

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Université Saad Dahlab, Blida
USDB.

Faculté des sciences de l'ingénieur
Département aéronautique

**Mémoire pour l'obtention
d'un diplôme d'ingénieur d'état en aéronautique**

Filière : Maintenance et Construction Aéronautique
Spécialité : Propulsion

Sujet :

**LES METHODES DE RESOLUTION
DES SYSTEMES ALGEBRIQUES
LINEAIRES :**

**Application au transfert thermique et à
l'aérodynamique**

Présenté par:

M^{elle}. BOUKRIF IMANE

M^{elle}. TAKHNOUNI RAHIMA

Dirigé par:

M^r. CHEGRANI. A

Promotion 2008/2009

Résumé

Ce mémoire propose une étude comparative des différentes méthodes numériques itératives résolvant les systèmes algébriques linéaires.

Ces méthodes ont été principalement élaborées en vue de trouver une issue aux problèmes qui n'ont pas de solution analytique ou ceux dont la solution analytique s'avère très compliquée. L'intérêt de ces méthodes réside dans leur caractère évolutif qui permet de résoudre des systèmes de taille importante.

Le but visé est de mettre en valeur une méthode numérique itérative récente (Multigrilles), qui actuellement envahit le monde numérique et notamment la CFD (Computational Fluid Dynamics).

A cet effet, nous avons choisi de résoudre un type de problème fréquent en aéronautique, qui est elliptique (Equation de Poisson), en touchant deux domaines : l'aérodynamique et le transfert thermique tout en variant le type des conditions aux limites.

Abstract

This memory proposes a comparative study of the various iterative numerical methods solving the linear algebraic systems.

These methods were mainly elaborate in order to find an exit with the problems which do not have an analytical solution or with those which their analytical solution proves very complicated. The interest of these methods lies in their evolutionary character which makes it possible to solve systems of significant size.

The set aim is to emphasize a recent iterative numerical method (Multigrid), which currently invades the numerical world and in particular the CFD (Computational Fluid Dynamics).

To this end, we chose to solve a type of frequent problem in aeronautics, which is elliptic (Poisson's equation), by touching two fields: aerodynamics and the heat transfer while varying the type of the boundary conditions.

Remerciements

Nous remercions avant tout DIEU qui nous a aidé à réaliser ce modeste travail.

Un grand MERCI à nos FAMILLES...

Nous remercions M^r CHAGRANI pour nous avoir fait confiance et pour avoir brillamment conduit ce mémoire. Votre expérience, votre disponibilité, votre implication et votre gentillesse ont été des atouts essentiels pour ce travail.

Nos remerciements vont également à tous les membres du jury pour nous avoir fait l'honneur de juger notre mémoire, et à toutes les personnes présentes ce 30 juin 2009.

Ces remerciements s'adressent également à M^r le chef du département aéronautique, tous les enseignants de la faculté des sciences de l'ingénieur de BLIDA et surtout du département aéronautique.

Merci à tous les enseignants qui nous ont accompagné tout au long de notre parcours étudiantin.

Nous remercions, de tout cœur, tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Without whose help we never would have had the chance to learn what we have.

T. Rahima & B. Imane

Références bibliographiques

- [1] A. GOURDIN et M .BOUMAH RAT. « METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES avec nombreux problèmes résolus en Fortran 77 ». Technique et documentation Paris France, Octobre 1991, 2^{ème} Édition.

- [2] Joel H. FERZIGER et Milovan PERIC. «Computational Methods For Fluid Dynamics ». Springer, 3rd Edition.

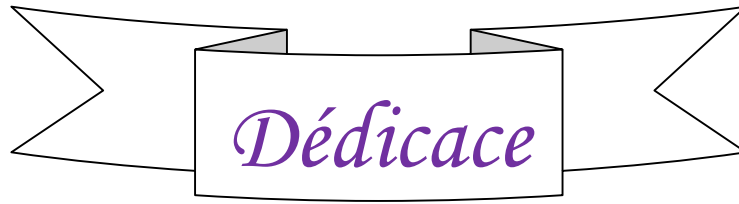
- [3] Gérard MEURANT, « Solveurs linéaires multiniveaux parallèles ». Novembre 7, 2006.

- [4] Pierre SPITERI. « Algorithmes numériques pour la résolution des grands systèmes ». Techniques de l'ingénieur.

- [5] Joe. D. HOFFMAN. « Numerical Methods For Engineers and Scientists ». Marcel Dekker, Inc. 2nd Edition. 2001.

- [6] Ion PARASHIVOIU. « Aérodynamique subsonique ». Edition de l'école polytechnique de MONTREAL.

- [7] Jack MORAN. « An introduction to THEORETICAL AND COMPUTATIONAL AERODYNAMICS». Dover Publications, Inc. Mineola, New York. 2003.



*Je souhaite dédier ce travail ; le résultat de tous mes efforts
pendant cinq ans :*

A mes très chers parents ABD ALLAH et KHADIDJA

A mon petit frère IMADE EDDINE

A mes sœurs IMENE, HOUDA, NIEMA et IKHLASSE

A ma cousine MASAIDA

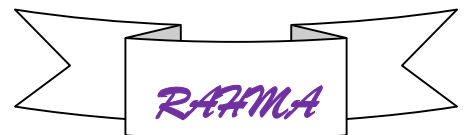
A mes grandes mères

A toute ma famille

*A mes amies NASSIMA, FARIDA, KHADIDJA, SOUAD et
SIHEM*

A ma binôme ; ma sœur IMANE et sa famille

A tous mes Collègues de l'institut d'aéronautique de Blida



Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes très chers parents que je remercie infiniment pour tout ce qu'ils ont fait et font pour moi, leurs sacrifices, conseils, et surtout leur affection et amour.

Mes chers frères Zouhir, Imad, particulièrement Ahcene pour tout ce qu'il fait pour moi, merci.

Mes chères soeurs Souad, Feirouz et Lynda.

Ma belle sœur Karima et mes beaux frères Rabeh, et Aziz.

Mes nièces Wissem, Noor, Amira, et Malak.

Mon cher neveu Mehdi.

Ma grande famille et surtout ceux qui pensent à moi.

Tout particulièrement mes chattes Algia, et Lola.

T. Rahima et sa famille.

A tous mes ami(e)s de l'université.

A toute la promotion 2009 et particulièrement mes ami(e)s de propulsion et structure.

IMANE BOUKRIF

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

Dédicaces

Résumé

Tables des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Nomenclature

Introduction générale.....01

Chapitre I : Les méthodes directes

I.1	Méthode sans pivotation.....	03
I.1.1	Matrice particulière.....	03
I.1.2	Matrice triangulaire inférieure.....	05
I.1.3	Matrice triangulaire supérieure.....	06
I.1.4	Matrice diagonale.....	07
I.1.5	Méthode de CRAMER.....	07
I.1.5.1	Principe.....	07
I.1.5.2	Nombre d'opérations.....	07
I.1.6	Méthode de GAUSS.....	08
I.1.6.1	Théorème de Gauss.....	08
I.1.6.2	Principe.....	08
I.1.6.3	Description de la méthode.....	08
I.1.6.4	Cas particulier.....	12
I.1.6.5	Algorithme de Gauss sans pivotation.....	14
I.1.6.6	Nombre d'opérations.....	14

I.1.7	Méthode de JORDAN.....	15
I.1.7.1	Théorème de JORDAN.....	15
I.1.7.2	Principe.....	15
I.1.7.3	Description de la méthode.....	16
I.1.7.4	Algorithme de JORDAN.....	18
I.1.7.5	Nombre d'opérations.....	18
I.1.8	Méthode par décomposition LU de DOOLITTLE et CROUT.....	19
I.1.8.1	Principe.....	19
I.1.8.2	Description de la méthode.....	19
I.1.8.3	Algorithme de DOOLITTLE.....	21
I.1.8.4	Algorithme de CROUT.....	21
I.1.9	Méthode de THOMAS.....	21
I.1.9.1	Le principe de THOMAS.....	22
I.1.9.2	Algorithme de THOMAS.....	23
I.2	Méthode avec pivotation.....	24
I.2.1	Utilisation du résidu comme critère de la solution.....	24
I.2.2	Méthode de JORDAN avec pivot total.....	25
I.2.2.1	Principe de la méthode.....	25
I.2.2.2	Algorithme de JORDAN avec pivotation total.....	26
I.2.3	Méthode de GAUSS avec pivot partiel.....	27
I.2.3.1	Principe de la méthode.....	27
I.2.3.2	Algorithme de GAUSS avec pivotation partielle.....	28

Chapitre II : Les méthodes itératives

II.1	Rappel d'algèbre linéaire.....	30
II.1.1	Valeurs propres et vecteurs propres.....	30
II.1.2	Rayon spectral.....	31
II.1.2.1	Définition.....	31
II.1.2.2	Bornes du rayon spectral.....	31
II.2	Principe des itérations successives.....	33
II.3	Décomposition de la matrice A.....	35
II.3.1	Méthode de JACOBI.....	36
II.3.2	Méthode de GAUSS-SEIDEL.....	36

II.3.3	Méthode de Relaxation.....	36
II.4	Méthode de JACOBI.....	36
II.4.1	Principe.....	36
II.4.2	Algorithme de JACOBI.....	38
II.5	Méthode de GAUSS-SEIDEL.....	38
II.5.1	Principe.....	38
II.5.2	Condition pour la convergence de GAUSS-SEIDEL.....	39
II.5.3	Algorithme de GAUSS-SEIDEL.....	40
II.6	Méthode de relaxation.....	40
II.6.1	Principe.....	40
II.6.2	Algorithme de relaxation.....	41
II.6.3	Condition de convergence des méthodes de relaxation.....	42
II.7	Méthode d'optimisation.....	43
II.7.1	Principe.....	43
II.7.2	Méthode de descente.....	44
II.7.2.1	Direction de descente.....	44
II.7.2.2	Pas de descente optimale	44
II.7.3	Méthode de gradient.....	45
II.7.4	Méthode de gradient conjugué.....	46
II.7.4.1	Directions conjuguées.....	46
II.7.4.2	Justification du choix des directions conjuguées.....	46
II.7.4.3	Algorithme du gradient conjugué.....	48
II.7.4.4	Taux de convergence.....	48
II.8	Méthode bigrilles.....	49
II.8.1	Principe de la méthode de deux grilles.....	49
II.8.2	Algorithme de deux grilles.....	51
II.9	Méthode multigrilles.....	52
II.9.1	Généralisation.....	52
II.9.2	Algorithme de la méthode multigrilles.....	53
II.9.3	La stratégie des cycles.....	55
II.10	Méthode par blocs.....	56
II.10.1	Principe.....	56
II.10.2	Méthode de relaxation par blocs.....	57
II.10.3	Condition pour la convergence des méthodes par blocs.....	58

Chapitre III : Notion fondamentales du transfert thermique

III.1	Conduction	60
III.2	Convection	61
III.2.1	Convection naturelle (libre).....	62
III.2.2	Convection forcée.....	62
III.3	Rayonnement.....	63
III.3.1	L'émission du rayonnement.....	63
III.3.2	Absorption du rayonnement.....	64
III.4	Méthode des volumes finis.....	65
III.4.1	Forme générale de l'équation discrétisé.....	65
III.5	Les conditions aux limites.....	67
III.5.1	Conditions aux limites de type « DIRICHLET ».....	68
III.5.2	Conditions aux limites de type « NEUMANN ».....	68

Chapitre IV : Notions fondamentales d'aérodynamique

IV.1	Définition de l'écoulement irrotationnel	69
IV.2	Écoulement irrotationnel plan.....	70
IV.2.1	Potentiel des vitesses	70
IV.2.2	Equation de LAPLACE.....	71
IV.3	Écoulements irrotationnels simples.....	72
IV.3.1	Écoulement uniforme.....	72
IV.3.2	Source plane.....	73
IV.3.3	Tourbillon ponctuel (écoulement plan avec circulation).....	74
IV.3.4	Doublet (ou dipôle) plan.....	75
IV.4	Méthode de Superposition des écoulements.....	76
IV.5	La théorie des profils minces pour les profils symétriques minces.....	77
IV.6	Méthode des différences finis.....	80

Chapitre V: Résultats et interprétation

V.1	Introduction.....	83
V.2	Application au transfert thermique.....	83
V.2.1	Première application.....	84
V.2.1.1	Premier cas.....	84
V.2.1.2	Deuxième cas.....	95
V.2.1.3	Interprétation des résultats.....	102
V.2.2	Deuxième application.....	102
V.2.2.1	Premier cas.....	103
V.2.2.2	Deuxième cas.....	113
V.2.2.3	Interprétation des résultats.....	121
V.3	Application à l'aérodynamique.....	121
V.3.1	L'application.....	122
V.3.1.1	Interprétation des résultats.....	124

Conclusion et perspectives

Références bibliographiques

Liste des figures

Figure II.1	Le pas de maillage.....	52
Figure II.2	Bigrilles.....	54
Figure II.3	Trois grilles avec V cycle.....	55
Figure II.4	Trois grilles avec W cycle.....	55
Figure III.1	Transfert thermique par convection entre la paroi chaude et le fluide froid.....	62
Figure III.2	Maillage bidimensionnel.....	65
Figure IV.1	Ecoulement irrotationnel.....	69
Figure IV.2	Lignes de potentiel en repère cartésien.....	70
Figure IV.3	Ecoulement uniforme	73
Figure IV.4	Ecoulement déterminé par une source.....	74
Figure IV.5	Ecoulement d'un tourbillon ponctuel.....	75
Figure IV.6	Ecoulement déterminé par un doublet.....	76
Figure IV.7	La grille de calcul autour d'un profil symétrique discrétisé par la méthode de différences finies.....	78
Figure IV.8	Nomenclature pour le point central voisins par la méthode des différences finies de l'équation de LAPLACE.....	78
Figure IV.9	Le domaine « D ».....	81
Figure IV.10	Le domaine discrétisé.....	81
Figure V.1	Conditions initiales de la plaque plane.....	84
Figure V.2	La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78.....	85
Figure V.3	La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 projetée sur un plan.....	85
Figure V.4	Les contours de la distribution de température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78.....	86
Figure V.5	La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 avec maillage.....	86
Figure V.6	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gauss-Seidel pour un nombre total de points 78×78.....	87

Figure V.7	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SIP pour un nombre total de points 78×78	88
Figure V.8	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gradient Conjugué pour un nombre total de points 78×78	88
Figure V.9	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 78×78	89
Figure V.10	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multigrilles avec Gauss Seidel pour un nombre total de points 78×78	89
Figure V.11	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multi grilles avec SIP pour un nombre total de points 78×78	90
Figure V.12	Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 6×6	91
Figure V.13	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 6×6	91
Figure V.14	Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 16×16	92
Figure V.15	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 16×16	92
Figure V.16	Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 32×32	93
Figure V.17	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 32×32	93
Figure V.18	Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 64×64	94
Figure V.19	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 64×64	94
Figure V.20	Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 78×78	95
Figure V.21	Conditions initiales de la plaque plane.....	96
Figure V.22	La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78	96
Figure V.23	La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 projetée sur un plan.....	97

Figure V.24	Les contours de la distribution de température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78	97
Figure V.25	La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 avec maillage.....	98
Figure V.26	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gauss-Seidel pour un nombre total de points 78×78	98
Figure V.27	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SIP pour un nombre total de points 78×78	99
Figure V.28	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gradient Conjugué pour un nombre total de points 78×78	99
Figure V.29	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour un nombre total de points 78×78	100
Figure V.30	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multi grilles avec Gauss Seidel pour un nombre total de points 78×78	100
Figure V.31	La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multigrilles avec SIP pour un nombre total de points 78×78	101
Figure V.32	Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 78×78	101
Figure V. 33	Les conditions aux limites.....	103
Figure V.34	Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78	103
Figure V.35	La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78 projeté sur un plan.....	104
Figure V.36	Les contours de distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78	104
Figure V.37	La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre de points de 78×78 avec maillage.....	105
Figure V.38	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78	106
Figure V.39	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de SIP pour un nombre total de points de 78×78	106
Figure V.40	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de TDMA pour un nombre total de points de 78×78	107

Figure V.41	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gradient conjugué pour un nombre total de points de 78×78	107
Figure V.42	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de l'ADI pour un nombre total de points de 78×78	108
Figure V.43	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de SOR pour un nombre total de points de 78×78	108
Figure V.44	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles avec Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78	109
Figure V.45	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles avec Gradient conjugué pour un nombre total de points de 78×78	109
Figure V.46	Variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles avec SIP pour un nombre total de points de 78×78	110
Figure V.47	Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 8×8	111
Figure V.48	Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 16×16	111
Figure V.49	Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 32×32	112
Figure V.50	Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 64×64	112
Figure V.51	Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 78×78	113
Figure V.52	Les conditions aux limites.....	113
Figure V.53	Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre de points de 78×78	114
Figure V.54	La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre de points de 78×78 projeté sur un plan.....	114
Figure V.55	Les contours de distribution de la température le long de la plaque pour un nombre de points de 78×78	115
Figure V.56	Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre des points de 78×78 avec maillage.....	115
Figure V.57	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78	116

Figure V.58	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de SIP pour un nombre total de points de 78×78	116
Figure V.59	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de TDMA pour un nombre total de points de 78×78	117
Figure V.60	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gradient conjugué pour un nombre total de points de 78×78	117
Figure V.61	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de SOR pour un nombre total de points de 78×78	118
Figure V.62	variation de résidu en fonction des itérations pour la méthode de ADI pour un nombre total des points de 78×78	118
Figure V.63	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles par Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78	119
Figure V.64	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles par SIP pour un nombre total de points de 78×78	119
Figure V.65	variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles par Gradient conjugué pour nombre total de points de 78×78	120
Figure V.66	Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 78×78	120
Figure V.67	Discretisation du domaine.....	122
Figure V.68	Distribution du Coefficient de pression le long du profil.....	123
Figure V.69	la distribution de vitesse sur le profil.....	123

LISTE DES TABLEAUX

Tableau V.1 Comparaison des différentes méthodes itératives en fonction du maillage et du nombre des itérations.....	90
Tableau V.2 Comparaison des différentes méthodes itératives en fonction de la taille du maillage et du nombre des itérations.....	110
Tableau V.3 Comparaison du résidu obtenu par différentes méthodes itératives.....	124

Nomenclature

Les lettres

A : Matrice quelconque	F(X) : fonction
\mathbf{a}_i : Élément de la diagonale inférieure	GS : Gauss Seidel
\mathbf{a}_{ij} : Terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A	GC : Gradient conjuguée
ADI : Alternating direction implicit	h : Pas de la grille fine
B : Matrice quelconque	H : Pas de la grille grossière
b : Vecteur du second terme	\mathbf{h}_c : Coefficient de convection thermique
\mathbf{b}_{ij} : Terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B	I : Matrice identité
C : Corde du profil	$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: Vecteurs unitaires dans le repère cartésien
\mathbf{c}_i : Élément de la diagonale supérieure	\mathbf{I}_h^H : Opérateur de restriction
\mathbf{C}_K : Colonne du $K^{\text{ème}}$ pivot	\mathbf{I}_H^h : Opérateur de prolongation
\mathbf{C}_p : Coefficient de pression	k : Itération
D : Matrice diagonale	L : Matrice triangulaire inférieure
\mathbf{d}_{ij} : Terme de la matrice D	\mathbf{l}_{ij} : le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice L
e : Exponentiel, Erreur	\mathbf{L}_K : Ligne du K-ième pivot
E : Est (east)	M : Matrice quelconque
\mathbf{e}_h : Erreur dans la grille fine	MG : Multigrilles
\mathbf{e}_H : Erreur dans la grille grossière	n : Ordre de la matrice
$\mathbf{E}_v, \mathbf{E}_i$: Transformations	N : Matrice quelconque, nombre d'opérations , nord (north)
F : Vecteur du second terme	na : Nombre d'additions
\mathbf{F}_K : Vecteur du second terme du $K^{\text{ème}}$ Grille	nd : Nombre de divisions

nm : Nombre de multiplication

Ndoun : Nombre de points derrière le profil

Non : Nombre de points sur le profil

Nup : Nombre de points avant le profil

Nx : Nombre de points selon l'axe x

Ny : Nombre de points selon l'axe y

P_K : $k^{\text{ème}}$ pivot

P_T : Puissance émissive du corps noir

$P^{(k)}$: Direction de descente

q_a : flux thermique absorbé

q_{ti} : Flux thermique incident

q_x : Densité du flux thermique

Q_x : Flux thermique

r : Résidu

rmax : Résidu maximum

r_h : Résidu dans la grille fine

r_H : Résidu dans la grille grossière

\vec{r} : Rotationnel du vecteur vitesse

S : Terme source de l'équation de poisson, opérateur de lissage, sud (south)

SOR : Successive over relaxation

SLOR : Successive line over relaxation

SIP : Strongly implicit procedure

t : Temps

T : Matrice d'itérations, température

T_p : Température de la paroi

T_f : Température du fluide

TDMA : Tridiagonal matrix algorithm

U : Matrice triangulaire supérieure, vecteur solution, vitesse le long du profil

u,v,w : Composants du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

U_i : Terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice U

U_h : Solution exacte

u_h : Solution approximée

U_K : Vecteur solution dans la $K^{\text{ème}}$ grille

V : Vecteur quelconque, volume

V_C : Volume de contrôle

\vec{V} : Vecteur vitesse

V_{∞} : Vitesse à l'infini

v_n : Vitesse normale

v_r : Vitesse radiale

v_{θ} : Vitesse tangentielle

W : Ouest (west)

X,Y,Z : Coordonnées cartésiennes

x : Vecteur solution

x_i : Terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne du vecteur x

x_v : Solution vraie

x_c : Solution calculée

Y : Vecteur du second terme

Les indices

e : East

GS : Gauss Seidel

h : Pas de la grille fine

H : Pas de la grille grossière

i : Ligne de la matrice

j : Colonne de la matrice

J : Jacobi

n : Nombre total des ligne ou des colonnes, nord (north), la normale

r : Ligne ou la colonne où se trouve le pivot

s : Sud (south)

w : Ouest (west)

∞ : Infini

Les lettres grecques

α^k : Pas du descente optimal

: Facteur de relaxation

α : Coefficient d'absorption

: Constante de Stefan Boltzmann

β^k : Scalaire

(**A**) : Rayon spectral de la matrice A

β_i : Élément du vecteur de second terme

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$: Nombre d'itérations pour l'opération de lissage

γ_i : Élément de la diagonale supérieure

∇ : Gradient

: Scalaire, conductivité thermique

: Fonction potentielle

λ_i : Valeurs propres

: Frontière, circulation

ϵ : Emissivité

Les exposants

^t : Transposé

⁻¹ : Inverse

(^k) : Itération centrale

(^{k-1}) : Itération retardée

(^{k+1}) : Itération avancée

Introduction

INTRODUCTION GENERALE

Autant l'algèbre linéaire s'occupe de vecteurs très généraux, autant l'analyse numérique linéaire considère essentiellement des vecteurs ayant un nombre fini de composantes numériques, c'est-à-dire situés dans des espaces de dimension finie. Le but de cet ensemble de méthodes est de dégager des procédés explicites ou implicites qui conduisent à des approximations aussi précises que possible.

On verra assez rapidement que la notion de précision est elle même imprécise, car on peut accepter, ou non, une certaine marge d'erreur sur les résultats, et mesurer cette erreur par divers procédés.

L'étude rigoureuse des erreurs et de leur propagation au cours des calculs est cependant difficile et amène généralement des résultats exagérément pessimistes. Des points de vue différents, fondés par de nombreuses théories, conduisent souvent à des conclusions plus engageantes.

Cette étude, poussée à son extrême limite, nous amènera à une impasse dans la mesure où certains concepts de l'algèbre linéaire s'expriment par des valeurs entières, pour lesquelles la notion de valeur approchée n'a aucun sens. La notion d'algorithme apparaîtra vite prépondérante ; en effet, c'est par une itération que l'on parvient généralement à « calculer » les objets recherchés.

Notre but est de savoir estimer la place réelle du calcul numérique, donc notre modèle physique, ainsi mieux le comprendre.

A cet effet, nous allons appliquer les différentes méthodes numériques itératives à la résolution d'un système d'équations linéaires, Pour cela le choix est fixé sur type de problème courant en aéronautique, qui est le problème de Poisson en deux dimensions. Donc nous allons discrétiser les équations aux dérivées partielles elliptiques avec deux schémas numériques une fois avec les volumes finis et une autre fois avec les différences finies, tout en variant les conditions aux limites du type DIRICHLET ou NEUMANN.

A la fin, nous examinons les résultats de l'application dans les domaines transfert de chaleur et l'aérodynamique.

Afin de mieux comprendre et suivre notre approche, dans le premier et le second chapitre, nous présenterons les différentes méthodes numériques directes et itératives, nous établirons leurs algorithmes appropriés, puis nous discuterons leurs critères de convergence.

Une brève définition des notions fondamentales de transfert de chaleur ainsi que l'application de la méthode des volumes finis au transfert thermique sont proposés dans le troisième chapitre.

Au quatrième chapitre, nous présenterons les fondements de l'aérodynamique appliquée ainsi que la discrétisation de l'équation de Laplace en deux dimensions avec la méthode des différences finies.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous présenterons l'application des différentes méthodes numériques itératives aux problèmes de transfert thermique et à l'aérodynamique en interprétant tous les résultats obtenus.

Chapitre I

Il existe plusieurs techniques pour résoudre un système d'équations linéaires. Le choix de la méthode repose essentiellement sur le nombre d'équations et la structure des équations à résoudre.

Une méthode directe conduit à une solution en un nombre fini d'étapes et sans les erreurs d'arrondi, cette solution serait celle du système.

I.1 Méthode sans pivotation :

I.1.1 Matrice particulière :

Soit une matrice :

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

L'élément a_{ij} est le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice.

Soit une matrice :

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

L'élément b_{ij} est le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice.

Les propriétés des matrices particulières suivantes sont :

Matrices égales :

Deux matrices A et B sont égales si :

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (\text{I.3})$$

Matrices conjuguées :

On appelle conjugué d'une matrice A la matrice B telle que :

$$b_{ij} = \bar{a}_{ij} \quad (\text{I.4})$$

Matrice symétrique :

C'est une matrice A carrée telle que :

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (\text{I.5})$$

Matrice adjointe :

On appelle une matrice adjointe d'une matrice A la matrice A^* telle que :

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji} \quad (\text{I.6})$$

Matrice antisymétrique :

C'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (\text{I.7})$$

Matrice diagonale :

C'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = 0 \quad (\forall i \neq j) \quad (\text{I.8})$$

Matrice scalaire :

C'est une matrice diagonale telle que :

$$a_{ij} = \lambda \quad (\text{I.9})$$

Matrice unité ou identité I:

C'est une matrice diagonale telle que :

$$a_{ij} = 1 \quad (\text{I.10})$$

Matrice inverse :

On appelle matrice inverse de A la matrice A^{-1} telle que :

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \quad (\text{I.11})$$

Matrice triangulaire inférieure :

C'est une matrice U telle que :

$$U_{ij} = 0 \quad (i > j) \quad (\text{I.12})$$

Matrice triangulaire supérieure :

C'est une matrice L telle que :

$$L_{ij} = 0 \quad (i < j) \quad (\text{I.13})$$

Matrice orthogonale :

C'est une matrice A telle que :

$$A^t \cdot A = A \cdot A^t = I \quad (\text{I.14})$$

Matrice hermitienne :

C'est une matrice A telle que :

$$A = A^* \quad (\text{I.15})$$

Matrice définie positive (forme quadratique) :

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme :

$$Q(X) = X^t A \quad (\text{I.16})$$

Une forme quadratique est dite définie positive si :

$$X^t A > 0 \quad (\forall X \neq 0) \quad (\text{I.17})$$

Une matrice carrée est dite définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

Matrice à diagonale fortement dominante :

C'est une matrice A telle que :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \quad (\text{I.18})$$

Matrice augmentée :

Soit une matrice A(n, m) et un vecteur b(n), on appelle une matrice augmentée [A, b] la matrice obtenue en adjoignant b à A comme la (n+1)^{ème} colonne.

Matrice à diagonale dominante :

A est une matrice à diagonale dominante si :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \quad (\text{I.19})$$

Matrice semi-définie positive :

A est une matrice semi-définie positive lorsque pour tout vecteur $X \neq 0$ on ait :

$$X^t A \geq 0 \quad (\text{I.20})$$

I.1.2 Matrice triangulaire inférieure :

Soit le système d'ordre n :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.21})$$

Où A est une matrice triangulaire inférieure.

Le développement de ce système donne :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1,n \quad (\text{I.22})$$

où $a_{ij} = 0$ quand $j > i$.

Ce qui implique que :

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i \quad i=1,n \quad (\text{I.23})$$

Si l'on connaît les $(i - 1)$ premiers éléments de x , le $i^{\text{ème}}$ élément s'écrit :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right] \quad i=1,n \quad (\text{I.24})$$

I.1.3 Matrice triangulaire supérieure :

Soit le système d'équation (I.21), où A est une matrice triangulaire supérieure.

Le développement de ce système donne l'équation (I.22) ou :

$a_{ij} = 0$ quand $j < i$.

Ce qui implique que :

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i \quad i=1,n \quad (\text{I.25})$$

x_i s'obtient par le calcul suivant :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] \quad i=n,n-1,\dots,1 \quad (\text{I.26})$$

I.1.4 Matrice diagonale :

Soit le système suivant :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.27})$$

Où A est une matrice diagonale ;

Le calcul s'obtient par le calcul suivant :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i=1,n \quad (\text{I.28})$$

I.1.5 Méthode de CRAMER :

I.1.5.1 Principe :

C'est la méthode la plus connue mais la moins recommandable.

Soit le système (I.21), on peut écrire :

$$x = A^{-1} b \quad (\text{I.29})$$

Avec A^{-1} est la matrice inverse de A.

La méthode de CRAMER consiste à calculer A^{-1} et à lui post-multiplier le vecteur b.

I.1.5.2 Nombre d'opérations :

On calcule successivement :

- Le déterminant de A avec e.n ! additions et multiplications ;
- les n^2 termes de A^{-1} avec $\{(n-1)! \times e\}$ additions et multiplications chacun.
- Le produit (I.29) avec n^2 multiplications.

$$N_k = k N_{k-1} + 2k - 1 \quad (\text{I.30})$$

où N_k est le nombre total d'opérations.

$$N_n = n N_{n-1} + 2n - 1 = n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) = n! \cdot e \quad (\text{I.31})$$

Soit environ :

$$N = n! \cdot e + n^2 (n-1)! \cdot e + n^2 \quad (\text{I.32})$$

N étant le nombre d'opérations.

I.1.6 Méthode de GAUSS :

I.1.6.1 Théorème de Gauss :

Pour une matrice carrée A quelconque, il existe des matrices inversibles S telles que $SA=A'$, où A' est une matrice triangulaire supérieure.

I.1.6.2 Principe :

La méthode de Gauss consiste à transformer le système $Ax=b$ à matrice quelconque en un système équivalent $A'x=b'$ où A' est une matrice triangulaire supérieure, la résolution de ce dernier système étant immédiate avec l'algorithme (1.26).

I.1.6.3 Description de la méthode :

Soit le système d'équation (I.21), pour que le système ne sera pas modifier, les même transformations seront opérées sur A et sur b , on simplifie l'algorithme en formant la matrice augmentée $[A, b]$ où le vecteur b devient la $(n+1)$ i^{ème} colonne de la matrice A .

Le système s'écrit donc :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

La méthode de Gauss comporte $(n-1)$ étapes.

Une transformation $E_{ii}(d)$ appliquée sur une matrice A signifie que la i^{ème} ligne de cette matrice sera remplacée par $(a_{ij} + da_{ij})$.

Première étape :

En transformant $[A, b]$ en une matrice dont les termes sous diagonaux de la première colonne sont nuls :

$$a_2^{(1)} = a_3^{(1)} = \dots = a_{n1}^{(1)} = 0 \quad (\text{I.33})$$

l'indice (1) au dessus des a notant l'étape 1 .

Pré multiplions $[A, b]$ par $E_2 \left(-\frac{a_2}{a_1} \right)$, Seule la seconde ligne est modifiée et ses termes deviennent :

$$\begin{cases} a_2^{(1)} = a_2 - \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot a_1 = 0 \\ a_3^{(1)} = a_3 - \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot a_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{2,n+1}^{(1)} = a_{2,n+1} - \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot a_{1,n+1} \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

Ou sous forme générale :

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot a_{1j} \quad j=2,\dots,n+1 \quad (\text{I.35})$$

Pré multiplions $[A, b]$ par $E_3 \left(-\frac{a_3}{a_1} \right)$, la troisième ligne est modifiée et les nouveaux termes sont :

$$\begin{cases} a_3^{(1)} = a_3 - \left(\frac{a_3}{a_1} \right) \cdot a_1 = 0 \\ a_4^{(1)} = a_4 - \left(\frac{a_3}{a_1} \right) \cdot a_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{3,n+1}^{(1)} = a_{3,n+1} - \left(\frac{a_3}{a_1} \right) \cdot a_{1,n+1} \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

En terme général :

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - \left(\frac{a_3}{a_1} \right) \cdot a_{1j} \quad j=2,\dots,n+1 \quad (\text{I.37})$$

D'une manière générale pour annuler les termes sous-diagonaux de la première colonne, nous utilisons la transformation $E_{i1} \left(-\frac{a_i}{a_1} \right)$, les nouveaux termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne sont :

$$\begin{cases} a_{i1}^{(1)} = a_{i1} - \left(\frac{a_i}{a_1} \right) \cdot a_1 = 0 \\ a_{i2}^{(1)} = a_{i2} - \left(\frac{a_i}{a_1} \right) \cdot a_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{i,n+1}^{(1)} = a_{i,n+1} - \left(\frac{a_i}{a_1} \right) \cdot a_{1,n+1} \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

La première étape s'écrit d'une façon générale comme suit :

$$a_i^{(1)} = a_i - \left(\frac{a_{i1}}{a_1}\right) \cdot a_{1j} \quad \left\{ \begin{array}{l} i=2,3,\dots,n \\ j=2,3,\dots,n+1 \end{array} \right. \quad (I.39)$$

Le système devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & a_2^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_n^{(1)} & a_n^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (I.40)$$

Deuxième étape :

Dans cette étape, nous devons annuler les termes sous-diagonaux de la deuxième colonne c'est-à-dire :

$$a_3^{(2)} = a_4^{(2)} = \dots = a_{n2}^{(2)} = 0 \quad (I.41)$$

Pré multiplions $[A, b]^{(1)}$ par $E_3 \left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_2^{(1)}}\right)$, la troisième ligne sera modifiée et ses termes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - \left(\frac{a_{31}^{(1)}}{a_2^{(1)}}\right) \cdot a_2^{(1)} = 0 \\ a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - \left(\frac{a_{31}^{(1)}}{a_2^{(1)}}\right) \cdot a_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{3,n+1}^{(2)} = a_{3,n+1}^{(1)} - \left(\frac{a_{31}^{(1)}}{a_2^{(1)}}\right) \cdot a_{2,n+1}^{(1)} \end{array} \right. \quad (I.42)$$

En général :

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - \left(\frac{a_{31}^{(1)}}{a_2^{(1)}}\right) a_{2j}^{(1)} \quad j=3,\dots,n+1 \quad (I.43)$$

De même manière pour modifier la $i^{\text{ème}}$ ligne ; c'est à dire pré multiplions $[A, b]^{(1)}$ par

$$E_{i2} \left(-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) :$$

$$\begin{cases} a_{i2}^{(2)} = a_{i2}^{(1)} - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) \cdot a_{22}^{(1)} = 0 \\ a_{i3}^{(2)} = a_{i3}^{(1)} - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) \cdot a_{23}^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i,n+1}^{(2)} = a_{i,n+1}^{(1)} - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) \cdot a_{2,n+1}^{(1)} \end{cases} \quad (I.44)$$

La deuxième étape s'écrit donc comme suit :

$$a_i^{(2)} = a_i^{(1)} - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) \cdot a_{2j}^{(1)} \quad \begin{cases} i= 3, \dots, n \\ j= 3, \dots, n+1 \end{cases} \quad (I.45)$$

Après la deuxième étape le système $[A, b]^{(2)}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{3,n+1}^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (I.46)$$

K^{ème} étape :

De même comme la première et la deuxième étape, on veut annuler les termes sous-diagonaux de la k-ième colonne :

$$a_{k+1,k}^{(k)} = a_{k+2,k}^{(k)} = \dots = a_{n,k}^{(k)} = 0 \quad (I.47)$$

En Pré multiplions $[A, b]^{(k-1)}$ par la matrice de transformation $E_{k+1,k} \left(-\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right)$, la $(k+1)^{\text{ème}}$ ligne de $[A, b]^{(k-1)}$ devient :

$$\begin{cases} a_{k+1,k}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right) \cdot a_k^{(k-1)} = 0 \\ a_{k+1,k+1}^{(k)} = a_{k+1,k+1}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right) \cdot a_{k,k+1}^{(k-1)} \\ \dots \\ a_{l,n+1}^{(k)} = a_{k+1,n+1}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right) \cdot a_{k,n+1}^{(k-1)} \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Soit :

$$a_{k+1,j}^{(k)} = a_{k+1,j}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right) a_k^{(k-1)} \quad j=k+1, \dots, n+1 \quad (\text{I.49})$$

Par suite nous pré multiplions $[A, b]^{(k-1)}$ par :

$$E_{k+2,k} \left(-\frac{a_{k+2,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right), \quad E_{k+3,k} \left(-\frac{a_{k+3,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right), \quad \text{etc..}$$

La $k^{\text{ème}}$ étape s'écrit donc comme suit :

$$a_l^{(k)} = a_l^{(k-1)} - \left(\frac{a_{l,k}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \right) \cdot a_k^{(k-1)} \quad \begin{cases} k=1, \dots, n-1 \\ i= k+1, \dots, n \\ j= k+1, \dots, n+1 \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

I.1.6.4 Cas particulier :

On remarque que toutes ces transformations supposent que les termes a_k appelés « pivot » sont non nuls. Il faudra vérifier que le pivot a_k est non nul, l'algorithme général devient :

Première phase :

$$\text{Si } \begin{cases} a_k^{(k-1)} = 0 \\ a_i^{(k-1)} \neq 0 \end{cases} \quad i > k \text{ (élément de } k - \text{ième colonne),}$$

on permute les lignes i et k de la matrice $[A, b]^{(k-1)}$.

L'élément se trouvant alors en position de pivot, c'est à dire à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne est différent de zéro et la deuxième phase est exécutable.

Dans la pratique, afin de minimiser l'erreur d'arrondi, on évite le plus possible la division par de petits pivots, car des divisions par des nombres petits entraînent des erreurs de calcul importantes.

Pour cette même raison si $a_k^{(k-1)}$ est différent de zéro, on recherche le plus grand pivot par différents procédés dont les plus connus sont :

Procédé du pivot partiel :

On choisit comme pivot l'élément $a_r^{(k-1)}$ tel que :

$$a_r^{(k-1)} = \bar{m} \quad \left| a_{ri}^{(k-1)} \right| \quad i \in [k, n] \quad (\text{I.51})$$

Et on permute les lignes K et r .

Procédé du pivot total :

On choisit comme pivot l'élément $a_r^{(k-1)}$ tel que :

$$a_r^{(k-1)} = \bar{m} \quad \left| a_{ij}^{(k-1)} \right| \quad k \leq i, j \leq n \quad (\text{I.52})$$

Et on permute les lignes r et K puis les colonnes m et K .

Deuxième phase :

La matrice $[A, b]^{(k-1)}$ étant éventuellement modifiée par la première phase, on opère les calculs des éléments non nuls de $[A, b]^{(k)}$ comme il est indiqué avant au (I.50) où $a_i^{(k)}$ sont les éléments de la matrice A d'origine.

Après calcul on obtient le système triangulaire supérieur :

$$A^{n-1} x = b^{n-1} \quad (\text{I.53})$$

b est la $i^{\text{ème}}$ colonne de $[A, b]^{(n-1)}$ qui peut se résoudre aisément par le procédé de calcul à rebours de (I.26).

I.1.6.5 Algorithme de Gauss sans pivotation :

1- Triangularisation : $[A, b] \rightarrow [U, b']$

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \\ a_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} - W \cdot a_{kj}^{(k-1)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k=1, n-1 \\ i=k+1, n \\ j=k+1, n+1 \end{array} \right. \quad (\text{I.54})$$

2- Résolution du système résultant : $[A', b']$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right] \quad i=n, n-1, \dots, 1 \quad (\text{I.55})$$

I.1.6.6 Nombre d'opérations :

Pour passer de $[A, b]^{(k-1)}$ à $[A, b]^{(k)}$ il faut :

Le nombre de multiplications est :

$$nm = (n - k) \times (n - k + 1) \quad (\text{I.56})$$

Le nombre d'additions est :

$$na = (n - k) \times (n - k + 1) \quad (\text{I.57})$$

Le nombre de divisions est :

$$nd = (n - k) \quad (\text{I.58})$$

Pour passer de $[A, b]$ à $[A, b]^{(n-1)}$, le nombre d'opérations sera :

$$nm = na = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) \cdot (n - k + 1) = \frac{n(n^2 - 1)}{3} \quad (\text{I.59})$$

$$nd = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (\text{I.60})$$

La résolution du système triangularisé, on doit effectuer :

$$nm = na = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \frac{n(n-1)}{2} \quad (\text{I.61})$$

$$nd = n \quad (\text{I.62})$$

Finalement le nombre d'opérations de l'algorithme de Gauss est :

$$nm = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \quad (\text{I.63})$$

$$na = nm \quad (\text{I.64})$$

$$nd = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{I.65})$$

I.1.7 Méthode de JORDAN :

I.1.7.1 **Théorème de JORDAN** :

Soit une matrice carrée A quelconque, il existe des matrices S telles que :

$$S \times A = D \quad (\text{I.66})$$

Où D est une matrice diagonale d'ordre n .

I.1.7.2 **Principe** :

La méthode de Jordan consiste à transformer le système (I.21) en un système :

$$A' \times X = b' \quad (\text{I.67})$$

Où A' est une matrice identité d'ordre n .

Cette transformation est effectuée en n étapes, chaque étape se compose d'une opération de normalisation suivie par une opération de réduction.

L'opération de normalisation consiste à remplacer les termes de la diagonale par un, et l'opération de réduction consiste à remplacer les termes hors diagonale par un zéro.

I.1.7.3 Description de la méthode :

Soit le système (I.33).

La transformation $E_i(d)$ appliquée sur une matrice A signifie que la i -ième ligne de cette matrice sera multipliée par d .

Première étape :

Elle consiste à faire procéder à la normalisation en remplaçant le premier terme de la diagonale par l'unité, en pré multipliant la matrice par $E_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$, la première ligne de la matrice devient :

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad j=1, \dots, n+1 \quad (\text{I.68})$$

Cette fois ci, dans la phase de réduction, en substituant les termes sous-diagonaux de la première colonne par zéro c'est-à-dire :

$$a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \dots = a_{n1}^{(1)} = 0 \quad (\text{I.69})$$

Ceci s'obtient en multipliant $[A, b]$ par $E_2(-a_{21})$, $E_3(-a_{31})$, ..., $E_{n1}(-a_{n1})$

Sous forme générale :

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} a_{1j}^{(1)} \quad i=2, n, j=1, n+1 \quad (\text{I.70})$$

A la fin de cette étape le système matriciel s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (\text{I.71})$$

Deuxième étape :

Normalisation :

De même que la première étape, on remplace le second terme de la diagonale par l'unité en pré multipliant le système matriciel par $E_2 \left(\frac{1}{a_2^{(1)}} \right)$, la deuxième ligne devient :

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_2^{(1)}} \quad j=2, \dots, n+1 \quad (\text{I.72})$$

Réduction :

On pré multipliant le système matriciel par $E_{i2}(-a_{i2}^{(1)})$ les termes de la i-ème ligne deviennent :

$$\begin{cases} a_{i2}^{(2)} = a_{i2}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} = 0 \\ a_{i3}^{(2)} = a_{i3}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} a_3^{(2)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{i,n+1}^{(2)} = a_{i,n+1}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} a_{2,n+1}^{(2)} \end{cases} \quad (\text{I.73})$$

Soit :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(2)} \quad j=3, n+1 \quad (\text{I.74})$$

Le système matriciel s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{1,n+1}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_2^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_n^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(2)} \\ a_{2,n+1}^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{I.75})$$

k^{ième} étape :

Normalisation :

En pré multipliant $[A, b]^{(k-1)}$ par $E_k \left(\frac{1}{a_k^{(k-1)}} \right)$ pour remplacer le terme pivot $a_k^{(k-1)}$ par l'unité, la k^{ème} ligne devient :

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \quad j=k, \dots, n+1 \quad (\text{I.76})$$

Réduction :

Les termes hors diagonale de la $k^{\text{ème}}$ colonne sont annulés par pré multiplication de $[A, b]^{(k-1)}$ par $E_{ii}(-a_{ii}^{(k-1)})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne devient :

$$a_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} - a_{ii}^{(k-1)} a_k^{(k)} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n+1 \\ i = k \end{cases} \quad (\text{I.77})$$

I.1.7.4) Algorithme de Jordan:

1. Transformation $[A, b] \rightarrow [I, b']$

$$a_k^{(k)} = \frac{a_k^{(k-1)}}{a_k^{(k-1)}} \quad j = k+1, \dots, n+1 \quad (\text{I.76})$$

$$a_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} - a_{ii}^{(k-1)} a_k^{(k)} \quad \begin{cases} j = k+1, \dots, n+1 \\ i = k \\ i = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{I.77})$$

2. Solution du système résultant:

$$x_i = a_{i, n+1} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.78})$$

I.1.7.5 Nombre d'opérations :

Le passage de $[A, b]^{(k-1)}$ à $[A, b]^{(k)}$ nécessite :

Le nombre de multiplications est :

$$nm = (n-1) \times (n-k+1) \quad (\text{I.79})$$

Le nombre d'additions est :

$$na = (n-1) \times (n-k+1) \quad (\text{I.80})$$

Le nombre d'additions est :

$$nd = (n-k+1) \quad (\text{I.81})$$

Donc le nombre d'opérations nécessaire pour le passage de $[A, b]$ à $[A, b]^{(n)}$ est :

$$na = nm = \sum_{k=1}^n (n-1)(n-k+1) = \frac{n(n^2-1)}{2} \quad (\text{I.82})$$

$$nd = \sum_{k=1}^n (n-k+1) = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{I.83})$$

I.1.8 Méthode par décomposition LU de DOOLITTLE et CROUT :

I.1.8.1 Principe :

Ces deux méthodes consistent à décomposer la matrice quelconque A en deux matrices L et U , telle que L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure.

$$A x = b \quad \text{et} \quad A = L U \Rightarrow L U x = b \quad (\text{I.84})$$

Le système (I.84) peut se décomposer en :

$$L y = b \quad (\text{I.85})$$

$$U x = y \quad (\text{I.86})$$

Le système (I.85) est un système à matrice triangulaire inférieure se résout par la formule (I.24).

De (I.85) on a la solution :

$$y = L^{-1} b \quad (\text{I.87})$$

En reportant cette solution dans (I.86), on arrive à un système à matrice triangulaire supérieure qu'on peut résoudre par l'algorithme (I.26) :

$$x = U^{-1} y = U^{-1} L^{-1} b = A^{-1} \quad (\text{I.88})$$

I.1.8.2 Description de la méthode :

L'équation (I.84) peut s'écrire comme suit :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} \cdot U_{kj} \quad (\text{I.89})$$

où :

$$\begin{cases} L_{ii} = 0 \text{ s. } K > i \\ U_{Kj} = 0 \text{ s. } K > j \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{ik} \cdot U_{kj} \quad (I.90)$$

Les termes de la partie triangulaire supérieure de la matrice A sont :

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^r L_{rk} \cdot U_{kj} \quad j=r,r+1,\dots,n \quad (I.91)$$

Les termes de la partie triangulaire inférieure de la matrice A sont :

$$a_{ir} = \sum_{k=1}^r L_{rk} \cdot U_{kj} \quad j=r,r+1,\dots,n \quad (I.92)$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} U_{rj} &= \frac{a_{rj} - \sum_{K=1}^{r-1} L_{rK} \cdot U_{Kj}}{L_{rr}} \\ L_{ir} &= \frac{a_{ir} - \sum_{K=1}^{r-1} L_{iK} \cdot U_{Kr}}{U_{rr}} \end{aligned} \right\} \quad i=r,n \quad (I.93)$$

Si on connaît les n^2 termes de la matrice A on peut trouver les $(n^2 + n)$ termes non nuls des matrices L et U .

Le système (I.93) est de n^2 équations à $(n^2 + n)$ inconnus.

On remarque qu'on a plus d'inconnues que d'équations, donc il faut fixer n éléments pour résoudre le système, ces n éléments seront fixés à partir de deux algorithmes :

Algorithme de DOOLITTLE :

$$L_{ii} = 1, \quad \forall i.$$

Algorithme de CROUT :

$$U_{ii} = 1, \quad \forall i.$$

I.1.8.3 Algorithme de DOOLITTLE :

$$\left. \begin{aligned}
 L_{ii} &= 1 & i &= 1, n \\
 U_{rj} &= a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{rk} \cdot U_{kj} & j &= r, n \\
 L_{ir} &= \frac{a_{ir} - \sum_{K=1}^{r-1} L_{iK} \cdot U_{Kr}}{U_{rr}} & i &= r+1, \dots, n
 \end{aligned} \right\} \quad r=1, n \quad (I.94)$$

I.1.8.4 Algorithme de CROUT :

$$\left. \begin{aligned}
 U_{ii} &= 1 & i &= 1, n \\
 L_{ir} &= a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{ik} \cdot U_{kr} \\
 U_{rj} &= \frac{a_{rj} - \sum_{K=1}^{r-1} L_{rK} \cdot U_{Kj}}{L_{rr}} & j &= r+1, n
 \end{aligned} \right\} \quad r=1, n \quad (I.95)$$

I.1.9 Méthode de THOMAS :

Cette méthode permet de résoudre un système de la forme :

$$Ax = y \quad (I.96)$$

où A est une matrice tri diagonale, Alors l'algorithme de Gauss peut être simplifié, en tenant compte de la structure particulière de A .

Adoptant pour les éléments non nuls de A , la notation suivante :

$$A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & a_i & b_i & c_i & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \quad (I.97)$$

Ce qui signifie que A contient $(3 \times n - 2)$ termes non nuls dans trois vecteurs a, b, c ayant respectivement $(n - 1)$, (n) et $(n - 1)$ éléments, par conséquent $(n^2 - 3n + 2)$ éléments nuls.

I.1.9.1 Le principe de THOMAS:

Normalisons la première ligne du système (c'est à dire remplacer le premier terme de la diagonale par l'unité en divisant la première ligne par b_1) :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{b_1} & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} & \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{b_1} \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.98})$$

Puis, réduisons la seconde ligne c'est-à-dire remplacer les termes sous diagonaux par 0 ; en lui soustrayant a_2 fois la première ligne :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{b_1} & & & & & \\ a_2 & (b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}) & c_2 & & 0 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} & \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{b_1} \\ y_2 - a_2 \frac{y_1}{b_1} \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.99})$$

Normalisons la deuxième ligne :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{b_1} & & & & & \\ 0 & 1 & \left(\frac{c_2}{b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}} \right) & & 0 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} & \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{b_1} \\ \frac{y_2 - a_2 \frac{y_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}} \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.100})$$

Puis réduisons la troisième :

$$\begin{bmatrix}
 1 & \frac{c_1}{b_1} & & & & & & & \\
 a_2 & 1 & \left(\frac{c_2}{b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}} \right) & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & \\
 \dots & & \left(b_3 - a_3 \frac{c_2}{b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}} \right) & & & & & & \\
 & & & & a_i & & b_i & c_i & \\
 0 & & & & & & & & c_{n-1} \\
 & & & & & & a_n & b_n &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_3 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{y_1}{b_1} \\
 \frac{y_2 - a_2 \frac{y_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}} \\
 \dots \\
 \frac{y_3 - a_3 \frac{y_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \frac{c_1}{b_1}} \\
 \dots \\
 y_i \\
 \dots \\
 y_n
 \end{bmatrix}
 \quad (I.101)$$

En répétant la même procédure pour les n lignes du système, on obtient un système à matrice bidiagonales unitaire (éléments diagonaux égaux à 1).

$$\begin{bmatrix}
 1 & x_1 & & & & & \\
 & 1 & x_2 & & & & 0 \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & & 1 & x_i & \\
 & 0 & & & & \dots & x_{n-1} \\
 & & & & & & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 S_1 \\
 S_2 \\
 \dots \\
 S_i \\
 \dots \\
 S_n
 \end{bmatrix}
 \quad (I.102)$$

Par conséquent la résolution est immédiate.

I.1.9.2 Algorithme de THOMAS :

Soit la notation a, b, c définie en (I.97);

1. Passage d'une matrice tri diagonale à une matrice bi diagonale :

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{c_1}{b_1} \\
 \gamma_i &= \frac{c_i}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \\
 \beta_1 &= \frac{y_1}{b_1} \\
 \beta_i &= \frac{y_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \gamma_{i-1}}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i=2, n-1 \\ i=2, n-1 \end{array} \quad (I.103)$$

1- Résolution du système à matrice bi diagonal (cas particulier d'un système à matrice triangulaire supérieure):

$$\left. \begin{array}{l} x_n = \beta_n \\ x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \end{array} \right\} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (\text{I.104})$$

I.2 Méthode avec pivotation :

I.2.1 Utilisation du résidu comme critère de qualité de la solution :

Considérant le système (I.21), le vecteur solution x_v qui vérifie le système précédent. Cependant à cause des erreurs d'arrondi, la solution calculée est x_c .

On définit le vecteur résidu par :

$$r = b - A x_c \quad (\text{I.105})$$

La solution vraie notée x_v vérifie le système :

$$A x_v = b \quad (\text{I.106})$$

La combinaison des deux dernières équations donne:

$$R = A x_v - A x_c = A (x_v - x_c) = e. A \quad (\text{I.107})$$

e : l'erreur.

ou :

$$(x_v - x_c) = A^{-1} r \quad (\text{I.108})$$

De l'équation (I.108), on remarque de la matrice inverse que si ses éléments sont grands, même si le vecteur résidu possède des éléments petits alors l'erreur sur la solution peut être grande.

Cette remarque est importante car elle signifie que l'on ne peut pas vérifier la précision de la solution d'un système d'équations. Elle n'est pas obtenue en remplaçant simplement la solution dans l'équation et en calculant par la suite les résidus.

Quand la matrice inverse possède de grands éléments (relatifs), on dit que le problème est mal conditionné.

I.2.2 Méthode de JORDAN avec pivot total :

I.2.2.1 principe de la méthode :

Soit le système (I.33) ; Cette méthode possède n étapes, elle permet de choisir les valeurs des pivots (pivots sont les éléments de la diagonale) telles que ces valeurs seront les plus grandes possible.

Première étape $k=1$:

1. Choix du pivot :

On cherche le terme pivot p_1 tel que ce terme est le plus grand de A .

p_1 a une colonne C_1 et une ligne L_1 .

2. Normalisation de L_1 :

On remplace le terme pivot par l'unité, en pré multipliant la matrice augmentée par

$E_{L_1}(\frac{1}{p_1})$ la ligne L_1 devient :

$$a_{L_1 j} = \frac{a_{L_1 j}}{p_1} \quad j=1, \dots, n+1 \quad (\text{I.109})$$

3. Réduisons les termes de C_1 :

On remplace les termes de C_1 par zéro ($a_{i C_1} = 0 \quad i \neq L_1$).

Ceci s'obtient par :

$$a_i = a_i - a_{i C_1} a_{L_1 j} \quad i \neq L_1, j=1, \dots, n+1 \quad (\text{I.110})$$

Deuxième étape $k=2$:

1. Choix du pivot :

On choisi le deuxième terme pivot p_2 pour qu'il soit le plus grand de la matrice après élimination des termes de la ligne L_2 et de colonne C_2 .

Le pivot p_2 a une colonne C_2 et un ligne L_2 .

2. Normalisation de L_2 :

$$a_{L_2 j} = \frac{a_{L_2 j}}{p_2} \quad j=1, n+1 \quad (\text{I.111})$$

3. Réduction de C_2 :

$$a_i = a_i - a_{i C_2} a_{L_2 j} \quad i \neq L_2, j=1, n+1 \quad (\text{I.112})$$

k^{ième} étape :

1. Choix du pivot :

On choisi le terme pivot tel que :

$$P_k = a_{L_k C_k} \quad \text{où} \quad \left. \begin{array}{l} a_{L_k C_k} = \max |a_{ij}| \\ i=1, \dots, n \quad i \quad L_1, L_2, \dots, L_{k-1} \\ j=1, \dots, n+1 \quad j \quad C_1, C_2, \dots, C_{k-1} \end{array} \right\} \quad (I.113)$$

2. Normalisation de L_k :

$$a_{L_k j} = \frac{a_{L_k j}}{p_k} \quad j=1, n+1, \quad k=1, n \quad (I.114)$$

3. Réduction de C_k :

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{i C_k} a_{L_k j} \quad i \quad L_k, \quad j=1, n+1 \quad (I.115)$$

Remise en ordre:

Après les étapes vues précédemment il suffit de remarquer que le $C_k^{\text{ème}}$ élément du vecteur solution x apparait dans la $r^{\text{ème}}$ rangée du vecteur b ($(n+1)^{\text{ème}}$ rangée de $[A, b]$), ainsi :

$$x_{C_k} = a_{L_k, n+1} \quad k \quad (I.116)$$

I.2.2.2 Algorithme de JORDAN avec pivotation total :

1. Choix du pivot :

$$P_k = a_{L_k C_k} \quad \text{où} \quad a_{L_k C_k} = \max |a_{ij}| \\ i=1, \dots, n \quad , \quad i \quad L_1, L_2, \dots, L_{k-1} \\ j=1, \dots, n+1 \quad , \quad j \quad C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$$

2. Normalisation :

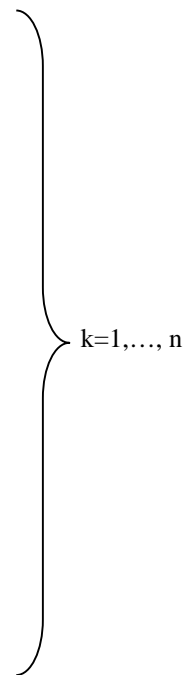
$$a_{L_k j} = \frac{a_{L_k j}}{p_k} \quad j=1, \dots, n+1$$

3. Réduction

$$\left. \begin{array}{l} w = a_{i C_k} \\ a_{ij} = a_{ij} - w a_{L_k j} \end{array} \right\} \quad j=1, n+1 \quad \left. \begin{array}{l} i=1, n \\ i \quad L_k \end{array} \right\}$$

4. Remise en ordre :

$$x_{C_k} = a_{L_k, n+1}$$



I.2.3 Méthode de GAUSS avec pivot partiel :

Soit le système (I.33), Cette méthode est effectuée en n étapes.

I.2.3.1 Principe de la méthode :

Première étape K=1 : Choix du pivot

Choisissons dans la première colonne, le terme de la plus grande valeur absolue, qui est le premier pivot P_1 , il situé en ligne L_1

Réduisons la première colonne, Ceci s'obtient comme suit :

$$a_{li} = a_{li} - \frac{a_{li1}}{P_1} a_{L_1j} \quad i = L_1, j=1, n+1 \quad (\text{I.117})$$

Deuxième étape K=2 : Choix du pivot

Choisissons dans la seconde colonne une ligne différente de L_1 , ce terme de la plus grande valeur absolue, c'est le deuxième pivot P_2 qui est positionné en ligne L_2

Réduisons la deuxième colonne, Ceci s'obtient par l'expression :

$$a_{li} = a_{li} - \frac{a_{li2}}{P_2} a_{L_2j} \quad i = L_1, L_2, j=1, n+1 \quad (\text{I.118})$$

La K-ième étape : Choix du pivot

Choisissons dans la K^{ème} colonne et les lignes différentes de L_1, L_2, \dots, L_{K-1} , le terme de la plus grande valeur absolue, il est le K^{ème} pivot P_K , qui est en ligne L_K .

Réduisons la K^{ème} colonne, Ceci s'obtient par :

$$a_{li} = a_{li} - \frac{a_{liK}}{P_K} a_{L_Kj} \quad \left. \begin{array}{l} i = L_1, L_2, \dots, L_{K-1} \\ j=1, n+1 \end{array} \right\} \quad (\text{I.119})$$

A la fin on obtient un système à matrice triangulaire supérieure, la solution de ce système est donnée par :

$$x_n = \frac{[a_{L_n, n+1}]}{P_n} \quad (I.77)$$

$$x_i = \frac{\left[a_{L_i, n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{L_i, j} x_j \right]}{P_i} \quad i = n - 1, \dots, 1 \quad (I.78)$$

I.2.3.2 Algorithme de Gauss avec pivotation partielle :

1. Recherche du pivot :

$$P_K = \max [a_{L_i}]$$

$$i = 1, n$$

$$i \quad L_1, L_2, \dots, L_{K-1}$$

2. Réduction de la K^{ème} colonne :

$$a_{L_i} = a_{L_i} - \frac{a_{iK}}{P_K} a_{L_K j}$$

$$i \quad L_1, L_2, \dots, L_{K-1}$$

$$j = 1, n+1$$

K=1, ..., n-1

(I.79)

3. Résolution du système obtenu :

$$x_n = \frac{[a_{L_n, n+1}]}{P_n} \quad (I.80)$$

$$x_i = \frac{a_{L_i, n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{L_i, j} x_j}{P_i} \quad \text{avec : } i = n-1, \dots, 1 \quad (I.81)$$

Chapitre II

Dans ce chapitre, on considère la résolution d'une équation linéaire de la forme :

$$\mathbf{AX}=\mathbf{b}, \text{ où } X \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n \quad (\text{I.1})$$

où A étant une matrice $(n \times n)$ de rang n , inversible, mais au lieu de chercher un algorithme permettant d'obtenir la solution directement, si elle existe, on examine des procédés d'itérations qui peuvent créer une suite convergente de vecteurs (X_n) , ayant pour limite la solution désirée.

Ce type de méthode est très utilisé pour des problèmes de grande taille, lorsque la matrice A contient beaucoup de coefficients nuls hors de sa diagonale.

En d'autres termes, nous verrons la généralisation de cette résolution à un système d'équations d'ordre n . Le principe de ces méthodes est en premier lieu, de mettre le système sous la forme : $X = F(X)$ et en second lieu de choisir un vecteur estimé initial arbitraire $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)})^t$ (qui réellement représente la 1^{ère} estimation de la solution recherchée) de la solution exacte $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ du système (II.1) et de générer une séquence de vecteurs :

$$X^{(k+1)} = F^{(k)}(X^{(k-1)}, \dots, X^{(k-1)}) \quad (\text{II.2})$$

Si la fonction d'itération $F^{(k)}$ est indépendante de l'itération k , on dit que l'on a une itération stationnaire, dans le cas contraire, elle est dite non-stationnaire.

Si le calcul du vecteur $X^{(k+1)}$ demande la connaissance des $X^{(k)}$ vecteurs estimés qui le précèdent, on a une formule itérative multi pas ou à i pas.

Une fois que la convergence $(X_n = X_{n-1})$ est vérifiée. Ce processus de calcul sera arrêté et la solution recherchée sera X_n .

II.1 Rappels d'Algèbre linéaire :

II.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres :

En étudiant des transformations linéaires de la forme :

$$Y=A \times X \tag{I.3}$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \tag{I.4}$$

Il est intéressant de connaître quels sont les vecteurs X , s'ils existent, qui gardent la même direction après transformation par l'opération A .

Comme deux vecteurs non nuls ont même direction, si est seulement si l'un est un multiple scalaire de l'autre alors on cherche les vecteurs X dont les images Y par l'opérateur A sont de la forme :

$$Y= \lambda X \tag{I.5}$$

où λ est un scalaire.

On cherche les vecteurs X tels que :

$$A \times X = \lambda X \tag{I.6}$$

ou encore :

$$(A - \lambda I) \times X = 0 \tag{I.7}$$

C'est un système d'équations linéaires et homogènes en X du type :

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{I.8}$$

Et l'on sait qu'une solution X est différente du zéro existe si et seulement si :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (I.9)$$

or:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n [\lambda^n - B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} \dots + (-1)^n \det(A)] = 0 \quad (I.10)$$

où les B_m ($m = 1, \dots, n-1$) sont $(-1)^m$ fois la somme de tous les mineurs principaux d'ordre m de A .

Pour les valeurs de λ qui vérifient cette équation, l'équation (I.10) est vérifiée et uniquement pour ces valeurs.

Ces racines de l'équation caractéristique sont appelées valeurs propres de la matrice A et les vecteurs solutions correspondants du système (I.8) sont appelés vecteurs propres de A .

II.1.2 Rayon spectral :

II.1.2.1 Définition :

Soit $A(n, n)$ une matrice complexe dont les n valeurs propres sont notées λ_i , alors :

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad (I.11)$$

$\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A .

Géométriquement, si toutes les valeurs propres de A sont représentées dans le plan complexe, alors $\rho(A)$ est le rayon du plus petit disque centré sur l'origine et contenant toutes les valeurs propres de A .

II.1.2.2 Bornes du rayon spectral :

Théorème de Guershgorin :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice complexe et :

$$\Lambda_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (II.12)$$

$$\lambda_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (II.13)$$

Toutes les valeurs propres de A ont des images dans le plan complexe situées à l'intérieur de l'union des n cercles de centre a_{ii} et de rayon r_i (domaine D_1) et à l'intérieur de l'union des n cercles de centre a_{ii} et de rayon r_j (domaine D_2), donc les valeurs propres sont telle que :

$$\lambda \in D_1 \cup D_2.$$

Démonstration :

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre correspondant à λ , par définition de λ on a :

$$(\lambda - a_{ii})X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} X_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (II.14)$$

Normalisons X afin que sa composante de plus grand module X_r soit égale à 1.

Si $|X_r| = 1$, alors :

$$|\lambda - a_{rr}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj} \cdot X_j| \quad (II.15)$$

D'où :

$$|\lambda - a_{rr}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj}| \cdot |X_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj}| = r_r \quad (II.16)$$

Donc la valeur propre λ est située dans le disque :

$$|\lambda - a_{rr}| \leq r_r \quad (II.17)$$

Ceci étant vrai pour toutes les valeurs propres, on a démontré que toutes les valeurs propres de A sont situées dans l'union des cercles :

$$|Z - a_{ii}| \leq r_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (II.18)$$

II.2 Principe des itérations successives :

On veut résoudre le système linéaire :

$$A x = b \quad (II.19)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n .

Ecrivons A sous la forme :

$$A = M - N \quad (II.20)$$

Avec la condition que M doit être régulière et le système (II.19) peut s'écrire :

$$(M - N) x = b \quad (II.21)$$

ou encore :

$$M x = N x + b \quad (II.22)$$

La méthode itérative associée à l'égalité précédente consiste, à partir d'un vecteur initial $X^{(0)}$ à générer la suite $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)}$ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(1)} = M^{-1} N X^{(0)} + M^{-1} b \\ X^{(2)} = M^{-1} N X^{(1)} + M^{-1} b \\ \dots\dots\dots \\ X^{(k)} = M^{-1} N X^{(k-1)} + M^{-1} b \\ X^{(k+1)} = M^{-1} N X^{(k)} + M^{-1} b \end{array} \right. \quad (II.23)$$

Cette suite d'égalités peut être présentée par la relation itérative suivante :

$$X^{(k+1)} = T X^{(k)} + V \quad k=0,1,2,\dots \quad (II.24)$$

où : $T = M^{-1}N$

$$V = M^{-1} b$$

La matrice d'itération T et le vecteur V sont indépendants de k .

La question que l'on pose à propos de la méthode itérative de la résolution de l'équation (II.24) est celle de la convergence. En d'autres termes $X^{(k+1)}$ converge-t-il vers le vecteur solution de l'équation (II.19)

Pour répondre à cette question, le vecteur d'erreur est défini par :

$$e^{(k)} = X^{(k)} - X \quad (I.25)$$

qui est associé à la k-ième itération.

Comme X vérifie :

$$X = TX + V \quad (I.26)$$

et :

$$X^{(k)} = TX^{(k-1)} + V \quad (I.27)$$

En soustrayant les deux équations précédentes on obtient :

$$e^{(k)} = Te^{(k-1)} \quad (I.28)$$

Soit pour $k=0,1,2,\dots$:

$$e^{(1)} = Te^{(0)} ; e^{(2)} = Te^{(1)} ; e^{(3)} = Te^{(2)} \text{ etc...} \quad (II.29)$$

Et :

$$e^{(k)} = Te^{(k-1)} = T^k e^{(0)} \quad (I.30)$$

La convergence de ce processus est assurée si, quelque soit $e^{(0)}$ (donc quelque soit $X^{(0)}$), nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \quad (II.31)$$

où :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)} e^{(0)} = 0 \quad e^{(0)} \quad (II.32)$$

Ce qui revient à dire que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)} = 0 \quad (II.33)$$

où zéro représente la matrice nulle.

La suite définie par $X^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ et l'équation (I.27) converge vers :

$$X = (I - T)^{-1} V \quad (I.34)$$

quelque soit $X^{(0)}$ si et seulement si $\rho(T) < 1$.

D'une manière générale, on a :

$$(A) \quad A \quad (II.35)$$

Une condition suffisante de convergence de l'équation (II.23) est telle que :

$$T < 1 \quad (II.36)$$

On doit avoir obligatoirement $(T) < 1$.

Cette condition sur une norme de T nous fournit une condition de convergence du processus itératif (II.24).

II.3 Décomposition de la matrice A :

Il est évident que nous devons choisir une matrice T qui assure la convergence et telle que :

$$TX+V \quad (II.37)$$

qui ne soit pas chère à calculer.

Nous allons chercher des décompositions de la forme $(M - N)$ de la matrice A de telle façon que M soit facilement inversible et vérifie :

$$(M^{-1}N) < 1 \quad (II.38)$$

ou ce qui est suffisant : $M^{-1}N < 1$.

Définissons les matrices D, L, U telles que :

$$\left. \begin{array}{l} d_{ii} = a_{ii} \\ l_{ij} = -a_{ij} \\ l_{ij} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } i > j \\ \text{pour } i = j \\ \text{pour } i < j \end{array} \quad \begin{array}{l} D \text{ matrice diagonale.} \\ L \text{ matrice inférieure.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_{ij} = -a_{ij} \\ u_{ij} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } j > i \\ \text{pour } j = i \end{array} \quad U \text{ matrice supérieure.}$$

Nous aboutissons à la relation suivante:

$$A = D - L - U \quad (II.39)$$

qui correspond aux trois types de décompositions suivantes :

II.3.1 Méthode de JACOBI :

$$A = M - N \quad (\text{II.40})$$

où : $M = D$ et $N = L + U$

$$T_j = D^{-1}(L + U) \quad (\text{II.41})$$

II.3.2 Méthode de GAUSS-SEIDEL :

$$A = M - N$$

où : $M = D - L$ et $N = U$

$$T_G = (D - L)^{-1}U \quad (\text{II.42})$$

II.3.1 Méthode de Relaxation :

$$A = M - N$$

où : $M = \frac{D}{\omega} - L$ et $N = \frac{L - \omega}{\omega} D + U$

$$T_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - L \right)^{-1} \left(\frac{L - \omega}{\omega} D + U \right) \quad (\text{II.43})$$

II.4 Méthode de JACOBI :**II.4.1 Principe :**

La matrice A étant décomposée en :

$$A = M - N = D - (L + U) \quad (\text{II.44})$$

Le système (II.19) devient :

$$D X = (L + U) X + b \quad (\text{II.45})$$

La méthode de Jacobi s'écrit :

$$D X^{(k+1)} = (L + U) X^{(k)} + b \quad (\text{II.46})$$

Soit :

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(L + U) X^{(k)} + D^{-1} b \quad (\text{II.47})$$

II.4.2 Algorithme de JACOBI :

1. Données : $n, a_{ij}, b_i, X_i^{(0)}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$)

2. Pour ($1 \leq i \leq n$) $\left\{ \begin{array}{l} d_i = a_{ii} \\ \text{Pour } (1 \leq j \leq n) \\ b_i = b_i / d_i \\ a_{ij} = -a_{ij} / d_i \end{array} \right.$

3. Tant que ($r_{\max} > \nu$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } (1 \leq i \leq n) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_i = b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \\ r_i = |x_i^0 - x_i| \\ \text{Si } (r_i > r_{\max}) \text{ alors } r_{\max} = r_i \end{array} \right. \\ \text{Pour } (1 \leq i \leq n) \quad x_i^0 = x_i \end{array} \right.$

Nous arrêtons les calculs pour : ($r_{\max} < \nu$)

4. Ecrivons les résultats x_i pour ($1 \leq i \leq n$)

II.5 Méthode de GAUSS-SEIDEL :

Cette méthode suit le même principe que la précédente. La seule différence réside dans la mise à jour dans le calcul de la valeur de x_i par les résultats des k valeurs des x_k qui l'ont précédé. Cette modification permet au processus de converger plus rapidement que la méthode de Jacobi.

II.5.1 Principe :

La matrice A étant décomposée en :

$$A = M - N = (D - L) - U \quad (II.53)$$

Dans la méthode itérative de Gauss-Seidel, on ré-écrit (II.5) de la manière suivante :

$$X^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U X^{(k)} + (D - L)^{-1} b \quad (II.54)$$

Comme l'inverse de $(D - L)$ est compliqué à calculer, on préfère écrire le système sous la forme :

$$(D - L) X^{(k+1)} = U X^{(k)} + b \quad (I. 55)$$

Soit encore :

$$D X^{(k+1)} = L X^{(k+1)} + U X^{(k)} + b \quad (I. 56)$$

où :

$$X^{(k+1)} = D^{-1} L X^{(k+1)} + D^{-1} U X^{(k)} + D^{-1} b \quad (I. 57)$$

En développant cette récurrence vectorielle on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12} X_2^{(k)} - a_{13} X_3^{(k)} - \dots - a_{1n} X_n^{(k)}}{a_{11}} \\ X_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21} X_1^{(k+1)} - a_{23} X_3^{(k)} - \dots - a_{2n} X_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \dots \\ X_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1} X_1^{(k+1)} - a_{n2} X_2^{(k+1)} - \dots - a_{n, n-1} X_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}} \end{array} \right. \quad (I. 58)$$

II.5.2 Condition pour la convergence de GAUSS-SEIDEL :

La formule itérative (II.42) permet de définir la matrice d'itération de Gauss-Seidel par :

$$T_G = (D - L)^{-1} U \quad (II. 59)$$

Et le vecteur V par :

$$V_G = (D - L)^{-1} b \quad (I. 60)$$

La méthode de Gauss-Seidel convergera si $\|T_G\| < 1$, ce qui se traduit par :

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < a_{ii} \quad \text{pour } i=1, n \quad (II. 61)$$

II.5.3 Algorithme de GAUSS-SEIDEL :

1. Données : $n, a_{ij}, b_i, X_i^{(0)}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$)

2. Pour ($1 \leq i \leq n$)

$$\left\{ \begin{array}{l} d0 = a_{ii} \\ \text{Pour } (1 \leq j \leq n) \quad a_{ij} = -a_{ij}/d0 \\ b_i = b_i/d0 \\ a_{ii} = 0 \end{array} \right.$$

3. Tant que ($r \max > v$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } (1 \leq i \leq n) \left\{ \begin{array}{l} x_i = b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \\ r_i = |x_i^0 - x_i| \\ \text{Si } (r_i > r \max) \text{ alors } r \max = r_i \\ x_i^0 = x_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous arrêtons les calculs pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} (r \max < v) \\ \text{ou} \\ \frac{r \max}{\|x_i\|} < v \end{array} \right.$$

4. Finalement, nous écrivons les résultats.

II.6 Méthode de relaxation :

II.6.1 principe :

Cette méthode est une méthode d'itération qui a les mêmes avantages que la méthode de Gauss-Seidel mais qui converge plus rapidement. Pour cela nous introduisons le paramètre ω différent de zéro et posons :

$$\bar{X}^{(k+1)} = \chi^k + \omega (X^{(k+1)} - X^{(k)}) \quad (I.62)$$

Où $X^{(k+1)}$ est un vecteur estimé par la méthode de Gauss-Seidel.

Si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.

Si $\omega > 1$, on détermine la méthode de sur-relaxation.

Si $\omega < 1$, on détermine la méthode de sous-relaxation.

L'algorithme de la méthode de Gauss-Seidel nous permet d'obtenir la solution $X^{(k+1)}$ par:

$$X_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad (II.63)$$

$i = 1, n$

L'équation (II.62) nous permet d'écrire :

$$\bar{X}_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \check{S} \times \left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}} - X_i^{(k)} \right) \quad (II.64)$$

$i = 1, n$

Soit :

$$\bar{X}_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \check{S} \times \left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k)} - a_{ii} X_i^{(k)}}{a_{ii}} \right) \quad (II.65)$$

Finalement, en réarrangeant l'équation (II.65) on obtient :

$$\bar{X}_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \frac{\check{S}}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} X_j^{(k)} \right) \quad (II.66)$$

II.6.2 Algorithme de relaxation :

1. Données : $n, a_{ij}, b_i, , , X_i^{(0)}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$)

$$2. \text{ Pour } (1 \leq i \leq n) \left\{ \begin{array}{l} d_0 = a_{ii} \\ \text{Pour } (1 \leq j \leq n) \\ b_i = \frac{b_i}{d_0} \end{array} \right. \quad a_{ij} = -\frac{a_{ij}}{d_0}$$

$$3. \text{ Tant que } (r \max > \nu) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } (1 \leq i \leq n) \left\{ \begin{array}{l} x_i = x_i + \tilde{S} \times \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \right) \\ r_i = |x_i^0 - x_i| \\ \text{Si } (r_i > r \max) \text{ alors } r \max = r_i \\ x_i^0 = x_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous arrêtons les calculs pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} (r \max < \nu) \\ \text{ou} \\ \frac{r \max}{\|x_i\|} < \nu \end{array} \right.$$

4. Ecrivons les résultats x_i pour $(1 \leq i \leq n)$

II.6.3 Condition de convergence des méthodes de relaxation :

Nous cherchons les limites du facteur de relaxation pour lesquelles la convergence de la méthode est assurée. Nous étudierons trois cas :

1. Cas d'une matrice A quelconque.
2. Cas d'une matrice A symétrique définie positive.
3. Cas d'une matrice tri diagonale.

Cas général : A matrice quelconque

Théorème : on montre que pour toute matrice A une condition nécessaire de convergence est que : $0 < \omega < 2$

Cas des matrices à diagonale dominante :

Théorème : une condition suffisante de convergence est que A soit à diagonale strictement dominante avec : $0 < \omega < 1$

Cas des matrices symétriques définies positive :

Théorème : pour une matrice symétrique, définie positive la méthode de relaxation est convergente si et seulement si : $0 < \omega < 2$

II.7 Méthode d'optimisation :

II.7.1 Principe :

Soit le système linéaire (II.19) à matrice A symétrique définie positive.

Si A n'est pas définie positive on se ramène à un système à matrice symétrique définie positive par pré multiplication par A^t :

$$A^t A X = A^t b \quad (\text{II.67})$$

Avec A est le vecteur solution.

Définissons le résidu :

$$r = b - Ax \quad (\text{II.68})$$

Et la forme quadratique :

$$E(X) = \frac{1}{2} (X - X)^t A (X - X) = \frac{1}{2} X^t A X - X^t b + \frac{1}{2} X^t A X \quad (\text{II.69})$$

qui vaut aussi :

$$X = A^{-1}(b - r) \text{ et } X = A^{-1}b : \quad (\text{II.70})$$

$$E(X) = \frac{1}{2} r^t A^{-1} r \quad (\text{II.71})$$

Le fonctionnel (II.69) est une forme quadratique définie positive dont le minimum unique se trouve au point annulant le gradient de $E(X)$. Or de (II.69) on a :

$$E(X) = \left\{ \frac{\partial E(X)}{\partial X} \right\} = -(b - Ax) = -r \quad (\text{II.72})$$

Donc le minimum de $E(X)$ correspond au point où :

$$b - Ax = 0 \quad (\text{II.73})$$

Autrement dit la solution du système algébrique correspond au vecteur minimisant $E(X)$. On peut ramener la résolution du système algébrique à celui de la minimisation de la forme quadratique (II.71).

II.7.2 Méthode de descente :

Parmi les méthodes de minimisation d'une fonction E , la méthode de descente, opérant une recherche unidimensionnelle dans une direction de descente qui a pour formule générale :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} \quad (I.74)$$

où :

$P^{(k)}$ est une direction au point $X^{(k)}$ pour $E(X)$.

$\alpha^{(k)}$ est un scalaire dont la valeur reste à définir.

II.7.2.1 Direction de descente :

Si $E(X)$ est continue et continument différentiable, alors au voisinage du point $X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, on fait le développement de Taylor :

$$E(X^{(k)} + X) = E(X^{(k)}) + X^T \nabla E(X^{(k)}) + \dots \quad (I.75)$$

Si X est petit on peut négliger les termes d'ordre supérieur.

On remarque que si :

$$X^T \nabla E(X^{(k)}) < 0 \quad (I.76)$$

Alors :

$$E(X^{(k)} + X) < E(X^{(k)}) \quad (I.77)$$

Une direction vérifiant l'équation (II.62) est dite direction de descente au point $X^{(k)}$ et pour la fonction du type $E(X)$.

II.7.2.2 Pas de descente optimale :

Cherchons la valeur du pas $\alpha^{(k)}$ minimisant la fonction $E(X^{(k+1)})$ dans la direction de descente $P^{(k)}$. On a :

$$E(X^{(k+1)}) = E(X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)}) \quad (I.78)$$

De l'équation (II.69) on obtient :

$$E(X^{(k+1)}) = \frac{1}{2} (X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} - X^{(k)})^T A (X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} - X^{(k)}) \quad (I.79)$$

La fonction exprimée par l'équation ((II-66)) sera minimale pour $\alpha^{(k)}$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(X^{(k+1)})}{\partial \alpha^{(k)}} &= (P^{(k)})^T A (X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} - X) = 0 \\ &= (P^{(k)})^T (AX^{(k)} - b + A \alpha^{(k)} P^{(k)}) = 0 \\ &= (P^{(k)})^T (-r^{(k)} + A \alpha^{(k)} P^{(k)}) = 0 \end{aligned} \quad (II.80)$$

Donc la valeur de $\alpha^{(k)}$ est définie telle que :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = 0 \quad (II.81)$$

qui est le pas optimal dans la direction $P^{(k)}$ pour un résidu $r^{(k)}$ donnée par :

$$\alpha^{(k)} = \frac{P^{(k)T} r^{(k)}}{P^{(k)T} A P^{(k)}} \quad (II.83)$$

La formule générale de la méthode de descente avec pas optimum comme solution du système algébrique linéaire est exprimée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(k+1)} = X^{(k)} + \frac{P^{(k)T} r^{(k)}}{P^{(k)T} A P^{(k)}} P^{(k)} \\ \text{où} \\ r^{(k)} = b^{(k)} - A X^{(k)} \end{array} \right. \quad (II.84)$$

Les méthodes de descente sont multiples et qui se différencient par le choix de la direction de descente $P^{(k)}$.

II.7.3 Méthode du Gradient :

On choisit la direction de minimisation de la fonction $E(X)$ par :

$$P^{(k)} = - \nabla E(X^{(k)}) \quad (II.85)$$

C'est-à-dire que l'on prend pour $p^{(k)}$ la direction de plus grande diminution ponctuelle de la fonction. De l'équation (II.72) on remarque que $p^{(k)}$ est colinéaire à $r^{(k)}$ et l'algorithme (II.84) peut alors s'écrire sous la forme la plus générale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(k+1)} = X^{(k)} + \frac{r^{(k)T} r^{(k)}}{r^{(k)T} A r^{(k)}} r^{(k)} \\ \text{avec: } r^{(k)} = b - A X^{(k)} \\ \text{On arrête quand } \left| \frac{r^{(k+1)} - r^{(k)}}{r^{(k)}} \right| < \varepsilon \end{array} \right. \quad k=0, \dots, k_{\max} \quad (II.86)$$

II.7.4 Méthode de Gradient Conjugué :

L'algorithme (II.86) est une méthode itérative conduisant à la solution du système algébrique linéaire. Toutefois on peut montrer géométriquement que les directions de descente $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(k)}$ ne sont que localement les meilleures et qu'il existe de meilleures directions de descente.

Dans la méthode du gradient conjugué, on prend plutôt des directions orthogonales au sens de la métrique de A : on parle alors de directions A -conjuguées.

II.7.4.1 Directions conjuguées :

On choisit des directions $P^{(k)}$ telles qu'elles soient A -conjuguées, c'est-à-dire vérifiant :

$$P^{(k)T} A P^{(k+1)} = 0 \quad k \quad (II.87)$$

L'expression (II.87) montre que c'est la direction qui minimise le plus la fonction $E(X^{(k+1)})$ à l'itération $(k+1)$.

II.7.4.2 Justification du choix des directions conjuguées :

On cherche $P^{(k)}$ dans le plan formé par les directions $P^{(k-1)}$ et $r^{(k)}$ qui sont orthogonales. On prend :

$$P^{(k)} = r^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k-1)} \quad (II.88)$$

Et on choisira le scalaire $\alpha^{(k)}$ minimisant la fonction $E(X^{(k+1)})$.

En introduisant (II.72) dans (II.66) et en différentiant par rapport à $\beta^{(k)}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(X^{(k+1)})}{\partial \beta^{(k)}} &= \beta^{(k)} P^{(k-1)} A [X^{(k)} - X + \beta^{(k)} (r^{(k)} + P^{(k-1)} \beta^{(k)})] \\ &= -\beta^{(k)} P^{(k-1)} r^{(k)} + \beta^{(k)} P^{(k-1)T} A \beta^{(k)} (r^{(k)} + \beta^{(k)} P^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (I. 89)$$

La valeur de $\beta^{(k)}$ minimisant $E(X^{(k+1)})$ vérifie :

$$\frac{\partial E(X^{(k+1)})}{\partial \beta^{(k)}} = 0 \quad (II.90)$$

Soit :

$$-\beta^{(k)} P^{(k-1)} r^{(k)} + \beta^{(k)} P^{(k-1)T} A \beta^{(k)} r^{(k)} + \beta^{(k)} \beta^{(k)} P^{(k-1)T} A P^{(k-1)} = 0 \quad (II. 91)$$

Comme :

$$P^{(k-1)} r^{(k)} = 0 \quad (II.92)$$

On peut obtenir la valeur optimale de $\beta^{(k)}$ par :

$$\beta^{(k)} = \frac{-P^{(k-1)T} A r^{(k)}}{P^{(k-1)T} A P^{(k-1)}} \quad (I. 93)$$

On peut déduire que :

$$\beta^{(k)} P^{(k-1)T} A P^{(k-1)} + P^{(k-1)T} A r^{(k)} = 0 \quad (II.94)$$

Soit :

$$P^{(k-1)T} A (r^{(k)} + \beta^{(k)} P^{(k-1)}) = 0 \quad (II.95)$$

De par (II.88), on note que :

$$P^{(k-1)T} A P^{(k)} = 0 \quad (I. 96)$$

Cette expression représente bien des directions A-conjuguées.

Nous avons démontré que la direction $P^{(k)}$ A-conjuguée selon (II.96) était bien celle qui minimisait la fonctionnelle $E(X^{(k+1)})$. Nous avons aussi calculé le choix du scalaire $\beta^{(k)}$ de l'équation (II.88) qui définit $P^{(k)}$ dans le plan déterminé par $(r^{(k)}, P^{(k)})$. Notons aussi que selon (II.88) :

$$r^{(k)T} P^{(k)} = r^{(k)T} r^{(k)} + \beta^{(k)} r^{(k)T} P^{(k-1)} \quad (I. 97)$$

Le second terme du deuxième membre étant nul, on a :

$$r^{(k)T} P^{(k)} = r^{(k)T} r^{(k)} \quad (I. 98)$$

II.7.4.3 Algorithme du Gradient Conjugué :

1. Données : $A, b, k_{\max}, X^{(0)}$,

2. Calculer : $r^{(0)} = b - AX^{(0)}$

$$p^{(0)} = r^{(0)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha^{(k)} &= \frac{p^{(k)T} r^{(k)}}{p^{(k)T} A p^{(k)}} \\
 X^{(k+1)} &= X^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \\
 r^{(k+1)} &= b - AX^{(k+1)} \\
 \alpha^{(k)} &= \frac{r^{(k+1)T} r^{(k+1)}}{r^{(k+1)T} r^{(k+1)}} \\
 p^{(k+1)} &= r^{(k+1)} + \alpha^{(k)} p^{(k)}
 \end{aligned} \right\} k=0,1,\dots,k_{\max}$$

4. Arrêter quand:

$$\frac{r}{b} < \varepsilon$$

II.7.4.4 Taux de convergence :

On montre que l'algorithme du gradient conjugué appliqué à la résolution d'un système algébrique linéaire d'ordre n converge au maximum en plus n itérations.

En fait à cause des erreurs d'arrondi dans les calculs des directions conjuguées, on n'obtient pas la solution exacte en n itérations. Toutefois on montre que le nombre d'itérations nécessaires pour passer à :

$$\frac{E(X^k)}{E(X^{(0)})} < \varepsilon \tag{II.99}$$

est proportionnel à la racine carrée du conditionnement.

La méthode du gradient nécessite un nombre d'itérations proportionnel à $\text{Cond}(A)$. Alors que celle du gradient conjugué ou le nombre d'itération est proportionnel à la racine carrée de $\text{Cond}(A)$.

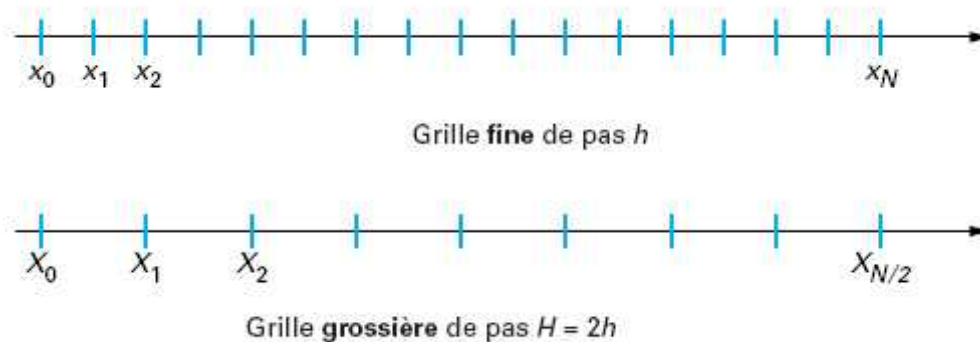
II.8 Méthode bigrilles :

Le problème consiste à résoudre le système matriciel suivant :

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (II.100)$$

II.8.1 principe de la méthode de deux grilles :

Pour exposer d'une manière simple le principe de la méthode multigrilles, on commence par présenter la méthode deux-Grilles ; cette dernière combine deux méthodes peu performantes pour finalement obtenir une méthode très efficace. On considère une grille fine de pas h et une grille grossière de pas H tel que $H = 2h$.



Les erreurs de la solution oscillent sur une plage de fréquences (hautes et basses fréquences).

Un cycle de la méthode bigrilles se compose de deux phases :

Une méthode de lissage (pas h) :

Elle consiste à faire deux ou trois itérations ($\mathbf{1}$) par une méthode de relaxation (Jacobi ou Gauss Seidel), permettant de réduire les hautes fréquences de l'erreur lorsque l'on décompose celle-ci dans la base des vecteurs propres de la matrice ;

U_n : solution exacte.

u_n : solution approximée.

L'erreur est donné par :

$$e_h = U_h - u_h \quad (\text{II.101})$$

Soit u_h l'approximation de la solution exacte, le système algébrique linéaire discret s'écrit:

$$A_h U_h = F_h \quad (\text{II.102})$$

Le résidu est défini par:

$$r_h = F_h - A u_h \quad (\text{II.103})$$

Le système (II.102) est mis sous la forme :

$$A_h e_h = r_h \quad (\text{II.104})$$

La méthode de relaxation (Jacobi, Gauss Seidel) réduit l'erreur haute fréquence mais ne détecte pas l'erreur basse fréquence (transformé de Fourier pour la décomposition en fréquence)

$$\text{Si } e_h \rightarrow 0 \Rightarrow r_h \rightarrow 0 \quad (\text{II.105})$$

Comme l'erreur ne peut pas tendre vers zéro dans la grille fine alors on passe vers la grille grossière.

Une méthode de correction sur grille grossière (pas h) :

Elle traite efficacement les basses fréquences de l'erreur dans la mesure où un mode basse fréquence sur la grille fine se transformera à terme en un mode oscillant sur la grille grossière et sera, par conséquent bien lissé par une méthode de relaxation.

La grille grossière de pas H traite d'une manière efficace les basses fréquences avec le moins coût de calcul (nombre de points est réduit de moitié).

On définit r_H le résidu dans la grille grossière.

$$r_H = I_h^H \times r_h \quad (\text{II.106})$$

où :

I_h^H est l'opérateur de restriction qui exprime le passage de la grille fine vers la grille grossière.

L'erreur dans la grille grossière est :

$$A_H \times e_H = r_H \quad (I.107)$$

L'erreur e_H est une approximation faite dans la grille grossière alors que e_h est celle définie dans la grille fine.

On applique un opérateur de prolongation I_H^h pour faire cette fois-ci le chemin inverse c'est-à-dire passer de la grille grossière vers la grille fine afin que l'erreur e_H soit transformé vers la grille fine par conséquent la solution au niveau de la grille fine est:

$$U_h = u_h + e_h = u_h + I_H^h e_H \quad (I.108)$$

La procédure n'est pas encore terminée dans la pratique car pour encore diminuer l'erreur on fait \underline{z} itérations avec la méthode de relaxation bien sûr après le passage de la grille grossière vers la grille fine.

II.8.2 Algorithme de deux grilles :

1. Lissage sur la grille fine :

$$U_h = S(U_h^{(l-1)}, F_h) \quad l = 1, \dots, \underline{1} \quad (I.109)$$

S : opérateur de lissage (Jacobi ou Gauss Seidel).

$\underline{1}$: le nombre d'itérations.

2. Calcul de résidu sur la grille fine :

$$R_h = F_h - A_h U_h^{(\underline{1})} \quad (I.110)$$

3. Passage de la grille fine vers la grille grossière par l'opérateur de restriction pour la détermination de résidu :

$$r_H = I_h^H r_h \quad (I.111)$$

4. Calcul de l'erreur dans la grille grossière :

$$e_H = (A_H)^{-1} r_H \quad (I.112)$$

5. Passage de la grille grossière vers la grille fine par l'opérateur de prolongation I_H^h , la correction de la solution dans la grille fine sera :

$$U_h^{(l+1)} = U_h^{(l)} + I_H^h e_H \quad (\text{II.113})$$

6. Lissage de la solution sur la grille fine par Gauss ou Jacobi

$$U_h^{(l)} = S(U_h^{(l-1)}, F_h) \quad l = 1 + \dots + 2 + 1 \quad (\text{II.114})$$

II.9 Méthode Multigrilles :

II.9.1 Généralisation :

Dans la méthode deux grilles le pas du maillage de la grille grossière est le double du pas de maillage de la grille fine $H=2h$.

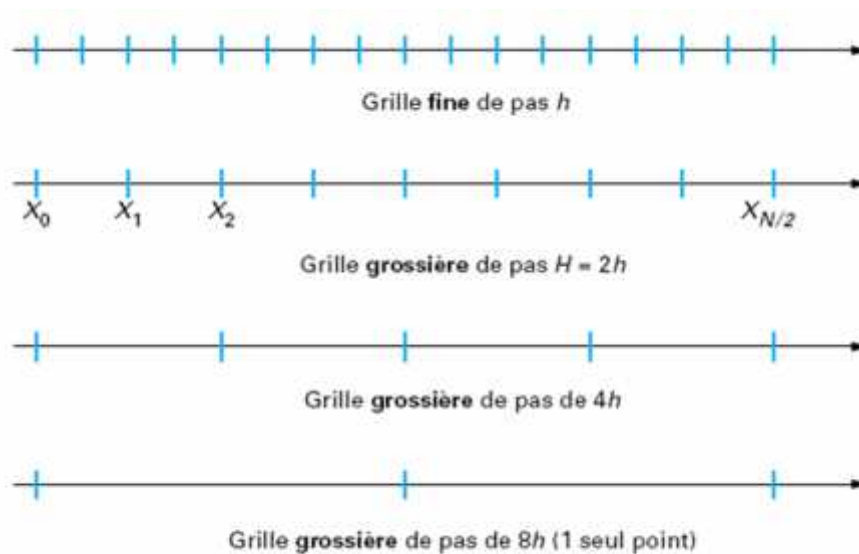


Figure II.1 le pas de maillage

Le passage vers la grille grossière pose le même problème que la grille fine par la détermination du résidu pour permettre le calcul de l'erreur par l'équation (II.107), qui est résolu par le cycle deux grilles.

Ce processus peut être répété d'une manière récursive jusqu'à ce que la grille grossière ne comporte que quelques points correspondants à l'équation de résidu qui est moins cher à résoudre.

La description détaillée de la méthode multi-grilles consiste à considérer un ordre de grilles avec le pas du maillage :

$$h_1 > h_2 > \dots > h_{k-1} > h_k > \dots > h_l \quad (\text{II.115})$$

De sorte que :

$$h_{k-1} = 2h_k \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, l \quad (\text{II.116})$$

k est appelé le numéro du niveau.

Avec h_k l'ensemble de points de grille de niveau k de pas h_k .

Le nombre de points intérieur au niveau k est N_k .

Selon chaque niveau k , nous définissons le problème :

$$A_k U_k = F_k \quad (\text{II.117})$$

Dans ce cas A_k est la matrice $N_k \times N_k$ et U_k et F_k ce sont des vecteurs de taille N_k .

Le transfert se fait entre les niveaux intermédiaires avec un opérateur de restriction I_k^{k-1} et de prolongation I_{k-1}^k .

La solution s'obtient par l'opération de lissage par :

$$U_k = S_k(U_k, F_k) \quad (\text{II.118})$$

II.9.2 Algorithme de la méthode multigrilles :

L'algorithme de la multigrilles pour la résolution du système (II.117), est donné par les étapes suivantes :

1. Si $k=1$, la résolution du système se fait directement telle que :

$$A_k U_k = F_k \quad (\text{II.119})$$

2. Etape de pré lissage sur la grille fine :

$$U_h^{(l)} = S(U_h^{(l-1)}, F_h) \quad l = 1, \dots, l-1 \quad (\text{II.120})$$

3. Calcul de résiduel :

$$r_k = F_k - A_k U_k^{(j)} \tag{II.121}$$

4. Restriction du résidu :

$$r_{k-1} = I_k^{k-1} r_k \tag{II.122}$$

5. Prendre :

$$U_{k-1} = 0 \tag{II.123}$$

6. Appelle fois la méthode multigrilles pour résoudre :

$$A_{k-1} U_{k-1} = r_{k-1} \tag{II.124}$$

7. Correction de la grille grossière :

$$U_k^{(j+1)} = U_k^{(j)} + I_{k-1}^k U_{k-1} \tag{II.125}$$

8. Etape après lissage sur la grille fine :

$$U_k^{(l)} = S(U_k^{(l-1)}, F_k) \quad l = j_1 + 2 + \dots + j_1 + j_2 + 1 \tag{II.126}$$

La méthode multigrilles tient compte du paramètre γ qui est le nombre de fois le procédé multigrilles appliqué au problème du niveau grossier.

Pour $\gamma = 1$, la méthode multi grilles est appelé à V cycle.

Tandis que $\gamma = 2$, la méthode multigrilles est appelé à W cycle.

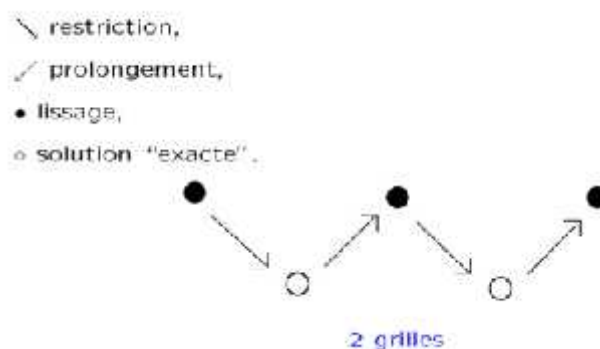


Figure II.2 Bigrilles

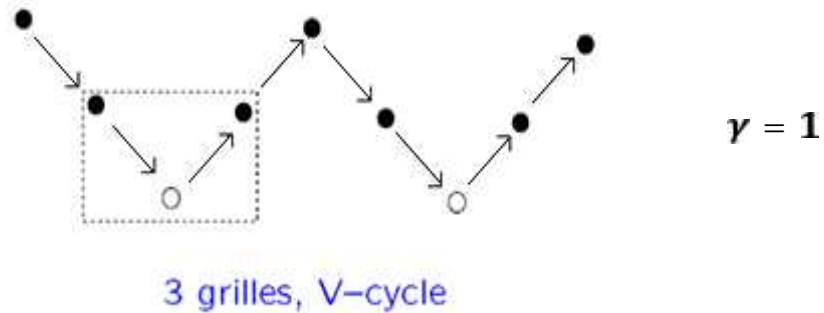


Figure II.3 Trois grilles avec V cycle

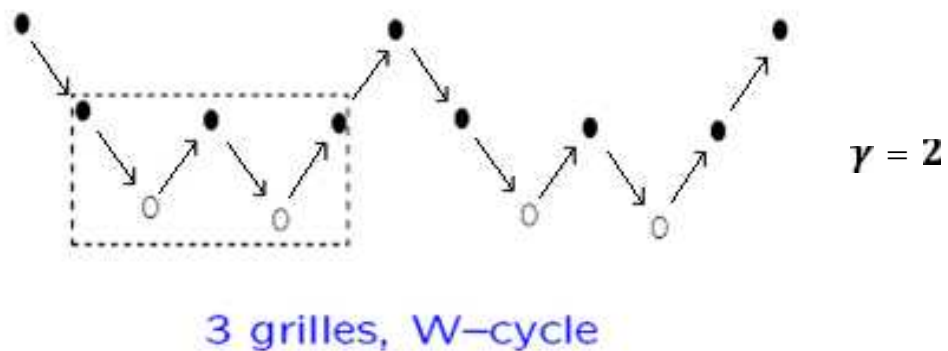


Figure II.4 Trois grilles avec W cycle

II.9.3 la stratégie des cycles :

Le cycle V :

Il est illustré par figure (II.2). D'un part, il commence par une phase de descente de la grille la plus fine vers la grille la plus grossière ($k > 2$) par une matrice de restriction.

Sur chaque grille de passage, le système linéaire est résolu par des lisseurs classiques (Jacobi ou Gauss Seidel) afin de réduire les bases fréquences de l'erreur sur les grilles grossiers en ne faisant que peu de relaxation ($\alpha = 2$).

D'autre part, la phase de montée consiste à effectuer le chemin inverse c'est-à-dire transformer le résidu par une matrice de prolongation vers le niveau supérieur moins grossier.

La correction de la solution sur chaque grille jusqu'à atteindre la grille fine.

Le cycle W :

Le principe de ce cycle est illustré par figure (II.3). Dans ce cas le passage vers la grille la plus grossière par des matrices de restriction se fait d'une manière similaire qu'en cycle V. La différence par rapport au cycle précédent, c'est qu'on peut toujours revenir vers la grille la plus grossière même si on avait effectué la matrice de restriction et de prolongation sans achevée complètement le cycle.

II.10 Méthode par blocs :**II.10.1 Principe :**

Soit le système d'ordre n :

$$Ax=b \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{II.127})$$

Cette méthode consiste à décomposer la matrice A en $p \times p$ blocs notés (A_{ij}) , $i, j = 1, \dots, p$. Ce qui correspond à la structure suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & A_{p3} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix} \quad (\text{II.128})$$

Et supposons, de plus, que les blocs diagonaux soient des matrices carrées inversibles, décomposons également les vecteurs x et b suivant une décomposition par blocs compatibles avec celle de A.

Soient x_i et b_i , $i=1, \dots, p$, les blocs composantes de ces vecteurs.

Avec ces notations, on peut définir l'équation de point fixe associée au problème initial. Nous aurons :

$$A_{ii} x_i = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p A_{ij} x_j \quad (I.129)$$

II.10.2 Méthode de relaxation par blocs :

On définit la méthode de relaxation par blocs d'une manière analogue à celle de la méthode de relaxation précédente ce qui conduit, dans ce cas, à l'écriture suivante :

$$A_{ii} x_i^{k+1} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^p A_{ij} x_j^{k+1} \right) + (1 - \omega) A_{ii} x_i^k - \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^p A_{ij} x_j^k \quad (I.130)$$

avec $(0 < \omega < 2)$.

Pour calculer les composantes du vecteur solution x_i^{k+1} , il est nécessaire de résoudre un système algébrique linéaire du type :

$$A_{ii} x_i^{k+1} = G_i \quad (I.131)$$

Ce dernier vecteur G_i étant parfaitement déterminable. Il faut appliquer une résolution qui soit relativement aisée. Si l'on utilise une décomposition du type $L_i \times U_i$ (L_i est une matrice triangulaire inférieure et U_i est une matrice triangulaire supérieure) basée sur la décomposition de Gauss de la matrice A_{ii} , il suffira d'effectuer une seule fois (lors de l'initialisation de l'algorithme) cette décomposition ; en effet, si l'on stock les facteurs L_i et U_i , il suffira de résoudre à chaque itération k l'équation :

$$L_i \cdot U_i x_i^{k+1} = G_i \quad (I.132)$$

Dans la méthode de relaxation précédente, si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel par blocs.

La formulation de la méthode de Jacobi par blocs s'écrit comme suit :

$$A_{ii} x_i^{k+1} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p A_{ij} x_j^k \quad (I.133)$$

Et le principe de résolution par blocs est le même.

II.10.3 Condition pour la convergence des méthodes par blocs :

L'étude de la convergence des méthodes par blocs est liée au facteur de relaxation. Les résultats obtenus dans ce cas sont :

- Pour toute matrice A , une condition nécessaire de convergence de la méthode de relaxation par blocs est que $0 < \omega < 2$.
- En particulier, la méthode de Gauss-Seidel par blocs, correspondant au cas $\omega = 1$, converge.

Chapitre III

Le concept d'énergie est utilisé en thermodynamique pour préciser l'état d'un système. Il est bien connu le fait que l'énergie n'est ni créée ni détruite, mais seulement transformée d'une forme à l'autre.

La science de la thermodynamique étudie la relation entre la chaleur et d'autres formes d'énergie mais l'objectif de la science du transfert de chaleur (du transfert thermique) est l'analyse du taux de transfert thermique ayant lieu dans un système. L'énergie transférée par transfert de chaleur n'est pas directement mesurable mais peut être appréciée par une quantité mesurable appelée la température.

On a constaté par des observations expérimentales que lorsque dans un système il y a une différence de température, un flux de chaleur (flux thermique) apparaît et il est orienté de la région à haute température vers la région à basse température. Lorsqu'il y a un flux thermique dans un système, un gradient de température y est présent également. La connaissance de la distribution de la température dans un système est nécessaire dans l'étude du transfert thermique.

Les problèmes de transfert thermique jouent un grand rôle dans les applications techniques, soit que les échanges doivent être importants et rapides, soit que, au contraire, on cherche à obtenir un excellent isolement thermique, soit encore que l'on veuille thermostatier avec précision un système.

Dans l'étude du transfert thermique on distingue trois modes de transmission de la chaleur:

La conduction ;

La convection ;

Le rayonnement.

Le premier phénomène, la conduction, a lieu dans les solides. La convection se rencontre spécialement dans les fluides. L'apport de chaleur par rayonnement peut avoir lieu dans tous les milieux transparents aux ondes électromagnétiques. En réalité la distribution de la température, dans un milieu, est la conséquence des effets de ces trois modes de transfert thermique ; il est impossible d'isoler un mode de transfert thermique

d'un autre mode. Pourtant, pour la simplicité de l'étude, on considère ces modes de transfert thermique séparément. Une grandeur souvent utilisée dans l'étude du transfert thermique est la densité du flux thermique qui représente la chaleur traversant l'unité de surface et par unité de temps.

III.1 Conduction :

La conduction thermique est le phénomène de transport de la chaleur mis en jeu dans les solides ; elle est également présentée dans les liquides immobiles et à un moindre degré dans les gaz. Le phénomène microscopique (à l'échelle atomique) intervenant dans la conduction thermique est la propagation de l'agitation thermique des particules des zones plus chaudes vers celles des zones plus froides. Le mécanisme microscopique consiste dans la vibration moléculaire ou atomique (liquides, gaz) et la vibration cristalline ainsi que dans le déplacement des électrons libres (métaux). La conduction thermique est donc le phénomène par lequel l'énergie est transférée des zones à haute température vers des zones à basse température.

La loi de Fourier (pour un milieu isotrope, à travers une surface isotherme) montre que le flux thermique, par conduction, dans une direction donnée est proportionnel à l'aire A normale à la direction du flux thermique et au gradient de température à cette direction. Le flux thermique, dans la direction x , par exemple, conformément à la loi de Fourier est donné par la relation :

$$Q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} A \quad [W] \quad (\text{III. 1})$$

ou si l'on exprime la densité du flux thermique :

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (\text{III. 2})$$

Le coefficient de proportionnalité λ , appelé coefficient de conductivité thermique, dépend de la substance (nature, structure, température, pression, densité, etc.); il se mesure en $[W m^{-1} K^{-1}]$ et il est toujours positif car la chaleur se transmet des zones chaudes vers les zones froides. Si la température décroît dans la direction positive x , alors le gradient de température est négatif. Le flux thermique et la densité du flux

thermique étant des quantités positives dans la direction positive x , alors il est nécessaire d'introduire le signe moins dans le membre droit des expressions (III.1) et (III.2). Si le membre droit des expressions (III.1) et (III.2) est négatif alors le flux thermique (et également la densité du flux thermique) est orienté dans la direction négative x .

Dans le cas général, dans l'espace à plusieurs dimensions, la loi de Fourier est donnée par la relation :

$$Q = -\lambda \nabla T \vec{A} \quad (\text{III.3})$$

où \vec{A} est le vecteur normal à l'aire A . La densité du flux thermique est :

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \quad (\text{III.4})$$

En général la conductivité thermique λ varie en fonction de la température. Pour des basses températures, cette variation peut être négligée.

III.2 Convection :

Dans le cas d'un écoulement d'un fluide en contact avec une paroi solide, s'il y a une différence de température entre la paroi et le fluide, il y a alors un transfert thermique entre le fluide et la paroi comme une conséquence du mouvement du fluide par rapport à la surface de la paroi. Ce phénomène de transfert de chaleur est appelé convection. La propagation de la chaleur est réalisée par transport des particules. Il existe deux types de transport :

III.2.1 Convection naturelle (libre) :

Il est dû aux différences de densité qui sont générées par les gradients de température (si le fluide est isotherme, il n'y a pas de mouvement).

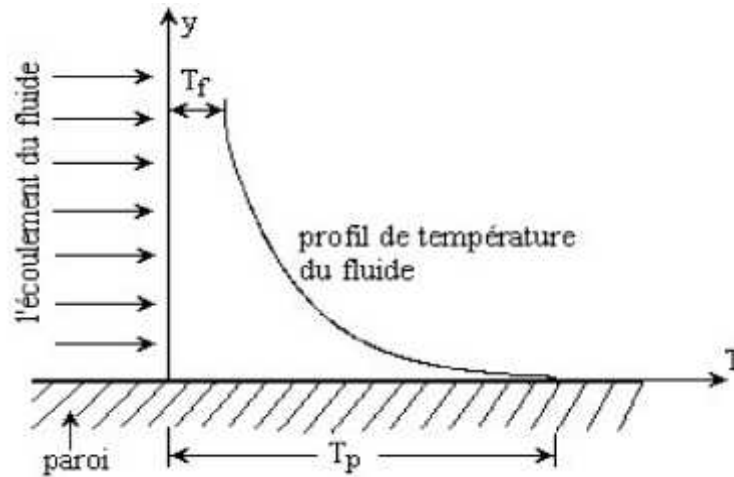


Figure III.1 Transfert thermique par convection entre la paroi chaude et le fluide froid.

III.2.2 Convection forcée :

Ce cas est dû à l'action mécanique (ventilateur, etc.).

Pour permettre ce type de transport, la matière doit se déplacer facilement.

La densité du flux thermique est donnée par la loi de Newton :

$$q = h_c (T_p - T_f) \quad (\text{III.5})$$

où h_c , appelé coefficient de convection, en $\left[\frac{W}{m^2 K} \right]$, dépend d'un grand nombre de facteurs et en particulier de l'écart de température entre le solide et le fluide :

$$\Delta T = T_p - T_f \quad (\text{III.6})$$

III.3 Rayonnement :

Tous les corps émettent de l'énergie à cause de leur température et cette énergie émise s'appelle le rayonnement thermique. L'énergie rayonnée par un corps est émise dans l'espace sous forme d'ondes électromagnétiques selon la théorie de Maxwell (la théorie classique des ondes électromagnétiques) ou sous forme discrète de photons selon les hypothèses de Planck.

Les deux concepts ont été utilisés pour l'étude du transfert thermique par rayonnement.

L'émission ou l'absorption de l'énergie de rayonnement par un corps est un processus en bloc ; c'est-à-dire, le rayonnement provenant de l'intérieur du corps est émis par la surface. Réciproquement, l'incident de rayonnement sur la surface d'un corps pénètre à la profondeur du milieu où il est atténué sur une distance très courte de la surface, on peut parler du rayonnement comme étant absorbé ou émis par la surface. Tous les corps qui émettent du rayonnement absorbent également celui qu'ils reçoivent. Certains corps absorbent intégralement le rayonnement incident ; ils sont appelés « corps noirs » et constituent le radiateur idéal. D'autres corps, les « corps gris », n'absorbent qu'une fraction du rayonnement incident.

III.3.1 L'émission du rayonnement :

La densité maximum du flux thermique émise par un corps à la température T est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$P_r = \sigma T^4 \quad (\text{III.7})$$

où

T est la température absolue en [K] ;

σ est la constante de Stefan-Boltzmann $\left(\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2 K^4} \right] \right)$;

P_r est appelée la puissance émissive du corps noir.

Seulement un « radiateur idéal » ou le « corps noir » peut émettre un flux thermique en concordance avec la relation (III.7). Le flux thermique émis par un radiateur réel, à la température est plus petit que le flux thermique donné par la relation (III.7) et il s'exprime par :

$$q = \varepsilon P_r = \varepsilon \sigma T^4 \quad (\text{III. 8})$$

où ε est l'émissivité qui varie entre 0 et 1 (pour tous les corps réels ε est inférieure à 1).

III.3.2 L'absorption du rayonnement :

Si un flux thermique de rayonnement est incident au corps noir, alors celui-ci est totalement absorbé par le corps noir. Pourtant si le flux de rayonnement est incident au corps réel, alors le flux absorbé par le corps est donné par la relation suivante :

$$q_a = \alpha q_{ir} \quad (\text{III. 9})$$

où le coefficient d'absorption α varie entre 0 et 1 (pour tous les corps réels α est inférieur à 1).

Le coefficient d'absorption α d'un corps est en général différent du coefficient d'émission ε . Pourtant, dans différentes applications pratiques on suppose α égal à ε . Quand deux corps aux différentes températures se trouvent face à face, la chaleur est échangée entre elles par rayonnement. Si le milieu intervenant est rempli d'une substance telle que l'air qui est transparent au rayonnement, le rayonnement émis d'un corps traverse le milieu intervenant sans l'atténuation et atteint l'autre corps, et vice-versa. Alors le corps chaud éprouve un gain net de chaleur, en raison de l'échange thermique par rayonnement. L'analyse de l'échange de chaleur par rayonnement à travers les surfaces est généralement une question compliquée.

III.4 Méthode des volumes finis :

III.4.1 Forme générale de l'équation discrétisée :

La méthodologie utilisée pour la discrétisation de l'équation dans le cas unidimensionnel peut être utilisée facilement dans le cas bidimensionnel.

Pour illustrer cette technique on considère l'équation de la conduction thermique en deux dimensions stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial y} \right) = S \quad (\text{III.10})$$

Le type de maillage utilisé, dans ce cas, est représenté à la figure (III.2) :

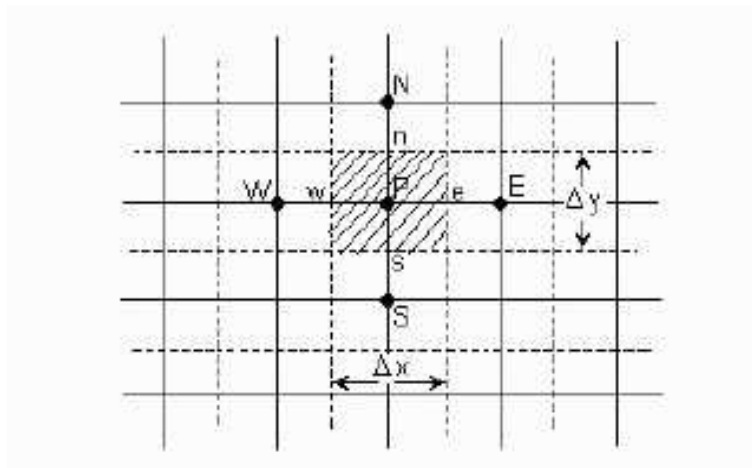


Figure III.2 Maillage bidimensionnel

De plus, par rapport au maillage monodimensionnel, aux nœuds voisins, “East” (E) et “West” (W) du point P on ajoute les voisins “North” (N) et “South” (S).

L'intégration de l'équation (III.10), sur le volume de contrôle, donne :

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) \partial x \partial y + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial y} \right) \partial x \partial y + \int_{vc} S dV = 0 \quad (\text{III.11})$$

Si l'on note $A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$ on obtient :

$$\left[\} A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \} A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\} A_n \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_n - \} A_s \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.12})$$

L'équation (III.12) représente le bilan entre la génération de T dans le volume de contrôle et les flux aux faces du volume de contrôle. En utilisant la même approximation que dans le cas monodimensionnel, c'est-à-dire nous supposons une variation linéaire du gradient de température entre deux points voisins du maillage, on peut écrire les flux aux faces du volume de contrôle :

$$\text{Le flux sur la face "w"} = \} A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = \} A_w \frac{T_E - T_W}{u x_{WP}} \quad (\text{III.13})$$

$$\text{Le flux sur la face "e"} = \} A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e = \} A_e \frac{T_E - T_P}{u x_{PE}} \quad (\text{III.14})$$

$$\text{Le flux au face "s"} = \} A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = \} A_s \frac{T_P - T_S}{u x_{SP}} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{Le flux sur la face "n"} = \} A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = \} A_n \frac{T_N - T_P}{u x_{PN}} \quad (\text{III.16})$$

En remplaçant les relations des flux ci-dessus dans l'équation (III.12), on obtient :

$$\} A_e \frac{T_E - T_P}{u x_{PE}} - \} A_w \frac{T_E - T_W}{u x_{WP}} + \} A_n \frac{T_N - T_P}{u x_{PN}} - \} A_s \frac{T_P - T_S}{u x_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.17})$$

Si l'on tient compte que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ et $\bar{S} = S_c + S_p T_p$ et finalement en regroupant les termes, l'équation (III.17) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\} A_w}{u x_{WP}} + \frac{\} A_e}{u x_{PE}} + \frac{\} A_s}{u y_{SP}} + \frac{\} A_n}{u y_{PN}} - S_p \Delta x \Delta y \right) T_P \\ & = \left(\frac{\} A_w}{u x_{WP}} \right) T_W + \left(\frac{\} A_e}{u x_{PE}} \right) T_E + \left(\frac{\} A_s}{u y_{SP}} \right) T_S + \left(\frac{\} A_n}{u y_{PN}} \right) T_N + S_c \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

L'équation (III.18) peut être écrite sous la forme générale discrétisée pour un nœud intérieur :

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n - S_p \Delta x \Delta y \quad (\text{III.19})$$

$$\text{où } a_w = \frac{\sum_w A_w}{u x_{WP}}, \quad a_e = \frac{\sum_e A_e}{u x_{PE}}, \quad a_s = \frac{\sum_s A_s}{u y_{SP}}, \quad a_n = \frac{\sum_n A_n}{u y_{PN}}$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n - b \quad (\text{III.20})$$

Pour obtenir la distribution de la température T dans une situation bidimensionnelle on écrit l'équation discrétisée pour chaque nœud du maillage. Aux frontières du domaine d'analyse où la température ou le flux sont connus l'équation discrétisée est modifiée pour prendre en compte les conditions aux limites.

III.5 Les conditions aux limites :

Pour la résolution d'une équation de transfert thermique, des conditions initiales et aux limites adéquates sont nécessaires. Les conditions initiales spécifient la distribution de la température à l'instant t nul.

Les conditions aux limites spécifient les conditions thermiques aux frontières du domaine de calcul. Par exemple, sur une frontière, on peut spécifier la distribution de la température, ou la distribution de la densité du flux thermique, ou un transfert thermique par convection vers le fluide environnant ayant une température connue et un coefficient de transfert thermique aussi connu.

Par la suite on présente deux types de conditions aux limites appelées température imposée, densité du flux thermique imposée.

III.5.1 Conditions aux limites de type « DIRICHLET » :

Dans de nombreuses applications pratiques, la température est considérée connue sur les frontières du domaine de calcul. Par exemple, une surface de frontière en contact avec la glace qui se fond est maintenue à une température uniforme ou la distribution de la température sur la frontière est connue en fonction du temps.

Dans certains cas, la distribution de la température aux frontières est spécifiée en fonction de la position et du temps. Quand la valeur de la température est spécifiée à la frontière, on dit que la condition à la limite est du premier type.

III.5.2 Conditions aux limites de type « NEUMANN » :

Dans certains cas, à la frontière d'un domaine de calcul, la densité du flux thermique est connue. Par exemple, quand une surface du domaine d'analyse est chauffée à l'aide d'une installation électrique la densité du flux thermique sur la surface est connue.

Dans ce type des conditions aux limites la source de chaleur extérieure qui entre par la surface de la frontière doit être égale à la densité du flux thermique de conduction de la plaque :

$$q = - \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right| \quad (III.21)$$

Chapitre IV

Dans le présent chapitre, nous présentons les écoulements irrotationnels des fluides parfaits (non visqueux) en deux dimensions dans le cas où le champ de vitesse dérive d'un potentiel; c'est d'ailleurs pour cette raison qu'on appelle de tels écoulements des écoulements à potentiel.

IV.1 Définition de l'écoulement irrotationnel :

L'écoulement d'un fluide est irrotationnel si les vitesses angulaires des particules sont nulles. Dans ce type d'écoulement, toute particule du fluide se déplace en une succession de mouvements de translation pure (fig. IV.1).

Dans un écoulement irrotationnel, la vitesse dérive d'un potentiel qu'elle peut être définie par :

$$\vec{V} = \nabla \Phi \quad \Phi = \int \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (IV.1)$$

Dans le système international [S], les dimensions sont:

$$[\Phi]_S = [V][L] = L^2 T^{-1}$$

En coordonnées cartésiennes, les composantes de la vitesse sont:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (I.2)$$

et, suivant la définition de l'écoulement irrotationnel :

$$\vec{V} = \frac{d\Phi}{dx}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} \quad (I.3)$$

d'où

$$u = \frac{d\Phi}{dx} \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (I.4)$$

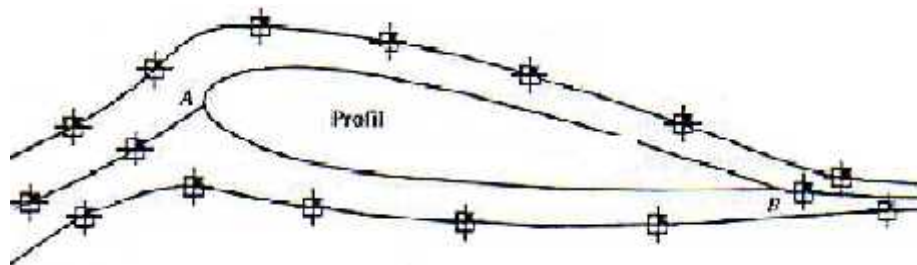


Figure IV.1 Ecoulement irrotationnel.

IV.2 Ecoulement irrotationnel plan :

IV.2.1 Potentiel de vitesses Φ :

L'écoulement irrotationnel plan est un sujet qui a été étudié dans la plupart des ouvrages de mécanique des fluides et d'aérodynamique. Il a été montré que si l'écoulement est irrotationnel dans un plan, c'est-à-dire :

$$\vec{r} \quad \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = 0 \quad (I1 .5)$$

Il existe une fonction Φ appelée potentiel des vitesses. Alors, on peut écrire :

$$u = \frac{d\Phi}{dx} \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (I1 .6)$$

D'autre part, sachant que $\Phi = \Phi(x, y)$, on a :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy \quad (I1 .7)$$

On exprime l'augmentation du potentiel en fonction des vitesses locales u et v comme suit :

$$d\Phi = u dx + v dy \quad (I1 .8)$$

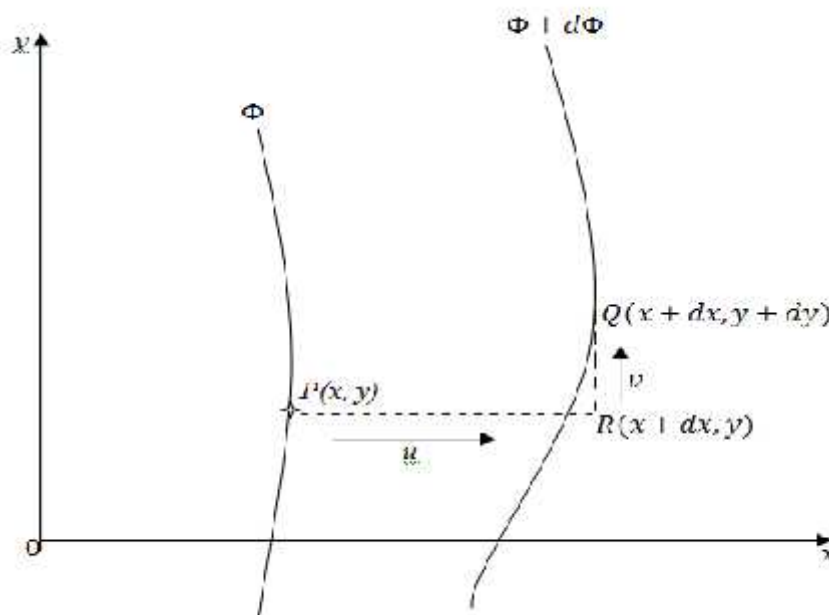


Figure IV.2 Lignes de potentiel en repère cartésien.

IV.2.2 Equation de LAPLACE :

Nous avons vu que si l'écoulement est irrotationnel, les composantes du vecteur vitesse proviennent d'une fonction nommée potentiel des vitesses et satisfont aux relations (IV.1) et (IV.4).

Pour un écoulement incompressible et permanent, l'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (I . 9)$$

$$\frac{d}{d} + \frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial}{\partial} = 0 \quad (I . 10)$$

dans laquelle on introduit le potentiel des vitesses, elle devient :

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (I . 11)$$

ou ∇^2 est l'opérateur de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (I . 12)$$

Pour un écoulement bidimensionnel, incompressible et permanent, l'équation de continuité sous forme cartésienne est :

$$\frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial}{\partial} = 0 \quad (I . 13)$$

Pour les écoulements incompressibles et irrotationnels, le problème se réduit à la détermination d'une fonction harmonique Φ (solution de l'équation de Laplace) qui doit satisfaire aux conditions aux limites sur les frontières du domaine. Dans le cas de l'écoulement stationnaire, on peut représenter les conditions aux limites sur la surface S d'un corps, pour le calcul du potentiel, par la vitesse selon la normale au corps qui est nulle (appelée aussi condition de tangence).

$$V_n = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial} \right|_S = 0 \quad (I . 14)$$

L'équation de Laplace, en coordonnées cartésiennes, peut s'écrire :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0 \quad (I . 15)$$

Pour résoudre les conditions aux limites afin de trouver la solution de l'équation de Laplace, on dispose de méthodes analytiques ou numériques. Le choix de la méthode dépend du degré de difficulté du problème à résoudre. Ainsi, on peut utiliser :

- a. La méthode de superposition de singularités ;
- b. La méthode de séparation des variables ;
- c. La méthode des images ;
- d. La méthode des variables complexes et transformations conformes.

IV.3 Ecoulements irrotationnels simples :

Pour déterminer le potentiel des vitesses, on utilise la méthode de superposition des singularités.

IV.3.1 Ecoulement uniforme :

Si on désigne par V_{∞} la vitesse de l'écoulement non perturbé parallèle à l'axe O_x , la vitesse complexe devient :

$$w = u - i v = V_{\infty} \quad (I.16)$$

Le potentiel des vitesses est donné par :

$$f(z) = V_{\infty} z = V_{\infty} (x + i y) \quad (I.17)$$

$$= V_{\infty} x \quad (I.18)$$

Si l'écoulement fait un angle α avec l'axe O_x , les composantes du vecteur vitesse sont :

$$u = V_{\infty} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = V_{\infty} e^{-i\alpha} \quad (I.19)$$

$$f(z) = V_{\infty} z e^{-i\alpha} \quad (I.20)$$

$$= V_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \quad (I.21)$$

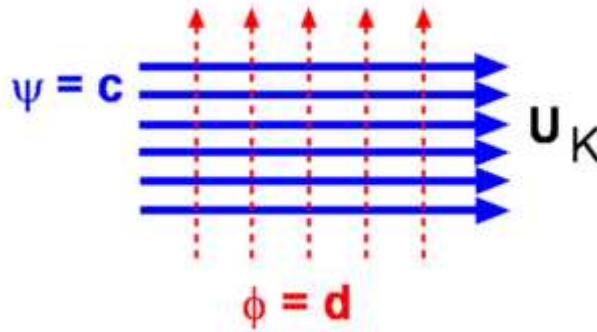


Figure IV.3 Ecoulement uniforme

IV.3.2 Source plane :

L'écoulement déterminé par la présence d'une source plane placée à l'origine (au point 0) est caractérisé par un champ radial de vitesse (fig IV.4). On note v_r la vitesse radiale et v_θ la vitesse tangentielle qui, pour cet écoulement, est nulle. Une source plane est caractérisée par son débit Q , qui se calcule avec la formule :

$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = 2\pi r v_r \quad (IV.22)$$

On obtient la vitesse radiale (qui représente aussi la vitesse totale) grâce à la formule :

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (IV.23)$$

La fonction du potentiel complexe et le potentiel des vitesses sont respectivement :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (IV.24)$$

$$= \frac{Q}{2\pi r} \ln r \quad (IV.25)$$

Dans ce cas, les lignes équipotentielles, $\phi = \text{cte}$, représentées par des cercles concentriques.

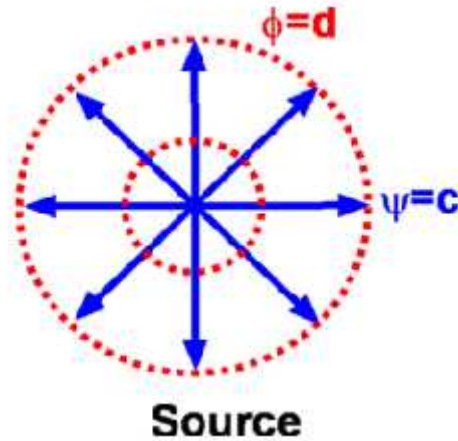


Figure IV.4 Ecoulement déterminé par une source.

IV.3.3 Tourbillon ponctuel : (écoulement plan avec circulation)

Le champ des vitesses déterminé par un tourbillon ponctuel situé à l'origine est circulaire, c'est-à-dire que la vitesse radiale est nulle et que la vitesse totale est égale à la vitesse tangentielle, v_θ . La circulation a la même valeur pour n'importe quelle courbe fermée qui contient, à l'intérieur, le point où est placé le tourbillon.

$$= \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi r v_\theta \quad (I.26)$$

Ce qui donne pour la vitesse tangentielle :

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (I.27)$$

La fonction du potentiel complexe et la fonction de courant correspondent respectivement aux expressions suivantes :

$$f(z) = -\frac{i}{2\pi} \ln z \quad (I.28)$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (I.29)$$

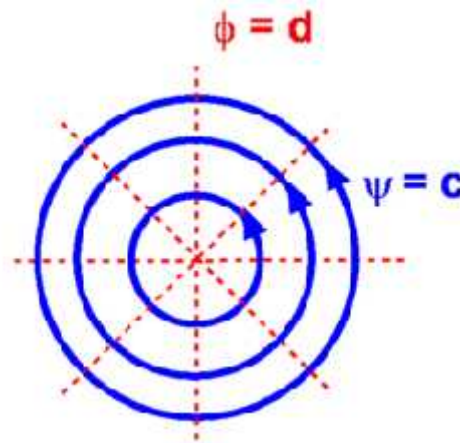


Figure IV.5 Ecoulement d'un tourbillon ponctuel

Les lignes d'égal potentiel (ou lignes équipotentiellles), $\psi = c$, sont données par des cercles concentriques centrés à l'origine.

IV.3.4 Doublet (ou dipôle) plan :

Prenant le cas d'une source et d'un puits qui ont des intensités de $+Q$ et de $-Q$ respectivement, et qui sont placés à des points symétriques par rapport à l'axe 0_y :

$z_1 = -a$ pour la source

$z_2 = a$ pour le puits.

Si la source de débit Q se trouve en $z_1 = -a$ et que le puits de $-Q$ se situe en $z_2 = a$, alors le potentiel complexe, obtenu par la superposition des deux singularités, s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_1) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_2) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + a) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a) \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left(\ln\left(1 - \frac{a}{z}\right) - \ln\left(1 + \frac{a}{z}\right) \right) \end{aligned} \quad (IV.30)$$

Le potentiel complexe de cet ensemble source-puits, appelé doublet (ou dipôle), devient :

$$f(z) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{2a}{z - a}\right) \quad (IV.31)$$

Pour a tendant vers zéro, on développe l'expression du logarithme en série pour obtenir :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{2a}{z-a} - \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{z-a} \right)^2 + \dots \right] = \frac{Qa}{\pi z} \quad (I.32)$$

A la limite, pour une valeur a qui tend vers zéro, on trouve :

$$f(z) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{Qa}{\pi z} \quad (I.33)$$

On définit le moment (ou l'intensité) du doublet par l'expression :

$$m = 2aQ \quad (I.34)$$

qui doit avoir une valeur finie quand a tend vers zéro. On obtient le potentiel complexe et la vitesse complexe pour un doublet centré à l'origine :

$$f(z) = \frac{m}{2\pi z} \quad (I.35)$$

$$w(z) = \frac{dw}{dz} = -\frac{m}{2\pi z^2} \quad (I.36)$$

Le potentiel des vitesses sera :

$$= \frac{m}{2\pi r} \cos \alpha \quad (I.37)$$

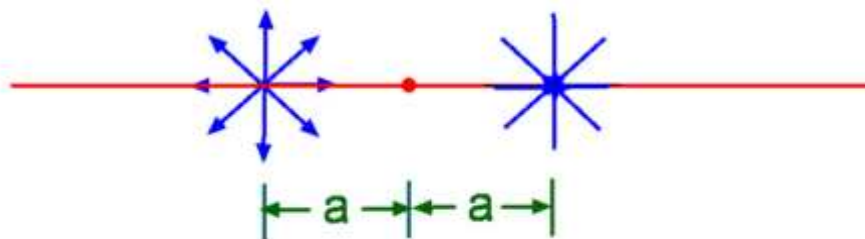


Figure IV.6 Ecoulement déterminé par un doublet

IV.4 Méthode de Superposition des écoulements :

L'équation de Laplace à laquelle doit satisfaire la fonction de potentiel est linéaire, et en ce qui suit, la somme de plusieurs fonctions satisfaisant à cette équation :

$$= \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (I.38)$$

Donc il est possible de construire un nouvel écoulement par une superposition des écoulements connus.

IV.5 La théorie des profils minces pour les profils symétriques minces:

La méthode des différences finies appliquée au calcul de potentiel des vitesses en supposant que l'écoulement se fait à l'angle d'incidence nulle.

Le potentiel de perturbation du champ de vitesse est écrit sous la forme :

$$V = V_0 + V_1 \quad (IV.39)$$

V_0 étant la vitesse de l'écoulement non perturbé.

Le potentiel de vitesse satisfait l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (IV.40)$$

Les conditions de frontière :

$$\phi = 0 \quad (IV.41)$$

Sur le profil:

$$\vec{n} \cdot \nabla \phi = \vec{n} \cdot \vec{V} = 0 \quad (IV.42)$$

Nous rechercherons des approximations du potentiel de vitesse seulement aux intersections de la maille lignes parallèles aux axes de x et y, comme présenté par la figure (IV.7), les inconnus sont désignés par :

$$\phi_{ij} = \phi(x_i, y_j) \quad (IV.43)$$

L'approximation faite pour cinq points au point considéré (x_i, y_j) :

$$\frac{\phi_E - \phi_C - \phi_W}{\frac{1}{2}(h_E + h_W)} + \frac{\phi_N - \phi_C - \phi_S}{\frac{1}{2}(h_N + h_S)} = 0 \quad (IV.44)$$

On remplace \square par \square qui est le point central. et les potentiel adjacents sont représentés par ϕ_E, ϕ_N, ϕ_W et ϕ_S désignent respectivement les potentiels Est, Nord, West et Sud.

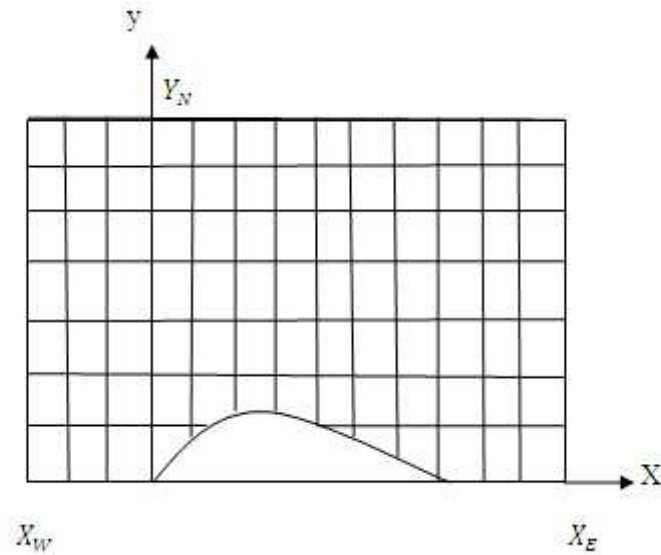


Figure IV.7 La grille de calcul autour d'un profil symétrique discrétiser par la méthode de différences finies.

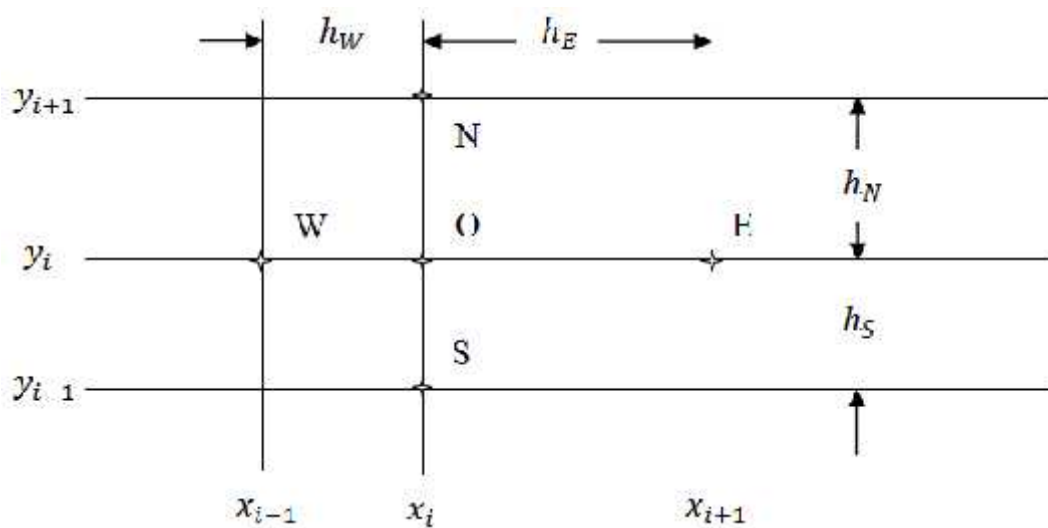


Figure IV.8 Nomenclature pour le point central et les points voisins par la méthode des différences finies de l'équation de Laplace.

Loin du profil, le potentiel de vitesse est exprimé par:

$$0 \quad (IV.45)$$

En terme de vitesse :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u - V = 0 \quad x = x_W \quad \text{Et } x = x_E \quad (IV.46)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = 0 \quad y = y_N$$

Nous pourrions simplement placer les valeurs des potentiels au dessus des frontières du domaine de calcul.

Cependant, le potentiel est seulement une manière de stocker des informations sur le champ de calcul ce qui est physiquement intéressant est la vitesse, c'est préférable pour placer des conditions aux limites sur la vitesse.

Spécifiquement, pour assurer la conservation globale de la masse, nous avons placé les valeurs de la composante normale de la vitesse aux frontières du domaine de calcul en se référant à la figure (IV.8):

$$V_n = V - V \cdot i \quad (IV.47)$$

La géométrie du domaine à tenir en compte lors de la discrétisation est :

$$X_2 = x_W, \quad X_N = x_E, \quad X_N = y_N \quad (IV.48)$$

En utilisant les approximations différentielles centrales suivantes :

$$\frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{X_j - X_{j-1}} = 0; \quad \frac{\phi_{N+1,j} - \phi_{N-1,j}}{X_{N+1} - X_{N-1}} = 0; \quad \frac{\phi_{N+1} - \phi_{N-1}}{X_{N+1} - X_{N-1}} = 0 \quad (IV.49)$$

Les limites du domaine de calcul sont désignées par les points suivants :

$$x = X_1, \quad x = X_{N+1}, \quad \text{et} \quad y = Y_{N+1} \quad (IV.50)$$

IV.6 Méthode des différences finies :

Toutes les méthodes numériques (calcul d'intégration, résolution d'équations différentielles ordinaires, ou partielles, par les techniques des différences finies) sont basées sur l'approximation d'un opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies.

Soit une fonction $u(x, y)$ continue et dérivable.

Développons en série de Taylor $u(x \pm \Delta x, y)$, au point (x, y) , on aura :

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (I.51)$$

$$u(x - \Delta x, y) = u(x, y) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dots \quad (I.52)$$

En additionnant ces deux relations et en divisant par Δx^2 , on aboutit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (I.53)$$

En opérant identiquement suivant la variable y , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (I.54)$$

Dans le cas où $\Delta x = \Delta y$, le laplacien bidimensionnel s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x + \Delta x, y) + u(x, y + \Delta y) - 4u(x, y) + u(x - \Delta x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) \quad (I.55)$$

La résolution de l'équation de poisson suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y) \quad \text{avec } u(x, y) \text{ connu sur} \quad (I.56)$$

Où Γ est la frontière du domaine tel que présenté par la figure (IV.9).

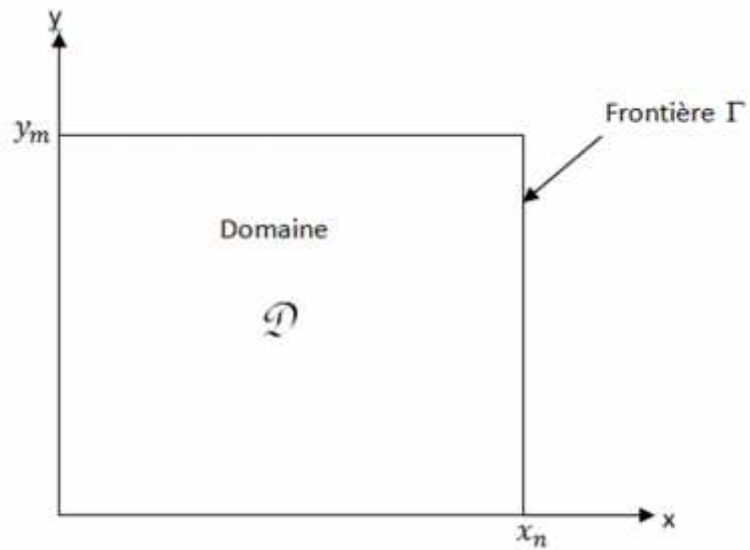


Figure IV.9 Le Domaine « D »

La grille est définie par la discrétisation du domaine (fig. IV.10) :

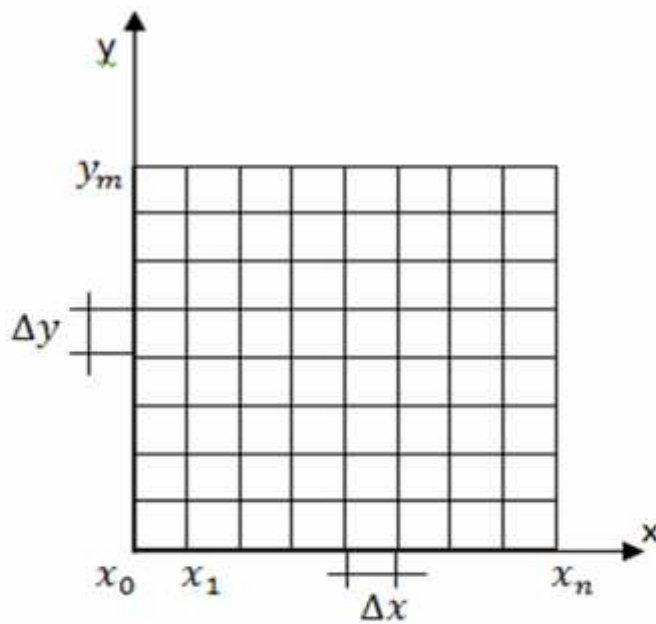


Figure IV.10 Le domaine discrétisé

Les points de la grille sont définies par :

$$\begin{cases} x_i = i \ x & i = 0, n \\ y_j = j \ y & j = 0, m \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

Si le pas suivant x égale à celui suivant y , l'équation (IV.44) peut s'exprimer selon l'équation (IV.43) aux points intérieurs de la grille par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_i, y_j) = \\ \frac{u(x_{i+1} + y_j) + u(x_i + y_{j+1}) - 4u(x_i + y_j) + u(x_{i-1} + y_j) + u(x_i + y_{j-1})}{h^2} \\ + O(h^2) \\ i = 1, n-1; j = 1, m-1 \end{array} \right. \quad (I.58)$$

$$\text{Notons } \left\{ \begin{array}{l} u_i = u(x_i, y_j) \\ F_{ii} = F(x_i, y_j) \end{array} \right.$$

La solution est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_i + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ i = 1, n-1; j = 1, m-1 \end{array} \right. \quad (I.59)$$

Chapitre V

V.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les différentes méthodes numériques itératives à la résolution des systèmes d'équations algébriques pour le problème de Poisson discrétisée par les volumes finis en deux dimensions dans deux disciplines discutées qui sont:

Le transfert thermique ;

L'aérodynamique.

Les méthodes itératives pour la résolution du système d'équations algébriques :

1. Gauss Seidel ;
2. SIP (strongly implicit procedure) en décomposition LU ;
3. Algorithme de thomas TDMA (tridiagonal matrix algorithm) ;
4. Gradient conjugué ;
5. ADI (alternating direction implicit) ;
6. SOR ;
7. Multigrilles avec Gauss Seidel ;
8. Multigrilles avec SIP ;
9. Multigrilles avec Gradient conjugué.

L'équation de Poisson est une équation différentielle aux dérivées partielles, afin de la résoudre nous utilisons deux types de conditions aux limites :

Condition aux limites du premier type (DIRICHLET) ;

Condition aux limites du deuxième type (NEUMANN).

V.2 Application au transfert thermique :

Le phénomène de conduction thermique est modélisé par l'équation à dérivée partielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) = S(x, y) \quad (\text{V.1})$$

Nous allons procéder à la discrétisation par la méthode des volumes finis pour déterminer la distribution de la température aux différents points du maillage.

est la conductivité thermique.

$S(x,y)$ est le terme source.

V.2.1 Première application :

Nous considérons une plaque plane avec les caractéristiques géométriques et physiques suivantes :

La longueur est de 0.5m ;

La largeur est de 0.5 m ;

La conductivité thermique est de 10 W/m.K ;

V.2.1.1 Premier cas :

Le terme source est une constante qui est égale à $40E+06$

- Les conditions aux limites sont du premier type c'est-à-dire de DIRICHLET sur toutes les frontières Ouest, Est, Sud et Nord ;
- La température aux frontières de la plaque sont de :
 - A la frontière nord, la température est égale à 1000 K ;
 - La température initiale de la plaque ainsi que celle des frontières Est, Ouest et Sud est de l'ordre de 300K ;
- Le est fixé à 10^{-5} .

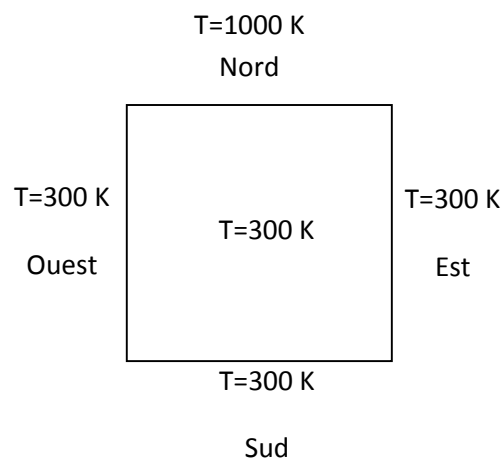


Figure V.1 Conditions initiales de la plaque plane.

Les résultats :

La distribution de la température le long de la plaque avec un nombre total de points 78×78 , et avec une précision de 10^{-5} .

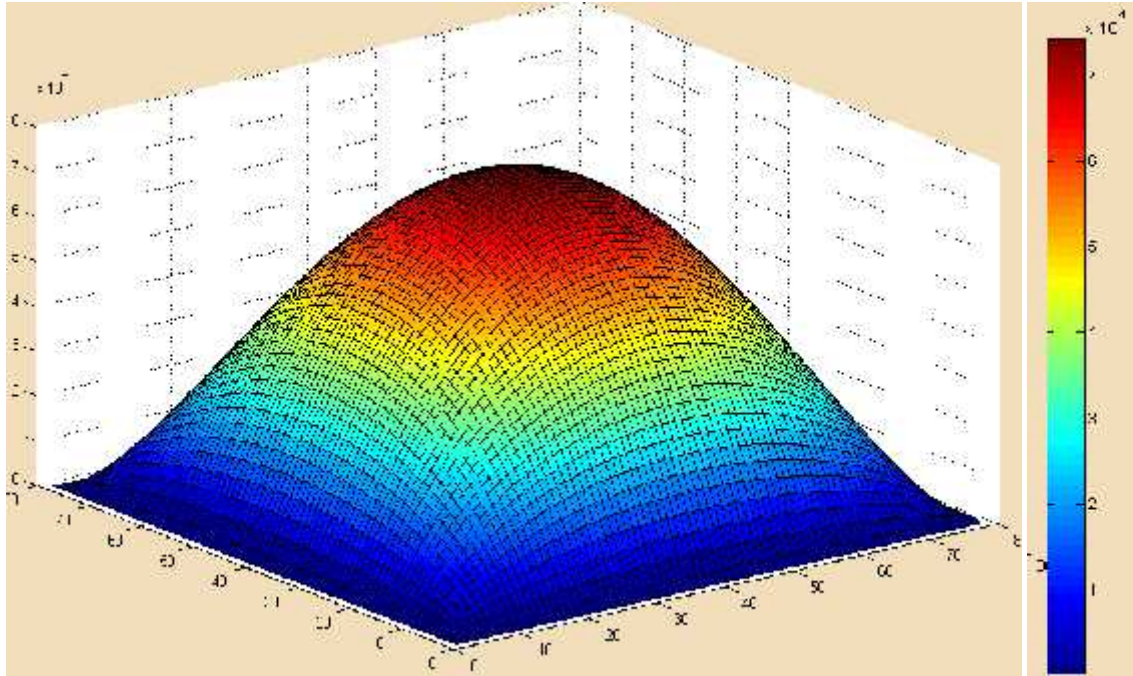


Figure V.2 La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 .

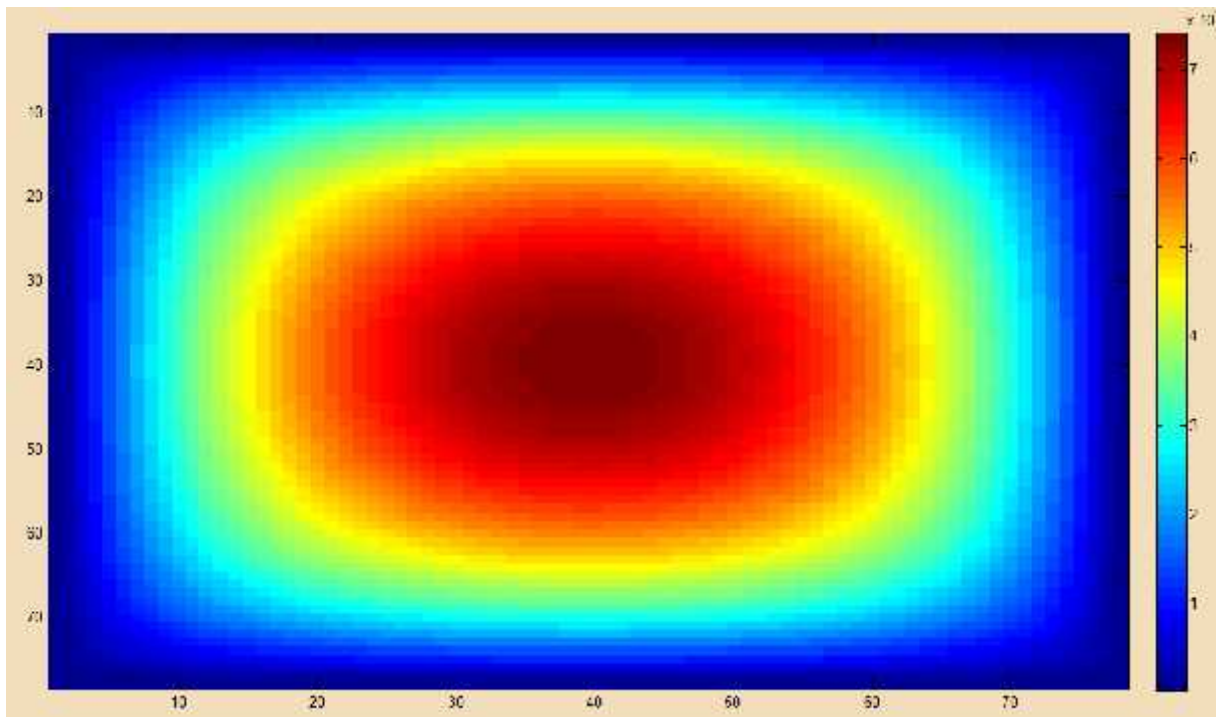


Figure V.3 La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 projetée sur un plan.

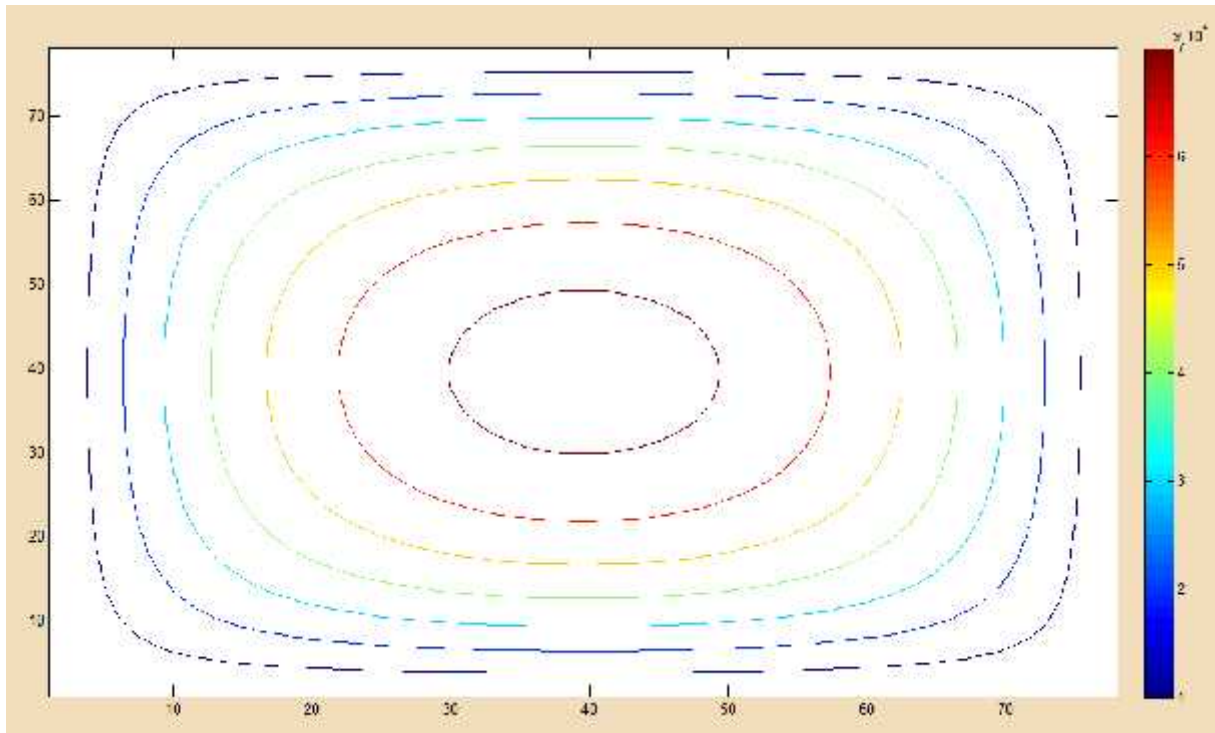


Figure V.4 Les contours de la distribution de température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 .

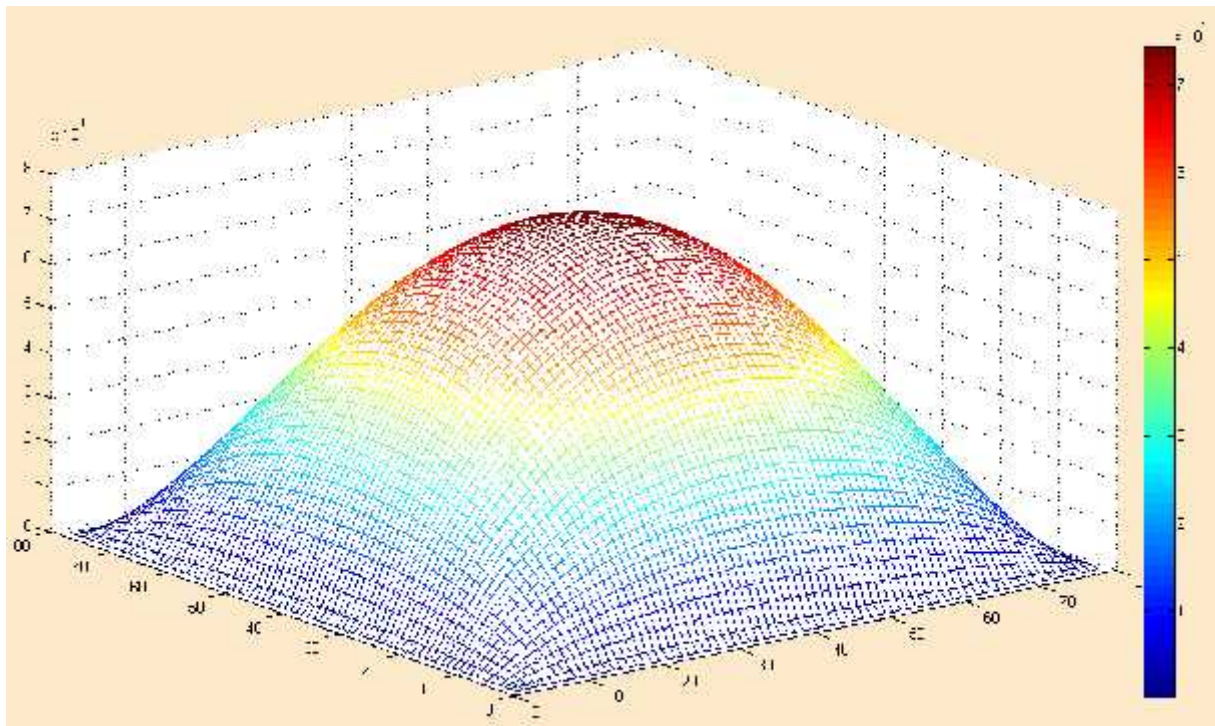


Figure V.5 La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points 78×78 avec maillage.

D'après les figures nous remarquons que la variation de la température est de forme parabolique vu que le terme source est une constante et qu'elle se situe au milieu de la plaque.

La solution est obtenue par différentes méthodes itératives et la précision est meilleure, c'est-à-dire le résidu est minimal en augmentant le nombre d'itérations.

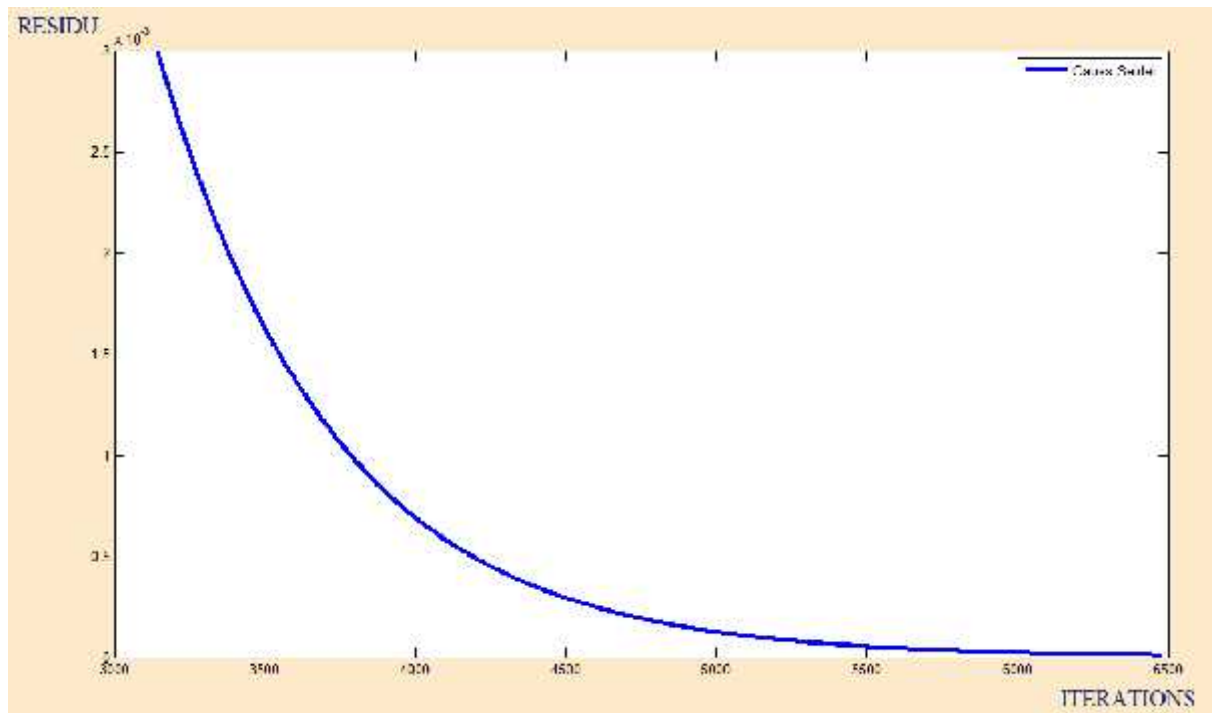


Figure V.6 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gauss-Seidel pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode de Gauss Seidel converge pour un résidu égal à $9,996 \times 10^{-6}$ correspondant à 6482 itérations.

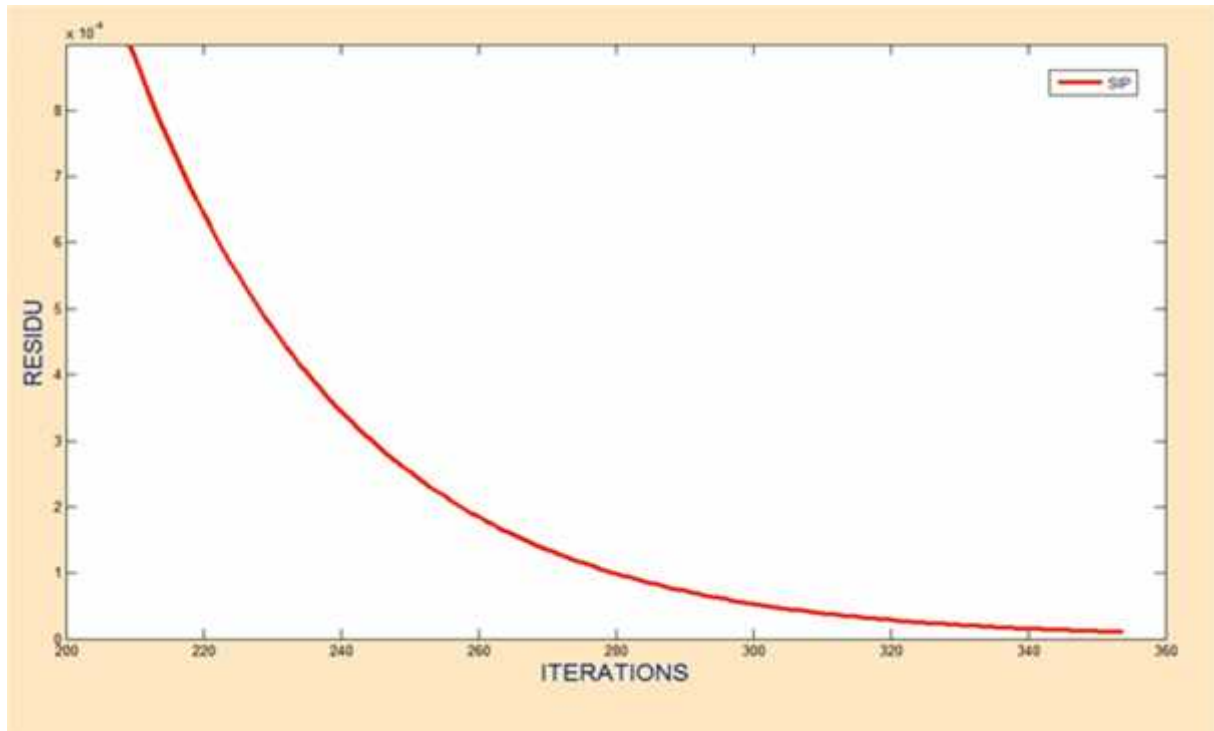


Figure V.7 la variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SIP pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode de SIP converge pour un résidu égal à $9.878 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 354 itérations.

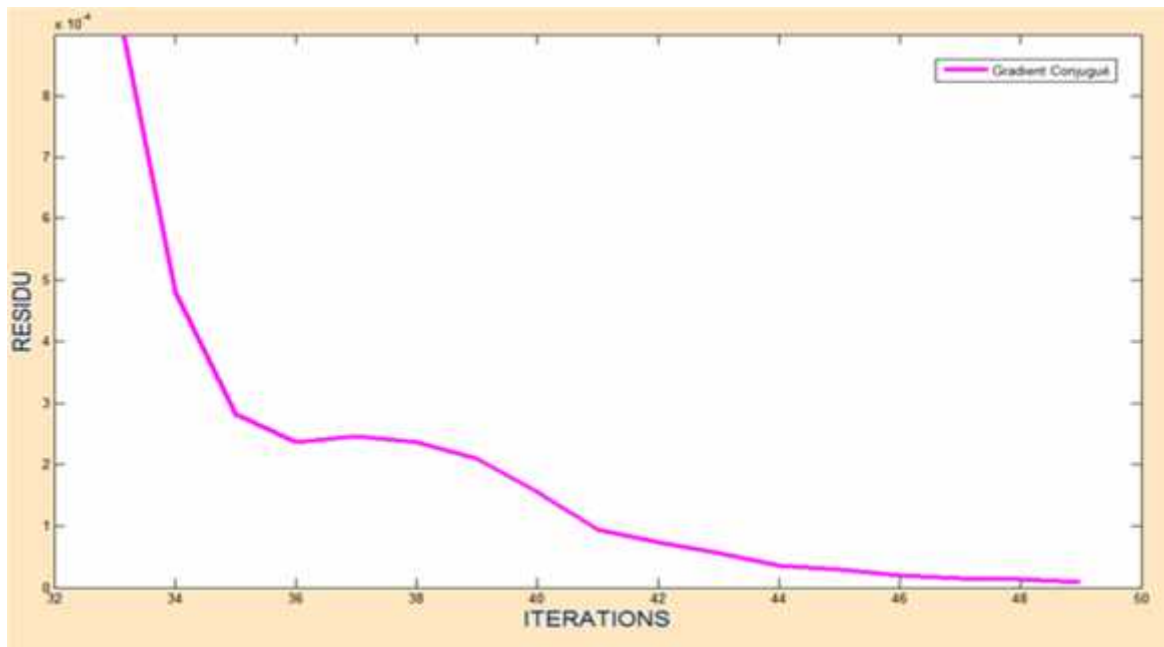


Figure V.8 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gradient Conjugué pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode de Gradient conjugué converge pour un résidu égal à $8.14003 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 49 itérations.

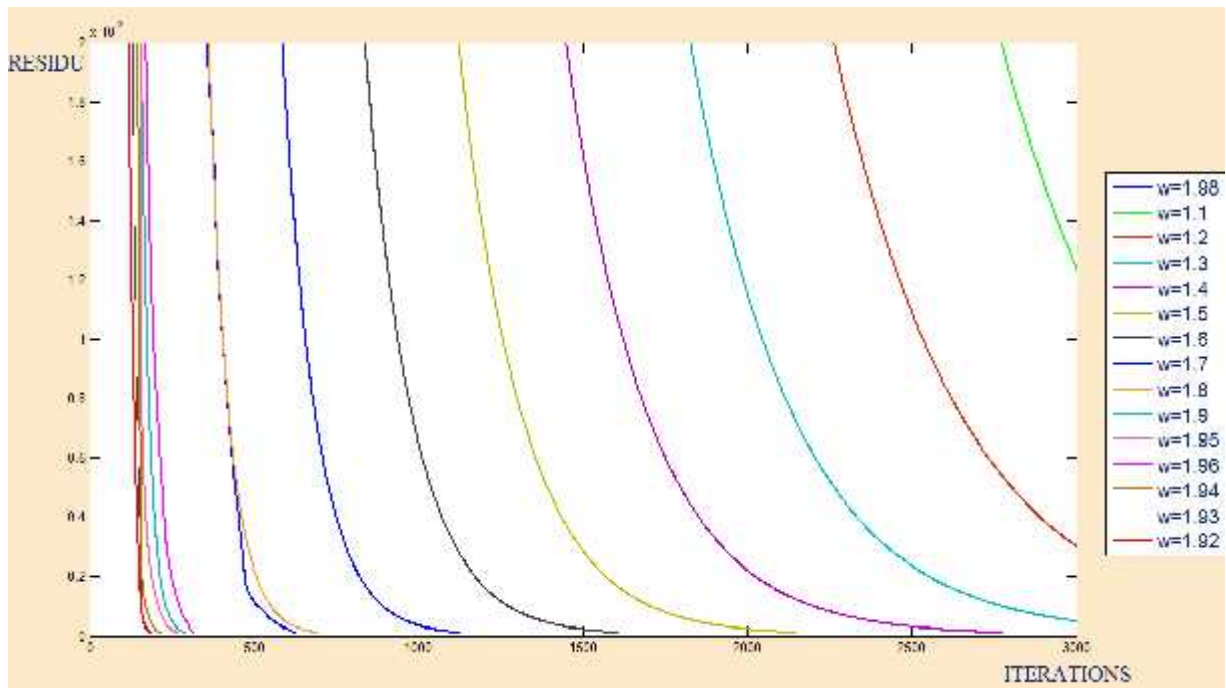


Figure V.9 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode de SOR converge pour un résidu égal à $9.974 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 182 itérations avec un facteur de relaxation optimum qui est égale à 1.93

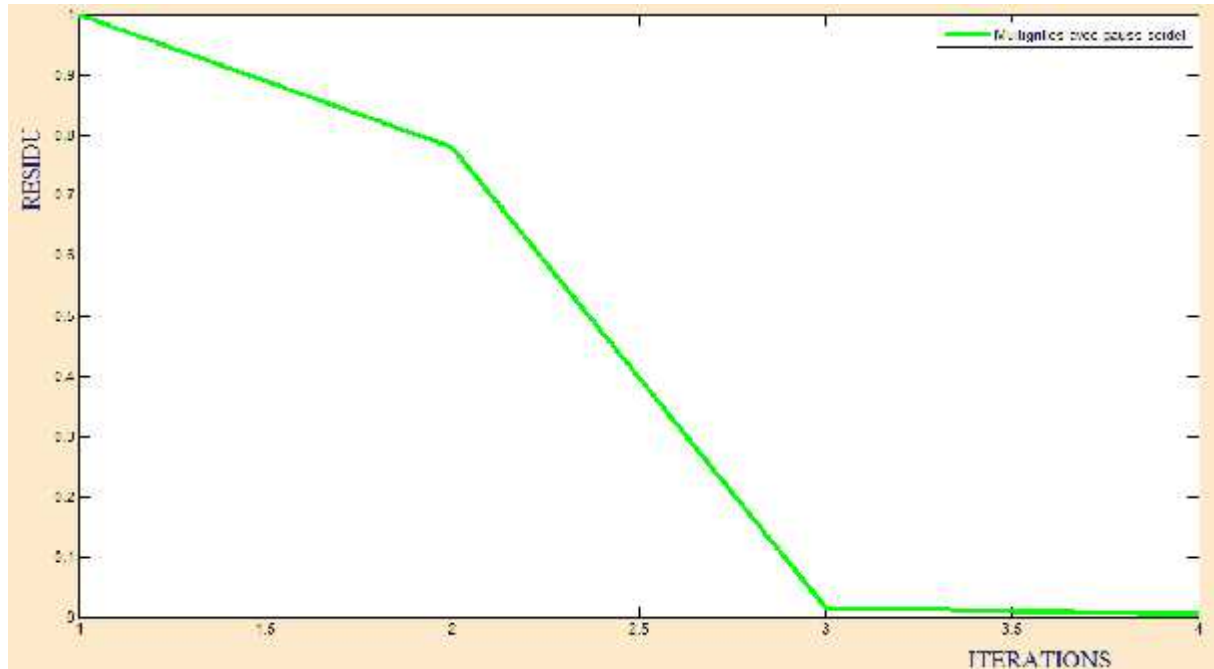


Figure V.10 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multi grilles avec Gauss Seidel pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode Multi grilles avec Gauss Seidel converge pour un résidu égal à $5.314 \cdot 10^{-7}$ correspondant à 11 itérations.

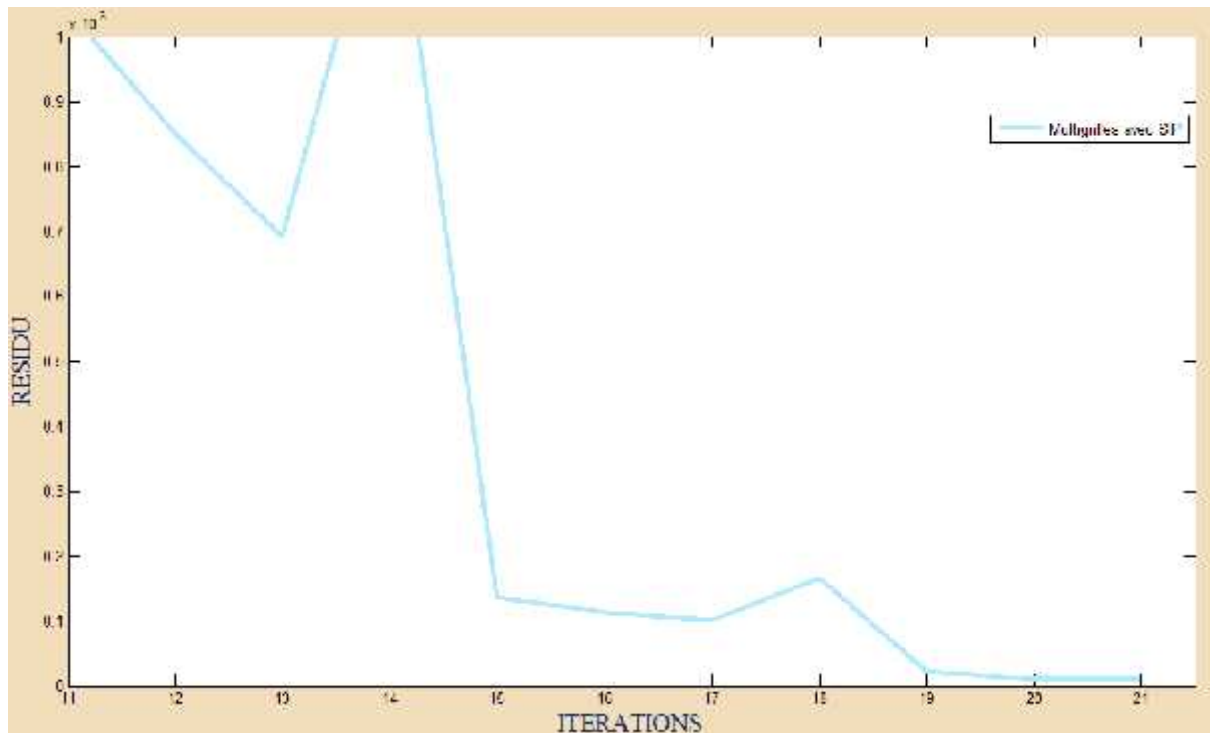


Figure V.11 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multi grilles avec SIP pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode Multi grilles avec SIP converge pour un résidu égal à $9.124 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 21 itérations.

Pour ce qui va suivre, nous allons varier la taille de la matrice et faire une comparaison entre les différentes méthodes, citées auparavant, en fonction des itérations.

Ainsi nous avons obtenu le tableau suivant :

Tableau V.1 Comparaison des différentes méthodes itératives en fonction du maillage et du nombre des itérations.

La taille de maillage	La méthode								
	GS	SIP	TDMA	GC	ADI	SOR	MG-GS	MG-GC	MG-SIP
6×6	20	9	/	5	/	10	/	/	/
16×16	224	18	/	11	/	38	/	/	/
32×32	1018	61	/	20	/	87	/	/	/
64×64	4321	238	/	40	/	458	/	/	/
78×78	6482	354	/	49	/	182	11	/	21

La comparaison en termes de courbe est visualisée ci-dessous :

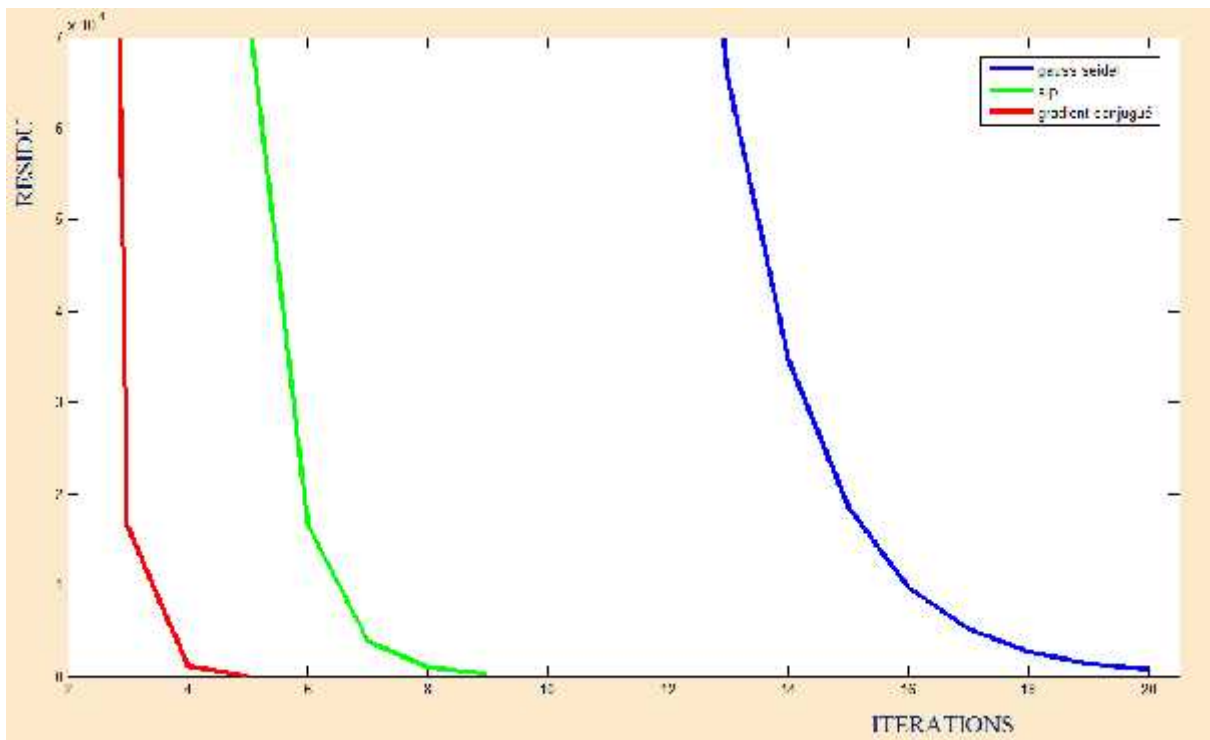


Figure V.12 Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 6×6 .

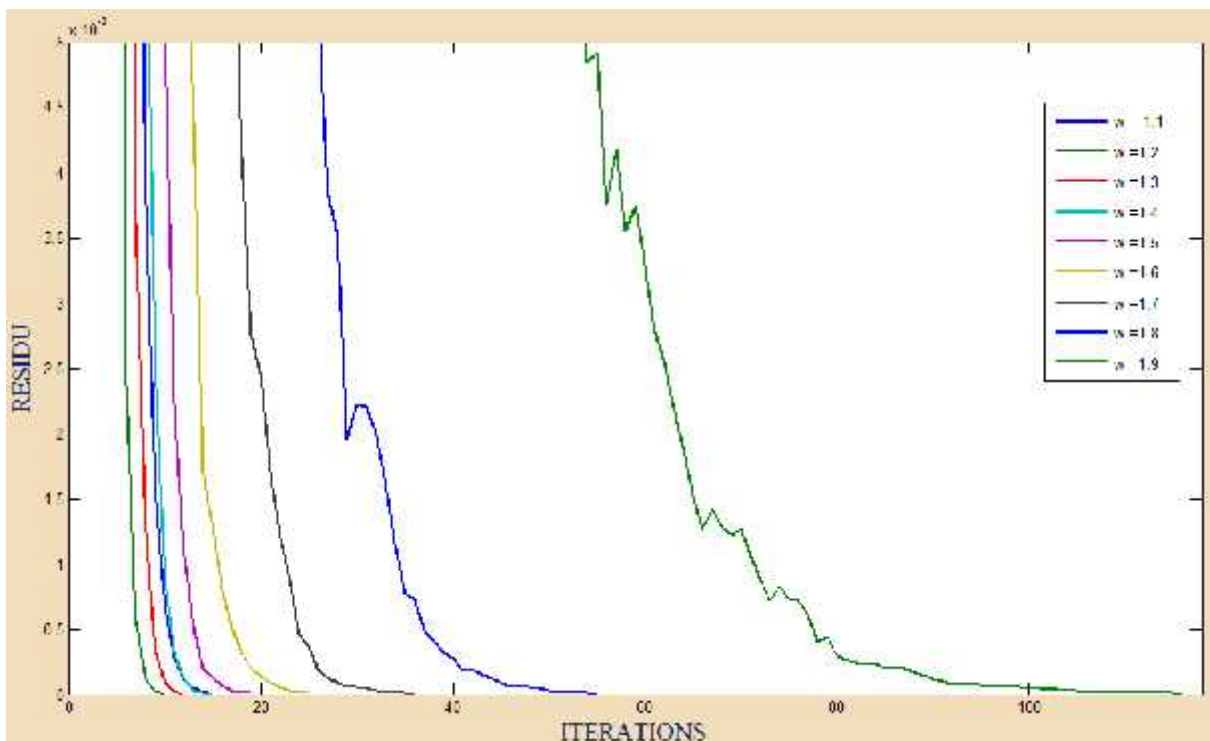


Figure V.13 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 6×6 .

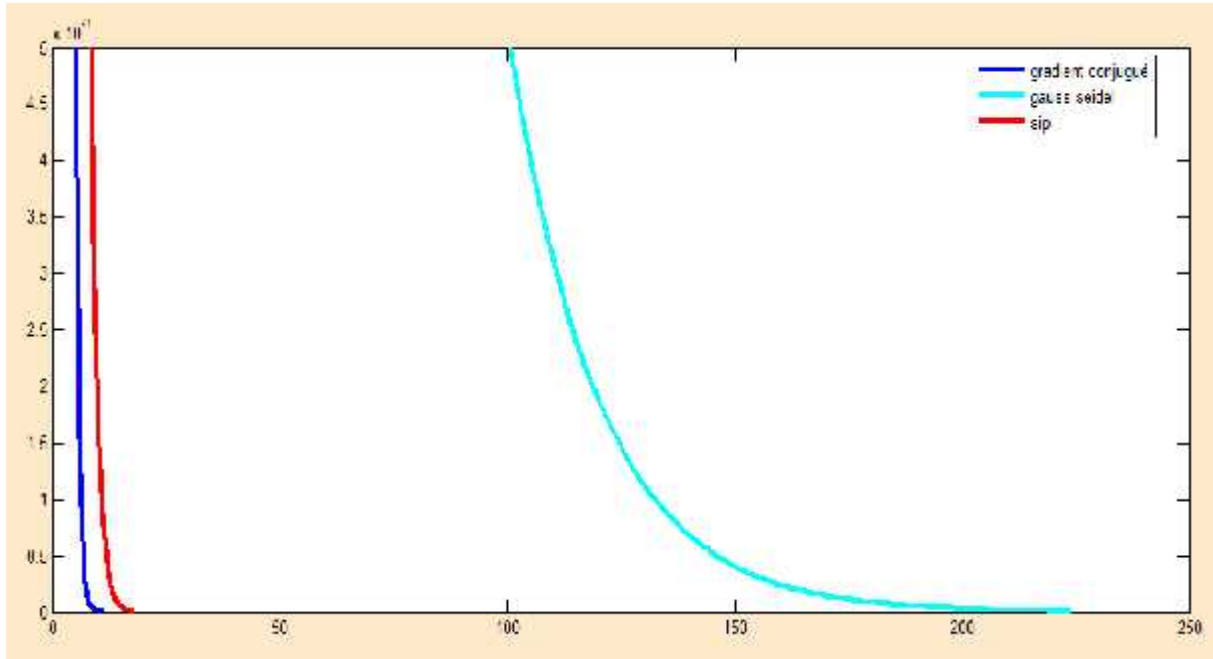


Figure V.14 Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 16×16 .

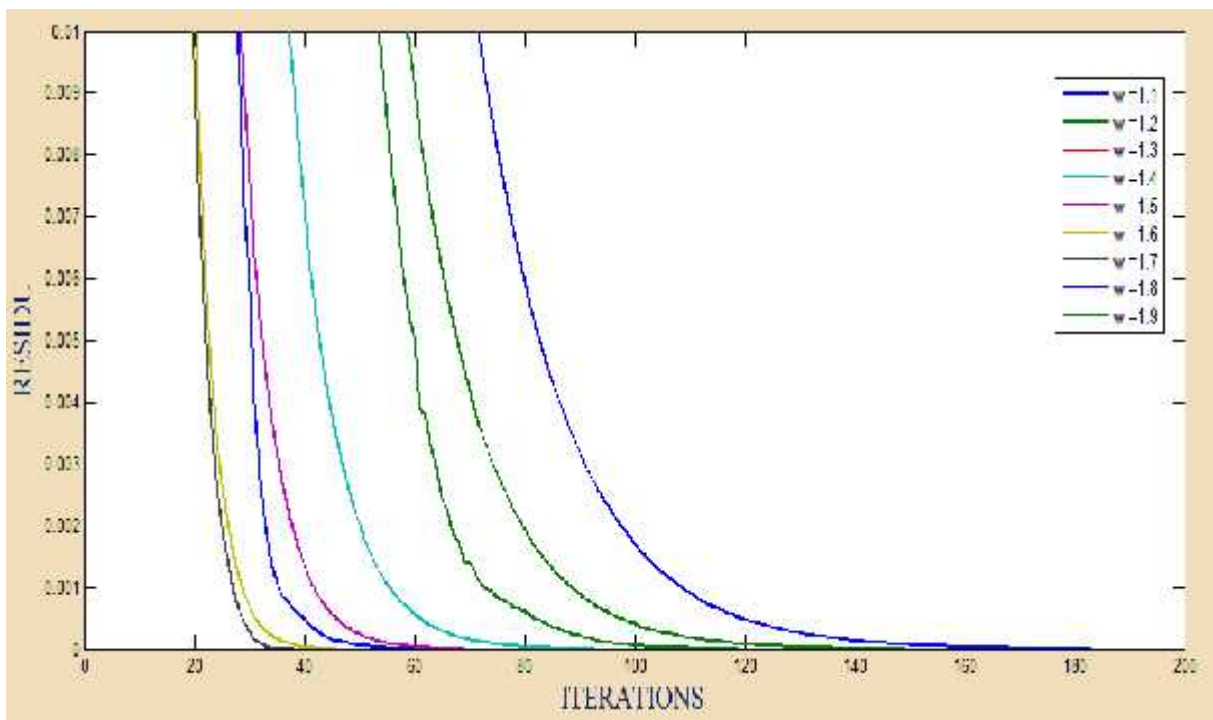


Figure V.15 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 16×16 .

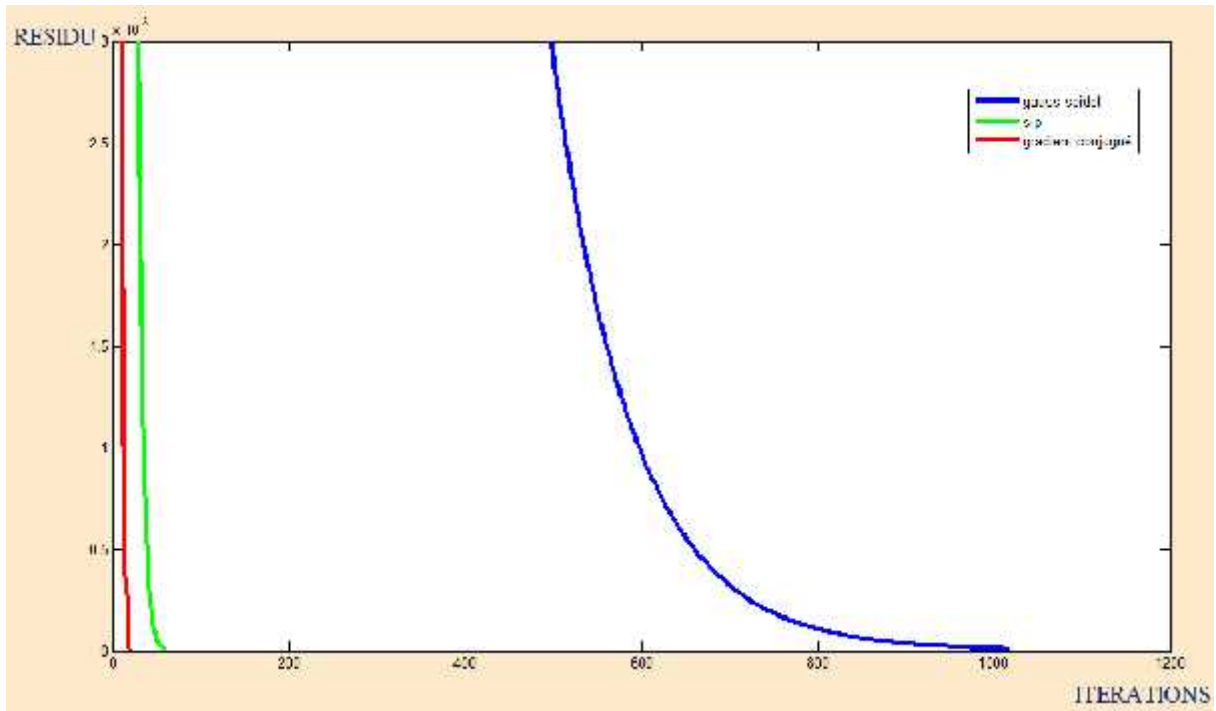


Figure V.16 Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 32×32 .

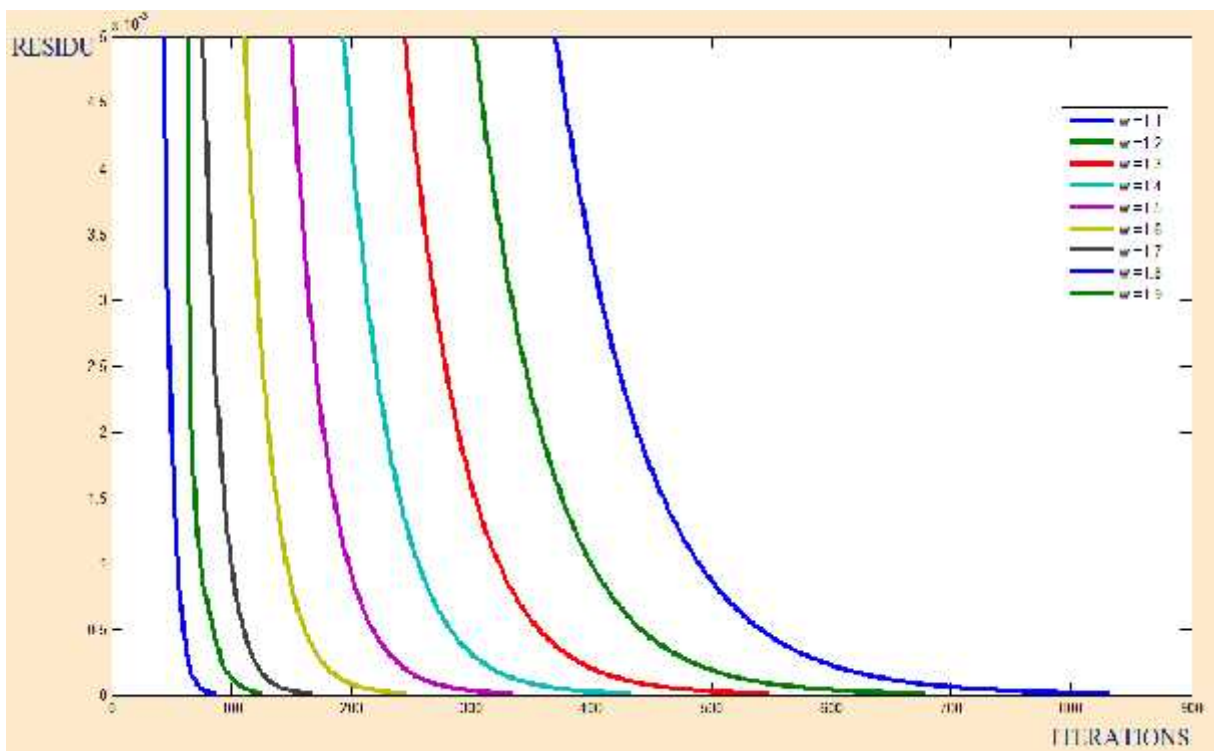


Figure V.17 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 32×32 .

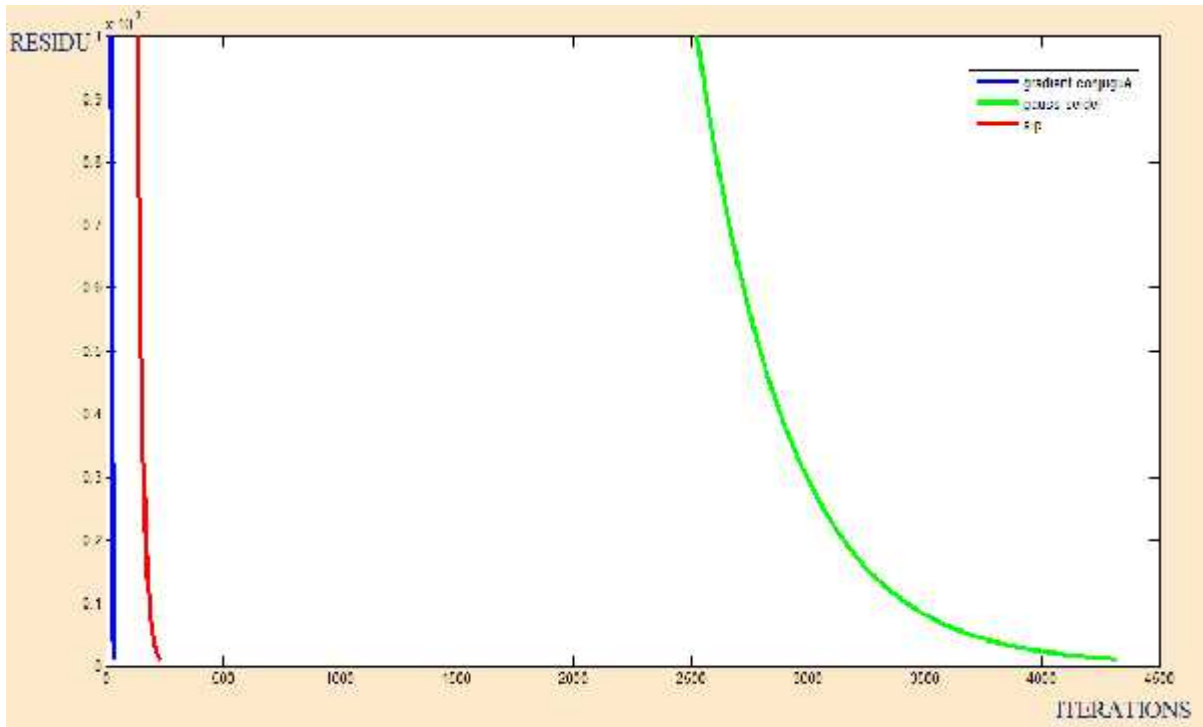


Figure V.18 Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 64×64 .

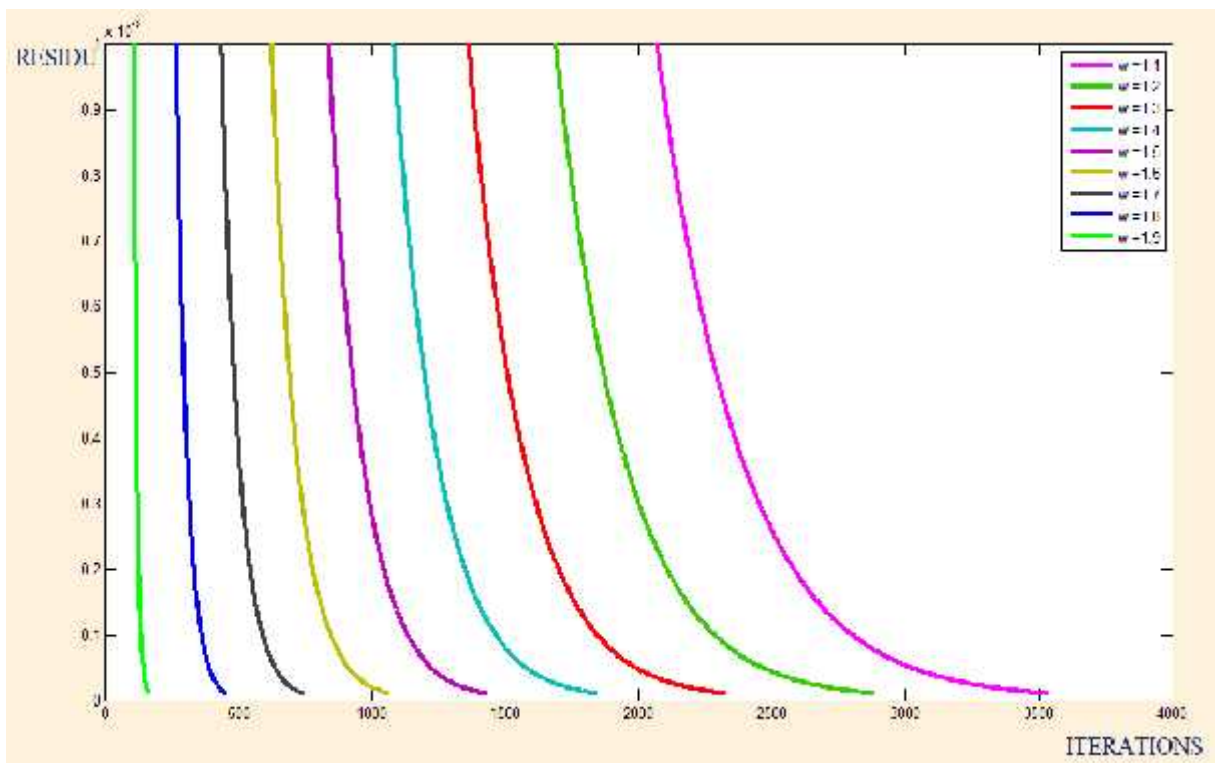


Figure V.19 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour différents facteurs de relaxation pour un nombre total de points 64×64 .

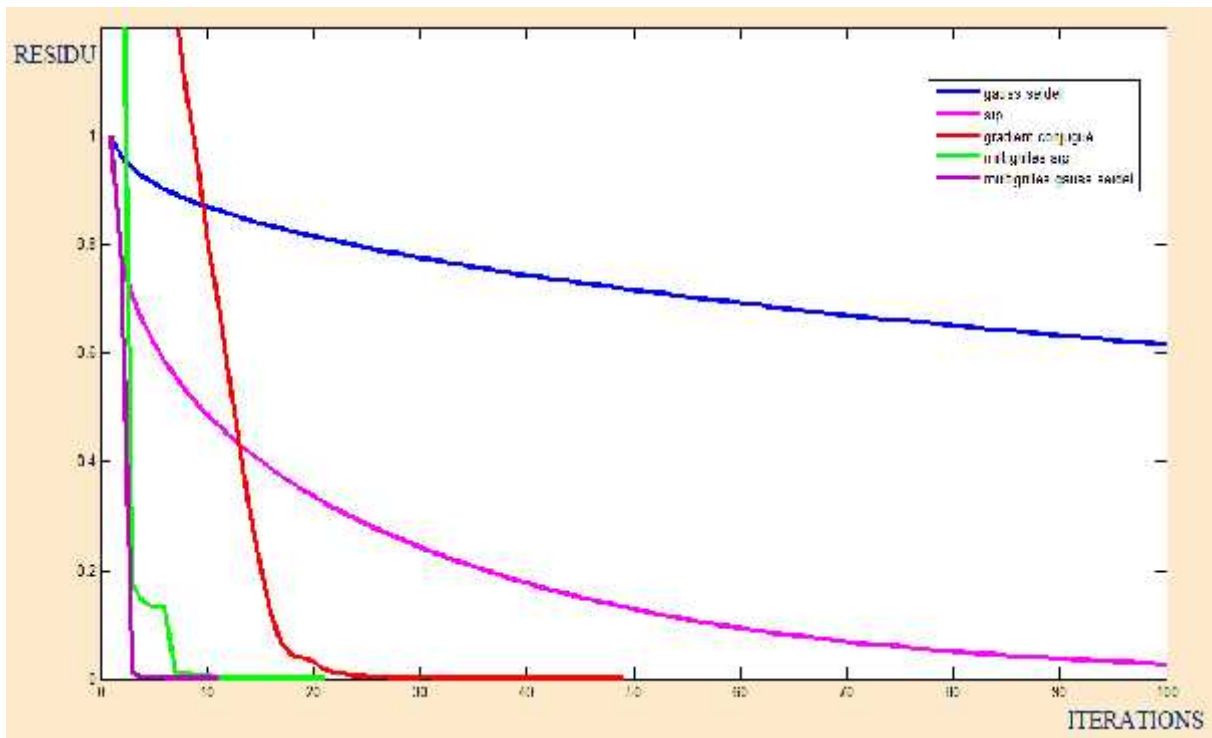


Figure V.20 Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 78×78 .

V.2.1.2 Deuxième cas :

Le terme source est écrit sous forme d'une fonction sinusoïdale :

$$S(x, y) = \sin(x * \pi) * \sin(x * y) \quad (V.2)$$

- Les conditions aux limites sont du premier type c'est-à-dire de DIRICHLET sur toutes les frontières Ouest, Est, Sud et Nord ;
- Les températures aux frontières de la plaque sont de :
 - A la frontière nord, la température est égale à 1000K ;
 - La température initiale de la plaque ainsi que celles des frontières Est, Ouest et Sud sont de l'ordre de 300 K ;
- Le ϵ est fixé à 10^{-5} .

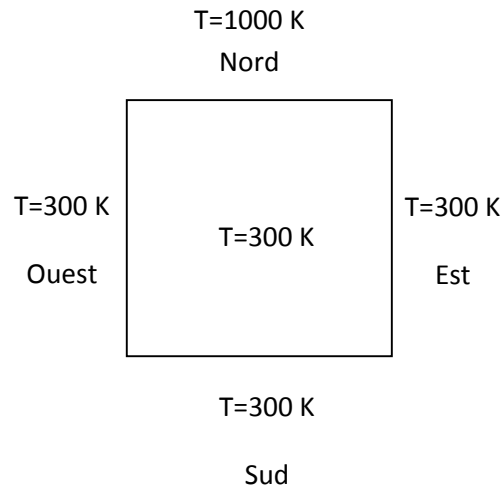


Figure V.21 Conditions initiales de la plaque plane.

Les résultats :

La distribution de la température le long de la plaque avec un nombre total de points 78×78 , et avec une précision de 10^{-5} .

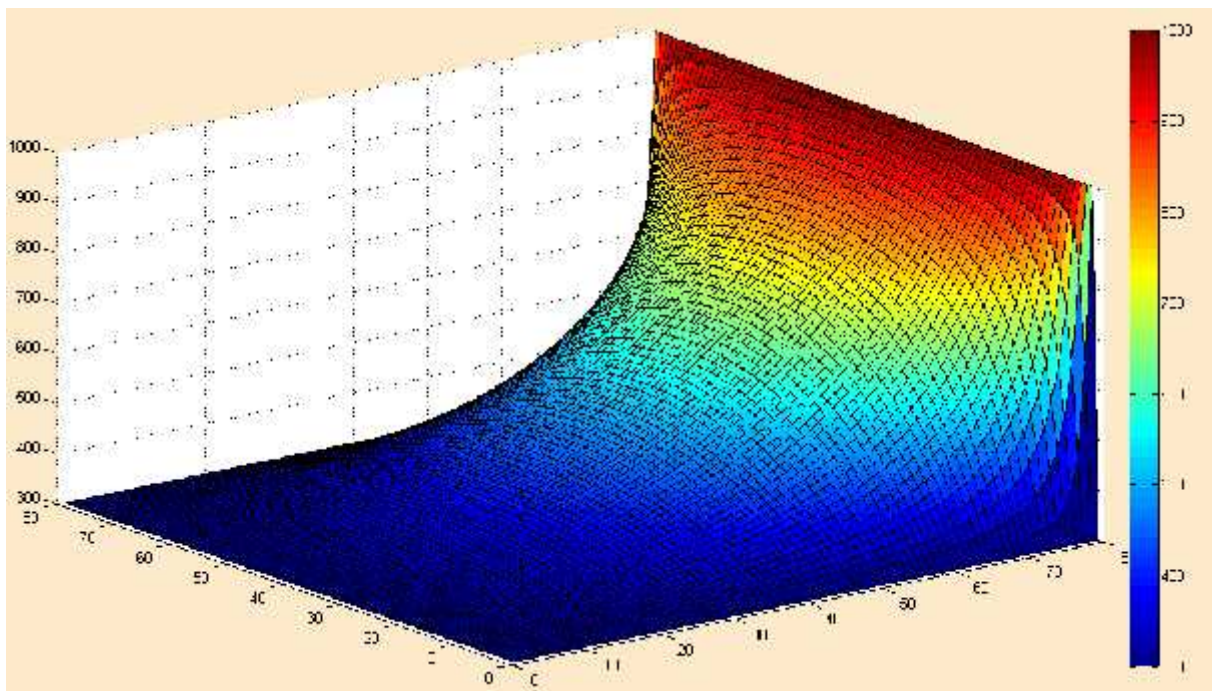


Figure V.22 La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de point 78×78 .

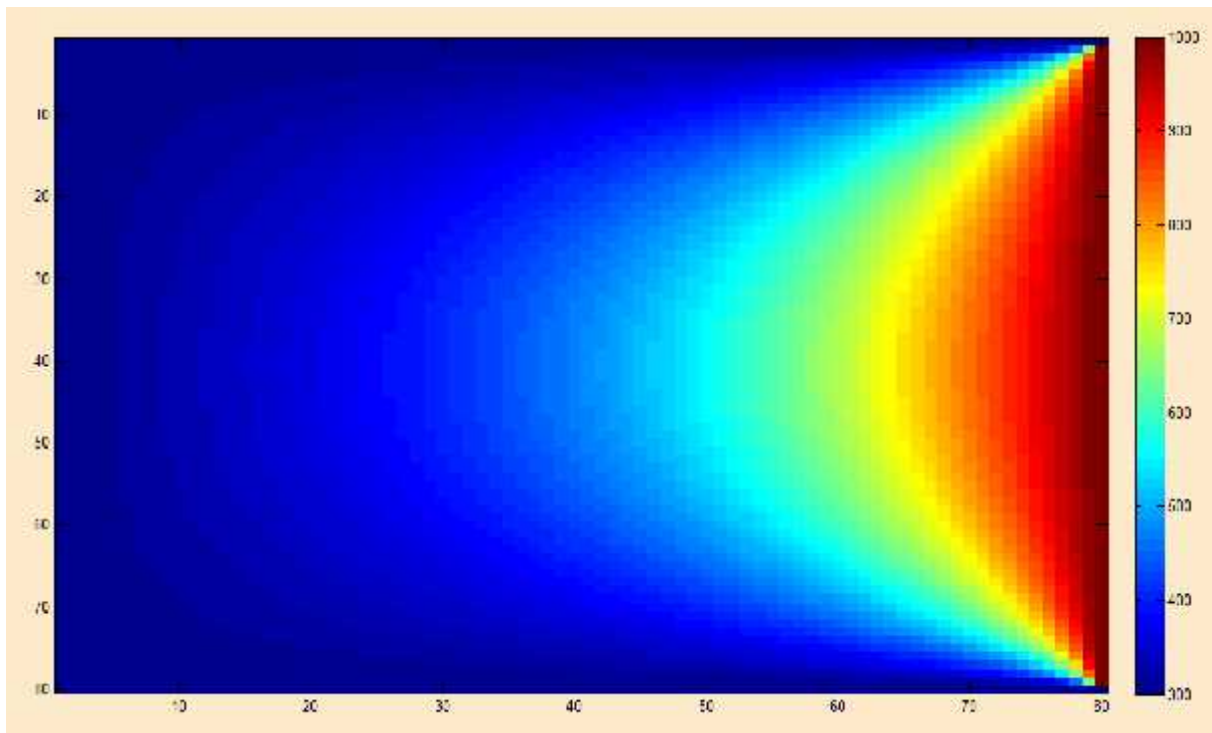


Figure V.23 La Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de point 78×78 projetée sur un plan.

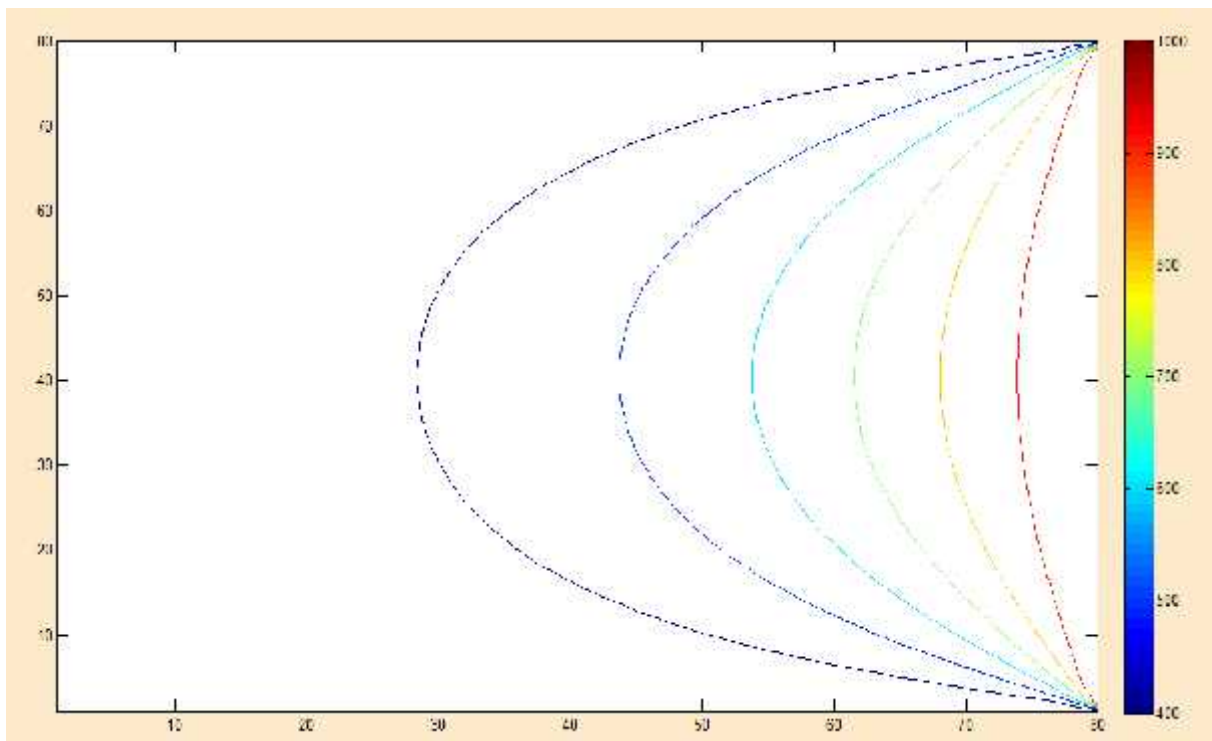


Figure V.24 Les contours de la distribution de température le long de la plaque pour un nombre total de point 78×78 .

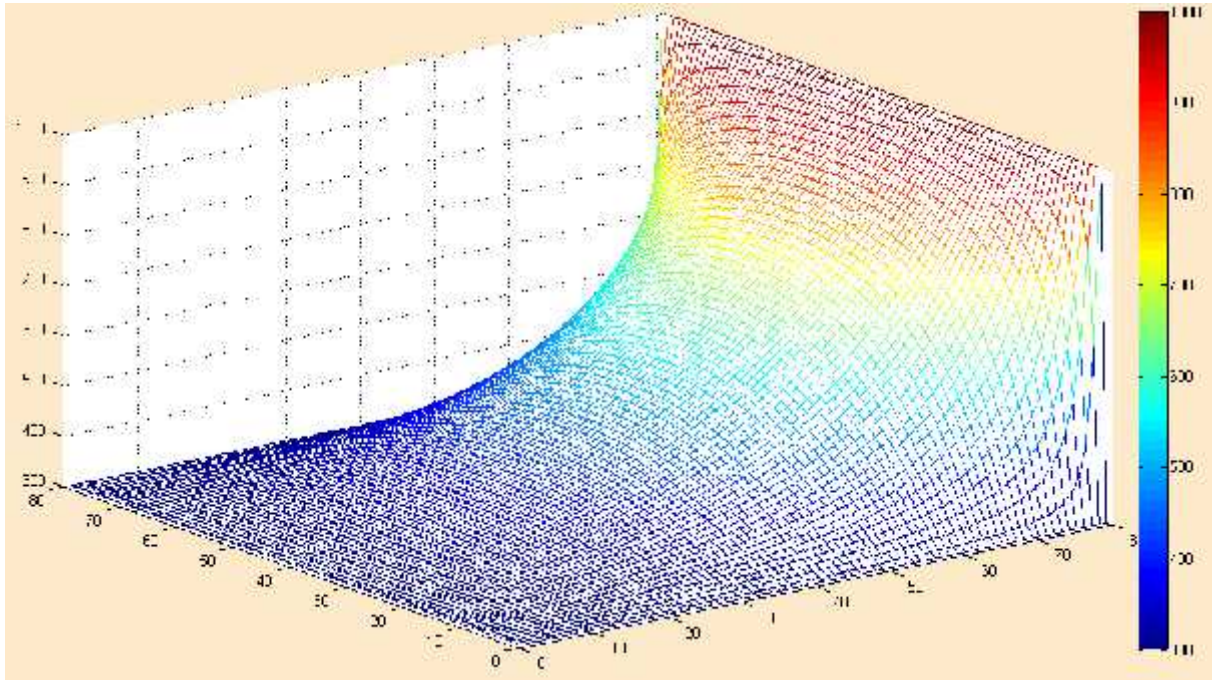


Figure V.25 La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de point 78×78 avec maillage.

Après la visualisation de la solution on présente les différentes méthodes numériques en fonction des itérations pour une matrice de 78×78 :

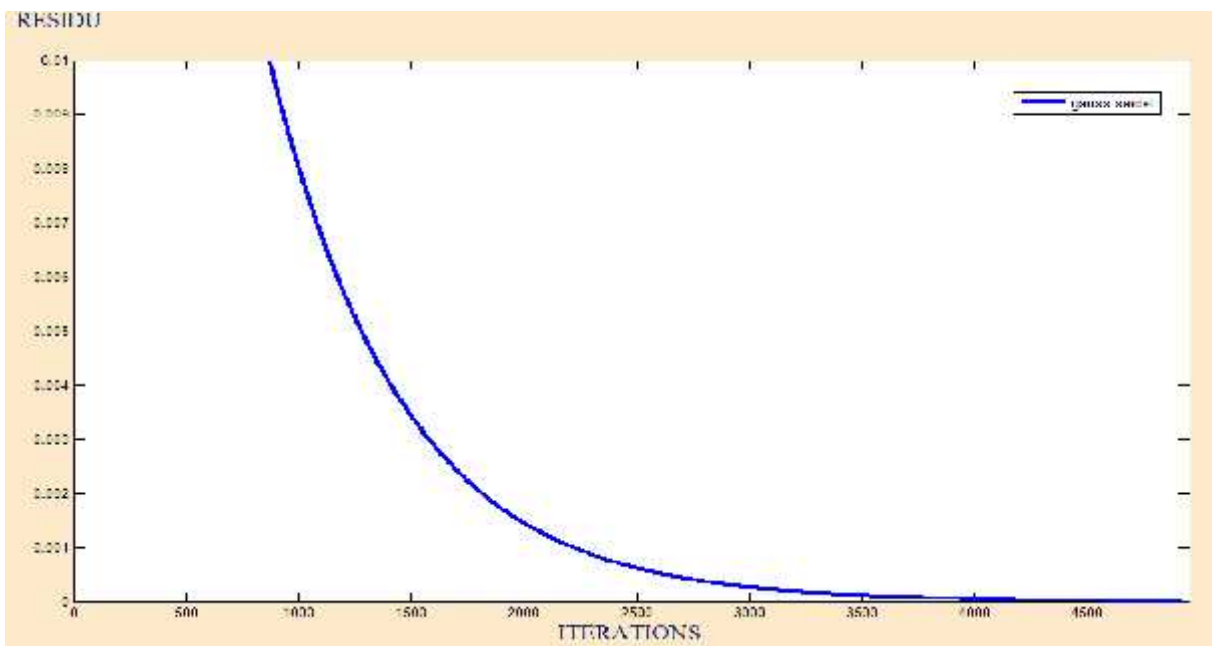


Figure V.26 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gauss-Seidel pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode de Gauss Seidel converge pour un résidu égal à $9.989 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 4918 itérations.

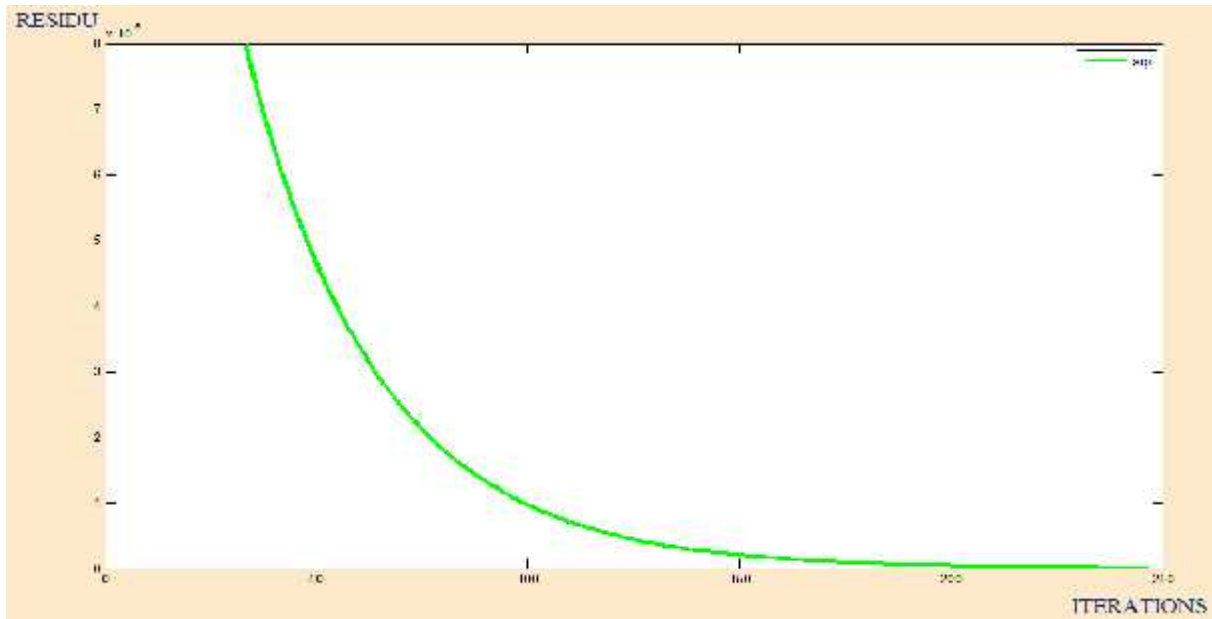


Figure V.27 la variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SIP pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode de SIP converge pour un résidu égal à $9.951 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 247 itérations.

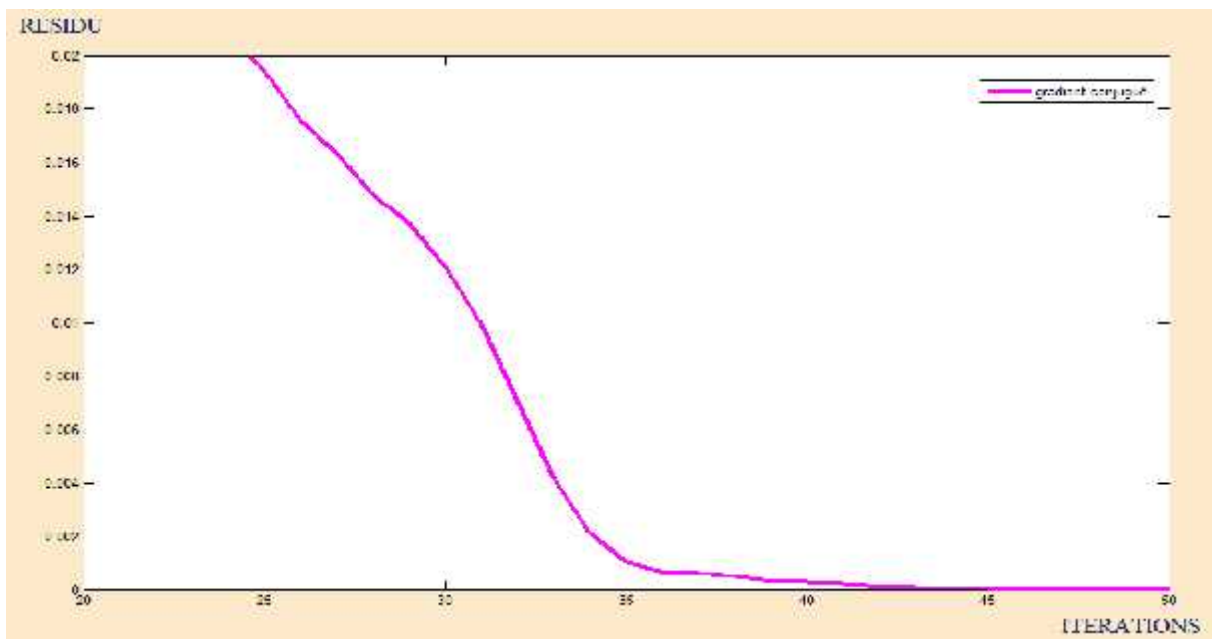


Figure V.28 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Gradient Conjugué pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode de Gradient conjugué converge pour un résidu égal à $9.567 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 50 itérations.

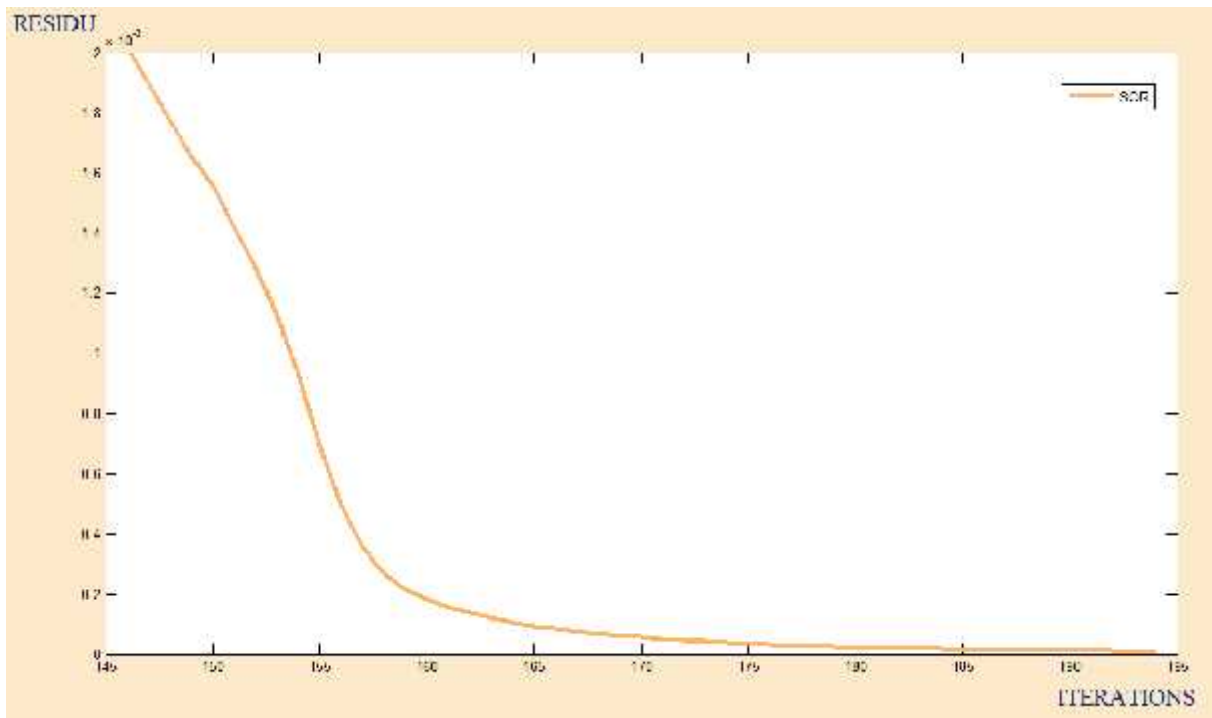


Figure V.29 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode SOR pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode SOR converge pour un résidu égal à $9.472 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 194 itérations et à un facteur de relaxation égale à 1.93

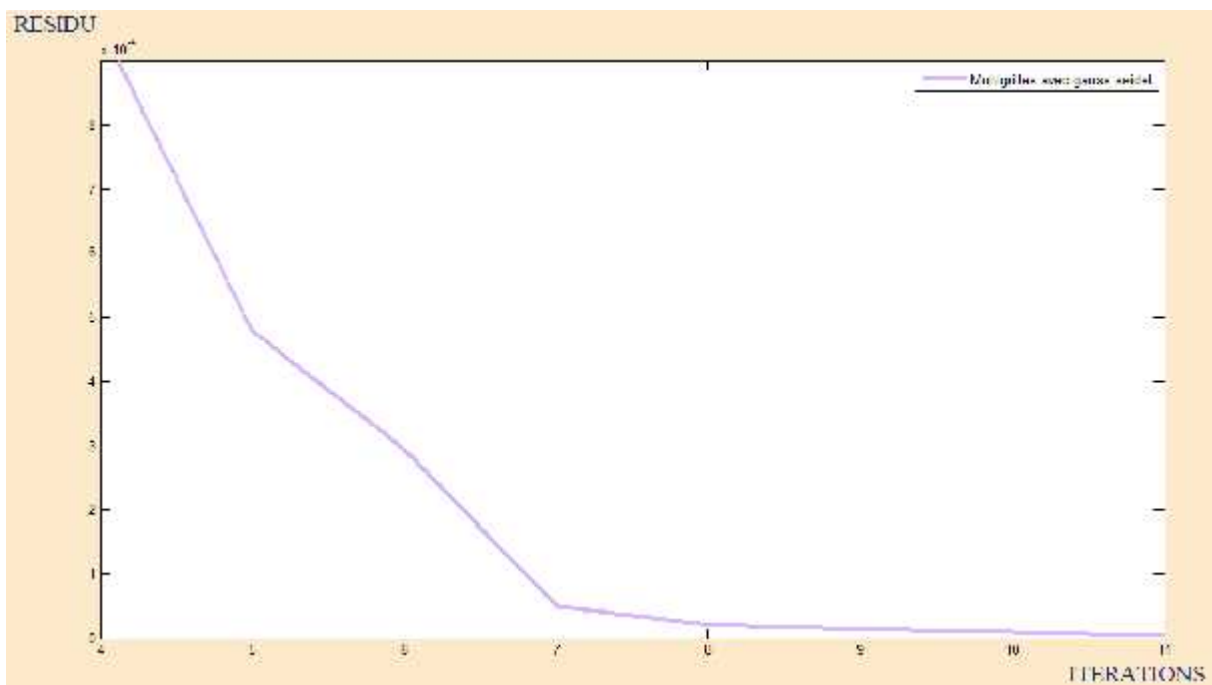


Figure V.30 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multi grilles avec Gauss Seidel pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode Multi grilles avec Gauss Seidel converge pour un résidu égal à $3.283 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 11 itérations.

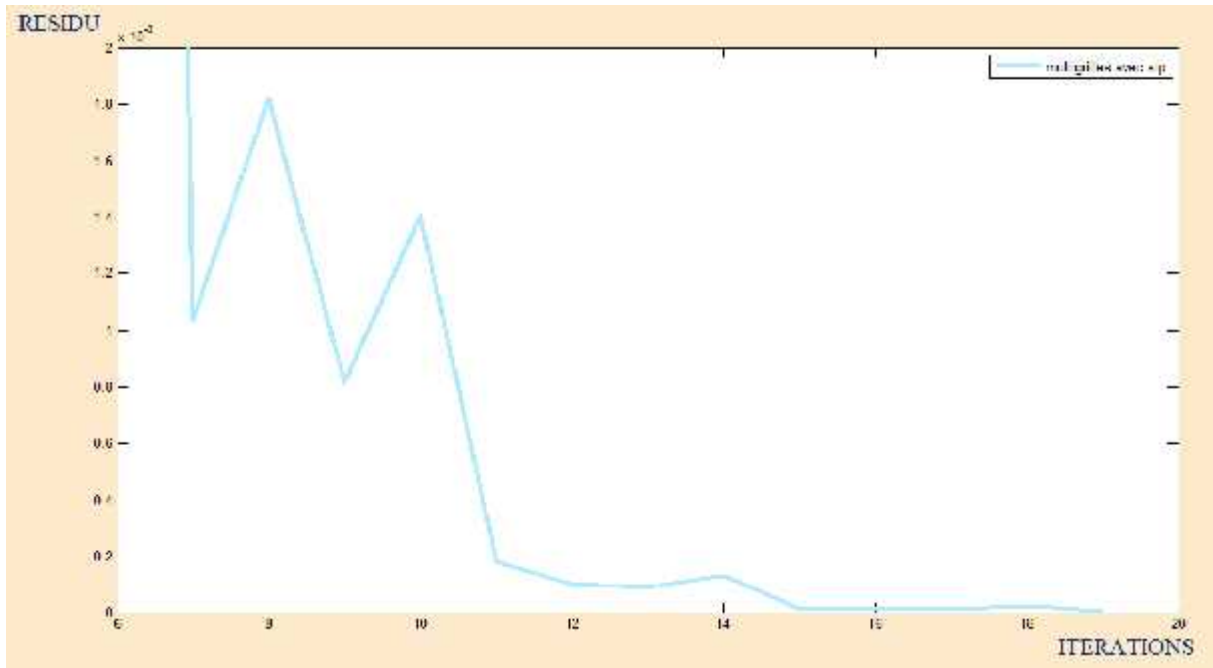


Figure V.31 La variation du résidu en fonction des itérations par la méthode Multi grilles avec SIP pour un nombre total de points 78×78 .

La méthode Multi grilles avec SIP converge pour un résidu égal à $3.222 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 21 itérations.

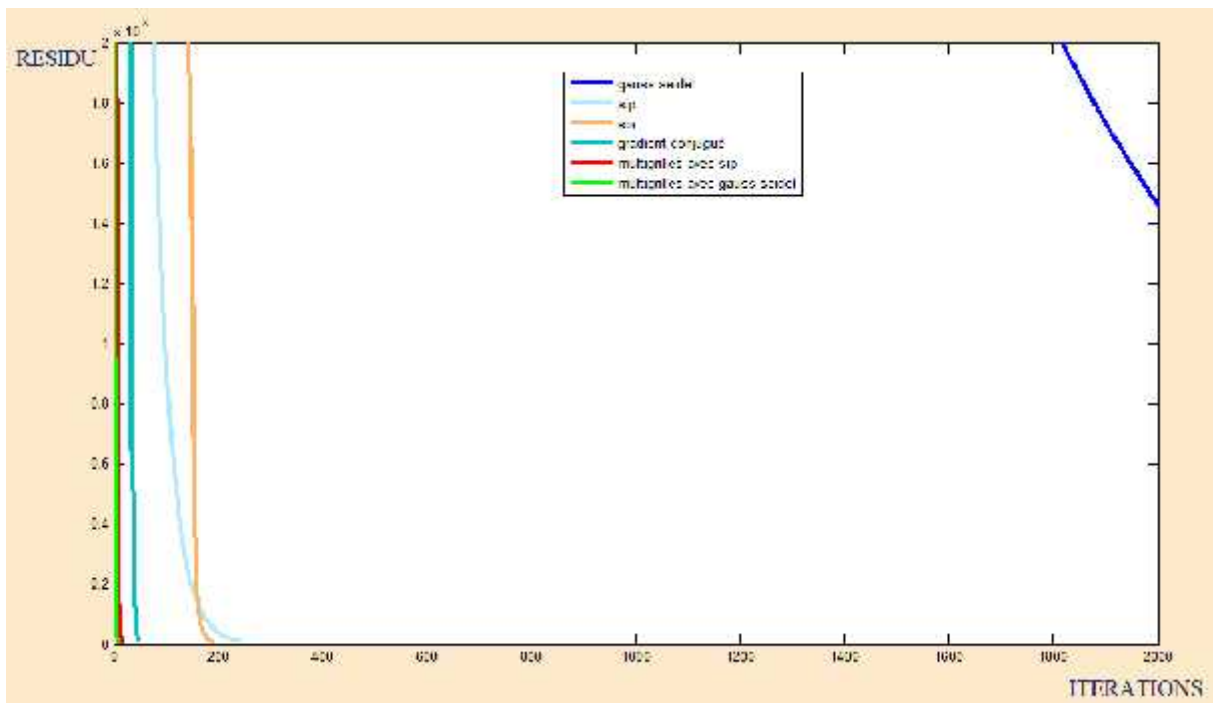


Figure V.32 Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 78×78 .

V.2.1.3 Interprétation des résultats :

D'après les résultats obtenus on note que La méthode de multigrilles converge pour des itérations très faibles par rapport aux autres méthodes, suivie par la méthode du gradient conjugué.

Nous n'avons pas pu visualiser les résultats de la méthode ADI, ainsi que celui de la méthode TDMA car ils n'ont pas convergé après un million d'itérations et par conséquent cela nécessite plusieurs heures de calcul sur des PC ordinaires.

La méthode du gradient conjugué est la meilleure par rapport aux autres méthodes itératives pour un nombre de points assez faible.

De même, en augmentant la taille du maillage, les méthodes nécessitent plus d'itérations pour qu'elles convergent.

Dans le souci de comparaison entre les méthodes pour un nombre de points de 78×78 , nous remarquons que la méthode Multi grilles est la plus performante, autrement dit elle nécessite un nombre d'itérations minimal.

La méthode de gradient conjugué converge avec 11 itérations pour un nombre total de points de 16×16 , alors que la multigrilles par Gauss Seidel le fait pour un nombre total de points de 78×78 .

V.2.2 Deuxième application :

Nous considérons une plaque plane avec les caractéristiques géométriques et physiques suivantes :

- La longueur est de 0.5m ;
- La largeur est de 0.5 m ;
- La conductivité thermique est de 10 W/m/K.

V.2.2.1 Premier cas :

Le terme source est écrit sous forme de l'équation (V.2) ;

Les conditions aux limites sont de type Neumann sur les frontières Ouest (West) et Sud (South) avec un gradient de température zéro, et de type Dirichlet sur les frontières Est (East) et Nord (North) avec une température égale à zéro.

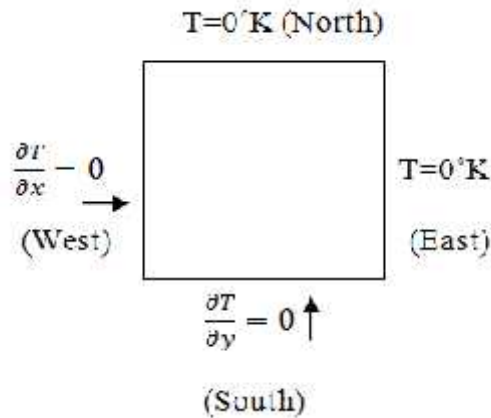


Figure V. 33 Les conditions aux limites

Les résultats :

La distribution de la température le long de la plaque avec un nombre total des points de 78×78 avec une précision de 10^{-5} :

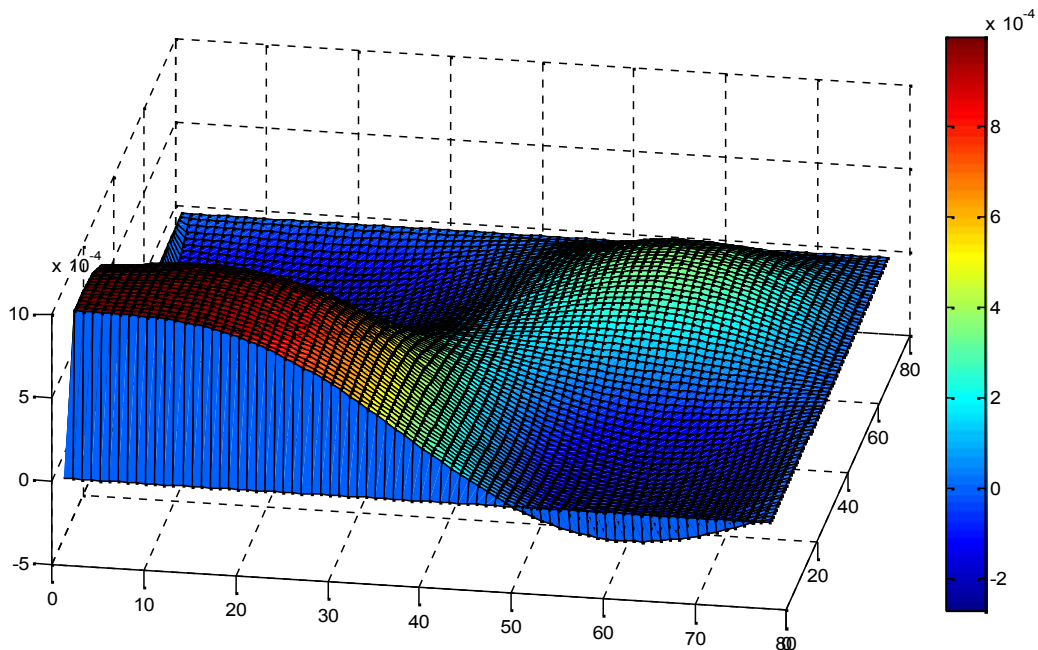


Figure V.34 Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78

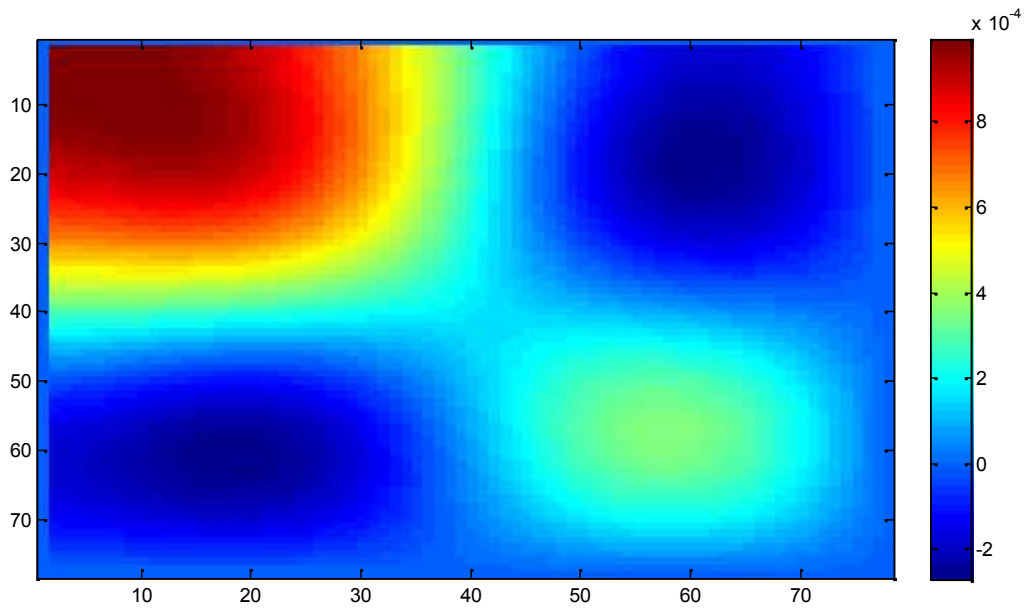


Figure V.35 La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78 projeté sur un plan

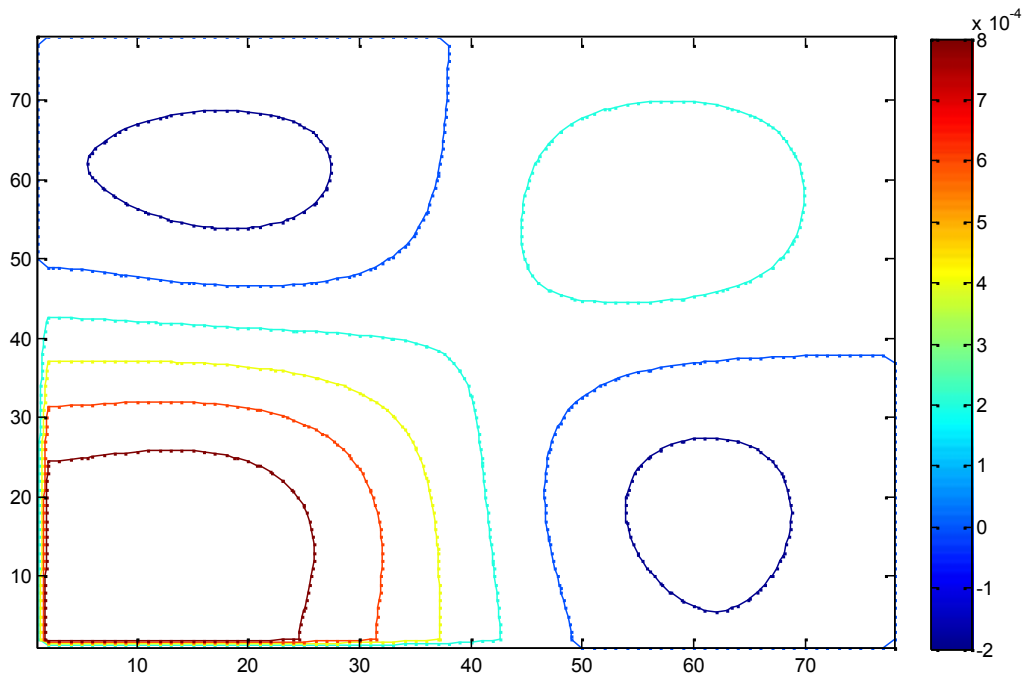


Figure V.36 Les contours de distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78

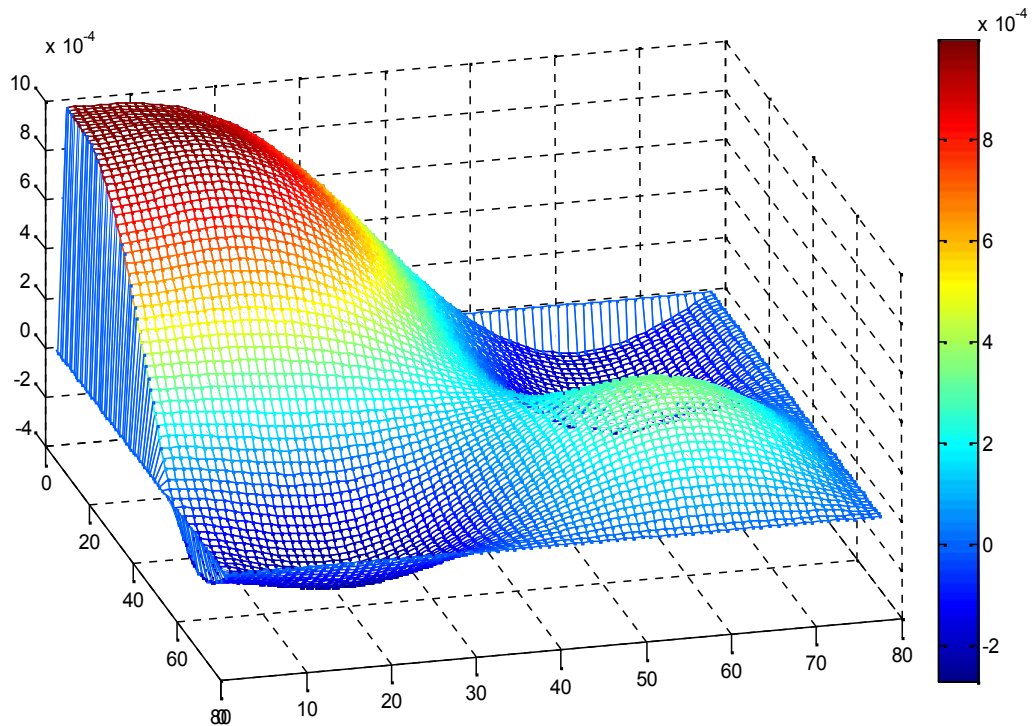


Figure V.37 La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre de points de 78×78 avec maillage

D'après les figures, nous remarquons que la variation de la température est de forme sinusoïdal à cause du terme source.

La solution est obtenue par différentes méthodes itératives et la précision est meilleur c'est-à-dire le résidu est minimal en augmentant le nombre d'itérations :

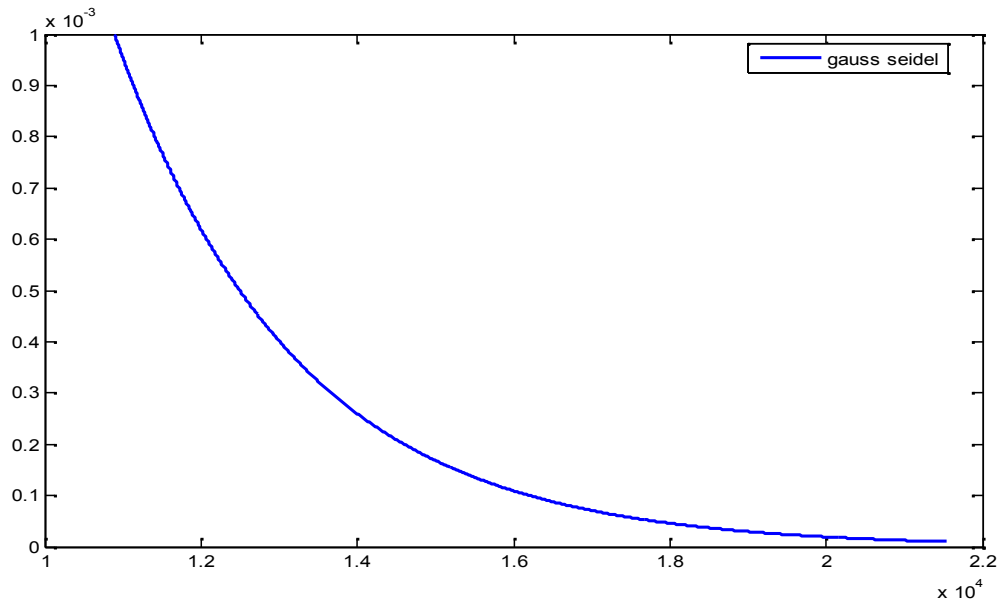


Figure V.38 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de Gauss Seidel converge pour un résidu égal à $1.0015 \cdot 10^{-5}$ correspondant à 21532 itérations.

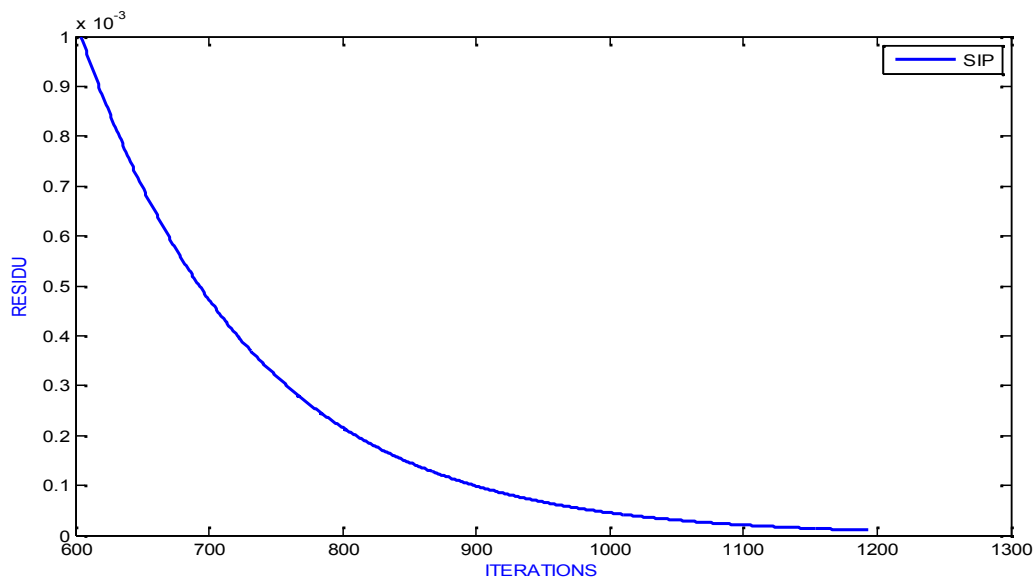


Figure V.39 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de SIP pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de SIP converge pour un résidu égal à $9.956 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 1193 itérations.

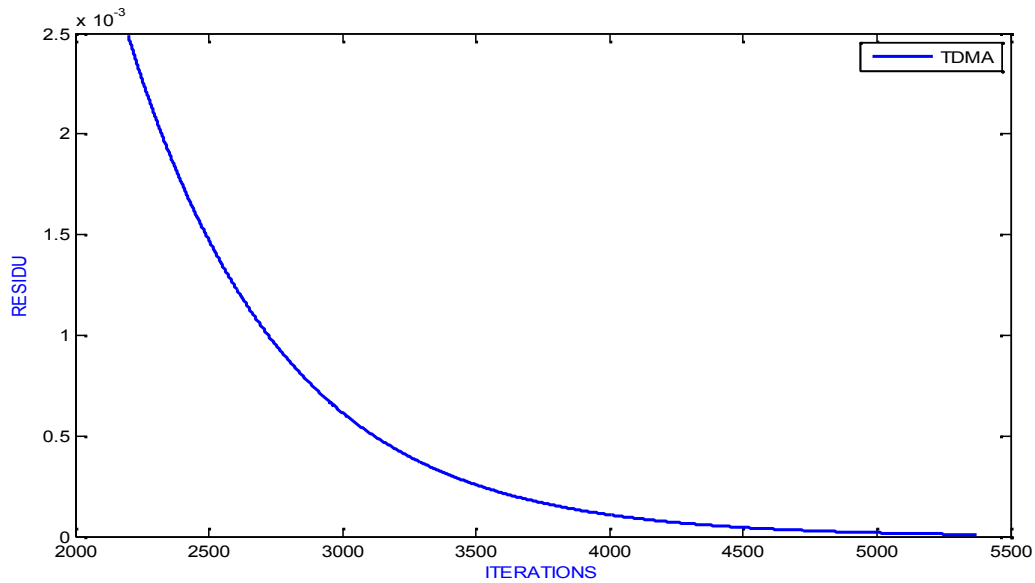


Figure V.40 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de TDMA pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de TDMA converge pour un résidu égal à 9.988×10^{-6} correspondants à 5371 itérations.

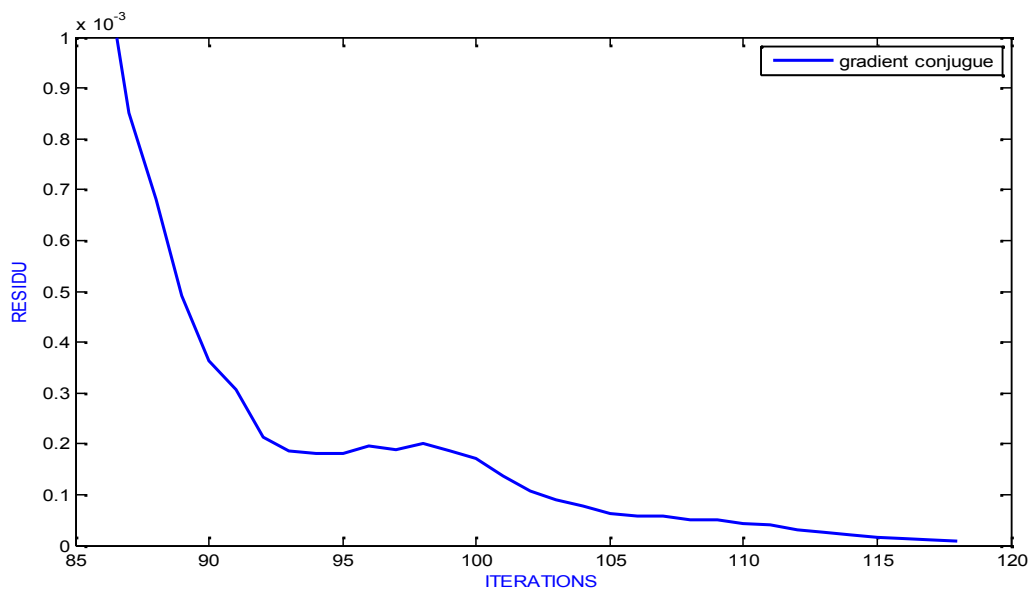


Figure V.41 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gradient conjugué pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de Gradient conjugué converge pour un résidu égal à 9.701×10^{-6} correspondants à 118 itérations.

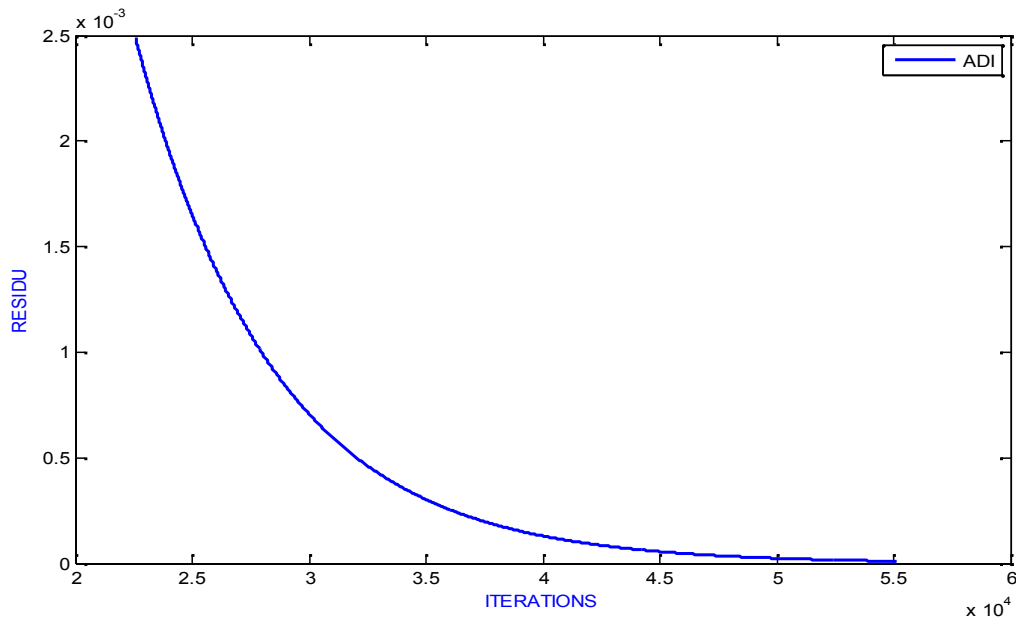


Figure V.42 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode ADI pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de l'ADI converge pour un résidu égal à $9.998 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 55155 itérations.

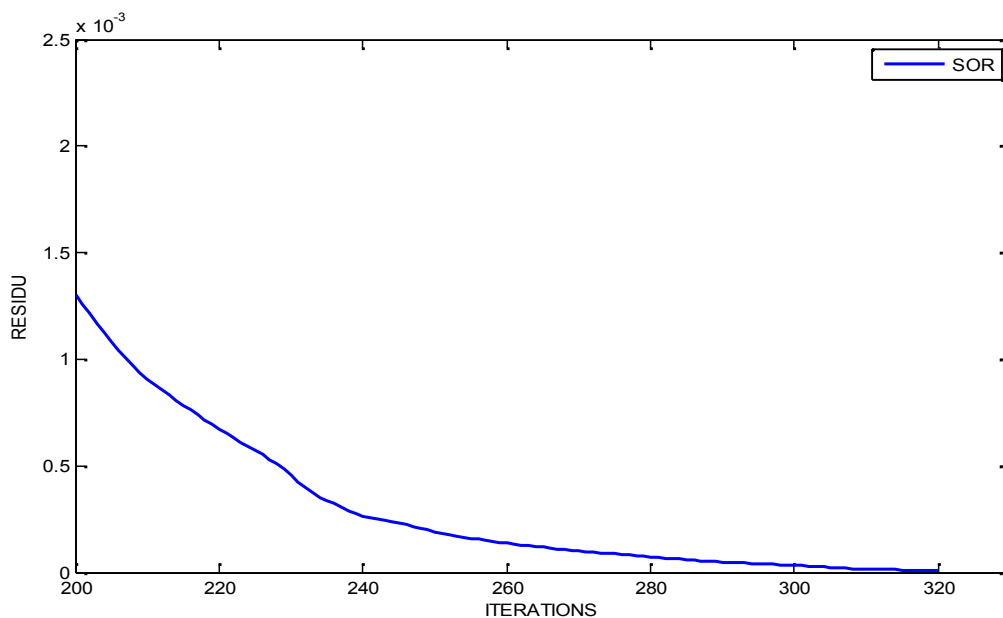


Figure V.43 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode SOR pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de SOR converge pour un résidu égal à $9.752 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 320 itérations et pour un facteur de relaxation optimum égale à 1.96.

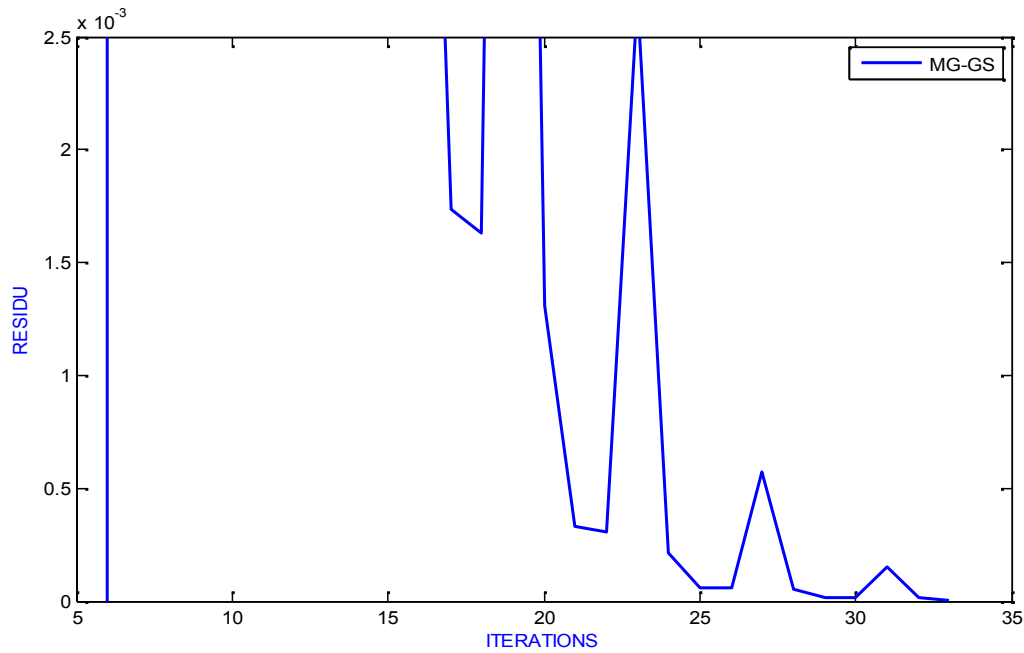


Figure V.44 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles avec Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de Multigrilles avec Gauss Seidel converge pour un résidu égal à $3.644 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 33 itérations.

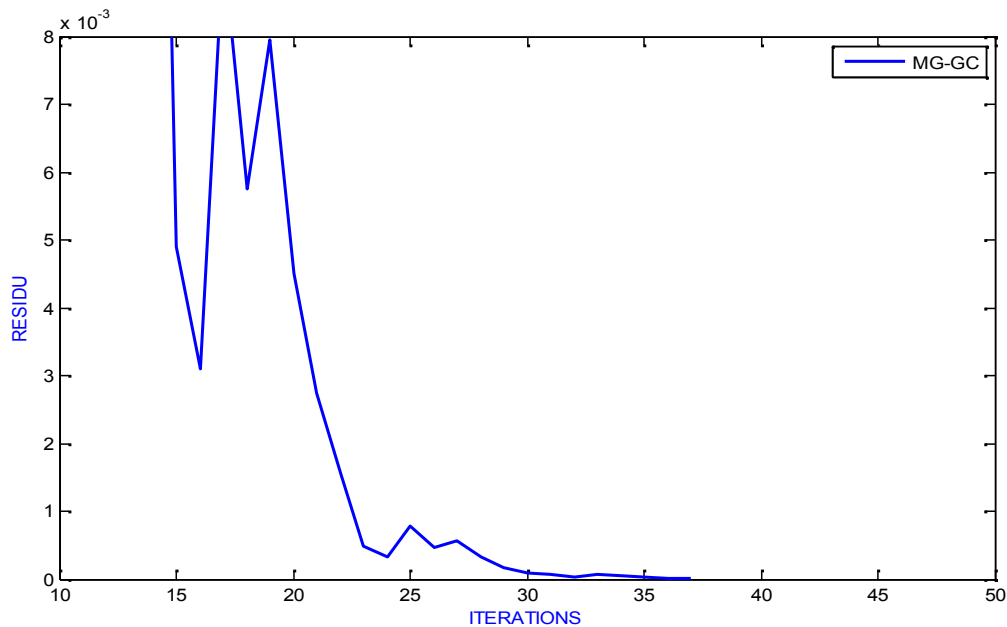


Figure V.45 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles avec Gradient conjugué pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de Multigrilles avec Gradient conjugué converge pour un résidu égal à $4.634 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 37 itérations.

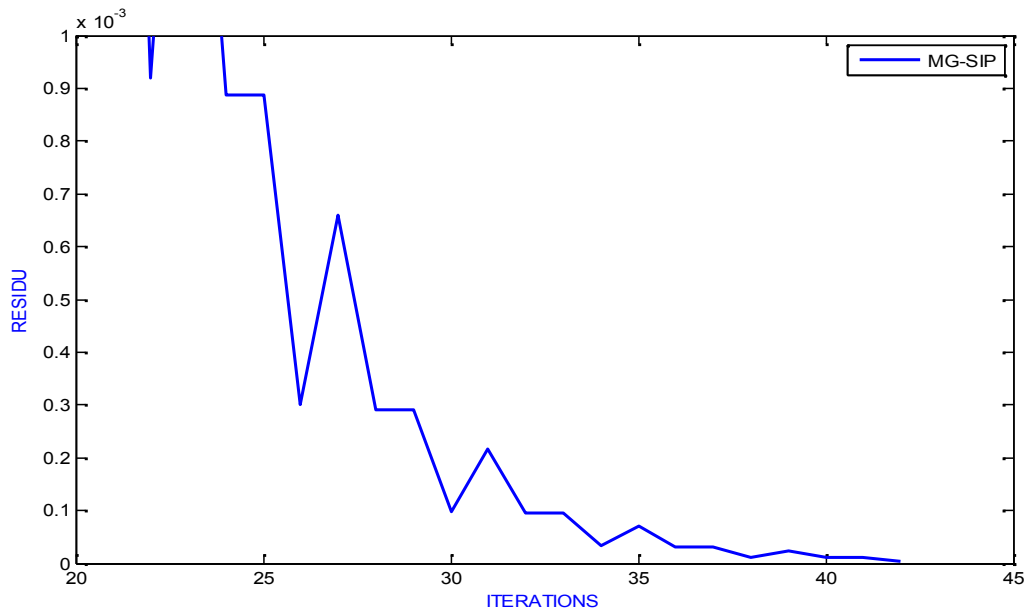


Figure V.46 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles avec SIP pour un nombre total de points de 78×78

La méthode de Multigrilles avec SIP converge pour un résidu égal à $3.435 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 42 itérations.

Maintenant, nous avons varié la taille de la matrice ou bien la taille de maillage et comparé entre les méthodes en fonction des itérations, nous avons abouti aux résultats suivants :

Tableau V.2 Comparaison des différentes méthodes itératives en fonction de la taille du maillage et le nombre des itérations

La taille de maillage	La méthode								
	GS	SIP	TDMA	GC	ADI	SOR	MG-GS	MG-GC	MG-SIP
8×8	119	14	36	11	398	22	/	/	/
16×16	690	44	179	23	1958	58	/	/	/
32×32	3280	190	823	51	8702	124	/	/	/
64×64	14279	796	3562	102	36775	256	/	/	/
78×78	21532	1193	5371	118	55156	320	33	37	42

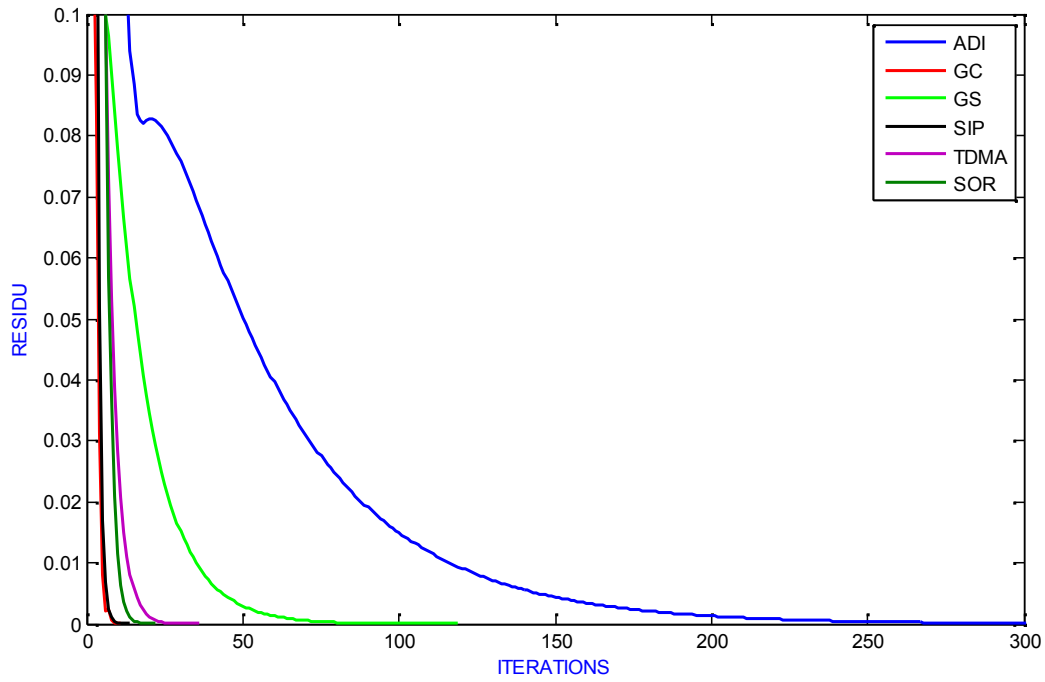


Figure V.47 Comparaison des différentes méthodes itératives pour un nombre total de points de 8×8

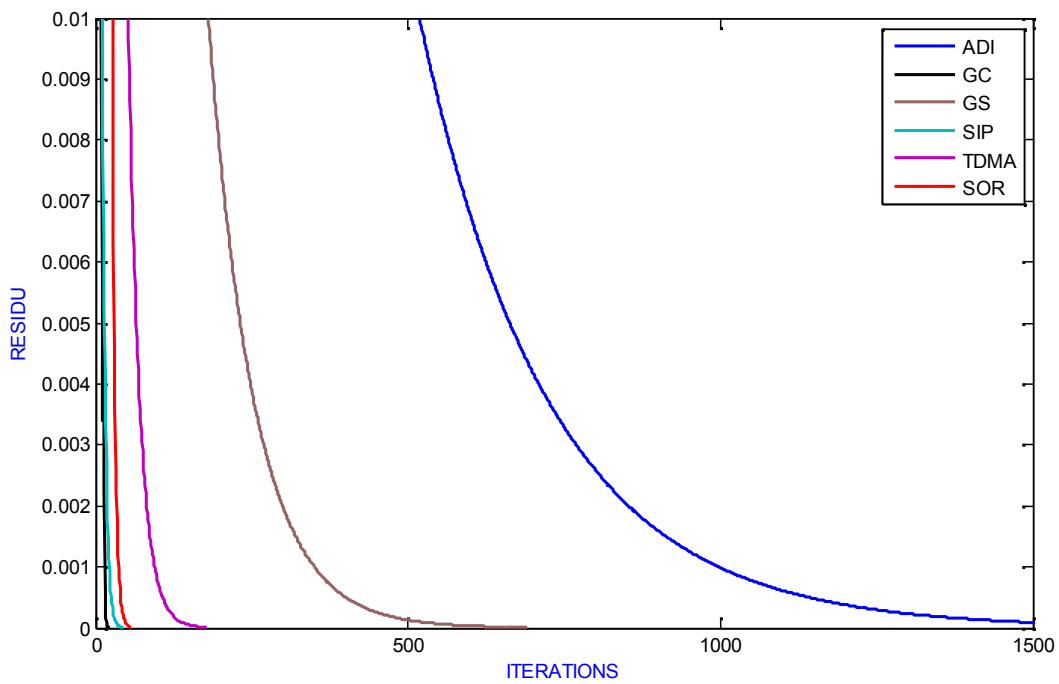


Figure V.48 Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 16×16

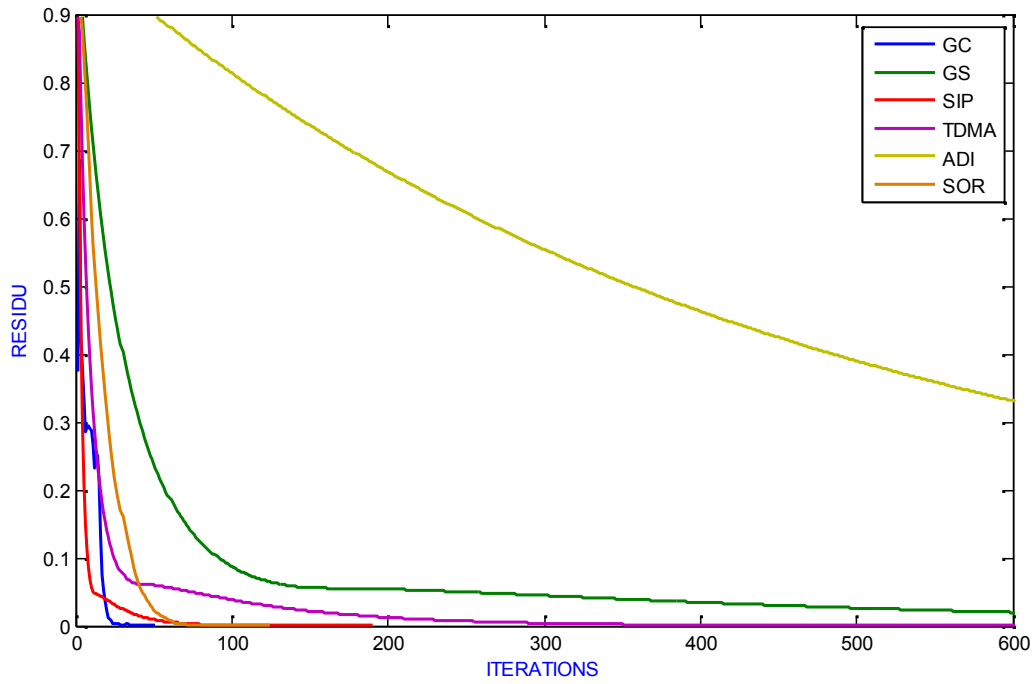


Figure V.49 Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 32×32

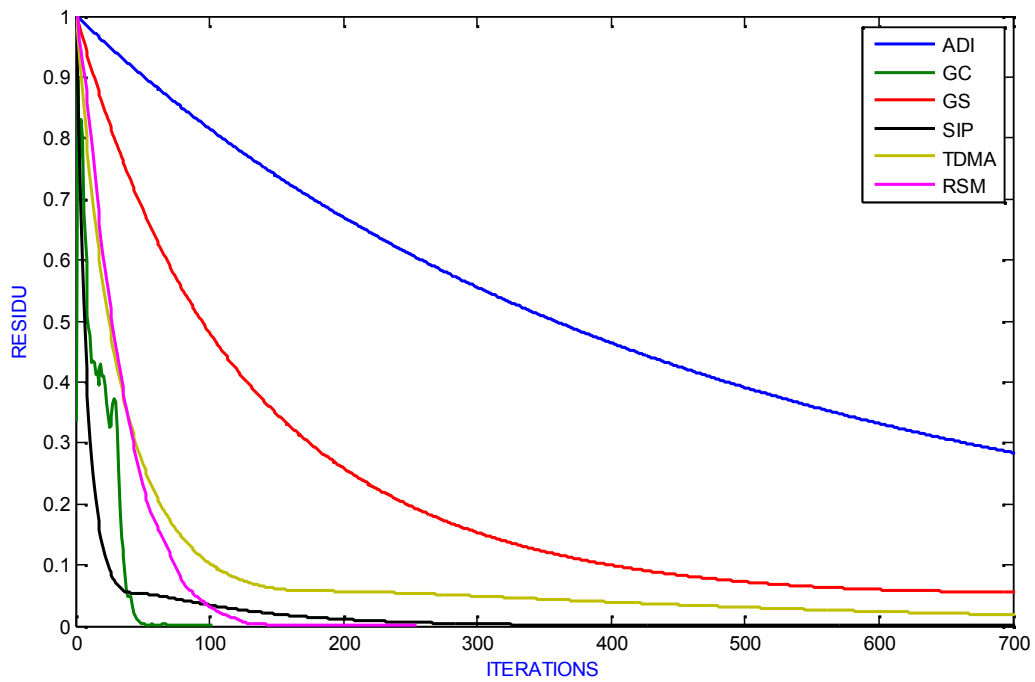


Figure V.50 Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 64×64

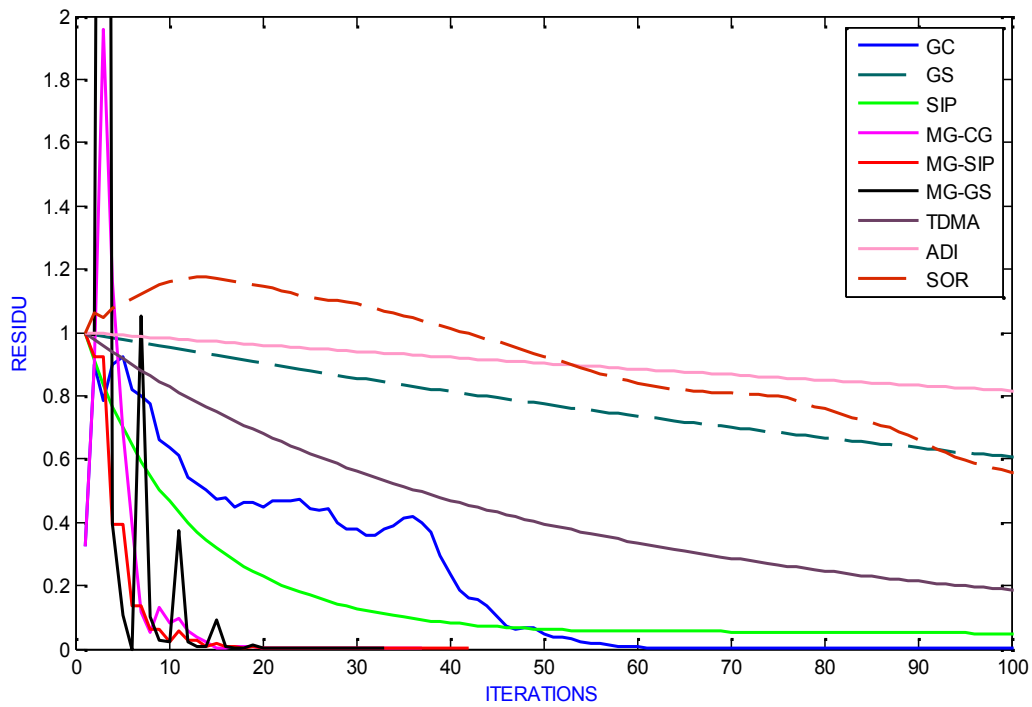


Figure V.51 Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 78×78

V.2.2.2 Deuxième cas :

Cette fois ci le terme source est une constante qui est égale à $4 \cdot 10^7$.

Les conditions aux limites sont de type Neumann sur les frontières Ouest (West) et Sud (South) avec un gradient de température zéro et de type Dirichlet sur les frontières Est (East) et Nord (North) avec une température égale à 300 k.

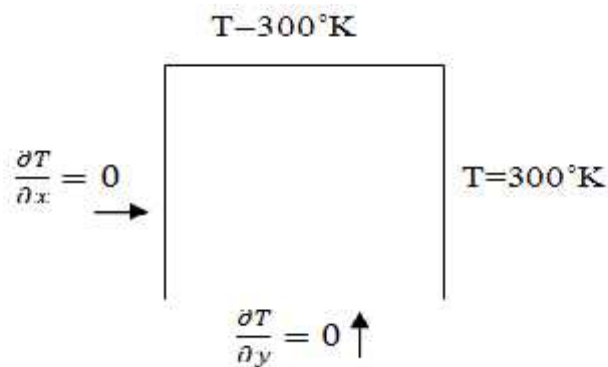


Figure V.52 Les conditions aux limites

Les résultats :

La distribution de la température sur la plaque avec un nombre des points de 78×78 avec une précision de 10^{-5} :

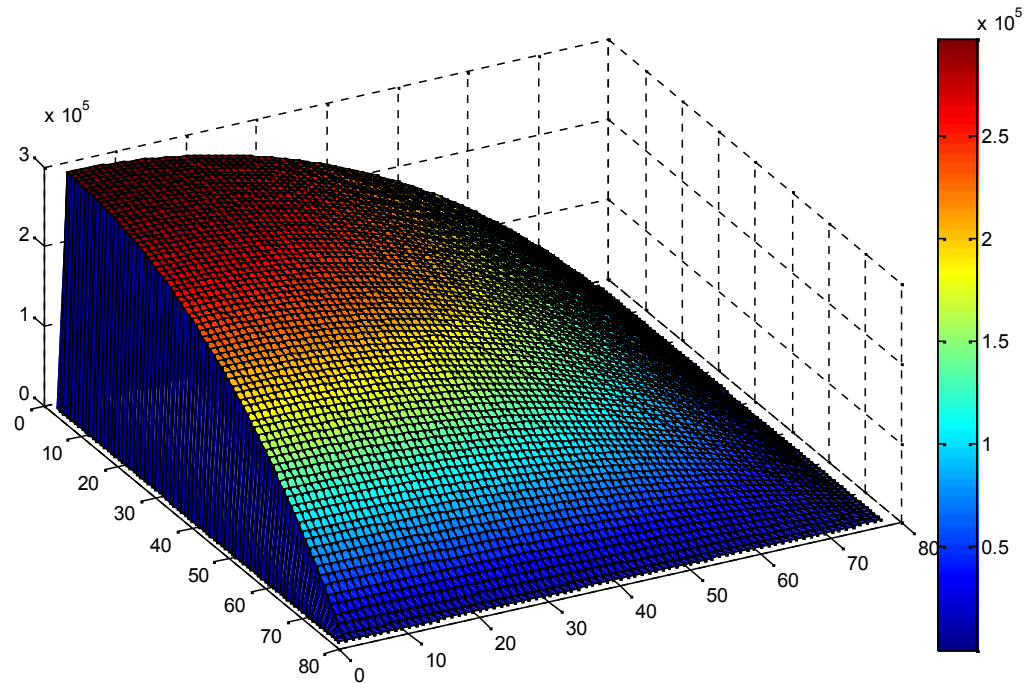


Figure V.53 Distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78

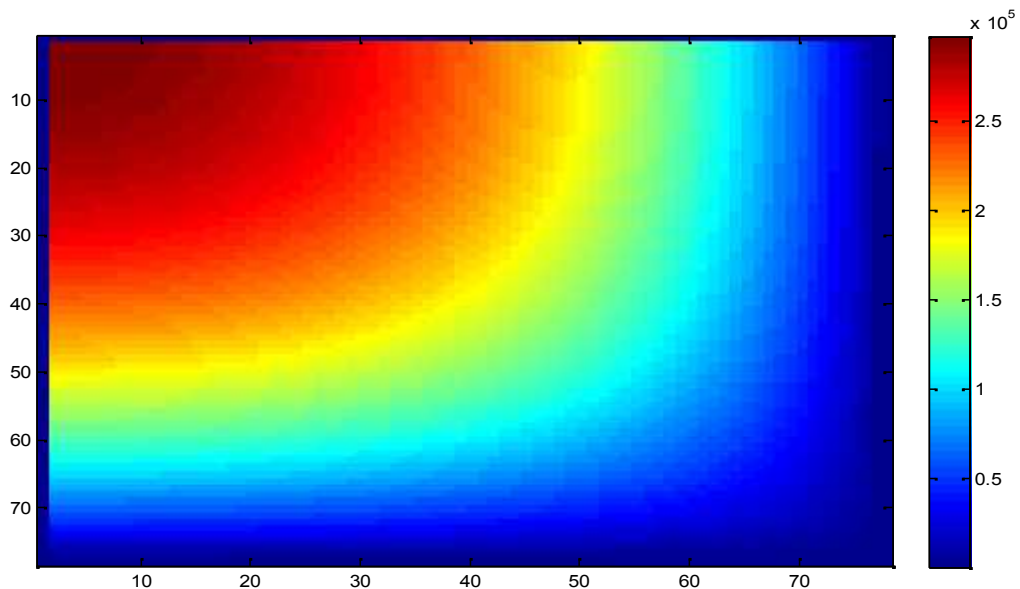


Figure V.54 La distribution de la température le long de la plaque pour un nombre total de points de 78×78 projeté sur un plan

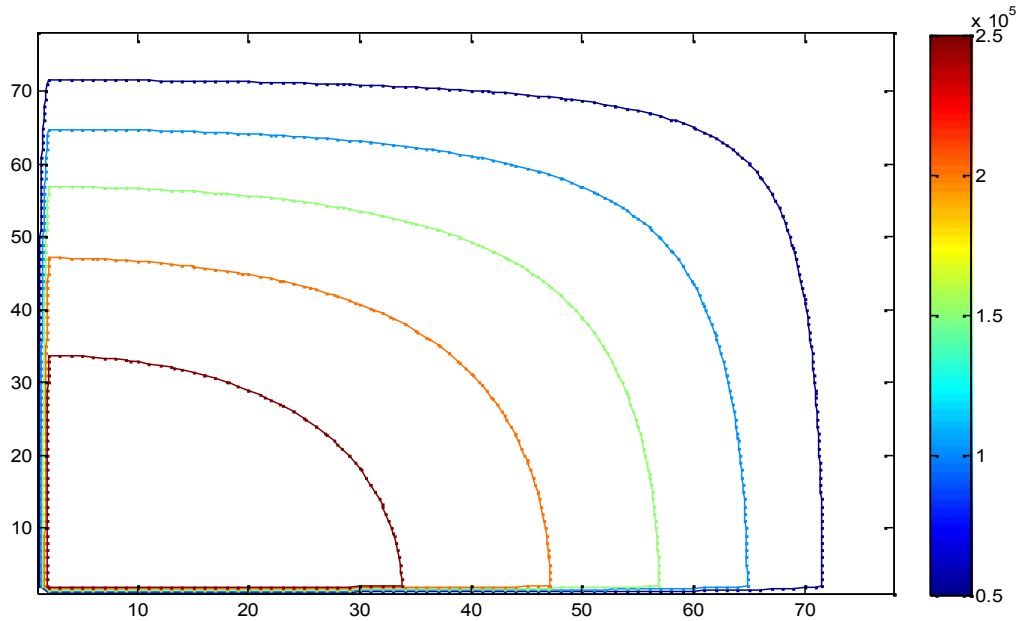


Figure V.55 Les contours de distribution de la température le long de la plaque
Pour un nombre des points de 78×78

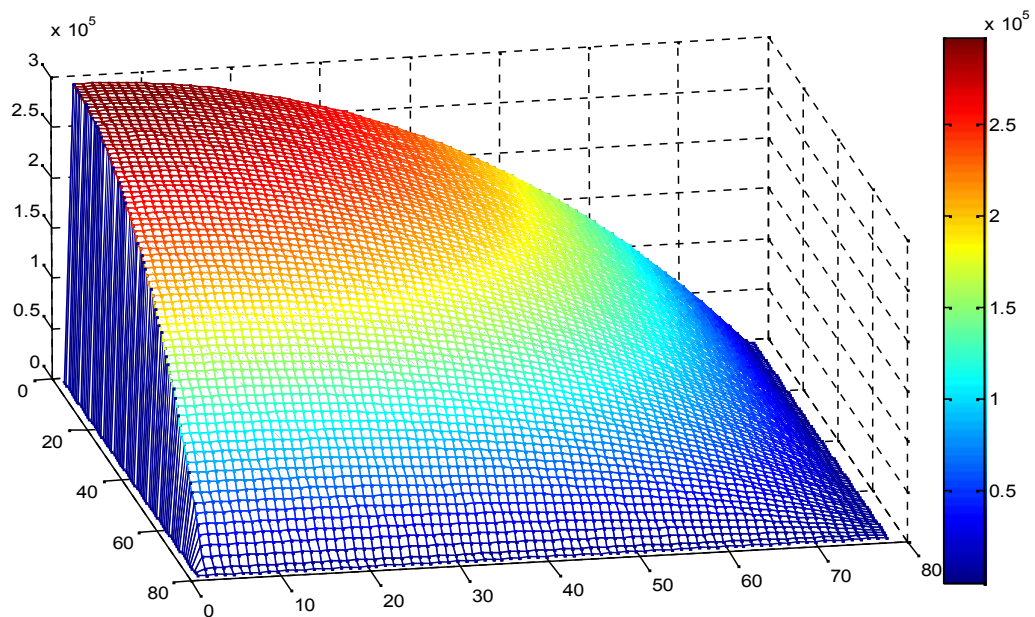


Figure V.56 Distribution de la température le long de la plaque
Pour un nombre de points de 78×78 avec maillage

Nous remarquons une température importante à la frontière Nord de la plaque, d'une valeur de 300 K, cette valeur diminue progressivement en allant vers les frontières Ouest et Sud.

Après la visualisation de la solution on présente les différentes méthodes numériques en fonction des itérations pour une matrice de 78×78 :

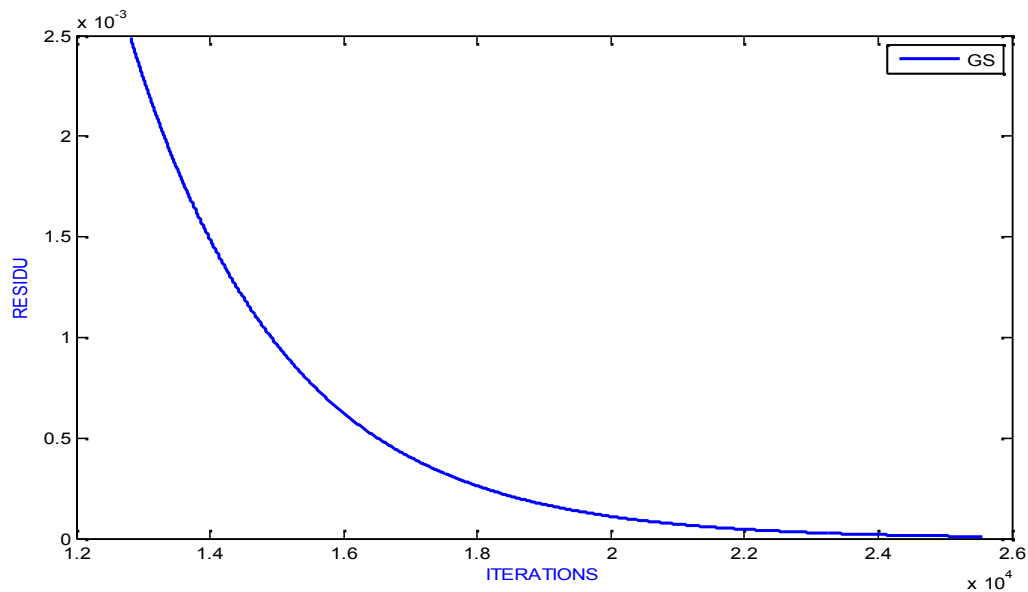


Figure V.57 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de Gauss Seidel converge pour un résidu égal à 9.998×10^{-6} correspondant à 25557 itérations.

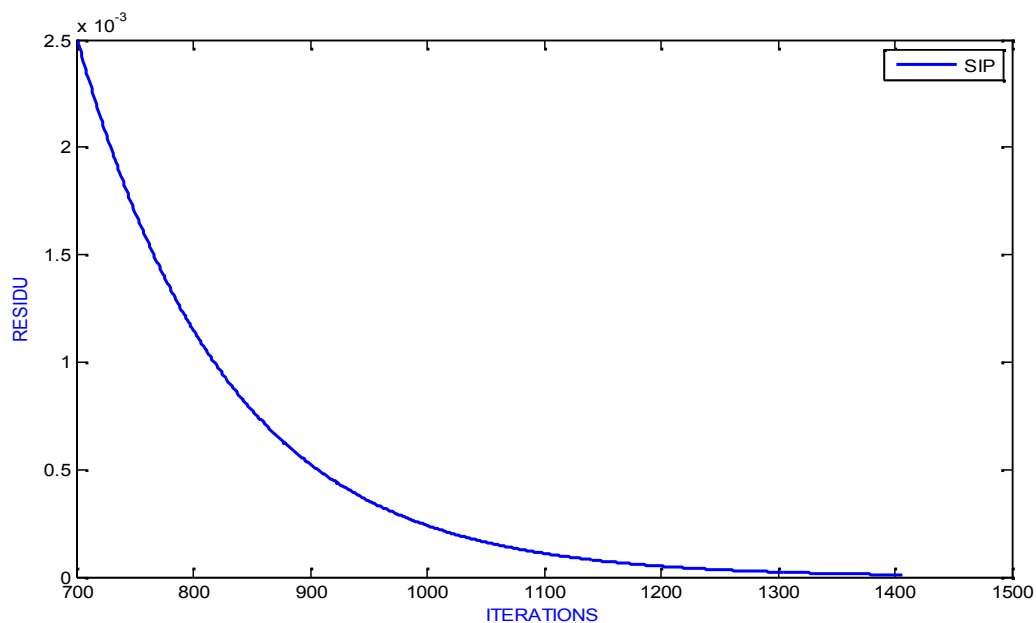


Figure V.58 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de SIP pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de SIP converge pour un résidu égal à $9.925 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 1407 itérations.

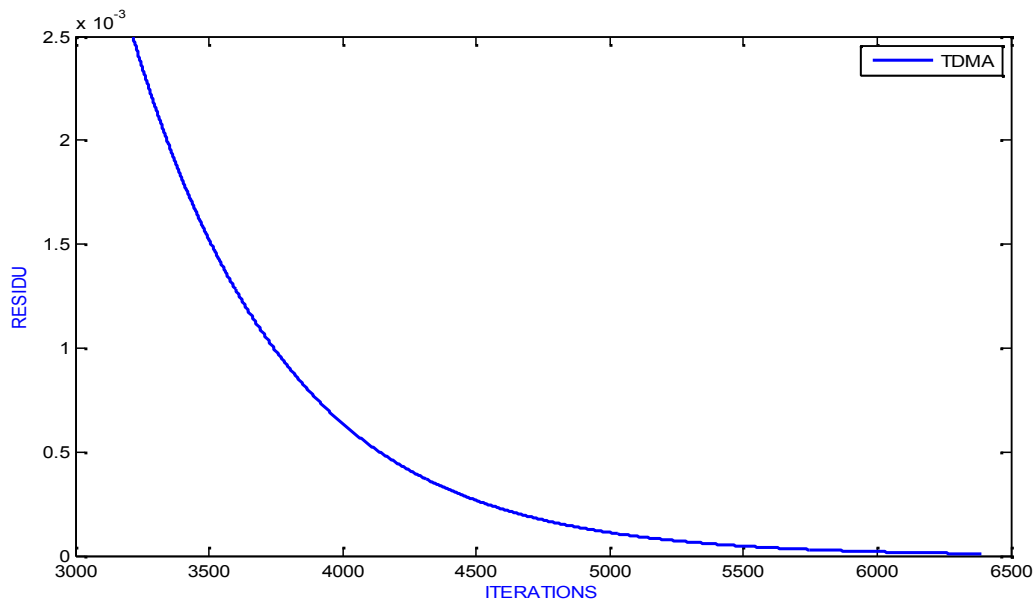


Figure V.59 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de TDMA pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de TDMA converge pour un résidu égal à $9.984 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 6391 itérations.

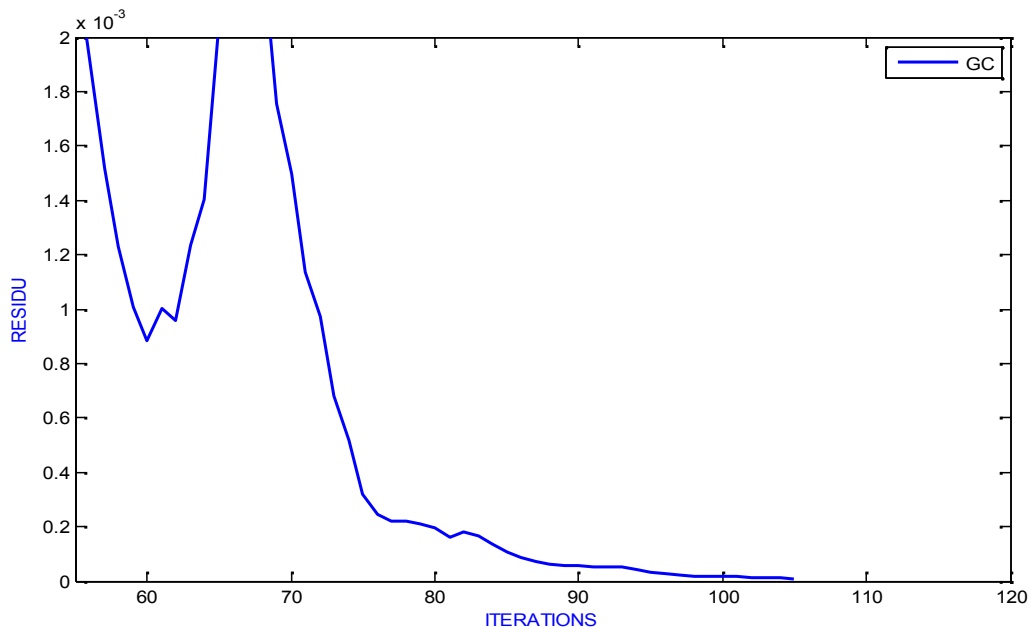


Figure V.60 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Gradient conjugué pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de Gradient conjugué converge pour un résidu égal à $8.944 \cdot 10^{-6}$ correspondants à 105 itérations

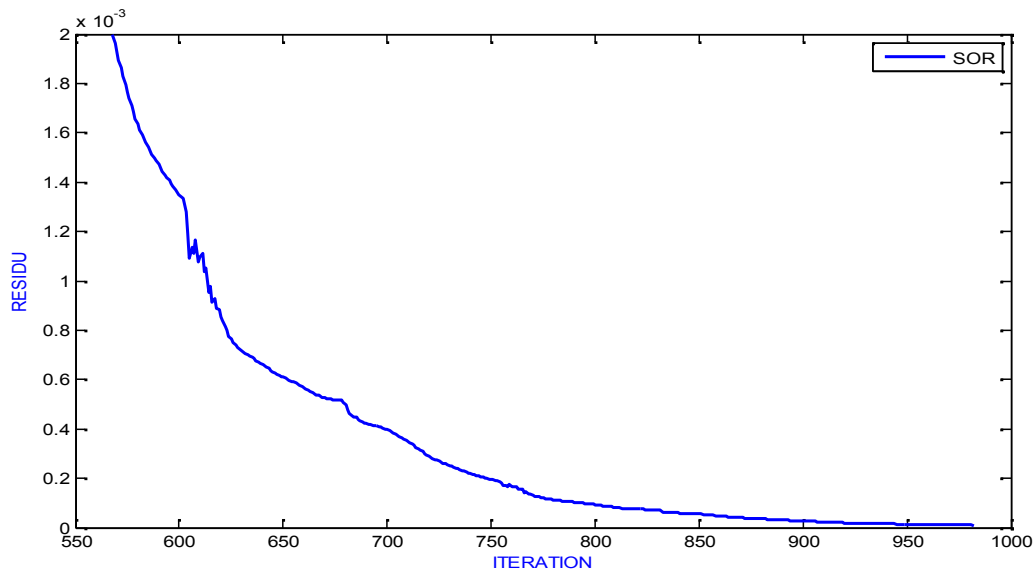


Figure V.61 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de SOR pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de SOR converge pour un résidu égal à $9.884 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 982 itérations avec un facteur de relaxation optimum égal à 1.96

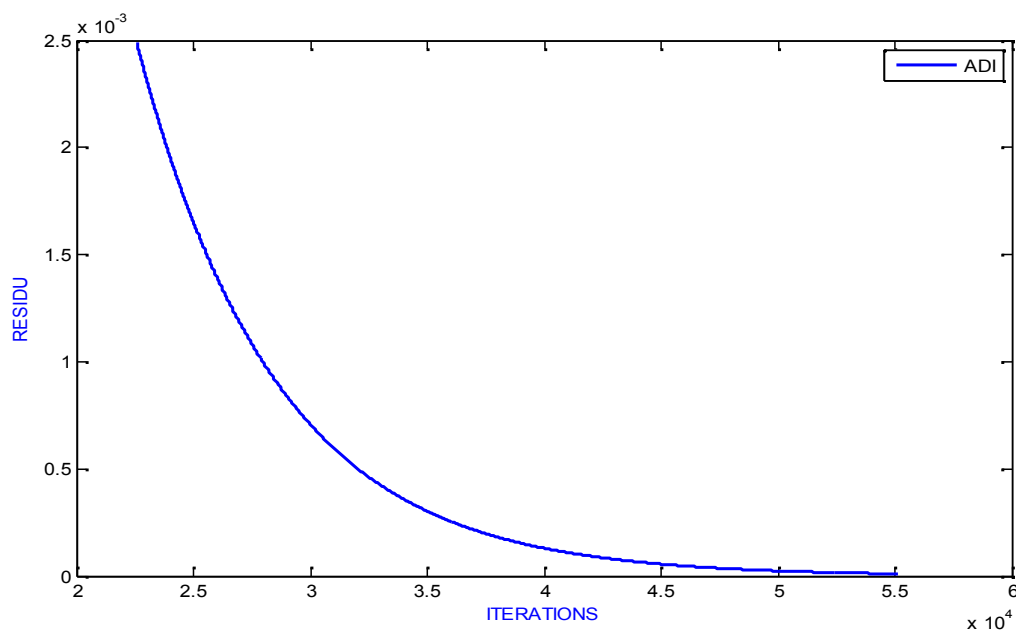


Figure V.62 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de ADI pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de ADI converge pour un résidu égal à $9.984 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 55165 itérations.

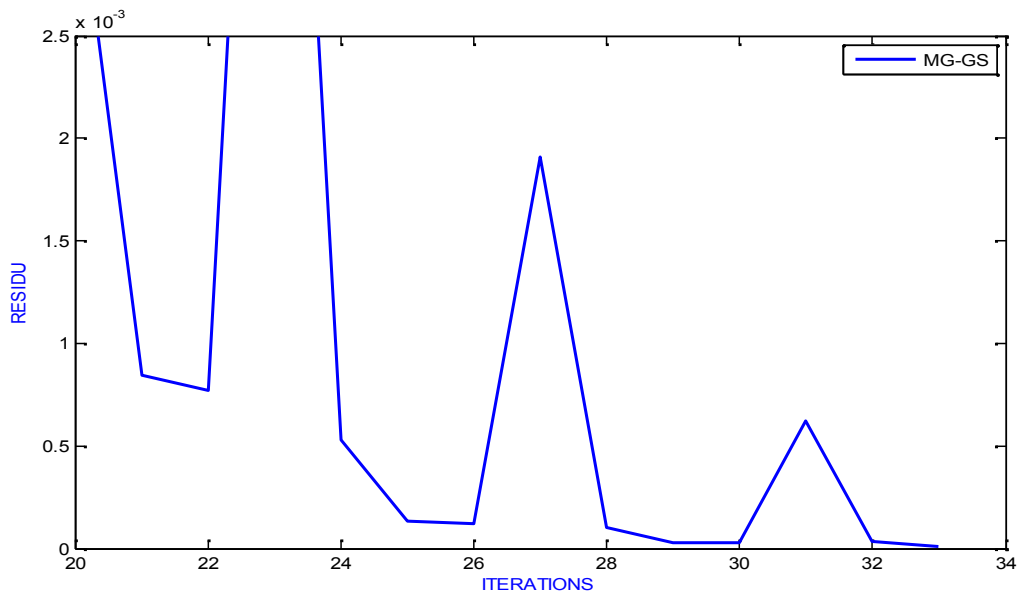


Figure V.63 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles par Gauss Seidel pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de Multigrilles par Gauss Seidel converge pour un résidu égal à $9.033 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 33 itérations.

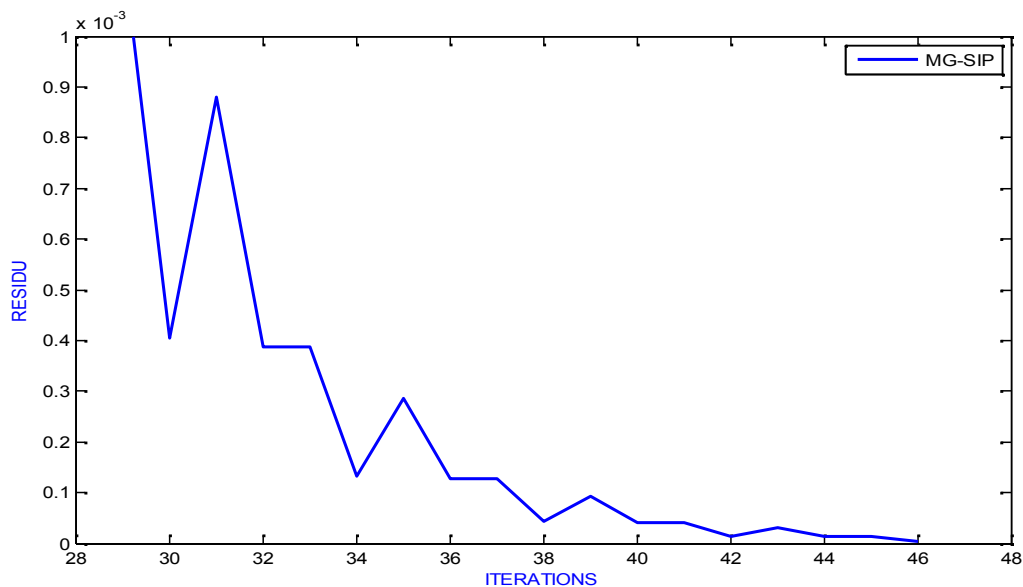


Figure V.64 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles par SIP pour un nombre total de points de 78×78 .

La méthode de Multi-grille par SIP converge pour un résidu égal à $4.570 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 46 itérations.

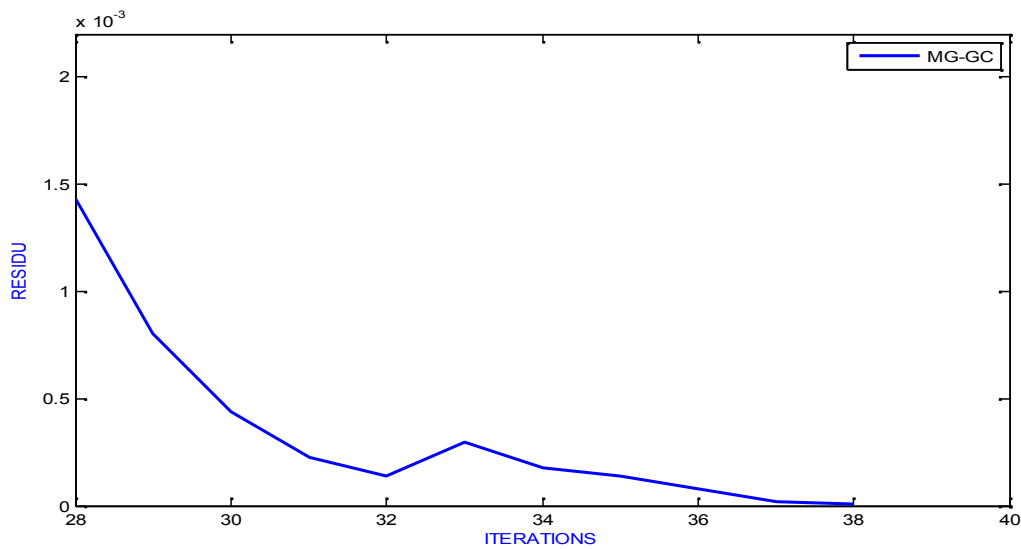


Figure V.65 variation du résidu en fonction des itérations pour la méthode de Multigrilles par Gradient conjugué pour nombre total de points de 78×78 .

La méthode de Multigrilles par Gradient conjugué converge pour un résidu égal à $9.193 \cdot 10^{-6}$ correspondant à 38 itérations.

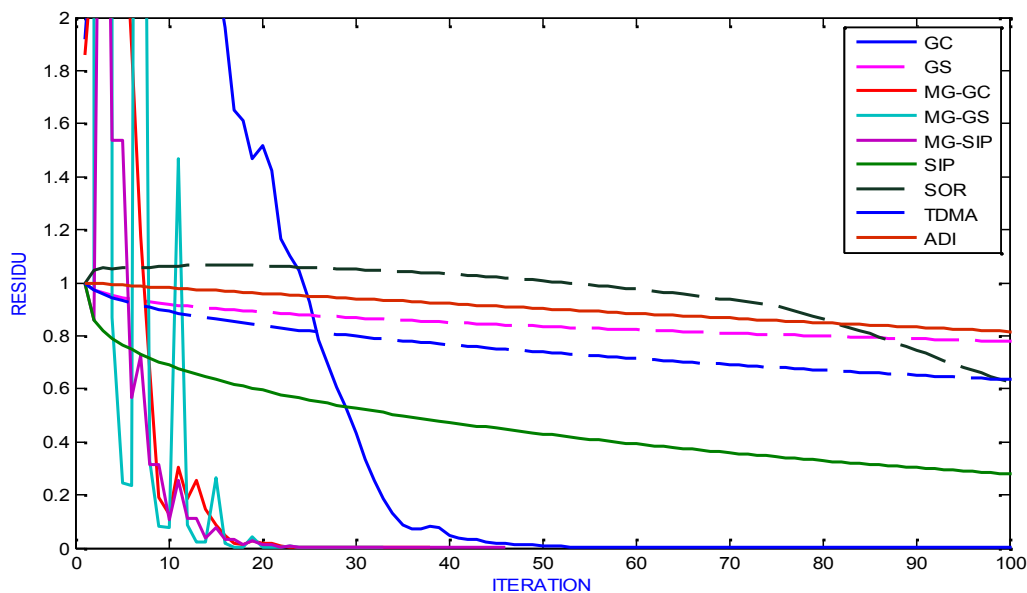


Figure V.66 Comparaison entre toutes les méthodes pour un nombre total de points de 78×78

Note : les graphes sont visualisés l'aide du logiciel MATLAB.

V.2.2.3 Interprétation des résultats :

D'après les résultats obtenus on note que La méthode multigrilles converge pour des itérations très faibles par rapport aux autres méthodes suivies par la méthode du gradient conjugué, par contre la méthode ADI nécessite beaucoup d'itérations.

La méthode de gradient conjugué est la meilleure par rapport aux autres pour un nombre de points assez faible.

De même en augmentant la taille de maillage les méthodes nécessitent plus d'itérations pour qu'elles convergent.

Dans le souci de comparaison entre les méthodes pour un nombre de points de 78×78 nous remarquons que la méthode multigrilles est la plus performante c'est-à-dire qu'elle nécessite un nombre d'itérations minimal.

La méthode de gradient conjugué converge avec 51 itérations pour un nombre de points de 32×32 , alors que multigrilles par Gauss Seidel nécessite 33 itérations pour un nombre de points de 78×78 .

V.3 Application à l'aérodynamique :

Dans cette application l'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{V.3})$$

où w est la fonction potentielle.

En appliquant la méthode des différences finies pour trouver l'équation discrétisée, cette dernière sera résolue par trois méthodes itératives :

- SOR (successive over relaxation);
- SLOR (successive line over relaxation);
- ADI avec un facteur de relaxation égal à 1.33 ;
- ADI avec un facteur de relaxation égal à 2 ;

V.3.1 L'application :

Considérant un profil mince symétrique, on s'intéresse à la vitesse le long du profil ainsi que la distribution de coefficient de pression.

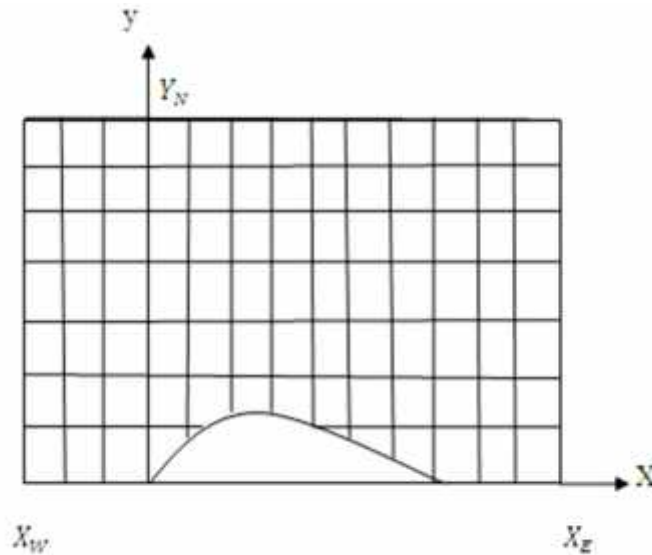


Figure V.67 Discretisation du domaine

où $X_W = -5 \text{ m}$

$$X_E = 15 \text{ m} ;$$

$$Y_N = 20 \text{ m}.$$

Pour la discrétisation on choisi le nombre de point:

Selon l'axe x : $N_x = 80$

- Nombre de points avant le profil $N_{up}=15$
- Nombre de points derrière le profil $N_{down}=25$
- Nombre de points sur le profil $N_{on}=40$

Selon l'axe y : $N_y = 30$

A $t=0$ la vitesse sur le profil est nulle.

Les résultats :

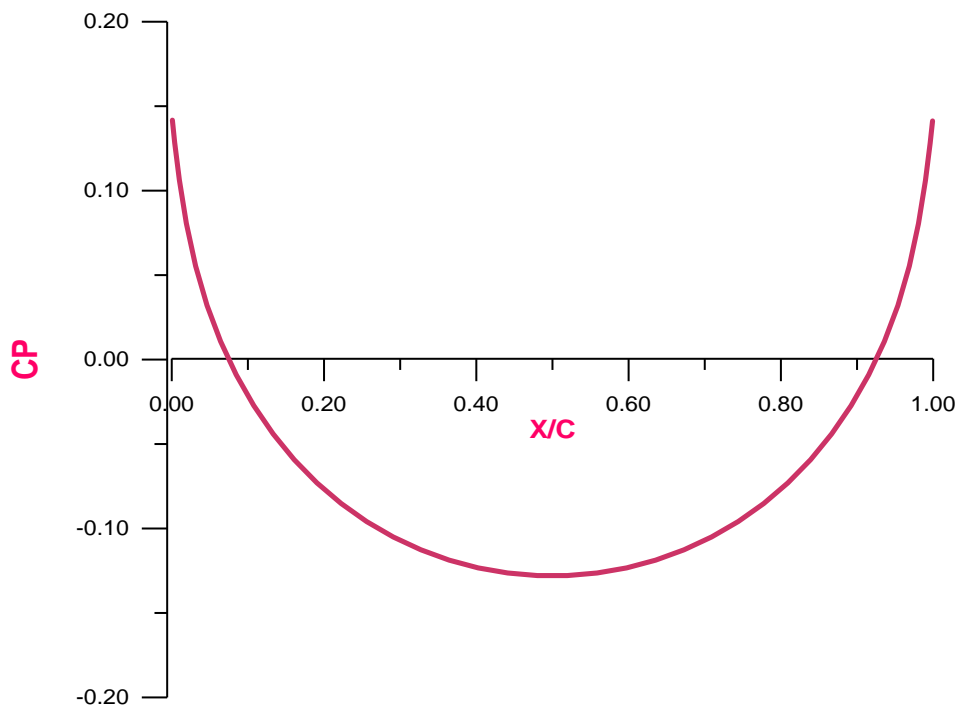


Figure V.68 Distribution de Coefficient de pression le long du profil

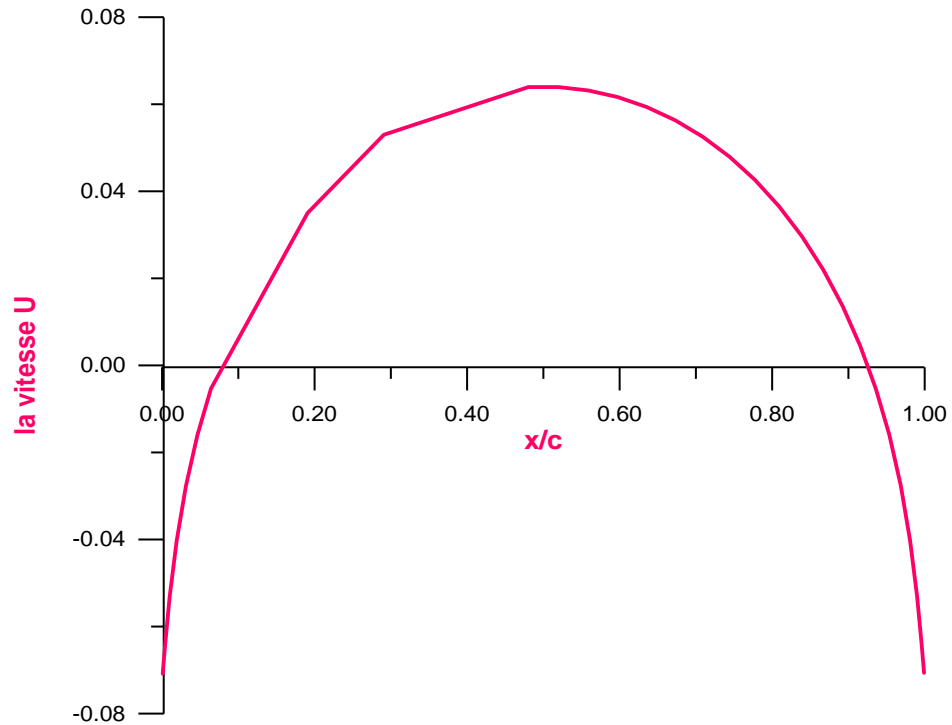


Figure V.69 la distribution du vitesse sur le profil

La comparaison entre les différentes méthodes itératives discutées auparavant est montrée dans le tableau suivant :

Tableau V.3 Comparaison du résidu obtenu par différentes méthodes itératives :

La méthode Nombre des itérations	Le résidu			
	SOR ($\omega=1.77$)	SLOR ($\omega=1.77$)	ADI ($\omega=2$)	ADI ($\omega=1.333$)
1000	$3.36 \cdot 10^{-3}$	$3.622 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-7}$	$2.25 \cdot 10^{-6}$
2000	$1.104 \cdot 10^{-4}$	$1.132 \cdot 10^{-4}$	$3.18 \cdot 10^{-8}$	$2.25 \cdot 10^{-6}$
3000	$1.101 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-4}$	$2.94 \cdot 10^{-8}$	$2.25 \cdot 10^{-6}$

V.3.1.1 Interprétations des résultats :

D'après les figures (V.68) et (V.69) on remarque qu'il y a une dépression sur le profil ainsi qu'une augmentation de vitesse, ce qui vérifie la loi de Bernoulli.

Et d'après les résultats tabulés ci-dessus nous remarquons que dans cette application la méthode la plus précise est celle de l'ADI puisque elle fait l'optimisation dans deux directions. Quelque soit le nombre d'itérations elle donne un petit résidu c'est-à-dire une bonne précision.



Conclusion

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans toutes les branches d'activités industrielles et économiques, en particulier dans tous les génies (chimique, civil, électrique, mécanique, métallurgique,...), les ingénieurs sont amenés à résoudre des problèmes d'optimisation c'est à dire à choisir entre plusieurs solutions possibles, celle qui est la meilleure. Il s'agit donc de minimiser, ou de maximiser un critère (coût, profit, temps, énergie, rendement,...) sur l'ensemble de toutes les solutions admissibles.

Notre travail s'inscrit dans cet aspect, c'est-à-dire de comparer les différentes méthodes numériques itératives à la résolution du système d'équations linéaires. Le choix était fixé sur la méthode Gauss-Seidel, SOR (Successive Over Relaxation), SIP (Strongly Implicit Procedure), TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm), ADI (Alternating Direction Implicit), Gradient conjugué, Multigrilles avec Gauss-Seidel, Multigrilles avec Gradient Conjugué et Multigrilles avec SIP en termes du taux de convergence ainsi que la précision. Nous avons étudié le problème de Poisson en transfert thermique et celui de Laplace en aérodynamique en variant les conditions aux limites.

Au cours de nos recherches, nous avons abouti à des résultats dont nous allons citer les plus importants:

- La méthode multigrilles avec Gauss-Seidel est la plus performante dans tous les cas. Utilisée avec des conditions aux limites de type DIRICHLET, elle converge après 11 itérations pour un nombre total de points de 78×78 . Avec des conditions aux limites de type NEUMANN, elle converge après 33 itérations pour le même nombre de points.
- La méthode Multigrilles avec SIP ne converge qu'après 21 itérations pour les conditions aux limites de type DIRICHLET et 42 itérations pour les conditions aux limites de type NEUMANN.
- Parmi les méthodes classiques, celle de Gradient Conjugué arrive en seconde position après les trois méthodes Multigrilles citées précédemment avec 118 itérations selon les conditions aux limites de type NEUMANN et 43 itérations selon les conditions aux limites de type DIRICHLET pour le même nombre de points de 78×78 .

- Pour la méthode ADI, il faut atteindre 55156 itérations pour qu'elle converge à un nombre de points identique.

Pendant nos investigations, nous avons éprouvé énormément de difficultés à la compréhension des différents algorithmes en particulier la méthode multigrilles ainsi que les tests de convergence qui exigent beaucoup de notions mathématiques.

- Il en est de même pour les méthodes de discrétisation particulièrement celle des volumes finis qui nous a posé des difficultés malgré nos résultats qui ont été concluants.
- La difficulté réside également dans l'application des différents types des conditions aux limites, par conséquent il ne nous a pas été loisible d'approfondir aussi loin que possible nos recherches dans ce sens.
- Les ordinateurs dont nous disposons sont très en deçà des capacités nécessaires pour établir les calculs des systèmes matriciels importants, c'est la raison pour laquelle nous n'avons pu réaliser une étude à grande échelle. Pour cela une centrale de calculs est indispensable.

Toutefois, une amélioration notable de ce travail serait d'adopter l'efficacité de la méthode Multigrilles non seulement par rapport à une simple méthode bigrille mais aussi par rapport aux autres variantes Multigrilles.

De plus, la conception des méthodes n'est pas limitée aux problèmes bidimensionnels, elle peut être généralisée par les problèmes en trois dimensions (3D) en tenant compte de techniques de programmation spécifiques (comme la programmation parallèle) qui sont devenues des outils incontournables à la connaissance et ouvrent de nouveaux horizons pour la modélisation et la compréhension des phénomènes complexes ainsi que la mise au point de nouvelles technologies.