $C$  est biparti et les sous ensembles  $C_p$  et  $C_l$  sont des noyaux de  $C$  dans  $D'$  ( $D'$  sans circuit impair). Montrons que  $C$  reste biparti dans le digraphe  $D$  et que les sous-ensembles  $C_p$  et  $C_l$  restent des noyaux de  $C$  dans  $D$  (après avoir remis les arcs symétriques).  $C_p$  et  $C_l$  sont des stables sinon on aura un circuit impair admettant au

plus un arc symétrique ce qui contredit les hypothèses du théorème. De plus  $C_p$  et  $C_l$  sont des absorbants car la composante  $C$  est fortement connexe. De cela on conclut que  $C_p$  et  $C_l$  sont des noyaux de  $C$  dans  $D$ .

Considérant les composantes fortement connexes terminales  $C_1^T, C_2^T, \dots, C_k^T$  de  $D'$  et leurs noyaux  $N_1, N_2, \dots, N_k$  dans  $D'$ . Dans le sous digraphe de  $D$  engendré par les sommets de  $X - \{\cup_{i=1}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))\}$ , il existe un noyau par hypothèse d'induction qu'on notera  $N'$ , car  $D[X - \{\cup_{i=1}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))\}]$  contient moins de sommets que  $D$  et il vérifie la propriété tout circuit impair contient deux arcs symétriques. Comme  $C_i^T \quad i = 1 \dots k$  sont des composantes fortement connexes terminales, alors on ne peut pas trouver des arcs entre leurs noyaux. De même entre  $N'$  et  $N_i \quad i = 1 \dots k$ , donc l'ensemble  $N = N' \cup \{\cup_{i=1}^k N_i\}$  est stable.  $N$  est aussi un absorbant car tout les sommets sont ou bien absorbés par  $N'$  ou bien par  $\cup_{i=1}^k N_i$ , ce qui implique que  $N$  est un noyau du digraphe  $D$ .

**Définition 3 :** Un digraphe est noyau parfait si et seulement si tout sous digraphe admet un noyau.

### **Théorème 5 : [13]**

Un digraphe antisymétrique tel que tout circuit de longueur impair possède deux cordes courtes admet un noyau.

#### **Preuve :**

Nous procéderons par induction sur le nombre de sommets de  $D$ . Le théorème est trivial pour les digraphes ayant moins de 4 sommets.

Supposons que ce théorème est vrai pour tous les digraphes antisymétriques ayant moins de  $n$  sommets, on montre qu'il existe un digraphe antisymétrique  $D = (X, U)$  à  $n$  sommets qui possède deux cordes courtes et qui admet de noyau.

Soit  $x$  un sommet quelconque de  $D$  tel que  $D - x$  admet un noyau (car  $D - x$  est le sous digraphe engendré par  $X - \{x\}$  d'ordre  $n' < n$ ) qu'on le note  $N'$ . Nous supposons que  $x$  n'a pas de successeur dans  $N'$ , mais il a au moins un prédécesseur dans  $N'$ , Sinon on aura soit  $N' \cup \{x\}$  ou  $N'$  un noyau de  $D$ . On construit ainsi deux suites :

$$B_0 = \Gamma^+(x)$$

$$N_0 = \Gamma^+(B_0) \cap N'$$

$$B_1 = \Gamma^+(N_0) \cap [X - (x \cup \Gamma^-(x))]$$

$$N_1 = \Gamma^+(B_1) \cap (N' - N_0)$$

.

.

$$B_k = \Gamma^+(N_{k-1}) \cap [X - (x \cup \Gamma^-(x) \cup \{\cup_{i=0}^{k-2} (\Gamma^-(N_i) \cup B_i)\})]$$

$$N_k = \Gamma^+(B_k) \cap (N' - (\cup_{i=0}^{k-1} N_i))$$

Avec  $k$  est le plus petit indice tel que  $B_{k+1} = \emptyset$ .

Nous allons montrer que  $N = \{x\} \cup \{\cup_{i=0}^k N_i\} \cup N''$  est le noyau de  $D$ , où  $N''$  est le noyau de sous digraphe  $D[X - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup \{\cup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))\})]$  qui existe (par induction).

Pour cela nous montrons les propriétés suivantes :

1.  $B_0$  n'est pas vide, car sinon  $N = N'' \cup \{x\}$  serait le noyau de  $D$  et il suffit de chercher  $N''$  le noyau de sous digraphe  $D[X - (\{x\} \cup \Gamma^-(x))]$ .
2.  $N$  est un absorbant, car un sommet de  $X$  il est dans  $\{x\} \cup \{\cup_{i=0}^{k-1} N_i\} \cup N''$  donc il est absorber par un de ses ensembles (par construction).
3.  $N_i$  et  $N''$  sont des stable (par définition).
4.  $x$  n'est pas relié à  $N''$ , car les seuls sommets adjacents à  $x$  sont ceux de  $\Gamma^-(x)$  ou de  $B_0$ . Puisque ces derniers ne sont pas inclus dans le sous digraphe  $D[X - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup \{\cup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))\})]$ .
5. Aucun sommet de  $N_i$   $i = 1, \dots, k$  n'est relié à un sommet de  $N''$ , car un sommet relié à  $N_i$  est forcément dans  $\cup_{i=0}^k \Gamma^-(N_i)$  (par construction).

Il reste à montrer que  $x$  n'est pas relié aux sommets de  $N_i$   $i = 1, \dots, k$ . Par induction sur  $i$ . Pour  $i = 0$ ,  $x$  ne peut pas être relié à un sommet de  $N_0$  sinon on aura un circuit de longueur 3 sans deux cordes. Supposons que  $x$  n'est relié à aucun sommet de  $N_i$   $i = 0, \dots, k-1$  et montrons qu'il ne peut être relié aux sommets de  $N_k$ .

Supposons au contraire, qu'il existe un sommet  $x_k \in N_k$  tel que  $x_k$  est relié à  $x$  par un arc  $(x_k, x)$ . Et d'après la construction il existe un chemin élémentaire de  $x$  vers  $x_k$  passant par les sommets  $B_i$  et les sommets de  $N_i$ . Ainsi en rajoutant l'arc  $(x_k, x)$  on aura un circuit impair  $C = (x, b_0, x_0, b_1, x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_k, x)$  avec  $x_i \in N_i$  contenant deux corde courtes

(par hypothèse). On remarque que les cordes courtes possibles sont  $(x_k, b_0)$  et  $(b_i, b_{i+1})$ , et il n'existe pas d'autre arcs possible par définition.

Montrons que les arcs  $(x_k, b_0)$  et  $(b_i, b_{i+1})$  n'existent pas.

Si l'arc  $(x_k, b_0)$  existe, on considère un chemin élémentaire minimal de  $b_0$  vers  $x_k$  induit par les sommets de  $C(x, x_k)$  qu'on le note  $C'$ . Alors on aura ou bien  $C_1 = (x, b_0) \& C' \& (x_k, x)$  ou bien  $C_2 = C' \& (x_k, b_0)$  un circuit impair ayant au plus une corde courte,  $(x_k, b_0)$  dans le cas de  $C_1$  et  $(x_k, b'_1)$  dans le cas de  $C_2$ , avec  $(b_0, b'_1)$  est un arc de  $C'$  d'après la minimalité. Donc  $(x_k, b_0)$  n'existe pas car on ne peut pas trouver d'autres cordes courtes (par définition).

Supposons que  $(b_i, b_{i+1})$   $i = 0, \dots, k - 1$  existe, parmi les cordes  $(b_i, b_{i+1})$  on prend celle qui a le plus petit indice  $i$  et on considère deux chemins élémentaires minimales, le premier  $C'(x, b_i)$  induit par les sommets de  $C(x, b_i)$  et le second  $C'(b_{i+1}, x_k)$  induit par les sommets de  $C(b_{i+1}, x_k)$ . Alors on aura ou bien  $C_1 = C'(x, b_i) \& (b_i, b_{i+1}) \& C'(b_{i+1}, x_k) \& (x_k, x)$  ou bien  $C_2 = C'(x, b_i) \& C(b_i, b_{i+1}) \& C'(b_{i+1}, x_k) \& (x_k, x)$  (le chemin  $C(b_i, b_{i+1})$  est de la forme  $(b_i, x_i, b_{i+1})$ ) est un circuit impair.

Si  $C_1$  est un circuit impair, alors les seules cordes courtes possibles sont de la forme  $(b'_{i-1}, b_{i+1})$  et  $(b_i, b'_{i+2})$  qui sont aussi des arcs de  $C_1$ . On considère le circuit impair  $C_1'$  induit par les sommets de  $C_1$  et les deux sommets  $b'_{i-1}$  et  $b'_{i+1}$ , qu'il doit contenir deux cordes courtes. Vu la minimalité des chemins élémentaires pris et des cordes courtes possibles, on a une contradiction avec le choix de l'indice  $i$ .

Si  $C_2$  est un circuit impair, la seule corde courte possible est  $(b_i, b_{i+1})$  d'après la minimalité des chemins élémentaires qu'on a pris et des cordes courtes possibles.

Donc le circuit impair  $C$  n'admet aucune corde courte. D'où la contradiction. Alors l'arc  $(x_k, x)$  n'existe pas.

### **Théorème 6 : [6]**

Un digraphe tel que tout circuit de longueur impair possède deux pôles consécutifs est noyau-parfait.

## Preuve :

Il est clair que les conditions données dans les hypothèses du théorème sont héréditaires pour les sous-digraphes, donc il suffit de montrer que  $D$  admet un noyau. Pour cela, on procède par induction sur le nombre de sommets de  $D$ . Le théorème est vrai pour les digraphes ayant moins de quatre sommets.

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe d'ordre  $n \geq 4$ , tel que tout circuit de longueur impaire possède deux pôles consécutifs. Supposons que le résultat est vrai pour tous les digraphes d'ordre inférieur à  $n$ , et on montre que cette hypothèse est vraie pour les digraphes à  $n$  sommets. On choisit un sommet quelconque  $x$  tel que  $D - x$  admet un noyau  $N'$ . On cherche à déterminer le noyau  $N$  du digraphe  $D$ .

On construit ainsi les sous digraphes suivants :

$$B_0 = \Gamma^+(x) \cap [X - (x \cup \Gamma^-(x))]$$

$$N_0 = \Gamma^+(B_0) \cap N'$$

$$B_1 = \Gamma^+(N_0) \cap [X - (x \cup \Gamma^-(x) \cup \Gamma^-(N_0) \cup B_0)]$$

$$N_1 = \Gamma^+(B_1) \cap (N' - N_0)$$

.

.

$$B_k = \Gamma^+(N_{k-1}) \cap [X - (x \cup \Gamma^-(x) \cup \{\cup_{i=0}^{k-1} (\Gamma^-(N_i) \cup B_i)\})]$$

$$N_k = \Gamma^+(B_k) \cap (N' - (\cup_{i=0}^{k-1} N_i))$$

Avec  $k$  est le plus petit indice tel que  $B_{k+1} = \emptyset$ .

On va montrer que  $N = \{x\} \cup \{\cup_{i=0}^k N_i\} \cup N''$  est le noyau de  $D$ , où  $N''$  est un noyau de sous digraphe  $D[X - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup \{\cup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))\})]$  qui existe car il est d'ordre inférieur à celui de  $D$  (par induction).

Il est à remarquer que :

1.  $x$  n'a pas de successeur dans  $N'$ , sinon  $N'$  serait le noyau de  $D$ .
2.  $B_0$  n'est pas vide, sinon on cherche le noyau  $N''$  dans  $D[X - (\{x\} \cup \Gamma^-(x))]$  et  $N = N'' \cup \{x\}$  serait le noyau de  $D$ .
3.  $N$  est un ensemble absorbant par construction, car tout sommet de  $D$  est absorbé soit par  $x$ , soit par  $\cup_{i=0}^k N_i$ , ou par  $N''$ .

4.  $N_i$  et  $N''$  sont des stables (par définition).
5.  $x$  ne peut pas être relié à  $N''$ , car les seuls sommets adjacents à  $x$  sont soit de  $\Gamma^-(x)$  ou bien de  $B_0$ . Puisque ces derniers ne sont pas inclus dans le sous digraphe  $D[X - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup \{\cup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))\})]$ .
6. Aucun sommet de  $N_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) n'est relié à un sommet de  $N''$ .

Il reste à montrer que  $x$  n'est relié à aucun sommet de  $N_i$   $i = 0, 1, \dots, k$ . Nous raisonnons par induction sur le nombre de sommets.

Soit  $x_0$  un sommet de  $N_0$ . Si  $x_0$  est relié à  $x$  nous créons un circuit de longueur trois avec au plus un arc symétrique, ce qui contredit notre hypothèse car il est sans deux pôles consécutif. Donc  $x_0$  n'est pas relié à  $x$ . on suppose que  $x$  n'est relié à aucun sommet de  $N_i$   $i = 0, \dots, k - 1$  et on montre qu'il ne peut être relié aux sommets de  $N_k$ .

Soit  $x_k$  un sommet de  $N_k$ . D'après la construction, il existe un chemin de  $x$  vers  $x_k$  empruntant alternativement les sommets de  $B_i$   $i = 0, \dots, k - 1$  et de  $N_i$   $i = 0, \dots, k$ . Si  $x_k$  est relié à  $x$ , alors on aura un circuit impair qu'on le note  $C = (x, b_0, x_0, b_1, x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_k, x)$ . Par définition des  $N_i$  et des  $B_i$ , dans  $C$  il ne peut y avoir d'arcs qui ont pour extrémités terminales autres que ceux du circuit  $C$ , donc on peut jamais avoir deux pôles consécutif. Alors  $x_k$  ne peut pas être relié à  $x$ .

## Etude algorithmique

En général, le problème de la recherche d'un noyau dans un digraphe quelconque est un problème NP-complet [2, 5]. On donne dans ce qui suit des algorithmes polynomiaux pour la recherche de noyau dans quelques cas de digraphes.

### a) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes sans circuit : [17]

En utilisant l'algorithme suivant, on peut déterminer un noyau dans un digraphe  $D = (X, U)$  sans circuit en  $O(n^2)$ .

#### Algorithme :

*Données* :  $D = (X, U)$  digraphe sans circuit ;  $|X| = n$  et  $|U| = m$ .

*Résultat* :  $K$  noyau dans  $D$ .

*Début*

$K = \emptyset$

*Répéter*

-soit  $x_1$  un sommet puits de  $D$ .

-  $K = x_1 \cup K$ .

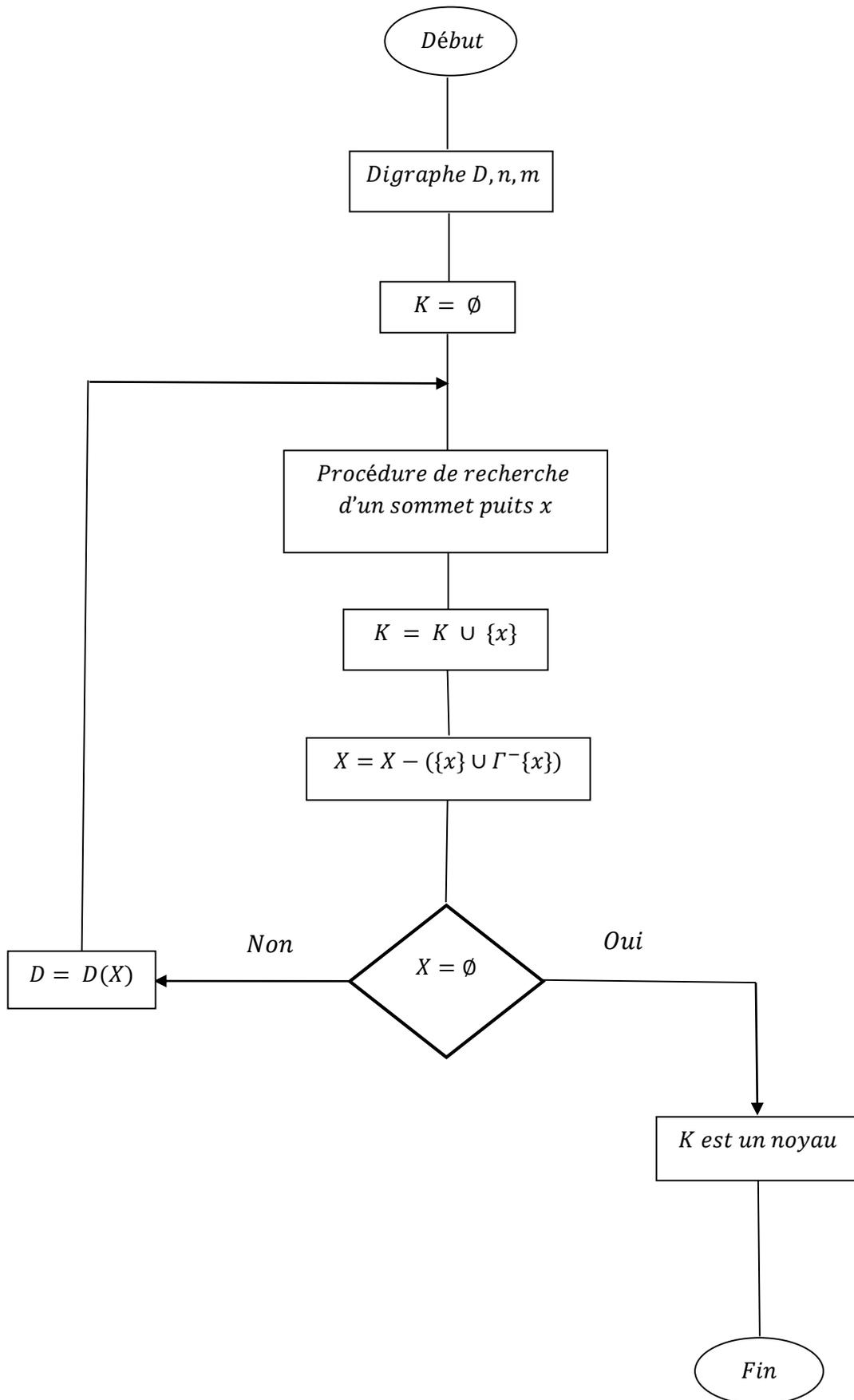
-  $X = X - (\{x_1\} \cup \Gamma^{-}\{x_1\})$ .

-  $D = D[X]$ .

*Jusqu'à*  $X = \emptyset$ .

*Fin.*

Organigramme :



b) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes sans circuit impair : [17]

En utilisant l'algorithme suivant, on peut déterminer un noyau dans un digraphe  $D = (X, U)$  sans circuit impair en  $O(m \cdot n + n^2)$ .

Algorithme :

*Données* :  $D = (X, U)$  digraphe sans circuit impair ;  $|X| = n$  et  $|U| = m$ .

*Résultat* :  $K$  noyau dans  $D$ .

*Début*

$K = \emptyset$

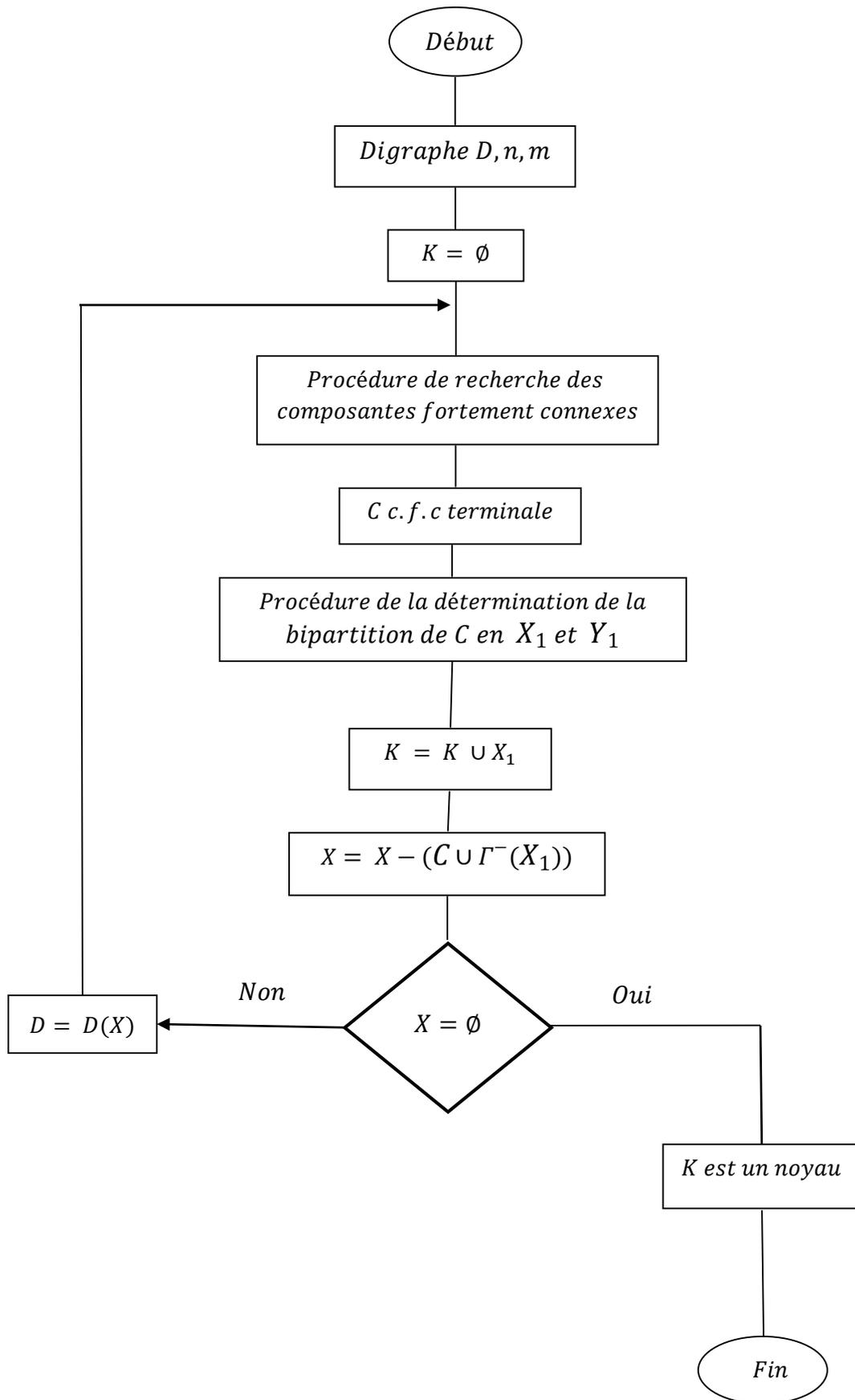
*Répéter*

- déterminer les composantes fortement connexes de  $D$ .
- soit  $C$  une composante fortement connexe terminale.
- déterminer la bipartition  $C = X_1 \cup Y_1$ .
- $K = X_1 \cup K$ .
- $X = X - (C \cup \Gamma^-(X_1))$ .
- $D = D[X]$ .

*Jusqu'à*  $X = \emptyset$ .

*Fin.*

Organigramme :



c) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes tels que tout circuit possède un arc symétrique :

En utilisant l'algorithme suivant, on peut déterminer un noyau dans un digraphe  $D = (X, U)$  où tout circuit possède un arc symétrique en  $O(n^3)$ , car la boucle répétée est effectuée au plus  $n$  fois et la procédure la plus coûteuse est celle de la suppression des arcs symétriques de  $D$  qui est de complexité  $O(n^2)$ .

Algorithme :

*Données :*  $D = (X, U)$  digraphe tels que tout circuit possède un arc symétrique ;

$|X| = n$  et  $|U| = m$ .

*Résultat :*  $K$  noyau dans  $D$ .

*Début*

$K = \emptyset$

*Répéter*

–  $D_p = (X, U')$  où  $U' = U - (x_i, x_j) \cup (x_j, x_i)$  avec  $(x_i, x_j) \in U$  et  $(x_j, x_i) \in U$ .

– soit  $x_1$ , un sommet puits de  $D_p$ .

–  $K = x_1 \cup K$ .

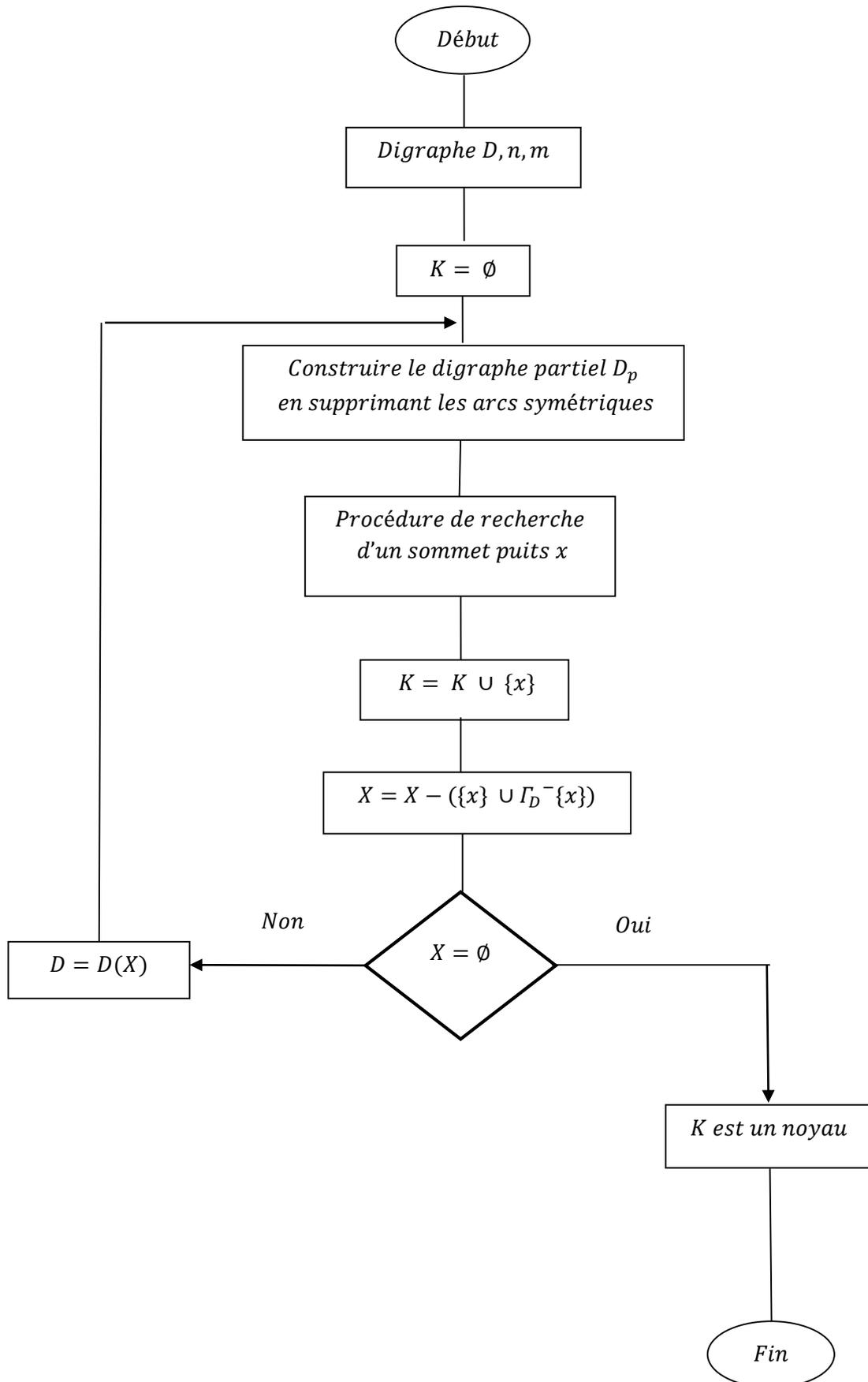
–  $X = X - (\{x_1\} \cup \Gamma_D^-(x_1))$ .

–  $D = D[X]$ .

*Jusqu'à*  $X = \emptyset$ .

*Fin.*

Organigramme :



d) Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les digraphes tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques :

En utilisant l'algorithme suivant, on peut déterminer un noyau dans un digraphe  $D = (X, U)$  tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques en  $O(n^3)$ , car la boucle répéter est effectuée au plus  $n$  fois et la procédure la plus coûteuse est celle de la suppression des arcs symétriques de  $D$  qui est de complexité  $O(n^2)$  ou celle de la détermination des composantes fortement connexes qui est de complexité  $O(m + n)$  avec  $m = n(n - 1)$ .

Algorithme :

*Données :*  $D = (X, U)$  digraphe tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques ;  
 $|X| = n$  et  $|U| = m$ .

*Résultat :*  $K$  noyau dans  $D$ .

*Début*

$K = \emptyset$

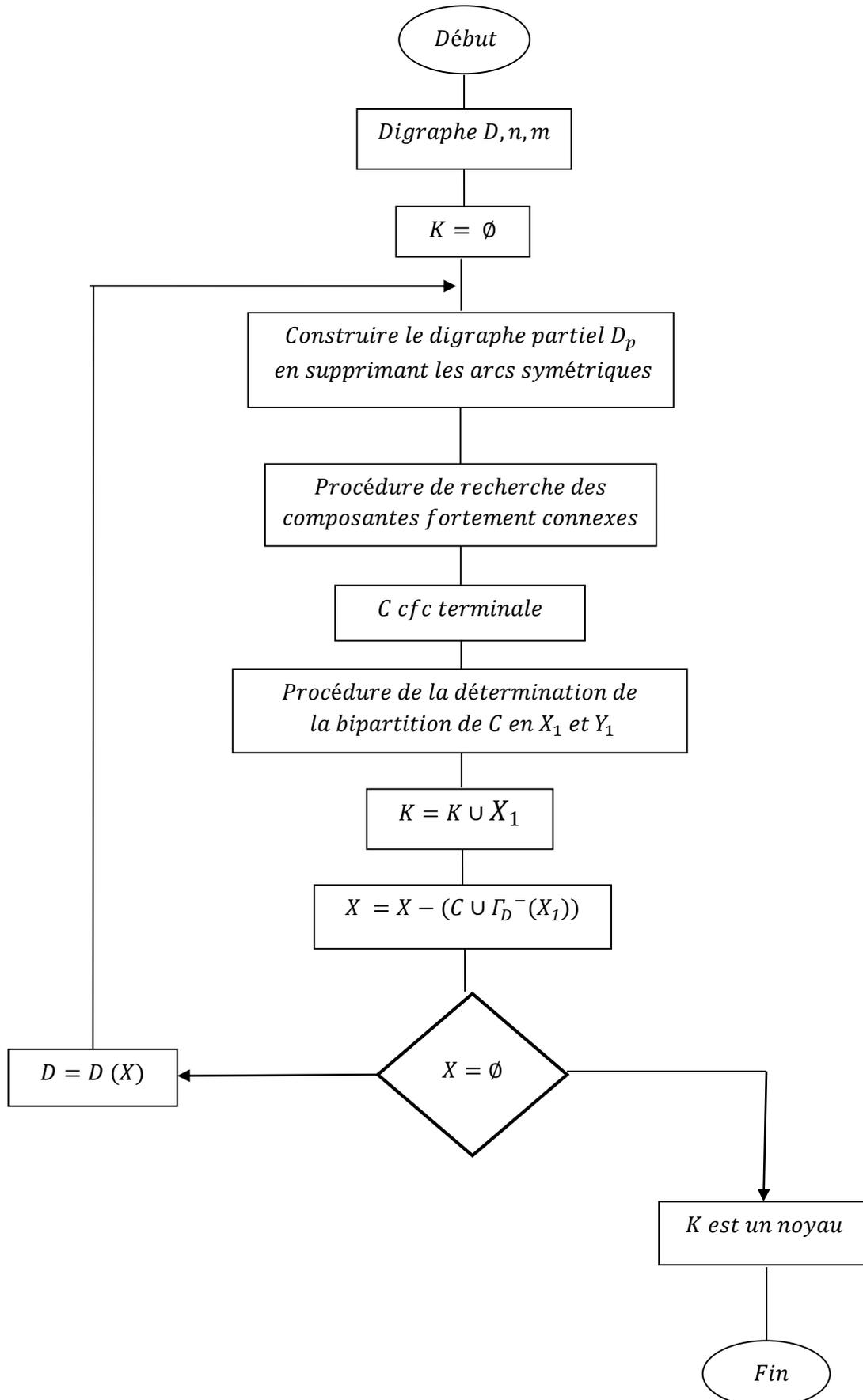
*Répéter*

- $D_p = (X, U')$  où  $U' = U - (x_i, x_j) \cup (x_j, x_i)$  avec  $(x_i, x_j) \in U$  et  $(x_j, x_i) \in U$ .
- déterminer les composantes fortement connexes de  $D_p$ .
- soit  $C$  une composante fortement connexe terminale.
- déterminer la bipartition  $C = X_1 \cup Y_1$ .
- $K = X_1 \cup K$ .
- $X = X - (C \cup \Gamma_D^-(X_1))$ .
- $D = D[X]$ .

*Jusqu'à*  $X = \emptyset$ .

*Fin.*

Organigramme :



# CHAPITRE III

## NOYAUX PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES DANS LES DIGRAPHES $m$ -COLORÉ

### Introduction :

Nous consacrons ce chapitre à l'étude du concept noyau par chemins monochromatiques. Nous citons quelques résultats principaux qui ont une relation avec ce concept, et nous donnons par la suite une amélioration à la méthode de fermeture par chemins monochromatiques proposée par A.Ramoul dans [13]. Nous ferons aussi une étude sur quelques classes de digraphes  $m$ -colorés sur la détermination de noyaux par chemins monochromatiques.

### Définition 1 :

Un digraphe  $D = (X, U)$  est dit  $m$ -coloré si ses arcs sont colorés avec  $m$  couleurs.

Un chemin dans un digraphe  $m$ -coloré est dit monochromatique si ses arcs sont coloré avec la même couleur.

Un circuit dans un digraphe  $m$ -coloré est dit quasi-monochromatique, si tous ses arcs sont colorés avec la même couleur sauf peut être au plus un.

Un tournoi est un digraphe complet antisymétrique.

On note par  $C_3$  le circuit de longueur trois, dont les arcs sont colorés avec trois couleurs distinctes. Aussi on note par  $T_3$  le tournoi transitif dont les arcs sont colorés différemment.

### Définition 2 :

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe  $m$ -coloré ( $m \geq 1$ ). On dit qu'un sous ensemble  $N \subseteq X$  est un noyau par chemins monochromatiques de  $D$ , s'il satisfait les deux conditions suivantes :

- 1)  $\forall x, y \in N$ , il n'existe pas dans  $D$  de chemins monochromatiques reliant  $x$  et  $y$ .
- 2)  $\forall x \in X - N$ , il existe un chemin monochromatique de  $x$  vers un sommet de  $N$ .

Le noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $D = (X, U)$  n'est pas unique.

Un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe n'existe pas toujours.

La notion de noyaux par chemins monochromatiques dans un digraphe m-coloré est plus générale que celle du noyau dans un digraphe. En effet si les arcs d'un digraphe sont colorés distinctement alors le noyau par chemins monochromatiques est exactement un noyau dans  $D$ .

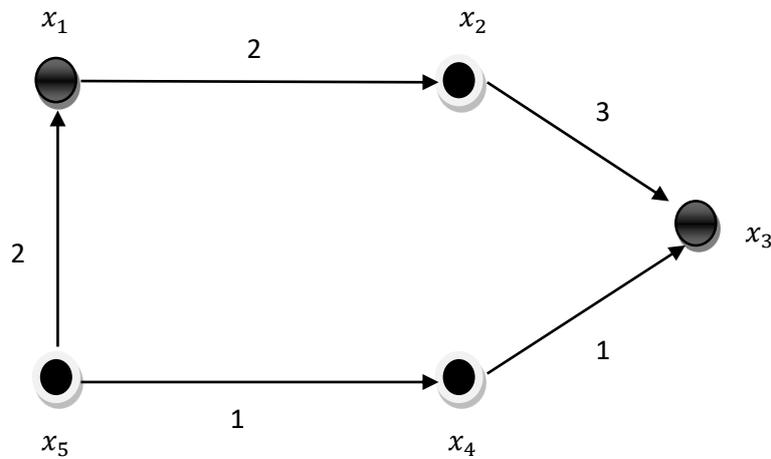


Figure 3.1 : un digraphe 3-coloré avec noyau  $\{x_1, x_3\}$

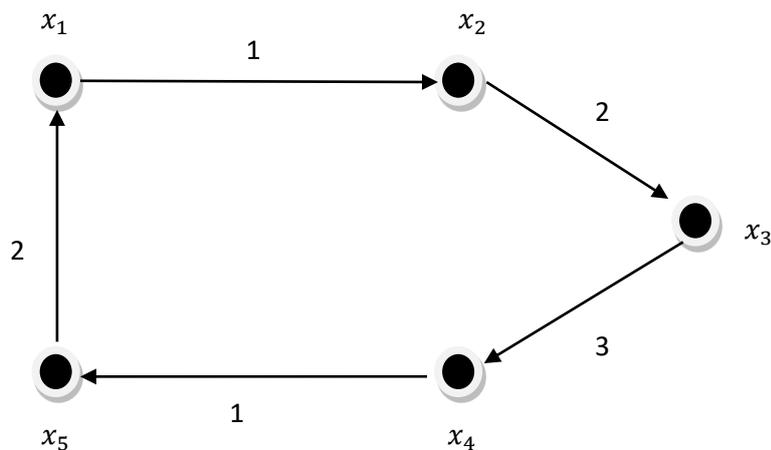


Figure 3.2 : un digraphe 3-coloré qui n'admet pas de noyau par chemins monochromatiques

### Définition 3 :

On appelle fermeture par chemins monochromatiques d'un digraphe  $m$ -coloré  $D = (X, U)$ , le digraphe  $m$ -coloré noté  $\mathcal{C}(D)$  où l'ensemble des sommets  $X(\mathcal{C}(D)) = X$ , et l'ensemble des arcs  $U(\mathcal{C}(D)) = U \cup_{i=1}^m \{(x_i, x_j) / \text{il existe un chemin monochromatique de couleur } k \text{ reliant } x_i \text{ et } x_j\}$ .

**Remarque 1 :** Chercher un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré revient à chercher un noyau dans la fermeture par chemins monochromatiques de  $D$ .

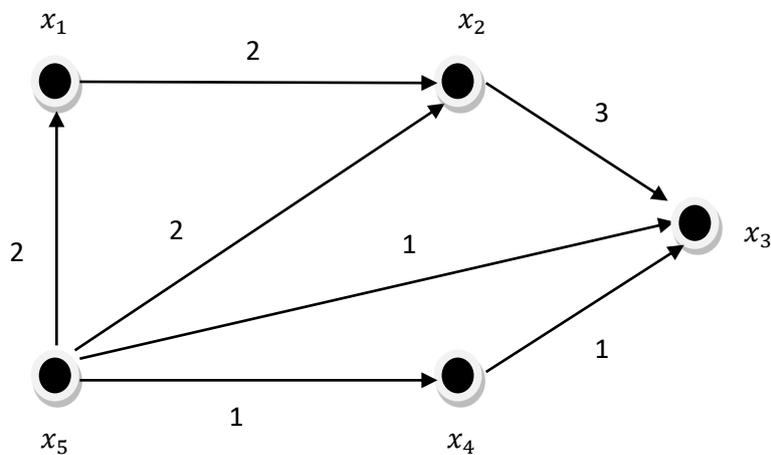


Figure 3.3 : La fermeture par chemins monochromatiques pour le digraphe de la figure 3.1

L'existence d'un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré, a été étudiée par plusieurs auteurs suivant les valeurs de  $m$  (nombre de couleurs attribuées aux arcs).

### Quelques résultats :

**Proposition 1 :** Si  $D = (X, U)$  est un digraphe 1-coloré, alors  $D$  admet un noyau par chemins monochromatiques.

**Preuve :**

Il suffit de montrer que  $\mathcal{C}(D)$  (la fermeture par chemins monochromatiques) admet un noyau. En effet  $\mathcal{C}(D)$  est un digraphe transitif et d'après la proposition 5 de chapitre II,  $\mathcal{C}(D)$  admet un noyau  $N$ , et ce noyau  $N$  constitue un noyau par chemins monochromatiques dans  $D$ .

### **Théorème 1 : [15]**

Tout digraphe 2-coloré admet un noyau par chemins monochromatiques.

### **Idée de la Preuve :**

Pour monter ce théorème, Sands, Sauer et Woodrowor donnent tous les ensembles  $E$  de sommets stables selon  $\leq$  ( $S \leq T$  si  $\forall s \in S, \exists t \in T$  tel que  $s = t$ , où il existe un chemin monochromatique de  $s \rightarrow t$  mais pas de  $t \rightarrow s$ , en particulier  $S \subseteq T$  implique  $S \leq T$ ), ceci fournit dans  $E$  une relation d'ordre  $(E, \leq)$ . Ensuite ils utilisent le lemme de Zorn, à savoir : Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné dont toute chaîne possède un majorant, alors  $(E, \leq)$  possède un élément maximal. Par la suite les auteurs montrent que l'élément maximal est un noyau par chemins monochromatiques du digraphe 2-coloré.

### **Corollaire : [15]**

Soit  $T$  un tournoi dont les arcs sont colorés avec 2 couleurs, alors il existe un sommet  $x$  de  $T$  tel que pour tout sommet  $y$  autre que  $x$  de  $T$ , il existe un chemin monochromatique de  $y$  vers  $x$  ( $\{x\}$  est un noyau par chemins monochromatiques de tournoi  $T$ ).

### **Autre preuve du corollaire :**

On montre que la fermeture par chemins monochromatiques  $\mathcal{C}(T)$  du tournoi 2-coloré  $T$  possède la propriété « tout circuit possède un arc symétrique ». En effet soit  $C$  un circuit de  $\mathcal{C}(T)$  de longueur la plus petite, il est clair que tous ses arcs sont dans  $T$  (sinon on aura des arcs symétriques dans  $C$ ), donc au fait un circuit de  $T$ , soient  $x, y$  et  $z$  trois sommets successifs de  $C$  avec  $(x, y)$  coloré par 1 et  $(y, z)$  coloré par 2 sans perte de généralité, comme  $T$  est un tournoi les sommets  $x$  et  $z$  sont forcément reliés. Si l'arc  $(z, x)$  est un arc de  $T$ , alors l'arc est coloré soit par 1 ou par 2, dans tous les cas on aura ou bien  $(x, y)$  ou  $(y, z)$  est un arc symétrique de  $\mathcal{C}(T)$ , sinon on aura une contradiction avec le fait qu'on a pris un circuit de longueur la plus petite.

## Problème de Sands, Sauer et Woodrow [15]

Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré sans  $C_3$ , alors  $T$  admet un sommet noyau par chemins monochromatiques.

Pour  $m \geq 4$ , ce problème est faux, néanmoins il reste ouvert pour  $m=3$ .

## Théorème 2 : [16]

Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique et tout tournoi transitif d'ordre 3 est quasi-monochromatique ( $T$  ne contient pas  $C_3$  et  $T_3$ ), alors  $T$  a un sommet noyau par chemins monochromatiques.

### Preuve :

Il suffit de montrer que  $\mathcal{C}(T)$  (la fermeture par chemins monochromatiques de  $T$ ) possède la propriété « tout circuit possède un arc symétrique », d'où  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques. Supposons qu'au contraire ils existent des circuits dans  $\mathcal{C}(T)$  qui n'ont pas d'arcs symétriques, soit  $C$  le plus petit circuit en longueur de  $\mathcal{C}(T)$  n'ayant pas d'arcs symétriques. Ils existent dans  $C$  deux arcs successifs de couleurs différents (sinon  $C$  possède un arc symétrique). Soient  $(x, y)$  et  $(y, z)$  deux arcs ayant deux couleurs distinctes (sinon tous les arcs de  $C$  ont la même couleur) 1 pour le premier et 2 pour le second sans perte de généralité. Si l'arc  $(z, x)$  existe et  $(x, z)$  n'existe pas alors  $(x, y, z, x)$  est un circuit de longueur 3 quasi-monochromatique (sinon on crée un  $C_3$ ), donc  $C$  admet  $(x, y)$  ou  $(y, z)$  comme arc symétrique de  $\mathcal{C}(T)$ . Si l'arc  $(x, z)$  existe et  $(z, x)$  n'existe pas dans ce cas on aura un circuit  $(x, z, \dots, x)$  plus petit que  $C$ , contradiction avec le fait que  $C$  est le plus petit circuit de  $\mathcal{C}(T)$  n'ayant pas d'arcs symétriques, alors forcément  $(x, z)$  est un arc symétrique sinon c'est fini. Donc il existe un chemin monochromatique de  $z$  vers  $x$  de couleur  $l$ . Il est facile de voir que la couleur  $l$  est différente de 1 et 2, sinon on aura un arc symétrique  $(y, z)$  si  $l = 1$  ou bien  $(x, y)$  si  $l = 2$ , dans les deux cas  $C$  possède un arc symétrique. Alors on peut supposer que  $l$  est de couleur 3. Soit  $(z, u_1, u_2, \dots, u_p, x)$  le plus court chemin monochromatique reliant  $z$  à  $x$  de couleur 3 (voir *figure 3.4*).

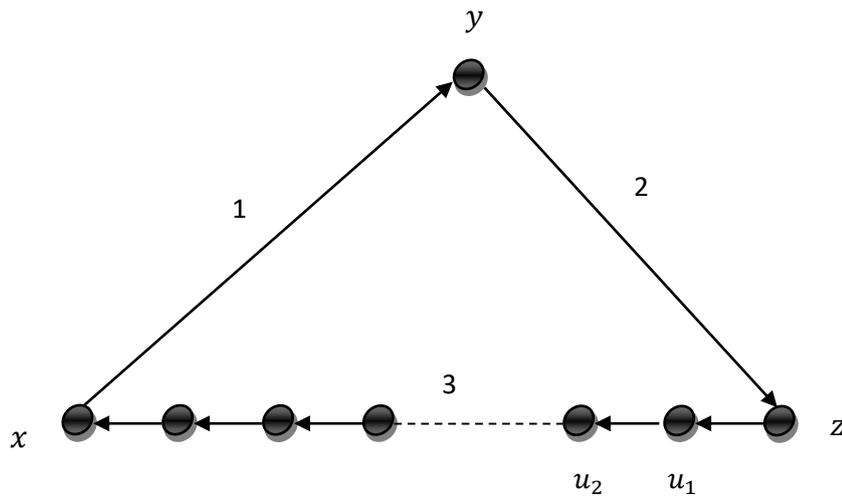


Figure 3.4 : chemin monochromatique reliant  $z$  à  $x$

Considérons la couleur de l'arête entre  $y$  et  $u_i$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Elle ne peut pas être 3, sinon on aura l'arc  $(x, y)$  ou  $(y, z)$  est un arc symétrique. Il est facile de voir que les arêtes  $[y, u_i]$  et  $[y, u_{i+1}]$  sont colorées avec deux couleurs différentes. Alors  $y u_i u_{i+1}$  est un triangle avec trois couleurs différentes, contradiction. Donc ce qu'on a supposé est faux. Alors  $C$  possède un arc symétrique.

### **Théorème 3 :** [16]

Si  $T$  est un tournoi  $m$ -coloré ( $m \geq 5$ ) tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique (sans  $C_3$ ), alors il n'est pas vrai en général que ce tournoi admet un noyau par chemins monochromatiques.

### **Preuve :**

Shen Minggang a fourni dans [16] le contre-exemple suivant qui a contredit le problème posé par Sands, Sauer et Woodrow.

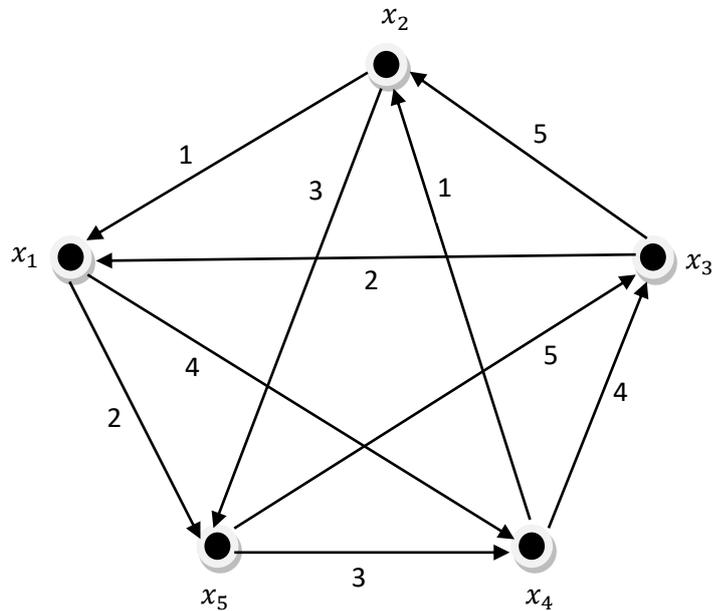


Figure 3.5 : Tournoi 5-coloré sans  $C_3$  qui n'admet pas de noyau par chemins monochromatiques

### **Théorème 4 :** [7]

Si  $T$  est un tournoi 4-coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique (sans  $C_3$ ), alors il n'est pas vrai en général que ce tournoi admet un noyau par chemins monochromatiques.

### **Preuve :**

H.Galeana-Sánchez et R.Rojas-Monroy ont fourni dans [7] le contre-exemple suivant qui a contredit le problème «  $T$  tournoi 4-coloré sans  $C_3$  admet un sommet noyau ».

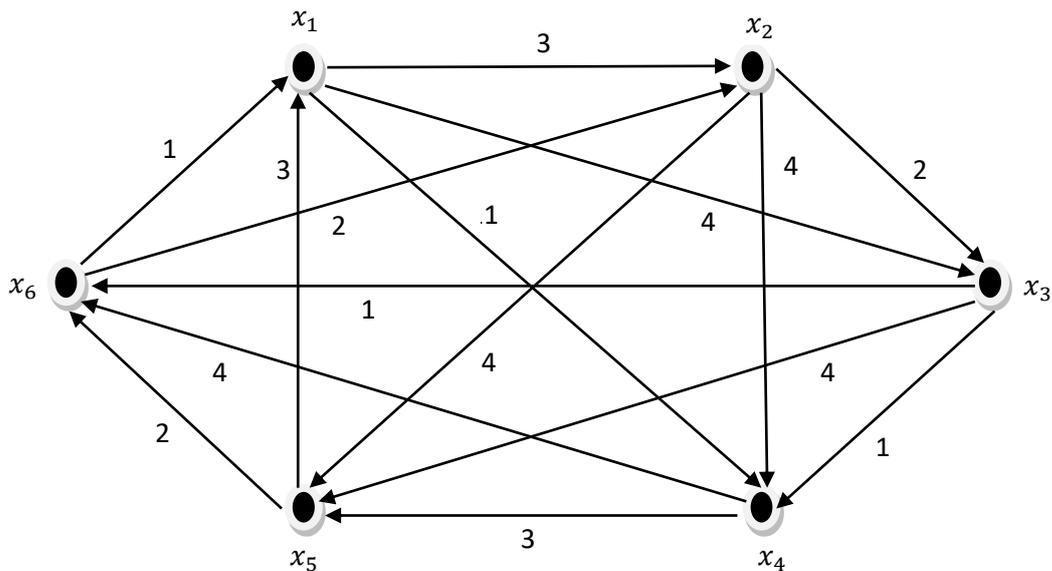


Figure 3.6 : Tournoi 4-coloré sans  $C_3$  qui n'admet pas de noyau par chemins monochromatiques

Dans ce qu'il suit on va présenter quelques conditions suffisantes données par H.Galeana-Sánchez pour qu'un tournoi  $m$ -coloré admette un noyau par chemins monochromatiques.

### **Théorème 5 :** [8]

Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique, alors  $\mathcal{C}(T)$  est noyau-parfait et donc  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques.

### **Théorème 6 :** [8]

Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est monochromatique, alors  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques.

## Preuve :

On utilise le théorème précédant de H.Galeana-Sánchez « Si  $T$  est un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique alors  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques ». En effet il suffit de montrer que les circuits de longueur 4 sont quasi-monochromatiques, car les circuits de longueur 3 sont monochromatiques donc quasi-monochromatiques.

Soit  $C = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$  un circuit de longueur 4 de  $T$ , si tous les arcs de  $C$  sont colorés avec la même couleur alors c'est fini (monochromatique donc quasi-monochromatique), donc forcément ils existent deux arcs consécutifs  $(x_1, x_2)$  et  $(x_2, x_3)$  colorés avec deux couleurs distinctes sans perte de généralité disons 1 et 2. L'arc  $(x_3, x_1)$  n'existe pas (sinon  $(x_1, x_2, x_3, x_1)$  est un circuit de longueur 3 qui n'est pas monochromatique), donc  $(x_1, x_3)$  est un arc de  $T$ . Les arcs  $(x_3, x_4)$  et  $(x_4, x_1)$  sont colorés avec la même couleur  $l$  (sinon on obtient un circuit  $(x_1, x_3, x_4, x_1)$  de longueur 3 qui n'est pas monochromatique). La couleur  $l$  est forcément 1 ou 2 (sinon on aura un circuit de longueur 3 qui est ou bien  $(x_2, x_3, x_4, x_2)$  ou bien  $(x_1, x_2, x_4, x_1)$  qui n'est pas monochromatique). Donc les arcs  $(x_3, x_4)$  et  $(x_4, x_1)$  sont colorés avec 1 ou 2 et dans les deux cas on aura un circuit de longueur 4  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$  quasi-monochromatique donc  $T$  est tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique et d'après le théorème précédent  $T$  admet un sommet noyau par chemins monochromatiques.

## Théorème 7 : [9]

Soit  $D$  un digraphe  $m$ -coloré obtenu à partir de la suppression d'un arc d'un tournoi  $T_n$  (ie :  $D_n \cong T_n - (x, y)$ ). Si tout circuit contenu dans  $D$  de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique, alors  $D$  a un noyau par chemins monochromatiques.

## Représentation matricielle d'un digraphe m-coloré : [13]

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe m-coloré ayant  $n$  sommets (on suppose que les sommets sont ordonnés).

On définit la matrice  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in X^2}$  associée au digraphe  $D$ . Chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet du digraphe. Ainsi chaque élément de la matrice indique la relation entre deux sommets tel que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \{l\} & \text{si } (x_i, x_j) \in U \text{ et si } (x_i, x_j) \text{ est coloré avec la couleur } l. \\ \emptyset & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

**Exemple 1 :** pour le digraphe 3-coloré  $D$  suivant :

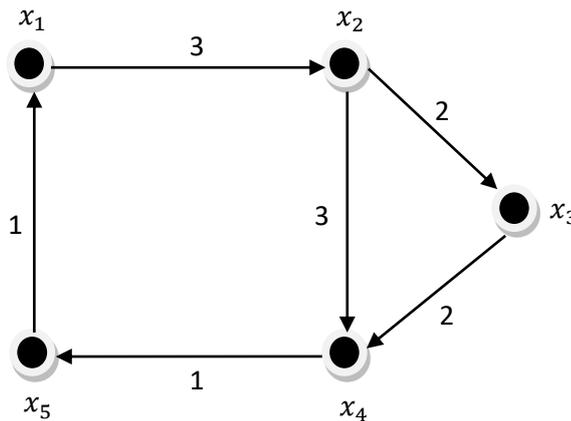


Figure 3.7 : digraphe 3-coloré d'ordre 5

La matrice associée au digraphe 3-coloré  $D$  :

$$A = \begin{pmatrix} \emptyset & \{3\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{2\} & \{3\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{2\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{1\} \\ \{1\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

## Recherche des chemins monochromatiques : [13]

Soit  $A$  la matrice associée au digraphe  $m$ -coloré  $D = (X, U)$ . On désigne par  $(a_{i,j}^{(p)})$ , l'élément de la matrice  $A^p = A \times \dots \times A$  ( $p$  fois), qui est égal à l'ensemble des couleurs des chemins monochromatiques de longueur  $p$  (pouvant passer plusieurs fois par un même sommet) entre les sommets  $i$  et les sommets  $j$  du digraphe  $D$ . On utilise le produit matriciel tel qu'il est défini en algèbre linéaire et on calcule  $A^p$ , en effet :

$$A^2 = A \times A \quad A^2 = (a_{i,j}^{(2)}) \quad 1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j \leq n$$

.

$$A^p = A^{p-1} \times A \quad A^p = (a_{i,j}^{(p)}) \quad 1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j \leq n$$

.

.

$$A^k = A^{k-1} \times A \quad A^k = (a_{i,j}^{(k)}) \quad 1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j \leq n.$$

$l \in a_{i,j}^{(p)}$  signifie qu'il existe au moins un chemin monochromatique de longueur  $p$  dont les arcs sont colorés avec la couleur  $l$  reliant le sommet  $x_i$  au sommet  $x_j$ .

Un ensemble non vide de la matrice  $A^{k-1}$  représente un ensemble de couleurs des plus longs chemins monochromatiques du digraphe  $m$ -coloré  $D$ .

**Remarque 2 :** Les opérations logiques sont :

**Le symbole  $\times$**  représente la concaténation d'un chemin monochromatique avec un arc coloré (" $\cap$ " ET logique), dont le résultat est ou bien une couleur  $l$  si le chemin et l'arc sont colorés avec la même couleur  $l$ , sinon il n'y a pas de couleur associée au chemin résultant.

**Le symbole  $+$**  signifie qu'on ajoute toutes les couleurs résultants des chemins possibles donnés par la concaténation (" $\cup$ " OU logique).

### Algorithme qui calcule le produit de deux matrices :

*debut*

*Pour i ← 1 à n faire*

*Pour j ← 1 à n faire*

*$c_{ij} \leftarrow \emptyset$*

*Pour k ← 1 à n faire*

*$c_{ij} \leftarrow c_{ij} \cup (a_{ik} \cap b_{kj})$*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*fin ;*

**Exemple 2 :** la matrice associée au digraphe 3-coloré D (voir Figure 3.7) qui représente les chemins monochromatiques de longueur 2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{3\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{2\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{1\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

Il existe trois chemins monochromatiques de longueur 2, le premier relie  $x_1$  à  $x_4$  coloré par 3 et le second relie  $x_2$  à  $x_4$  dont la couleur est 2, et le dernier relie  $x_4$  à  $x_1$  par un chemin monochromatique de couleur 1.

Le plus long chemin monochromatique dans le digraphe 3-coloré D est de longueur 2 car tous les éléments de la matrice  $A^3$  sont vides.

## Fermeture par chemin monochromatique :

Soit  $D = (X, U)$  un digraphe  $m$ -coloré d'ordre  $n$ . La matrice de la fermeture par chemins monochromatiques du digraphe  $D$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , notée  $F$  définie comme suit

$$F = A + A^2 + \dots + A^{diam(D)} \quad A \text{ est la matrice associée au digraphe } D.$$

$$F = (f_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n.$$

$f_{ij}$  Indique l'existence des chemins monochromatiques de longueur  $\leq diam(D)$  dans le digraphe  $D$  de sommet  $x_i$  vers le sommet  $x_j$ .

Si  $f_{ij} = \emptyset$  alors il n'existe pas de chemin monochromatique reliant le sommet  $x_i$  au sommet  $x_j$  dans le digraphe  $D$ .

### Algorithme qui calcule la somme de deux matrices :

*debut*

*Pour*  $i \leftarrow 1$  à  $n$  *faire*

*Pour*  $j \leftarrow 1$  à  $n$  *faire*

$$s_{ij} \leftarrow a_{ij} \cup b_{ij}$$

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin ;*

**Exemple 3 :** la matrice de la fermeture par chemin monochromatique du digraphe 3-coloré (voir Figure 3.7).

$$F = \begin{pmatrix} \emptyset & \{3\} & \emptyset & \{3\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{2\} & \{2,3\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{2\} & \emptyset \\ \{1\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{1\} \\ \{1\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

## Détermination d'un noyau par chemins monochromatiques pour les tournois : [13]

Dans les tournois  $m$ -colorés le noyau par chemins monochromatiques n'existe pas toujours, et s'il existe il est constitué d'un seul sommet, car un tournoi est un digraphe complet antisymétrique.

Donc de la matrice de fermeture par chemins monochromatiques d'un tournoi  $m$ -coloré on va chercher la colonne  $C_i$  qui contient tous les ensembles à l'exception de la diagonale différent de l'ensemble vide, si  $C_i$  existe alors le noyau par chemins monochromatiques du tournoi est le sommet  $x_i$  (pour tout sommet  $x_j$  autre que  $x_i$  il existe un chemin monochromatique de ce sommet vers  $x_i$ ), sinon il n'existe pas de noyau par chemins monochromatiques dans ce tournoi.

### Algorithme pour déterminer le noyau dans les tournois $m$ -colorés

(ALGTOUR) :

*Donnée* :  $T = (X, U)$  tournoi  $m$  - coloré ;  $|X| = n$ ;

$m =$  nombre de couleur

*Fonction produit*( $A, B$  matrice  $n \times n$ ): matrice  $n \times n$

*Variable*  $i, j$  : entier,  $C$  : matrice  $n \times n$

*debut*

*Pour*  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire

*Pour*  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire

$c_{ij} \leftarrow \emptyset$

*Pour*  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire

$c_{ij} \leftarrow c_{ij} \cup (a_{ik} \cap b_{kj})$

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*fin* ;

*Fonction somme (A,B matrice  $n \times n$ ) : matrice  $n \times n$*

*Variable  $i, j$  : entier,  $S$  : matrice  $n \times n$*

*debut*

*Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire*

*Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire*

*$s_{ij} \leftarrow a_{ij} \cup b_{ij}$*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin ;*

*Fonction Fermetur\_CM (A matrice  $n \times n$ ) : matrice  $n \times n$*

*Variable  $i, j, l, t, test$  : entier,  $P, F$  : matrice  $n \times n$*

*Debut*

*$P \leftarrow A$*

*$F \leftarrow A$*

*Repeter*

*$P \leftarrow$  produit ( $P, A$ )*

*$test \leftarrow$  le nombre d'élément non nul hors diagonale dans  $P$ .*

*Si ( $test <> 0$ )*

*Pour  $k \leftarrow 1$  à  $m$  faire*

*Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire*

*Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire*

*Pour  $l \leftarrow 1$  à  $|p_{ij}|$  faire*

*Si ( $i <> j$  et  $p_{ijl} = k$ ) alors*

*Pour  $t \leftarrow 1$  à  $|f_{ijl}|$  faire*

*Si ( $f_{ijl} = p_{ijl}$ ) alors*

*$p_{ijl} \leftarrow 0$*

*Fin si*

*Fin pour*

*Fin si*

*Fin pour*

```

    Fin pour
  Fin pour
  Fin pour
  test ← le nombre d'élément non nul hors diagonale dans P.
  Fin si
  F ← somme(F,P)
  Jusqu'à (test = 0)
  fin ;

```

Variable  $i, j, n, m$  : entier,  $F$  : matrice  $n \times n$

debut

$F \leftarrow \text{Fermeture\_CM}(A)$

Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire

$stop \leftarrow \text{faux}$  ;  $i \leftarrow 1$  ;

  tant que ( $i \leq n$  et  $stop = \text{faux}$ ) faire

    si ( $i \neq j$  et  $f_{ij} = \emptyset$ ) alors

$stop \leftarrow \text{vrai}$

    fin si

$i \leftarrow i + 1$

  fin tant que

fin pour

Si ( $stop = \text{faux}$ ) alors

  Écrire (" le noyau est  $x$ ",  $j$ )

Sinon

  Écrire (« le noyau n'existe pas » )

fin

## La Complexité de l'Algorithme ALGTOUR :

$m$  est le nombre de couleurs attribuées aux arcs d'un tournoi d'ordre  $n$ , dont le nombre des arcs est  $\frac{n(n-1)}{2}$ , donc  $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ .

Le diamètre d'un digraphe  $m$ -coloré est égale à  $n - 1$  (au pire des cas).

Le calcul de la fermeture par chemin monochromatique nécessite :

1)  $(n - 1)$  multiplication des matrices

On effectue  $m^2(n - 1)n^3$  opération concernant  $\cap$  et  $m^2(n - 1)n^3$  opération concernant  $\cup$ .

2)  $(n - 1)$  addition des matrices

On effectue  $m^2(n - 1)n^2$  opération concernant  $\cup$ .

3)  $(n - 1)$  test dans le pire des cas pour arrêter au diamètre

Un test s'effectue en  $O(n^7)$  car pour calculer le nombre d'élément hors diagonale il nous faut  $(n - 1)^3$  opération concernant  $\cup$ , et  $m(n - 1)n^4$  supprimer les éléments répéter dans la matrice.

Donc le nombre d'opérations  $\simeq O(n^8)$ .

## Quelques études établis :

**Remarque 3 :** Soit  $D = (X, U)$  un digraphe  $m$ -coloré.

Si la fermeture par chemins monochromatiques de digraphe  $D$  ( $\mathcal{C}(D)$ ) est sans circuit ou sans circuit impaire ou tout circuit de  $\mathcal{C}(D)$  possède un arc symétrique ou tout circuit impair de  $\mathcal{C}(D)$  possède deux arcs symétriques, alors  $D$  l'est de même, vu que  $D$  est un digraphe partiel de  $\mathcal{C}(D)$ .

## Théorème 8 :

Si  $D$  est un digraphe  $m$ -coloré sans circuit, alors sa fermeture par chemins monochromatiques est sans circuit. En outre,  $D$  admet un noyau par chemins monochromatiques unique qui est le noyau de  $\mathcal{C}(D)$ .

## Preuve :

On procède par l'absurde. Soit  $D = (X, U)$  un digraphe  $m$ -coloré sans circuit. On suppose que la fermeture par chemins monochromatiques de  $D$  contient des circuits. Soit  $C$  un circuit de  $\mathcal{C}(D)$ . Dans  $C$  il existe forcément un arc  $(x, y) \in U(\mathcal{C}(D))$  et  $(x, y) \notin U$  (car  $D$  ne contient pas de circuit), donc de l'arc  $(x, y)$  résulte un chemin monochromatique de  $x$  vers  $y$  dans  $D$ , d'où on a une contradiction avec le fait que  $D$  est sans circuit.

Comme la fermeture par chemins monochromatiques de  $D$  est sans circuit et son noyau est unique (voir théorème 1 du chapitre 2), alors le noyau de  $\mathcal{T}(D)$  est le noyau par chemins monochromatiques de  $D$  (par définition de  $\mathcal{T}(D)$ ).

**Théorème 9 :**

Si  $D$  est un digraphe transitif  $m$ -coloré, alors sa fermeture par chemins monochromatiques est  $D$ . Et le noyau par chemins monochromatiques est exactement le noyau de  $D$ .

**Preuve :**

Soit  $D$  un digraphe transitif  $m$ -coloré, par la proposition 5 du chapitre II,  $D$  admet un noyau et ce noyau est forcément un noyau par chemins monochromatiques car il est absorbant et il n'existe pas de chemins entre deux sommets du noyau et alors il n'existe pas de chemins monochromatiques entre ces deux sommets.

**Remarque 4 :** Si  $D$  est un digraphe  $m$ -coloré sans circuit impair, alors il n'est pas vrai que sa fermeture par chemins monochromatiques  $\mathcal{T}(D)$  est sans circuit impair.

Nous fournissons l'exemple suivant qui confirme la Remarque 4 :

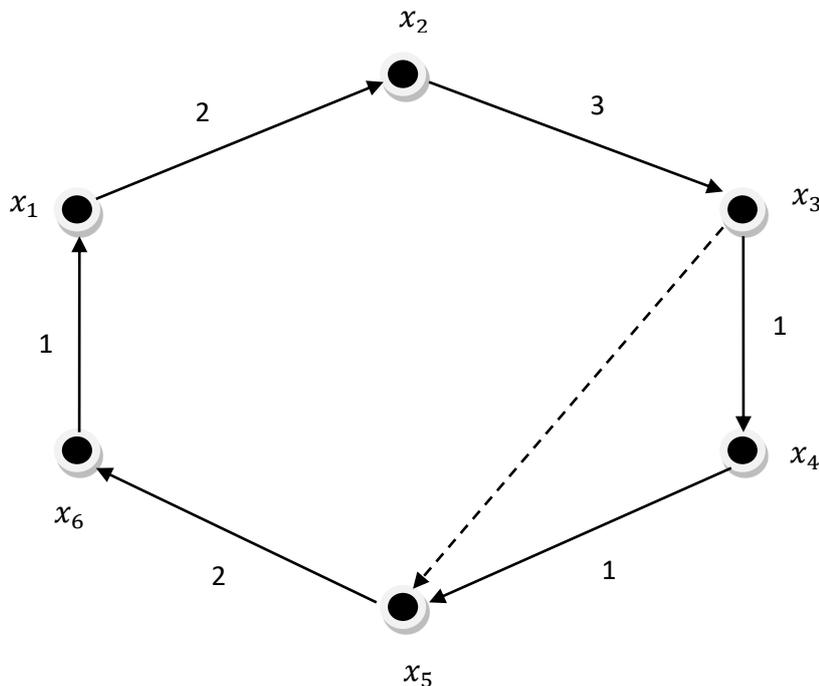


Figure 3.8 : digraphe 3-coloré d'ordre 6

La Figure 3.8 représente le digraphe  $C_6$  3-coloré sans circuit impair, l'arc  $(x_3, x_5)$  est un arc de  $U(\mathcal{T}(D))$ , il est clair que  $\mathcal{T}(D)$  possède un circuit impair. Ce qui justifie la remarque précédente.

**Remarque 5 :** Si  $D$  est un digraphe  $m$ -coloré symétrique, alors il n'est pas vrai en général qu'il admet un noyau par chemins monochromatiques.

Nous fournissons l'exemple suivant qui confirme la remarque 5.

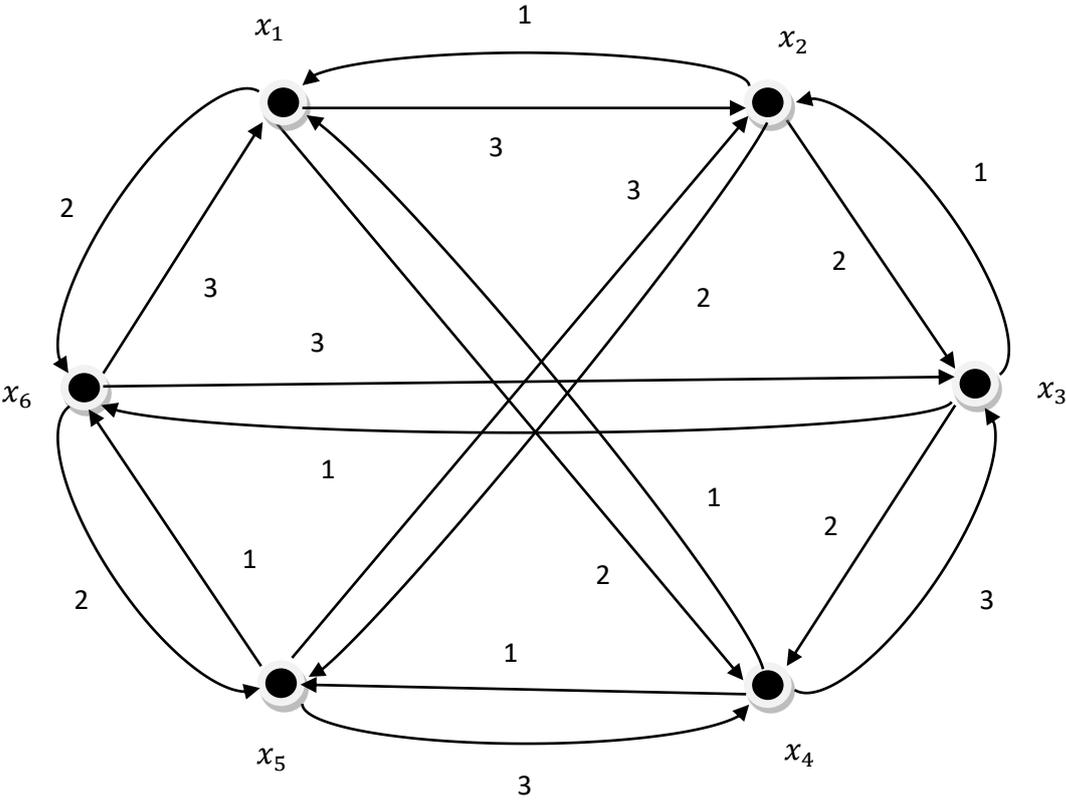


Figure 3.9 : digraphe symétrique 3-coloré

#### Définition 4 :

Un **arbre** est un graphe connexe et sans cycle. Un arbre orienté est un arbre où les arêtes sont munies d'une orientation avec la possibilité d'avoir des arcs symétriques.

Un **cactus** est un graphe connexe dans lequel deux cycles simples ont au plus un sommet en commun. De manière équivalente, Un graphe est un cactus si et seulement si toute composante 2-connexe est soit un cycle, soit une arête.

L'**unicycle** est le graphe obtenu à partir d'un arbre en lui ajoutant une arête quelconque entre une paire de ses sommets.

**Remarque 6 :** Si  $D$  est un digraphe  $m$ -coloré sans circuit impair, alors il n'est pas vrai que  $D$  possède un noyau par chemins monochromatiques.

Nous fournissons l'exemple suivant qui confirme la remarque 6.

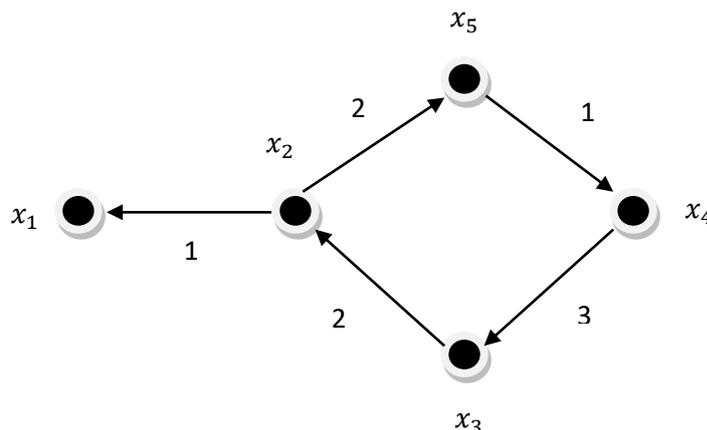


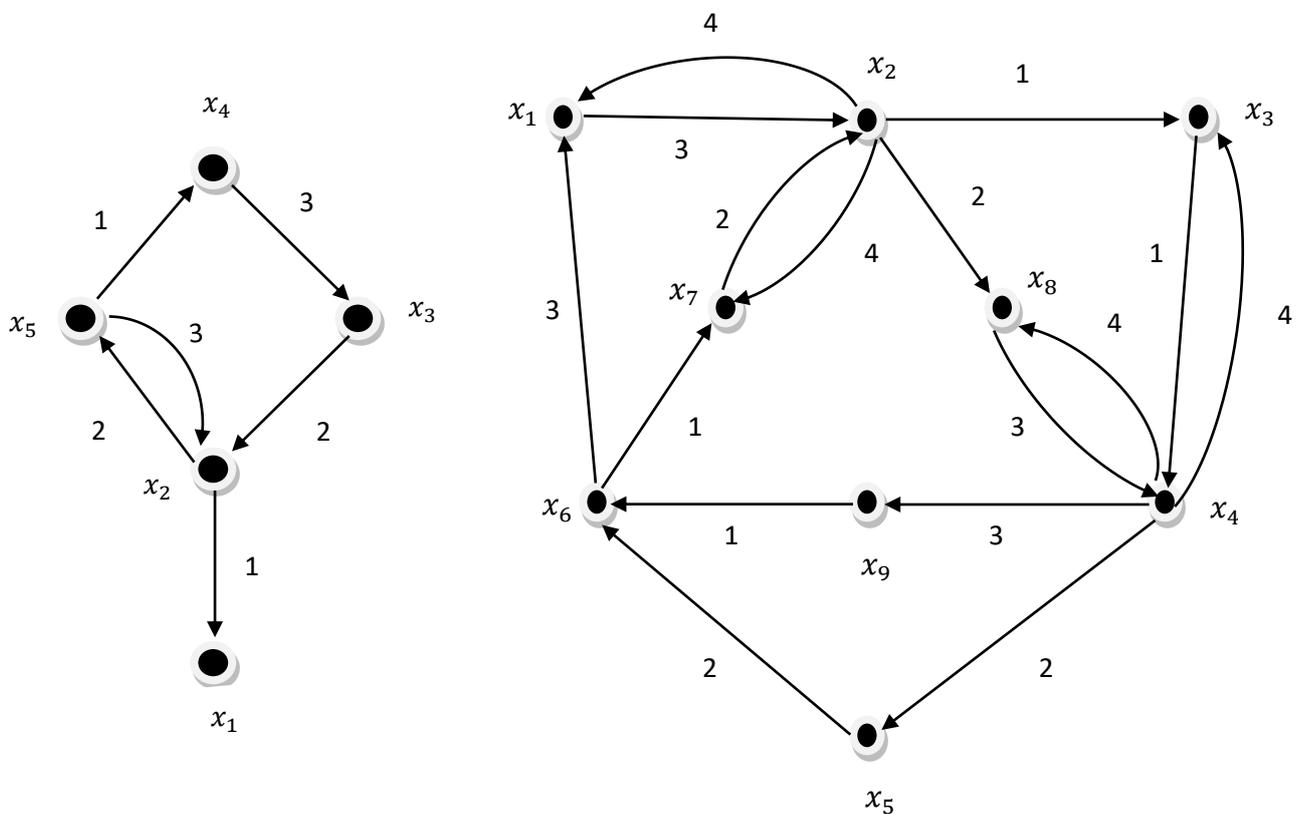
Figure 3.10 : digraphe 3-coloré sans circuit impair

Le noyau par chemins monochromatiques n'existe pas dans le digraphe de la Figure 3.10, car comme le sommet  $x_1$  n'a pas de successeur, alors il est forcément dans le noyau par chemins monochromatiques, donc nous sommes obligés de prendre les sommets  $x_3$  et  $x_5$  dans le noyau par chemins monochromatiques, mais il existe un chemin monochromatique de  $x_3$  à  $x_5$  d'où on n'a pas de noyau par chemins monochromatiques.

De la remarque 6, on peut dire que les classes de digraphes  $m$ -coloré suivantes : les digraphes bipartis, les cactus orientés, les unicycles, sont des digraphes qui n'admettent pas toujours un noyau par chemins monochromatiques. La Figure 3.10 montre ce résultat.

**Remarque 7 :** Si  $D = (X, U)$  est un digraphe  $m$ -coloré tel que tout circuit possède un arc symétrique, alors il n'est pas vrai que  $D$  admet un noyau par chemins monochromatiques.

On fournit les digraphes  $m$ -colorés suivants, qui nous permettent de vérifier la remarque 7.



*La figure 3.11 : digraphe 3-coloré et digraphe 4-coloré tels que tout circuit possède un arc symétrique*

### **Théorème 10 :**

Si  $T$  est un arbre orienté  $m$ -coloré (les arcs symétriques sont permis), alors  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques.

#### **Preuve :**

Soit  $T = (X, U)$  un arbre orienté  $m$ -coloré.

Si  $T$  ne contient pas d'arcs symétriques, alors  $T$  est un digraphe  $m$ -coloré sans circuit, et d'après le théorème 8,  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques. Sinon  $T$  admet des arcs symétriques, en utilisant la Remarque 1 on montre que la fermeture transitive par chemins monochromatiques  $\mathcal{C}(T)$  admet un noyau, pour cela il suffit de montrer que tout circuit de  $\mathcal{C}(T)$  possède un arc symétrique.

Il est clair que  $\mathcal{C}(T)$  possède des circuits (au moins les arcs symétriques de  $T$ ), s'il existe aucun circuit de longueur plus que deux alors c'est fini (tout circuit de  $\mathcal{C}(T)$  possède un arc symétrique), sinon on suppose qu'il existe un circuit  $C$  de longueur supérieur ou égale à trois qui ne possède pas d'arc symétrique. Dans  $C$  il existe forcément un arc  $(x, y)$  tel que  $(x, y) \in U(\mathcal{C}(T))$  et  $(x, y) \notin U$  (par définition de  $T$ ), donc de l'arc  $(x, y)$  résulte un chemin monochromatique de  $x$  vers  $y$  dans  $T$ , d'où on a une contradiction avec le fait que ou bien  $C$  ne possède d'arcs symétriques ou bien avec  $T$  est un arbre (il n'existe pas dans  $T$  des circuits de longueur plus que trois). Alors tout circuit de  $\mathcal{C}(T)$  possède un arc symétrique, et d'après le théorème 2 du chapitre II on a  $\mathcal{C}(T)$  admet un noyau. Comme  $\mathcal{C}(T)$  admet un noyau alors  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques.

### **Théorème 11 :**

Si  $C$  est un cycle pair orienté  $m$ -coloré sans arcs symétriques, alors  $C$  admet un noyau par chemins monochromatiques.

#### **Preuve :**

Soit  $C = (X, U)$  un cycle pair orienté  $m$ -coloré sans arcs symétriques.

Si  $C$  n'est pas un circuit alors d'après le théorème 8, il existe un noyau par chemins monochromatiques. Sinon  $C$  est un circuit pair sans arcs symétriques. Si les arcs de  $C$  sont colorés de façons alternées alors le noyau par chemins monochromatiques de  $C$  est le

noyau de ce dernier. Sinon On montre qu'il existe un noyau par chemins monochromatiques par le procédé suivant, on cherche le plus long chemin monochromatique dans  $C$ , on le note par  $P = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ , puis on considère la chaîne  $C'$  avec  $C' = C - P$ . Comme  $C'$  est un arbre orienté d'après le théorème 10, alors il admet un noyau par chemins monochromatiques  $N'$ . Soit  $x_k$  le sommet puits du chemin  $P$ . S'il existe un chemin monochromatique de  $x_k$  vers les sommets de  $N'$  alors  $N = N' \cup \{x_{k-1}\}$  est un noyau par chemins monochromatiques de  $C$  (les sommets de  $P$  sont reliés par un chemin monochromatique aboutissant en  $x_{k-1}$  et les autres sommets avec  $x_k$  sont reliés par un chemin monochromatique aboutissant en  $N'$ ). Sinon s'il n'existe pas de chemin monochromatique entre  $x_k$  et les sommets de  $N'$  et alors dans ce cas  $N = N' \cup \{x_k\}$  est le noyau par chemins monochromatiques de  $C$ .

**Problème ouvert :** Est-il vrai qu'un cycle pair orienté  $m$ -coloré avec la possibilité d'avoir des arcs symétriques admet un noyau par chemins monochromatiques ?

Algorithme de recherche de noyau par chemins monochromatiques pour les digraphes  $m$ -coloré sans circuit :

*Donnée :*  $D = (X, U)$  digraphe  $m$  - coloré sans circuit ;  $|X| = n$  et  $|U| = m$ .

*Résultat :*  $K$  noyau par chemins monochromatiques dans  $D$ .

*Début*

$K = \emptyset$

*Déterminer*  $\mathcal{C}(D)$  la fermeture par chemins monochromatiques de  $D$ .

*Répéter*

- soit  $x_1$  un sommet puits de  $\mathcal{C}(D)$  .

-  $K = x_1 \cup K$ .

-  $X = X - (\{x_1\} \cup \Gamma^-\{x_1\})$ .

-  $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(D) [X]$ .

*Jusqu'à*  $X = \emptyset$ .

*Fin.*

### **Complexité de l'algorithme :**

On peut déterminer un noyau dans les digraphe m-coloré sans circuit en  $O(n^8)$  car l'opération la plus couteuse dans l'algorithme est celle de la détermination de la fermeture par chemins monochromatiques de D.

# CHAPITRE IV

## REPRESENTATION DE NGRAPHE1.0

### **Introduction :**

Après la présentation, dans les chapitres précédents, des concepts de noyaux et de noyaux par chemins monochromatiques dans les digraphes ou les digraphes colorés, nous élaborons dans ce chapitre la conception d'un logiciel baptisé NGRAPHE1.0, et on présente ses différentes fonctions relatives à la détermination du noyau et noyau par chemins monochromatiques dans certaines classes de digraphes.

### **Langage de programmation utilisé :**

Dans ce projet on a utilisé le langage de programmation C++ ainsi que l'environnement de développement Code Blocks.

#### **1. Description du langage C++ : [11]**

Apparu au début des années 90, le langage C++ est actuellement l'un des plus utilisés dans le monde, aussi bien pour les applications scientifiques que pour le développement des logiciels. En tant qu'héritier de langage C, le C++ est d'une grande efficacité. Mais il a en plus des fonctionnalités puissantes, comme par exemple la notion de classe, qui permet d'appliquer les techniques de la programmation-objet.

#### **2. Code Blocks (IDE) : [10]**

Le logiciel Code Blocks fait partie des logiciels de type EDI (Environnement de Développement Intégré, IDE en anglais), il est un environnement de développement intégré, et universel permettant potentiellement de créer des projets de développement mettant en œuvre les langages de programmation C et C++.

## Interface graphique : [18]

On a construit l'interface de notre logiciel à l'aide de la bibliothèque wxWidgets. **wxWidgets** est une bibliothèque C++ qui permet aux développeurs de créer des applications pour Windows, MacOS, Linux et d'autres plates-formes avec une seule base de code.

### Description du logiciel NGRAPHE1.0 :

Les figures ci-dessous présentent l'interface graphique du logiciel et les différentes fonctionnalités qu'il offre.

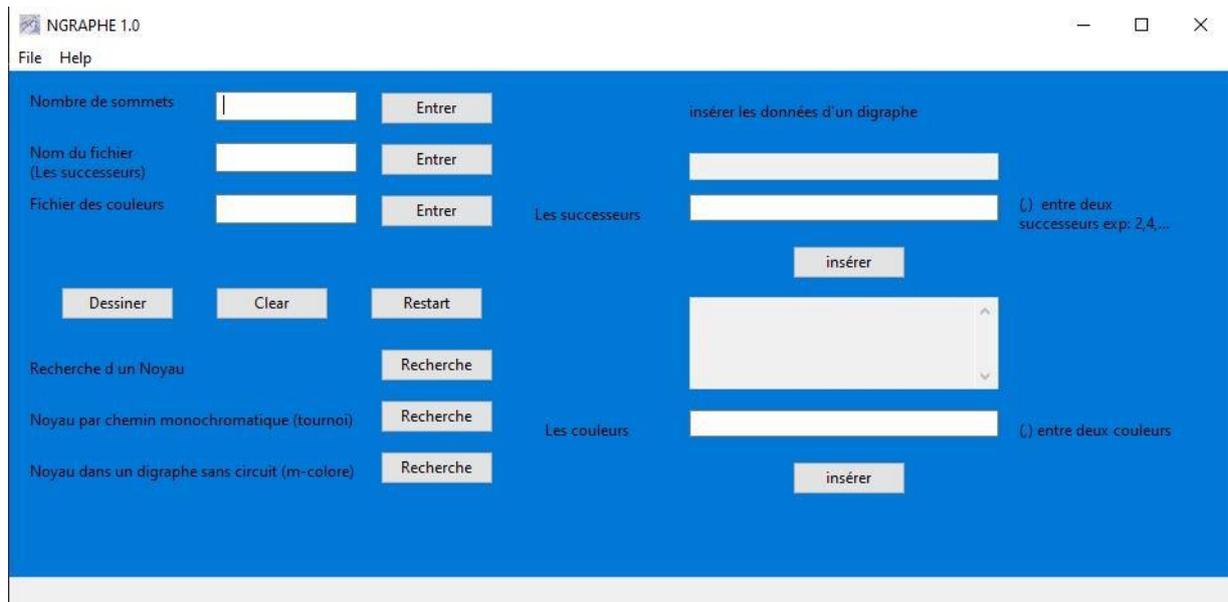


Figure 4.1 : Présentation de l'interface.

#### 1. Barre menu : contient file menu et help menu.

➤ **File menu** : offre les choix «New» « Save » « Exit ».

- New : permet de d'ouvrir une nouvelle page de travaille.
- Save : permet d'enregistrer les digraphes données dans des fichiers.
- Exit : permet de quitter le programme.

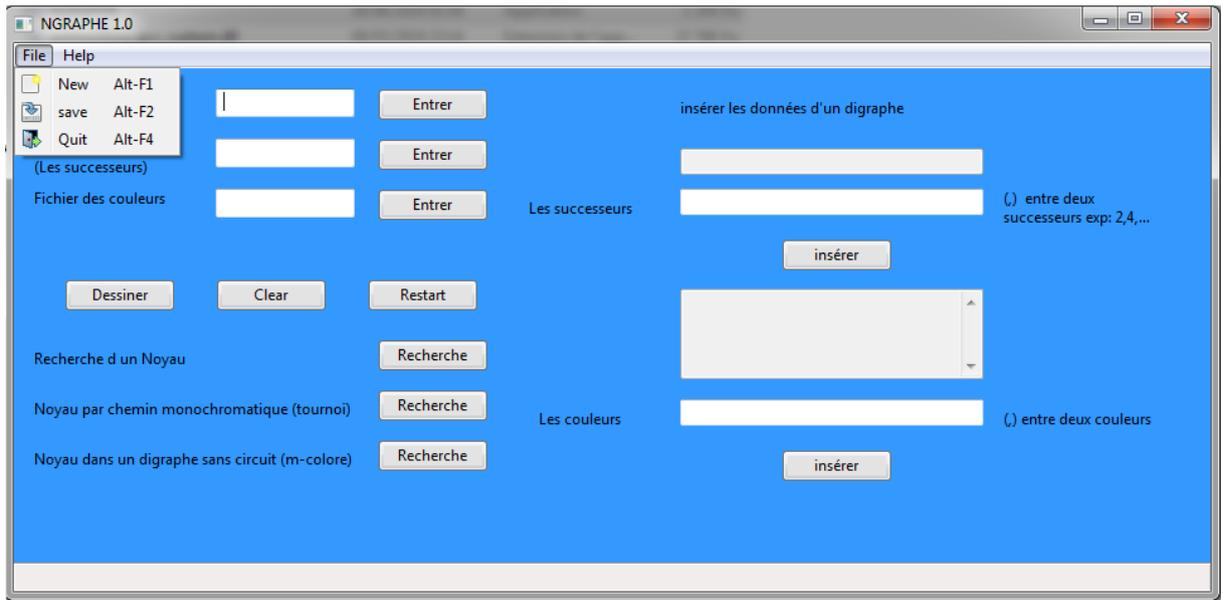


Figure 4.2 : Présentation de File menu

- **Help menu:** Offre les choix « About » « How to use ».
  - About : Offre des informations sur le logiciel.

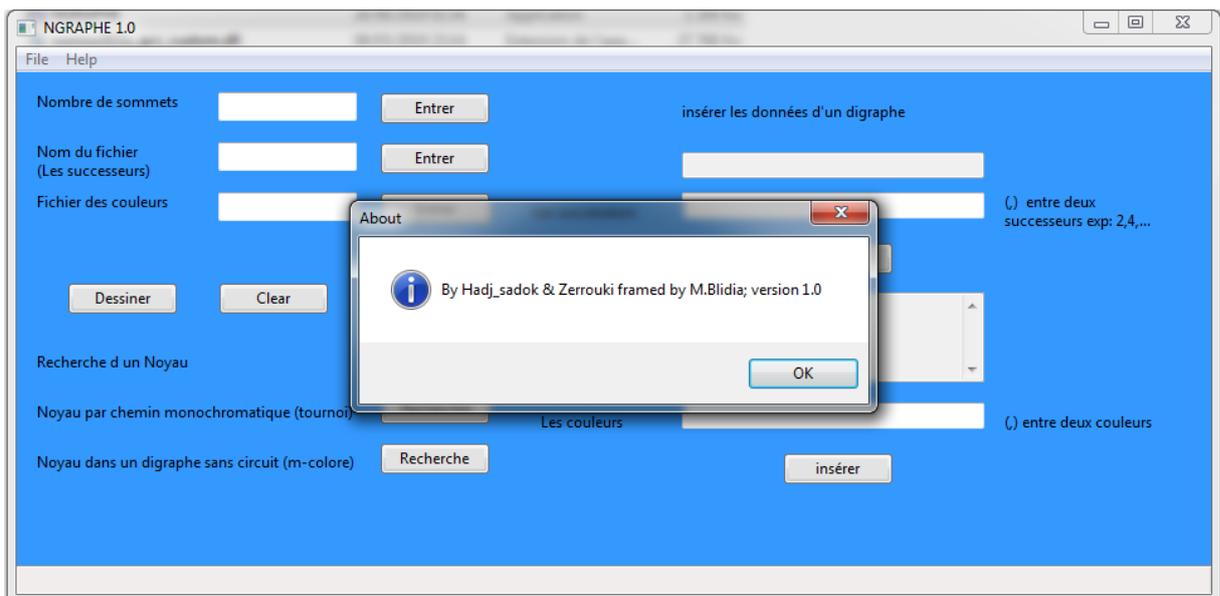


Figure 4.3 : Présentation de bouton About.

- How to use : Explique les modalités d'utilisation de l'éditeur.

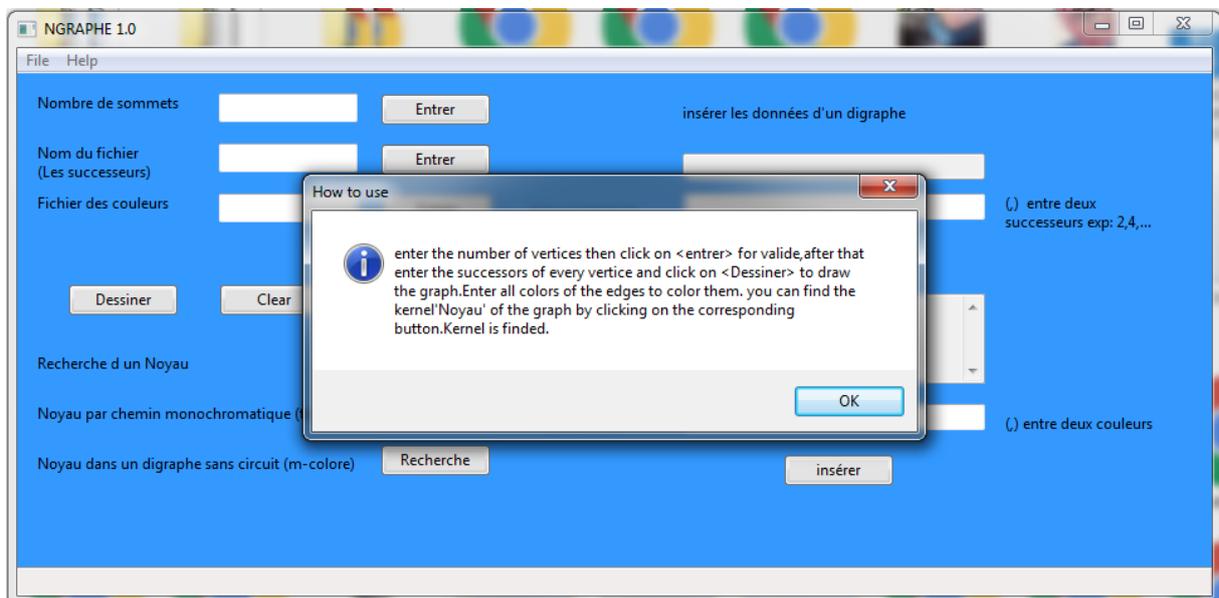


Figure 4.4 : Présentation de bouton « How to use »

**2. Espace de travail :** contient les boutons spécifiques au traitement des fichiers entré.

- **Nombre de sommets :** il nous permet d'entrer l'un des données d'un digraphe qui est le nombre de sommets.

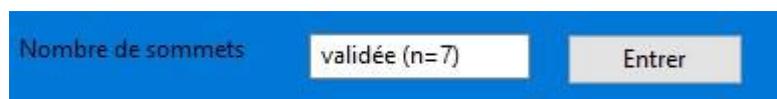


Figure 4.5 : présentation de bouton entrer le nombre de sommets

- **Les arcs :** les arcs d'un digraphe sont présentés par une liste des successeurs. Notre logiciel offre deux moyens pour insérer la liste des successeurs et même la couleur de chaque arc dans le cas des digraphes m-colorés :

- Par fichier «.Txt» : il suffit de donner le nom du fichier «.Txt » qui contient la liste des successeurs et le nom du fichier «.Txt » qui contient les couleurs des arcs dans le cas des digraphes m-colorés.

Figure 4.6 : présentation des boutons d'entrer les fichiers.



Figure 4.7 : Les fichiers.

### Exemple sur la présentation d'un digraphe 4-coloré sur un fichier « .Txt »

Soit D un digraphe 4-coloré d'ordre 7 :

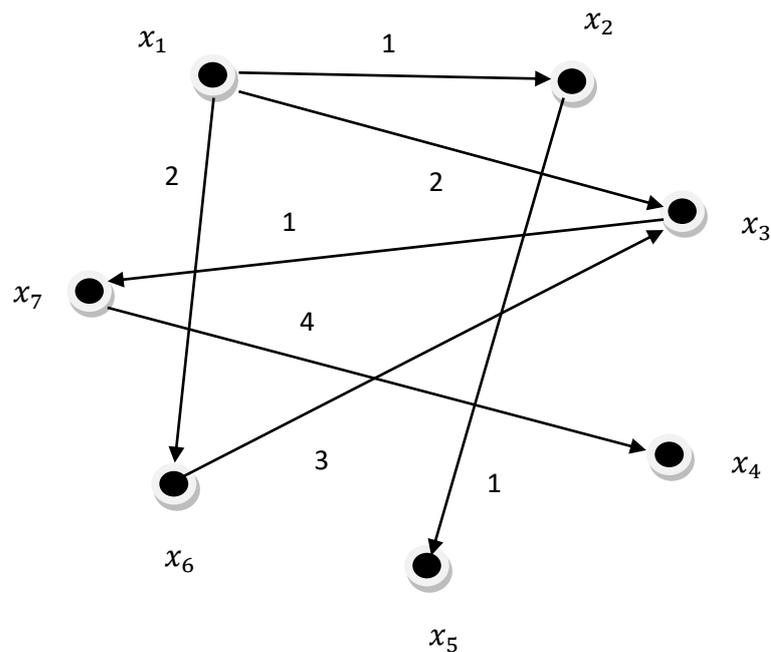


Figure 4.8 : digraphe 4-coloré

La matrice associée au digraphe D est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  est représentée sur deux fichiers, un fichier pour les successeurs de chaque sommet et un autre fichier pour les couleurs des arcs du digraphe D (voir Figure 4.9).

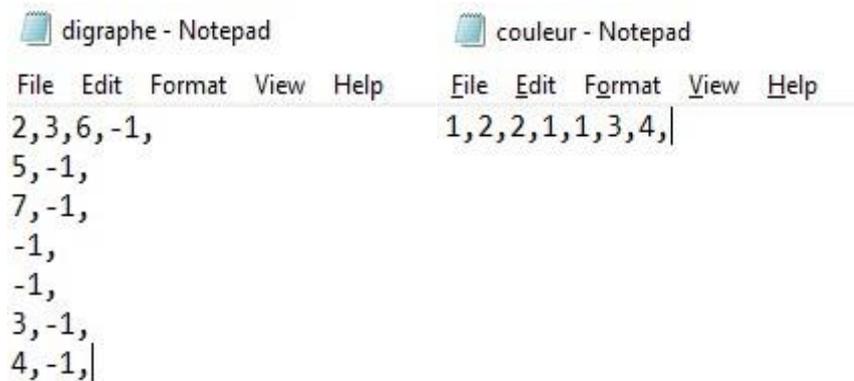


Figure 4.9 : L'intérieur des fichiers

- Par insertion manuel : On peut aussi insérer manuellement les successeurs de chaque sommet et la couleur pour chaque arc.

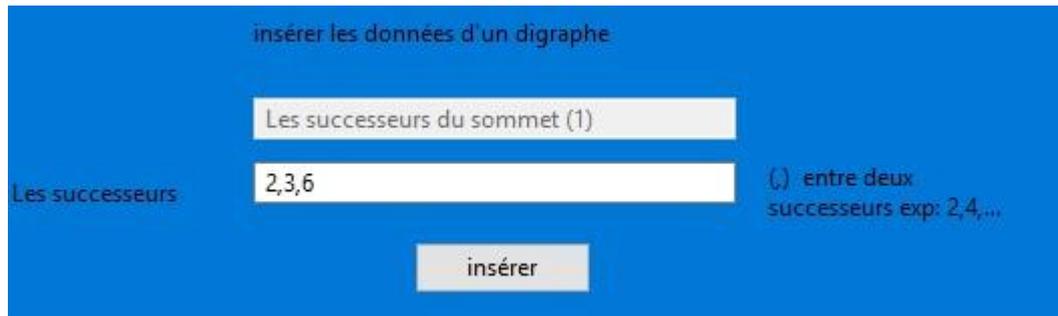


Figure 4.10 : présentation de bouton inséré les successeurs

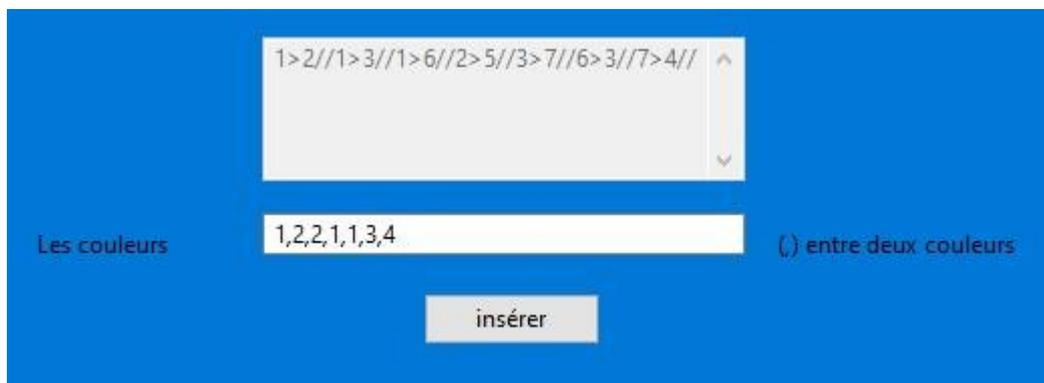


Figure 4.11 : présentation de bouton inséré les couleurs

- **La recherche du noyau :** Notre logiciel nous permet de déterminer et afficher un noyau d'un digraphe qui vérifie certaines conditions qu'on a vu dans les chapitres précédents. On utilise les boutons suivants pour déterminer le noyau ou bien le noyau par chemins monochromatiques pour les digraphes m-colorés.

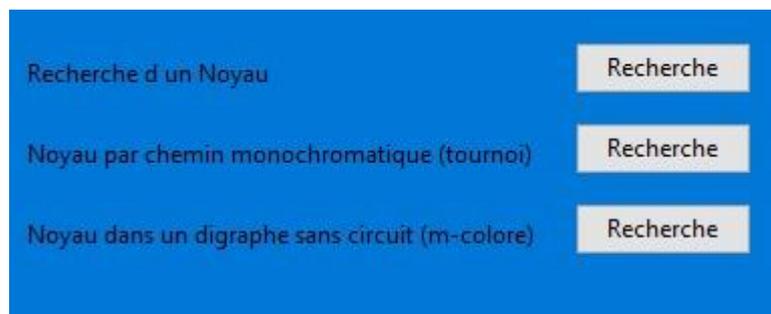
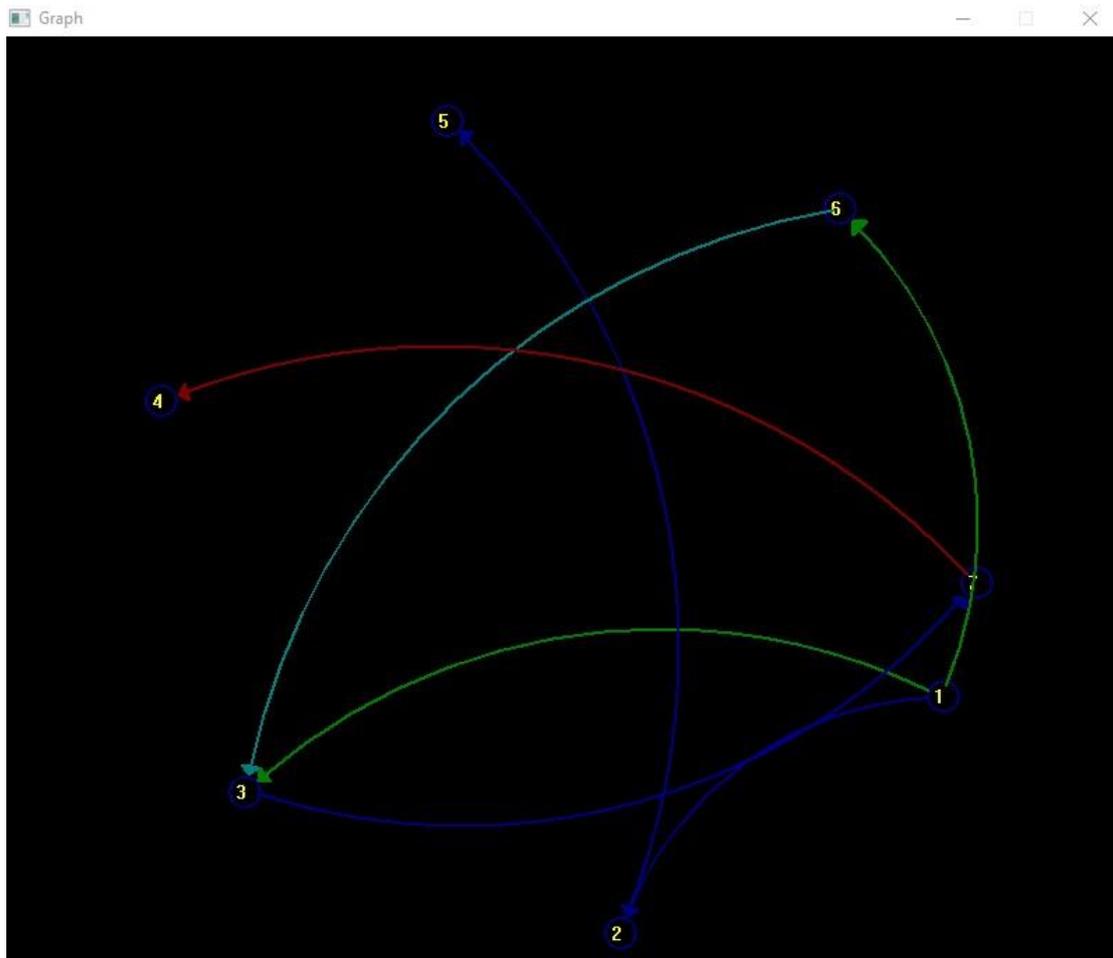


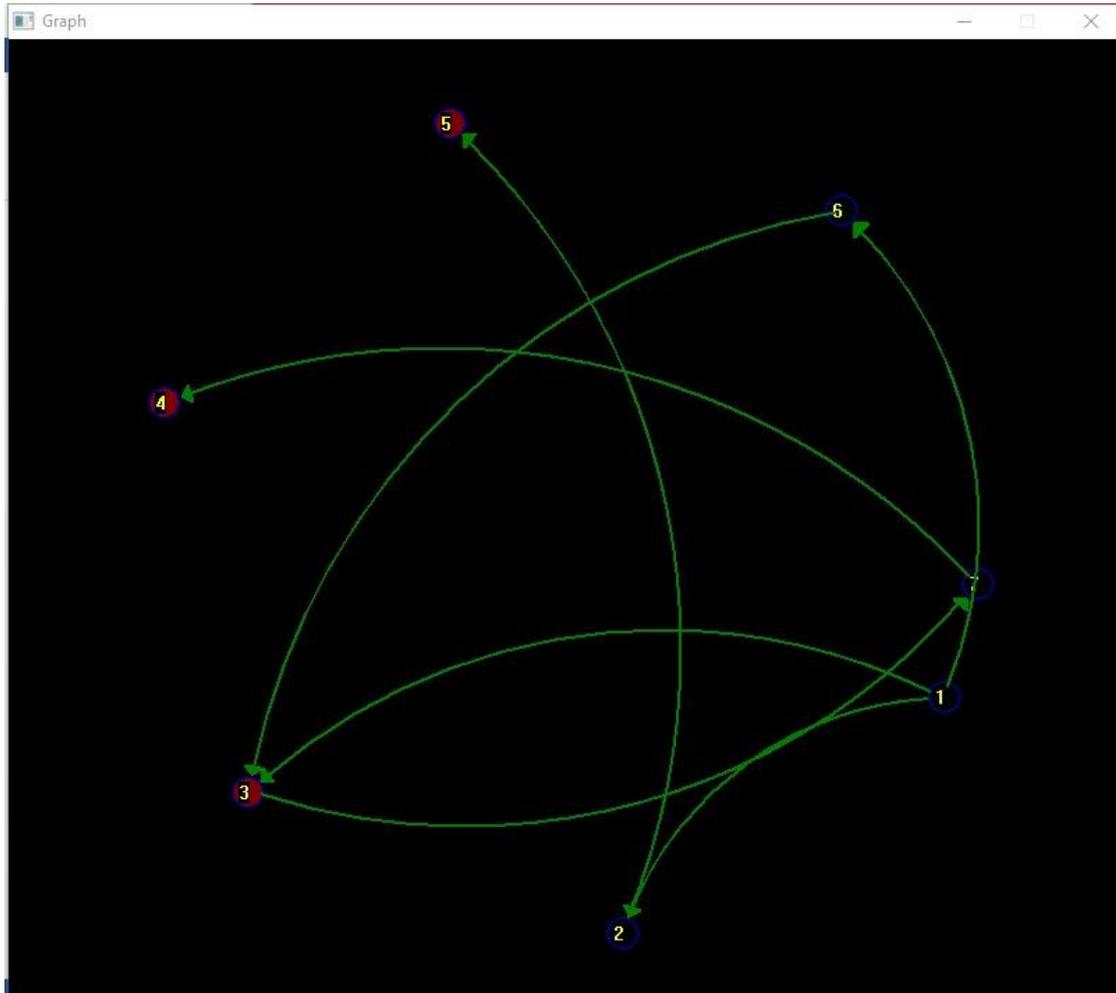
Figure 4.12 : présentation des boutons de la recherche d'un noyau

**3. Zone de dessin :** Après avoir fait entrer tous les données d'un digraphe, on peut illustrer le digraphe dans la zone de dessin par le bouton « dessiner » (voir Figure 4.13).



*Figure 4.13 : présentation de digraphe de la figure 4.8 dans la Zone de dessin*

Les sommets du noyau ou bien du noyau par chemins monochromatiques, sont colorés en rouge et les autres sommets ne sont pas colorés, il suffit d'appuyer sur recherche noyau selon le type de digraphe et on aura la Figure suivante qui représente le digraphe D et ses sommets noyau.



*Figure 4.14 : noyau de digraphe de la figure 4.8*

## Conclusion

L'objectif principal de cette thèse est l'étude des deux notions, la notion de noyau dans les digraphes et la notion de noyau par chemins monochromatiques dans les digraphes m-colorés. Ces deux notions ont été intensivement étudiées au cours de ces dernières années, et les résultats les concernant sont tellement nombreux que nous avons essayé d'en citer que les plus importants, liés principalement à notre objectif qui est l'élaboration d'un logiciel qui nous permet de déterminer le noyau dans les digraphes et le noyau par chemins monochromatiques dans les digraphes m-colorés.

Pour cela, nous avons en premier lieu exposé le concept de noyau dans les digraphes en donnant deux algorithmes polynomiaux qui nous permet de déterminer le noyau dans les digraphes tels que tout circuit possède un arc symétrique et les digraphes tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques.

En second lieu, nous avons abordé la notion de noyau par chemins monochromatiques dans les digraphes m-colorés. Nous avons au début apporté des améliorations à l'algorithme de recherche de la matrice du digraphe obtenu à partir du digraphe initial par la fermeture transitive par chemins monochromatiques proposé par A.Ramoul. Nous avons aussi fait une étude sur l'existence de ce concept dans quelques classes de digraphes m-coloré ce qui nous a permis d'élaborer un algorithme polynomial pour la recherche d'un tel noyau dans les digraphes sans circuit m-coloré.

Enfin, nous avons mis tous nos efforts, afin de concevoir un logiciel avec une interface qui soit claire et simple à l'utilisation avec la plupart des fonctionnalités que nous avons définies et de réaliser ainsi une grande partie de notre objectif.

Comme perspectives et travaux futurs, on peut citer la détermination d'autres classes de digraphes dans lesquelles le noyau et le noyau par chemins monochromatiques existent et peut être trouvé facilement avec un algorithme polynomial.

## Référence

- [1] C. Berge. "*Graphs et hypergraphes*", 2ème ed. Dunod, Paris, 1973.
- [2] V. Chvatal, "*computational complexity of finding a kernel*", Report CRM 300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [3] F. Drosbeke, M. Hlin, C.L. Lefevre, "*Les graphes par exemple*", Ellipses(87).
- [4] P. Duchet. "*Représentations, Noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*", Thèse d'état, Université de Paris VI, 1979.
- [5] A.S. Fraenkel, "*Planer kernel and Grundy with  $d \leq 3$   $\text{dout} \leq 2$ ,  $\text{din} \leq 2$ , are NP-complete*", Discrete Appl. Math. 3 (1981) 257-262.
- [6] H. Galeana Sánchez, V. Neumann-Lara, "*On kernel and semi-kernels of digraphs*", Discr. Math, 48, 1984, pp. 67-76.
- [7] H. Galeana Sánchez, R. Rojas-Monroy, "*Note A counter example to a conjecture on edge-coloured tournaments*", Discr Math. 282, 2004, pp. 275-276.
- [8] H. Galeana Sánchez, "*On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*", Discr Math. 156, 1996, pp. 103-112.
- [9] H. Galeana Sánchez, "*Kernels in edge-coloured digraphs*", Discr Math. 184, 1998, pp. 87-99.
- [10] E. Lunéville, "*Tutoriel code ::blocks*", 2006.
- [11] O. Marguin, "*C++ : LES BASES*", 2003/2004.
- [12] J. V. Neumann, O. Morgenstern. "*Théorie of games and economic behaviour*", Princeton University Press, Princeton 1944.
- [13] A. Ramoul, "*Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes orientés*", Thèse de Magistère, Université de Blida, 2008.
- [14] M. Richardson, "*Solutions of irreflexive relation*", Ann. Math, 58, pp. 573-580, 1953.

- [15] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, "*On Monochromatic Paths in Edge-Coloured Digraphs*", Journal of Combinatorial Theory, Series B 33, 1982, pp. 271-275.
- [16] Shen Minggang, "*On Monochromatic Paths in m-Coloured Tournaments*", Journal of Combinatorial Theory, Series B 45, 1986, pp. 108-111.
- [17] Z. Zémir, "*Recherche de noyaux dans les graphes orientés et graphes munis d'une orientation, étude algorithmique*", Thèse de Magistère, Université de Blida, 1996.
- [18] [https://www.wxwidgets.org/?fbclid=IwAR2rdGr9yqQ1g3uOyPOh2o95u\\_hKxZhXV0-Y5-ykBYdrfhweldQVC6pmC2h4](https://www.wxwidgets.org/?fbclid=IwAR2rdGr9yqQ1g3uOyPOh2o95u_hKxZhXV0-Y5-ykBYdrfhweldQVC6pmC2h4)