

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de SAAD Dahleb de Blida
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Aéronautique

Projet de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
Filière : Construction et Maintenance en Aéronautique
Spécialité : Propulsion

**Réalisation d'un solveur numérique des équations
de Navier-Stokes, validation et application.**

Présenté par :

GRADA Mohammed El-Amine
HAMAIDIA Walid

Contact E-mail :

Gmma_aer@hotmail.fr

Encadré par :

Mr. ZEBBICHE TOUFIK

Année universitaire 2008-2009

***“ Celui qui reçoit une idée de moi
reçoit un savoir sans diminuer le mien ;
tout comme celui qui allume sa bougie à la mienne
reçoit la lumière sans me plonger dans la pénombre.
Que les idées circulent librement de l’un à l’autre partout sur la planète. ”***

*Tendre pensée à mon grand père.
Ce mémoire est dédié à ceux qui m’ont appris toute les bonnes valeurs
Mes chers parents
Ma sœur et mes frères
Ma grande famille
A tous mes amis et à tous mes collègues.*

GRADA Mohammed El-Amine

*Je souhaite dédier ce modeste travail, synonyme de concrétisation de tous mes efforts
A mes très chers parents, symbole de courage et de sacrifice, que Dieu les garde.
A mes frères et sœurs
A mes oncles et mes tantes.
A mes cousins et mes cousines.
A mon binôme Amine
A tous mes Amis et à tous mes collègues.*

HAMAIDIA Walid.

Table des matières

Nomenclature

Table des figures

Introduction	1
Chapitre 1 : lois de comportement.	2
1.1 Description mathématique de l'écoulement	2
1.2 Lois de conservation	4
1.2.1 Equation de continuité	4
1.2.2 Equation du moment	4
1.2.3 Equation d'énergie	5
1.3 Le système complet des équations de Navier-Stokes	5
1.4 Résolution des équations de Navier-Stokes	6
1.4.1 Discrétisation spatiale	6
1.4.2 Méthode des volumes finis	7
Chapitre 2 : discrétisation spatiale, schémas volumes finis structurés.	8
2.1 Quantités géométriques	9
2.2 Discrétisation du flux convectif	10
2.2.1 Schéma central avec dissipation artificielle	11
2.2.1.1 Schéma central avec dissipation scalaire	11
2.2.1.2 Schéma central avec dissipation matricielle	12
2.2.2 Schéma Flux-vector splitting	12
2.2.3 Schéma flux-difference splitting	14
2.2.3.1 Schema de Roe	14
2.2.4 Schémas TVD	15
2.3 Fonctions limiteur	16
2.3.1 Fonction limiteur pour l'interpolation MUSCL	17
2.3.2 Fonction limiteur pour les schémas TVD	18
2.4 Discrétisation du flux visqueux	19
Chapitre 3 : discrétisation spatiale, schémas volumes finis non structurés.	21
3.1 Quantités géométriques	21
3.2 Discrétisation du flux convectif	24
3.2.1 Schéma central avec dissipation artificielle	24
3.2.2 Schémas Upwind	26
3.2.3 Reconstruction de la solution	26
3.2.4 Reconstruction basée sur l'approche MUSCL	26
3.2.5 Reconstruction linéaire par morceaux	27
3.2.6 Reconstruction linéaire basée sur la moyenne nœudale	28
3.2.7 Reconstruction quadratique par morceaux	29
3.2.8 Fonction limiteur	29
3.3 Discrétisation du flux visqueux	31
3.3.1 Element-based gradients	31
3.3.1.1 Volumes de contrôles centrés sur la face	31
3.3.1.2 Approche éléments finis avec formulation de Galerkin	31

3.3.1.3	Moyenne des valeurs nœudales	32
3.3.2	Moyenne des gradients	32
Chapitre 4 : discrétisation temporelle & conditions aux limites.		34
4.1	Schémas explicites	35
4.2	Schémas implicites	36
4.3	Conditions aux limites	37
4.3.1	Condition paroi solide	37
4.3.2	Domaine infini	38
4.3.2.1	Ecoulement supersonique entrant	39
4.3.2.2	Ecoulement supersonique sortant	39
4.3.2.3	Ecoulement subsonique entrant	39
4.3.2.4	Ecoulement subsonique sortant	40
4.3.2.5	Modification pour les corps portants	40
4.3.3	Frontière entrée/sortie	41
4.3.4	Plan de symétrie	42
4.3.5	Condition de frontière périodique	42
Chapitre 5 : modélisation de turbulences		43
5.1	Modélisation statique de la turbulence	44
5.1.1	Equations de mouvement moyen	45
5.1.2	Modélisation des flux turbulents	46
5.2	Fermeture du premier ordre	46
5.2.1	Modèle à une équation de Spalart-Allmaras	47
5.2.2	Modèle à deux équations $k - \epsilon$	49
5.2.3	Modèle SST de Menter	50
Chapitre 6 : réalisation du solveur CFGH		53
6.1	Choix	53
6.2	Maillage	54
6.2.1	Triangulation de Delaunay	54
6.2.2	Triangulation de Delaunay initiale	55
6.2.3	Raffinement de Delaunay	58
6.3	Equations et Discrétisation	60
6.3.1	Discrétisation du flux non visqueux par la méthode de Roe	62
6.3.2	Discrétisation du flux visqueux	65
6.3.3	Conditions aux limites	66
6.4	Structure des données	66
6.5	Cas tests	68
6.5.1	Ecoulement non visqueux	68
6.5.2	Ecoulement visqueux	72
6.5.2.1	Plaque plane	72
6.5.2.2	Cube	78
6.5.2.3	Projectile	84
6.5.2.4	Tuyère TOC	90
Conclusions & perspectives		96
Bibliographie		

Nomenclature

\bar{A}_c	Jacobéen du flux convectif
b	Profondeur du volume de contrôle en 2D (constante)
c	Célérité du son
C_p	Chaleur spécifique à pression constante
C_v	Chaleur spécifique à volume constant
\bar{D}	Dissipation scalaire
e	Énergie interne par unité de masse
E	Énergie totale par unité de masse
\vec{F}	Vecteur flux
h	Enthalpie
H	Enthalpie total (stagnation)
\bar{H}	Matrice Hessienne
k	Conductivité thermique
K	Énergie cinétique de turbulence
M	Nombre de Mach
\bar{M}	Matrice masse
\vec{n}	Vecteur unitaire normal sortant de la face du volume de contrôle
n_x, n_y, n_z	Composantes du vecteur normal
N_F	Nombre des faces du volume de contrôle
p	Pression statique
Pr	Nombre de Prandtl laminaire
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent
Q	Terme source
\vec{r}	Vecteur position
\vec{r}_{ij}	Vecteur du point i au point j
R	Constante des gaz
\vec{R}	Résiduel
Re	Nombre de Reynolds
\vec{S}	Vecteur surface
dS	Élément de surface
ΔS	longueur/surface d'une face d'un volume de contrôle
t	Temps
Δt	Pas de temps
T	Température statique
\bar{T}	Matrice des vecteurs propres (droite)
\bar{T}^{-1}	Matrice des vecteurs propres (gauche)
u, v, w	Composantes cartésiennes de la vitesse
U	Une variable de l'écoulement (scalaire)
\vec{U}	Vecteur des variables générales de l'écoulement
\vec{v}	Vecteur vitesse.

V	Vitesse contravariante.
\vec{W}	Vecteur des variables conservatives.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes.
Δx	Taille de la maille dans la direction x .
α	Angle d'attaque.
α_m	Coefficients du schéma de Runge Kutta.
β	Paramètre de contrôle de la précision en temps des schémas implicites.
Γ	Circulation.
δ_{ij}	Symbole de Kronecker.
ε	Taux de dissipation de l'énergie turbulente.
κ	Diffusivité thermique.
Λ_c	Valeur propre du Jacobéen du flux convectif.
$\bar{\Lambda}_c$	Matrice diagonale des vecteurs propres du Jacobéen du flux convectif.
μ	Viscosité dynamique.
ν	Viscosité cinématique.
ρ	Densité.
σ	CFL.
τ	Contrainte visqueuse.
τ_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes visqueuses.
ω	Taux de dissipation par unité d'énergie turbulente.
Ω	Volume de contrôle.
Ω_{ij}	Composantes du tenseur de taux de rotation.
$\partial\Omega$	Contour du volume de contrôle.
Ψ	Fonction limiteur.
$\vec{\nabla}U$	Gradient d'un scalaire U .
∇^2U	Laplacien d'un scalaire U .

Abréviations

AUSM	Advection Upstream Splitting Method.
CFL	Courant Friedrichs Lewy.
DES	Detached Eddy Simulation.
DNS	Direct Numerical Simulation.
LES	Large Eddy Simulation.
NPR	Nozzle Pressure Ration.
MUSCL	Monotone Upstream-Centered Schemes.
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes.
SST	Shear Stress Tensor.
TOC	Thrust Optimized Contour nozzle.
TVD	Total Variation Diminishing.

Table des figures

	Page
1.1 Volume de contrôle	3
1.2 Schéma centré et schéma nœudal	7
2.1 État de gauche et état de droite	13
2.2 Fonction limiteur	16
2.3 Volume de control auxiliaire (schéma centré)	19
2.4 Volume de contrôle auxiliaire (schéma nœudal)	20
3.1 Reconstruction MUSCL schéma centré	27
3.2 Reconstruction MUSCL schéma nœudal	28
4.1 Domaine loin	39
5.1 Modélisation de turbulence	44
6.1 Insertion d'un point	56
6.2 Position d'un point	56
6.3 Vérification des triangles adjacents	57
6.4 Point inclus dans le cercle circonscrit	58
6.5 Solution du problème de Riemann	62
6.6 Calcul du gradient au centre du volume	65
6.7 Structure des données	67
6.8 Structure triangle	67
6.9 Maillage de la conduite	68
6.10 Distribution de la pression statique (cas test 1)	69
6.11 Nombre de Mach (cas test 1)	70
6.12 Strioscopie numérique (cas test 1)	70
6.12 Composante horizontale de la vitesse (cas test 1)	71
6.13 Composante verticale de la vitesse (cas test 1)	71
6.14 Masse volumique (cas test 1)	71
6.15 Maillage et domaine de calcul (cas test 2)	72
6.16 Nombre de Mach (cas test 2)	74
6.17 Distribution de la pression statique (cas test 2)	75
6.18 Composante horizontale de la vitesse (cas test 2)	75
6.19 Composante verticale de la vitesse (cas test 2)	76
6.20 Distribution de la température statique (cas test 2)	76
6.21 Energie cinétique de turbulnce (cas test 2)	76
6.22 Taux de dissipation (cas test 2)	77
6.23 Maillage du domaine de calcul (cas test 3)	78
6.24 Nombre de Mach (cas test 3)	79
6.25 Distribution de la pression statique (cas test 3)	80
6.26 Strioscopie numérique (cas test 3)	80
6.27 Composante horizontale de la vitesse (cas test 3)	81
6.28 Composante verticale de la vitesse (cas test 3)	81
6.29 Distribution de la température statique (cas test 3)	82
6.30 Distribution de l'énergie cinétique de turbulence (cas test 3)	82
6.31 Illustration des chocs de recompression en aval (cas test 3)	83
6.32 Maillage du domaine de calcul (cas test 4)	84
6.33 Nombre de Mach (cas test 4)	85
6.34 Distribution de la pression (cas test 4)	86
6.35 Strioscopie numérique (cas test 4)	86
6.36 Composante horizontale de la vitesse (cas test 4)	87

6.37 Composante verticale de la vitesse (cas test 4)	87
6.38 Distribution de la température statique (cas test 4)	88
6.39 Distribution de l'énergie cinétique de turbulence (cas test 4)	88
6.40 Distribution du taux de dissipation (cas test 4)	89
6.41 Maillage du domaine de calcul (cas test 5)	90
6.42 Nombre de Mach (cas test 5)	91
6.43 Distribution de la pression statique (cas test 5)	92
6.44 Distribution de la masse volumique (cas test 5)	92
6.45 Distribution de la température statique (cas test 5)	93
6.46 Composante horizontale de la vitesse (cas test 5)	93
6.47 Composant verticale de la vitesse (cas test 5)	93
6.48 Distribution de l'énergie cinétique de turbulence (cas test 5)	94
6.49 Distribution du taux de dissipation (cas test 5)	94
6.50 Recirculation	95

Liste des tableaux

1- Coefficients optimisés et nombre CFL pour les schémas multi-étages	35
2- Coefficients pour schéma multi-étages hybride	35

Introduction :

L'histoire du CFD « Computational Fluid Dynamics » a commencé au début des années 70. Depuis c'est devenue l'acronyme de la combinaison de la physique et les mathématiques numérique et pour certains c'est les sciences de calcul employés pour la simulation des fluides. Au début le CFD a vu le jour grâce à la possibilité d'avoir des calculateurs puissant ainsi que le développement du CFD est toujours lié à l'évolution de la technologie des calculateurs. Parmi les premières applications du CFD était la simulation des écoulements transsoniques basée sur la solution des équations potentielle non linéaires. Et à l'arrivée des années 80, c'était la résolution du premier modèle en 2D, et quelque temps après la simulation des équations d'Euler en 3D s'est devenue possible. merci au développement rapide des supercalculateurs et au développement des différente techniques numériques d'accélération comme la technique multigrille qui a permis le calcul des fluides visqueux sur toute un avion ou à travers les turbomachines. Au milieu des années 80 on cherchait plus de la précision alors on s'intéressait aux équations de Navier-Stokes et au même temps une variété des modèles de turbulence on été mise en point c'était la simulation numérique directe DNS, et la large Eddy simulation LES.

Avec l'avancement des méthodes numériques, particulièrement les schémas implicites, la solution aux écoulements nécessitant la modélisation des gaz réelle devenait faisable à la fin des années 80.

Due à la demande de la complexité et la fidélité de la simulation des écoulements, les méthodes de génération de maillage sont devenues de plus en plus sophistiqués, on débutait avec des simples mailles structurées calculées par des méthodes algébriques, mais vue la complexité des configurations le maillage devait être divisé en blocs. Mais le problème des configurations complexes persiste, pour cela on a développé le maillage non structuré et ses propres solveurs.

De nos jours, les méthodes CFD on devenu routiniers, elles sont utilisées dans les domaines d'aviation, turbo machinerie, voitures, et dans la conception des bateaux. Ainsi qu'elles sont utilisées dans la météorologie, océanographie, architecture...etc.

Les méthodes CFD sont concernées par la solution des équations de mouvement du fluide aussi que l'interaction du fluide avec les parois solides. Les équations de mouvement d'un fluide non visqueux (équations d'Euler) ou d'un fluide visqueux (équations de Navier-Stokes) sont appelées équations gouverneurs, elles sont formulées en forme intégrale.

Dans le cadre de la méthode des volumes finis, il est possible d'intégrer les équations gouverneurs dans le cas instationnaire aussi bien que dans le cas stationnaire directement. L'avancement du temps peut être divisé en deux classes, la première est la classe explicite l'autre est l'implicite.

Chapitre 1

Lois de Comportement

1.1 Description mathématique de l'écoulement :

La dynamique des fluides est l'investigation du mouvement interactif d'un large nombre de particules. Dans notre cas c'est des atomes. Cela veut dire qu'on suppose que la densité du fluide est suffisamment importante pour approximer le fluide à un milieu continu même si on prend un élément infinitésimal (dans le sens du calcul différentiel) il contiendra suffisamment de particules pour les quelles on peut définir une vitesse, pression, température, densité et autre quantités importante en chaque point du fluide.

Les équations de la dynamique des fluides principales sont dérivées en se basant sur le fait que l'aspect dynamique du fluide soit déterminé par les lois de conservation suivantes :

- La conservation de masse.
- La conservation du moment.
- La conservation de l'énergie.

La conservation d'une quantité veut dire que sa variation totale dans un volume arbitraire peut être exprimée par le bilan de la quantité transportée à travers les frontières et toutes les forces et les sources internes ou externes qui affectent le volume. La quantité qui travers les frontière est appelée *flux* ce dernier est divisé en *un flux convectif* et *un flux diffusif*.

Volume de control :

Considérons un champ fluide représenté par ses lignes de courant, une région arbitraire de l'écoulement définie par une surface fermée $\partial\Omega$ fixe dans l'espace définit un volume de control Ω . On l'introduit aussi une surface élémentaire dS et vecteur unitaire normal \vec{n} .

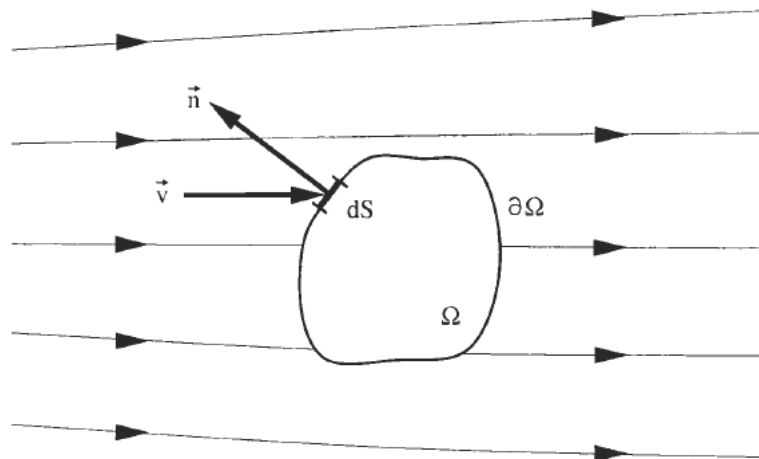


Figure 1.1 : Volume de contrôle.

La loi de conservation appliquée pour une quantité scalaire par unité de volume U (variation dans le temps) $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega$ est égale à la somme des contributions dues :

au flux convectif (quantité de U traversant les frontières du volume avec une vitesse v)

– $\oint_{\partial\Omega} U(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$ au flux diffusif exprimé par le gradient de Fick :

$$\int_{\partial\Omega} \kappa\rho[\nabla(U/\rho) \cdot \vec{n}] dS$$

et au sources de volume et du surface Q_v, Q_s :

$$\int_{\Omega} Q_v d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_s \cdot \vec{n}) dS$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [U(\vec{v} \cdot \vec{n}) - \kappa\rho(\nabla U^* \cdot \vec{n})] dS = \int_{\Omega} Q_v d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_s \cdot \vec{n}) dS$$

où : $U^* = U/r$

si la quantité conservée est vectorielle, l'équation précédente est formellement valide mais les flux convectif et diffusif deviennent des tenseurs et la source de volume devient vecteur \vec{Q}_v et la source de surface devient un tenseur, c.à.d.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [(\vec{F}_C - \vec{F}_D) \cdot \vec{n}] dS = \int_{\Omega} \vec{Q}_v d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_s \cdot \vec{n}) dS$$

Parce qu'elle est général, la forme intégrale est la plus utilisée dans la majorité des codes CFD. Et par la suite on va l'utiliser afin de déterminer les expressions des trois lois de conservation.

1.2 Lois de conservation :

1.2.1 L'équation de continuité :

Pour un fluide mono phase la conservation de masse est basée sur le fait que la masse ne peut être créée ou disparaître d'elle-même, et n'importe qu'elle variation de masse implique un déplacement des particules du fluide. On considère un volume de control fixe dans l'espace, en un point de la surface la vitesse est \vec{v} le vecteur normal est \vec{n} et la densité est rho. Pour une variation dans le temps de la masse totale dans le volume de control on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

Le flux masse à travers une surface est : $\rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$

Puisqu'il n'y a pas de source la forme intégrale nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

1.2.2 L'équation du moment :

En démarrant de la deuxième loi de Newton appliquée sur une portion infinitésimale du volume de control Ω : $\rho \vec{v} d\Omega$ la variation dans le temps est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega$$

La contribution du tenseur du flux convectif à la conservation du moment est :

$$- \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Le flux diffusif étant nul parce qu'il n'y a pas une diffusion du moment possible quand le fluide est au repos, il reste à déterminer les forces agissant sur le volume de control :

- Les forces externes de volume
- Les forces de surface (pression, contraintes normales et tangentielles).

On remarque que ces forces correspondent au terme source volumique et de surface

$$\int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega.$$

$$\vec{Q}_s = -p\vec{I} + \vec{\tau}.$$

Alors, on somme le tout et on arrive à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS$$

1.2.3 L'équation de l'énergie :

L'énergie totale par unité de volume d'un volume de control est :

$$E = e + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = e + \frac{u^2 + v^2 + \omega^2}{2}.$$

La quantité conservée est ρE , sa variation dans le temps est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega$$

La contribution du flux convectif est :

$$- \oint_{\partial\Omega} \rho E (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Le flux diffusif est défini par : $\vec{F}_D = -\gamma \rho \kappa \nabla e$. où κ est le coefficient de diffusion.

Mais cette équation est généralement écrite sous forme de la loi de Fourier :

$$\vec{F}_D = -k \nabla T.$$

Le terme de source de volume rassemble l'échauffement et le travail des forces externes, alors :

$$Q_V = \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_H$$

La dernière contribution est la source de surface Q_s . Elle correspond au travail des forces de pression et les forces de cisaillement : $\vec{Q}_S = -p\vec{v} + \bar{\tau} \cdot \vec{v}$.

En rassemblant le tout :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho E (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \\ &= \oint_{\partial\Omega} k (\nabla T \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega} (\rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_H) d\Omega - \oint_{\partial\Omega} p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \oint_{\partial\Omega} (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

1.3 Le système complet des équations de Navier-Stokes :

Les lois de conservation précédentes seront rassemblées en un système d'équations pour une vue beaucoup plus générale des différents termes. Pour cela on se rapporte à la loi générale de la conservation d'une quantité vectorielle, et pour des raisons de simplicité on introduit le vecteur \vec{F}_c relié au transport convectif des quantités, et un vecteur \vec{F}_v vecteur des flux visqueux. Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) dS = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega$$

Avec :

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \vec{F}_c = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho H V \end{bmatrix} \quad \vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{bmatrix} \text{ où :}$$

$$\Theta_x = u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Theta_y = u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\Theta_z = u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e,x} \\ \rho f_{e,y} \\ \rho f_{e,z} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \end{bmatrix}$$

Alors les équations de Navier-Stokes présent en 3D un système de 5 équations pour les cinq variables conservatives : $\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \text{ et } \rho E$. Mais on voit qu'il y a 7 inconnues d'où la nécessité deux relations additionnelle de la thermodynamique entre les variables d'état.

1.4 Résolution des équations de Navier-Stokes :

Maintenant après avoir formulé les équations qui régissent la dynamique des fluides on est prêt à les résoudre. Pour cette fin il existe un grand nombre de méthodologies et si on ne considère pas la méthode analytique qui applicable seulement pour les problèmes simplifiés, toute les autre stratégies suivent la même démarche, ils emploient une séparation de discrétisation entre l'espace et le temps, c'est ce qu'on appelle la méthode des lignes. Le maillage est utilisé selon l'algorithme pour construire les volumes de control et l'évaluation des intégrales des flux ou pour approximer les dérivations spatiales des quantités de l'écoulement.

Par la suite on va apprendre plus les principes de base pour divers méthodologies de résolution pour l'approximation des équations dans l'espace et dans le temps.

1.4.1 Discrétisation spatiale :

On peut diviser les schémas de discrétisation spatiale en trois grandes catégories : différences finies, volumes finis et élément finis, toutes ces méthodes se reposent sur le même type de mailles qui sont classifiées en deux types :

- mailles structurées où les nœuds correspondent aux coordonnées cartésiennes et les mailles ont une forme de quadrilatéral en 2D et hexaèdre en 3D.

- maille non structurée où les nœuds n'ont aucun ordre et les mailles voisines ne peuvent être déduite directement par leurs indices. Au paravent, les mailles avaient la forme de triangles en 2D et des tétraèdres en 3D mais actuellement on mixe les quadrilatérales avec les triangles en 2D et les hexaèdres avec les tétraèdres en 3D.

1.4.2 Méthodes des volumes finis :

La méthode des volumes finis utilise directement les lois de conservation sous la forme intégral, elle commence par diviser l'espace physique en un nombre de volume de control l'intégral de surface est approximé par la somme des flux traversant chaque face du volume de control, la précision de la discrétisation spatiale dépend du schéma avec lequel les flux sont évalués. il y'a plusieurs possibilités de définir la forme et la position des volumes de control en respectant la grille. Les deux approches de base sont :

- cell centred schemes » : Dans ce cas les quantités sont définies aux centres des mailles et les volumes de control sont identiques aux mailles.
- cell vertx schemes : Ici les variables sont définis aux nœuds des mailles, les volumes de control sont soit l'union de toutes les mailles partageant le même nœud soit des volumes centrées sur les nœuds.

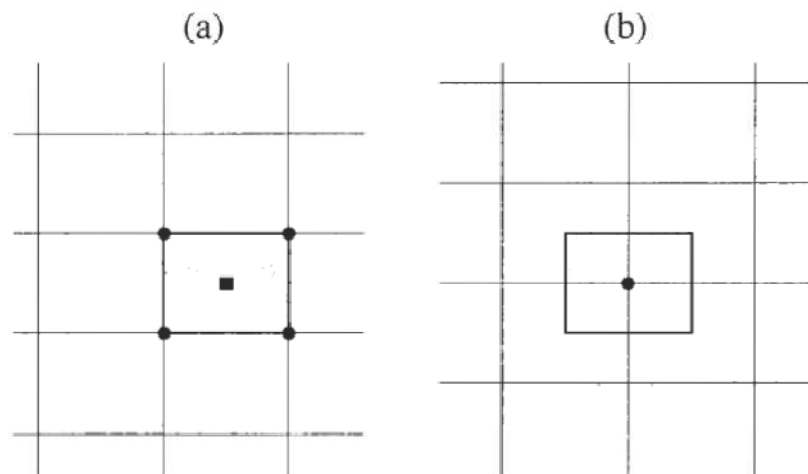


Figure 1.2 : schéma centré et schéma nœudal.

Chapitre 2

Discrétisation spatiale : Schémas volumes finis structurés

Un schéma en volumes finis structuré est basé sur les lois de conservation exprimées par les équations de Navier-Stokes ou les équations d'Euler. Dans un premier temps l'espace physique est divisé en mailles structurées en respectant :

- le domaine est complètement couvert par la grille.
- il n'y a pas de vide entre les mailles.
- les mailles ne se chevauchent pas.

Le résultat est une grille dont les nœuds sont décrits par les coordonnées x,y,z dans l'espace physique et décrits par les indices i,j,k dans l'espace de calcul . Alors considérons un volume de control fixe dans l'espace, la variation dans le temps d'une variable conservative est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega = \Omega \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[\oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) dS - \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \right]$$

L'intégral de surface est approximé par la somme des flux, la étant considérée constante dans un volume de control donc pour une maille $\Omega_{i,j,k}$ on obtient :

$$\frac{d\vec{W}_{i,j,k}}{dt} = -\frac{1}{\Omega_{i,j,k}} \left[\sum_{m=1}^{N_F} (\vec{F}_c - \vec{F}_v)_m \Delta S_m - (\vec{Q}\Omega)_{i,j,k} \right]$$

en général on écrit :

$$\frac{d\vec{W}_{I,J,K}}{dt} = -\frac{1}{\Omega_{I,J,K}} \vec{R}_{I,J,K}.$$

2.1 Quantités géométriques :

En 2D :

$$\Omega_{I,J,K} = \frac{b}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (x_4 - x_2)(y_1 - y_3)].$$

$$\vec{S}_m = \begin{bmatrix} S_{x,m} \\ S_{y,m} \end{bmatrix} = \vec{n}_m \Delta S_m.$$

$$\vec{S}_1 = b \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_2 = b \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_3 = b \begin{bmatrix} y_4 - y_3 \\ x_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_4 = b \begin{bmatrix} y_1 - y_4 \\ x_4 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta S_m = |\vec{S}_m| \sqrt{S_{x,m}^2 + S_{y,m}^2}$$

En 3D :

$$\Omega_{I,J,K} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^{m=6} (\vec{r}_{mid} \cdot \vec{S})_m$$

Avec :

$$\vec{r}_{mid,1} = \frac{1}{4} (\vec{r}_1 + \vec{r}_5 + \vec{r}_8 + \vec{r}_4)$$

$\vec{r}_1, \vec{r}_5, \vec{r}_8, \vec{r}_4$ correspondent aux vertex 1,5,8 et 4 de la surface m

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta y_A \Delta z_B - \Delta z_A \Delta y_B \\ \Delta z_A \Delta x_B - \Delta x_A \Delta z_B \\ \Delta x_A \Delta y_B - \Delta y_A \Delta x_B \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_A = x_8 - x_1, \quad \Delta x_B = x_5 - x_4$$

$$\Delta y_A = y_8 - y_1, \quad \Delta y_B = y_5 - y_4$$

$$\Delta z_A = z_8 - z_1, \quad \Delta z_B = z_5 - z_4$$

$$\Delta S_m = |\vec{S}_m| \sqrt{S_{x,m}^2 + S_{y,m}^2 + S_{z,m}^2}$$

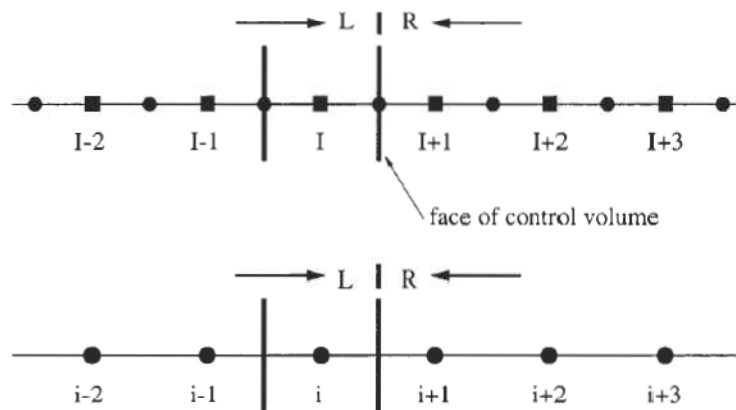
2.2 Discrétisation du flux convectif :

Dans le cadre des volumes finis on a le choix entre les schémas suivant :

- central
- flux-vector splitting
- flux-difference splitting
- total variation diminishing (TVD)
- fluctuation-splitting

Avant de commencer on va expliquer ce qu'on appelle *l'état de gauche* et *l'état de droite*.

Certainement les schémas de calcul nécessitent une interpolation des variables de l'écoulement aux faces du volume de contrôle. La situation est illustrée dans la figure suivante pour un grille dans une direction :



Une possibilité pour l'interpolation consiste en une interpolation linéaire utilisant le même nombre des valeurs de part et d'autre de la face. Autrement dit, l'interpolation est centrée à la face. D'autres schémas basés sur les caractéristiques des équations d'Euler interpolent les variables en utilisant des formules non symétriques c'est les schémas *Upwind*. La plus part des formules d'interpolation *Upwind* sont basées sur l'approche MUSCL de Van Leer (Monotone Upstream-Centred Schemes for Conservation Laws). Généralement pour une variable U de l'écoulement, l'interpolation est donnée par [1]:

$$U_R = U_I - \frac{1}{4} [(1+k)\Delta_- + (1-k)\Delta_+] U_{I+1}$$

$$U_L = U_I - \frac{1}{4} [(1+k)\Delta_+ + (1-k)\Delta_-] U_I$$

Les deux opérateurs sont donnés par :

$$\Delta_+ U_I = U_{I+1} - U_I \quad \Delta_- U_I = U_{I+1} - U_I$$

Les relations précédentes restent valides pour les schémas Cell-vertex et Dual control volumes sauf que les indices I sont remplacés par les index des nœuds. Le paramètre ϵ peut être mis à zéro pour obtenir une précision spatiale du premier ordre autrement on obtient un ordre supérieur.

L'interpolation MUSCL doit être améliorée par une *fonction limiteur* si la région de l'écoulement contient de forts gradients. L'intérêt du limiteur est de supprimer l'oscillation de la solution. Les limiteurs seront discutés après dans ce même chapitre.

2.2.1 Schéma central avec dissipation artificielle:

L'idée est de calculer le flux convectif à la face du volume de control par une moyenne arithmétique des variables des deux cotés de la face ce qui génère deux solution solutions indépendantes et des débordements aux chocs, alors une dissipation artificielle (similaire à un flux visqueux) doit être ajoutée pour la stabilité.

2.2.1.1 Schéma central avec dissipation scalaire :

Le flux convectif à travers une surface est approximé en moyennant les variables et une dissipation artificielle est ajoutée :

$$(\vec{F}_c \Delta S)_{I+\frac{1}{2},J,K} \approx \vec{F}_c \left(\vec{W}_{I+\frac{1}{2},J,K} \right) \Delta S_{I+\frac{1}{2},J,K} - \vec{D}_{I+\frac{1}{2},J,K}. \quad \text{Où :}$$

$$\vec{W}_{I+\frac{1}{2},J,K} = \frac{1}{2} (\vec{W}_{I,J,K} + \vec{W}_{I+1,J,K}).$$

La dissipation est donnée par :

$$\vec{D}_{I+1/2} = \lambda_{I+1/2}^s \left[\epsilon_{I+1/2}^{(2)} (\vec{W}_{I+1} - \vec{W}_I) - \epsilon_{I+1/2}^{(4)} (\vec{W}_{I+2} - 3\vec{W}_{I+1} + 3\vec{W}_I - \vec{W}_{I-1}) \right].$$

$$\lambda_{I+1/2}^s = (\lambda_c^l)_{I+1/2} + (\lambda_c^l)_{I+1/2} + (\lambda_c^k)_{I+1/2}.$$

$$(\lambda_c^l)_{I+1/2} = \frac{1}{2} ((\lambda_c^l)_{I+1} + (\lambda_c^l)_{I+1})$$

$\lambda_c = (|V| + c)\Delta S$, où v est la vitesse au module et c est la célérité du son.

Un détecteur à base de pression doit arrêter la dissipation artificielle aux chocs la où il doit y avoir une forte oscillation de la solution. Ce détecteur est donné par :

$$\epsilon_{I+1/2}^{(2)} = k^{(2)} \max(\gamma_I, \gamma_{I+1})$$

$$\epsilon_{I+1/2}^{(4)} = \max \left[0, \left(k^{(4)} - \epsilon_{I+1/2}^{(2)} \right) \right]$$

Avec :

$$\gamma_I = \frac{|p_{I+1} - 2p_I + p_{I-1}|}{p_{I+1} + 2p_I + p_{I-1}}$$

Les valeurs typiques de k^2 sont $\frac{1}{2}$ et $1/128 \leq k^4 \leq 1/64$

2.2.1.2 Schéma avec dissipation matricielle :

Afin d'avoir plus de précision par réduire la dissipation artificielle, le schéma précédant est modifié et l'idée est d'utiliser une matrice (Jacobéen du flux convectif) au lieu d'un scalaire pour contrôler la dissipation. Donc chaque équation sera régit par :

$$\vec{D}_{I+1/2} = |\bar{A}_c|_{I+1/2} \left[\epsilon_{I+1/2}^{(2)} (\vec{W}_{I+1} - \vec{W}_I) - \epsilon_{I+1/2}^{(4)} (\vec{W}_{I+2} - 3\vec{W}_{I+1} + 3\vec{W}_I - \vec{W}_{I-1}) \right]$$

La matrice correspond au Jacobéen du flux convectif ($\vec{A}_c = \partial \vec{F}_c / \partial \vec{W}$) diagonalisé avec valeur absolue.

$$|\bar{A}_c| = \bar{T} |\bar{\Lambda}_c| \Delta S \bar{T}^{-1}$$

2.2.2 Schéma Flux-vector splitting :

Ces schémas décomposent le vecteur du flux convectif en deux partie selon le signe de certains paramètres caractéristiques, les deux parties sont discrétisées par la méthode upwind difference, le schéma le plus connu est celui de Van Leer [11] qu'on va détailler par la suite.

Le flux convectif est décomposé en une partie positive et une partie négative :

$$\vec{F}_c = \vec{F}_c^+ + \vec{F}_c^-$$

Selon le nombre de Mach normal à la surface du volume de contrôle :

$$(M_n)_{I+1/2} = (V/c)_{I+1/2}$$

Les valeurs des variables ρ , u , v , w et p sont interpolées à la face du volume de contrôle, puis les flux positifs sont calculés avec l'état de gauche et les flux négatifs sont calculés avec l'état de droite

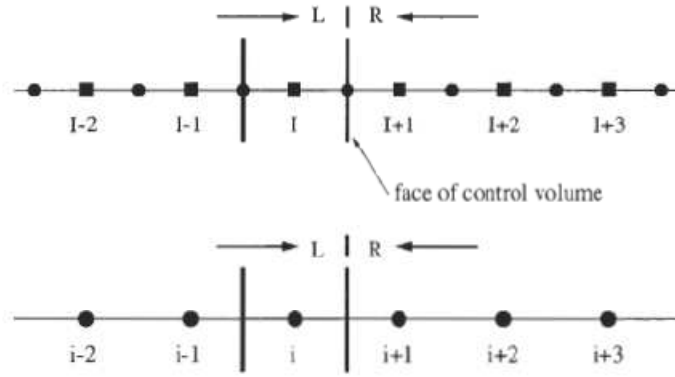


Figure 2.1 : état de gauche et état de droite.

Le nombre de Mach est donné par : $(M_n)_{I+1/2} = M_L^+ + M_R^-$, où :

$$M_L^+ = \begin{cases} M_L & \text{si } M_L \geq +1 \\ \frac{1}{4}(M_L + 1)^2 & \text{si } |M_L| < 1 \\ 0 & \text{si } M_L \leq -1 \end{cases} \quad M_L^- = \begin{cases} 0 & \text{si } M_R \geq +1 \\ \frac{1}{4}(M_R + 1)^2 & \text{si } |M_R| < 1 \\ M_R & \text{si } M_R \leq -1 \end{cases}$$

Dans le cas où $|M_n| < 1$ le flux positif est donné par :

$$\vec{F}_c^\pm = \begin{bmatrix} f_{mass}^\pm \\ f_{mass}^\pm \left[\frac{n_x(-V \pm 2c)}{\gamma} + u \right] \\ f_{mass}^\pm \left[\frac{n_y(-V \pm 2c)}{\gamma} + v \right] \\ f_{mass}^\pm \left[\frac{n_z(-V \pm 2c)}{\gamma} + w \right] \\ f_{energy}^\pm \end{bmatrix}$$

$$f_{mass}^+ = +\rho_L c_L \frac{(M_L + 1)^2}{4}$$

$$f_{mass}^- = -\rho_R c_R \frac{(M_R + 1)^2}{4}$$

$$f_{mass}^- = f_{mass}^\pm \left\{ \frac{[(\gamma - 1)V \pm 2c]^2}{2(\gamma^2 - 1)} + \frac{u^2 + v^2 + w^2 - V^2}{2} \right\}$$

Et dans le cas supersonique :

$$\vec{F}_c^+ = \vec{F}_c \quad \vec{F}_c^- = 0 \quad \text{si } M_n \geq +1$$

$$\vec{F}_c^+ = 0 \quad \vec{F}_c^- = \vec{F}_c \quad \text{si } M_n \leq -1.$$

2.2.3 Schémas flux-difference splitting :

Ces schémas évaluent le flux convectif à une surface du volume de contrôle à partir de l'état gauche ou droite par résoudre le problème de Riemann (tube de choc), et pour réduire les calculs la solution exacte du problème de Riemann est approximée particulièrement par la méthode de Roe qui est la plus utilisée grâce à sa précision pour le calcul des couches limites et elle donne une bonne résolution aux chocs.

2.2.3.1 Schéma de Roe :

$$(\vec{F}_c)_R - (\vec{F}_c)_L = (\bar{A}_{Roe})_{I+1/2}(\vec{W}_R - \vec{W}_L).$$

\bar{A}_{Roe} dénote la matrice de Roe qui est identique au Jacobéen du flux convectif, mais les variables sont remplacées par les variables de Roe données par :

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$

$$\bar{u} = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\bar{v} = \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\bar{w} = \frac{w_L \sqrt{\rho_L} + w_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\bar{H} = \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\bar{c} = \sqrt{(\gamma - 1)(\bar{H} - q^2/2)}$$

$$\tilde{V} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{w}n_z$$

$$\tilde{q}^2 = \tilde{u}^2 + v^2 + w^2.$$

Donc le flux convectif est évalué par :

$$(\vec{F}_c)_{I+1/2} = \frac{1}{2} [\vec{F}_c(\vec{W}_R) + \vec{F}_c(\vec{W}_L) - |\bar{A}_{Roe}|_{I+1/2}(\vec{W}_R - \vec{W}_L)].$$

$$|\bar{A}_{Roe}|_{I+1/2}(\vec{W}_R - \vec{W}_L) = |\Delta \vec{F}_1| + |\Delta \vec{F}_{2,3,4}| + |\Delta \vec{F}_5|$$

$$\begin{aligned}
 |\Delta \vec{F}_1| &= |\vec{V} - \vec{c}| \left(\frac{\Delta p - \bar{\rho} \bar{c} \Delta V}{2 \bar{c}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} - \bar{c} n_x \\ \bar{v} - n_y \\ \bar{w} - \bar{c} n_z \\ \bar{H} - \bar{c} \bar{V} \end{bmatrix} \\
 |\Delta \vec{F}_{2,3,4}| &= |\vec{V}| \left\{ \left(\Delta \rho - \frac{\Delta p}{\bar{c}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{q}^2/2 \end{bmatrix} + \bar{\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V n_x \\ \Delta v - \Delta V n_y \\ \Delta w - \Delta V n_z \\ \bar{u} \Delta u + \bar{v} \Delta v + \bar{w} \Delta w - \bar{V} \Delta V \end{bmatrix} \right\} \\
 |\Delta \vec{F}_5| &= |\vec{V} + \vec{c}| \left(\frac{\Delta p + \bar{\rho} \bar{c} \Delta V}{2 \bar{c}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} + \bar{c} n_x \\ \bar{v} + n_y \\ \bar{w} + \bar{c} n_z \\ \bar{H} + \bar{c} \bar{V} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.2.4 Schémas avec diminution de la variation totale :

Les schémas TVD sont basés sur l'idée que le minimum ne doit pas diminuer et le maximum ne doit pas croître alors pas d'extremum local ne peut être créé durant l'évolution.

Les schémas TVD sont implémentés comme une moyenne du flux convectif avec un terme de dissipation additionnelle (dissipation flux limitée) conforme avec les conditions de la TVD.

Upwind TVD :

$$(\vec{F}_c)_{I+1/2} = \frac{1}{2} [(\vec{F}_c)_{I+1} + (\vec{F}_c)_I] + \frac{1}{2} \bar{T}_{I+1/2} \bar{\Theta}_{I+1/2}.$$

Avec \bar{T} matrice des vecteurs propres du Jacobéen A_c du flux convectif

$$\Theta_{i+1/2}^l = \frac{1}{2} \psi(\Lambda_{I+1/2}^l) (\Psi_{I+1}^l + \Psi_I^l) - \psi(\Lambda_{I+1/2}^l + \chi_{I+1/2}^l) \Delta C_{I+1/2}^l$$

Λ^l représente une valeur propre de la matrice diagonale de la matrice Jacobéenne et Ψ est la fonction du limiteur, en plus :

$$\chi_{I+1/2}^l = \frac{1}{2} \psi(\Lambda_{I+1/2}^l) \cdot \begin{cases} \frac{(\Psi_{I+1}^l - \Psi_I^l)}{\Delta C_{I+1/2}^l} & \text{si } \Delta C_{I+1/2}^l \neq 0, \\ 0 & \text{si } \Delta C_{I+1/2}^l = 0, \end{cases}$$

$$\Delta C_{I+1/2}^l = \bar{T}_{I+1/2}^{-1} (\bar{W}_{I+1} - \bar{W}_I)$$

où \bar{T} est la matrice de correction de l'entropie de Harten.

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & \text{si } |z| > \delta_1 \\ \frac{z^2 + \delta_1^2}{2\delta_1} & \text{si } |z| \leq \delta_1 \end{cases}$$

$$\text{Et } (\delta_L)_{I+1/2} = \delta (|u_{I+1/2}| |v_{I+1/2}| |w_{I+1/2}| + c_{I+1/2}),$$

On peut démontrer que le schéma TVD est du premier ordre quand le limiteur est mis à zéro ce qui aurait lieu aux discontinuités, en outre, le schéma TVD tel qu'il est présenté au dessus est du second ordre dans les régions d'écoulement modéré.

2.3 Fonctions limiteur :

La discrétisation spatial Upwind du second ordre et plus nécessitent des fonctions limiteur pour empêcher la génération des oscillations de la solution. Ce qu'on cherche est un schéma qui conserve la monotonicité ce qui veut dire que la maximum dans le champ d'écoulement ne doit pas être croissant, le minimum ne doit pas être décroissant, et aucun nouveau extremum n'est créé durant l'évolution du temps. Le but du limiteur est de réduire les pentes $((U_{I+1} - U_i)/\Delta x)$ utilisées dans l'interpolation. L'effet du limiteur est illustré dans l'exemple obtenu avec un profil NACA 0012.

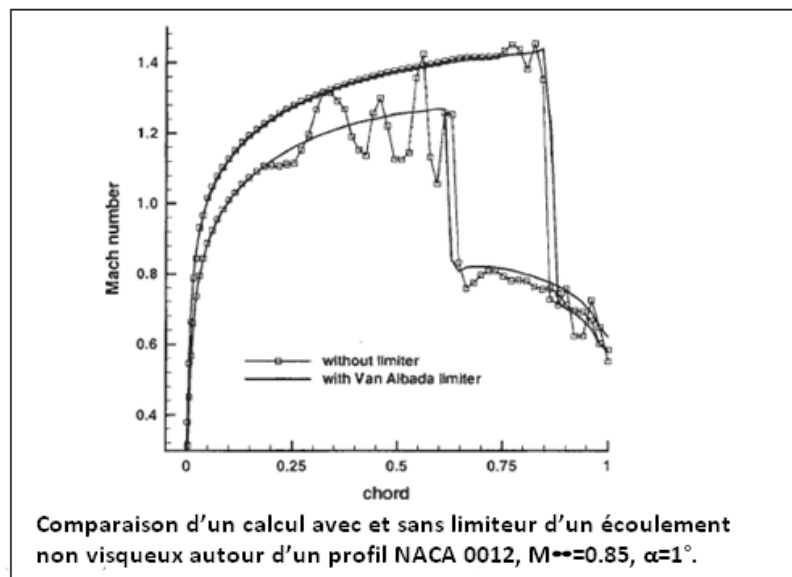


Figure 2.2 : fonction limiteur.

2.3.1 Fonction limiteur pour l'interpolation MUSCL :

L'approche de Van Leer est rendue monotone en employant un limiteur qui réduit les différences $\Delta_+ U_I$ et $\Delta_- U_I$ quand il est nécessaire. Alors l'interpolation MUSCL est modifiée en :

$$U_R = U_{I+1} - \frac{1}{4} [(1+k)r_R \Phi(1/r_R) + (1-k)\Phi(r_R)](U_{I+2} - U_{I+1})$$

$$U_L = U_I + \frac{1}{4} [(1+k)r_L \Phi(1/r_L) + (1-k)\Phi(r_L)](U_I - U_{I-1})$$

Avec :

$$r_R = \frac{U_{I+1} - U_I}{U_{I+2} - U_{I+1}} = \frac{\Delta_-}{\Delta_+} U_{I+1}$$

$$r_L = \frac{U_{I+1} - U_I}{U_I - U_{I-1}} = \frac{\Delta_+}{\Delta_-} U_I$$

Autrement écrite, l'expression d'interpolation devient :

$$U_R = U_{I+1} - \frac{1}{2} \Psi_R (U_{I+2} - U_{I+1})$$

$$U_L = U_I + \frac{1}{2} \Psi_L (U_I - U_{I-1})$$

Avec : $\Psi_{L/R} = \frac{1}{2} [(1+k)r_{L/R} + (1-k)] \Phi_{L/R}$

Différentes formules du limiteur de pente Φ sont maintenant possibles, ils sont construits selon la valeur de k pour donner la meilleure précision en gardant toujours la stabilité et la monotonie du schéma.

Schéma MUSCL avec $k = 0$: dans ce cas la fonction $\Psi(r)$ correspond au limiteur de Van Albada :

$$\Phi(r) = \frac{2r}{r^2 + 1}$$

$$\Psi(r) = \frac{r^2 + r}{1 + r^2}$$

On obtient pour l'expression des états de gauche et de droite :

$$U_R = U_{I+1} - \frac{1}{2} \delta_R$$

$$U_L = U_I + \frac{1}{2} \delta_L$$

La fonction δ est formellement identique pour les deux états :

$$\delta = \frac{a(b^2 + \epsilon) + b(a^2 + \epsilon)}{a^2 + b^2 + 2\epsilon}.$$

Les coefficients a et b sont définis pour l'état de gauche et de droite comme :

$$\begin{aligned} a_R &= \Delta_+ U_{I+1}, & b_R &= \Delta_- U_{I+1}, \\ a_L &= \Delta_+ U_I, & b_L &= \Delta_- U_I \end{aligned}$$

Le paramètre additionnel ϵ empêche l'activation du limiteur dans les régions modérées de l'écoulement. Ce paramètre est proportionnel à l'échelle locale de la grille.

Schéma MUSCL avec $k = 1/3$: dans ce cas la fonction $\Psi(r)$ correspond au limiteur de Hemker et Koren :

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \frac{3r}{2r^2 - r + 2}. \\ \delta &= \frac{(2a^2 + \epsilon)b + (b^2 + 2\epsilon)a}{2a^2 + 2b^2 - ab + 3\epsilon}. \end{aligned}$$

La définition des coefficients a et b reste la même.

2.3.2 Fonction limiteur pour les schémas TVD :

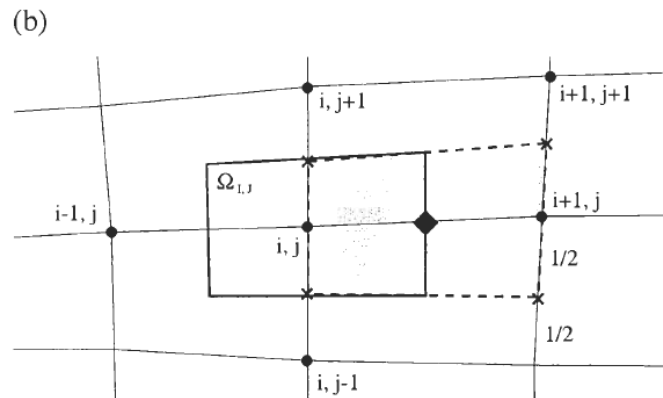
En comparaison avec les cas précédents, le limiteur pour les schémas TVD n'agit pas sur les variables conservatives, mais sur les variables caractéristiques \vec{C} :

$$\Psi_I^l = \frac{\Delta C_{I-1/2}^l \Delta C_{I+1/2}^l + |\Delta C_{I-1/2}^l \Delta C_{I+1/2}^l|}{\Delta C_{I-1/2}^l + \Delta C_{I+1/2}^l + \epsilon},$$

Où $\Delta C_{I+1/2}^l$ représente la différence des variables caractéristiques à la face $(I + 1/2)$ du volume de contrôle. La constante positive $\epsilon \approx 10^{-20}$ dans le dénumérateur évite la division par zéro.

Un inconvénient du schéma précédent est la perte de la précision si la grille n'est pas uniforme. A savoir, pour une grille arbitraire l'approximation des dérivées devient non consistante. Pour cela, les flux visqueux sont discrétisés avec une précision du deuxième ordre.

Il en est le même pour un schéma Cell-vertex sauf que le volume de contrôle à construire est différent comme le montre la figure suivante :



Une fois obtenir les valeurs des variables de la première dérivée on ajouter la contribution au flux convectif et la discrétisation spatiale est à ce moment complète et on passe à l'intégration dans le temps.

Chapitre 3

Discrétisation Spatiale : Schémas Volumes Finis Non Structurés

En première étape (pré-processing), le domaine physique est subdivisé en un nombre d'éléments. En 2D, les éléments sont des triangles et parfois combinés avec des quadrilatérales. En 3D, les éléments sont des tétraèdres combiné avec des prismes, des pyramides, et des hexaèdres.

On rappelle encore une fois que la génération de maillage doit assurer :

- le domaine est complètement couvert par la grille.
- il n'y a pas de vide entre les mailles.
- les mailles ne se chevauchent pas.

En plus, le maillage doit être le plus régulier possible et assure certaines caractéristiques géométriques.

3.1 Quantités géométriques :

En 2D :

Éléments triangulaires :

La surface d'un triangle en général est calculée par la formule de Gauss. Alors on a :

$$\Omega = \frac{b}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)]$$

Les nœuds doivent être énumérés dans le sens antihoraire pour obtenir une valeur positive de la surface.

Les vecteurs surface sont donnés par :

$$\vec{S}_{23} = \vec{n}_{23} \Delta S_{23} = b \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta S = |\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

Éléments quadrilatéraux :

Par la même formule de Gauss on a :

$$\Omega = \frac{b}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 + y_4) + (x_4 - x_2)(y_1 + y_3)]$$

Les vecteur surfaces sont donnés par :

$$\vec{S}_{23} = \vec{n}_{23} \Delta S_{23} = b \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} \dots$$

$$\Delta S = |\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

En 3D :

Contrairement au cas 2D, le calcul des vecteurs des faces pose un problème en 3D pour les volumes avec des faces quadrilatérales parce que les quatre points peuvent se trouver dans des plans différents alors le vecteur normal n'est pas constant.

Faces triangulaires :

A partir de la formule de Gauss, le vecteur de la face est :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta y z_A + \Delta y z_B + \Delta y z_C \\ \Delta z x_A + \Delta z x_B + \Delta z x_C \\ \Delta x y_A + \Delta x y_B + \Delta x y_C \end{bmatrix},$$

Avec :

$$\Delta x y_A = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2), \quad \Delta y z_A = (y_1 - y_2)(z_1 + z_2), \quad \Delta z y_A = (z_1 - z_2)(x_1 + x_2)$$

$$\Delta x y_B = (x_2 - x)(y_2 + y_3), \quad \Delta y z_B = (y_2 - y_3)(z_2 + z_3), \quad \Delta z x_B = (z_2 - z_3)(x_2 + x_3)$$

$$\Delta x y_C = (x_3 - x_1)(y_3 + y_1), \quad \Delta y z_A = (y_3 - y_1)(z_3 + z_1), \quad \Delta z x_C = (z_3 - z_1)(x_3 + x_1)$$

Faces quadrilatérales :

Le vecteur de face moyenné \vec{S} d'une face quadrilatérale est calculé par la même formule de Gauss qu'en 2D. Alors :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta y_A \Delta z_B - \Delta z_A \Delta y_B \\ \Delta z_A \Delta x_B - \Delta x_A \Delta z_B \\ \Delta x_A \Delta y_B - \Delta y_A \Delta x_B \end{bmatrix},$$

Avec :

$$\Delta x_A = x_8 - x_6, \quad \Delta x_B = x_7 - x_5,$$

$$\Delta y_A = y_8 - y_6, \quad \Delta y_B = y_7 - y_5,$$

$$\Delta z_A = z_8 - z_6, \quad \Delta z_B = z_7 - z_5.$$

Le vecteur normal unitaire dans les deux cas est donnée par $\vec{n} = \vec{S}/\Delta S$, avec : $\Delta S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$.

Pour le volume, il est donné dans les deux cas par le théorème de la divergence :

$$\Omega = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^{N_F} (\vec{r}_{mid} \cdot \vec{S})_m$$

$(\vec{r}_{mid})_m$ est le vecteur du centre du volume pointant sur la face m .

3.2 Discrétisation du flux convectif :

Comme dans la discrétisation structurée on a les même approches pour discrétiser le flux convectif, donc on a le choix entre :

- central
- flux-vector splitting
- flux-difference splitting
- total variation diminishing (TVD)
- fluctuation-splitting

3.2.1 Schéma central avec dissipation artificielle:

L'implémentation du schéma central sur un maillage non structuré utilise l'opérateur Laplacien pour les différences du second ordre et le Laplacien de Laplacien pour les différences du quatrième ordre. Pour réduire le cout de calcul, un pseudo Laplacien est utilisé. Dans une maille I , le pseudo Laplacien appliqué pour une quantité scalaire U est donné par :

$$L(U_i) = \sum_{j=1}^{N_A} \theta_{IJ} (U_j - U_i)$$

Où N_A est le nombre des volumes de contrôle adjacents. Le poids géométrique θ est définie par :

$$\theta_{IJ} = 1 + \Delta\theta_{IJ}$$

Et qui résulte de la solution d'un problème d'optimisation résolu par les multiplicateurs de Lagrange. Les poids géométriques sont obtenus par l'expression :

$$\Delta\theta_{IJ} = \lambda_{x,I}(x_j - x_I) + \lambda_{y,I}(y_j - y_I) + \lambda_{z,I}(z_j - z_I)$$

Où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes du centre de la maille. Les multiplicateurs de Lagrange λ sont calculés pour chaque maille comme suit :

$$\lambda_x = \frac{R_x a_{11} + R_y a_{12} + R_z a_{13}}{d}$$

$$\lambda_y = \frac{R_x a_{21} + R_y a_{22} + R_z a_{23}}{d}$$

$$\lambda_z = \frac{R_x a_{31} + R_y a_{32} + R_z a_{33}}{d}$$

avec les coefficients :

$$a_{11} = I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2, \quad a_{21} = I_{xz}I_{yz} - I_{xy}I_{zz}, \quad a_{31} = I_{xy}I_{yz} - I_{xz}I_{yy}$$

$$a_{12} = I_{xz}I_{yz} - I_{xy}I_{zz}, \quad a_{22} = I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2, \quad a_{32} = I_{xz}I_{xy} - I_{xx}I_{yz}$$

$$a_{13} = I_{xy}I_{yz} - I_{xz}I_{yy}, \quad a_{23} = I_{xx}I_{zz} - I_{xx}I_{yz}, \quad a_{33} = I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2$$

$$d = I_{xx}I_{yy}I_{zz} - I_{xx}I_{yz}^2 - I_{yy}I_{xz}^2 - I_{zz}I_{xz}^2 + 2I_{xy}I_{xz}I_{yz}.$$

$$R_{x,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (x_J - x_I), \quad R_{y,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (y_J - y_I), \quad R_{z,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (z_J - z_I).$$

$$I_{xx,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (x_J - x_I)^2, \quad I_{yy,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (y_J - y_I)^2, \quad I_{zz,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (z_J - z_I)^2$$

$$I_{xy,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (x_J - x_I)(y_J - y_I), \quad I_{xz,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (x_J - x_I)(z_J - z_I), \quad I_{yz,I} = \sum_{J=1}^{N_A} (y_J - y_I)(z_J - z_I)$$

Les différences du quatrième ordre sont évaluées comme Laplacien de Laplacien, alors la forme finale de la dissipation artificielle pour la maille I est :

$$\vec{D}_I = \sum_{J=1}^{N_A} (\Lambda_c)_{IJ} \epsilon_{IJ}^{(2)} \theta_{IJ} (\vec{W}_J - \vec{W}_I) - \sum_{J=1}^{N_A} (\Lambda_c)_{IJ} \epsilon_{IJ}^{(4)} \theta_{IJ} [L(\vec{W}_J) - L(\vec{W}_I)].$$

Avec la dissipation artificielle le système d'équations devient :

$$\Omega_I \frac{d\vec{W}_I}{dt} = - \left[\sum_{m=1}^{N_F} (\vec{F}_c - \vec{F}_v)_m \Delta S_m \right] + \vec{D}_I + \vec{Q}_I \Omega_I$$

Les termes du deuxième ordre dans l'expression de la dissipation sont donnés par :

$$(\Lambda_c)_I = \sum_{m=1}^{N_F} (|V_m| + c_m) \Delta S_m$$

Où V_m est la vitesse et c_m est la vitesse du son. Ces deux quantités sont évaluées à partir des moyennes des variables aux faces. Le rayon spectral de la face du volume de contrôle est obtenu par :

$$(\Lambda_c)_{IJ} = \frac{1}{2} [(\Lambda_c)_I + (\Lambda_c)_J].$$

Un détecteur à base de pression est utilisé pour éliminer la différence du quatrième ordre aux chocs, les coefficients $\epsilon_{IJ}^{(2)}$ et $\epsilon_{IJ}^{(4)}$ sont définis par :

$$\epsilon_{IJ}^{(2)} = k^{(2)} \max(Y_I, Y_J)$$

$$\epsilon_{IJ}^{(4)} = \max\left[0, \left(k^{(4)} - \epsilon_{IJ}^{(2)}\right)\right]$$

Avec le détecteur de pression donné par :

$$Y_I = \frac{|\sum_{J=1}^{N_A} \theta_{IJ} (p_J - p_I)|}{\sum_{J=1}^{N_A} (p_J + p_I)}$$

Les valeurs typiques du paramètre sont $k^{(2)} = 1/2$ et $1/128 \leq k^{(4)} \leq 1/64$.

3.2.2 Schémas Upwind :

Les schémas Upwind ont une grande popularité pour les maille non structures. En fait le schéma flux-difference splitting de Roe est le plus utilisé grâce à sa précision dans les couches limites.

N'importe quel schéma upwind présenté dans le chapitre précédent pour les mailles structurées est applicable pour les mailles non structurées sont aucune modification dans la méthodologie de base. Seulement le calcul des états de gauche et de droite est différent, cela est connu par la reconstruction de la solution. Par la suite, seulement la reconstruction de la solution est considérée.

3.2.3 Reconstruction de la solution :

La première approche assume que la solution est constante dans chaque volume de contrôle. L'état de gauche et de droite sont simplement les variables des volumes à gauche et à droite, cela conduit à une discrétisation spatiale du premier ordre. Pour un fluide visqueux cette discrétisation conduit à un grossissement excessif de la couche limite, alors des méthodes plus précises sont nécessaire dans ces cas.

Pour les méthodes du deuxième ordre, la solution est assumée varier linéairement dans le volume de contrôle et pour le calcul des états de gauche et de droite une reconstruction de la solution assumée devient nécessaire. En ce qui suit, on va discuter les approches les plus populaires pour la reconstruction.

3.2.4 Reconstruction basée sur l'approche MUSCL :

Pour arriver à une précision du deuxième ordre on peut faire une extension de l'approche MUSCL sur un maillage non structuré. Quand appliqué à des schémas du genre median-dual, la méthode génère pour chaque arrête ij deux points *fantômes*. Ces nœuds fantômes sont situés à la fin de la ligne obtenue par extension de la cote ij d'une valeur égale à sa longueur dans les deux directions comme il est illustré dans la figure suivante :

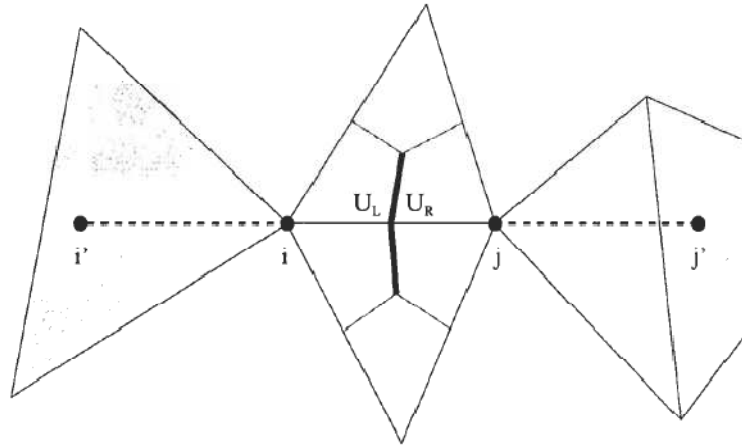


Figure 3.1: Reconstruction MUSCL Schéma cell-vertex.

Alors on peut évaluer l'état de gauche et de droite par la formule MUSCL, donc :

$$U_R = U_j - \frac{1}{4} [(1+k)\Delta_- + (1-k)\Delta_+] U_j$$

$$U_L = U_i - \frac{1}{4} [(1+k)\Delta_+ + (1-k)\Delta_-] U_i$$

Toujours avec les deux opérateurs donnés par :

$$\Delta_+ U_i = U_j - U_i \quad \Delta_- U_i = U_i - U_{i'}$$

$$\Delta_+ U_j = U_{j'} - U_j \quad \Delta_- U_j = U_j - U_i$$

L'interpolation MUSCL doit être améliorée par une fonction limiteur dans les cas des fortes discontinuités. Un inconvénient de cette méthode est la nécessité de stocker les éléments qui contiennent les points fantômes, en plus, des difficultés surviennent aux frontières où les points fantômes sont hors domaine.

3.2.5 Reconstruction linéaire par morceaux :

Barth & Jespersen ont présenté une méthode de reconstruction proche des schémas élément finis. Cette méthode assume que la solution varie linéairement dans le volume de contrôle. Ensuite, on calcul les états de gauche et de droite, par exemple pour un schéma centré on a :

$$U_L = U_I + \Psi_I(\nabla U_I \cdot \vec{r}_L)$$

$$U_R = U_J + \Psi_J(\nabla U_J \cdot \vec{r}_R)$$

Où ∇U_I est le gradient de U au centre de la maille I et Ψ dénote une fonction limiteur. Les vecteurs \vec{r}_L et \vec{r}_R pointent du centre de la maille au milieu de la face, comme le montre la figure suivante :

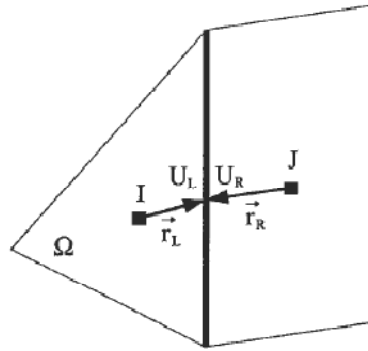


Figure 3.2 : Reconstruction Schéma centré.

La même approche est appliquée au schéma median-dual :

$$U_L = U_i + \Psi_i(\nabla U_i \cdot \vec{r}_L)$$

$$U_R = U_j + \Psi_j(\nabla U_j \cdot \vec{r}_R)$$

Avec $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ représentent le vecteur du nœud i au nœud j .

Les schémas précédents nécessitent le calcul des gradients aux centres ou aux nœuds, ceci est accompli soit par le théorème de Green-Gauss soit par l'approche moindres carrées.

3.2.6 Reconstruction linéaire basée sur la moyenne nodale :

Il a été démontré par Frink que pour un schéma centré la reconstruction linéaire ne nécessite pas une évaluation explicite du gradient pour des mailles purement triangulaires ou tétraédriques. La raison est que deux propriétés géométriques restent invariantes. Premièrement, la ligne allant d'un nœud et qui traverse le centre coupe toujours la face opposée dans son milieu. Deuxièmement, la distance du centre aux centres de la face est égale à un tiers de la distance entre le milieu de la face et le nœud opposé.

Deux approches ont été mises en point par Frink pour déterminer les valeurs nodales. La première dit que la contribution d'un nœud des mailles voisines est inversement proportionnelle à la distance de ce nœud au centre de la maille c.à.d :

$$U_i = \left(\sum_{J=1}^{N_A} \theta_{ij} U_J \right) / \left(\sum_{J=1}^{N_A} \theta_{ij} \right)$$

Avec les poids $\theta_{ij} = 1/r_{ij}$, la distance est calculée avec :

$$r_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

Les indices J et i réfèrent au centre de la maille et au nœud respectivement.

Cette méthodologie conduit à une reconstruction qui n'est pas du second ordre mais qui ne nécessite pas une fonction limiteur ce qui réduit le cout de calcul.

3.2.7 Reconstruction quadratique par morceaux :

Pour arriver à un ordre supérieur avec une reconstruction polynomiale, on doit garder plus de termes dans développement de Taylor. Basé sur les travaux de Barth & Frederickson , Barth a développé le concept de la reconstruction *k - exact* c.à.d. une reconstruction exacte pour un polynôme de degré k . Ce polynôme est défini de façon à garantir l'égalité entre la moyenne de ce polynôme et la solution dans le volume de contrôle. Les coefficients du polynôme sont calculés par l'approche des moindres carrées.

Delanaye & Esser ont développé une forme particulière de la reconstruction quadratique pour les schémas centrés avec plus efficace que celle de Barth de point de vu calcul. Les états de gauche et de droite sont approximées par des séries de Taylor tronqués après le terme de quadrature :

$$U_L = U_I + \Psi_{I,1}(\nabla U_I \cdot \vec{r}_L) + \frac{1}{2} \Psi_{I,2}(\vec{r}_L^T \vec{H}_I \vec{r}_L)$$

$$U_R = U_J + \Psi_{J,1}(\nabla U_J \cdot \vec{r}_R) + \frac{1}{2} \Psi_{J,2}(\vec{r}_R^T \vec{H}_J \vec{r}_R)$$

Dans les équations précédentes, \vec{H}_I dénote la matrice de Hess :

$$\vec{H}_I = \begin{bmatrix} \partial_{xx}^2 U & \partial_{xy}^2 U & \partial_{xz}^2 U \\ \partial_{xy}^2 U & \partial_{yy}^2 U & \partial_{yz}^2 U \\ \partial_{xz}^2 U & \partial_{yz}^2 U & \partial_{zz}^2 U \end{bmatrix}$$

Les variables $\Psi_{I,1}$, $\Psi_{I,2}$ représentent deux fonctions limiteur pour le terme linéaire et le terme quadratique respectivement. la reconstruction quadratique est du troisième ordre sur les maillages réguliers, et au moins du second ordre sur les maillages arbitraires. Des conditions nécessaires pour atteindre ces propriétés, le gradient est évalué avec au moins le second ordre et la matrice de Hess avec le premier ordre. Cela est accompli en combinant la méthode de Green-Gauss et les moindres carrées.

3.2.8 Fonction limiteur :

La discrétisation du second ordre et plus nécessite l'utilisation d'un *limiteur* pour éviter la génération des oscillations de la solution et les débordements dans les régions où reignent des forts gradients.

Sur des maillages non structurés, le but d'un limiteur est de réduire le gradient utilisé pour reconstruire l'état de gauche et de droite sur la face du volume de contrôle. Le limiteur doit être nul aux grandes discontinuités afin d'obtenir un schéma Upwind du premier ordre qui garantie la monotonicité. Mettre le limiteur sur zéro conduit à une reconstruction constante, bien sur, la reconstruction originale non limitée doit être conservée dans les régions d'écoulement modéré afin de garder la dissipation numérique plus petite que possible.

Limiteur de Barth & Jespersen :

Dans le cas d'un schéma median-dual , ce limiteur défini en un point i comme :

$$\Psi_i = \min_j \begin{cases} \min \left(1, \frac{U_{max} - U_i}{\Delta_2} \right) & \text{if } \Delta_2 > 0 \\ \min \left(1, \frac{U_{min} - U_i}{\Delta_2} \right) & \text{if } \Delta_2 < 0 \\ 1 & \text{if } \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

Avec :

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} (\nabla U_i \cdot \vec{r}_{ij})$$

$$U_{max} = \max(U_i, \max_j U_j)$$

$$U_{min} = \min(U_i, \min_j U_j)$$

Dans l'équation du limiteur, \min_j ou \max_j correspond à la valeur minimale ou maximale de tous les nœuds j directement voisins au nœud.

Le limiteur de Barth met en vigueur une solution monotone. Mais sa nature dissipative tend à déformer les discontinuités. Un autre problème qui est l'activation du limiteur due au bruit numérique dans les régions d'écoulement modéré. Tout cela empêche la convergence totale à l'état instationnaire.

Venkatakrishman's limiter :

Ce limiteur est largement utilisé grâce à sa convergence. Il réduit le gradient ∇U au vertex i par le facteur :

$$\Psi_i = \min_j \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,max}^2 + \epsilon^2)\Delta_2 + 2\Delta_2^2\Delta_{1,max}}{\Delta_{1,max}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,max}\Delta_2 + \epsilon^2} \right] & \text{if } \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,min}^2 + \epsilon^2)\Delta_2 + 2\Delta_2^2\Delta_{1,min}}{\Delta_{1,min}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,min}\Delta_2 + \epsilon^2} \right] & \text{if } \Delta_2 < 0 \\ 1 & \text{if } \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

Où :

$$\Delta_{1,max} = U_{max} - U_i$$

$$\Delta_{1,min} = U_{min} - U_i$$

Dans l'équation précédente, U_{max} et U_{min} sont les valeurs min/max des nœuds j entourant du nœud i . Le paramètre ϵ^2 contrôle la quantité de limitation, il est mis à zéro pour une limitation totale. Dans la pratique il a été trouvé que le paramètre ϵ^2 devrait être proportionnel à l'échelle locale c.à.d :

$$\epsilon^2 = (K \Delta h)^3$$

Il est important de noter que la fonction limiteur doit être définie avec des quantités adimensionnelles. Et le coefficient K influe sur la résolution des chocs et la vitesse de convergence.

3.3 Discrétisation du flux visqueux :

Pour évaluer les flux visqueux \vec{F}_v , les variables de l'écoulement et leurs premières dérivées doivent être connues aux faces des volumes de contrôle. Le volume de contrôle pour le flux visqueux est le même que celui du flux convectif dans le but d'obtenir une discrétisation spatiale consistante et simplifier la structure des données. A cause de la nature elliptique des flux visqueux, les valeurs des composantes de la vitesse (u, v, w), la viscosité dynamique μ et coefficient de la conduction thermique k qui sont requis pour le calcul des termes visqueux et les contraintes, sont simplement moyennées aux faces dans le cas des schémas centrés :

$$U_{IJ} = \frac{1}{2}(U_I + U_J)$$

Où U est n'importe quelle quantité d'écoulement. Une même expression est utilisée dans le cas des schémas median-dual (nœudal).

La tâche restante est l'évaluation des dérivés premières des composantes de la vitesse et la température. Cela est accompli par deux moyens :

- Moyenne des gradients
- Element-based gradients.

3.3.1 Element-based gradients :

Ce type de calcul nécessite le stockage des informations sur les éléments de la grille et quelques coefficients reliés à la géométrie. Donc, on est obligé à étendre la structure des données. Par la suite, on discutera trois méthodes pour les schémas centrés et les schémas median-dual.

3.3.1.1 Volume de contrôle centré sur la face :

Selon cette approche on définit un volume de contrôle auxiliaire centré sur la face et on emploie le théorème de Green-Gauss. Cette approche ne demande pas une grande mémoire et nécessite peu de calcul pour l'implémentation.

3.3.1.2 Approche éléments finis avec formulation de Galerkin :

Cette approche applicable pour les schémas median-dual est dérivée de la méthode des éléments finis. Elle transforme l'intégration des gradients sur la surface du volume de contrôle en une évaluation de la matrice Hessienne au nœud central.

Le schéma original a été formulé pour les grilles purement triangulaires/tétraédriques. Il emploie l'union de tous les éléments qui contiennent le nœud particulier. Et pour simplifier l'implémentation, la viscosité dynamique est moyennée à partir des valeurs nœudales. Après, les deuxièmes dérivés peuvent être évalués par :

$$\begin{bmatrix} \partial_x(\mu\partial_x U) & \partial_y(\mu\partial_x U) & \partial_z(\mu\partial_x U) \\ \partial_x(\mu\partial_y U) & \partial_y(\mu\partial_y U) & \partial_z(\mu\partial_y U) \\ \partial_x(\mu\partial_z U) & \partial_y(\mu\partial_z U) & \partial_z(\mu\partial_z U) \end{bmatrix}_i = \frac{1}{\Omega'} \sum_{j=1}^{N_A} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \frac{\mu_i + \mu_j}{2} (U_i - U_j) \right\}.$$

Le volume Ω' contient tout les tétraèdres qui partagent le nœud i . Les coefficients de la matrice symétrique $\bar{\alpha}$ sont donnés par :

$$\alpha_{nk} = \sum_e \frac{(S_e^j)_n (S_e^i)_k}{\Omega_e},$$

Où n, k dénotent les indices x, y, z , et $(\vec{S}_e^i)_n, (\vec{S}_e^j)_k$ représentent les composantes des vecteur surface sortant.

3.3.1.3 Moyenne des valeurs nœudales :

Ce schéma est appliqué pour les volumes de contrôle centrés et purement tétraédriques. Il est basé sur la moyenne des valeurs des trois nœuds qui définissent la face de la maille, les premières dérivées aux faces résultent de la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} x_j - x_I & y - y_I & z - z_I \\ \frac{1}{2}(x_2 + x_3) - x_1 & \frac{1}{2}(y_2 + y_3) - y_1 & \frac{1}{2}(z_2 + z_3) - z_1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_3) - x_2 & \frac{1}{2}(y_1 + y_3) - y_2 & \frac{1}{2}(z_1 + z_3) - z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_j - U_I \\ \frac{1}{2}(U_2 + U_3) - U_1 \\ \frac{1}{2}(U_1 + U_3) - U_2 \end{bmatrix}.$$

3.3.2 Moyenne des gradients :

Si les gradients dans chaque volume de contrôle étaient déjà calculés, les gradients aux centres des faces sont simplement moyennés :

$$\bar{\nabla} U_{IJ} = \frac{1}{2} [\nabla U_I + \nabla U_J].$$

Cette approche est attractive mais elle conduit à découplage non favorable surtout quand appliquée aux grilles quadrilatérales ou hexaédriques.

La même approche peut être améliorée en utilisant une dérivation directionnelle le long de la ligne de connexion entre les centres des nœuds (dans le cas d'un schéma centré) :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{IJ} \approx \frac{U_J - U_I}{l_{IJ}},$$

Où l_{IJ} représente la distance entre les deux nœuds centraux I et J .

La moyenne modifiée s'écrira :

$$\nabla U_{IJ} = \bar{\nabla} U_{IJ} - \left[\bar{\nabla} U_{IJ} \cdot \vec{t}_{IJ} - \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{IJ} \right] \vec{t}_{IJ}$$

Où $\vec{t}_{IJ} = \frac{\vec{r}_{IJ}}{l_{IJ}}$

Cette modification conduit à un fort couplément sur les grilles tétraédriques et même les grilles prismatiques. Cette approche ne requiert pas un stockage additionnel de données pour cela elle est plus attractive que les autres méthodologies, en plus, les gradients fournis dans les volumes de contrôle peuvent être utilisés dans le flux convectif.

Chapitre 4

Discretisation Temporelle

La méthode des lignes ou la séparation entre la discrétisation spatiale et la discrétisation temporelle conduit (appliquée pour chaque volume de contrôle) à un système des équations différentielles ordinaires dans le temps couplées :

$$\frac{d(\Omega \bar{M} \vec{W})_i}{dt} = -\vec{R}_i.$$

Où \vec{R} représente le résidu et M dénote la matrice masse et l'indice i décrit le volume de contrôle.

Ce système doit être intégré soit pour obtenir la solution en régime stationnaire ($R=0$), soit pour reproduire l'histoire de l'écoulement instationnaire.

Dans l'introduction on a parlé brièvement des méthodes explicites et implicites ces deux méthodes sont dérivées à partir du schéma no linéaire suivant [1]:

$$\frac{(\Omega \bar{M})_i}{\Delta t_i} \Delta \vec{W}_i^n = -\frac{\beta}{1+\omega} \vec{R}_i^{n+1} - \frac{1-\beta}{1+\omega} \vec{R}_i^n + \frac{\omega}{1+\omega} \frac{(\Omega \bar{M})_i}{\Delta t_i} \Delta \vec{W}_i^{n-1},$$

où :

$$\Delta \vec{W}_i^n = \vec{W}_i^{n+1} - \vec{W}_i^n$$

L'indice (n+1) dénote le pas du temps alors W^n signifie la solution au temps présent (t) et W^{n+1} dénote la solution au temps ($t + \Delta t$). Les paramètres β et ω déterminent le type (explicite ou implicite) et la précision en terme temps.

4.1 Schémas explicite :

Un schéma explicite démarre à partir d'une solution connue W^n et utilise le résiduel correspondant R^n pour obtenir la nouvelle solution au temps $(t+\Delta t)$.

Un schéma explicite et dérivé de l'équation précédente en mettant $\beta=0$ et $\omega=0$ ce qui donne :

$$\bar{M}_I \Delta \bar{W}_I^n = - \frac{\Delta t_I}{\Omega_I} \bar{R}_I^n.$$

La méthode la plus populaire pour résoudre ce genre d'équation est bien la méthode multi étages de Runge-Kutta. Cette méthode d'un ordre m appliquée à une équation discrétisée où la matrice masse est remplacée par la matrice identité donne :

$$\begin{aligned} \bar{W}_I^{(0)} &= \bar{W}_I^n \\ \bar{W}_I^{(1)} &= \bar{W}_I^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t_I}{\Omega_I} \bar{R}_I^{(0)} \\ \bar{W}_I^{(2)} &= \bar{W}_I^{(0)} - \alpha_2 \frac{\Delta t_I}{\Omega_I} \bar{R}_I^{(1)} \\ &\vdots \\ \bar{W}_I^{n+1} &= \bar{W}_I^{(m)} - \alpha_m \frac{\Delta t_I}{\Omega_I} \bar{R}_I^{(m-1)} \end{aligned}$$

Dans cette équation α_k représentent les coefficients de chaque étage et la notation \bar{R}_i dénote le résiduel évalué avec la solution W_i^k du $k^{ième}$ étage. Les coefficients sont donnés dans les tables suivantes :

étages	Schéma 1 ^{er} ordre			Schéma 2 ^{eme} ordre		
	3	4	5	3	4	5
σ	1.5	2.0	2.5	0.69	0.92	1.15
α_1	0.1481	0.0833	0.0533	0.1918	0.1084	0.0695
α_2	0.4000	0.2069	0.1263	0.4929	0.2602	0.1602
α_3	1.0000	0.4265	0.2375	1.0000	0.5052	0.2898
α_4		1.0000	0.4414		1.0000	0.5060
α_4			1.0000			1.0000

Schéma multi-étages : coefficients optimisés (α) et nombre CFL (σ)[1]

étages	Schéma central $\sigma = 3.6$		Schéma upwind $\sigma = 2.0$	
	α	β	α	β
1	0.2500	1.00	0.2742	1.00
2	0.1667	0.00	0.2067	0.00
3	0.3750	0.56	0.5020	0.56
4	0.5000	0.00	0.5142	0.00
5	1.0000	0.44	1.0000	0.44

Schéma multi-étages hybride[1]

Remarque :

Chaque schéma explicite est stable seulement si le pas de temps ne dépasse pas une certaine valeur Δt . Un schéma explicite doit être conforme à la condition CFL « Courante-Friedrichs-Lewy » qui veut dire que le pas de temps doit être inférieur ou égale au temps nécessaire pour transmettre l'information d'une maille à l'autre.

4.2 Schémas implicites :

Plusieurs schémas implicites sont obtenus par mettant $\beta \neq 0$, par exemple pour calculer la solution en régime stationnaire, il est préférable de mettre $\omega = 0$, donc :

$$\frac{(\Omega \bar{M})_I}{\Delta t_I} \Delta \bar{W}_I^n = -\beta \vec{R}_I^{n+1} - (1 - \beta) \vec{R}_I^n, \quad (*)$$

Comme on peut le voir, la formulation implicite conduit à une équation non linéaire des variables inconnues du fluide au temps $t + \Delta t$. Le calcul ne peut être fait directement, alors on linéarise le résiduel \vec{R}^{n+1} :

$$\vec{R}^{n+1} \approx \vec{R}^n + \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \bar{W}} \right) \Delta \bar{W}^n$$

Où le terme $\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \bar{W}} \right)$ est le Jacobéen du flux. On doit noter que le Jacobéen du flux est dérivé à partir des approximations en espace (\vec{R}^n).

Si on substitue la linéarisation dans l'équation (*) on obtient le schéma implicite suivant :

$$\left[\frac{(\Omega \bar{M})_I}{\Delta t_I} + \beta \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \bar{W}} \right)_I \right] \Delta \bar{W}^n = -\vec{R}_I^n,$$

Le terme entre crochets est appelé *l'opérateur implicite*.

L'opérateur implicite constitue une large matrice non symétrique avec des dimensions égales au nombre total des mailles (cell-centered) ou le nombre des nœuds (cell-vertex).

La solution de l'équation requiert l'inversion de l'opérateur implicite c.à.d. l'inversion d'une très large matrice, cette inversion est faite soit par des méthodes directes (Gauss élimination) qui demande une grande mémoire pour le calcul, soit par des méthodes itératives.

4.3 Conditions aux limites :

N'importe quelle simulation numérique ne peut considérer qu'une partie du domaine physique réel. La troncation du domaine conduit à des frontières artificielles où on doit décrire les valeurs de certaines quantités physiques. Le traitement numérique des frontières demande une attention particulière car une implémentation inconvenable peut donner des résultats loin de la réalité ou influe négativement sur la stabilité et la convergence de la solution.

Les types de frontières suivant sont en général rencontrés dans la résolution numérique des écoulements :

- mur solide.
- domaine à l'infini
- entrée/sortie écoulement.
- symétrie.
- discontinuité
- frontière périodique.
- interface.

Le traitement numérique des frontières précédentes est détaillé par la suite.

4.3.1 Condition paroi solide :

Fluide non visqueux :

Dans le cas d'un fluide non visqueux, le fluide glisse sur la surface et puisqu'il n'y a pas des forces de frottement la vitesse doit être tangente à la surface, ceci est équivalent au fait qu'il n'y a pas d'écoulement perpendiculaire à la surface :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0.$$

Où n dénote le vecteur normal de la surface. Alors la vitesse est nulle à la paroi. Par conséquent le vecteur du flux convectif est réduit à :

$$(\vec{F}_c)_w = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x p_w \\ n_y p_w \\ n_z p_w \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec p_w est la pression à la paroi. Cette dernière est extrapolée selon le schéma choisi à partir des pressions situées juste au dessus de la paroi.

Fluide visqueux :

Pour un fluide visqueux passant sur une paroi, la vitesse relative entre la surface et le fluide est nulle à la surface. On parle alors de la condition de non glissement. Alors pour une paroi stationnaire les composantes de la vitesse deviennent :

$$u = v = w = 0.$$

Comme conséquences normales de la condition de non glissement on a :

- on n'a pas besoin de résoudre l'équation de conservation du moment à la surface de la paroi.
- le flux convectif est donné par la formule précédente, et la pression est obtenue par la même méthode que celle d'un fluide non visqueux.

4.3.2 Domaine loin (infini) :

La simulation numérique des écoulements externes des profils, ailes, voiture et autre configurations doit être faite dans un domaine limité. Pour cette raison un domaine loin artificiel devient nécessaire

Concept des variables caractéristiques :

Selon le signe des valeurs propres du Jacobéen du flux convectif, l'information est transportée de l'extérieur à l'intérieur du domaine de calcul à travers les variables caractéristiques. Par exemple dans le cas supersonique il y a quatre caractéristiques entrantes et une sortante. La situation inverse est pour le subsonique. Selon le théorème de Kreiss en 1D, le nombre de conditions à imposer de l'extérieur de la frontière soit être égale au nombre des caractéristiques entrantes. Le reste des conditions est déterminé de la solution du domaine intérieur.

Cette approche est basée sur les caractéristiques à partir des équations d'Euler en 1D normales à la frontière.

Les deux cas basiques sont illustrés dans la figure suivante. L'écoulement peut être soit entrant soit sortant du domaine, donc selon le nombre de Mach, quatre types du domaine à l'infini doivent être traité :

- entrée écoulement supersonique.
- sortie écoulement supersonique.
- entrée écoulement subsonique.
- sortie écoulement subsonique.

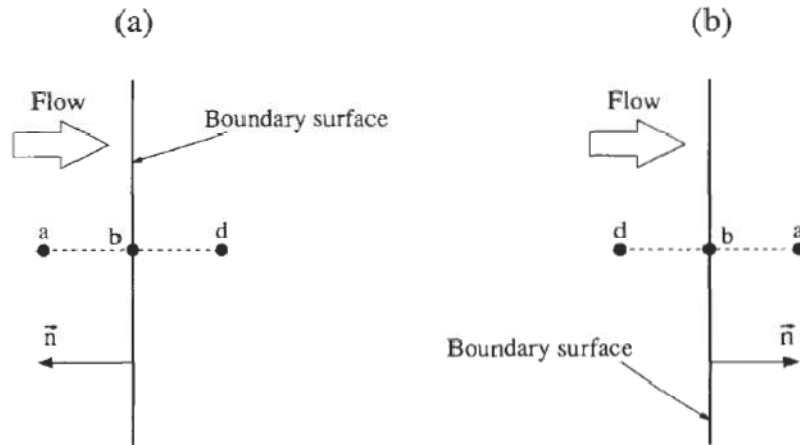


Figure 4.1 Domaine loin

4.3.2.1 écoulement supersonique entrant:

Pour un écoulement supersonique toutes les valeurs propres ont le même signe, donc l'écoulement est entrant au domaine de calcul, la variable conservative à la frontière est déterminée par (voir figure précédente) :

$$\vec{W}_b = \vec{W}_a.$$

Les valeurs de \vec{W}_b sont spécifiquement basées sur le nombre de Mach donné M_∞ et les deux angles de l'écoulement (angles d'attaque).

4.3.2.2 écoulement supersonique sortant:

Dans ce cas, toutes les valeurs propres ont aussi le même signe. Seulement l'écoulement quitte le domaine physique et toutes les variables conservatives à la frontière doivent être déterminées à partir de la solution du domaine intérieur :

$$\vec{W}_b = \vec{W}_a$$

4.3.2.3 écoulement subsonique entrant :

Ici quatre caractéristiques entrent et quittent le domaine physique. Alors, quatre variables caractéristiques sont prescrites à la base des valeurs l'écoulement libre. Une variable caractéristique est extrapolée à partir du domaine physique intérieur. Ce qui conduit à :

$$p_b = \frac{1}{2} \{ p_a + p_d - \rho_0 c_0 [n_x (u_a - u_d) + n_y (v_a - v_d) + n_z (w_a - w_d)] \}$$

$$\rho_b = \rho_a + (p_b - p_a) / c_0^2$$

$$u_b = u_a - n_x(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

$$v_b = v_a - n_y(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

$$w_b = w_a - n_z(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

Où ρ_0 et c_0 représentent l'état de référence. Elle normalement égale à l'état aux points de l'intérieur.

4.3.2.4 écoulement subsonique sortant:

Dans le cas des sorties subsoniques, quatre variables caractéristiques (la densité et trois composantes de la vitesse) doivent être extrapolées à partir du domaine physique interne. La cinquième variable restante (pression) doit être spécifiée.

Les variables primitives à la frontière sont obtenues par :

$$\rho_b = \rho_d + (p_b - p_d)/c_0^2$$

$$u_b = u_d - n_x(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

$$v_b = v_d - n_y(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

$$w_b = w_d - n_z(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

où p_d est la pression statique prescrite.

4.3.2.5 Modifications pour les corps portant :

Les conditions du domaine infini précédentes assument que la circulation est nulle, ce qui n'est pas correcte pour un corps portant dans un écoulement sub ou transsonique. Pour cette raison le domaine à l'infini doit être très loin du corps. Mais cette distance est réduite en incluant un effet de vortex assumé centré sur le corps portant.

Correction en 2D :

$$u_\infty^* = u_\infty + \left(\frac{\Gamma \sqrt{1 - M_\infty^2}}{2\pi d} \right) \frac{1}{1 - M_\infty^2 \sin^2(\theta - \alpha)} \sin \theta$$

$$v_\infty^* = v_\infty - \left(\frac{\Gamma \sqrt{1 - M_\infty^2}}{2\pi d} \right) \frac{1}{1 - M_\infty^2 \sin^2(\theta - \alpha)} \sin \theta$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \|\vec{v}_\infty\|_2 a C_L$$

$$d = \sqrt{(x - x_{ref})^2 + (y - y_{ref})^2},$$

$$\theta = \tan\left(\frac{y - y_{ref}}{x - x_{ref}}\right),$$

$$p_{\infty}^* = \left[p_{\infty}^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\rho_{\infty} (\|\vec{v}_{\infty}\|_2^2 - \|\vec{v}_{\infty}^*\|_2^2)}{2p_{\infty}^{1/\gamma}} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

4.3.3 Frontière entrée/sortie :

Plusieurs approches existent pour l'implémentation numérique des conditions d'entrée et particulièrement des sorties (ouvertures) pour les équations de Navier-Stokes .

Conditions d'entrée subsonique :

Une procédure commune consiste à spécifier la pression totale, la température totale, et deux angles. Une variable caractéristique doit être interpolée à partir du domaine interne.

On utilise l'invariant de Riemann défini par :

$$\mathcal{R}^- = \vec{v}_d \cdot \vec{n} - \frac{2c_d}{\gamma - 1},$$

Où d dénote l'état intérieur du domaine. Cette invariante de Riemann est utilisée pour déterminer la vitesse absolue ou bien la célérité du son. En pratique, le choix de la célérité du son conduit à des schémas plus stables, donc :

$$c_b = \frac{-\mathcal{R}^-(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)\cos^2\theta + 2} \left\{ 1 + \cos\theta \sqrt{\frac{[(\gamma - 1)\cos^2\theta + 2]c_0^2}{(\gamma - 1)(\mathcal{R}^-)^2} - \frac{\gamma - 1}{2}} \right\}$$

$$\cos\theta = -\frac{\vec{v}_d \cdot \vec{n}}{\|\vec{v}_d\|_2}$$

$$c_0^2 = c_d^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \|\vec{v}_d\|_2^2,$$

Les autres quantités sont évaluées avec :

$$T_b = T_0 \left(\frac{c_b^2}{c_0^2} \right)$$

$$p_b = p_0 \left(\frac{T_b}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\rho_b = \frac{p_b}{RT_b}$$

$$\|\vec{v}_b\|_2 = \sqrt{2c_p(T_0 - T_b)},$$

Conditions de sortie subsonique :

Dans l'étude des turbomachines, la pression statique est donnée à la sortie. La sortie subsonique peut être traitée comme sortie d'écoulement. Seulement la pression p_a est remplacée par la pression statique donnée.

4.3.4 Plan de symétrie :

Si l'écoulement est symétrique par rapport à une ligne ou un plan, la première condition qui doit être mise est le fait qu'il n'y a pas de flux à travers la frontière. Ceci est équivalent à la condition de paroi solide pour un écoulement on visqueux. En plus les gradients suivant doivent être éliminés :

- Gradient normal de la quantité scalaire.
- Gradient normal de vitesse tangentielle.
- Le gradient le long de la frontière de vitesse normale.

Et on écrit :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} U = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{t}) = 0$$

$$\vec{t} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{t}) = 0$$

4.3.5 Condition de frontières périodiques :

Certaines applications pratiques où l'écoulement est périodique par rapport à une ou plusieurs directions. Dans un tel cas, il suffit de simuler l'écoulement seulement sur une partie du domaine qui se répète. Et l'interaction avec le reste des domaines est garantie par les conditions des frontières périodiques.

On distingue entre deux types des frontières périodiques. Le premier est celui qui englobe la périodicité en translation c.à.d. les autres frontières sont générées par une translation des coordonnées. Le deuxième type représente les frontières à périodicité rotationnelle

Chapitre 5

Modélisation de Turbulence

Une caractéristique exceptionnelle de l'écoulement turbulent est que les molécules ont un mouvement chaotique le long des trajectoires complexes et irrégulières. Ce mouvement chaotique fort cause une intense mixture des différentes couches dans le fluide. Et à cause de l'augmentation d'échange de la quantité de mouvement et d'énergie entre les molécules et les parois solides, les écoulements turbulents conduisent à des fortes frictions et échanges de chaleur.

Quoique la fluctuation chaotique des variables d'écoulement soit d'une nature déterministe, la simulation des écoulements turbulents représente toujours un problème. Malgré les performances des supercalculateurs modernes, la simulation directe de la turbulence avec les équations de Navier-Stokes (connue par DNS : Direct Numerical Simulation) est applicable seulement aux écoulements simples à des bas nombre de Reynolds. La contrainte principale dans la DNS est le fait que le nombre de mailles nécessaire pour satisfaire la résolution spatiale est de l'ordre de $Re^{9/4}$ et le temps de calcul est de l'ordre Re^3 . C'est pour cette raison qu'on est forcé à quantifier l'effet de turbulence dans une manière approximative. A cette fin, une grande variété des modèles de turbulence sont développés et les recherches sont toujours en cours. Il y a cinq classes principales des modèles de turbulence :

- Algébrique,
- A une équation,
- A multiples équations,
- Fermeture du second ordre (Reynolds stress models),
- Simulation à grandes échelles (Large Eddy Simulation LES).

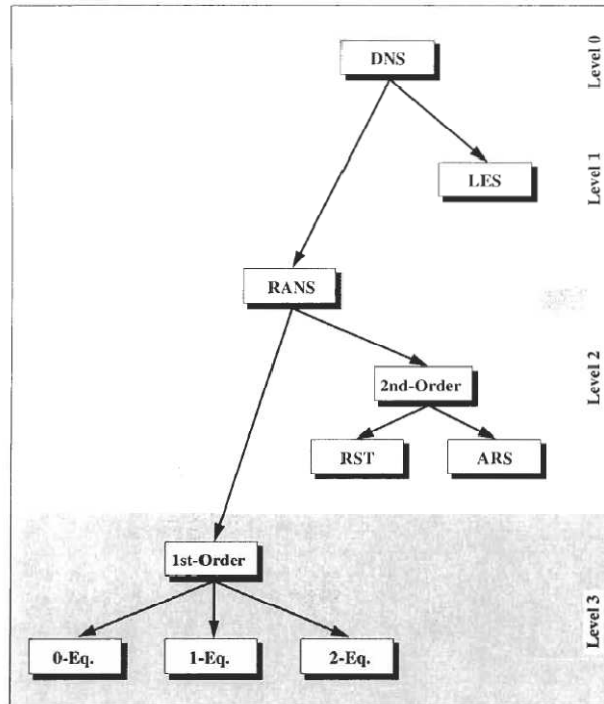


Figure 5.1 : Modélisation de turbulence.

Il faut noter qu'il n'y a pas un modèle capable de prédire d'une manière sûre tout genre d'écoulement. Chaque modèle a ses avantages et ses inconvénients donc chaque modèle est approprié à un type d'écoulement.

5.1 Modélisation statistique de la turbulence :

Les écoulements turbulents en présence de paroi sont très courants dans les applications industrielles, aéronautiques et spatiales. Ces écoulements interviennent en aérodynamique interne, dans le cas, par exemple, des chambres de combustion, tuyères ou turbines. En aérodynamique externe, on peut citer l'exemple des arrière-corps ou bien des écoulements sur le fuselage ou sur la nacelle d'un avion.

La connaissance précise des phénomènes physiques dynamiques et thermiques intervenant à l'intérieur ou autour d'un élément donné, est nécessaire à l'industrie qui souhaite concevoir ou dimensionner cet élément. Par ailleurs, la précision des champs de vitesse, de pression et de température doit, non seulement, être fiable, mais aussi générer un coût moindre. Un moyen d'y parvenir est d'essayer de reproduire numériquement la configuration et les conditions dans lesquelles évolue l'élément en question.

L'approche numérique la plus communément employée dans l'industrie reste la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (ou RANS pour Reynolds-Averaged Navier-Stokes). Le passage à la moyenne des équations de Navier-Stokes fait apparaître des termes inconnus, qu'il convient de modéliser. Il s'agit, pour la dynamique, des tensions de Reynolds

et, pour la thermique, des flux de chaleur turbulents. Le passage à la moyenne de ces équations occasionne, par conséquent, une perte d'informations et rend, par là même, la méthode moins précise que la DNS ou la LES. Cependant, son intérêt repose sur la possibilité de traiter des configurations industrielles d'une manière simple et rapide. Toute l'approche RANS réside dans la représentation de ces deux corrélations par le biais de modèles de turbulence, qui diffèrent généralement par leur degré de complexité.

5.1.1 Equations du mouvement moyen :

En suivant l'approche statistique de fermeture en un point, on peut décomposer le mouvement instantané en une partie moyenne et une partie fluctuante. Cette décomposition, introduite au niveau des variables d'écoulement avant résolution, s'effectue selon le formalisme de Favre. Ainsi, on utilise une moyenne, pondérée par la masse $\tilde{\phi}$, obtenue en effectuant le rapport $\overline{\rho\phi}/\bar{\rho}$. Cette moyenne est ensuite appliquée à toutes les variables excepté la masse volumique et la pression. En un point M, on définit la moyenne temporelle d'une grandeur ϕ par :

$$\overline{\phi(M, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \phi(M, t) dt$$

Remarquons qu'il s'agit en fait d'une moyenne effectuée sur un intervalle de temps grand comparé aux échelles turbulentes. On obtient pour la moyenne au sens de Favre :

$$\tilde{\phi} = \bar{\phi} - \overline{\phi''} \quad \text{avec} \quad \overline{\phi''} = -\frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}}$$

Et en posant alors $\tilde{\phi} = \bar{\phi} - \overline{\phi''}$, on arrive facilement aux égalités suivantes :

$$\overline{\rho\phi''} = 0, \quad \overline{\phi''} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\rho\phi''} = -\overline{\rho'\phi''}$$

Sous cette forme, on voit clairement que la moyenne de Favre permet d'occulter les corrélations faisant intervenir les fluctuations de masse volumique. Cette particularité permet d'ailleurs au formalisme de Favre de garder la forme conservative des équations instantanées. On obtient ainsi successivement pour la continuité et la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{U}_j &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{U}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j + \overline{\rho u_i'' u_j''} + \bar{p} \delta_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\sigma}_{ij} \end{aligned}$$

Quant à l'équation d'énergie, il vient en introduisant l'enthalpie massique $h = c_p T$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \bar{E}_t + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{U}_j (\bar{\rho} \bar{E}_t + \bar{p}) + \bar{\rho} \widetilde{u_j'' h''} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \widetilde{u_j'' u_k''} \bar{U}_k + \frac{1}{2} \bar{\rho} \widetilde{u_j'' u_k'' u_k''} \right] = \overline{\sigma_{ij} U_i} - \bar{q}_j = 0$$

La définition de l'énergie totale étant au passage modifiée selon :

$$\bar{E}_t = \bar{e} + \frac{1}{2} \bar{U}_k \bar{U}_k + \frac{1}{2} \widetilde{u_k'' u_k''}$$

où par définition, $k = \frac{1}{2} \widetilde{u_k'' u_k''}$ représente l'énergie cinétique de turbulence par unité de masse. A ce stade, même en négligeant la corrélation d'ordre trois $\widetilde{u_j'' u_k'' u_k''}$ des hypothèses restent nécessaires afin de modéliser les corrélations $-\bar{\rho} \widetilde{u_k'' u_k''}$ et $-\bar{\rho} \widetilde{u_j'' h''}$ qui sont apparues dans les équations précédentes; les premières constituant les contraintes de Reynolds (flux turbulent de quantité de mouvement) et les secondes étant assimilées à des flux turbulents de chaleur.

5.1.2 Modélisation des flux turbulents :

La modélisation de ces termes inconnus constitue l'étape de fermeture dans l'approche statique qui a été adopté. Cette modélisation, lorsqu'elle s'effectue à partir du concept de viscosité tourbillonnaire de Boussinesq, repose de manière générale sur une hypothèse de transport par gradient du type :

$$-\bar{\rho} \widetilde{u_i'' \phi''} = \frac{\mu_T \partial \bar{\phi}}{\sigma_\phi \partial x_i}$$

En généralisant cette hypothèse à des écoulements où la divergence de vitesse n'est pas nulle, la relation tensorielle pour les contraintes de Reynolds devient :

$$-\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} k$$

Dans cette relation, le terme sphérique $\frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} k$ assure la cohérence physique de l'égalité tensorielle, il est assimilé à une pression turbulente due aux mouvements d'agitation. Le coefficient μ_t est la viscosité turbulente, représentative de l'activité tourbillonnaire.

Par suite, en supposant que les mécanismes de transfert turbulent de quantité de mouvement et de chaleur sont liés, pour le flux de chaleur turbulent, à l'égalité :

$$-\bar{\rho} \widetilde{u_j'' h''} = \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_i} = \gamma \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_i}$$

Où Pr_T est le nombre de Prandtl turbulent fixé à 0.9.

5.2 Fermetures du premier ordre :

Les fermetures du premier ordre représentent la façon la plus simple pour approximer les équations de Navier-Stokes moyennées. Elles sont basées sur le modèle de Boussinesq

discuté au paravent. Par conséquent, la tâche de chaque modèle de turbulence est de calculer la viscosité turbulente μ_t .

Parmi une large variété des modèles du premier ordre, on a sélectionné trois approches les plus utilisées et qui représentent l'état d'art actuel. Ces trois modèles peuvent être implémentés facilement. D'abord on va discuter le modèle à une équation de Spalart & Allmaras. Après on va discuter le fameux modèle à deux équations le modèle $(k - \varepsilon)$. Finalement, on discutera le modèle $(K - \omega SST)$ proposé par Menter.

En ce qui suit, la densité et composantes de la vitesse sont moyennées (Reynolds/Favre) et la notation correspondante est omise.

5.2.1 Modèle à une équation de Spalart-Allmaras :

Ce modèle utilise une équation de transport pour la viscosité $\tilde{\nu}$. Il a été développé à partir des résultats empiriques, l'analyse dimensionnelle et l'invariance Galiléenne. Le modèle de Spalart-Allmaras donne une bonne précision pour les écoulements turbulents avec gradient de pression adverse. Ce modèle a des caractéristiques numérique favorables. Il est « local » cela veut dire que l'équation en un point ne dépend pas de la solution aux autres points. Il est aussi robuste, converge rapidement et requiert une résolution modérée aux régions proches paroi.

Forme différentielle :

Le modèle de Spalart-Allmaras peut s'écrire en notation tensorielle comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\nu} v_j) \\ = C_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v_L + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} \\ - \left[C_{\omega 1} f_{\omega} - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + f_{t1} \|\Delta \vec{v}\|_2^2. \end{aligned}$$

Les termes de la partie droite représentent : la production de la viscosité turbulente, diffusion conservative, la destruction de la turbulence, amortissement de la production, et la source de turbulence. En outre, $\nu_l = \mu_l / \rho$ dénote la viscosité cinématique laminaire et d est la distance de la paroi la plus proche. La viscosité turbulente est obtenue par :

$$\mu_T = f_{v1} \rho \tilde{\nu}$$

Le terme de production est évalué avec cette formule :

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= f_{v3} S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \\ f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad f_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{C_{v2}} \right)^{-3}, \end{aligned}$$

$$f_{v3} = \frac{(1 + \chi f_{v1})(1 - f_{v2})}{\max(\chi, 0.001)} , \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_L}$$

Dans cette équation : S est le taux de rotation :

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} ,$$

Où Ω_{ij} est donnée par :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Les termes qui contrôlent la destruction de la viscosité turbulente sont donnés par :

$$f_\omega = g \left(\frac{1 + C_{\omega3}^6}{g^6 + C_{\omega3}^6} \right)^{1/6}$$

$$g = r + C_{\omega2}(r^6 - r) , \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}$$

Les fonctions utilisées pour la modélisation de la transition laminaire-turbulent sont données par :

$$f_{t1} = C_{t1} g_t \exp \left(-C_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} (d^2 + g_t^2 d_t^2) \right) ,$$

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4} \chi^2) , \quad g_t = \min[0.1, \|\Delta \vec{v}\|_2 / (\omega_t \Delta x_t)]$$

Où ω_t représente la vorticité à la paroi, $\|\Delta \vec{v}\|_2$ dénote la différence de vitesses entre la paroi et le point de calcul, Δx_t et l'espacement par rapport à la paroi.

Finalement, les différentes constantes sont définies par :

$$C_{b1} = 0.1355 , \quad C_{b2} = 0.622 , \quad C_{v1} = 7.1 , \quad C_{v2} = 5 , \quad \sigma = \frac{2}{3} ,$$

$$\kappa = 0.41 , \quad C_{\omega1} = C_{b1} / \kappa^2$$

$$C_{\omega2} = 0.3 , \quad C_{\omega3} = 2 , \quad C_{t1} = 1 , \quad C_{t2} = 2 ,$$

$$C_{t3} = 1.3 , \quad C_{t4} = 0.5 .$$

Conditions aux limites et valeurs initiales :

La valeur initiale de $\tilde{\nu}$ est habituellement pris $\tilde{\nu} = 0.1\nu_L$. la même valeur est spécifiée pour les conditions limites type entrée. Aux sorties, $\tilde{\nu}$ est simplement extrapolée à partir du domaine intérieur. Aux parois solides, il est approprié de mettre $\tilde{\nu} = 0$ donc $\mu_t = 0$.

5.2.2 Le modèle à deux équations $K - \varepsilon$:

C'est le modèle le plus utilisé, il est basé sur la résolution des équations de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation de la turbulence. Les origines de ce modèle remonte aux années 1970, et depuis, plusieurs formulations ont été proposées. La plus importante contribution était celle de Jones et Launder [13], Launder et Sharma et Launder et Spalding.

Le modèle $K - \varepsilon$ requies l'addition d'un terme d'amortissement pour rester valide proche des parois. Le but de l'amortissement est d'assurer une limitation correct de K et ε aux parois :

$$K \sim y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{K} \sim \frac{2\nu}{y^2} \quad \text{pour} \quad y \rightarrow 0$$

Où y représente la coordonnée normale à la paroi

Les modèles $K - \varepsilon$ avec fonctions d'amortissement sont aussi connues par *modèles bas Reynolds*. les formulations les plus utilisées des fonctions d'amortissement ont été proposées par Jones et Launder , Launder et Sharma, Lam et Bremhorst, et Chien.

Le modèle $K - \varepsilon$ est plus difficile à résoudre numériquement que le modèle de Spalart-Allmaras particulièrement les fonctions d'amortissement qui conduisent à des termes source ce qui nécessite une grande résolution aux parois, et requies des schémas implicites pour la résolution.

Forme différentielle :

Aux bas Reynolds le modèle $K - \varepsilon$ est donné par :

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij}^F S_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j \varepsilon^*) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^*}{K} \tau_{ij}^F S_{ij} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon^*)^2}{K} + \phi_\varepsilon.$$

Les termes de la partie droite représentent respectivement la diffusion convective, la production et la dissipation de la viscosité. En outre, ϕ_ε dénote le terme explicite de la paroi.

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho \frac{K^2}{\varepsilon^*}.$$

L'énergie turbulente est aussi utilisée pour évaluer la viscosité turbulente. La quantité ε^* est reliée au taux de dissipation par la relation :

$$\varepsilon = \varepsilon_\omega + \varepsilon^*.$$

Le terme ε_ω est la valeur du taux de dissipation à la paroi.

Les constantes, la fonction d'amortissement et le terme paroi qu'on a donné dans ce modèle sont ceux du modèle de Launder-Sharma [10], ils sont donnés par :

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92,$$

$$\sigma_K = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad Pr_T = 0.9.$$

$$f_\mu = \exp\left(-\frac{3.4}{(1 + 0.02 Re_T)^2}\right)$$

$$f_{\varepsilon 1} = 1$$

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - 0.3 \exp(Re_T^2)$$

Avec : $Re_T = \rho K^2 / (\varepsilon^* \mu_L)$ est le nombre de Reynolds turbulent.

Finalement, le terme paroi ϕ_ε et la valeur de ε_ω sont définis par :

$$\phi_\varepsilon = 2\mu_T \frac{\mu_L}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_\omega = \frac{2\mu_L}{\rho} \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_j} \right)^2$$

Conditions aux limites et valeurs initiales :

La condition initiale pour l'énergie cinétique turbulente est spécifiée en fonction de l'intensité de turbulence de l'écoulement non perturbé comme suit :

$$K_\infty = 1.5(T_i U_\infty)^2$$

Où $T_i = 0.0001$ à 10% de la vitesse moyenne. La viscosité turbulente est spécifiée comme :

$$\mu_{T_\infty} = (0.1 \rightarrow 100)\mu_\infty$$

$$\text{Alors : } \varepsilon_\infty = \frac{\bar{\rho} c_\mu K_\infty^2}{\mu_{T_\infty}}$$

Les conditions limites sont :

- Aux frontières entrantes, $\varepsilon = \varepsilon_\infty$ et $k = k_\infty$.
- Aux parois solides, $k = 0, \mu_t = 0, \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_\omega = 0$.
- Aux frontières sortantes, on utilise l'extrapolation.

5.2.3 Le modèle SST de Menter :

Le modèle SST (Shear Stress Transport) de Menter fusionne le modèle $K - \omega$ de Wilcox avec un modèle $K - \varepsilon$ haut nombre de Reynolds, donc il combine les avantages des deux modèles. Alors, l'approche $K - \omega$ est utilisée pour la sous couche de la couche limite, parce que ce modèle ne nécessite pas un terme d'amortissement, en plus le modèle $K - \omega$ est utilisé dans une partie logarithmique de la couche limite où il est supérieur à l'approche $K - \varepsilon$ dans le cas d'un gradient de pression adverse avec un fluide compressible [15].

Un remarquable désavantage du modèle SST est le fait que la distance à la paroi la plus proche doit être connue ce qui demande plus d'effort pour la calculer surtout dans le cas d'un maillage non structuré.

Forme différentielle :

L'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente et la dissipation spécifique de la turbulence sont données par :

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu_L + \sigma_K \mu_T) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij}^F S_{ij} - \beta^* \rho \omega K$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j \omega)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu_L + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{C_\omega \rho}{\mu_T} \tau_{ij}^F S_{ij} - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - f_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}.$$

Les termes à droite dans cette équation représentent respectivement la diffusion conservative, la production de la viscosité turbulente et la dissipation. En outre, le dernier terme dans l'équation en ω décrit la diffusion croisée.

La viscosité turbulente est obtenue à partir de :

$$\mu_T = \frac{a_1 \rho K}{\max(a_1 \omega, f_2 \|\text{curl } \vec{v}\|_2)}.$$

La définition de la viscosité turbulente garantie que lorsqu'il y a un gradient de pression dans la couche limite où la production de k est plus grande que sa dissipation ω , la supposition de Bradshaw (les contraintes de cisaillement proportionnelles à l'énergie cinétique turbulente) est satisfaite.

La fonction f_1 qui mélange les coefficients du modèle $k - \omega$ dans la couche limite avec le modèle $K - \varepsilon$ transformé dans les zones d'écoulement libre, est définie par :

$$f_1 = \tanh(\arg_1^4)$$

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{K}}{0.09 \omega d}, \frac{500 \mu_L}{\rho \omega d^2} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} K}{CD_{K\omega} d^2} \right]$$

Où d est la distance de la paroi la plus proche, et $CD_{K\omega}$ est la partie positive de la diffusion croisée :

$$CD_{K\omega} = \max \left(2 \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right).$$

La fonction auxiliaire f_2 est donnée par :

$$f_2 = \tanh(\arg_2^2)$$

$$arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{K}}{0.09\omega d}, \frac{500\mu_L}{\rho\omega d^2}\right)$$

Les constants du modèle sont :

$$\alpha_1 = 0.31, \quad \beta^* = 0.09, \quad \kappa = 0.41.$$

Finalement, les coefficients du modèle SST $\beta, C_\omega, \sigma_K$, et σ_ω sont obtenus en mélangeant les coefficients du modèle $K - \omega$, dénoté par ϕ_1 , avec ceux du modèle $K - \varepsilon$ (ϕ_2) comme suit :

$$\phi = f_1\phi_1 + (1 - f_1)\phi_2.$$

Les coefficients du modèle $K - \omega$ sont (écoulement proche de la paroi) :

$$\sigma_{K1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075,$$

$$C_{\omega1} = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega1}\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} = 0.533.$$

Les coefficients du modèle $K - \varepsilon$ (écoulement loin de paroi) :

$$\sigma_{K2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828,$$

$$C_{\omega2} = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega2}\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} = 0.440.$$

Conditions aux limites :

Les conditions aux limites pour l'énergie cinétique turbulente et la dissipation spécifique aux parois solides sont :

$$K = 0 \text{ et } \omega = 10 \frac{6\mu_L}{\rho\beta_1(d_1)^2}$$

Où d_1 étant la distance du premier nœud (cell centred) de la paroi. On note que le maillage doit être raffiné aux parois de sorte que $y^+ < 3$.

Pour les entrées, les valeurs de l'écoulement libre sont recommandées

$$\omega_\infty = C_1 \frac{\|\vec{v}_\infty\|_2}{L}, \quad (\mu_T)_\infty = (\mu_L)_\infty 10^{-C_2}, \quad K_\infty = \frac{(\mu_T)_\infty}{\rho_\infty} \omega_\infty.$$

Avec L la longueur du domaine de calcul, $1 \leq C_1 \leq 10$ et $2 \leq C_2 \leq 5$.

Les valeurs de K et ω sont extrapolées à partir du domaine interne dans le cas des frontières sortantes.

Chapitre 6

Réalisation du solveur CFGH

6.1 Choix :

Pour un bon départ on doit fixer nos objectifs, les moyens pour y arriver et comment y atteindre. Surtout les moyens et le comment qui sont à la base de ce travail, et c'est selon eux qu'on donne un pré jugement sur la qualité du travail, et ce n'est qu'à la fin qu'interviennent les objectifs ou les résultats pour finaliser le jugement et l'évaluation du travail.

Alors, en ce qui concerne les objectifs, on vise à résoudre les équations moyennées de Navier Stokes avec le modèle de turbulence $k - \epsilon$ celui de Launder & Sharma. Pourquoi un tel modèle ? La réponse est qu'il est plus répondu ainsi il a fait ses preuves, c'est se qu'on dit de lui ! Mais pour nous ? Nous n'avons ni les connaissances nécessaires ni surtout pas l'expérience pour argumenter le choix de ce modèle, mais comme même ce n'est pas grave.

Pour les moyens, on a opté pour un maillage non structuré pour qu'on puisse traiter les géométries complexes, pour avoir des raffinements locaux et surtout pour bénéficier de la nature anisotrope qu'il nous offre. Mais la rançon à payer est très chère ; une discrétisation complexe et une implémentation très difficile.

Pour la discrétisation on a choisi la méthode dite *flux difference splitting* le schéma celui de Roe qui consiste à résoudre un problème de Riemann en chaque face du volume de contrôle. Cette méthode est bonne car elle prend en compte la direction des ondes (ou informations) et l'onde elle-même. Cette méthode est précise dans le calcul des couches limites et donne une bonne résolution aux chocs.

Et maintenant le comment. Pour le maillage c'est la méthode de Delaunay pour la génération du maillage, et toujours Delaunay combinée avec la méthode de Ruppert et Chew pour le raffinement.

En ce qui concerne les calculs, le comment est le schéma centré c.à.d. l'information est stockée au centre de la cellule et les flux aux faces sont calculés avec les valeurs moyennes. Cette méthode est relativement simple et surtout réduit la taille du stockage si comparée à d'autres méthodologies.

Une chose importante et essentielle qu'on doit noter est le langage de programmation utilisé. Pour nous c'est le Delphi (ou Pascal), c'est un langage qui en dehors de sa simplicité et sa structure, nous permet de mieux exploiter la machine de calcul au sens calcul, mémoire et interface. Ce langage nous a permis de bénéficier de l'approche de la programmation dynamique et la programmation orienté objet.

On note aussi que notre programme de calcul est dans sa totalité un programme dynamique.

Les différentes méthodes de calcul ont été expliquées aux chapitres précédents et ce qui suit vient de les compléter.

6.2 Maillage :

La triangulation de Delaunay est une technique de génération de maillages convenables pour l'interpolation, la méthode des éléments finis, et la méthode des volumes finis. Le problème est de trouver une triangulation qui couvre un domaine spécifié et contient seulement des triangles qui satisfassent certaines normes ou qualités requises (aucun angle ne doit être trop large ou trop petit, et aucun triangle ne doit être plus petit ou plus large que désiré).

6.2.1 Triangulation de Delaunay :

La triangulation de Delaunay est une structure géométrique qui a eu une grande popularité dans le domaine de génération de maillage.

En 2D une triangulation d'un ensemble \mathcal{V} de vertex est un ensemble \mathcal{T} de triangles dont l'union des vertex forme l'ensemble \mathcal{V} , et leurs intérieurs ne se chevauchent pas et leur union couvre le domaine convexe formé par \mathcal{V} .

La triangulation de Delaunay \mathcal{D} de \mathcal{V} , introduite par Delaunay en 1934, est le graphe défini comme suit : un cercle dans le plan est dit vide s'il ne contient aucun vertex de \mathcal{V} . Soit u et v deux vertex de \mathcal{V} ; le segment uv est dans \mathcal{D} si seulement s'il existe un cercle vide qui passe par u et v . Un segment qui satisfait cette propriété est qualifié Delaunay.

La triangulation de Delaunay d'un ensemble de vertex est toujours unique, et il n'est pas évident qu'un ensemble de segments de Delaunay forment une triangulation. A partir de la définition précédente, la triangulation de Delaunay est garantie d'être triangulation seulement si les vertex de \mathcal{V} sont en position générale, cela veut dire qu'il n'y pas quatre vertex de \mathcal{V} qui se trouvent sur le même cercle.

La même définition peut être vue d'une autre manière, considérons un ensemble de points dans le plan, trois points forment un triangle de Delaunay si le cercle circonscrit de ses trois points ne contient aucun autre point. Cette définition produit une triangulation unique toujours en assumant qu'il n'y a pas quatre points qui se trouvent sur le même cercle.

6.2.2 Triangulation de Delaunay initiale :

Pour construire une triangulation de Delaunay, il existe plusieurs algorithmes, les plus simples sont ceux basés sur l'insertion progressive. Cette technique procède par maintenir une triangulation de Delaunay à chaque insertion et les points sont insérés l'un après l'autre. Dans notre travail on a utilisé la même procédure pour générer la triangulation initiale, et voici par la suite les étapes suivies en détail [5]:

- 1- a. Trois points sont ajoutés pour former un grand triangle qui contient tout les N points à trianguler. Les coordonnées de ses points sont ajoutées arbitrairement, mais ils ne doivent pas être trop proches aux N points.
b- créer une liste de triangles \mathcal{T} , où le grand triangle est listé en premier.
- 2- Introduire le premier point (à partir de la liste des N points) dans le grand triangle et générer trois en connectant les trois vertex du grand triangle à ce point. Au même temps on supprime le grand triangle de la liste \mathcal{T} et on ajoute les trois nouveaux triangles à cette liste. Les triangles sont toujours définis par leurs vertex dans le sens antihoraire.
- 3- Maintenant, le prochain point p est introduit pour la triangulation. En premier lieu, on localise un triangle existant (triangle x) qui contient le point p , et par la suite trois nouveaux triangles sont formés en connectant le point p avec les vertex du triangle, **Figure 6.1**.

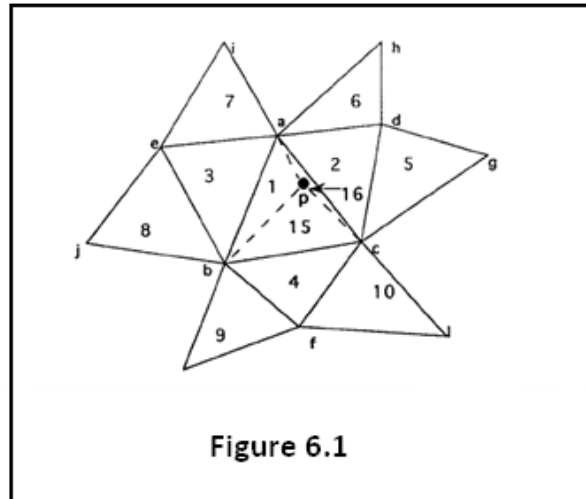


Figure 6.1

Maintenant le triangle original x est supprimé de la liste \mathcal{T} et les trois nouveaux sont ajoutés. Le gain est donc 2 triangles. Pour accomplir cette étape il faut trouver une procédure pour rechercher le triangle x . La recherche commence du dernier triangle dans la liste jusqu'au premier, et le point p est dans le triangle x si et seulement s'il se trouve à la gauche de chacun des trois arrêtes du triangle x . Par exemple considérons un vecteur position \vec{a} de l au point a et un vecteur position \vec{b} de l au point m comme le montre le **figure 6.2** :

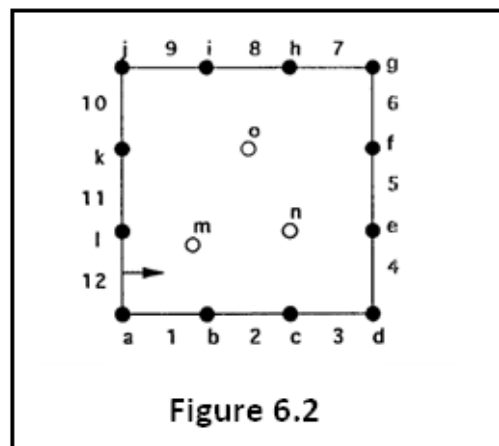


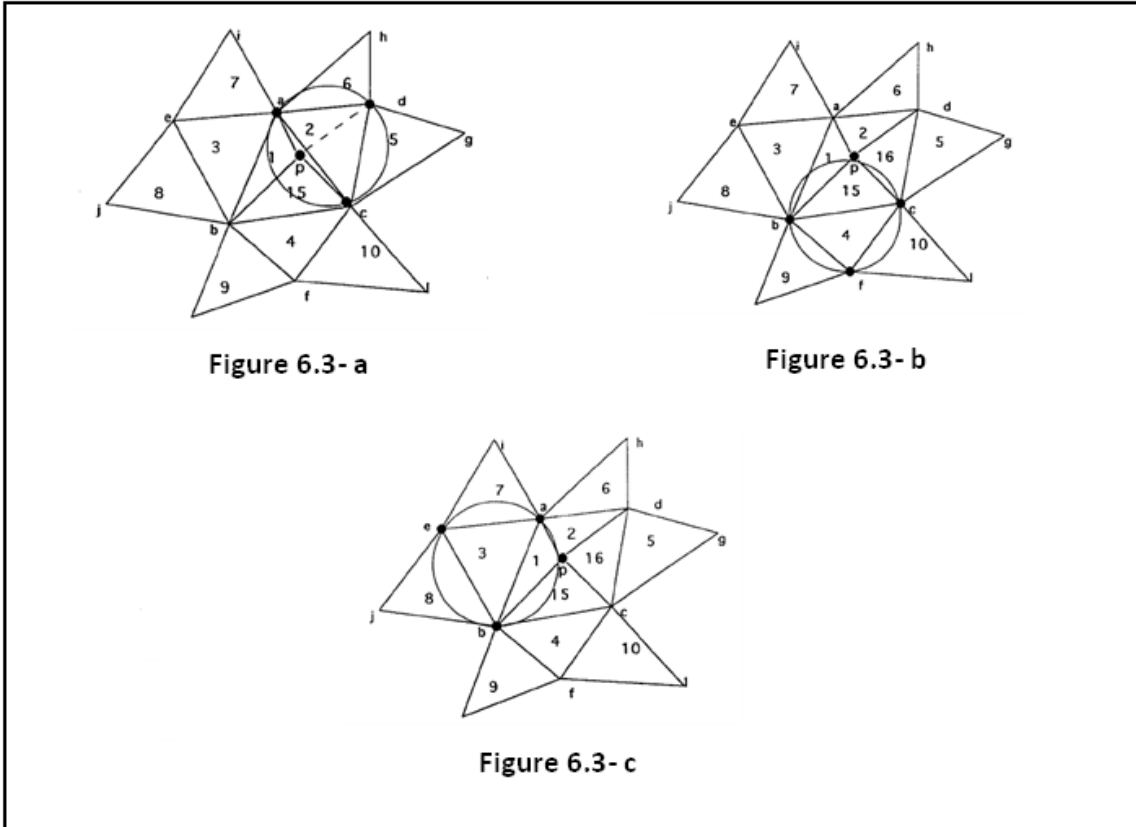
Figure 6.2

Si le produit mixte de \vec{a} et \vec{b} est négatif alors le point m se trouve à gauche du vecteur \vec{a} . Et c'est la même démarche pour les autres points du triangle x .

- 4- L'algorithme d'échange (swap en anglais) est maintenant utilisé pour mettre à jour la triangulation actuelle en une triangulation de Delaunay conforme. Tous les triangles qui sont adjacents aux triangles englobant le point p sont placés dans une liste LIFO S (Last In First Out stack) (la pile contient initialement trois triangles, 2, 3, et 4. voir **figure 6.3**). Chaque triangle est vérifié si le point p est inclus dans son cercle circonscrit. Si c'est le cas, le triangle contenant p comme vertex et le triangle adjacent du côté convexe du quadrilatéral ayant sa diagonale dans la direction

opposée doivent être remplacés par cette diagonale pour conserver la structure de la triangulation de Delaunay.

Une fois l'échange est terminé, les triangles qui sont opposés au point p sont ajoutés à la pile S . Par la suite le prochain triangle est dépilé et le processus est répété jusqu'à ce que la pile devienne vide.



A ce point, un schéma est introduit pour déterminer si le point p est localisé dans le cercle circonscrit d'un triangle. A partir de la **figure 5.4** le schéma décline que si $\alpha + \beta > \pi$ alors le point p est localisé dans le cercle circonscrit du triangle abc et depuis une opération d'échange est nécessaire. La déclaration suivante est équivalente :

$$\sin(\alpha + \beta) < 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta < 0$$

Ce qui peut s'écrire :

$$(x_{ac}x_{bc} + y_{ac}y_{bc})(x_{bp}y_{ap} - x_{ap}y_{bp}) < (y_{ac}x_{bc} - x_{ac}y_{bc})(x_{bp}x_{ap} + y_{ap}y_{bp})$$

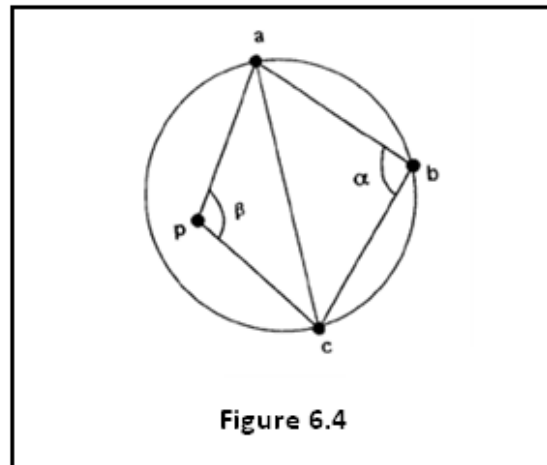


Figure 6.4

Avec : $x_{mn} = x_n - x_m$ et $y_{nm} = y_n - y_m$.

- 5- Après, un nouveau point est introduit dans la triangulation. Alors les étapes 3 et 4 sont répétées. Le processus continue jusqu'à ce que les N points soient consommés.
- 6- Finalement, tous les triangles qui contiennent un ou plusieurs vertex du premier grand triangle sont supprimés.

6.2.3 Raffinement de Delaunay :

L'idée de base de l'algorithme est de maintenir une triangulation de Delaunay et lui faire des améliorations locales afin d'enlever les triangles maigres, chaque amélioration nécessite l'ajout d'un nouveaux vertex à la triangulation et une retriangulation. Pour choisir la bonne position pour le nouveau vertex on utilise la règle suivante [7]:

Si un triangle $T = abc$ ayant un angle $\angle bac = \theta$ et p est le centre du cercle circonscrit de T alors l'angle $\angle bpa = 2\theta$

Le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le centre du cercle unique qui passe par les trois vertex du triangle c'est là où on va généralement ajouter les vertex, et dans certain cas on les place sur les segments d'entrée.

Les arrêtes d'entrée PSLG (Planar Straight Line Graphe) seront référés comme *segments* pour les distinguer des celles de la triangulation de Delaunay. Aussi, un *vertex* est un vertex de l'entrée de la triangulation de Delaunay tandis que un *point* est n'importe qu'elle point du plan. Durant l'algorithme, on maintient un ensemble \mathcal{V} de vertex (initialisé par les vertex d'entrée) et un ensemble S de segments (initialement ceux de l'entrée). Les vertex sont ajoutés à triangulation de Delaunay $\mathcal{DT}(\mathcal{V})$ pour deux raisons : pour améliorer la forme des triangles et assurer que tout les segments d'entrée sont présents dans $\mathcal{DT}(\mathcal{V})$ (comme l'union d'un ou de plusieurs arrêtes de Delaunay).

Les deux opérations de base sont *la division d'un segment* en ajoutant un vertex dans son milieu, et *la division d'un triangle* avec un vertex dans le centre de son cercle circonscrit. Dans chaque cas le nouveau vertex est ajouté à l'ensemble \mathcal{V} .

Pour un segment s , le cercle ayant s comme diamètre est noté par *le cercle diamétral*, et on va dire qu'un vertex *encoche* un segment s s'il se trouve dans son cercle diamétral.

Chaque triangle ayant un angle inférieur à un angle α donné est dit *maigre*. Et chaque triangle non maigre mais ayant un rayon supérieur à R donnée est dit *large*.

Un triangle de mauvaise qualité (maigres ou larges) sera divisé sauf si son centre encoche un segment, dans tel cas, on procède à diviser le segment encoché au lieu de diviser ce triangle.

Voici l'algorithme en détail avec les deux opérations de base :

Subroutine Diviser_triangle (triangle t)

Ajouter centre de t à \mathcal{V} .

Mettre à jour $\mathcal{DT}(\mathcal{V})$.

Subroutine Diviser_seg(segment s)

Ajouter le milieu de s à \mathcal{V} .

Mettre à jour $\mathcal{DT}(\mathcal{V})$.

Enlever s de S et lui remplacer par ses moitiés s_1 et s_2

Algorithme Raffinement_Delaunay

Entrée : PSLG X

Angle α

Rayon R

Début :

Ajouter un grand carré contenant tout les vertex à X

Soit la liste des segments S =segments de X

Soit la liste des vertex V =vertex de X

Calculer la triangulation initiale de Delaunay $\mathcal{DT}(\mathcal{V})$

Répéter :

Si n'importe quel segment s est encoché alors : Diviser_seg(s)

Fin si.

Soit t un triangle maigre ou large ;

Soit p le centre de t ;

Si p encoche n'importe quel segment s_1, s_2, \dots, s_k alors :

Pour $i = 1$ à k faire

Diviser_seg(s_i).

Sinon :

Diviser_tri(t).

Fin si.

Jusqu'à aucun segment n'est encoché et aucun angle $< \alpha$.

Sortie triangulation de Delaunay $\mathcal{DT}(\mathcal{V})$

Fin

6.3 Equations et discrétisation :

Pour un écoulement 2D, compressible et visqueux en l'absence des forces de pesanteur, le système d'équations moyennées avec un modèle de turbulence $k - \epsilon$ de Launder et Sharma [10] à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + P) u_i}{\partial x_i} &= -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij} u_i)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\frac{\mu_T}{\sigma_k} + \mu_L \right] \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} + P_k - D_k + L_k \\ \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \epsilon u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} + \mu_L \right] \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right\} + P_\epsilon - D_\epsilon + L_\epsilon\end{aligned}$$

L'énergie totale par unité de masse est :

$$e = \frac{T}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} u_i u_i + k$$

Les composantes du tenseur des contraintes sont donnée par :

$$\tau_{ij} = (\mu_L + \mu_T) \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

Le flux total de la chaleur est :

$$q_i = -\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left(\frac{\mu_L}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Avec les nombres de Prandtl laminaire et turbulent : $Pr_L = 0.72$ et $Pr_T = 0.9$.

Les termes liés au modèle de turbulence de Launder & Sharma sont comme suit :

La production de l'énergie turbulente :

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

La dissipation de la turbulence :

$$D_k = \rho \epsilon$$

La production de ϵ :

$$P_\epsilon = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k$$

La dissipation de ϵ :

$$D_\epsilon = C_{\epsilon 2} f_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}$$

Avec : $f_{\epsilon 2} = 1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)$

Les termes bas Reynolds sont donnés par :

$$L_k = -2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y_n} \right)^2$$

$$L_\epsilon = 2 \frac{\mu_L \mu_T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2$$

La viscosité turbulente selon le modèle de Launder & Sharma est donnée par[10] :

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

La viscosité laminaire est obtenue donc notre cas par la loi de Sutherland :

$$\mu_L = 1.711 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{T}{273,15}} \left(\frac{1 + \frac{110,4}{273,15}}{1 + 110,4/T} \right)$$

Le reste des constantes est :

$$\sigma_k = 1, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92$$

Et maintenant écrites dans une forme intégrale les équations de Navier Stokes deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{\partial F_v(U)}{\partial x} + \frac{\partial G_v(U)}{\partial y} + S(U)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \\ \rho k \\ \rho \epsilon \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho e + P)u \\ \rho ku \\ \rho \epsilon u \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho u^2 + P \\ (\rho e + P)v \\ \rho kv \\ \rho \epsilon v \end{pmatrix}, \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v - q_x \\ \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} + \mu_L \right) \frac{\partial k}{\partial x} \\ \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} + \mu_L \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy}u + \tau_{yy}v - q_y \\ \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} + \mu_L \right) \frac{\partial k}{\partial x} \\ \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} + \mu_L \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_k - D_k + L_k \\ P_\epsilon - D_\epsilon + L_\epsilon \end{pmatrix}$$

Note : l'indice de la moyenne a été omis pour simplifier l'écriture.

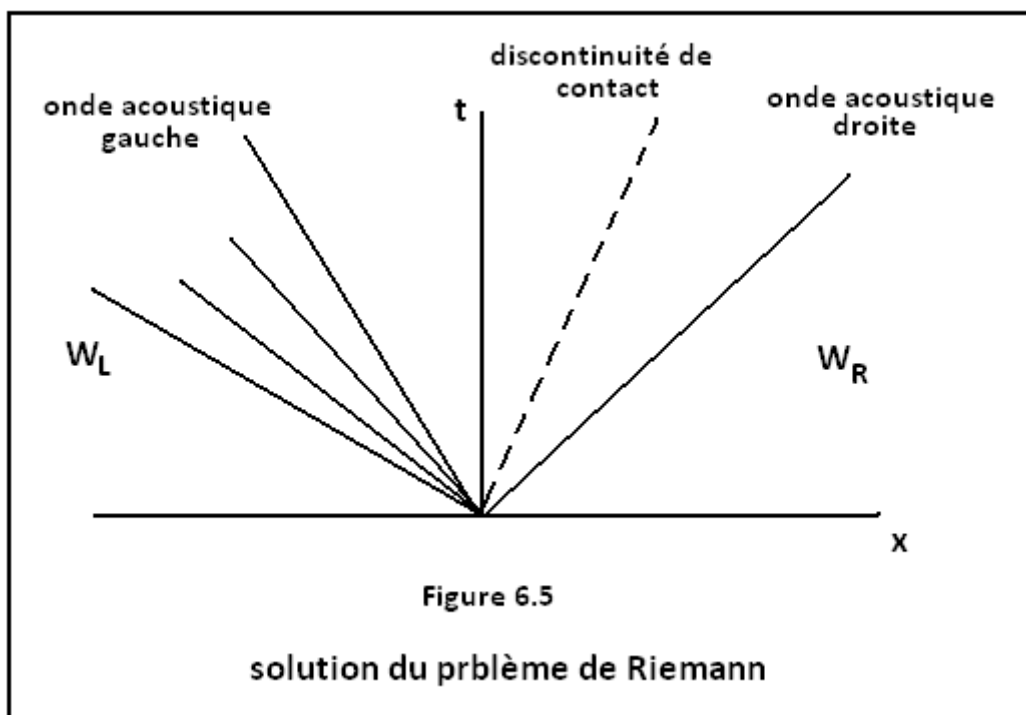
6.3.1 Discrétisation du flux non visqueux par la méthode de Roe :

La méthode de Roe appartient à la classe des schémas basés sur les caractéristiques qui sont développés à partir de l'idée de Godunov. La robustesse de ces schémas est due à l'informations physiques incarnées dans le problème de Riemann. En premier lieu, on va commencer par une brève description du problème du Riemann puis on entamera le solveur approximatif du Roe et son extension en plusieurs dimensions.

Un problème de Riemann survient lorsque initialement on a les deux états semi-finies prescrites par :

$$\begin{cases} W = W_L & \text{pour } x < 0 \\ W = W_R & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

La solution des équations d'Euler pour ce problème consiste dans trois ondes séparant les états W_L , W_L^* , W_R^* et W_R . L'onde interne est une discontinuité de contact séparant les densités des différents états, tandis que les deux autres ondes peuvent être des ondes de choc ou des ondes d'expansion.



La solution du problème de Riemann est constante le long des lignes $\frac{x}{t} = \text{constante}$. si on considère une formulation volumes finis avec des états constants par morceaux, aucun moyennage n'est requis pour trouver le flux moyen à l'interface entre les deux cellules au cours d'un pas de temps. Le flux moyen dépend simplement de quelle des régions (L , L^* , R^* ou R) l'axe de temps se trouve. On doit noter que ce raisonnement assume que les ondes émanant des deux interfaces voisines ne croisent pas l'interface considéré durant la course du pas de temps, ceci est la restriction du nombre de Courant.

La méthode de Roe ne change pas en ajoutant les équations additionnelles de k et ϵ . Cette contribution est évaluée comme suit [3]:

$$\int_{\partial V_i} (F dy - G dx) = \sum_{k=1}^3 T^{-1} H \Delta s$$

Où la matrice de rotation est donnée par :

$$T^{-1} \Delta s = \begin{bmatrix} \Delta s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y & \Delta x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta x & \Delta y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta s \end{bmatrix}$$

La sommation est effectuée sur les trois faces du volume de contrôle avec le vecteur flux suivant :

$$H = \begin{pmatrix} \rho \bar{u} \\ \rho \bar{u} \bar{u} + P \\ \rho \bar{v} \bar{u} \\ \rho e \bar{u} + P \bar{u} \\ \rho k \bar{u} \\ \rho \epsilon \bar{u} \end{pmatrix} \quad \text{où:} \quad \begin{aligned} \bar{u} &= u \frac{\Delta y}{\Delta s} - v \frac{\Delta x}{\Delta s} \\ \bar{v} &= u \frac{\Delta x}{\Delta s} + v \frac{\Delta y}{\Delta s} \end{aligned}$$

Maintenant le flux H à travers une face k est approximé par Roe par la relation :

$$H = \frac{1}{2} (H_l + H_r + \tilde{S} |\tilde{\Lambda}| \tilde{S}^{-1} \Delta R)$$

Où les termes H_l et H_r dénotent les valeurs des flux gauche et droite calculés par la reconstruction des variables de l'écoulement à gauche et à droite de la face k . Dans notre cas on a utilisé une reconstruction MUSCL du premier ordre. Pour plus de détail revoir la section 5.2.3.

Ce dernier terme qui est la contribution au vecteur flux des ondes émanant des cellules adjacentes, il est donné par :

$$\tilde{S} |\tilde{\Lambda}| \tilde{S}^{-1} \Delta R = \sum_{j=1}^6 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| \tilde{e}_j$$

Où $|\tilde{\lambda}_j|$ sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne du vecteur flux H :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{u} \\ \tilde{\lambda}_2 &= \tilde{u} \\ \tilde{\lambda}_3 &= \tilde{u} + \tilde{a} \\ \tilde{\lambda}_4 &= \tilde{u} - \tilde{a} \\ \tilde{\lambda}_5 &= \tilde{u} \\ \tilde{\lambda}_6 &= \tilde{u} \end{aligned}$$

Les variables de Roe moyennées sont :

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_l} \bar{u}_l + \sqrt{\rho_r} \bar{u}_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \frac{\sqrt{\rho_l}\tilde{v}_l + \sqrt{\rho_r}\tilde{v}_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \\ \tilde{h} &= \frac{\sqrt{\rho_l}\tilde{h}_l + \sqrt{\rho_r}\tilde{h}_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \\ \tilde{k} &= \frac{\sqrt{\rho_l}\tilde{k}_l + \sqrt{\rho_r}\tilde{k}_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \\ \tilde{\epsilon} &= \frac{\sqrt{\rho_l}\tilde{\epsilon}_l + \sqrt{\rho_r}\tilde{\epsilon}_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \\ \tilde{a}^2 &= (\gamma - 1)(\tilde{h} - \tilde{q} - \tilde{k}) \\ \tilde{q} &= \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)\end{aligned}$$

Les vecteurs propres sont :

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{e}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{q} \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{e}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{a} \\ \tilde{v} \\ \tilde{h} + \tilde{u}\tilde{a} \\ \tilde{k} \\ \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} \\ \tilde{e}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{a} \\ \tilde{v} \\ \tilde{h} + \tilde{u}\tilde{a} \\ \tilde{k} \\ \tilde{\epsilon} \end{pmatrix}, & \tilde{e}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{e}_6 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il reste les coefficients :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 &= -\Delta\rho + \frac{1}{\tilde{v}}\Delta\rho\tilde{v} \\ \tilde{\alpha}_2 &= \left\{1 - \frac{\gamma - 1}{2\tilde{a}^2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)\right\}\Delta\rho + (\gamma - 1)\frac{\tilde{u}}{\tilde{a}^2}\Delta\rho\tilde{u} + (\gamma - 1)\frac{\tilde{v}}{\tilde{a}^2}\Delta\rho\tilde{v} - \frac{\gamma - 1}{\tilde{a}^2}\Delta\rho\epsilon \\ &\quad + \frac{\gamma - 1}{\tilde{a}^2}\Delta\rho k \\ \tilde{\alpha}_3 &= \left\{\frac{\gamma - 1}{4\tilde{a}^2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) - \frac{\tilde{u}}{2\tilde{a}}\right\}\Delta\rho + \left\{-\frac{\gamma - 1}{2}\frac{\tilde{u}}{\tilde{a}^2} + \frac{1}{2\tilde{a}}\right\}\Delta\rho\tilde{u} - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\tilde{v}}{\tilde{a}^2}\Delta\rho\tilde{v} + \frac{\gamma - 1}{2\tilde{a}^2}\Delta\rho\epsilon \\ &\quad - \frac{\gamma - 1}{2\tilde{a}^2}\Delta\rho k \\ \tilde{\alpha}_4 &= \tilde{\alpha}_3 + \frac{\tilde{u}}{\tilde{a}}\Delta\rho - \frac{1}{\tilde{a}}\Delta\rho\tilde{u} \\ \tilde{\alpha}_5 &= -\tilde{k}(\tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_4) + \Delta\rho k \\ \tilde{\alpha}_6 &= -\tilde{\epsilon}(\tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_4) + \Delta\rho\epsilon\end{aligned}$$

Une correction d'entropie est introduite afin d'éliminer l'expansion des chocs qui n'a pas de sens physique, ce phénomène qui apparait lorsqu'une ou plusieurs valeurs propres $\tilde{\lambda}_i$ sont nulles. Cette correction fait que les valeurs $|\tilde{\lambda}_i|$ sont remplacées par :

$$|\tilde{\lambda}_i| = \begin{cases} |\tilde{\lambda}_i| & \text{si } |\tilde{\lambda}_i| > \delta \\ \frac{|\tilde{\lambda}_i|^2 + \delta^2}{2\delta} & \text{si } |\tilde{\lambda}_i| \leq \delta \end{cases}$$

Où δ est petite valeur qui peut être choisie égale à quelque fraction de la vitesse de son (e.g., $\frac{1}{10}$ de a) afin de prévenir l'onde linéaire de disparaître.

6.3.2 Discrétisation du flux visqueux :

La contribution des flux visqueux et du transfert de chaleur sur une face est obtenu par l'application du théorème de Green Gauss sur les triangles adjacents à cette face pour calculer les gradients des différentes grandeurs conservatives.

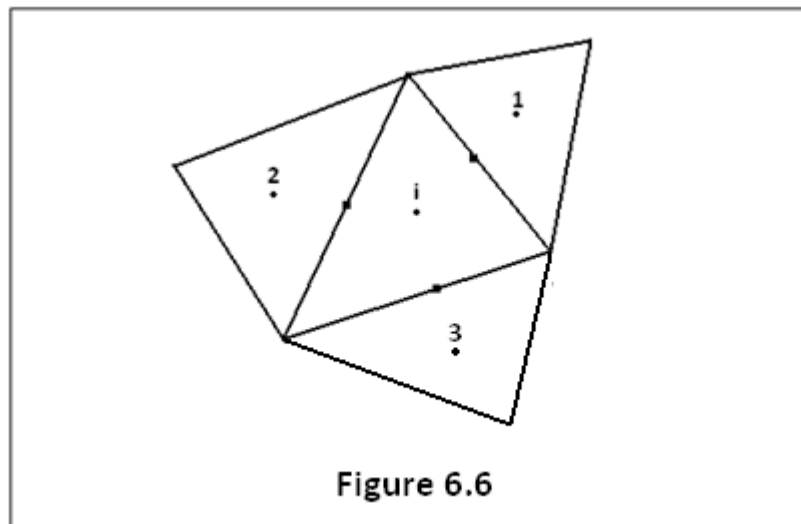
Calcul des gradients aux centres des cellules :

Le gradient d'une variable au centre d'une cellule est calculé par :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2S} \sum_{k=1}^3 (U_i + U_k) \Delta y$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{2S} \sum_{k=1}^3 (U_i + U_k) \Delta x$$

Où U est n'importe quelle variable de l'écoulement.



Calcul des gradients aux centres des faces :

Les gradients aux faces sont simplement moyennés à partir des gradients aux centres des cellules adjacentes. Cette moyenne est corrigée par la méthode détaillée dans la section (3.3.2)

La viscosité moléculaire est évaluée aux centres des faces par :

$$\mu = \mu_l + \mu_r$$

Avec μ_l et μ_r sont les valeurs des cellules à gauche et à droite de la face.

En ce qui concerne le vecteur source, il est évalué avec les gradients des variables calculés aux centres des cellules. En plus il est traité explicitement chose qui affect directement sur la condition de convergence des calculs qui se trouve réduite à cause terme.

6.3.3 Condition aux limites :

Pour simplifier l'implémentation des conditions aux limites on a utilisé des cellules fictives En dehors du domaine physique. Cette technique permet d'étendre la discrétisation du domaine interne aux frontières, cela veut dire que les mêmes équations ou la même discrétisation est utilisée au frontières ce qui évite tout traitement spécial des frontières. C'est beau et bon, mais il faut que les cellules fictives contiennent les valeurs appropriées des variables conservatives ainsi que les quantités géométriques correctes. Ces valeurs sont obtenues à partir des conditions aux limites, pour plus de détails revoir le chapitre traitant les conditions aux limites.

6.4 Structure des données :

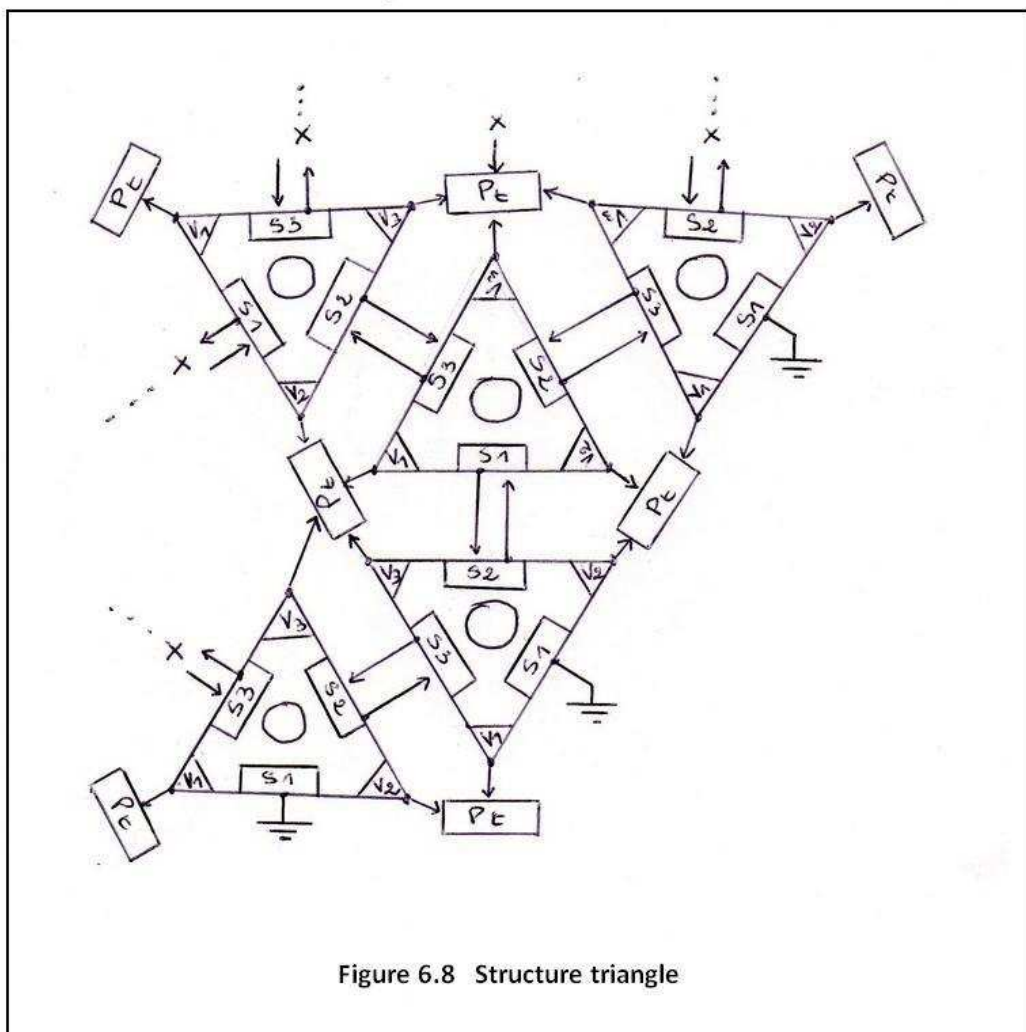
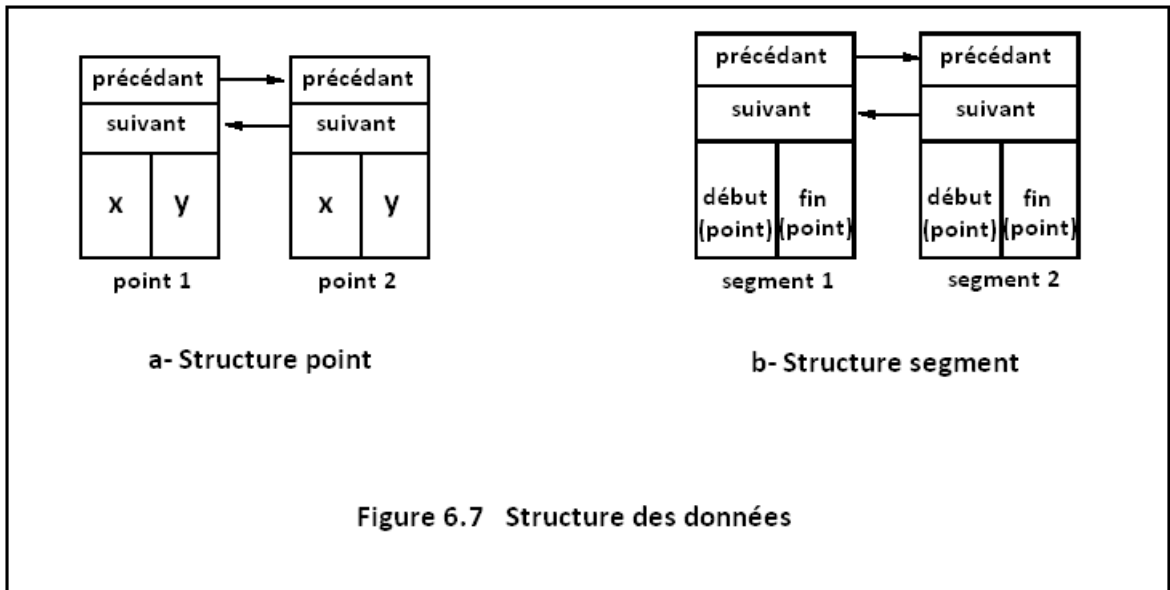
Comme on a cité au dessus, le programme est totalement dynamique, donc il peut créer des variables et alloue la mémoire au tant qu'il est nécessaire sans dépasser les capacités de l'ordinateur bien sur.

La structure principale est celle des volumes des contrôle, c'est une liste d'objets doublement liée (dans les deux sens), chaque objet pointe sur une autre structure qui contient des informations sur les nœuds des mailles et les différentes quantités physique. Un schéma synoptique pourrait donner une bonne idée sur ses structures voir **figure 6.8**.

Les principales structures sont présentées par la suite.

- Structure point : contient deux pointeurs sur le point prédécesseur et le point successeur dans la liste des point, et deux variables réelles qui représentent les coordonnées du point. Voir **figure 6.7-a**.
- structure segment : elle aussi contient de pointeurs sur le prédécesseur et le successeur dans la liste et deux autres pointeurs qui pointent sur le point de début de segment et sur le point de fin. Voir **figure 6.7-b**.
- structure triangle : c'est la plus complexe, en plus des pointeur de la liste elle contient trois pointeur sur trois points, trois pointeurs de surfaces qui pointent sur les triangles adjacents, trois vecteurs qui représentent les vecteur surfaces, et

d'autres variables qui représentent toutes les quantités géométriques du volume et toutes les quantités physiques et leurs gradients. Voir **figure 6.8**



Cette structure des données est optimisée pour accéder aux variables chaque volume de contrôle considéré et des volumes voisins facilement et d'une manière directe, ce qui réduit le temps de calcul et facilite énormément la programmation.

6.5 Cas testés :

Arrivant maintenant à l'étape de teste et validation, en fait c'est l'étape de teste seulement car la validation nécessite des expériences réelles ce qui n'est disponible pour nous. Une autre alternative consiste à comparer avec les résultats d'autres logiciels de calcul, c'est une bonne idée pour pouvoir se positionner seulement est ce qu'on est près ou loin mais pour la validation ce n'est pas possible. La moindre des choses, on ne sait pas quelle méthode utilisent-ils ces logiciels et quel ordre et surtout les assumptions qui sont à leur base. En plus comment valider avec un logiciel qui pour lui-même on a du doute dans ses résultats. Ce raisonnement est notre argument pour le refus de valider nos résultats avec d'autres logiciels.

6.5.1 Ecoulements non visqueux (équations d'Euler) :

6.5.1.1 Conduite avec une pente de compression :

Le premier cas test est une conduite ayant un coin de compression sur la surface inférieure comme le montre la Fig. 6.9.

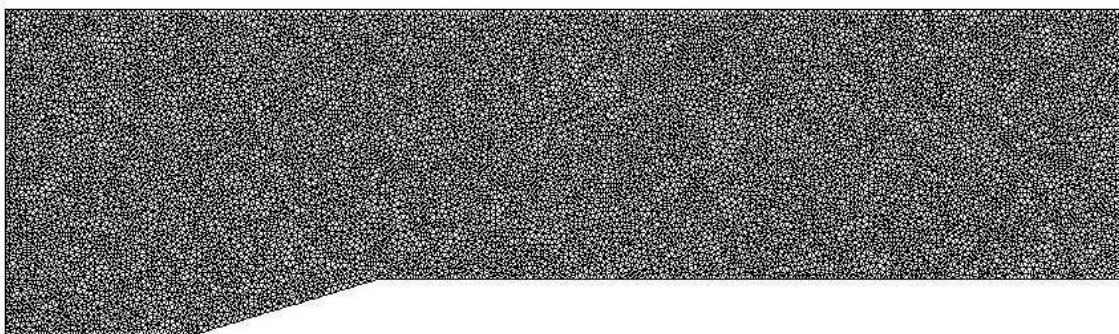


Figure 6.9: Maillage de la conduite.

Conditions aux limites

Pour les deux parois supérieure et inférieure la condition est de type paroi lisse.

Pour l'entrée la condition est de type entrée supersonique avec les paramètres suivants:

- Nombre de Mach : $M=2.08$; $U=630$ m/s.
- Pression statique : $P=50000$ Pa.
- Température : $T=228$ °K.

Pour la sortie la condition est de type sortie supersonique alors cela ne nécessite aucune valeur.

Valeurs initiales :

- Vitesse nulle.
- Pression: 40000 Pa.
- Température: 228 °K.

Résultat :

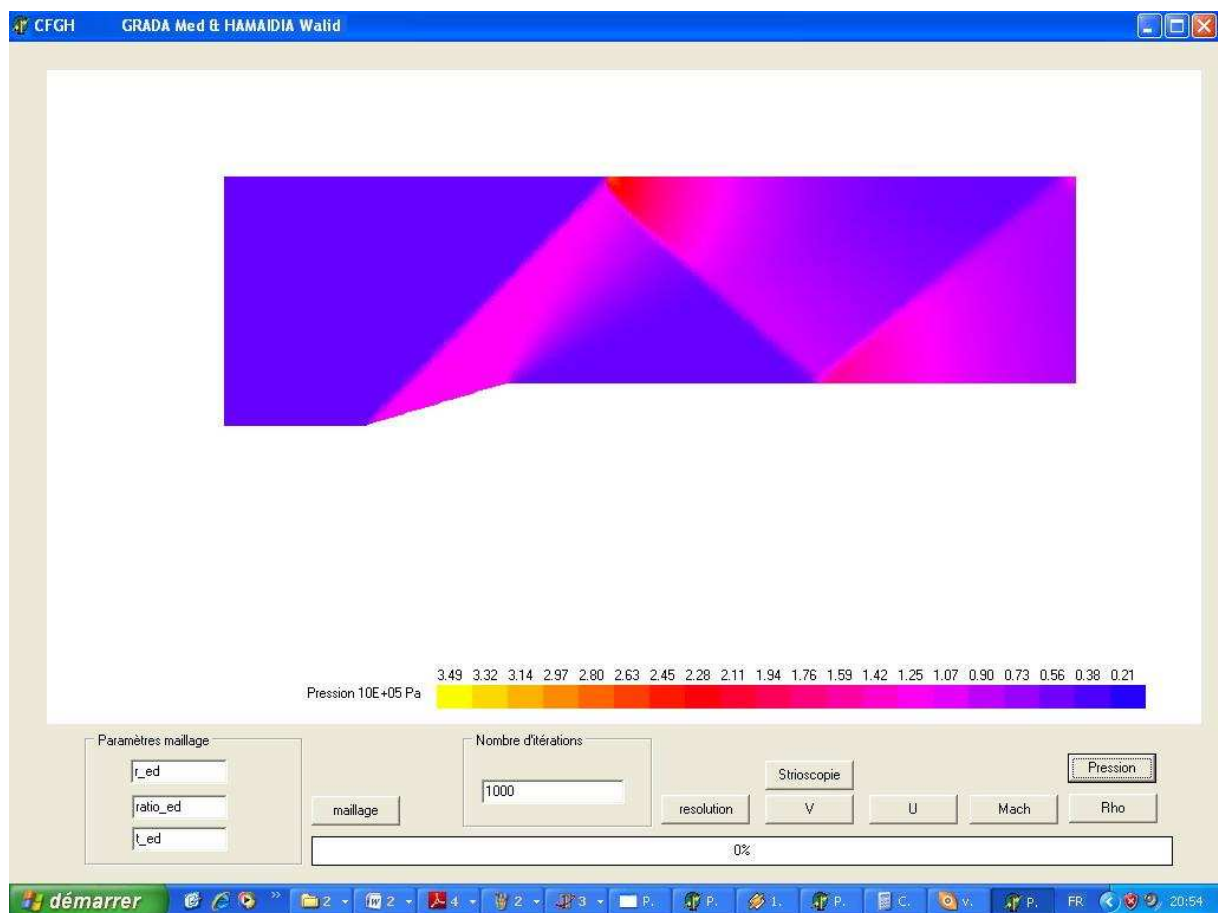


Figure 6.10: Distribution de la pression.

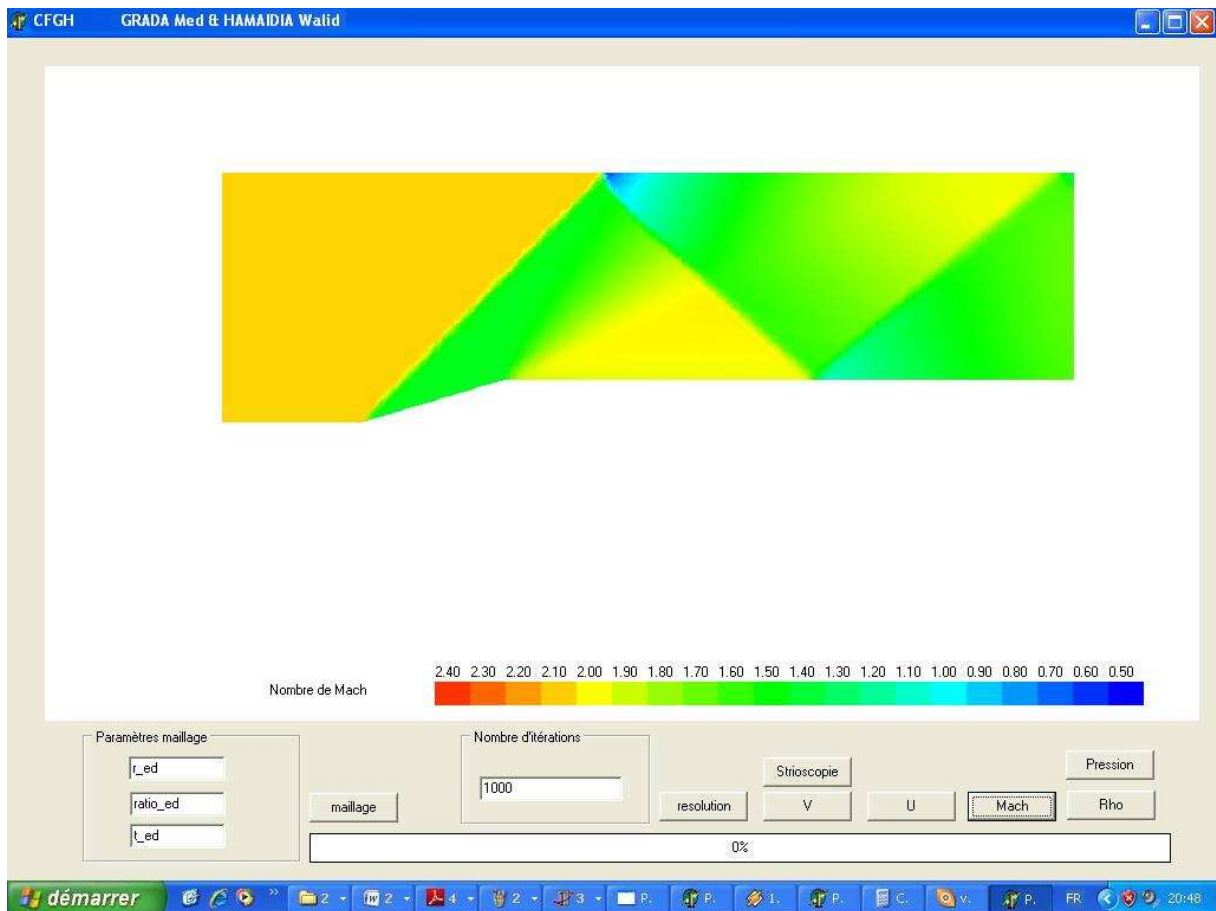


Figure 6.11: Nombre de Mach.

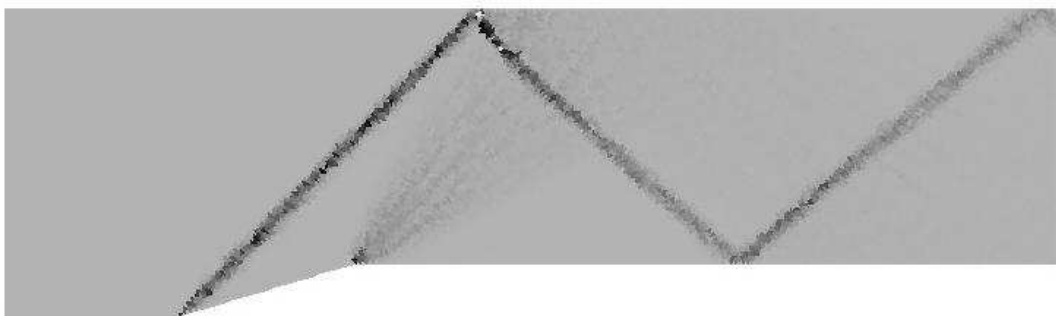


Figure 6.12: Strioscopie numérique.

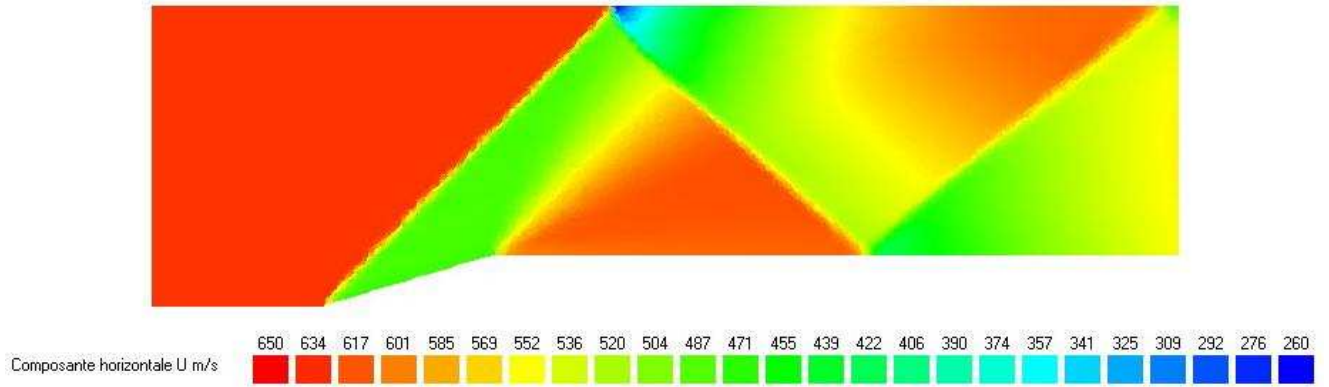


Figure 6.12: Composante horizontale de la vitesse.

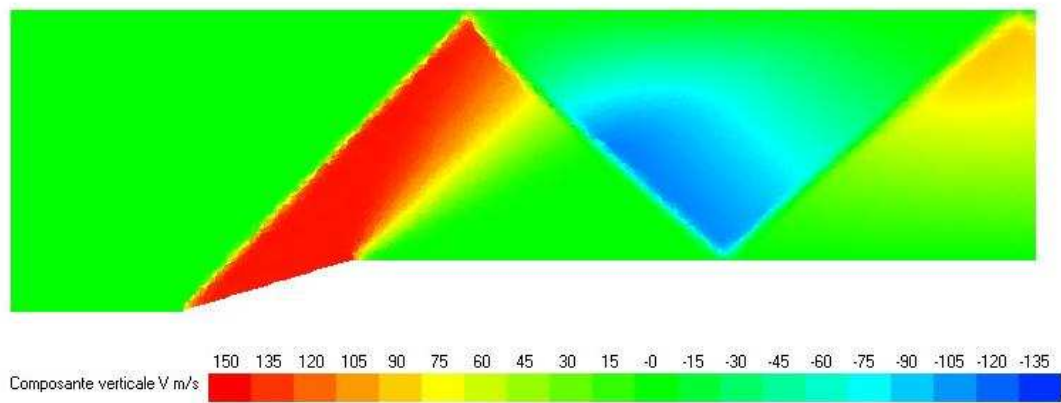


Figure 6.13: Composante verticale de la vitesse.

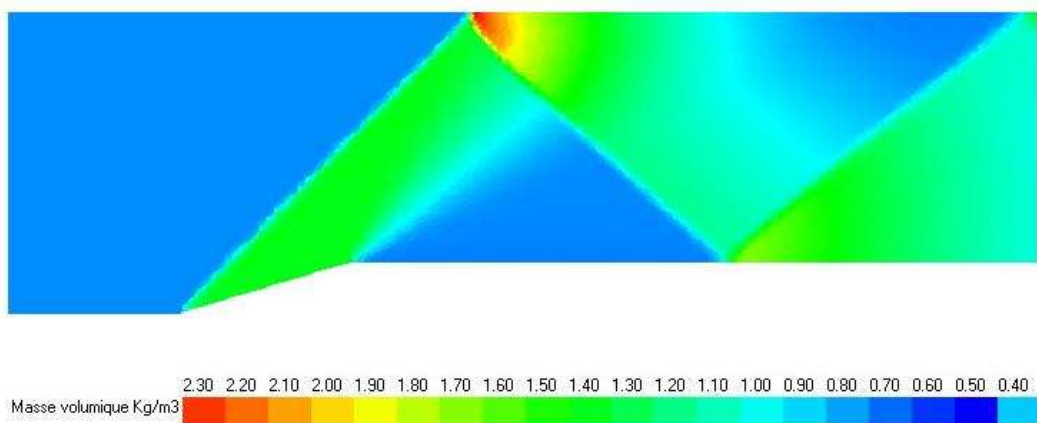


Figure 6.14: Masse volumique.

Commentaires :

Les figures 6.10 à 6.14 nous montrent la distribution des différents paramètres après la convergence des calculs. D'abord la figure 6.12 nous montre les ondes de chocs comme si on les voit avec striescopie réelle ; la première onde de choc qui est oblique est réfléchiée par les deux parois et on voit très bien que l'angle de réflexion est égal à celui de l'incidence. Une série d'ondes dites de détente apparaissent au deuxième coin, cela apparaît un peu flou car le maillage n'est très fin.

Pour les autres figures, on voit que les ondes obliques sont toujours accompagnées par une augmentation de pression et une diminution de vitesse et inversement pour les ondes de détente où la pression chute et la vitesse augmente, aussi ces figures montrent que les ondes de chocs modifient la direction de l'écoulement ce qui est constaté dans les figures 6.12 et 6.13.

On ce qui concerne les angles des ondes, les pressions et nombres de Mach après choc, ils ont été comparés avec les tables de Fano et les résultats se coïncident avec parfois de petits écarts, cela est dû à la qualité de maillage et le fait que notre programme soit du premier ordre.

Alors, pour l'écoulement non visqueux notre programme donne de bons résultats. A ce stade on passera aux écoulements visqueux pour tester le reste de la modélisation (flux visqueux et modèle de turbulence).

6.5.2 Ecoulement visqueux :**6.5.2.1 Plaque plane :**

Ce cas teste est un écoulement supersonique sur une plaque plane adiabatique. C'est le cas le plus simple pour tester la résolution de la couche limite dans ses différents régimes (laminaires, transitoires et turbulents).

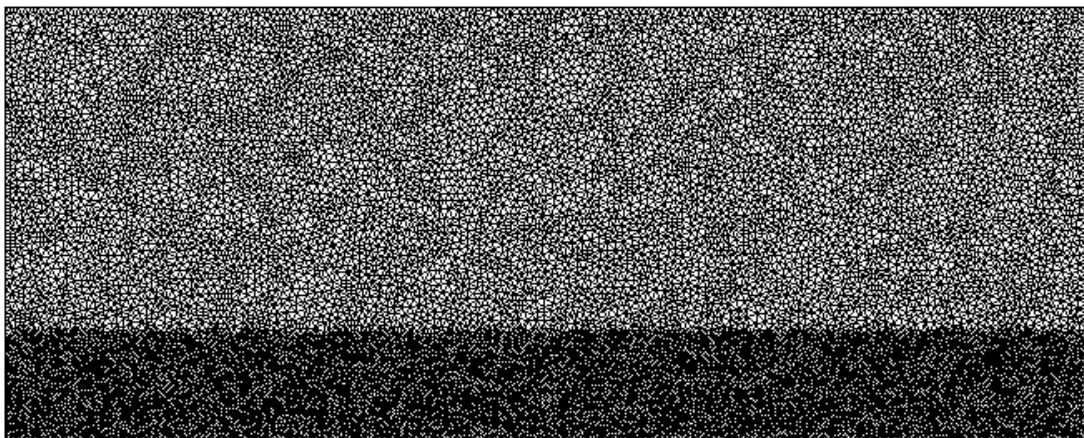


Figure 6.15: Maillage du domaine de calcul.

Conditions aux limites

Pour la plaque plane en bas, la condition est de type paroi adiabatique sans glissement.

Pour l'entrée, la condition est de type entrée supersonique avec les paramètres suivants :

- Nombre de Mach : $M=2$, $u=630$ m/s, $v=0$ m/s.
- Pression statique : 70000 Pa.
- Température statique : 250 °K.
- Energie cinétique de turbulence : $K=1$ m²s².
- Taux de dissipation de K : $\epsilon=1$ m²s.

Pour la sortie la condition est de type sortie supersonique ce type ne demande pas de paramètres.

Pour fermer le domaine normalement la frontière restante devrait être de type domaine infini, mais pour réduire le domaine on a opté pour une paroi lisse (paroi avec glissement).

Valeurs initiales :

- Vitesse nulle.
- Pression : 60000 Pa.
- Température : 298 °K.
- $K=1$ m²s².
- $\epsilon=1$ m²s.

Résultats:

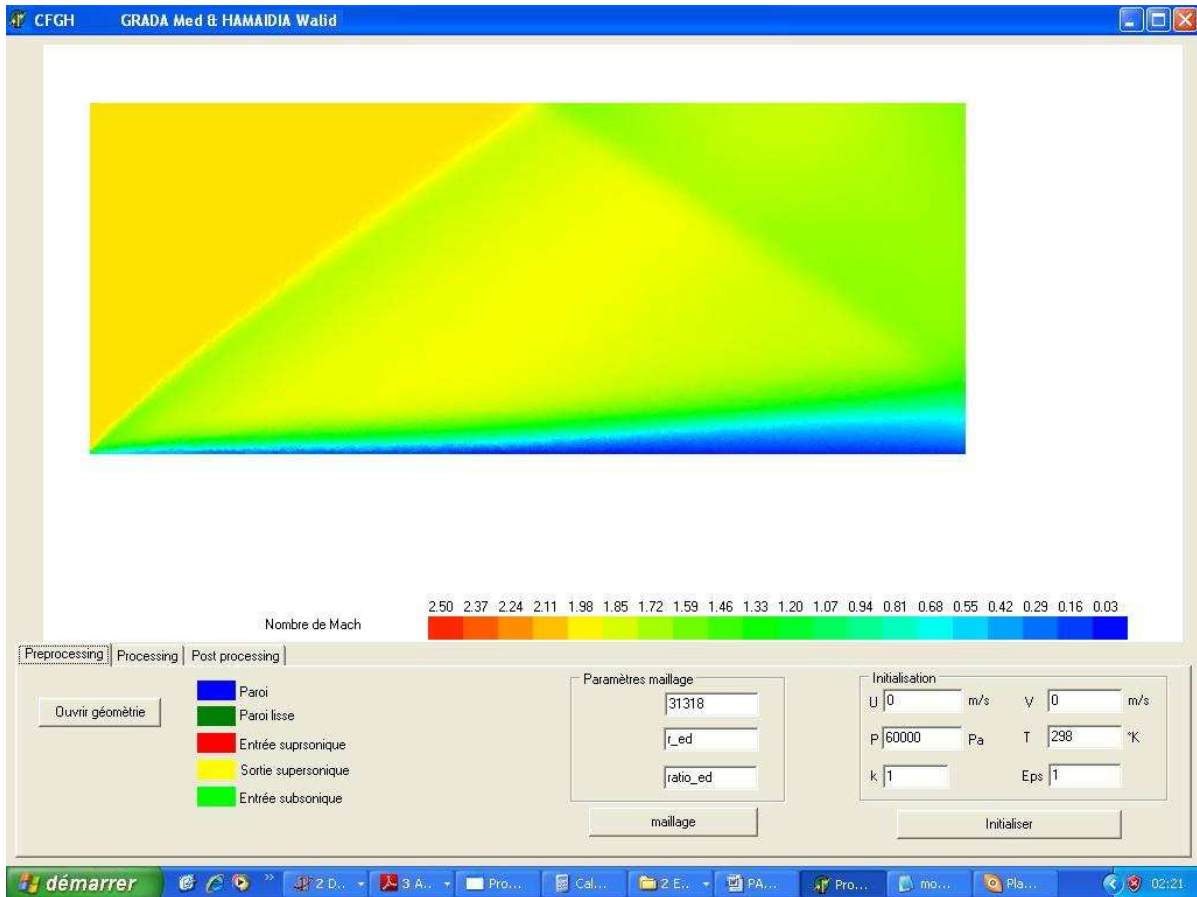


Figure 6.16: Nombre de Mach.

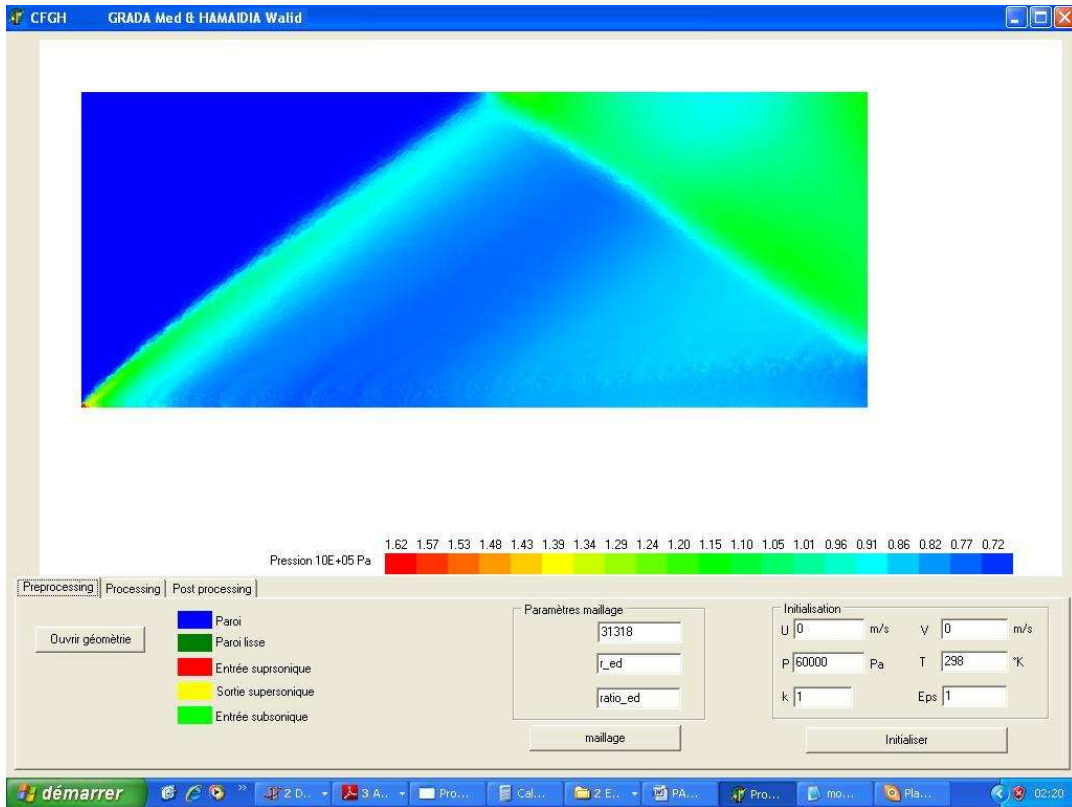


Figure 6.17: Distribution de pression statique.

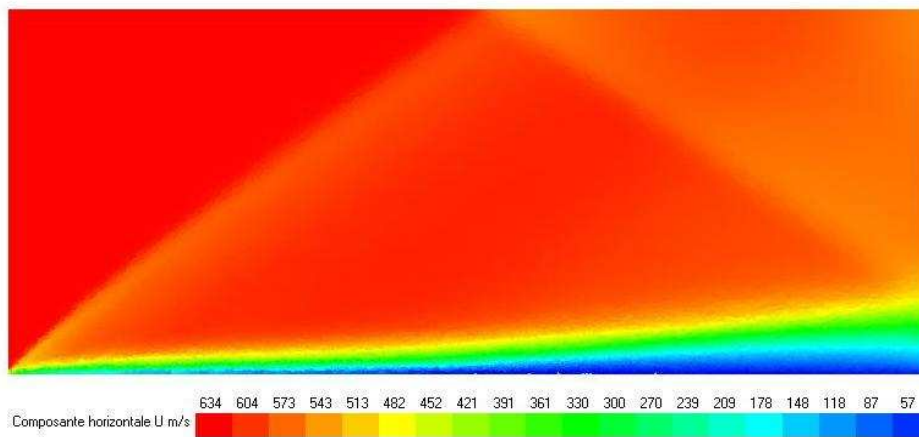


Figure 6.18: composante horizontale de la vitesse.

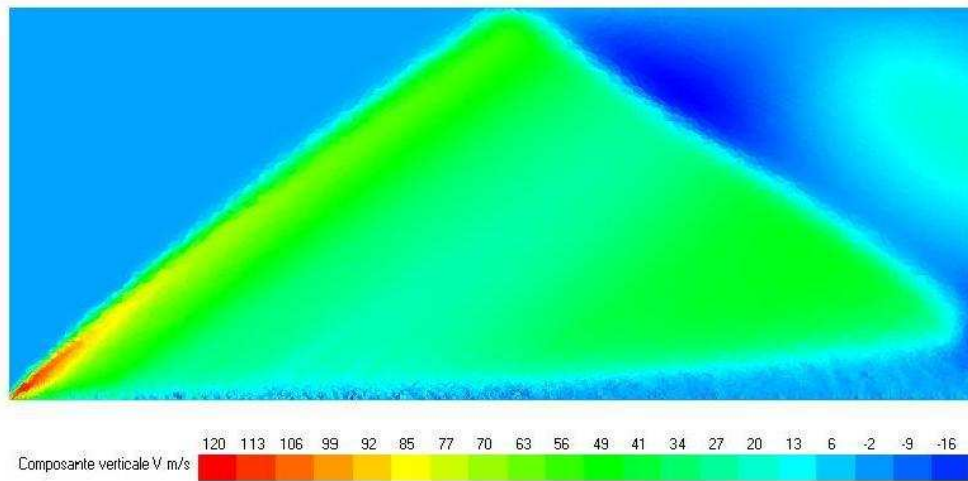


Figure 6.19: composante verticale de la vitesse.

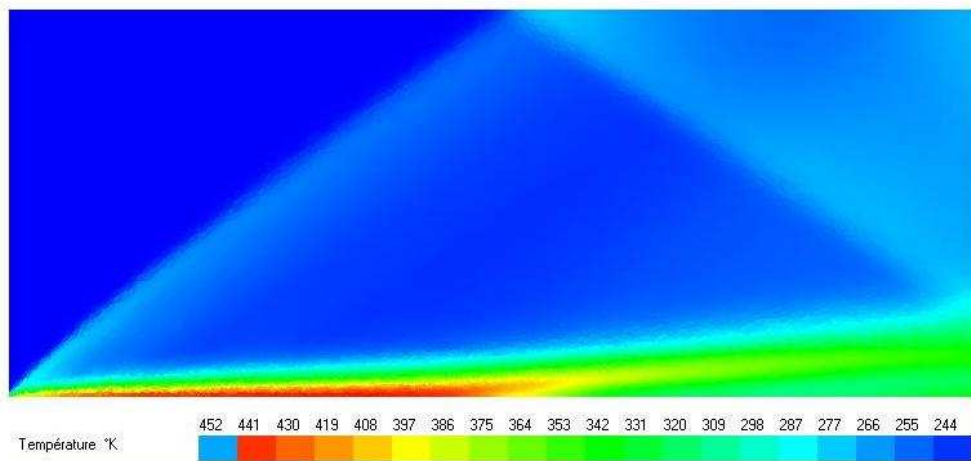


Figure 6.20: Distribution de la température statique.

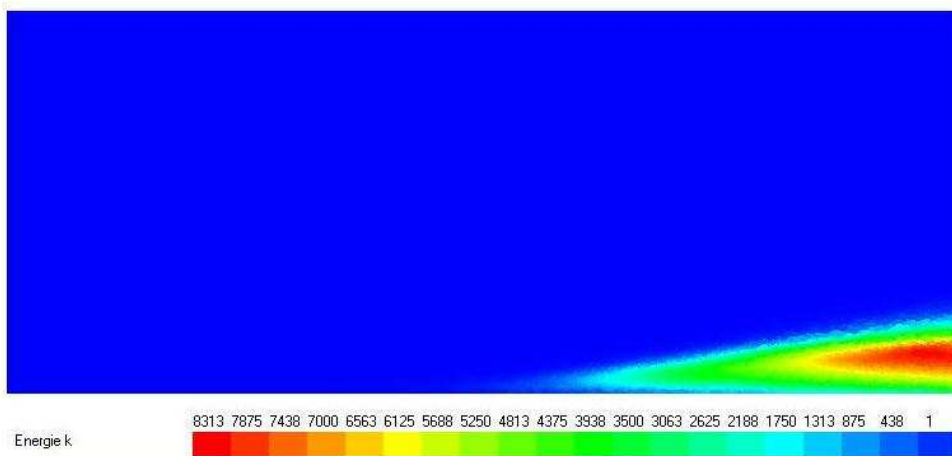


Figure 6.21: Energie cinétique de turbulence.

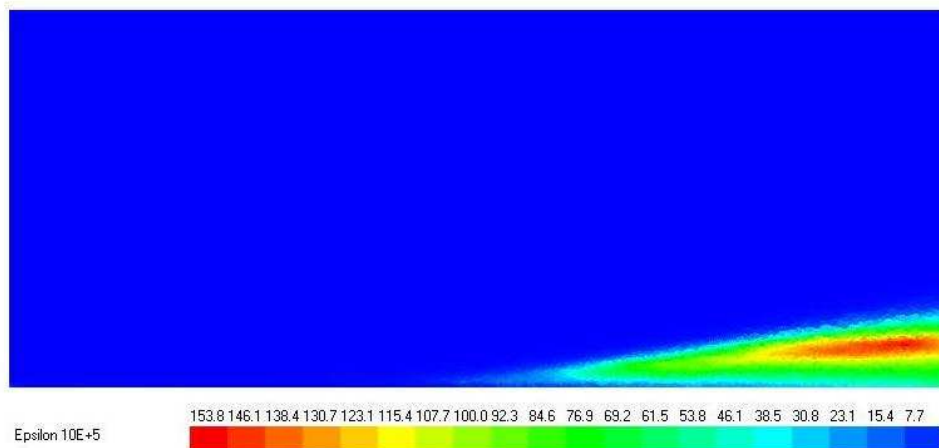


Figure 6.22: Taux de dissipation

Commentaires :

La couche limite est caractérisée par une vitesse nulle à la paroi et qui accroît jusqu'à arriver à la vitesse de l'écoulement non perturbé et la figure 6.18 vient de confirmer cette caractéristique. Autre chose qu'on remarque est l'épaisseur de la couche limite qui accroît en allant dans la direction x .

Pour l'énergie cinétique de turbulence elle est importante dans la zone où l'épaisseur de la couche limite est importante, c'est la zone de décollement.

La figure 6.20 montre une augmentation de la température au niveau de la paroi, cette augmentation est due aux frottements. Jusqu'à une certaine distance où la température de la paroi diminue, cette partie coïncide avec le décollement.

Aussi on voit une onde de choc oblique au début de la paroi malgré qu'il n'y a pas un obstacle ; en fait la couche limite fait que l'écoulement soit décéléré jusqu'à une vitesse nulle et dévie les filets d'air comme s'il y a un obstacle.

6.5.2.2 Cube :

On augmente un peu la complexité de test avec un corps non profilé qui est le cube. Comme le montre la figure 6.23. le maillage a été raffiné dans la zone où des interactions complexes sont prévu. Pour le reste du domaine un maillage grossier fera l'affaire et nous permet de gagner en temps d'exécution.

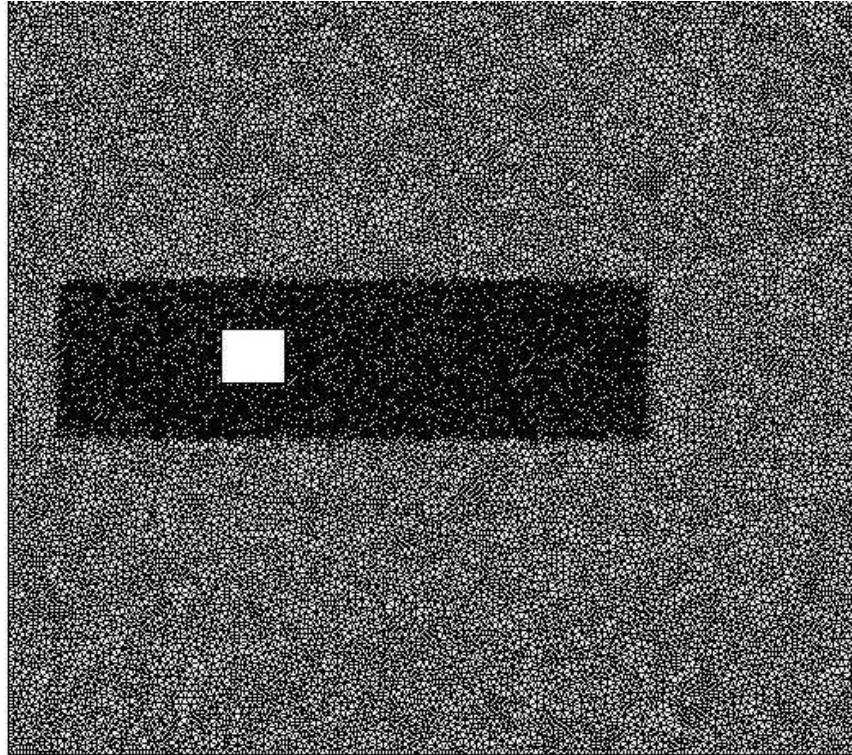


Figure 6.23: maillage du domaine de calcul.

Conditions aux limites :

pour les deux surfaces supérieur et inférieur, la condition est de type paroi lisse afin d'éliminer toute interaction choc-couche limite.

Pour l'entrée, la condition est de type entrée supersonique avec les paramètres suivants :

- Nombre de Mach : $M=2.20$, $u=700$ m/s, $v=0$ m/s.
- Pression statique : 70000 Pa.
- Température statique : 250 °K.
- Energie cinétique de turbulence : $K=1$ m⁻²s².
- Taux de dissipation de K : $\epsilon=1$ m⁻²s.

Pour la sortie la condition est de type sortie supersonique ce type ne demande pas de paramètres.

Les faces du cube (carré en 2D) sont tous des parois adiabatiques sans glissement.

Valeurs initiales :

- Vitesse nulle.
- Pression : 40000 Pa.
- Température : 273 °K.
- $K=1 \text{ m}^{-2}\text{s}^2$.
- $\varepsilon=1 \text{ m}^{-2}\text{s}$.

Résultats :

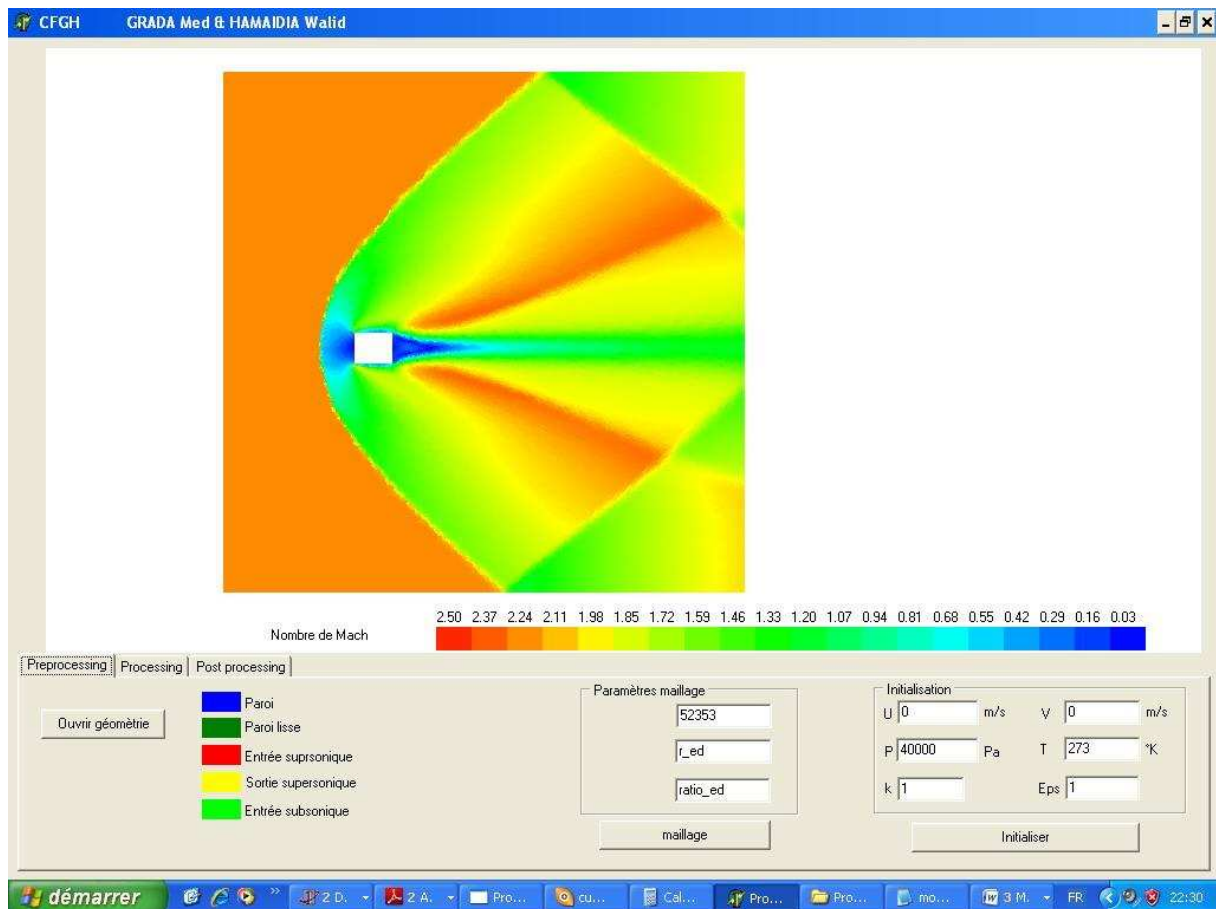


Figure 6.24 : Nombre de Mach.

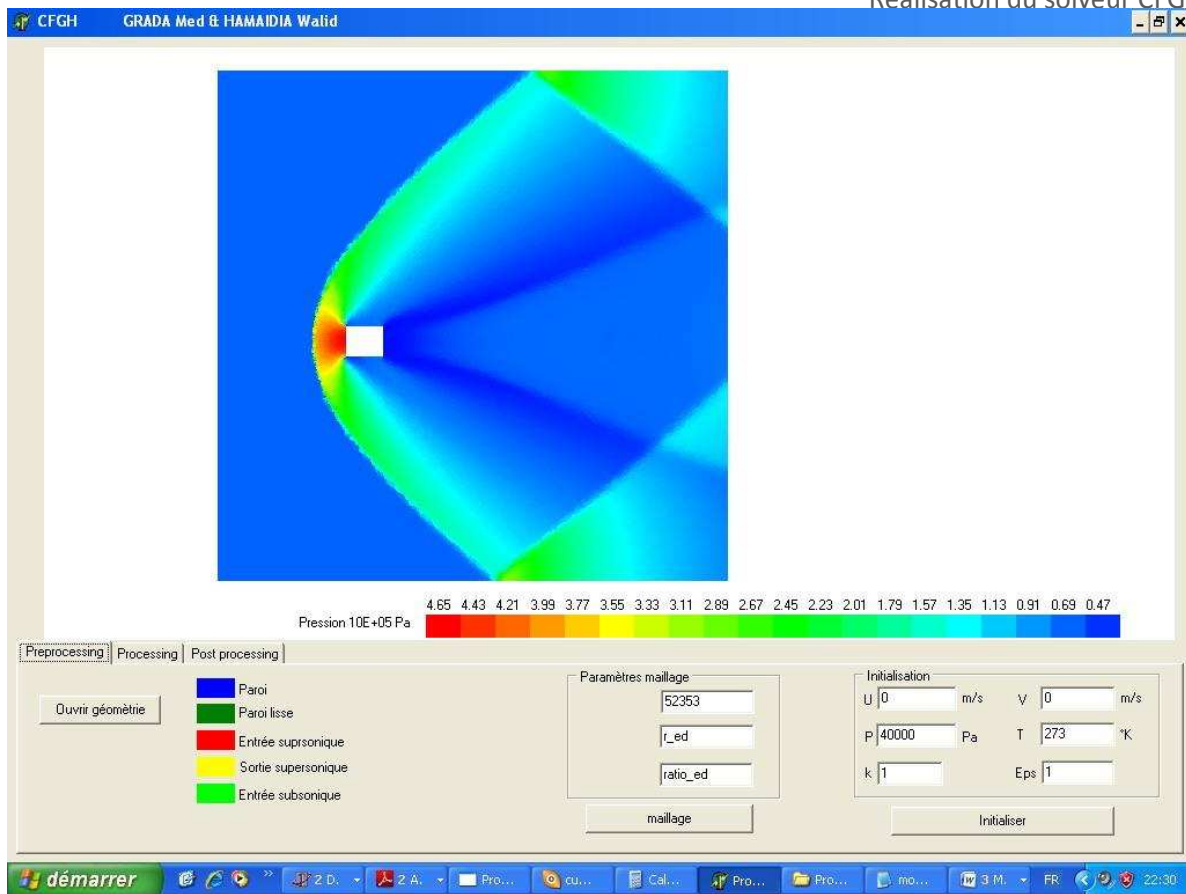


Figure 6.25: Distribution de pression statique.

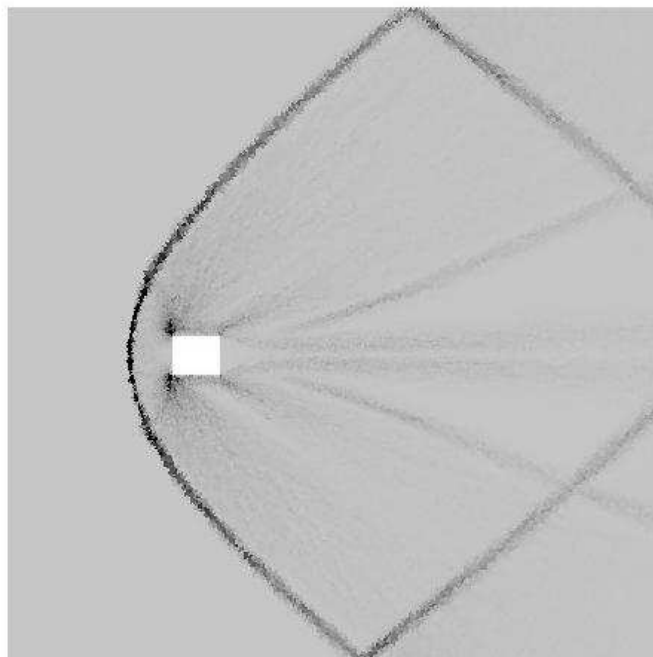


Figure 6.26: Strioscopie numérique.

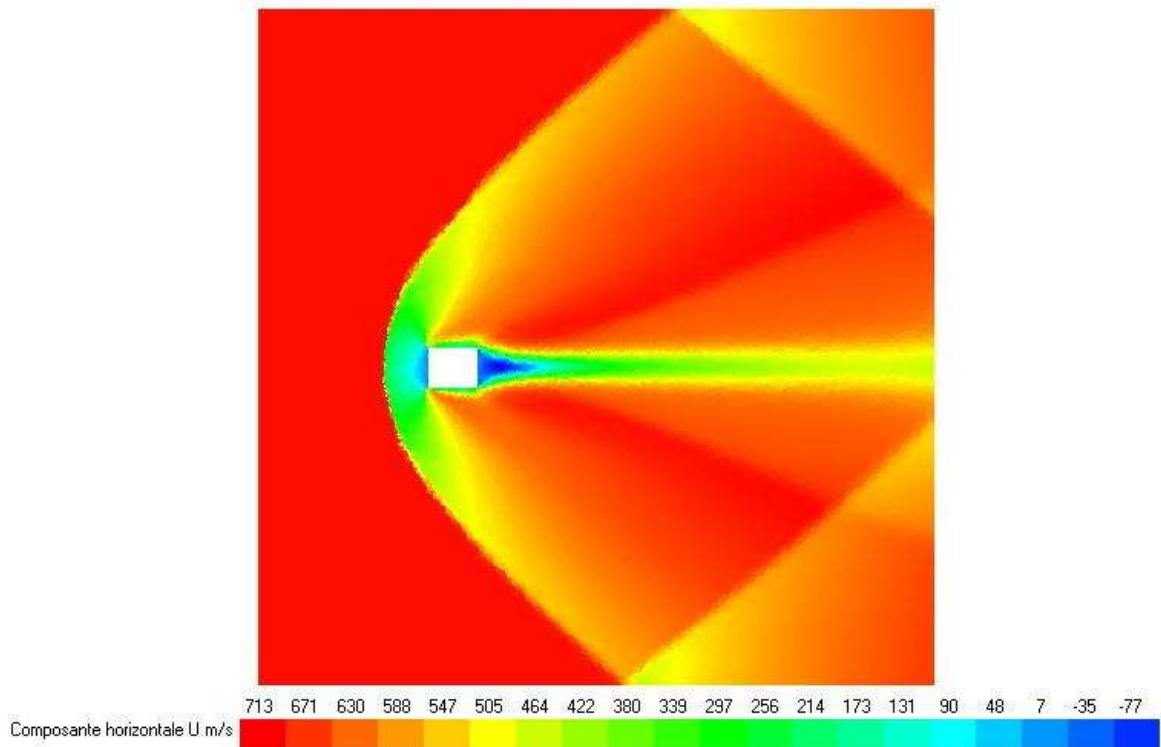


Figure 6.27: composante horizontale de la vitesse.

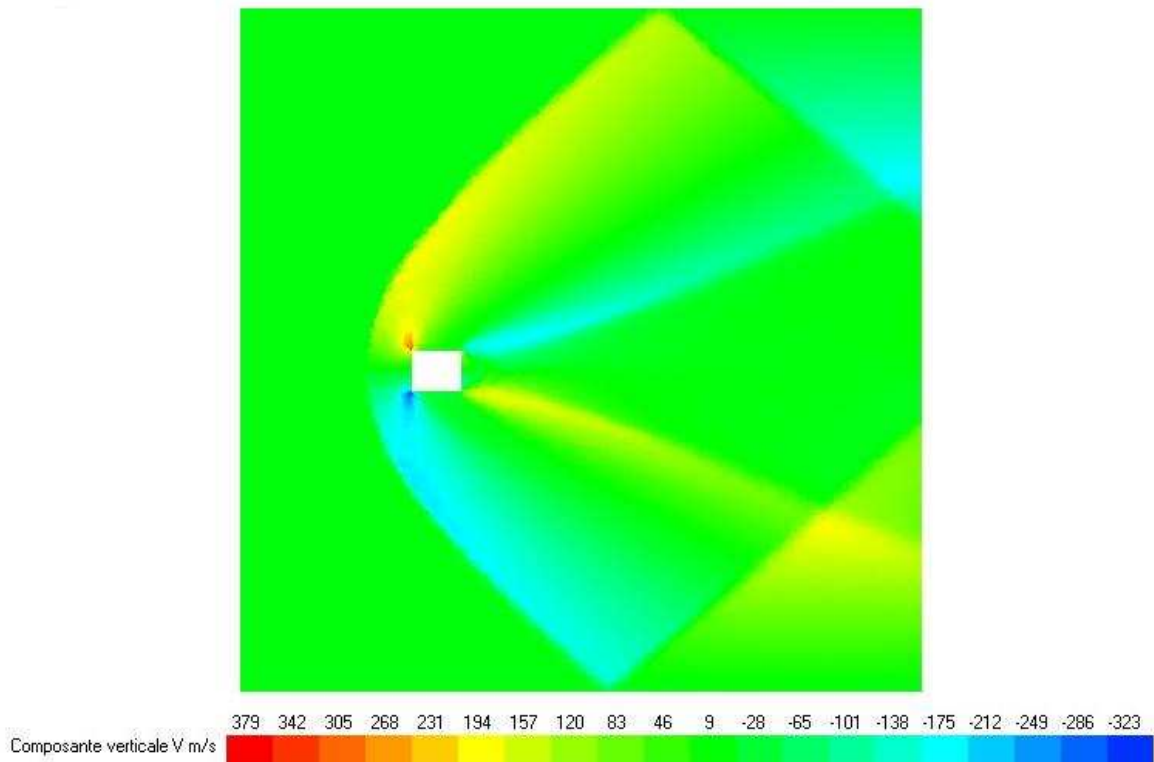


Figure 6.28: composante horizontale de la vitesse.

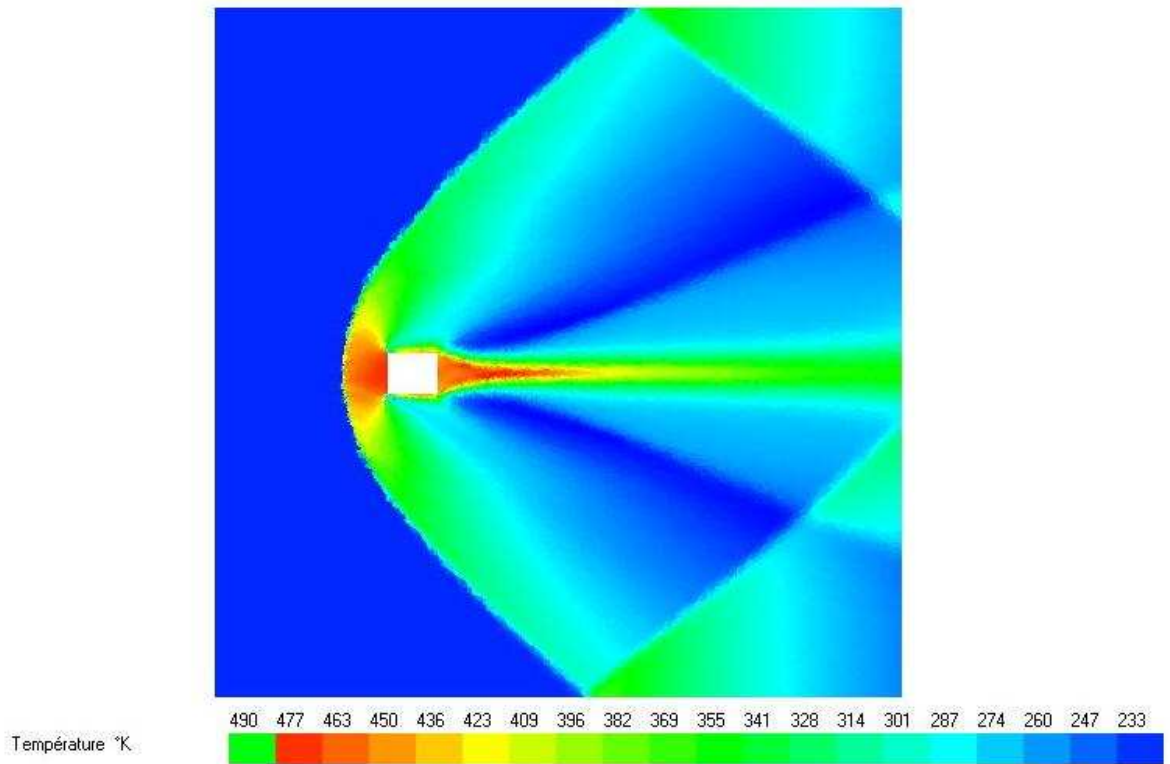


Figure 6.29: Distribution de la température statique.

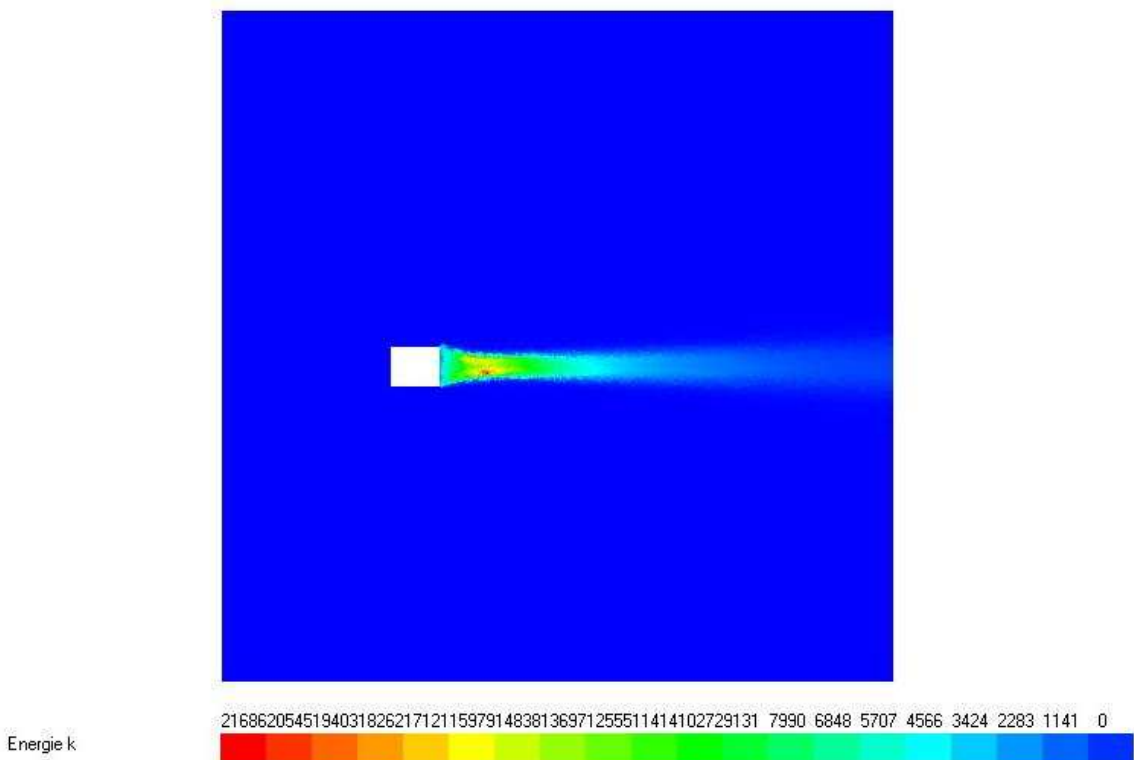


Figure 6.30: Distribution de l'énergie cinétique de turbulence

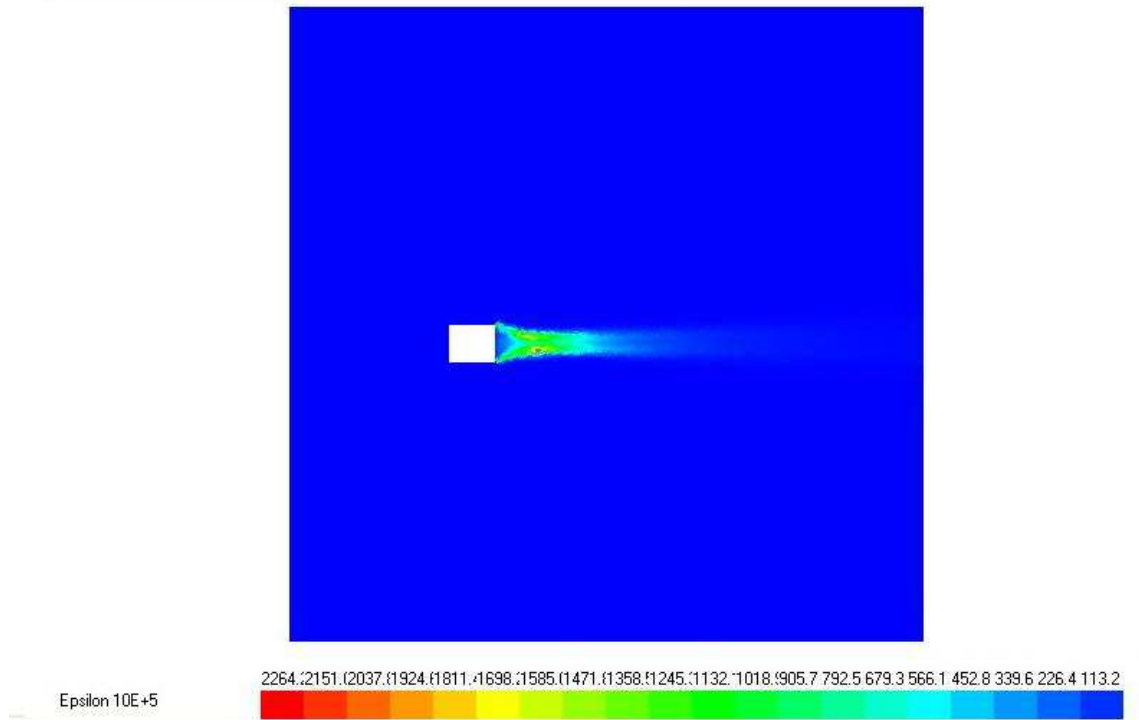


Figure 6.30: Distribution du taux de dissipation.

Commentaires :

Les corps non profilés à des vitesses supersoniques engendrent des forts choc détachés en amont. Avec nos calculs on constate la même chose (Fig 6.26) sauf qu'on a une réflexion d'onde à cause des parois, cette réflexion apparait dissymétrique parce que le cube n'est pas centré entre les deux parois.

En dehors du choc détaché on a d'autres chocs de détente à chaque coin du carré (Fig 6.26) accompagnées d'une baisse de pression (Fig 6.25) et une augmentation de vitesse (Fig 6.24). En plus, deux chocs obliques de recompression apparaissent (Fig 6.26, Fig 6.29) ces choc n'apparait pas bien à cause du maillage et voici une illustration (Fig 6.31) :

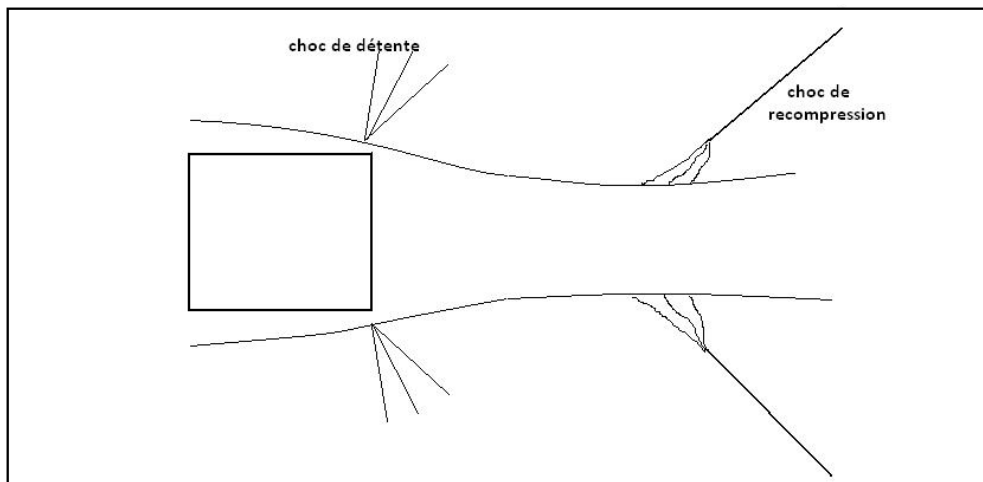


Figure 6.31: illustration des chocs de recompression en aval.

Pour la pression statique et la température statique qui augmentent après chaque choc oblique, marquent leurs valeurs max à la face du cube qui est face à l'écoulement, c'est normal parce que c'est une face d'arrêt.

Arrivant maintenant l'énergie cinétique de turbulence qui augmentent en aval du cube ce qui est expliqué par un fort cisaillement derrière ce corps non profilé.

Autre chose qu'on doit noter est la zone de recirculation derrière le cube, caractérisé par une vitesse horizontale négative (Fig 6.27 & Fig 6.28) ce phénomène caractérise les écoulements d'arrière corps.

6.5.2.3 Projectile:

Maintenant on propose l'étude d'un corps profilé et de le comparer avec le cas test précédent. Le maillage est plus raffiné dans la zone où interactions complexes sont prévu comme le montre la figure

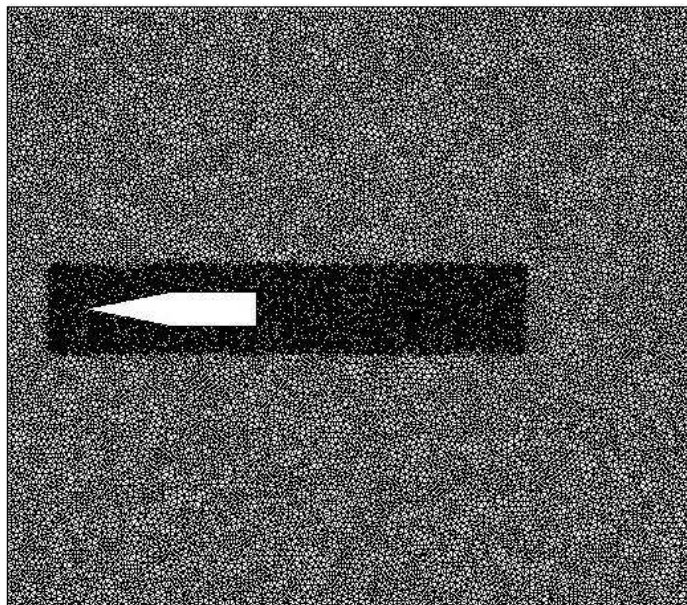


Figure 6.32: Maillage du domaine de calcul.

Conditions aux limites :

pour les deux surfaces supérieur et inférieur, la condition est de type paroi lisse afin d'éliminer toute interaction choc-couche limite.

Pour l'entrée, la condition est de type entrée supersonique avec les paramètres suivants :

- Nombre de Mach : $M=1.88$, $u=600$ m/s, $v=0$ m/s.

- Pression statique : 70000 Pa.
- Température statique : 250 °K.
- Energie cinétique de turbulence : $K=1 \text{ m}^{-2}\text{s}^2$.
- Taux de dissipation de K : $\varepsilon=1 \text{ m}^{-2}\text{s}$.

Pour la sortie la condition est de type sortie supersonique ce type ne demande pas de paramètres.

Les faces du projectile sont tous des parois adiabatiques sans glissement.

Valeurs initiales :

- Vitesse nulle.
- Pression : 50000 Pa.
- Température : 273 °K.
- $K=1 \text{ m}^{-2}\text{s}^2$.
- $\varepsilon=1 \text{ m}^{-2}\text{s}$.

Résultats :

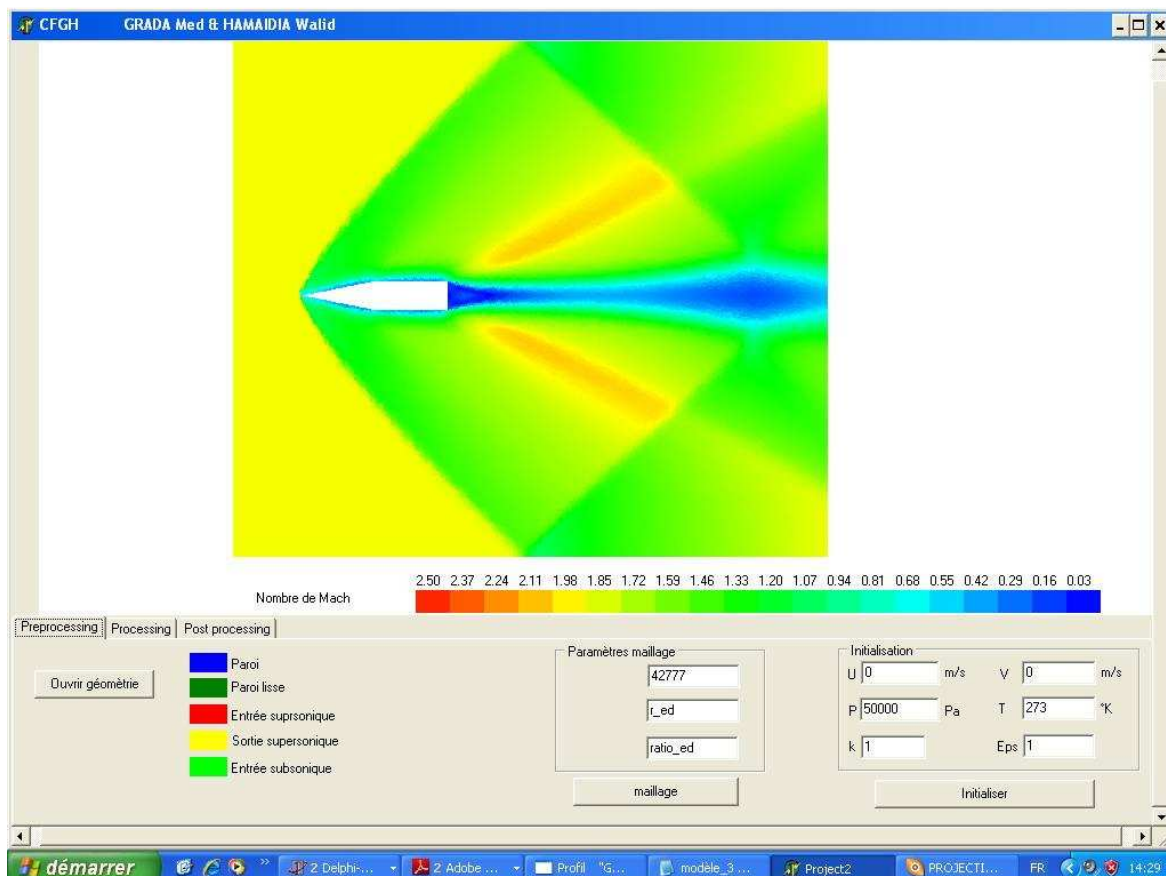


Figure 6.33: Nombre de Mach.

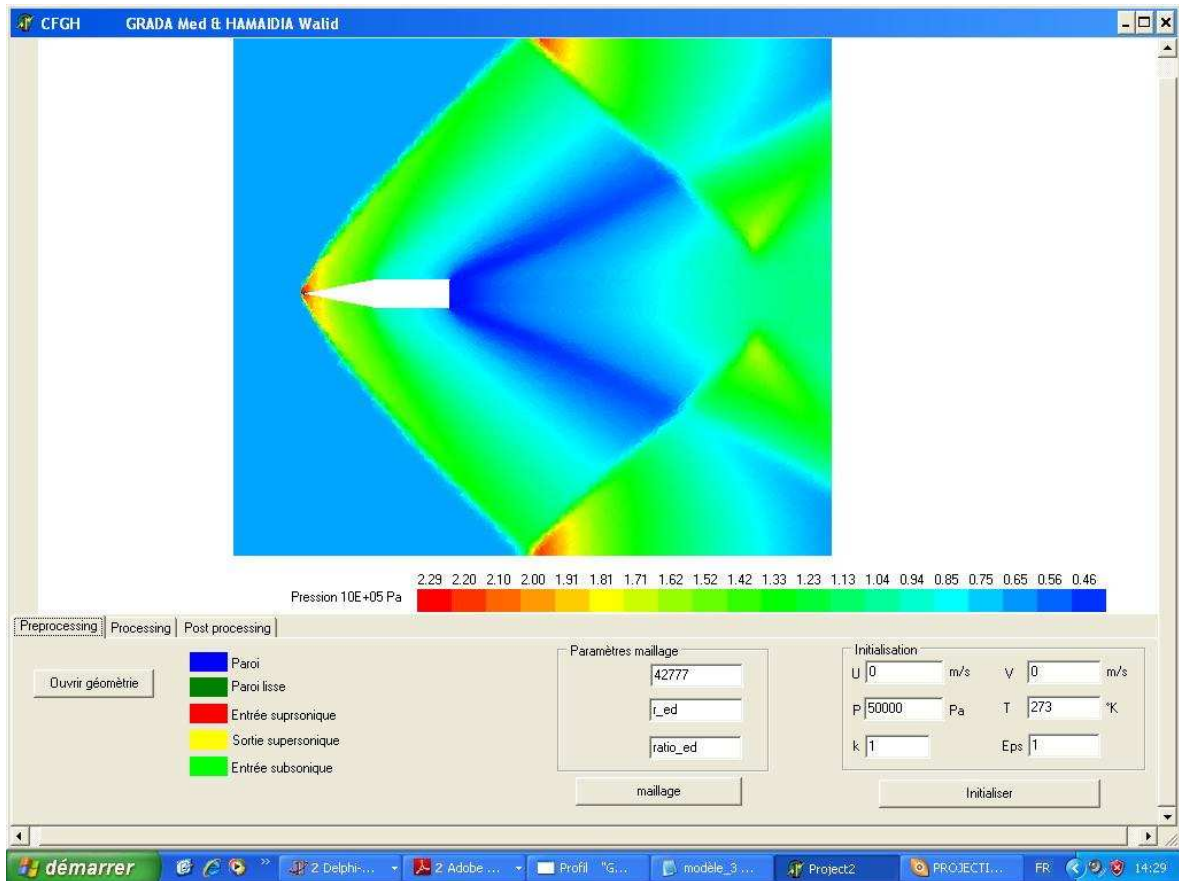


Figure 6.34: Distribution de la pression.

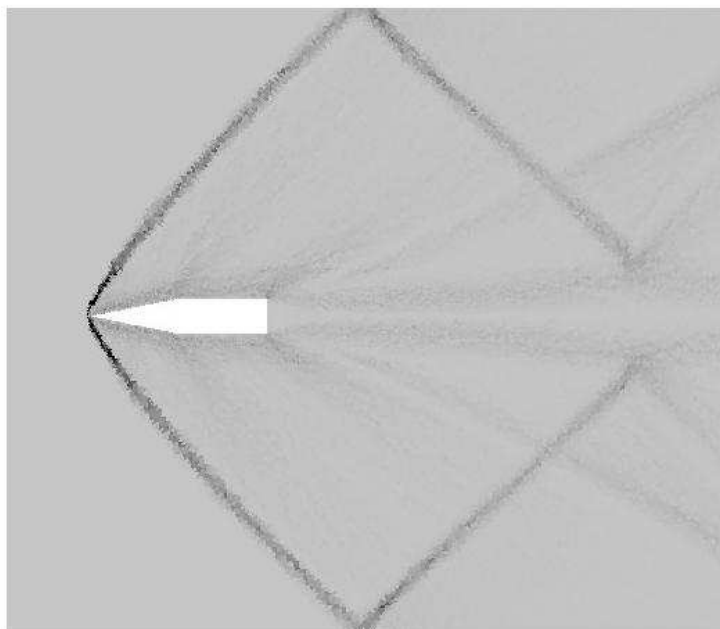


Figure 6.35: Strioscopie numérique.

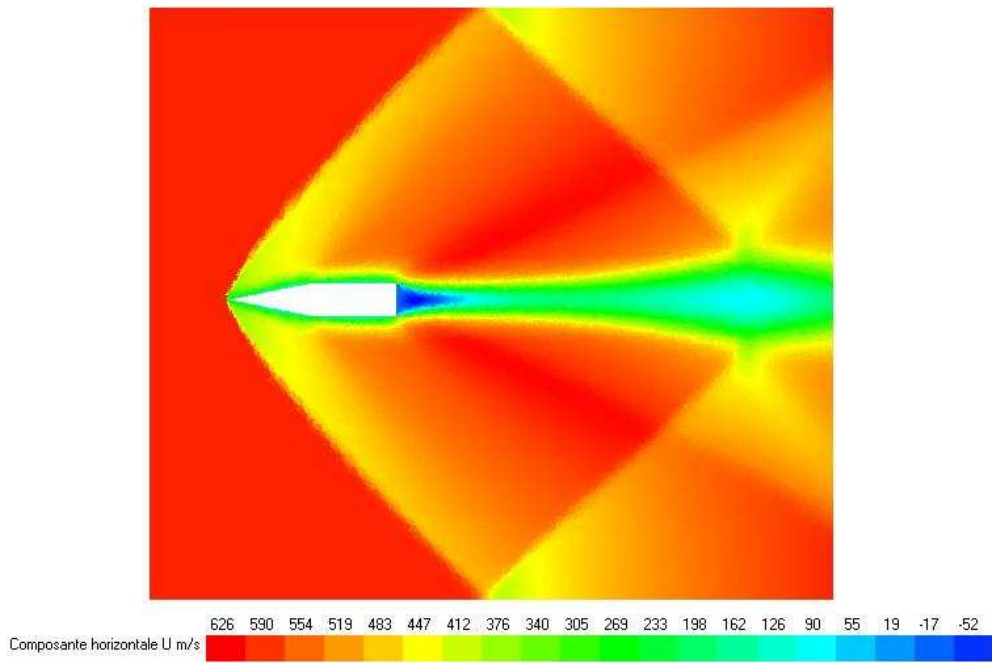


Figure 6.36: Composante horizontale de la vitesse.

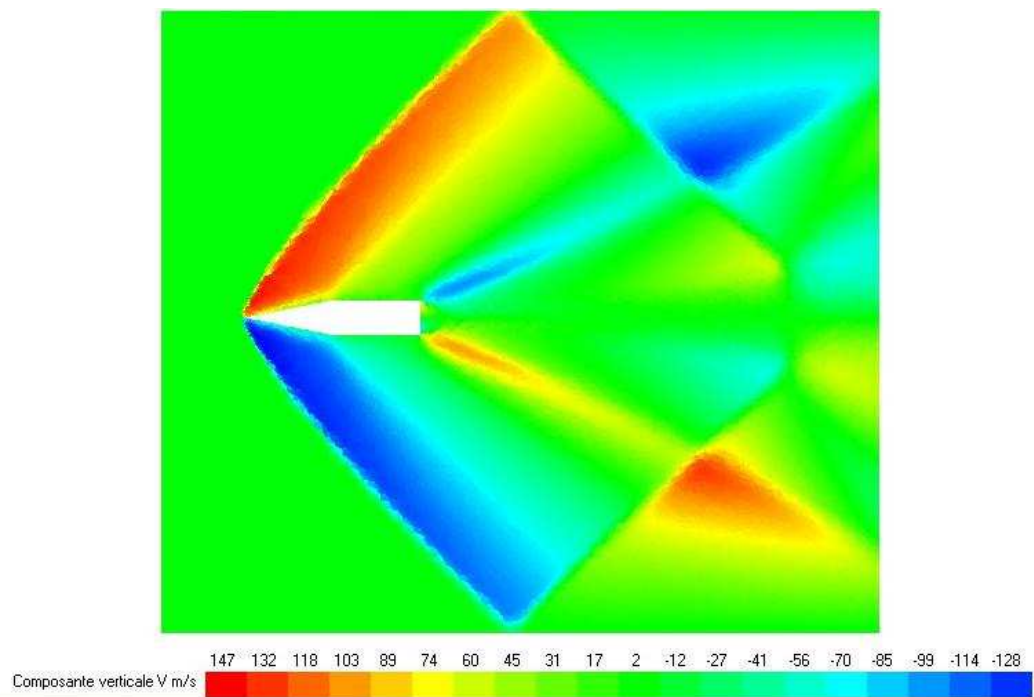


Figure 6.37: Composante verticale de la vitesse.

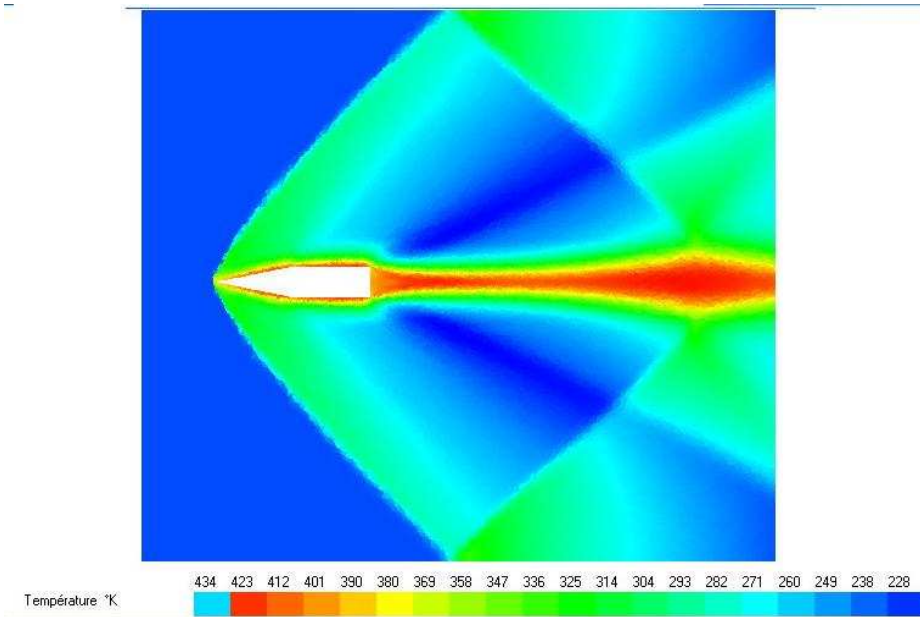


Figure 6.38: Distribution de la température statique.

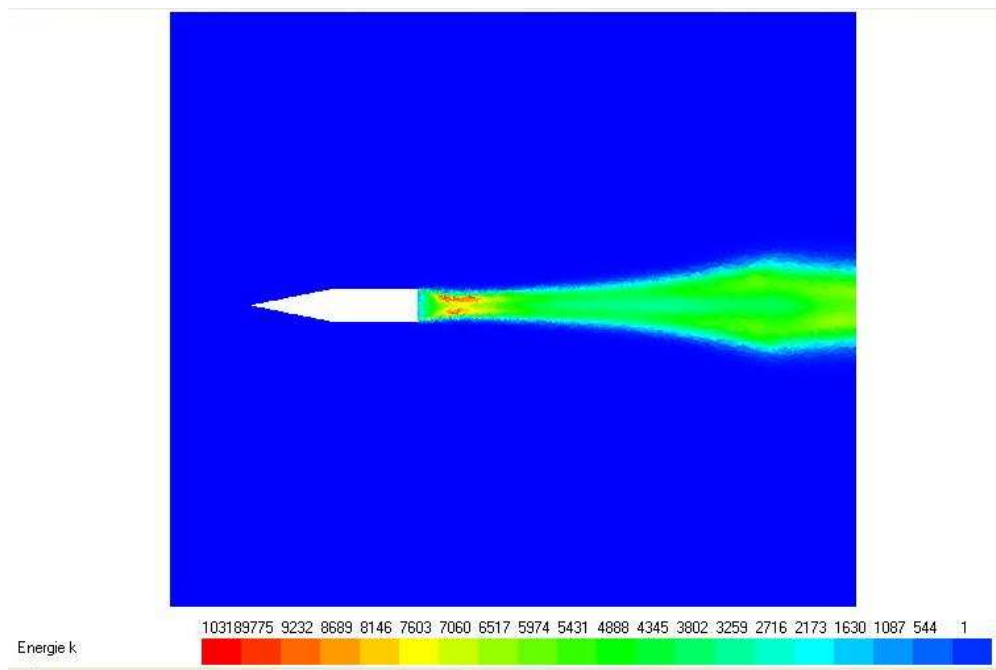


Figure 6.39: Distribution de l'énergie cinétique de turbulence.

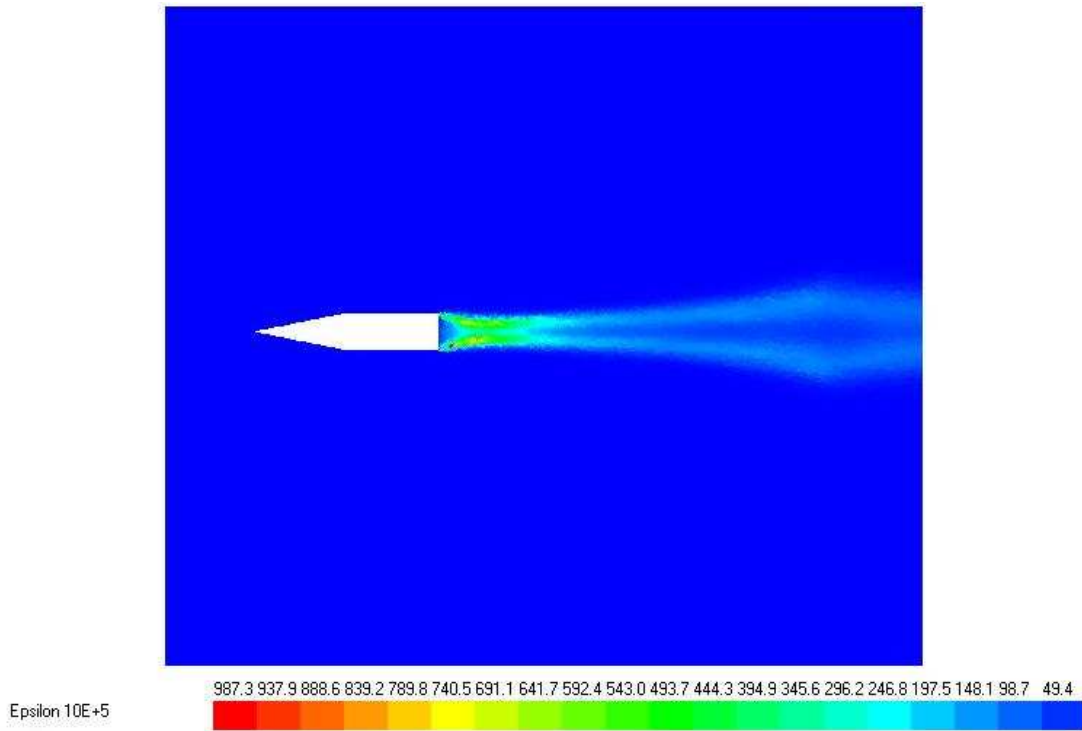


Figure 6.40: Distribution du taux de dissipation de K.

Commentaires :

La figure 6.35 montre que le choc devient plus rectiligne et pointu car le corps est profilé. Ainsi on remarque le rétrécissement de la zone de forte pression à la pointe du corps en comparant la figure 6.34 et la figure 6.25 du cas test précédent. Et pour le reste de l'écoulement c'est la même chose que le cas du cube sauf qu'ici on voit plusieurs interactions entre différents types de chocs en aval du corps (chocs oblique-oblique et chocs oblique-détente) ces interactions font que la couche limite de cisaillement devienne plus épaisse (Fig. 6.33, Fig. 6.35 et Fig. 6.36) accompagnée d'une augmentation de l'énergie cinétique de turbulence.

6.5.2.4 Tuyère TOC:

Le programme a fait comme même ses preuves dans les cas test précédent alors on va augmenter le degré de complexité en étudiant une tuyère TOC(Thrust Optimized Contour nozzle) sur détente avec un NPR=3. C'est une étude qui va nous montrer les différents phénomènes de décollement et les différentes formes de chocs. La figure 6.41 montre la tuyère et le domaine de calcul.

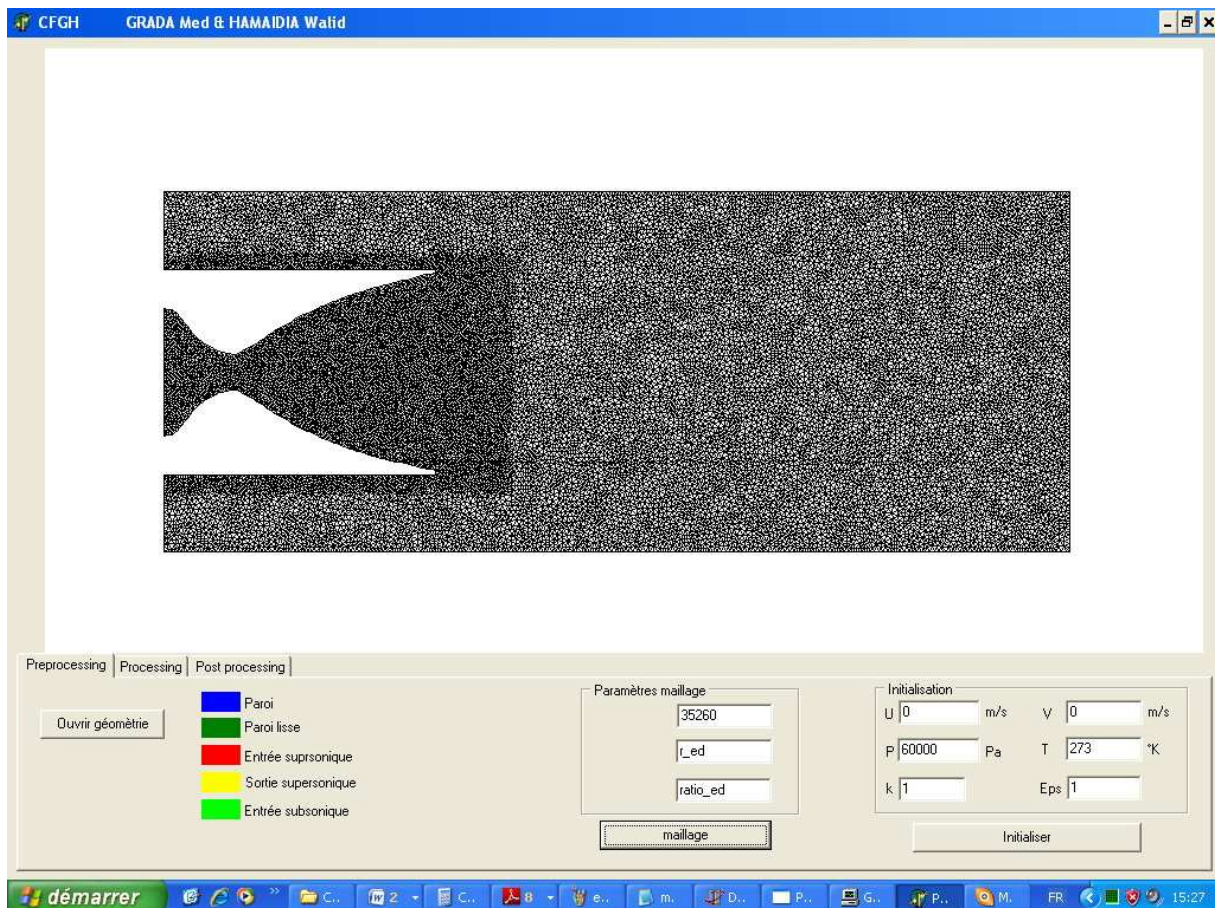


Figure 6.41: Maillage du domaine de calcul.

Conditions aux limites :

Pour les deux surfaces supérieur et inférieur, la condition est de type paroi lisse afin d'éliminer toute interaction choc-couche limite.

Pour la sortie la condition est de type sortie supersonique ce type ne demande pas de paramètres.

Les faces de la tuyère sont tous des parois adiabatiques avec glissement.

Pour les deux entrées en dessous et au dessus de la tuyère, la condition est de type entrée subsonique avec une très faible vitesse :

- Pression=100000 Pa.

- Température=298 °K.
- Vitesse: $u=1$ m/s, $v=0$ m/s.

Pour l'entrée de la tuyère, la condition est du type entré supersonique avec les paramètres suivants:

- Pression statique : 300000 Pa.
- Température statique : 320 °K.
- $M=0$; $u=0$ m/s ; $v=0$ m/s.
- Energie cinétique de turbulence : $K=1$ m²s².
- Taux de dissipation de K : $\epsilon=1$ m²s.

Pour la sortie la condition est de type sortie supersonique ce type ne demande pas de paramètres.

Les faces du projectile sont tous des parois adiabatiques sans glissement.

Valeurs initiales :

- Vitesse nulle.
- Pression : 100000 Pa.
- Température : 298 °K.
- $K=1$ m²s².
- $\epsilon=1$ m²s.

Résultats :

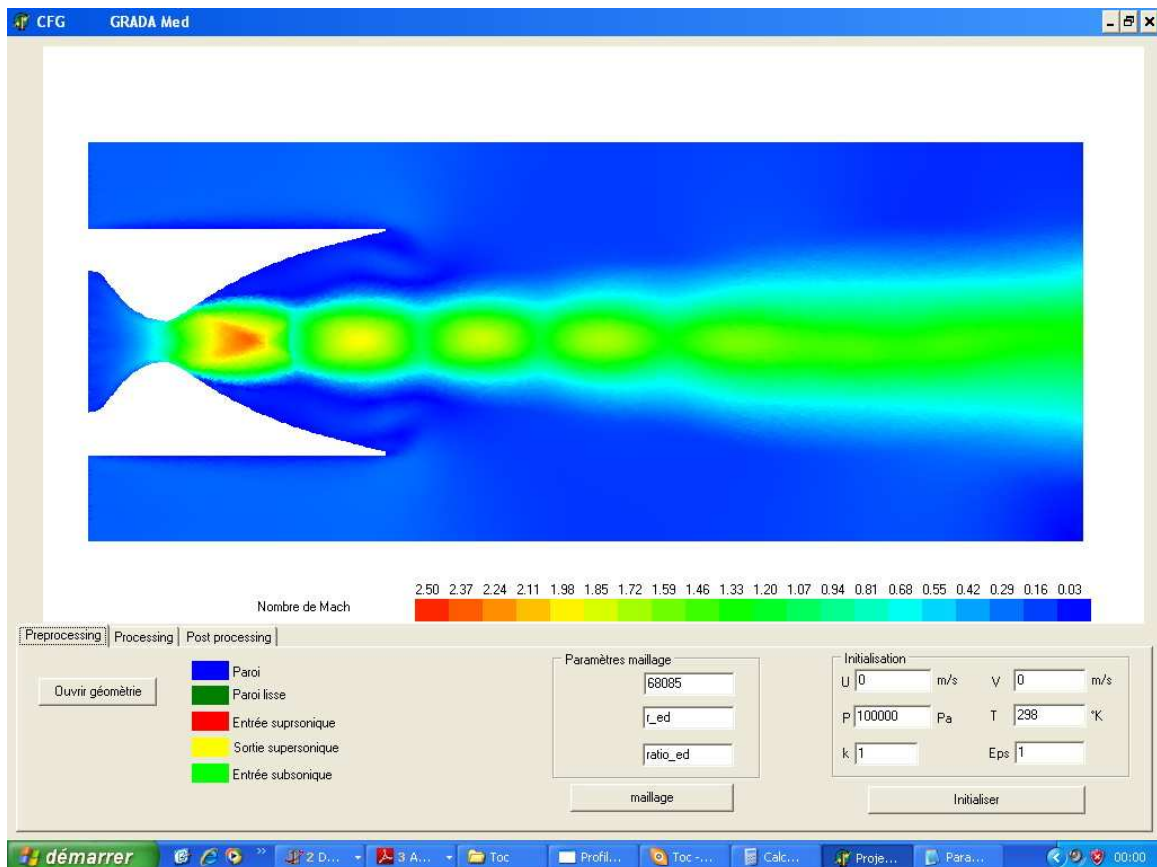


Figure 6.42: Nombre de Mach.

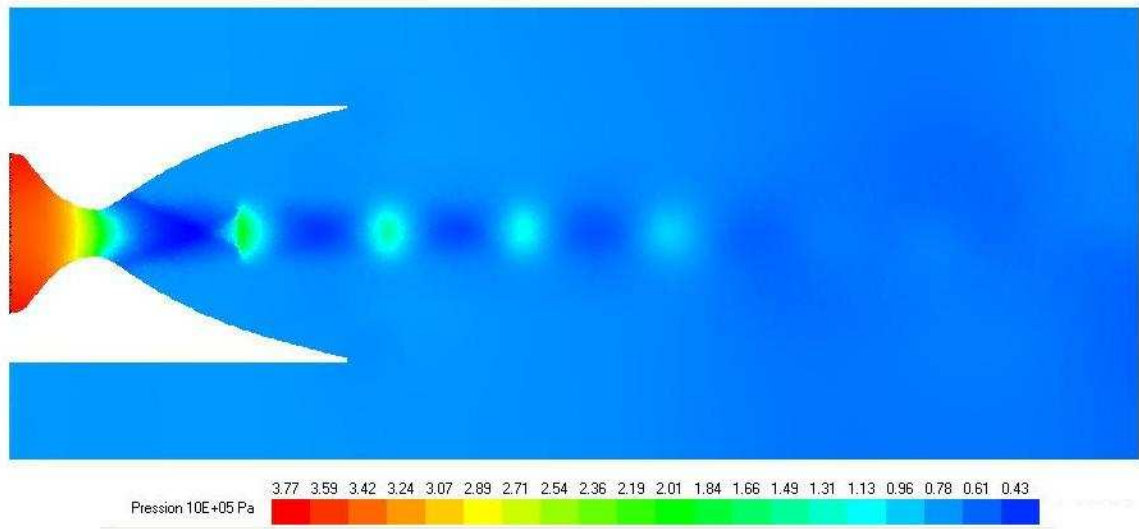


Figure 6.43: Distribution de la pression statique

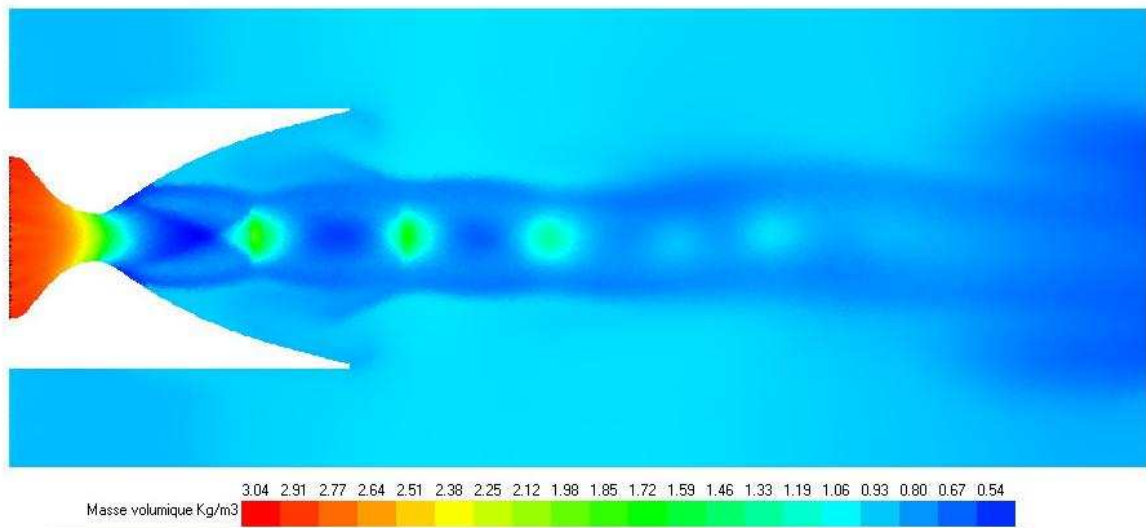


Figure 6.44: Distribution de la masse volumique.

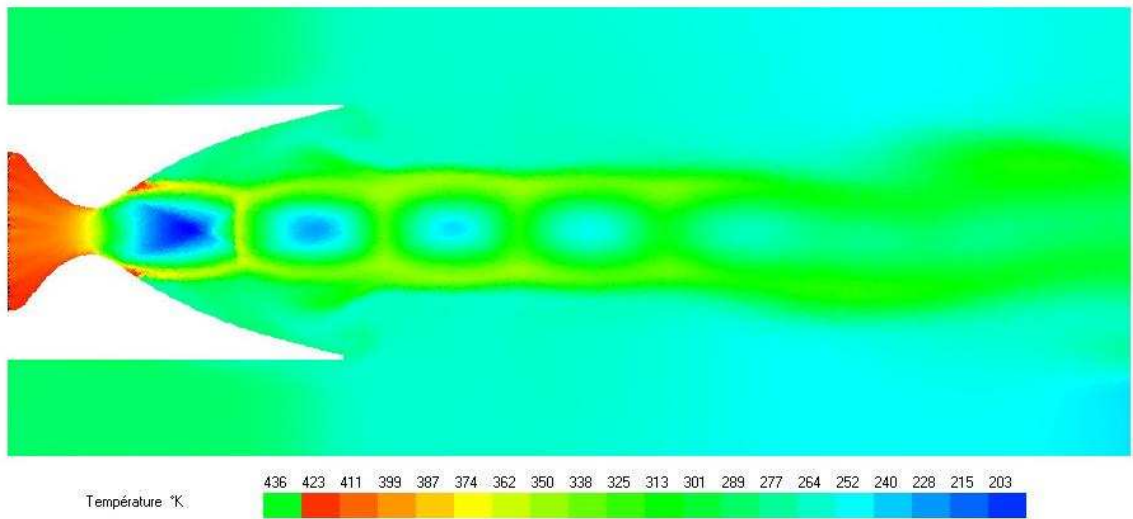


Figure 6.45: Distribution de la température statique.

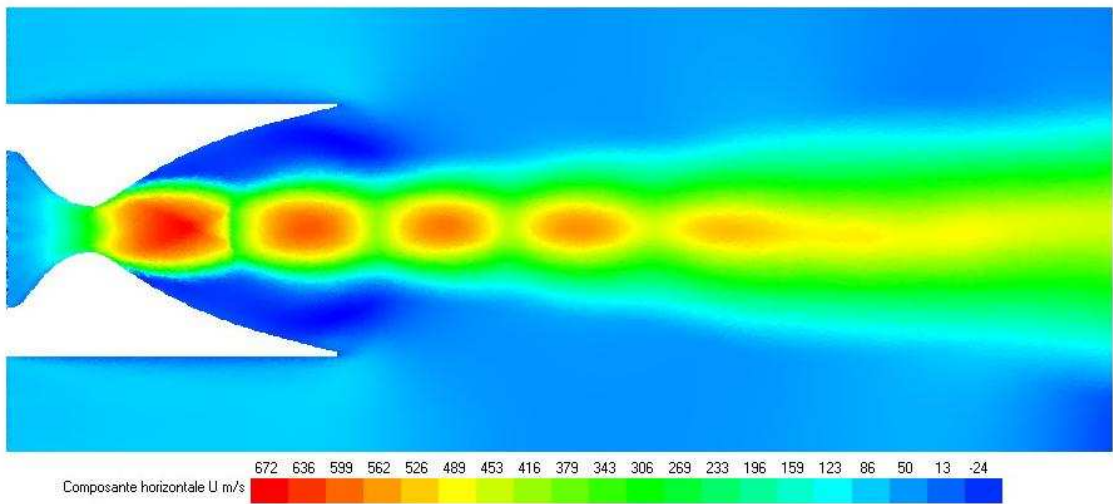


Figure 6.46: Composante horizontale de la vitesse.

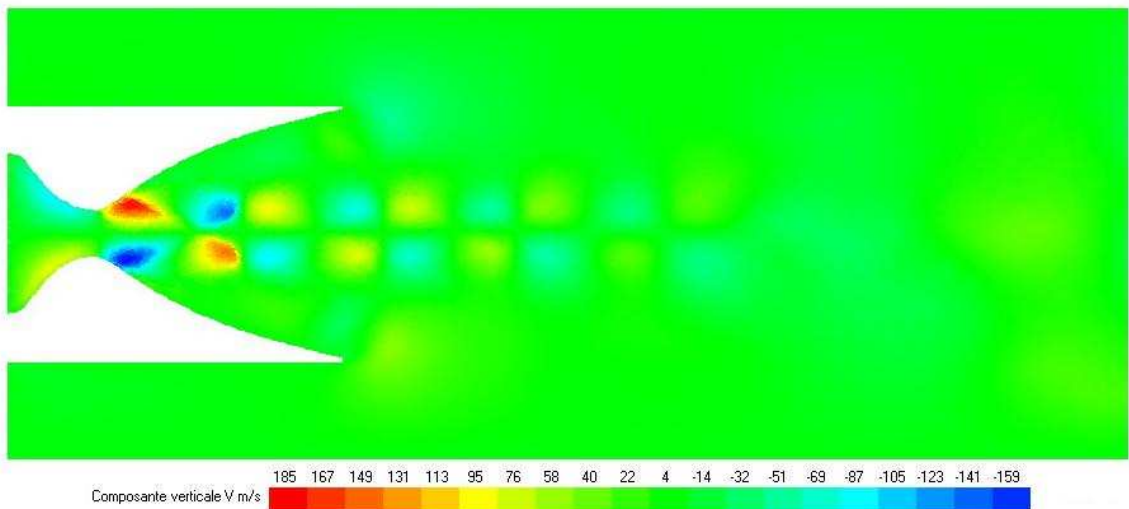


Figure 6.47: Composante verticale de la vitesse.

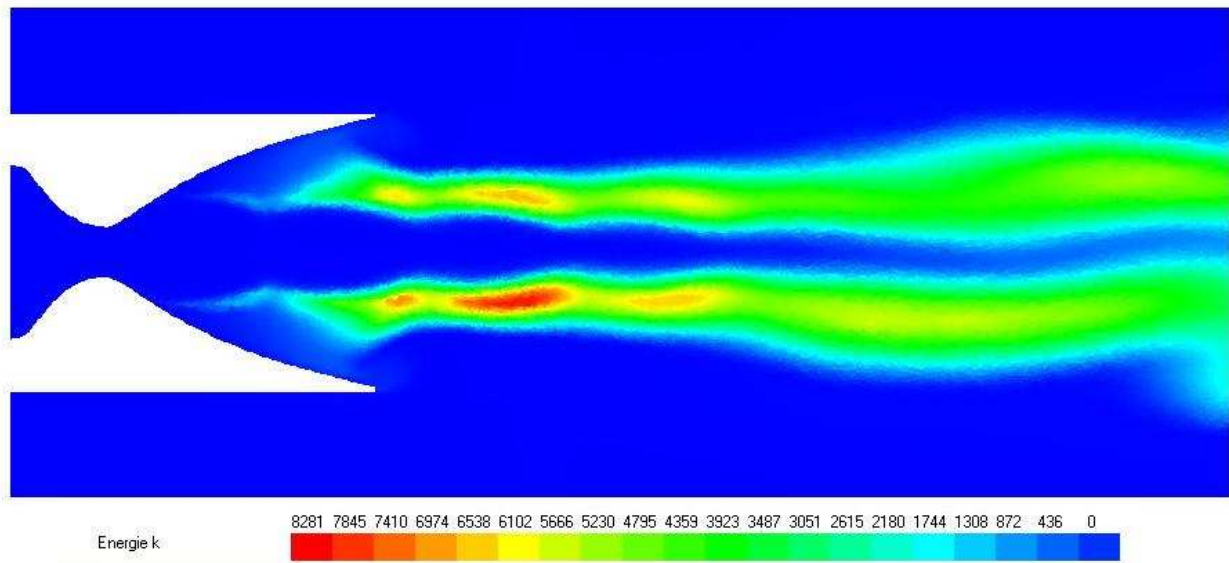


Figure 6.48: Distribution de l'énergie cinétique de turbulence.

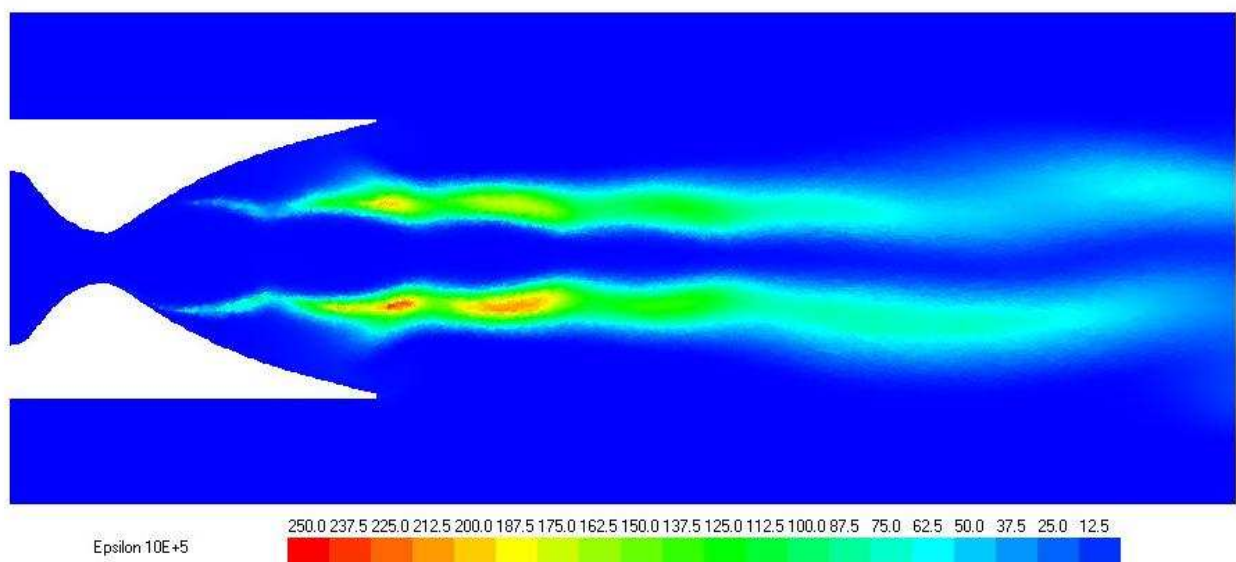


Figure 6.49: Distribution du taux de dissipation de K.

Commentaires :

Ce cas test est très riches, il contient pas mal de phénomènes, on commence avec le col où on constat que le nombre de Mach est égale à 1 (Fig.6.42) donc on est dans la bonne voie. On remarque aussi le décollement de la couche limite après le col, cela est du à la sur détente, comment ça ? La pression externe est plus fort alors un gradient de pression adverse bats la vitesse et la couche limite décolle. Les résultats montrent une zone de recirculation après le décollement, l'écoulement rentre des bouts de la tuyère, suit les parois (u négative) jusqu'au décollement et repart de nouveau vers l'extérieur (voir figure 6.46 – 6.47). Peut être que cette recirculation n'apparaisse pas clairement pour cela on donne une illustration dans la figure 6.50

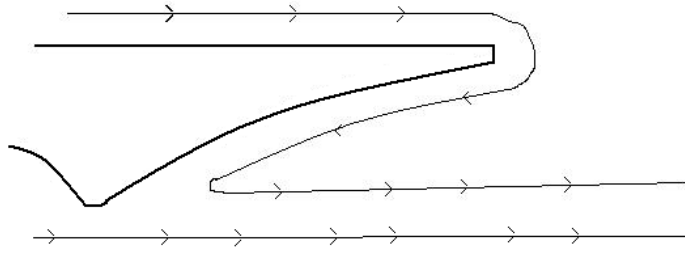


Figure 6.50: Recirculation.

Une autre observation est la série d'ondes après la sortie c'est la réflexion de Mach. L'énergie cinétique de turbulence confirme les résultats comme on le voit dans la figure 6.48 qui exprime l'existence de fortes turbulences entre l'écoulement sortant de la tuyère et le fluide à l'extérieur.

Conclusions et perspectives:

Dans les cas test précédents on a essayé de donner une crédibilité à notre programme à travers les différentes interprétations basées sur des phénomènes connus et surtout sur la logique. Les cas qu'on a présentés se sont parmi les cas test de base que toute validation d'un code de calcul commence avec. En commençant avec les équations d'Euler et arrivant au dernier cas test on a vu que notre programme peut reproduire différents phénomènes et différentes interactions ; tous genres d'ondes de choc peuvent être résolus : droit, oblique, détente, attaché ou détaché et même leurs interactions entre eux chose qu'on a constatée dans les résultats précédents. La couche limite, quand à elle, est résolue par notre programme dans ses différentes régimes laminaire ou turbulent même le décollement comme on l'a vu dans le cas de la tuyère. Autrement l'interaction couche limite-onde de choc a été résolu par notre programme comme le montre le cas test de la plaque plane et du projectile, en dehors de ces cas on a réalisé d'autres tests mais qu'on n'a pas mis dans ce mémoire pour ne pas l'alourdir. Ces différents cas peuvent être consultés dans le CD-Rom inclus dans ce mémoire.

Donc personne ne peut nier que notre programme a pu reproduire la réalité des écoulements dans des différentes configurations mais la question qui se pose est : on a pu reproduire la réalité mais avec quelle précision ? la réponse est : seul l'expérience est capable d'attester si c'est précis ou pas. Et encore une fois comme on vient de dire dans les paragraphes précédents, la validation ne peut pas être faite avec un logiciel, c'est notre point de vue.

Cela n'est que le premier pas vers un logiciel de calcul des fluides plus performant et complet, cela ne peut voire le jour qu'en corrigeant les lacunes et en améliorant les schémas de calcul. L'un des grands défauts à régler dans le future est le contrôle de maillage qu'on n'a pas pu pour le moment le contrôler à 100%, et la qualité du maillage est la première condition d'avoir de bons résultats.

Autrement l'extension en ordre supérieur des schémas est primordiale quelque soit en terme de temps ou en terme d'espace. Aussi, il est préférable d'enrichir ce programme avec d'autres schémas de calcul car la diversité permet de détecter les défauts des schémas de calcul.

En plus, la modélisation de turbulence doit être améliorée par des modèles non linéaires par exemple, ou par introduction des méthodes plus performantes comme la LES et la DES et pourquoi pas la simulation directe. Tout cela dépend de nos compétences, de notre volonté et de nos ambitions.

Ce travail ne doit pas s'arrêter ici, pour nous, nous allons continuer dans ce chemin, mais « nous seuls » ne suffit pas, il faut que tout le monde y participe surtout ceux qui vont nous relèver.

Bibliographie

- [1] J. Blazek; Computational Fluid Dynamics ; Principales and Applications; ELSEVIER SCINCE Ltd; 2001.
- [2] Mavriplis, D.J.; Three-Dimensional Multigrid Reynolds-Averaged Navier-Stokes Solver for Unstructured Meshes. AIAA Paper 94-1878, 1994.
- [3] Roe. P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," J.computational Physics, Vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- [4] Klaus A. Hoffmann; Steve T. Chiang: Computational Fluid Dynamics; 1 Publication of Engineering Education System , Kansas, 67208-1078, Vol 1; 2000.
- [5] Klaus A. Hoffmann; Steve T. Chiang: Computational Fluid Dynamics; 1 Publication of Engineering Education System , Kansas, 67208-1078, Vol 2; 2000.
- [6] Klaus A. Hoffmann; Steve T. Chiang: Computational Fluid Dynamics; 1 Publication of Engineering Education System , Kansas, 67208-1078, Vol 3; 2000.
- [7] Jonathan Richard Shewchuk ; Delaunay Refinement Mesh Generation ; Thèse PHD; school of computer science university; Pttsburgh, PA 15213; 1997.
- [8] Abdol-Hamid, K. S., Lakshmanan. B., and Carlson, J. R., "Application of Navier-Stokes Code Pab3D with $k - \varepsilon$ Turbulence Model to Attached and Separated Flows", NASA TP2480, Janvier 1995.
- [9] Wilcox, D. C., *Turbulence Modeling for CFD*, DCW industries, Inc., 1993.
- [10] Launder , B., and Sharma, B., "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disk" , *Letters in Heat and Mass transfer*, Vol. 1, pp. 131-138, 1974.
- [11] Van Leer, B.; Flux vector Splitting for the Euler Equations. Proc. 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer Verlag, 1982, pp. 507-512, 1982.
- [12] Whitaker D.L.; Slack, D.C.; Walters, R. W.; Solution Algorithms for the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Meshes. AIAA Paper 90-0697, 1990.
- [13] Jones, W.P., Launder, B.E.; The prediction of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence. Int, Journal of Heat and Mass Transfer, pp. 301-314, 1972.
- [14] T.J Craft; Launder B.E.; Suga K. :A Non-Linear Eddy-Viscosity Model Including Sensitivity to Stress Anisotropy. Proc. 10th Symp. Turbulent Shear Flows, Pennsylvania State university, Paper 23:19, 1995.
- [15] F.R. Menter. Zonal two equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamics flows. AIAA Paper 93-2906, 1993.

- [16] Jim Ruppert. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. *Journal of Algorithms* 18(3):548-585, May 1995.
- [17] L. Paul Chew. Constrained Delaunay Triangulations. *Algorithmica* 4(1):97-108, 1989.
- [18] Abdellah Hadjadj, *Analyse Physique et Simulation Numérique des Ecoulements Compressibles Application aux Tuyères de Propulseurs*, Thèse PHD, Université de Rouen, 1997.
- [19] Spalart and Allmaras. A One-equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *La recherche spatiale*, 1 :5-21, 1994.
- [20] Yohann PERROT; *Etude, Mise au Point et Validation de Modèles de Turbulence Compressible*; Thèse PHD ; Université de Rouen.