

Rachid BENDIB

Mathématique

pour

économistes



Office des Publications Universitaires

Table des matières

Avant-propos	V
Table des matières	VII
Introduction	I
Partie A: Analyse statique comparative	1
Chapitre I: La dérivée	4
1-1 La notion de dérivée	4
1-1-1 La dérivée comme taux de variation	4
1-1-2 La dérivée comme pente d'une courbe	6
1-2 La notion de limite	8
1-3 Continuité et dérivabilité d'une fonction	12
1-3-1 La continuité	12
1-3-2 La dérivabilité	14
Exercices	17
Chapitre II Les règles de dérivation	19
2-1 Règles de dérivation pour une fonction à une variable	19
2-2 Règles de dérivation de plusieurs fonctions d'une même variable	21
2-3 La formule de Taylor	24
2-3-1 Le reste de Taylor	27
2-3-2 La formule de Maclaurin	29
2-4 La règle de l'Hospital	30
2-5 Règles de dérivation de fonctions de plusieurs variables	33
2-5-1 La règle de la chaîne	33
2-5-2 La règle de la fonction inverse	34
2-6 La dérivation partielle	36
2-7 Applications économiques	38
2-7-1 Fonctions de production et de revenu	38
2-7-2 Effet d'une taxation sur le prix d'équilibre	40
2-7-3 Modèle du revenu national	42
Exercices	43
Chapitre III Fonctions de plusieurs variables	47
3-1 La différentielle	47

3-2 La différentielle totale	49
3-3 La dérivée totale	51
3-4 Dérivée de fonctions implicites	55
3-4-1 La fonction implicite	55
3-4-2 La dérivation de fonctions implicites	57
*3-4-3 Cas d'un système d'équations simultanées	59
3-5 Applications économiques	61
3-5-1 Fonctions de production	62
3-5-2 Modèle de marché concurrentiel	67
*3-5-3 Modèle de revenu national	70
Exercices	73
Partie B: L'optimisation	76
Chapitre IV Maximum et minimum relatifs	77
4-1 Le test de la dérivée première	77
4-2 Dérivée d'ordre supérieur à un	80
4-2-1 Interprétation de la dérivée seconde	82
4-2-2 Test de la dérivée seconde	83
4-2-3 Test de la dérivée $n^{\text{ème}}$	84
4-3 Concavité et convexité d'une fonction	85
4-4 Applications économiques	88
4-4-1 La maximisation du profit	88
4-4-2 Effet d'un impôt sur le profit d'un entrepreneur	89
4-4-3 Maximisation du revenu de l'impôt	91
Exercices	92
Chapitre V Fonctions exponentielles et logarithmiques	94
5-1 La fonction exponentielle	94
5-1-1 La base e	96
5-1-2 Développement de Maclaurin de e^x	97
5-2 Les logarithmes	98
5-2-1 Logarithme commun et logarithme naturel	99
5-2-2 Propriété des logarithmes	100
5-3 Fonctions logarithmiques	101
5-4 Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques	104
5-4-1 Dérivée de la fonction \log	104
5-4-2 Dérivée de la fonction de base b	106
5-5 Applications économiques	108
5-5-1 La fonction logistique	108
5-5-2 L'élasticité ponctuelle	109
5-5-3 Problème d'intérêt composé	110
5-5-4 Moment optimal de mise en vente	113

Exercices	114
Chapitre VI Optimisation de fonctions à plusieurs variables	117
6-1 Dérivées partielles de second ordre et différentielles totales	117
6-1-1 Dérivées partielles de second ordre	117
6-1-2 Différentielles totales de second ordre	119
6-2 Extremum pour une fonction de deux variables	120
6-2-1 La condition de premier ordre	120
6-2-2 La condition de second ordre	122
*6-3 Les formes quadratiques (introduction)	126
*6-4 Extremum pour une fonction de plus de deux variables	133
6-4-1 La condition de premier ordre pour un extremum	133
6-4-2 La condition de second ordre pour un extremum	134
6-5 Applications économiques	138
6-5-1 Maximisation du profit d'une entreprise multiproduit	138
6-5-2 Quantité optimale d'inputs à utiliser	139
6-5-3 La discrimination dans les prix	140
Exercices	142
Chapitre VII L'optimisation sous contrainte	145
7-1 L'effet d'une contrainte	145
7-2 La recherche de valeurs stationnaires	147
7-2-1 La méthode du multiplicateur de Lagrange	147
7-2-2 Approche en terme de différentielles totales	150
7-3 la condition de second ordre	151
7-3-1 La différentielle de second ordre	152
*7-3-2 Le Hessien borné	153
*7-4 Signification du multiplicateur de Lagrange	158
7-5 Applications économiques	159
7-5-1 Maximisation de l'utilité du consommateur	159
7-5-2 L'équation de Slutsky	162
7-5-3 Combinaison optimale des inputs	165
Exercices	167
Partie C Analyse dynamique	169
Chapitre VIII Le calcul intégral	170
8-1 Les intégrales indéfinies	171
8-2 Les intégrales définies	175
8-3 Les intégrales impropres	180
8-4 Applications économiques	183

8-4-1 De la fonction marginale à la fonction totale	183
8-4-2 Le modèle de croissance de Domar	184
Exercices	187

Chapitre IX Equations différentielles linéaires de 1^{er} ordre

189

9-1 Equations différentielles linéaires de 1 ^{er} ordre (coefficient et terme constants)	189
9-1-1 L'équation homogène	190
9-1-2 L'équation non-homogène	191
9-2 Coefficient et terme variables	194
9-2-1 Cas de l'équation homogène	195
9-2-2 Cas de l'équation non-homogène	196
9-3 Equations différentielles exactes	197
9-3-1 Méthode pour résoudre une équation différentielle exacte	198
9-3-2 Le facteur d'intégration	200
9-3-3 Solution des équations différentielles linéaires de 1 ^{er} ordre	202
9-4 Equations différentielles non-linéaires de 1 ^{er} ordre et du 1 ^{er} degré	203
9-4-1 Equations à variables séparables	204
9-4-2 Equations réductibles à une forme linéaire	205
9-5 Applications économiques	206
9-5-1 L'ajustement dans un marché concurrentiel	206
9-5-2 Le modèle de croissance de Solow	208
Exercices	212

Chapitre X Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un

214

10-1 Equations différentielles linéaires de second ordre (coefficients et terme constants)	215
10-1-1 L'intégrale particulière	215
10-1-2 La fonction complémentaire	216
10-1-3 La trajectoire de $y(t)$	220
10-2 Nombres complexes et fonctions trigonométriques	221
10-2-1 Nombres complexes et imaginaires	222
10-2-2 Fonctions trigonométriques	223
10-2-3 Les fonctions sinus et cosinus	224
10-2-4 Les relations d'Euler	226
10-2-5 Représentation des nombres complexes	228
10-2-6 La formule de De Moivre	230
10-3 Analyse du cas des racines complexes	231
10-4 Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur à deux	234
10-4-1 L'intégrale particulière	234

10-4-2 La fonction complémentaire	235
10-5 Applications économiques	237
10-5-1 Le modèle de la charge fiscale de Domar	237
10-5-2 Anticipations sur les prix dans un modèle de marché	240
Exercices	242

Chapitre XI Equations aux différences finies de 1^{er} ordre 245

11-1 Résolution d'une équation aux différences finies de 1 ^{er} ordre (coefficient et terme constants)	246
11-1-1 Méthode itérative	247
11-1-2 Méthode générale	248
11-1-3 Trajectoire de y_t	250
11-2 Applications économiques	251
11-2-1 Le modèle de Cobweb	251
11-2-2 Le modèle de Harrod	253
Exercices	254

Chapitre XII Equations aux différences finies linéaires d'ordre supérieur à un 256

12-1 Equations aux différences finies linéaires d'ordre supérieur à un (coefficients et terme constants)	256
12-1-1 La solution particulière	257
12-1-2 La fonction complémentaire	258
12-1-3 La trajectoire de y_t	260
12-2 Equations aux différences finies linéaires d'ordre supérieur à deux (coefficients et terme constants)	263
12-2-1 La solution particulière	263
12-2-2 La fonction complémentaire	264
12-3 Applications économiques	267
Le modèle d'interaction entre le multiplicateur et l'accélérateur de Samuelson	267
Exercices	270

Partie D Algèbre linéaire 272

Chapitre XIII Les vecteurs 273

13-1 Opérations sur les vecteurs	274
13-2 Généralisation aux dimensions supérieures	279
13-3 Généralisation des opérations sur les vecteurs	281
13-4 Espace Euclidien et produit scalaire	283

13-5 Dépendance et indépendance linéaire	286
13-6 La notion de base	291
13-6-1 Remplacement d'un vecteur dans une base	293
13-6-2 Nombre de vecteurs dans une base dans E^n	295
13-7 Bases orthogonales	297
13-8 Espaces et sous-espaces vectoriels	300
Exercices	303
Chapitre XIV Matrices et déterminants	306
14-1 Opérations sur les matrices	308
14-2 Produit de matrices	310
14-3 Matrices particulières	315
14-4 La transposée	318
14-5 Matrices symétrique et antisymétrique	319
14-6 Partition d'une matrice	321
14-7 Le déterminant	325
14-7-1 Propriétés des déterminants	327
14-7-2 Expansion par les cofacteurs	330
14-8 La matrice inverse	340
14-8-1 Propriétés de la matrice inverse	343
14-8-2 Calcul de l'inverse par la partition	344
14-8-3 La forme-produit de la matrice inverse	347
14-8-4 La forme-série de la matrice inverse	350
Exercices	352
Chapitre XV Applications linéaires	357
15-1 Propriétés des applications linéaires	358
15-2 Rang d'une application linéaire	361
15-3 Rang et déterminants	363
15-4 Applications élémentaires	366
15-5 Matrice échelon et rang	370
15-6 Effet sur une application linéaire d'un changement de base	374
15-6-1 Matrice d'une application linéaire	374
15-6-2 Matrice des coefficients d'un changement de base	375
15-6-3 Effet d'un changement de base sur une application linéaire	377
Exercices	381
Chapitre XVI Systèmes d'équations simultanées	386
16-1 La méthode de résolution de Cramer	386
16-2 La méthode de résolution de Gauss	388
16-3 La règle du rang	390

16-4 Systèmes d'équations homogènes	394
16-5 Solutions de base	400
16-6 Applications économiques	403
16-6-1 Un modèle keynésien simple	403
16-6-2 Un modèle keynésien non-linéaire	405
16-6-3 Le modèle d'input-output de Léontieff	408
Exercices	412
Chapitre XVII Valeurs propres, vecteurs propres et formes quadratiques	417
17-1 Valeurs propres pour des matrices symétriques	418
17-2 Diagonalisation de matrices symétriques	425
17-3 Les formes quadratiques	429
17-4 Diagonalisation des formes quadratiques	431
17-5 Conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer la classe des formes quadratiques	435
Exercices	438
Chapitre XVIII Introduction aux ensembles convexes et aux espaces n-dimensionnels	443
18-1 Ensembles de points	444
18-2 Droites et hyperplans	448
18-2-1 Détermination d'un hyperplan	452
18-2-2 Division de l'espace E^n	453
18-3 Ensembles convexes	454
18-4 Ensembles convexes polyédriques	458
18-5 Hyperplan d'appui	461
18-6 Éléments sur les cônes convexes	467
18-7 Transformations linéaires de régions	472
Exercices	473
Bibliographie	477
Index	479