

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB BLIDA 1
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE



Projet de fin d'études « **Master 2** »

Spécialité : **construction mécanique**

Thème : Application des quaternions duaux à la modélisation des robots
manipulateurs (exemple de géométrie directe)

Proposé par : Dr. GOUASMI MAHMOUD promoteur

Réalisé par : BEN AHMED DAHO MOHAMED EL AMINE

Année universitaire : 2017/2018

REMERCIEMENTS

JE TIENS À REMERCIER TOUTES LES PERSONNES QUI M'ONT AIDÉ
LORS DE LA RÉDACTION DE CE MÉMOIRE.

JE VOUDRAIS DANS UN PREMIER TEMPS REMERCIER MES PARENTS
POUR LEUR SOUTIEN DURANT TOUTE MA VIE SCOLAIRE ET
UNIVERSITAIRE.

JE TIENS À TÉMOIGNER TOUTE MA RECONNAISSANCE AUX
PERSONNES SUIVANTES, POUR LEUR AIDE DANS LA RÉALISATION DE
CE MÉMOIRE :

MR TEMMAR MUOSTAFA

MR GOUASMI MAHMOUD

MME IRKI MOUFIDA

MR GUERGADGE

Résumé :

Les quaternions ont été découverts en 1843 par W.R. Hamilton, en 1882. W. KINGDON CLIFFORD a ajouté une extension à cette découverte, essayant de combiner entre l'algèbre des quaternions et la théorie des nombres duaux. De cette combinaison sont nés les quaternions duaux, ces derniers donnent une méthode élégante pour résoudre une vaste gamme de problèmes qui pourrait être complexes, notamment en mécanique, en électromagnétisme, ainsi qu'en informatique.

Dans ce travail, on montre leur efficacité dans la modélisation des robots manipulateurs, en prenant comme exemple d' un robot plan 3R, et en comparant les résultats donnés par les quaternions duaux, avec ceux donnés par le calcul matriciel traditionnel 3D.

Abstract :

The Quaternions were discovered in 1843 by W. Hamilton, in 1882. W. Kingdon Clifford added an extension to this discovery, trying to combine the quaternion algebra and the dual number theory. This combination resulted in the dual quaternions, which provide an elegant method for solving a range of problems that could be complex, particularly in mechanics, electromagnetism, and computer science.

In this work, we show their efficiency in the modeling of manipulative robots, taking an example of a 3R planar robot, and comparing the results given by the dual quaternion method with those given by using (4X4) matrices method.

Abréviations :

JIRA : Japan Industrial Robot Association.

RIA : Robot Institute of America.

IFR : International Federation of Robotics.

DDL : degré de liberté.

Sommaire :

Remerciements

Résumé

Abstract

Liste des figures.....	7
Introduction générale.....	8
1 Chapitre 1 : Généralités sur les robots manipulateurs.....	9
1.1 Définition :	10
1.2 Différence entre un automate et un robot :.....	10
1.3 Historique :	11
1.4 Constitution d'un robot industriel :.....	16
1.4.1 La Structure Mécanique Articulée :	16
1.4.2 L'effecteur :.....	17
1.5 Structure porteuse en chaîne simple :.....	18
1.5.1 Structure cartésienne (PPP):.....	18
1.5.2 Structure cylindrique (RPP):.....	18
1.5.3 Structure sphérique (RRP) :	18
1.6 Espace de travail d'un robot manipulateur :	19
1.7 Redondance de robot :	20
2 Chapitre 2 : La Modélisation des robots manipulateurs	21
2.1 Introduction :	22
2.2 Transformation homogène :	22
2.3 Transformation pure :.....	24
2.4 Le modèle géométrique :.....	24
2.4.1 Le modèle géométrique directe (MGD) :.....	25
2.4.2 Les paramètres de Denavit-Hartenberg :	25
2.4.3 Le modèle géométrique inverse :	28
2.5 Le modèle cinématique :	30
2.5.1 Le modèle cinématique directe (MCD) :.....	30
2.5.2 Le modèle cinématique inverse (MCI) :.....	31
2.6 Les quaternions :.....	32
2.6.1 Définition mathématique :	33
2.6.2 opération et propriétés :	33

2.6.3	Rotations 3D représentées par les quaternions :	33
2.7	Les nombres duaux :	34
2.8	Les quaternions duaux (qd) :	34
2.8.1	Définition et théories :	34
2.8.2	Représentation des translations par les qd :	35
3	Chapitre 03 :	37
3.1	Introduction :	38
3.2	Géométrie directe en utilisant la méthode des paramètres de D-H :	38
3.2.1	La problématique :	38
3.2.2	Paramètre de D-H du modèle choisi :	39
3.2.3	Calcul de la matrice de transformation homogène :	41
3.3	Géométrie directe en utilisant les quaternions duaux :	42
3.4	Conclusion :	47
4	Conclusion générale :	47
5	Bibliographie :	48

Liste des figures :

Figure (1.1) : Deux des premiers brevets de robots industriels.

Figure (1.2) : le premier robot Unimate juste avant son entrée en fonction en 1961

Figure (1.3) : la première ligne robotisée qui consiste en 26 robots soudeurs Unimate.

Figure (1.4) : Les trois premiers modèles du robot PUMA commercialisés par Unimation.

Figure (1.5) : le premier robot SCARA, fabriqué en 1980.

Figure (1.6) : composantes d'un robot à 6 axes (6 ddl).

Figure (1.7) : exemple d'un robot portique.

Figure (1.8) : espace de travail d'un robot sphérique.

Figure (2.1) : transformation du repère.

Figure (2.2) : définition des paramètres de Denavit-Hartenberg.

Figure (2.3) : La transformation du repère de l'outil par rapport au repère de l'atelier.

Figure (2.4) : Exemple de configurations multiples conduisant à la même position de l'organe d'extrémité.

Figure (2.5) : un éclair de génie où Hamilton découvrit la formule fondamentale des quaternions.

Figure (3.1) : un lien i avec son articulation initiale $i-1$ et son articulation finale i .

Figure (3.2) : schéma du modèle choisi.

Figure (3.3) : schéma cinématique du modèle choisi.

Figure (3.4) : schéma du modèle étudié en SOLIDWORKS.

Figure (3.5) : la position initiale (home position) du manipulateur.

Figure (3.6) : configuration du manipulateur après la première manipulation.

Figure (3.7) : configuration du manipulateur après la deuxième rotation.

Figure (3.8) : configuration finale du manipulateur après les trois rotations.

Introduction générale :

Un robot manipulateur est considéré comme étant un système mécanique poly articulé, actionné et commandé. La modélisation des robots, consiste à établir un modèle mathématique. Outre une fonction générale d'aide à la conception, la modélisation a de multiples utilisations, tel que la prédiction des mouvements, la planification des tâches et l'étude des chemins à choisir afin d'éviter les obstacles...etc.

Le modèle mathématique qui peut étudier le robot soit du point de vue des positions, c'est le modèle géométrique, celui du point de vue des vitesses c'est le modèle cinématique tandis que celui en considérant les efforts mis en jeux, sera le modèle dynamique.

Les deux premiers modèles interviennent dans le calcul de la transformation de coordonnées, permettant de programmer le robot dans l'espace de la tâche. C'est un aspect théorique qui intéresse surtout le concepteur des robots.

Pour obtenir ces modèle mathématique il existe plusieurs chemins, la méthode de Denavit et Hartenberg et celle de Khalil sont les plus répandus, ces derniers se basent sur le calcul matriciel.

Cependant Une autre méthode moins utilisée mais beaucoup plus efficace et beaucoup plus simple existe ; celle utilisant s'appelle les quaternions duaux.

Nous allons faire une application sur un manipulateur à 3 liens, en calculant sont modèle mathématique par la méthode de Denavit et Hartenberg, puis par les quaternions duaux, et ainsi on pourra comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.

1 Chapitre 1 : Généralités sur les robots manipulateurs.

1.1 Définition :

Généralement, un robot manipulateur est considéré comme un système articulé rigide. L'appellation robot n'est pas nouvelle, elle a pour origine le mot *robot* extrait de la littérature grecque et qui veut dire travail. [1]

La définition que l'on donne actuellement du robot industriel diffère quelque peu selon les pays :

- La GIRA définit un robot comme étant un système versatile doté d'une mémoire et pouvant effectuer des mouvements comme ceux d'un opérateur humain [1].
- La RIA le définit comme étant un manipulateur à fonction multiples programmé pour réaliser automatiquement des tâches variées éventuellement répétitives [1].
- Selon la norme internationale ISO 8373, un robot industriel est un manipulateur multi-application reprogrammable commandé automatiquement, programmable sur trois axes ou plus, qui peut être fixé sur place ou mobile, destiné à être utilisé dans des applications d'automatisation industrielle [2].

Pour mériter le nom de robot, un système doit posséder une certaine flexibilité, caractérisée par les propriétés suivantes [3] :

- La *versatilité* : Un robot doit avoir la capacité de pouvoir exécuter une variété de tâches, ou la même tâche de différente manière ;

- L'*auto-adaptativité* : Un robot doit pouvoir s'adapter à un environnement changeant au cours de l'exécution de ses tâches.

Pour résumer, un robot est souvent défini comme un manipulateur automatique à cycles programmables.

1.2 Différence entre un automate et un robot :

Un automate est un dispositif se comportant de manière automatique, c'est-à-dire sans l'intervention d'un humain.

Les mécanismes de l'automate obéissent à un programme préétabli.

Un robot est un automate doté de capteurs et d'effecteurs lui donnant une capacité d'adaptation et de déplacement proche de l'autonomie. Un robot est un agent physique réalisant des tâches dans l'environnement dans lequel il évolue.

Les robots ont des capteurs qui recueillent des informations de l'environnement dans lesquels ils évoluent, influençant l'activité des organes moteurs. [4]

1.3 Historique :

Un des premiers robots industriels a été conçu par l'américain Willard L. G. Pollard Jr. qui a fait une demande de brevet pour son invention en 1934 [5]. Il s'agit d'un robot parallèle à deux ddl destiné à l'application de peinture sur la carrosserie d'une automobile. Une licence de ce brevet a été vendue à la compagnie De Vilbiss en 1937. En 1941, De Vilbiss a fabriqué le premier robot industriel (un robot de peinture) sous la direction d'Harold Roselund. Ce robot n'était pas le robot de Pollard, mais un robot sériel (figure 1.1) inventé par M. Roselund lui même [6].

De toute évidence, les inventions des messieurs Pollard et de M. Roselund n'ont pas eu l'effet désiré .C'est beaucoup plus tard, en 1954 que l'américain George Devol fait la demande d'un brevet pour un robot de transfert qui va donner naissance à la robotique industrielle, telle qu'on la connaît aujourd'hui [7]

C'était pendant un cocktail au Connecticut en 1956 que M. Devol rencontre M. Joseph Engelberger [8], un jeune ingénieur qui travaillait dans l'industrie spatiale, et lui fait part de son invention. Engelberger devient rapidement passionné par l'invention de Devol et démarre la compagnie Unimation. Entre temps, la compagnie AMF introduit le robot Versatran, le premier robot cylindrique. En 1962, six robots Versatran ont été installés dans une usine de Ford.

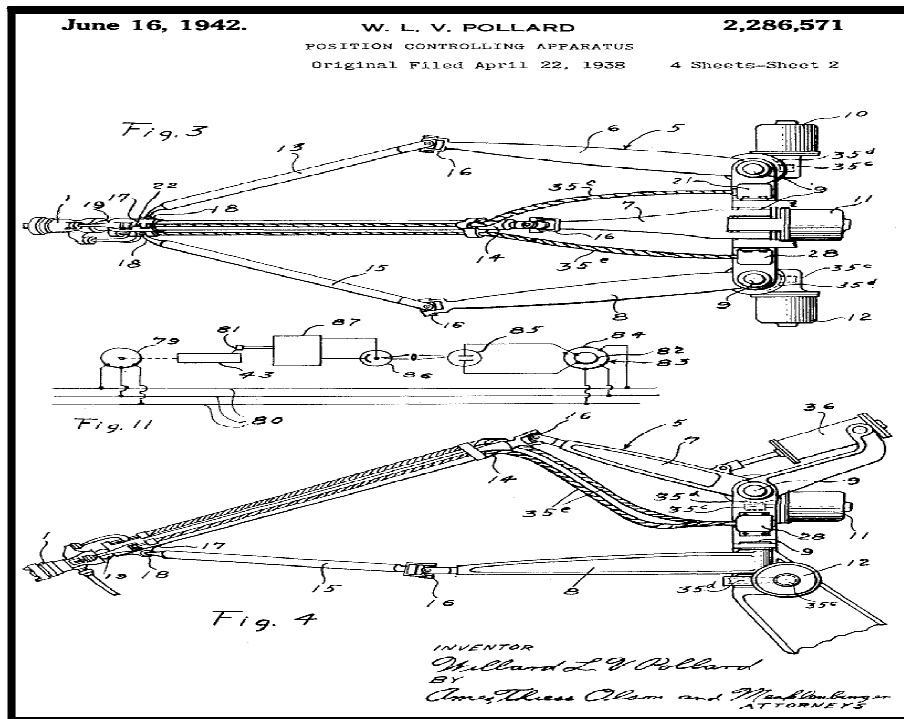
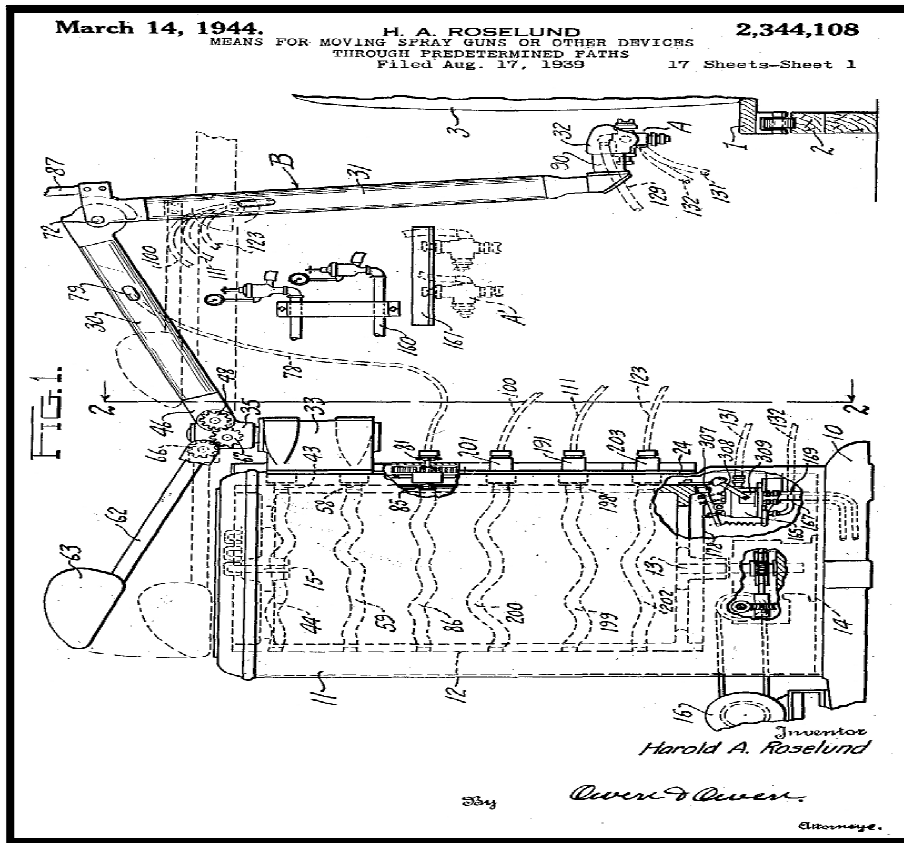


Figure 1.1 : Deux des premiers brevets de robots industriels. [6]

C'est en 1961 qu'Unimation développe leur premier prototype, l'Unimate, et le vend (à fortes pertes) à General Motors (figure 1.2).

En 1964, General Motors commande 66 autres robots Unimate,

En 1969, Unimation installe 26 robots soudeurs sur une ligne d'assemblage de Chevrolet Vega, chez General Motors (figure 1.3).



Figure 1.2 : le premier robot Unimate juste avant son entrée en fonction en 1961

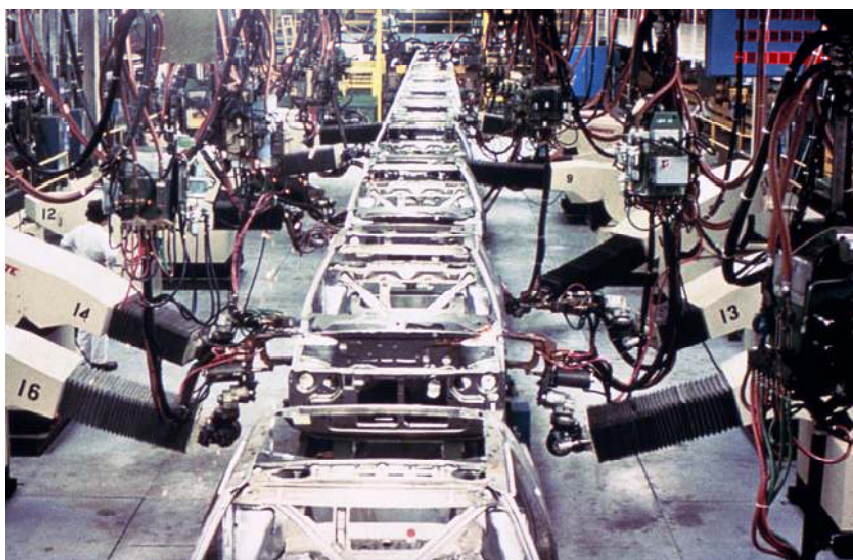


Figure 1.3 : la première ligne robotisée qui consiste en 26 robots soudeurs Unimate.

En 1969, Victor Scheinman développe le Stanford Arm à l'Université Stanford. Il s'agit de l'architecture qui est aujourd'hui utilisée par presque tous les robots sériels à six ddl.

En 1973, Scheinman démarre sa propre entreprise et commercialise son design sous le nom Vicarm. Unimation achète le Vicarm en 1977, l'améliore, et le renomme PUMA pour Programmable Universal Machine for Assembly (figure 1.4). Le premier robot PUMA est installé en 1979, dans une usine de General Motors. Unimation finit par être vendu à l'entreprise suisse Stäubli en 1989.



Figure 1.4 : Les trois premiers modèles du robot PUMA commercialisés par Unimation.

Aux débuts des années 1970, plusieurs grandes entreprises se lancent dans la fabrication de robots industriels. Asea (aujourd'hui ABB), après avoir installé quelques 25 robots Unimate, développe son propre robot à six ddl en 1973, l'IRB 6, le premier robot à six ddl avec un parallélogramme. La même année, le fabricant allemand KUKA développe son propre robot à six ddl, le FAMULUS.

En 1968, Unimation vend une licence à Kawasaki Heavy Industries, qui développe le premier robot industriel au Japon en 1969, le Kawasaki-Unimate 2000. Tout de suite après la sortie du robot IRB 6, plusieurs < copies > apparaissent au Japon, dont une fabriquée en 1977 par Yaskawa, le Motoman L10. En 1974, Fujitsu-Fanuc, un grand fabricant de machines à commandes numériques, produit son premier robot industriel. En 1980, 19 000 robots industriels ont déjà été fabriqués au Japon par quelques 150 fabricants, dont Kawasaki, Yaskawa, Kitachi, Mitsubishi Heavy Industries, Fanuc et Nachi.

Le Japon devient le plus grand fabricant et utilisateur de robots industriels.

En 1978, Hiroshi Makino, professeur à l'université de Yamanashi, invente le robot SCARA [9]. Sankyo Seiki et Nitto Seiko sont les premiers fabricants à produire des versions commerciales de ce robot, en 1981.[10]



Figure 1.5 : le premier robot SCARA, fabriqué en 1980.

Une étude réalisée par IFR stipule que le nombre de robots en activité dans le milieu industriel est estimé à 1.5 million en 2015. Le même rapport prévoit 2 millions de robots en 2017 et une augmentation des ventes mondiales de 15 % en 2018.

En 2014, le marché de la robotique industrielle et de service pesait près de 32 milliards de dollars. Selon la même étude de l'IFR, les experts prévoient un doublement des ventes entre 2015 et 2018.

Sans surprise, 70 % de la production mondiale des robots industriels est détenu par 5 pays, à savoir la Chine, le Japon, les USA, la Corée du Sud et l'Allemagne, avec respectivement 57000, 29000, 26000, 25000 et 20000 unités vendues. Ainsi, l'Asie devance l'Europe et les USA avec une part de marché de 25 %.

En Europe, l'Allemagne reste le pays le plus robotisé, suivi de l'Italie (6200 unités) et la France (3000 unités). En 2015 [11].

1.4 Constitution d'un robot industriel :

Un robot est essentiellement une structure mécanique poly-articulée, équipée d'actionneurs, de capteurs, d'une unité de traitement de l'information et de sources d'énergie. Le robot est en effet conçu pour saisir et déplacer des objets. Ceci suppose donc une structure mécanique. La maîtrise d'un objet dans l'espace implique sa localisation et son orientation. Pour localiser un point de l'objet dans l'espace, il faut disposer de 6 degrés de liberté (ddl), qui sont les 3 rotations, et les 3 translations d'usage. (Un point de l'objet étant fixe, si l'on désire orienter l'objet de manière quelconque, il faut disposer en plus de 3 autres ddl qui sont nécessairement des rotations)

Les 3 premiers ddl définissent ce que l'on appelle le porteur (bras articulé), alors que les suivants constituent un poignet à l'extrémité duquel se trouve l'organe terminal du robot (l'effecteur).

Il faut donc, et il suffit de, 6 ddl pour qu'un système soit complet, car on désire avoir une multifonctionnalité maximale [12]

Un robot lui-même se compose de deux sous ensembles : une structure mécanique articulée et un effecteur.

1.4.1 La Structure Mécanique Articulée :

Le système mécanique articulé est un mécanisme ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain. Il permet de remplacer, ou de prolonger, son action. Son rôle est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données. Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides, assemblés par des liaisons appelées articulations. Sa motorisation est réalisée par des actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés.

On distingue trois types de chaînes:

- Chaînes ouvertes simples (aucun retour mécanique d'un segment à un autre dans la chaîne).
- Chaînes arborescentes (parallèle) (il existe plusieurs organes terminales qui agissent en parallèle)

- Chaînes fermées (il existe un retour mécanique d'un ou plusieurs segments à un autre dans la chaîne) [13]

1.4.2 L'effecteur :

L'effecteur est l'organe terminal du robot, fixé au poignet. Ce dernier se termine généralement par une plaque percée de trous filetés; cela permet la fixation de différents effecteurs à un robot universel et donc l'adaptation de celui-ci à des tâches spécifiques [13].

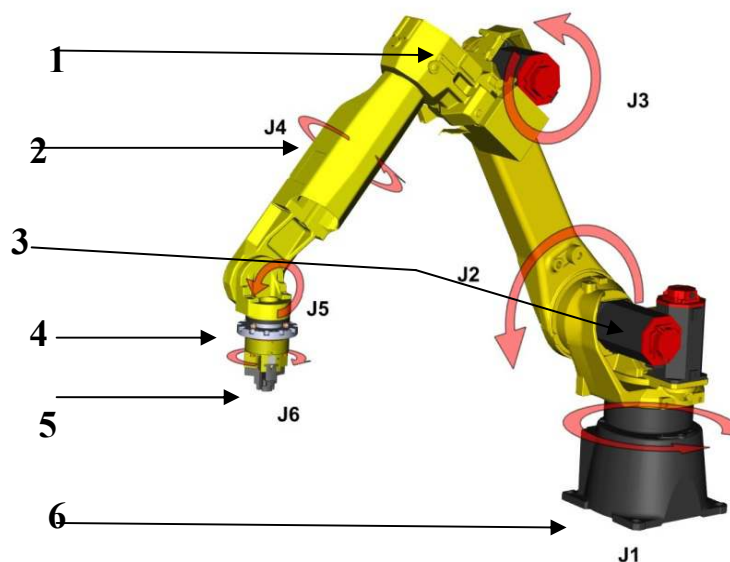


Figure 1.6 : composantes d'un robot à 6 axes (6 ddl).

1. Axe = articulation.
2. Corps = segment.
3. Actionneur = moteur.
4. Organe terminal.
5. Effecteur = outil.
6. Base.

1.5 Structure porteuse en chaîne simple [14] :

La structure porteuse comporte le plus souvent 3 axes. Comme un point de l'espace est repéré par 3 coordonnées, le nom du type de la structure porteuse est souvent désigné par le nom du système de coordonnées correspondant.

1.5.1 Structure cartésienne (PPP):

Elle est constituée de 3 liaisons glissières, en générale, placées orthogonalement. Ce type de structure se rencontre dans les robots portiques, utilisés par exemple dans l'industrie automobile également pour des robots de plus petites tailles utilisés en assemblage. (figure 1.7)

1.5.2 Structure cylindrique (RPP):

Les deux premières liaisons, pivot et glissière, ont des axes parallèles. La liaison glissière suivante est disposée perpendiculairement. Ce type de structure est assez utilisé actuellement pour les robots industriels.

On cite aussi la structure dite : bi-cylindrique, elle est formée de deux axes de rotation et d'un axe de translation parallèle, tel que les robots SCARA (RRP). (figure 1.5).

1.5.3 Structure sphérique (RRP) :

Assez peu utilisée également, elle correspond à des coordonnées sphériques les deux premiers axes sont orthogonaux et concourants la translation est perpendiculaire au second axe de rotation.

Il existe aussi des structures bi-sphérique (RRR) : constituée de deux axes orthogonaux formant les articulations de l'épaule et d'un 3^{em} axes parallèle au second formant le coude. (robot STAUBLI). (figure 1.6)

R : 1 ddl rotation (revolute)

P : 1 ddl translation (prismatic)

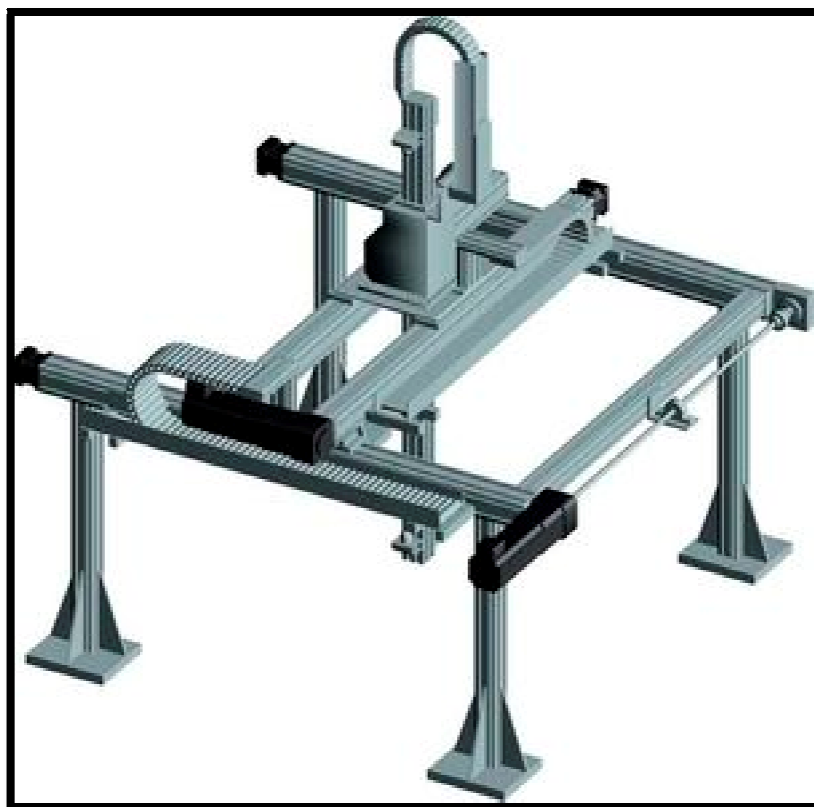


Figure 1.7 : exemple d'un robot portique.

1.6 Espace de travail d'un robot manipulateur :

C'est le volume que peut balayer le centre du poignet (point référence), sa mesure en m^3 dépend du type de la structure porteuse et des limites des déplacements angulaires et linéaires de chaque axe.

Chaque architecture donne un espace de travail différent selon la tâche souhaitée être accomplie par le manipulateur.

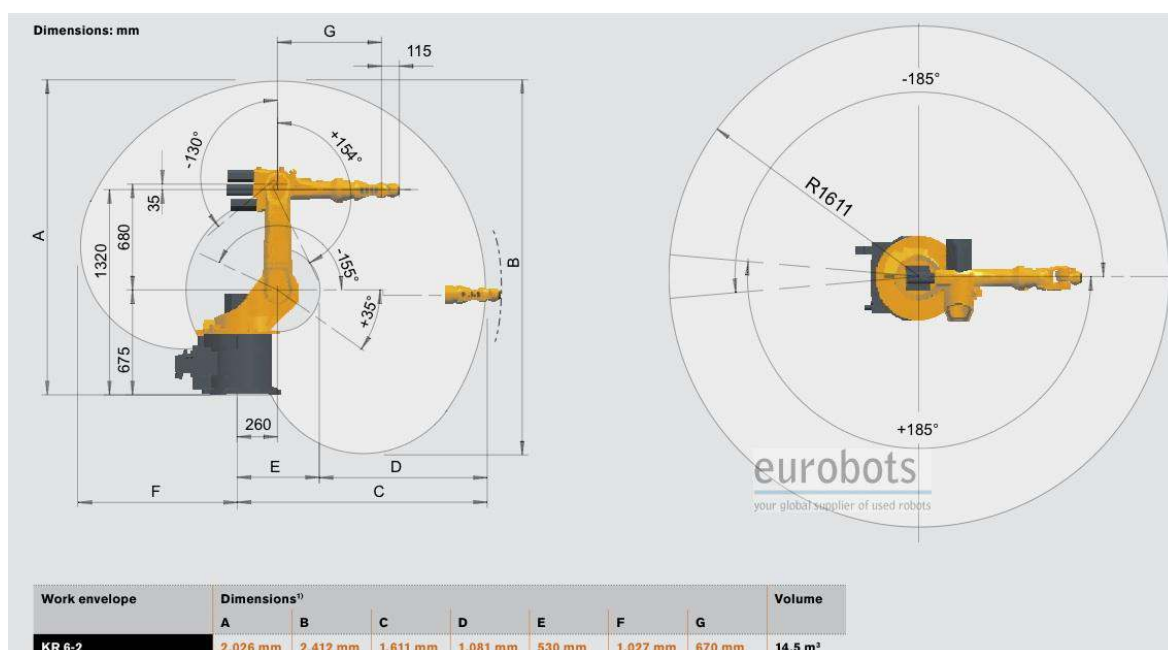


Figure 1.8 : espace de travail d'un robot sphérique. [15]

1.7 Redondance de robot : [23]

On définit :

Indice de mobilité du robot IM = nombre d'articulation rotoïde/prismatique du robot.

Degré de liberté du robot ddl : nombre de mouvement indépendant de l'organe terminal.

Si : $IM = DDL \forall$ la configuration du robot alors le robot est non redondant.

Si : $IM < DDL$ pour certains configurations du robot alors : le robot est dit localement redondant. (Configurations singulières)

Si : $IM < DDL \forall$ la configuration du robot alors le robot est dit redondant

2 Chapitre 2 : La Modélisation des robots manipulateurs

2.1 Introduction :

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- Les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot). (et qu'on va détailler dans cet exposé) Parmi ces modèles, on distingue
 - Les modèles *géométriques* direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme et inversement,
 - Les modèles *cinématiques* direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction de la vitesse articulaire et inversement.
- Les modèles *dynamiques* définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

2.2 Transformation homogène [16] :

Soit $(P_x, P_y, P_z)_i$ les coordonnées cartésiennes d'un point P arbitraire, mesuré dans le repère $R_i(O, x, y, z)_i$, Les coordonnées homogènes du point P sont les suivantes :

$(wP_x, wP_y, wP_z, w)_i$ ou w est le facteur d'échelle, dans la robotique $w = 1$. Les coordonnées homogènes du point P sont représentées par le vecteur colonne :

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Les coordonnées homogènes d'un plan Q de l'équation :

$$\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i + \delta_i = 0 \quad (2.2)$$

Exprimés selon le repère R_i , sont données par le vecteur ligne :

$$Q_i = [\alpha_i \ \beta_i \ \gamma_i \ \delta_i] \quad (2.3)$$

α, β, γ : les coordonnées du plan Q sur les axes x, y, z respectivement.

δ : constante.

Si un point P appartient à un plan Q, le produit matriciel $Q_i * P_i$ est nul :

$$Q_i * P_i = [\alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i \quad \delta_i] * P_i = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}_i = 0 \quad (2.4)$$

La transformation (translation et/ou rotation) d'un repère R_i au repère R_j est représentée par la matrice de transformation homogène T_i^j de dimension (4*4) où :

$$T_i^j = [s_i^j \quad n_i^j \quad a_i^j \quad P_i^j] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_x & n_y & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

où, s_i^j, n_i^j, a_i^j contiennent les composants des vecteurs unitaires suivant $x_j, y_j,$ et z_k respectivement du repère R_j exprimées dans le repère R_i et P_i^j représente les coordonnées de l'origine O_j de repère R_j exprimées dans R_i .

On peut dire également que la matrice T_i^j définit le repère R_j dans le repère R_i . (représentation de R_j dans R_i), elle permet aussi le passage du repère R_j au repère R_i .

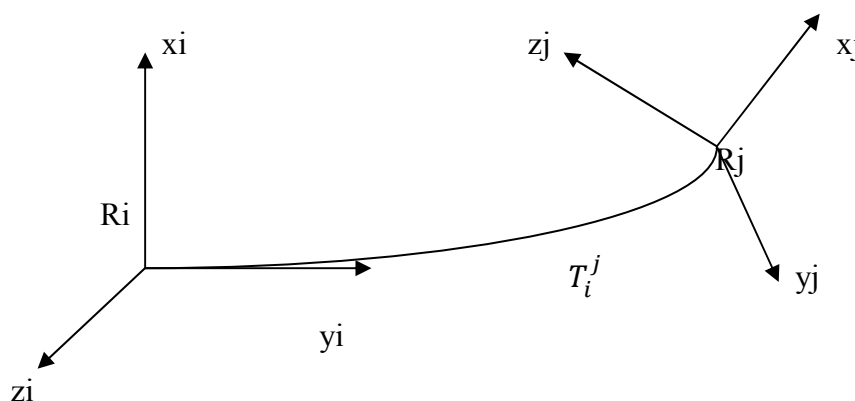


Figure 2.1 : transformation du repère.

2.3 Transformation pure :

Dans le contexte de l'utilisation des matrices homogènes en tant que matrice de transformation, nous aurons besoin de définir quatre matrices homogènes de transformations de base (ou pures). La première matrice est celle qui correspond à une translation pure :

$$\mathbf{H}_{\text{trans}}(p_x, p_y, p_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Chacune des trois autres matrices correspond à une rotation autour d'un axe i , j ou k :

$$\mathbf{H}_{\text{rot}, i}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H}_{\text{rot}, j}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}_{\text{rot}, k}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.4 Le modèle géométrique :

Un robot est constitué d'un ensemble de solides liés par des liaisons mécaniques, pour chacun de ces solides, les positions et orientations relatives des liaisons sont définies par des longueurs et des angles qui correspondent à des paramètres de construction du robot. Ce sont donc des grandeurs constantes pour un robot donné, qui caractérisent sa géométrie. [14]

Il existe deux chemins pour le calcul d'un modèle géométrique du robot : soit la géométrie directe qui consiste à trouver la position de l'outil terminal en connaissant les mouvements donnés à chaque articulation, soit la méthode inverse où le problème est de déterminer les mouvements des articulations pour atteindre une telle position donnée de l'outil terminal.

2.4.1 Le modèle géométrique directe (MGD) :

Afin de calculer l'équation géométrique directe d'un bras manipulateur à chaîne ouverte simple, une méthode systématique et générale doit être appliquée pour définir la position et l'orientation relative de deux corps consécutifs. Les méthodes de Denavit-Hartenberg (1955) et de Khalil (1945-2017) et Kleininger sont les plus répandues. [16]

On s'intéresse dans la MGD à la relation liant l'espace articulaire associé aux différentes liaisons du robot avec l'espace opérationnel dans lequel est définie la situation de l'organe terminal. Cette relation s'exprime à l'aide de l'équation suivante :

$$X = f(q) \quad (2.10)$$

Où

$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in R^n$: Vecteur des variables articulaires.

$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^m$: Vecteur des variables opérationnelles, $m \leq n$.

M : mobilité ou ddl. [17].

Le problème est comment déterminer deux repères attachés aux deux corps ?, et comment calculer les transformations entre eux ? L'une des solutions les plus utilisées est celle de Denavit et Hartenberg.

2.4.2 Les paramètres de Denavit-Hartenberg : [16,17]

La structure d'un robot est composée de n corps C_i , $i = 1$ à n , plus la base (C_0), reliés entre eux par des liaisons rotatives ou prismatiques, l'articulation i relie le corps C_i au corps C_{i-1} . Afin de définir la relation entre les positions des corps on associe à chaque corps C_i le repère : $R_i(O_i; x_i; y_i; z_i)$.

La matrice de transformation du repère R_{i-1} au repère R_i s'exprime en fonction des paramètres (de Denavit-Hartenberg) suivants (Fig 2.10) :

Les paramètres α_{i-1} , a_{i-1} , θ_i et r_i , avec $i = 1, 2, \dots, n$, placés sur cette figure sont appelés paramètres de Denavit-Hartenberg. Textuellement, on peut les définir comme suit :
 – α_{i-1} : angle algébrique entre z_{i-1} et z_i , mesuré autour de x_{i-1} ;

- a_{i-1} : distance arithmétique de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons L_{i-1} et L_i mesurée le long de x_{i-1} ;
- θ_i : angle algébrique entre x_{i-1} et x_i , mesuré autour de z_i ;
- r_i : distance algébrique du point O_i à la perpendiculaire, mesurée le long de z_i .

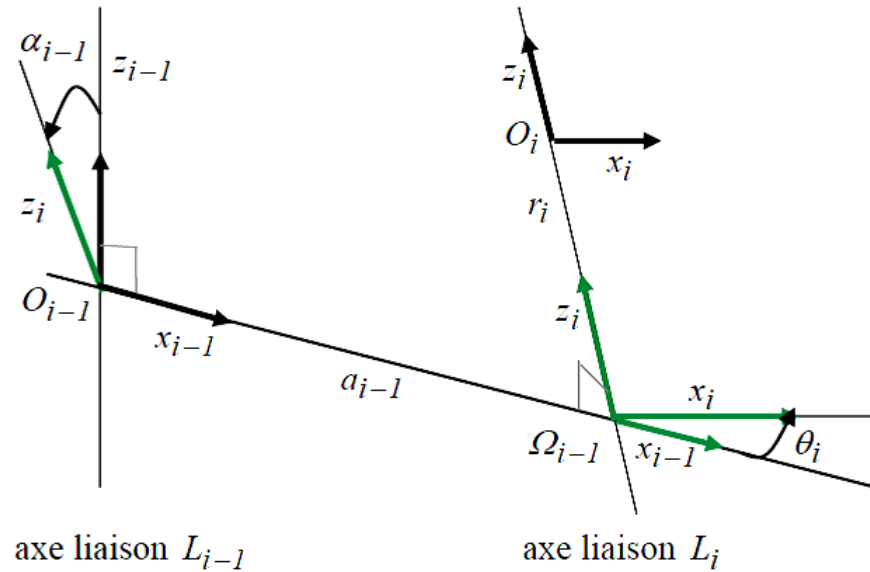


Figure 2.2 : définition des paramètres de Denavit-Hartenberg.

Maintenant, Le calcul du MGD consiste donc à exprimer la position du point O_{n+1} et l'orientation du repère R_n lié à l'outil terminale, en fonction de sa configuration. Il faut pour cela multiplier les matrices de passage homogènes successives reliant le repère R_0 lié au bâti au repère R_n lié à l'outil terminale.

$${}^{i-1}T_i = R_x(\alpha_i).T_i(a_i).R_i(\theta_i).T_z(r_i)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r_i \end{pmatrix}$$

$$T_{i-1,i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos \alpha_{i-1} \sin \theta_i & \cos \alpha_{i-1} \cos \theta_i - \sin \alpha_{i-1} & -r_i \sin \alpha_{i-1} & \\ \sin \alpha_{i-1} \sin \theta_i & \sin \alpha_{i-1} \cos \theta_i & r_i \cos \alpha_{i-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire :

$$T_{i-1,i} = \begin{pmatrix} R_{i-1,i} & P_{i-1,i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où : $R_{i-1,i}$ représente la rotation entre les repères R_{i-1} et R_i . $P_{i-1,i}$ est la translation entre ces mêmes repères.

Le MGD peut être aussi représenté par la relation : (2.10)

La variable q_i de l'articulation i , définissant l'orientation ou la position relative entre les articulations $i-1$ et i , est : soit θ_i , soit r_i , selon le type d'articulation est rotoïde ou prismatique respectivement. Ceci est défini par la relation :

$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \quad (2.11)$$

avec :

- $\sigma_i = 0$ si l'articulation i est rotoïde.
- $\sigma_i = 1$ si l'articulation i est prismatique.
- $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$

le MGD permet d'obtenir la matrice de transformation du repère de l'outil par rapport au repère de l'atelier.

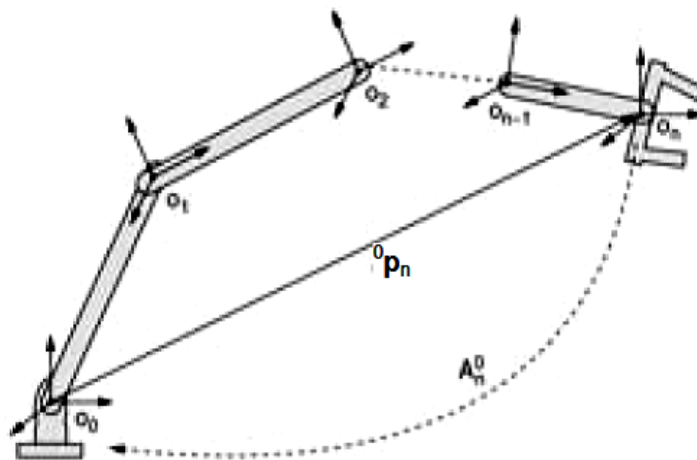


Figure 2.3 : La transformation du repère de l'outil par rapport au repère de l'atelier.

Dans le cas générale :

$${}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \dots {}^{n-2}T_{n-1} \cdot {}^{n-1}T_n = \prod_{i=1}^n T^{i-1}_i \quad (2.12)$$

2.4.3 Le modèle géométrique inverse :

Le modèle géométrique inverse (MGI) consiste à déterminer les variables articulaires correspondant à une situation spécifique de l'organe terminal. Lorsqu'elles existent. Le problème donc se pose comme suite :

$$q = f^{-1}(x) \quad (2.13)$$

Trois méthodes de calcul de MGI sont répandues :

- _ La méthode de Paul, qui convient pour la plupart des robots industriels. (Qu'on va illustrer dans cet exposé)
- _ La méthode de Pieper, qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté avec trois articulations rotoïde ou trois articulation prismatiques.
- _ La méthode de Raghavan et Roth, donnant la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égale 16.[16]

Revenant au problème (2.13) la solution est généralement multiple, donc de nombreuses configurations peuvent exister pour une position donnée de l'organe terminale. Dans certain cas on trouve une infinité de solution, ce ci est quand :

- Le robot est redondant vis-à-vis la tâche.
- Le robot se trouve dans certaines configurations singulières.

L'absence de solutions signifie que la position désirée est en dehors de la zone accessible du robot (l'espace de travail).

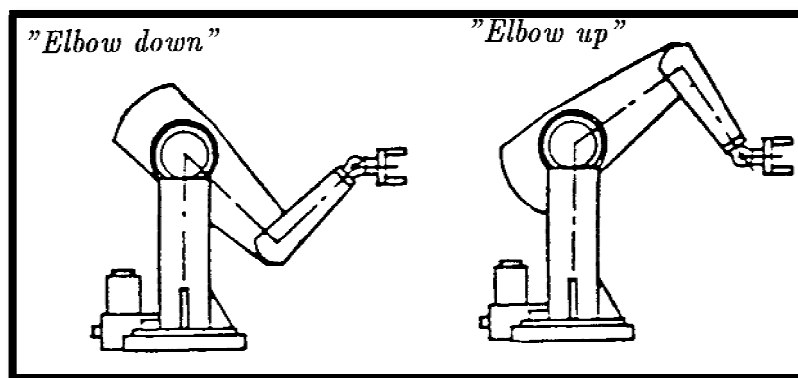


Figure 2.4 : Exemple de configurations multiples conduisant à la même position de l'organe d'extrémité.

2.4.3.1 La méthode de Paul : [16]

La méthode consiste à pré multiplier successivement les deux membres de l'équation (2.12) par les matrices : T_{i-1}^i pour $i = 1$ à n .

Considérant l'équation (2.12) :

$${}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \dots {}^{n-2}T_{n-1} \cdot {}^{n-1}T_n$$

Soit U_0 la situation désirer de l'outil terminal :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Il suffit de résoudre le système d'équation obtenu en posant : (2.12) = (2.14) suivant la méthode de Paul.

Pour un robot à six degrés de liberté on procède comme suit :

$$U_0 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

$${}^1T_0 U_0 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

$${}^2T_1 U_1 = {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

$${}^3T_2 U_2 = {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

$${}^4T_3 U_3 = {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

$${}^5T_4 U_4 = {}^5T_6.$$

2.5 Le modèle cinématique :

Le modèle cinématique est un modèle des vitesses, il donne une relation entre les vitesses articulaires et les vitesses opérationnelles. Il possède aussi une propriété essentielle: il est une différentiation du modèle géométrique. Il est donc une linéarisation du système d'équations non linéaires représentant le modèle géométrique. Par conséquent on peut toujours facilement obtenir les transformations inverses puisqu'elles proviennent de l'inversion d'un problème linéaire. [17]

2.5.1 Le modèle cinématique directe (MCD) :

Le MCD d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Il s'écrit :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (2.15)$$

Où, $J(q)$ désigne la matrice Jacobienne de dimension $(m \times n)$ du mécanisme, le calcul de cette matrice peut se faire en dérivant le MGD : $X = f(q)$. [16]

La matrice jacobienne est l'outil principalement utilisé pour traiter le problème de la cinématique des robots. Elle représente un opérateur permettant de lier les vitesses des corps d'un robot exprimées dans différents espaces vectoriels.

Considérons le modèle géométrique d'un robot possédant m degrés de liberté évoluant dans un espace à n dimensions (m et n indépendants):

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ X_2 &= f_2(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ &\dots\dots\dots \\ X_n &= f_n(q_1, q_2, \dots, q_m) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sous forme condensée :

$$X = f(q) \quad (2.10)$$

Où X représente le vecteur de la position de l'organe terminal dans l'espace de la tâche, et q le vecteur des coordonnées articulaires.

Si maintenant nous différencions l'équation (2.10), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \partial X_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \partial q_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \partial q_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \partial q_m \\ \partial X_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \partial q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \partial q_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial q_m} \partial q_m \\ &\dots\dots\dots \\ \partial X_n &= \frac{\partial f_n}{\partial q_1} \partial q_1 + \frac{\partial f_n}{\partial q_2} \partial q_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial q_m} \partial q_m \end{aligned}$$

Ou sous forme condensée:

$$\partial X = \frac{\partial f}{\partial q} \partial q \quad (2.17)$$

Nous posons alors comme définition de la matrice jacobienne J :

$$[J(q)] \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial q} \right] \quad (2.18)$$

Si les fonctions $f_1 \dots f_n$ sont non linéaires, alors leurs dérivées partielles sont fonction de q_i . La matrice jacobienne est donc un opérateur linéaire dépendant de la position instantanée du robot. [17]

2.5.2 Le modèle cinématique inverse (MCI) :

Le MCI donne les vitesses articulaires \dot{q} correspondantes à une vitesse désiré \dot{X} de l'organe terminal. Le MCI s'obtient par la solution d'un système d'équation linéaire. Pour les manipulateurs non redondants ($n=m$), le modèle s'écrit :

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x} \quad (2.19)$$

La solution de l'équation (2.19) existe si J est de rang plein, cela est valable tant que le manipulateur ne passe pas par une configuration singulière.

Pour les manipulateurs redondants, le modèle cinématique inverse admet plusieurs solutions possibles.

On déduit donc, par dérivation des relations (2.17) et (2.19) les modèles cinématiques direct et inverse du second ordre qui lient les accélérations articulaires \ddot{q} et cartésiennes \ddot{X} :

$$\ddot{X} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (2.20)$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)[\ddot{X} - \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q}] \quad (2.21)$$

Lorsque \mathbf{J} n'est pas inversible, et donc lorsque le robot se trouve dans une configuration singulière, les modèles (2.19) et (2.21) font intervenir la pseudo-inverse pour une solution au sens des moindres carrés. [16][17]

2.6 Les quaternions :

Les quaternions naquirent au 19 em siècles sous la plume de l'Irlandais sir William Rowan Hamilton, en octobre 1843 plus exactement.

Cette découverte des quaternions fut le fruit d'études sur l'extension du corps \mathbb{C} des complexes. Ces derniers, grâce à un isomorphisme déterminé, permettent de représenter analytiquement les applications géométriques dans \mathbb{R}^2 , comme les homothéties, les rotations, ou bien les translations. Hamilton souhaitait étendre ces notions à l'espace \mathbb{R}^3 . Après des tentatives infructueuses sur d'éventuels "ternions", c'est-à-dire des triplets (a, b, c) (en considérant les complexes comme des couples (a, b) pour représenter $(a+ib)$), Hamilton adapta ses "ternions" aux contraintes opératoires et inventa des quadruplets (a, b, c, d) qu'il nomma "quaternions".

L'étude des quaternions a donc pour vocation essentielle la représentation analytique des actions géométriques sur l'espace à 3 dimensions. Mais l'application des quaternions est beaucoup plus vaste, et sert notamment en physique pour exprimer les lois de la mécanique ou celle de l'électromagnétisme de façon globale, ainsi qu'en mécanique quantique, pour d'écrire le spin de l'électron par exemple ;

les quaternions sont aussi utilisés en informatique, pour la création des algorithmes 3D dans les jeux vidéos, ou en mécanique spatiale pour le mouvement des satellites.[18]

2.6.1 Définition mathématique :

Un quaternion est défini comme étant la somme d'un scalaire q_0 et un vecteur :

$v = (v_1, v_2, v_3)$; on note :

$$\begin{aligned} q &= q_0 + v \\ q &= q_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k. \end{aligned} \quad (2.22)$$

où : i, j, k sont des vecteurs unitaires le long des axes : x, y, z respectivement.

Une autre définition dit qu'un quaternion est un nombre complexe à quatre composantes, en prenant i, j, k comme des coefficients imaginaires. [19][20]

NB : un vecteur est un quaternion pure, $q = 0 + v$.

2.6.2 opération et propriétés : [19][20]

Etant donnés les deux quaternions : p et q

$$\begin{aligned} p &= p_0 + x i + y j + z k \\ q &= q_0 + x' i + y' j + z' k \end{aligned}$$

1. Addition :

$$p + q = (p_0 + q_0) + (x + x')i + (y + y')j + (z + z')k. \quad (2.23)$$

2. Multiplication :

Le produit pq est donné par :

$$\begin{aligned} pq &= p_0 q_0 - xx' - yy' - zz' \\ &+ (p_0 x' + q_0 x + yz' - y'z) i \\ &+ (p_0 y' + q_0 y + x'z - xz') j \\ &+ (p_0 z' + q_0 z + xy' + x'y) k \end{aligned} \quad (2.24)$$

Remarque : la multiplication n'est pas commutative !

3. Le conjugué :

$$p^* = p_0 - x i - y j - z k \quad (2.25)$$

on peut vérifier que : $pp^* = p_0^2 + x^2 + y^2 + z^2$

4. La norme :

$$\|p\| = \sqrt{pp^*} \quad (2.26)$$

5. L'inverse :

$$p^{-1} = p^* / (\|p\|^2) \quad (2.27)$$

2.6.3 Rotations 3D représentées par les quaternions :

Soit une rotation R d'amplitude θ autour de \vec{n} (n_x, n_y, n_z), on écrit :

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) (n_x i + n_y j + n_z k) \quad (2.28)$$

on note : $q(\theta, \vec{n})$.

En cas de deux rotations successives le résultat sera le produit des deux quaternions représentant ces deux rotations tout en respectant l'ordre.

2.7 Les nombres duaux :

Les nombres duaux étaient proposés pour la première fois par WILLIAM KINGDON CLIFFORD (1845-1879), il les introduirait similairement aux nombres complexes, qui se composent de deux parties (réel et complexe), un nombre dual se compose d'une partie réel et une autre dual, il est définit comme suite :

$$\bar{d} = a + \varepsilon b \quad (2.29)$$

Où : a et b des réels.

ε : unité dual, avec : $\varepsilon^2 = 0$ et $\varepsilon \neq 0$.

L'addition et la multiplication des nombres duaux se fait comme suite :

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = (a_1 + a_2) + \varepsilon (b_1 + b_2) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 \otimes \bar{d}_2 &= a_1 a_2 + \varepsilon a_1 b_2 + \varepsilon a_2 b_1 + \varepsilon^2 a_2 b_2 \\ &= a_1 a_2 + \varepsilon (a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Un nombre dual \bar{d} avec : $a \neq 0$, est inversible tel que :

$$\bar{d}^{-1} = a^{-1} (1 - \varepsilon b a^{-1}) \quad (2.32)$$

Si : $a = 0$ alors : $\bar{d} = \varepsilon b$ n'est pas inversible.

2.8 Les quaternions duaux (qd) :

2.8.1 Définition et théories : [19][21]

L'algèbre des quaternions duaux est une extension de la théorie des nombres duaux par CLIFFORD en 1882, essayant de combiner avec l'algèbre des quaternions d'Hamilton. Elle donne une méthode élégante pour résoudre une gamme des problèmes qui pourrait être complexes. les transformation rigides en particulier peut être représentées par 8 variables scalaires, et combinés à travers un enchainement.

Un quaternion peut représenter seulement les rotations, mais un quaternion dual peut représenter les translations et les rotations en même temps.

Un quaternion dual se compose de 8 éléments ou deux quaternions, formant une partie réelle et une partie duale, il a la forme suivante :

$$q = q_r + \varepsilon q_d \quad (2.33)$$

Où : q_r et q_d des quaternions représentant les parties réel et dual.

Soit : q_1 et q_2 deux quaternion duaux :

L'addition et la multiplication des nombres duaux se généralisent pour les quaternions duaux :

$$q_1 + q_2 = q_{r1} + q_{r2} + \varepsilon(q_{d1} + q_{d2}) \quad (2.34)$$

$$q_1 \otimes q_2 = q_{r1}q_{r2} + \varepsilon(q_{r1} q_{d2} + q_{d1} q_{r2}) \quad (2.35)$$

le conjugué :

$$q^* = q_r^* + \varepsilon q_d^* \quad (2.36)$$

la norme :

$$\|q\| = qq^* \quad (2.37)$$

Condition d'unité :

$$\begin{aligned} \|q\| &= 1 \\ \text{Ssi : } q_r^* q_d + q_d^* q_r &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

un quaternion dual : $q = q_r + \varepsilon q_d$, avec : $q_r \neq 0$ est inversible tel que :

$$q^{-1} = q_r^{-1}(1 - \varepsilon q_d q_r^{-1}). \quad (2.39)$$

2.8.2 Représentation des translations par les qd : [19][22]

Soit : $r = \cos(\theta/2) + \vec{u} \sin(\theta/2)$ un quaternion qui représente une rotation d'amplitude θ autour du vecteur \vec{u} , son conjugué : $r^* = \cos(\theta/2) - \vec{u} \sin(\theta/2)$ tel que : $rr^* = r^*r = 1$, et soit $T = (t_1, t_2, t_3)$ un vecteur représentant une translation (quaternion pure).

La transformation : (r, T) peut être représentée par le quaternion dual suivant :

$$q = r + \frac{\varepsilon}{2} T.r \quad (2.40)$$

Si la transformation est une translation pure, donc : $\theta=0$, on aura :

$$q = 1 + \frac{\varepsilon}{2} T. \quad (2.41)$$

Dans la manipulation des quaternions, un vecteur \vec{v} est considéré comme un quaternion pure $(0 + \vec{v})$, il peut être convertit en quaternion dual $(1 + \varepsilon \vec{v})$.

La translation T appliqué au vecteur \vec{v} est donnée par :

$$q_v' = q_T \otimes q_v \otimes q_T^* \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
 q_v' &= [1 + \frac{\varepsilon}{2}(t_1, t_2, t_3)] \otimes [1 + \varepsilon(v_1, v_2, v_3)] \otimes [1 + \frac{\varepsilon}{2}(t_1, t_2, t_3)]. \\
 q_v' &= 1 + \varepsilon[(v_1+t_1), (v_2+t_2), (v_3+t_3)] \\
 \vec{v}' &= (v_1+t_1)\vec{i} + (v_2+t_2)\vec{j} + (v_3+t_3)\vec{k} \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

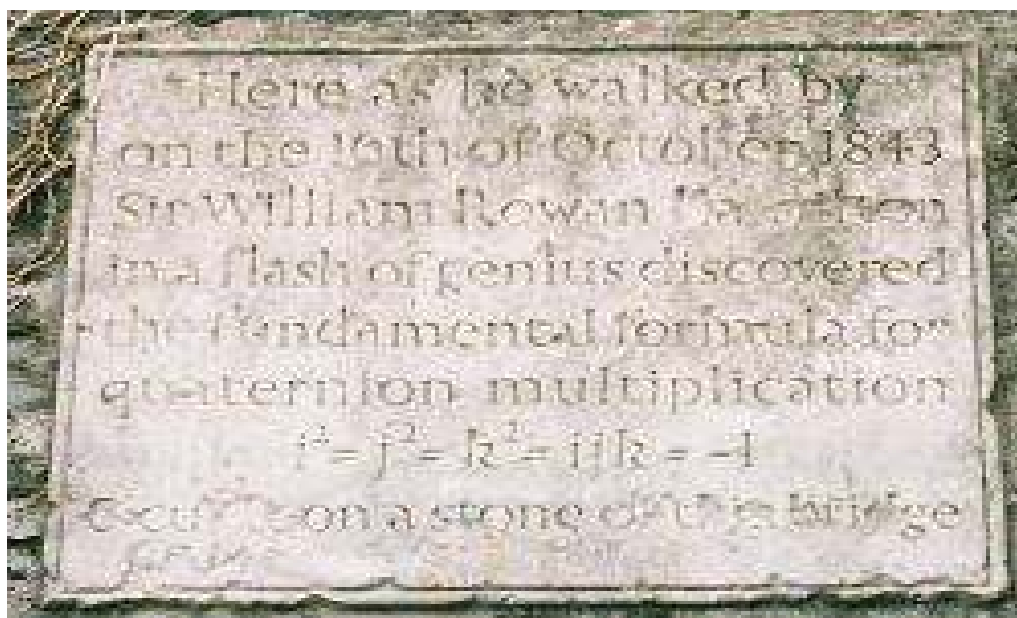


Figure 2.5 : un éclair de génie où Hamilton découvrit la formule fondamentale des quaternions.

3 Chapitre 03 :
Géométrie directe d'un bras
manipulateur 3R en utilisant les
paramètres de D-H et les quaternions
duaux avec comparaison.

3.1 Introduction :

Partant des principes et théories abordés dans le chapitre précédent, sur la modélisation des robots manipulateurs suivant des différents chemins et méthodes connues, dans ce chapitre, on va donner le modèle géométrique directe d'un manipulateur 'planar' 3R (sans tenir compte de l'organe terminale en utilisant les quaternions duaux, puis on compare les résultats avec ceux obtenues par la méthode classique de Denavit et Hartenberg.

Vu la complexité et la non linéarité des problèmes, un modèle complet du comportement réel d'un robot n'est pas réalisable, l'étude cinématique et dynamique des robots se fait généralement sur des modèles simplifiés. Obtenus en introduisant des hypothèses simplificatrices qui permettent de résoudre les équations qui représentent ces modèles.

Dans ce chapitre on considère les hypothèses suivantes :

- chaque corps composant le robot est assimilé à un solide indéformable.
- Chaque articulation ne possède qu'un seul degré de liberté.

3.2 Géométrie directe en utilisant la méthode des paramètres de D-H :

3.2.1 La problématique :

Ayant les variables articulaires d'un robot, nous pouvons déterminer la position et l'orientation de chaque lien du robot, parce qu'un ensemble donné de caractéristiques géométriques du robot. Nous attachons les coordonnées de chaque lien et déterminons sa configuration dans les liens voisins suivre la méthode de mouvement rigide. [24]

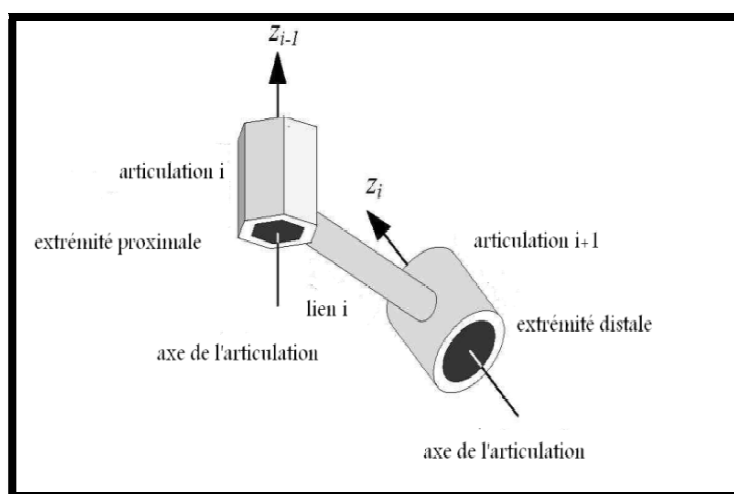


Figure (3.1) : un lien i avec son articulation initiale i-1 et son articulation finale i.

3.2.2 Paramètre de D-H du modèle choisi :

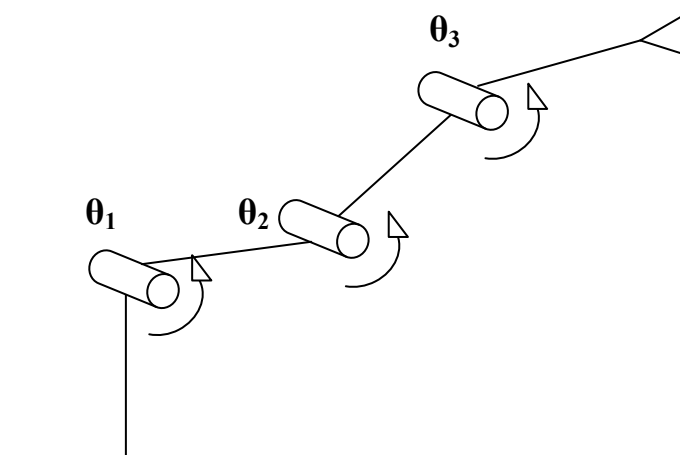
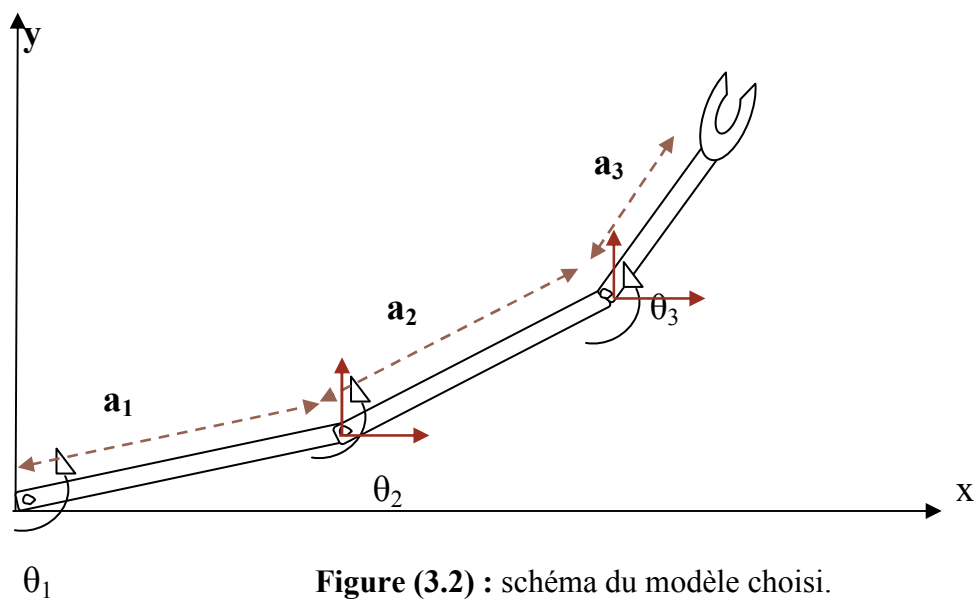


Figure (3.3) : schéma cinématique du modèle choisi.

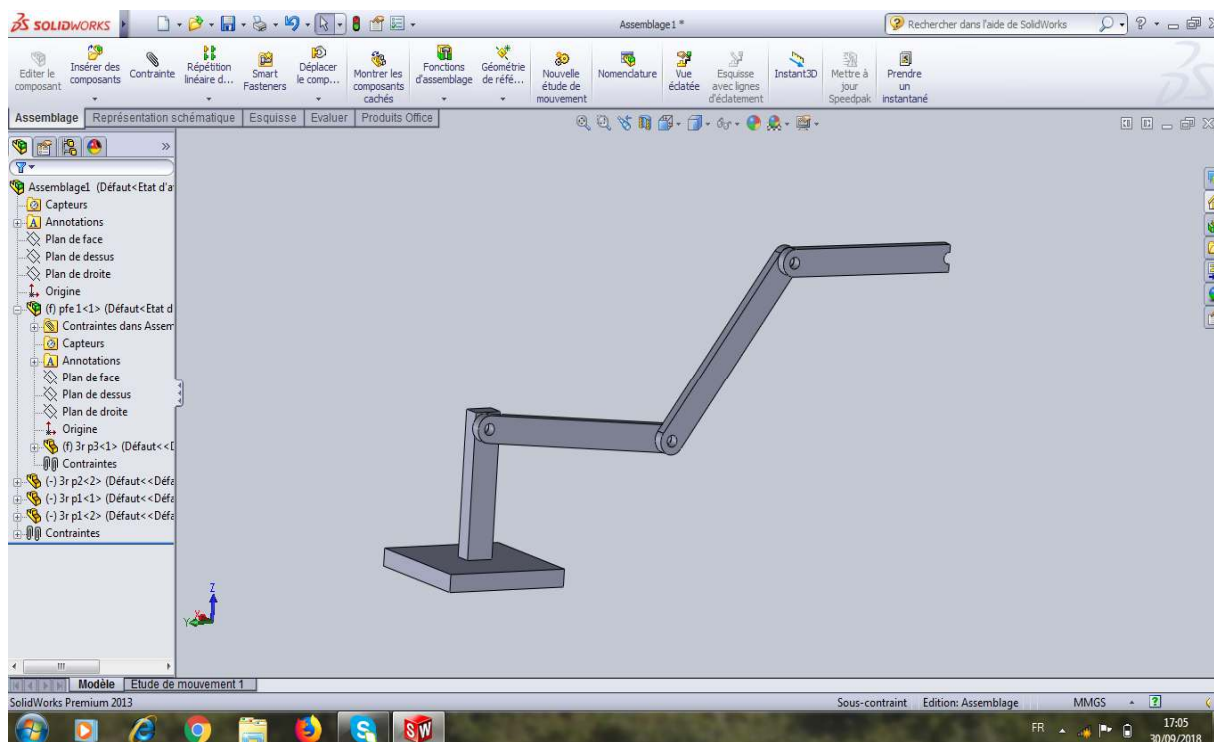


Figure (3.4) : schéma du modèle étudié en SOLIDWORKS.

Tableau (3.1) : paramètres D-H du manipulateur 3R planar.

Lien	a_i	α_i	d_i	θ_i^*
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

θ_i^* : paramètre variable.

d_i : représente a_i dans la figure (2.2).

3.2.3 Calcul de la matrice de transformation homogène :

Sous la forme condensée la matrice est donnée par :

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Où :

$$R_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$d_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) a_i \\ \sin(\theta_i) a_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

le modèle étudié se compose de 3 articulations donc : $i = 0, 1, 2, 3$

Dans ce qui suit, on pose :

$$\cos \theta_1 = c_1. \quad \cos (\theta_1 + \theta_2) = c_{12}$$

$$\sin \theta_1 = s_1. \quad \sin (\theta_1 + \theta_2) = s_{12}$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 s_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 s_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Les équations du modèle cinématique directe sont données donc :

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 \quad (3.7)$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La dernière colonne de la matrice (3.7) nous donne les coordonnées x et y de l'outil terminal :

$$x = a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \quad (3.8)$$

$$y = a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \quad (3.9)$$

$$z = 0. \quad (3.10)$$

3.3 Géométrie directe en utilisant les quaternions duaux :

Le manipulateur choisi est constitué de 3 liens successifs, de longueur : a_1 , a_2 et a_3 , tournant autour des axes parallèles à oz (sortant). La position de l'organe terminale est :

$$(x, y, z) = (a_1+a_2+a_3, 0, 0)$$

Le vecteur quaternion dual correspondant est :

$$q_{ot} = 1 + \varepsilon (x, y, 0) = 1 + \varepsilon ((a_1+a_2+a_3), 0, 0) \quad (3.11)$$

Le résultat des 3 manipulations que va subir l'organe terminale est donné par le produit des quaternions duaux, dans l'ordre suivant :

$$q_{ot}''' = (q_1 q_2 q_3) q_{ot}(\overline{q_3^*} \overline{q_2^*} \overline{q_1^*}) \quad (3.12)$$

avec :

q_{ot}''' : position finale de l'organe terminale.

$\overline{q^*}$: conjugué du quaternion dual, voir : (2.25) et (2.36)

NB : dans tout ce qui suit on admet les notations :

$$C_i = \cos(\theta_i/2)$$

$$S_i = \sin(\theta_i/2)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

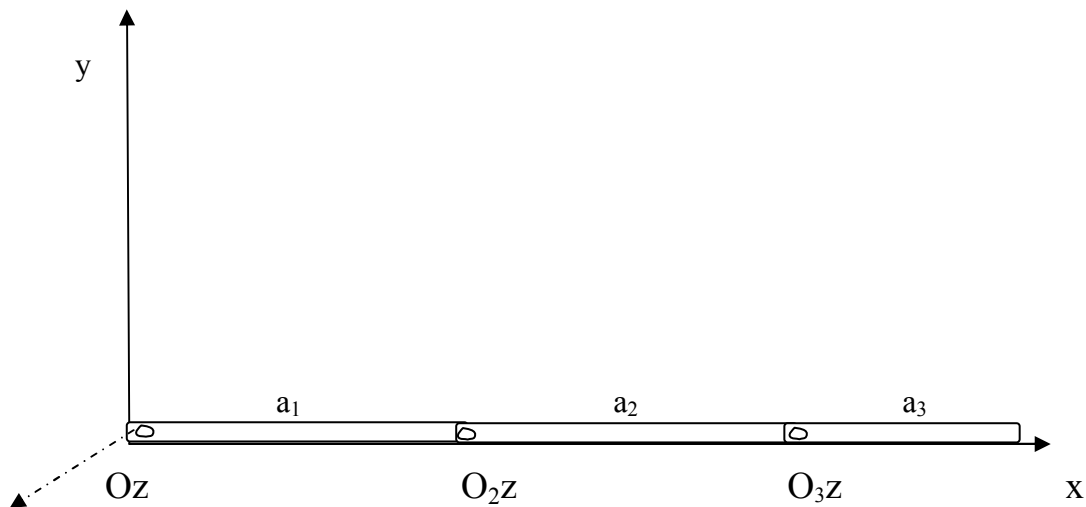


Figure (3.5) : la position initiale (home position) du manipulateur.

On commence par la première opération R_3 : rotation de θ_3 autour de O_3z du troisième lien a_3 . L'opération est représentée par le produit des quaternions duaux : $q_3 q_{ot} \overline{q_3^*}$.

Pour trouver le quaternion dual : q_3 , on aura besoin de la technique de conjugation, donnée par : $TRT^{-1} = TR(-T)$ où :

$$R = c_3, s_3(0,0,1), \text{ (rot de } \theta_3 \text{ autour de } o_3z)$$

T = translation de O_3 vers l'origine O, les coordonnées de O_3 dans le repère principale Oxy sont $(a_1 + a_2, 0, 0)$ donc : $T = 1 + \varepsilon/2(a_1 + a_2, 0, 0)$

Donc :

$$q_3 = T_3 R_3 T_3^{-1} = [1 + \frac{\varepsilon}{2}(a_1 + a_2, 0, 0)] [(\cos \frac{\theta_3}{2}, \sin \frac{\theta_3}{2} (0, 0, 1))] [1 - \frac{\varepsilon}{2}(a_1 + a_2, 0, 0)]$$

Sous forme condensée :

$$q_3 = [1 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{t}_3] [R_3] [1 - \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{t}_3] = R_3 + \frac{\varepsilon}{2} (\mathbf{t}_3 R_3 - R_3 \mathbf{t}_3)$$

on utilisant les formules : (2.42) (2.35) on trouve :

$$q_3 = [C_3, (0, 0, S_3)] + \frac{\varepsilon}{2} [0, 0, -2S_3(a_1 + a_2), 0] \quad (3.13)$$

finalement :

$$q_3 q_{ot} \overline{q_3^*} = [(c_3, 0, 0, s_3) + \varepsilon/2 (0, -2s_3(a_1 + a_2), 0)] [(1 + \varepsilon((a_1 + a_2 + a_3), 0, 0))] [(c_3, 0, 0, -s_3) + \varepsilon/2 (0, -2s_3(a_1 + a_2), 0)] = 1 + \varepsilon (a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3, a_3 \sin \theta_3, 0)$$

les coordonnées de l'organe terminale après la première manipulation sont :

$(a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3, a_3 \sin \theta_3, 0)^T$ voir figure (3.6), la formule (3.11) devient :

$$q_{ot}' = 1 + \varepsilon (a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3, a_3 \sin \theta_3, 0) \quad (3.14)$$

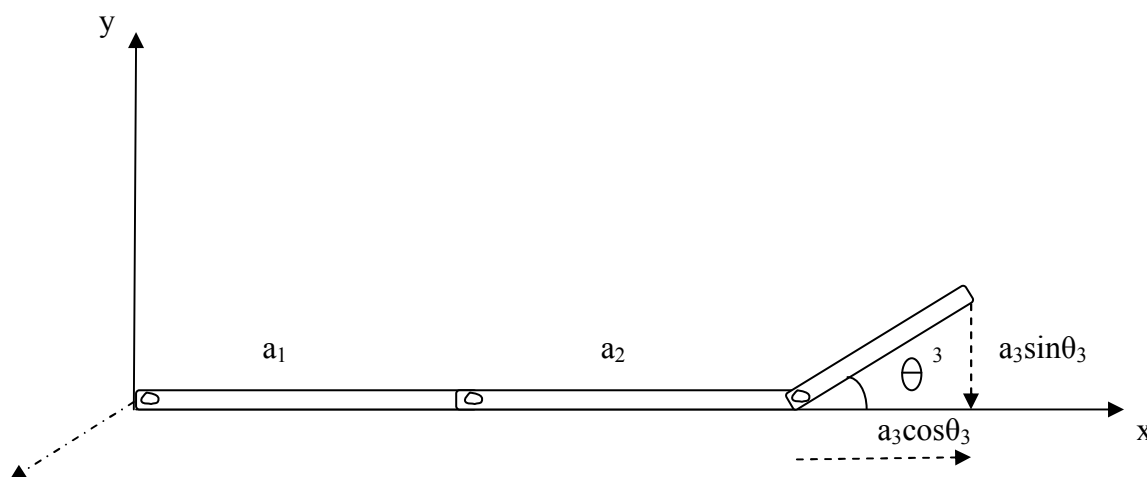


Figure (3.6) : configuration du manipulateur après la première rotation.

Pour la deuxième manipulation R_2 , du deuxième lien a_2 , et procédant de la même manière :

$$q_2 = T_2 R_2 (-T_2)$$

$$\text{avec : } T_2 = 1 + \varepsilon/2(a_1, 0, 0)$$

$$R_2 = c_2, s_2(0, 0, 1)$$

$$q_2 = [(c_2, 0, 0, s_2) + \varepsilon (0, -s_2 a_1, 0)] \quad (3.15)$$

et pour trouver la position de l'organe terminale après la manipulation on calcule : $q_2 q_{ot} \overline{q_2^*}$

$$q_2 q_{ot} \overline{q_2^*} = [(c_2, 0, 0, s_2) + \varepsilon (0, -s_2 a_1, 0)] [1 + \varepsilon (x, y, 0)] [(c_2, 0, 0, -s_2) + \varepsilon (0, -s_2 a_1, 0)]$$

$$= 1 + \varepsilon ((1 - \cos \theta_2) a_1 - \sin \theta_2 y + \cos \theta_2 x, -a_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 y + \sin \theta_2 x, 0)$$

Remplaçant x et y par leurs valeurs précédentes données par (3.14), on trouve la nouvelle position de l'OT :

$$q_{ot}'' = 1 + \varepsilon(x, y, 0)$$

$$= 1 + \varepsilon (a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3), a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin (\theta_2 + \theta_3), 0) \quad (3.16)$$

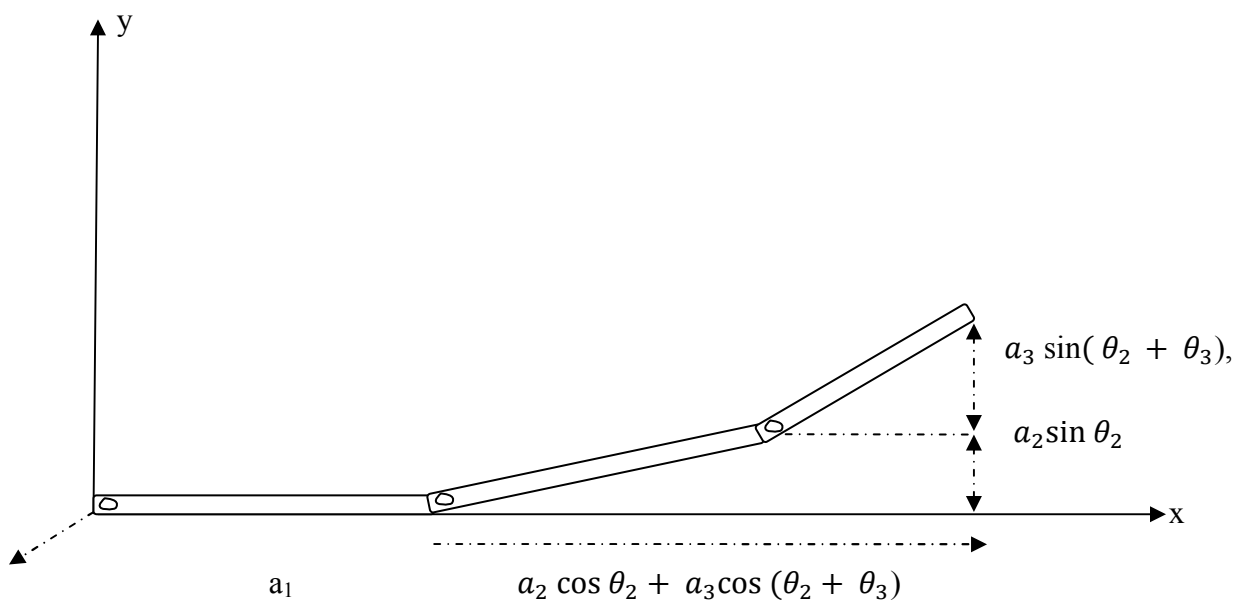


Figure (3.7) : configuration du manipulateur après la deuxième rotation.

La troisième manipulation est une rotation pure de θ_1 autour de l'axe Oz, q_1 est donné directement :

$$q_1 = (c_1, 0, 0, s_1) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} q_1 q_{ot}'' \overline{q_1^*} &= (c_1, 0, 0, s_1) [1 + \varepsilon(x, y, 0)] (c_1, 0, 0, -s_1) \\ &= 1 + \varepsilon(-\sin \theta_1 y + \cos \theta_1 x, \cos \theta_1 y + \sin \theta_1 x, 0) \end{aligned}$$

On remplace x et y par leurs valeurs précédentes définies dans (3.16) on trouve la position finale de l'OT :

$$\begin{aligned} q_{ot}''' &= 1 + \varepsilon(a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), a_1 \sin \theta_1 \\ &\quad + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), 0) \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$z = 0$$

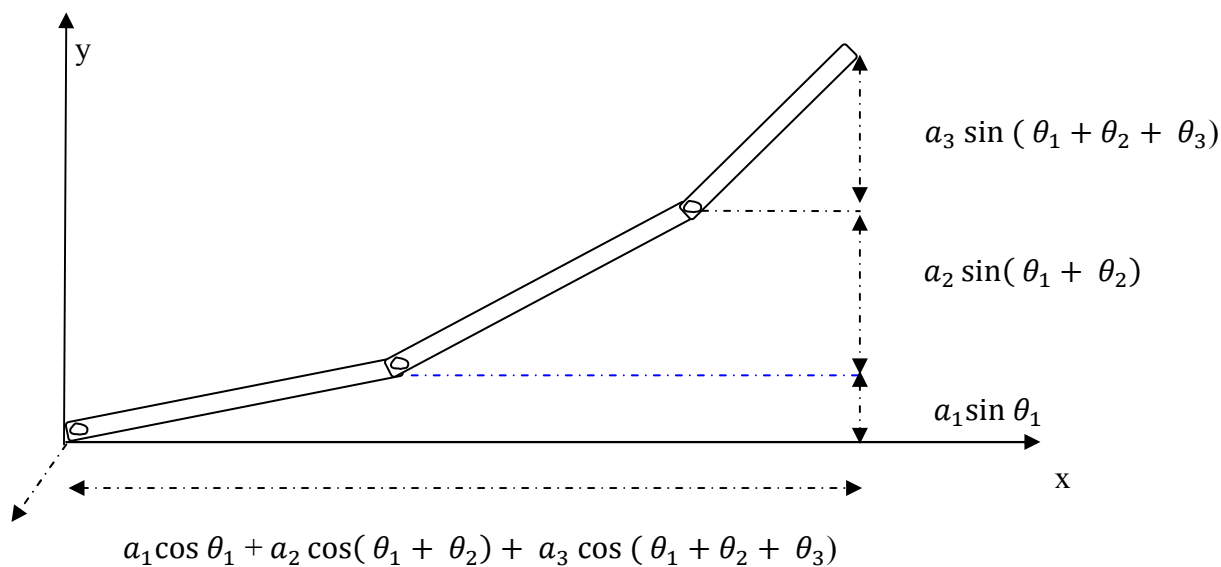


Figure (3.8) : configuration finale du manipulateur après les trois rotations.

3.4 Conclusion :

On remarque que les résultats donnés par (3.19), égales aux résultats donnés par le calcul matriciel (3.8) (3.9) (3.10). Donc les quaternions duaux sont applicables dans la modélisation des robots manipulateurs, et donc dans l'étude du mouvement des corps rigides en générale [21], la manipulation des quaternions duaux se base sur le produit scalaire et vectoriel, avec peut de trigonométrie.

4 Conclusion générale :

Ce mémoire avait l'ambition d'appliquer les quaternions duaux dans la modélisation des robots, et de montrer qu'ils donnent les mêmes résultats que les autres méthodes largement utilisées.

On premier lieu, nous avons commencé par donner des notions générales sur les robots industriels et leur historique, partant des définitions du mot 'robot' dans les plus grands systèmes de normalisation, puis nous avons donné des détails sur les robots, leurs type, leurs géométries constructives, ainsi que la terminologie nécessaire pour entamer ce travail.

Pour donner le modèle mathématique d'un robot, ils existent trois chemins possibles, nous avons cité dans la partie théorique les deux chemins les plus utilisés qui sont : le modèle géométrique, et le modèle cinématique, nous avons donné les notions théoriques nécessaires pour chaque une des deux méthodes, puis nous avons parlé sur les quaternions et les quaternions duaux, en donnant les définitions et les théories nécessaires.

Dans le troisième chapitre, nous avons donné le modèle géométrique d'un manipulateur 3R, en utilisant la méthode connue de Denavit et Hartenberg puis la méthode des quaternions duaux, et les deux méthodes ont donnés les mêmes résultats.

5 Bibliographie :

- [1] R.Merzouki, Cours et TP de robotique de manipulation, école polytechnique de Lille, France. 2010-2011.
- [2] ISO, Robots et composants robotiques Vocabulaire, ISO 8373, 2012.
- [3] J.L. Boimond, Robotique, Université Angers.
- [4] la robotique industrielle, eduscole 2015.
- [5] Pollard Jr., W.L.G., Spray painting machine , brevet américain No. 2 213 108, déposé le 29 octobre 1934, accepté le 27 août 1940.
- [6] Roselund, H.A., Means for moving spray guns or other devices through predetermined paths , brevet américain No. 2 344 108, déposé le 17 août 1939, accepté le 14 mars 1944.
- [7] Devol Jr., G.C., Programmed article transfer , brevet américain No. 2 988 237, déposé le 10 décembre 1954, accepté le 13 juin 1961.
- [8] Rosheim, M.E., Robot Evolution -The Development of Anthropotics, John Wiley & Sons, 1994.
- [9] Makino, H., Kato, A., et Yamazaki, Y., Research and commercialization of SCARA robot, International Journal of the Robotics Society of Japan, Vol. 23, No. 5, pages 61-62, 2007.
- [10] I. bonev, Y. noiseux, note de cours GPA546 27 mars 2013.
- [11] lien utile elyzee-consortium.com
- [12] P. Fiste, H.Buyse, J.C.Samin, introduction à la robotique, MECA 2732 ,10 novembre 2004.
- [13] D. Fadhila, mémoire de magister Génie industriel, étude et conception d'un robot manipulateur pour l'enmtp, 2012, Université : Hadj Lakhdar.
- [14] M. Giordano, F. Lottin, A. Colin, cours de robotique description et fonctionnement des robots industriels. 1990
- [15] lien utile eurobots.ru
- [16] A. Ghoul, I.K. Bousserhane, modélisation des robots manipulateurs, université Béchar, ResearchGate, Février 2016,
- [17] I. Moufida, mémoire de magister, robotique médicale , université Blida 1

- [18] J. Baglio, une introduction à l'étude des quaternions, dans le cadre des T.I.P.E 2002-2003.
- [19] Y. B. Jia, dual quaternions
- [20] B. Frey, C. Crassin, projet quaternions, Université de technologie de Belfort-Montbéliard. Automne2003.
- [21] B. Kenwright, a beginners guide to dual-quaternions, School of computing science, newcastle univercity. UK
- [22] M. Gouasmi, M. Meghatria, M. Ouali, dual quaternions robotics, Blida univercity Algeria. 2017
- [23] M. Mallem, modélisation géométrique et cinématique de robots, Ecole nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise. 2011
- [24] F. Brahim, Mémoire de magister La modelisation cinématique et dynamique du robot SCARA en utilisant SOLIDWORKS et verification par MATLAB/SIMULINK, université de Blida 1, septembre 2011.