

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA



FACULTE DES SCIENCES DES TECHNOLOGIES

DEPARTEMENT DE MECANIQUE

# Mémoire de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme de Master en Génie Mécanique

Option : Optimisation des systèmes énergétiques

Thème :

**ÉVALUATION DU MODELE K-EPSILON, ET DE SES  
VARIANTES, DANS LE CADRE DE L'ETUDE DES PERTES  
DE CHARGE A TRAVERS UN ELARGISSEMENT  
BRUSQUE**

**Réalisé par:**

BEKHTI BRAHAM  
DJELLAB MADJID

**Encadreur :**

MR: K.GRINE

Année universitaire: 2015/2016

## ملخص:

من خلال هذا العمل كان هدفنا: أولاً القيام بدراسة شاملة لنموذج ك-إبسيلون (k-epsilon) ، ونقاط القوة و محدوديته .  
الثاني عمل مقارنة بين النهج التجريبية (تجريبي) والنهج الرقمي من خلال دراسة مشكلة التدفق لمائع داخل قناة اسطوانية الشكل مع وجود اتساع مفاجئ ، وحساب الحمولة (القدرة) الضائعة (الخطية و المفرد) التي تتبع هذه الحركة.

## Résumé :

Le présent travail a deux objectifs : en premier faire une étude exhaustive du model k-epsilon, ses atouts et ses limitations ; en deuxième faire un travail de comparaison entre l'approche empirique (expérimentale) et l'approche numérique au moyen de la résolution du problème de l'écoulement à travers un conduit cylindrique présentant un élargissement brusque et le calcul des pertes de charges (linéaires et singulières) qui s'en suivent.

## Abstract:

The present work has two objectives: first to make an exhaustive study of the k-epsilon model, its advantages and its limitations; Second, to compare the empirical (experimental) approach with the numerical approach by solving the problem of the flow through a cylindrical duct with a sudden widening and the calculation of the pressure losses (linear and Singular) that follow.

---

## Mots clés :

Turbulence ; modélisation, écoulement en conduit, pertes de charge linéaires, singulières .

## *Remerciements*

*Nous tenons tout d'abord à remercier infiniment notre dieu, le tout puissant, qui nous a donné le courage et la volonté pour la réalisation de ce modeste travail.*

*Nous tenons à remercier vivement notre encadreur, Mr :K. GRINE pour toutes son aides, sa disponibilité et sa patience, ainsi que pour ses conseils.*

*Nos sincères remerciements vont aussi à monsieur le président et messieurs les membres du jury pour avoir expertisé notre travail et nous avoir honorés par leurs présences.*

*Puis tous tous les enseignants du département Génie mécanique , et également à tous le personnels administratifs de département.*

*A la fin nous tenons à remercier tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion.*

# Sommaire

| TITRES  | PAGE |
|---|------|
| Résumé  |      |
| Remerciement  |      |
| Tables des figures  |      |
| Listes des tableaux   |      |
| Nomenclature  |      |
| Introduction  | 1    |
| <b>Chapitre I :</b> Écoulements en conduites ; pertes de charges            | 3    |
| I.1. Conservation de l'énergie Équation de Bernoulli                        | 3    |
| I.2 Régimes d'écoulement:(Nombre de Reynoldes)                              | 5    |
| I.3. Charge moyenne dans une section droite de conduite                     | 6    |
| I.3.1. Écoulement strictement permanent                                     | 8    |
| I.3.2 Écoulement permanent en moyenne                                       | 9    |
| I.4. Pertes de charge entre deux sections droites d'un écoulement laminaire | 12   |
| I.5. Pertes de charge en écoulement turbulent                               | 13   |
| I.6. Écoulement dans les singularités                                       | 17   |
| I.6. 1.Changements de section   | 17   |
| I.6.1.1 Élargissement brusque   | 17   |
| I.6.1.2 Rétrécissement brusque  | 19   |
| I.6.1.3 Entrée d'une conduite reliée à un réservoir de grandes dimensions   | 20   |
| I.6.1.4. Divergent  | 21   |
| I.6.1.5. pertes de charge dans un diaphragme                                | 22   |
| I.6.2. Changements de direction   | 22   |
| I.6.2.1 Coude arrondi   | 23   |
| I.6.2.2. Coude à angle vif  | 24   |
| I.7. Calcul de pertes de charges dans une conduite                          | 24   |
| I.7.1 Description du problème   | 24   |
| I.7.2 Calcul de pertes de charge  | 24   |
| I.7.2.1 Modèle semi-empirique   | 24   |
| I.7.2.1.1. écoulement laminaire   | 24   |
| I.7.2.1.2. écoulement turbulent   | 26   |
| I.7.2.1.3. Application numériques   | 26   |
| A. Parois lisse   | 27   |
| B. Parois rugueux   | 28   |

|  |    |
|--|----|
| <b>Chapitre II : La turbulence et modélisation</b>                                   | 29 |
| II.1. La turbulence  | 29 |
| II.1.2. Renseignements sur l'agitation turbulente                                    | 29 |
| II.2. Equation de Navier-Stokes  | 31 |
| II.2.1 Les deux types de transport de la quantité de mouvement                       | 32 |
| II.2.1 .1. Transport diffusif  | 32 |
| III.2.1 .2. Transport convectif  | 33 |
| II.2.2. Pourquoi l'équation est-elle si compliquée ?                                 | 34 |
| II.3. Trois approches numériques   | 34 |
| II.3.1 Simulation directe numérique (DNS)  | 35 |
| II.3.2 Simulation des grandes échelles (LES)   | 35 |
| II.3.3 Modélisation statistique de la turbulence (RANS)                              | 35 |
| II.3.3.1. Modèle de turbulence du premier ordre - Concept de la viscosité turbulente | 37 |
| II.3.3.2. Modèles de fermeture à deux équations de transport                         | 38 |
| II.3.3.2.1. Modèle de fermeture $k-\varepsilon$ standard                             | 39 |
| II.3.3.2.2. Modèle de fermeture $k-\varepsilon$ RNG                                  | 40 |
| II.3.3.2.3. - MODÈLE « $k-\varepsilon$ RÉALISABLE                                    | 42 |
| II.3.3.2.4 Equation finale   | 42 |
| II.4. Influence de la paroi  | 43 |
| II.4.1. Lois de paroi standard   | 45 |
| II.4.2. Lois de paroi non-équilibrée   | 46 |
| II.4.3 Lois de paroi « améliorées » (enhanced wall treatment)                        | 46 |
| <b>Chapitre III : Procédure de la simulation numérique</b>                           | 48 |
| III.1. Introduction  | 48 |
| III.2. Processus de simulation numérique   | 48 |
| III.3. Présentation de code de calcul fluent   | 49 |
| III.3.1. Architecture du logiciel  | 49 |
| III.3.2. Etapes de calcul  | 50 |
| III.3.2.1. Intégration des équations de transport                                    | 50 |
| III.3.2.2. La Discrétisation Spatiale  | 52 |
| III.3.2.3. Traitement de la Pression   | 52 |
| III.3.2.3.1. l'algorithme de simpler   | 52 |
| III.3.2.4. La sous relaxation  | 54 |
| III.3.2.5. Critères de convergence   | 55 |
| III.4. Choix des conditions aux limites  | 56 |
| III.5. Conclusion  | 56 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Chapitre IV : Résultats et discussions</b> | <b>57</b> |
| IV.1. Introduction                            | 57        |
| IV.2. Domaine d'étude                         | 57        |
| IV.2.1. Création de la géométrie              | 57        |
| IV.2.2. Génération du maillage                | 57        |
| IV.2.2.1. Près de la paroi                    | 58        |
| IV.2.2.2. Loin de la paroi                    | 59        |
| IV.3. Modèle de calcul                        | 59        |
| IV.3.1. Le schéma de discrétisation           | 60        |
| IV.3.2. Conditions aux limites                | 60        |
| IV.4. Convergence des calculs                 | 61        |
| IV.5. Etude de la sensibilité du maillage     | 61        |
| IV.6. Présentation des résultats              | 63        |
| IV.6.1. convergence du calcul                 | 64        |
| IV.6.2. Cas d'une paroi hydrauliquement lisse | 64        |
| a. k-epsilon standard                         | 65        |
| b. K-epsilon RNG                              | 66        |
| c. k-epsilon Realizable                       | 66        |
| IV.6.3. Cas d'une paroi rugueuse              | 68        |
| a. k-epsilon standard                         | 68        |
| b. k-epsilon RNG                              | 68        |
| IV.7. Conclusion                              | 69        |
| Conclusion générale                           | 70        |
| Référence                                     | 71        |

## Liste des figures

| Figure N°    | TITRE   | page      |
|--------------|---|-----------|
| Figure I.1   | cas générale d'un écoulement en conduite  | <b>03</b> |
| Figure I.2   | Expérience de Reynolds  | <b>05</b> |
| Figure I.3   | Résultat des expériences de Nikuradse   | <b>15</b> |
| Figure I.4   | Diagramme universel des pertes de charge : $\lambda = F(R_e, \frac{\epsilon}{D})$   | <b>16</b> |
| Figure I.5   | Écoulement d'un fluide dans l'élargissement brusque d'une canalisation. Évolution de la charge du fluide.                                       | <b>19</b> |
| Figure I.6   | Écoulement dans un rétrécissement brusque. Évolution de la charge du fluide   | <b>20</b> |
| Figure I.7   | Différentes configurations d'entrée de canalisation faisant suite à un réservoir. Évolutions de la ligne de charge et de la ligne piézométrique | <b>21</b> |
| Figure I.8   | Évolution de la ligne de charge et de la ligne piézométrique dans un divergent.   | <b>21</b> |
| Figure I.9   | diaphragme dans une conduite  | <b>22</b> |
| Figure I.10  | Écoulement dans un coude de conduite  | <b>23</b> |
| Figure I.11  | Géométrie du problème   | <b>24</b> |
| Figure II.1  | Spectres d'énergie et de dissipation  | <b>30</b> |
| Figure II.2  | Evolution d'un profil de vitesse initialement   | <b>33</b> |
| Figure II.3  | Traitement numérique de la région proche d'une paroi  | <b>43</b> |
| Figure III.1 | Processus de simulation numérique.  | <b>48</b> |
| Figure III.2 | Organigramme: Les différentes étapes effectuées par fluent  | <b>50</b> |
| Figure III.3 | Volume de contrôle dans un maillage tridimensionnel.  | <b>51</b> |
| Figure IV.1  | Géométrie du domaine de calcul en 2D.   | <b>57</b> |
| Figure IV.2  | Maillage couche limite près des parois.   | <b>59</b> |
| Figure IV.3  | Maillage M1.  | <b>62</b> |
| Figure IV.4  | Maillage M2.  | <b>62</b> |
| Figure IV.5  | Maillage M3.  | <b>63</b> |
| Figure IV.6  | Influence de la densité de maillage sur les profils de pression statique  | <b>63</b> |
| Figure IV.7  | Résidus obtenus durant la simulation.   | <b>64</b> |
| Figure IV.8  | La distribution de la pression statique le long de la conduite.   | <b>65</b> |
| Figure IV.9  | La distribution de la vitesse le long de la conduite.   | <b>65</b> |
| Figure IV.10 | pression totale le long de la conduite lisse k-epsilon standard paroi lisse.  | <b>66</b> |
| Figure IV.11 | Pression totale le long de la conduite lisse k-epsilon RNG - paroi lisse  | <b>66</b> |
| Figure IV.12 | Pression totale le long de la conduite lisse k-epsilon Réalisable paroi lisse   | <b>67</b> |
| Figure IV.13 | Evaluation de $y^+$ le long du mur pour le modèle $k - \epsilon$ et ces variantes.  | <b>68</b> |
| Figure IV.14 | la pression totale le long de la conduite rugueuse k-epsilon standard paroi rugueuse  | <b>69</b> |
| Figure IV.15 | Pression totale le long de la conduite rugueuse k-epsilon RNG; paroi rugueuse.  | <b>69</b> |

## Liste des tableaux

| <b>Tableau N°</b> | <b>Titre</b>  | <b>Page</b> |
|-------------------|---|-------------|
| Tableau II.1      | constantes du model k- $\epsilon$ standard          | 39          |
| Tableau II.2      | constantes du model k- $\epsilon$ RNG               | 42          |
| Tableau IV.1      | caractéristiques du domaine de calcul               | 57          |
| Tableau IV.2      | Model de calcul                                     | 60          |
| Tableau IV.3      | Schéma de discrétisation                            | 60          |
| Tableau IV.4      | Les valeurs des conditions à l'entrée et la sortie. | 60          |
| Tableau IV.5      | Caractéristiques des grilles testées                | 63          |

# Introduction

Les écoulements rencontrés dans l'industrie ou tout simplement au quotidien sont pour la plupart dominés par des mouvements chaotiques : la turbulence. Au-delà de la diffusion moléculaire, les échanges de masse, de quantité de mouvement et de chaleur sont ainsi essentiellement régis par ce mode d'écoulement. L'impact de la turbulence pouvant être positif ou négatif, l'ingénieur doit donc être capable de prédire ces effets lors de la conception de systèmes. Malheureusement, le mouvement turbulent est très complexe et présente la plupart du temps des caractéristiques tridimensionnelles et instables difficiles à appréhender.

Les équations qui gouvernent le mouvement instantané des fluides, qu'ils soient turbulents ou non, ont été écrites par Claude Navier en 1823. Elles sont appelées équations de Navier-Stokes en raison des perfectionnements apportées ultérieurement par George Stokes. On connaît le terme non-linéaire mais la non-unicité des solutions ne donne aucun espoir de tentative de recherche de solutions analytiques dans des cas réels. Avant les années 1950, la turbulence était un sujet obscur. La seule issue pour l'ingénieur était d'"expérimenter" sur des modèles physiques afin d'améliorer son savoir-faire. Après les années 1960, la situation allait se débloquer avec quelques progrès accomplis en matière de modélisation, en même temps que la capacité des traitements numériques augmentait fortement.

Dans le domaine de l'écoulement turbulent en conduite sous pression trois catégories de problèmes sont rencontrés : le calcul du débit volumique, le calcul du diamètre de la conduite et le calcul des pertes de charge (pertes de pression).

D'une façon générale, l'origine des pertes de pression, lors du mouvement d'un fluide, se trouve dans le processus de transformation irréversible de l'énergie mécanique en chaleur.

Cette transformation d'énergie est due à la viscosité moléculaire et turbulente du fluide en mouvement.

Les pertes de pression singulières se produisent quand il y a perturbation de l'écoulement normal, décollement des parois et formation de tourbillons aux endroits où il y a changement de section, de direction de la conduite, ou présence d'obstacles (par exemple élargissement, rétrécissement, courbure et branchement, écoulement à travers les ouvertures, les dispositifs d'obturation ou d'étranglement, entrée dans une conduite, sortie dans un grand volume, etc.. ).

Dans les calculs courants, on représente globalement cet effet à l'aide d'un coefficient de pertes de pression sans dimension.

Aujourd'hui, des techniques de calcul rigoureux comme La **mécanique des fluides numérique** (MFN), plus souvent désignées par le terme anglais **Computational Fluid Dynamics (CFD)**, offrent la possibilité de prédire avec une assez bonne précision les caractéristiques recherchées. La technique consiste à résoudre les équations fondamentales de la mécanique des fluides. La CFD est en mesure de caractériser parfaitement le système de cet ensemble. Concernant les travaux numériques, les codes de simulation numérique deviennent un outil indispensable pour la validation des résultats expérimentaux.

Le code FLUENT est devenu l'un des outils le plus utilisé pour la simulation de tous les phénomènes dans le domaine de mécanique de fluides tant pour l'industrie que pour la recherche.

Le présent travail a deux objectifs : en premier faire une étude exhaustive du model k-epsilon, ses atouts et ses limitations ; en deuxième faire un travail de comparaison entre l'approche empirique (expérimentale) et l'approche numérique au moyen de la résolution du problème de l'écoulement à travers un conduit cylindrique présentant un élargissement brusque et le calcul des pertes de charges (linéaires et singulières) qui s'en suivent.

Dans le premier chapitre, on traitera tout d'abord l'écoulement d'un fluide dans les conduites cylindriques, en présentant les relations et les formules empiriques pour calculer les pertes des charges linéaires et en présence de singularités ; et par suite une résolution du cas de l'élargissement brusque.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la turbulence et à l'une des approches pour la résolution du problème de la turbulence qu'est l'approche statistique à travers les modèles dits de turbulence.

Dans le troisième chapitre nous exposons les différentes étapes du code de calcul numérique (Fluent 6) de mécanique des fluides pour simuler l'écoulement à travers un élargissement brusque et le calcul de perte de charge.

Le quatrième chapitre, est consacré à la présentation des étapes de calculs de l'exemple de l'élargissement brusque et une discussion des principaux résultats numériques, avec une comparaison avec ceux obtenus avec les formules semi-empiriques.

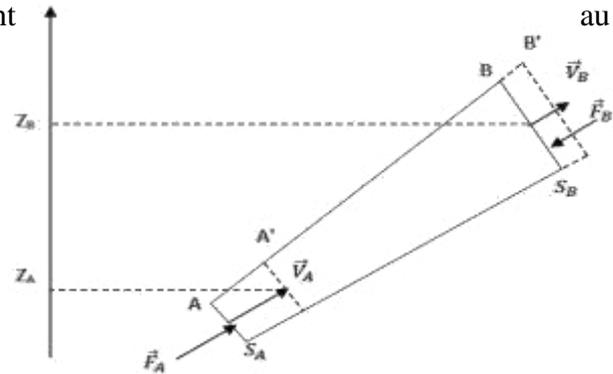
Enfin, en conclusion une synthèse de l'étude est réalisée.

## I. Écoulements en conduites ; pertes de charges :

### I.1. Conservation de l'énergie Équation de Bernoulli

Lorsqu'un fluide se déplace à l'intérieur d'un tuyau de section et d'altitude variable, la pression varie d'un point à un autre de tuyau. Le physicien suisse Daniel Bernoulli (1700-1782) formula une expression fondamentale qui établit un lien entre la pression, la vitesse et l'altitude d'un fluide. C'est une conséquence de la conservation de l'énergie appliquée au cas d'un fluide parfait.

Considérons l'écoulement permanent au cours de l'intervalle  $\Delta t$  :



On a:

$$AA' = \Delta X_A = V_A \Delta t$$

Figure (I.1) : cas générale d'un écoulement en conduite

- Conservation de la masse (ou débit) ou équation de continuité :

$$S_A V_A = S_B V_B = cte$$

- Écrivons que la variation de l'énergie cinétique du fluide est égale au travail des forces appliquées sur la portion de tube de courant.

\* Calcul de la variation de l'énergie cinétique  $E_c$ :

$$\Delta E_c = E_c (\hat{A}\hat{B}) - E_c (AB)$$

$$\Delta E_c = [E_c (\hat{A}\hat{B}) + E_c (B\hat{B})] - [E_c (\hat{A}\hat{A}) + E_c (\hat{A}B)]$$

$$\Delta E_c = E_c (B\hat{B}) - E_c (A\hat{A})$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m(B\hat{B}) V_B^2 - \frac{1}{2} m(A\hat{A}) V_A^2$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho S_B \Delta X_B V_B^2 - \frac{1}{2} \rho S_A \Delta X_A V_A^2$$

Comme  $\Delta x = V \Delta t$ , On peut écrire:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho S_B \Delta t V_B V_B^2 - \frac{1}{2} \rho S_A \Delta t V_A V_A^2$$

**\* Calcul de travail de la force de pression**

Le travail des forces de pression le long de la paroi latérale est nulles (F perpendiculaires au déplacement). En A et B les forces sont perpendiculaire au section  $S_A$  et  $S_B$  et dirigé vers l'intérieur de tube de courant, le travail est moteur en A et résistant en B :

$$W_{pr} = P_A S_A \Delta X_A - P_B S_B \Delta X_B$$

$$W_{pr} = P_A S_A \Delta t V_A - P_B S_B \Delta t V_B$$

**\* Calcul de travail de la force de pesanteur**

Cette force est dérive d'un potentiel de poids:

$$W_g = E_p (initiale) - E_p (finale)$$

$$W_g = E_p (AB) - E_p (\hat{A}\hat{B})$$

$$W_g = [E_p (A\hat{A}) + E_p (\hat{A}B)] - [E_p (A\hat{B}) + E_p (B\hat{B})]$$

$$W_g = E_p (A\hat{A}) - E_p (B\hat{B})$$

$$W_g = \rho S_A V_A \Delta t g Z_A - \rho S_B V_B \Delta t g Z_B$$

On applique maintenant le théorème de l'énergie cinétique:

$$\Delta E_c = W_{pr} + W_g$$

On trouve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho S_B \Delta t V_B V_B^2 - \frac{1}{2} \rho S_A \Delta t V_A V_A^2 \\ = P_A S_A \Delta t V_A - P_B S_B \Delta t V_B + \rho S_A V_A \Delta t g Z_A - \rho S_B V_B \Delta t g Z_B \end{aligned}$$

On a :

$$S_A V_A = S_B V_B = cte$$

alors tout les termes  $SV$  vas s'éliminer:

$$\frac{1}{2} \rho V_B^2 - \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_A - P_B + \rho g Z_A - \rho g Z_B$$

c'est-à-dire:

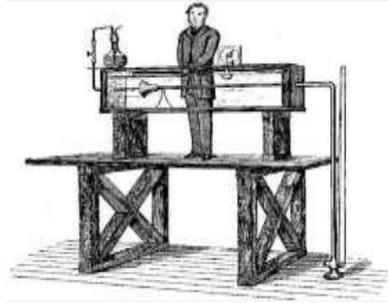
$$P_B + \rho g Z_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2 = P_A + \rho g Z_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = cte$$

On obtient finalement l'équation de Bernoulli: (pertes de charges négligées, pas d'échange d'énergie).

$$P + \rho g Z + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte \quad (I.1)$$

## I.2- Régimes d'écoulement:(Nombre de Reynolds)

Comment caractériser le régime d'un écoulement ?  $\Rightarrow$  C'est le résultat des travaux d'O. Reynolds (1883)



O. Reynolds (1883)

Il s'agissait d'une étude systématique du régime d'écoulement en fonction des différents paramètres:  $Q$ ,  $\mu$ , géométrie de la conduite...etc

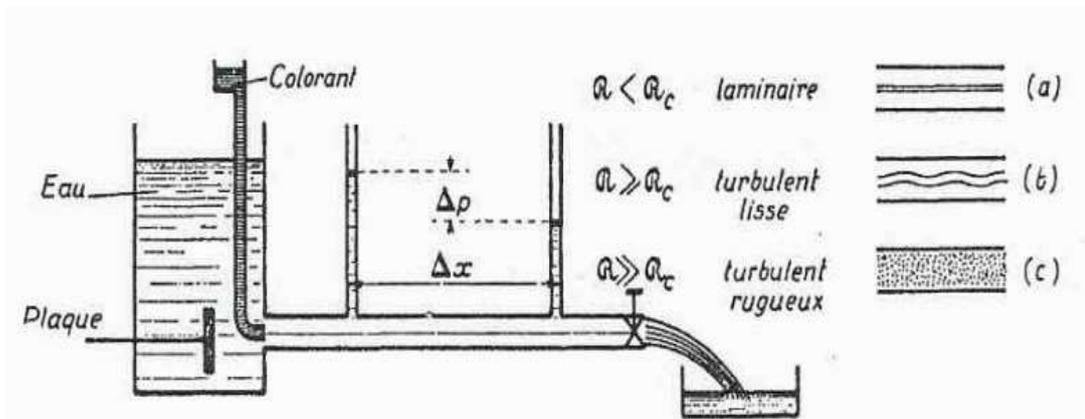


Fig I.2 :Expérience de Reynolds

- a) Aux faibles vitesses, le filet coloré conserve son individualité jusqu'à l'extrémité (Fig :I.2.a). La perte de pression  $\Delta P$  est faible  $\Rightarrow$  **le régime est dit laminaire** .
- b) A partir d'une certaine vitesse de l'écoulement, le filet fluide commence à onduler un certain temps (fig :I.2.b) avant de se mélanger au reste du fluide. En même temps, on constate une augmentation brutale de  $\Delta P$  et une diminution de l'amplitude du jet à la sortie, ce qui traduit une discontinuité dans l'évolution de l'écoulement.  $\Rightarrow$  **le régime est dit turbulent lisse**
- c) Si on augmente encore le débit, les tourbillons augmentent d'amplitude et le filet coloré se mélange à l'écoulement presque aussitôt après son introduction (fig :I.2.c)  $\Rightarrow$  **Le régime est dit turbulent-rugueux.**

Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un **nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds** (qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses) et donné par :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (I.2)$$

La valeur du nombre de Reynolds de l'écoulement pour lequel le régime devient turbulent est appelé nombre de Reynolds critique et désigné par  $R_c$  .

La valeur de  $R_c$  dépend beaucoup des précautions prises à l'établissement de l'écoulement. Si par exemple, le liquide est au repos depuis quelques jours dans le récipient et si la vanne est ouverte très progressivement, on pourra atteindre  $R_c=20\ 000$

Au contraire, dans le cas plus défavorable, si le récipient est en cours de remplissage et si la plaque est ramenée au voisinage de l'orifice du tuyau pour essayer de perturber l'écoulement au maximum, on aura environ  $R_c =2000$ .

C'est en générale, cette dernière valeur qui est choisie comme critère :

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Si $Re < 2000$        | le régime est LAMINAIRE                          |
| Si $2000 < Re < 3000$ | le régime transitoire (Turbulence intermittente) |
| Si $Re > 3000$        | le régime est TURBULENT                          |

### I.3. Charge moyenne dans une section droite de conduite :

La charge d'un fluide en un point d'une ligne de courant est définie comme la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles de pression et de position de l'unité de poids du fluide. Ainsi, en un point A d'un écoulement, la charge C est définie par (équation (I.3)) :

$$C_A = \frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\varpi} + z_A \quad (\text{I.3})$$

Avec :

|                   |                                 |
|-------------------|---------------------------------|
| v                 | la vitesse,                     |
| P                 | la pression,                    |
| z                 | l'altitude,                     |
| $\varpi = \rho g$ | le poids volumique,             |
| $\rho$            | la masse volumique,             |
| g                 | l'accélération de la pesanteur. |

Entre le point A et un point B situé en aval sur la même ligne de courant que A, on peut écrire, pour un fluide pesant incompressible en régime permanent, l'équation de Bernoulli avec perte de charge, équation (I.1) devienne :

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A^*}{\varpi} = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{P_B^*}{\varpi} + J_{AB} \quad (\text{I.4})$$

avec :  $J_{AB}$  la perte de charge (toujours positive) entre A et B,

$P^*/\varpi = P/\varpi + z$ , la hauteur piézométrique.

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait, la conduite étant rectiligne  $P^*/\varpi = cte$  et la vitesse étant constante d'un point à l'autre de la section droite, la charge du fluide est la même en tout point d'une même section droite et il n'est alors plus besoin de faire

de distinction entre les diverses lignes de courant. En revanche, dans le cas d'un fluide réel, bien que  $P^*$  reste toujours constant sur une section droite (lignes de courant rectilignes au moins en moyenne pour l'écoulement turbulent), la vitesse  $V$  étant variable, la charge dépend du point considéré ou, ce qui revient au même, de la ligne de courant sur laquelle se situe le point. On est alors conduit, pour ne pas avoir à faire une étude locale, à définir une charge moyenne du fluide dans la section droite considérée[1].

Par définition, la charge moyenne du fluide dans une section droite est égale au rapport entre la puissance mécanique du fluide s'écoulant à travers la section droite  $W$  ou puissance de l'écoulement (ou, ce qui est équivalent, le flux de son énergie mécanique volumique à travers la section droite  $S$ ) et son débit pondéral  $\varpi \dot{V}$  :[1]

$$C_m = \frac{W}{\varpi \dot{V}} = \frac{\int \left( \rho \frac{V^2}{2} + P + \varpi z \right) V dS}{\int \varpi V dS} \quad (I.5)$$

Avec :  $V$  la vitesse normale à la section droite

Cette notion de charge moyenne est liée au théorème de Bernoulli généralisé (valable pour un écoulement permanent) dans lequel interviennent la puissance du fluide et la perte de puissance mécanique (à  $\varpi$  près)  $\dot{\mathcal{P}}_{12}$ , due à la viscosité, dans un volume compris entre deux sections droites d'un tube de courant :

$$\int_{S_1} \left( \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\varpi} + z_1 \right) V_1 dS_1 = \int_{S_2} \left( \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\varpi} + z_2 \right) V_2 dS_2 - \frac{\dot{W}_t}{\varpi} + \dot{\mathcal{P}}_{12} \quad (I.6)$$

où  $W_t$  est la puissance mécanique, dite puissance technique, échangée entre le fluide et les éléments mobiles d'une machine qui peuvent éventuellement se trouver sur le parcours du fluide.

En utilisant la notion de puissance du fluide à travers une section droite  $W$ , l'équation (I.6) peut encore s'écrire :

$$\frac{\dot{W}_1}{\varpi} = \frac{\dot{W}_2}{\varpi} = \frac{\dot{W}_t}{\varpi} + \dot{\mathcal{P}}_{12} \quad (I.7)$$

Grâce à cette notion, il sera possible d'écrire, entre deux sections droites  $S_1$  et  $S_2$ , c'est-à-dire de manière globale, une équation analogue à celle de Bernoulli entre deux points d'une même ligne de courant.

### I.3.1. Écoulement strictement permanent

Un écoulement ne peut être strictement permanent que lorsqu'il est laminaire. On peut alors appliquer simplement la définition de  $C_m$ . Le flux d'énergie mécanique volumique du fluide à travers la section, ou puissance mécanique de l'écoulement, est :

$$\dot{W} = \int_S \left( \rho \frac{V^2}{2} + P^* \right) V dS = P^* \dot{V} + \frac{\varpi}{2g} \int_S V^3 dS$$

Alors :

$$C_m = \frac{P^*}{\varpi} + \frac{1}{2g\dot{V}} \int_S V^3 dS \quad (\text{I.8})$$

Comme il n'est pas toujours possible de déterminer de manière simple l'expression théorique de la vitesse en fonction de la position du point sur la section, on modifie cette expression en faisant intervenir des grandeurs que l'on peut atteindre plus facilement de façon expérimentale : la vitesse capable du débit  $V_d$  et un coefficient  $k$  variable tel que :

$$V = K \bar{V}_d \quad (\text{I.9})$$

Afin de simplifier la notation de la vitesse moyenne capable du débit, on notera dans la suite cette vitesse moyenne par  $U \equiv \bar{V}_d$ . Dans ces conditions, la charge moyenne devient :

$$C_m = \frac{P^*}{\varpi} + \frac{U^2}{2g\dot{V}} \int_S K^3 dS$$

En notant que, par définition,  $\dot{V} = US$ , on obtient :

$$C_m = \frac{P^* U^2}{\varpi 2g} \frac{1}{S} \int_S K^3 dS \quad (\text{I.10})$$

Soit :

$$C_m = \frac{P^*}{\varpi} + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (\text{I.11})$$

Si on pose

$$\alpha = \frac{1}{S} \int K^3 dS = \frac{1}{SU^3} \int V^3 dS \quad (\text{I.12})$$

Ainsi, la charge moyenne a une forme analogue à celle de la charge en un point en remplaçant  $v$  par  $U$ , qui est déterminée très simplement par une mesure du débit et la connaissance de la section  $S$ , et en multipliant le terme énergie cinétique par le coefficient  $\alpha$ , appelé **coefficient d'énergie cinétique**.

Dans la plupart des écoulements, et si on veut éviter une détermination plus ou moins complexe par les équations locales de bilans,  $\alpha$  ne peut être atteint qu'expérimentalement. Cependant, dans certains cas particuliers comme par

exemple l'écoulement de Poiseuille, le coefficient d'énergie cinétique peut être déterminé théoriquement sans difficultés. Dans ce cas, on a :

$$U = \frac{\varpi j R^2}{8 \mu}$$

Et :

$$V = \frac{\varpi j}{4 \mu} (R^2 - r^2)$$

Avec :  $j$  la perte de charge par unité de longueur,  
 $R$  le rayon de la canalisation,  
 $r$  la distance du point considéré à l'axe de la canalisation,  
 $\mu$  la viscosité dynamique du fluide.

On a alors :  $K = \frac{V}{U} = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$

Comme :  $dS = 2\pi r dr$

et :  $S = 2\pi R^2$

$$\alpha = \frac{16}{R^2} \int_0^R \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^3 r dr$$

soit :  $\alpha = 2$

Ainsi, pour un écoulement de Poiseuille, la charge moyenne est donnée par la relation :

$$C_m = \frac{U^2}{g} + \frac{P^*}{\varpi} \tag{I.13}$$

### I.3.2 Écoulement permanent en moyenne

Les écoulements turbulents ne sont jamais permanents du fait des fluctuations des divers paramètres qui les caractérisent. Cependant, dans certains cas, assez fréquents en pratique, la composante moyenne de ces paramètres peut être constante dans le temps. On a alors affaire à des écoulements permanents en moyenne ou pseudo-permanents. Dans de tels écoulements, le débit instantané est :

$$\dot{V} = \int v dS$$

$v$  : étant la projection de la vitesse instantanée  $v$  sur la normale à la section droite.  $v$  est donné, selon la décomposition de Reynolds par :

$$v = \bar{v} + \hat{v}$$

où  $\bar{v}$  est la valeur moyenne de la vitesse normale en un point, et  $\hat{v}$  sa fluctuation.

Ainsi, la vitesse étant variable, en toute rigueur, le débit doit également subir des fluctuations temporelles autour d'une valeur moyenne telle que :

$$\bar{\dot{V}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{V} dt = \int \left( \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v dt \right) dS = \int \left( \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{v} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \hat{v} dt \right) dS$$

Comme par convention :

$$\bar{V} = cte$$

Et :

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{V} dt = 0$$

Ce débit moyen est effectivement celui qui est atteint lors des mesures classiques de débit. La vitesse capable du débit  $U$  est alors définie à partir de ce débit moyen :

$$U = \frac{\bar{V}}{S} \quad (I.14)$$

De même :

$$\bar{C}_m = \frac{\bar{W}}{\varpi \bar{V}} \quad (I.15)$$

Où  $\bar{W}$  est la puissance mécanique moyenne de l'écoulement à travers une section droite :

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{W} dt = \int_S \frac{1}{T} \left[ \int_t^{t+T} \left( \rho \frac{V^2}{2} + P^* \right) V dt \right] dS$$

Avec :

$$P^* = \bar{P}^* + \dot{P}^*$$

$$V = \bar{V} + \dot{V}$$

$$V^2 = \bar{V}^2 + 2\bar{V}\dot{V} + \dot{V}^2$$

Dans les expressions ci-dessus, il conviendrait en fait de faire une différence entre les valeurs des termes de fluctuation de la vitesse pour la vitesse intervenant dans l'énergie cinétique et pour la projection de la vitesse sur la normale à la section droite. Dans le premier cas, le terme de fluctuation est de direction quelconque alors qu'il est axial dans le deuxième cas. Nous négligerons cette différence. Ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \int \frac{1}{T} \left[ \int_t^{t+T} (\bar{P}^* + \dot{P}^*)(\bar{V} + \dot{V}) dt + \frac{\rho}{2} \int (\bar{V}^2 + 2\bar{V}\dot{V} + \dot{V}^2)(\bar{V} + \dot{V}) dt \right] dS \\ &= \int \frac{1}{T} \left[ \int_t^{t+T} \bar{P}^* \bar{V} dt + \int_t^{t+T} \bar{V} P^* dt + \int_t^{t+T} \bar{P} \dot{V} dt + \int_t^{t+T} P^* \dot{V} dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho}{2} \left( \int \bar{V}^3 dt + \int \bar{V} \dot{V}^2 dt + \int \dot{V}^3 dt + 2 \int \bar{V}^2 \dot{V} dt + 2 \int \bar{V} \dot{V}^2 dt \right) \right] dS \\ &= \int \left[ \bar{P}^* \bar{V} + \overline{\bar{P}^* \dot{V}} + \rho \frac{\bar{V}^3}{2} + \rho \frac{\bar{V}^2 \overline{\dot{V}^2}}{2} + \rho \frac{\overline{\dot{V}^3}}{2} + \rho \overline{\bar{V} \dot{V}^2} \right] dS \\ \bar{W} &= \int \left( \bar{P}^* + \rho \frac{\bar{V}^2}{2} \right) \bar{V} dS + \int \left[ \left( \frac{3}{2} \rho \overline{\dot{V}^2} \right) \bar{V} + \overline{P^* \dot{V}} + \rho \frac{\overline{\dot{V}^3}}{2} \right] dS \quad (I.16) \end{aligned}$$

Dans cette équation, le premier terme, noté  $\bar{W}_m$ , représente la puissance due aux termes de l'écoulement pris en moyenne. La puissance supplémentaire  $\bar{W}_{tu}$  provient de la turbulence de l'écoulement.  $\bar{W}_m$  ayant une forme analogue à celle de  $\bar{W}$  dans le

cas d'un écoulement strictement permanent, les résultats de ce cas s'appliquent ici, et en particulier, on peut écrire :

$$\overline{W}_m = \left( \alpha_r \frac{U^2}{2g} + \frac{\overline{P^*}}{\varpi} \right) \omega \overline{V} \quad (\text{I.17})$$

où U est définie par l'équation (I.14) et  $\alpha_r$ , qui ne dépend que de la répartition des vitesses moyennes  $\overline{V}$  dans la section, par :

$$\alpha_r = \frac{1}{S} \int K^3 dS \quad \text{avec} \quad K = \frac{\overline{V}}{U} \quad (\text{I.18})$$

L'expression de  $\overline{W}_{tu}$ , deuxième terme de l'équation (I.16), est moins évidente que celle de  $\overline{W}_m$ . Alors, par analogie, on pose :

$$\overline{W}_{tu} = \left( \alpha_f \frac{U^2}{2g} \right) \varpi \overline{V} \quad (\text{I.19})$$

Où  $\alpha_f$  est un coefficient sans dimension qui dépend de la valeur des fluctuations et qui ne s'annule qu'avec elles (cas de l'écoulement laminaire). On a :

$$\alpha_f = \frac{S^2}{\overline{V}^3} \int \left[ 3 \overline{V}^2 \overline{V} + 2 \frac{\overline{P^*} \overline{V}}{\rho} + \overline{V}^3 \right] dS \quad (\text{I.20})$$

En définitive, compte tenu de la définition de la charge moyenne d'un écoulement turbulent (I.15) et des équations (I.17) et (I.19), on a :

$$\overline{C}_m = \alpha \frac{U^2}{2g} + \frac{\overline{P^*}}{\varpi} \quad (\text{I.21})$$

Expression qui est analogue à (I.11) et dans laquelle le coefficient d'énergie cinétique  $\alpha$  est la somme de deux autres coefficients  $\alpha_r$  et  $\alpha_f$ :

$$\alpha = \alpha_r + \alpha_f$$

Avec  $\alpha_r$  qui dépend de la répartition des vitesses moyennes dans la section,  $\alpha_f$  qui dépend des fluctuations de la vitesse et de la pression.

En général, la détermination théorique de  $\alpha$  est très délicate. On utilise alors pour obtenir sa valeur des méthodes semi-empiriques.

$\alpha$  est toujours supérieur ou égal à 1. Il vaut rigoureusement 2 dans le cas d'un écoulement de Poiseuille (où  $\alpha_f = 0$ ) et est de l'ordre de 1,1 dans le cas des écoulements turbulents rencontrés en pratique.

#### I.4. Pertes de charge entre deux sections droites d'un écoulement laminaire :

Dans l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite cylindrique à base circulaire. quelle que soit la section considérée, on a :

$$U = \text{cte}$$

Comme  $\alpha$  reste le même dans toutes les sections ( $\alpha = 2$ ), l'équation de Bernoulli applicable entre deux sections droites de conduite, devient :

$$\frac{P_1^* - P_2^*}{\varpi} = J_{12} = -\frac{\Delta P_{12}^*}{\varpi} \quad (\text{I.22})$$

Dans l'écoulement de Poiseuille :

$$\Delta P_{12}^* = -a l \quad (\text{I.23})$$

Avec  $l$  la distance séparant les sections 1 et 2,

$$a = \frac{8\mu}{R^2} U \quad (\text{I.24})$$

Ainsi :

$$J_{12} = \frac{8\nu l}{gR^2} U \quad (\text{I.25})$$

La perte de charge par unité de longueur  $J$  est :

$$J = \frac{J_{12}}{l} = \frac{8\nu}{gR^2} U = KU \quad (\text{I.26})$$

La perte de charge par unité de longueur dans un écoulement de Poiseuille est proportionnelle à la vitesse capable du débit.

la **perte de charge linéique** peut s'écrire sous la forme :

$$J = \frac{\lambda U^2}{D 2g} \quad (\text{I.27})$$

C'est la formule de **Darcy-Weisbach** (écoulement laminaire ou turbulent dans une conduite)

Avec :  $D$  le diamètre de la canalisation,

$\lambda$  un coefficient dit coefficient de pertes de charge. Sous cette forme, l'équation (I.26) s'écrit :

$$J = \frac{64\nu U^2}{UD^2 2g}$$

Ce qui, compte tenu du nombre de Reynolds de cet écoulement défini par :

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

S'écrit :

$$J = \frac{64}{Re} \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (\text{I.28})$$

Cette relation montre que, dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, le coefficient de pertes de charge  $\lambda$  est égal à  $64/Re$ .

## I.5. Pertes de charge en écoulement turbulent :

Nous avons déjà signalé que, du fait de sa complexité, l'écoulement turbulent ne se prête à aucune théorie simple. Cette remarque est valable ici encore et les formules de pertes de charge retenues pour le cas des écoulements turbulents sont empiriques ou semi-empiriques. Les expériences qui ont conduit aux premières de ces relations sont extrêmement nombreuses. Les résultats sont à utiliser avec une grande circonspection car ils ne sont valables très souvent que dans des cas très particuliers. Les relations semi-empiriques sont plus crédibles et souvent plus générales.

En écoulement en conduite, les pertes de charge ou la variation de pression piézométrique  $P^*$  pour une conduite est fonction (en fluide incompressible) :

- de la nature du fluide, c'est-à-dire de sa masse volumique  $\rho$ , de sa viscosité  $\mu$  ;
- de la vitesse du fluide  $U$  ou de son débit ;
- du diamètre de la canalisation  $D$  ou de son diamètre hydraulique  $D_H$  ;
- de la longueur de la canalisation ;
- enfin de la rugosité de la canalisation ou de la hauteur  $\varepsilon$  des aspérités.

L'application est faite ici au cas d'une canalisation cylindrique à base circulaire. Par ailleurs, on considère qu'il y a deux échelles géométriques dans l'étude implicite d'écoulements semblables : l'une pour la dimension générale de la conduite (diamètre  $D$ , longueur), l'autre pour la hauteur  $\varepsilon$  des aspérités. On peut alors écrire, pour deux sections distantes de la longueur :

$$\Delta P^* = F(\rho, \mu, D, l, \varepsilon)$$

Soit:

$$\Delta P^* = \rho U^2 F(R_e, \frac{l}{D}, \frac{\varepsilon}{D}) \quad (\text{I.29})$$

On peut écrire l'expression des pertes de charge moyennes entre les sections 1 et 2 :

$$J_{12} = \frac{\Delta P^*}{\varpi} = \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} F(R_e, \frac{\varepsilon}{D}) \quad (\text{I.30})$$

Pour des conduites réputées lisses  $\frac{\varepsilon}{D} = 0$ , la fonction  $F$  ne dépend plus que du nombre de Reynolds. On a alors :

$$J_{12} = \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} F(R_e) \quad (\text{I.31})$$

La fonction  $F(R_e)$ , souvent notée  $\lambda$ , est appelée **coefficient de pertes de charge**. On retrouve alors la formulation des pertes de charge :

$$J_{12} = \lambda \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (\text{I.32})$$

C'est la formule fondamentale des pertes de charge dites **régulières**.

Le problème pratique revient alors à déterminer la fonction  $\lambda = F(R, \frac{\varepsilon}{D})$ . Plusieurs auteurs ont proposé des relations. Citons, par exemple, les expressions suivantes :

- **Expression de Blasius** : valable pour  $2000 < Re < 10^5$  et des conduites lisses :

$$\frac{\varepsilon}{D} < 10^{-3}$$

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad (I.33)$$

- **Expression de Kármán et Prandtl** :

- Pour  $Re > 10^5$  et  $\frac{\varepsilon}{D} < 10^{-3}$

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0.8 = -2 \log \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \quad (I.34)$$

Cette relation, dans laquelle la rugosité n'intervient pas, est valable pour les écoulements dits hydrauliquement lisses (conduites lisses) ;

- Pour  $Re > 10^5$  et  $\frac{\varepsilon}{D} > 10^{-3}$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{D}{\varepsilon} + 1.14 = -2 \log \frac{\varepsilon}{3.71 D} \quad (I.35)$$

Cette relation, dans laquelle le nombre de Reynolds n'intervient pas, est applicable aux écoulements dits hydrauliquement rugueux.

- **Expression de Colebrook** :

Elle correspond à une association des deux équations précédentes :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left[ \frac{\varepsilon}{3.71 D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right] \quad (I.36)$$

On considère souvent cette relation comme l'équation **universelle des écoulements turbulents**.

- **Formule Nikuradse** a étudié expérimentalement et de façon systématique la variation de  $\lambda$  avec le nombre de Reynolds, pour différentes valeurs de la rugosité relatif  $\frac{\varepsilon}{D}$  (la rugosité des canalisations était réalisée artificiellement par collage de grains de sable de taille calibrée). Les résultats de ses expériences sont représentés sur la figure (I.3). On y distingue cinq domaines différents. Dans les domaines I, II et III, la rugosité de la canalisation n'intervient pas. On dit que la conduite est hydrauliquement lisse. Ailleurs, les courbes  $\lambda = F(Re, \varepsilon/D)$  dépendent essentiellement de la rugosité  $\frac{\varepsilon}{D}$ , la conduite est dite hydrauliquement rugueuse (la rugosité réelle se fait effectivement sentir du point de vue hydraulique).

La région ( I ) caractérise l'écoulement laminaire (donc de Poiseuille) car  $Re$  est inférieur à 2000 environ. Dans cette région, l'expérience montre que :

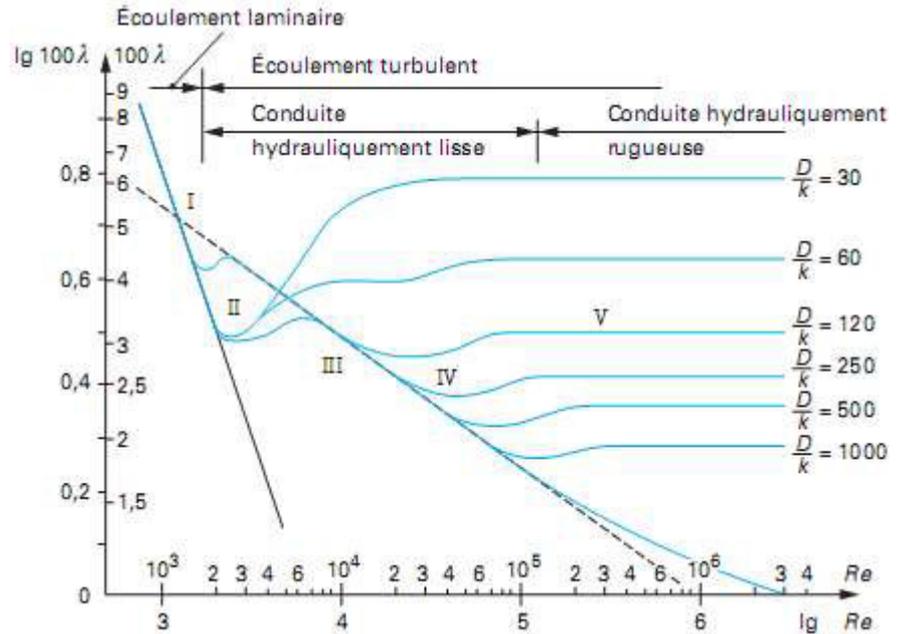
$$\log \lambda = a \log Re + b$$

Soit :

$$\lambda = c R_e^a$$

On retrouve ainsi expérimentalement le résultat théorique pour lequel nous savons que :  $c = 64$  et  $a = -1$

**Figure I.3** – Résultat des expériences de Nikuradse



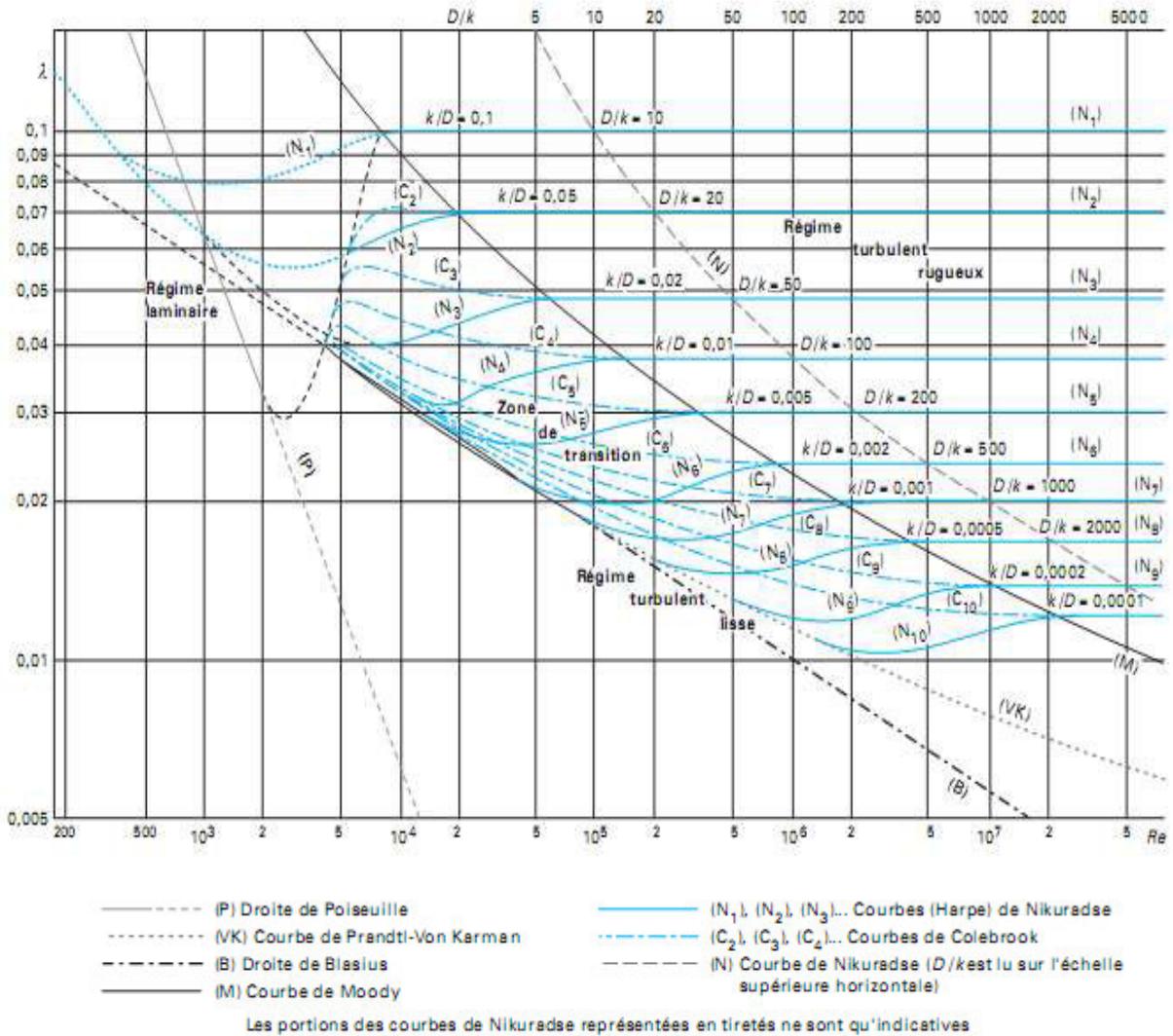
La région II est une zone de transition relativement peu étendue (le nombre de Reynolds varie de 2 000 à 7 000 environ) sans caractéristiques particulières.

La région III, qui s'étend jusqu'à un nombre de Reynolds de  $10^5$  environ pour les conduites à faible rugosité, présente encore une variation linéaire de  $\log \lambda$  en fonction de  $\log Re$ . Son expression correspond à la relation de Blasius (I.33). Au-delà de  $10^5$ , si la rugosité est extrêmement faible, la fonction s'écarte de la linéarité. La formule de Blasius doit être remplacée par la relation de Kármán et Prandtl (I.34).

Dans la région V,  $\lambda$  n'est plus fonction du nombre de Reynolds, mais uniquement de la rugosité. Pour cette zone, Kármán et Prandtl proposent la formule (I.35).

La région IV est une région de transition où les résultats de Colebrook, établis pour des conduites à rugosités irrégulières, diffèrent de ceux de Nikuradse.

L'ensemble des résultats précédents a fait l'objet d'une représentation graphique dite « diagramme universel des pertes de charge » (figure :I.4). On y retrouve les résultats de Nikuradse et les formulations de Poiseuille, de Blasius, de Prandtl- Kármán et de Colebrook. Dans la zone de transition, il est recommandé d'utiliser plutôt les résultats de Colebrook que ceux de Nikuradse. L'application de la formule de Colebrook semble représenter plus fidèlement l'écoulement réel car la rugosité des expériences de Nikuradse était une rugosité artificielle.



**Figure (I.4) :-** Diagramme universel des pertes de charge :  $\lambda = F(Re, \frac{\epsilon}{D})$

## I.6. Écoulement dans les singularités

Si entre 1 et 2 la conduite comporte des singularités (changements de section, changements de direction, vanne, etc.), dans l'expression de  $J_{12}$ , il faudra ajouter des pertes de charge propres à ces singularités. Ce sont les expressions relatives à ces pertes de charge, dites pertes de charge singulières.

Par analogie avec les pertes de charge régulières ou linéaires, les pertes de charge singulières sont toujours mises sous la forme :

$$J_S = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (\text{I.37})$$

où  $\lambda$  est appelé coefficient de perte de charge de la singularité.

### I.6. 1.Changements de section

#### I.6.1.1 Élargissement brusque[1]

L'élargissement brusque dans une canalisation est représenté sur la figure (I.5).

La perte de charge singulière d'un élargissement brusque est due à la transformation en chaleur d'une partie de l'énergie par les chocs et les tourbillons qui sont produits par l'éclatement de la veine fluide à l'aval de AA'. En effet, on constate, entre AA' et CC', une zone tourbillonnaire extérieure à la veine d'écoulement que l'on appelle zone de fluide mort. Il s'ensuit immédiatement que la contrainte de cisaillement habituelle à la paroi n'existe quasiment pas entre AA' et CC' puisque sur BC le fluide au contact n'a pratiquement pas de mouvement global dans le sens de l'axe. Dans les sections BB' d'une part, CC' d'autre part, les pressions étoilées restent constantes (filets fluides rectilignes en CC', filets fluides rectilignes sur AA' et fluide quasi immobile sur la section en couronne entre BB' et AA'). Si on fait l'hypothèse simplificatrice que la vitesse a un profil constant sur une section droite (ce qui s'écarte peu de la réalité en régime turbulent), l'équation intégrée de la quantité de mouvement (appelée aussi équation d'Euler) appliquée à l'élément de fluide compris entre BB' et CC' s'écrit :

$$R = \dot{M} (U_2 - U_1) \quad (\text{I.38})$$

Si cette hypothèse n'est pas acceptable, il suffit de multiplier chacun des vecteurs vitesse moyenne de l'équation (I.38) par le coefficient d'impulsion de la section considérée.

Les vitesses étant dirigées selon l'axe de la canalisation, la résultante R des forces, qui s'appliquent sur le fluide, a la même direction. On considère ainsi uniquement la composante axiale des forces constituant R, soit seulement les forces de pression sur les sections BB' et CC'. On a :

$$R_x = \int_{S_{BB'}} P_2 dS - \int_{S_{CC'}} P_1 dS$$

ou encore :

$$R_x = \int_{S_{BB}} (P_1^* - \varpi Z_1) dS - \int_{S_{CC}} (P_2^* - \varpi Z_2) dS$$

Dans cette expression, les intégrales :

$$\int \varpi z dS$$

sont identiques. Comme  $P^* = \text{cte}$  sur les sections droites  $S_{BB}$  et  $S_{CC}$  qui ont la même valeur  $S_2$  (section aval), on a :

$$R_x = \dot{M}(U_2 - U_1) = (P_1^* - P_2^*)S_2$$

Comme, par ailleurs :

$$\dot{M} = \rho S_1 U_1 = \rho S_2 U_2$$

On a :

$$S_2(P_2^* - P_1^*) = \rho(S_1 U_1^2 - S_2 U_2^2)$$

Cette valeur de la différence des pressions étoilées est reportée dans l'expression de la perte de charge singulière déduite de l'équation de Bernoulli :

$$J_s = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + \frac{P_1^* - P_2^*}{\varpi}$$

Ce qui donne :

$$J_s = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \left( U_2^2 - \frac{S_1}{S_2} U_1^2 \right)$$

Avec :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_2}{U_1} \quad (\text{conservation de la masse})$$

On obtient :

$$J_s = \frac{1}{g} (U_1^2 - U_2^2 + 2U_2^2 - 2U_1 U_2)$$

Soit :

$$J_s = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

On peut alors donner à  $J_s$  l'expression générale (I.38) avec :

$$J_s = \frac{U_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{U_2}{U_1} \right) = \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right) \frac{U_1^2}{2g} \quad (\text{I.39})$$

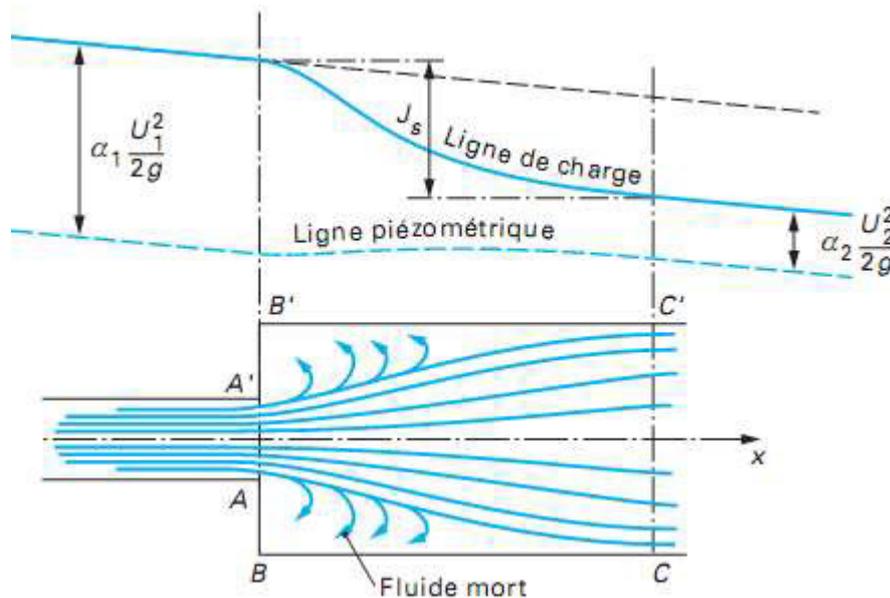
Soit

$$J_s = K \frac{U_1^2}{2g} \quad \text{avec} \quad K = \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \quad (\text{I.40})$$

Ou :

$$J_s = K \frac{U_2^2}{2g} \quad \text{avec} \quad K = \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \quad (\text{I.41})$$

En réalité,  $K$  est légèrement différent de la valeur ci-dessus, à cause notamment de la non-uniformité des vecteurs vitesses sur une section droite. Il s'approche d'autant mieux de cette valeur que est grand et que le nombre de Reynolds  $Re$  est élevé. Les évolutions qualitatives des ligne de charge et ligne piézométrique sont représentées sur la figure(I.5).



**Figure I.5 : – Écoulement d’un fluide dans l’élargissement brusque d’une canalisation. Évolution de la charge du fluide**

### 6.1.2 Rétrécissement brusque :

L'expérience montre que, au passage d'un rétrécissement brusque, un fluide accuse une certaine perte de charge. Une visualisation de l'écoulement montre que la veine fluide se contracte après son passage au droit même du rétrécissement (figure I.6). A l'aval de ce col, on rencontre des zones tourbillonnaires analogues à celles rencontrées dans le cas des élargissements brusques. De plus, l'expérience montre qu'entre  $S_1$  et  $S_2$  la perte de charge est très faible (de l'ordre des pertes de charge linéaires) devant la perte de charge qui a lieu après le col de section  $S_{co} = C_c S_2$  (avec  $C_c$  coefficient de contraction). La section  $C_c \hat{C}$  correspond à l'endroit où les filets du fluide « recollent » à la paroi.

Le problème d'un rétrécissement brusque est ainsi analogue à celui d'un élargissement brusque de la section  $S_{co}$  à la section  $S_2$ . En faisant toujours la même hypothèse sur les profils de vitesse, on peut écrire :

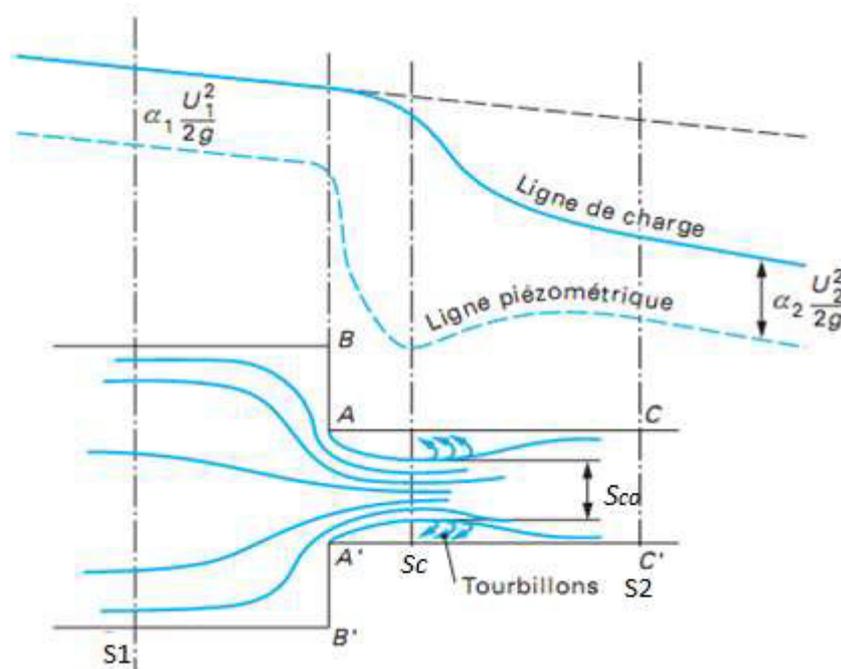
$$J_s = \frac{(U_c - U_2)^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g} \left( \frac{S_2}{S_{co}} - 1 \right)^2$$

Soit :

$$J_s = K \frac{U_2^2}{2g} \text{ avec } K = \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \quad (I.42)$$

Le coefficient de contraction  $C_c$  est toujours inférieur à 1. Il dépend du rapport  $S_1/S_2$  et de l'angle de raccordement, au niveau de la section  $BB'$ , entre les deux canalisations.  $C_c$  varie de 0,6 à 1 quand  $S_1/S_2$  varie de l'infini à 1. Si le raccordement est arrondi en forme de tuyère, ce coefficient est toujours égal à 1 et, dans ce cas, le changement de section se fait sans perte de charge singulière.

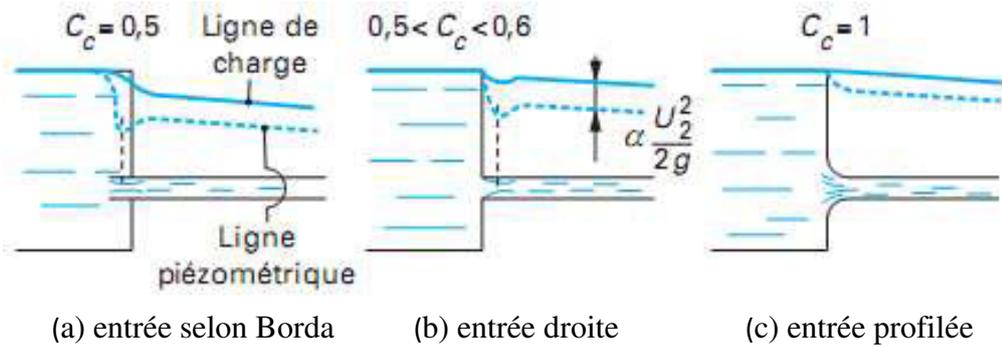
Pour ce cas également, les évolutions qualitatives de la ligne de charge et de la ligne piézométrique sont tracées sur la figure (I.6).



**Figure I.6 : – Écoulement dans un rétrécissement brusque. Évolution de la charge du fluide**

### 6.1.3 Entrée d'une conduite reliée à un réservoir de grandes dimensions

Dans le cas d'un écoulement turbulent, il se rapproche de celui du rétrécissement brusque et la perte de charge dépend beaucoup de la forme de l'entrée de la canalisation. Le coefficient de contraction «  $C_c$  » de la veine varie de 0,5 (dans le cas d'un orifice de Borda) à 1 pour le cas d'un orifice parfaitement bien profilé (figure I.7). Les pertes de charge correspondantes sont importantes dans le premier cas et pratiquement nulles dans le second.



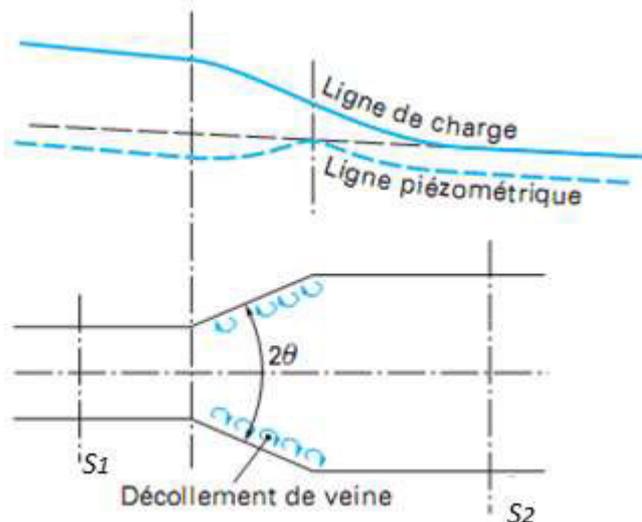
**Figure I.7** – Différentes configurations d’entrée de canalisation faisant suite à un réservoir. Évolutions de la ligne de charge et de la ligne piézométrique

La distance, par rapport à l'entrée de la canalisation, de la section où les trajectoires «recolent » à la paroi, que l'on prend en général égale à 20 fois le diamètre, peut en réalité être donnée, dans le cas d'une entrée droite, par une relation de la forme :[1]

$$\frac{l}{D} = 0.8R_e^{0.25}$$

#### 6.1.4. Divergent :

La perte de charge dans un divergent dépend beaucoup d'un compromis entre sa longueur et son angle au sommet (figure I.8). En effet, lorsque l'angle au sommet  $2\theta$  est faible, les trajectoires suivent le profil du divergent et les pertes de charge, analogues aux pertes de charge linéaires, s'expriment par les mêmes relations. Si l'angle devient important, il peut y avoir décollement de veine et pertes de charge singulières par création de zones tourbillonnaires. Pour obtenir un rapport déterminé de sections amont et aval du divergent, il faut avoir soit un petit angle et une grande longueur de divergent, soit un grand angle et une faible longueur de divergent. Dans le premier cas, les pertes de charge linéaires sont importantes alors que dans le second, ce sont les pertes singulières. Il existe alors un compromis qui, expérimentalement, conduit à  $7^\circ < \theta < 14^\circ$ . C'est pour ces valeurs de  $\theta$  que le coefficient global de pertes de charge  $K$  est le plus faible.



**Figure I.8** – Évolution de la ligne de charge et de la ligne piézométrique dans un divergent.

### 6.1.5. pertes de charge dans un diaphragme :

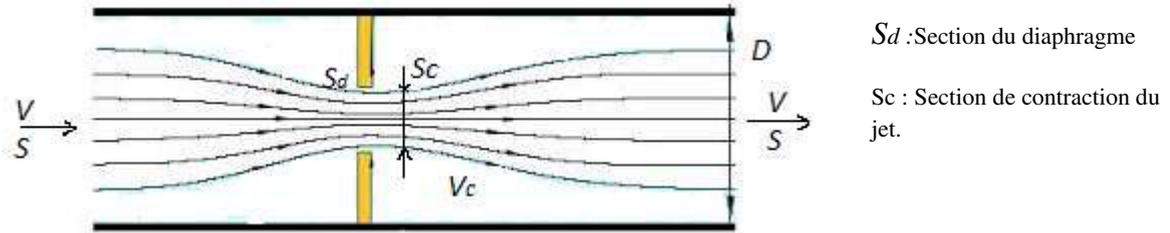


Figure I.9 :diaphragme dans une conduite

$$J_S = \left( \frac{S}{C_c \cdot S_d} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} \quad (I.43)$$

## 6.2. Changements de direction :

### 6.2.1 Coude arrondi :

Dans un coude (figure I.10), les lignes de courant ne sont plus rectilignes. Il n'est donc plus possible d'écrire que  $P^* = \text{cte}$  en tout point d'une section droite. La projection de l'équation de Navier sur la normale à la trajectoire s'écrit :

$$p \frac{v^2}{R_c} = - \frac{\partial P^*}{\partial n} - f_n \quad (I.44)$$

Avec :  $R_c$  le rayon de courbure,

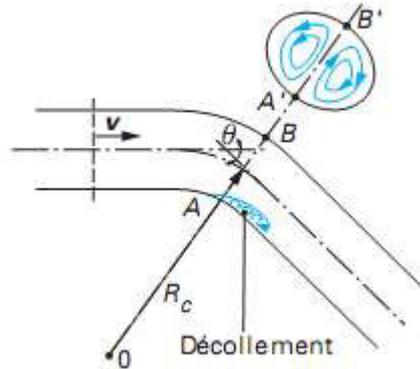
$f_n$  la composante, selon la normale, des forces visqueuses,

$n$  la normale dirigée vers le centre de courbure.

Si le fluide est parfait,  $f_n$  est nul. L'expression (I.44) montre que, le membre de gauche étant essentiellement positif, la pression étoilée diminue quand le point considéré se rapproche du centre de courbure. Ce résultat reste qualitativement valable dans le cas d'un fluide réel pour lequel  $f_n \neq 0$ . La pression en B est donc supérieure à celle qui règne en A. Considérons alors ce qui se passe dans une section droite. La différence de pression entre B' et A' se fait sentir davantage sur les particules voisines de la paroi, qui ont une vitesse normale au plan de la section droite faible, que sur celles de la partie médiane qui ont une vitesse normale plus forte. Les particules de la circonférence se déplacent alors de la pression la plus élevée vers la pression la plus basse, c'est-à-dire de B' vers A'. En contrepartie, les particules de la zone médiane vont de A' vers B' comme cela est indiqué sur la figure I.10. Ce mouvement crée des pertes de charge supplémentaires qui peuvent encore, lorsque  $q$  devient grand, être aggravées par des décollements à la paroi dans la partie aval du coude.

Comme pour toutes les pertes de charge singulières, on écrit :  $j_s =$

$$k \frac{U^2}{2g} \quad \text{avec} \quad k = f\left(\frac{D}{R_c}, \theta, Re\right) \quad (\text{I.45})$$



**Figure I.10** – Écoulement dans un coude de conduite

Pour des écoulements turbulents,  $K$  est indépendant du nombre de Reynolds  $Re$  dès que ce nombre devient assez important ( $\cong 10^5$ ). Pour un coude de section circulaire et de courbure progressive, on peut utiliser la formule empirique suivante [1]:

$$k = \left[ 0.13 + 1.85 \left( \frac{D}{2R_c} \right)^{7/2} \right] \frac{\theta}{\pi} \quad (\text{I.46})$$

### 6.2.2. Coude à angle vif

Les pertes de charge pour un coude à angle vif sont plus importantes que pour un coude arrondi. Diverses relations pour  $K$  ont été proposées. Citons, par exemple, celle de Weisbach :

$$k = 0.9457 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2.047 \sin^4 \frac{\theta}{2} \cong 1 - 2 \cos \theta \quad (\text{I.47})$$

Pour un angle droit,  $k \cong 1$ , ce qui signifie que le coude fait perdre au fluide une quantité d'énergie égale à son énergie cinétique.

## II.7. Calcul de pertes de charges dans une conduite

### II.7.1 Description du problème

On considère une conduite horizontale de longueur  $L$ [m] subissant un élargissement brusque en  $x = 0$ . La moitié gauche a un diamètre  $D_1$ [m] et la moitié droite un diamètre  $D_2$  [m]. De fluide s'écoule de gauche à droite à la vitesse  $V_1$ [m/s].

On cherche à évaluer la perte de charge évaluée par FLUENT avec celle donnée par les formules semi-empiriques.

Dans cette première partie on présentera les calculs on utilise les formules empiriques, et ensuite (chap II,III,et IV) pour les calculs numériques.

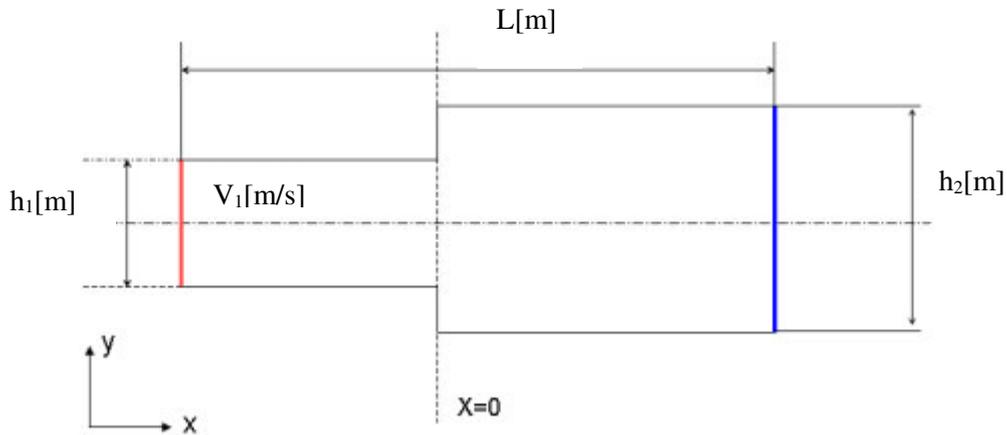


Figure I.11 – Géométrie du problème

### I.7.2 Calcul de pertes de charge :

#### I.7.2.1 Modèle semi-empirique

##### I.7.2.1.1. écoulement laminaire

Le calcul de la perte de charge dans la conduite se fait de la manière suivante :

$$\Delta P_T = \Delta P_1 + \Delta P_s + \Delta P_2 \quad (\text{I.48})$$

$\Delta P_1$  : la perte de charge (linéaire) dans la première partie de la conduite,

$\Delta P_s$  : la perte singulière due à l'élargissement de la section,

$\Delta P_2$  la perte (linéaire) dans la deuxième partie de la conduite.

- On va calculer la perte de charge dans la première partie de la conduite en utilisant la formule **Dacy-Weibach** (I.27) suivante :

$$\Delta P_{l1} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{1}{2} \rho V_1^2 \quad (\text{I.49})$$

- Coefficient de perte de charge : (écoulement laminaire)

$$\lambda_1 = \frac{64}{Re} \quad (\text{II.45})$$

Re le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{V_1 \cdot D_1}{\nu} \quad (\text{II.46})$$

Le calcul de  $\lambda_1$  se fait facilement, alors on calcule  $\Delta P_{l1}$  [Pa]

Et en prenant :

$$P_i = \frac{\rho V_i^2}{2} \quad (\text{II.47})$$

On a :  $P_l$  [Pa]

- La perte de charge singulière en présence d'un élargissement de section est calculée par la relation suivante :

$$\Delta P_2 = K P_1 \quad (\text{II.48})$$

Où

$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (\text{II.49})$$

On a donc:  $\Delta P_s = \Delta P_2$

et

$$P_1 = \Delta P_s - P_1 \quad (\text{II.50})$$

Enfin la perte de charge dans la deuxième partie de la conduite est calculée de la même manière que la première, avec une vitesse  $V_2$  :

On applique l'équation de la continuité :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{S_1 V_1}{S_2} \quad (\text{II.51})$$

On a donc  $Re$ ,  $\lambda_2$  et  $\Delta P_2$  calculé par les relations (II.45), (II.44) et (II.43).

- ❖ La perte de charge totale dans la conduite est donc la somme de ces contributions :

$$\Delta P_T = \Delta P_l + \Delta P_s + \Delta P_2$$

### II.7.2.1.2. écoulement turbulent :

Les calculs de pertes des charges se font de la même manière pour l'écoulement laminaire sauf pour le calcul de coefficient de perte charge  $\lambda$  il est déterminé soit par :

- Pour les parois lisses on applique la formule de **Blasius** (équation :II.33)  
+La formule de **Colebrook** qui elle est applicable pour tout type des conduites (lisses + rugueuse)(équation :II.36).
- Pour les parois rugueuses on applique la formule de **Colebrook** qui elle est applicable pour tout type des conduites (lisses + rugueuses)(équation : II.36).

### II.7.2.1.3. Application numériques :

#### Écoulement turbulent ( $R_e \gg 2000$ )

$$D_1=0.2\text{m}$$

$$D_2=0.6\text{m}$$

- La longueur de la conduite d'entrée,  $L_1$ , doit être au moins 10 fois le rayon d'entrée,  $R_1$ . La longueur,  $L_2$ , doit être supérieure à 50 fois la différence entre  $R_2$  et  $R_1$ .

$$L_1=10*0.1 \quad \text{on prend} \quad L_1=2\text{m}$$

$$L_2=50*(R_2-R_1)=50*(0.3- 0.1)=10\text{m}$$

- Écoulement incompressible ( $\rho = \text{cte}$ )
- Écoulement permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )
- Bidimensionnel (x,y)
- Fluide visqueux :  $\rho \neq 0$
- Absence de transfert de chaleur.

**A. Parois lisse ( $\varepsilon = 0$ )  $V_1=1\text{m/s}$**

Fluide véhiculé eau :

$$\text{Données : a } 20^\circ\text{C} \begin{cases} \mu = 1.003 \times 10^{-3} \text{ [Pa.s]} \\ \rho = 998 \text{ [Kg/m}^3\text{]} \\ \nu = 1.005 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{/s]} \end{cases}$$

|   |  |
|---|--|
| <p style="text-align: center;"><math>V_1=1 \text{ m/s}</math></p> <p>■ <u>1<sup>er</sup> partie de la conduite</u> : <math>D_1=0.2\text{m}</math></p> <p>➤ <math>R_e = \frac{V \times D}{\nu} = \frac{1 \times 0.2}{1.005 \times 10^{-6}}</math></p> <p style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>R_e = 199004.975</math></p> <p>➤ <math>\begin{cases} \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D} = 0 \\ R_e &gt; 10^5 \end{cases}</math></p> <p><math>\lambda = \frac{0.316}{R_e^{0.25}}</math> (formule de Blasius)</p> <p style="text-align: center; background-color: #f4a460; padding: 5px;"><math>\lambda_1 = 0.01496</math></p> <p>* formule colebrook <math>\lambda_1 = 0.0157</math></p> <p>➤ <math>\Delta P_{l1} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} = 0.015 \frac{2}{0.2} \frac{998 \times 1^2}{2}</math></p> <p style="text-align: center; background-color: #f4a460; padding: 5px;"><math>\Delta P_{l1} = 74.85 [\text{Pa}]</math></p> <p>➤ <math>\Delta P_s = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \times \frac{\rho V_1^2}{2}</math><br/> <math>= \left(1 - \frac{\pi D_1^2/4}{\pi D_2^2/4}\right)^2 \times \frac{\rho V_1^2}{2}</math></p> <p style="text-align: center; background-color: #f4a460; padding: 5px;"><math>\Delta P_s = 394.271 [\text{Pa}]</math></p> | <p>■ <u>2<sup>er</sup> partie de la conduite</u> : <math>D_1=0.6\text{m}</math></p> <p>Calcul de <math>V_2</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Equation de continuité :</li> </ul> $V_2 = \frac{S_1 V_1}{S_2} = \frac{D_1^2 V_1}{D_2^2}$ $V_2 = 0.111 \text{ m/s}$ <p>➤ <math>R_e = \frac{V \times D}{\nu} = \frac{0.111 \times 0.6}{1.005 \times 10^{-6}}</math></p> <p style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>R_e = 66328.36</math></p> <p>* formule colebrook</p> <p style="text-align: center; background-color: #f4a460; padding: 5px;"><math>\lambda_1 = 0.0196</math></p> <p>➤ <math>\Delta P_{l2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}</math></p> $= \frac{0.0196 \times 10 \times 998 \times (0.111)^2}{0.6 \times 2}$ <p style="text-align: center;"><math>\Delta P_{l2} = 2.0084 [\text{Pa}]</math></p> |
|---|--|

$$\Delta P_T = \Delta P_{l1} + \Delta P_s + \Delta P_{l2}$$

$\Delta P_T = 471.1294 [\text{Pa}]$

**B. Parois rugueux : ( $\varepsilon = 0.1mm$ )  $V_1=1m/s$**

Fluide véhiculé eau :

$$\text{Données : a } 20^\circ c \begin{cases} \mu = 1.003 \times 10^{-3} \text{ [Pa.s]} \\ \rho = 998 \text{ [Kg/m}^3\text{]} \\ \nu = 1.005 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{/s]} \end{cases}$$

|  |  |
|--|--|
| <p style="text-align: center;"><math>V_1=1m/s</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <u>1<sup>er</sup> partie de la conduite : <math>D_1=0.2m</math></u> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>R_e = \frac{V \times D}{\nu} = \frac{1 \times 0.2}{1.005 \times 10^{-6}}</math></li> </ul> </li> </ul> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math>R_e = 199004.9751</math></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>• formule colebrook</li> </ul> <div style="background-color: #fce4d6; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px auto;"><math>\lambda_1 = 0.0188</math></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>\Delta P_{l1} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}</math></li> </ul> <div style="background-color: #fce4d6; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px auto;"><math>\Delta P_{l1} = 93.812 [Pa]</math></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>\Delta P_s = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \times \frac{\rho V_1^2}{2}</math><br/> <math>= \left(1 - \frac{\pi D_1^2/4}{\pi D_2^2/4}\right)^2 \times \frac{\rho V_1^2}{2}</math></li> </ul> <div style="background-color: #fce4d6; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px auto;"><math>\Delta P_s = 394.271 [Pa]</math></div> | <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <u>2<sup>er</sup> partie de la conduite : <math>D_1=0.6m</math></u> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equation de continuité :</li> </ul> </li> </ul> $V_2 = \frac{S_1 V_1}{S_2} = \frac{D_1^2 V_1}{D_2^2}$ $V_2 = 0.111 m/s$ <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>R_e = \frac{V \times D}{\nu} = \frac{0.111 \times 0.6}{1.005 \times 10^{-6}}</math></li> </ul> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math>Re = 66328.36</math></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> </ul> <p style="text-align: center;">formule colebrook on a trouver</p> <div style="background-color: #fce4d6; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px auto;"><math>\lambda_2 = 0.0203</math></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>\Delta P_{l2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} =</math><br/> <math>0.0203 \frac{10 \times 998 \times (0.111)^2}{0.6 \times 2}</math></li> </ul> <div style="background-color: #fce4d6; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px auto;"><math>\Delta P_{l2} = 2.08014 [Pa]</math></div> |
|--|--|

$$\Delta P_T = \Delta P_{l1} + \Delta P_s + \Delta P_{l2}$$

$\Delta P_T = 490.16114 [Pa]$

## II.1. La turbulence :

Le sujet est très interdisciplinaire et touche, à la physique, à la mécanique des fluides, à la météorologie et à l'astrophysique. La turbulence fait partie de l'expérience quotidienne : nul besoin d'un microscope ou d'un télescope pour observer les volutes de la fumée d'une cigarette, les gracieuses arabesques de la crème versée dans le café...

### II.1.2. Renseignements sur l'agitation turbulente

Un écoulement représente un glissement de particules fluides les unes sur les autres. L'agitation moléculaire entraîne à son échelle des échanges entre ces couches et une diffusion de l'écoulement (non perceptible à l'échelle du milieu continu, i.e. à l'échelle de la particule fluide).

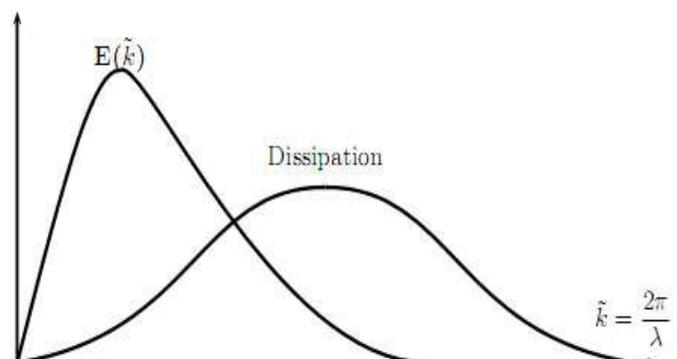
A l'échelle du milieu continu, le régime turbulent présente, en plus, des mouvements **désordonnés et tridimensionnels**. Notons tout de même que bien que ce que nous observons soit très complexe, très désordonnée, c'est très loin d'être le désordre total. En effet, la turbulence est composée de structures cohérentes, en particulier de tourbillons (que l'on observe en aval d'un pont par exemple). Il s'agit là d'un mélange subtil d'ordre et de désordre qui en fait une des principales difficultés vis à vis de la modélisation. Toute cette agitation porte le nom d'**agitation turbulente**. [3]

Notons d'autre part qu'il s'agit d'un mouvement secondaire de l'écoulement. La turbulence n'est donc pas liée à la nature du fluide mais à son mode de mouvement. On traite la plupart du temps de la **turbulence pleinement développée**, caractérisée par [3]:

- ✓ **Taille supramoléculaire** : la taille admissible par une structure turbulente (on dira cohérente) est guidée d'une part par l'étendue spatiale disponible (dimensions d'un canal, épaisseur de la couche limite) et d'autre part par la viscosité. Il existe en effet une échelle appelée échelle de Kolmogorov<sup>[3]</sup> s'interprétant comme étant la plus petite dimension des structures ou tourbillons que l'on peut rencontrer dans un écoulement turbulent. En-dessous de cette échelle, les effets visqueux font leurs effets, et l'énergie mécanique est totalement transformée en chaleur. Comprenons bien qu'il existe alors des structures de taille plus élevée capable de dissiper. Pour se donner une idée, dans l'atmosphère terrestre par exemple, l'échelle de dissipation est de l'ordre du millimètre, alors que les plus grosses structures ont des échelles de plusieurs milliers de kilomètres.
- ✓ **Comportement aléatoire** : les mesures mettent en évidence l'aspect chaotique de toute fonction du champ de l'écoulement (température, pression, vitesses, masse volumique). On perd alors toute notion de prédictibilité présente dans l'écoulement laminaire. Une approche statistique est alors nécessaire (ex : la météo).
- ✓ **Dénombrément infini** : la mesure de la turbulence donne des résultats différents selon le point considéré. Néanmoins, ceux-ci font apparaître des oscillations recouvrant un très large spectre en fréquence.
- ✓ **Structures tridimensionnelles** : il n'y a pas de direction privilégiée même en présence d'un écoulement considéré comme bidimensionnel.

- ✓ **Intermittence (Zone où l'on observe de façon alternée un mélange d'agitation et de calme au sein d'un écoulement turbulent):** ce phénomène est observé dans des cas précis lors du passage laminaire/turbulent, dans les petites échelles (dissipation), et proche des frontières libres (couche de mélange d'un jet). Ce phénomène est lié à la pénétration massive de fluide non turbulent dans la couche de mélange.
- ✓ **Cinématique rotationnelle :** les fluctuations de vitesse sont porteuses de fluctuations de rotationnel. La turbulence ne "produit" pas de rotationnel mais aura des effets sur cette quantité tels qu'un renforcement de sa production proche des parois (gradient de vitesse important), ou la diffusion de vorticité hors des zones de production sous l'effet de l'agitation moléculaire.
- ✓ **Dynamique non linéaire :** interaction entre tous les mouvements présents dans l'écoulement selon une dynamique qui est régie par les équations de Navier-Stokes.
- ✓ **  nergie dissipative :** la dissipation est donnée par  $\varphi = 2\mu S_{ij}S_{ij}$ , avec  $S_{ij}$  le tenseur des vitesses de déformation.   tant données les faibles valeurs de  $\mu$  pour l'eau ou l'air, seules les échelles présentant des vitesses de déformation importantes vont dissiper : il s'agit des petites échelles. Pour se donner une image, les grosses structures (faible nombre d'onde) sont porteuses d'énergie (ex: les bourrasques de vent). Celles-ci se "cassent" en des structures de plus en plus fines sans production ni dissipation d'énergie : c'est la "cascade d'énergie" (Fig. II.1). Ce processus continue jusqu'à ce que la structure soit assez fine (nombre d'onde important) pour que les effets de viscosité puissent agir et que la dissipation ait lieu par transfert de l'énergie cinétique turbulente en énergie interne. Ce processus, appelé Cascade d'énergie, a été énoncé par Richardson en 1922 et a été complété par Kolmogorov en 1941.

A partir de toutes les caractéristiques vues ci-dessus, on propose une définition de la turbulence: **La turbulence est un mode naturel d'écoulement d'un fluide visqueux ou   des mécanismes internes d'échange d'énergie assurent la création et le maintien de toute hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continument sur une large gamme d'échelles macroscopiques.[3]**



**Figure(II.1) :** Spectres d'énergie et de dissipation

## II.2. Equation de Navier-Stokes :

Les équations qui gouvernent le mouvement instantané des fluides, qu'ils soient turbulents ou non, ont été écrites par Claude Navier en 1823. Elles sont appelées équations de Navier-Stokes en raison des perfectionnements apportés ultérieurement par George Stokes. Il ne s'agit ni plus ni moins que des équations de Newton qu'il faut appliquer à une particule fluide. Ces équations avaient été préalablement écrites par Euler mais Navier eut l'ingéniosité d'y rajouter un terme de friction entre les diverses couches de fluide.

L'équation de Navier-Stokes pour la vitesse instantanée est connue depuis longtemps, cependant sa résolution reste trop compliquée.

L'équation de Navier-Stokes se démontre à partir d'un bilan de quantité de mouvement par unité de volume pour un fluide incompressible :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_{ext} + \mu \Delta \vec{v} \quad (\text{II.2})$$

La première équation de divergence nulle du champ de vitesse  $\vec{v} = (\vec{r}, t)$  assure l'incompressibilité du fluide. Chaque terme de la seconde équation est une force par unité de volume.  $\rho$  désigne la densité du fluide et  $P = (\vec{r}, t)$  la pression, qui par définition est la partie isotrope du tenseur des contraintes. Le terme  $-\vec{\nabla} P$  représente donc des contraintes normales liées aux forces de pression.

La force par unité de masse  $f_{ext}(\vec{r}, t)$  regroupe l'ensemble des forces appliquées dans le volume du fluide. Souvent, seules les forces de pesanteur  $\vec{f}_{ext} = \vec{g}$  sont présentes. Dans ce cas, on appelle  $p_0$  la valeur que prend la pression en absence d'écoulement,  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $\vec{\nabla} P_0 = \rho \vec{g}$  (pression hydrostatique). Pour ces écoulements, la mise en mouvement du fluide est assurée par un forçage lié à la vitesse imposée par les conditions aux limites. Enfin  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide.

En divisant par la densité  $\rho$ , l'équation de bilan (II.2) de forces par unité de volume, on obtient le bilan de forces par unité de masse, qui s'interprète aussi comme une équation de transport de la vitesse :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (p - p_0) + \nu \Delta \vec{v} \quad (\text{II.3})$$

Cette forme de l'équation fait apparaître la viscosité cinématique du fluide :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Le dernier terme du membre de droite,  $\nu \Delta \vec{v}$  qui est un terme linéaire représente le transport de quantité de mouvement (par unité de masse) par diffusion moléculaire.

Le second terme du membre de gauche,  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  se déduit de la dérivée lagrangienne de la vitesse. Il correspond au transport convectif de la vitesse et, contrairement au transport diffusif, il est non linéaire car c'est une forme quadratique de la vitesse.

Ces deux termes de transport de la quantité de mouvement ont des propriétés fondamentalement très différentes que nous explicitons dans la partie suivante.

## II.2.1 Les deux types de transport de la quantité de mouvement :

### II.2.1 .1. Transport diffusif :

Nous commencerons par rappeler que la diffusion moléculaire est à la base un processus purement aléatoire d'événements indépendants. Chaque molécule du fluide est en interaction avec les autres (soit par chocs, pour les gaz, soit par forces de type Van Der Waals pour les liquides ou les solides) de telle sorte que les molécules sont des vecteurs d'échanges de grandeurs physiques (énergie ou chaleur, quantité de mouvement, masse). C'est l'agitation thermique de l'ensemble des molécules qui assure l'incohérence à l'échelle moléculaire. Il en résulte un transport macroscopique statistiquement très cohérent de cette grandeur au travers du système. L'exemple le plus parlant est le transport de la température au travers d'un barreau métallique initialement chauffé d'un côté. La structure de l'équation de transport par diffusion s'écrit pour une grandeur  $X$  quelconque [5]:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \Delta X \quad (\text{II.4})$$

Où  $D$  est le coefficient de diffusion pour la quantité  $X$  transportée. Le coefficient de diffusion ne dépend que du fluide. Dimensionnellement, on a  $[D] = L^2 T^{-1}$ . A partir de cette équation on tire un temps caractéristique correspondant à la durée nécessaire pour diffuser sur une distance  $\delta$ :

$$\tau_D = \frac{\delta^2}{D} \quad (\text{II.5})$$

On prend maintenant l'équation de la dynamique (II.3) en posant égal à 0 le terme non-linéaire. Prenons le cas d'un écoulement initialement parallèle  $\vec{v} = u(y)\vec{e}_x$  sans gradient de pression suivant  $\vec{e}_x$ . L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v} \quad (\text{II.6})$$

C'est une équation de diffusion comme l'équation (II.4). La grandeur vectorielle qui est transportée par diffusion moléculaire est la quantité de mouvement par unité de masse (i.e. la vitesse). Le coefficient de diffusion  $D$  est la viscosité cinématique  $\nu$ . Puisque l'équation est linéaire, l'écoulement restera parallèle tout au long de sa dynamique. Dans la figure (II.2(a)), on montre la relaxation d'un profil initialement en forme de marche avec un saut de vitesse  $\Delta U$ . Sans entrer dans les détails du calcul (la solution est connue pour le profil initial de la figure II.2), il faut savoir, car c'est un résultat général des phénomènes diffusifs (II.5) que la taille caractéristique du profil de vitesse évoluera comme  $\delta \propto \sqrt{\nu t}$  et que le temps caractéristique pour transporter la quantité de mouvement sur une longueur  $\delta$  est :

$$\tau_\nu = \frac{\delta^2}{\nu} \quad (\text{II.7})$$

Il est important de noter que le temps caractéristique de transport par diffusion moléculaire ne dépend pas de l'intensité de la vitesse  $U$  qui est transportée, et que ce transport est d'autant plus efficace que la viscosité cinématique est grande [3].

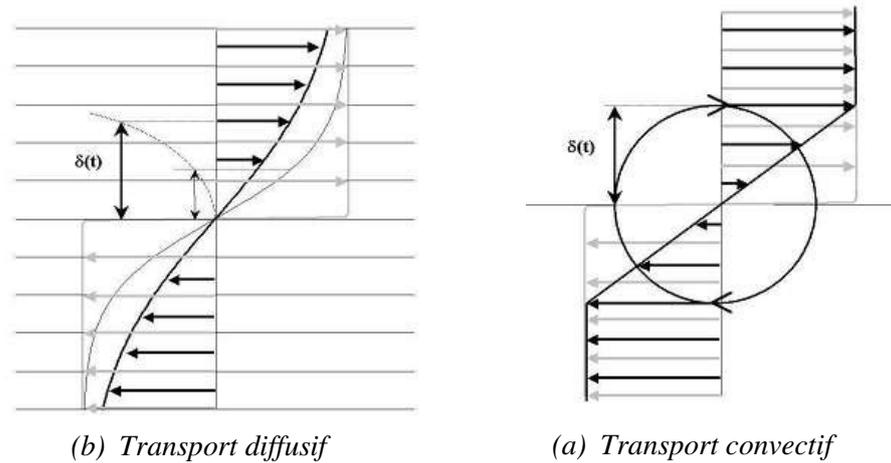


Figure. II.2 – Evolution d'un profil de vitesse initialement en forme de marche (gris). (a) : lorsque seul le terme de transport par diffusion est présent. L'épaisseur du cisaillement (nul initialement) augmente avec le temps en  $\delta \propto \sqrt{vt}$ . (b) lorsque seul le terme de transport par convection est présent. L'épaisseur du cisaillement (nul initialement) augmente avec le temps en  $\delta \propto \Delta Ut$

### III.2.1 .2. Transport convectif :

Dans le cas du transport convectif, c'est la vitesse elle-même qui transporte la quantité de mouvement. Cette fois-ci, on considère l'équation de la dynamique sans le terme diffusif.

Dans ce cas l'équation est non-linéaire (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p - p_0) \quad (\text{II.8})$$

Dans le cas des écoulements non-potentiels (ce qui est le cas de la turbulence), on se heurte au problème de l'existence et de l'unicité des solutions. Souvent, les solutions analytiques n'existent pas et on a recours à une simulation numérique. A partir des mêmes conditions initiales que pour le transport diffusif utilisées pour la figure (II.2(a)), on observe une évolution très différente : l'écoulement ne reste pas parallèle, et on assiste à la formation d'un tourbillon (figure II.2 (b)). Ce tourbillon de vitesse périphérique  $U$  va transporter de la quantité de mouvement entre la partie supérieure et inférieure. Le tourbillon grossit au cours du temps comme  $\delta \propto \Delta Ut$ . Avec ce mécanisme, le temps caractéristique pour transporter la vitesse sur une longueur  $\delta$  est :

$$\tau_c = \frac{\delta}{U} \quad (\text{II.9})$$

On remarquera que le transport est d'autant plus efficace que l'intensité de la vitesse  $U$  qui est transportée est grande.

### II.2.3. Pourquoi l'équation est-elle si compliquée ?

Il y a deux manières de comprendre pourquoi l'équation de Navier-Stokes est compliquée : la vision mathématique et la vision physique. Pour le mathématicien, l'équation est compliquée parce que c'est une équation différentielle non-linéaire. La complication vient du terme  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ . Ce terme varie comme le carré du champ de vitesse, et c'est lui qui rend l'équation mathématiquement inextricable. En maths, la non-linéarité complique les choses, mais en physique aussi ! Car ce terme non-linéaire a sa traduction dans la complexité des phénomènes physiques décrits.

L'équation de Navier-Stokes pour la vitesse instantanée est connue depuis longtemps, cependant sa résolution reste trop compliquée. Une solution a alors été d'essayer de proposer une solution pour l'écoulement moyen. Malheureusement le passage de l'équation de Navier-Stokes à l'équation pour la moyenne fait apparaître un terme qui n'est pas connu de manière exacte. Ce terme représente l'effet des fluctuations sur la vitesse moyenne et doit être approché ou modélisé.

La turbulence est devenue une science expérimentale vers la fin du XIX siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire vers le régime turbulent. Il mit ainsi en évidence quelques lois assez simples et introduisit un nombre adimensionnel portant son nom qui caractérise cette transition. Malgré tout, avant les années 1950, la turbulence était un sujet obscur. La seule issue pour l'ingénieur était d'"expérimenter" sur des modèles physiques afin d'améliorer son savoir-faire. Heureusement après les années 1960, la situation allait se débloquer avec quelques progrès accomplis en matière de modélisation, en même temps que la capacité des traitements numériques augmentait fortement. Cependant, la prédétermination de propriétés statistiques locales était encore impossible. De plus quelques problèmes majeurs demeuraient : l'imprédictibilité, l'universalité des modèles établis, et la convergence des fermetures. Actuellement, ces problèmes ont été en partie résolus et les calculs numériques permettent une bonne estimation de l'écoulement moyen en présence d'une turbulence développée. Des méthodes plus récentes permettent aussi d'estimer le champ fluctuant par résolution des équations de Navier-Stokes instantanées. On parle de façon abusive d'expérience numérique.

### II.3. Trois approches numériques

Malgré des efforts importants de recherche depuis plus d'un siècle, la modélisation des écoulements turbulents demeure un défi à relever. Il existe principalement trois axes de recherche, (1) les résolutions numériques déterministes (**DNS**, pour Direct Numerical Simulation), (2) les méthodes semi-déterministes (**LES**, pour Large Eddy Simulation), et enfin (3) les méthodes statistiques (**RANS** pour Reynolds Average Navier-stokes) plus anciennes et donc largement développées.

Ces trois méthodes ont des objectifs et nécessitent des couts de calcul différents.

### II.3.1 Simulation directe numérique (DNS) : (Direct Numerical Simulation)

Cette méthode permet de résoudre directement les équations de Navier-Stokes sans aucune modélisation. Elle présente ainsi l'avantage de donner accès à toutes les quantités instantanées considérées dans l'écoulement.

Tous les mouvements doivent être résolus par cette méthode, la taille de maille doit donc être inférieure à l'échelle de dissipation. Le nombre de mailles est alors important. Ceci a pour conséquence des temps de calcul extrêmement longs, et d'autant plus longs que la vitesse de l'écoulement est élevée. La capacité et la performance des calculateurs actuels ne cessent de progresser mais ne permettent pas encore de sonder des écoulements complexes et `a hautes vitesses `a partir de cette méthode. Néanmoins, celle-ci permet de mieux comprendre les comportements turbulents dans des configurations simples, mais aussi dans certains cas de valider les modèles de turbulence issus de la modélisation statistique.

### II.3.2 Simulation des grandes échelles (LES)

Il s'agit d'une méthode numérique intermédiaire entre la DNS et les méthodes statistiques consistant à appliquer un filtre spatial en tout point du domaine. Le filtre sépare donc les grandes échelles (simulées) des petites structures (modélisées). On suppose ici que le comportement de ces dernières ne dépend pas de la géométrie et est donc isotrope, ce qui n'est pas le cas des grandes échelles qui, elles, voient leur comportement guidé par leur environnement. La simulation des grandes échelles reste néanmoins très délicate car elles ont un comportement anisotrope, elles sont sujettes à des effets historiques, et sont fortement dépendante du type d'écoulement et de ses conditions aux limites. La taille de maille est choisie largement supérieure à l'échelle de Kolmogorov et correspond la plupart du temps à la taille du filtre.

Malgré la modélisation des petites structures, le temps de calcul demeure important et les calculs sont limités, comme pour la DNS à des nombres de  $Re$  faibles. Néanmoins, alors que la puissance de nos ordinateurs personnels étaient insuffisantes pour ces types de calcul.

La DNS et la LES sont très prometteuses car la perte d'informations est minimale pour la première (seules les contributions moléculaires sont filtrées), un peu plus importante pour la deuxième. Cependant, le coût d'un calcul est inversement proportionnel à la précision obtenue. Pour cette raison, dans des configurations industrielles, ces deux méthodes sont inutilisables, et on leur préférera les méthodes statistiques exposées dans la suite du document.

### II.3.3 Modélisation statistique de la turbulence (RANS)(Reynolds Average Navier-Stokes)[2]

La stratégie adoptée ici consiste à mettre de côté le mouvement instantané du fluide, dans le but d'exprimer les équations du champ moyen. Le souci de simuler toutes les petites structures de l'écoulement est donc éliminé. La taille de maille, ainsi

que la valeur des pas de temps pour des études instationnaires, deviennent plus importantes. Cette approche est donc moins couteuse en temps de calcul que la DNS et la LES, ceci expliquant sa grande utilisation dans le monde industriel. Néanmoins, notons tout de suite que cette approche présente un fort degré d'empirisme, rendant alors la méthode peu fiable dans certaines configurations. Le domaine d'application est très vaste, avec transfert thermique ou sans échange thermique.

Le principe de cette méthode repose sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées. Celles-ci sont obtenues en introduisant une décomposition des variables du problème à traiter :

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i) + \dot{\phi}(x_i, t) \quad (\text{II.10})$$

Où  $\bar{\phi}(x_i)$  est la moyenne du para mètre  $\phi(x_i, t)$  sur une durée d'observation  $T$  :

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_i, t) dt \quad (\text{II.11})$$

Avec  $\phi = \{\mu_i, p, T\}$ . La durée d'observation doit être importante comparativement à l'échelle de temps de la turbulence, théoriquement elle doit tendre vers l'infini. Cependant si elle est assez grande, la valeur moyenne n'en dépend plus. Cette décomposition appelée décomposition de Reynolds (1894), a été introduite par Boussinesq (1872).

Notons que l'application de la moyenne de Reynolds conduit à une gigantesque perte d'information. Il devient alors illusoire d'essayer d'obtenir par cette approche un modèle capable de reproduire correctement tous les phénomènes, dans toutes les simulations. Cette réflexion renvoie à la notion d'universalité des modèles. Les décompositions des variables de notre problème,  $u_i = \bar{u}_i + \dot{u}_i$  et  $p = \bar{p} + \dot{p}$ , sont introduites dans les équations précédentes. On obtient alors :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Et

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\dot{u}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}} \right) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

Que l'on peut mettre sous la forme suivante en utilisant le fait que  $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}] \quad (\text{II.13})$$

Les deux relations (II.12) et (II.13) représentent les **équations de Navier-Stokes moyennées**. On remarque que l'équation de bilan moyennée (II.13) semble identique à celle écrite pour l'écoulement instantané, à l'exception cependant d'un terme ajouté,  $-\rho \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$ , ayant la dimension d'une contrainte. Ce terme porte le nom de **tenseur de Reynolds**. Ainsi le champ moyen ne satisfait pas aux équations de Navier-Stokes, telles que nous les avons

écrites précédemment, le tenseur de Reynolds faisant apparaître le lien étroit entre les champs moyen et fluctuant.

On note ainsi que la turbulence apporte une contrainte supplémentaire à l'écoulement. Néanmoins, les contributions des contraintes de cisaillement et de celles liées à la turbulence ne sont pas identiques. En effet, les effets visqueux sont dominants dans la région proche des parois, alors que pour des régions qui en sont éloignées, la contrainte turbulente a une contribution plus importante.

Limitant la description au champ moyen  $[\bar{u}_i(x_j, t), \bar{p}(x_j, t)]$ , le système régissant ces fonctions se réduit en situation isovolumique aux équations (II.12) et (II.13). Le tenseur de Reynolds fait donc apparaître six termes supplémentaires  $(\overline{\rho \dot{u}^2}, \overline{\rho \dot{v}^2}, \overline{\rho \dot{w}^2}, \overline{\rho \dot{u} \dot{v}}, \overline{\rho \dot{u} \dot{w}}, \text{ et } \overline{\rho \dot{v} \dot{w}})$  s'ajoutant aux variables habituelles  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \text{ et } \bar{p})$ . Il y a donc 10 inconnues pour 4 équations, et il est alors nécessaire de trouver une stratégie nous permettant de "fermer" ce système.

### II.3.3.1. Modèle de turbulence du premier ordre - Concept de la viscosité turbulente :

L'approche de la modélisation statistique de la turbulence nécessite la fermeture du système d'équations régissant le mouvement moyen. Généralement, les méthodes de fermeture sont classées en fonction du nombre d'équations supplémentaires à résoudre. La stratégie adoptée par les modèles du premier ordre et présentés dans la suite du document repose sur le concept de viscosité turbulente présenté par Boussinesq en 1877. Son idée est basée sur l'observation tendant à montrer que le transfert de quantité de mouvement dans un écoulement turbulent est fortement dominé par le mélange des grosses structures. Cette viscosité est notée  $\mu_T$  et relie linéairement le tenseur de Reynolds à l'écoulement moyen :

$$\overline{\rho \dot{u}_i \dot{u}_j} = -\mu_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \underbrace{\frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij}}_{(a)} \quad (\text{II.14})$$

Où  $\bar{k}$  est l'énergie cinétique moyenne du champ turbulent par unité de masse, appelée de façon plus concise l'énergie cinétique turbulente :

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{\dot{u}_k \dot{u}_k} = \frac{1}{2} (\overline{\dot{u}^2} + \overline{\dot{v}^2} + \overline{\dot{w}^2}) \quad (\text{II.15})$$

Et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i=j$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ). Le terme isotrope (a) est nécessaire, afin de ne pas avoir  $\rho \bar{k} = \overline{\rho \dot{u}_i \dot{u}_j} / 2 \equiv 0$  par contraction des indices. La viscosité est a priori une fonction locale de l'écoulement  $\mu_T \equiv \mu_T(\vec{x}, t)$  donc fonction du mouvement turbulent, contrairement à la viscosité moléculaire qui est une propriété du fluide.

La relation (II.14) repose sur des hypothèses simplificatrices de l'écoulement et sa turbulence : (1) l'instantanéité de la réponse de la turbulence à une variation du champ moyen, c'est à dire la non prise en compte de l'histoire de la déformation et de la

turbulence; (2) la localité, la turbulence étant influencée que par son voisinage immédiat, (3) la faible inhomogénéité ; (4) la linéarité de cette loi de comportement entraînant une surestimation de la production de la turbulence. La trop forte diffusivité turbulente est ainsi à l'origine de la dissipation anticipée des structures turbulentes. Ce dernier point est probablement celui qui fait le plus défaut à cette approche. En effet, la relation (II.14) est bien adaptée à la reproduction des composantes de cisaillement (i.e.  $\overline{u'v'}$  et  $\overline{v'w'}$ ) qui sont produites respectivement par le cisaillement du au sillage et à la couche limite. En revanche, elle est incapable de distinguer les trois composantes diagonales, prédisant tout simplement  $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 2k/3$ . On comprendra mieux que les modèles du premier ordre ne puissent marcher dans toutes les situations.

La viscosité turbulente, inconnue de prime abord, doit donc être définie. Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, la détermination de la viscosité nécessite deux échelles,  $\nu \sim u \times l$ , où  $u$  est la vitesse quadratique des molécules constituant le gaz et  $l$  le libre parcours moyen de ces particules (i.e. la distance moyenne effectuée par ces particules entre deux chocs). On pourra alors écrire dans notre cas :

$$\mu_T = \rho u_T l \quad (\text{II.16})$$

Où  $u_T$  et  $l$  représentent respectivement une vitesse et une longueur caractéristique de la turbulence locale. Ainsi, le propos des modèles de turbulence est d'estimer ces deux échelles de la turbulence afin d'approcher au mieux la valeur de  $\mu_T$ . Le modèle de turbulence sera d'autant plus complexe qu'il cherchera à se rapprocher au plus près de la réalité, à savoir tenir compte des effets de la convection, de la production et de la dissipation de la turbulence le long de l'écoulement.

### II.3.3.2. Modèles de fermeture à deux équations de transport

Afin de lever ce problème d'empirisme concernant l'échelle de longueur, il est vite apparu naturel de calculer cette grandeur en résolvant une équation de transport supplémentaire. On accède ainsi aux méthodes du premier ordre à deux équations. Il est très naturel d'introduire l'énergie cinétique turbulente dans la prédiction de la viscosité turbulente. Le choix du second paramètre, à partir duquel une équation de transport sera écrite, est plus délicat. Plusieurs suggestions ont été proposées basées sur les variables

$$\varepsilon \quad ; \quad \bar{k}l \quad ; \quad \bar{\omega} \quad ; \quad 1/\omega$$

Où  $\varepsilon$  le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

$\omega$  le taux de dissipation spécifique

( $\omega = \varepsilon / k$ ) représentant le taux de dissipation par unité d'énergie cinétique turbulente. Dans tous ces cas, la viscosité turbulente est formulée à partir de l'énergie cinétique turbulente et du second paramètre.

### II.3.3.2.1. Modèle de fermeture $k$ - $\varepsilon$ standard :

Le modèle de fermeture  $k$ - $\varepsilon$  est l'un des plus utilisés dans le monde industriel. La viscosité turbulente est donnée par l'expression :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{II.17})$$

Et est donc écrite par combinaison de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation

$$\bar{\varepsilon} = \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{II.18})$$

Estimés tous deux par leur équation de transport. Respectivement :

$$\frac{\partial(\rho \bar{k})}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\rho \bar{k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \bar{\varepsilon} \quad (\text{II.19})$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \bar{\varepsilon})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + \frac{\bar{\varepsilon}}{k} (C_{1\varepsilon} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \bar{\varepsilon}) \quad (\text{II.20})$$

Dans les équations (II.19) et (II.20),  $P_k$  caractérise la génération d'énergie cinétique turbulente issue de gradient de vitesse moyenne, et des effets de la pesanteur.  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$  sont des constantes.  $\sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$  sont appelées nombre de Prandtl, respectivement pour  $k$  et  $\varepsilon$  (Ces deux nombres caractérisent la corrélation pression-vitesse, et restent très difficiles à modéliser). Les constantes impliquées dans ce modèle, ont été déterminées dans les configurations de référence suivantes :

---

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $C_\mu = 0,09$             | Loi logarithmique en paroi              |
| $C_{1\varepsilon} = 1,44$  | déformation ou cisaillement uniforme    |
| $C_{2\varepsilon} = 1,92$  | décroissance turbulente isotrope        |
| $\sigma_k = 1$             | comparaison avec expérience jet-sillage |
| $\sigma_\varepsilon = 1,3$ | comparaison avec expérience jet-sillage |

---

**Tableau II.1:** constantes du modèle  $k$ - $\varepsilon$  standard

Ce modèle a été présenté au début des années 1970 par W.P. Jones et B.E. Launder, puis les constantes ont été déterminées par B.E. Launder et D. Spalding. Un des avantages de cette méthode est la prise en compte de la variabilité spatiale de l'agitation turbulente, et sa simplicité de mise en œuvre. Il s'avère être un des modèles les plus répandus dans les applications pratiques à l'usage de l'ingénieur (écoulements dans des conduites par exemple). Utilisé en dehors d'écoulements cisailés simples pour lesquels il fut initialement conçu, il conduit à des résultats qui, sans être toujours quantitativement corrects, restent le plus souvent qualitativement représentatifs.

Rappelons que le modèle  **$k$ -standard**, n'est utilisable que dans les écoulements fortement turbulents, ce qui n'est plus avéré dans des régions proches des parois. L'utilisation de lois de paroi est alors une solution pour tenir compte de la présence des effets visqueux. Une alternative à l'utilisation de ces lois de paroi a été mise en

place par la modification des équations de transport de  $k$  et  $\varepsilon$  en intégrant un facteur d'amortissement pour tenir compte des effets de paroi [3]. Dans ce cas, la viscosité turbulente s'écrit :

$$\mu_T = \rho C_\mu f_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{II.21})$$

où

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0115y^+} \quad (\text{II.22})$$

Ainsi lorsque l'on considère des régions de plus en plus proches de la paroi, ce coefficient tend vers zéro, et les effets de la turbulence diminuent.

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  est d'autre part basé sur une dépendance locale et surtout linéaire des tensions turbulentes vis à vis du champ moyen (Eq. II.14). De ce fait, le modèle a tendance à surestimer les contraintes turbulentes (en leur donnant un aspect diffusif qu'elles n'ont généralement pas) et la viscosité turbulente dans les zones de fort cisaillement (couche limite, couche de mélange). D'autre part, cette linéarité fait que ce modèle a quasiment aucune chance de bien reproduire des écoulements complexes, en particulier tridimensionnels. De plus, l'équation du taux de dissipation est une forme approchée, obtenue à partir d'arguments dont certains sont purement intuitifs. Pour cela, il paraît moins adapté aux écoulements plus complexes que le modèle RNG, proposé dans le paragraphe suivant.

### II.3.3.2.2. Modèle de fermeture $k$ - $\varepsilon$ RNG :

Le modèle de turbulence RNG  $k$ - $\varepsilon$  est obtenue à partir de l'équation instantanée de Navier-Stokes en utilisant une technique mathématique appelée "groupe de renormalisation" (RNG(d'où l'acronyme RNG : Re – Normalization Group)). Il s'agit donc d'un modèle standard amélioré. Le modèle fait apparaître des constantes différentes de celles du modèle standard  $k$ - $\varepsilon$ , et des termes supplémentaires dans les équations de transport de  $k$  et  $\varepsilon$ .

Ce modèle a pour intérêt majeur d'aboutir sur des résultats plus réalistes dans des régions de fort gradient en ne produisant pas de diffusivité excessive qui faisait défaut au modèle  $k\varepsilon$  standard. Ceci est très important dans les cas où l'écoulement subit des accélérations ou des décélérations importantes (conduite en présence d'un convergent ou d'un divergent) ou lorsqu'il existe des décollements ou des zones de recirculation.

Les écoulements turbulents ont des tourbillons de taille variant entre l'échelle intégrale  $L$  et des vortex de taille  $L/Re^{3/4}$  (échelles de Kolmogorov). Il existe d'autres tourbillons de taille inférieure mais leur énergie est faible. La méthode RNG supprime une bande étroite voisine des tourbillons les plus faibles les en remplace par d'autres modes. Une fois débarrassé de cette bande étroite, ce qui permet de réduire notablement les besoins de stockage, on dispose d'un système d'équations de Navier Stokes avec une viscosité effective, des forces et un couplage non linéaire modifiés. En enlevant les tourbillons de petites échelles, le Reynolds effectif est diminué tandis

que la viscosité est augmentée. La théorie RNG conduit à une relation utilisée pour déterminer de manière plus précise la viscosité effective et permet une meilleure description des variations des propriétés de transport turbulent avec le Reynolds effectif.

Par rapport au model k-ε Standard, la détermination de la viscosité effective est plus élaborée mais RNG utilise aussi les équations de Navier Stokes moyennées :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_{effe} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})] \quad (II.23)$$

Les équations de transport pour k et ε sont :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i k) = \mu_t S^2 - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} [\alpha \mu_{effe} (\frac{\partial k}{\partial x_j})] \quad (II.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i \varepsilon) = C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t S^2 - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R + \frac{\partial}{\partial x_i} [\alpha \mu_{effe} (\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i})] \quad (II.25)$$

Où α est l'inverse du nombre de Prandtl turbulent, tiré de l'expression ci-dessous, qui permet d'inclure les variations de ce nombre avec le nombre de Reynolds :

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \cdot \left| \frac{\alpha + 2.3929}{\alpha_0 + 2.3929} \right|^{0.6379} = \frac{\mu}{\mu_{effe}} \quad (II.26)$$

Avec α<sub>0</sub>=1 Ce résultat issu de la théorie de RNG permet d'appliquer les équations de transport dans les régions à bas Reynolds, sans avoir recours à des fonctions de paroi. Puisque μ et α varient continûment avec le nombre de Reynolds turbulent des valeurs moléculaires aux valeurs pleinement turbulentes, les équations de k et ε incluent une atténuation naturelle dans les zones voisines des parois.

Le taux de déformation R est donné par la relation suivante :

$$R = 2\mu S_{ij} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_j}} \quad (II.27)$$

Où S<sub>ij</sub> est le tenseur des déformations moyennes. Dans le modèle RNG, le taux de déformation prend pour expression :

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \frac{\eta}{\eta_0})}{1 + \beta \eta^3} \frac{\varepsilon^3}{k} \quad (III.28)$$

Ou  $\eta = \frac{Sk}{\varepsilon}$ ,  $\eta_0 = 4.38$ ,  $\beta = 0.012$  et  $S^2 = 2S_{ij}S_{ij}$

La principale amélioration par rapport au  $k-\varepsilon$  Standard provient de R, qui permet une prise en compte plus exacte de certaines anisotropies liées aux variations du Reynolds local. Grâce à une base théorique plus solide que le modèle  $k-\varepsilon$  classique qui conduit notamment à des valeurs typiques un peu différentes des coefficients empiriques, le modèle RNG  $k-\varepsilon$  donne de meilleurs résultats dans une grande variété de cas.

Les constantes du modèle RNG ont pour valeur :

| $C_{\varepsilon 1}$ | $C_{\varepsilon 2}$ | $C_{\mu}$ | $\sigma_k$ | $\sigma_{\varepsilon}$ | $\sigma_h$ | $\eta_0$ | $\beta$ | $C_{\varepsilon 1} C_{\varepsilon 2}$ |
|---------------------|---------------------|-----------|------------|------------------------|------------|----------|---------|---------------------------------------|
| 1.42                | 1.68                | 0.085     | 0.7179     | 0.7179                 | 1          | 4.377    | 0.012   | 0.7                                   |

**Tableau II.2:** constantes du model  $k-\varepsilon$  RNG.

### II.3.3.2.3. - MODÈLE « $k-\varepsilon$ RÉALISABLE »

Le concept de « réalisabilité » introduit par Lumley signifie que le modèle doit respecter des situations asymptotiques. Par exemple,  $k$  et  $\varepsilon$  ne doivent jamais être négatifs. Ces contraintes entraînent une adaptation de l'équation en  $\varepsilon$ , de la forme :

$$u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = C_i \varepsilon \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right\} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} \quad (\text{II.29})$$

où  $C_i$  est une fonction de  $k/\varepsilon$ . Ce modèle paraît bien adapté aux jets circulaires, couches limites avec fort gradient de pression adverse, écoulements à forte courbure et écoulements tourbillonnaires.

### II.3.3.2.4 Equation finale :

La résolution de toutes les équations énoncées dans les paragraphes précédents ont pour but d'estimer la viscosité turbulente (Eq. II.14) nécessaire dans l'obtention du champ moyen. Cette estimation introduite dans les équations de Reynolds permet d'écrire :

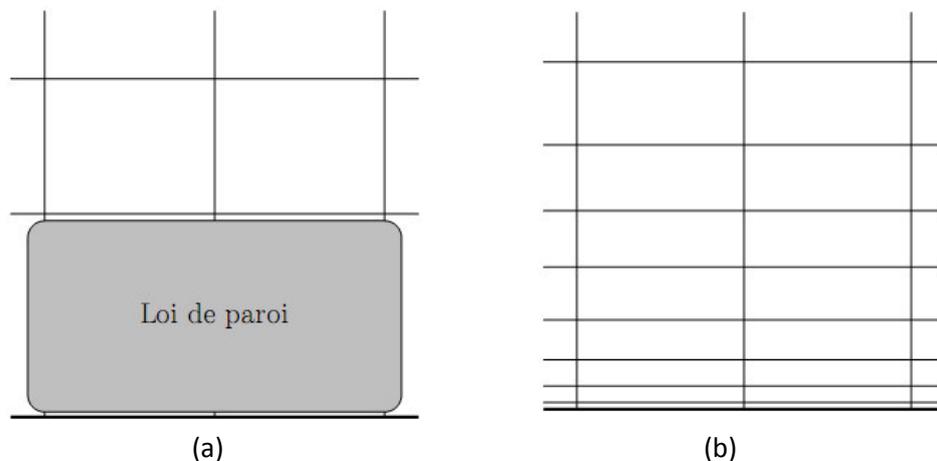
$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_e \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \right) \quad (\text{II.30})$$

avec  $\mu_e = \mu + \mu_T$  la viscosité effective. Cette dernière est élevée dans les régions comportant de forts gradients de vitesse introduisant une production d'énergie turbulente. L'écoulement moyen est donc régi par cette équation, en plus de l'équation de continuité moyennée (Eq. II.12).

## II.4. Influence de la paroi :

Les modèles de turbulence basés sur l'hypothèse d'une forte turbulence ne sont pas valables dans la région proche des parois. Il existe alors plusieurs solutions pour tenir compte de la présence des effets visqueux : (1) ne pas résoudre cette région et utiliser à la place une loi de paroi, (2) introduire des fonctions d'amortissement forçant le comportement du modèle, appelé dès lors modèle bas-Reynolds, ou (3) résoudre des équations différentes pour l'écoulement principal et l'écoulement proche des parois. Les modèles  $k-\varepsilon$  standard ou RNG sont basés sur l'approche (1).

Ainsi dans la première approche, la région interne n'est pas résolue et une loi de paroi est alors utilisée pour relier la région affectée par les effets visqueux à la partie de la couche limite pleinement turbulente (Fig.II.3.a). Cette loi plus ou moins évoluée permet d'estimer les vitesses moyennes ainsi que les quantités turbulentes dans la partie non résolue mais repose néanmoins sur des hypothèses très contraignantes. Il existe différents niveaux de lois de paroi plus ou moins évoluées, la plus simple étant la loi de paroi standard (relation II.32), valable dans la région caractérisée par  $y^+ \approx 30$ . L'inconvénient de cette loi provient du fait qu'elle repose, entre autres, sur un nombre de Reynolds de l'écoulement très important, l'absence d'un gradient de pression adverse. Pour satisfaire ces points, d'autres lois plus élaborées sont alors disponibles et construites la plupart du temps sur une décomposition en deux couches de la couche limite (loi bi-couche). En fonction du point de calcul placé dans la couche limite, la loi de paroi affectera des valeurs adéquates. Ainsi l'utilisation de ce type de loi permet de retrouver des informations dans la sous-couche visqueuse. La valeur du critère de maillage doit donc satisfaire  $y^+ \approx 1$ . On note donc que l'approche des lois de paroi peut être moins consommatrice en temps de calculs et en espace de stockage en fonction du degré de complexité de la loi, la taille du premier élément étant plus importante.[7] Les approches (2) et (3) nécessitent quant à elles dans tous les cas des tailles de mailles beaucoup plus petites, assez petites pour chercher des informations dans la sous-couche visqueuse (Fig.II.3.b). Le nombre d'éléments de calcul devient alors plus élevé que celui d'un calcul basé sur des modèles haut-Reynolds utilisant des lois de paroi standards.



**Fig.II.3 :** Traitement numérique de la région proche d'une paroi.  
(a) approche des lois de paroi ; (b) approche des modèles bas-Reynolds.

Dans le but de décrire la couche limite, on s'intéresse généralement à l'évolution transversale de la vitesse longitudinale dans la couche limite. On peut baser notre réflexion sur une approche globale pour laquelle on cherche à décrire notre problème à partir de produits sans dimension. D'après ce que nous venons de voir, la vitesse locale  $u$  dépend des contraintes locales de frottement exercées par la paroi ( $\tau_p$ ), des propriétés du fluide ( $\rho$  et  $\mu$ ), et de la distance à la paroi ( $y$ ). Il est donc possible à partir du théorème de Vashy-Buckingham de construire deux nombres sans dimension :

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_p/\rho}} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y \times \sqrt{\tau_p/\rho}}{\nu}$$

Avec  $\sqrt{\tau_p/\rho}$  homogène à une vitesse que l'on nomme vitesse de frottement, notée  $u_f$ , et ne possédant pas de signification physique (on préfère néanmoins manipuler une vitesse au lieu d'une tension surfacique). Pour des vitesses moyennes, on aura en effet plutôt intérêt à s'intéresser au rapport  $U/u_f$ , et non pas à  $U$  seule. De même, il est préférable de regarder le rapport  $\overline{u_i u_j}/u_f^2$  au lieu de  $\overline{u_i u_j}$  seul. La vitesse de frottement est de l'ordre de 5% de la vitesse de débit.

L'évolution transversale de la vitesse longitudinale dans la région interne de la couche limite témoigne de plusieurs zones composant cette **région interne** de la couche limite : (1) la sous-couche visqueuse ( $y^+ < 5$ ) dans laquelle le tenseur de Reynolds est négligeable devant les contraintes visqueuses et dans laquelle la vitesse évolue linéairement avec la distance à la paroi :

$$u^+ = y^+ \tag{II.31}$$

Et (2) la **zone logarithmique** ( $30 < y^+ < 1000$ ) dominée par les contraintes turbulentes et dans laquelle une évolution logarithmique de la vitesse est observée:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B \tag{II.32}$$

$k$  et  $B$  étant des constantes du modèle obtenues expérimentalement. La région située entre ces deux zones précédentes ( $5 < y^+ < 30$ ) est appelée **zone tampon**. La région interne de la couche limite ne dépend donc que des paramètres  $y^+$  et  $u_f$ , et reste donc isolée de l'écoulement principal.

Au-delà de la zone logarithmique, la relation (II.32) n'est plus valable car les effets de l'écoulement principal sont de moins en moins négligeables. La relation de vitesse qui ne dépendait que de  $y^+$  doit tendre de façon asymptotique vers une relation cette fois fonction de  $y/\delta$ . On entre alors dans une région caractérisée par une loi de vitesse déficitaire et caractérisée par une relation du type :

$$\frac{U_0 - \bar{u}}{u_f} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

LE CODE fluent propose des types de traitement de paroi

### II.4.1. Loïs de paroi standard

C'est un modèle d'intégration connectant les conditions à la paroi et près de la paroi basée sur les profils universels de la couche limite turbulent (loi pariétale et loi logarithmique), ces lois sont fondées sur l'approche proposés par Launder et Spalding:

$$U^* = \frac{1}{k} \ln(Ey^*) \quad (\text{II.33})$$

Avec :

$$U^* \equiv \frac{(c_\mu)^{1/4} (k_p)^{1/2}}{\tau_p / \rho} U_P \equiv U^* \quad (\text{II.34})$$

$$y^* \equiv \frac{\rho (c_\mu)^{1/4} (k_p)^{1/2}}{\mu} y_P \equiv y^* \quad (\text{II.35})$$

Et  $k$  : constante de Von karman (0.4187).

$E$  : constante empirique définissant la rugosité de paroi.

$U_P$  : vitesse moyenne à la première cellule fluide P.

$k_p$  : énergie cinétique turbulente à la première cellule fluide P.

$y_P$  : distance à la paroi de la première cellule fluide P

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide.

$\tau_p$  : contrainte de cisaillement à la paroi ( $=\mu(\partial U/\partial y)_{paroi}$ ).

L'énergie cinétique turbulente est calculée dans tout le domaine. La condition à la paroi imposée pour  $k$  est alors :  $\partial k/\partial y = 0$ . Le calcul de  $k$  et  $\varepsilon$ , dans une cellule fluide adjacent à la paroi, est effectué avec l'hypothèse d'équilibre local entre les taux production et dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Ainsi, l'équation de transport de  $\varepsilon$  n'est pas résolue dans cette cellule est obtenu par la relation :

$$\varepsilon_p = \frac{(c_\mu)^{3/4} (k_p)^{3/2}}{\kappa y_p} \quad (\text{II.36})$$

Où :  $k_p$  est l'énergie cinétique calculée dans la cellule considérée.

## II.4.2 Lois de paroi non-équilibrée

La particularité de cette loi de paroi réside dans le calcul de  $k$  et  $\varepsilon$  dans les cellules adjacentes à la paroi. Contrairement à la loi de paroi standard, l'hypothèse d'équilibre entre les taux de production et de dissipation de l'énergie cinétique turbulent n'est pas effectuée. Les termes de production et de dissipation de l'énergie cinétique turbulent sont reformulés de manière à tenir compte de la sous couche visqueuse en proche paroi. Ils sont respectivement donnés par :

$$P_k = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \tau_t \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{1}{\kappa y_n} \frac{\tau_p^2}{\rho (c_\mu)^{1/4} (k_p)^{1/2}} \ln \left( \frac{y_n}{y_v} \right) \quad (\text{II.37})$$

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \varepsilon dy = \frac{1}{y_n} \left[ \frac{2\nu}{y_v} + \frac{k_p^{1/2}}{\kappa (c_\mu)^{-3/4}} \ln \left( \frac{y_n}{y_v} \right) \right] k_p \quad (\text{II.38})$$

Où  $y_n$  est la hauteur de la cellule adjacente à la paroi, et  $y_v$  est la taille de la sous couche visqueuse, approchée par  $y_v^* = 11.225$  telle que :

$$\tau_t = \begin{cases} 0, & y < y_v \\ \tau_p, & y > y_v \end{cases}; k = \begin{cases} \left( \frac{y_n}{y_v} \right)^2 k_p, & y < y_v \\ k_p, & y > y_v \end{cases}; \varepsilon = \begin{cases} 2\nu k / y^2, & y < y_v \\ k^{3/2} / \kappa (c_\mu)^{-3/4}, & y > y_v \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

De façon générale, les modèles statiques sont tous confrontés au problème de non universalité de ce type de fermeture. C'est pourquoi un choix de modèle de turbulence ne peut se faire a priori que par une confrontation avec des résultats théoriques ou expérimentaux.

## II.4.3 Lois de paroi « améliorées » (enhanced wall treatment) :

Dans le cas des de parois améliorées, on utilise un seul profil de vitesse. Ce profil couvre toute la couche limite (parties interne et externe).Fluent utilise, dans ce cas, la relation suivante[7] :

$$u^+ = e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{\frac{1}{\Gamma}} u_{tur}^+ \quad (\text{II.40})$$

ou  $\Gamma$  est la fonction de transition donnée par :

$$\Gamma = - \frac{a(y^+)^4}{1+by^+} \quad (\text{II.41})$$

Avec  $a=0.01$  et  $b=5$ . Ce profil, équation (II.40), est composé d'une partie laminaire,  $e^\Gamma u_{lam}^+$  avec :

$$u_{lam}^+ = y^+ \left( 1 + \frac{\alpha}{2} y^+ \right) \quad (\text{II.42})$$

Ou le  $\alpha$  coefficient tient compte du gradient de pression pariétal,

$$\alpha = \frac{\mu}{\rho^2 (u_\tau^2)} \frac{dp}{dx}$$

Ainsi que d'une partie turbulente,  $e^\Gamma u_{lam}^+$ , avec

$$\frac{du_{tur}^+}{dy^+} = \frac{1}{ky^+} [\hat{S}(1 - \beta u^+ - \gamma (u^+)^2)]^{1/2} \quad (\text{II.43})$$

Dans cette partie également, le gradient de pression est représenté par  $\alpha$ , à travers le coefficient  $\hat{S}$  ci-dessous :

$$\hat{S} = \begin{cases} 1 + \alpha y^+ & y^+ < 60 \\ 1 + 60\alpha & y^+ \geq 60 \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Ou l'on a :

$$\beta = \frac{\sigma_t q''}{\rho c_p T_p}$$

$$\gamma = \frac{\sigma_t u_\tau^2}{2c_p T_p}$$

Dans le cas où les coefficients ci-dessus,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont tous égaux à zéro, la relation (II.43) admet comme solution une loi de paroi logarithmique classique.

### III.1. Introduction:

Les logiciels de simulation numérique des écoulements par des méthodes de volumes finis peuvent maintenant être considérés comme de véritable "expérience numérique" lorsque les simulations sont faites avec soin. L'avantage des méthodes numériques est que toutes les quantités physiques liées à l'écoulement (champ de vitesse, concentration, champ de pression...) sont immédiatement disponibles. Dans une expérience, l'obtention de ces quantités en tous points du champ est souvent impossible ou très difficile en pratique. En revanche, la simulation numérique directe(DNS) des équations de Navier-Stokes est encore limitée à des nombres de Reynolds modérés et à des écoulements en géométries simples.

Nous présentons le logiciel de CFD retenu pour la modélisation, en particulier les modèles de turbulence utilisés. Le choix des conditions limites est également un point très important que nous développons. Avant d'effectuer des simulations et présenter les principaux résultats de nous devons nous assurer de la validité du modèle. Pour cela, nous devons comparer les résultats de nos calculs

Une étude de sensibilité du modèle par rapport au maillage va être effectuée. Les logiciels sollicités sont GAMBIT pour le maillage et FLUENT pour la simulation.

### III.2. Processus de simulation numérique

Le schéma suivant illustre le processus d'un calcul scientifique pour la résolution numérique d'un problème[4] :

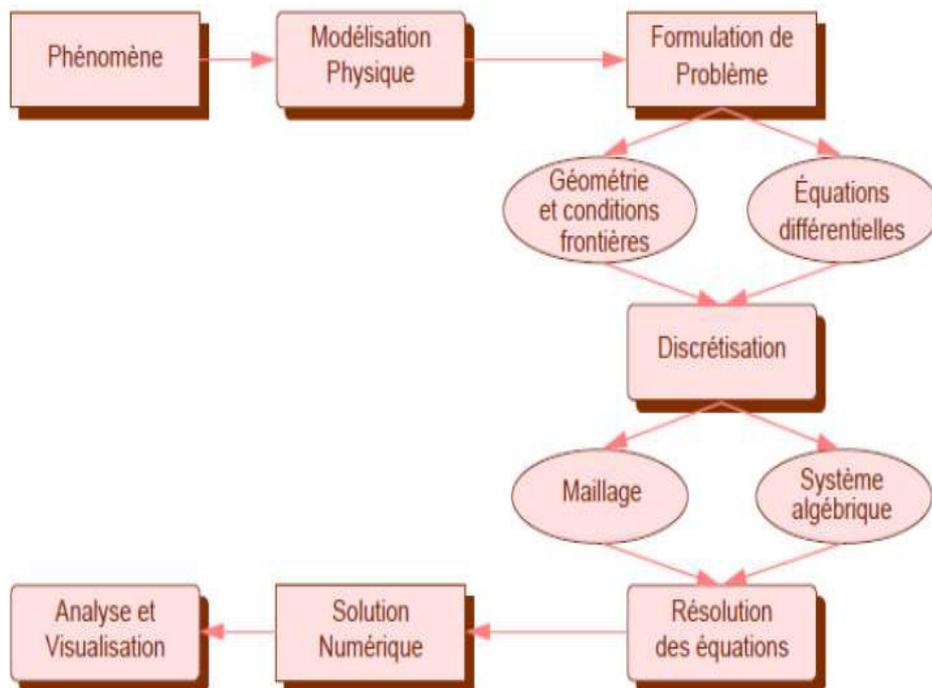


Figure III.1 : Processus de simulation numérique

### III.3. Présentation de code de calcul fluent

Pour réaliser nos simulations, le choix s'est porté sur le code de calcul commercial Fluent (6.2.16) que nous présentons dans cette partie.

#### III.3.1. Architecture du logiciel[4]

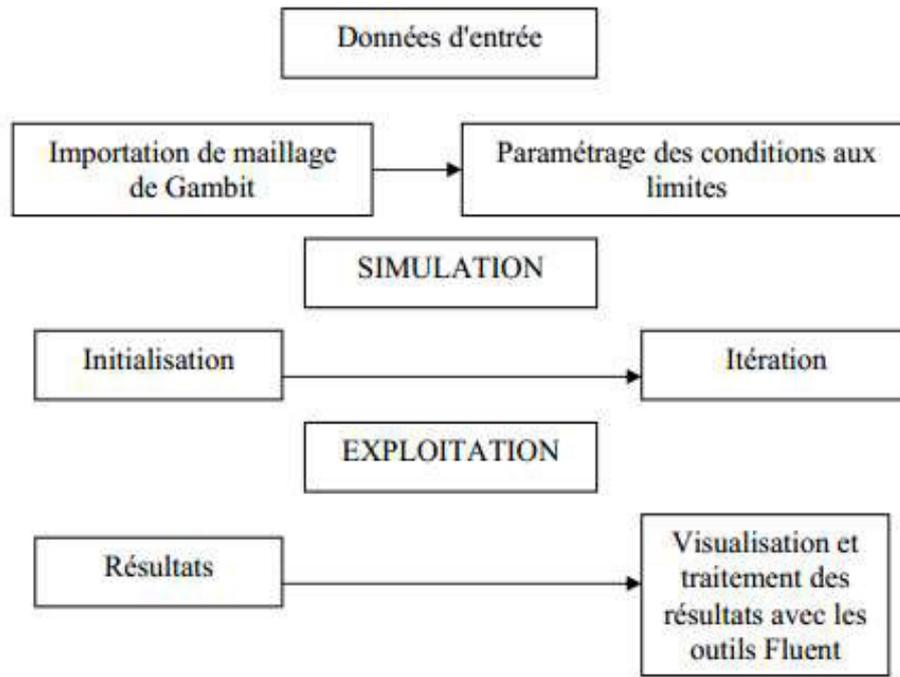
Comme tout logiciel de CFD, il est composé de trois éléments : le préprocesseur, le solveur et le post processeur.

La définition du problème à résoudre s'effectue à l'aide du préprocesseur Gambit. Il permet de représenter la géométrie du système, de définir le type de conditions limites aux frontières du domaine, de spécifier le type de matériau (fluide ou solide). Il fournit aussi la possibilité de discrétiser le domaine, en proposant plusieurs algorithmes de maillage suivant sa géométrie.

Le solveur permet de définir numériquement les conditions opératoires (gravité, pression) dans lesquelles est effectuée la simulation, ainsi que la spécification des conditions au limites. Enfin, il permet de choisir le processus itératif, en proposant notamment plusieurs schémas numériques pour la discrétisation spatiale et temporelle, et pour le couplage de la vitesse et de la pression. Il offre également une interface permettant de contrôler à tout moment l'état d'avancement des calculs.

Le post processeur est l'élément qui permet de visualiser la géométrie et le maillage du domaine, mais surtout d'afficher les résultats obtenus. Il est ainsi possible de visualiser les champs de vecteur vitesse, les champs de pression, de turbulence ainsi que toutes les autres grandeurs calculées sur un segment, une section du domaine ou sur tout le volume. Il offre aussi la possibilité de tracer des courbes et de visualiser les lignes de courant ou la trajectoire de particules.

Le code Fluent, largement utilisé dans l'industrie aéronautique, automobile, offre une interface sophistiquée qui facilite son utilisation. Ces raisons ont motivé notre choix pour l'utilisation de ce logiciel.



**Organigramme (III. 2) : Les différentes étapes effectuées par fluent.**

### III.3.2. Etapes de calcul

Les étapes décrites ci-dessous sont propres au régime permanent. Généralement, on distingue :

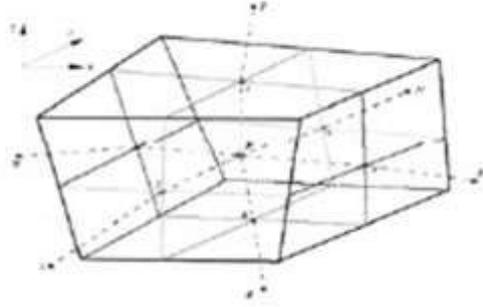
- l'intégration des équations de transport.
- la discrétisation spatiale.
- le couplage pression-vitesse.
- la convergence.

#### III.3.2.1. Intégration des équations de transport

Les équations qui gouvernent l'écoulement (équation de continuité, de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente) sont des équations aux dérivés partielles non linéaires qui n'ont pas de solution analytique d'où la nécessité de faire appel à une méthode de résolution numérique. Dans notre cas, Fluent a été utilisé, incorporant la méthode des volumes finis, basée sur [11]:

- Une génération du maillage : division du domaine physique en volumes de contrôles.
- Une discrétisation des différentes équations integro-différentielles par rapport aux volumes de contrôles obtenant ainsi un système d'équations algébriques pour chaque variable dépendante du problème à résoudre.
- Cette méthode est très répandue en mécanique des fluides tridimensionnelle. Son avantage est qu'elle est conservatrice, c'est-à-dire que tout le flux sortant d'un volume de contrôle entre dans le volume voisin. Un point est positionné au centre

de chaque volume et est appelé centre de volume de contrôle, il sera noté P. les nœuds des volumes voisins seront notés suivant leurs positions N, S, W, E, T et B (se rapportant aux directions North, South, West, East, Top et Bottom respectivement).



**Figure III.3: Volume de contrôle dans un maillage tridimensionnel.**

Son principe est décrit par Patankar (1980) : chaque équation continue est intégrée sur chaque volume de contrôle puis le théorème d'Ostrogradski est utilisé pour transformer certaines intégrales de surface en intégrales de volume.

L'expression générale de ces équations est :

$$\underbrace{div(\rho\Phi\vec{U})}_1 = \underbrace{div(\Gamma grad\Phi)}_2 + \underbrace{S_\Phi}_3 \quad (\text{III.1})$$

(1) représente le bilan entrée/sortie de la quantité  $\Phi$  dans le volume de contrôle  $V$  (de contour A, normale sortante à la surface n) dû à la convection; (2) représente la variation de  $\Phi$  due à la diffusion et (3) est le terme puits/source.

Ces équations sont intégrées sur un volume de contrôle  $dV$  et leur forme intégrale devient alors :

$$\int_A div(\rho\Phi U)dA = \int_A div(\Gamma grad\Phi)dA + \int_A S_\Phi dV \quad (\text{III.2})$$

Après intégration, l'équation (III.2) donne :

$$\sum_f^{Nface} \rho_f \phi_f U_f A_f = \sum_f^{Nface} \Gamma_\phi (\nabla\phi)_n A_f + S_\phi V \quad (\text{III.3})$$

AVEC:

- $Nface$ : nombre de faces de la cellule.
- $\phi_f$  : valeur de  $\phi$  évaluée à la face  $f$ .
- $\rho_f \phi_f U_f$  : débit massique à travers la face  $f$ .
- $A_f$  : surface de la face  $f$ .
- $(\nabla\phi)_n$  : grandeur de  $\nabla\phi$  normale à la face  $f$ .
- $V$  : volume de la cellule

Les équations résolues par FLUENT prennent la même forme générale que celle donnée ci-dessus et s'appliquent aux différentes mailles du volume de contrôle.

### **III.3.2.2. La Discrétisation Spatiale :**

La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle générale de transport en un système d'équations algébriques qui peuvent être résolues en chaque point du maillage par la méthode numérique convenable.

D'une manière générale, le succès de la simulation dépend fortement et presque exclusivement de la méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques obtenues après discrétisations des équations différentielles. Une attention particulière a alors été consacrée à ce point et le résultat est un algorithme de calcul très performant pour les problèmes étudiés.

### **III.3.2.3. Traitement de la Pression :**

Les équations de Navier-Stokes se composent de l'équation de conservation de la masse et des équations de conservation de la quantité de mouvement.

Leur résolution nécessite l'obtention, à chaque instant, d'un champ de pression et d'un champ de vitesse cohérents. Sous la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement, l'équation de continuité se réduit à l'obtention d'un champ de vitesse à divergence nulle.

Le couplage vitesse-pression est délicat à traiter pour les écoulements incompressibles car la pression n'apparaît pas explicitement dans l'équation de conservation de la masse. Plusieurs voies sont utilisées pour aborder ce problème et correspondent à des classes de méthodes différentes.

#### **III.3.2.3.1. L'ALGORITHME DE SIMPLER:**

L'idée générale de cet algorithme est de corriger petit à petit la pression ainsi que les composantes de la vitesse afin que ses variables qui vérifient les équations de la quantité de mouvement vérifient également l'équation de continuité. L'algorithme couramment utilisé se nomme SIMPLE (Semi Implicite Method for Pressure Linked Equation).

Cet algorithme résume la résolution du problème posé dans les séquences suivantes:

- Tous les champs sont estimés en tous points du maillage.
- A l'aide de ces valeurs, les coefficients des équations sont calculés.

- Les coefficients étant fixes, un solveur linéaire est introduit pour résoudre tout d'abord les trois équations de la quantité de mouvement et fournir les composantes de vitesse  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $W^*$  et la pression  $P^*$  correspondante demeurant celle utilisée pour calculer les coefficients de la deuxième étape.

Des corrections  $P'$ ,  $U'$ ,  $V'$  et  $W'$  sont en suite apportés à ces champs afin que les nouveaux champs  $P$ ,  $U$ ,  $V$  et  $W$  soient les champs qui vérifient à la fois les équations de la quantité de mouvement et l'équation de continuité.

$$P = P^* + P'$$

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

$$W = W^* + W'$$

Ces nouvelles valeurs  $P$ ,  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont alors réintégrées dans les équations de la quantité de mouvement. Ce qui constitue d'ailleurs la seule approximation de l'algorithme SIMPLE.

$$U = f_1(P')$$

$$V = f_2(P')$$

$$W = f_3(P')$$

Les champs  $U$ ,  $V$ ,  $W$  sont en suite reconstitués et n'ont plus que pour seule inconnue commune  $P$ .

La substitution de leurs valeurs dans l'équation de continuité donne une relation unique sur  $P$  qui est résolue par le solveur.

Si les critères de convergence sont vérifiés, les champs ainsi déterminés sont les champs solution du pas de temps considéré .si ce n'est pas le processus est réitéré à partir des deuxièmes étapes :

Les coefficients sont recalculés a partir des nouvelles valeurs des champs.

#### III.3.2.4. La sous relaxation

Le sou relaxation est régulièrement utilisé dans les problèmes non linéaires pour éviter que le processus itératif décrit précédemment ne diverge. Elle consiste à diminuer la rapidité des changements d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation  $\alpha_\phi$ . [6]

Comme nous savons, toutes les équations de transport, après avoir été discrétisées, peuvent être mises sous la forme générale suivante :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_u \quad (\text{III.4})$$

Si nous notons  $\phi_p^*$  la valeur de  $\phi_p$  à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\phi_p = \phi_p^* + \left[ \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_u}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (\text{III.5})$$

Où le terme entre parenthèses représente le changement survenu à  $\phi_p$  pendant une itération.

Cette variation peut alors être amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation  $\alpha_\phi$  de la manière suivante :

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha_\phi \left[ \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_u}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (\text{III.6})$$

Il est bien évident que cette procédure de relaxation n'est valable que si la solution finale de l'équation (III.6) (à la fin des itérations) satisfait bien l'équation (III.4). C'est ici le cas dans la mesure où lorsque le processus a convergé,  $\phi_p$  est censé ne plus varier d'une itération à l'autre.

La relation  $\phi_p = \phi_p^*$  est alors obtenue et associée à l'équation (III.6) donne finalement (III.4) recherchée.

Concernant la pression, La sous relaxation s'effectue d'une manière un peu différent compte tenu de l'existence de l'algorithme de couplage vitesse-pression. Elle est simplement introduite dans la correction dans la correction de pression P' sous la forme suivante :

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (\text{III.7})$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre les valeurs 0 et 1. Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et plus la convergence est lente. Mais plus, ils sont forts, plus la sous relaxation est faible et plus il y a de chance faire intervenir des instabilités dans le processus itératif.

Il n'existe pas de généralité pour choisir les coefficients de sous relaxation. Cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de taille des cellules du maillage, de la

procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure itérative.

Pour finir, rappelons que la valeur des ces coefficients peut être imposée différente d'une variable à une autre.

### III.3.2.5. Critères de convergence

Une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations. Elle a convergé lors que les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère qui doit être défini par l'utilisateur. Le critère de convergence est donc utilisé pour stopper le processus itératif lors qu'il est satisfait.

Le critère de convergence utilisé repose sur le résidu d'une équation du problème définie par l'utilisateur. En toute rigueur, le résidu correspond à la somme, sur toutes les mailles, des erreurs effectuées en question lors que les variables déterminées par le processus sont réintégrées dans l'équation discrétisée. Par définition :

$$R_{\Phi} = \sum_{\text{maille}} \left( \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + b - a_p \Phi_p \right) \quad (\text{III. 8})$$

En choisissant une équation du système ainsi qu'une valeur de résidu à ne pas dépasser sur cette équation. L'utilisateur fixe un indicateur de la convergence. A chaque itération, le résidu passe en deçà de la valeur fixée, le processus s'arrête considérant que les calculs sont convergé et passe au pas de temps suivant.

En général, il est difficile de juger de la convergence à partir de ce résidu car il dépend de la taille du système. Fluent rend adimensionnel le résidu en utilisant un facteur d'échelle représentatif du débit de  $\Phi$  sur le domaine. Ce résidu relatif est défini par:

$$R_{\phi} = \frac{\sum_{\text{maillep}} |\sum_{nb} (a_{nb} \Phi_{nb} + b - a_p \Phi_p)|}{\sum_{\text{maillep}} |a_p \Phi_p|} \quad (\text{III. 9})$$

En choisissant une équation du système ainsi qu'une valeur de résidu à ne pas dépasser sur cette équation, l'utilisateur fixe un indicateur de la convergence. A chaque itération, le résidu est calculé sur l'équation choisie et dès que le résidu passe en deçà de la valeur fixée, le processus s'arrête considérant que les calculs ont convergé et passe au pas de temps suivant.

Fluent propose par défaut l'utilisation de ces résidus relatifs, et c'est la méthode que nous utiliserons pour juger de la convergence des calculs.

### III.4. Choix des conditions aux limites

Les écoulements turbulents sont affectés de façon significative par la présence de parois. Au contact avec celle-ci, la vitesse du fluide est nulle. Au voisinage, la turbulence est fortement amortie et les phénomènes dus à la viscosité moléculaire y sont prépondérants. La turbulence augmente très rapidement lorsque l'on s'éloigne des parois. Certaines équations comme celle des modèles de turbulence k- $\epsilon$  ne sont plus valables près des parois car l'écoulement turbulent n'est pas pleinement établi. Une modélisation différente des phénomènes est alors nécessaire dans ce cas.

Deux approches différentes peuvent être utilisées sous Fluent:

- La 1<sup>ere</sup> approche semi-empirique, utilise une fonction appelée "WALL FUNCTION". Elle permet de relier le mur à la couche extérieure, pleinement turbulente.

Il existe trois options d'utilisation : la 1<sup>ere</sup> "standard wall function" est proposée par défaut ; la 2<sup>eme</sup> "non-Equilibrium function" est particulièrement adaptée pour les écoulements complexes, soumis à de forts gradients de pression ; et la 3<sup>eme</sup> "enhanced wall treatment" qui tient le plus compte de l'effet de paroi.

- La 2<sup>eme</sup> approche consiste à modifier le modèle de turbulence choisi pour le rendre compatible avec l'écoulement aux parois. Elle nécessite un raffinement du maillage au voisinage des parois.

### III.5. Conclusion

Dans ce chapitre on a présentée les principales étapes pour le calcul numérique en utilisant les logiciels CFD.

## IV.1. Introduction

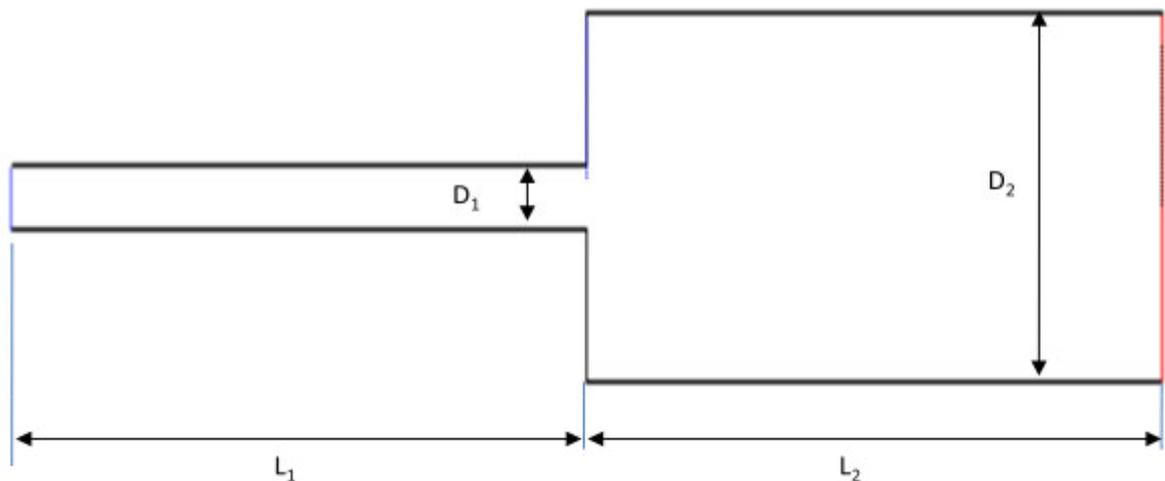
Dans ce chapitre, on va présenter l'ensemble des résultats des calculs effectués concernant la perte de charge à travers une conduite qui subit l'élargissement brusque avec l'utilisation de model de turbulence k-epsilon.

Dans le but de valider les résultats obtenus avec les calculs effectués en chapitre I à partir des relations analytiques et empiriques.

## IV.2. Domaine d'étude :

### IV.2.1. Création de la géométrie :

La géométrie étudiée est représentée ci-dessous. C'est une conduite composée de deux tronçons de diamètres différents (élargissement, ou rétrécissement, brusque suivant le sens de l'écoulement).



**Figure IV.1:** géométrie du domaine de calcul en 2D

Avec:

|           |     |
|-----------|-----|
| $D_1$ (m) | 0.2 |
| $D_2$ (m) | 0.6 |
| $L_1$ (m) | 2   |
| $L_2$ (m) | 2   |

**Tableau(IV.1):**caractéristiques du domaine de calcul

### IV.2.2. Génération du maillage

Le premier travail à accomplir dans la réalisation d'une simulation numérique est la définition d'un maillage adapté à l'écoulement.

La qualité du maillage joue un rôle très important dans la précision et la stabilité du calcul numérique. Le nombre et la distribution des nœuds à travers chaque frontière du

domaine de calcul, est choisi sur la base des considérations physiques. Un test préliminaire pour différents maillages est indispensable pour toute étude numérique.

#### IV.2.2.1. Près de la paroi

Généralement on utilise un maillage de type couche limite près de la paroi dans le but de capter les différentes interactions entre le fluides et les parois. Pour un écoulement turbulent et proche de paroi, la distance normale  $y_p$  donnant la position du premier nœud est déterminée par la relation suivante :

$$y_p = \frac{\nu}{\mu_\tau} y^+ \quad (\text{IV. 1})$$

Avec :

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$  est la viscosité cinématique,  
 $y^+$  est la distance pariétale adimensionnelle,  
 $\mu_\tau$  est la vitesse de frottement donnée par :

$$\mu_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (\text{IV. 2})$$

$\rho$  est la masse volumique,  $\tau_w$  est la contrainte de frottement à la paroi donnée aussi par:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho \overline{C_f} U_\infty^2 \quad (\text{IV. 3})$$

$U_\infty$  est la vitesse de l'écoulement libre, et  $\overline{C_f}$  est le coefficient de frottement moyen.

A travers ces relations, connaissant le coefficient de frottement moyen  $\overline{C_f}$  est en se fixant pour  $y^+$  donné,  $y_p$  pourra être calculée. La distance  $y^+$  est choisie selon le traitement de paroi adopté lors de notre modélisation numérique.

Pour notre étude on choisit un traitement amélioré de paroi (Sous-couche visqueuse) avec:  $1 < y^+ < 5$

Nous prenons  $y^+ = 1$ . Ce qui reste à déterminer est la valeur du  $\overline{C_f}$ .

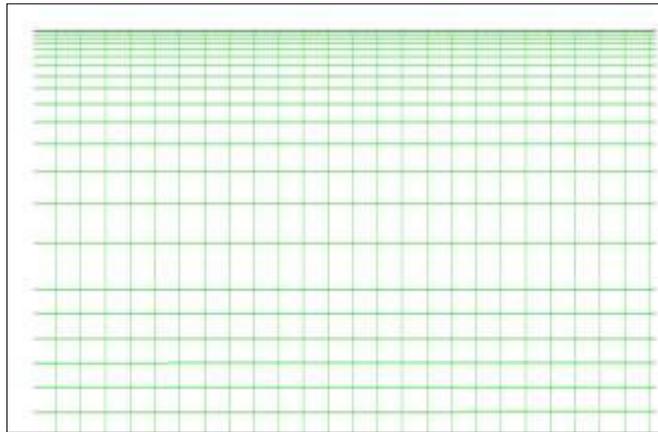
En considérant que l'écoulement turbulent à travers ce canal est similaire à celui le long d'une plaque plane, alors :

$$\frac{\overline{C_f}}{2} = \frac{0.037}{Re^{1/5}} \quad (\text{IV. 4})$$

Une autre relation est donnée par :

$$\overline{C_f} = \frac{0.0244}{Re_x^{1/7}} \quad (\text{IV.5})$$

Les deux relations conduisent approximativement à la même valeur  $y_p = 0.0115 \text{ mm}$   
Ainsi la figure montre le maillage couche limite générée avec cette distance.



**Figure IV.2:** maillage couche limite près des parois.

#### IV.2.2.2. Loin de la paroi

Loin de paroi un maillage quadratique structuré pour le reste de domaine de calcul.

### IV.3. Modèle de calcul

Dans cette analyse, l'écoulement est pris comme stationnaire incompressible et turbulent, les équations de la continuité et de la quantité de mouvement sont employées.

A travers une étude de conditions aux limites on a utilisé le modèle de turbulence k- $\epsilon$  car en plus de son utilisation dans de tels problèmes, il présente une meilleure convergence et une bonne stabilité de la solution. Ce modèle résout deux équations partielles de transports, une pour l'énergie cinétique de la turbulence(k) et l'autre pour le taux de dissipation de la turbulence( $\epsilon$ ).

| Modèle                    | Option                 |
|---------------------------|------------------------|
| Solveur                   | Basé sur la pression   |
| Espace de contrôle        | 2D                     |
| Discretisation temporelle | Stationnaire           |
| Gradient                  | Green Gauss node based |
| Modèle de turbulence      | k- $\epsilon$          |

**Tableau (IV.2):**Model de calcul

**VI.3.1. Le schéma de discrétisation**

Pour obtenir plus de précision on a utilisé le schéma Upwind du 2<sup>eme</sup> ordre tel que la valeur au centre de la cellule est calculée par extension, en série de Taylor, des valeurs qui l'entourent.

|                                |                            |
|--------------------------------|----------------------------|
| Pression                       | 2 <sup>eme</sup> order     |
| Couplage vitesse- pression     | Simple                     |
| Quantité de mouvement          | Upwind du 2 <sup>eme</sup> |
| Energie cinétique turbulente k | Upwind du 2 <sup>eme</sup> |
| Taux de dissipation ε          | Upwind du 2 <sup>eme</sup> |

**Tableau(IV.3):**Schéma de discrétisation

**VI.3.2. Conditions aux limites**

Trois conditions aux limites sont utilisées :

- ❖ A l'entrée : le fluide étant en mouvement, on impose la vitesse comme condition « Velocityinlet ».
- ❖ A la sortie, la condition employée est « out flow ».
- ❖ Condition de paroi « Wall » pour les surfaces intérieur de la conduite.

| Zones  | Types          | Caractéristiques   |
|--------|----------------|--|
| Entrée | VELOCITY INLET | ✓ V= 1m/s<br>✓ Méthode de turbulence : Intensity and hydraulic diameter. |
| Sortie | Out flow       | ✓ flow rate weighting: 1   |

**Tableau(IV.4):**Les valeurs des conditions à l'entrée et la sortie.

L'utilisation du model de turbulence nécessite le calcul de certains paramètres de turbulence comme condition aux limites du domaine d'étude. Les formules suivantes extraites du manuel d'utilisation du code de calcul fluent, sont d'une utilité importante. En effet, la vitesse de convergence des calculs dépend des valeurs données initialement à l'ensemble de ces paramètres.

Le nombre de Reynolds Re est défini par :

$$Re = \frac{UD_H}{\nu} \tag{IV.6}$$

L'intensité de turbulente  $I_t$ :

$$I_t = 0.16(ReD_H)^{-1/8} \tag{IV.7}$$

L'énergie cinétique turbulente  $k$  :

$$k = 1.5(UI_t)^2 \quad (\text{IV.8})$$

L'échelle de longueur de turbulence  $l(m)$  est définie par :

$$l = 0.07 D_H \quad (\text{IV.9})$$

Le taux de dissipation visqueuse  $\epsilon(m^2/s^2)$  est définie par :

$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad (\text{IV.10})$$

Avec :  $C_\mu$  étant un coefficient empirique et vaut 0.9.  $R_h(m)$

Et  $D_h$  étant respectivement le rayon et la profondeur hydraulique. Pour une section cir-

culaire  $R_e = \frac{d}{4}$  et  $D_H = d$

#### IV.4. Convergence des calculs

On considère que le calcul converge lorsque le résidu stabilise.

En raison du temps de calcul et l'amélioration apportée sur les résultats, un résidu de  $10^{-5}$  semble le plus approprié pour une bonne estimation de la précision de convergence. Puisque pour des résidus de  $10^{-6}$ , ou  $10^{-7}$  le temps de calcul est assez important conduisant à une faible amélioration.

Les simulations ont été réalisées sur un ordinateur portable de marque lenovo G50 doté d'un processeur INTEL (R) Core (TM) i-3 CPU P8700 ,1.70GHz et une mémoire RAM de 4Gbit.

#### IV.5. Etude de la sensibilité du maillage

Le choix du maillage est un point essentiel dans la précision et l'exactitude des résultats numériques.

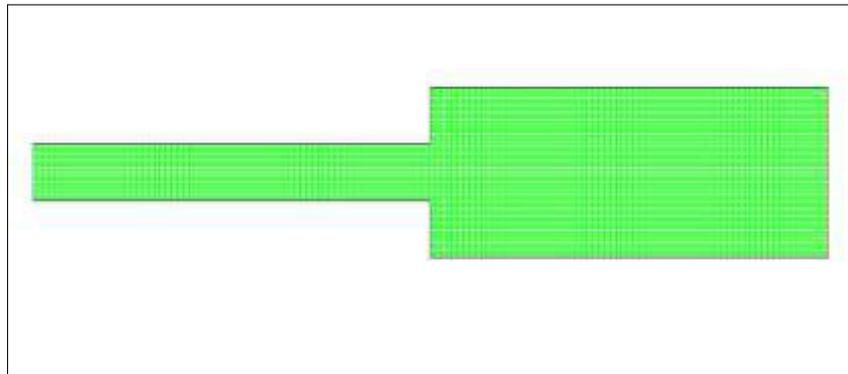
Parmi ces paramètres, on peut citer :

- ✓ Le nombre de mailles.
- ✓ La distance entre les mailles (concentration des mailles).
- ✓ La forme de la maille.

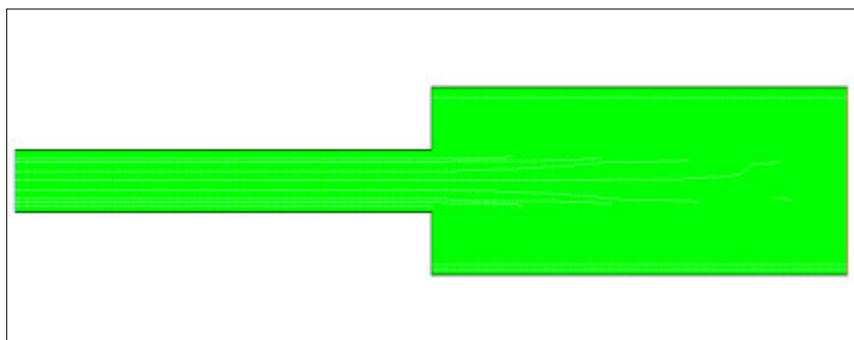
L'étude du maillage est indispensable dans la simulation numérique, car la précision de la solution dépend de la grille utilisée. Pour cela, trois grilles ont été testées dont les caractéristiques sont données par le tableau (IV.5). Près de la paroi, un maillage de type couche limite est généré avec  $y^+ = 1$  ( $y_p = 0.0115\text{mm}$ ) comme il est illustré dans la section (génération maillage).

Pour obtenir des résultats précis en calculs numériques, on doit raffiner le maillage (ce qui induit une augmentation du nombre de mailles), mais on constate que de ce fait le temps de calcul augmente considérablement. Alors, il faut trouver un compromis entre la grille de maillage qui nous donne des résultats acceptables et une durée de calcul raisonnable.

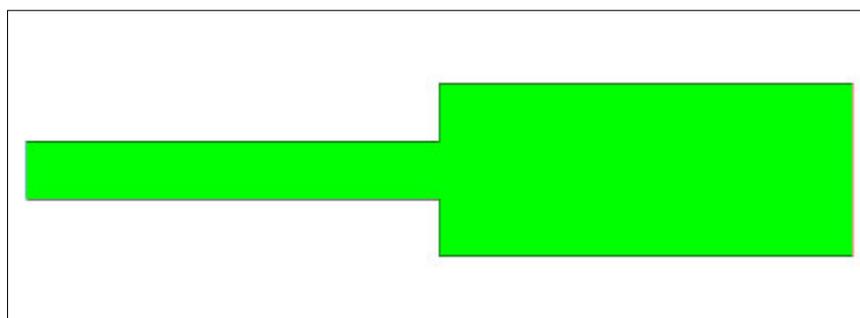
Trois maillage structuré avec différent densités de mailles ont été teste, et sont représentés dans la figure suivantes et le tableau qui suit:



**Figure IV.3:**Maillage M1



**Figure IV.4:**Maillage M2

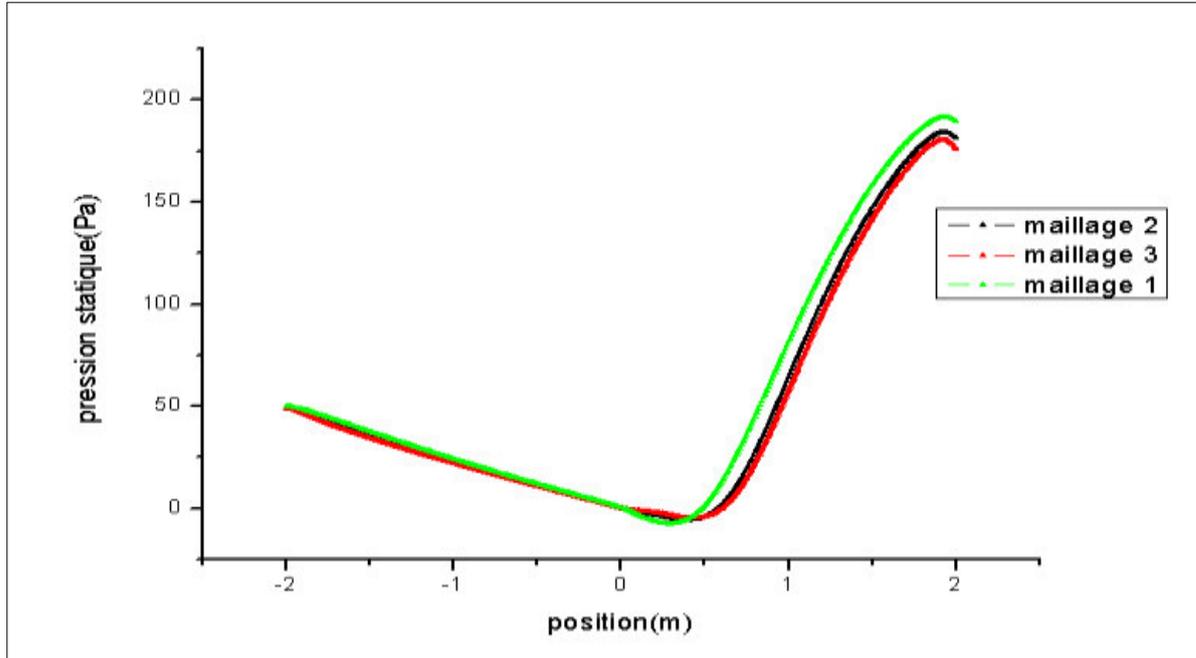


**Figure IV.5:**maillage M3

| Grilles     | Nombre de cellules |
|-------------|--------------------|
| Maillage M1 | 72781              |
| Maillage M2 | 193161             |
| Maillage M3 | 401619             |

**Tableau(IV.5):**Caractéristiques des grilles testées

Pour les trois grilles, nous intéressons à la répartition de la pression au long de l'axe de symétrie.



**Figure IV.6:**influence de la densité de maillage sur les profils de la pression statique.

La densité du maillage se ressent évidemment sur les temps de calcul et le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence d'une solution.

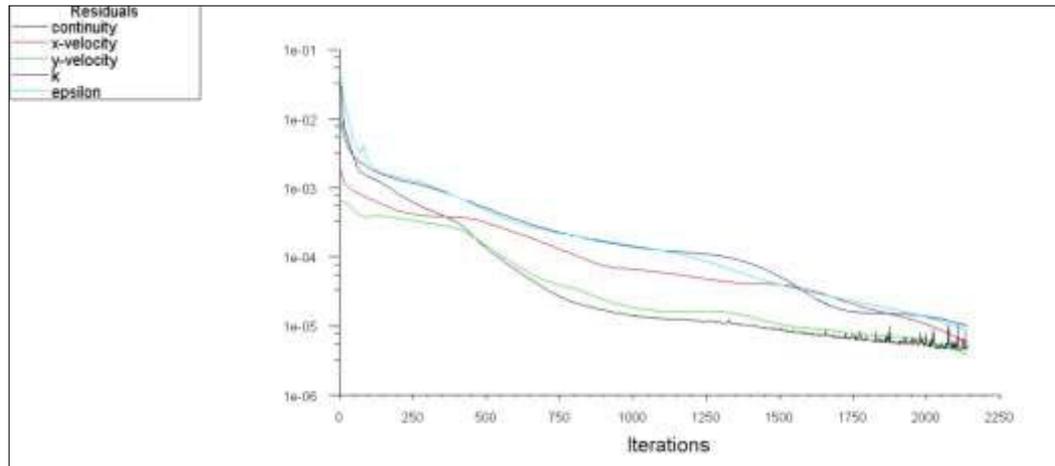
En remarque que les profils de la pression statique sur l'axe de la conduite donnés par les grilles 2 et 3 sont pratiquement identiques; par contre on observe une importante différence avec la grille 1.

Donc on considère que la grille 2(maillage 2) est la mieux adaptée pour un équilibre entre la précision et le temps de calcul.

## IV.6. Présentation des résultats

### 5.6.1. CONVERGENCE DU CALCUL :

Nous commençons par la présentation des résidus obtenus après calculs de la convergence qui atteint plus de 2000 itérations.



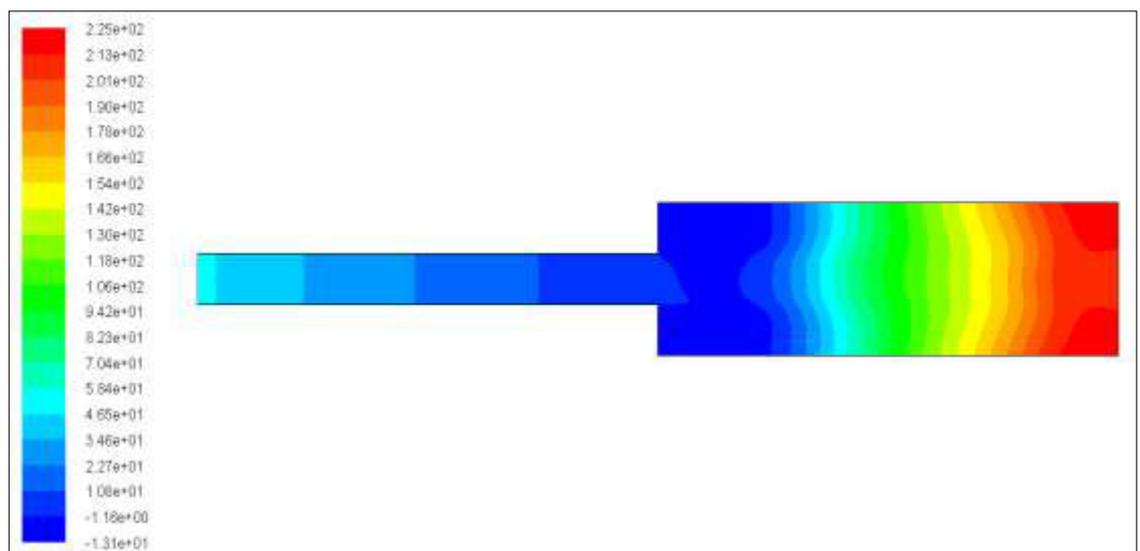
**Figure IV.7:**Résidus obtenus durant la simulation.

Dans cette étude on utilise le modèle k-epsilon avec ces variantes (Standard, RNG et Realizable) pour détermine la perte de charge a travers un élargissement brusque en utilisant le code de calcul Fluent et l'emploi de traitement amélioré des parois (Enhanced Wall Treatment).

### 5.6.2. Cas d'une paroi hydrauliquement lisse

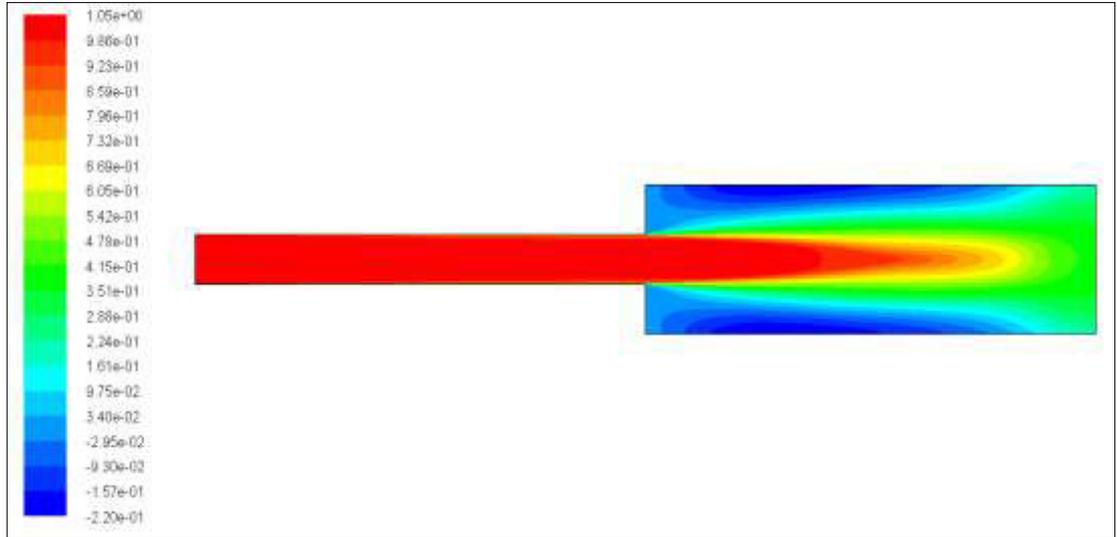
La vitesse à la section d'entrée est prise égale à  $V_1=1$  m/s.

La figure(IV.7) représente la distribution de la pression statique le long de la conduite. La pression maximale est au voisinage du sortie de la conduite, on remarque qu'elle diminue jusqu'à une valeur minimale, puis elle commence à augmenter sur le deuxième tronçon de la conduite à l'aval de l'élargissement.



**Figure IV.8:**la distribution de la pression statique le long de la conduite.

La figure(IV.9) représente la distribution de la vitesse le long de la conduite. En remarque des valeurs négatives indiquant des zones de recirculations au voisinage des parois.

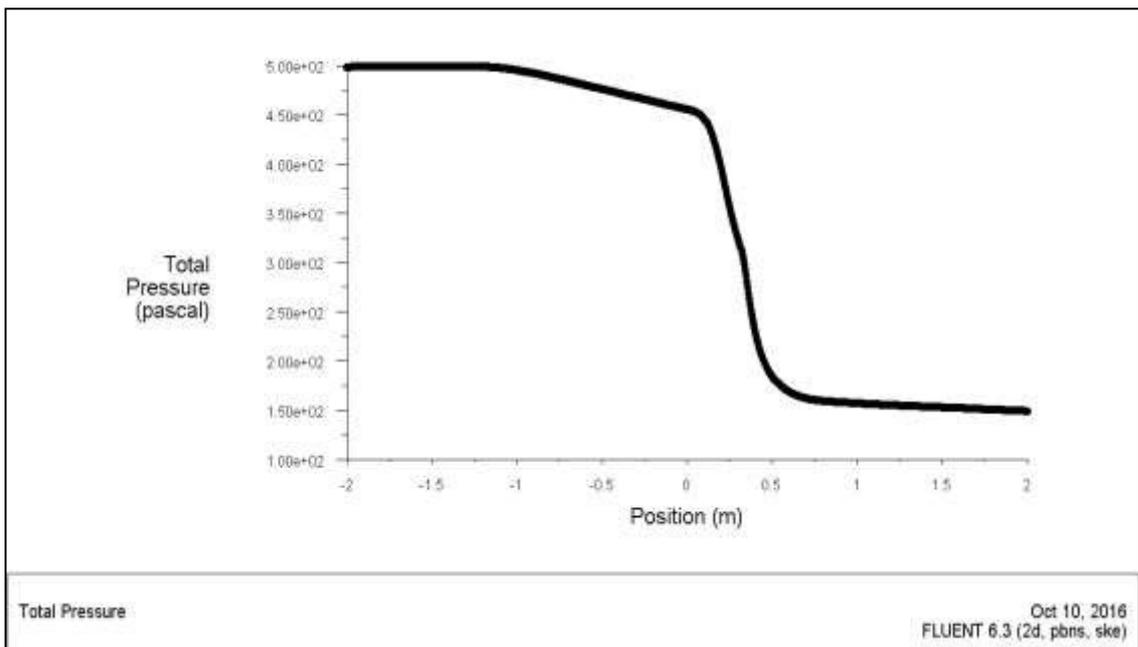


**Figure IV.9:**la distribution de la vitesse le long de la conduite.

Les pertes de charge calculées en utilisant le code de calcul fluent peuvent être présentées dans les figures suivantes:

**a. k-epsilon standard:**

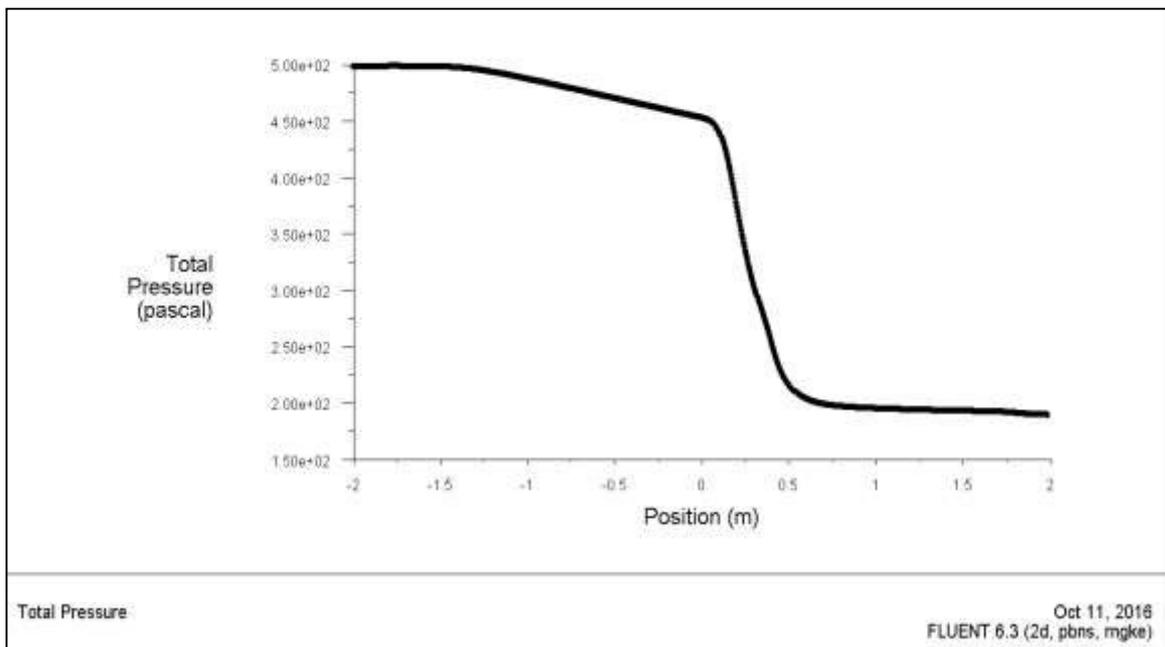
La perte de charge calculée est valent environ de **350Pa**



**Figure IV.10:**la pression totale le long de la conduite lisse k-epsilon standard.

**b. K-epsilon RNG:**

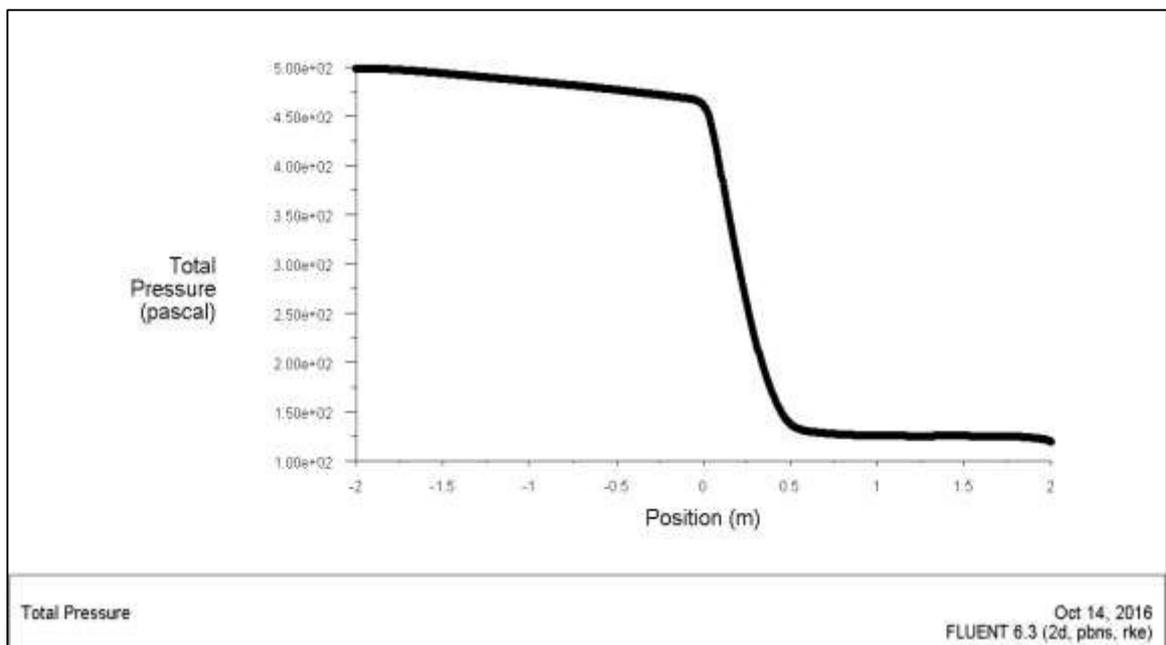
La perte de charge total est valent environ de **320Pa**



**Figure IV.11** :Pression totale le long de la conduite lisse k-epsilon RNG

**c. k-epsilon Réalisable:**

La perte de charge total est valent environ de **375Pa**



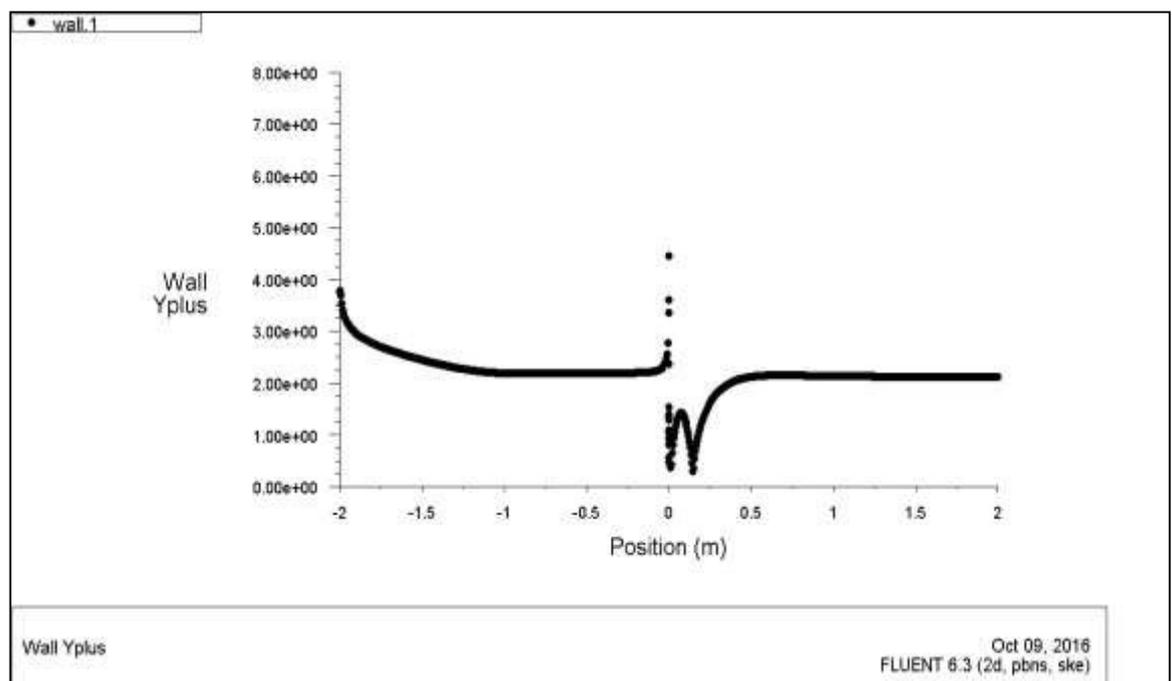
**Figure IV.12**: Pression totale le long de la conduite lisse k-epsilon Réalisable.

- On remarque sur les trois graphes que la courbe de la pression totale se divise sur trois parties essentielles :

- ✓ En amont de la singularité : une perte de charge peu importante due par frottement (fluide -paroi) (perte de charge régulière qui liée essentiellement a l'état de la paroi et la longueur de la conduite). Elle est provoquée par la viscosité du fluide.
- ✓ A la singularité : une perte de charge importante résultant du décollement du fluide des parois et du frottement avec les zones de recirculation.
- ✓ En aval de la singularité : une perte de charge moins importante due par frottements dans les conduites (pertes de charge linéaires). Elle est provoquée par la viscosité du fluide. Puisque la vitesse est diminuée en passant dans le 2<sup>em</sup> tronçon de la conduite pour cela la perte et plus faible que dans le 1<sup>er</sup> tronçon ou la vitesse plus élevée.
- Si on compare les trois graphes des trois variantes que l'allure sa devient de plus en plus précise et claire dans ça forme ; on distingue la linéarité et la courbure au début sa disparaisse dans le model k-epsilon Réalisable.

On constate aussi que la perte de charge retrouvée numériquement est inférieure à celle calculée empiriquement dans le chapitre (I).

Après la présentation de calcule de perte de charge dans l'élargissent brusque on doit vérifier que  $y_p$  est situé dans Sous-couche visqueuse donc  $y^+$  est compris entre 1 et 5. On obtient le résultat suivant qui confirme bien que nous sommes dans cette fourchette-là.



**Figure IV.13:** évaluation de  $y^+$  le long du mur pour le modèle  $k - \epsilon$  et ces variantes.

### 5.6.3. Cas d'une paroi rugueuse :

La vitesse à la section d'entrée est prise égale à  $V_1=1$  m/s. La rugosité (supposée uniforme) de la paroi est de hauteur 0.1mm.

Les pertes de charge calculées en utilisant le code de calcul fluent peuvent être présentées dans les figures suivantes.

#### a. k-epsilon standard:

La perte de charge calculée est valent environ de **450Pa**

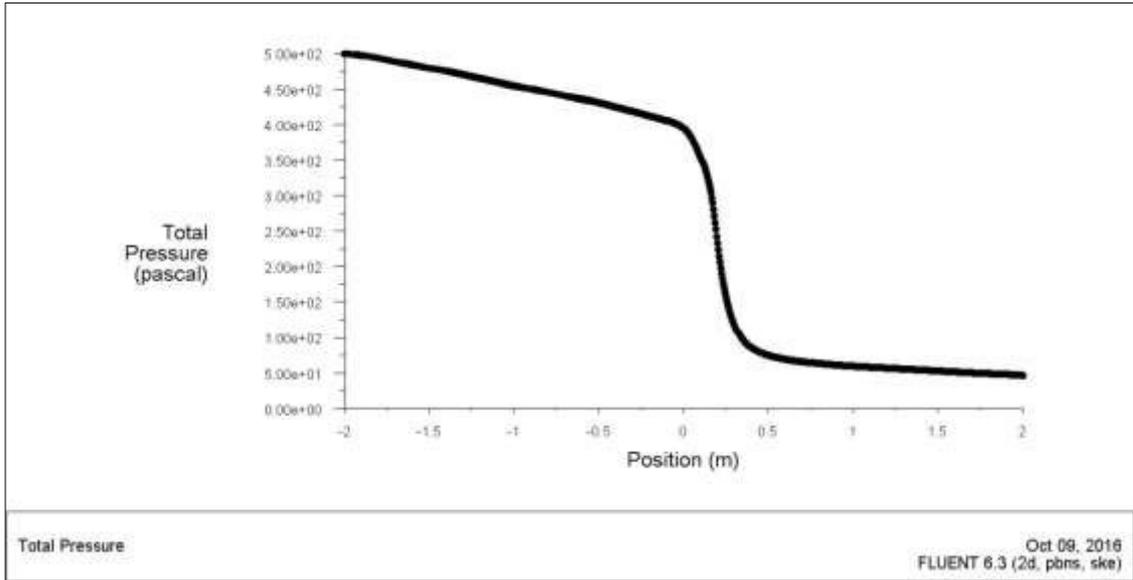


Figure IV.14: la pression totale le long de la conduite rugueuse k-epsilon standard.

#### b. k-epsilon RNG:

La perte de charge total et de **450Pa**

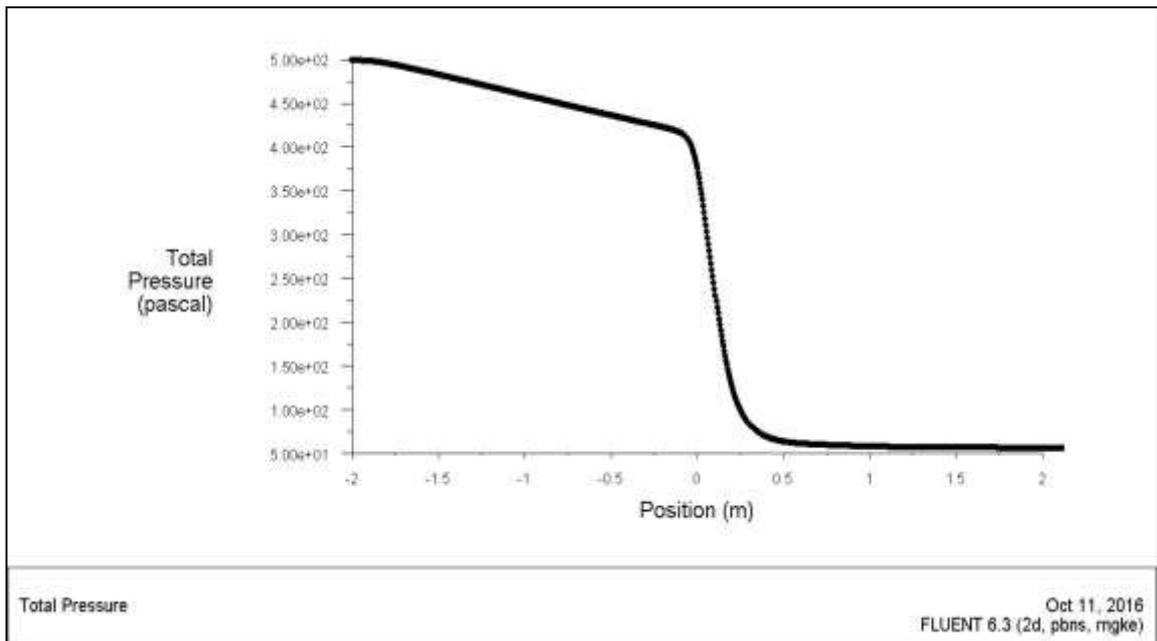


Figure IV.15: la pression totale le long de la conduite rugueuse k-epsilon RNG.

- On remarque 3 phases de tracer de la courbe de pression totale traverse. Mais la distinction de la pente de graphe dans la 1<sup>er</sup> et la troisième phase sa devient beaucoup plus incliner ; les pertes de charge sont importante. Elle est provoquée par la viscosité du fluide et l'effet de la rugosité de la paroi.
- Par contre dan la 2<sup>em</sup> ne change rien, puisque les pertes de charge ne dépend qu' à la singularité géométrique (une perte de charge singulière) ; changement de section brusque.

De même aussi les valeurs trouvées numériquement sont inférieure à celle calculée empiriquement dans le chapitre (I).

Il reste à signalé que le model **k-epsilon Réalisable** il n'est pas représenté dans le cas parois rugueuses ; parce que a chaque exécution de calcul l'ordinateur bloque ; et sa revient peut être la version de logiciel piraté.

## IV.7. Conclusion

Le but dans la première partie de ce travail est de confirmer les résultats de calcul analytique en utilisant des relations semi-empirique par la simulation numérique en utilisant un code de calcule fluent. Le choix de la taille de maillage est toujours un comprimé entre la qualité des résultats et le nombre final des éléments qui pénalise le temps de calcul.

On constate que les calculs donnés par les deux approches (empirique et numérique) sont du même ordre de grandeur.

## Conclusion

L'appréciation des modèles de turbulence se fait après comparaisons par rapport aux méthodes expérimentales. Un des avantages de modèle ***k-ε*standard** est la prise en compte de la variabilité spatiale de l'agitation turbulente, et sa simplicité de mise en œuvre. Il conduit à des résultats qui, sans être toujours quantitativement corrects, restent le plus souvent qualitativement représentatifs. Le modèle ***k-ε*standard**, n'est utilisable que dans les écoulements fortement turbulents, et donc en dehors des régions proches parois. Il est d'autre part basé sur une dépendance locale et surtout linéaire des tensions turbulentes vis à vis du champ moyen. De ce fait, le modèle a tendance à surestimer les contraintes turbulentes (en leur donnant un aspect diffusif qu'elles n'ont généralement pas) et la viscosité turbulente dans les zones de fort cisaillement (couche limite, couche de mélange). D'autre part, cette linéarité fait que ce modèle a quasiment aucune chance de bien reproduire des écoulements complexes, en particulier tridimensionnels. De plus, l'équation du taux de dissipation est une forme approchée, obtenue à partir d'arguments dont certains sont purement intuitifs. Pour cela, il paraît moins adapté aux écoulements plus complexes que le modèle RNG, Ce modèle a pour intérêt majeur d'aboutir sur des résultats plus réalistes dans des régions de fort gradient en ne produisant pas de diffusivité excessive qui faisait défaut au modèle *k-ε* standard. Ceci est très important dans les cas où l'écoulement subit des accélérations ou des décélérations importantes (conduite en présence d'un convergent ou d'un divergent) ou lorsqu'il existe des décollements ou des zones de recirculation.

## REFERENCES

- [1] Écoulement des fluides-Écoulements en conduites. Réseaux  
par André LALLEMAND. Institut national des sciences appliquées de Lyon
- [2] Prediction of Turbulent Flows. Edite by G.F.Hewitt and j.c.Vssilics-CAMBRIGE-
- [3] Modélisation de la turbulence. Yann MARCHESSE. ´ ECOLE CATHOLIQUE  
D'ARTS ET M ETIERS.
- [4] Fluent 6.2 documentation. User's guide .inc.(2001)
- [5] R. Comolet, «Mécanique expérimental des fluides», tom II 5<sup>me</sup> édition, Masson, Paris,  
1990.
- [6] Abdou Amel, (2011): Etude numérique d'une couche limite turbulente  
autour d'un profil bidimensionnel
- [7] J. Bredberg, «On the wall boundary condition for turbulence models» Internal rapport  
0/4, Sweden, 2000
- [8] J.Gustex, «Aérodynamique : Turbulence et couche limite », ed Cepadues, 1989.
- [9] E. Coustols, «Effet des parois rainurées « riblets » sur la structure d'une couche  
limite turbulente» Mec. Ind, (2001),2, 421-434.
- [10] R. Comolet, «Mécanique expérimental des fluides», tom II 5<sup>me</sup> édition, Masson,  
Paris, 1990.
- [11] Vorsteegand, H.K., malalaszker, w., (1995): An introduction to computational fluid  
dynamics, the finite volume method, prentice hall; 257p.