

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master en
Construction mécanique

Thème :
**Calcul de K_I pour une section elliptique fissurée par la
méthode de collocation de frontière**

Proposé et encadré par :
Pr.FERDJANI Hicheme

Réalisé par :
MEKKAOUI Ahmed
BELHADJ Mokrane

Nomenclature général

Symboles latins :

θ et r : composants du repère polaire

a et b : rayons (axes) de la section elliptique

X et Y : composantes de repère cartésien

f : longueur de la fissure

KI, KII : facteur d'intensité de contrainte respectivement en mod 1 et 2

C : nombre de points de collocation

N : nombre de terme

σ : contraintes normal

τ : contrainte tangentiel

Y : facteur de forme

Sommaire

REMERCIEMENTS

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Rappels Théoriques sur la mécanique de la rupture	2
I.1.Introduction	3
I.2. Définition de la mécanique de la rupture [1]	3
I.2.1. Modes de rupture [3]	3
I.3. Développement des contraintes en série infinie en élasticité plane dans un milieu fissuré	4
I.4. Facteur de forme [4]	6
Chapitre 2 : Méthode de collocation de frontière et méthode des moindres carrés	7
II.1.Introduction	8
II.2. La Méthode de collocation de frontière [5]	8
II.2.1. Cas de l'élasticité plane	8
II.3. La Méthode des moindres carrés [6]	10
II.3.1. Forme standard	10
II.3.2. Solution analytique	10
Chapitre 3:Problèmes Traités	13
III.1 Introduction	14
III.2 Cas de Fissure centrale	14
III.2.1 Résultats	15
III.2.2 Détermination de l'expression analytique du facteur de forme	16
III.2.3 Confirmation de la validité de l'expression Y en fissure central	18
III.3. Cas de Fissure centrale	19
III.3.1 Résultats	20
III.3.2 Détermination de l'expression analytique du facteur de forme	21
III.3.3 Confirmation de la validité de l'expression Y en fissure central	23
Conclusion général	24
Références	

Annexes 1 : Les programmes de calcul du FIC dans une section elliptique fissurée

A1-1Programme pour fissure central

A1-2Programme pour fissure non central.

Annexe 2 : Les programmes pour les expressions du facteur de forme

A2-1Programme pour fissure central

A2-2Programme pour fissure non central.

Annexe 3 : Résultats pour le cas d'une fissure centrale

Résultats pour $b/a=0.6$

Résultats pour $b/a= 0.7$

Résultats pour $b/a= 0.8$

Résultats pour $b/a= 0.9$

Résultats pour $b/a= 1$

Résultats pour $b/a= 1.1$

Résultats pour $b/a= 1.2$

Résultats pour $b/a= 1.3$

Résultats pour $b/a= 1.4$

Résultats pour $b/a= 1.5$

Annexe 4 : Résultats pour le cas d'une fissure non centrale

Résultats pour $f=0.7$

Résultats pour $f= 0.8$

Résultats pour $f= 0.9$

Résultats pour $f= 1$

Résultats pour $f= 1.1$

Résultats pour $f= 1.2$

Résultats pour $f=1.3$

Résultats pour $f=1.4$

Résultats pour $f= 1.5$

Résultats pour $f= 1.6$

Annexe 5 : Déduction du développement des contraintes

Liste des figures :

Figure I- 1 Les trois modes de rupture

Figure I- 2 Champ de contrainte

Figure II- 1 Exemple de points de collocation.

Figure III- 1 section fissuré sous chargement normal uniforme

Figure III- 2 Points de collocation

Figure III- 3 Section elliptique avec une fissure non centrale sous chargement normal uniforme

Figure III- 4 Points de collocation

Figure A3- 1 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.6$)

Figure A3- 2 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.7$)

Figure A3- 3 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.8$)

Figure A3- 4 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.9$)

Figure A3- 5 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1$)

Figure A3- 6 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.1$)

Figure A3- 7 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.2$)

Figure A3- 8 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.3$)

Figure A3- 9 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.4$)

Figure A3- 10 Facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.5$)

Figure A4- 1 Facteur de forme Y en fct de N ($f=0.7$).

Figure A4- 2 Facteur de forme Y en fct de N ($f=0.8$).

Figure A4- 3 Facteur de forme Y en fct de N ($f=0.9$)

Figure A4- 4 Facteur de forme Y en fct de N ($f=1$)

Figure A4- 5 Facteur de forme Y en fct de N ($f=1.1$)

Figure A4- 6 Facteur de forme Y en fct de N ($f=1.2$).

Figure A4- 7 Facteur de forme Y en fct de ($f=1.3$)

Figure A4- 8 Facteur de forme Y en fct de N ($f=1.4$)

Figure A4- 9 Facteur de forme Y en fct de N ($f=1.5$)

Figure A4- 10 Facteur de forme Y en fct de N ($f=1.6$).

Figure A5- 1

Liste des tableaux :

Tableau III-1 résultats de KI et Y pour différentes valeurs de b/a

Tableau III-2 comparaison entre l'expression Y avec les résultats obtenus par MATLAB

Tableau III-3 comparaison entre l'expression Y avec les résultats obtenus par MATLAB

Tableau III-4 résultats de KI et Y pour différentes valeurs de f/a

Tableau III-5 comparaison entre l'expression Y avec les résultats obtenus par MATLAB

Tableau III-6 comparaison entre l'expression Y avec les résultats obtenus par MALAB

Tableau A3- 1 Y en fct de N ($b/a=0.6$)

Tableau A3- 2 Y en fct de N ($b/a=0.7$)

Tableau A3- 3 Y en fct de N ($b/a=0.8$)

Tableau A3- 4 Y en fct de N ($b/a=0.9$)

Tableau A3- 5 Y en fct de N ($b/a=1$)

Tableau A3- 6 Y en fct de N ($b/a=1.1$)

Tableau A3- 7 Y en fct de N ($b/a=1.2$)

Tableau A3- 8 Y en fct de N ($b/a=1.3$)

Tableau A3- 9 Y en fct de N ($b/a=1.4$)

Tableau A3- 10 Y en fct de N ($b/a=1.5$)

Tableau A4- 1 Y en fct de N ($f=0.7$)

Tableau A4- 2 Y en fct de N ($f=0.8$)

Tableau A4- 3 Y en fct de N ($f=0.9$)

Tableau A3- 4 Y en fct de N ($f=1$)

Tableau A4- 5 Y en fct de N ($f=1.1$)

Tableau A4- 6 Y en fct de N ($f=1.2$)

Tableau A4- 7 Y en fct de N ($f=1.3$)

Tableau A4- 8 Y en fct de N ($f=1.4$)

Tableau A4- 9 Y en fct de N ($f=1.5$)

Tableau A4- 10 Y en fct de N ($f=1.6$)

Introduction générale

La fissuration des pièces et des structures est un problème très courant en industrie. En effet, presque la totalité des structures contiennent des fissures même si certaines ne se voient pas à l'œil nu. Ce qui a poussé les ingénieurs à étudier ces fissures et leurs propagations, pour bien comprendre et savoir laquelle de ces fissures ne représente pas de danger. En résumant cette étude est une nouvelle branche qui est la mécanique de la rupture. Le facteur d'intensité de contrainte (FIC) permet de quantifier la nocivité d'une fissure dans une structure sous un chargement donné. Il existe plusieurs méthodes numériques de détermination du FIC. La méthode de collocation de frontière est une des méthodes les plus utilisées.

Plusieurs travaux ont été consacrés à cette méthode. Bouras et Bouza [12] ont étudié une section circulaire fissurée en mode I. Deux cas ont été étudiés : fissure centrale et non centrale. Mezouani [9] a calculé le FIC en mode III d'une section circulaire avec une fissure centrale.

L'objectif de ce travail est de calculer le FIC en mode I d'une section elliptique fissurée, à l'aide de la méthode de collocation de frontière. Deux cas seront considérés : fissure centrale et non centrale. Nous déduisons des expressions analytiques du facteur de forme en suivant la méthode utilisée par Benkrira [11]. Le mémoire se divise en trois chapitres :

- Le premier chapitre présente les principaux concepts de la mécanique de la rupture utilisés dans notre travail, à savoir : modes de rupture, facteur d'intensité de contrainte et facteur de forme.
- Dans le deuxième chapitre, on parlera de la méthode de collocation de frontière et la méthode des moindres carrés.
- Le troisième chapitre présente le problème d'une section elliptique fissurée ainsi que les différents résultats numériques obtenus dans les deux cas : fissure centrale et non centrale. Il contient également la détermination d'une expression polynomiale du facteur de forme pour différentes valeurs du rapport (petit axe / grand axe) dans le cas d'une fissure centrale, et du rapport (longueur de la fissure / grand axe) pour le cas d'une fissure non centrale.
- Nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre I

Rappels Théoriques

I.1.Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons les bases théoriques de notre travail en deux parties:

- Dans la première, nous visitons quelques notions de la mécanique de la rupture.
- La seconde partie présente le développement des contraintes en série infinie, qui sera utilisé dans la méthode de collocation de frontière. Elle présente également la définition du facteur de forme.

I.2. Définition de la mécanique de la rupture [1] :

La théorie de la mécanique de la rupture est un moyen pour estimer la stabilité des fissures qui peuvent survenir à cause des défauts. Elle permet de prévoir l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure. L'objet de mécanique de la rupture est l'étude de la propagation de la fissure en fonction des chargements appliqués et des caractéristiques du matériau constituant.

I.2.1. Modes de rupture [3] :

Une fissure est définie comme une surface séparant localement un solide en deux parties. Le champ des déplacements est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité forment les trois modes de rupture (Figure. I.1) :

Le mode I : pour une ouverture normale.

Le mode II : pour un glissement plan (dans un cas tridimensionnel).

Le mode III : pour un glissement anti-plan). Le cas réel est une superposition de ces modes, on parle alors de mode mixte.

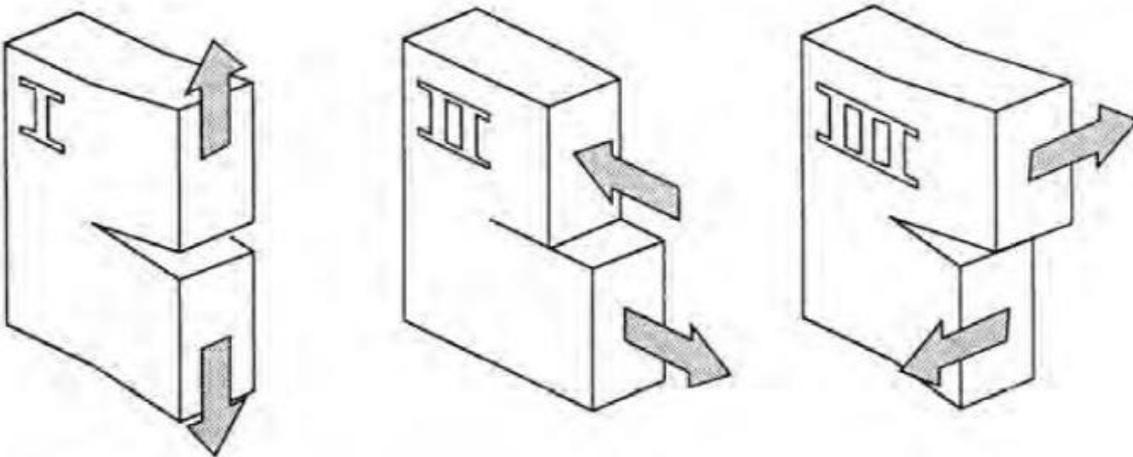


Figure I- 1 Les trois modes de rupture

I.3. Développement des contraintes en série infinie en élasticité plane dans un milieu fissuré :

Considérons une fissure droite, avec un repère (O, x, y) avec O confondu avec la pointe et les coordonnées polaires (r, θ) correspondantes (Fig. I.2).

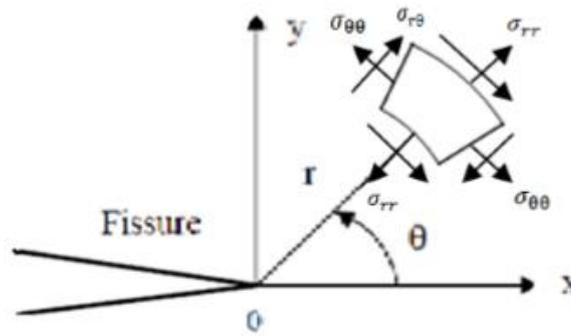


Figure I- 2 Champ de contrainte

Nous allons présenter ci-dessous, les expressions de σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ en fonction de r et θ . On peut établir que l'expression générale de σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ en élasticité plane pour une structure fissurée, est donnée par (voir la justification en Annexe 5) :

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n E_1(r, n, \theta) + B_n F_1(r, n, \theta) + C_n G_1(r, n, \theta) + D_n H_1(r, n, \theta)] \quad \dots (I.1)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n E_2(r, n, \theta) + B_n F_2(r, n, \theta) + C_n G_2(r, n, \theta) + D_n H_2(r, n, \theta)] \quad \dots (I.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n E_3(r, n, \theta) + B_n F_3(r, n, \theta) + C_n G_3(r, n, \theta) + D_n H_3(r, n, \theta)] \quad \dots (I.3)$$

Avec $n \in \mathbb{N}$ et où les fonctions $E_i(r, n, \theta)$, $F_i(r, n, \theta)$, $G_i(r, n, \theta)$, $H_i(r, n, \theta)$ $i = 1..3$, sont données par :

$$E_1(r, n, \theta) = r^{(n-\frac{3}{2})} \left[\left(-n^2 + 4n - \frac{7}{4}\right) \sin\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) + \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right]$$

$$F_1(r, n, \theta) = r^{(n-\frac{3}{2})} \left[\left(-n^2 + 4n - \frac{7}{4}\right) \cos\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) + \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right]$$

$$G_1(r, n, \theta) = r^{(n-1)} \left[(-n^2 + 3n) \sin((n-1)\theta) + n(n-1) \sin((n+1)\theta) \right]$$

$$H_1(r, n, \theta) = r^{(n-1)} \left[(-n^2 + 3n) \cos((n-1)\theta) + n(n+1) \cos((n+1)\theta) \right]$$

$$E_2(r, n, \theta) = -\left(n - \frac{1}{2}\right) r^{\left(n - \frac{3}{2}\right)} \left[\left(n - \frac{3}{2}\right) \cos\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right]$$

$$F_2(r, n, \theta) = -\left(n - \frac{1}{2}\right) r^{\left(n - \frac{3}{2}\right)} \left(n - \frac{3}{2}\right) \left[-\sin\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right]$$

$$G_2(r, n, \theta) = -nr^{(n-1)}(n-1) [\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta)]$$

$$H_2(r, n, \theta) = -nr^{(n-1)} [-(n-1) \sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta)(n+1)]$$

$$E_3(r, n, \theta) = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) r^{\left(n - \frac{3}{2}\right)} \left[\sin\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right]$$

$$F_3(r, n, \theta) = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) r^{\left(n - \frac{3}{2}\right)} \left[\cos\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) - \frac{n - \frac{3}{2}}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right]$$

$$G_3(r, n, \theta) = (n^2 + n)r^{n-1} \left[\sin((n-1)\theta) - \frac{n-1}{n+1} \sin((n+1)\theta) \right]$$

$$H_3(r, n, \theta) = (n^2 + n)r^{n-1} [\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta)]$$

Avec $A_n, B, C_n,$ et Dn des constantes dépendant du chargement et de la géométrie.

Au lieu de la série infinie (I. 1), (1.2) et (I. 3), on utilise les séries tronquées suivantes :

$$\sigma_{rr} \approx \sum_{n=1}^N [A_n E_1(r, n, \theta) + B_n F_1(r, n, \theta) + C_n G_1(r, n, \theta) + D_n H_1(r, n, \theta)] \dots \dots (I. 4)$$

$$\sigma_{r\theta} \approx \sum_{n=1}^N [A_n E_2(r, n, \theta) + B_n F_2(r, n, \theta) + C_n G_2(r, n, \theta) + D_n H_2(r, n, \theta)] \dots \dots (I. 5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} \approx \sum_{n=1}^N [A_n E_3(r, n, \theta) + B_n F_3(r, n, \theta) + C_n G_3(r, n, \theta) + D_n H_3(r, n, \theta)] \dots \dots (1. 6)$$

N est appelé : *nombre de termes* du développement.

On constate dans (I.4), (I.5) et (I.6) que les facteurs multiplicatifs devant C_1 s'annulent ($G_1(r, 1, \theta) = G_2(r, 1, \theta) = G_3(r, 1, \theta) = 0$). Cela veut dire que le système (I.4), (I.5) et (I.6) contient $4N-1$ constantes à déterminer $A_1 \dots A_N, B_1 \dots B_N, C_2 \dots C_N$ Et $D_1 \dots D_N$.

Remarque : les premiers termes de (I.4), (I.5) et (I.6) ($n=1$) donnent les expressions asymptotiques des contraintes en pointe de fissure.

En effet, en posant :

$$K_I = B_1 \sqrt{2\pi} \quad (I. 7)$$

$$K_{II} = A_1 \sqrt{2\pi} \quad (I. 8)$$

On obtient:

$$\sigma_{rr} = r^{(-\frac{1}{2})} \left\{ \begin{aligned} & \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{5}{4}\right) \sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right) + \left(\frac{3}{4}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right] \\ & + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{5}{4}\right) \cos\left(-\frac{1}{2}\theta\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 9})$$

$$\sigma_{r\theta} = -\left(\frac{1}{2}\right)r^{(-\frac{1}{2})} \left\{ \begin{aligned} & \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cos\left(-\frac{1}{2}\theta\right) - \left(\frac{3}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right] \\ & + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 10})$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left(3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + K_{II} \left(-3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \right\} \quad (\text{I. 11})$$

K_I et K_{II} sont les **FIC** en mode I et II respectivement.

I.4. Facteur de forme [4] :

En général le FIC dépend de chargement appliqué de la géométrie et de la longueur de la fissure.

Il s'écrit sous la forme suivante :

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{I. 9})$$

Avec

Y : Facteur de forme (ou de géométrie) sans unité

σ : Chargement appliqué

a : Longueur de la fissure

Le facteur de forme est donné par : $Y = \frac{K}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ (I.10)

Chapitre II

Méthode de collocation de frontière et méthode des moindres carrés

II.1.Introduction :

Dans ce chapitre, on présente la méthode de collocation de frontière. Cette méthode aboutit à un système d'équation linéaire surdéterminé. Sa résolution doit se faire par la méthode des moindres carrés. Nous présentons donc également cette méthode.

II.2. La Méthode de collocation de frontière [5]:

La méthode de collocation de frontière est une méthode de calcul du facteur d'intensité de contrainte basée sur le développement des contraintes en série infinie.

L'idée générale est qu'étant donné les conditions aux limites en contraintes pour un problème, on exprime les contraintes en un nombre fini de positions sur la frontière, appelée points de collocation, à l'aide du développement des contraintes (équations (I-4), (I-5) et (I-6)).

La valeur de coefficient correspondant au terme $r^{-1/2}$ de l'expansion du champ de contraintes est le facteur d'intensité de contrainte.

II.2.1. Cas de l'élasticité plane :

Soit une section quelconque fissurée dont la frontière est soumise à un chargement connu.

Afin d'établir le système d'équations permettant de calculer K_I et K_{II} , on choisit C points de collocations sur la frontière (Fig. II.1)

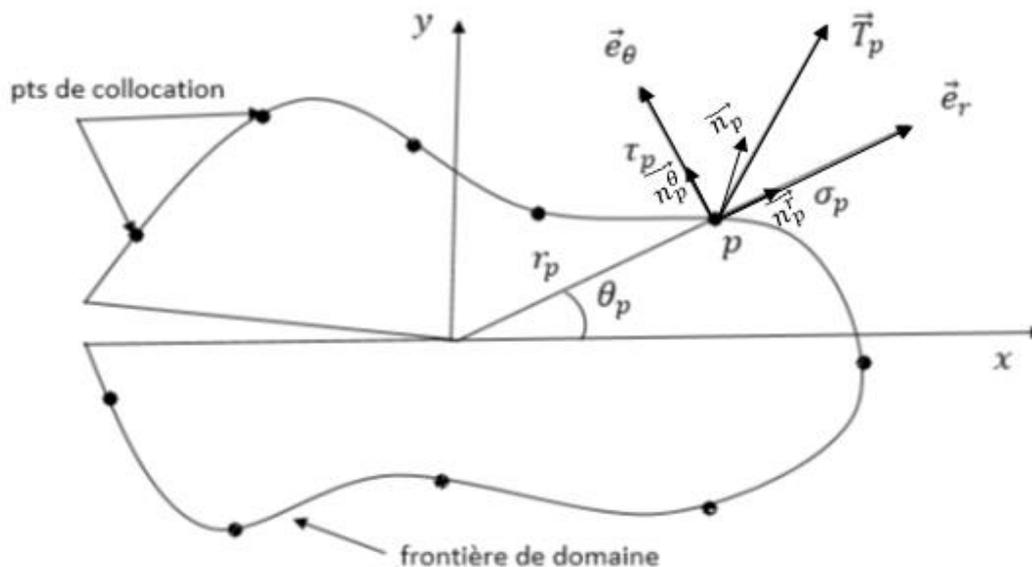


Figure II- 1 Exemple de points de collocation.

Sur la Figure II-1 :

- $\vec{T}_p(\sigma_p, \tau_p)$ représente le vecteur contrainte en p.
- $\vec{n}_p(n_p^r, n_p^\theta)$ représente la normale extérieure unitaire en p.
- (r_p, θ_p) représentent les coordonnées polaires de p.

Pour chaque point de collocation p, on a deux équations :

$$\sigma_{rr}(r_p, \theta_p)n_p^r + \sigma_{r\theta}(r_p, \theta_p)n_p^\theta = \sigma_p$$

$$\sigma_{r\theta}(r_p, \theta_p)n_p^r + \sigma_{\theta\theta}(r_p, \theta_p)n_p^\theta = \tau_p \quad \dots\dots\dots (II.1) \quad p=1 \text{ à } C$$

En utilisant (I.4), (I.5) et (I.6), on réécrit (II.1) de la manière suivante :

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \begin{aligned} &A_n [E_1(r_p, n, \theta_p)n_p^r + E_2(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] + B_n [F_1(r_p, n, \theta_p)n_p^r + F_2(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] + \\ &C_n [G_1(r_p, n, \theta_p)n_p^r + G_2(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] + D_n [H_1(r_p, n, \theta_p)n_p^r + H_2(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] \end{aligned} \right\} = \sigma_p$$

.....(II.2)

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \begin{aligned} &A_n [E_2(r_p, n, \theta_p)n_p^r + E_3(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] + B_n [F_2(r_p, n, \theta_p)n_p^r + F_3(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] + \\ &C_n [G_2(r_p, n, \theta_p)n_p^r + G_3(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] + D_n [H_2(r_p, n, \theta_p)n_p^r + H_3(r_p, n, \theta_p)n_p^\theta] \end{aligned} \right\} = \tau_p$$

.....(II.3) p=1 à C.

Le système (II.2)-(II.3) est un système de 2C équations à 4N-1 inconnues $A_1 \dots A_N, B_1 \dots B_N, C_1 \dots C_N$ et $D_1 \dots D_N$. Le système ne peut être résolu qu'en prenant C et N tels que $2C > 4N-1$. Le système obtenu est un système surdéterminé, il sera résolu par la méthode des moindres carrés. Les FIC K_I et K_{II} s'obtiennent par les relations (I.7) et (I.8).

Remarque :
 Dans la suite du travail, on prendra la valeur minimale pour C : $C=2N$.

II.3. La Méthode des moindres carrés [6]:

La méthode du maximum de vraisemblance et celle des moindres carrés sont les outils de la théorie des erreurs ou de l'estimation, utilisés tous les jours dans toutes les sciences d'observation. La théorie des erreurs a été développée pour résoudre trois problèmes :

- Combiner les erreurs pour choisir une valeur "juste milieu".
- Trouver la loi de densité de probabilité des erreurs.
- Choisir une démarche pour déterminer des quantités dans un système d'équations surdéterminé.

L'estimation du maximum de vraisemblance est une méthode statistique courante utilisée pour inférer les paramètres de la distribution de probabilité d'un échantillon de mesures donné. Par ailleurs, la recherche de la valeur la plus probable d'une quantité observée par diverses mesures donne le résultat suivant : la valeur la plus probable est telle que la somme des carrés des différences entre les observations et cette valeur est minimum. La première publication de la méthode des moindres carrés (destinée à déterminer des quantités dans un système d'équations surdéterminé) est due à Legendre en 1805 et Gauss en 1809.

II.3.1. Forme standard :

Définition : on appelle forme standard d'un problème de moindre carrés la donnée de :

La matrice $A = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m,1} & \cdots & v_{m,n} \end{pmatrix}$ de dimension $(m \times n, m > n)$.

La vectrice réponse $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

L'expression du critère : on cherche $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que :

$E(x) = \|Ax - b\|^2$ soit minimale.

II.3.2. Solution analytique :

Puisque $E(x)$ est strictement convexe, alors : $E(x)$ minimale $\Leftrightarrow E'(x) = 0$.

On cherche donc $x \in \mathbb{R}^n$ tel $E'(x) = 0$. Donc, les dérivées partielles par rapport à tous les paramètres du vecteur x doivent être nulles :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Une autre méthode est de prendre le système surdéterminé $Ax=b$, effectuer le produit à gauche par la matrice transposée A' de A :

$$A' Ax = A' b \quad (\text{II. 6})$$

Dans (II.6), la matrice $A'A$ est de dimension $(n \times n)$ et le vecteur $A'b$ est de dimension $(1 \times n)$. Le système ainsi obtenu sera résolu par les méthodes classiques.

Exemple :

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = 2 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} \quad (\text{II. 7})$$

(II.7) est un système surdéterminé de 3 équations à deux inconnues (x, y) qui ne peut être résolue d'une manière exacte. On va le résoudre approximativement par la méthode des moindres carrés.

On cherche une solution approchée (x, y) tel que l'erreur :

$$E(x,y) = (2x+3y-4)^2 + (3x-2y-2)^2 + (4x+5y-3)^2,$$

Soit minimale.

On annule les dérivées partielles par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.9})$$

On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 29x + 20y = 26 \\ 20x + 38y = 23 \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

Une autre manière d'obtenir (II.10) est de réécrire le système (II. 7) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.11})$$

On effectue le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On aboutit au même système que (II.10) :

$$\begin{pmatrix} 29 & 20 \\ 20 & 38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 23 \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

(II. 8) ou (II.12) sont résolus par les méthodes classique, la solution est donnée par :

$$x = \frac{264}{351}, \quad y = \frac{147}{702} \quad (\text{II.13})$$

En remplaçant dans (II.7) on trouve :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2.132 \\ 3x - 2y = 1.838 \\ 4x + 5y = 4.056 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Ces observe à partir de (II.14) que (II.13) n'est que approximation de (II.7).
Mais c'est la meilleure approximation possible au sens des moindres carrés

Chapitre III

Problèmes traités

III.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va calculer le facteur d'intensité de contrainte KI dans le cas d'une fissure centrale et non centrale dans une section elliptique. Pour le cas de la fissure centrale, nous calculons K_I pour plusieurs valeurs du rapport b/a (grand axe/petit axe) de l'ellipse. Pour le cas de la fissure non centrale, nous calculons K_I pour plusieurs longueurs de fissure. Nous déterminerons ensuite, pour les deux cas, les expressions du facteur de forme Y sous la forme d'une fonction polynomiale.

III.2. Cas d'une Fissure centrale:

On considère une section elliptique, avec a et b le grand axe et le petit axe respectivement. La section contient une fissure centrale de longueur a . La frontière de l'ellipse est soumise à un chargement normal uniforme T Figure (III-1). Dans toute la suite du chapitre, on prendra $a=1$ et $T = 1$. Les résultats seront sans dimensions.

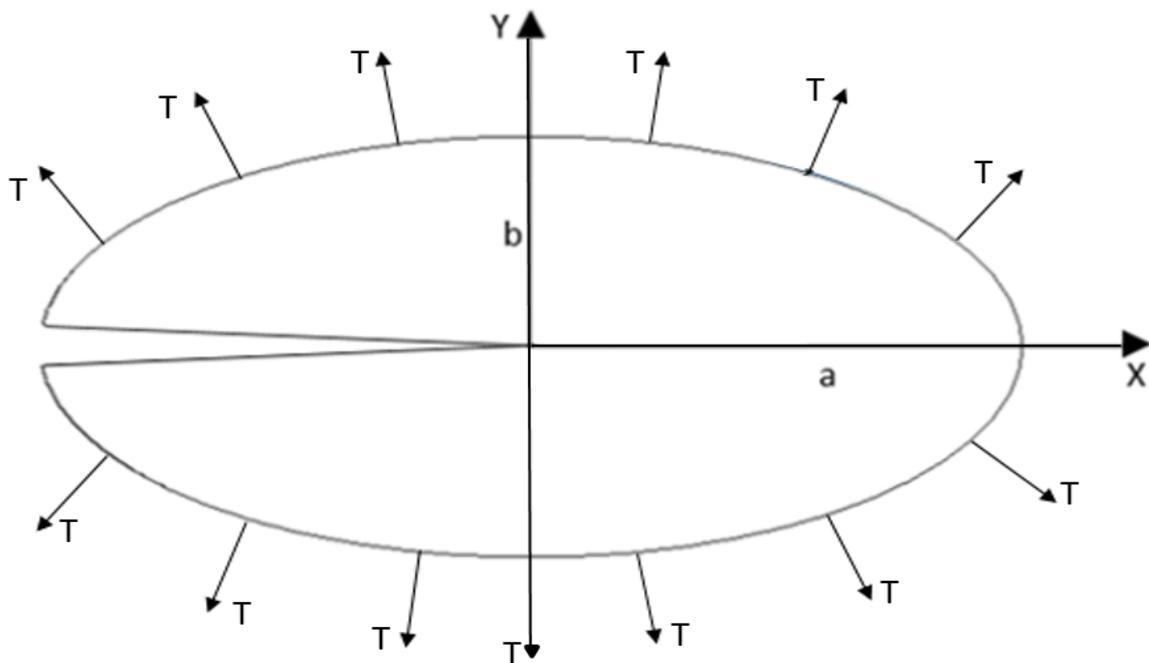


Figure III-1 : Fissure centrale sous chargement normal uniforme.

Nous considérons des points de collocation p répartis uniformément sur la frontière de l'ellipse (Figure III-2). L'angle θ_p sera donné par la formule suivante :

$$\theta_p = \frac{2 * \pi * p}{c+1} - \pi \quad p= 1 \text{ à } C. \quad (\text{III-1})$$

On observe dans (III-1) que $-\pi < \theta_p < \pi$. Les angles $-\pi$ et $+\pi$ sont évités car ce sont des points anguleux où la normale n'est pas définie.

La coordonnée radiale du point p est donnée par :

$$r_p = 1 / \sqrt{(\cos(\theta_p)/a)^2 + (\sin(\theta_p)/b)^2}. \quad (\text{III-2})$$

Les composantes radiales et tangentielles de la normale n^p sont données par :

$$n_r^p = \frac{f(r_p, \theta_p)}{\sqrt{f(r_p, \theta_p)^2 + g(r_p, \theta_p)^2}}, \quad n_\theta^p = \frac{g(r_p, \theta_p)}{\sqrt{f(r_p, \theta_p)^2 + g(r_p, \theta_p)^2}}, \quad (\text{III-3})$$

Avec :

$$f(r_p, \theta_p) = 2r_p \left(\frac{\cos(\theta_p)^2}{a^2} + \frac{\sin(\theta_p)^2}{b^2} \right), \quad g(r_p, \theta_p) = r_p \sin(2\theta_p) \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Les composantes radiale σ_p et tangentielle τ_p du vecteur contrainte en p sont données par :

$$\sigma_p = T n_r^p, \quad \tau_p = T n_\theta^p. \quad (\text{III-4})$$

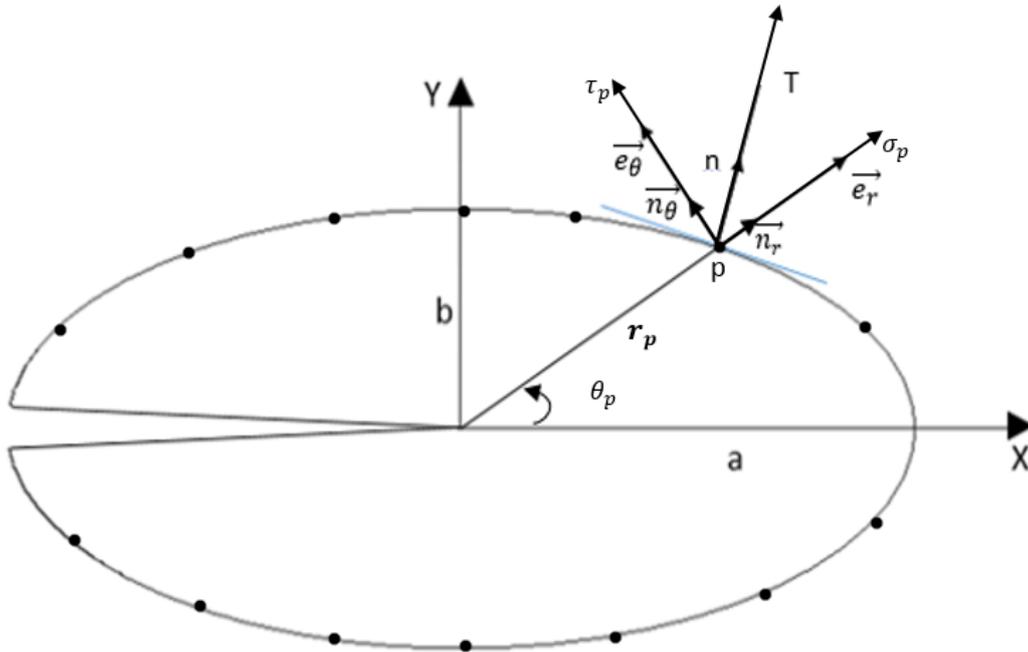


Figure III-2: Points de collocation.

Les expressions (III-1), (III-2), (III-3) et (III-4) sont injectées dans le système d'équations (II-2) et (II-3) du Chapitre II.

III.2.1 Résultats

Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'Annexe 1. Nous effectuons des calculs pour $b \in [0.6, 1.5]$. Pour chaque valeur, nous augmentons le nombre de points de collocation jusqu'à convergence du K_I . Les résultats détaillés pour chaque valeur de b sont présentés dans l'Annexe III.

Remarque

Pour $b < 0.6$ ou $b > 1.5$, les calculs sont instables et les résultats non précis.

Nous présentons dans le Tableau III-1 ci-dessous, les valeurs de K_I et du facteur de forme Y pour différentes valeurs du rapport b/a .

b/a	K_I	Y
0.6	7.5699	4.2709
0.7	6.7408	3.8030
0.8	6.2056	3.5011
0.9	5.8553	3.3035
1	5.6225	3.1721
1.1	5.4652	3.0834
1.2	5.3570	3.0224
1.3	5.2812	2.9796
1.4	5.2270	2.9490
1.5	5.1874	2.9267

Tableau III-1 : résultats de K_I et Y pour différentes valeurs de b/a .

Discussion des résultats

Nous remarquons que K_I et Y sont des fonctions décroissantes de b/a . Cela veut dire, que plus b augmente moins la fissure est dangereuse. Ce résultat est logique, car en augmentant b la structure devient plus large et donc plus résistante. On constate que la valeur obtenue pour $b=1$ (section circulaire) est la même que celle obtenue par Bouras et Bouza [12].

III-2-2 Détermination de l'expression analytique du facteur de forme :

Dans ce paragraphe, on recherche une expression analytique de Y en fonction de b/a . Nous choisissons la forme polynomiale utilisée par Benkaira [11]. Elle est donnée par :

$$Y(b/a) = \left[c_1 * (b/a)^{1/2} + c_2 * (b/a)^{3/2} + c_3 * (b/a)^{5/2} + c_4 * (b/a)^{7/2} + c_5 * (b/a)^{9/2} \right], \quad (\text{III-5})$$

où les coefficients $c_1 \dots c_5$ seront déterminés par indentification avec les résultats du Tableau (III-1).

On obtient le système surdéterminé de 9 équations à 5 inconnues suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 * 0.6^{\frac{1}{2}} + c_2 * 0.6^{\frac{3}{2}} + c_3 * 0.6^{\frac{5}{2}} + c_4 * 0.6^{\frac{7}{2}} + c_5 * 0.6^{\frac{9}{2}} = 4.2709 \\ c_1 * 0.7^{\frac{1}{2}} + c_2 * 0.7^{\frac{3}{2}} + c_3 * 0.7^{\frac{5}{2}} + c_4 * 0.7^{\frac{7}{2}} + c_5 * 0.7^{\frac{9}{2}} = 3.8030 \\ c_1 * 0.8^{\frac{1}{2}} + c_2 * 0.8^{\frac{3}{2}} + c_3 * 0.8^{\frac{5}{2}} + c_4 * 0.8^{\frac{7}{2}} + c_5 * 0.8^{\frac{9}{2}} = 3.5011 \\ c_1 * 0.9^{\frac{1}{2}} + c_2 * 0.9^{\frac{3}{2}} + c_3 * 0.9^{\frac{5}{2}} + c_4 * 0.9^{\frac{7}{2}} + c_5 * 0.9^{\frac{9}{2}} = 3.3035 \\ c_1 * 1^{\frac{1}{2}} + c_2 * 1^{\frac{3}{2}} + c_3 * 1^{\frac{5}{2}} + c_4 * 1^{\frac{7}{2}} + c_5 * 1^{\frac{9}{2}} = 3.1721 \\ c_1 * 1.1^{\frac{1}{2}} + c_2 * 1.1^{\frac{3}{2}} + c_3 * 1.1^{\frac{5}{2}} + c_4 * 1.1^{\frac{7}{2}} + c_5 * 1.1^{\frac{9}{2}} = 3.0834 \\ c_1 * 1.2^{\frac{1}{2}} + c_2 * 1.2^{\frac{3}{2}} + c_3 * 1.2^{\frac{5}{2}} + c_4 * 1.2^{\frac{7}{2}} + c_5 * 1.2^{\frac{9}{2}} = 3.0224 \\ c_1 * 1.3^{\frac{1}{2}} + c_2 * 1.3^{\frac{3}{2}} + c_3 * 1.3^{\frac{5}{2}} + c_4 * 1.3^{\frac{7}{2}} + c_5 * 1.3^{\frac{9}{2}} = 2.9796 \\ c_1 * 1.4^{\frac{1}{2}} + c_2 * 1.4^{\frac{3}{2}} + c_3 * 1.4^{\frac{5}{2}} + c_4 * 1.4^{\frac{7}{2}} + c_5 * 1.4^{\frac{9}{2}} = 2.9490 \\ c_1 * 1.5^{\frac{1}{2}} + c_2 * 1.5^{\frac{3}{2}} + c_3 * 1.5^{\frac{5}{2}} + c_4 * 1.5^{\frac{7}{2}} + c_5 * 1.5^{\frac{9}{2}} = 2.9267 \end{array} \right.$$

Le système est résolu par la méthode des moindres carrés, le programme matlab correspondant est présenté dans l'Annexe II. Nous obtenons finalement l'expression suivante :

Y(b/a)=

$$[24.5109 * (\frac{b}{a})^{1/2} - 62.0553 * (\frac{b}{a})^{3/2} + 69.8218 * (\frac{b}{a})^{5/2} - 36.2877 * (\frac{b}{a})^{7/2} + 7.1776 * (\frac{b}{a})^{9/2}]$$

(III-9)

A titre de vérification, nous recalculons Y pour les valeurs de b/a du Tableau III-1 avec l'expression (III-9), et nous comparons avec les valeurs de Y du même Tableau.

b/a	Y (Tableau III-1)	Y (III-9)	Erreur %
0.6	4.2709	4.2647	0.14
0.7	3.8030	3.8165	0.53
0.8	3.5011	3.5001	0.02
0.9	3.3035	3.2941	0.28
1	3.1721	3.1673	0.15
1.1	3.0834	3.0879	0.14
1.2	3.0224	3.0303	0.26
1.3	2.9796	2.9801	0.02
« 1.4	2.9490	2.9394	0.24
1.5	2.9267	2.9303	0.12

Tableau (III-2) : Comparaison entre l'expression (III-9) et le Tableau III-1.

Discussion

L'erreur est très petite cela veut dire que l'expression (III-9) est valide.

II.2.3 Confirmation de la validité de l'expression (III-9)

Pour plus de confirmation, nous recalculons Y avec l'expression (III-9) pour d'autres valeurs de b/a, et nous comparons avec les valeurs obtenues en résolvant le système (II-2)-(II-3). Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau III-3.

b/a	Y ((II-2)-(II-3))	Y (expression (III-9))	Erreur %
0.65	4.0112	4.0234	0.30
0.75	3.6359	3.6428	0.18
0.85	3.3921	3.3852	0.31
0.95	3.2313	3.2228	0.26
1.05	3.1235	3.1235	0.00
1.15	3.0501	3.0576	0.24
1.25	2.9991	3.0046	0.18
1.35	2.9631	2.9577	0.18
1.45	2.9370	2.9286	0.28

Tableau (III-3) : comparaison entre l'expression Y avec les résultats obtenus par MATLAB

Discussion

L'erreur étant très faible, le Tableau (III-3) est une confirmation supplémentaire de l'expression (III-9).

III.3 Cas d'une Fissure non centrale :

Nous considérons le cas d'une fissure non centrale de longueur f dans une section elliptique. La frontière de la section est soumise à un chargement normal uniforme (Figure III-3).

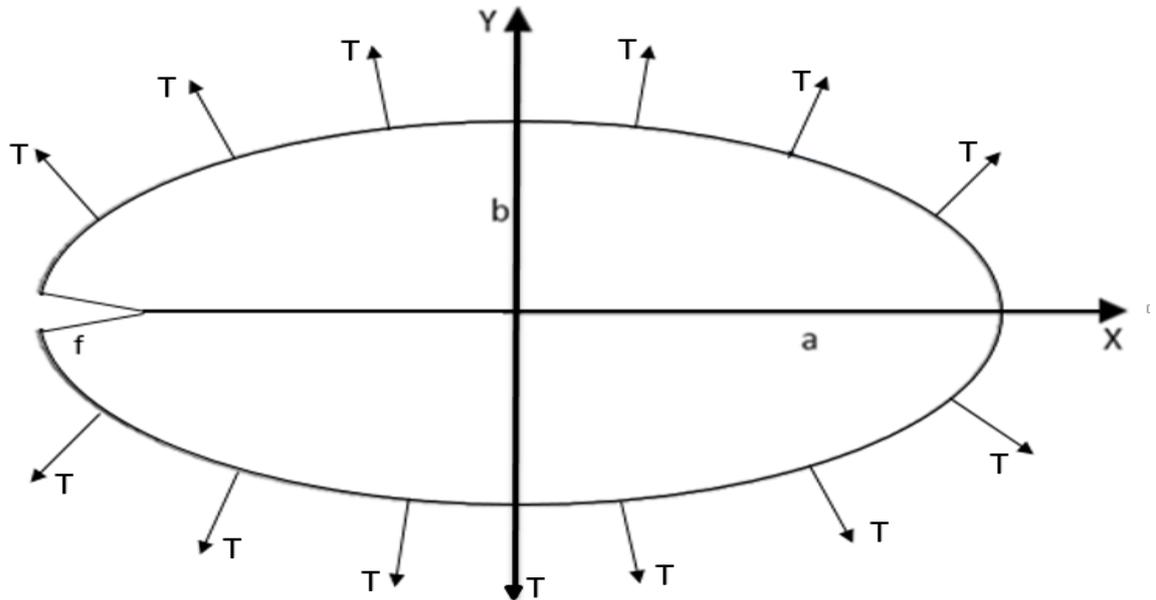


Figure III-3 : Section elliptique avec une fissure non centrale sous chargement normal uniforme.

Nous considérons des points de collocation p répartis uniformément sur la frontière de l'ellipse (Figure III-4). L'angle θ_p^0 sera donné par la formule suivante :

$$\theta_p^0 = \frac{2\pi p}{C+1} - \pi \quad p = 1 \text{ à } C.$$

Le rayon de l'ellipse R_p en p est donné par :

$$R_p = 1 / \sqrt{(\cos(\theta_p^0)/a)^2 + (\sin(\theta_p^0)/b)^2}.$$

La coordonnée radiale du point p est donnée par :

$$r_p = \sqrt{a - f + r * \cos(\theta_p^0)^2 + r * \sin(\theta_p^0)^2} \quad (\text{III-10})$$

L'angle θ_p est calculé par l'expression suivante :

$$\theta_p = \text{atan2}(R_p \sin \theta_p^0, a - f + R_p \cos \theta_p^0). \quad (\text{III-11})$$

Les composantes radiales et tangentielles de la normale \mathbf{n}^p sont données par :

$$n_r^p = \frac{ff(r_p, \theta_p)}{\sqrt{ff(r_p, \theta_p)^2 + gg(r_p, \theta_p)^2}} \quad n_\theta^p = \frac{gg(r_p, \theta_p)}{\sqrt{ff(r_p, \theta_p)^2 + gg(r_p, \theta_p)^2}} \quad (\text{III-12})$$

avec :

$$ff(r_p, \theta_p) = \frac{2\cos(\theta_p)(r_p\cos(\theta_p) - a + f)}{a^2} + \frac{2r_p\sin^2(\theta_p)}{b^2}$$

$$gg(r_p, \theta_p) = \frac{-2\sin\theta_p(r_p\cos\theta_p - a + f)}{a^2} + \frac{r_p\sin^2\theta_p}{b^2}$$

Les composantes radiale σ_p et tangentielle τ_p du vecteur contrainte en p sont données par :

$$\sigma_p = Tn_r^p, \quad \tau_p = Tn_\theta^p. \quad (\text{III-13})$$

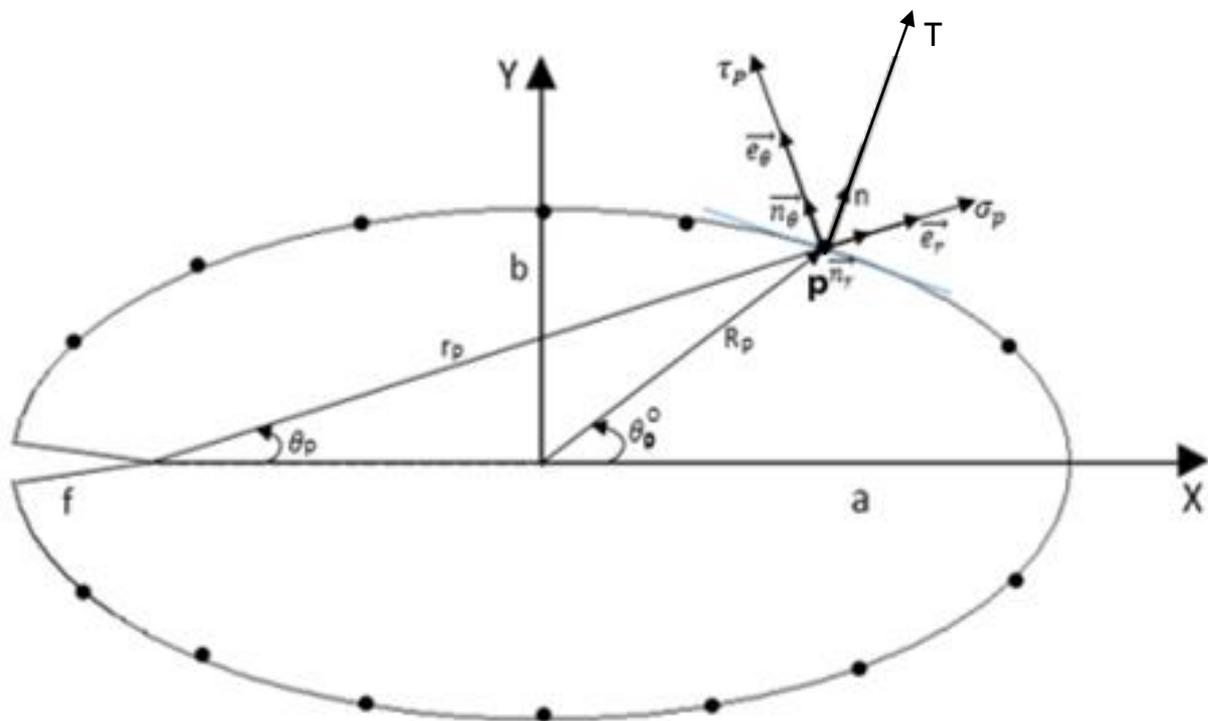


Figure (III-4): Points de collocation

Les expressions (III-10), (III-11), (III-12) et (III-13) sont injectées dans le système d'équations (II-2) et (II-3) du Chapitre II.

III-3.1 Résultats

Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'Annexe 1. Nous effectuons des calculs pour $a=1, b=1.2$ et la fissure $f \in [0.7, 1.6]$. Pour chaque valeur de f , nous augmentons le nombre de points de collocation jusqu'à convergence du K_I . Les résultats détaillés sont présentés dans l'Annexe IV.

Remarque

Pour $f < 0.7$ ou $f > 1.6$, les calculs sont instables et les résultats non précis.

Nous présentons dans le Tableau III-4 ci-dessous, les valeurs de K_I et du facteur de forme Y pour différentes valeurs de f .

f	K_I	Y
0.7	2.9926	2.0180
0.8	3.6155	2.2806
0.9	4.3852	2.6079
1	5.3571	3.0224
1.1	6.6140	3.5579
1.2	8.2877	4.2684
1.3	10.5971	5.2437
1.4	13.9332	6.6437
1.5	19.0578	8.7791
1.6	27.6385	12.3276

Tableau (III-4) : résultats pour différentes valeurs de f/a

Discussion des résultats

Nous remarquons que K_I et Y sont des fonctions croissantes de la longueur de la fissure f .

III.3.2 Détermination de l'expression analytique du facteur de forme :

Dans ce paragraphe, on recherche une expression analytique de Y en fonction de f . Nous choisissons la forme polynomiale suivante utilisée par benkrira [11] :

$$Y(f) = \left[d1(f)^{1/2} + d2(f)^{3/2} + d3(f)^{5/2} + d4(f)^{7/2} + d5(f)^{9/2} \right] \quad \text{(III-13)}$$

Où les coefficients $d_1 \dots d_5$ seront déterminés par indentification avec les résultats du Tableau III-4. On obtient le système surdéterminé de 9 équations à 5 inconnues suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 * 0.7^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.7^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.7^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.7^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.7^{\frac{9}{2}} = 2.0180 \\ d_1 * 0.8^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.8^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.8^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.8^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.8^{\frac{9}{2}} = 2.2806 \\ d_1 * 0.9^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.9^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.9^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.9^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.9^{\frac{9}{2}} = 2.6079 \\ d_1 * 1^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1^{\frac{9}{2}} = 3.0224 \\ d_1 * 1.1^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.1^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.1^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.1^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.1^{\frac{9}{2}} = 3.5579 \\ d_1 * 1.2^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.2^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.2^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.2^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.2^{\frac{9}{2}} = 4.2684 \\ d_1 * 1.3^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.3^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.3^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.3^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.3^{\frac{9}{2}} = 5.2437 \\ d_1 * 1.4^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.4^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.4^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.4^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.4^{\frac{9}{2}} = 6.6437 \\ d_1 * 1.5^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.5^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.5^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.5^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.5^{\frac{9}{2}} = 8.7791 \\ d_1 * 1.6^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.6^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.6^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.6^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.6^{\frac{9}{2}} = 12.3276 \end{array} \right.$$

Le système est résolu par la méthode des moindres carrés, le programme matlab correspondant est présenté dans l'Annexe II. Nous obtenons finalement l'expression suivante :

$$Y(f) = [26.9393 * f^{\frac{1}{2}} - 101.9384 * f^{\frac{3}{2}} + 154.8788 * f^{\frac{5}{2}} - 102.9052 * f^{\frac{7}{2}} + 26.0773 * f^{\frac{9}{2}}] \text{ (III - 15)}$$

A titre de vérification, nous recalculons Y pour les valeurs de f du Tableau III-4 avec (III-15), et nous comparons avec les valeurs de Y du même Tableau.

f	Y (Tableau III-4)	Y (III-15)	Erreur %
0.6	2.0180	2.0395	1.05
0.7	2.2806	2.2404	1.76
0.8	2.6079	2.5975	0.39
0.9	3.0224	3.0518	0.96
1	3.5579	3.5905	0.90
1.1	4.2684	4.2639	0.10
1.2	5.2437	5.2006	0.82
1.3	6.6437	6.6197	0.36
1.4	8.7791	8.8430	0.72
1.5	12.3276	12.3052	0.18

Tableau (III-5) : comparaison entre l'expression Y avec les résultats obtenus par MATLAB

Discussion

L'erreur est très petite cela veut dire que l'expression (III-9) est valide.

III.3.3 Confirmation de la validité de l'expression (III-15)

Pour plus de confirmation, nous recalculons Y avec l'expression (III-15) pour d'autres valeurs de f et nous comparons avec les valeurs obtenues en résolvant le système (II-2)-(II-3). Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau III-6.

f	Y ((II-2)-(II-3))	Y (expression (III-15))	Erreur %
0.65	2.1423	2.1155	1.25
0.75	2.4350	2.4040	1.27
0.85	2.8026	2.8146	0.42
0.95	3.2722	3.3091	1.11
1.05	3.8868	3.9043	0.45
1.15	4.7152	4.6879	0.57
1.25	5.8762	5.8323	0.74
1.35	7.5900	7.6064	0.21
1.45	10.3081	10.3874	0.76

Tableau (III-6) : comparaison entre l'expression Y avec les résultats obtenus par MATLAB

Discussion

L'erreur étant très faible, le Tableau (III-6) est une confirmation supplémentaire de l'expression (III-15).

Conclusion générale :

Ce travail est une application de la méthode de collocation de frontière en élasticité plane au cas d'une section elliptique fissurée sous chargement normal uniforme. Deux cas ont été considérés : fissure centrale et non centrale. Les principaux résultats de ce travail sont les suivants :

- Dans le cas de la fissure centrale, les facteurs de forme et facteurs d'intensité de contrainte ont été calculés pour $a = 1$ et $b \in [0.6, 1.5]$. Une expression analytique du facteur de forme en fonction de b/a a été déduite et confirmée. Les calculs sont instables pour $b < 0.6$ ou $b > 1.5$.
- Dans le cas de la fissure non centrale, les facteurs de forme et facteurs d'intensité de contrainte ont été calculés pour $a = 1$, $b = 1.2$ et $f \in [0.7, 1.6]$. Une expression analytique du facteur de forme en fonction de f a été déduite et confirmée. Les calculs sont instables pour $f < 0.7$ ou $f > 1.6$.

Le principal problème rencontré est l'instabilité des calculs pour certaines valeurs de b ou de f . Cette instabilité est probablement due à la méthode numérique utilisée pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. En effet, nous avons utilisé la méthode directe. L'utilisation d'autres méthodes de résolution afin d'éliminer ce problème fera l'objet d'un prochain travail.

Référence

- [1] Saïd Hariri, Mansour Afzali & Haïdar Jaffal « NOCIVITE DES DEFAUTS ET PROPAGATION DE FISSURES DANS LES EQUIPEMENTS SOUS PRESSION ». Ecole des Mines de Douai 2007
- [2] Pierre-Olivier Bouchard- CONTRIBUTION A LA MODELISATION NUMERIQUE EN MECANIQUE DE LA RUPTURE ET STRUCTURES MULTIMATERIAUX -thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris Spécialité « Sciences et Génie des Matériaux » (20 septembre 2000).
- [3] Mr Ahmed BENHAMOUDA UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR « ETUDE DU COMPORTEMENT DES FISSURES DANS LES TUBES SOUS PRESSION INTERNE » mémoire de magister En Génie Mécanique (2010).
- [4] cours Mr H.Ferdjani « mécanique de la rupture » Université Saad Dahleb Blida 01 (2016).
- [5] Alan T.Zehnde,ph.d "lecture notes on fracture mechanics "Department of Theoretical and Applied Mechanics Cornell University, Ithaca, NY 14853,(2007).
- [6] Tony Bourdier « Mathématiques Numériques» Ecole Supérieure d'informatique et applications de Lorraine (ESIAL) 2007-2008.
- [7] Sofiane BENTTALAH et Wahid IZA « Exemple de calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode III avec la méthode de collocation de frontière » mémoire d'ingénieur d'état en génie mécanique ECOLE MILITAIRE POLYTECHNIQUE (2015)
- [8] Serir Khair-Eddine « Exemple de calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode de collocation de frontière en mode III » mémoire de master UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA (2011/2012).
- [9] MEZOUANI Yassine « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode III » mémoire de master UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA (2013/2014).
- [10] F.B.Leblood « Mécanique de la rupture fragile et ductile » Hermes science publications (2003)
- [11] Benkrira Sara « Calcul du facteur d'intensité de contrainte pour des sections fissurées circulaire et elliptique avec ABAQUS » mémoire de master, université Saad Dahleb Blida (2017/2018).
- [12] Bouza Mohamed, Bouras Zekri « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte mode I » mémoire de master, Université Saad Dahleb Blida (2016/2017).

Annexe 1

**Les programmes de calcul
du FIC dans une section
elliptique fissurée**

Programme pour la fissure centrale :

```
clear all
clc
%fissure centrale
%converge pour a = 1 et 0,6<=b<=1,5
T=1;a=1;b=1.5;
Nmax=input('nombre des termes maximal = ');
for p=1:Nmax %nombre de termes
C=2*p; % nombre de points de collocation
for N=1:p %calculer les facteurs des termes du développement
for k=1:C
    teta=(2*pi*k)/(C+1)-pi;
    r=1/sqrt((cos(teta)/a)^2+(sin(teta)/b)^2);
    fr=2*r*((cos(teta)/a)^2+(sin(teta)/b)^2);
    ft=r*sin(2*teta)*(-1/a^2+1/b^2);
    gr=sqrt(fr^2+ft^2);
    nr=fr/gr;
    nt=ft/gr;
    E1=-r^(N - 3/2)*(sin(teta*(N - 3/2))*(N^2 - 4*N + 7/4) - sin(teta*(N + 1/2)) *(N^2 -
1/4));
    F1=-r^(N - 3/2)*(cos(teta*(N - 3/2))*(N^2 - 4*N + 7/4) - cos(teta*(N + 1/2)) *(N -
1/2)*(N - 3/2));
    G1=r^(N - 1)*(sin(teta*(N - 1))*(3*N - N^2) + N*sin(teta*(N + 1))*(N - 1));
    H1=r^(N - 1)*(cos(teta*(N - 1))*(3*N - N^2) + N*cos(teta*(N + 1))*(N + 1));
    E2=r^(N - 3/2)*(cos(teta*(N + 1/2))*(N + 1/2)-cos(teta*(N - 3/2))*(N - 3/2))*(N - 1/2);
    F2=-r^(N - 3/2)*(sin(teta*(N + 1/2))-sin(teta*(N - 3/2))) *(N - 1/2)*(N - 3/2);
    G2=-N*r^(N - 1)*(cos(teta*(N - 1)) - cos(teta*(N + 1))) *(N - 1);
    H2=N*r^(N - 1)*(sin(teta*(N - 1))*(N - 1) - sin(teta*(N + 1))*(N + 1));
    E3=(N^2-1/4)*r^(N-3/2)*(sin(teta*(N - 3/2))-sin(teta*(N + 1/2)));
    F3=(N^2-1/4)*r^(N-3/2)*(cos(teta*(N - 3/2))-(N-3/2)/(N+1/2)*cos(teta*(N + 1/2)));
    G3=N*(N+1)*r^(N - 1)*(sin(teta*(N - 1))-(N-1)/(N+1)*sin(teta*(N + 1)));
    H3=N*(N+1)*r^(N - 1)*(cos(teta*(N - 1))-cos(teta*(N + 1)));
    %s1:coefs de sigma(rr)
    A1(k,N)=E1*nr+E2*nt; %coef de An
    B1(k,N)=F1*nr+F2*nt; %coef de Bn
    C1(k,N)=G1*nr+G2*nt; %coef de Cn
    D1(k,N)=H1*nr+H2*nt; %coef de Dn %s2:coifs de sigma(ro)
    A2(k,N)=E2*nr+E3*nt; %coef de An
    B2(k,N)=F2*nr+F3*nt; %coef de Bn
    C2(k,N)=G2*nr+G3*nt; %coef de Cn
    D2(k,N)=H2*nr+H3*nt; %coef de Dn
    FF1(k)=T*nr;
    FF2(k)=T*nt;
end
end
```

```

S=[A1 B1 C1 D1;A2 B2 C2 D2];
F=[FF1';FF2'];
M=[S(:,1:2*p),S(:,2*p+2:4*p)] ;%la matrice sans la colonne nulle
%moindre carre
L=M'*M;
G=M'*F;
%resoudre par la methode directe
H=inv(L)*G;
%affichage vecteur des solutions
KI(p)=H(p+1)*sqrt(2*pi);
KII(p)=H(1)*sqrt(2*pi);
Y(p)=KI(p)/(T*sqrt(a*pi));
end
KI
Y
p=1:Nmax;
figure
plot(p,Y(p),'b*')
xlabel('nombre des termes "N"')
ylabel('Facteur de forme "Y" ')

```

Programme pour fissure non centrale :

```
clear all
clc
T=1; a=1;b=1.2;
Nmax=input( 'nombre de termes maximal= ' );
%converge pour 0.7<=f<=1.6
f=input( 'donne la longueur de la fissure f= ' );
for p=1:Nmax
C=2*p; % nombre de collocation
for N=1:p %calculer les facteurs des termes
for k=1:C
teta0=2*pi*k/(C+1)-pi ;
R=1/sqrt((cos(teta0)/a)^2+(sin(teta0)/b)^2);
x=R*cos(teta0)+a-f; y=R*sin (teta0);
r=sqrt (power(x, 2)+power (y, 2)); teta=atan2 (y, x);
fr=2*cos(teta)*(r*cos(teta)-a+f)/a^2+2*r*(sin(teta)/b)^2;
ft=-2*sin(teta)*(r*cos(teta)-a+f)/a^2+r*sin(2*teta)/b^2;
grad=sqrt(fr^2+ft^2);
nr=fr/grad;nt=ft/grad;
E1=-r^(N - 3/2)*(sin(teta*(N - 3/2))^(N^2 - 4*N + 7/4) - sin(teta*(N +1/2)) *(N^2 -
1/4));
F1=-r^(N - 3/2)*(cos(teta*(N - 3/2))^(N^2 - 4*N + 7/4) - cos(teta*(N + 1/2)) *(N -
1/2)*(N - 3/2));
G1=r^(N - 1)*(sin(teta*(N - 1))^(3*N - N^2) + N*sin(teta*(N + 1))*(N - 1));
H1=r^(N - 1)*(cos(teta*(N - 1))^(3*N - N^2) + N*cos(teta*(N + 1))*(N + 1));
E2=r^(N - 3/2)*(cos(teta*(N + 1/2))^(N + 1/2)-cos(teta*(N - 3/2))^(N - 3/2))^(N - 1/2);
F2=-r^(N - 3/2)*(sin(teta*(N +1/2))-sin(teta*(N-3/2))) *(N - 1/2)*(N - 3/2);
G2=-N*r^(N - 1)*(cos(teta*(N - 1)) - cos(teta*(N +1))) *(N - 1);
H2=N*r^(N - 1)*(sin(teta*(N - 1))*(N - 1) - sin(teta*(N + 1))*(N + 1));
E3=(N^2-1/4)*r^(N-3/2)*(sin(teta*(N - 3/2))-sin(teta*(N + 1/2)));
F3=(N^2-1/4)*r^(N-3/2)*(cos(teta*(N - 3/2))-cos(teta*(N + 1/2)))/(N+1/2)*cos(teta*(N + 1/2));
G3=N*(N+1)*r^(N - 1)*(sin(teta*(N - 1))-(N-1)/(N+1)*sin(teta*(N + 1)));
H3=N*(N+1)*r^(N - 1)*(cos(teta*(N - 1))-cos(teta*(N + 1)));
%sigma1:sigma(rr)
A1(k,N)=E1*nr+E2*nt; %coef de An
B1(k,N)=F1*nr+F2*nt; %coef de Bn
C1(k,N)=G1*nr+G2*nt; %coef de Cn
D1(k,N)=H1*nr+H2*nt; %coef de Dn %s2:coifs de sigma(ro)
A2(k,N)=E2*nr+E3*nt; %coef de An
B2(k,N)=F2*nr+F3*nt; %coef de Bn
C2(k,N)=G2*nr+G3*nt; %coef de Cn
D2(k,N)=H2*nr+H3*nt; %coef de Dn
FF1(k)=T*nr;
FF2(k)=T*nt;
end
end
```

```

S=[A1 B1 C1 D1;A2 B2 C2 D2] ;%matrice des coefs
F=[FF1';FF2'] ;%vecteur des contraintes
M=[S(:,1:2*p),S(:,2*p+2:4*p)];%la matrice sans la colonne nulle
%moindre carre
L=M'*M;
G=M'*F;
%résoudre par la méthode directe
H=inv(L)*G;
KI(p)=H(p+1)*sqrt(2*pi); KII(p)=H(1)*sqrt(2*pi);
end
KI
p=1:Nmax;
figure
plot(p,KI(p),'b*')
xlabel('nombre des termes "N"')
ylabel('Facteur de forme "Y" ')

```

Annexe 2

Les programmes pour les expressions du facteur de forme

Programme de facteur de forme pour la fissure centrale

```
clear all
clc
F=[4.2709;3.8030;3.5011;3.3035;3.1721;3.0834;3.0224;2.9796;
2.9490;2.9267];
M=[0.6^0.5 0.6^1.5 0.6^2.5 0.6^3.5 0.6^4.5;
0.7^0.5 0.7^1.5 0.7^2.5 0.7^3.5 0.7^4.5;
0.8^0.5 0.8^1.5 0.8^2.5 0.8^3.5 0.8^4.5;
0.9^0.5 0.9^1.5 0.9^2.5 0.9^3.5 0.9^4.5;
1^0.5 1^1.5 1^2.5 1^3.5 1^4.5;
1.1^0.5 1.1^1.5 1.1^2.5 1.1^3.5 1.1^4.5;
1.2^0.5 1.2^1.5 1.2^2.5 1.2^3.5 1.2^4.5;
1.3^0.5 1.3^1.5 1.3^2.5 1.3^3.5 1.3^4.5;
1.4^0.5 1.4^1.5 1.4^2.5 1.4^3.5 1.4^4.5;
1.5^0.5 1.5^1.5 1.5^2.5 1.5^3.5 1.5^4.5];
%moindre carre
D=M';
L=D*M;
G=D*F;
%resoudre par la methode directe
A=[L G];
n=size(A,1);
for k=1:n-1 ;
for i=k+1:n ;
w=A(i,k)/A(k,k);
for j=k:n+1;
A(i,j)=A(i,j)-w*A(k,j);
end
end
end
A ;
for i=n:-1:1 ;
s=0;
for j=i+1:n ;
s=s+A(i,j)*x(j);
end
x(i)=((A(i,n+1)-s)/A(i,i) );
end
H=x'

%vecteur du facteur de forme
a=input ('a=')
y=+24.5109*(a)^0.5-62.0553*(a)^1.5+69.8218*(a)^2.5-
36.2877*(a)^3.5+7.1776*(a)^4.5
```

Programme de facteur de forme pour la fissure non centrale

```
clear all
clc
F=[2.0180;2.2806;2.6079;3.0224;3.5579;4.2684;5.2437;6.6437;8.7
791;12.3276];
M=[0.7^0.5 0.7^1.5 0.7^2.5 0.7^3.5 0.7^4.5;
0.8^0.5 0.8^1.5 0.8^2.5 0.8^3.5 0.8^4.5;
0.9^0.5 0.9^1.5 0.9^2.5 0.9^3.5 0.9^4.5;
1^0.5 1^1.5 1^2.5 1^3.5 1^4.5;
1.1^0.5 1.1^1.5 1.1^2.5 1.1^3.5 1.1^4.5;
1.2^0.5 1.2^1.5 1.2^2.5 1.2^3.5 1.2^4.5;
1.3^0.5 1.3^1.5 1.3^2.5 1.3^3.5 1.3^4.5;
1.4^0.5 1.4^1.5 1.4^2.5 1.4^3.5 1.4^4.5;
1.5^0.5 1.5^1.5 1.5^2.5 1.5^3.5 1.5^4.5;
1.6^0.5 1.6^1.5 1.6^2.5 1.6^3.5 1.6^4.5];
%moindre carre
D=M';
L=D*M;
G=D*F;
%resoudre par la methode directe
A=[L G];
n=size(A,1);
for k=1:n-1 ;
for i=k+1:n ;
w=A(i,k)/A(k,k);
for j=k:n+1;
A(i,j)=A(i,j)-w*A(k,j);
end
end
end
A ;
for i=n:-1:1 ;
s=0;
for j=i+1:n ;
s=s+A(i,j)*x(j);
end
x(i)=((A(i,n+1)-s)/A(i,i) );
end
H=x'
%vecteur du facteur de forme
a=input('a')
y= 26.9393*(a)^0.5-101.9384*(a)^1.5+154.8788*(a)^2.5-
102.9052*(a)^3.5+26.0773*(a)^4.5
```

Annexe 3

**Résultats pour le cas d'une fissure
centrale**

Résultats pour $b/a=0.6$

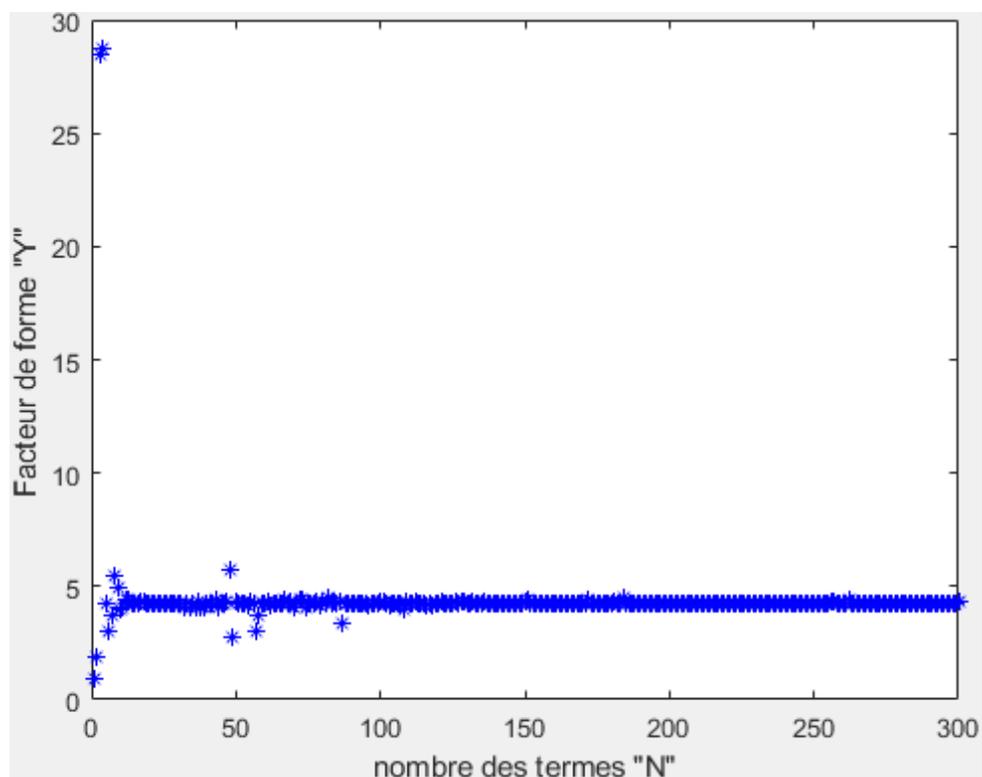


Figure A3-1 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.6$)

N	Y	N	Y
1	0.8808	55	4.1722
2	1.8579	95	4.2132
3	28.4498	133	4.2718
4	28.6938	180	4.2677
5	4.2386	207	4.2710
6	2.9994	230	4.2631
7	3.7068	257	4.2911
8	5.4561	277	4.2709
9	4.9444	286	4.2709
10	3.9817	288	4.2709

Tableau A3-1 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=0.7$

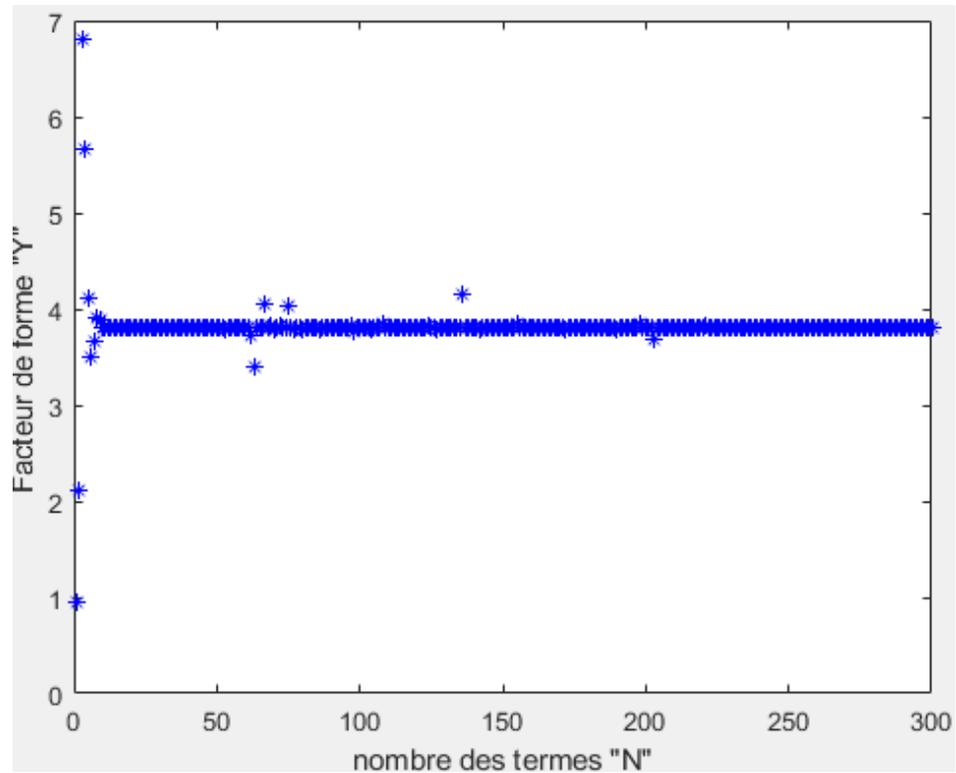


Figure A3-2 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.7$)

N	Y	N	Y
1	0.9424	56	3.8022
2	2.1148	81	4.0403
3	6.7977	127	3.7794
4	5.6626	191	3.8024
5	4.1034	212	3.8029
6	3.4969	227	3.8024
7	3.6704	141	3.8053
8	3.9173	283	3.8030
9	3.8797	291	3.8030
10	3.8056	295	3.8030

Tableau A3-2 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=0.8$

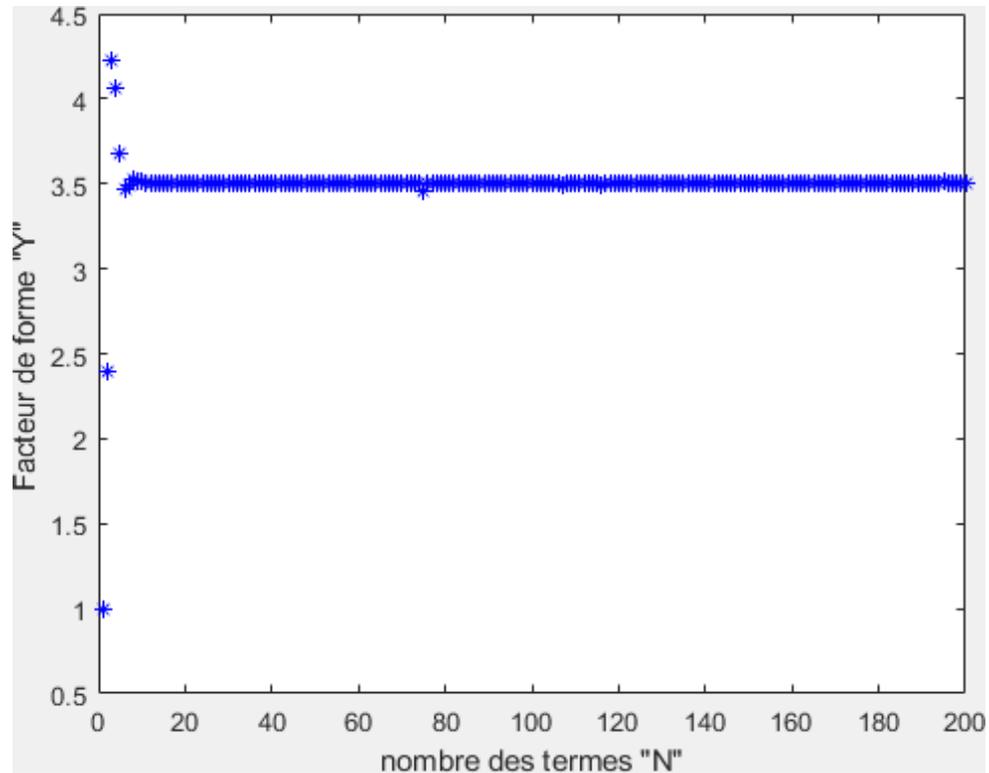


Figure A3-3 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.8$)

N	Y	N	Y
1	0.9970	20	3.5023
2	2.3896	55	3.5011
3	4.2275	150	3.5012
4	4.0607	151	3.5009
5	3.6774	160	3.5015
6	3.4730	166	3.5005
7	3.4957	169	3.5011
8	3.5224	192	3.5011
9	3.5171	196	3.5011
10	3.5104	197	3.5011

Tableau A3-3 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=0.9$

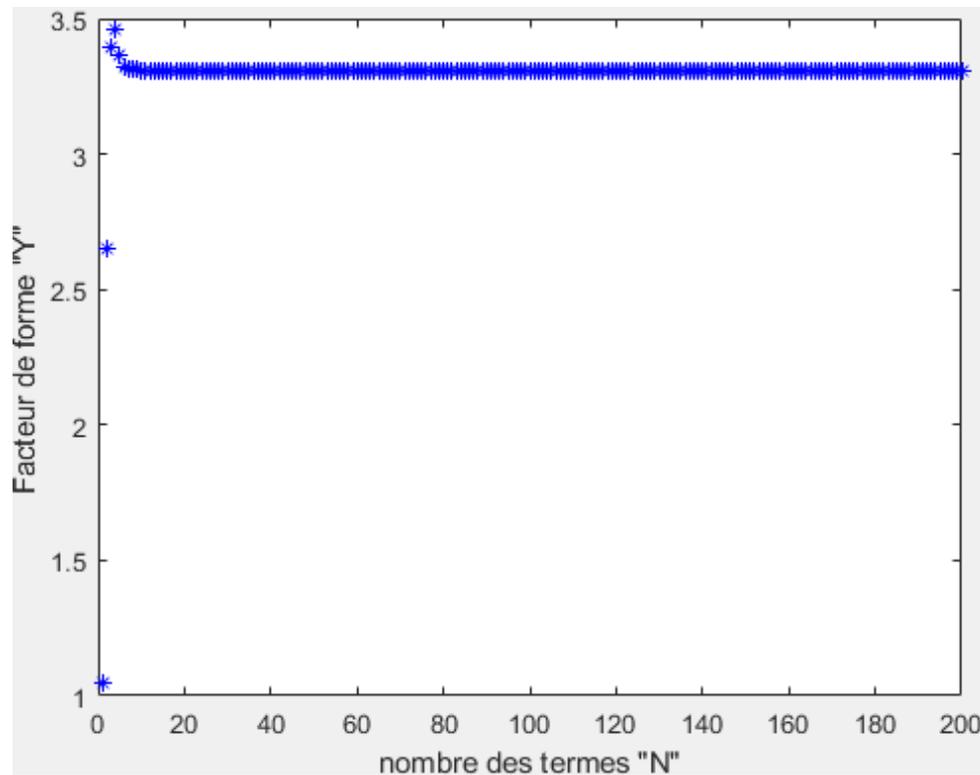


Figure A3-4 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=0.9$)

N	Y	N	Y
1	1.0454	11	3.3082
2	2.6476	12	3.3072
3	3.3938	13	3.3065
4	3.4624	20	3.3044
5	3.3653	100	3.3035
6	3.3198	133	3.3035
7	3.3157	145	3.3035
8	3.3137	169	3.3035
9	3.3113	198	3.3035
10	3.3095	197	3.3035

Tableau A3-4 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=1$

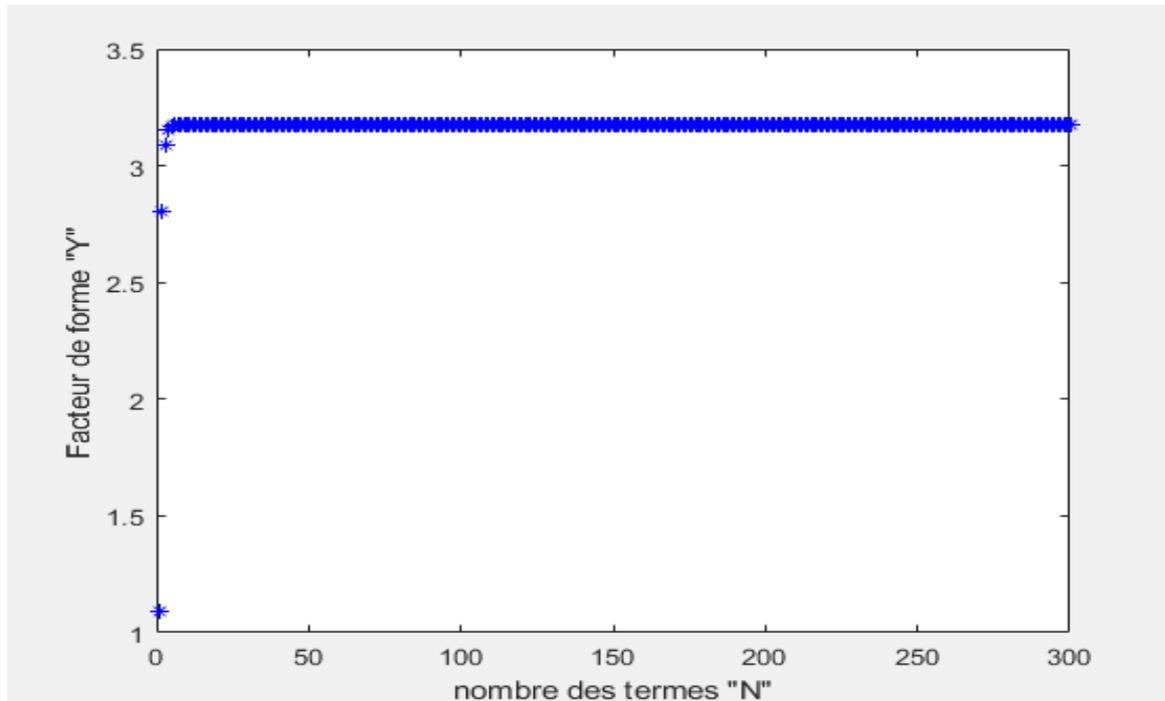


Figure A3-5 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1$)

N	Y	N	Y
1	1.0887	11	3.1750
2	2.8060	12	3.1746
3	3.0892	20	3.1729
4	3.1539	55	3.1722
5	3.1710	57	3.1722
6	3.1754	85	3.1721
7	3.1763	97	3.1721
8	3.1762	150	3.1721
9	3.1758	199	3.1721
10	3.1754	200	3.1721

Tableau A3-5 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=1.1$

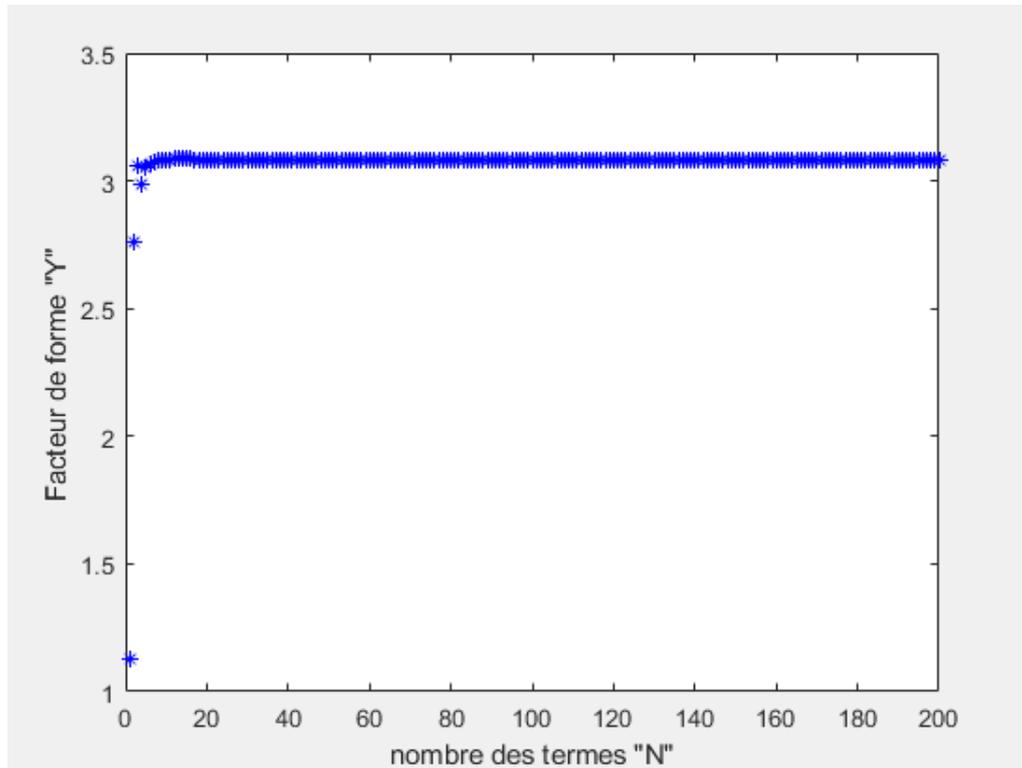


Figure A3-6 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.1$)

N	Y	N	Y
1	1.1273	11	3.0845
2	2.7635	12	3.0847
3	3.0607	20	3.0842
4	2.9894	55	3.0835
5	3.0534	57	3.0334
6	3.0669	60	3.0834
7	3.0769	75	3.0834
8	3.0809	150	3.0834
9	3.0830	199	3.0834
10	3.0840	200	3.0834

Tableau A3-6 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=1.2$

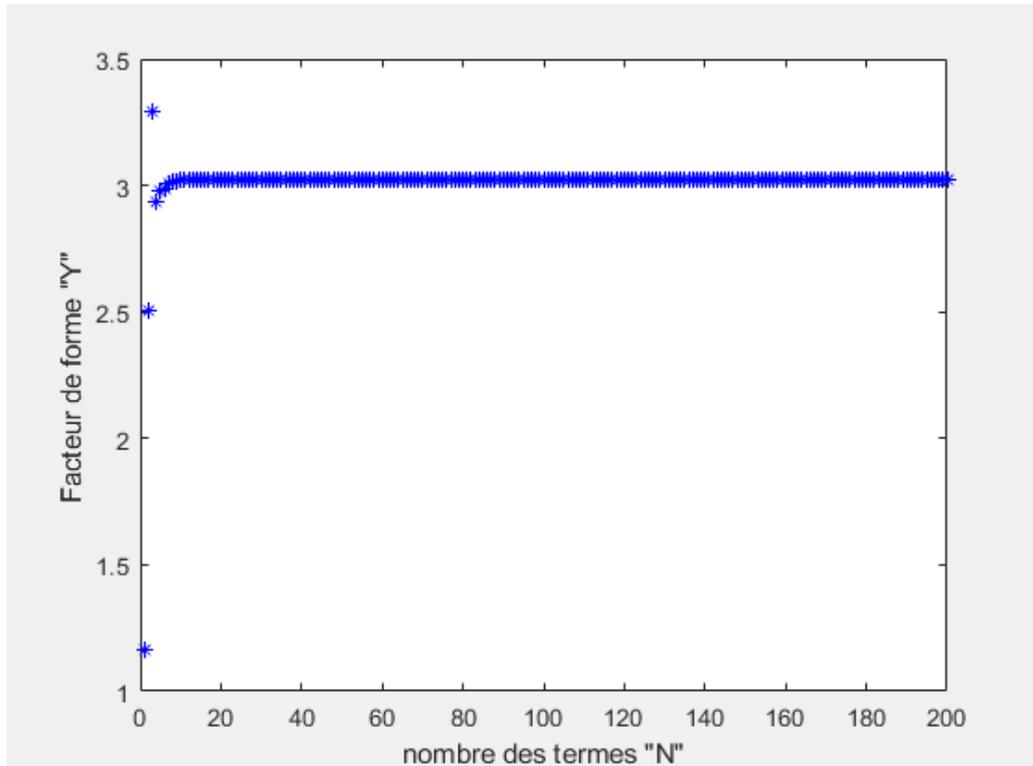


Figure A3-7 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.2$)

N	Y	N	Y
1	1.1619	11	3.0219
2	2.5057	12	3.0226
3	3.2938	37	3.0226
4	2.9326	44	3.0225
5	2.9758	53	3.0226
6	2.9878	61	3.0224
7	3.0068	73	3.0224
8	3.0137	195	3.0224
9	3.0181	196	3.0224
10	3.0206	197	3.0224

Tableau A3-7 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=1.3$

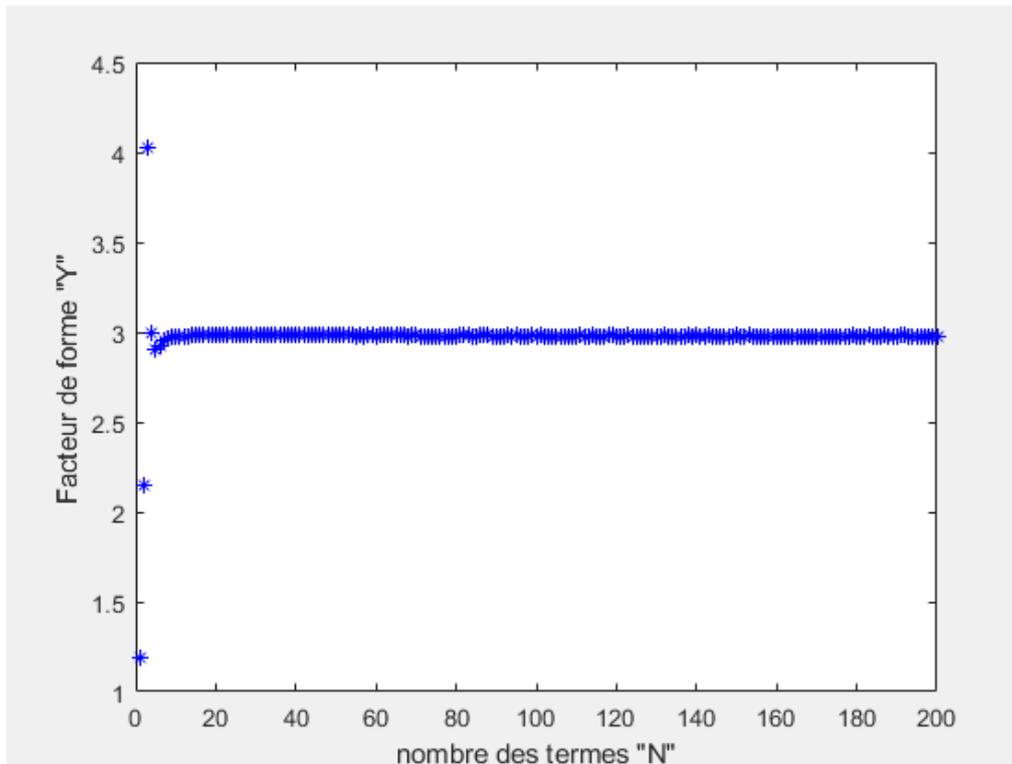


Figure A3-8 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.3$)

N	Y	N	Y
1	1.1929	11	2.9776
2	2.1453	12	2.9787
3	4.0232	22	2.9804
4	2.9927	37	2.9799
5	2.9051	49	2.9797
6	2.9194	54	2.9796
7	2.9566	99	2.9796
8	2.9660	120	2.9796
9	2.9721	197	2.9796
10	2.9760	200	2.9796

Tableau A3-8 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=1.4$

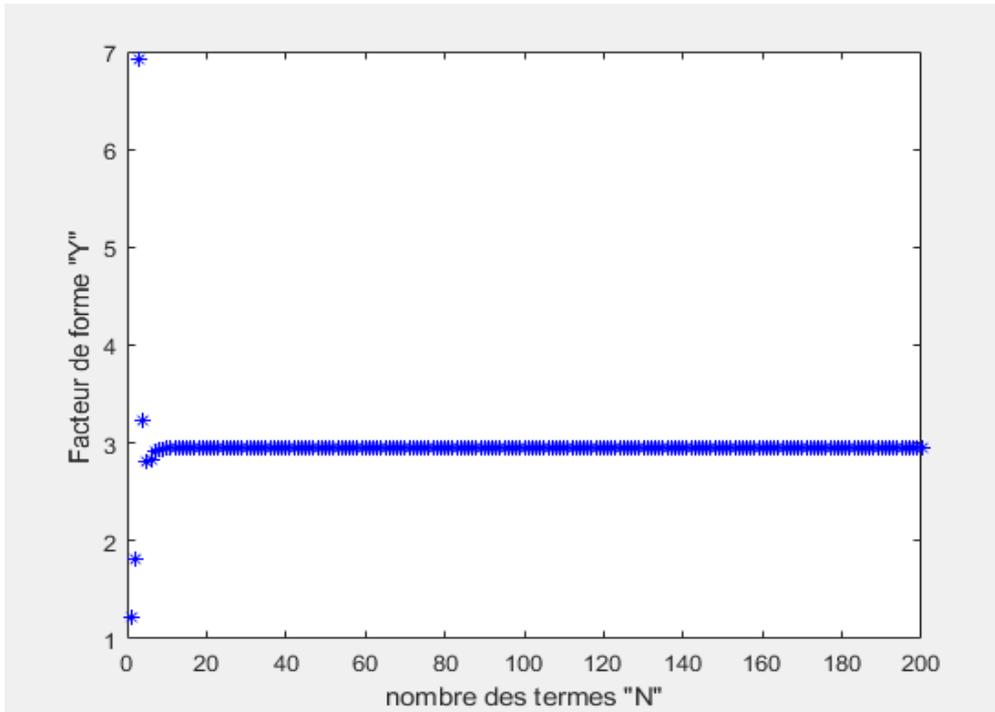


Figure A3-9 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.4$)

N	Y	N	Y
1	1.2207	11	2.9457
2	1.8076	12	2.9463
3	6.9220	20	2.9500
4	3.2334	37	2.9490
5	2.8100	61	2.9490
6	2.8357	97	2.9493
7	2.9213	169	2.9493
8	2.9351	180	2.9493
9	2.9401	197	2.9493
10	2.9453	199	2.9493

Tableau A3-9 Y en fct de N

Résultats pour $b/a=1.5$

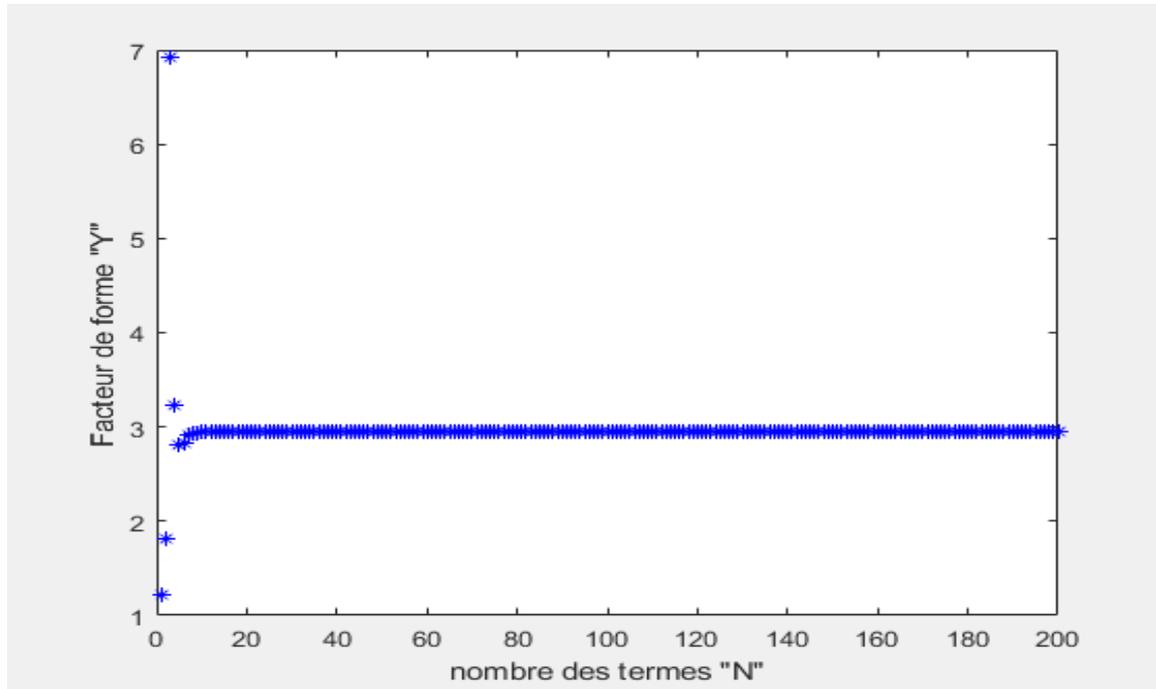


Figure A3-10 facteur de forme Y en fct de N ($b/a=1.5$)

N	Y	N	Y
1	1.2457	11	2.9215
2	1.5456	12	2.9191
3	-18.0778	37	2.9251
4	3.8760	50	2.9276
5	2.6677	42	2.9267
6	2.7088	80	2.9267
7	2.9030	109	2.9267
8	2.9302	121	2.9267
9	2.9203	181	2.9267
10	2.9252	197	2.9267

Tableau A3-10 Y en fct de N

Annexe 4

**Résultats pour le cas d'une fissure
non centrale**

Résultats pour $f=0.7$

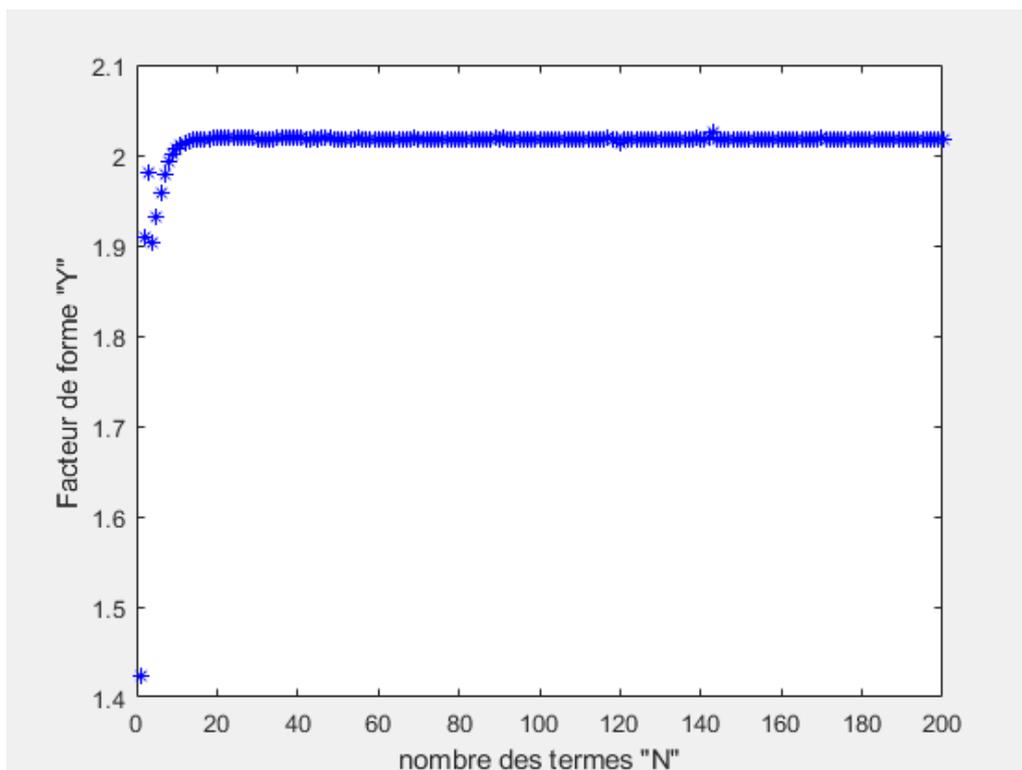


Figure A4-1 facteur de forme Y en fct de N ($f=0.7$)

N	Y	N	Y
1	1.4236	11	2.0110
2	1.9097	12	2.0136
3	1.9801	49	2.0184
4	1.9028	60	2.0182
5	1.9321	82	2.0181
6	1.9573	87	2.0180
7	1.9785	94	2.0180
8	1.9923	121	2.0180
9	2.0013	157	2.0180
10	2.0072	200	2.0180

Tableau A4-1 Y en fct de N

Résultats pour $f=0.8$

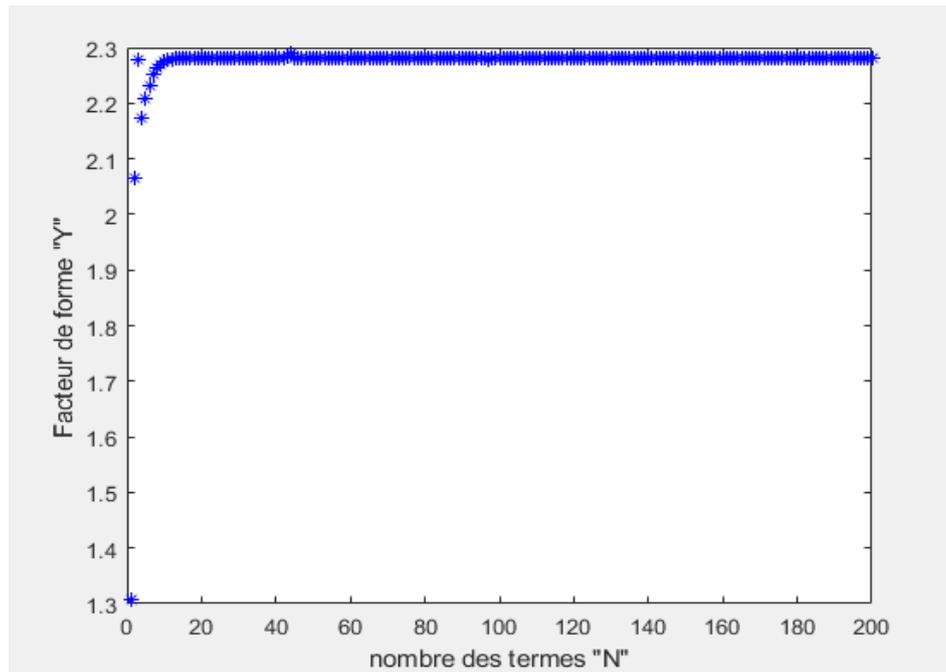


Figure A4-2 facteur de forme Y en fct de N ($f=0.8$)

N	Y	N	Y
1	1.3079	11	2.2772
2	2.0659	12	2.2788
3	2.2780	44	2.2894
4	2.1734	50	2.2808
5	2.2082	63	2.2807
6	2.2324	64	2.2806
7	2.2516	85	2.2806
8	2.2630	133	2.2806
9	2.2701	168	2.2806
10	2.2745	200	2.2806

Tableau A4-2 Y en fct de N

Résultats pour f=0.9

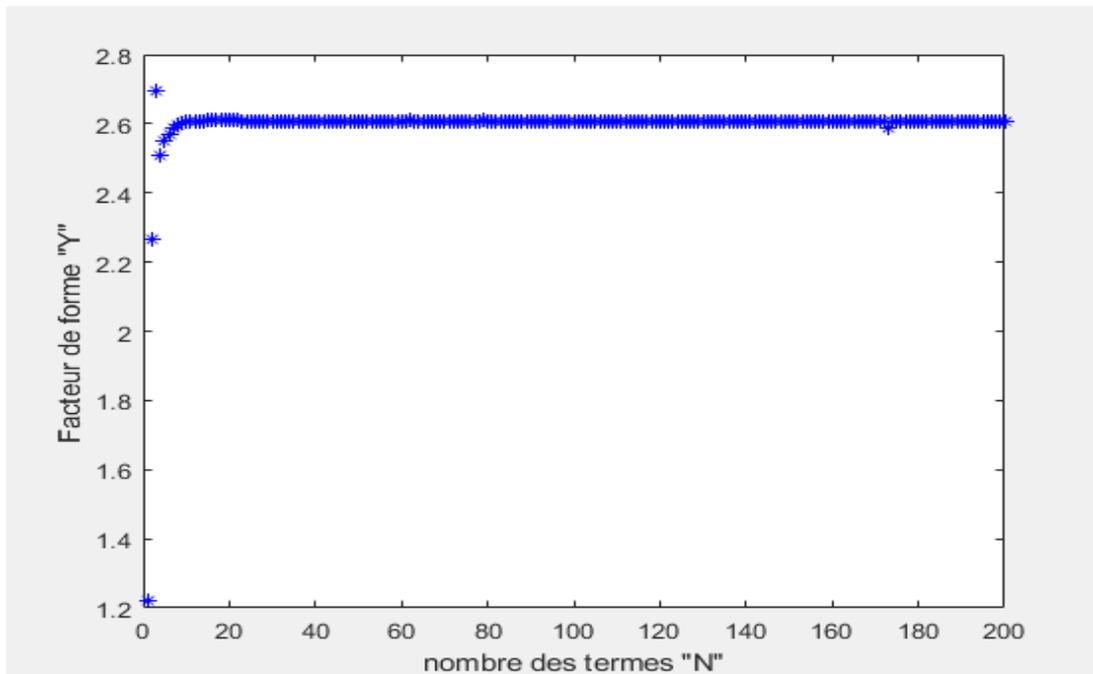


Figure A4-3 facteur de forme Y en fct de N (f=0.3)

N	Y	N	Y
1	1.2217	11	2.6064
2	2.2676	12	2.6076
3	2.6934	29	2.6084
4	2.5101	54	2.6080
5	2.5484	55	2.6082
6	2.5689	56	2.6079
7	2.5867	85	2.6079
8	2.5958	109	2.6079
9	2.6013	181	2.6079
10	2.6046	200	2.6079

Tableau A4-3 Y en fct de N

Résultats pour f=1

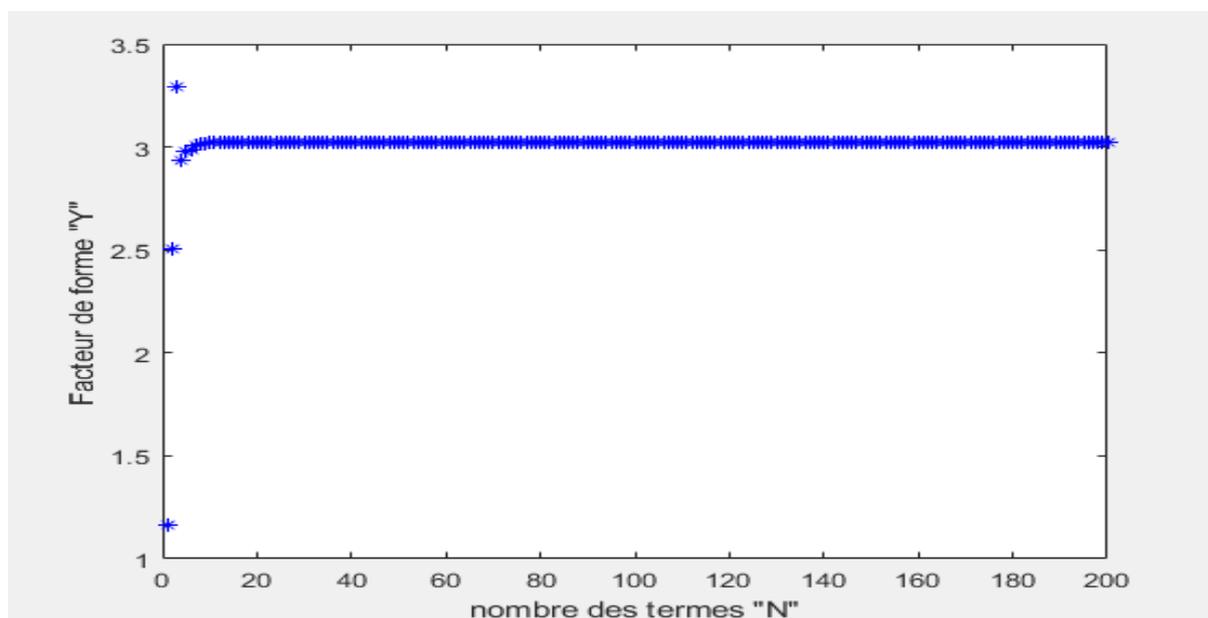


Figure A4-4 facteur de forme Y en fct de N (f=1)

N	Y	N	Y
1	1.1619	11	3.0219
2	2.5057	12	3.0226
3	3.2938	25	3.0230
4	2.9326	41	3.0226
5	2.9758	50	3.0225
6	2.9878	53	3.0224
7	3.0068	88	3.0224
8	3.0137	158	3.0224
9	3.0181	198	3.0224
10	3.0206	200	3.0224

Tableau A4-4 Y en fct de N

Résultats pour f=1.1

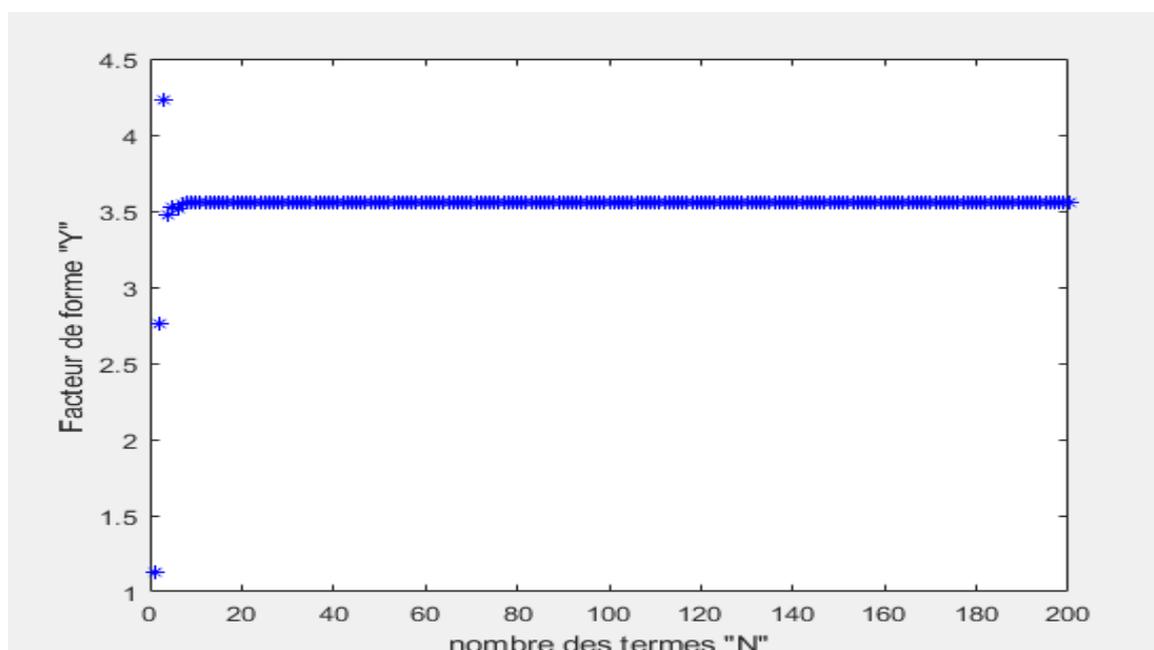


Figure A4-5 facteur de forme Y en fct de N (f=1.1)

N	Y	N	Y
1	1.1282	11	3.5578
2	2.7647	12	3.5584
3	4.2257	30	3.5583
4	3.4720	45	3.5580
5	3.5281	56	3.5580
6	3.5190	57	3.5579
7	3.5474	109	3.5579
8	3.5514	145	3.5579
9	3.5548	190	3.5579
10	3.5568	200	3.5579

Tableau A4-5 Y en fct de N

Résultats pour $f=1.2$

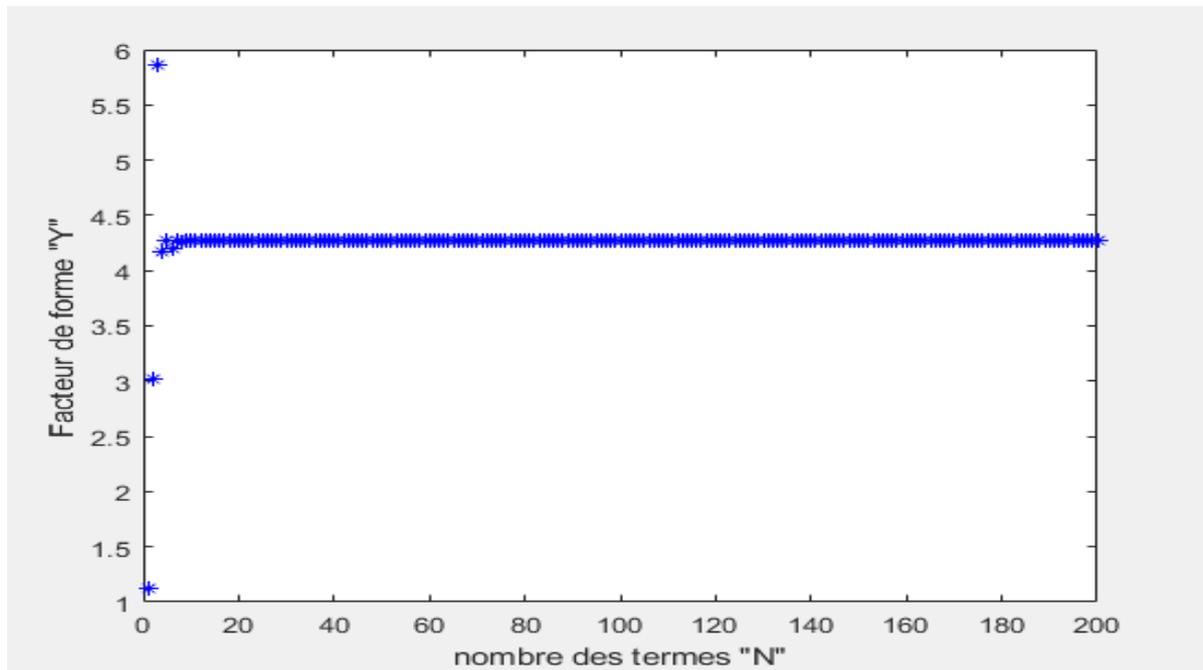


Figure A4-6 facteur de forme Y en fct de N ($f/a=1.2$)

N	Y	N	Y
1	1.1226	11	4.2682
2	3.0212	12	4.2689
3	5.8627	25	4.2689
4	4.1749	37	4.2686
5	4.2691	49	4.2685
6	4.2039	73	4.2684
7	4.2659	97	4.2684
8	4.2629	109	4.2684
9	4.2654	145	4.2684
10	4.2676	200	4.2684

Tableau A4-6 Y en fct de N

Résultats pour $f=1.3$

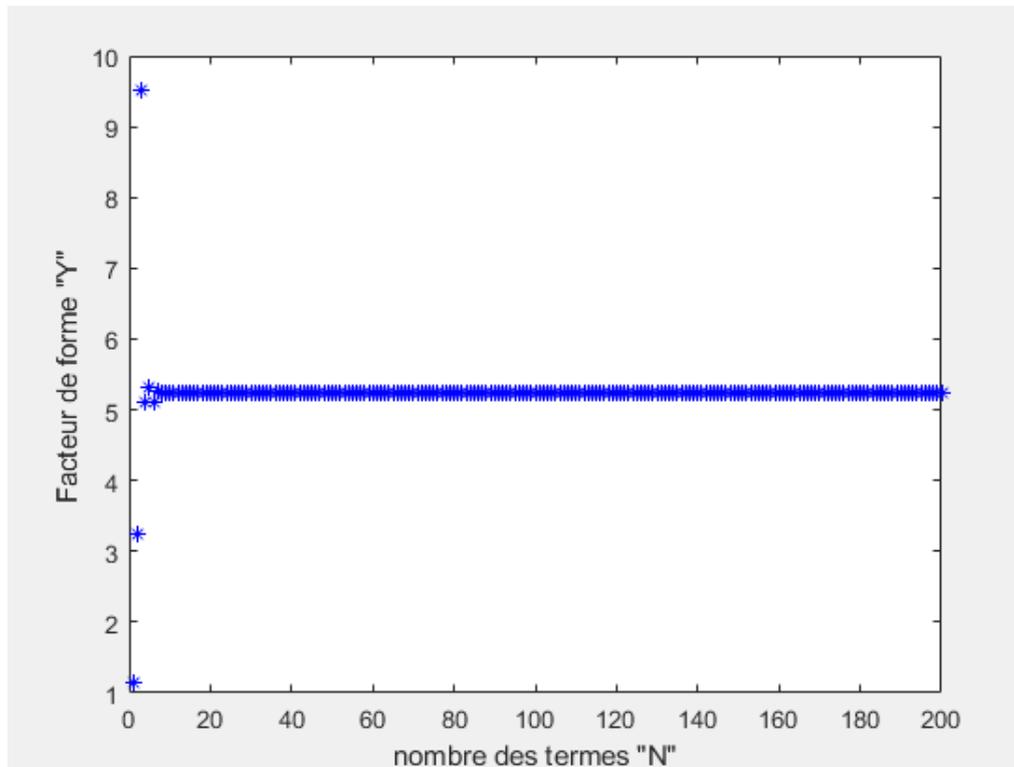


Figure A4-7 facteur de forme Y en fct de N ($f/a=1.3$)

N	Y	N	Y
1	1.1496	11	5.2425
2	3.2459	12	5.2442
3	9.5210	25	5.2441
4	5.1068	50	5.2438
5	5.3128	61	5.2438
6	5.0951	85	5.2437
7	5.2646	109	5.2437
8	5.2378	121	5.2437
9	5.2397	145	5.2437
10	5.2428	200	5.2437

Tableau A4-7 Y en fct de N

Résultats pour $f=1.4$

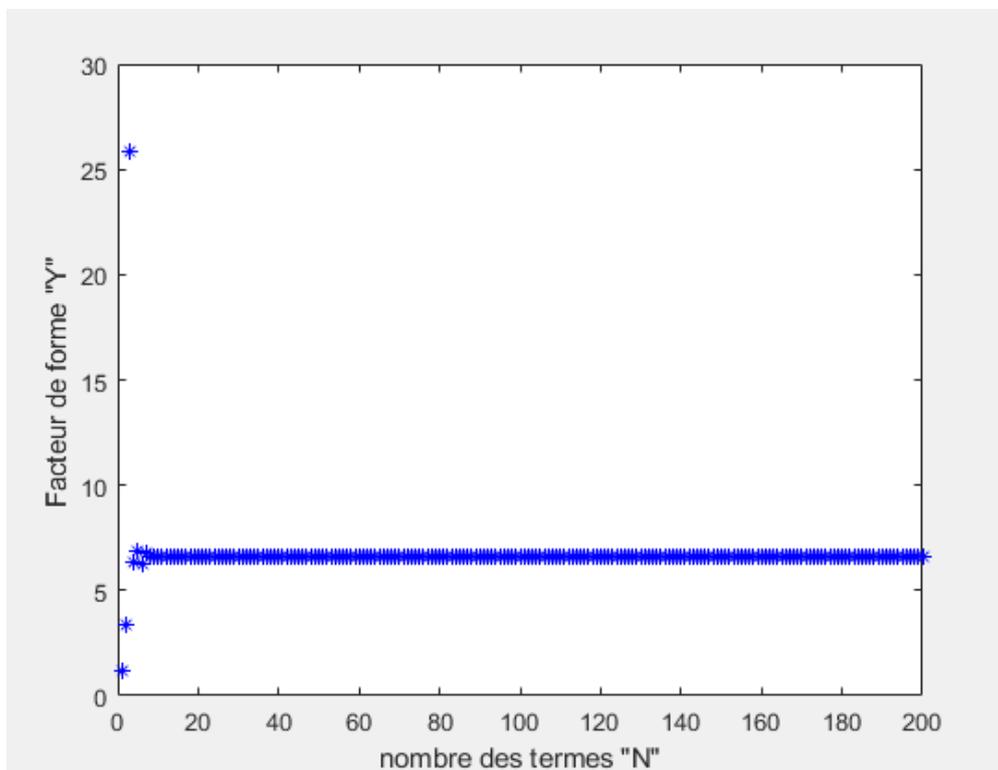


Figure A4-8 facteur de forme Y en fct de N ($f/a=1.4$)

N	Y	N	Y
1	1.2169	11	6.6389
2	3.4094	12	6.6458
3	25.8311	37	6.6439
4	6.3462	55	6.6438
5	6.8757	56	6.6440
6	6.2431	64	6.6437
7	6.7479	73	6.6437
8	6.6329	109	6.6437
9	6.6367	169	6.6437
10	6.6429	200	6.6437

Tableau A4-8 Y en fct de N

Résultats pour $f=1.5$

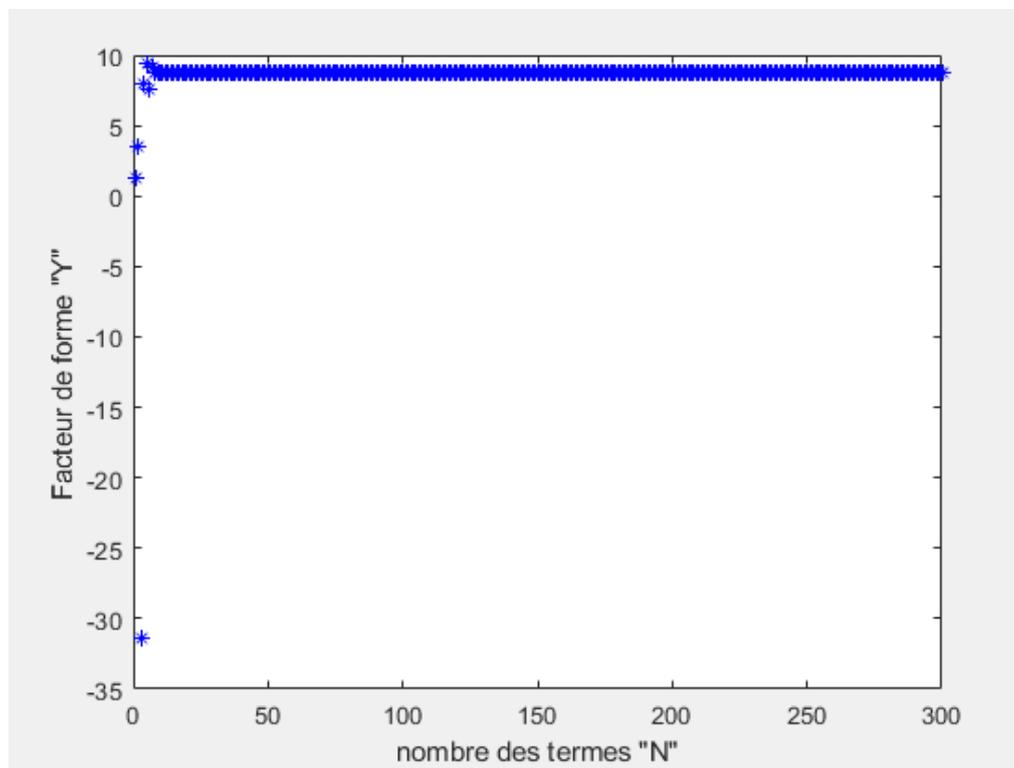


Figure A4-9 facteur de forme Y en fct de N ($f=1.5$)

N	Y	N	Y
1	1.3372	11	8.7586
2	3.4935	12	8.7945
3	-31.3942	37	8.7794
4	7.9383	69	8.7792
5	9.3903	84	8.7793
6	7.6342	92	8.7791
7	9.1924	141	8.7791
8	8.7387	217	8.7791
9	8.7656	250	8.7791
10	8.7792	300	8.7791

Tableau A4-9 Y en fct de N

Résultats pour f=1.6

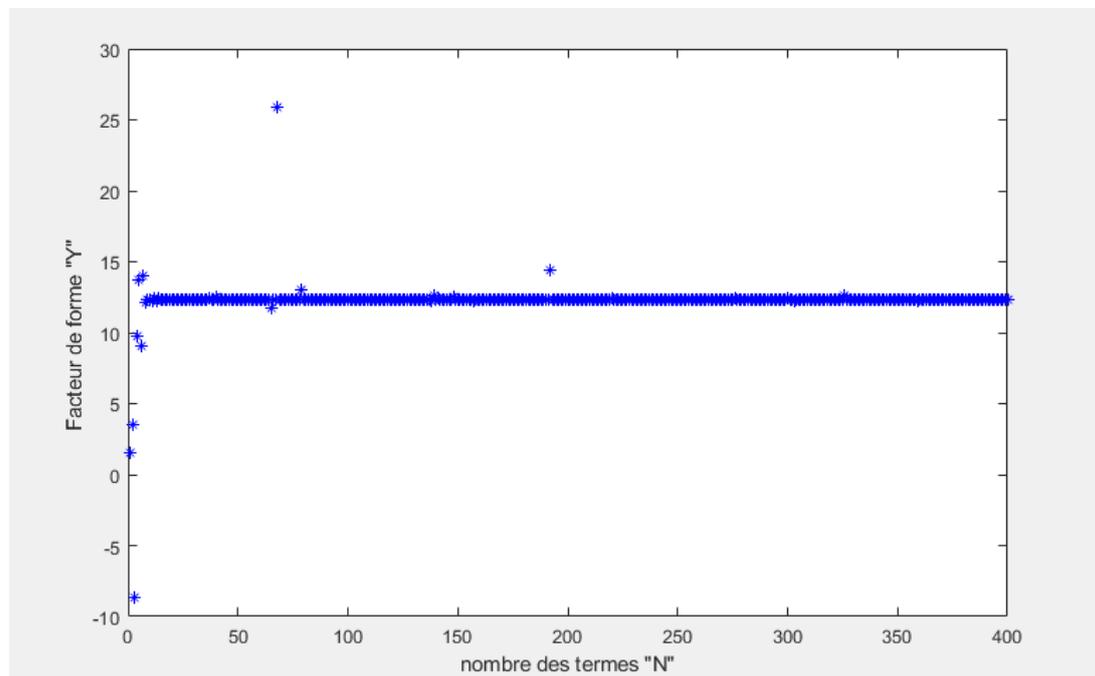


Figure A4-10 facteur de forme Y en fct de N (f=1.6)

N	Y	N	Y
1	1.5307	11	12.2276
2	3.5080	12	12.4325
3	-8.6590	37	12.4407
4	9.7323	69	12.3270
5	13.7227	84	12.3285
6	9.0172	163	12.3276
7	13.9619	222	12.3276
8	12.0949	232	12.3276
9	12.2889	312	12.3276
10	12.3178	340	12.3276

Tableau A4-10 Y en fct de N

Annexe 5

**Déduction du développement des
contraintes**

En coordonnées polaires, σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ et $\sigma_{\theta\theta}$ sont données par

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \varphi_{,rr} + \frac{1}{r} \varphi_{,r} \quad (\text{A5-1})$$

$$\sigma_{r\theta} = \left(\frac{1}{r} \varphi_{,\theta} \right)_{,r} \quad (\text{A5-2})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \varphi_{,rr} \quad (\text{A5-3})$$

Où $\varphi(r, \theta)$ est la fonction d'Airy.

Considérons le problème d'un milieu fissuré en élasticité plane (Fig A 5-1) :

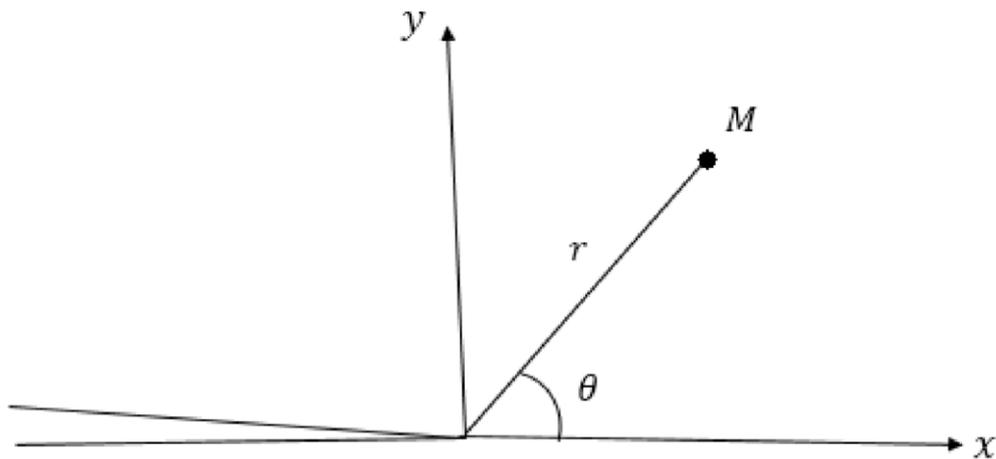


Figure A 5- 1

On peut montrer que dans ce cas $\varphi(r, \theta)$ est donnée par (voir par exemple [3]):

$$\varphi(r, \theta) = r^{\alpha+2} [A(\alpha\theta) + Bc(\alpha\theta) + C\sin((\alpha+2)\theta) + D\cos((\alpha+2)\theta)] \quad (\text{A4-3})$$

Avec α , A, B, C et D des nombres réels.

Pour que l'énergie de déformation soit finie, il faut que $\alpha \geq -1/2$. De plus, on peut montrer que α est soit entier soit demi-entier [3].

Si α est entier :

$$\alpha = n - 1 \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 1,$$

nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} C = -A \frac{n-1}{n+1} \\ D = -B \end{cases} \quad (\text{A4-4})$$

Si α est demi-entier :

$$\alpha = n - \frac{3}{2} \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 1,$$

nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} C = -A \\ D = -B \frac{n-\frac{3}{2}}{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{A4-5})$$

En considérant toutes les valeurs possible de α (ou n), et en utilisant les formules précédents, on aboutit aux développements (I-1), (I-2) et (I-3) du chapitre I.

