

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ de BLIDA 1**

**Faculté de Technologie**

**Département de Génie Mécanique**



# **Mémoire**

En vue de l'obtention du diplôme de

**MASTER EN GENIE MECANIQUE**

**Spécialité : Conception Mécanique**

Intitulé du mémoire

## **Planification des trajectoires optimales pour les robots manipulateurs dans des taches imposées**

Présenté par :

Mme FERRAH Amina

Mr SIDI MOUSSA Mohamed Salih

Proposé et encadré par :

Pr OUALI Mohamed

Mr BENDALI Nadir

Année universitaire 2015/2016

## **DEDICACES**

*Je dédie ce mémoire à ...*

### ***A mon très cher père***

*Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le respect et le dévouement que j'ai toujours eu pour toi.*

### ***A ma très chère mère***

*Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour, puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.*

*A mes sœurs et toute ma famille*

*A tous mes amis et mes camarades pour leurs aide et compréhension et surtout pour leur soutien moral.*

*Amina*

## **DEDICACES**

*Je dédie ce mémoire à ...*

### ***A mon très cher père***

*Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le respect et le dévouement que j'ai toujours eu pour toi.*

### ***A ma très chère mère***

*Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour, puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.*

*A mes sœurs et toute ma famille*

*A tous mes amis et mes camarades pour leurs aide et compréhension et surtout pour leur soutien moral.*

*Mohamed*

## **REMERCIEMENTS**

*Avant toute chose, je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant, qui m'a donné la patience, la santé et le courage durant mon parcours pédagogique.*

*Je tiens à remercier vivement mon promoteur Mr OUALI.M professeur au Département de Génie mécanique, pour sa confiance et son soutien.*

*Je souhaite exprimer toute ma gratitude à tous les membres du jury.*

*Je souhaite vivement remercier quelques personnes en particulier.*

*Tout d'abord merci Papa, merci Maman, à qui je dois un soutien et une confiance sans faille tout au long de ma vie.*

*Merci à mes ami(e)s de près ou de loin qui sont restés constants dans leur témoignage d'affection. Une grande bise pour vous toutes et tous...*

*Enfin, Merci pour toutes les personnes qui ont apporté une aide, une écoute, ou simplement une chaleur gratuite et généreuse.*

## **Résumé :**

L'un des objectifs de ce travail est une initiation au domaine de la robotique.

La planification des trajectoires d'un robot manipulateur mène à des équations de mouvement qui sont souvent délicates à résoudre, donc on procède à la modélisation des robots manipulateurs qui comporte les modèles suivants : le modèle géométrique, le modèle cinématique et le modèle dynamique. A cet effet, on aborde la modélisation d'un type de robot et une méthode de planification de trajectoire splines cubiques avec deux exemples d'un robot 2R.

Le but est de trouver une trajectoire optimale en minimisant dans le 1<sup>er</sup> exemple le temps de réalisation de la tâche et un coefficient de pondération  $\alpha$  et pour le deuxième exemple on minimise seulement le temps d'exécution de la tâche, en respectant pour les deux exemples les contraintes cinématiques et dynamiques du robot manipulateur 2R.

On utilise deux logiciels SolidWorks et MATLAB pour obtenir les trajectoires optimales des deux exemples qui vérifient les contraintes cinématiques et dynamiques du robot manipulateur, pour mettre en relief la pertinence du modèle étudié et d'apporter les conclusions adéquates.

**Mots-clés :**robotique, systèmes robotisés, modélisation mathématique, planification de trajectoire.

## **Summary:**

One objective of this work is an introduction to robotics.

Planning trajectories of a robot manipulator leads to equations of motion that are often difficult to solve, so we proceeded to the modeling of robot manipulators that includes the following models: the geometric model, the kinematic model and dynamic model. For this purpose, we approach modeling a robot type and method cubic spline path planning with two examples of a 2R robot.

The goal is to find an optimal path minimizing the 1<sup>st</sup> instance the time of completion of the task and  $\alpha$  weighting factor and for the second example is minimized only the time to achieve the task, respecting the two examples kinematic and dynamic constraints of the robot manipulator 2R.

Two software SolidWorks and MATLAB are used to obtain the optimal trajectories of the two examples that verify the kinematic and dynamic constraints of the robot manipulator, to put the relevance of the studied model and make the appropriate conclusions.

**Keywords:**robotics, robotic systems, mathematical modeling, path planning.

## ملخص:

هدف واحد من هذا العمل هو مقدمة لالروبوتات.

تخطيط مسارات ربات مناور يؤدي إلى معادلات الحركة التي غالبا ما يصعب حلها، حتى أننا تقدمنا إلى نماذج من المتلاعبين الروبوت الذي يتضمن النماذج التالية: نموذج هندسي، ونموذج الحركية ونموذج ديناميكي. تحقيقا لهذه الغاية، ونحن نقترح النمذجة نوع الروبوت وطريقة مكعب تخطيط المسار الشريحة مع اثنين من الأمثلة على الروبوت R2.

الهدف هو العثور على المسار الأمثل لتقليل سبيل المثال  $STI$  وقت الانتهاء من وصمة عار والسلامة  $\alpha$  عامل والمثال الثاني هو التقليل فقط ما يكفي من الوقت لتحقيق هذه المهمة، واحترام المثاليين القيود الحركية والديناميكية لمناور الروبوت R2.

البرامج اثنين SolidWorks ويستخدم MATLAB للحصول على المسارات المثلى من اثنين من الأمثلة التي تحقق القيود الحركية والديناميكية لمناور الروبوت، لتسليط الضوء على أهمية نموذج درس، وجعل الاستنتاجات المناسبة يتم مقارنة النتائج المتحصل عليها لتلك الموجودة في الأدب.

**كلمات البحث** . الروبوتات والأنظمة الروبوتية، و النمذجة الرياضية، تخطيط المسار

## TABLE DE MATIERES

REMERCIEMENT

RESUME

LISTE DE FIGURES

LISTE DE TABLEAUX

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALES ET L'ETAT DE L'ART

1. Introduction sur les robots manipulateurs	
1.1.Introduction .....	1
1.2.Définition des robots.....	1
1.3.Les Systèmes Mécaniques Robotisés.....	2
1.4.Constituants d'un robot.....	3
1.5.Chaines cinématiques.....	8
1.6.Morphologie des robots manipulateurs.....	8
1.7.Robots sériels.....	12
1.8.Définitions et terminologies.....	14
1.9.Conclusion .....	16
2. Modélisation des bras manipulateurs	
2.1.Introduction.....	17
2.2.Modèle géométrique.....	17
2.3.Modélisation cinématique.....	23
2.4.Modélisation dynamique.....	27
2.5.Conclusion	
3. Planification des trajectoires	
3.1.Introduction	
3.2.Les différentes méthodes de planification des trajectoires	
3.2.1. Interpolation polynomiale : Lagrange	
3.2.2. Représentation de Bézier	
3.2.3. Représentation des splines	
3.2.3.1.Splines cubiques	
3.2.3.2. B-Splines	
3.2.4. Représentation du NURBS	
3.2.4.1.NURBS	
3.2.4.2.Définition du NURBS	
3.2.4.3.Fonction de pondération	
3.2.4.4.Propriétés géométriques des courbes NURBS	
3.3.Conclusion	
4. Application	
4.1.Introduction	

## 4.2. Les modèles de robot manipulateur 2R

- 4.2.1. Modèle géométrique direct
- 4.2.2. Modèle géométrique inverse
- 4.2.3. Modèle cinématique direct
- 4.2.4. Modèle dynamique

## 4.3. Application

- 4.3.1. Méthode de Newton-Euler

## 4.4. Exemples sur le robot à 2ddl planaire

- 4.4.1. Exemple 1 : trajectoire passant par trois points
- 4.4.2. Exemple 2 : trajectoire passant par onze points

## ANNEXE B

### ➤ Le 1<sup>ème</sup> programme:

```
%%% Programme qui permet de calculer le couple des deux bras %%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
syms M1 M2;  
syms q1 q1d q1dd q2 q2d q2dd;  
syms L1 L2;  
syms g;  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
p1q = L1*cos(q1);  
p1y = L1*sin(q1);  
p2q = p1q+L2*cos(q1+q2);  
p2y = p1y+L2*sin(q1+q2);  
  
v1q = -L1*sin(q1)*q1d;  
v1y = L1*cos(q1)*q1d;  
v2q = v1q-L2*sin(q1+q2)*(q1d+q2d);  
v2y = v1y+L2*cos(q1+q2)*(q1d+q2d);  
% Energie cinématique:  
KE = 0.5*M1*( v1q^2 + v1y^2) + 0.5*M2*( v2q^2 + v2y^2);  
KE = simplify(KE);  
% Energie potentielle:  
PE = M1*g*p1y + M2*g*p2y;  
PE = simplify(PE);  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
pKEpq1d = diff(KE,q1d);  
ddtpKEpq1d = diff(pKEpq1d,q1)*q1d+ ...  
             diff(pKEpq1d,q1d)*q1dd+ ...  
             diff(pKEpq1d,q2)*q2d + ...  
             diff(pKEpq1d,q2d)*q2dd  
pKEpq1 = diff(KE,q1)  
pPEpq1 = diff(PE,q1)  
  
pKEpq2d = diff(KE,q2d);  
ddtpKEpq2d = diff(pKEpq2d,q1)*q1d+ ...  
             diff(pKEpq2d,q1d)*q1dd+ ...  
             diff(pKEpq2d,q2)*q2d + ...  
             diff(pKEpq2d,q2d)*q2dd  
pKEpq2 = diff(KE,q2)  
pPEpq2 = diff(PE,q2)  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% Le couple des deux bras:  
U1 = simplify( ddtppKEpq1d - pKEpq1 + pPEpq1)  
U2 = simplify( ddtppKEpq2d - pKEpq2 + pPEpq2)
```

$$\text{ddtpKEp}q1d =$$

$$q1dd*(L1^2*M1 + L1^2*M2 + L2^2*M2 + 2*L1*L2*M2*\cos(q2)) - \\ q2d*(2*L1*L2*M2*q1d*\sin(q2) + L1*L2*M2*q2d*\sin(q2)) + q2dd*(M2*L2^2 + \\ L1*M2*\cos(q2)*L2)$$

$$\text{pKEp}q1 =$$

$$0$$

$$\text{pPEp}q1 =$$

$$M2*g*(L2*\cos(q1 + q2) + L1*\cos(q1)) + L1*M1*g*\cos(q1)$$

$$\text{ddtpKEp}q2d =$$

$$q1dd*(M2*L2^2 + L1*M2*\cos(q2)*L2) + L2^2*M2*q2dd - L1*L2*M2*q1d*q2d*\sin(q2)$$

$$\text{pKEp}q2 =$$

$$- L1*L2*M2*\sin(q2)*q1d^2 - L1*L2*M2*q2d*\sin(q2)*q1d$$

$$\text{pPEp}q2 =$$

$$L2*M2*g*\cos(q1 + q2)$$

$$U1 =$$

$$q1dd*(L1^2*M1 + L1^2*M2 + L2^2*M2 + 2*L1*L2*M2*\cos(q2)) + M2*g*(L2*\cos(q1 + q2) \\ + L1*\cos(q1)) + L1*M1*g*\cos(q1) + L2*M2*q2dd*(L2 + L1*\cos(q2)) - \\ L1*L2*M2*q2d*\sin(q2)*(2*q1d + q2d)$$

$$U2 =$$

$$L2*M2*(L1*\sin(q2)*q1d^2 + L2*q1dd + L2*q2dd + g*\cos(q1 + q2) + L1*q1dd*\cos(q2))$$

```

clear;close all;clc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
syms M1 M2 M3;
syms q1 q1d q1dd q2 q2d q2dd q3 q3d q3dd;
syms L1 L2 L3;
syms g
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
p1q = L1*cos(q1);
p1y = L1*sin(q1);
p2q = p1q+L2*cos(q1+q2);
p2y = p1y+L2*sin(q1+q2);
p3q = p2q+L3*cos(q1+q2+q3);
p3y = p2y+L3*sin(q1+q2+q3);

v1q = -L1*sin(q1)*q1d;
v1y = L1*cos(q1)*q1d;
v2q = v1q-L2*sin(q1+q2)*(q1d+q2d);
v2y = v1y+L2*cos(q1+q2)*(q1d+q2d);
v3q = v2q - L3*sin(q1+q2+q3)*(q1d+q2d+q3d);
v3y = v2y + L3*cos(q1+q2+q3)*(q1d+q2d+q3d);
% Energie cinématique:
KE = 0.5*M1*( v1q^2 + v1y^2) + 0.5*M2*( v2q^2 + v2y^2) + 0.5*M3*( v3q^2 + v3y^2);
KE = simplify(KE);
% Energie potentielle:
PE = M1*g*p1y + M2*g*p2y + M3*g*p3y;
PE = simplify(PE);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
pKEpq1d = diff(KE,q1d);
ddtpKEpq1d = diff(pKEpq1d,q1)*q1d+ ...
    diff(pKEpq1d,q1d)*q1dd+ ...
    diff(pKEpq1d,q2)*q2d + ...
    diff(pKEpq1d,q2d)*q2dd + ...
    diff(pKEpq1d,q3)*q3d + ...
    diff(pKEpq1d,q3d)*q3dd
pKEpq1 = diff(KE,q1)
pPEpq1 = diff(PE,q1)
pKEpq2d = diff(KE,q2d);
ddtpKEpq2d = diff(pKEpq2d,q1)*q1d+ ...
    diff(pKEpq2d,q1d)*q1dd+ ...
    diff(pKEpq2d,q2)*q2d + ...
    diff(pKEpq2d,q2d)*q2dd + ...
    diff(pKEpq2d,q3)*q3d + ...
    diff(pKEpq2d,q3d)*q3dd
pKEpq2 = diff(KE,q2)
pPEpq2 = diff(PE,q2)
pKEpq3d = diff(KE,q3d);
ddtpKEpq3d = diff(pKEpq3d,q1)*q1d+ ...
    diff(pKEpq3d,q1d)*q1dd+ ...
    diff(pKEpq3d,q2)*q2d + ...
    diff(pKEpq3d,q2d)*q2dd + ...
    diff(pKEpq3d,q3)*q3d + ...
    diff(pKEpq3d,q3d)*q3dd
pKEpq3 = diff(KE,q3)
pPEpq3 = diff(PE,q3)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Le couple des Trois bras:
U1 = simplify( ddtpKEpq1d - pKEpq1 + pPEpq1)
U2 = simplify( ddtpKEpq2d - pKEpq2 + pPEpq2)
U3 = simplify( ddtpKEpq3d - pKEpq3 + pPEpq3)

```

ddtpKEpql d =

$$\begin{aligned} & q2dd*((M2*(2*L2*cos(q1 + q2)*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1)) + 2*L2*sin(q1 + \\ & q2)*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1))))/2 + (M3*(2*(L2*sin(q1 + q2) + L3*sin(q1 + q2 + \\ & q3))*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3)) + 2*(L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 \\ & + q2 + q3))*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 + q3))))/2) + \\ & q1dd*((M2*(2*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1))^2 + 2*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1))^2))/2 + \\ & (M1*(2*L1^2*cos(q1)^2 + 2*L1^2*sin(q1)^2))/2 + (M3*(2*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + \\ & L3*cos(q1 + q2 + q3))^2 + 2*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3))^2))/2 - \\ & q2d*((M2*(2*L2*sin(q1 + q2)*(L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*cos(q1)) - \\ & 2*L2*cos(q1 + q2)*(L1*q1d*sin(q1) + L2*sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)) + 2*L2*sin(q1 + \\ & q2)*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1))*(q1d + q2d) - 2*L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d)*(L2*sin(q1 \\ & + q2) + L1*sin(q1))))/2 + (M3*(2*(L2*sin(q1 + q2) + L3*sin(q1 + q2 + q3))*(L3*cos(q1 + q2 + \\ & q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*cos(q1)) - 2*(L2*cos(q1 + q2) \\ & + L3*cos(q1 + q2 + q3))*(L1*q1d*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + \\ & L2*sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)) + 2*(L3*sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*sin(q1 + \\ & q2)*(q1d + q2d))*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 + q3)) - 2*(L3*cos(q1 + q2 \\ & + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d))*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1) + \\ & L3*sin(q1 + q2 + q3))))/2) + (M3*q3dd*(2*L3*cos(q1 + q2 + q3)*(L2*cos(q1 + q2) + \\ & L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 + q3)) + 2*L3*sin(q1 + q2 + q3)*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1) + \\ & L3*sin(q1 + q2 + q3))))/2 - (M3*q3d*(2*L3*sin(q1 + q2 + q3)*(L3*cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + \\ & q2d + q3d) + L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*cos(q1)) - 2*L3*cos(q1 + q2 + \\ & q3)*(L1*q1d*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)) \\ & + 2*L3*sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d)*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 \\ & + q3)) - 2*L3*cos(q1 + q2 + q3)*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3))*(q1d + \\ & q2d + q3d))/2 \end{aligned}$$

pKEpql =

0

pPEpq1 =

$$M3*g*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 + q3)) + M2*g*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1)) + L1*M1*g*cos(q1)$$

ddtpKEpq2d =

$$\begin{aligned} & q1dd*((M2*(2*L2*cos(q1 + q2)*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1)) + 2*L2*sin(q1 + \\ & q2)*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1))))/2 + (M3*(2*(L2*sin(q1 + q2) + L3*sin(q1 + q2 + \\ & q3))*(L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3)) + 2*(L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 \\ & + q2 + q3))*(L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 + q3))))/2) - \\ & q2d*((M3*(2*(L2*sin(q1 + q2) + L3*sin(q1 + q2 + q3))*(L3*cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + \\ & q3d) + L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*cos(q1)) - 2*(L3*cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d \\ & + q3d) + L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d))*(L2*sin(q1 + q2) + L3*sin(q1 + q2 + q3)) + \\ & 2*(L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 + q2 + q3))*(L3*sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + \\ & L2*sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)) - 2*(L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 + q2 + q3))*(L1*q1d*sin(q1) + \\ & L3*sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*sin(q1 + q2)*(q1d + q2d))))/2 + \\ & (M2*(2*L2*sin(q1 + q2)*(L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*cos(q1)) - 2*L2*cos(q1 + \\ & q2)*(L1*q1d*sin(q1) + L2*sin(q1 + q2)*(q1d + q2d))))/2) + q2dd*((M2*(2*L2^2*cos(q1 + \\ & q2)^2 + 2*L2^2*sin(q1 + q2)^2))/2 + (M3*(2*(L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 + q2 + q3))^2 + \\ & 2*(L2*sin(q1 + q2) + L3*sin(q1 + q2 + q3))^2))/2) + (M3*q3dd*(2*L3*cos(q1 + q2 + \\ & q3)*(L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 + q2 + q3)) + 2*L3*sin(q1 + q2 + q3)*(L2*sin(q1 + q2) + \\ & L3*sin(q1 + q2 + q3))))/2 - (M3*q3d*(2*L3*sin(q1 + q2 + q3)*(L3*cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + \\ & q2d + q3d) + L2*cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*cos(q1)) - 2*L3*cos(q1 + q2 + \\ & q3)*(L1*q1d*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)) \\ & - 2*L3*cos(q1 + q2 + q3)*(L2*sin(q1 + q2) + L3*sin(q1 + q2 + q3))*(q1d + q2d + q3d) + \\ & 2*L3*sin(q1 + q2 + q3)*(L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 + q2 + q3))*(q1d + q2d + q3d))/2 \end{aligned}$$

pKEpq2 =

$$\begin{aligned} & - (M2*(2*L2*\sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)*(L2*\cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*\cos(q1)) - \\ & 2*L2*\cos(q1 + q2)*(L1*q1d*\sin(q1) + L2*\sin(q1 + q2)*(q1d + q2d))*(q1d + q2d)))/2 - \\ & (M3*(2*(L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\sin(q1 + q2)*(q1d + q2d))*(L3*\cos(q1 \\ & + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*\cos(q1)) - \\ & 2*(L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\cos(q1 + q2)*(q1d + q2d))*(L1*q1d*\sin(q1) \\ & + L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)))/2 \end{aligned}$$

pPEpq2 =

$$M3*g*(L2*\cos(q1 + q2) + L3*\cos(q1 + q2 + q3)) + L2*M2*g*\cos(q1 + q2)$$

ddtpKEpq3d =

$$\begin{aligned} & (M3*q2dd*(2*L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(L2*\cos(q1 + q2) + L3*\cos(q1 + q2 + q3)) + 2*L3*\sin(q1 \\ & + q2 + q3)*(L2*\sin(q1 + q2) + L3*\sin(q1 + q2 + q3)))/2 + (M3*q1dd*(2*L3*\cos(q1 + q2 + \\ & q3)*(L2*\cos(q1 + q2) + L1*\cos(q1) + L3*\cos(q1 + q2 + q3)) + 2*L3*\sin(q1 + q2 + \\ & q3)*(L2*\sin(q1 + q2) + L1*\sin(q1) + L3*\sin(q1 + q2 + q3)))/2 - (M3*q2d*(2*L3*\sin(q1 + q2 + \\ & q3)*(L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + \\ & L1*q1d*\cos(q1)) - 2*L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + \\ & L2*\cos(q1 + q2)*(q1d + q2d)) + 2*L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + \\ & q3d) + L2*\sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)) - 2*L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(L1*q1d*\sin(q1) + L3*\sin(q1 + \\ & q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\sin(q1 + q2)*(q1d + q2d)))/2 + (M3*q3dd*(2*L3^2*\cos(q1 + \\ & q2 + q3)^2 + 2*L3^2*\sin(q1 + q2 + q3)^2))/2 - (M3*q3d*(2*L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(L3*\cos(q1 \\ & + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*\cos(q1)) - 2*L3*\cos(q1 \\ & + q2 + q3)*(L1*q1d*\sin(q1) + L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\sin(q1 + q2)*(q1d \\ & + q2d)))/2 \end{aligned}$$

$$pKEpq3 =$$

$$-(M3*(2*L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\cos(q1 + q2)*(q1d + q2d) + L1*q1d*\cos(q1))*(q1d + q2d + q3d) - 2*L3*\cos(q1 + q2 + q3)*(L1*q1d*\sin(q1) + L3*\sin(q1 + q2 + q3)*(q1d + q2d + q3d) + L2*\sin(q1 + q2)*(q1d + q2d))*(q1d + q2d + q3d)))/2$$

$$pPEpq3 =$$

$$L3*M3*g*\cos(q1 + q2 + q3)$$

$$U1 =$$

$$\begin{aligned} &L1^2*M1*q1dd + L1^2*M2*q1dd + L1^2*M3*q1dd + L2^2*M2*q1dd + L2^2*M2*q2dd + \\ &L2^2*M3*q1dd + L2^2*M3*q2dd + L3^2*M3*q1dd + L3^2*M3*q2dd + L3^2*M3*q3dd + \\ &L2*M2*g*\cos(q1 + q2) + L2*M3*g*\cos(q1 + q2) + L1*M1*g*\cos(q1) + L1*M2*g*\cos(q1) + \\ &L1*M3*g*\cos(q1) + L3*M3*g*\cos(q1 + q2 + q3) + 2*L1*L3*M3*q1dd*\cos(q2 + q3) + \\ &L1*L3*M3*q2dd*\cos(q2 + q3) + L1*L3*M3*q3dd*\cos(q2 + q3) + 2*L1*L2*M2*q1dd*\cos(q2) \\ &+ L1*L2*M2*q2dd*\cos(q2) + 2*L1*L2*M3*q1dd*\cos(q2) + L1*L2*M3*q2dd*\cos(q2) + \\ &2*L2*L3*M3*q1dd*\cos(q3) + 2*L2*L3*M3*q2dd*\cos(q3) + L2*L3*M3*q3dd*\cos(q3) - \\ &L1*L3*M3*q2d^2*\sin(q2 + q3) - L1*L3*M3*q3d^2*\sin(q2 + q3) - L1*L2*M2*q2d^2*\sin(q2) - \\ &L1*L2*M3*q2d^2*\sin(q2) - L2*L3*M3*q3d^2*\sin(q3) - 2*L1*L2*M2*q1d*q2d*\sin(q2) - \\ &2*L1*L2*M3*q1d*q2d*\sin(q2) - 2*L2*L3*M3*q1d*q3d*\sin(q3) - \\ &2*L2*L3*M3*q2d*q3d*\sin(q3) - 2*L1*L3*M3*q1d*q2d*\sin(q2 + q3) - \\ &2*L1*L3*M3*q1d*q3d*\sin(q2 + q3) - 2*L1*L3*M3*q2d*q3d*\sin(q2 + q3) \end{aligned}$$

U2 =

$$\begin{aligned} &L2^2 * M2 * q1dd + L2^2 * M2 * q2dd + L2^2 * M3 * q1dd + L2^2 * M3 * q2dd + L3^2 * M3 * q1dd + \\ &L3^2 * M3 * q2dd + L3^2 * M3 * q3dd + L2 * M2 * g * \cos(q1 + q2) + L2 * M3 * g * \cos(q1 + q2) + \\ &L3 * M3 * g * \cos(q1 + q2 + q3) + L1 * L3 * M3 * q1dd * \cos(q2 + q3) + L1 * L2 * M2 * q1dd * \cos(q2) + \\ &L1 * L2 * M3 * q1dd * \cos(q2) + 2 * L2 * L3 * M3 * q1dd * \cos(q3) + 2 * L2 * L3 * M3 * q2dd * \cos(q3) + \\ &L2 * L3 * M3 * q3dd * \cos(q3) + L1 * L3 * M3 * q1d^2 * \sin(q2 + q3) + L1 * L2 * M2 * q1d^2 * \sin(q2) + \\ &L1 * L2 * M3 * q1d^2 * \sin(q2) - L2 * L3 * M3 * q3d^2 * \sin(q3) - 2 * L2 * L3 * M3 * q1d * q3d * \sin(q3) - \\ &2 * L2 * L3 * M3 * q2d * q3d * \sin(q3) \end{aligned}$$

U3 =

$$\begin{aligned} &L3 * M3 * (L3 * q1dd + L3 * q2dd + L3 * q3dd + g * \cos(q1 + q2 + q3) + L1 * q1d^2 * \sin(q2 + q3) + \\ &L2 * q1d^2 * \sin(q3) + L2 * q2d^2 * \sin(q3) + L1 * q1dd * \cos(q2 + q3) + L2 * q1dd * \cos(q3) + \\ &L2 * q2dd * \cos(q3) + 2 * L2 * q1d * q2d * \sin(q3)) \end{aligned}$$

## Conclusion générale :

Dans ce mémoire le travail accompli c'est de traiter le problème de planification des trajectoires dans des tâches imposées pour les bras manipulateurs, il contourne en particulier une épreuve d'améliorer des travaux réalisés auparavant dans le domaine de la robotique, notre objectif est d'utiliser les avantages de ces travaux accomplis et les introduire dans notre travail. Ce travail est aussi ; une recherche de nouvelle technique de résolution des problèmes de planification des trajectoires des bras manipulateurs qui donne l'efficacité et la facilité de fonctionnement dans un temps d'exécution similaire aux résultats obtenus par les autres travaux trouvés dans la littérature.

Le problème de planification des trajectoires durant la réalisation d'une tâche se présente sous forme de problème d'optimisation sous contraintes dans lequel la fonction objective qu'on doit minimiser est fonction d'une quantité physique, tout en respectant certaines limitations et exigences de nature technologiques propres au manipulateur, à la tâche et à l'environnement la résolution de ce problème engendre la détermination de trajectoires optimales que ce robot doit suivre et les commandes optimisées qui permettent d'avoir un mouvement le long de cette trajectoire. C'est pourquoi, on a organisé ce mémoire sous quatre chapitres, on a consacré le premier chapitre aux définitions, notions et généralités utilisées souvent dans la robotique spécialement pour les robots manipulateurs. Pour le deuxième chapitre nous avons présenté les différentes modélisations du robot manipulateur géométrique, cinématique et dynamique, en citant les différents formalismes et méthodes. Tandis que dans le troisième chapitre on s'est intéressé à la planification des trajectoires on a cité quelques méthodes de modélisation des trajectoires.

Pour le dernier chapitre on a donné une importance au robot manipulateur 2R et nous avons calculé les équations du modèle géométrique, cinématique et dynamique ensuite on a utilisé l'interpolation par les fonctions splines cubiques qui a été détaillée dans le chapitre précédent et on a aussi utilisé les algorithmes génétiques qui servent à sélectionner la meilleure solution parmi plusieurs solutions trouvées. Cette approche a été validée avec deux exemples, pour le premier on a imposé une trajectoire qui se constitue de trois points, point initial, intermédiaire et final pour un bras manipulateur 2R et on a voulu minimiser une fonction objective qui est en fonction de temps et du couple moteur des bras, on a extrait des

courbes de différents paramètres position, vitesses, accélération, jerk, et couple et le temps d'exécution de la tâche en fonction du nombre de génération. Dans le deuxième exemple on a donné les différentes positions que doit le robot exécutées et on a fixé une fonction objective à minimiser qui dépend que du temps et on a abouti à l'aide des programmes cités précédemment aux courbes des mêmes paramètres du premier exemple, les résultats obtenus ont montrés que l'approche utilisée peut trouver des solutions optimale et elle possédé une bonne capacité de reproduire les mêmes résultats et elle peut converger dans des temps de calcul acceptables.

Comme perspectives nous envisageons :Utiliser d'autres fonctions appropriées pour modéliser les trajectoires (B-Splines, fonction Bézier, ...), prises en comptes des obstacles dans l'espace de travail du robot manipulateur et appliquer cette approche sur des robots manipulateurs avec un nombre de degré de liberté important (PUMA560, STANDFORD)

## Les références

---

- [1] Robotique. Aspects fondamentaux, J.-P. Lallemand, S. Zeghloul, Masson 1994, 312 pages.
- [2] C.VIBET, « Robots Principes et Contrôles », Éditions Ellipses, 1998.
- [3] Cours de robotique, J.-P. Ferrier, DESS ASC.
- [4] Robots. Principes et contrôle, C.Vibet , Ellipses 1987, 207 pages.
- [5] Introduction to robotics mechanics and control,2 edition, John J.Craig, Addison-Wesley Publishing Company, 450 pages.
- [6] A J.ANGELES and O.MA, Dynamic Simulation of n-Axis Serial Robotic Manipulators Using a Natural Orthogonal Complement, the International Journal of Robotics Research October 1988.
- [7] Chablat D.Wenger Ph., Working Modes and Aspects in Fully – Parallel Manipulator, Proceedings IEEE International conference on Robotics and Automation. International Conference on Robotics and Automation, Bruxelles, Belgique, (1998-05-16), pp. 1964 1969, IEEE, Vol 3.
- [8] A J.ANGELES and O.MA, An algorithm for the inverse dynamics of n-Axis general manipulators using Kane's equations Computers math applic.volume17 N°12 pp.1545-1561, Great Britain, 1989.
- [9] Reza N. Jazar, Theory of Applied Robotics (Kinematics, Dynamics, and Control) Second Edition, Springer (path planning) ISBN 978-1-4419-1749-2 e-ISBN 978-1-4419-1750-8 Sprigner New York Dordrecht Heidelberg London Springer Science + Business Media, LLC 2006, 2010.
- [10] E. DOMBRE – W. KHALIL, « Modélisation identification et commande des robots». HERMES 1999.
- [11] Mohamed AFROUN, MODELISATION, PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES ET COMMANDE DE ROBOTS PARALLELES Thèse de Doctorat es Sciences, EMP, bordj El Bahri, Algérie2013.

[12] M.J.D.HAYES, M.L.HUSTY, P.J.ZSOMBOR-MURRAY, Singular Configurations of Wrist-Partitioned 6R Serial Robots: a Geometric Perspective for Users, Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, vol. 26, no. 1, pp. 41-55. April 2, 2003

[13] Pierre DUYSINX, ELEMENTS DE PROBTIQUE ASPECTS MECANIQUES, Ingénierie des Véhicules Terrestres Département PROMETHE, (Productique, Mécanique et thermodynamique).Université de Lièges, Belgique, 2006.

[14] F.BENNIS, P. WENGER, S.CARO, Etat de l'art de la conception robuste de mécanisme, Article : Institut de Recherche en communications et Cybernétique De Nantes, 2009.

[14] Omri Karim, synthèse, Contribution à la réalisation optimale des tâches par un robot manipulateur, mémoire de magister, faculté de technologie, département de mécanique, université Saad Dahleb-Blida, Algérie, mai 2013.

[16] Pieper D.L "The kinematics of manipulators under computer control", Ph.D.Thesis, Stanford University, 1968.

[17] Roth B., "Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint", Cours de Robotique, IRIA, Toulouse, 1976, p. 233-263.

[18] Lee H.Y, Liang C.G, "Displacement analysis of the general 7-link 7R mechanism", J. of Mechanism and Machine Theory, Vol. 23(3), 1988, p. 219-226.

[19] Raghavan M., Roth B., "Inverse kinematics of the general 6R manipulator and related linkages", Trans. of the ASME, J. of Mechanical Design, Vol. 115, 1990, p. 502-508.

[20] Paul R.C.P., Robot manipulators: mathematics, programming and control, MIT Press, Cambridge, 1981.

[21] Renaud M., "Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs", Thèse d'état, UPS, Toulouse, sept. 1980.

[22] Khosla P.K., "Real-time control and identification of direct drive manipulators", Ph. D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1986.

[23] Coiffet P., Les Robots ; Tome 1 : Modélisation et commande, Hermès, Paris, 1981.

[24] Khalil W., Kleinfinger J.-F., "Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree Structure robots", IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-3(6), déc. 1987, p. 517-526.

[25] Koditschek D.E., "Natural motion for robot arms", Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control, Las Vegas, déc. 1984, p. 737-735.

[26] A new method for smooth trajectory planning of robot manipulators A. Gasparetto, V. Zanotto

[27] Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences, 34, Janvier 2008

[28] Bézier and B-spline techniques Hartmut Prautzsch, Wolfgang Boehm, Marco Paluszny March 26, 2002 To Paul de Faget de Casteljaou.

[29] Les courbes et surfaces splines Master IVI, module M3DA, cours 1

# Chapitre 1: Introduction sur les robots manipulateurs

---

## **1.1. Introduction:**

La *robotique* peut être définie comme l'ensemble des techniques et études tendant à concevoir des systèmes mécaniques, informatiques ou mixtes, capables de se substituer à l'homme dans ses fonctions matrices, sensorielles et intellectuelles.

Le robot a initialement été créé pour décharger l'homme des tâches fastidieuses, par exemple, les tâches de manutention qui sont souvent fatigantes, répétitives ou même infaisables manuellement. L'idée d'une machine se substituant à l'homme pour de telles tâches était donc séduisante. De ce besoin sont nés des manipulateurs relativement simples et souvent dédiés à une tâche bien définie.

## **1.2. Définition des robots :**

Le Petit Larousse définit un robot comme étant un appareil automatique capable de manipuler des objets, ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe ou modifiable.

En fait, l'image que chacun s'en fait est généralement vague, souvent un robot est défini comme un manipulateur automatique à cycles programmables.

Pour "mériter" le nom de robot, un système doit posséder une certaine flexibilité, caractérisée par les propriétés suivantes : [1]

- La versatilité: Un robot doit avoir la capacité de pouvoir exécuter une variété de tâches, ou la même tâche de différente manière ;
- L'auto-adaptabilité : Un robot doit pouvoir s'adapter à un environnement changeant au cours de l'exécution de ses tâches.

L'Association Française de Normalisation (A.F.N.O.R.) définit un robot comme étant un système mécanique de type manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent (i.e., à usages multiples), à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches.

Il a souvent l'apparence d'un, ou plusieurs, bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances.

Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel.

### **1.3. Les Systèmes Mécaniques Robotisés:[1]**

Les systèmes robotiques intéressent de très nombreux domaines civils et militaires. Les grands champs d'application de la robotique sont :

1. La production manufacturière (usinage, assemblage, soudure, polissage, formage, etc.)
2. Les interventions en milieux hostiles (sous-marin, nucléaire, exploration, planétaire, etc.)
3. Les systèmes de transport des biens et des personnes (véhicules intelligents, robots mobiles, etc.)
4. L'aide et l'assistance aux personnes (robots personnels, aides techniques, etc.)
5. Les nombreux domaines de la santé (chirurgie, rééducation, etc.).
6. Le ludique (robots jouets)

Ils prennent des formes très diverses du point de vue de leur structure mécanique et de leur commande. Plusieurs types de robots "génériques" sont illustrés sur les figures qui suivent.



**Figure 1 1: Robot humanoïde - Robot série de type SCARA - Robot série anthropomorphe.**

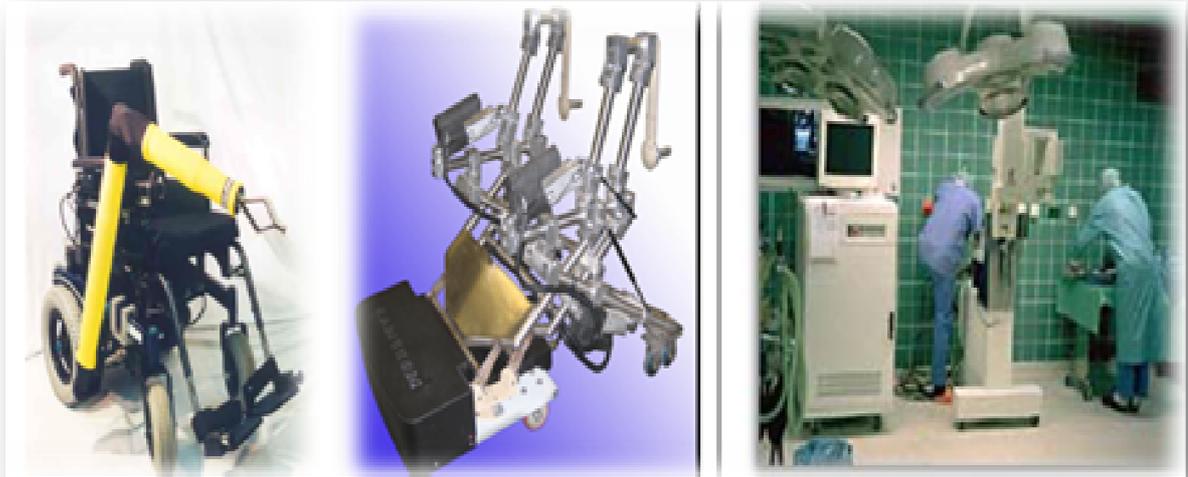


Figure 1 2: Fauteuil équipé d'un bras - Robot chirurgical Déambulateur/Verticalisateur.



Figure 1 3: Main articulée - Robot chien - Robot hexapode.

#### 1.4. Constituants d'un robot :

La structure mécanique du robot manipulateur peut être divisée en deux parties distinctes comme le montre la **Figure (1.4)**

- Organe terminal : l'organe terminal est un dispositif fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique (bras). Il est destiné à manipuler des objets (dispositif de serrage, dispositifs magnétiques,...), ou à les transformer (outil, torche de soudage, pistolet de peinture etc.).

- Élément porteur : il est composé d'un ensemble de corps souples ou rigides liés par des articulations, servant à déplacer l'organe terminal d'une configuration à une autre.

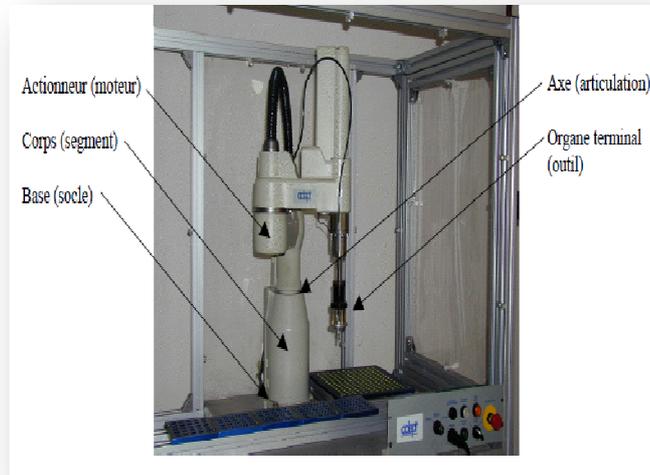


Figure 1 4: les constituants d'un robot.

On distingue classiquement 4 parties principales dans un robot manipulateur :

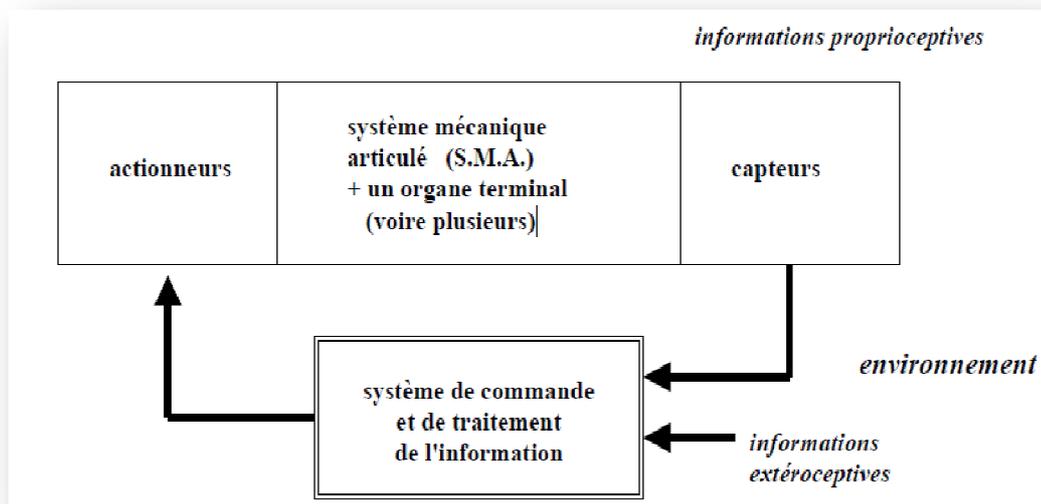


Figure 1 5: Architecture générale d'un système robotique

Les éléments technologiques sur la base desquels les systèmes robotiques sont élaborés peuvent être classés plusieurs grandes catégories :

- Mécanismes: Corps rigides articulés par des liaisons mécaniques selon différentes topologies.
- Actionneurs: Convertisseur d'énergie primaire en énergie mécanique (actionneurs électriques, pneumatiques, hydrauliques, piézo-électriques, AFM, électrostatiques).
- Capteurs: Capteurs d'état (position, vitesse, accélération), capteurs extéroceptifs (force, vision, télémétrie, tactile, sonores, . . .).
- Contrôleurs: Régulateurs d'énergies primaire, calculateurs temps-réel + OS, interfaces capteurs (traitement du signal et numérisation), bus de communication (VME, CAN, Internet).
- IHM: Langage symbolique, langage structure, COA robotique, contrôle d'exécution et d'aide à la décision, interfaces de telle opération.

Sous le terme *organe terminal*, on regroupe tout dispositif destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression, . . .), ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture, . . .). En d'autres termes, il s'agit d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement. Un organe terminal peut être multifonctionnel, au sens où il peut être équipé de plusieurs dispositifs ayant des fonctionnalités différentes.

Il peut aussi être monofonctionnel, mais interchangeable. Un robot, enfin, peut-être *multi-bras*, chacun des bras portant un organe terminal différent. On utilisera indifféremment le terme *organe terminal*, *préhenseur*, *outil* ou *effecteur* pour nommer le dispositif d'interaction fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique. [2]

- Le **système mécanique articulé** (S.M.A.) est un mécanisme ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain. Il permet de remplacer, ou de prolonger, son action (le terme "manipulateur" exclut implicitement les robots mobiles autonomes). Son rôle est d'amener l'*organe terminal* dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données. Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides (ou supposés comme tels), assemblés par des

liaisons appelées *articulations*. Sa motorisation est réalisée par des *actionneurs* électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux *articulations* par des systèmes appropriés. [3]

- Précisons la notion d'**articulation** : Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté (notion précisée au §2.2) de l'un par rapport à l'autre. Soit  $m$  le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé *mobilité de l'articulation*. La mobilité d'une articulation est telle que :  $0 \leq m \leq 6$

Lorsque  $m = 1$  ; ce qui est fréquemment le cas en robotique, l'*articulation* est dite *simple* soit rotoïde, soit prismatique.

- Articulation **rotoïde**: Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée  $R$ , réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe (voir la figure suivante).

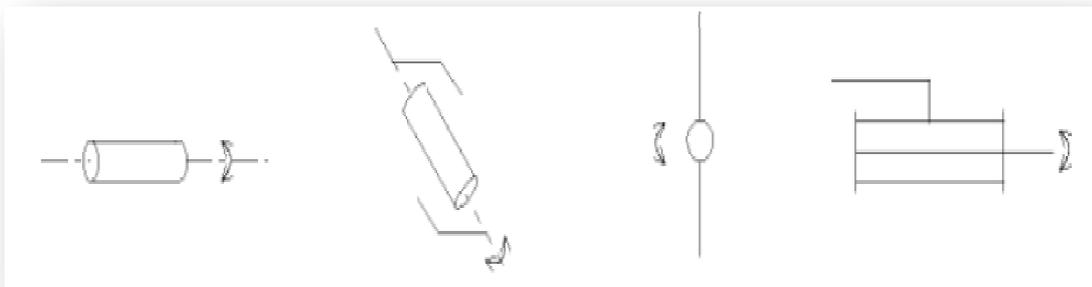
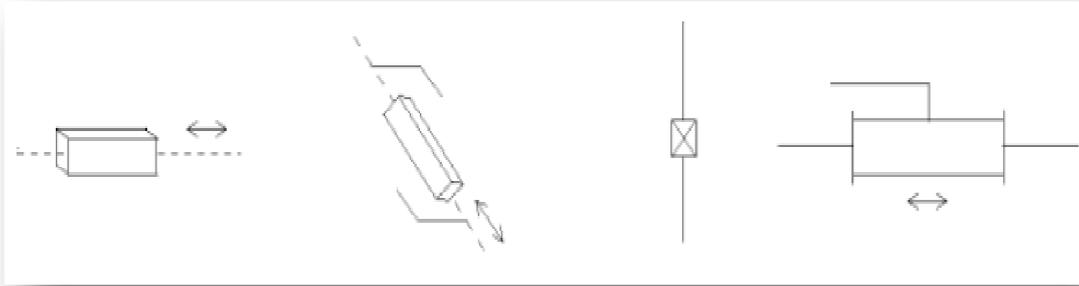


Figure 1 6: Symbole de l'articulation rotoïde.

➤ Articulation **prismatique**: Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée  $P$ , réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe (voir la figure suivante).



**Figure 1 7: Symbole de l'articulation prismatique.**

**Remarque :** Une articulation complexe, *i.e.*, avec une mobilité supérieure à 1, peut toujours se ramener à une combinaison d'articulations prismatique ou rotoïde. Par exemple, une rotule est obtenue avec trois articulations rotoïdes dont les axes sont concourants.

Un robot se compose de :

- Le mécanisme: structure plus au moins proche de celle du bras humain, on dit aussi manipulateur quand il ne s'agit pas d'un robot mobile. Sa motorisation est réalisée par de actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leur mouvement aux articulations par des systèmes appropriés.

- La perception : Permet de gérer les relations entre le robot et son environnement. Les organes de perception sont des capteurs dits « proprioceptifs » lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (position et vitesses des articulations) ou « extéroceptifs » lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement (détection de présence, mesure de distance, vision artificielle).

- La commande: qui synthétise les consignes des asservissements pilotant les actionneurs. A partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur, elle permet d'engendrer les actions du robot. [4]

S'ajoutent à cela :

- ✓ l'interface homme-machine: à travers laquelle l'utilisateur programme les tâches que le robot doit exécuter.
- ✓ le poste de travail et les dispositifs per robotique: qui constituent l'environnement dans lequel évolue le robot.

## 1.5. Chaînes cinématiques:[2]

On appelle mécanisme un ensemble de solides reliés 2 à 2 par des liaisons. On distingue 2 types de mécanismes:

- Les mécanismes en chaîne simple ouverte(ou en série). Lorsque l'on parcourt le mécanisme, on ne repasse jamais 2 fois sur la même liaison, ou sur le même solide. Ce type de système est le plus répandu.
- Les *mécanismes en chaîne complexe*, *i.e.*, tout ce qui n'est pas *en série* (au moins un solide avec plus de 2 liaisons). De tels systèmes se subdivisent en 2 groupes : les *chaînes structurées en arbre*, et les *chaînes fermées* (dont l'avantage est d'être *a priori* plus rigide, plus précis, capable de manipuler de lourdes charges).

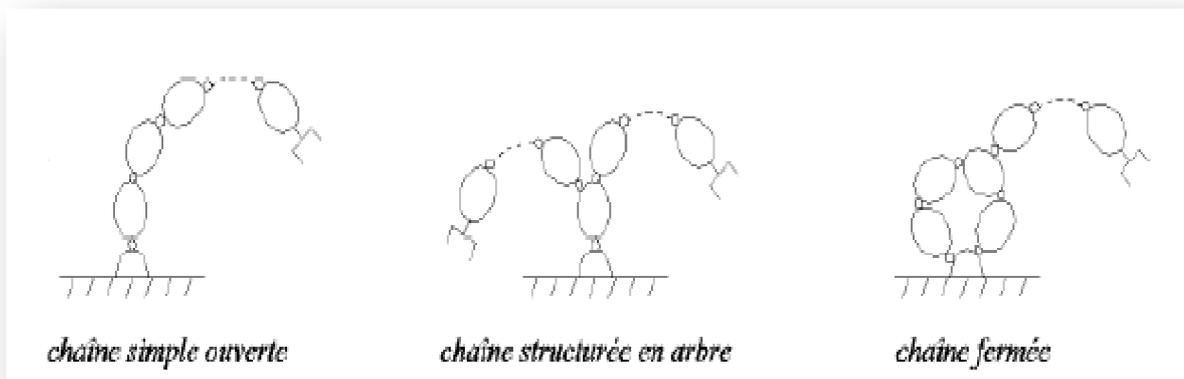


Figure 1 8:les différents types de chaines.

## 1.6. Morphologie des robots manipulateurs :

Ce paragraphe est relatif aux chaînes ouvertes simples. Afin de dénombrer les différentes architectures possibles, on ne considère que 2 paramètres : le type d'articulation (rotoïde ( $R$ ) ou prismatique ( $P$ )) et l'angle que font deux axes articulaires successifs ( $0^\circ$  ou  $90^\circ$  ; sauf cas très particulier, les axes consécutifs d'un robot sont soit parallèles, soit perpendiculaires).

On convient d'appeler les 3 premiers **ddl**. Le *porteur du robot*. Les **ddl** résiduels forment le *poignet*, caractérisé par des dimensions beaucoup plus petites et une plus faible masse. Sont schématisées dans la figure qui suit les 12 morphologies possibles de porteur (ces

morphologies sont non redondantes) on élimine *a priori* les structures limitant les mouvements du porteur à des déplacements linéaires ou planaires : 3 liaisons prismatiques d'axes parallèles, par exemple, ou 3 liaisons rotoïdes d'axes parallèles)). [5]

Dans la pratique, on trouve les 5 structures suivantes :

- Les porteurs anthropomorphes (*RRR*), et plus précisément la première structure de cette classe , comme par exemple les robots FANUC (LR, ARC), STÄUBLI RX, ACMA(V80 et SR400), UNIMATION (PUMA), SCEMI (6P-01), AID (V5), CINCINNATI (T3-7XX),AKR 3000, ASEA (IRB6 et 60), KUKA (IR600), AXEA (V08);
- Les porteurs sphériques (*RRP*) comme par exemple les robots STANFORD, UNIMATION (1000,2000, 4000), PSA (BARNABE) ;
- Les porteurs toriques (*RPR*) et plus précisément la première structure de cette classe, comme par exemple les robots ACMA (H80), les robots de type SCARA (IBM, AXERA, ADEPT, ...);
- Les porteurs cylindriques (*RPP*) comme par exemple les robots ACMA (TH8), MANTEC (A, I et M), CINCINNATI (T3-363) ;
- Les porteurs cartésiens (*PPP*) comme par exemple les robots ACMA (P80), IBM (7565), SORMEL (CADRATIC), OLIVETTI (SIGMA).

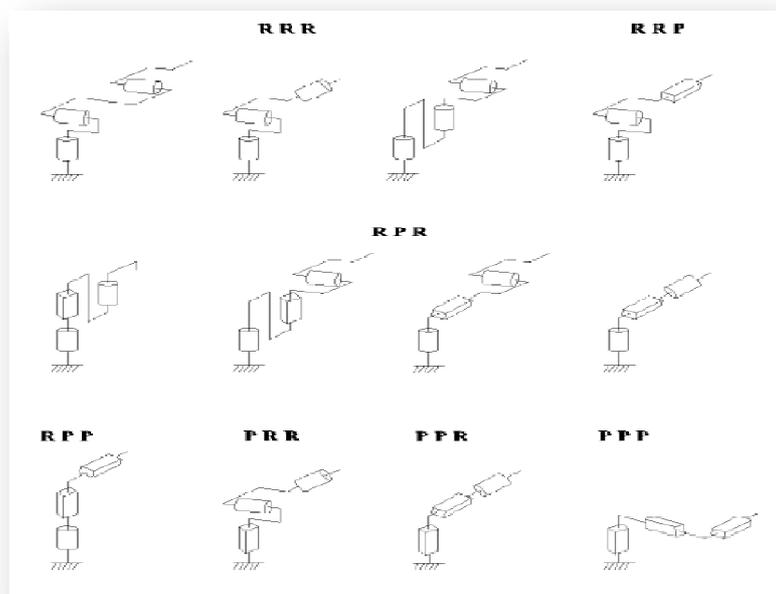


Figure 1 9:Architecture des porteurs. [6]

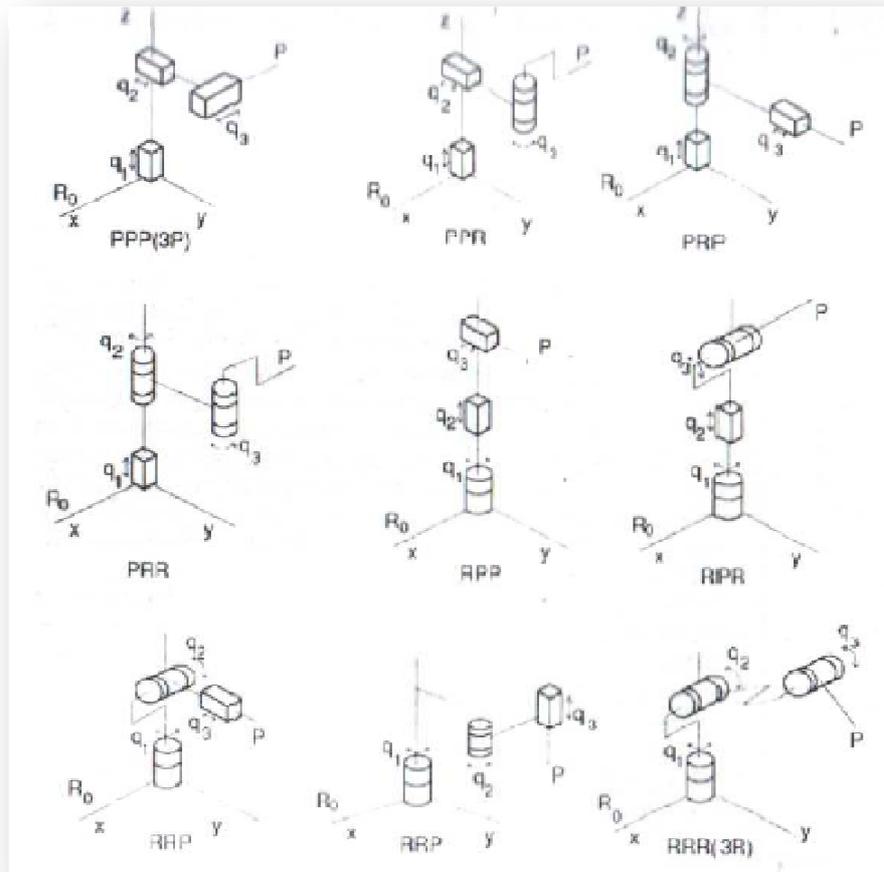


Figure 1 10: Différentes combinaisons Modélisation des Robots d'architectures du porteur.

- Le poignet : il est destiné à l'orientation de la pince ou de l'outil porté par le robot

Les deux structures les plus courantes sont présentées dans la figure suivante.

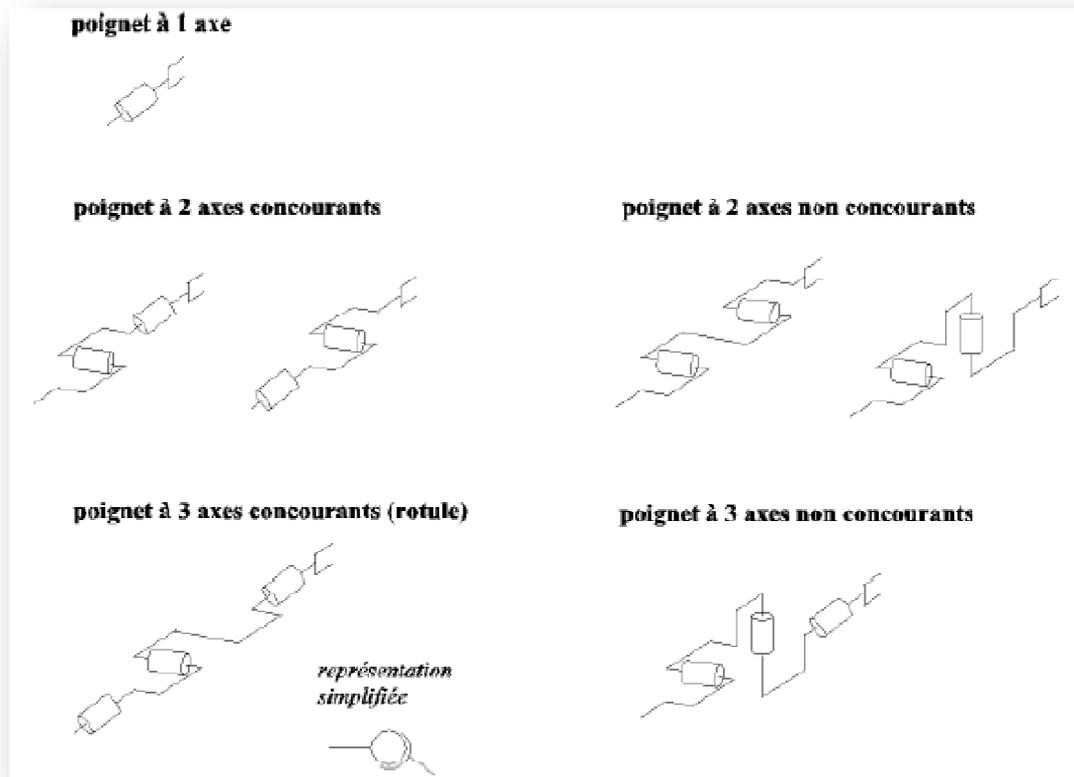


Figure 1 11: Architecture des poignets. [7]

Dans la pratique, la structure la plus classique d'un robot est celle comportant un bras à trois degrés de liberté avec un poignet sphérique comme montre dans la figure (1.12)

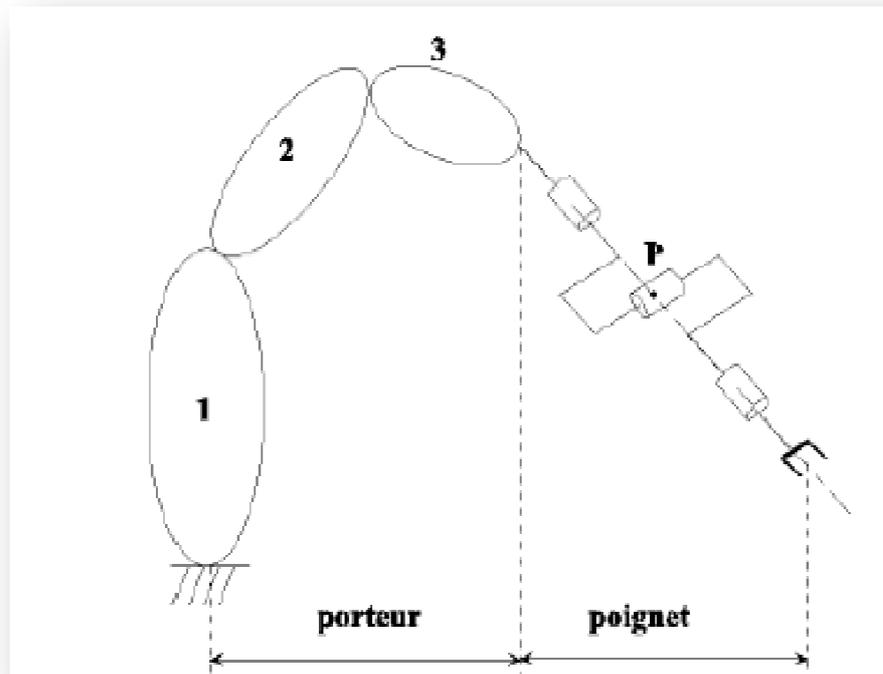


Figure 1 12: Structure générale d'un robot manipulateur. [7]

## 1.7 Robots sériels: [2]

Dans les années 70, pratiquement tous les robots étaient des bras manipulateurs dont les actionneurs sont placés en série (caractère anthropomorphique). Ce type de robot, parfois appelé sériel, est défini de la façon suivante : la structure articulée est chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté ; chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'articulation ou sur l'un des segments précédents.

Ces robots ont pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et être relativement simple sur le plan des calculs liés à leur commande. Par contre ces robots présentent des inconvénients qui peuvent se résumer en ce qui suit :

- Une inertie élevée due aux masses réparties sur toute la chaîne cinématique (actionneurs et organes de transmission) peut engendrer des erreurs de positionnement, des oscillations et surtout limite la rapidité.

- Un manque de rigidité dû à la mise en série d'éléments souples. Le fait que les éléments soient disposés en série implique que chaque segment doit supporter la charge, mais aussi la masse des segments suivants.
- Une fatigue et une usure des liaisons de puissance assurant l'alimentation des actionneurs peut engendrer des pannes plus fréquentes.
- Une fatigue et une usure des liaisons assurant la circulation des informations entre les capteurs et la commande a des conséquences importantes sur la sécurité car une erreur de transmission peut engendrer des mouvements désastreux du robot.

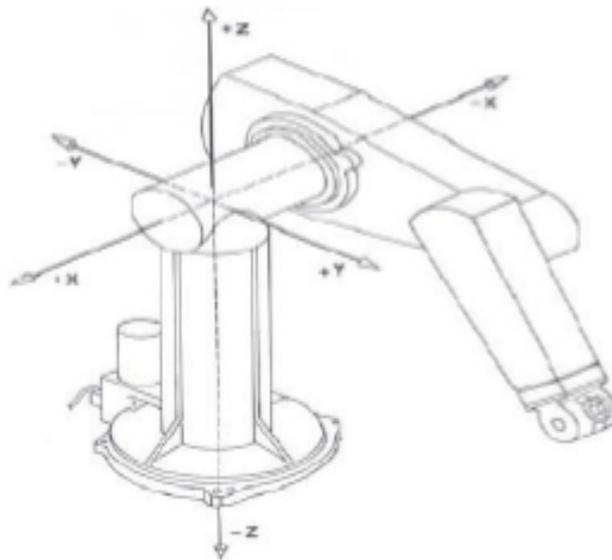


Figure 1 13: Robot sériel.

### **1.7.1 Comparaison des architectures sérielles et parallèles :**

Il est communément admis que les robots parallèles ont une bien meilleure dynamique que les robots sériels, bien que ces derniers aient un volume de travail plus important. Le tableau (1.1) résume les principales différences entre ces deux architectures.

<b>Manipulateur sériel</b>	<b>Robot parallèle</b>
<b>Succession de segments en série de la base vers l'effecteur</b>	Tout segment est au contact de la base et de l'effecteur
<b>Chaîne cinématique ouverte</b>	Chaîne cinématique fermée
<b>Important espace de travail</b>	Espace de travail restreint
<b>Faible précision</b>	Grande précision
<b>Faible charge transportable</b>	Lourde charge transportable
<b>Faible rigidité</b>	Très rigide

Tableau 1 1: une comparaison entre les deux architectures. [8]

## **1.8 Définitions et terminologies :**

### **1.8.1 Redondance :**

Un robot est redondant lorsque le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre d'articulations motorisées. Les degrés de liberté supplémentaires autorisent le contournement des obstacles, cette propriété permet d'augmenter le volume du domaine opérationnel accessible.

### **1.8.2 Singularités :**

Les manipulateurs de type sériel ou parallèle peuvent rencontrer des configurations dites singulières. Au voisinage de ces configurations, une augmentation des efforts dans les articulations du manipulateur ou une perte de rigidité peut avoir lieu alors que ses articulations motorisées sont bloquées. Son organe effecteur peut encore gagner ou perdre un ou plusieurs degré(s) de liberté. Une condition nécessaire à la robustesse d'un manipulateur est évidemment d'éviter les configurations singulières. Les singularités d'un manipulateur correspondent aux configurations annulant le déterminant de sa matrice jacobienne cinématique [9] [10] [11].

Les mouvements d'un manipulateur sont observés dans l'espace cartésien. Ces mouvements sont donnés au manipulateur par les actionneurs, que l'on décrit dans l'espace articulaire. Donc, quand les actionneurs ont des vitesses  $\dot{\theta}$ . On doit pouvoir connaître les vitesses  $\dot{X}$  que cela impose à l'effecteur dans toutes les directions. La correspondance entre

ces deux mesures doit donc être établie, en vue d'imposer aux actionneurs les vitesses articulaires requises pour amener l'effecteur à se déplacer de la façon prescrite dans l'espace cartésien. [12]

Cette relation prend la forme suivante, où A et B sont les matrices jacobiennes du manipulateur :

$$A\dot{X} = B\dot{\theta} \quad [1.1]$$

Les singularités des manipulateurs parallèles se présentent sous trois formes distinctes. Les types rencontrés sont décrits par Gosselin et Angeles (1990). Essentiellement, les singularités sont classées de la manière suivante :

- *Type I* : La matrice B est singulière. Ce type de singularité correspond généralement aux limites de l'espace atteignable. Dans cette situation, les vitesses cartésiennes peuvent être nulles pour des vitesses articulaires non nulles.
- *Type II* : La matrice A est singulière. Dans ce cas, des vitesses cartésiennes non nulles peuvent être observées même si les actionneurs présentent des vitesses articulaires nulles.
- *Type III* : Ce type de singularité peut se produire uniquement dans des cas particuliers, quand le manipulateur possède une architecture particulière.

Le type de la singularité qui sera étudié est celui attribué à la matrice jacobéenne A, le type II. En effet, celui-ci est le plus difficile à étudier et le plus susceptible de causer des problèmes mécaniques au manipulateur, en raison de l'augmentation des forces internes.

### **1.8.3 Parcourabilité :**

L'espace de travail permet d'analyser les performances globales d'accessibilité d'un robot manipulateur. Or, une simple analyse d'accessibilité peut s'avérer insuffisante, même lorsque toutes les contraintes (butées, collisions) semblent avoir été prises en compte. Une condition nécessaire à la robustesse d'un manipulateur est bien évidemment que ses trajectoires soient parcourables. Si l'effecteur peut se déplacer entre deux points de l'espace de travail, cela signifie qu'il existe une trajectoire de liaison. Un changement de posture en cours de mouvement est nécessaire, ce qui oblige l'organe terminal à passer par une configuration « bras tendu » et donc par un point de la frontière de l'espace de travail : la

trajectoire doit être quittée et n'est donc pas parcourable. Il existe deux niveaux de parcourabilité, selon que la trajectoire entre les points soit spécifiée ou non. Pour chaque niveau de parcourabilité, il est utile de déterminer les régions de l'espace de travail qui sont réellement parcourables.

#### **1.8.4 Dextérité :**

Contrairement aux outils destinés à des analyses d'accessibilité et de parcourabilité, il existe des outils permettant d'évaluer des performances en un point particulier de l'espace de travail ou pour une configuration articulaire donnée. Ces analyses locales peuvent être complémentaires des précédentes. La dextérité, par exemple, peut être définie intuitivement comme mesurant l'aptitude de l'organe terminal du robot à effectuer «facilement» des petits déplacements arbitraires autour d'un point de l'espace de travail. La dextérité est étroitement liée au rapport entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires. Elle est généralement évaluée à l'aide de la notion de manipulabilité ou de l'indice d'isotropie [13].

#### **1.8.5 Généricité :**

Dans le cadre de la conception robuste de mécanismes, il est nécessaire de savoir si le mécanisme étudié est générique ou non puisque de faibles perturbations de ses paramètres peuvent changer ses propriétés globales lorsqu'il est non générique. La généricité d'un manipulateur implique que l'ensemble de ses configurations singulières forme une ou plusieurs surface(s) uniforme(s) et régulière(s) dans le domaine articulaire, c'est-à-dire qui ne se coupent pas. La propriété fondamentale d'un robot générique est sa stabilité vis-à-vis de petites perturbations de ses paramètres. Les robots non génériques sont reconnaissables par leurs singularités qui se coupent dans le domaine articulaire [13].

### **1.9 Conclusion :**

Dans ce chapitre, on a présenté d'une façon générale le robot manipulateur, ces différents constituants et structures mécaniques ainsi que la terminologie utilisée en robotique. Dans la suite, on s'intéresse à l'architecture sérielle, dont on vient la détailler précédemment. Dans le chapitre suivant, on atteindra d'une manière approfondie les modélisations d'un robot manipulateur, et on présentera des méthodes mathématiques pour décrire les différentes modélisations des robots manipulateurs.

### **2.1. Introduction :**

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot).

On distingue :

1. les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.
2. les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement.
3. les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

### **2.2. Modèle géométrique :**

Le modèle géométrique qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires du mécanisme et inversement.

#### **2.2.1. Modèle géométrique direct:**

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaires. Le modèle géométrique direct du robot peut être représenté par la relation : [14]

$$X=f(q) \tag{2.1}$$

**q**: étant le vecteur des variables articulaires tel que :

$$q=[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \tag{2.2}$$

Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

$$X=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T \tag{2.3}$$

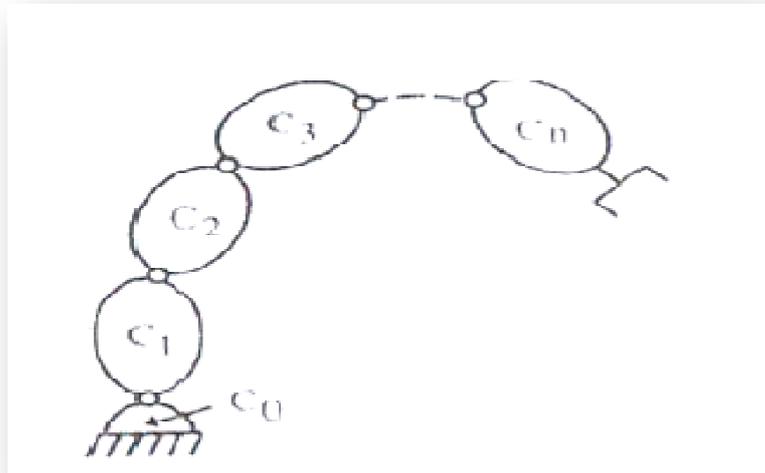
### 2.2.1.1. Convention de Denavit-Hartenberg : [14]

Méthodologie à suivre pour décrire les robots à structure ouverte simples.

Une structure ouverte simple est composée de  $n+1$  corps notés  $C_0, \dots, C_n$  et des articulations.

Le corps  $C_0$  désigne la base du robot et le corps  $C_n$  le corps qui porte l'organe terminal.

L'articulation  $j$  connecte le corps  $C_j$  au corps  $C_{j+1}$  (**Figure 2.1**)



**Figure 2 1: Robot a structure ouverte simple.**

La méthode de description est basée sur le principe suivant :

- **Principe :**

- Fixer des repères à chaque corps du robot.
- Calculer les matrices homogènes entre chaque corps.
- Calculer la matrice homogène entre base et organe terminal.

- **Hypothèses :**

On suppose que le robot est composé de  $n+1$  corps notés  $C_0, \dots, C_n$  et de  $n$  articulations rotoïdes ou prismatiques. A chaque corps, on associe un repère  $R_i$ . Les repères sont numérotés de 0 à  $n$ .

Le corps  $C_0$  désigne la base du robot et le corps  $C_n$  le corps qui porte l'organe terminal.

L'articulation  $i$  connecte le corps  $C_i$  au corps  $C_{i+1}$  **Figure (2.1)**,

Le repère  $R_i$  fixé au corps  $C_j$ , est défini de sorte que :

- L'axe  $z_j$  est porté par l'axe de l'articulation  $j$ .
- L'axe  $x_j$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $z_j$  et  $z_{j+1}$ . Si les axes  $z_j$  et  $z_{j+1}$  sont parallèles ou colinéaires, le choix de  $x_j$  n'est pas unique.

### 2.2.1.2 Les paramètres de Denavit-Hartenberg :

Le passage du repère  $R_{j-1}$  au repère  $R_j$  s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants :

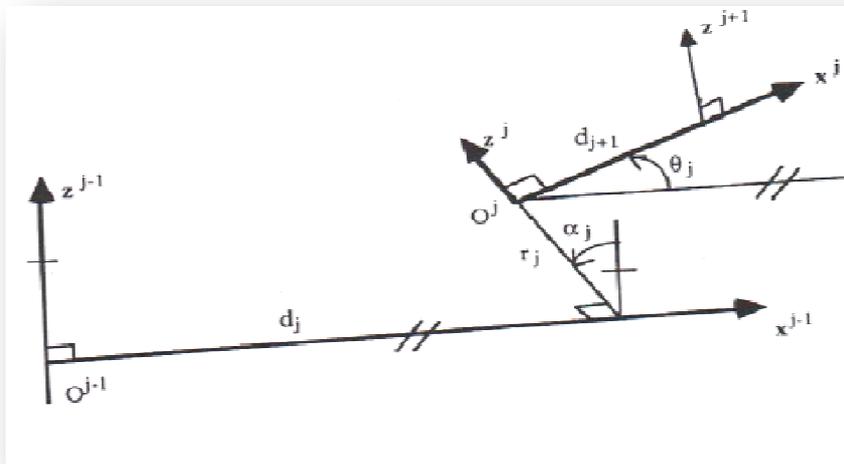


Figure 2 2: Paramètre géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple.

- $\alpha_j$  : angle entre les axes  $Z_{j-1}$  et  $Z_j$  correspondant à une rotation autour de  $X_{j-1}$ .
- $d_j$  : distance entre  $Z_{j-1}$  et  $Z_j$  le long de  $X_{j-1}$ .
- $\theta_j$  : angle entre l'axe  $X_{j-1}$  et  $X_j$  correspondant à une rotation autour de  $Z_j$ .
- $r_j$  : distance entre  $X_{j-1}$  et  $X_j$  le long de  $Z_j$ .

- Si l'articulation  $i$  est de type prismatique, alors  $d_i$  est variable.
- Si l'articulation  $i$  est de type rotoïde, alors  $\theta_i$  est variable.

La variable articulaire  $q_j$  associée à la  $j^{\text{ième}}$  articulation est définie par :

$$q_j = \delta_j \cdot \theta_j + \delta_j \cdot r_j \quad [2.4]$$

Avec :

$\delta_j = 0$  Si l'articulation  $j$  est rotoïde.

$\delta_j = 1$  Si l'articulation est prismatique.

La matrice de transformation définissant le repère  $R_j$  dans le repère  $R_{j-1}$  est donnée par :

$${}^{j-1}T_j = \text{Rot}(x, \alpha_j) \text{Trans}(x, d_j) \text{Rot}(z, \theta_j) \text{Trans}(z, r_j)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.5]$$

Où  $\text{Rot}(u, a)$  et  $\text{Trans}(u, d)$  sont des matrices de transformation homogène (4x4) représentant respectivement une rotation  $a$  autour de l'axe  $\mathbf{u}$  et une translation  $d$  le long de  $\mathbf{u}$ .

## 2.2.2. Modèle géométrique inverse :

### 2.2.2.1. Introduction :

Le modèle géométrique direct d'un robot permet de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaire. Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation données de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue le modèle géométrique inverse.

### 2.2.2.2. Position du problème :

Soit  ${}^fT_E^d$  la matrice de transformation homogène représentant la situation désirée du repère outil  $R_E$  par rapport au repère atelier  $R_f$ . Dans le cas général, on peut exprimer  ${}^fT_E^d$  sous la forme :

$${}^fT_E^d = Z^0 T_n(q) E \quad [2.6]$$

Expression dans laquelle (figure 2.3) :

- $\mathbf{Z}$  est la matrice de transformation définissant la situation du robot (repère  $R_0$ ) dans le repère atelier ;
- ${}^0T_n$  est la matrice de transformation du repère terminal  $R_n$  dans le repère  $R_0$ , fonction du vecteur des variables articulaires  $\mathbf{q}$  ;
- $\mathbf{E}$  est la matrice de transformation définissant le repère outil  $R_E$  dans le repère terminal  $R_n$ .

Lorsque  $n \geq 6$ , on peut écrire la relation suivante en regroupant dans le membre de droite tous les termes connus :

$${}^0T_n(\mathbf{q}) = \mathbf{Z}^{-1} \cdot T_E^d \cdot \mathbf{E}^{-1} \quad [2.7]$$

Lorsque  $n < 6$ , l'espace opérationnel du robot est de dimension inférieure à six. Il n'est pas possible de faire coïncider le repère outil  $R_E$  avec un repère  $R_E^d$  décrivant la tâche sauf lorsque les repères  $R_E$  et  $R_E^d$  sont conditionnés de façon bien particulière pour s'adapter au nombre insuffisant de degrés de liberté. Pratiquement, au lieu d'amener le repère  $R_E$  sur le repère  $R_E^d$ , on cherchera à faire coïncider entre eux des éléments géométriques liés à ces repères (points, droites).

Dans le calcul du MGI, trois cas se présentent :

I. Absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments.

II. Infinité de solutions lorsque :

- le robot est redondant vis-à-vis de la tâche ;
- le robot se trouve dans certaines configurations singulières.

III. Solutions en nombre fini, exprimées par un ensemble de vecteurs  $\{q^1, \dots, q^r\}$ . On dit qu'un robot manipulateur est résoluble [15], [16] lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée. Aujourd'hui, tous les manipulateurs série ayant jusqu'à six degrés de liberté et qui ne sont pas redondants peuvent être considérés comme résolubles [17], [18]. Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot manipulateur.

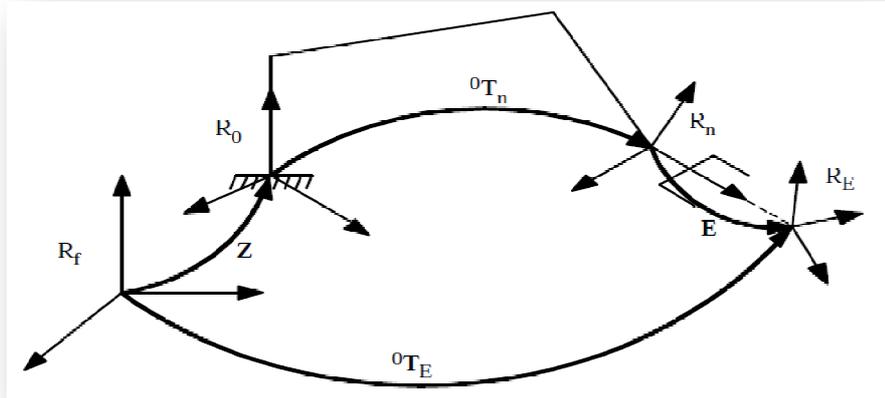


Figure 2 3: Transformations entre l'organe terminal et le repère atelier.

### 2.2.2.3. Principe de la méthode de Paul : [19]

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de transformation homogène s'écrit par expression suivante:

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad [2.8]$$

Soit  $U_0$  la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.9]$$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad [2.10]$$

Pour trouver les solutions de l'équation [2.10], Paul a proposé une méthode qui consiste à pré multiplier successivement les deux membres de l'équation [2.10] par les matrices  ${}^jT_{j-1}$  pour  $j$  variant de 1 à  $n-1$ , opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche.[19]

Pour un robot à six degrés de liberté par exemple, on procède comme suit :

– multiplication à gauche de l'expression [2.10] par  ${}^1T_0$  :

$${}^1T_0 U_0 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad [2.11]$$

Le terme de droite est fonction des variables  $q_2, \dots, q_6$ . Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de  $U_0$  et de la variable  $q_1$  ;

- Identification terme à terme des deux membres de l'équation [2.11]. On se ramène à un système d'une ou de deux équations fonction de  $q_1$  uniquement, dont la structure appartient à un type particulier parmi une dizaine de types possibles ;
- Multiplication à gauche de l'expression [2.11] par  ${}^2T_1$  et calcul de  $q_2$ .

La succession des équations permettant le calcul de tous les  $q_j$  est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 U_0 &= {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^5T_4 {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^5T_6 \end{aligned} \right\} \quad [2.12]$$

Les éléments des deuxièmes membres ayant déjà été calculés lors du calcul du MGD :

$$U_j = {}^jT_6 = {}^jT_{j-1} U_{j-1} \quad [2.13]$$

L'utilisation de la méthode sur un grand nombre de robots industriels a permis de constater que les types d'équations rencontrés sont peu nombreux et que leur résolution même si elle nécessite parfois quelques développements reste cependant relativement simple. [20]

### **2.3. Modélisation cinématique :**

Le modèle géométrique du robot (qu'il soit direct ou inverse) est utile car il apporte une vision «globale» du comportement d'un robot. Toutefois, il reste limité pour le contrôle réel d'un robot. En effet, il correspond à un contrôle « point à point », qui bien qu'encore largement utilisé dans le monde industriel, répond mal au problème d'un déplacement entre deux points relativement distants. Il est nécessaire alors d'introduire les paramètres de vitesses et accélérations pour obtenir un contrôle du comportement plus efficace. Le contrôle en position n'est donc qu'un modèle restreint par rapport à la réalité robotique.

Le modèle cinématique permet non seulement de compléter éventuellement le modèle géométrique en tenant compte des vitesses, mais aussi de le remplacer : en agissant par accroissements successifs.

Le modèle cinématique possède une propriété essentielle : il est une différentiation du modèle géométrique. Il est donc une linéarisation du système d'équations non linéaires représentant le modèle géométrique. Par conséquent, on peut toujours facilement obtenir les transformations inverses, puisqu'elles proviennent de l'inversion d'un problème linéaire. Toutefois le modèle cinématique comporte aussi des inconvénients :

- La non unicité du modèle géométrique inverse implique qu'il existe plusieurs " chemins " pour se rendre d'un point à un autre ;
- Le traitement par incrément peut amener à des imprécisions provoquant des singularités, mécaniques et/ou mathématiques.

### **2.3.1. Modèle cinématique direct : [21]**

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Il est noté :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad [2.14]$$

Où  $J(q)$  désigne la matrice jacobienne du mécanisme, elle intervient dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires  $dX$  des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires  $dq$ , soit :

$$dX = J(q)dq \quad [2.15]$$

#### **2.3.1.1. Calcul de la matrice Jacobienne:**

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la matrice Jacobienne. Ces méthodes se caractérisent par le repère dans lequel la matrice Jacobienne est exprimée ainsi que par le corps auquel elle correspond, **c'est-à-dire par le choix de  $i$  et  $j$  dans le calcul de  ${}^iJ_j$**  : matrice

Jacobienne du corps  $\frac{dX}{dt} = f(X, u)$  exprimée dans repère  $i$ .

Pour calculée la matrice Jacobienne, on propose deux méthodes [21] :

**Première méthode :**

On considère un manipulateur à  $n$  degrés de liberté :

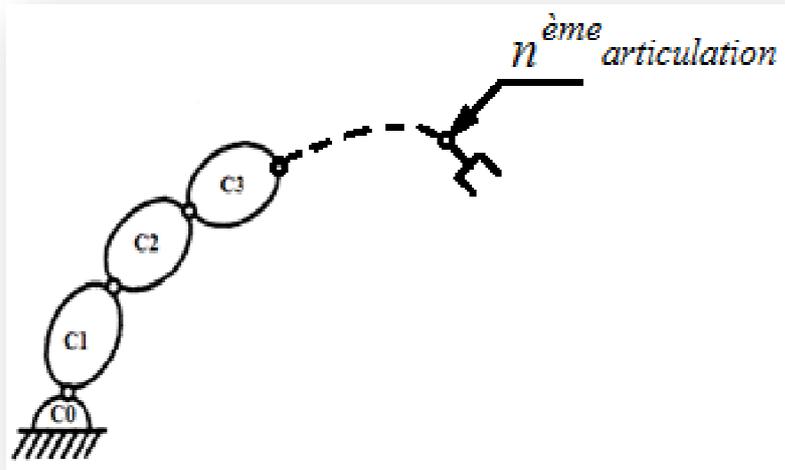


Figure 2 4: manipulateur n degré de liberté.

La matrice Jacobienne est sous la forme :

$$J(q) = [j_1 \dots \dots \dots \dots \dots j_n] = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_1 \times {}^0d_n & \dots & \dots & \dots & \dots & {}^0\hat{k}_n \times {}^0d_n \\ & {}^0\hat{k}_1 & \dots & \dots & \dots & {}^0\hat{k}_n \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$${}^0\hat{k}_i \times {}^0d_n = {}^0R_i * ({}^i\hat{k}_i \times {}^i d_n) \text{ et } {}^0\hat{k}_i = {}^0R_i * {}^i\hat{k}_i$$

Avec  ${}^i\hat{k}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$  et  $i=1 \dots 6$

Avec «  $n$  » est le nombre de degrés de liberté.

Pour un bras manipulateur à six degrés de liberté :

$$J(q) = \begin{bmatrix} {}^0k_1 \times {}^0d_6 & {}^0k_2 \times {}^0d_6 & {}^0k_3 \times {}^0d_6 & {}^0k_4 \times {}^0d_6 & {}^0k_5 \times {}^0d_6 & {}^0k_6 \times {}^0d_6 \\ {}^0k_1 & {}^0k_2 & {}^0k_3 & {}^0k_4 & {}^0k_5 & {}^0k_6 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

La matrice Jacobienne est sous la forme 6x6

Donc  $J(q) = [j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4 \ j_5 \ j_6]$

**Deuxième méthode :**

On a  $\dot{X} = [\dot{X}_n \ \dot{Y}_n \ \dot{Z}_n \ w_{Xn} \ w_{Yn} \ w_{Zn}]^T$  [2.18]

Où  ${}^0V_n = J_D \dot{q}_D$  [2.19]

$$\dot{\bar{q}}_D \in \dot{\bar{q}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial q_1} & \frac{\partial d_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial d_2}{\partial q_1} & \frac{\partial d_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial d_2}{\partial q_n} \\ \frac{\partial d_3}{\partial q_1} & \frac{\partial d_3}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial d_3}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad [2.20]$$

$$\text{Et } {}^0w_n = J_R \dot{\bar{q}} \quad [2.21]$$

$${}^0w_n = \dot{q}_1 \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q_2} + \dots + \dot{q}_n \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q_n} \quad [2.22]$$

$${}^0w_n = \dot{q}_1 \frac{\partial {}^0R_1}{\partial q_1} {}^0R_1^T + \dot{q}_2 {}^0R_1 \frac{\partial {}^1R_2}{\partial q_2} {}^0R_2^T + \dots + \dot{q}_n {}^0R_{n-1} \frac{\partial {}^{n-1}R_n}{\partial q_n} {}^0R_n^T \quad [2.23]$$

La forme de la matrice Jacobienne et donnée par :

$$J(d) = \begin{bmatrix} J_D \\ J_R \end{bmatrix} \quad [2.24]$$

$$\text{Où } J_D = \frac{\partial d_n(\dot{q}_D)}{\partial \dot{q}_D} = \frac{\partial T(q)}{\partial q} \quad [2.25]$$

$$\text{Et } J_R = \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q} \quad [2.26]$$

### **2.3.2. Modèle cinématique inverse :**

Le problème de la cinématique inverse consiste à déterminer les vitesses articulaires  $\bar{q}$  qui correspondent aux vitesses d'exécution  $\bar{X}$  de la tâche, le vecteur des vitesses opérationnelles  $\bar{X}$  est linéairement relié au vecteur des vitesses articulaires par la matrice Jacobienne :

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} {}^0V_n \\ {}^0w_n \end{bmatrix} = J_n \dot{\bar{q}} \quad [2.27]$$

Si la jacobienne n'est pas singulière c'est-à-dire que le déterminant de  $J$  est différent de zéro, la matrice  $J^{-1}$  existe et les vitesses articulaires sont calculées par :

$$\dot{\bar{q}} = J^{-1} \dot{\bar{X}} \quad [2.28]$$

## **2.4. Modélisation dynamique :**

Le modèle dynamique exprime la relation entre les charges appliquées aux actionneurs et les positions, vitesses, et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \quad [2.29]$$

Avec :

- $\Gamma$  : vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique. Dans la suite, on écrira tout simplement *couples* ;
- $q$ : vecteur des positions articulaires ;
- $\dot{q}$  : Vecteur des vitesses articulaires ;
- $\ddot{q}$  : Vecteur des accélérations articulaires ;
- $f_e$ : Vecteur représentant l'effort extérieur (forces et moments) qu'exerce le robot sur l'environnement.

Par convention, la relation (2.30) est appelée « modèle dynamique inverse », ou tout simplement « modèle dynamique ».

Le modèle dynamique direct, est celui qui exprime les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses et couples articulaires, il est représenté par la relation :

$$\ddot{q} = g(q, \dot{q}, \Gamma, f_e) \quad [2.30]$$

Plusieurs formalismes ont été utilisés pour obtenir le modèle dynamique de robot, les plus utilisés sont : le formalisme de Lagrange et le Formalisme de Newton-Euler.

### **2.4.1. Formalisme de Lagrange :**

Le formalisme de Lagrange décrit l'équation du mouvement en termes de travail et d'énergie du système, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1, \dots, n \quad [2.31]$$

Avec :

- $L$  : lagrangien du système égal à  $E - U$  ;
- $E$  : énergie cinétique totale du système ;
- $U$  : énergie potentielle totale du système.

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad [2.32]$$

A est appelée matrice d'inertie du robot, c'est une matrice de dimensions (n×n), symétrique définie positive, ses éléments sont en fonction des variables articulaires  $q_j$ .

L'énergie potentielle étant en fonction des variables articulaires  $q_j$ , le vecteur  $\Gamma$  peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) \quad [2.33]$$

•  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  : Vecteur de dimension (nx1) représentant les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges ;

$Q(q)$ : Vecteur des couples/forces de gravité.

- L'élément  $A_{ii}$  est égal au coefficient de  $\frac{1}{2}(\dot{q}_i)^2$  dans l'expression de l'énergie cinétique ;
- L'élément  $A_{ij}$  si  $i \neq j$  est égal au coefficient de  $\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$  dans l'expression de l'énergie cinétique ;
- Le calcul de  $C$  se fait selon la relation suivant :

$$\begin{cases} C_j = \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \dot{q}_k \\ c_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial A_j}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \end{cases} \quad [2.34]$$

- Les éléments de  $Q$  se calculent selon la relation suivante :

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad [2.35]$$

#### 2.4.1.1. Efforts exercés par l'organe terminal sur son environnement [1] :

Pour accomplir une tâche donnée, l'organe terminal porté par le corps  $C_n$  doit exercer un effort statique sur l'environnement. Pour cela, on doit établir le modèle statique qui permet de calculer les couples et/ou forces articulaires correspondant à un effort donné par l'organe terminal.

Soit  $f_{en}$  l'effort statique exercé par l'organe terminal sur son environnement. On a :

$$f_{en} = \begin{bmatrix} f_{en} \\ m_{en} \end{bmatrix} = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad m_x \quad m_y \quad m_z] \quad [2.36]$$

Pour calculer l'effort  $\Gamma_e$  des forces/moments que doivent fournir les actionneurs d'un robot pour que l'organe terminal exerce l'effort  $f_{en}$  sur son environnement, on utilise la relation :

$${}^i\Gamma_e = {}^iJ_n^T f_{en} \quad [2.37]$$

Avec :  $f_{en}$  exprimé dans le repère  $R_i$  lié au corps  $C_i$  .

On en tient compte en ajoutant le terme  $\Gamma_e$  au second membre de l'équation [2.33]

#### **2.4.2. Formalisme de Newton-Euler :**

Le formalisme de Newton-Euler est basé sur les théorèmes généraux de la mécanique. Il ne nécessite pas le calcul intrinsèque des coefficients dynamiques du robot. Le modèle est obtenu par double récurrence [22].

##### **2.4.2.1. Équation de NEWTON :**

Le schéma suivant montre un corps rigide dont le centre de masse accélère avec une accélération  $\dot{v}_c$ . Dans une telle situation, la force,  $F$ , agissant sur le centre de masse qui cause cette accélération est donnée par l'équation de NEWTON [22].

$$F = m\dot{v}_c \quad [2.38]$$

Où  $m$  est la masse totale du corps.

##### **2.4.2.2. L'équation d'EULER :**

Le schéma suivant montre un corps rigide tournant avec une vitesse angulaire  $\omega$  et avec une accélération angulaire  $\dot{\omega}$ . Dans une telle situation le moment  $N$  qui doit agir sur le corps pour causer ce mouvement est donné par l'équation d'Euler ;

$$N = {}^cI\dot{\omega} + \omega {}^cI\omega \quad [2.39]$$

${}^cI$  : est le tenseur d'inertie du corps dont l'origine est le centre de la masse.

##### **2.4.2.3 Formulation dynamique itérative de Newton-Euler :**

Le problème est de trouver les couples qui correspondent à une trajectoire donnée d'un manipulateur. Nous supposons connues la position, la vitesse, et l'accélération des articulations  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ . Cette hypothèse faite et avec la connaissance des informations et des résultats de la cinématique et de la distribution de masses du robot, nous pouvons calculer les

couples communs pris pour causer ce mouvement. L'algorithme présenté est basé sur la méthode éditée par Luh, Marcheur, et Paul [23].

#### 2.4.2.4. Récurrence avant pour calculer les vitesses et les accélérations:

Il est nécessaire de calculer les forces d'inertie agissant sur les liens, la vitesse de rotation et l'accélération linéaire et de rotation du centre de la masse de chaque lien du manipulateur à n'importe quel instant donné.

Ces calculs seront donnés dans une nature itérative commençant par le lien 1 et en déplaçant successivement lien par lien vers l'extérieur du lien n.

La propagation de la vitesse de rotation d'un lien vers un autre est donnée par la relation suivante :

Pour  $(i+1)$  rotation:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R^i \dot{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad [2.40]$$

Nous obtenons l'équation de transformation de l'accélération angulaire d'un lien à l'autre ;

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1}R^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad [2.41]$$

Quand le lien  $(i+1)$  est prismatique :

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R^i \dot{\omega}_i \quad [2.42]$$

L'accélération linéaire de chaque lien est obtenue par la relation suivante ;

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \left[ {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i \right] \quad [2.43]$$

Pour le lien  $(i+1)$  de forme prismatique :

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \left[ {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i \right] + 2 {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad [2.44]$$

L'accélération linéaire du centre de masse pour chaque lien est :

$${}^i\dot{v}_{ci} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{ci}) + {}^i\dot{v}_i \quad [2.45]$$

Notons que l'application des équations de liaison est spécialement simple quand :

$${}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0 \quad [2.46]$$

La force et le couple agissant sur un lien :

- ✓ Après avoir calculé les accélérations linéaires et angulaires du centre de masse de chaque lien, on peut appliquer les équations de Newton-Euler pour calculer la force d'inertie et le couple agissant au centre de masse de chaque lien.

Récurrance arrière pour calculer les forces et les couples :

- ✓ Après avoir calculé les forces et couples agissant sur chaque lien, maintenant il reste à calculer les couples de conjoints qui se traduiront par ces forces et les moments appliqués à chaque lien (Figure 2.16).

$f_i$  : La force exercée sur le lien  $i$  par le lien  $i-1$ .

$n_i$  : Le couple exercé sur le lien  $i$  par le lien  $i-1$ .

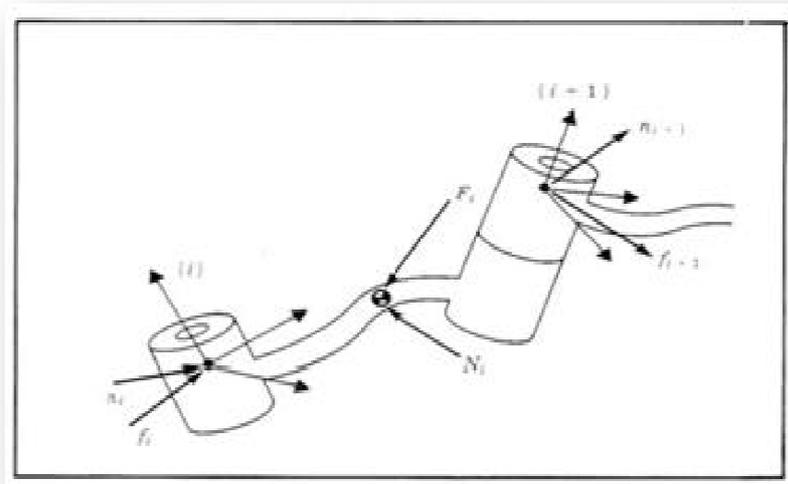


Figure 2 5: les forces agissant sur le lien i. [44]

En additionnant les forces agissant sur le lien  $i$ , nous arrivons à une relation équilibre des forces,

$${}^i F_i = {}^i f_i - {}^i R^{i+1} f_{i+1} \quad [2.47]$$

En additionnant les couples sur le centre de masse, nous arrivons à l'équation équilibre de couples:

$${}^i N_i = {}^i n_i - {}^i n_{i+1} + (-{}^i P_{ci}) \times {}^i f_i - ({}^i P_{i+1} - {}^i P_{ci}) \times {}^i f_{i+1} \quad [2.48]$$

En utilisant le résultat de l'équilibre des forces et en ajoutant une matrice de rotation, on peut écrire l'équation d'équilibre de couples sous la forme suivante :

$${}^i N_i = {}^i n_i - {}^i R^{i+1} n_{i+1} - {}^i P_{ci} \times {}^i F_i - {}^i P_{i+1} \times {}^i R^{i+1} f_{i+1} \quad [2.49]$$

Enfin, on peut réorganiser les équations de forces et de couples sous la forme;

$${}^i f_i = {}^i R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad [2.50]$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^i R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{ci} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i R^{i+1} f_{i+1} \quad [2.51]$$

Comme dans le cas statique, les couples requis communs se trouvent en prenant la composante Z du couple appliqué par un lien sur son voisin :

$$\tau_i = {}^i n_i^\tau {}^i Z_i \quad [2.52]$$

Si on a  $(i+1)$  une articulation prismatique, on utilise :

$$\tau_i = {}^i f_i^\tau {}^i Z_i \quad [2.53]$$

#### 2.4.2.5. L'algorithme itératif de dynamique de Newton-Euler :

L'algorithme complet pour calculer des couples communs du mouvement des joints se compose de deux parties. D'abord les vitesses des liens et les accélérations sont itérativement calculées du lien 1 dehors au lien n et les équations de Newton-Euler sont appliquées à chaque lien. Ensuite, les forces et les couples de l'interaction et les couples du déclencheur de joint sont calculés périodiquement du lien n de nouveau au lien 1. Les équations sont récapitulées pour le cas de tous les liens de rotation.

➤ Récurrence avant :

$i = 1 \dots\dots\dots 5;$

$${}^{i+1} \omega_{i+1} = {}^{i+1} R^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} \quad [2.54]$$

$${}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1} R^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1} R^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} \quad [2.55]$$

$${}^{i+1} \dot{v}_{i+1} = {}^{i+1} R^i \left[ {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) + {}^i \dot{v}_i \right] + 2 {}^{i+1} \omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1} Z_{i+1} \quad [2.56]$$

$${}^{i+1} \dot{v}_{ci+1} = {}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1} P_{ci+1} + {}^{i+1} \omega_{i+1} \times ({}^{i+1} \omega_{i+1} \times {}^{i+1} P_{ci+1}) + {}^{i+1} \dot{v}_{i+1} \quad [2.57]$$

$${}^{i+1} F_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1} \dot{v}_{ci+1} \quad [2.58]$$

$${}^{i+1} R_{i+1} = {}^{ci+1} I_{i+1} {}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} \times {}^{ci+1} I_{i+1} {}^{i+1} \omega_{i+1} \quad [2.59]$$

➤ Récurrence arrière :

$i = 6 \dots\dots\dots 1;$

$${}^i f_i = {}^{i+1} R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad [2.60]$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{ci} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1} R^{i+1} f_i \quad [2.61]$$

$$\tau_i = {}^i n_i^\tau {}^i Z_i \quad [2.62]$$

### 2.4.2.6. Inclusion des forces de pesanteur dans l'algorithme de la dynamique :

L'effet de la gravité du chargement sur les liens peut être inclus, tout simplement par la mise en  ${}^0\dot{v}_0 = G$ , où  $G$  est le vecteur de gravité. Ceci est équivalent à dire que la base du robot est l'accélération ascendante de  $G$  accélération. Cette accélération ascendante fictive cause exactement les mêmes effets sur les liens que la gravité ainsi, sans des dépenses informatiques supplémentaires, l'effet de pesanteur est calculé [22]

### 2.4.2.7. Comparaison entre les deux formalismes :

Le formalisme de Lagrange est le plus adapté pour le calcul du modèle dynamique direct. Il est souvent employé pour la modélisation et la simulation du système [24].

Par contre le formalisme de Newton-Euler est utilisé pour la commande en temps réel car il offre une réduction considérable du temps de calcul du modèle dynamique inverse comme le montre le tableau suivant :

Formalisme	Multiplications	Additions
<b>Lagrange</b>	$32\frac{1}{2}n^4 + 86\frac{5}{12}n^3 + 171\frac{1}{4}n^2 + 53\frac{1}{3}n - 128$	$25n^4 + 66\frac{1}{3}n^3 + 129\frac{1}{2}n^2 + 42\frac{1}{3}n - 96$
<b>Newton-Euler</b>	$150n - 48$	$131n - 48$

Tableau 2 1: Nombre d'opérations effectuées pour chaque formalisme. [25]

### 2.4.2.8. Situation d'un robot dans son environnement :

L'environnement dans lequel évolue le robot est modélisé par un repère supposé absolu et fixe appelé « repère atelier ». Les formalismes décrits précédemment nous permettent de définir les paramètres géométriques, cinématiques et dynamiques relativement au repère lié à la base du robot. Pour calculer ces paramètres par rapport au repère atelier  $(R_A, O_A, \bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{z}_A)$ , on doit définir la situation de la base du robot dans le repère atelier par la matrice de transformation suivante :

$${}^A T_0 = \begin{bmatrix} {}^A h_0 & {}^A n_0 & {}^A a_0 & {}^A p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A A_0 & {}^A p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.63]$$

Où :

${}^A A_0 = \begin{bmatrix} {}^A h_0 & {}^A n_0 & {}^A a_0 \end{bmatrix}$  : Matrice (3×3) définissant l'orientation de la base par rapport au repère atelier ;

${}^A p_0$  : Vecteur position de l'origine du repère  $(R_0, O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par rapport au repère atelier.

La situation d'un lien  $i$  relativement au repère atelier est définie par :

$${}^A T_i = {}^A T_0, {}^0 T_i$$

## 2.5. Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté les grandes lignes de la modélisation des robots manipulateurs, commençant par la description des modèles géométrique directe et inverse qui ont été décrite d'une manière générale. Ainsi, on a exposé le modèle cinématique directe et inverse avec les méthodes de calcul de la matrice Jacobienne et son inverse. Pour la modélisation dynamique on a présenté les deux formalismes de Lagrange et Newton-Euler avec les deux récurrences avant et arrière. L'étude faite dans ce chapitre nous a permis de préparer les différents modèles mathématiques régissant un robot ou bras manipulateurs. Le but est de comprendre et d'introduire des aspects utiles à notre démarche dans la suite de notre travail.

### **3.1 Introduction :**

La planification des trajectoires est consacrée à générer les entrées de référence pour le système de contrôle du manipulateur de manière à pouvoir exécuter la requête.

Le chemin géométrique, les contraintes cinématiques et dynamiques sont les entrées de l'algorithme de planification des trajectoires, alors que la trajectoire des articulations (ou de l'organe terminal) exprimé sous la forme d'une séquence temporelle des valeurs de position, de vitesse et d'accélération à la sortie. [26]

De l'autre côté, la planification des trajectoires est effectuée dans l'espace articulaire du robot, après une inversion cinématique de la trajectoire géométrique donnée. Les trajectoires sont alors obtenues au moyen d'une interpolation fonctionnelle qui répond aux contraintes cinématiques et dynamiques imposées.

Presque toutes les techniques trouvées dans la littérature scientifique sur le problème de la planification des trajectoires sont basées sur l'optimisation de certains paramètres ou d'une fonction objective :

- Minimiser le temps d'exécution.
- Minimiser l'énergie.
- Minimiser le couple.

Dans ce chapitre, nous allons aborder les différentes méthodes de planification des trajectoires :

- Interpolation polynômiale
- Spline cubique
- B-spline
- Bézier

### **3.2. Les méthodes de planification des trajectoires :**

#### **3.2.1 Interpolation polynomiale : Lagrange [23]**

##### **❖ Théorème :**

– Soient  $n+1$  points distincts  $x_i$  réels et  $n+1$  réels  $y_i$ , il existe un unique polynôme  $p \in P_n$  tel que  $p(x_i) = y_i$  pour  $i=0$  à  $n$

Démonstration :

$$\text{Construction de } p : p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad [3.1]$$

$$\text{Avec polynôme } L_i \text{ de Lagrange } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad [3.2]$$

❖ Propriétés de  $L_i$  :

$$L_i(x_i) = 1$$

$$L_i(x_j) = 0 \quad j \neq i \quad \text{Avec } L \text{ est un polynôme d'ordre } n$$

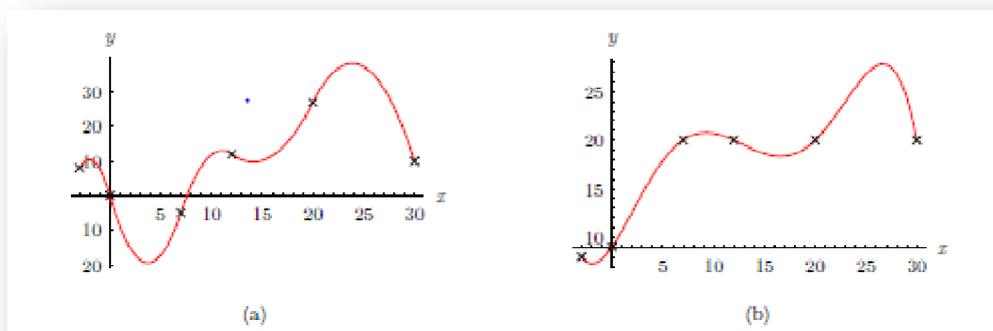


Figure 3 1: Interpolation de Lagrange. [27]

**Commentaire:** Nous pouvons le voir sur la figure 3 1(b) où la courbe continue d'osciller lorsque les points sont stables.

❖ **Avantages et inconvénients :**

- L'avantage de l'interpolation de Lagrange est qu'elle est relativement simple, et qu'il est possible de relier beaucoup de points avec une seule fonction polynomiale et non plusieurs arcs de cubiques ou de paraboles.
- Le principal désavantage est que la courbe peut être complètement aberrante.
- En effet, si nous essayons d'interpoler une fonction régulière comme  $\frac{1}{1+x^2}$ , nous voudrions que plus les points choisis sur cette courbe sont rapprochés plus l'interpolation s'approche de la fonction donnée. Malheureusement, ce n'est pas le cas « plus nous prenons de points plus la courbe oscille entre ces points ». L'interpolation

de Lagrange n'est donc pas une très bonne méthode, et il est généralement préférable d'interpoler les points avec plusieurs arcs de degré moins élevé puis de les raccorder.

- Ce problème est très gênant et explique que l'interpolation de Lagrange n'est pas très utilisée.
- Un autre inconvénient est que le polynôme est de degré  $n$ , donc si nous avons énormément de points les manipulations peuvent devenir lourdes. C'est aussi une raison de préférer l'interpolation par bouts de cubiques. [27]

### 3.2.2. Représentation de Bézier : [28]

Chaque segment de polynôme de courbe peut être représenté par son soi-disant Bézier polygone. La courbe et son polygone de Bézier sont étroitement liés. Ils ont en commun des points d'extrémité et des tangentes d'extrémité, le segment de la courbe se trouve dans la partie convexe coque de son polygone de Bézier, etc. De plus, l'un des plus rapides et plus stable utilisé pour rendre une courbe polynomiale est basée sur la représentation de Bézier.[28]

❖ Polynômes de Bernstein :

Calcul du développement binomial :

$$1 = (u + (1-u))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad [3.3]$$

Conduit à des polynômes de Bernstein de degré  $n$ .

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad [3.4]$$

Qui sont illustrés à la **figure (3.1)** pour  $n = 4$ .

Les propriétés suivantes des polynômes de Bernstein de degré  $n$  sont importantes.

- Ils sont linéairement indépendants.

Pour savoir, en divisant :

$$\sum_{i=0}^n b_i u^i (1-u)^{n-i} = 0 \text{ Par } (1-u)^n \quad [3.5]$$

Et on définit  $s$  comme suite:

$$s = u \div (1-u) \quad [3.6]$$

Donc on peut donner :

$$\sum_{i=0}^n b_i s^i = 0 \quad [3.7]$$

Ce qui implique :

$$b_0 = \dots = b_n = 0 \quad [3.8]$$

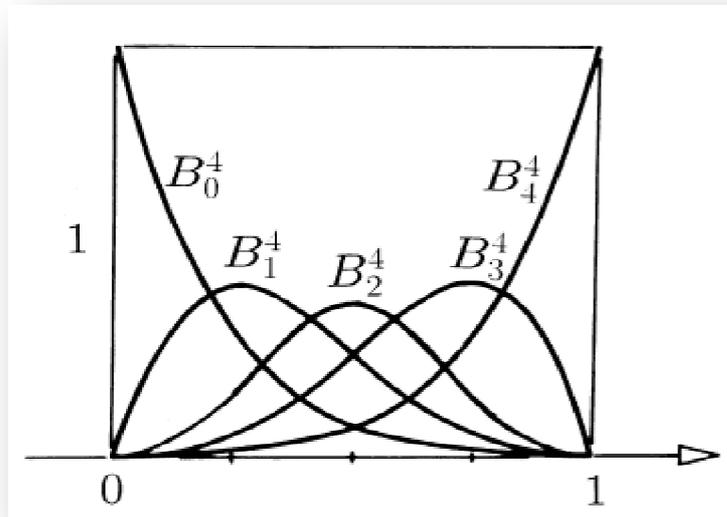


Figure 3 2: Les polynômes de Bernstein de degré 4 sur [0,1].

- Ils sont symétriques

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u) \quad [3.9]$$

- Ils ont des racines à 0 et 1 seulement

$$B_i^n(0) = B_{n-i}^n(1) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i=0 \\ 0 & \text{pour } i>0 \end{cases} \quad [3.10]$$

- Ils forment une partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1 \quad u \in \mathbb{R} \quad [3.11]$$

- Ils sont positifs dans [0, 1]

$$B_i^n(u) > 0 \quad u \in [0,1] \quad [3.12]$$

### 3.2.3. Représentation des splines :

Splines sont des courbes polynomiales par morceaux qui sont différentiables jusqu'à un pré ordre fixé. [28]

- ❖ Les splines :

Une courbe  $s(u)$  est appelée spline degré  $n$  avec les nœuds  $a_0, \dots, a_m$  où  $a_i \leq a_{i+1}$  et  $a_i \leq a_{i+n+1}$  pour tout  $i$  possible. Si  $s(u)$  est  $n-r$  fois dérivable à tout nœud  $r$ , et  $s(u)$  est un polynôme de degré  $\leq n$  sur chaque intervalle de nœud  $[a_i, a_{i+1}]$  Pour  $i = 0, \dots, m-1$ .

Il est également fréquent de se référer à une spline de degré  $n$  en tant que spline d'ordre  $n+1$ . Les **Figures (3.5) et (3.6)** montrent des exemples de splines avec des nœuds simples obtenus par la construction de Stark.

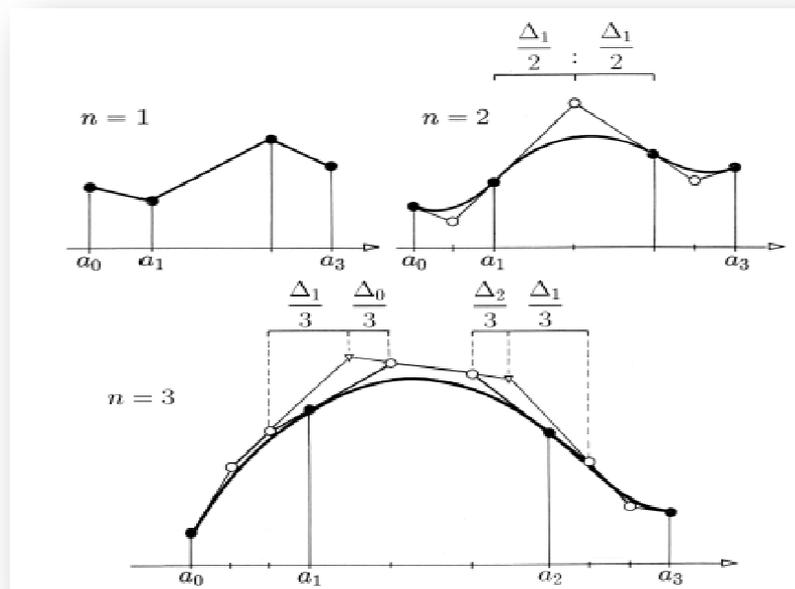


Figure 3.3: Fonctions splines de degré 1, 2 et 3.

### 3.2.3.1. Splines cubiques : [26]

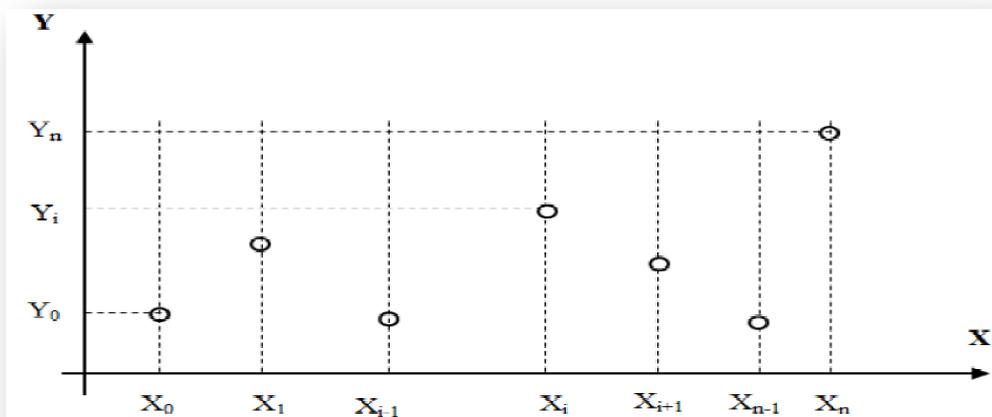


Figure 3.4: interpolation polynomiale en utilisant les splines cubiques.

Une interpolation polynomiale entre les points  $[X_0, Y_0]$  et  $[X_n, Y_n]$  peut être effectuée de la manière suivante :

- Utiliser un polynôme de degré  $n$  s'écrit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad [3.13]$$

Qui passe par tous les points intermédiaires  $[X_i, Y_i]$  , du fait qu'il possède  $(n-1)$  extremums, la courbe  $f(x)$  va présenter des oscillations si  $n$  est trop élevé. Cette dernière ne sera pas régulière.

- Utiliser un polynôme de degré faible pour éviter ces inconvénients en effectuant une interpolation par morceaux. On préconise des fonctions splines qui peuvent être linéaires, quadratiques ou cubiques. Pour leur caractère de stabilité, ces dernières présentent des avantages au niveau des nœuds de raccordement entre les morceaux (bon lissage de la courbe totale) à l'inverse des splines linéaires qui présentent des points anguleux. Il suffit d'assurer la continuité de la courbe totale.

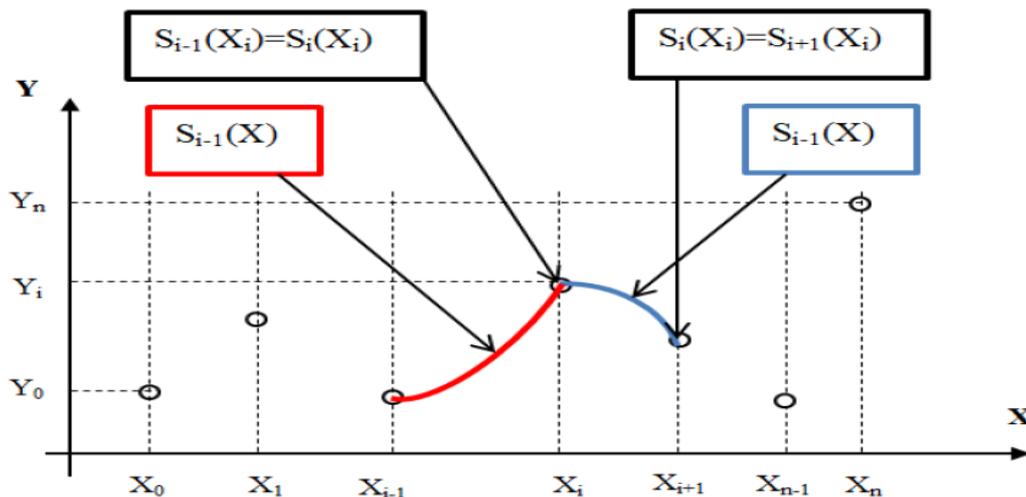


Figure 3 5: une courbe représente les splines cubiques.

$S(x)$  représente la courbe totale reliant tous les points  $[X_i, Y_i]$  .

$$S(x) = \{S_i(x)\} \text{ Avec } x \in [x_0, x_n]$$

$S_i(x)$  Représente le morceau qui relie les points  $[X_i, Y_i]$  et  $[X_{i+1}, Y_{i+1}]$  .

$S_i(x_i)$  Représente la valeur de  $S_i(x)$  au point  $x_i$  .

Soient  $(n+1)$  points tels que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  .

La fonction  $S(x)$  est appelée spline cubique s'il existe  $N$  fonctions polynomiales  $S_i(x)$  qui vérifient les propriétés suivantes:

$$\text{➤ } S(x) = S_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_i) + a_{i,2}(x - x_i)^2 + a_{i,3}(x - x_i)^3 \quad [3.14]$$

Pour tout  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  et pour  $i=0,1,\dots,n-1$

$$\text{➤ } S(x_i) = y_i \text{ pour } i=0,1,\dots,n \quad [3.15]$$

Qui implique que la courbe passe par tous les points.

$$\text{➤ } S(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \text{ pour } i = 0,1,\dots,n-2 \quad [3.16]$$

Qui implique la continuité de la courbe totale  $S(x)$ .

$$\text{➤ } S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \text{ pour } i = 0,1,\dots,n-2 \quad [3.17]$$

Qui implique que la fonction totale est lisse au niveau des nœuds de raccordement

$$\text{➤ } S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \text{ pour } i = 0,1,\dots,n-2 \quad [3.18]$$

Qui implique que les dérivées secondes sont continuées.

### Les inconnues des problèmes:

L'expression [3.14] contient 4 inconnues  $(a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$  pour l'intervalle  $[X_i, X_{i+1}]$ . Comme ces derniers sont au nombre de  $N$  ( $(N+1)$  points) alors, au total on doit déterminer  $4N$  inconnues.

### Construction des courbes:

Dans l'intervalle  $[X_i, X_{i+1}]$  on peut toujours écrire que:

$$S''(x) = S''_i(x)$$

$$y''_{i+1} = S''_i(x_{i+1}) \text{ Et } y''_i = S''_i(x_i)$$

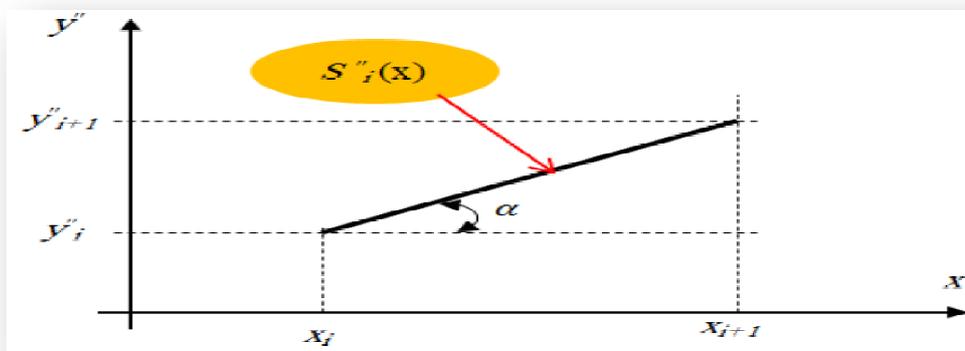


Figure 3 6: courbe représente la linéarité de la dérivée seconde de  $S_i(x)$

La linéarité de la dérivée seconde est telle que:

$$S_i''(x_i) - S_i''(x_i) = (x - x_i)tg \alpha \text{ Ou } tg \alpha = \frac{S_i''(x) - S_i''(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad [3.19]$$

Ce qui donne après calcul:

$$S''(x) = S_i''(x) = S''(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + S''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad [3.20]$$

On pose :  $m_i = S''(x_i)$ ;  $m_{i+1} = S''(x_{i+1})$ ;  $h_i = (x_{i+1} - x_i)$

L'expression [3.20] devient :

$$S_i''(x) = \frac{m_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{m_{i+1}}{h_i}(x - x_i) \quad [3.21]$$

On intègre 02 fois [3.21], ainsi on obtient:

$$S_i(x) = \frac{m_i}{h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{h_i}(x - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x) + q_i(x - x_i) \quad [3.22]$$

Où  $p_i$  et  $q_i$  représentent des constantes d'intégration.

On remplace successivement dans l'expression [3.22]  $x$  par  $x_i$  et par  $x_{i+1}$  :

$$y_i = S_i(x_i) = \frac{m_i}{6} h_i^2 + p_i h_i$$

$$y_{i+1} = S_i(x_{i+1}) = \frac{m_{i+1}}{6} h_i^2 + q_i h_i$$

$$\text{D'où : } p_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6} \quad \text{et} \quad q_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6}$$

Les seules inconnues de l'expression [3.22] sont les termes  $\{m_i\}$  qu'on peut trouver en dérivant la même expression. Ainsi, on a:

$$S_i'(x) = -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + p_i + q_i \quad [3.23]$$

Cette dernière expression est valable quand  $x = x_i$ . Alors:

$$S_i'(x_i) = -\frac{m_i}{3} h_i - \frac{m_{i+1}}{6} h_i + \frac{y_{i+1} - y_{i+1}}{h_i} \quad [3.24]$$

Elle est aussi quand  $i = i - 1$  donc:

$$S'_{i-1}(x_i) = -\frac{m_i}{3} h_{i-1} + \frac{m_{i-1}}{6} h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad [3.25]$$

En utilisant la propriété 4 et les expressions [3.24] et [3.25], on obtient une relation qui lie  $m_{i-1}, m_i$  et  $m_{i+1}$ . Pour  $i = 1, \dots, n-1$ .

$$h_{i-1} \cdot m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) + h_i \cdot m_{i+1} = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad [3.26]$$

L'équation [3.26] représente un système de (N-1) équations linéaires à (N+1) inconnues. Les deux équations manquantes sont obtenues aux extrémités. Une fois les valeurs de  $\{m_i\}$  sont déterminées, les coefficients de la fonction spline  $S_i(x)$  seront calculés comme suit::

$$a_{i,0} = y_i, \quad a_{i,1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(2m_i + m_{i+1})}{6}$$

$$a_{i,2} = \frac{m_i}{2}, \quad a_{i,3} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}$$

Chaque polynôme peut se mettre sous la forme:

$$S_i(x) = \left\{ \left[ a_{i,3}(x - x_i) + a_{i,2} \right] (x - x_i) + a_{i,1} \right\} (x - x_i) + a_{i,0} \quad [3.28]$$

Ou:  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

### 3.2.3.2. B-Splines :[28]

Comme dans le cas de la représentation de Bézier de courbes polynomiales, il est souhaitable d'écrire une spline  $s(u)$  comme une combinaison affine de certains points de contrôle  $c_i$  sachant que :  $s(u) = \sum c_i N_i^n(u)$  [3.29]

Où les  $N(u)$  sont des fonctions splines de base avec un minimum de soutien et certaines propriétés de continuité. Schoenberg a introduit le nom de B-splines pour ces fonctions. Les polygones de Bézier peuvent être construits par le théorème de Stark.[28]

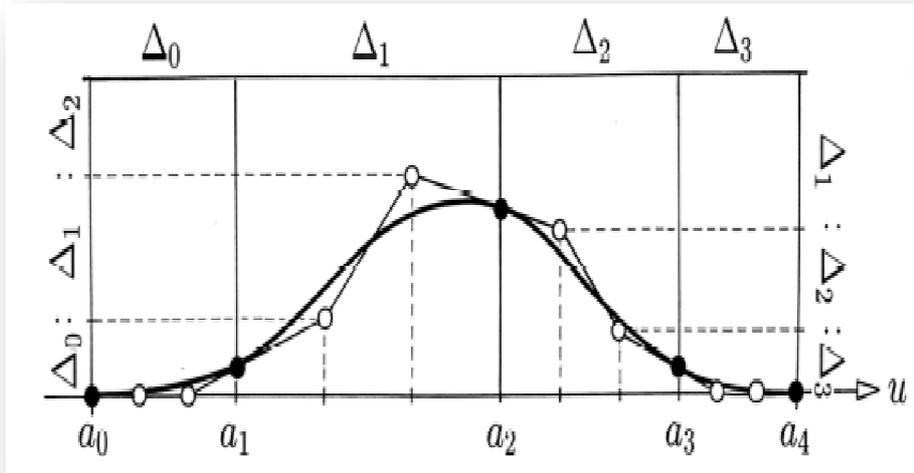
#### Une simple définition de B-splines

Pour définir B-splines, soit  $a_i$  des séquences de nœuds qui doivent être par souci de simplicité strictement augmenté, ce qui signifie  $a_i < a_{i+1}$ , Pour tout  $i$ . Nous définissons la B-splines  $N_i^n$  avec ces nœuds par la formule de récurrence suivante:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [a_i, a_{i+1}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [3.30]$$

$$\text{Et } N_i^n = \alpha_i^{n-1} N_i^{n-1}(u) + (1 - \alpha_{i+1}^{n-1}) N_{i+1}^{n-1}(u)$$

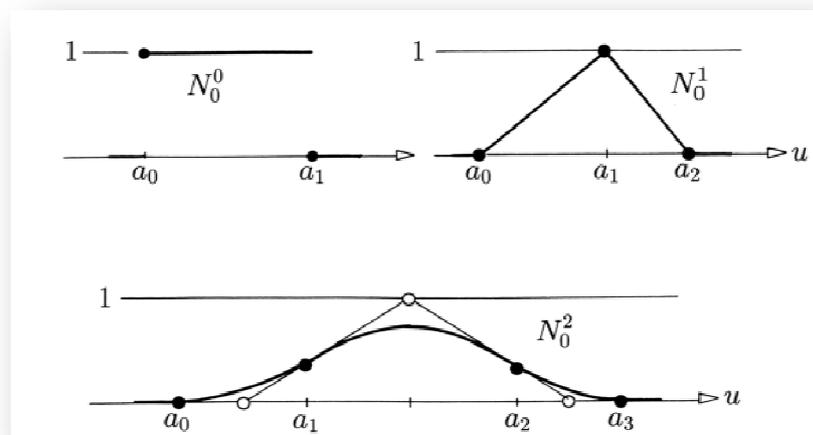
La **Figure (3.5)** montre une courbe cubique B-spline.



**Figure 3 7: Les points de Bézier de la B-spline  $N_0^3(u)$**

Où :

$\alpha_i^{n-1} = (u - a_i) / (a_{i+n} - a_i)$  Est le paramètre local en ce qui concerne l'appui du  $N_i^{n-1}$



**Figure 3 8: B-splines de degrés 0, 1 et 2.**

En cas de plusieurs nœuds, les B-splines  $N_i^n(u)$  sont définis par la même formule de récursions et la convention :  $N_i^{r-1} = N_i^{r-1} / (a_{i+r} - a_i) = 0$  si  $a_{i+r} = a_i$  [3.31]

Les propriétés suivantes de B-splines sont évidentes :

- $N_i^n(u)$  est courbe d'un polynôme de degré n
- $N_i^n(u)$  est positif dans  $(a_i, a_{i+n+1})$
- $N_i^n(u)$  est égal à zéro à l'extérieur de  $[a_i, a_{i+n+1}]$
- $N_i^n(u)$  a une côté droit continue.

### Conversion à la forme B-spline

Comme tout polynôme de degré n peut être considérée comme une spline de degré n ou plus élevé avec une séquence arbitraire de nœuds, on peut exprimer les monômes comme des combinaisons linéaires de B-splines sur toute séquence de nœud  $(a_i)$  Faire cela, le monôme :

$$A_j^n(u) = \binom{n}{j} u^j \text{ Aux formes polaires suivantes : } A_j^n[u_1 \dots u_n] = \sum_{i_1 < \dots < i_n} u_{i_1} \dots u_{i_n}$$

Ainsi, il résulte du principal théorème 5.5 que :

$$A_j^n(u) = \sum_i \alpha_{ji} N_i^n(u) \quad [3.32]$$

$$\text{Où } \alpha_{ji} = A_j^n[a_{i+1} \dots a_{i+n}]$$

Et, par conséquent,

$$\begin{aligned} a(u) &= a_0 A_0^n(u) + \dots + a_n A_n^n(u) \\ &= \sum_i (a_0 \alpha_{0i} + \dots + a_n \alpha_{ni}) N_i^n(u) \end{aligned} \quad [3.33]$$

Qui généralise l'identité de Marsden donné Problème 4 ci-dessous.

En particulier, on obtient :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{n} A_1^n(u) \\
&= \sum_i \gamma_i N_i^n(u)
\end{aligned}
\quad [3.34]$$

Où :

$$\gamma_i = \alpha_i / n = (a_{i+1} + \dots + a_{i+n}) / n \quad [3.35]$$

### Les conversions entre Bézier et représentations B-splines :

Il y a aussi un algorithme tétraédrique pour convertir une représentation B-spline dans une représentation de Bézier et vice versa. Ils peuvent être dérivées de manière similaire, avec :

$q_{rik} = s_n \left[ a \dots a_{i+1} \dots a_{i+n-r-k} b \dots b \right]$  Pour  $i = r+k, \dots, n$ . Ainsi, les points de la languette de commander les points de Bézier des polynômes  $s_n$  sur  $[a, b]$  sont donnés par sont donnés successifs par :  $c_i = q_{0i0}$ ,  $b_j = q_{n-j,n,j}$

Encore une fois, les points  $q_{rik}$  sont commodément disposées dans un réseau tétraédrique, comme illustré dans la **Figure 3 9** pour  $n = 2$ , où  $a^3, ab$ , etc.

La face gauche est calculée selon la règle :

$$q_{r+1,i,k} = (1-\alpha)q_{r,i-1,k} + \alpha q_{r,i,k}, \quad \alpha = \frac{a-a_i}{a_{i+n-r-k} - a_i} \quad [3.36]$$

Et la face inférieure selon la règle :

$$q_{r,i,k+1} = (1-\gamma)q_{r+1,i,k} + \gamma q_{r,i,k}, \quad \gamma = \frac{b-a}{a_{i+n-r-k} - a_i} \quad [3.37]$$

A l'inverse, on peut calculer les contrôle points de B-spline on utilise les points de la Bézier. Tout d'abord, on résout les deux formules ci-dessus pour  $q_{r,i-1,k}$  et  $q_{r,i,k}$ . Seconde, on applique les formules pour calculer le fond, puis la face gauche.

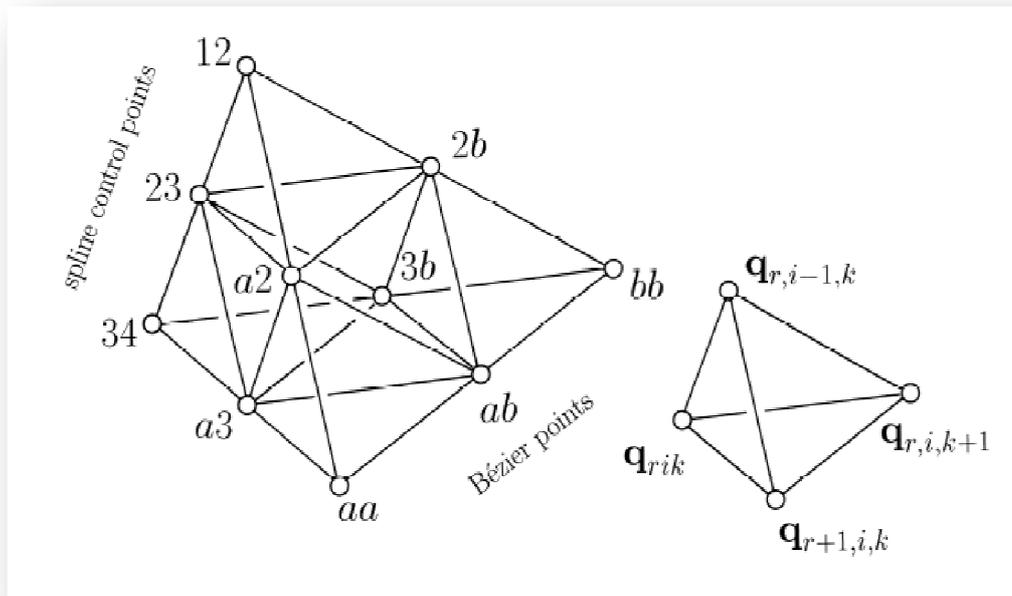


Figure 3 9: Conversion entre Bézier et représentations B-splines.

### 3.2.4 Représentation du NURBS : [27]

#### ❖ NURBS :

- Non-Uniform : Dans le vecteur nodal, l'intervalle entre deux nœuds successifs n'est pas nécessairement constant.

En particulier il peut même être nul.

- Rational : Le terme rationnel utilisé dans la dénomination des NURBS signifie qu'une courbe NURBS est la projection dans l'espace cartésien  $\mathbb{R}^3$  d'une courbe B-spline non-uniforme définie dans l'espace homogène  $\mathbb{R}^4$ .
- B-Splines

#### ❖ Définition de NURBS :

Une courbe **NURBS** (Non Uniform Rational B-Splines) d'ordre  $m$  est définie par :

- un vecteur de nœuds  $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$
- $n+1$  points de contrôle  $P_k$

- n+1 fonctions de pondération  $R_{m,k}$  déduites des fonctions de pondération des B-splines  $S_{m,k}$  au moyen de n+1 **poïds**  $w_k$  (généralement choisis positifs stricts) :

$$R_{m,k}(t) = \frac{w_k S_{m,k}(t)}{\sum_j w_j S_{m,j}(t)} \quad [3.38]$$

❖ **Fonctions de pondération : [[27]**

Les courbes des fonctions de pondération associées comparaison entre les fonctions de pondération. D'une **B-spline interpolée aux extrémités**. Et d'une **NURBS** avec les pondérations suivantes :

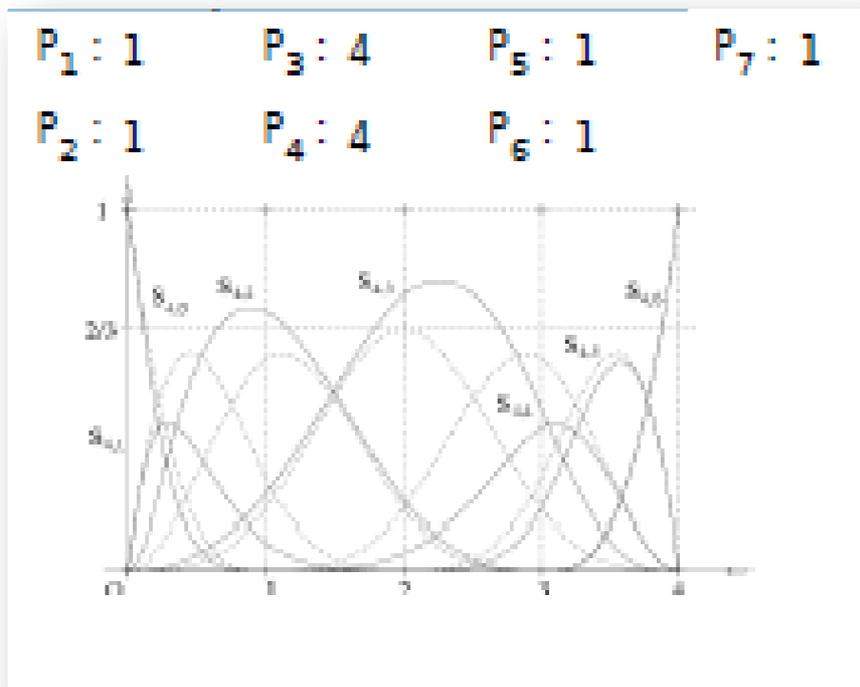


Figure 3 10: courbe des fonctions de pondération.

Comparaison avec une B-spline :

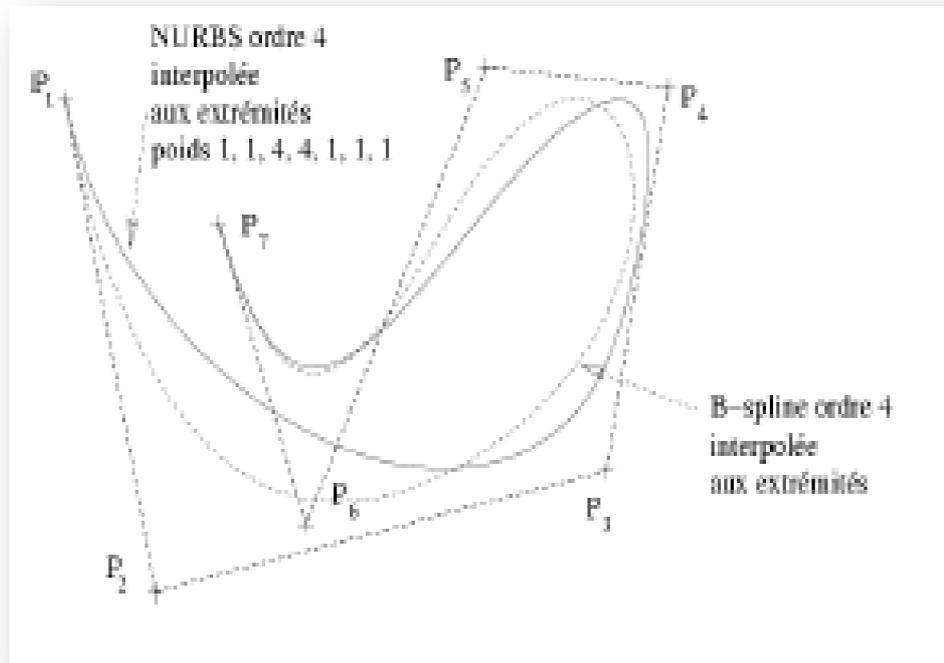


Figure 3 11: courbe représente une comparaison entre B-spline et NURBS.

### 3.2.4.3. Propriétés géométriques des Courbes NURBS :

- **Représentation des coniques :** En choisissant correctement les points de contrôle et les poids, toute conique peut être représentée **exactement** par une NURBS.
- **Invariance affine :** La transformée affine d'une courbe NURBS est la courbe passant par la transformée des points.
- **Invariance projective :** Contrairement aux courbes B-spline, l'image d'une courbe NURBS par une
- **projection de la courbe NURBS passant par la projection des points :** Les poids doivent être recalculés en fonction de la matrice de projection.

En raison de ces propriétés, les NURBS sont fournies dans de nombreux logiciels d'infographie. [28]

### **Remarque**

- La planification d'une trajectoire dans l'espace commun plutôt (l'espace d'exploitation) a un avantage majeur à savoir que le système de commande agit sur les articulations du manipulateur (l'organe terminal) de sorte qu'il serait plus facile d'ajuster la trajectoire en fonction des exigences de conception si l'on travaille dans l'espace articulaire. Par ailleurs, la planification de la trajectoire dans l'espace articulaire permettrait d'éviter les problèmes qui se posent avec les singularités cinématiques et manipulateurs redondants.

- Le principal inconvénient de la planification de trajectoire dans l'espace commun est que le mouvement réellement effectué par l'organe terminal du robot est difficilement prévisible, du fait de la non-linéarité introduite lors de la transformation des trajectoires des articulations dans les trajectoires de l'organe terminal par le modèle cinématique directe.

### **3.3 Conclusion :**

Dans ce chapitre on a présenté d'une manière générale le sujet des planifications des trajectoires en robotique. Après avoir détaillé les représentations de Lagrange, Bézier et les différents Splines et à la fin la représentation du NURBS, ensuite on a donné une petite comparaison entre eux. Dans le prochain chapitre, nous allons traiter en détails la planification des trajectoires d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté de type rotoïde (2R) en minimisant une fonction objectif.

## LISTE DES TABLEAUX

**Tableau 1 1** : une comparaison entre les deux architectures.

**Tableau 2 1** : nombre d'opérations effectuées pour chaque formalisme

**Tableau 4 1** : paramètres géométriques et inertiels du robot à 2ddl planaire.

**Tableau 4 2** : Contraintes cinématiques et dynamiques du robot.

**Tableau 4 3** : les résultats obtenus pour le 1<sup>er</sup> exemple.

**Tableau 4 1**: l'organe terminal passe par les points exprimés en mètre et l'équivalent des liens passent par les points exprimés en radians des deux bras.

**Tableau 4 2**: les résultats obtenus pour le 2<sup>ème</sup> exemple.

**Tableau 4 6**: Animation par SolidWorks du robot 2R du point initial au point final en passant par les points intermédiaires imposés.

## Liste de figures

**Figure 1 1 :** Robot humanoïde - Robot série de type SCARA - Robot série anthropomorphe.

**Figure 1 2:** Fauteuil équipé d'un bras - Robot chirurgical Déambulateur/Verticalisateur.

**Figure 1 3:** Main articulée - Robot chien - Robot hexapode

**Figure 1 4 :** les constituants d'un robot.

**Figure 1 5:** Architecture générale d'un système robotique.

**Figure 1 6 :** Symbole de l'articulation *rotoïde*.

**Figure 1 7 :** Symbole de l'articulation *prismatique*.

**Figure 1 8 :** les différents types de chaînes.

**Figure 1 9 :** Architecture des porteurs.

**Figure 1 10 :** Différentes combinaisons Modélisation des Robots d'architectures du porteur.

**Figure 1 11 :** Architecture des poignets.

**Figure 1 12 :** Structure générale d'un robot manipulateur.

**Figure 1 13 :** Robot sériel.

**Figure 2 1 :** Robot a structure ouverte simple.

**Figure 2 2 :** Paramètre géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple.

**Figure 2 3 :** Transformations entre l'organe terminal et le repère atelier.

**Figure 2 4 :** manipulateur n degré de liberté.

**Figure 2 5 :** les forces agissant sur le lien i.

**Figure 3 1 :** Interpolation de Lagrange.

**Figure 3 2:** Les polynômes de Bernstein de degré 4 sur [0,1].

**Figure 3 3:** Fonctions splines de degré 1, 2 et 3.

**Figure 3 4 :** interpolation polynomiale en utilisant les splines cubiques.

**Figure 3 5:** une courbe représente les splines cubiques.

**Figure 3 6 :** courbe représente la linéarité de la dérivée seconde de  $S_i(x)$

**Figure 3 7 :** Les points de Bézier de la B-spline  $N_0^3(u)$

**Figure 3 8 :** B-splines de degrés 0, 1 et 2.

**Figure 3 9:** Conversion entre Bézier et représentations B-splines.

**Figure 3 10 :** courbe des fonctions de pondération.

**Figure 3 11 :** courbe représente une comparaison entre B-spline et NURBS.

**Figure 4 1:** un bras manipulateur de 2R.

**Figure 4 2:** organigramme de l'approche utilisée.

**Figure 4 3:** Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel.

**Figure 4 4:** graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

**Figure 4 5:** graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

**Figure 4 6:** graphe représentant la variation de vitesse des liens.

**Figure 4 7:** graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

**Figure 4 8:** graphe représentant la variation du jerk des liens.

**Figure 4 9:** graphe qui représente la variation du couple des liens.

**Figure 4 10:** Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel.

**Figure 4 11:** graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

**Figure 4 12:** graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

**Figure 4 13:** graphe représentant la variation de vitesse des liens.

**Figure 4 14:** graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

**Figure 4 15:** graphe représentant la variation du jerk des liens.

**Figure 4 16:** graphe qui représente la variation du couple des liens.

**Figure 4 17:** Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel.

**Figure 4 18:** graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

**Figure 4 19:** graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

**Figure 4 20:** graphe représentant la variation de vitesse des liens.

**Figure 4 21:** graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

**Figure 4 22:** graphe représentant la variation du jerk des liens.

**Figure 4 23:** graphe qui représente la variation du couple des liens.

**Figure 4 24:** Animation par SolidWorks du robot 2R au point initial.

**Figure 4 25:** Animation par SolidWorks du robot 2R au point intermédiaire.

**Figure 4 26:** Animation par SolidWorks du robot 2R au point final.

**Figure 4 27:** représentation schématique des deux bras planaire.

**Figure 4 28:** Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel en passant par le point initial points intermédiaires-point final.

**Figure 4 29:** graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

**Figure 4 30:** graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

**Figure 4 31:** graphe représentant la variation de vitesse des liens.

**Figure 4 32:** graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

**Figure 4 33:** graphe représentant la variation du jerk des liens.

**Figure 4 34:** graphe qui représente la variation des couples des liens.

**Figure 4 35:** graphe qui représente le temps consommée pour le mouvement point à point en fonction du nombre de génération.



## CHAPITRE 4

### **4.1 Introduction :**

Les modélisations géométriques, cinématiques et dynamiques pour décrire le comportement d'un robot avec suivi de trajectoire s'avère une tâche fondamentale mais délicate à traiter. A partir des fondements théoriques abordés dans les chapitres précédents, dans ce chapitre on procèdera à la modélisation cinématiques et dynamiques (LAGRANGE et Newton-Euler) de robot manipulateur. Dans un souci de validation et/ou d'interprétation de résultats.

Dans ce chapitre, on cherchera de trouver une solution optimale qui correspond à minimiser une fonction objectif (temps et/ou couple moteurs) en utilisant les algorithmes génétiques tout en respectant les contraintes liées aux données et capacités technologiques de chaque robot manipulateur ainsi que la tâche à réaliser, en exploitant les avantages des fonction splines cubiques pour modéliser les trajectoires. On utilisera respectivement les logiciels MATLAB et Solid-Works pour l'obtention des résultats numériques et les différents graphes.

### **4.2 Les modèles de robot manipulateur 2R :**

#### **4.2.1. Modèle géométrique direct :**

Dans le cas de notre bras manipulateur nous avons trouvé les équations suivantes :

$$\begin{cases} X = L1 \cos \alpha + L2 \cos(\alpha + \beta) \\ Y = L1 \sin \alpha + L2 \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

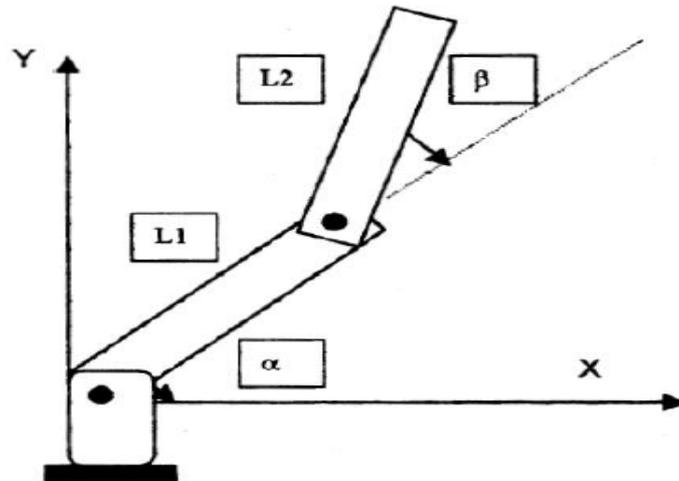


Figure 4 1: un bras manipulateur de 2R.

#### 4.2.2. Modèle géométrique inverse :

Une fonction réciproque constitue un modèle géométrique inverse du bras manipulateur qu'on note :

$$q = f^{-1}(X)$$

On a :

$$X = L_1 \cos(\alpha) + L_2 \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow X - L_1 \cos(\alpha) = L_2 \cos(\alpha + \beta) \quad [4.1]$$

$$Y = L_1 \sin(\alpha) + L_2 \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow Y - L_1 \sin(\alpha) = L_2 \sin(\alpha + \beta) \quad [4.2]$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow X^2 + L_1^2 \cos^2(\alpha) + Y^2 + L_1^2 \sin^2(\alpha) - 2L_1 X \cos(\alpha) - 2L_1 Y \sin(\alpha) = L_2^2$$

$$\cos(\alpha) + Y \sin(\alpha) + L_1^2 = L_2^2 \Rightarrow$$

$$X^2 + Y^2 + L_1^2 - L_2^2 = 2L_1 (X \cos(\alpha) + Y \sin(\alpha))$$

$$X \cos(\alpha) + Y \sin(\alpha) = \frac{X^2 + Y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1} \quad [4.3]$$

On pose :  $Z = \frac{X^2 + Y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1}$

(3) devient :  $X \cos \alpha + Y \sin \alpha = Z$  [4.3']

$$[4.3'] \Rightarrow X \cos(\alpha) = Z - Y \sin(\alpha) \Rightarrow X^2 \cos^2(\alpha) = Z^2 + Y^2 \sin^2(\alpha) - 2ZY \sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$-X^2(1 - \sin^2(\alpha)) + Z^2 + Y^2 \sin^2(\alpha) - 2ZY \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$-X^2 + Z^2 + (X^2 + Y^2) \sin^2(\alpha) - 2ZY \sin(\alpha) = 0$$

C'est une équation de deuxième degré, on pose que  $\sin \alpha = A$  l'équation devient :

$$(X^2 + Y^2)A^2 - 2YZA + Z^2 - X^2 = 0 \quad [4.4]$$

On calcul

$$\Delta' = Y^2Z^2 - (X^2 + Y^2)(Z^2 - X^2) \Rightarrow \Delta' = Y^2Z^2 - X^2Z^2 - Y^2Z^2 + X^4 + X^2Y^2 \Rightarrow$$

$$\Delta' = X^2(Y^2 - Z^2 + X^2)$$

Pour qu'il existe une solution il faut que :

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow X^2 + Y^2 \geq Z^2 \Rightarrow X^2 + Y^2 \geq \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{(2L_2 - 1)}$$

Les solutions sont les suivantes :

$$\sin(\alpha) = \frac{YZ \pm (X^2Y^2 - Z^2)^{1/2}}{X^2 + Y^2} \quad [4.5]$$

D'autre part :

$$(3') \Rightarrow X \cos(\alpha) + Y \sin(\alpha) = Z \Rightarrow Y \sin(\alpha) = Z - X \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$Y^2 \sin^2(\alpha) = Z^2 + X^2 \cos^2(\alpha) - 2ZX \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$X^2 \cos^2(\alpha) - Y^2 \sin^2(\alpha) - 2ZX \cos(\alpha) + Z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$X^2 \cos^2(\alpha) - Y^2(1 - \cos^2(\alpha)) - 2ZX \cos(\alpha) + Z^2 = 0$$

$$(X^2 + Y^2) \cos^2(\alpha) - 2ZX \cos(\alpha) + Z - Y^2 = 0$$

$$\Delta' = Z^2X^2 - (X^2 + Y^2)(Z^2 - Y^2) = Y^2(X^2 + Y^2 - Z^2)$$

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow X^2 + Y^2 - Z^2 \geq 0 \Rightarrow X^2 + Y^2 \geq Z^2$$

Pour qu'il y a des solutions :

$$\cos(\alpha) = \frac{ZX \pm (X^2 + Y^2 - Z^2)^{1/2}}{(X^2 + Y^2)} (4') \Rightarrow \quad [4.6]$$

$$\frac{(4)}{(4')} = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{YZ \pm (X^2 Y^2 - Z^2)^{1/2}}{ZX \pm (X^2 + Y^2 - Z^2)^{1/2}}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{YZ \pm (X^2 + Y^2 - Z^2)^{1/2}}{ZX \pm (X^2 + Y^2 - Z^2)^{1/2}} \right)$$

$$\text{On a : } (2)/(1) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (X - L_1 \cos \alpha) / (Y - L_1 \sin \alpha)$$

Après des calculs on trouve que :

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{X^3 + XY^2 - L_1 ZX \pm (X^2 + Y^2 - Z^2)^{1/2}}{Y^3 + YX^2 - L_1 ZX \pm (X^2 + Y^2 - Z^2)^{1/2}} \right) - \alpha$$

#### 4.2.3. Modèle cinématique direct :

Le modèle cinématique direct est la fonction  $g$  qui permet d'exprimer l'accélération et la vitesse du point P dans  $R(O, X, Y)$  en fonction des vitesses des différentes liaisons. Il est obtenu par dérivation par rapport au temps du modèle géométrique.

$$\overline{OP}/R = \begin{cases} X = L_1 \cos(\alpha) + L_2 \cos(\alpha + \beta) \\ Y = L_1 \sin(\alpha) + L_2 \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$\overline{VP}/R = \frac{d(\overline{OP})}{dt} = \begin{cases} X' = -L_1 \sin(\alpha) \alpha' - L_2 \sin(\alpha + \beta) \cdot (\alpha' + \beta') \\ Y' = L_1 \cos(\alpha) \alpha' + L_2 \cos(\alpha + \beta) \cdot (\alpha' + \beta') \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \cdot \sin(\alpha) - L_2 \cdot \sin(\alpha + \beta) & -L_2 \cdot \sin(\alpha + \beta) \\ L_1 \cdot \cos(\alpha) + L_2 \cdot \cos(\alpha + \beta) & L_2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Gamma}_{P/R} = \frac{dV(P)}{dt} = \begin{cases} X'' = -L_1 \alpha'^2 C(\alpha) - L_1 \alpha'' S(\alpha) - L_2 (\alpha' + \beta') \alpha' C(\alpha + \beta) - \\ L_2 \alpha'' S(\alpha + \beta) - L_2 (\alpha' + \beta') \beta' C(\alpha + \beta) - L_2 \beta'' C(\alpha + \beta) \\ Y'' = -L_1 \alpha'^2 S(\alpha) + L_1 \alpha'' C(\alpha) - L_2 (\alpha' + \beta') \alpha' S(\alpha + \beta) + \\ L_2 \alpha'' C(\alpha + \beta) - L_2 (\alpha' + \beta') \beta' S(\alpha + \beta) + L_2 \beta'' C(\alpha + \beta) \end{cases} \quad [4.7]$$

#### 4.2.4. Modèle dynamique :

##### ➤ Formalisme de Lagrange :

Les équations de Lagrange opèrent à partir de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un système, le lagrangien s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_i \quad [4.8]$$

$$L = K - V$$

K : énergie cinétique de l'organe terminal.

V : énergie potentielle de l'organe terminal.

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad [4.9]$$

$M(q)$  : est la matrice d'inertie de dimension (n\*n) symétrique définie positive.

L'énergie potentielle du système est sous la forme :

$$V_i = -m_i \tilde{g}^T T_i^i \hat{S}_i \quad [4.10]$$

$\tilde{g} = [\tilde{g}_x, \tilde{g}_y, \tilde{g}_z, 0]^T$  : Vecteur des accélérations de la gravité exprimées dans  $R_0$

Le modèle obtenu peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\tau = M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) \quad [4.11]$$

Ou :

$$M_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{tr} \left( \frac{\partial^0 T_k}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^0 T_k^T}{\partial q_i} \right) \quad [4.12]$$

$$G(q) = \sum_{j=1}^n m_j \tilde{g}^T \frac{\partial {}^0T_j}{\partial q_i} {}^j\widehat{S}_j \quad [4.13]$$

$M(q)$  : Matrice d'inertie du manipulateur, symétrique et régulière définie positive [39] [42].

$N(q, \dot{q})\dot{q}$  : Vecteur des termes Coriolis et centrifuges.

$G(q)$  : Vecteur des actions de gravité.

${}^0T_k$  : La matrice de transformation homogène.

${}^i\widehat{S}_i = [{}^iS_{ix}, {}^iS_{iy}, {}^iS_{iz}]^T$  : Position du centre de gravité de masse (m) du corps i exprimée en  $R_i$ .

$H_i = \int {}^i r^j r^T dm_i$  : Matrice des pseudo-inerties du corps i.

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{-{}^iI_{ixx} + {}^iI_{iyy} + {}^iI_{izz}}{2} & I_{ixy} & I_{ixz} & m_i \widehat{S}_{ix} \\ I_{ixy} & \frac{{}^iI_{ixx} - {}^iI_{iyy} + {}^iI_{izz}}{2} & I_{iyz} & m_i \widehat{S}_{iy} \\ I_{ixz} & I_{iyz} & \frac{{}^iI_{ixx} + {}^iI_{iyy} - {}^iI_{izz}}{2} & m_i \widehat{S}_{iz} \\ m_i \widehat{S}_{ix} & m_i \widehat{S}_{iy} & m_i \widehat{S}_{iz} & m_i \end{bmatrix} \quad [4.14]$$

$${}^iI_i = \begin{bmatrix} {}^iI_{ixx} - {}^iI_{ixy} - {}^iI_{ixz} \\ -{}^iI_{ixy} \quad {}^iI_{iyy} - {}^iI_{iyz} \\ -{}^iI_{ixz} - {}^iI_{izy} \quad {}^iI_{izz} \end{bmatrix} : \text{Tenseur d'inertie du corps i en } o_i \text{ exprimé dans } R_i.$$

${}^iI_{ixx} = \int ({}^i r_y^2 + {}^i r_z^2) dm_i$  : Moment d'inertie.

${}^iI_{ixy} = \int {}^i r_x + {}^i r_y dm_i$  : Produit d'inertie.

En appliquant le formalisme de Lagrange sur le robot manipulateur de 2 d.d.l avec :

$q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$  Vecteur des variables articulaires.

$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$  Vecteur des couples généralisés.

On trouve :

➤ **La matrice d'inertie :**

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 + 2m_2 l_2 l_1 c_2 + (m_2 + m_1) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_2 l_1 c_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_2 l_1 c_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \quad [4.15]$$

➤ **Matrice de Coriolis et de centrifuge :**

$$M(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -2m_2 l_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_2 & -m_2 l_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad [4.16]$$

➤ **Vecteurs des forces de gravité :**

$$G(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_2 + m_1) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{pmatrix} \quad [4.17]$$

On applique l'équation (4.11) on trouve :

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - \\ & m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ \tau_2 &= m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{aligned} \right\} \quad [4.18]$$

### 4.3.1. Formalisme de Newton-Euler :

On applique le formalisme de Newton-Euler sur le robot manipulateur 2 d.d.l on obtient les résultats suivants :

- L'organe terminal est de masse négligeable donc :

$$f_3 = 0$$

$$n_3 = 0$$

- La rotation de la base du robot est nulle donc :

$$\omega_0 = 0$$

$$\dot{\omega}_0 = 0$$

$${}^0\dot{v}_0 = gY_0$$

- La rotation entre deux liens successifs est donnée par :

$${}_{i+1}^i R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{i+1}^i R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Réursive arrière du lien 1 :

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 {}^1Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 {}^1Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_{C1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1F_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Réursive arrière du lien 2 :

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + g s_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + g c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + g s_{12} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + g s_{12} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2F_2 = \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Réursive avant du lien 2 :

$${}^2f_2 = {}^2F_2$$

$${}^2n_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}$$

Réursive avant du lien 1 :

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c_{12} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 g s_2 s_{12} + m_2 l_1 l_2 c_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 g c_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tau_i = n_i^T Z_i$$

$$\begin{cases} \tau_1 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\ -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ \tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{cases}$$

#### 4.4. Organigramme:

La figure suivante présente l'organigramme de l'approche utilisée :

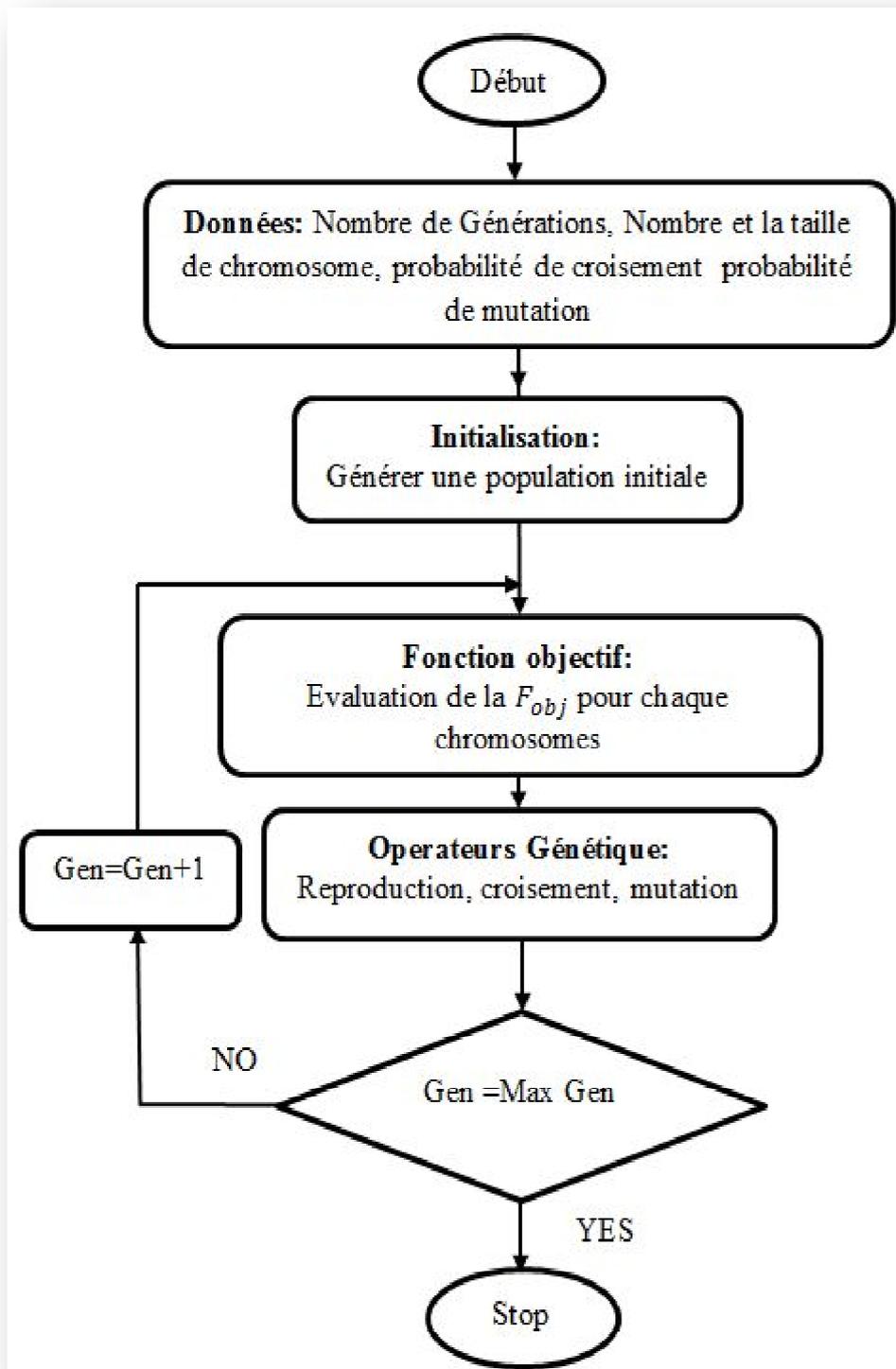


Figure 4 2: organigramme de l'approche utilisée

#### 4.4. Exemples sur le robot à 2ddl planaire :

Dans le code de calcul des algorithmes génétiques, on a fixé le nombre de génération égale à 80, le taux de croisement égal à 0.8 et le taux de mutation égal à 0.05.

##### 4.4.1. Exemple 1 : trajectoire passant par trois points :

Pour une première application, on va traiter le cas d'un robot planaire à 2ddl. Les paramètres géométriques des bras et les performances limitées sont indiqués successivement dans les tableaux 1 et 2. Ce robot manipulateur doit suivre une trajectoire dans le plan horizontal (xy) qui passe par trois points commençant par (0 m, 0.1 m) via (0.5 m, 0.3 m) à (0 m, 0.5 m), et le but de cette application est de minimiser une fonction objective qui est sous la

$$\text{forme suivante : } F_{obj} = T \left( \alpha + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{T} \right) \cdot F_T \right)$$

Avec  $T$  : le temps d'exécution de la tâche en (s).  $F_T$ : couple des bras en (N.m)

$\alpha$  Représente un facteur de pondération et varié selon le besoin soit  $\alpha \in [0,1]$  pour cela on va donner des valeurs à  $\alpha$  et on trouve les résultats suivants :

	Lien 1	Lien 2
<b>M (kg)</b>	30	19.2
<b>D (m)</b>	0.15	0.16
<b>L (m)</b>	0.30	0.32
<b>Izz (kg m<sup>2</sup>)</b>	0.225	0.16

Tableau 4 1: paramètres géométriques et inertiels du robot à 2ddl planaire.

	Lien 1	Lien 2
<b>Couple (N m)</b>	40	40
<b>Vitesse (rad s<sup>-1</sup>)</b>	5	5
<b>Accélération (rad s<sup>-2</sup>)</b>	20	20
<b>Jerk (rad s<sup>-3</sup>)</b>	30	30

Tableau 4 2: Contraintes cinématiques et dynamiques du robot.

Pour  $\alpha=0.25$  :

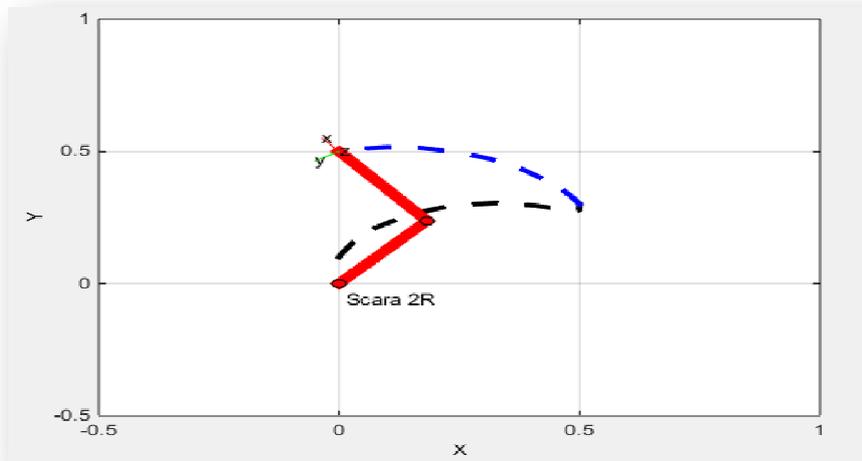


Figure 4 3: Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel.

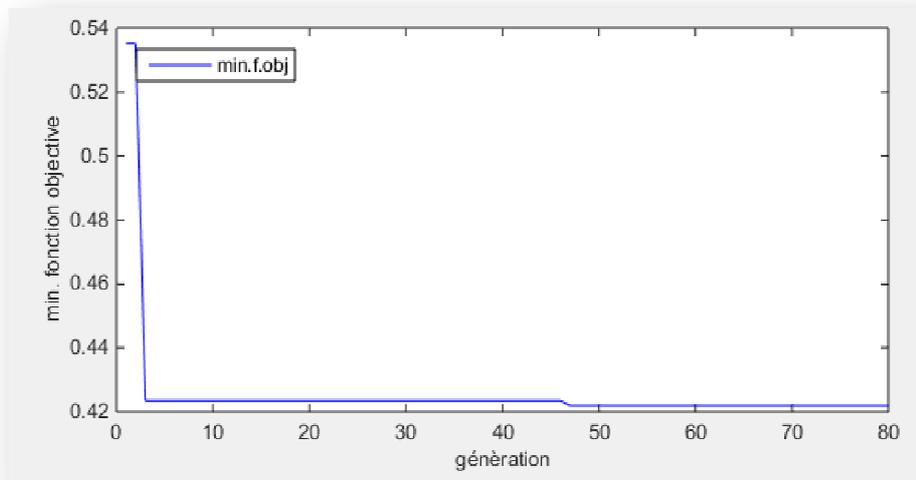


Figure 4 4: graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

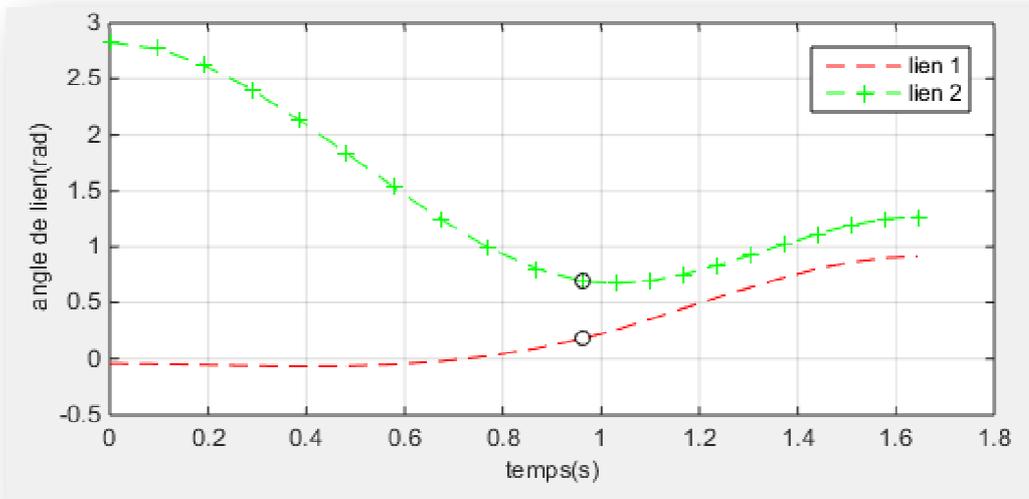


Figure 4 5: graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

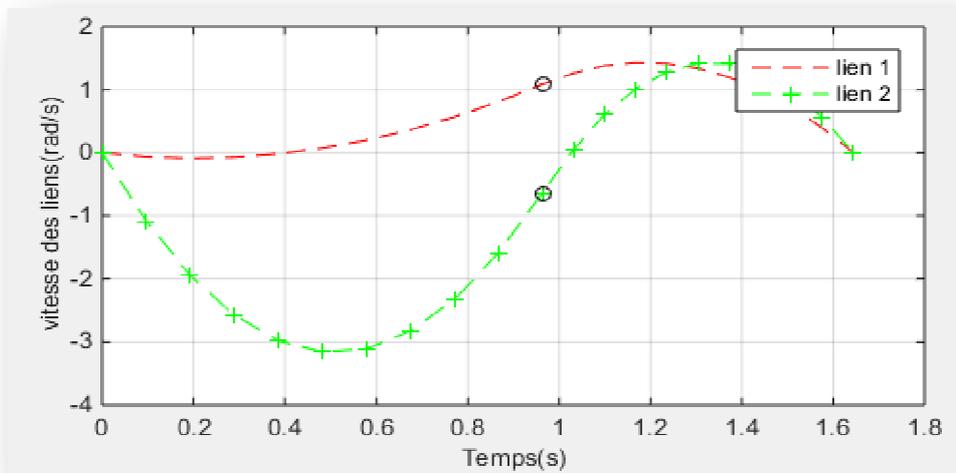


Figure 4 6: graphe représentant la variation de vitesse des liens.

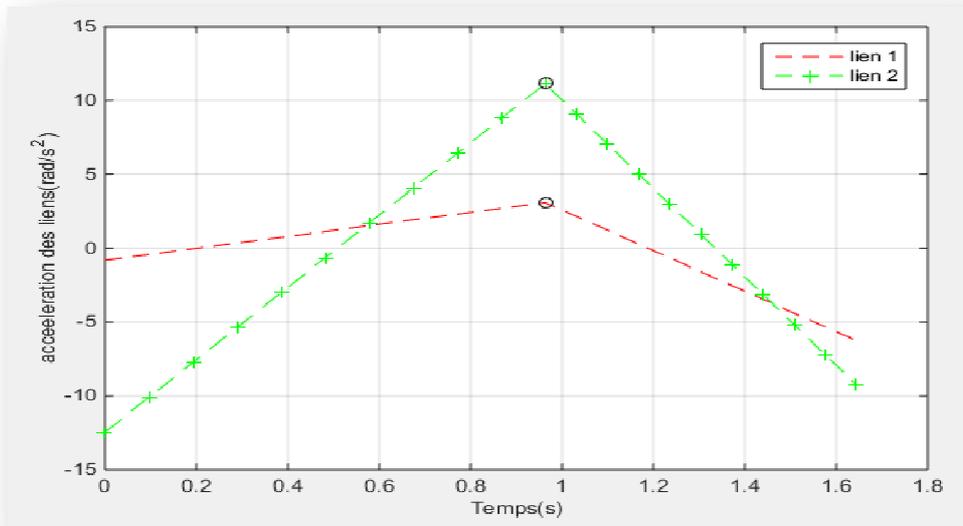


Figure 4 7: graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

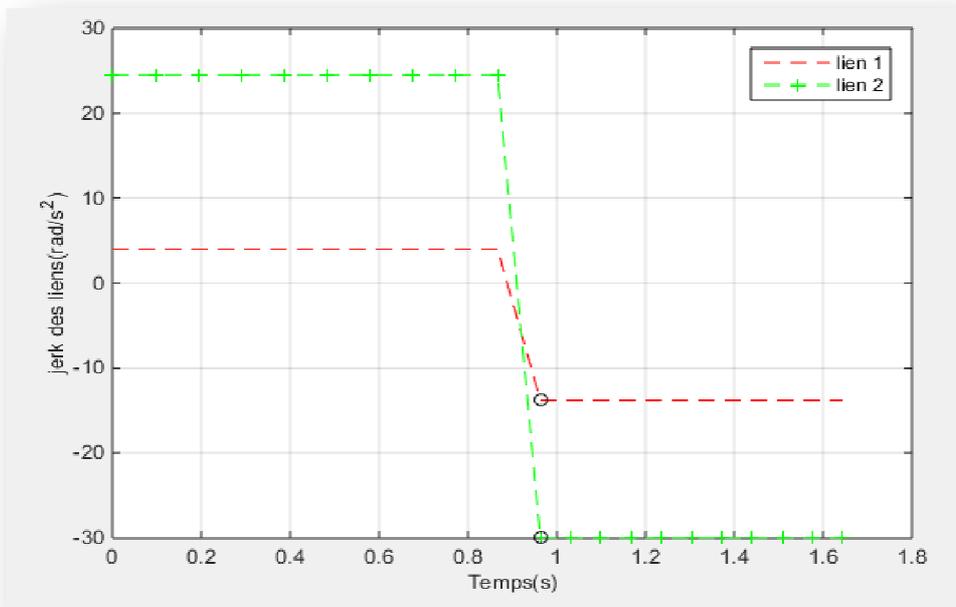


Figure 4 8: graphe représentant la variation du jerk des liens.

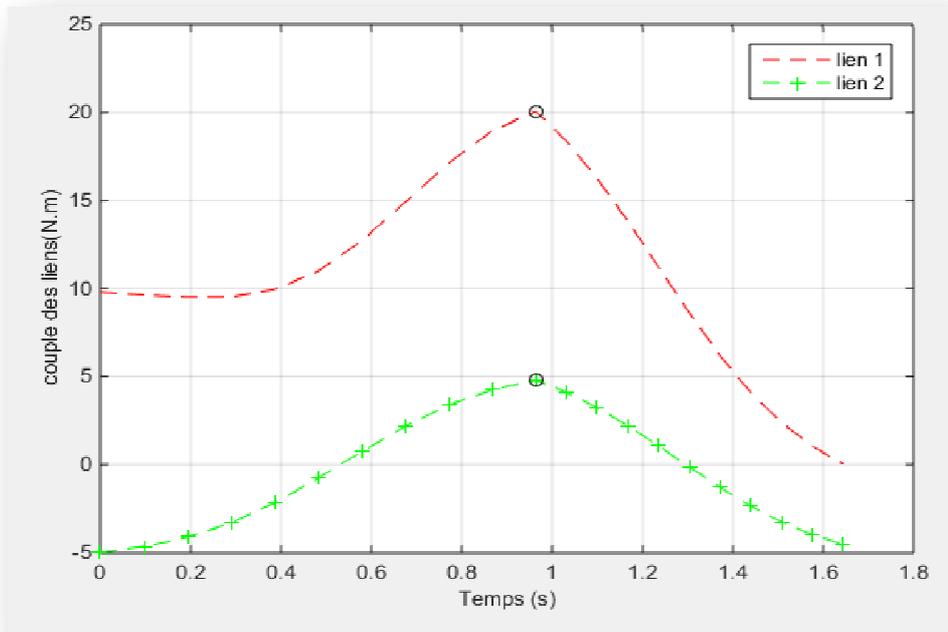


Figure 4 9: graphe qui représente la variation du couple des liens.

Pour  $\alpha=0.5$  :

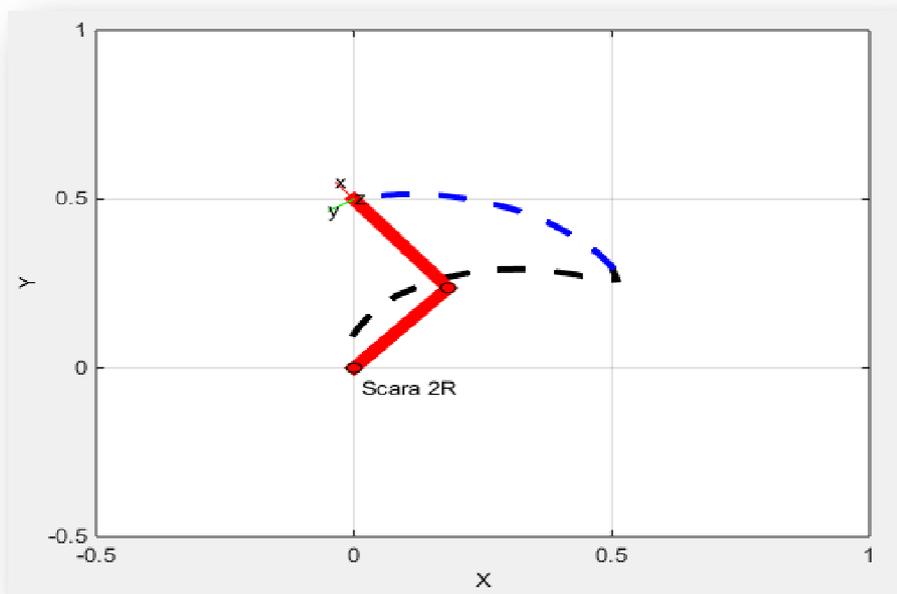


Figure 4 10: Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel.

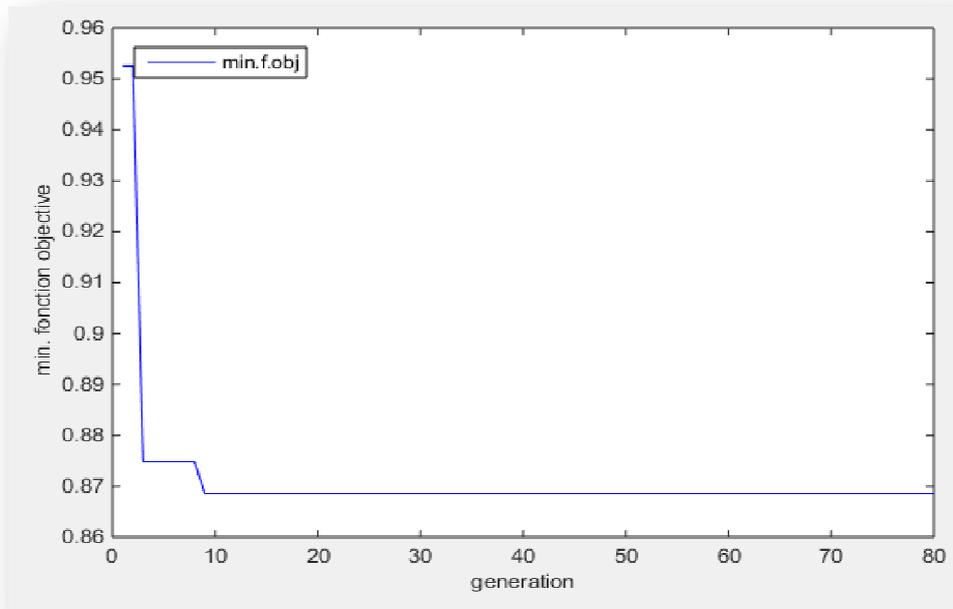


Figure 4 11: graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

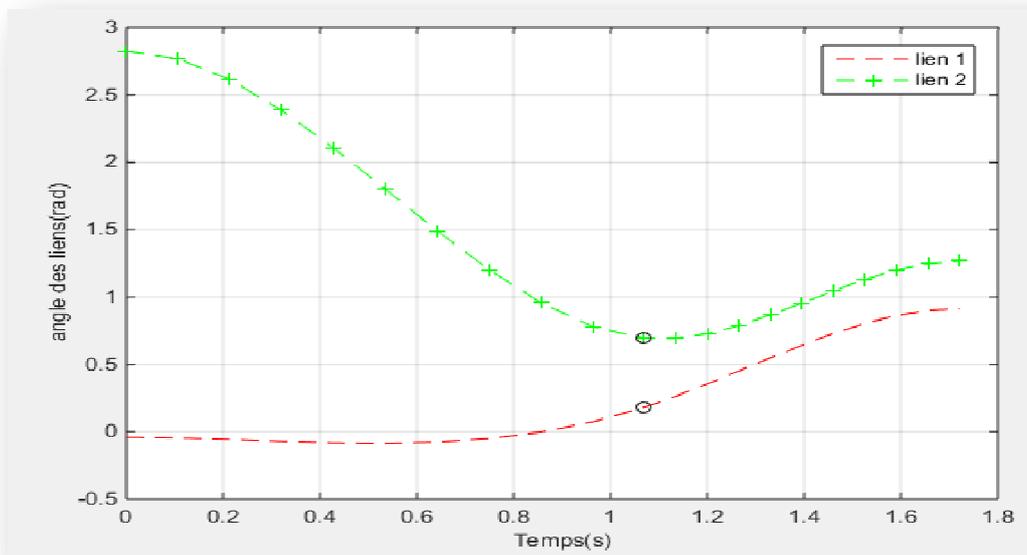


Figure 4 12: graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

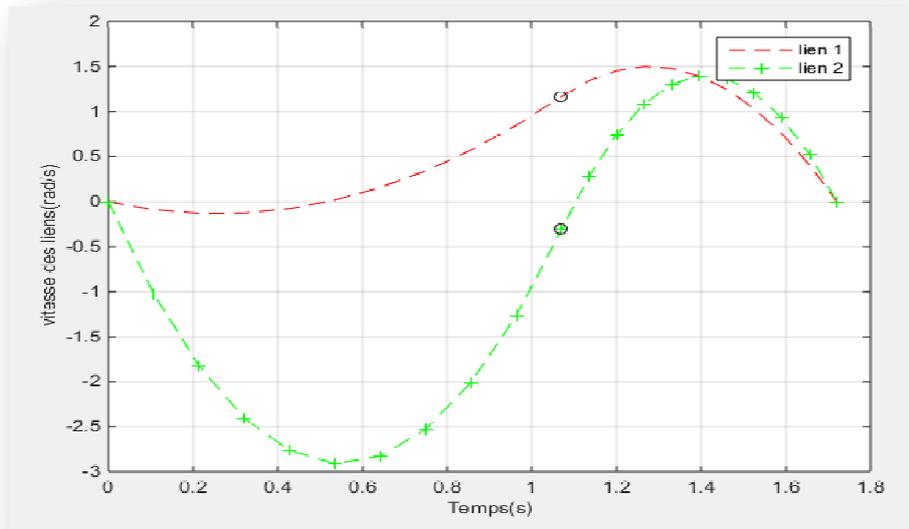


Figure 4 13: graphe représentant la variation de vitesse des liens.

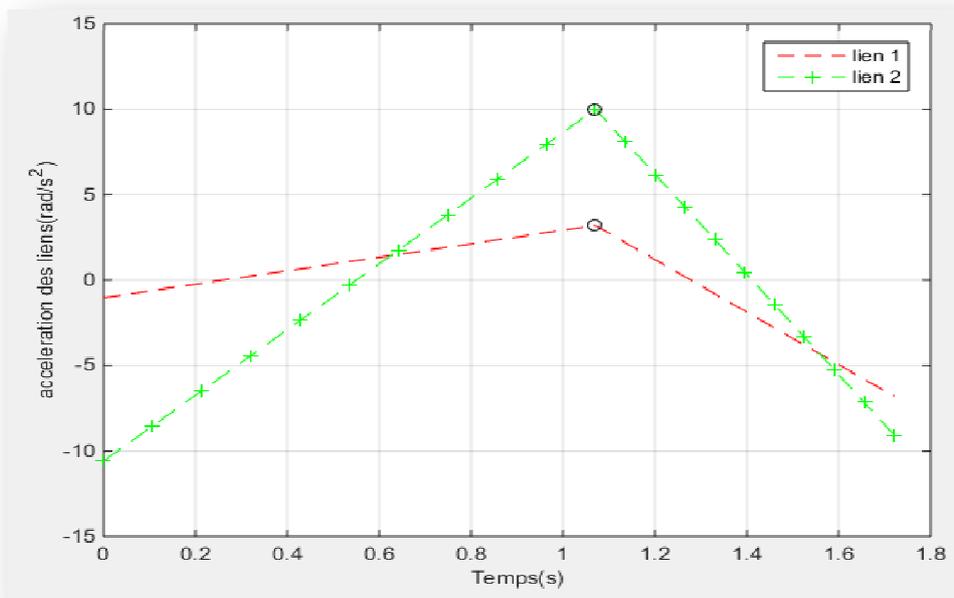


Figure 4 14: graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

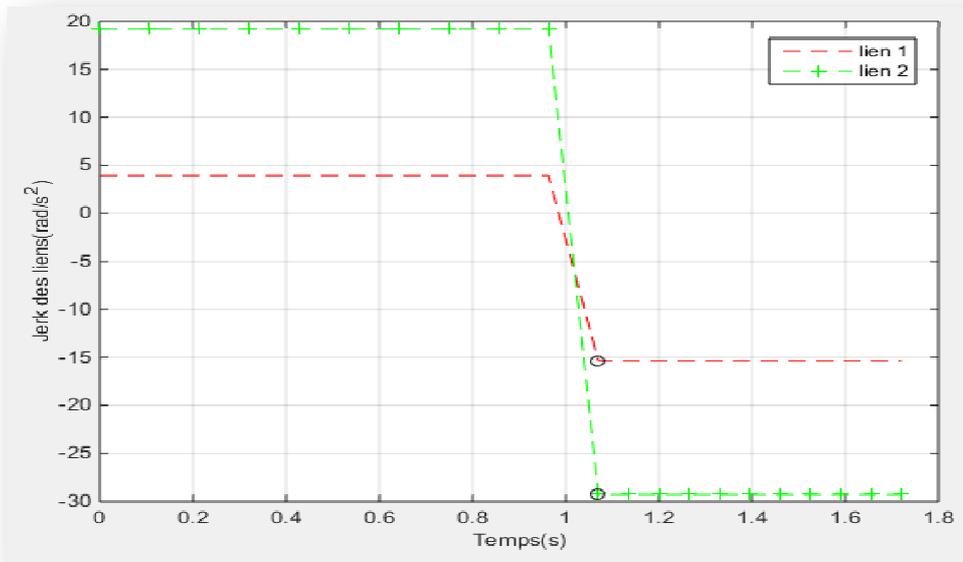


Figure 4 15: graphe représentant la variation du jerk des liens.

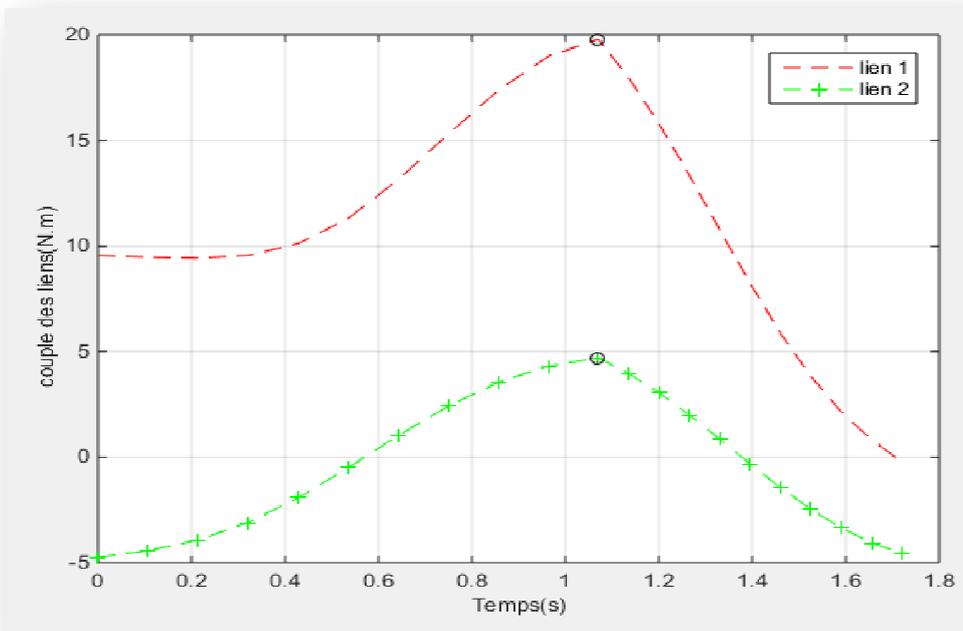


Figure 4 16: graphe qui représente la variation du couple des liens.

Pour  $\alpha=1$  :

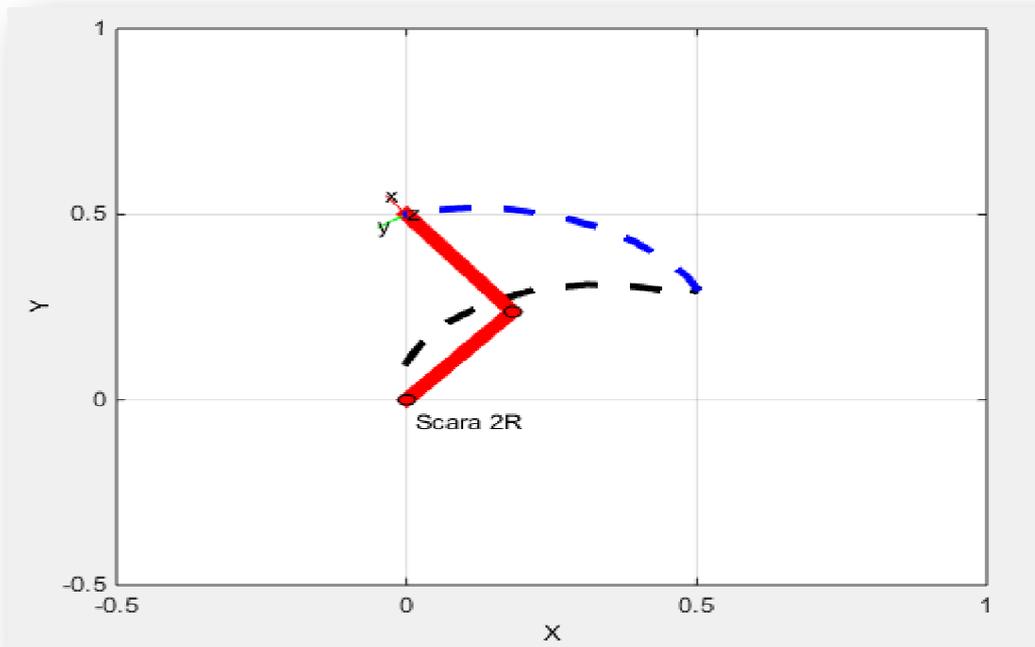


Figure 4 17: Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel.

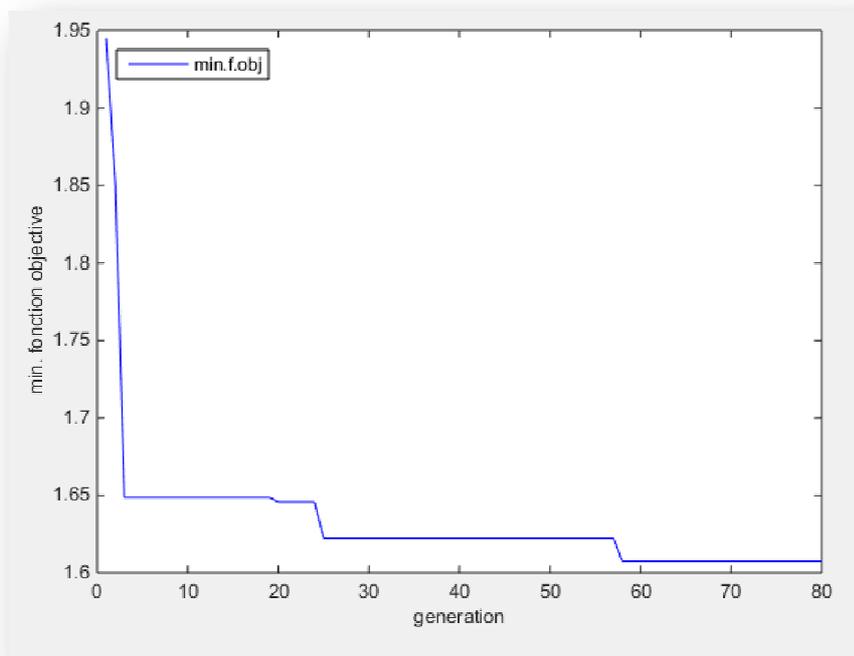


Figure 4 18: graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

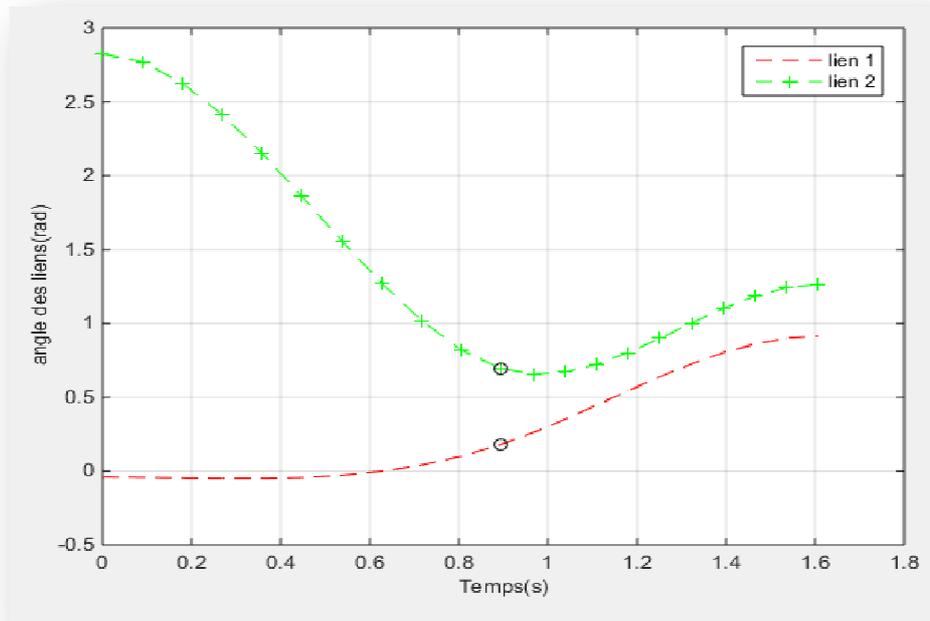


Figure 4 19: graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

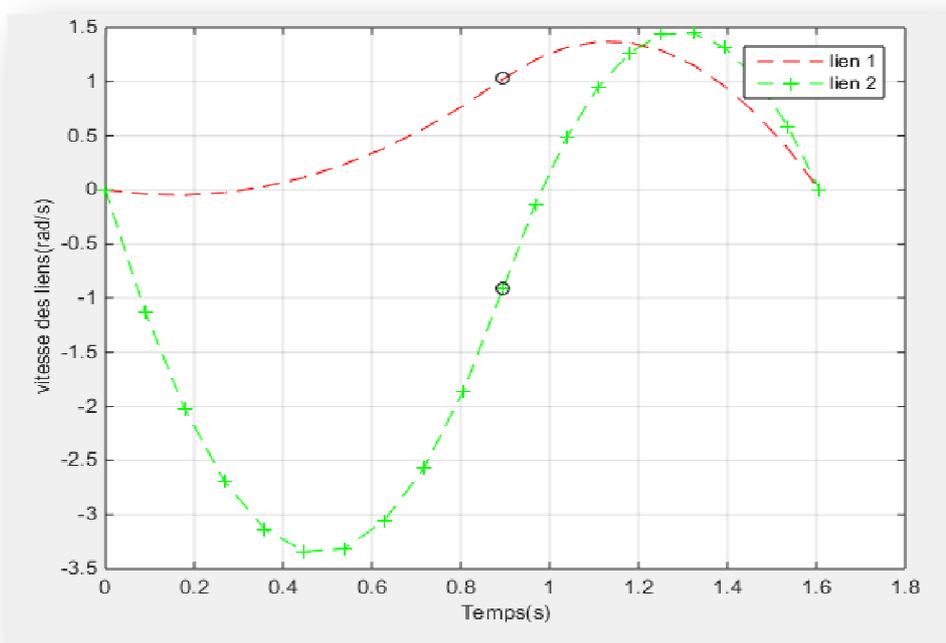


Figure 4 20: graphe représentant la variation de vitesse des liens.

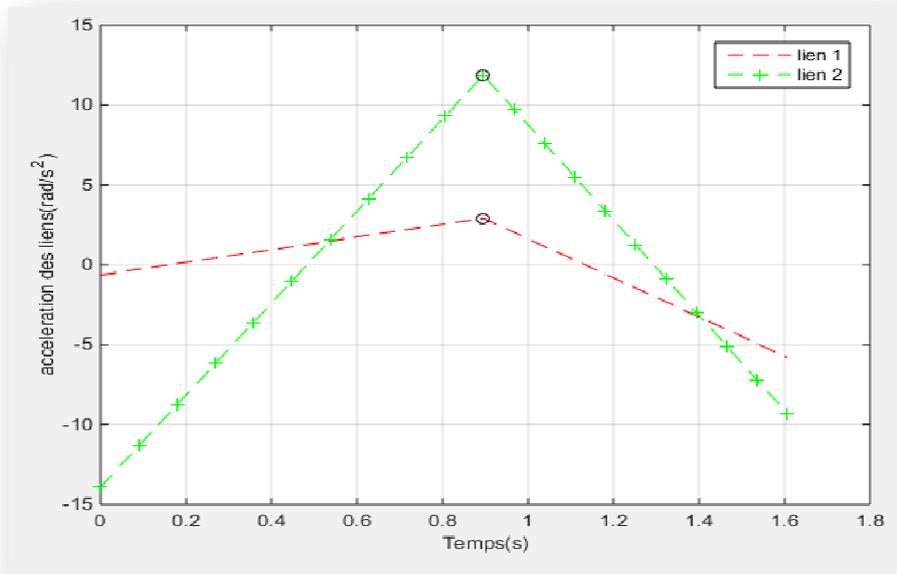


Figure 4 21: graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

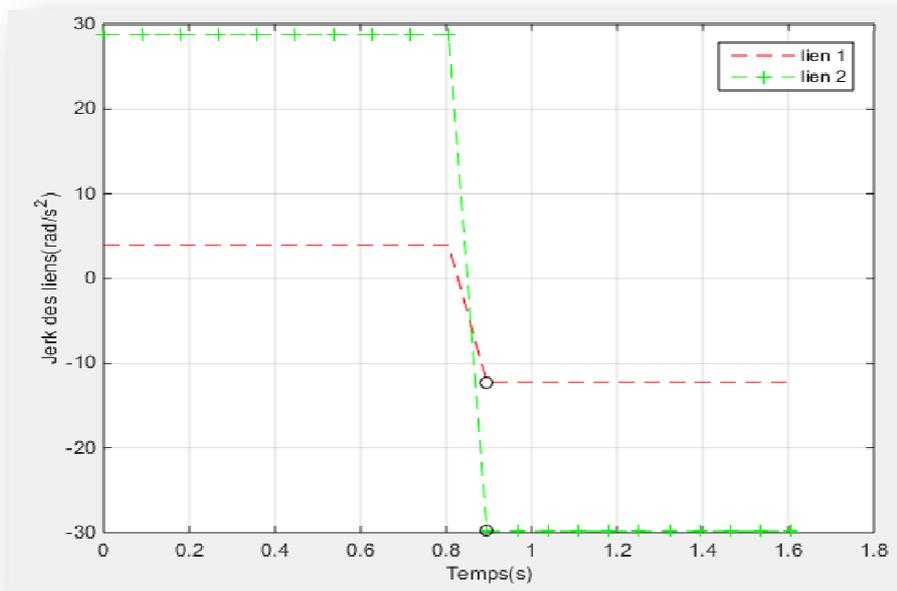


Figure 4 22: graphe représentant la variation du jerk des liens.

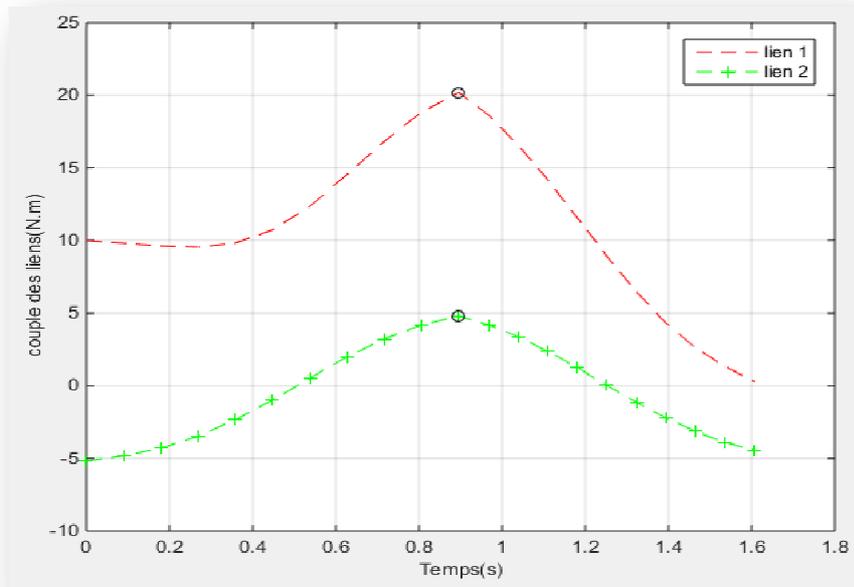


Figure 4 23: graphe qui représente la variation du couple des liens.

	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=1$
<b>Temps d'exécution du code de calcul</b>	8.785172 S	11.094966 S	9.088211 S
<b>T optimal (s)</b>	1.6443	1.7208 S	1.6071 S
<b>f.obj optimal</b>	0.4220	0.8686	1.6071
<b><math>v_{\max}</math> (m/s)</b>	$v_{1\max}=1.4307$ $v_{2\max}=1.4191$	$v_{1\max}=1.5003$ $v_{2\max}=1.3965$	$v_{1\max}=1.3684$ $v_{2\max}=1.4484$
<b><math>a_{\max}</math> (rad/s<sup>2</sup>)</b>	$a_{1\max}=3.0826$ $a_{2\max}=11.1351$	$a_{1\max}=3.2031$ $a_{2\max}=10.0067$	$a_{1\max}=2.9173$ $a_{2\max}=11.8826$
<b>Jerk<sub>max</sub> (rad/s<sup>3</sup>)</b>	$J_{1\max}= 5$ $J_{2\max}= 25$	$J_{1\max}= 4$ $J_{2\max}= 19$	$J_{1\max}= 4.75$ $J_{2\max}= 29$
<b>Couple max(N.m)</b>	$C_{1\max}=20.0721$ $C_{2\max}=4.7928$	$C_{1\max}=19.7892$ $C_{2\max}=4.7037$	$C_{1\max}=20.1885$ $C_{2\max}=4.8253$
<b>Couple optimal (N.m)</b>	0.0146	0.0165	0.0137
<b>Chromos optimal</b>	[0.9632 ,0.6812]	[1.0703, 0.6504]	[0.8955, 0.7116]

Tableau 4 3: les résultats obtenus pour le 1<sup>er</sup> exemple.

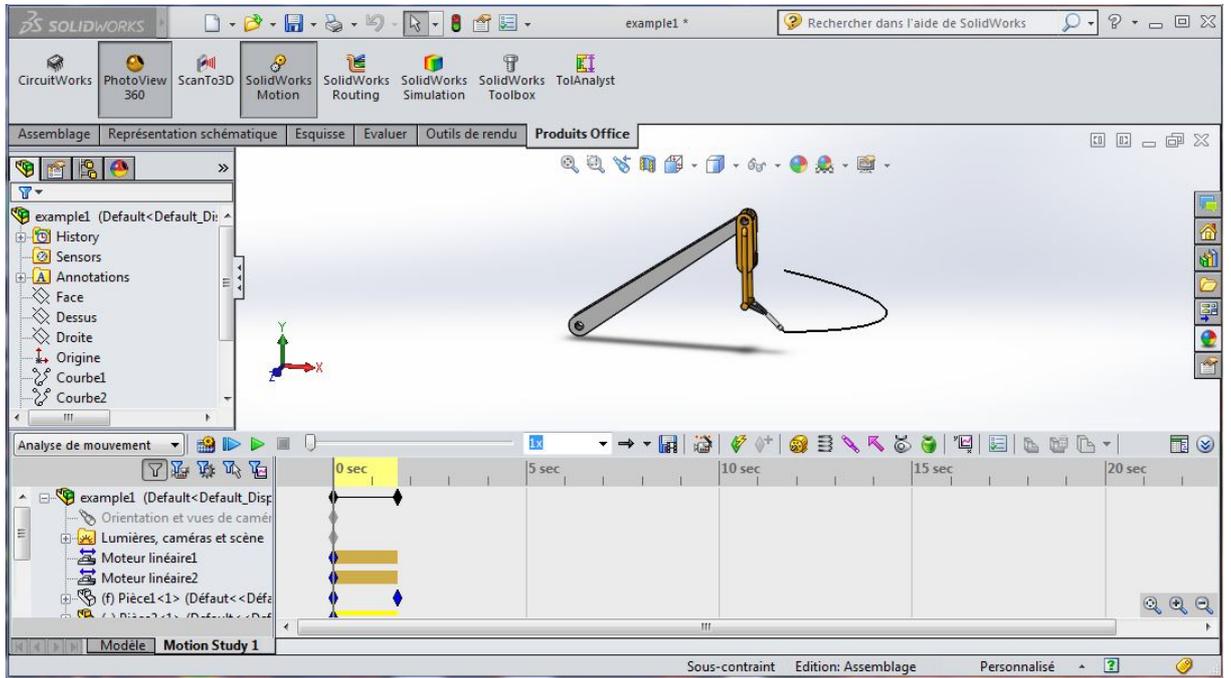


Figure 4 24: Animation par SolidWorks du robot 2R au point initial.

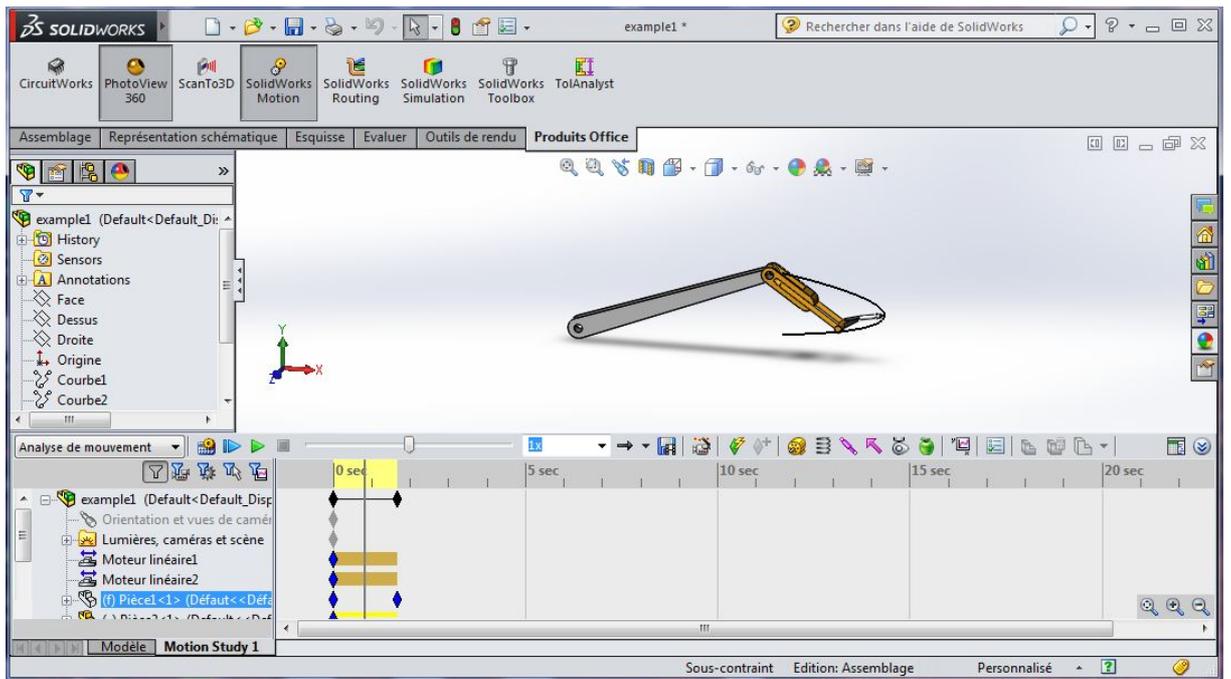


Figure 4 25: Animation par SolidWorks du robot 2R au point intermédiaire.

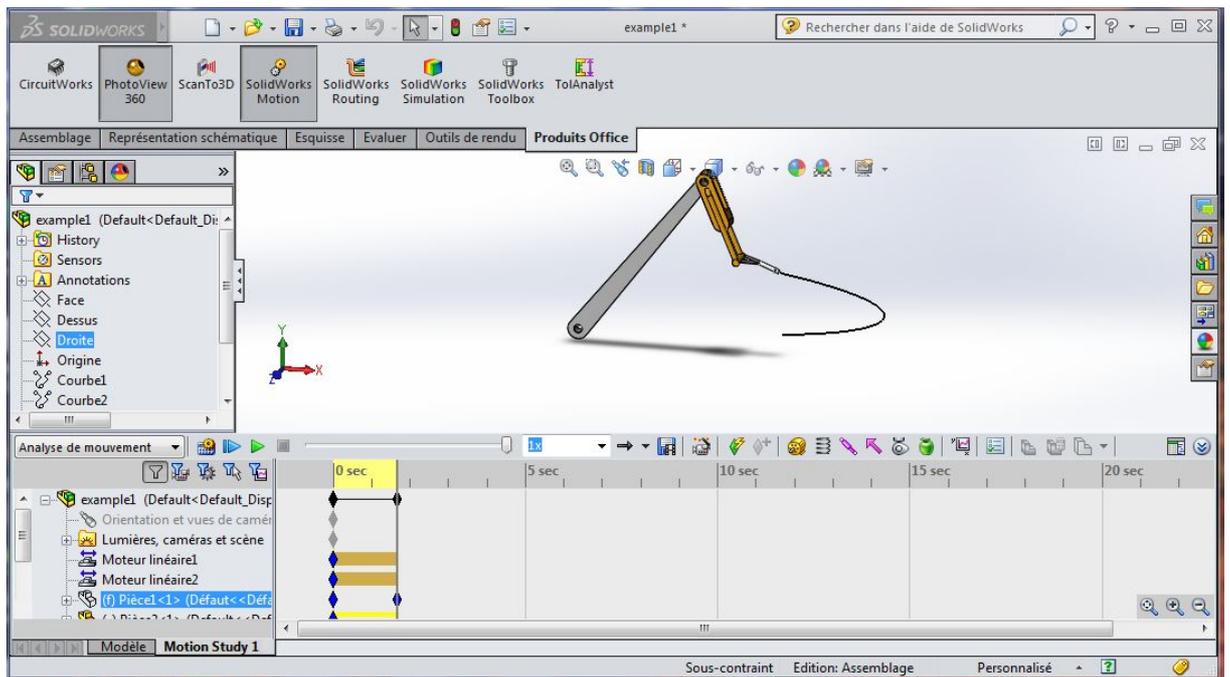


Figure 4 26: Animation par SolidWorks du robot 2R au point final.

Après avoir traité les deux exemples du robot 2R et appliqué l'organigramme indiqué ci-dessus on a constaté que :

Pour le 1<sup>er</sup> exemple : on a traité une trajectoire à trois points (point initial, point intermédiaire et le point final) et d'après les résultats obtenus, on remarque que plus la valeur du coefficient de pondération  $\alpha$  augmente la fonction objective  $f.obj$  augmente aussi, alors  $f.obj$  est proportionnelle avec  $\alpha$

Pour  $\alpha=0.25 \rightarrow f.obj=0.4220$

Pour  $\alpha=0.5 \rightarrow f.obj=0.8686$

Pour  $\alpha=1 \rightarrow f.obj=1.6071$ .

Notons que les différents contraintes cinématiques et dynamiques ont été respectées et les résultats trouvés montrent que les valeurs des vitesses, des accélérations, le jerk et les couples ne dépassent pas les valeurs limitées. On a trouvé aussi l'intervalle optimal du chromosome optimal

- Pour  $\alpha=0.25 \rightarrow$ chromo optimal= [0.9632, 0.6812]
- Pour  $\alpha=0.5 \rightarrow$ chromo optimal= [1.0703, 0.6504]
- Pour  $\alpha=1 \rightarrow$ chromo optimal= [0.8955, 0.7116]

#### 4.4.2. Exemple 2 : Trajectoire passant par onze points :

Dans cet exemple on va traiter un robot 2R planaire qui subit des contraintes dynamiques dues aux couples, ce robot doit passer par onze points imposés (tableau 4.4) le deuxième point est calculé en faisant la somme des points 1 et 3 et divisant sur 2 et la même chose pour le dixième point on fait la somme des points 9 et 11 et on divise sur 2. On opte pour une trajectoire à un temps minimal donc on forme une fonction objective qui minimise le temps d'exécution de la tâche ( $f.obj=T$ ), l'expression du couple est donnée par l'équation [4.18].

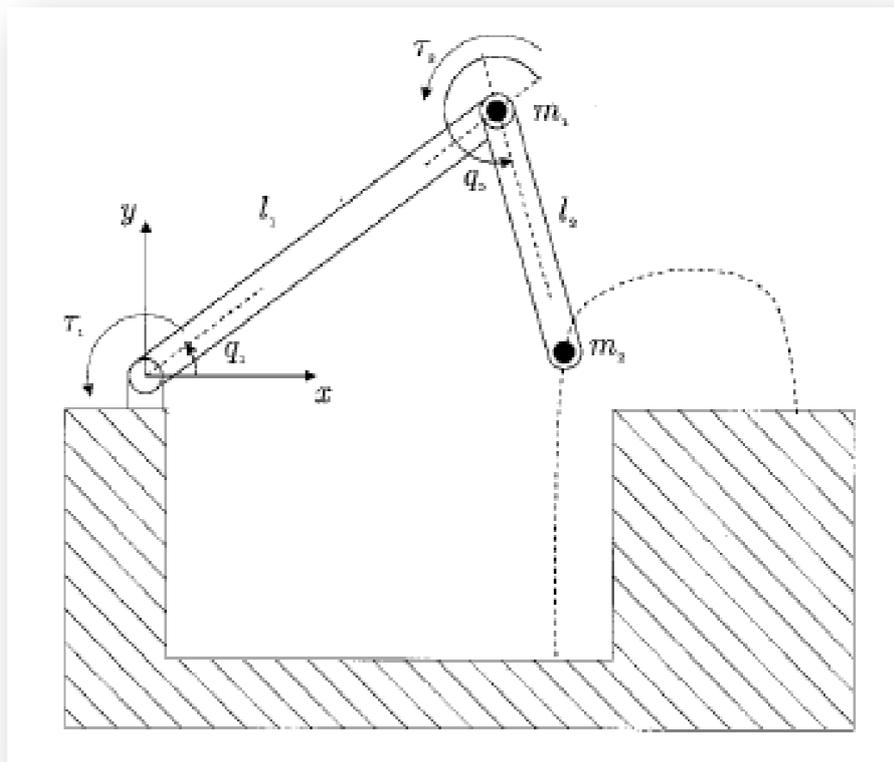


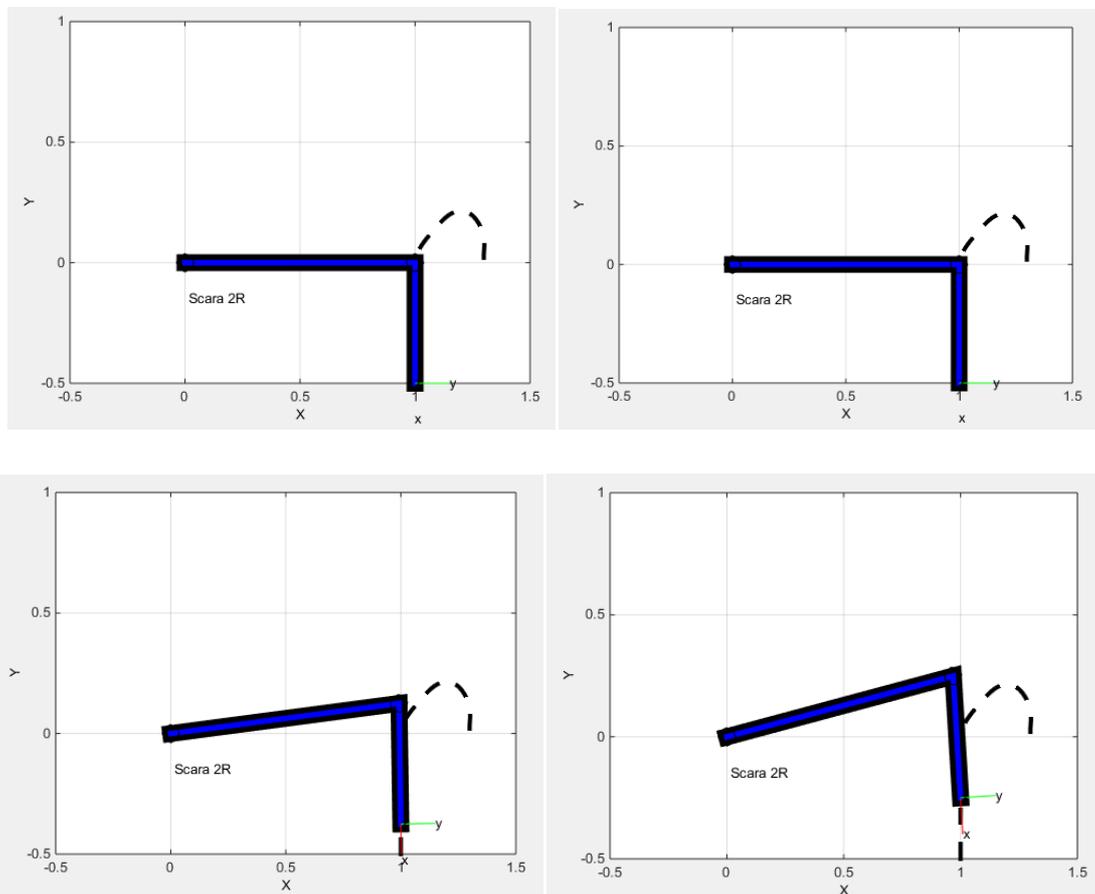
Figure 4 27: représentation schématique des deux bras planaire.

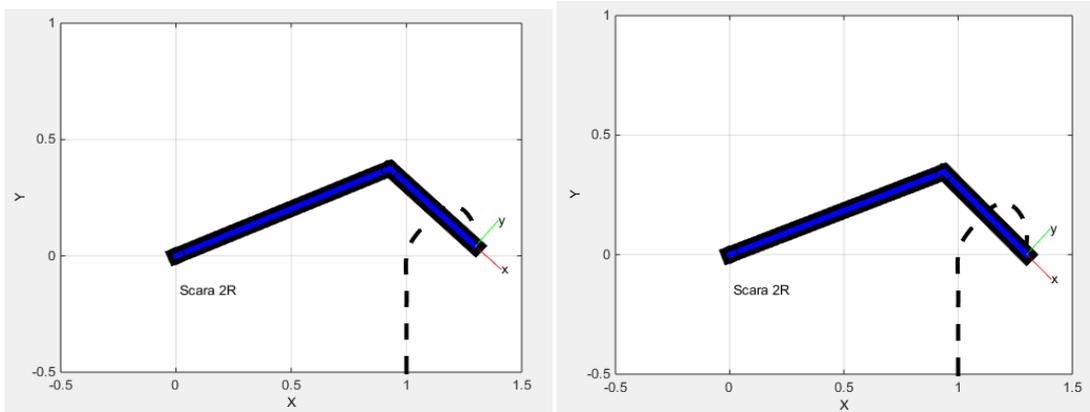
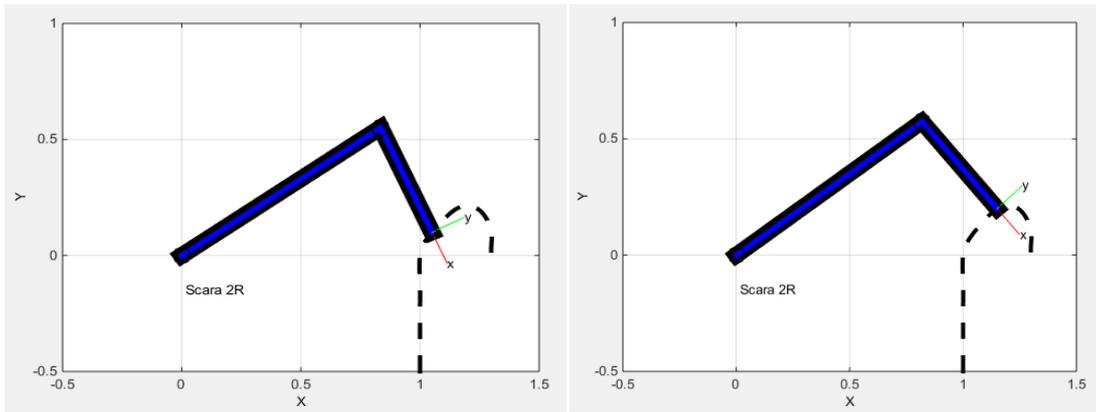
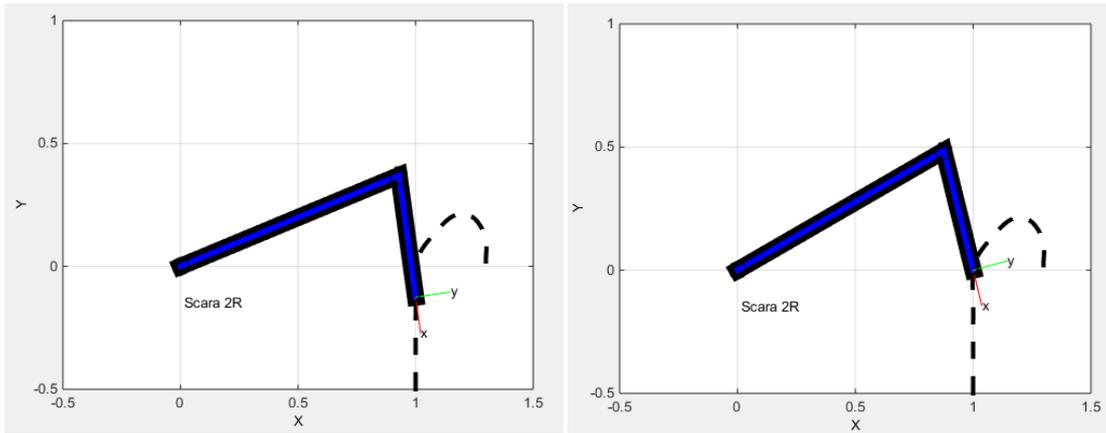
$x^0 = 1.00$	$y^0 = -0.500$	$q_1^0 = 0.0000$	$q_2^0 = -1.5708$
$x^2 = 1.00$	$y^2 = -0.375$	$q_1^2 = 0.1253$	$q_2^2 = -1.6804$
$x^3 = 1.00$	$y^3 = -0.250$	$q_1^3 = 0.2517$	$q_2^3 = -1.7594$
$x^4 = 1.00$	$y^4 = -0.125$	$q_1^4 = 0.3789$	$q_2^4 = -1.8074$
$x^5 = 1.00$	$y^5 = 0.000$	$q_1^5 = 0.5054$	$q_2^5 = -1.8235$

$x^6 = 1.05$ $y^6 = 0.100$	$q_1^6 = 0.5837$ $q_2^6 = -1.7087$
$x^7 = 1.15$ $y^7 = 0.200$	$q_1^7 = 0.6119$ $q_2^7 = -1.4581$
$x^8 = 1.30$ $y^8 = 0.100$	$q_1^8 = 0.4263$ $q_2^8 = -1.1040$
$x^9 = 1.30$ $y^9 = 0.050$	$q_1^9 = 0.3903$ $q_2^9 = -1.1124$
$x^{11} = 1.30$ $y^{11} = 0.000$	$q_1^{11} = 0.3526$ $q_2^{11} = -1.1152$

**Tableau 4 4: l'organe terminal passe par les points exprimés en mètre et l'équivalent des liens passent par les points exprimés en radians des deux bras.**

Après avoir trouvé la fonction objective et le couple et former le programme MATLAB on obtient les résultats suivants :





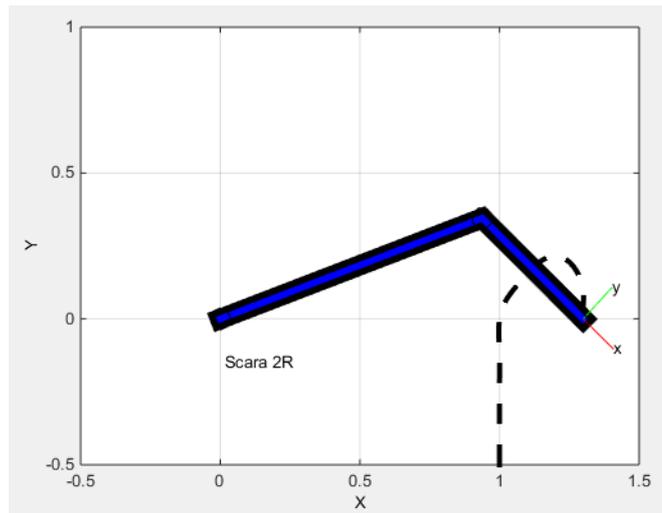


Figure 4 28: Animation du déplacement de robot 2R dans l'espace opérationnel en passant par le point initial points intermédiaires-point final.

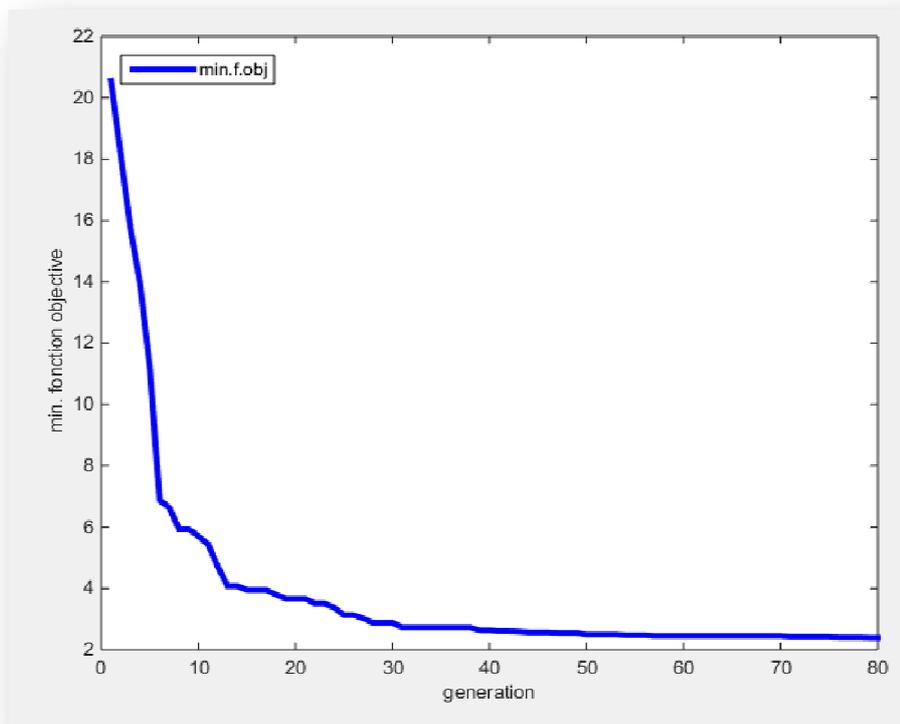


Figure 4 29: graphe qui représente la variation de la fonction objective en fonction du nombre de génération.

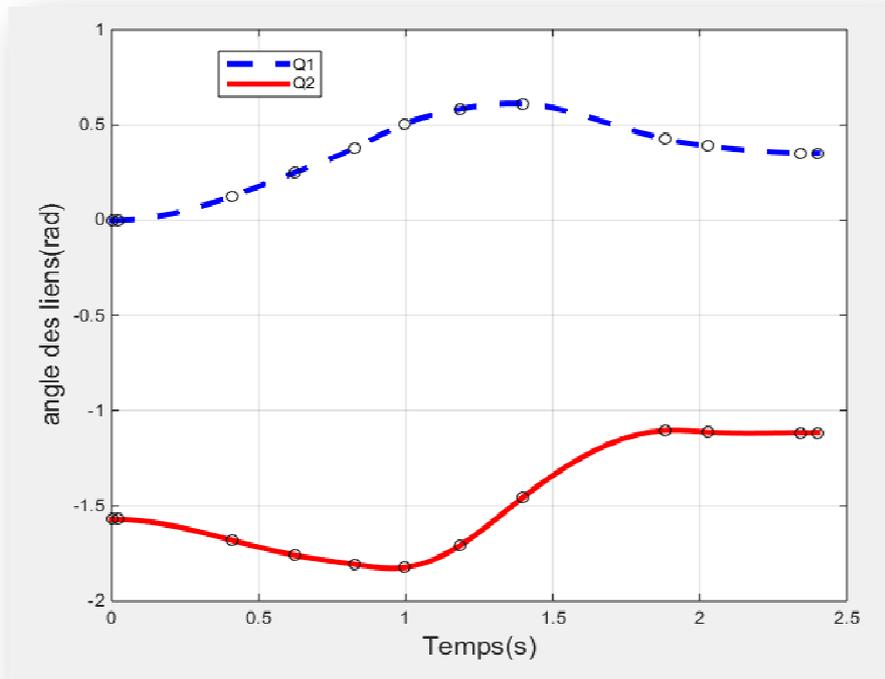


Figure 4 30: graphe qui représente la variation des angles des liens en fonction du temps.

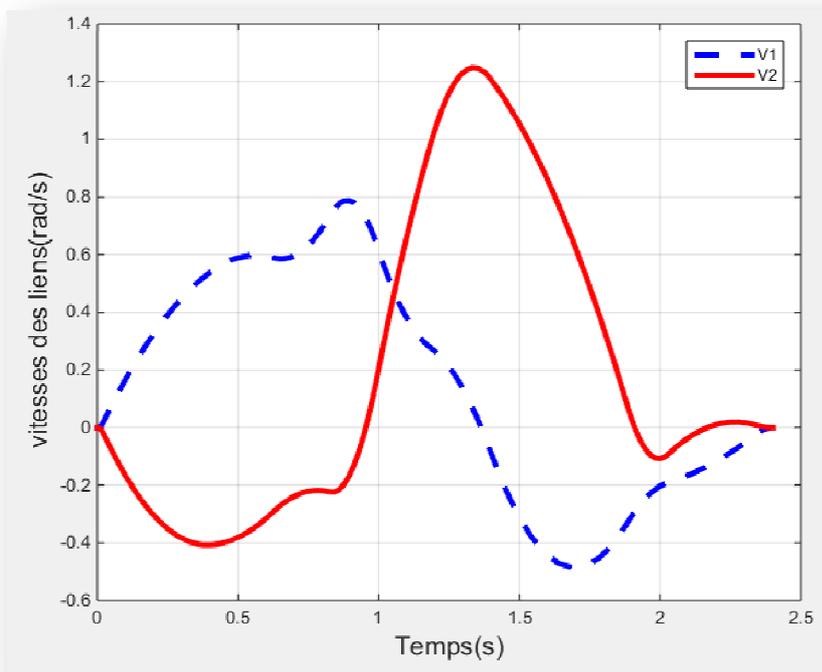


Figure 4 31: graphe représentant la variation de vitesse des liens.

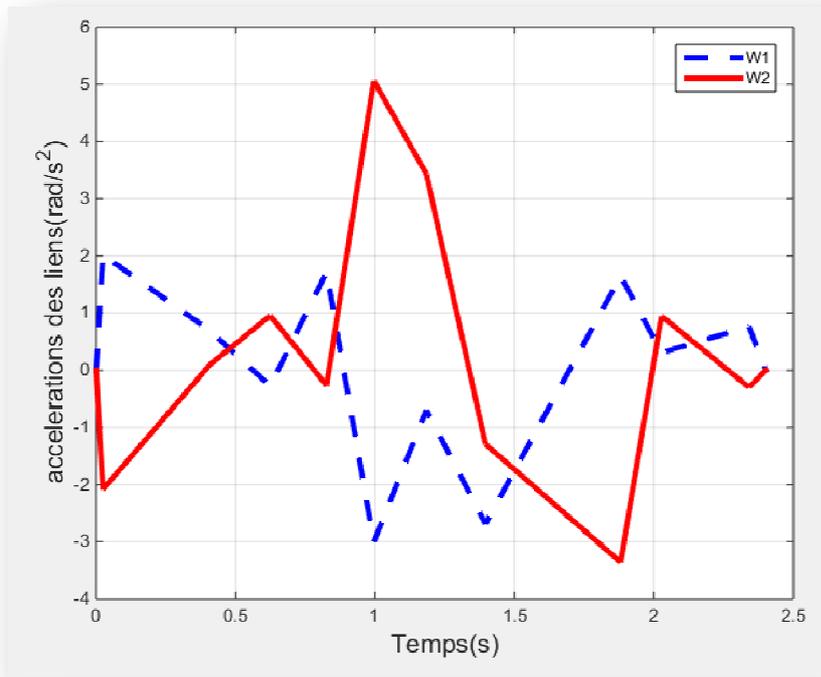


Figure 4 32: graphe représentant la variation de l'accélération des liens.

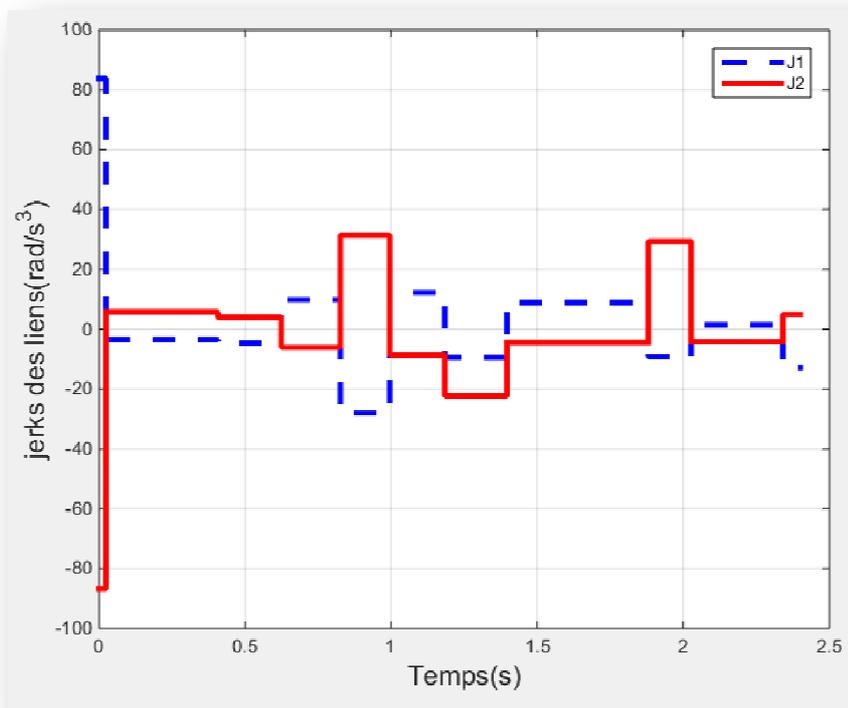


Figure 4 33: graphe représentant la variation du jerk des liens.

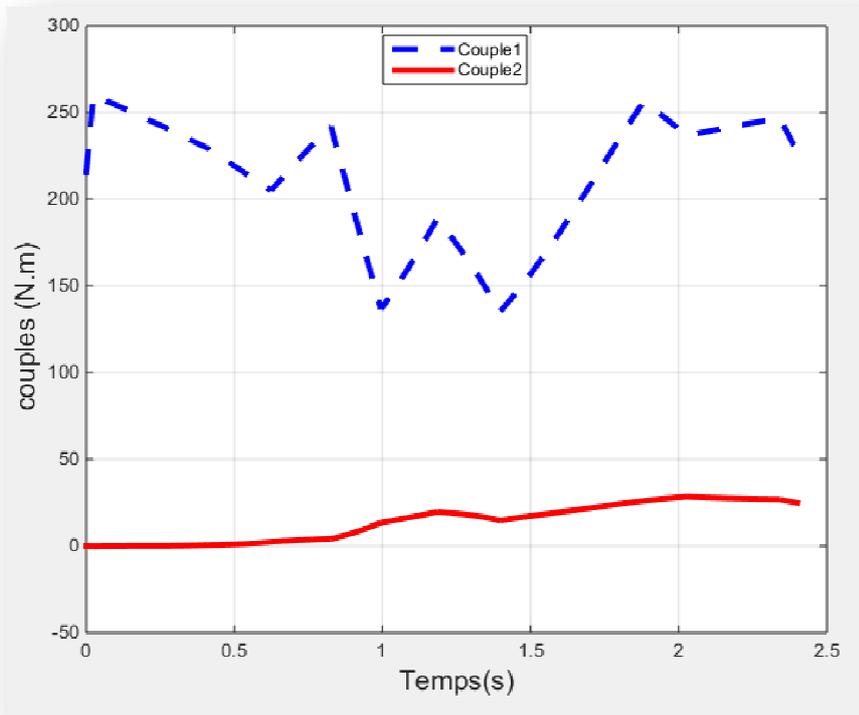


Figure 4 34: graphe qui représente la variation des couples des liens.

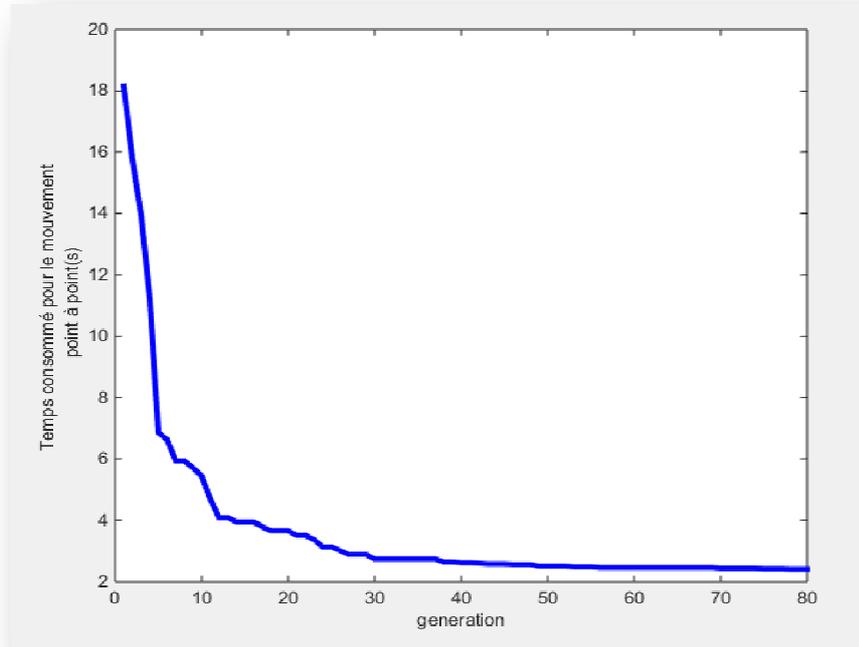
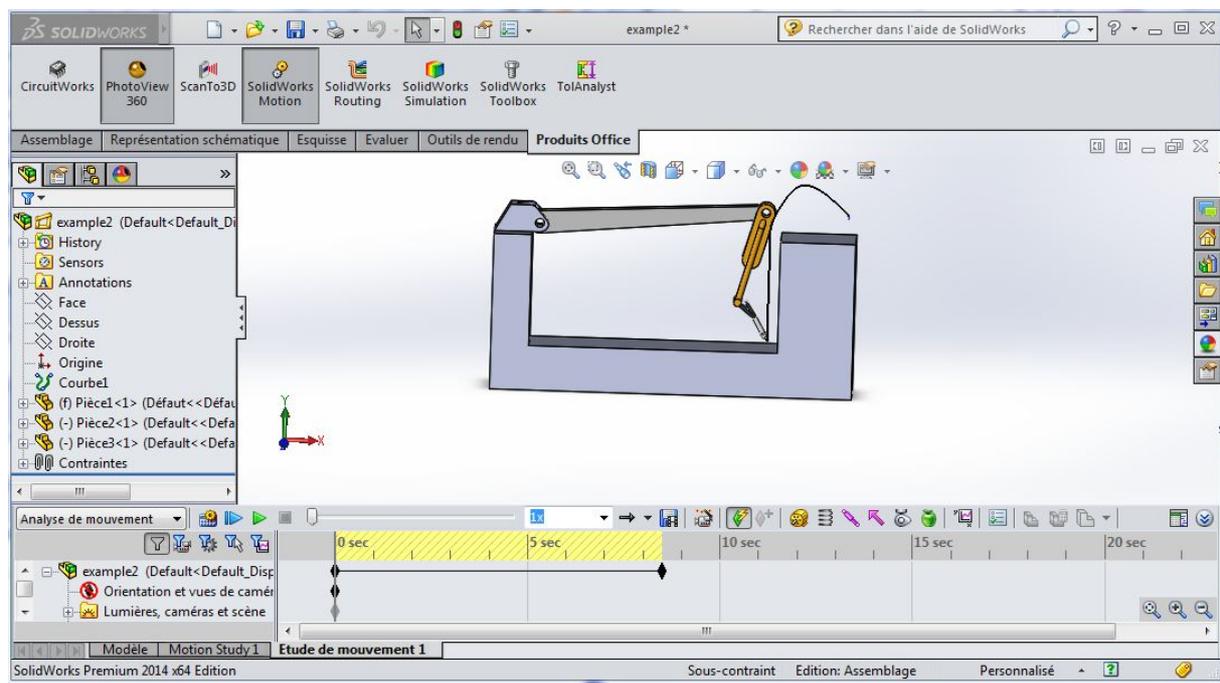


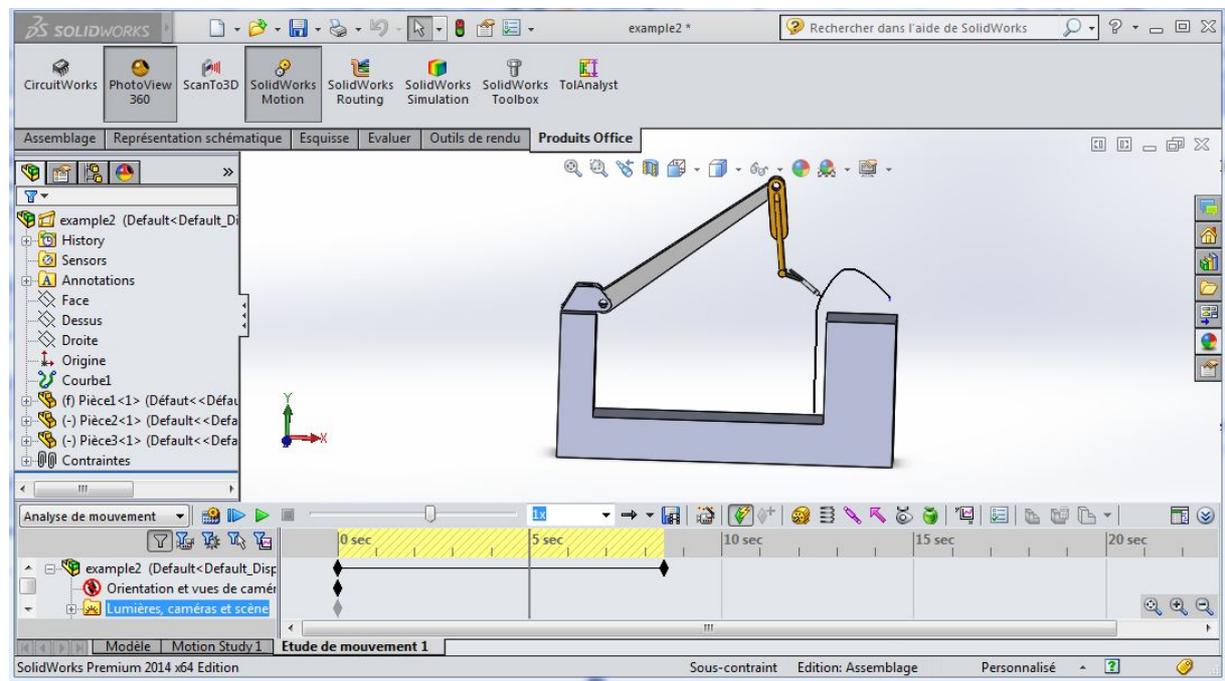
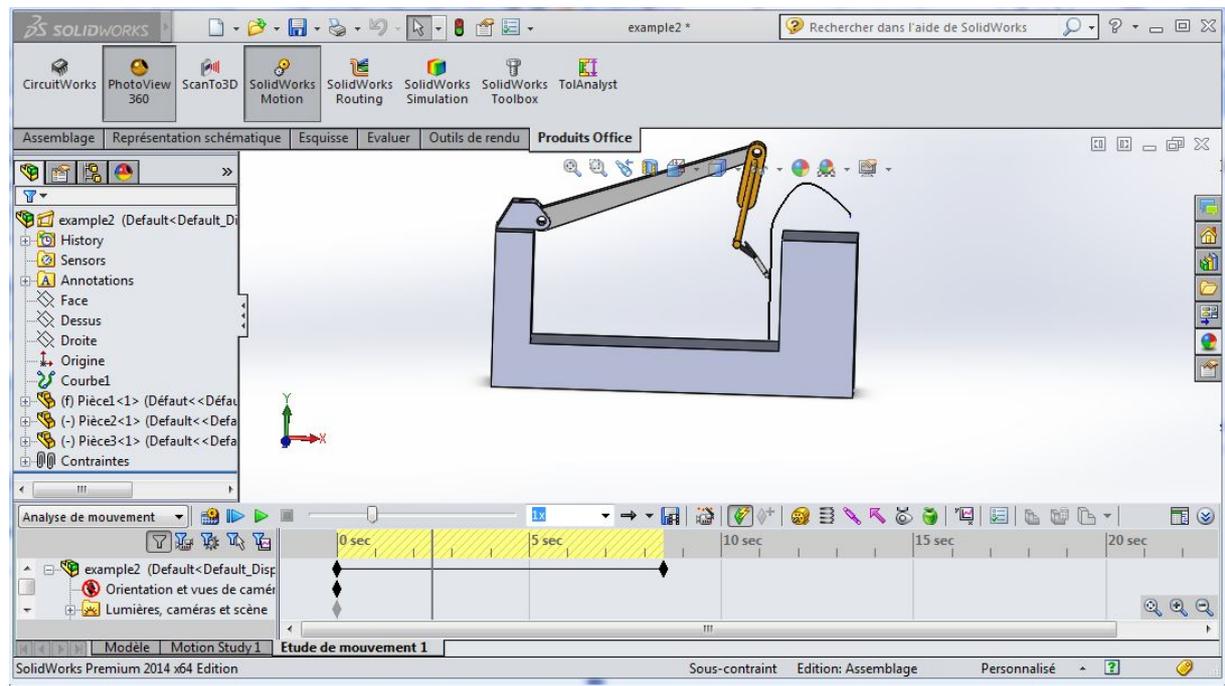
Figure 4 35: graphe qui représente le temps consommée pour le mouvement point à point en fonction du nombre de génération.

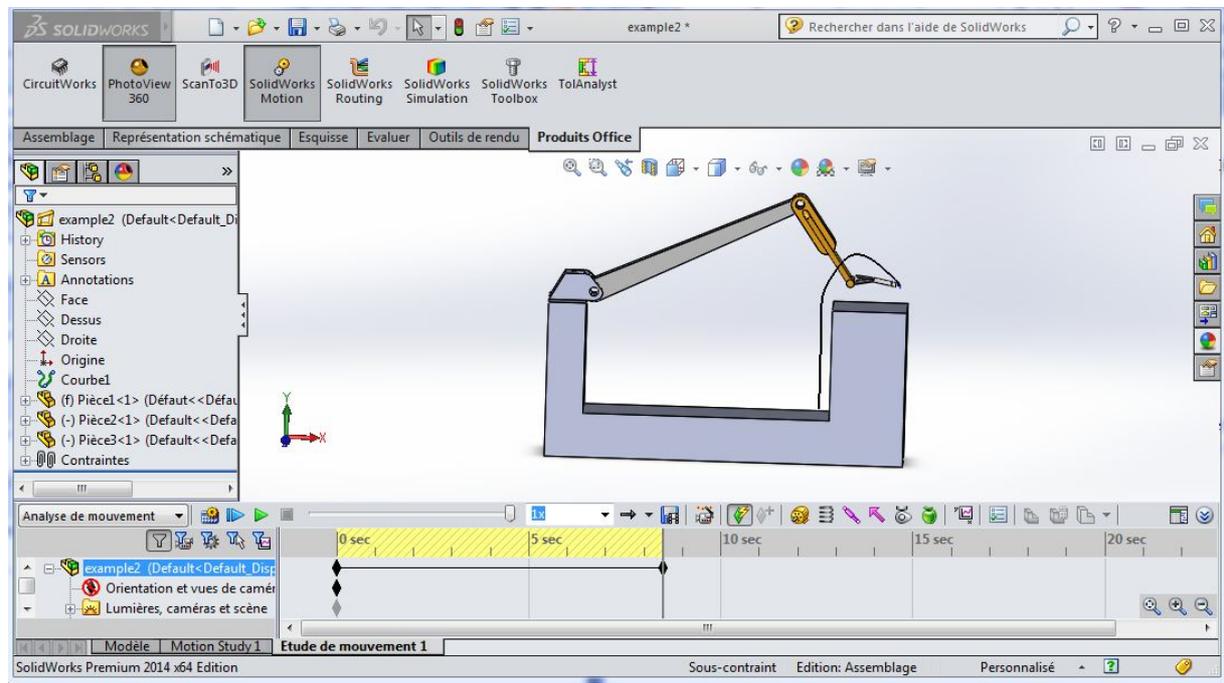
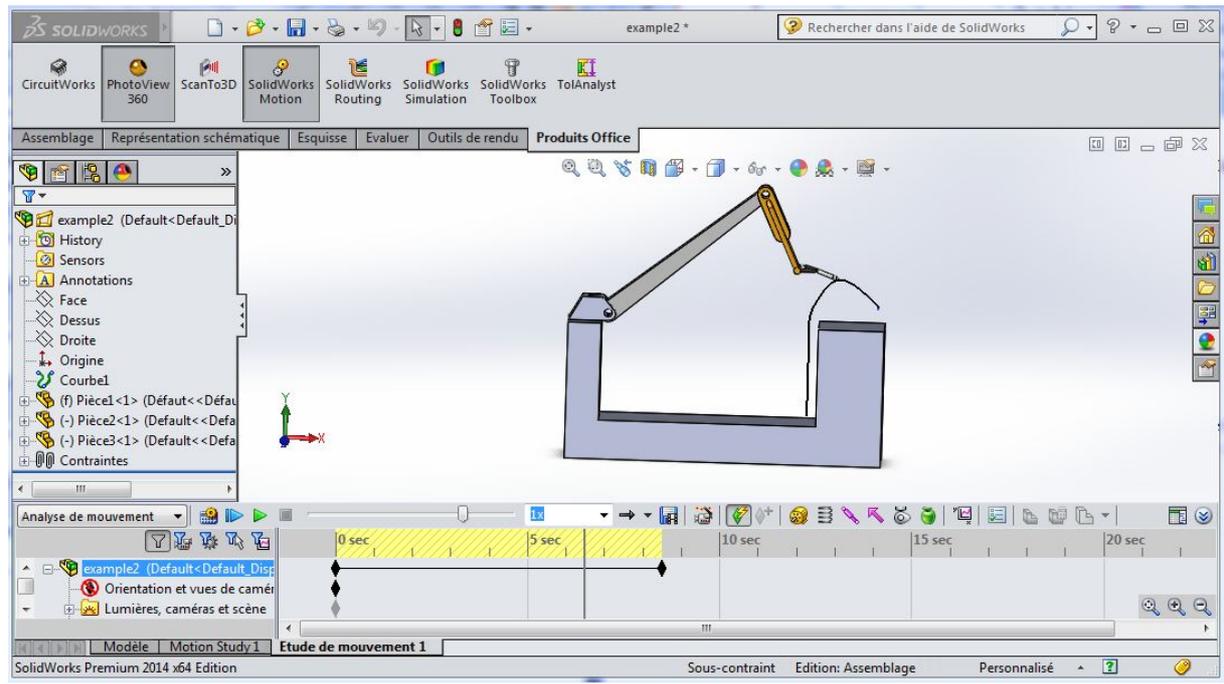
## Résultats obtenus

<b>Temps d'exécution du code de calcul (s)</b>	60.719949
<b>T optimal (s)</b>	2.4008
<b>F.obj optimal</b>	2.4008
<b>V<sub>q1</sub> (m/s)</b>	Max= 0.7875 Med=0.1905
<b>V<sub>q2</sub> (m/s)</b>	Max= 1.2481 Med= 0.6240
<b>a<sub>q1</sub> (rad/s<sup>2</sup>)</b>	Max= 3.0064 Med= 1.5032
<b>a<sub>q2</sub> (rad/s<sup>2</sup>)</b>	Max= 5.0631 Med= 2.5315
<b>J<sub>q1</sub> (rad/s<sup>3</sup>)</b>	Max= 83.8303 Med= 42.6438
<b>J<sub>q2</sub> (rad/s<sup>3</sup>)</b>	Max= 86.6402 Med= 45.3043
<b>Couple (N.m)</b>	q1 max= 259.8654 q2 max= 28.2971

Tableau 4 5: les résultats obtenus pour le 2<sup>ème</sup> exemple.







**Tableau 4 6: Animation par SolidWorks du robot 2R du point initial au point final en passant par les points intermédiaires imposés.**

Pour cet exemple, on a traité une trajectoire à onze points avec un point initial et un point final et neuf points intermédiaires, en appliquant les programmes sous MATLAB et en respectant les contraintes imposées on a procédé une fonction objective qui dépend uniquement du temps et on a trouvé comme fonction optimale  $Fct. optimal=2.4008$ . Notons que le chromosome optimal qu'on a trouvé pour cette tâche est égale à  $h_i = [0.0241, 0.3833, 0.2165, 0.2024, 0.1693, 0.1885, 0.2122, 0.4847, 0.1464, 0.3136, 0.0599]$ .

#### **4.6. Conclusion :**

Dans ce chapitre on a traité le problème de planification des trajectoires dans les tâches imposées, pour cela on a proposé une technique qui se focalise sur la modélisation des trajectoires en utilisant les fonctions splines cubiques et l'optimisation des critères ou d'une fonction objectif qui représente le temps d'exécution de la tâche et/ou le couple moteur des bras manipulateurs en utilisant les algorithmes génétiques. Pour cela, on a traité deux exemples, le premier concerne un bras manipulateur de 2 d.d.l qui doit réaliser une tâche composée par un seul point intermédiaire sous des contraintes cinématiques et dynamiques et en minimisant une fonction objective qui est en fonction du temps et couple. Tandis que le 2<sup>ème</sup> exemple concerne a réalisé une trajectoire optimale qui est composée avec neuf points intermédiaires sous des contraintes dynamiques et en minimisant une fonction objectif qui est fonction que du temps. Les résultats trouvés et mentionnés dans les tableaux et par des figures montrent que cette approche peut donner des résultats satisfaisants car les contraintes n'ont pas été dépassées et le temps d'exécution du code de calcul ne prend pas assez de temps pour trouver la solution optimale (exécution avec PC à 2Ghz).

## Introduction générale

La maîtrise de la conception et du fonctionnement de mécanismes complexes motorisés ou « machine », a toujours été un facteur important de progrès technologiquement et parfois aussi sociaux et économiques dans divers domaines. Ces machines sont destinées à augmenter les possibilités de l'homme pour la rapidité de ses déplacements et ses actions, et pour l'amplification de sa force et de son champ d'action, notamment dans l'accomplissement de tâches pénibles, dangereuses et/ou répétitif. Les fonctions généralement concernées sont :

- Le déplacement.
- La « manipulation » :
  - Déplacer un outil pour saisir des objets ou de la matière, les transporter et les déposer.
  - Exercer des efforts sur l'environnement.
  - La combinaison des deux fonctions précédentes.

Un robot manipulateur peut donc être considéré d'une manière générale, vu par son environnement, comme un générateur de mouvements et d'efforts dans les diverses directions de l'espace. [Technique de l'ingénieur]

En effet, l'utilisation courante des robots manipulateurs dans l'exécution des tâches répétitives fait que les recherches se sont naturellement orientées vers la planification de mouvement qui cherchent en général une meilleure gestion de la rapidité de l'exécution et de la fiabilité du fonctionnement du manipulateur.

En résumé, le problème de planification d'un mouvement optimal le long d'une tâche de transfert est formulé mathématiquement sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte dans lequel l'objectif est de minimiser une quantité physique représentée par critère de performance tout en respectant certaines limitations et exigences de nature technologique liées au robot manipulateur, à la tâche et à l'environnement. La résolution de ce problème conduit à la détermination de la trajectoire optimale que le robot manipulateur doit suivre ainsi que les commandes optimisées qui permettent d'engendrer le mouvement le long de cette trajectoire.

Selon la tâche que doit accomplir le robot, on s'intéresse seulement à une trajectoire imposée.

➤ Trajectoire imposée :

De tels mouvements sont rencontrés lorsque l'outil en fin de chaîne agit sur son environnement sans interruption et selon un parcours déterminé. Il est nécessaire dans ce cas, de spécifier la trajectoire de l'effecteur dans l'espace opérationnel.

Par exemple : les travaux de découpage ou de soudure continu.

**Etat de l'art :**

Des travaux dans la robotique ont traité le problème de planification des trajectoires des robots manipulateurs.

Le principal objectif de ces travaux est d'assurer la fiabilité du fonctionnement et une meilleure gestion de la rapidité du manipulateur, la plupart de ces travaux tentent de planifier une trajectoire de qualité en respectant certaines limitations et contraintes caractéristiques, à la tâche réalisée et à l'environnement dans lequel évolue le manipulateur.

Le bon fonctionnement du manipulateur souvent dépend de la minimisation d'un critère de performance en respectant des exigences imposées comme les limitations géométriques, cinématiques, dynamiques et technologiques propres au robot manipulateur. Un autre problème qui se pose dans la planification des trajectoires ; c'est l'encombrement de l'espace de travail, sa consistance à définir des trajectoires assurant l'évitement de tout obstacle lors de l'exécution de la tâche.

Dans la littérature de la robotique des travaux tentent de proposer des solutions pour planifier des trajectoires des robots manipulateurs de façon optimale. Les différentes méthodes proposées se distinguent entre elles par l'un des quatre facteurs suivants :

- La nature des tâches à exécuter.
- La modélisation du comportement du robot
- Le critère d'optimisation considéré et les contraintes prises en compte.
- La technique employée pour la résolution du problème d'optimisation.

Notre travail consiste à planifier des trajectoires des robots manipulateurs dans des tâches imposées, pour cela des approches de résolution ont été proposées en tenant compte de la nature de modélisation adoptée.

La modélisation d'un système permet d'obtenir des équations qui représentent le comportement du système étudié. Pour l'obtention de ces équations, il est nécessaire d'opter pour un paramétrage adéquat [14].

Pour le modèle dynamique le formalisme de Lagrange ne donne forcément pas le modèle le plus performant du point de vue du nombre d'opérations. Cette méthode est parmi les plus simples pour l'obtention du modèle dynamique [1]. C'est un formalisme qui décrit le modèle en termes de travail et d'énergie du système.

En général, les équations de mouvement sont accompagnées par des équations de contraintes qui généralement algébriques et non linéaires [1]. Des autres travaux ont cité un autre formalisme de Newton-Euler qui est basé sur les théorèmes généraux de la mécanique [22]

Pour le problème de planification des trajectoires des travaux réalisés ont proposé des méthodes on cite :

Interpolation polynomiale de Lagrange qui est a comme avantage la simplicité et relie des points avec une seule fonction polynomiale mais elle peut être complémentaire absurde [27]. Le travail accompli dans [28] c'est la représentation de Bézier qui cite chaque segment de polynôme peut être représenté par son Bézier polygone. De la même référence [28] les auteurs ont donné une autre méthode d'approche B-spline qui permet d'écrire une combinaison affine de certains points. Les auteurs de [29] ont donné une autre approche appelée NURBS (Non Uniforme B-Spline) qui a comme propriétés la représentation des coniques, invariance affine, invariance projective, projection de la courbe NURBS passant par la projection des points.

Notre mémoire a été exposé comme suit : Le 1<sup>er</sup> chapitre aborde une généralité sur la robotique, les différents systèmes mécaniques robotisés, la terminologie utilisée. Et le 2<sup>ème</sup> chapitre traite les modèles de transformation entre l'espace opérationnel et l'espace articulaire. On distingue :

- les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.
- les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement.
- les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

En suite le 3<sup>ème</sup> chapitre présente la planification des trajectoires d'un bras manipulateur en utilisant les différents méthodes d'interpolations comme Lagrange, Bézier, Spline cubique, et B-Spline. Et le 4<sup>ème</sup> chapitre est consacré à étudié un exemple pratique : « robot 2R ». Enfin la conclusion générale qui reflète les résultats des chapitres suivi par des perspectives envisagées.

# ANNEXE A

---

## **1. Les algorithmes génétiques :**

Les algorithmes génétiques sont des techniques d'optimisations fondées sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique [4-12] [4-14]. Leur fonctionnement est relativement simple. On part avec une population de solutions potentielles (chromosomes) initiales arbitrairement choisie. On évalue leurs performances (fitness) relatives sur la base desquelles on crée une nouvelle population de solutions potentielles en utilisant des opérateurs évolutionnaires simples : la sélection, le croisement et la mutation. On recommence ce cycle jusqu'à ce que l'on trouve une solution satisfaisante. Ces algorithmes se distinguent des autres méthodes stochastiques par les deux principaux points suivants :

- Ils utilisent un codage des paramètres (solution) et non pas les paramètres eux même.
- Ils travaillent sur une population de points, au lieu d'un point unique.

Un algorithme génétique se présente en général de la manière suivante :

Générer une population initiale

**Répéter :**

- Evaluer les performances de chaque individu (chromosome)
- Sélectionner et regrouper les chromosomes par paire selon leurs performances.
- Générer une nouvelle population : (appliquer les opérations de croisement, et de mutation).

**Jusqu'à convergence.**

**Algorithme (1) : les algorithmes génétiques.**