

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

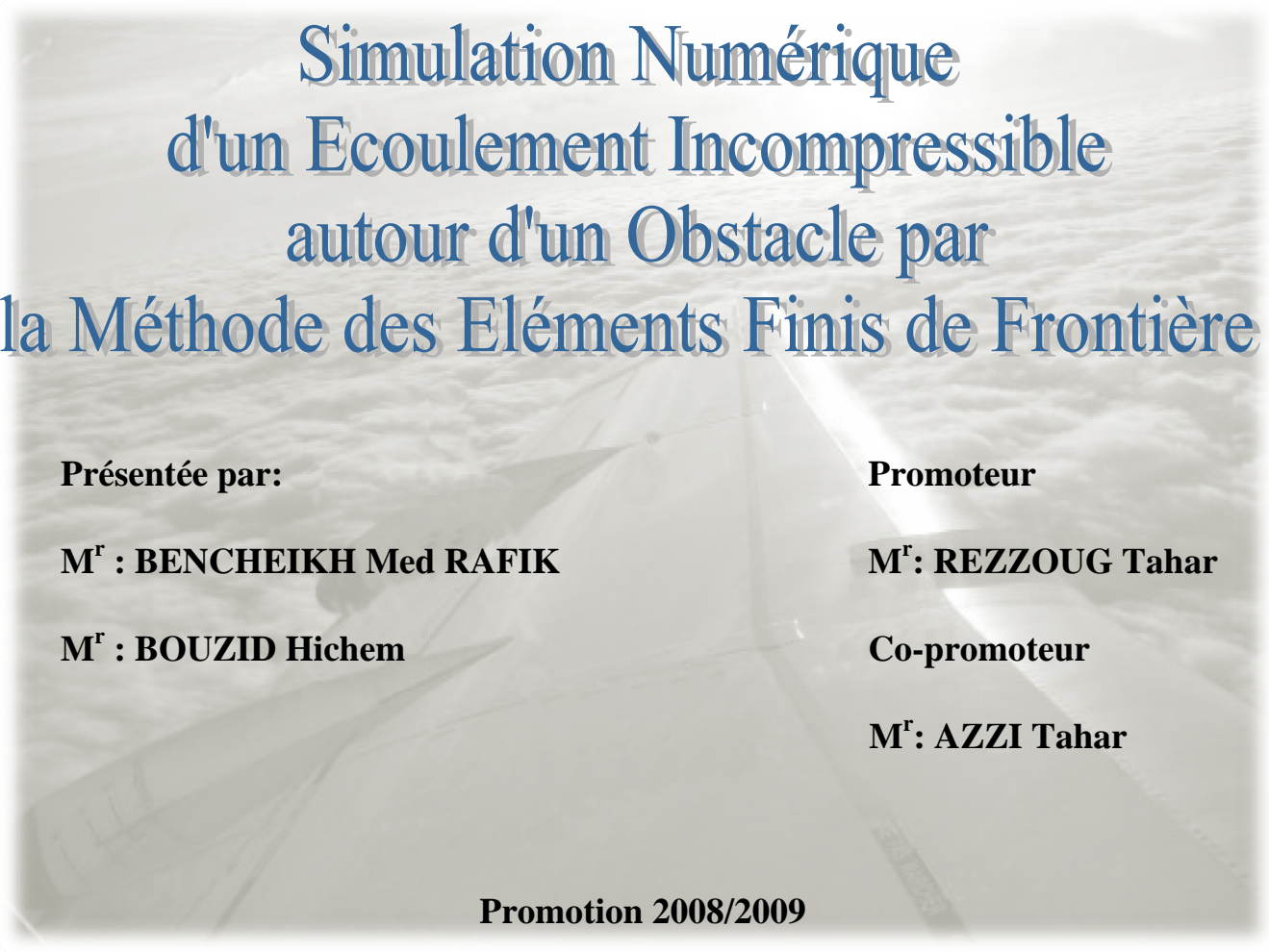
Département : Aéronautique

Mémoire pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique

Spécialité : Construction Aéronautique

Option : Propulsion

Thème



**Simulation Numérique
d'un Ecoulement Incompressible
autour d'un Obstacle par
la Méthode des Eléments Finis de Frontière**

Présentée par:

M^r : BENCHEIKH Med RAFIK

M^r : BOUZID Hichem

Promoteur

M^r: REZZOUG Tahar

Co-promoteur

M^r: AZZI Tahar

Promotion 2008/2009

Résumé

Le présent travail consiste à faire une simulation numérique d'un écoulement incompressible et irrotationnel autour d'un obstacle par la méthode des éléments finis de frontière, en résolvant séparément l'écoulement à potentiel d'un fluide parfait à l'extérieur de la couche limite, et l'écoulement d'un fluide visqueux à l'intérieur de cette borne.

Abstract

This project is about numerical simulation method of incompressible and potential flow around of obstacle with the boundary element method, we separate the solution with potential flow outside the boundary layer and viscous fluid flow's inside of this boundary stone.

ملخص

خلال المشروع قمنا بمحاكاة رقمية لتدفق لا انضغاطي حول عائق ، باستعمال طريقة العناصر الحدودية، بفصل خصائص المائع داخل و خارج الطبقة الحدودية، حيث فرضنا أن المائع مثالي خارج الطبقة الحدودية، و المائع لزج داخلها.

I.1. INTRODUCTION.....	1
I.2.Objectifs.....	2
I.3. APPROCHE DE RESOLUTION	3

II. 1. Introduction	4
II. 2. EQUATIONS GENERALES REGISSANTS L'ECOULEMENT DANS LE FLUIDE LIBRE	4
II. 2.1. FORMULATION ET HYPOTHESES	4
Hypothèse.....	4
II. 2.2. CONDITIONS AUX LIMITES	6
II. 3. EQUATIONS GENERALES REGISSANTS L'ECOULEMENT DANS LA COUCHE LIMITE	8
II. 3. 1. position du problème	8
II. 3.2. L'EQUATION INTEGRALE DE QUANTITE DE MOUVEMENT.....	9
II. 3.2.1. LE BILAN MASSIQUE	9
II. 3.2.2. VARIATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.....	9
II. 3.2.3. LES FORCES EXTERIEURES	10
II. 3.2.3. a. Force de pression	10
II. 3.2.3. b. Force de frottement.....	10
II. 3.2.4. BILAN DE QUANTITES DE MOUVEMENT.....	10
II. 3.2.5. Paramètres caractéristiques de la couche limite	10
III.3. 3. LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES.....	11
Hypothèse	12
Conditions aux limites.....	12

III. 1. Introduction	13
III. 1.1. présentation de la méthode des éléments finis de frontière.....	13
III. 1.2. problème à double frontière	14
III. 2. La solution fondamentale.....	15
III. 3. Adaptation de la méthode des éléments finis de frontière.....	17
III. 3.1. Singularité sur la frontière	19
III. 3.2. problème à double frontière	21
III. 4. DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS DE FRONTIERE.....	22
III. 4. 1. Les Différents Types D'éléments	23
III. 4.2. Les fonctions d'interpolation.....	24
III. 4.3. L'évaluation des intégrales.....	25
III. 4.4. Formation du système matriciel	27
III. 4.5. Calcul de la contribution pour un angle de " α " degré sur la frontière.....	29
III. 4.6. Evaluation de l'intégral G sur un élément singulier.....	30
III. 5 . Résolution du système matriciel	31
III. 5.1. Algorithme d'élimination de Gauss.....	31
III. 5.2. Stratégies de pivot	32
III. 5. 3. Algorithme de résolution	32
III. 6. Singularité géométrique	33
III.7. Organigramme logique	34

IV. 1. Introduction.....	36
IV. 2. Ecoulement laminaire.....	36
IV. 2 .1. méthode de Thwaites	36
IV. 2.2. Formulation.....	37
IV. 2.3. Décollement de la couche limite laminaire	39
IV.2.4. Procédure et organigramme logique	40
IV.3. Ecoulement turbulent.....	40
IV.3.1. Formulation	41

IV.3.2. Evaluation des points de séparation	42
IV.3. 3. Evaluation des points de transition	44
IV.4. Procédure et organigramme logique.....	44
IV. 5. SIMULATION DE DECOLLEMENT DE LA COUCHE LIMITE.....	45
IV. 5.1. distribution de pression.....	45
IV. 5.2. sillage de décollement.....	45
IV. 6. L'EVALUATION DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUE.....	46
A. Les coefficients locaux	46
1. Coefficient de pression	46
1.1. Extradados (Partie supérieur)	46
1.2. Intrados (Partie inférieur)	46
1.3. Bord de fuite.....	46
2. Coefficient de frottement pariétal	46
B. Les coefficients globaux	47
1. Coefficient de portance	47
2. Coefficient de traînée de pression	47
3. Coefficient de traînée de frottement	47
4. Coefficient de traînée totale	47

Chapitre V

PRESNTATION DE PROGRAMME

V.1. INTRODUCTION	48
V.2.Structure général	48
V.3.Les sous-programme.....	49
1. sous-programme FORME	50
2. sous-programme ROTATION	50
3. sous-programme DECOL.....	50
4. sous-programme RESOL.....	50
5. sous-programme FMAT.....	51
6. sous-programme INTE.....	51
7. sous-programme INLO.....	51
8. sous-programme SLNPD.....	51
9. sous-programme ORDRE.....	51
10. sous-programme DERIVE.....	51

11. sous-programme POINT.....	52
a. traitement de la couche limite Laminaire.....	52
b. traitement de la couche limite Turbulente.....	52
12. sous-programme GAUSS	52
13. sous-programme GAUSS2	52
14. sous-programme POWELL	53
15. sous-programme TEST.....	53
16. sous-programme COEFF.....	53

Chapitre VI VALIDATION DES MÉTHODES DE CALCUL UTILISÉES

VI. 1 .INTRODUCTION	58
1) La distribution de vitesse	58
2) La distribution de pression	61
3) Le coefficient de portance C_l en fonction de l'angle d'incidence	62

Chapitre VII présentation et analyse des résultats

VII .1. INTRODUCTION	64
VII.2. Choix de distance entre l'obstacle et la frontière du domaine.....	64
VII.3. COURBE ET INTERPRETATION	65
VII.3.1.Influence de la forme de l'obstacle.....	65
a) influence sur le point de stagnation et le point de décollement	65
b) influence sur la distribution de vitesse	66
c) influence sur la distribution de C_p	67
d) influence sur la distribution de C_f	68
VII.3.2.Influence de la vitesse amont.....	70
a) influence sur le point de stagnation et le point de décollement.....	70
b) influence sur la distribution de vitesse	71
c) influence sur la distribution de C_p	72
d) influence sur la distribution de C_f	73
VII.3.3.Influence de l'angle d'incidence.....	74
a) influence sur le point de stagnation et le point de décollement.....	74
b) Influence sur la distribution de vitesse.....	75

c) Influence sur la distribution de C_p	76
d) Influence sur la distribution de C_f	77
VII.3.4.Influence de l'angle de décollement simulé.....	79
a) influence sur le point de décollement.....	79
b) Influence sur la distribution de pression.....	80
<u>CONCLUSION</u>	<u>81</u>
<u>Bibliographie</u>	<u>83</u>
<u>Annexes</u>	

Chapitre I
INTRODUCTION GENERALE

I. 1. INTRODUCTION :

Beaucoup de recherches aéronautiques sont basées actuellement sur la CFD (Computational Fluid Dynamics), les modèles numériques de dynamique des fluides sont devenus très performant. La vitesse élevée des processeurs permet de réduire les temps de calculs pour obtenir des solutions numériques complexes et précises. Les simulations numériques se comparent maintenant à de véritables essais expérimentaux virtuels. Les modèles physiques utilisés peuvent être 2D ou 3D et de complexités différentes. Les modèles 3D les plus avancés comme ceux implanté dans le Fluent utilisent la théorie des éléments finis ou des volumes finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes. D'autres modèles, comme le modèle 2D développé dans NVFoil, moins longs à mettre en place, utilisent la méthode des panneaux qui consiste à distribuer des sources ou des tourbillons, appelés singularités, à la surface d'une aile, d'une pale ou d'un profil aérodynamique 2D afin d'en déduire le champ de vitesse total satisfaisant à des conditions limites prédéfinies. La méthode des panneaux considère le fluide comme étant non visqueux. Elle est donc généralement suivie d'un calcul de couche limite : zone très mince localisée le long de la surface du corps où les effets de la viscosité sont importants.

Mais certain de ces méthodes ne prend pas en compte les effets de séparation de la couche limite, ou le régime d'écoulement (laminaire, turbulent) au sein de cette couche limite, ces simplifications cependant limitent sérieusement la généralisation de leur modèle et l'application en reste limitée ;

Il s'avère donc nécessaire d'évaluer numériquement une méthode de simulation plus exacte pour modéliser avec précision les divers phénomènes physique qui apparaisse autour d'un obstacle soumis à un écoulement d'air, telle que la transition laminaire-turbulent ou le décollement de la couche limite qui est souvent inévitable,

Cette nécessité nous a donc amené à faire une recherche pour trouvé une meilleur méthode de simulation, la méthode la plus connue et la plus utilisé pour le traitement de ce type de problème semblé être la méthode des éléments finis, mais vu nous objectifs cette méthode s'avère plus lourde car pour faire une rotation ou encore simuler le décollement de la couche limite, il est nécessaire de reconstruire les centaines d'éléments discrétisant le domaine de l'écoulement, et ce surtout si l'obstacle en question est asymétrique.

Une autre méthode moins rigide pour palier à cette faiblesse de la méthode des éléments finis standards existe, il s'agit de la METHODE DES ELEMENTS FINIS DE FRONTIERE (BOUNDARY ELEMENTS METHODE).

Cette méthode est plus puissante et plus souple, en particulier dans les problèmes des écoulements et dont le domaine s'étend à l'infini, car elle nécessite seulement le maillage de la frontière de l'obstacle étudié, et si nous voulons bien, la frontière du domaine, donc on n'a pas à mailler tout le domaine d'intégration, ni à reconstruire le maillage à chaque fois qu'on effectue un changement ou une rotation de l'objet (C.A. BREBBIA & J. DOMINGUEZ [5]).

Donc cette méthode obéit très bien à nos objectifs du fait que nous voulons généraliser la simulation pour n'importe quel obstacle, et pour différents angles d'incidences.

Ainsi le nombre d'éléments utilisés sera considérablement réduit, diminuant le nombre d'équations à résoudre et la quantité de données en mémoire. Le temps de calcul s'en trouve diminué.

Enfin nous proposons une version complète de notre travail, qui inclut la totalité du programme de calcul développé ainsi que les fichiers d'entrée utilisés dans cette œuvre.

I. 2. Objectifs :

Le travail proposé ici a donc pour objectif premier de trouver une meilleure simulation de l'écoulement pour une évaluation plus précise de la distribution de vitesse, de pression autour de l'obstacle, du frottement sur la paroi, et par suite des coefficients aérodynamiques de l'objet étudié, tout en tenant compte du type de régime, de l'angle d'incidence, où de très important phénomène de décollement de la couche limite surviennent, créant ainsi une traînée de forme supplémentaire.

Le second objectif consiste à faciliter la compréhension et l'interprétation des résultats obtenus en évitant la lecture des centaines des valeurs numériques, et cela par l'utilisation d'une méthode de visualisation que nous avons développée.

I. 3. APPROCHE DE RESOLUTION :

Pour résoudre ce problème d'écoulement, nous avons décomposé l'approche en deux grande étapes, soit:

- solutionner l'écoulement potentiel d'un fluide parfait incompressible à l'extérieur de la couche limite par la méthode des éléments finis de frontière;
- solutionner l'écoulement visqueux à l'intérieur de cette couche limite par les équations intégrales de quantité de mouvement en utilisant les résultats obtenues à la première étape.

Cette approche permettra une solution rapide du problème puisqu'on ne retrouve aucun terme non linéaire dans la formulation de l'écoulement potentiel (hors couche limite).

De plus les termes de viscosité ne sont traités qu'à l'intérieur de la couche limite et dans ce cas aucun temps n'est perdu en calcul numérique.

Ainsi le problème de la simulation sera traité suivant les étapes comme suit :

1- la solution de l'écoulement potentiel à l'extérieur de la couche limite, ainsi la vitesse au voisinage immédiat de la couche limite sera déterminer ;

2- la localisation de point de stagnation (point d'arrêt) sur l'obstacle (le profil) étudié à partir de ces vitesses ;

3- la solution de l'écoulement visqueux à l'intérieur de la couche limite ;

4- la localisation des points de transition laminaire-turbulent ;

5- la localisation des points de décollement de la couche limite ;

6- l'évaluation des coefficients aérodynamiques en intégrant sur l'obstacle (le profil) les coefficients locaux de frottement et de pression, et en gardant la valeur de la pression constante derrière les points de décollement.

Chapitre II

FORMULATION MATHÉMATIQUE

II. 1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons faire une analyse mathématique de l'écoulement pour établir les équations de base qui gouvernent séparément :

- L'écoulement d'un fluide parfait, incompressible, et irrotationnel à l'extérieur de la couche limite.
- L'écoulement d'un fluide visqueux à l'intérieur de la couche limite.

En effet, le modèle mathématique qui régit l'écoulement du fluide parfait est obtenu à partir du principe de conservation de la masse, en revanche pour l'écoulement du fluide visqueux le modèle mathématique est obtenu à partir d'un bilan de quantité de mouvement.

Donc nous allons d'abord exhiber ces équations ainsi que les hypothèses qui permettront de les simplifier, ensuite nous énoncerons les conditions aux limites du problème posé.

L'approche sera donc décomposée en deux parties, la première concerne le fluide libre, et la seconde concerne la couche limite.

II. 2. EQUATIONS GENERALES REGISSANTS L'ECOULEMENT DANS LE FLUIDE LIBRE :

II. 2.1. FORMULATION ET HYPOTHESES

- L'équation de continuité qui exprime le principe de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (\text{II. 1})$$

Hypothèse

Pour satisfaire la condition d'un écoulement incompressible nous allons établir un ensemble d'hypothèses :

- Le fluide est considéré parfait.
- L'écoulement est stationnaire.
- L'écoulement est bidimensionnel sur un plan (X, Y).

Puisque l'écoulement est stationnaire alors il ne dépend pas du temps, donc tout dérivé par rapport au temps doit être nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si l'écoulement est incompressible, cela signifie que la masse volumique ρ est constante dans l'espace et dans le temps donc :

$$\rho = \text{cst}$$

Et par suite on peut écrire:

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

De plus :

$$\rho \neq 0$$

Alors, il est nécessaire que :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Donc pour satisfaire la condition d'un écoulement incompressible il suffit que :

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (\text{II. 2})$$

La deuxième condition à satisfaire est la condition d'un écoulement irrotationnel ou à potentiel, physiquement elle signifie que toute particule de fluide se déplace en une succession de mouvements de translation pure, et mathématiquement elle signifie que l'opérateur $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ de la vitesse est nul, donc la relation à satisfaire est :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0}$$

Ce qui implique que :

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0 \quad (\text{II. 3})$$

Alors en résumons, le champ de vitesse (u,v) doit satisfaire les relations suivantes :

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (\text{condition d'incompressibilité})$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0 \quad (\text{condition d'irrotationnelité})$$

Nous pouvons définir u et v par rapport à la fonction de courant (ψ) tel que :

$$u = \frac{d\psi}{dy} \quad (\text{II.4})$$

$$v = -\frac{d\psi}{dx} \quad (\text{II.5})$$

Ces deux relations (II.4) et (II.5) nous permettent donc de formuler notre problème par fonction de courant, nous verrons plus loin l'importance de cette formulation dans l'étude des écoulements à potentiel.

Ainsi l'équation de continuité est satisfaite et la condition d'incompressibilité est automatiquement satisfaite;

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

Finalement il ne reste qu'à satisfaire la condition d'irrotationnelité, soit :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = \nabla^2\psi = 0$$

Cette équation finale est une équation différentielle elliptique dite de Laplace, la résolution de cette équation sera démontrée dans le prochain chapitre.

II. 2.2. CONDITIONS AUX LIMITES :

Pour résoudre le problème de l'écoulement à potentiel en utilisant une formulation par fonction de courant, les conditions de frontières seront évaluées comme suit:

Pour la frontière du domaine (D) , nous devons respecter la vitesse de l'écoulement libre non perturbé par la présence de l'obstacle, la vitesse du fluide est donc connue, alors

dans ce cas nous avons une condition dite de Neumann et nous poserons que le flux est constant : $Q = \bar{Q} = \frac{d\psi}{dn}$

Pour la frontière de l'obstacle (L), nous devons garder la fonction de courant (ψ) constante car l'écoulement épouse le contour, la fonction de courant est donc connue, dans ce cas nous aurons une condition dite de Dirichlet: $\psi = \bar{\psi}$

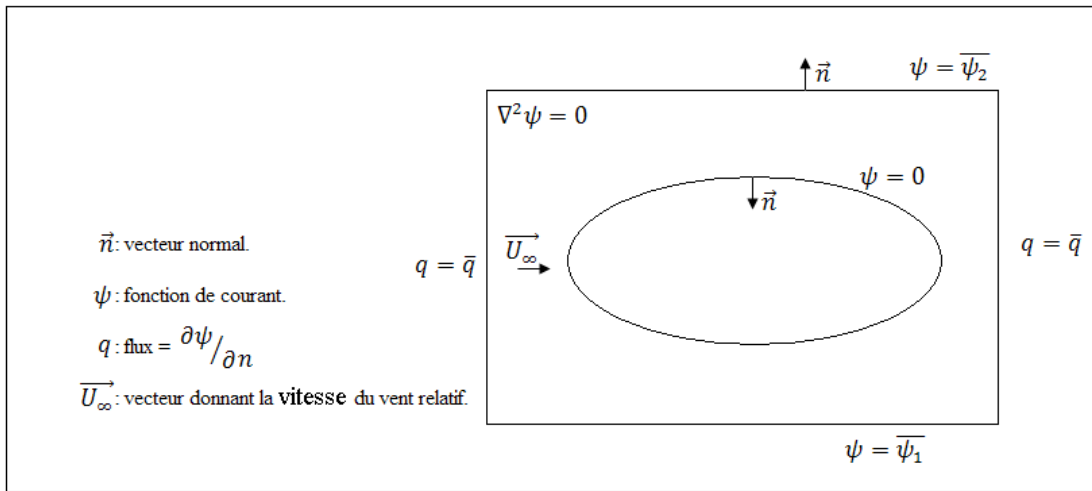


Fig. II.1: Domaine d'intégration avec conditions limite

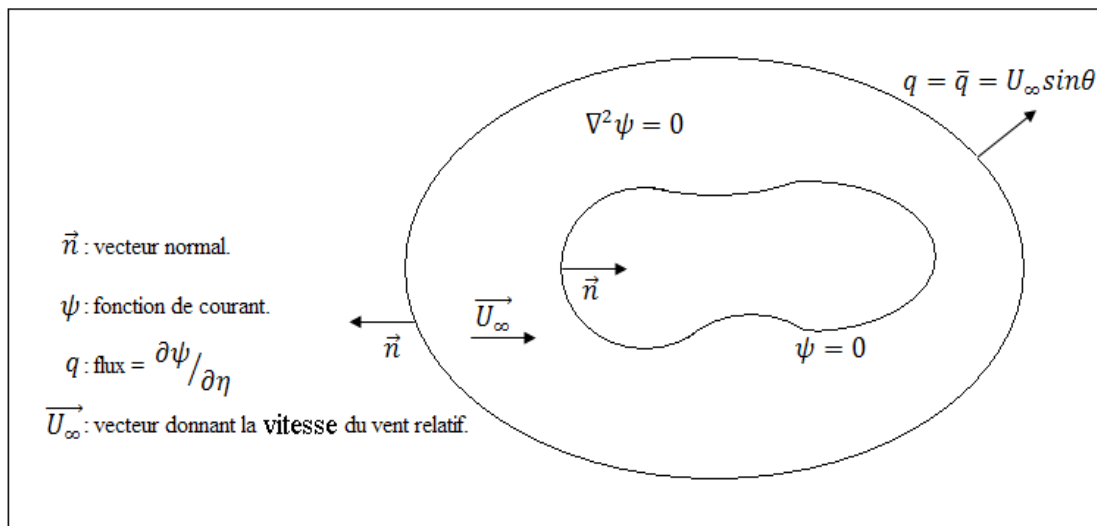


Fig.II.2: Représentation des conditions limites pour un domaine circulaire (on évite ici les singularités de coins).

- L'utilité d'un domaine d'intégration circulaire sera démontrée dans le prochain chapitre, car les singularités de coins posent une difficulté inutile pour notre problème.

II. 3. EQUATIONS GENERALES REGISSANTS L'ÉCOULEMENT DANS LA COUCHE LIMITE :

II. 3. 1. position du problème

Soit un écoulement bidimensionnel d'un fluide visqueux mais incompressible toujours, autour d'un obstacle.

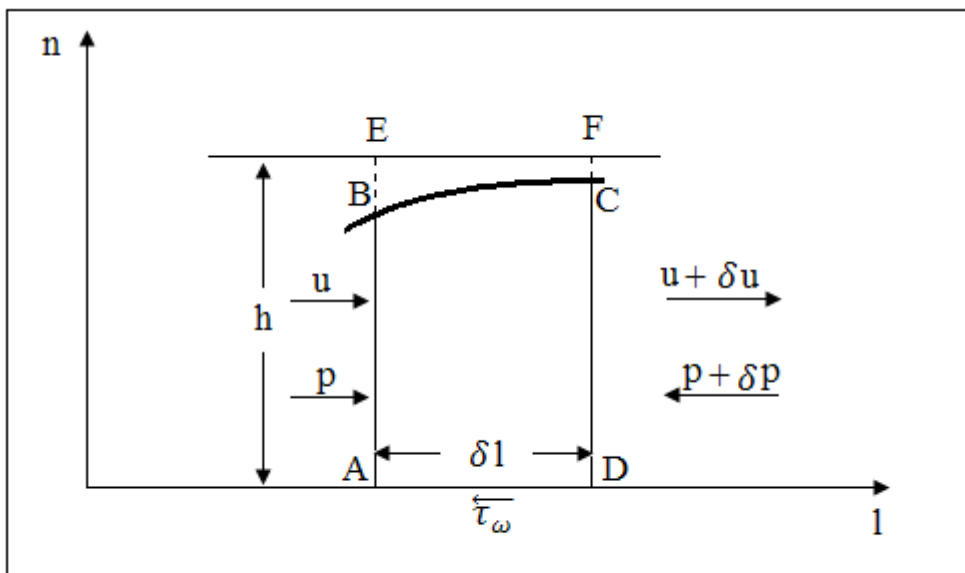


fig.II.3. Représentation de la couche limite

Nous allons considérer un volume de contrôle isolant une partie de l'écoulement sur une surface quelconque, dont la hauteur dépasse légèrement l'épaisseur de la couche limite (fig.II.3).

u et v composantes de la vitesse respectivement suivant les directions l et n . la valeur de la vitesse dans le fluide libre est désignée par U_1 , et comme la couche limite est supposée très mince, cette vitesse est considérée parallèle à la paroi, c'est une fonction qui varie seulement dans la direction l .

3.2. L'EQUATION INTEGRALE DE QUANTITE DE MOUVEMENT :

L'équation intégrale de quantité de mouvement dans la couche limite initialement développée par V. Karman, exprime la relation existante entre la variation de quantité de mouvement transportée par la couche limite, les forces de friction à la surface ainsi que le gradient de pression.

II. 3.2.1. LE BILAN MASSIQUE :

Le principe de conservation de la masse nous permet de dire que La variation de débit massique entrant dans le volume de contrôle à travers AE et sortant à travers DF est :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^h \rho u \, dn \right] \delta l + \text{termes en } \delta l^2 \quad (II. 6)$$

Si on dénote v_h la valeur moyenne de la vitesse à la hauteur h sortant du volume de contrôle, alors on peut écrire:

$$\rho V_h \delta l = - \frac{d}{dt} \left[\int_0^h \rho u \, dn \right] \delta l + \text{termes en } \delta l^2 \quad (II. 7)$$

II. 3.2.2. VARIATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT :

La variation du taux de transport de quantité de mouvement entre AE et DF est:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^h \rho u^2 \, dn \right] \delta l + \text{termes en } \delta l^2 \quad (II. 8)$$

Et le taux de transport de quantité de mouvement en projection \mathbf{dl} sortant à travers EF est:

$$\rho V_h u_i \delta l = -u_i \frac{d}{dt} \left[\int_0^h \rho u \, dn \right] \delta l + \text{termes en } \delta l^2 \quad (II. 9)$$

II. 3.2.3. LES FORCES EXTERIEURES :

II. 3.2.3. a. Force de pression :

La force appliquée sur le volume de contrôle dû à la pression est :

$$-h\delta p = -h \frac{dp}{dl} \delta l + \text{termes en } \delta l^2 \quad (\text{II. 10})$$

II. 3.2.3. b. Force de frottement

La force de friction exercée par unité de surface sur la paroi est:

$$-\tau_\omega \delta l \quad (\text{II. 11})$$

$$\text{Avec : } \tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0}$$

II. 3.2.4. BILAN DE QUANTITES DE MOUVEMENT

Le principe de conservation des quantités de mouvement nous permet d'égaliser la différence du taux de transport de quantité de mouvement à la somme des forces agissant sur le volume de contrôle. Ainsi :

$$\frac{d}{dl} \left[\int_0^h \rho u^2 dn \right] \delta l - u_l \frac{d}{dl} \left[\int_0^h \rho u dn \right] \delta l = -h \frac{dp}{dl} \delta l - \tau_\omega \delta l \quad (\text{II. 12})$$

On peut simplifier et écrire :

$$\frac{d}{dl} \left[\int_0^h \rho u^2 dn \right] - u_l \frac{d}{dl} \left[\int_0^h \rho u dn \right] = -h \frac{dp}{dl} - \tau_\omega \quad (\text{II. 13})$$

II. 3.2.5. Paramètres caractéristiques de la couche limite

Nous pouvons considérer les Grandeurs caractéristiques de la couche limite suivante :

- épaisseur de la couche limite δ
- épaisseur de déplacement (ou de refoulement)

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_l} \right) dn$$

- épaisseur de quantité de mouvement

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_l} \left(1 - \frac{u}{u_l}\right) dn$$

- facteur de forme

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Nous voyons alors que l'équation (II. 13) peut s'écrire sous forme simplifiée:

$$\frac{d}{dl} (\rho u_l^2 \delta_2) + \frac{du_l}{dl} \rho u_l \delta_1 = \tau_\omega \quad (\text{II. 14})$$

Ou encore :

$$\left(\rho u_l^2 \frac{d\delta_2}{dl}\right) + 2\rho u_l \frac{du_l}{dl} \delta_2 + \rho u_l \frac{du_l}{dl} H \delta_2 = \tau_\omega \quad (\text{II. 15})$$

Et finalement, par regroupement, on obtient cette forme de notation :

$$\frac{d\delta_2}{dl} + \frac{1}{u_l} \frac{du_l}{dl} \delta_2 (H + 2) = \frac{\tau_\omega}{\rho u_l^2} \quad (\text{II. 16})$$

Cette équation différentielle de premier ordre, est appelée équation intégrale de Karman.

Un avantage certain d'utiliser l'équation intégrale de quantité de mouvement est sa flexibilité puisqu'elle s'applique autant au régime laminaire que turbulent, donc c'est cette propriété qui va nous permettre de simuler l'écoulement au sein de la couche limite quelle que soit la nature de son régime.

II. 3. 3. LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Les équations de mouvement gouvernant l'écoulement d'un fluide visqueux, différent de celles d'un fluide parfait (équation d'Euler) par le terme $\mu \Delta \vec{V}$ qui représente les effets de viscosité, ce terme augmente l'ordre des équations aux dérivées partielles, Ces équations sont les équations dites de Navier-Stokes, elle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial l} + v \frac{\partial u}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \right) + fl \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial v}{\partial n} + w \frac{\partial v}{\partial m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial m^2} \right) + fn \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial l} + v \frac{\partial w}{\partial n} + w \frac{\partial w}{\partial m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial m} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} \right) + fm \end{cases} \quad (\text{II. 17})$$

Hypothèse :

La complexité de ces équations nous impose d'établir un ensemble d'hypothèses, afin d'atterrir sur une forme d'équations différentielles plus simple :

- Le fluide est considéré Newtonien.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est incompressible.
- Le régime est établi.
- Les équations sont évaluées à la surface (ω).
- L'écoulement est bidimensionnel sur le plan (l, n).

Conditions aux limites :

Puisque les équations sont évaluées à la surface (ω) donc :

$$\text{à } n = 0 \rightarrow u = v = 0$$

Compte tenu de ces hypothèses, le système d'équations (II.17), se réduit à la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_{\omega} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} + 0 \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial m} + 0 \end{array} \right. \quad (II.18)$$

Finalement il ne reste que :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_{\omega} \quad (II.19)$$

ici ω signifie que l'équation est évalué à: $n = \omega = 0$.

Maintenant nous pouvons aborder la partie résolution numérique avec ces équations établit.

Chapitre III
RESOLUTION NUMERIQUE PAR
LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS DE FRONTIERE

III. 1. Introduction :

Après avoir établi l'équation de base qui régit le mouvement de fluide libre autour d'un obstacle, on doit maintenant résoudre cette équation numériquement en utilisant la méthode des éléments finis de frontière, mais d'abord nous allons faire une présentation sommaire de cette méthode.

III. 1.1. Présentation de la méthode des éléments finis de frontière :

La méthode des éléments finis de frontière connue sous l'acronyme anglo-saxon B.E.M. **B**oundary **E**lement **M**ethod, est une technique numérique développée depuis le début des années soixante et fondée sur la théorie la plus ancienne des équations intégrales de frontière désignée par B.I.E. pour **B**oundary **I**ntegral **E**quation. Cette théorie remonte aux débuts du XIXème siècle avec entre autres les travaux de Poisson (1820), Betti (1872), Kirchhoff (1882), Fredholm (1896), Kellogg (1929), Klyradze (1935)... Ce n'est ensuite qu'autour de 1960, que Jaswon, Hess, Symm, Shaw, Rizzo, Cruse et d'autres vont développer la méthode des éléments finis de frontière, l'appellation B.E.M. n'apparaissant pour la première fois dans la littérature qu'en 1977. Cette méthode a fait depuis l'objet de nombreuses publications et représente toujours un secteur de recherche important, notamment grâce à la puissance croissante des calculateurs à disposition.

Il importe de souligner que cette méthode s'est posée en alternative à l'autre grande méthode numérique la méthode des éléments finis communément désignée par son acronyme anglais F.E.M., **F**inite **E**lement **M**ethod, en particulier lorsque le domaine de propagation devient infini.

En effet, la méthode d'éléments finis de frontière paraît plus appropriée en espace infini que la méthode des éléments finis puisque seule la surface de la frontière du domaine doit être discrétisée. Contrairement à cette dernière méthode, on n'a pas besoin de mailler tout le domaine de propagation et les éléments finis de frontière permettent de réduire la dimension du problème d'une (dimension). La B.E.M. apparaît ainsi plus appropriée au traitement des problèmes de propagation et d'écoulement en espaces infinis bien que certaines approches, comme la méthode des éléments finis aient été développées pour adapter la F.E.M. à ces domaines infinis.

III. 1.2. problème à double frontière :

Bien que la méthode des éléments fini de frontière permette d'utiliser une formulation extérieure, avec une seule frontière pour l'obstacle et un domaine d'intégration infini; pour tenir compte de la contribution du domaine infini sur chacun des éléments de la frontière de l'obstacle, nous utiliserons une formulation intérieure avec deux frontières pour délimiter respectivement le domaine et l'obstacle. Même s'il y aura une augmentation du temps de calcul par rapport à la formulation à frontière unique, la programmation s'en trouvera simplifiée. Les avantages par rapport aux éléments standards seront conservés, soit pour le nombre inférieur d'éléments utilisés et pour la flexibilité additionnelle d'un maillage sur le contour. La numérotation des nœuds dans ce cas doit être effectuée dans le sens antihoraire pour la frontière extérieur (frontière du domaine), et dans le sens horaire pour la frontière intérieur (frontière de l'obstacle).

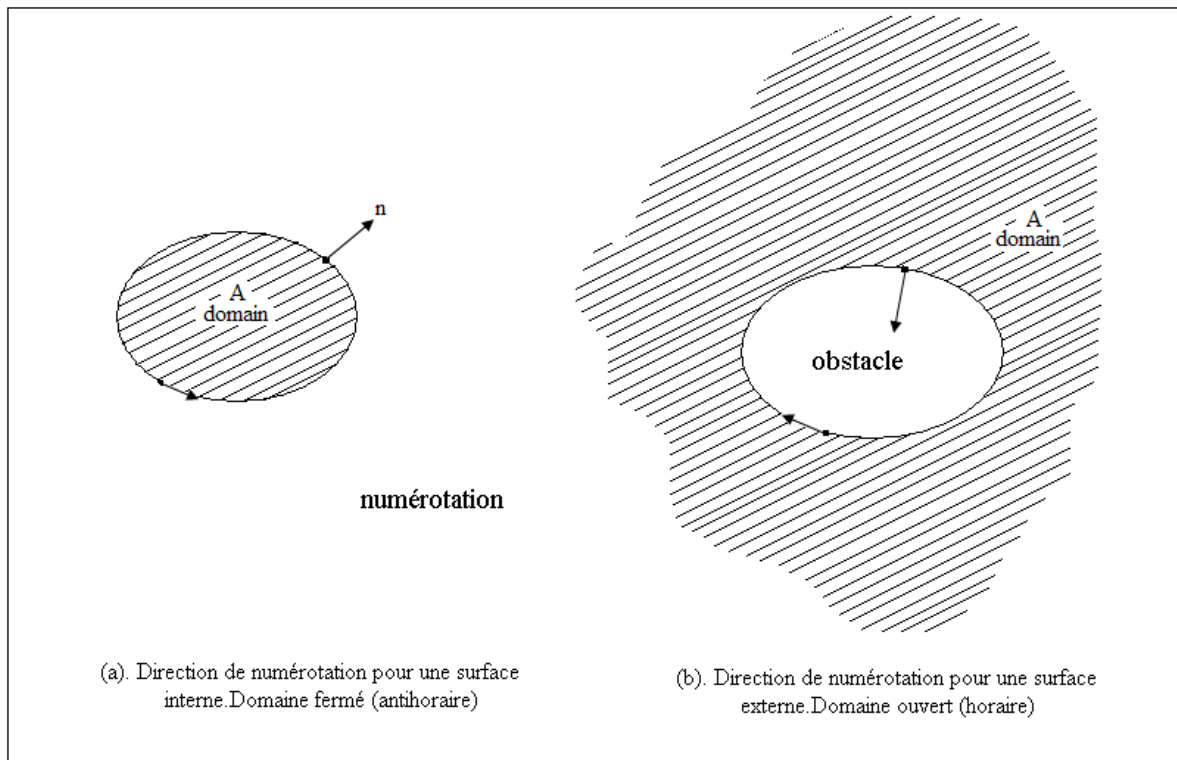


fig.III.1. Direction de numérotation pour une surface interne et externe

III. 2. La solution fondamentale :

Avant d'appliquer la méthode des éléments finis de frontière on doit d'abord trouver la solution fondamentale pour l'équation de la formulation utilisé (Brebbia&Dominguez [5], Peter Hunter [13]), cette solution représente la fonction de pondération.

Pour la résolution de notre problème, nous allons utiliser une formulation par équation de Laplace, donc, la fonction de pondération est la solution fondamentale de l'équation de Laplace.

Ainsi on doit tout d'abord trouver la solution fondamentale de cette équation.

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0 \quad (\text{équation de Laplace en 2D})$$

La solution fondamentale de cette équation est la solution de :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \delta(x - a, y - b) = 0 \quad (\text{III. 7})$$

Telle que : δ est la fonction de Dirac Delta (voir l'annexe 1).

La méthode est de trouver une solution pour : $\nabla^2\phi = 0$ dans \mathbb{R}^2 , qui contient une singularité au point (a, b) ;

Pour tirer cette solution on va utiliser la propriété de symétrie qui caractérise la fonction δ au voisinage de ce point.

Si on adopte les coordonnées polaires alors :

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right) \quad (\text{III. 8})$$

Telle que : $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$

Pour : $r > 0$, $\delta(x - a, y - b) = 0$, et puisque il y'a une symétrie par rapport au point singulier (a, b), alors : $\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = 0$

L'équation (III.8) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \quad (III.9)$$

Et en intégrant cette équation par rapport à 'r' on peut facilement obtenir la solution fondamentale qui est :

$$\phi = A \log(r) + B \quad (III.10)$$

on note que cette fonction est singulière au point : $r = 0$.

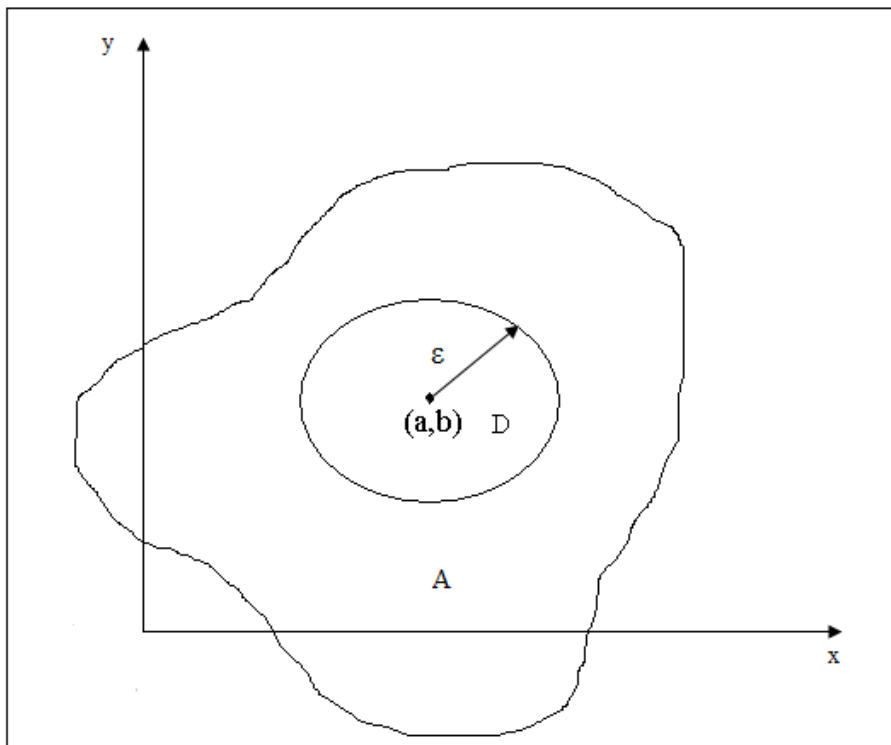


fig.III.2. Domaine utiliser pour évaluer les coefficients
de la solution fondamentale

Pour évaluer A et B on peut utiliser la propriété intégrale de la fonction δ ;
-D'après l'équation (III.7) :

$$\int_D \nabla^2 \phi \, dD = - \int_D \delta \, dD = -1 \quad (III.11)$$

D : est un domaine qui contient le point (a,b) ;

On rappelle que le théorème d'intégrale par partie de Green-Gauss s'écrit:

$$\int_A (f (\nabla^2 g) + \nabla f \nabla g) \, dA = \oint_l f \frac{\partial g}{\partial n} \, dl$$

Donc si on suppose que D est un disque de rayon ($\varepsilon > 0$), centrée à (a, b), alors d'après le théorème de Green-Gauss :

$$\int_D \nabla^2 \phi \, dD = \oint_l \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dl$$

Et puisque n et r ont la même direction donc on peut écrire :

$$\int_D \nabla^2 \phi \, dD = \oint_l \frac{\partial \phi}{\partial r} \, dl$$

Et d'après l'équation (III.10) :

$$\int_D \nabla^2 \phi \, dD = \left(\frac{A}{\varepsilon}\right) 2\pi\varepsilon = 2\pi A$$

Alors, de l'équation (III.11) nous obtenons:

$$A = -\frac{1}{2\pi}$$

De plus, d'après Peter Hunter [13] B est généralement prise égal à 0 : B=0

Finalement, la solution fondamentale de l'équation de Laplace est:

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \log(r) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

Avec : $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, singulier au point (a, b)

III. 3. Adaptation de la méthode des éléments finis de frontière:

Après avoir trouvé la solution fondamentale de l'équation de Laplace, qui est la fonction de pondération pour la formulation utilisé, on peut maintenant passer au développement de la méthode des éléments finis de frontière ;

On rappelle que la relation de base à satisfaire est: $\nabla^2 \psi = 0$

En utilisant l'équation intégrale pondéré par ϕ :

$$I = \int_A (\nabla^2 \psi) \phi dA \quad (III. 12)$$

Où : A = domaine d'intégration bidimensionnel

Pour faire apparaître les termes aux frontières, il suffit d'intégrer par parties deux fois en appliquant le théorème de Green-Gauss, on obtient alors :

$$\int_A (\nabla^2 \psi) \phi dA = \int_A \psi \nabla^2 \phi dA + \oint_l \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl - \oint_l \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (III. 13)$$

Et de plus, si le Laplacien de la fonction de courant est nul sur tout le domaine :

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (III. 14)$$

Alors la relation à satisfaire devient:

$$\int_A \psi \nabla^2 \phi dA = \oint_l \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl - \oint_l \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl \quad (III. 15)$$

Nous rappelons que la fonction de pondération spécifiée vérifie l'équation suivante :

$$\nabla^2 \phi + \delta(x - a, y - b) = 0$$

Donc en appliquant les propriétés de la fonction Dirac δ :

$$\int_A \psi \nabla^2 \phi dA = - \int_A \psi \delta(x - a, y - b) dA = - \psi(a, b) \quad (III. 16)$$

Donc la relation (III. 15) devient :

$$\psi(a, b) = \oint_l q \phi dl - \oint_l \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl$$

Où : $q = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ et (a, b) est un point (p) qui appartient au domaine A.

Cette équation ne contient donc que les intégrales de frontière ; elle relie la distribution de (ψ) et ($\frac{\partial \psi}{\partial n}$) sur la surface de l'obstacle avec la valeur de la fonction de courant en un point p (a, b) qui appartient au domaine A ; On peut écrire :

$$\psi(p) = \oint_l q \phi \, dl - \oint_l \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (\text{III. 17})$$

Cette formule est valable rigoureusement en tout point 'p' de l'espace 'A' non situé sur la frontière l de l'obstacle.

III. 3.1. Singularité sur la frontière :

Si maintenant on prend le point P situé sur la frontière du domaine d'intégration l qui constitue l'obstacle, alors la distance r sera forcément nul au voisinage de ce point, et les expressions de ϕ et de $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)$ seront singulières. Selon Brebbia[5], Nous pouvons résoudre ce problème en intégrant autour d'un demi-cercle de rayon ε , centré sur le point P (FIG III. 3).

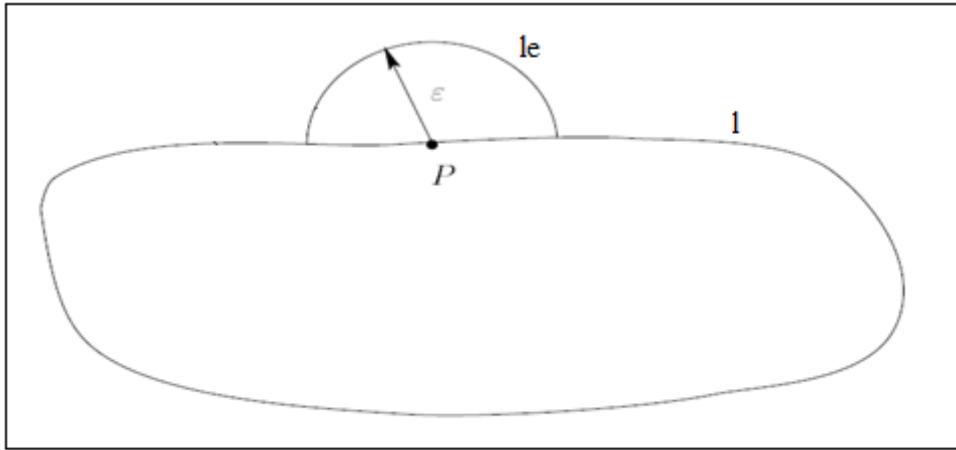


fig.II.3. génération d'un demi cercle autour d'un point singulier
à la frontière de l'obstacle

Alors nous pouvons séparer l'intégrale de contour en deux parties soit :

$$\oint_l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l-l_e} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_e} \quad (\text{III. 18})$$

Pour les intégrales sur l_e nous avons les changements de variables

$$dl = \varepsilon d\theta, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}$$

- Si 'P' est situé sur une frontière lisse alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_e} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \psi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \varepsilon d\theta = -\frac{\psi(p)}{2} \quad (\text{III. 19})$$

- De même pour un angle (α) quelconque sur la frontière, nous obtenons :

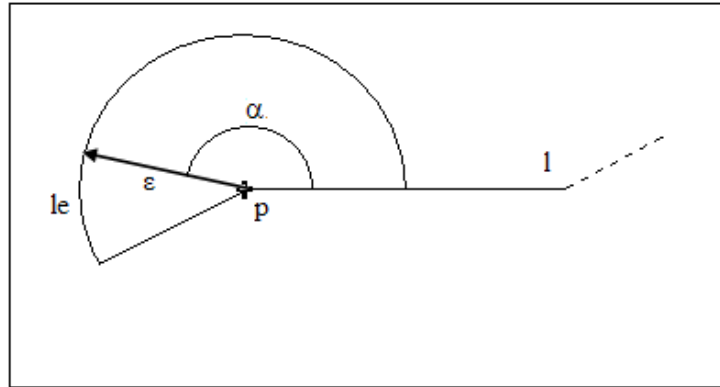


fig.III.4. Point sur la frontière faisant un angle (α) quelconque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_e} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\alpha -\psi \frac{1}{2\pi} d\theta = -\frac{\alpha}{2\pi} \psi(p) \quad (\text{III. 20})$$

Pour la première partie de l'expression (III. 17) à résoudre, l'intégration sur l_e pour un angle (α) quelconque sera nul :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_e} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \varepsilon d\theta = 0 \quad (\text{III. 21})$$

Car :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)) = 0$$

Ainsi nous pouvons résumer les expressions intégrales pour chacun des cas possibles :

- i) Pour un point intérieur au domaine, on utilise l'équation (III. 17)

$$\psi(p) = \oint_l \phi q dl - \oint_l \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (\text{III. 22})$$

Où : $q = \partial \psi / \partial n$

- ii) Pour un point sur une frontière lisse à l'équation générale(III.17), il faut additionner la singularité du point sur la frontière, équation (III. 19).

$$\psi(p) - \frac{\psi(p)}{2} = \int_{l-l_e} \phi q dl - \int_{l-l_e} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (\text{III. 23})$$

- iii) Pour un point p sur la frontière l avec un coin d'angle (α), à l'équation générale (III. 17), il faut additionner la singularité du point pour une frontière faisant un angle " α ", soit l'équation (III. 20)

$$\psi(p) - \frac{\alpha}{2\pi}\psi(p) = \int_{l-l_e} q \phi \, dl - \int_{l-l_e} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dl \quad (\text{III. 24})$$

III. 3.2. problème à double frontière :

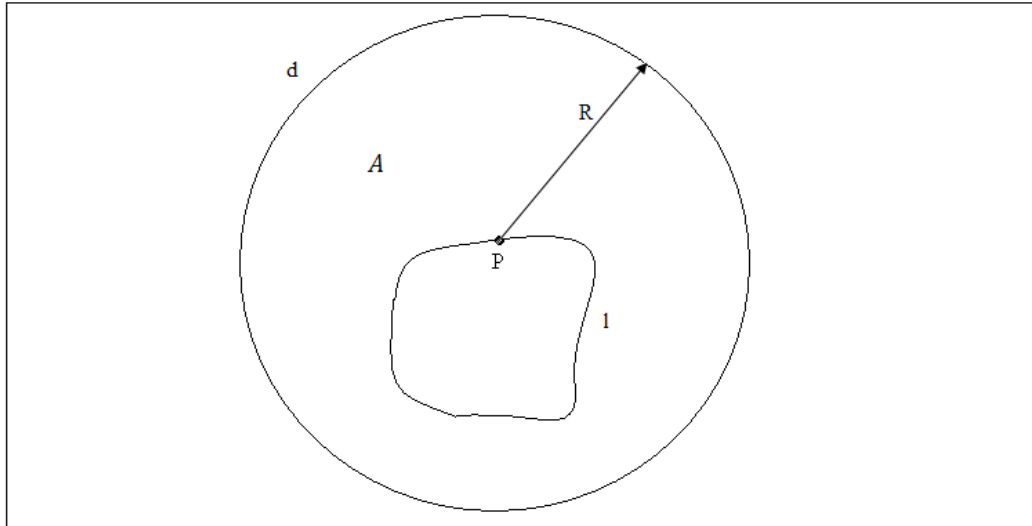


fig.III.5. Présentation a double frontière

Jusqu'à présent nous avons traité le problème en supposons que le domaine s'étend à l'infini et que la seule frontière qui existe est celle de l'obstacle, si on prend maintenant en considération l'influence du domaine sur la frontière de l'obstacle, le problème devient un problème à double frontière et l'équation intégrale au frontière (III. 17) devient :

$$\psi(p) = \oint_l \phi q \, dl + \oint_d \phi q \, dl - \oint_l \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dl - \oint_d \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dl \quad (\text{III. 25})$$

Tel que : **d** : représente la frontière du domaine

l : représente la frontière de l'obstacle

Le problème de la Singularité sur la frontière du domaine, sera traité de la même méthode précédente.

III. 4. DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS DE FRONTIERE :

Si on divise maintenant la frontière de l'obstacle en "N" segments ou éléments, et celle du domaine en "NP" éléments(FIG III. 6), le point ou les variables (ψ, q) sont définie est appelé nœud.

Alors l'intégration sur les deux frontières l et d peut être considérée comme une somme d'intégrales sur chaque élément composant ces frontières.

Nous pouvons donc écrire d'après l'équation (III. 24) et l'équation (III. 25) que pour un nœud (i) sur l'une des frontières:

$$C_i \psi_i + \sum_{j=1}^{NT} \psi_j \int_{l_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dl = \sum_{j=1}^{NT} q_j \int_{l_j} \phi_i dl \quad (III. 26)$$

Où : $C_i = (1 - \frac{\alpha}{2\pi})$

NT = N+NP le nombre total d'éléments.

i = indice du nœud considéré.

j = indice de l'élément sur lequel l'intégration est effectué.

l_j = élément de frontière (obstacle ou domaine).

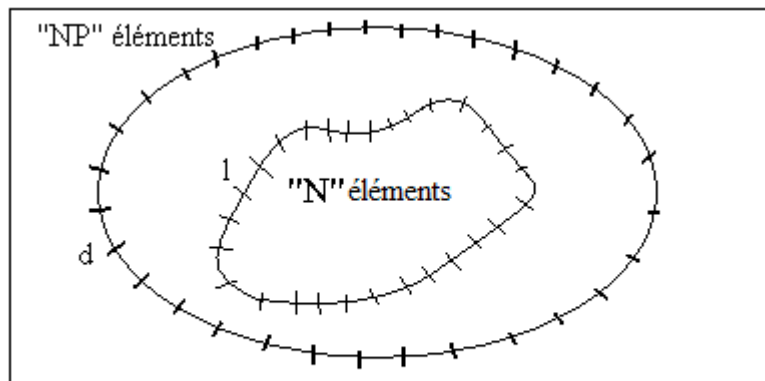


fig.III.6. discrétisation des frontières en "NT" éléments

III. 4. 1. Les Différents Types D'éléments :

Dans un problème à deux dimensions, le nœud peut être positionné sur l'élément de frontière par divers modes, et selon ce mode on définit le type d'élément.

Si le nœud est situé au milieu de l'élément, cet élément est appelé 'élément constant' (fig III.7.a).

Si l'élément possède deux nœuds à ses extrémités, il est appelé 'élément linéaire' (fig III.7.b).

Si maintenant l'élément est recourbé et possède trois nœuds, deux à ses extrémités et un au milieu, cet élément est appelé 'éléments quadratique' (fig III.7.c).

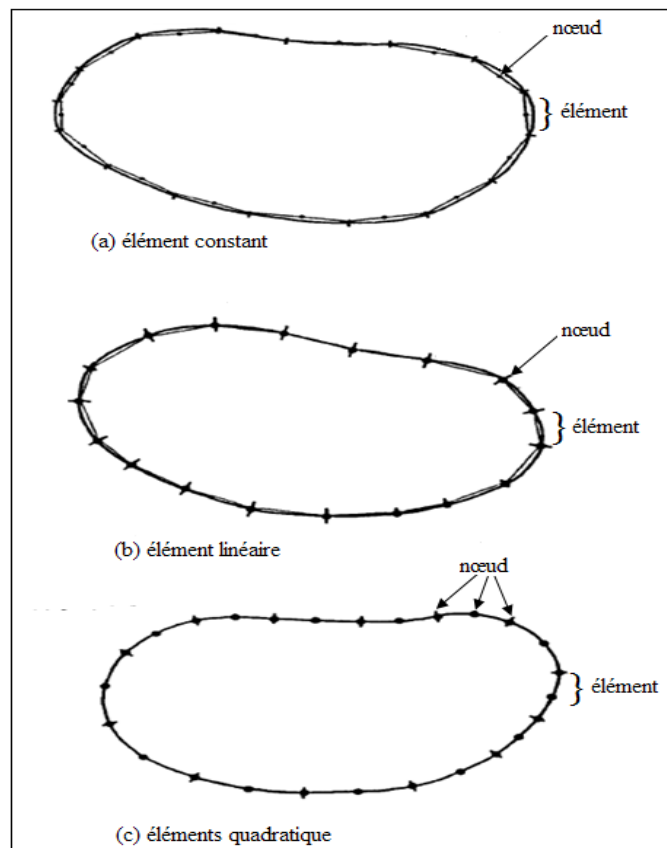


fig.III.7. Les Différents Types D'éléments

Dans un élément constant la valeur des variables (ψ, q) est considérée constante le long de l'élément.

En revanche dans un élément linéaire les variables du problème varient linéairement le long de l'élément considéré, donc nous avons choisi des éléments linéaires pour le maillage.

III. 4.2. Les fonctions d'interpolation:

Ayant opté pour les éléments linéaires, on doit cependant déterminer les fonctions d'interpolation pour évaluer la valeur des variable (ψ, q) le long de l'élément, ces fonctions d'interpolation prennent la forme suivante:

$$N_1(\xi) = (1/2) (1 - \xi) \quad (III. 27)$$

$$N_2(\xi) = (1/2) (1 + \xi) \quad (III. 28)$$

Où : $-1 \leq \xi \leq 1$

Tel que : ξ représente la coordonnée locale

Ainsi l'approximation sur l'élément linéaire par ces fonctions d'interpolation s'écrit :

$$\psi = \psi(\xi) = N_1(\xi)\psi_1 + N_2(\xi)\psi_2 \quad (III. 29)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = q(\xi) = N_1(\xi)q_1 + N_2(\xi)q_2 \quad (IV. 30)$$

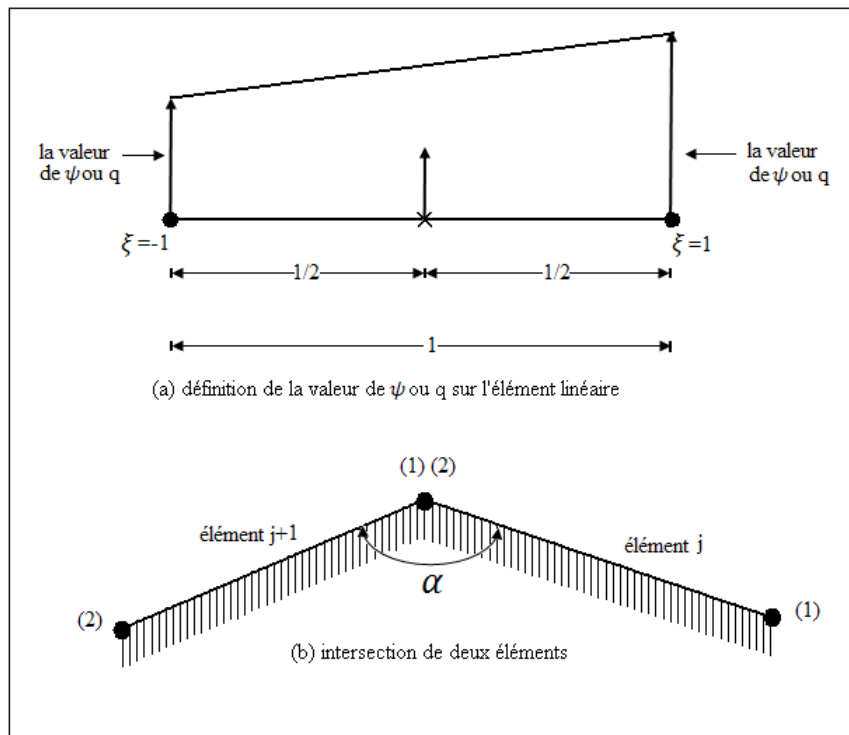


fig.III.8. élément linéaire. définitions de base

Finalement les intégrales sur un élément j quelconque deviennent:

$$\int_{l_j} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl_j = \int_{l_j} [N_1, N_2] \frac{\partial \phi}{\partial n} dl_j \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = [h_{ij}^1, h_{ij}^2] \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (III. 31)$$

$$\int_{l_j} q \phi dl_j = \int_{l_j} [N_1, N_2] \phi dl_j \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [g_{ij}^1, g_{ij}^2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (III. 32)$$

Donc pour chaque élément (j), on a deux composantes

Avec : i = indice du nœud considéré

$$h_{ij}^1 = \int_{l_j} N_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dl_j \quad , \quad h_{ij}^2 = \int_{l_j} N_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dl_j \quad (III. 33)$$

$$g_{ij}^1 = \int_{l_j} N_1 \phi_i dl_j \quad , \quad g_{ij}^2 = \int_{l_j} N_2 \phi_i dl_j \quad (III. 34)$$

III. 4.3. L'évaluation des intégrales:

L'évaluation des intégrales $(h_{ij}^1, h_{ij}^2, g_{ij}^1, g_{ij}^2)$ sur chaque élément (j) sera effectuée numériquement par la méthode de Gauss à quatre points (voir ANNEXE 2).

On rappelle que : $\phi_i = -\frac{1}{2\pi} \log(r_i)$

Avec : r_i la distance mesurée depuis le nœud i jusqu'au point sous considération, de l'élément j.

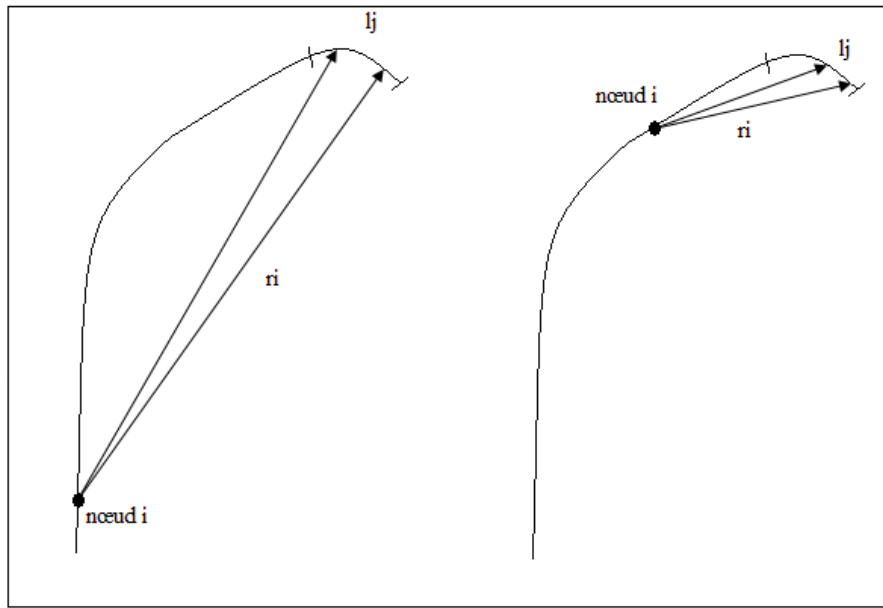


FIG III.9. ILLUSTRATION DE LA DIMINUTION DE r_i QUAND L'ELEMENT j S'APPROCHE DU NŒUD i .

En terme de coordonnée local (ξ) nous pouvons écrire :

$$h_{ij}^1 = \int_{-1}^1 N_1(\xi) \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial r_i(\xi)} \frac{\partial r_i(\xi)}{\partial n} |J(\xi)| d\xi$$

$$h_{ij}^2 = \int_{-1}^1 N_2(\xi) \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial r_i(\xi)} \frac{\partial r_i(\xi)}{\partial n} |J(\xi)| d\xi$$

$$g_{ij}^1 = \int_{-1}^1 N_1(\xi) \phi_i(\xi) |J(\xi)| d\xi$$

$$g_{ij}^2 = \int_{-1}^1 N_2(\xi) \phi_i(\xi) |J(\xi)| d\xi$$

Tel que le jacobien $J(\xi)$ est donné par :

$$J(\xi) = \frac{dl}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

Donc la fonction de pondération s'écrit:

$$\phi_i(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \log(r_i(\xi))$$

$$\text{Avec : } r_i(\xi) = \sqrt{(x(\xi) - x_i)^2 + (y(\xi) - y_i)^2}$$

Ou :

(x_i, y_i) Coordonnée du nœud i .

$(x(\xi), y(\xi))$ Coordonnée du point d'intégration.

III. 4.4. Formation du système matriciel :

Nous pouvons à présent retranscrire l'équation principale à discrétiser sous la forme:

$$C_i \psi_i + \sum_{j=1}^{NT} [h_{ij}^1, h_{ij}^2] \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{NT} [g_{ij}^1, g_{ij}^2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (III. 35)$$

On constate que les intégrales ci-dessus relient la fonction de courant (ψ) du nœud "i" avec la fonction de courant (ψ) et le flux (q) de tous les autres nœuds des frontières (obstacle, domaine), donc on peut écrire :

$$C_i \psi_i + \sum_{j=1}^{NT} \langle \widehat{H}_{ij} \rangle \{\psi_j\} = \sum_{j=1}^{NT} \langle G_{ij} \rangle \{q_j\} \quad (III. 36)$$

$$\text{Tel que : } \langle \widehat{H}_{ij} \rangle = h_{ij}^1 + h_{ij-1}^2$$

$$\langle G_{ij} \rangle = g_{ij}^1 + g_{ij-1}^2$$

Ou encore sous forme plus simple:

$$\sum_{j=1}^{NT} \langle H_{ij} \rangle \{\psi_j\} = \sum_{j=1}^{NT} \langle G_{ij} \rangle \{q_j\} \quad (III. 37)$$

Tel que :

$$\begin{cases} \langle H_{ij} \rangle = \langle \widehat{H}_{ij} \rangle & \text{si: } i \neq j \\ \langle H_{ij} \rangle = \langle \widehat{H}_{ij} \rangle + C_i & \text{si: } i = j \end{cases}$$

$\langle H_{ij} \rangle$ = Vecteur des fonctions d'interpolation de l'intégral
(III. 33) pour chaque élément j par rapport au nœud i

$\langle G_{ij} \rangle$ = Vecteur des fonctions d'interpolation de l'intégral
(III. 34) pour chaque élément j par rapport au nœud i

$\{\psi_j\}$ = vecteur de la fonction de courant au nœuds de
l'élément j .

$\{q_j\}$ = vecteur de flux de courant au nœuds de l'élément j .

On peut écrire l'équation (III. 37) pour les "NT" nœuds des frontières à tour de rôle et obtenir un système de "NT" équations, à "NT" inconnues à solutionner :

$$\begin{aligned}
 \langle H_{11} \rangle \psi_1 + \dots + \langle H_{1N} \rangle \psi_N + \dots + \langle H_{1NT} \rangle \psi_{NT} &= \langle G_{11} \rangle q_1 + \dots + \langle G_{1N} \rangle q_N + \dots + \langle G_{1NT} \rangle q_{NT} \\
 \vdots \dots \dots \dots &= \dots \dots \dots \\
 \langle H_{N1} \rangle \psi_1 + \dots + \langle H_{NN} \rangle \psi_N + \dots + \langle H_{NNT} \rangle \psi_{NT} &= \langle G_{N1} \rangle q_1 + \dots + \langle G_{NN} \rangle q_N + \dots + \langle G_{NNT} \rangle q_{NT} \\
 \vdots \dots \dots \dots &= \dots \dots \dots \\
 \langle H_{NT1} \rangle \psi_1 + \dots + \langle H_{NTN} \rangle \psi_N + \dots + \langle H_{NTNT} \rangle \psi_{NT} &= \langle G_{NT1} \rangle q_1 + \dots + \langle G_{NTN} \rangle q_N + \dots + \langle G_{NTNT} \rangle q_{NT}
 \end{aligned}$$

Ce système d'équations peut être écrit avec la notation matricielle, qui est beaucoup plus pratique et surtout plus compacte, on écrit alors le système précédent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \langle H_{11} \rangle & \dots & \langle H_{1N} \rangle & \dots & \langle H_{1NT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle H_{N1} \rangle & \dots & \langle H_{NN} \rangle & \dots & \langle H_{NNT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle H_{NT1} \rangle & \dots & \langle H_{NTN} \rangle & \dots & \langle H_{NTNT} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \\ \vdots \\ \psi_{NT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle G_{11} \rangle & \dots & \langle G_{1N} \rangle & \dots & \langle G_{1NT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle G_{N1} \rangle & \dots & \langle G_{NN} \rangle & \dots & \langle G_{NNT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle G_{NT1} \rangle & \dots & \langle G_{NTN} \rangle & \dots & \langle G_{NTNT} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ \vdots \\ q_{NT} \end{bmatrix}$$

Ainsi il est sous la forme : $[H][\psi] = [G][q]$

D'après les conditions aux limites illustrées dans le 2^{ème} chapitre :

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, q_{N+1}, q_{N+2}, \dots, q_{NT}$ sont connue

Donc les inconnues du système sont :

$q_1, q_2, \dots, q_N, \psi_{N+1}, \psi_{N+2}, \dots, \psi_{NT}$

Si maintenant nous voulons regrouper les inconnues dans un seul vecteur alors le système devient :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{A} \\ \left[\begin{array}{cccc} -\langle G_{11} \rangle & \dots & -\langle G_{1N} \rangle & \langle H_{1N+1} \rangle \dots & \langle H_{1NT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ -\langle G_{N1} \rangle & \dots & -\langle G_{NN} \rangle & \langle H_{NN+1} \rangle \dots & \langle H_{NNT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ -\langle G_{NT1} \rangle & \dots & -\langle G_{NTN} \rangle & \langle H_{NTN+1} \rangle \dots & \langle H_{NTNT} \rangle \end{array} \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{X} \\ \left[\begin{array}{c} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ \psi_{N+1} \\ \vdots \\ \psi_{NT} \end{array} \right] \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{c} \text{B} \\ \left[\begin{array}{cccc} -\langle H_{11} \rangle & \dots & -\langle H_{1N} \rangle & \langle G_{1N+1} \rangle \dots & \langle G_{1NT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ -\langle H_{N1} \rangle & \dots & -\langle H_{NN} \rangle & \langle G_{NN+1} \rangle \dots & \langle G_{NNT} \rangle \\ \vdots & & & & \\ -\langle H_{NT1} \rangle & \dots & -\langle H_{NTN} \rangle & \langle G_{NTN+1} \rangle \dots & \langle G_{NTNT} \rangle \end{array} \right] \end{array} \\
 \left[\begin{array}{c} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \\ q_{N+1} \\ \vdots \\ q_{NT} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Finalement ce système est un système linéaire de forme : $[A][X] = [B]$

III. 4.5. Calcul de la contribution pour un angle de " α " degré sur la frontière :

Pour évaluer le facteur Ci dans l'expression de l'équation (III.36) et définir par la suite la valeur de $\langle H_{ii} \rangle$ dans le système matriciel développé précédemment,

Nous utilisons l'approche présentée par Brebbia [5] (page 77): soit un potentiel uniforme appliqué sur les deux frontières, alors le flux (la dérivée normale du potentiel) sera nul en tout point des frontières et conséquemment, l'équation (III.37) développée précédemment se résumera à:

$$\sum_{j=1}^{NT} H_{ij} \psi_j = 0 \quad (III. 38)$$

Donc chaque rangée de la matrice H sera nulle, et finalement on aura:

$$\sum_{j=1}^{NT} H_{ij} = 0 \quad (III. 39)$$

donc :

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^{NT} \text{sauf } j=i H_{ij} \quad (III. 40)$$

Alors le facteur H_{ii} sera évalué en faisant la somme des termes H_{ij} hors-diagonale.

Cette approche est programmée dans le sous-programme FMAT.

III. 4.6. Evaluation de l'intégral g sur un élément singulier :

Si l'intégral de \mathbf{g} est effectuée le long d'un élément qui inclut le nœud i alors on a une singularité, l'intégral peut être évalué de la manière suivante :

- On rappelle que $g_{ij}^1 = \int_{l_j} N_1 \phi_i dl_j$ et $g_{ij}^2 = \int_{l_j} N_2 \phi_i dl_j$
- On pose : $N_1 = (1 - \eta)$; $N_2 = \eta$
- Ou : $0 \leq \eta \leq 1$

Tel que η représente la coordonnée locale.

Et puisque (r) et (l_j) ont la même direction, donc $\left(\frac{d}{dr} = \frac{d}{dl}\right)$.

Brebbia [5] propose le changement de variable $r = \eta l$ tel que $0 \leq \eta \leq 1$

Alors, les intégrales ci-dessus peuvent s'écrire

$$g_{ij}^1 = \int_{point1}^{point2} (1 - \eta) \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) dl_j = \frac{l}{2\pi} \int_0^1 (1 - \eta) \log\left(\frac{1}{\eta l}\right) d\eta$$

$$g_{ij}^2 = \int_{point1}^{point2} (\eta) \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) dl_j = \frac{l}{2\pi} \int_0^1 (\eta) \log\left(\frac{1}{\eta l}\right) d\eta$$

Donc on trouve que :

$$g_{ij}^1 = \frac{l}{2} \left[\frac{3}{2} - \log(l) \right] \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$g_{ij}^2 = \frac{l}{2} \left[\frac{1}{2} - \log(l) \right] \cdot \frac{1}{2\pi}$$

On note que tous les termes de (H_{ij}) et (G_{ij}) sont multipliés par (2π) dans le programme.

Donc :

$$g_{ij}^1 = \frac{l}{2} \left[\frac{3}{2} - \log(l) \right]$$

$$g_{ij}^2 = \frac{l}{2} \left[\frac{1}{2} - \log(l) \right]$$

Cette approche est programmée dans le sous-programme INLO.

III. 5. Résolution du système matriciel :

Il existe plusieurs méthodes dans la littérature pour résoudre les systèmes d'équation linéaires, nous allons utiliser l'une des méthodes les plus utilisés à savoir la méthode d'élimination de Gauss encore appelée méthode du Pivot de Gauss ou triangularisation de Gauss, cette méthode consiste à utiliser systématiquement des opérations élémentaires pour éliminer tout les termes sous la diagonale de la matrice A et obtenir un système triangulaire supérieur, la validité de cette méthode repose sur le fait que les opérations élémentaire constituent une multiplication de système de départ par une matrice inversible (André Fortin [3]).

III. 5.1. Algorithme d'élimination de Gauss:

L'algorithme consiste alors à remplacer à chaque étape la matrice A par une matrice $A^{(K)}$ dont les K-ièmes premiers vecteurs colonnes correspondent au début d'une matrice triangulaire. À la (K+ 1)-ième étape, on conserve les K premières lignes et les (K-1) premières colonnes de $A^{(K)}$. (Cité dans Franck Jdrzejewski [9], page 105).

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad i = k + 1, \dots, NT \text{ et } j = k + 1, \dots, NT$$

$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \quad i = k + 1, \dots, NT$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} \quad i = k + 1, \dots, NT$$

En pratique, si le pivot, c'est-à-dire l'élément $a_{kk}^{(k)}$ situé à la k-ième ligne et à la k-ième colonne, est petit ou nul, l'algorithme n'est plus valable.

On emploie dans ce cas des permutations de lignes et ou de colonnes, cette technique est appelées stratégies de pivot.

III. 5.2. Stratégies de pivot :

Lorsqu'un pivot est nul, la méthode de Gauss n'est plus applicable. Si le pivot est très petit, l'algorithme conduit à des erreurs d'arrondi importantes. C'est pourquoi des algorithmes qui échangent les éléments de façon à avoir le pivot le plus grand possible ont été développés (Franck Jedrzejewski [9]).

Les programmes optimisés intervertissent les lignes à chaque étape de façon à placer en pivot le terme de coefficient le plus élevé de la colonne: c'est la méthode du pivot partiel, à la k-ième étape le pivot est l'élément

$$a_{ik}^{(k)} = \max_{j=k, \dots, NT} |a_{jk}^{(k)}|$$

Cette stratégie est adoptée dans le sous-programme SLNPD de notre programme de calcul.

III. 5.3. Algorithme de résolution :

Ayant transformé la matrice A du système en une matrice triangulaire supérieur, il devient facile maintenant de résoudre notre système qui est exprimé par la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & a_{1N} & \dots & a_{1NT} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & a_{NNT} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{NTNT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_N^{(1)} \\ x_{N+1}^{(0)} \\ \vdots \\ x_{NT}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ b_{N+1} \\ \vdots \\ b_{NT} \end{bmatrix}$$

Ici on a introduit un code pour identifier les fonctions de courant, ainsi que les vitesses, à savoir :

- (0) Indique que l'inconnue $x_i^{(0)}$ représente la fonction de courant au nœud i.
- (1) Indique que l'inconnue $x_i^{(1)}$ représente la vitesse tangentielle au nœud i.

Et Pour résoudre ce système nous avons utilisé un algorithme très connue, appelé algorithme de la remonté triangulaire (cité dans André Fortin [3] page 106), il s'écrit :

$$x_{NT} = \frac{b_{NT}}{a_{NTNT}} \quad \text{pour } i = NT$$

$$x_i = b_i - \sum_{k=i+1}^{NT} a_{ik}x_k \quad \text{pour } i = NT - 1, NT - 2, \dots, 2, 1$$

Ainsi tout les inconnues du système sont déterminées dans le sous-programme SLNPD et trié par leurs codes d'identification dans le sous-programme ORDRE.

III. 6. Singularité géométrique :

La définition du vecteur normal pour un angle de coin sur la frontière du domaine est un autre aspect à considérer.

Par exemple, dans la figure III.10 ci-dessous, nous voyons que pour un même nœud (n°2), nous avons deux possibilités pour la définition de la normale.

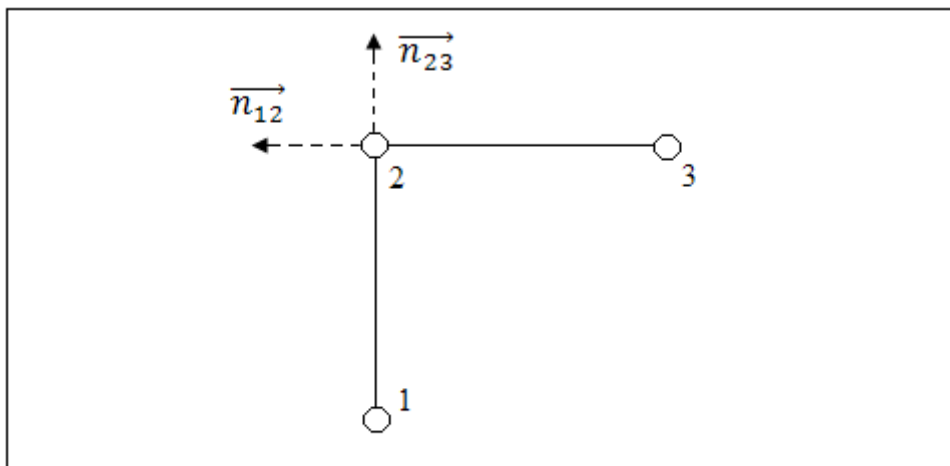


fig.III.10. Schéma d'un maillage de coin.

Brebbia [5] suggère, pour contourner cette situation, d'utiliser deux nœuds collés, ou encore deux nœuds confondus; toutefois pour la deuxième option, une des contributions doit être ici soustraite du système d'équations.

D'autres approches ont aussi été suggérées, telles que tronquer le coin, ou le remplacer par une section de parabole; d'autres préfèrent traiter, pour chaque nœud, deux normales liées à chaque élément adjacent.

Cependant puisque dans le cas traité ici, la forme du domaine nous importe peu, nous contournerons cette singularité en générant un domaine circulaire sans aucun coin indéfini.

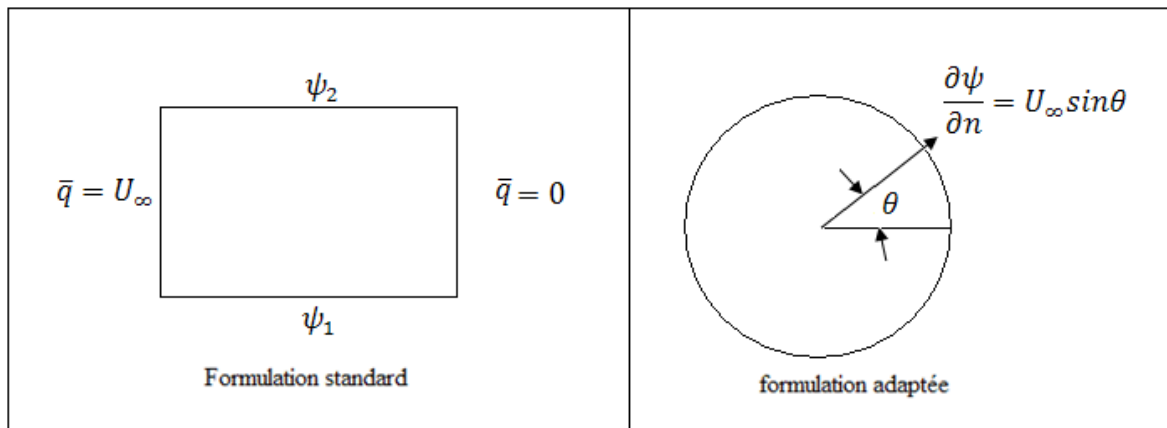


fig.III.11. Utilisation d'une géométrie différente pour délimiter le domaine afin d'éviter les Singularités de coin

En contournant le problème de cette façon, nous respectons entièrement les conditions aux limites d'un écoulement libre et nous nous évitons de programmer inutilement un algorithme de résolution pour les singularités de coin.

Ayant donc réussi à adapter une formulation par éléments finis de frontière standards au problème d'écoulement potentiel autour d'un obstacle, et ce en utilisant deux frontières et en éliminant les coins du domaine, il reste à présent l'organigramme utilisée pour la résolution.

III.7. Organigramme logique :

L'organigramme logique du système de résolution pour un écoulement potentiel se trouve dans le chapitre V, figure V.2.

Le travail principal pour la programmation de ces éléments de frontière s'est fait au niveau de l'assemblage et de l'évaluation des matrices G et H.

La figure .V.3 (chapitre .V) nous précise le cheminement utilisé pour les itérations sur les éléments afin d'intégrer la contribution de chaque nœud et composer le système d'équation à résoudre. Le texte détaillé de la programmation se trouve dans le sous-programme RESOL (annexe 4).

Chapitre IV

RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA COUCHE LIMITE

IV. 1. Introduction:

La solution de la couche limite a pour objectif la détermination en tout point de certaines grandeurs physiques, ainsi que leurs évolutions en fonction de l'angle d'incidence, et de régime d'écoulement à l'intérieur de cette couche limite qui est directement lié à l'écoulement extérieur.

La distribution de vitesse ayant été évaluée à l'extérieur de la couche limite par la solution de l'écoulement à potentiel, il suffit maintenant de résoudre l'équation intégrale de quantité de mouvement pour définir ces grandeurs physique et localiser par la suite la position des points de transition laminaire-turbulent ainsi que les points de décollement de la couche limite.

On rappelle que l'équation intégrale de quantité de mouvement qui est l'équation fondamentale de KARMAN développé dans le 2ème chapitre s'écrit :

$$\frac{d\delta_2}{dl} + \frac{1}{u_l} \frac{du_l}{dl} \delta_2 (H + 2) = \frac{\tau_w}{\rho u_l^2} \quad (\text{IV. 1})$$

Les équations globales, et en particulier, l'équation intégrale de quantité de mouvement (équation de Karman), sont largement utilisées dans les méthodes d'approximation de calcul de couche limite, aussi bien laminaire que turbulente.

IV. 2. Ecoulement laminaire:

IV. 2 .1. méthode de Thwaites :

Pour cette partie, nous utiliserons la méthode d'approximation développée par THWAITES pour l'étude de la couche limite laminaire le long d'une paroi solide quelconque (citée dans Duncan et al [7], R.COMOLET [15]). Cette méthode est reconnue par la majorité des autres auteurs comme étant simple mais à la fois très efficace, pour les problèmes présentant de sévères gradients de pressions inverses, tels qu'observés lorsqu'on approche un point de décollement de la couche limite (TUNCER CEBECI [18]).

IV. 2.2. Formulation:

THWAITES utilise deux paramètres: (m_1) pour le gradient de pression et (L_1) associé à la friction en surface, telle que:

$$m_1 = \frac{\delta_2^2}{u_l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_\omega \quad (\text{IV. 2})$$

$$L_1 = \frac{\delta_2}{u_l} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_\omega \quad (\text{IV. 3})$$

Nous rappelons que les équations de mouvement de Navier-Stokes évaluée à la surface (ω), développer précédemment (CHAPITRE II) nous on permet d'obtenir l'équation suivante:

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_\omega = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} \quad (\text{IV. 4})$$

D'autre part l'équation de Benoulli nous donne la relation avec l'extérieur de la couche limite:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l} (u^2) = 0$$

Donc :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} = -u \frac{du}{dl} = -u_1 u_1' \quad (\text{IV. 5})$$

Alors :

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_\omega = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} = -u_1 u_1' \quad (\text{IV. 6})$$

Et par suite nous pouvons réexprimer le paramètre (m_1) comme suit:

$$m_1 = \frac{\delta_2^2}{u_l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_\omega = \frac{-u_1' \delta_2^2}{v} \quad (\text{IV. 7})$$

Prenant l'équation intégrale de quantité de mouvement (équation (IV.1)), nous obtenons avec le paramètre (L1) :

$$\delta_2' + \frac{u_1'}{u_1} \delta_2 (H + 2) = \frac{\tau_w}{\rho u_1^2} = \frac{v L_1}{u_1 \delta_2} \quad (\text{IV. 8})$$

Nous pouvons la réécrire en utilisant les paramètres (m1) et (L1) tel que :

$$u_1 (\delta_2^2)' = 2v [m_1 (H + 2) + L_1] \quad (\text{IV. 9})$$

THWAITES a trouvé expérimentalement une expression uni paramétrique K(m) pour remplacer la partie droite de l'équation, ce qui simplifie l'expression ci-dessus à :

$$u_1 (\delta_2^2)' = v K(m_1) \quad (\text{IV. 10})$$

Où :

$$\begin{aligned} K(m_1) &= 2 [m_1 (H + 2) + L_1] \\ &= 0.45 + 6 m_1 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$u_1 (\delta_2^2)' - 0.45v + 6u_1' \delta_2^2 = 0 \quad (\text{IV. 11})$$

Ou :

$$\frac{d}{dl} (u_1^6 \delta_2^2) = 0.45 v u_1^5 \quad (\text{IV. 12})$$

Et finalement sous forme intégrale:

$$[\delta_2^2]_{l_1} = \frac{0.45 v}{(u_1^6)_{l_1}} \int_0^l u_1^5 dl \quad (\text{IV. 13})$$

Ici l1 indique que les quantités sont évaluées à l=11

Nous pouvons évaluer cette intégrale numériquement et trouver les valeurs de (11) et (m1) par les équations (IV.3) et (IV.7).

IV. 2.3. évaluation des points de décollement de la couche limite laminaire :

Dans la théorie des écoulements de fluides parfaits, les parois solide constituent des surfaces limites pour l'écoulement, le fluide épouse continuellement la paroi de l'obstacle en glissant sur elle. Il n'en est pas toujours le cas pour les fluides réels car il peut se former des régions où la couche limite n'adhère plus à la paroi, il apparait alors un point de décollement.

Selon la méthode de Thwaites nous pouvons évaluer les critères de décollement comme suit :

Si (m_1) est positif, on a un gradient de pression inverse, donc une condition essentielle à la séparation (décollement).

Si (L_1) est nul, on a le point de décollement puisque la dérivée de la vitesse indique un point d'inflexion avant l'inversion du sens de l'écoulement à la surface, par conséquent le paramètre (L_1) nous donne directement la condition de séparation à observer.

Aussi THWAITES a développé une table à partir de résultats expérimentaux permettant d'interpréter les valeurs de (L_1) et (H) en fonction de (m_1) (DUNCAN [7]).

STRICKLAND [17], nous donne cette correspondance sous forme d'équation:

$$\text{si } m_1 \geq 0 \quad L_1 = 0.22 - 1.402m_1 - \frac{0.018m_1}{0.107-m_1} \quad (IV. 14)$$

$$\text{si } 0 \leq m_1 \leq 0.1 \quad H = \frac{0.0731}{0.14-m_1} + 2.088 \quad (IV. 15)$$

$$\text{si } m_1 > 0.1 \quad H = 4 \quad (IV. 16)$$

$$\text{si } m_1 < 0 \quad L_1 = 0.22 - 1.57m_1 - 1.8 m_1^2 \quad (IV. 17)$$

$$\text{si } -0.1 \leq m_1 < 0 \quad H = 2.61 + 3.75m_1 + 5.24 m_1^2 \quad (IV. 18)$$

$$\text{si } m < -0.1 \quad H = 2.1 \quad (IV. 19)$$

Connaissant (δ_2) et (L_1), le coefficient de traînée local peut alors être évalué puisque de l'équation (IV.8) on obtient:

$$\tau_\omega = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_\omega = \frac{L_1 u_l}{\delta_2} \mu \quad (IV. 20)$$

Et conséquemment:

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{2\nu L_1 u_l}{\delta_2 u_\infty^2} \quad (\text{IV. 21})$$

IV. 2.4. Procédure et organigramme logique :

Pour qu'il y ait décollement, il est essentiel d'avoir un gradient de pression inverse. Pour vérifier cet état, on doit dériver numériquement la vitesse en surface, car de par Bernoulli, on a l'équation (IV.5)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} = -u_l \frac{\partial u_l}{\partial l}$$

Lorsque cette condition est vérifiée, on intègre alors numériquement l'équation de quantité de mouvement (IV.13), partant du point d'arrêt jusqu'au point sous considération.

Nous évaluons alors les paramètres L_1 et m_1 , et si $(\partial u / \partial n) = 0$ alors le point de séparation est confirmé.

L'organigramme logique pour la localisation des points de séparation en régime laminaire est illustré dans le CHAPITE V fig (4), et le texte détaillé de la programmation se trouve à l'annexe [4] dans le sous-programme (POINT).

IV. 3. Ecoulement turbulent:

L'avantage d'utiliser l'équation intégrale de quantité de mouvement est sa propriété d'adaptation au régime turbulent comme au laminaire. Pour traiter le cas en régime turbulent, seules les équations associées au profil de vitesse et les paramètres de forme seront changés.

Au point de vue pratique, les méthodes de calcul de la couche limite turbulente sont utiles pour trouver le coefficient de frottement, le développement de la couche limite, ainsi que la position du point de décollement.

Ces méthodes sont des méthodes approchées fondées sur les équations intégrales de quantité de mouvement.

Comme la contrainte pariétale ainsi que le terme de dissipation qui figure dans ces équations sont représentées par des expressions déterminées d'après les résultats expérimentaux, on peut dire que toutes les méthodes de calcul de couche limite turbulente sont des méthodes semi-empiriques.(R.COMOLET[15])

IV. 3.1. Formulation :

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur le développement des formules mathématiques et à la détermination des paramètres qui permettent de solutionner ce type d'écoulement. Ici encore nous choisissons une formulation simple et dont la validité a été reconnue par la majorité des autres auteurs; soit celle de SPENCE citée dans Duncan [7], page 347

Soit l'équation intégrale de quantité de mouvement :

$$\frac{d\delta_2}{dl} + \frac{u_l'}{u_l} \delta_2 (H + 2) = \frac{\tau_w}{\rho u_l^2} = \frac{C_f}{2} \quad (\text{IV. 22})$$

Elle Contient trois inconnues: H , δ_2 et C_f (la valeur de u_l et u_l' le long de la frontière l est connue par la solution de l'écoulement potentiel). Donc la résolution de cette équation nécessite une détermination de deux autres relations entre δ_2 , H et C_f .

Selon DUNCAN [7], les résultats expérimentaux montrent que les profils de vitesse peuvent être regardés comme une fonction uni-paramétrique de paramètre de forme H , pour un écoulement turbulent.

- D'après la méthode approchée développé par Spence [7] et [15], l'épaisseur de quantité de mouvement peut être évaluée par la formule suivante :

$$\delta_2^{6/5} u_l^{4.2} - \delta_{2t}^{6/5} u_{lt}^{4.2} = 0.0106 R_l^{-1/5} \int_{l_t}^l u_l^4 dl \quad (\text{IV. 23})$$

- Et pour l'évaluation du coefficient de friction locale sur la surface de l'obstacle, nous pouvons utiliser la formulation de Ludwig – Tillman (R.COMOLET [15]) :

$$C_f = 0.246 R_{\delta_2}^{-0.268} 10^{-0.678 H} \quad (\text{IV. 24})$$

Où : $R_{\delta_2} = U_l \delta_2 / \nu$ (épaisseur de quantité de mouvement sans dimension, ou bien nombre de Reynolds de l'épaisseur de quantité de mouvement).

- Une troisième relation s'avère nécessaire. Plusieurs chercheurs ont travaillé dans ce domaine: Von Doenhoff, Tartevin, Garner, Maskell, citée dans Duncan [7]. Or SPENCE affirme que l'ensemble des relations trouvées sont de la forme intégrale suivante:

$$u_1^2 \mathcal{X}(H) = C_1 - 0.0014 \int_{l_t}^1 \frac{u_l^2}{\delta_2 R_{\delta_2}^{1/5}} dl \quad (\text{IV. 25})$$

$$\text{Où : } \begin{cases} \mathcal{X}(H) = 2.105 - \frac{0.442}{(H-1)} \\ C_1 = [u_1^2 \mathcal{X}(H)]_{l=l_t} \end{cases}$$

Ainsi le facteur de forme H peut être évalué exactement pour nous permettre de calculer le coefficient de friction locale Cf.

3.2. Evaluation des points de décollement de la couche limite turbulente :

Parmi l'ensemble des méthodes qui existent pour évaluer les points de séparation de la couche limite ; Bradshaw [4] affirme que la méthode de corrélation de Strafford est l'une des plus efficace. Nous utilisons alors la méthode de corrélation de Strafford. Elle a été évaluée expérimentalement par TUNCER CEBECI en 1972 [18], et prouvée comme étant tout aussi efficace.

En divisant la couche limite en deux régions: intérieure et extérieure, Strafford relie le critère de séparation (soit avoir un coefficient de friction nul à la paroi) au gradient de pression à l'extérieur de la couche limite.

L'expression à vérifier est donc:

$$f(l) = C_p \left(\frac{1}{dl} \frac{dC_p}{dl} \right)^{1/2} (10^{-6} R_l)^{-1/10} \quad (\text{IV. 26})$$

$$\text{Ou : } C_p = 1 - \left(\frac{u_l}{u_0} \right)^2$$

U_0 = vitesse de l'écoulement au début du gradient inverse.

Cependant, cette expression est valable pour les deux conditions suivantes réunies:

- un gradient de pression inverse, dès le bord d'attaque ;
- un écoulement turbulent sur toute la surface.

Si la couche limite a une partie laminaire ou un gradient de pression favorable, alors on substitue l avec $(l-l')$ et R_l avec $U_m (l-l')/v$.

Ici le facteur l' représente la position d'un bord d'attaque imaginaire à partir du quelle l'écoulement sera considéré comme turbulent sur toute la surface.

Le facteur l' se calcul par l'équation de SPENCE appliquée à une plaque droite.

$$l' = l_m - \int_{l_t}^{l_m} \left(\frac{u_l}{u_m} \right)^4 dl - 94.3 \delta_{2tr} R_{\delta_{2tr}}^{1/5} \left(\frac{u_{lt}}{u_m} \right) \quad (\text{IV. 27})$$

l_m : est la position du point où la pression est minimale (début du gradient inverse).

δ_{2tr} = épaisseur de quantité de mouvement évalué au point de transition.

$R\delta_{2tr}$ = épaisseur de quantité de mouvement (sans dimension) au point de transition.

Il s'agit par la suite d'évaluer numériquement ces expressions pour déterminer le paramètre $f(l)$. Selon sa valeur, le point de séparation sera confirmé ou non. Avec les expérimentations effectuées par CEBECI [18], les critères de séparation développés par STRAFFORD ont été validés et améliorés.

Le test s'effectue alors sur le paramètre comme suit:

$f(l) \leq 0.3$	Pas de séparation
$0.3 \leq f(l) \leq 0.5$	Séparation au point maximum
$f(l) > 0.5$	Séparation à $f(l)=0.5$

Il est à noter que pour la programmation, les intégrales seront évaluées sur chaque élément par une intégration numérique de Gauss à trois points. Quant à la localisation exacte des points de décollement, on utilisera une fonction d'interpolation parabolique.

Pour compléter cette section, il est nécessaire de faire la transition entre les régimes laminaires et turbulents, la région de transition sera considérée comme une région ponctuelle.

IV. 3. 3. Evaluation des points de transition laminaire-turbulent :

L'écoulement dans la couche limite passe de l'état laminaire à l'état turbulent par l'intermédiaire d'une zone de transition, assimilé en général à un point pour des raisons de simplification (R.COMOLET [15]), et dont on caractérise la position par un nombre de Reynolds correspondant : R_{xtr} , $R_{\delta tr}$, ou $R_{\delta 2tr}$

Nous nous limiterons dans la simulation à l'approximation suivante qui utilise la relation de Michel (TUNCER, CEBECI [18]) pour évaluer le nombre de Reynolds de transition basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement, soit :

$$R_{\delta 2tr} = 430 \quad (IV. 28)$$

4. Procédure et organigramme logique :

Nous résoudrons l'écoulement à partir du point de stagnation (point d'arrêt) jusqu'au point de transition en utilisant les équations de THWAITES (Eq.IV.13 et Eq.IV.21) en régime laminaire.

A partir de ce point, l'équation de quantité de mouvement sera résolue avec la formulation de SPENCE (Eq.IV.25) pour un régime turbulent.

A chaque nœud les facteurs de forme seront évalués, pour calculer le coefficient de friction local et effectuer les tests de séparation de la couche limite.

Les différentes formulations sont:

- pour l'épaisseur de la quantité de mouvement " $\delta 2$ " et le facteur de forme "H", formule de SPENCE (IV.23 et IV.25);
- pour l'évaluation du coefficient de friction local "Cf", formule de Ludwig - Tillman (IV.24) ;
- pour évaluer le point de séparation, la formule de corrélation de Strafford (IV.26 et IV.27).
- Enfin pour voir comment ces formulations seront utilisées dans la programmation et dans quel ordre afin de tenir compte des différents régimes d'écoulement,

l'organigramme logique pour la résolution de la couche limite laminaire et turbulente est illustré dans le CHAPITE V fig (5), et le texte détaillé de la programmation se trouve à l'annexe [4] dans le sous-programme (POINT).

IV. 5. SIMULATION DE DECOLLEMENT DE LA COUCHE LIMITE :

IV. 5.1. distribution de pression

Le décollement de la couche limite influe directement la distribution de pression autour d'un obstacle, puisqu'il n'y a pas une récupération de pression après ce décollement (la pression reste à peu près constante), (HERMANN SCHLICHTING [10], Ewald HUNSINGER & Michaël OFFERLIN [20]), donc pour la simulation nous devons calculer le C_p depuis le point de stagnation jusqu'au point de décollement (s'il existe) et derrière ce point le C_p restera constant jusqu'au bord de fuite.

IV. 5.2. sillage de décollement :

Si la couche limite se décolle alors le point de décollement est suivi par une zone décollée. Cette zone est souvent le siège d'un mouvement tourbillonnaire, très complexe à analyser, désignée dans certains cas par un nom particulier : bulle de décollement, ou sillage (R. COMOLET [15] page 187), créant ainsi une trainée de forme supplémentaire.

Autour de l'obstacle et en dehors du sillage, l'écoulement reste sensiblement celui d'un fluide parfait (R. COMOLET [15]).

Donc pour simuler ce sillage nous avons utilisé une approche simple et efficace à la foi, elle consiste à substituer l'obstacle par un solide de forme divergeant derrière le(s) point(s) de décollement. L'angle de ce divergeant représente l'angle de décollement de la couche limite.

Le texte détaillé de la programmation pour cette simulation se trouve dans le sous-programme DECOL (annexe 4).

IV. 6. L'EVALUATION DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUE :

Ayant évalué la distribution de la vitesse autour d'un objet quelconque et ayant solutionné l'écoulement à l'intérieur de la couche limite pour connaître le frottement en surface et la position des points de séparation, on peut alors évaluer la distribution de pression autour de cet objet et obtenir par la suite les coefficients aérodynamiques qui lui sont propres.

A. Les coefficients locaux :

1. Coefficient de pression :

1.1. Extrados (Partie supérieur) :

$$1) \quad Cpe_i = 1 - \left(\frac{u_i}{u_\infty}\right)^2 \quad i_{st} \leq i < i_{dece}$$

$$2) \quad Cpe_i = 1 - \left(\frac{u_{i_{dece}}}{u_\infty}\right)^2 \quad i_{dece} \leq i < i_{BF} - 1$$

1.2. Intrados (Partie inférieur) :

$$1) \quad Cpi_i = 1 - \left(\frac{u_{i_{deci}}}{u_\infty}\right)^2 \quad i_{BF} + 1 < i \leq i_{deci}$$

$$2) \quad Cpi_i = 1 - \left(\frac{u_i}{u_\infty}\right)^2 \quad i_{deci} < i \leq i_{st}$$

1.3. Bord de fuite :

$$Cp_{BF_i} = Cp_{moy} = \frac{Cpe_{i_{BF-1}} + Cpi_{i_{BF+1}}}{2} \quad i_{BF} - 1 \leq i \leq i_{BF} + 1$$

2. Coefficient de frottement pariétal :

$$Cf_i = \frac{2\tau_{\omega_i}}{\rho u_\infty^2} = \frac{2\nu L_{1_i} u_i}{\delta_{2_i} u_\infty^2} \quad (\text{Régime Laminaire})$$

$$Cf_i = 0.246 R_{\delta_{2_i}}^{-0.268} 10^{-0.678 H_i} \quad (\text{Régime turbulent})$$

Ces deux coefficients (Cp et Cf) sont locaux et sont fonction de la position sur le profil.

B. Les coefficients globaux :**Coefficient de portance :**

$$CL = - \int_{BA}^{BF} CP_e * dx + \int_{BA}^{BF} CP_i * dx$$

3. Coefficient de trainée de pression :

$$CDP = \int_{BA}^{BF} CP_e * dy - \int_{BA}^{BF} CP_i * dy$$

4. Coefficient de trainée de frottement :

$$CDF = \int_{BA}^{BF} Cf_e * dx + \int_{BA}^{BF} Cf_i * dx$$

5. Coefficient de trainée totale :

$$CDTOT = CD + CDF$$

Chapitre V

PRESENTATION DE PROGRAMME

V. 1. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre nous présenterons le programme informatique que nous avons élaboré afin de :

- solutionner l'écoulement potentiel incompressible à l'extérieur de la couche limite.
- solutionner l'écoulement visqueux mais toujours incompressible à l'intérieur de cette borne.
- visualiser les résultats obtenus dans les deux étapes précédentes.

Ce programme est édité en langage FORTRAN; néanmoins il comprend des instructions pour la visualisation en MATLAB7.1, l'idée consiste à envoyer ces instructions ainsi que les valeurs numériques obtenues à un fichier placé dans le WORK du MATLAB7.1 puis appeler ce fichier.

Cette méthode nous a permis de réunir les trois modules d'un logiciel de modélisation et de simulation numérique à savoir :

- Le préprocesseur.
- Le processeur de calcul (solveur).
- Le post-processeur.

Et cela en un seul programme informatique.

V. 2. Structure général :

Le programme est conçu suivant une structure modulaire. Cette dernière signifie qu'il est composé d'un programme principal assurant la gestion globale et d'un ensemble de modules ou sous-programmes.

Le déroulement de la simulation est effectué en deux étapes principales :

1^{er} étape : résolution primaire et localisation des points de décollement.

2^{ème} étape : modification de la géométrie apparente de l'objet (génération de divergent) pour simuler la forme que prend le sillage, avant une deuxième résolution pour convergence finale.

V. 3 .Les sous-programmes:

Le programme est constitué de 16 sous-programmes qui sont utilisé, soit directement par le programme principal, soit par d'autres sous-programmes, la figure ci-dessous illustre la liaison entre le programme principal et les différents sous-programmes :

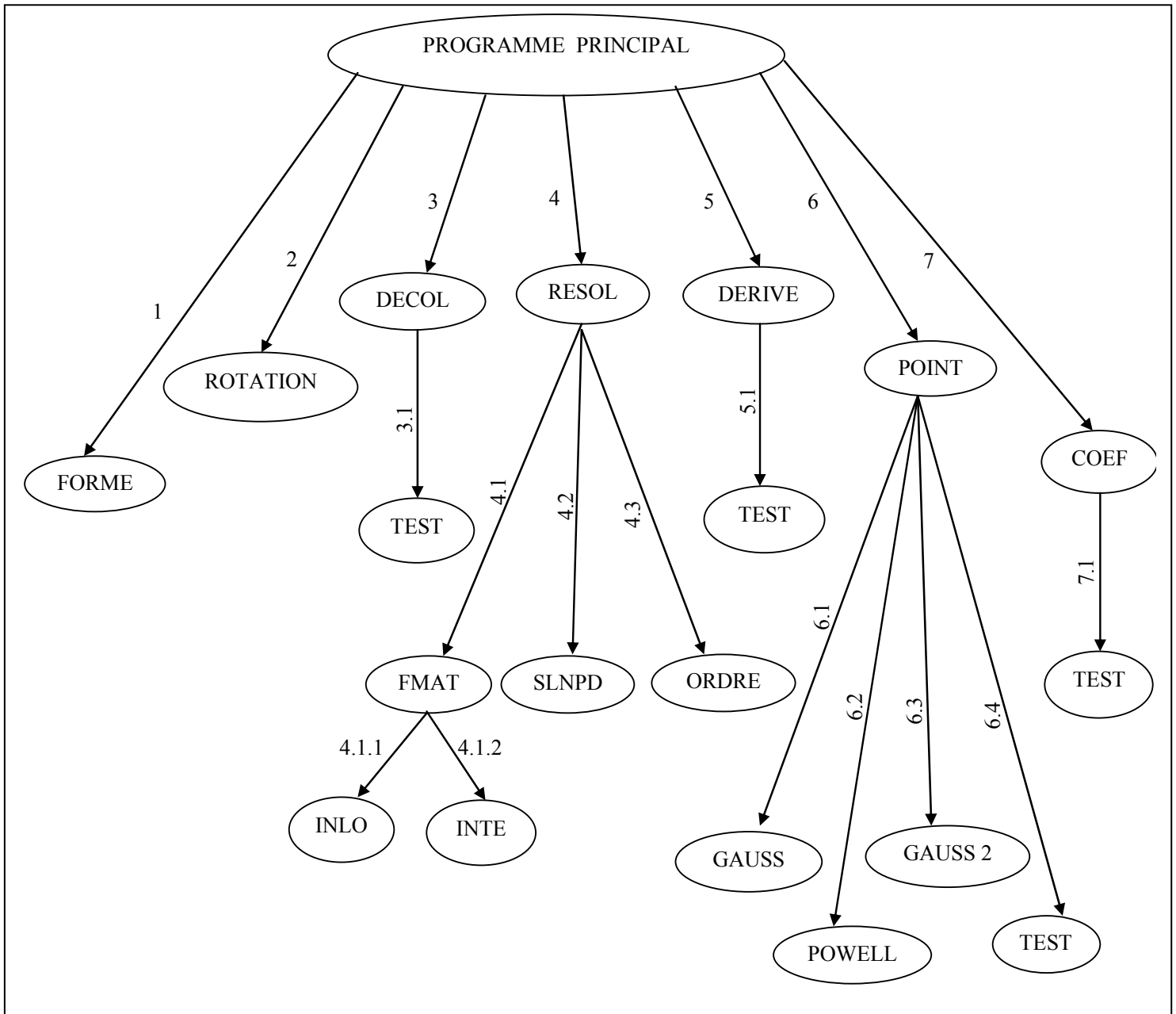


Fig.V.1. Schéma présentatif de déroulement du programme

1. Sous-programme FORME :

Le sous-programme FORME est appelé directement par le programme principal, il est utilisée pour :

- La lecture des coordonnées de l'obstacle à partir d'un fichier d'entrée.
- La lecture des caractéristiques de l'écoulement telle que la vitesse à l'infini amont, la densité, et la viscosité dynamique.
- La lecture des conditions aux limites sur l'obstacle.
- Génération du domaine d'intégration.
- La lecture des conditions aux limites sur la frontière du domaine.

2. Sous-programme ROTATION :

Le sous-programme ROTATION est appelé directement par le programme principal, il permet d'effectuer une rotation de l'obstacle autour de son centre de gravité pour atteindre l'angle d'incidence voulu.

3. Sous-programme DECOL:

Le sous-programme DECOL est appelé directement par le programme principal, il est très important pour notre simulation, car il permet :

- La simulation de sillage déclencher par le décollement de la couche limite en générant un solide sous forme de divergeant, ainsi la géométrie apparente de l'obstacle sera modifier.
- La renumérotation des nœuds, de façon à ce que le nœud numéro 1 sera le plus en extrême amont.
- La recherche des extrêmes géométrique (position de la pression minimum) sur les deux parties de l'obstacle (supérieur et inférieur).

4. Sous-programme RESOL:

Le sous-programme RESOL est appelé directement par le programme principal, il englobe la plus grande partie du travail numérique, à savoir la résolution de l'écoulement potentiel par la méthode des éléments fini de frontière, en faisant appel à d'autres sous-programmes.

5. Sous-programme FMAT:

Le sous-programme FMAT est appelé par le sous-programme RESOL, il est utiliser pour :

- l'assemblage des éléments et l'élaboration des matrices G et H.
- Formation du système matriciel $[A][X]=[B]$.

6. Sous-programme INTE:

Le sous-programme INTE est appelé par le sous-programme FMAT, il est utiliser pour évaluer les éléments hors diagonale des matrices G et H, par intégration numérique de GAUSS à quatre points sur les éléments linéaires des frontières.

7. Sous-programme INLO:

Le sous-programme INLO est appelé lui aussi par le sous-programme FMAT, mais il est utilisé pour le calcul des éléments diagonaux de la matrice G.

8. Sous-programme SLNPD:

Le sous-programme SLNPD est appelé par le sous-programme RESOL, il peut être utilisé pour résoudre n'importe quel système d'équation linéaire par la méthode d'élimination de GAUSS, bien sûr avec interchangeement des lignes lorsqu'il y a un coefficient nul sur la diagonale.

9. Sous-programme ORDRE:

Le sous-programme ORDRE est appelé également par le sous-programme RESOL, il est utilisé pour remettre en ordre les vecteurs FI et DFI respectivement des fonctions de courant sur la frontière du domaine et des vitesses tangentiel sur la frontière de l'obstacle.

10. Sous-programme DERIVE:

Le sous-programme DERIVE est appelé directement par le programme principal, il est utilisé pour :

- calculer le dérivé numérique de la vitesse tangentiel.
- Repérer la position du point de stagnation (point d'arrêt).

11. Sous-programme POINT:

Le sous-programme POINT est utilisé directement par le programme principal, il englobe la totalité du travail concernant le traitement de la couche limite :

a. Traitement de la couche limite Laminaire :

- Evaluation de l'épaisseur de quantité de mouvement sur chaque nœud par une intégration numérique de GAUSS à trois points depuis le point de stagnation jusqu'au nœud considéré en utilisant la formulation de Thwaites.
- Détection des points de transition Laminaire-Turbulent si elle existe.
- Evaluation des paramètres (M_1 et L_1) de Thwaites.
- Calcul de coefficient de friction sur la surface de l'obstacle.
- Et finalement déduire les points de séparation (décollement) de la couche limite.

b. Traitement de la couche limite Turbulente :

- Evaluation de l'épaisseur de quantité de mouvement sur chaque nœud par une intégration numérique de GAUSS à trois points depuis le point de transition jusqu'au nœud considéré en utilisant la formulation de Spence.
- Evaluation de paramètre de forme (H) par intégration numérique de GAUSS à trois points.
- Calcul de coefficient de friction sur la surface de l'obstacle en utilisant la formulation de Ludwig – Tillman.
- Et finalement détecter les points de décollement par le critère de STRATFORD en utilisant une fonction parabolique d'interpolation.

12. Sous-programme GAUSS :

Le sous-programme GAUSS est utilisé pour l'intégration numérique de Gauss à trois points sur l'élément linéaire.

13. Sous-programme GAUSS2 :

Le sous-programme GAUSS2 est utilisé aussi pour l'intégration numérique de Gauss à trois points sur l'élément linéaire.

14. Sous-programme POWELL :

Le sous-programme POWELL est utilisé pour localiser un point optimum de décollement de la couche limite turbulente, par une fonction d'interpolation parabolique.

15. Sous-programme TEST:

Le sous-programme TEST est utilisé par plusieurs sous-programmes, car il permet de vérifier la numérotation des nœuds.

16. Sous-programme COEFF:

Le sous-programme COEFF est appelé directement par le programme principal, il est consacré au calcul des coefficients aérodynamique. Ses deux grands axes sont :

- Evaluation de la distribution de C_p (coefficient de pression) sur la surface de l'obstacle.
- Intégré les coefficients de pression (C_p) et de frottement (C_f) sur la surface et par suite déduire les coefficients aérodynamique globaux de l'obstacle.

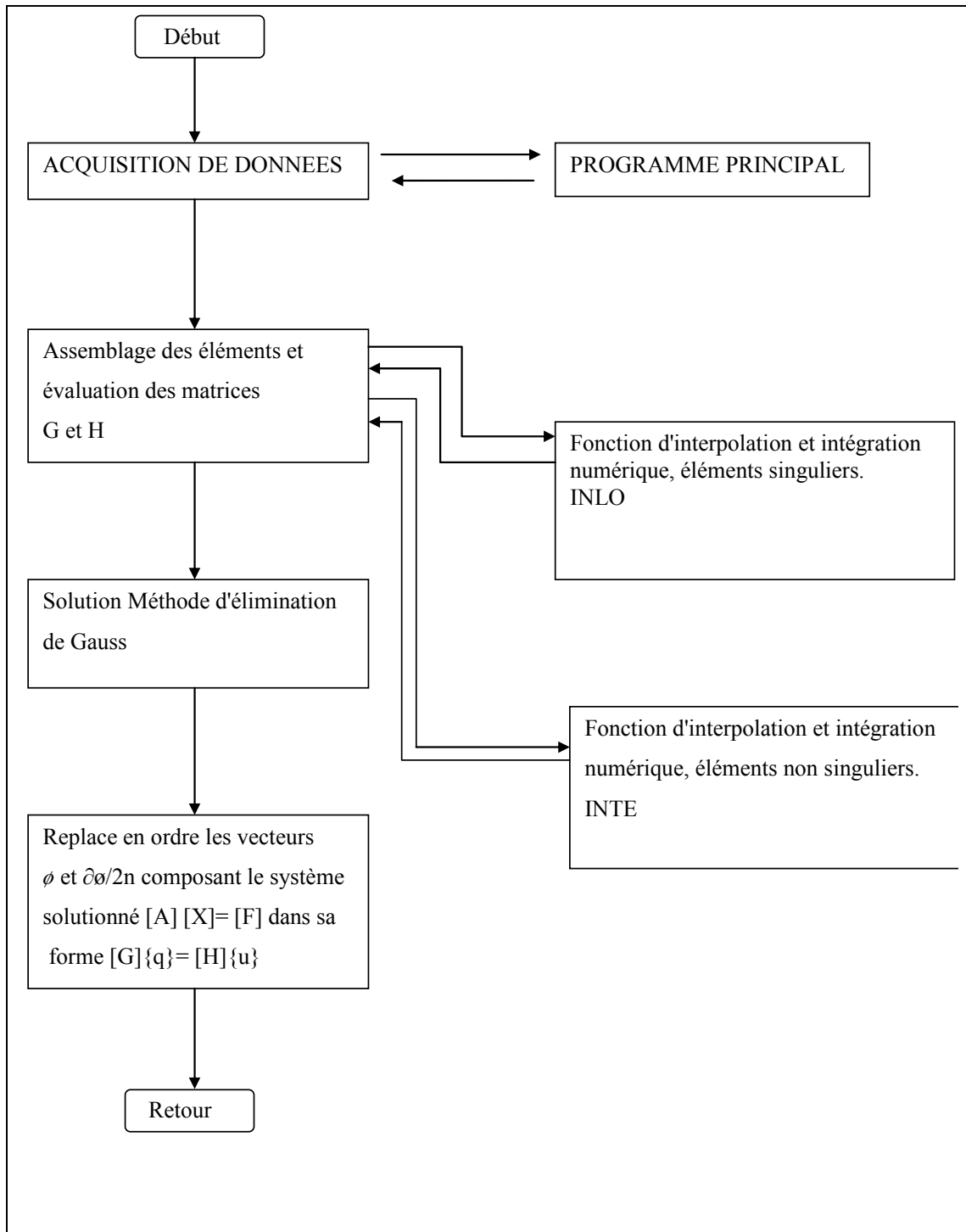


Fig.V.2. Organigramme général du sous-programme de résolution d'un écoulement potentiel. Sous-programme RESOL

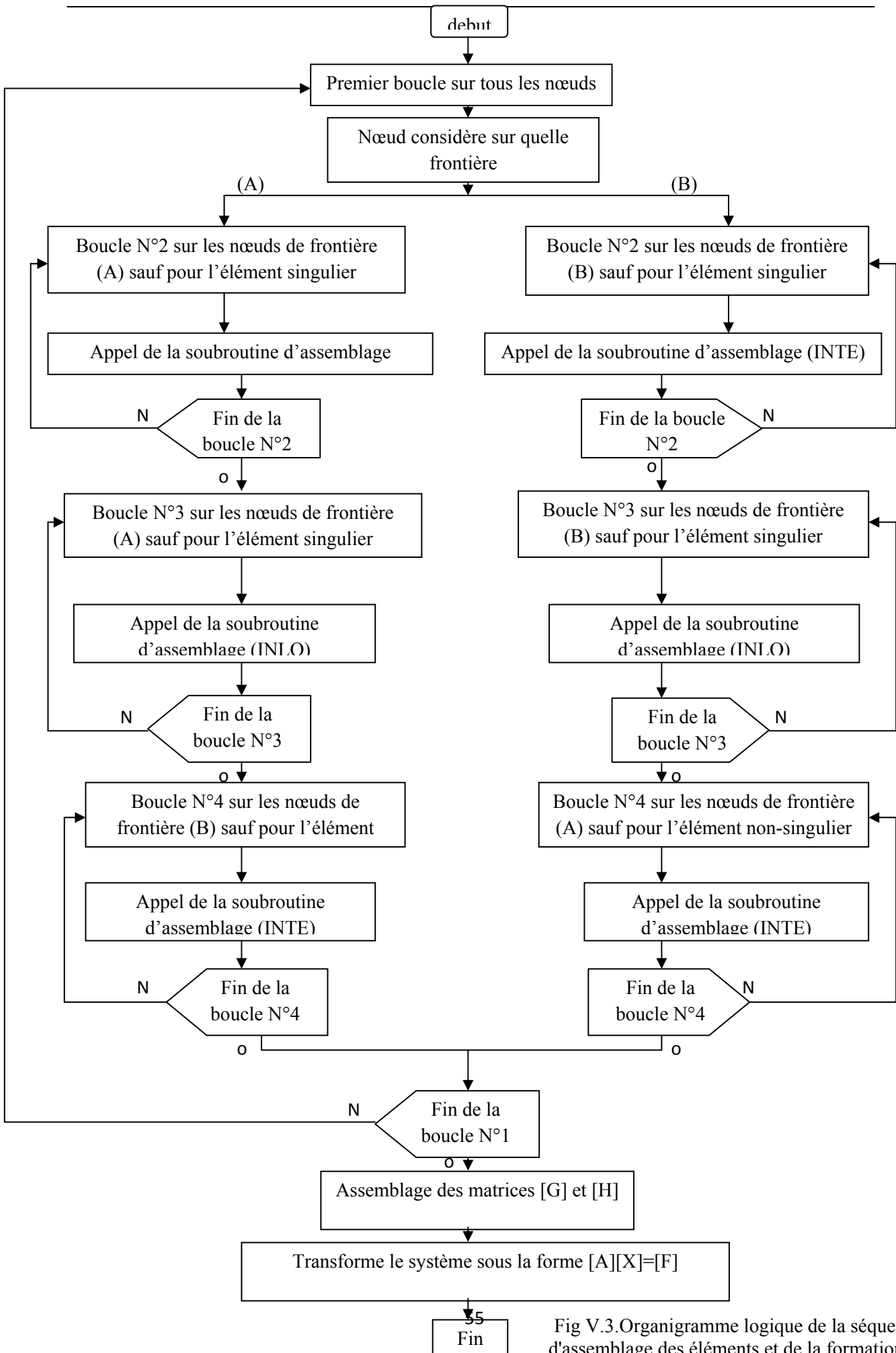


Fig V.3. Organigramme logique de la séquence d'assemblage des éléments et de la formation du système $[A][X]=[F]$

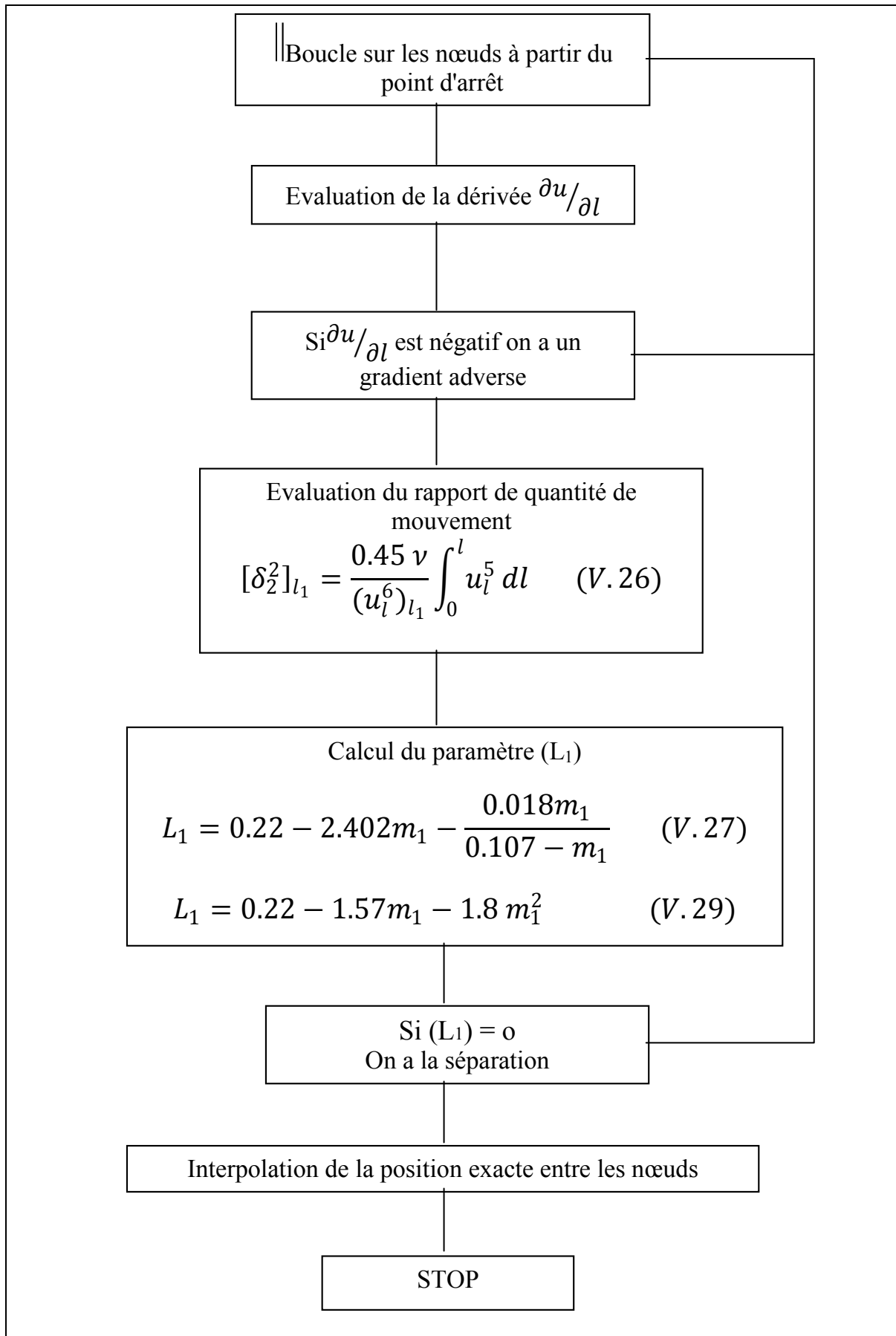


Fig.V.4.Organigramme logique pour la localisation des points de séparation en régime laminaire

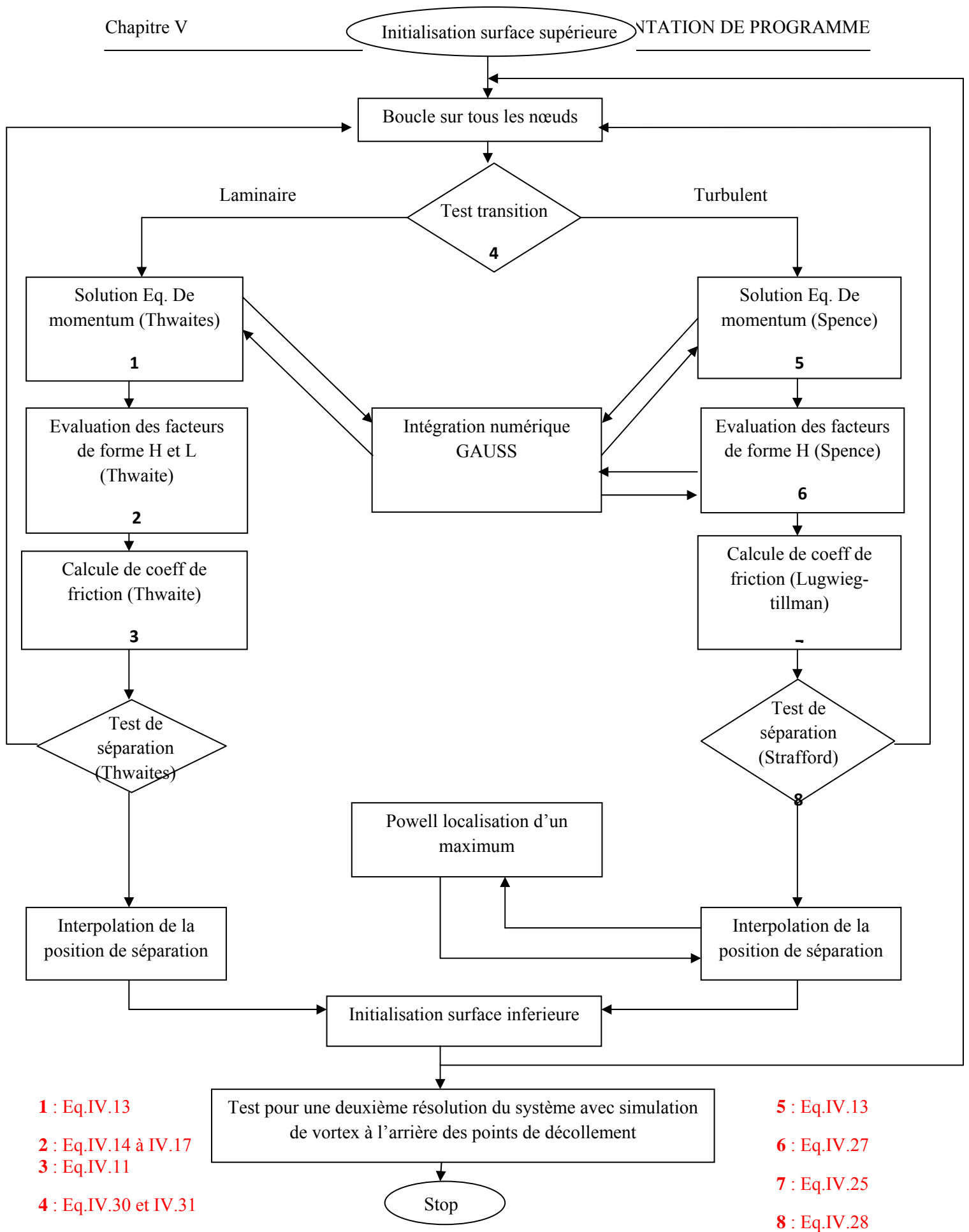


Fig.V.5. Organigramme détaillé du cheminement mathématique effectué pour la résolution de la couche limite laminaire et turbulente.

Chapitre VI

VALIDATION DES MÉTHODES DE CALCUL UTILISÉES

VI. 1 .INTRODUCTION :

La dernière étape avant l'adoption d'une méthode de calcul ou d'un modèle consiste à comparer les résultats obtenus avec des valeurs théoriques ou des résultats expérimentaux, ou encore avec un logiciel de modélisation et de simulation numérique. Dans le présent travail, on a utilisé deux logiciels de simulation pour valider les méthodes utilisées dans notre programme à savoir :

- Le DESIGN AIRFOIL : pour comparer la distribution de vitesse ainsi que les coefficients aérodynamique.
- Le NV FOIL : pour comparer la distribution de pression.

Et pour généraliser ce cadre d'étude nous avons utilisé trois types de profils :

- Profil d'aile symétrique : NACA0012, NACA0018.
- Profil d'aile cambré : NACA4412.
- Profil d'un cylindre.

1) La distribution de vitesse :

Comme le logiciel disponible [DESIGN AIRFOIL] possède une capacité limitée en maillage, alors le nombre de point utilisé pour évaluer la distribution de vitesse est limité à 70 points.

- $V_{\infty} = 1\text{m/s}$.
- Angle d'incidence = 0° .

Remarque : étant donné la symétrie des profils NACA0012, NACA0018, et le CYLINDRE, il est évident que la distribution de (V et CP) sur l'intrados soit similaire à celle sur l'extrados, donc pour ces profils on va représenter seulement la distribution sur l'extrados.

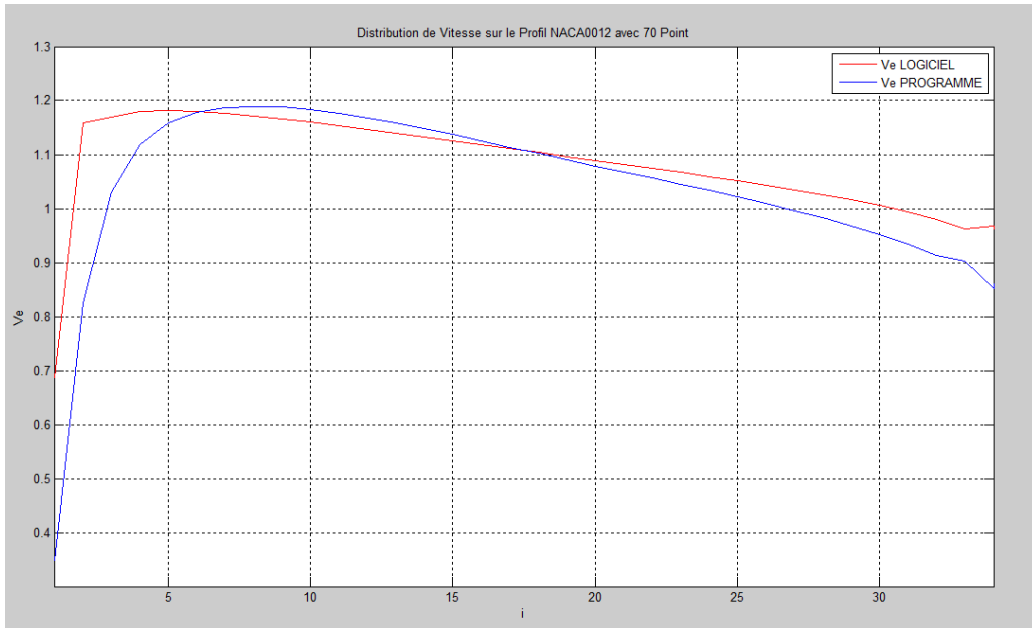


Fig.VI.1. distribution de vitesse sur le profil NACA0012 avec 70 points

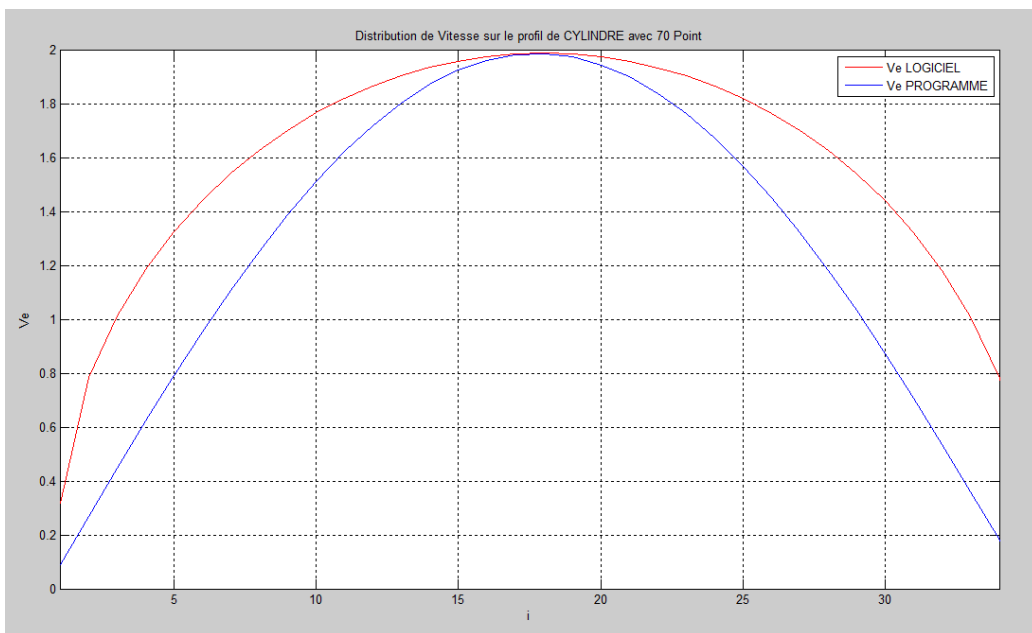


Fig.VI.2. distribution de vitesse sur le profil de cylindre avec 70 points

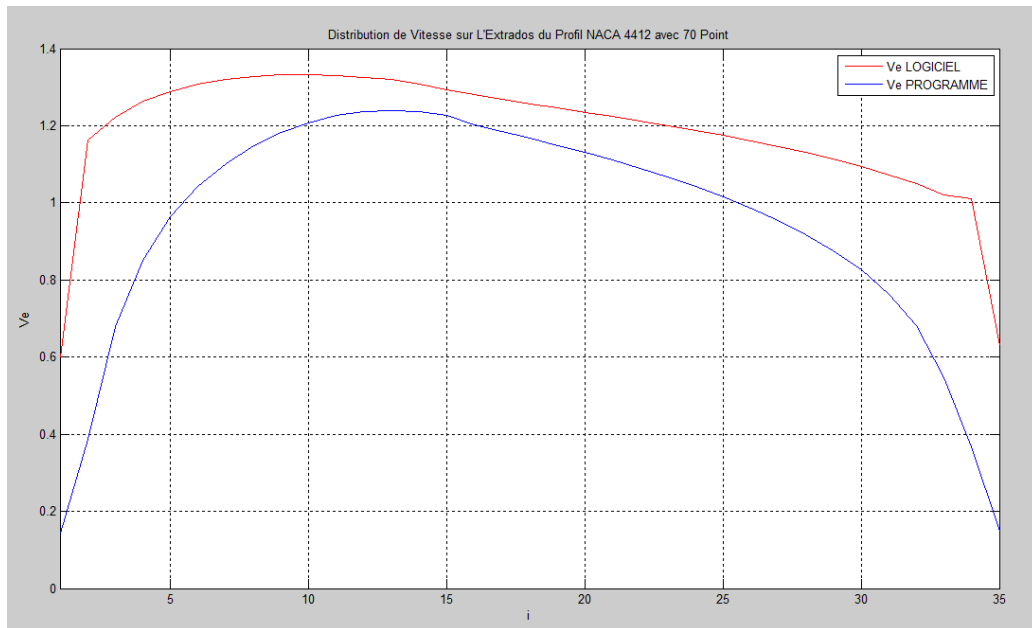


Fig.VI.3. distribution de vitesse sur l'extrados du profil NACA4412 avec 70

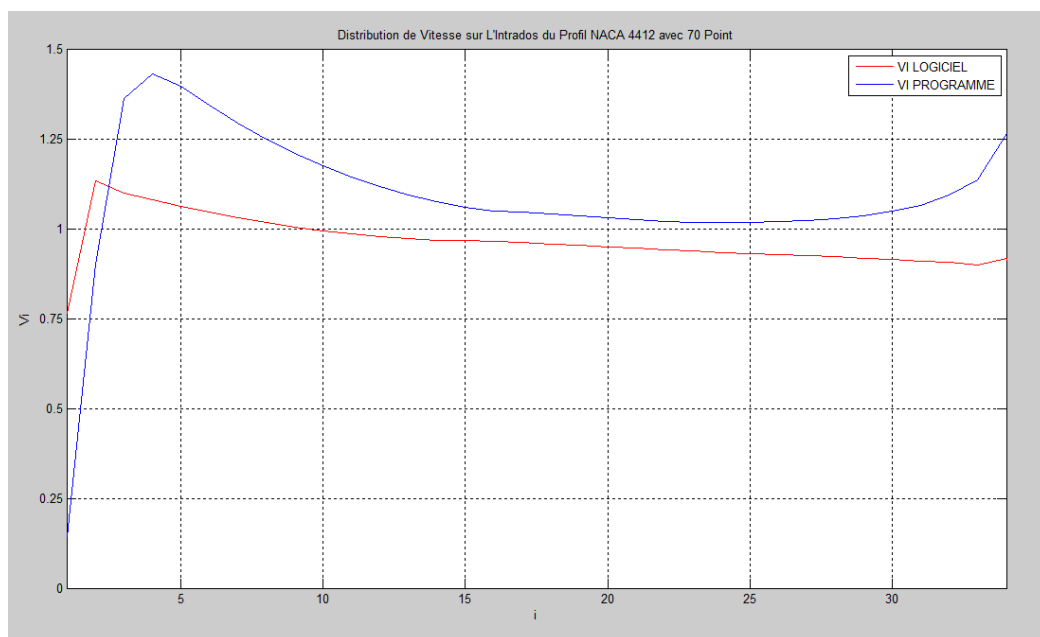


Fig.VI.4. distribution de vitesse sur l'intrados du profil NACA4412 avec 70

- Ces courbes montrent que la distribution de vitesse obtenue par notre programme est très proche de celle obtenue par le logiciel [DESIGN AIRFOIL] avec le même nombre de point, et pour les différents obstacles utilisés.
- Le petit écart est dû au nombre réduit des points, cette justification sera confirmée ci-après.

2) La distribution de pression :

Le logiciel utilisé pour évaluer la distribution de pression [NV FOIL] possède une plus grande capacité en maillage que celui utilisé pour la distribution de vitesse [DESIGN AIRFOIL], le nombre de point est augmenté jusqu'à 300 point.

- $V_{\infty} = 1\text{m/s}$.
- Angle d'incidence = 0° .

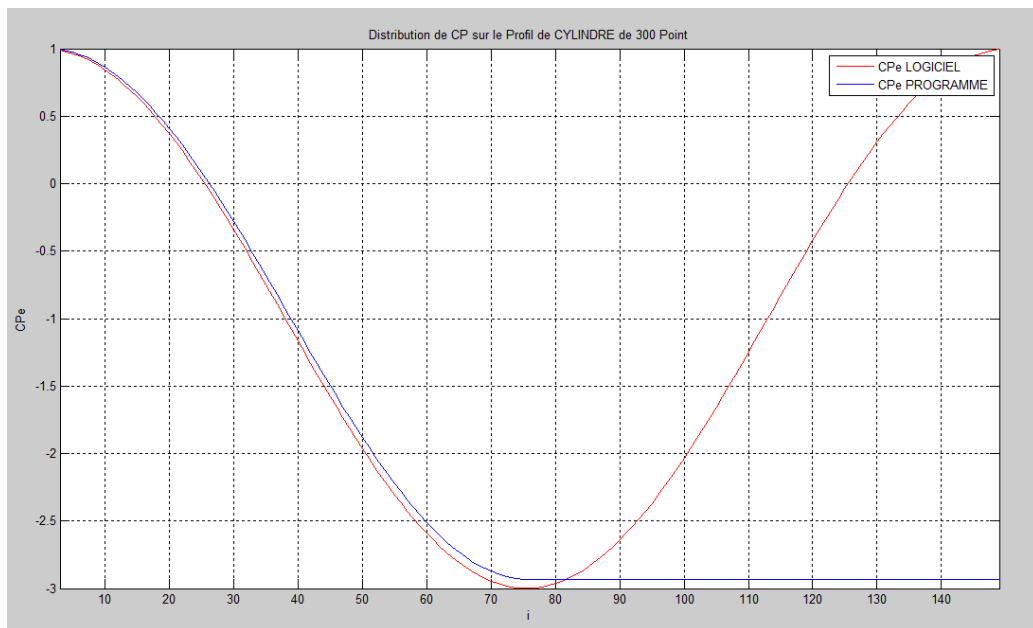


Fig.VI.5. distribution de CP sur le profil de cylindre de 300 points

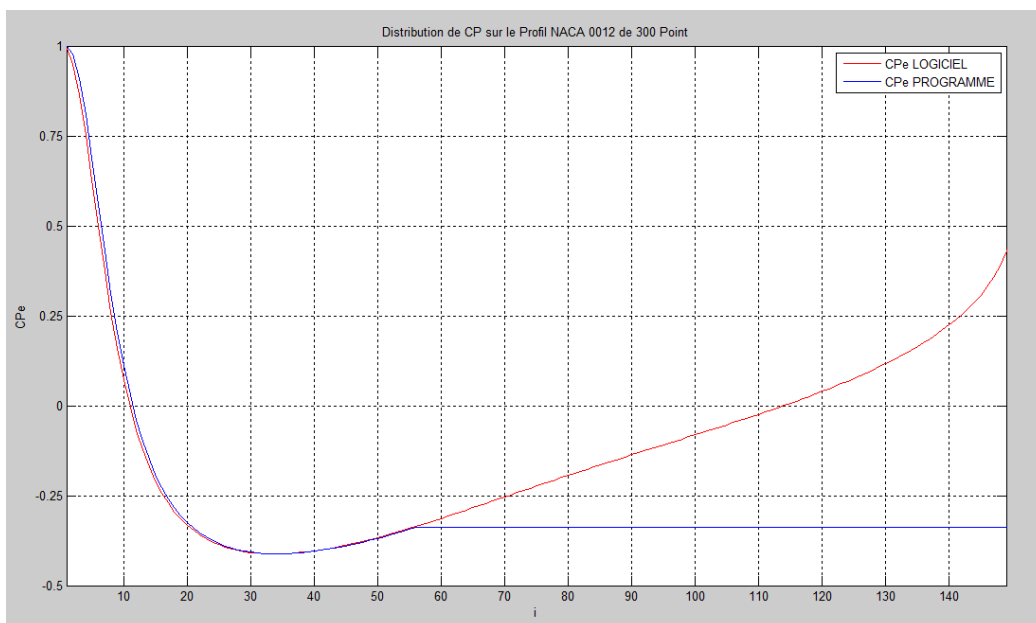


Fig.VI.6. distribution de CP sur le profil NACA0012 avec 300 points

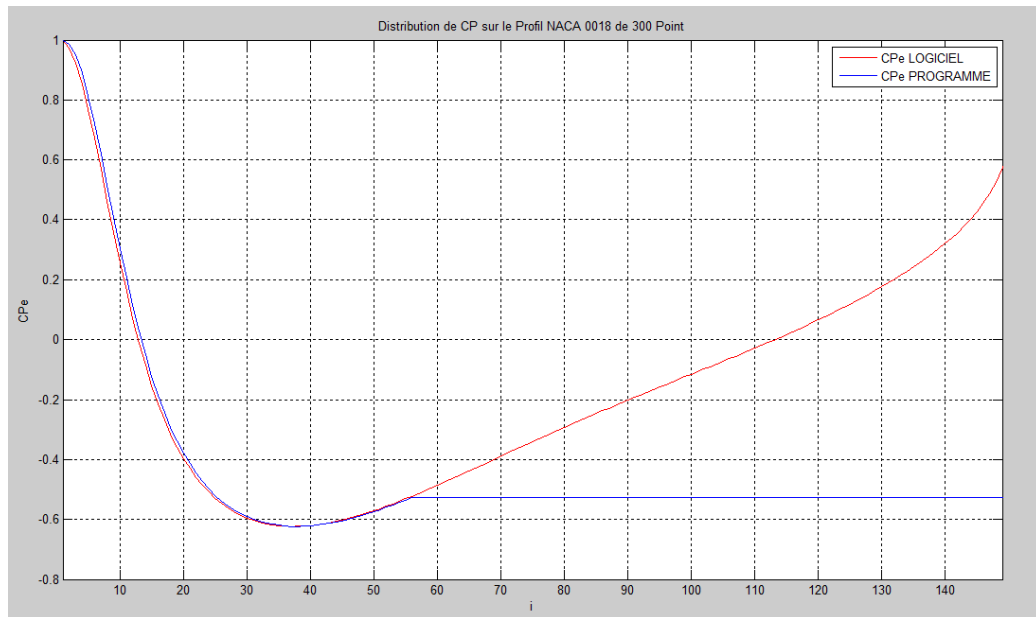


Fig.VI.7. distribution de CP sur le profil NACA0018 avec 300 points

Ces trois graphes montrent que les courbes de distribution de C_p obtenues par notre programme et celle obtenue par le logiciel [NV FOIL] sont en bon accord de puis le point de stagnation jusqu'au point de décollement, après celui-là il n'y a pas un gain de pression (la pression reste constante) car le fluide n'épouse plus la paroi de l'obstacle, et c'est ce qu'on voit dans la courbe obtenu par notre programme, mais dans la courbe obtenue par le logiciel on remarque que l'augmentation de C_p continue jusqu'au bord de fuite, car ce logiciel ne prend pas en considération le phénomène de décollement de la couche limite.

3) Le coefficient de portance C_l en fonction de l'angle d'incidence :

À partir de la pression exercée sur le profil (NACA0012) à chaque nœud, on intègre sur la surface afin de calculer le coefficient de portance. Les résultats obtenus sont présentés à la figure ci-dessous. La courbe obtenue par le logiciel [NV FOIL] de même que la courbe obtenue par notre programme forment une droite. Les deux droites passent par l'origine; donc dans les deux cas on a, comme on devrait s'y attendre pour un profil symétrique, un coefficient de portance nul lorsque l'angle d'incidence est de 0° .

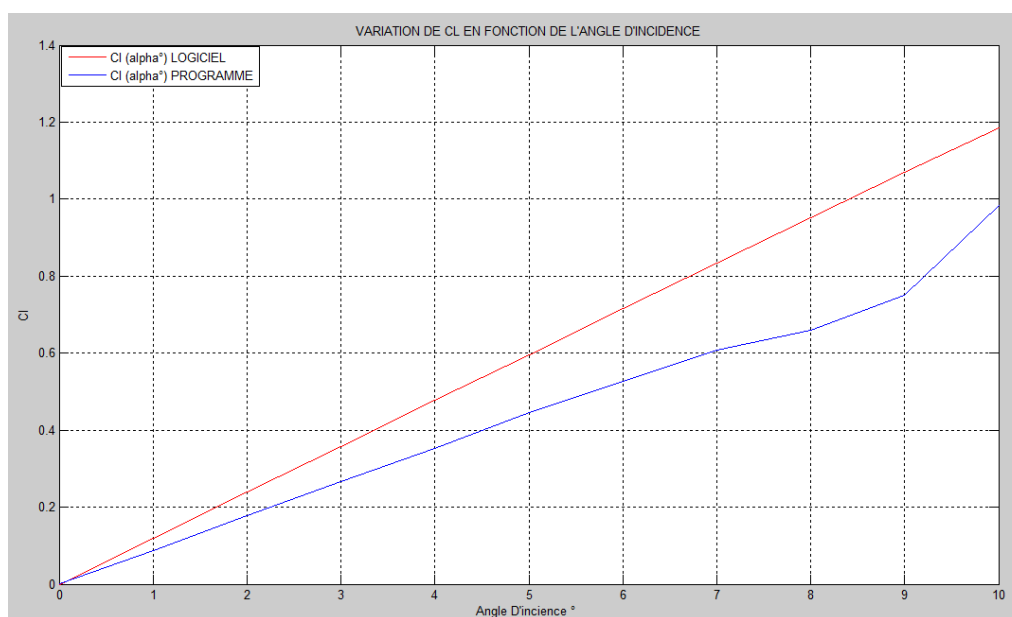


Fig.VI.8. variation de CL en fonction de l'angle d'incidence

Mais on peut remarquer un certain écart qui est due à la différence entre la distribution de Cp obtenue par notre programme et celle obtenue par logiciel [NV FOIL].

Chapitre VII

PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS

VII.1. INTRODUCTION :

Après avoir passé à toutes les étapes pour mettre en place notre programme de calcul, et après avoir validé les méthodes de calcul utilisées, on est maintenant en mesure de pouvoir l'exploiter. Dans ce chapitre nous présenterons les résultats des simulations obtenue par notre programme, et classé selon quatre critères de comparaison à savoir :

- La forme de l'obstacle.
- La vitesse de l'écoulement à l'infini amont.
- L'angle d'incidence.
- Et finalement l'angle de décollement simulé.

VII.2. Choix de distance entre l'obstacle et la frontière du domaine :

Pour définir la distance optimale entre la frontière du domaine et celle de l'obstacle nous avons effectué plusieurs essais, la première chose que nous avons constatée est la variation proportionnelle des coefficients aérodynamique globaux ainsi que la distribution de vitesse, de C_p , et de C_f en fonction de cette distance, mais à partir d'un seuil de $5x C$ (C représente ici la corde du profil) l'influence de cette distance sur les résultats obtenu devient négligeable, donc nous avons opté pour cette valeur dans la simulation.

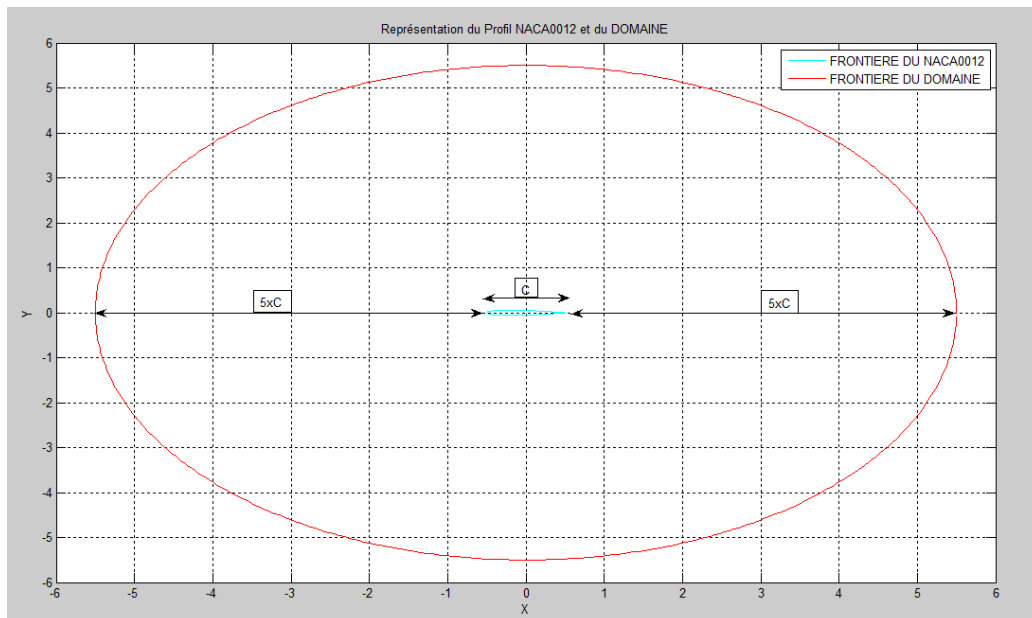


FIG.VII.1. représentation du profil NACA0012 et du domaine

VII.3. COURBE ET INTERPRETATION :

Dans ce qui suit nous considérons des profils de 500 point pour augmenter la précision de calcul, les coordonnées de ces différents profils sont obtenues par le logiciel [NV FOIL].

VII.3.1. Influence de la forme de l'obstacle :

- Obstacle : NACA0012, NACA0018, NACA4412, NACA2414, CYLINDRE.
- $V_{\infty} = 1\text{m/s}$.
- Angle d'incidence = 0° .
- Angle De Décollement : Non Simulé.

a) influence sur le point de stagnation et le point de décollement :

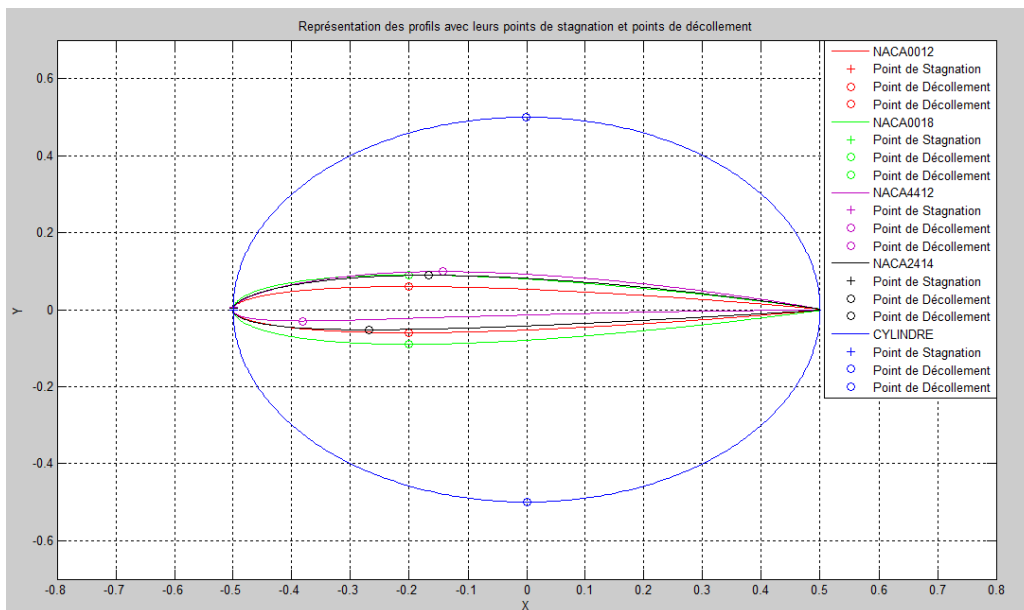


FIG.VII.2. représentation des profils avec leurs points de stagnation et point de décollement

Cette figure (V.II.2) présente la forme des différents obstacles utilisés à savoir :

- Profil d'aile symétrique : NACA0012, NACA0018.
- Profil d'aile cambré : NACA4412, NACA2414.
- Profil d'un CYLINDRE.

Ainsi que leurs points de stagnation et points de décollement.

On remarque que les points de stagnation sont confondus car ces obstacles ont des bords d'attaques confondus et un angle d'incidence égale à 0° , en revanche la position des

points de décollement varie d'un obstacle à l'autre et dépend de la position de l'épaisseur maximum.

b) influence sur la distribution de vitesse :

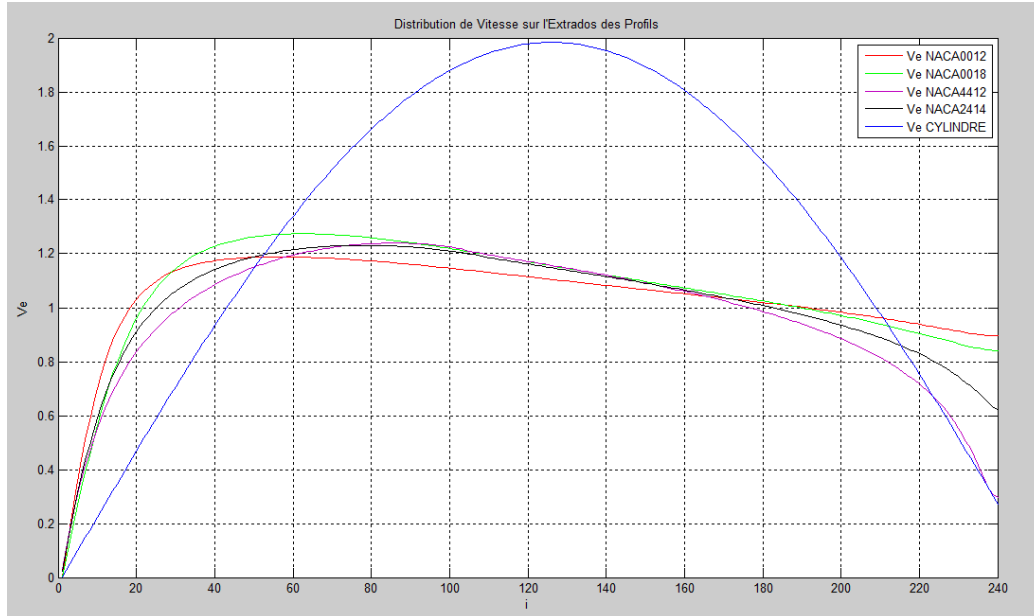


FIG.VII. 3. Distribution de vitesse sur l'extrados des profils

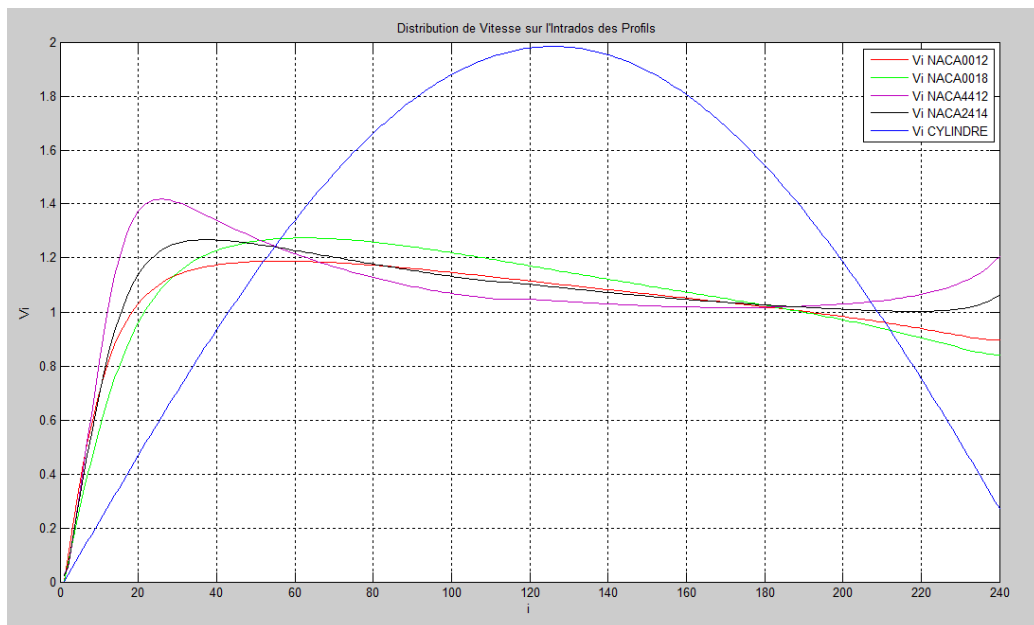


FIG.VII. 4. Distribution de vitesse sur l'intrados des profils

c) influence sur la distribution de C_p :

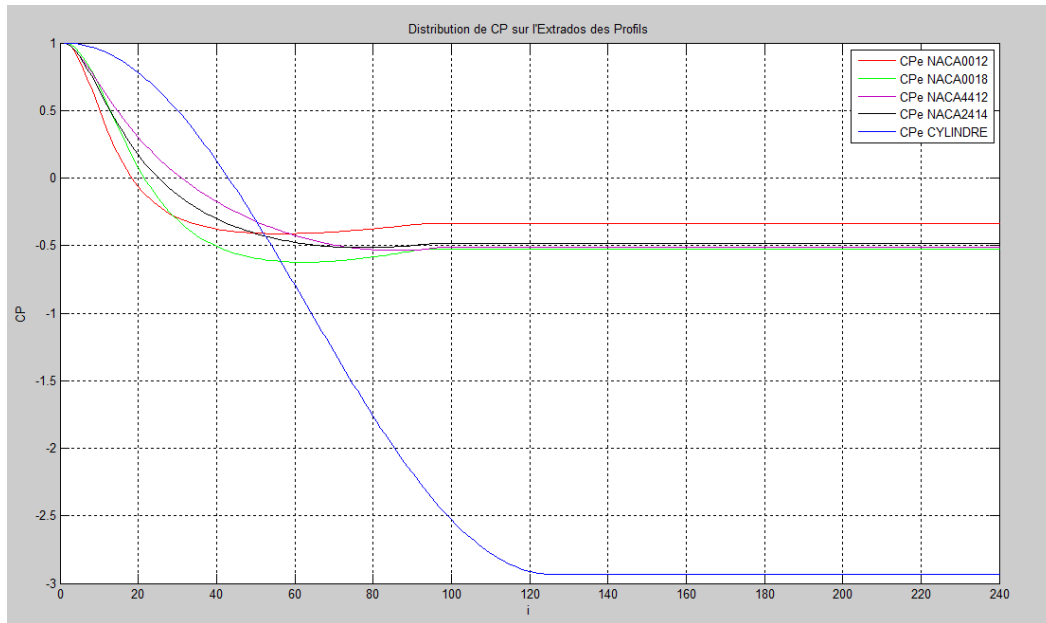


FIG. VII.5. Distribution de C_p sur l'extrados des profils

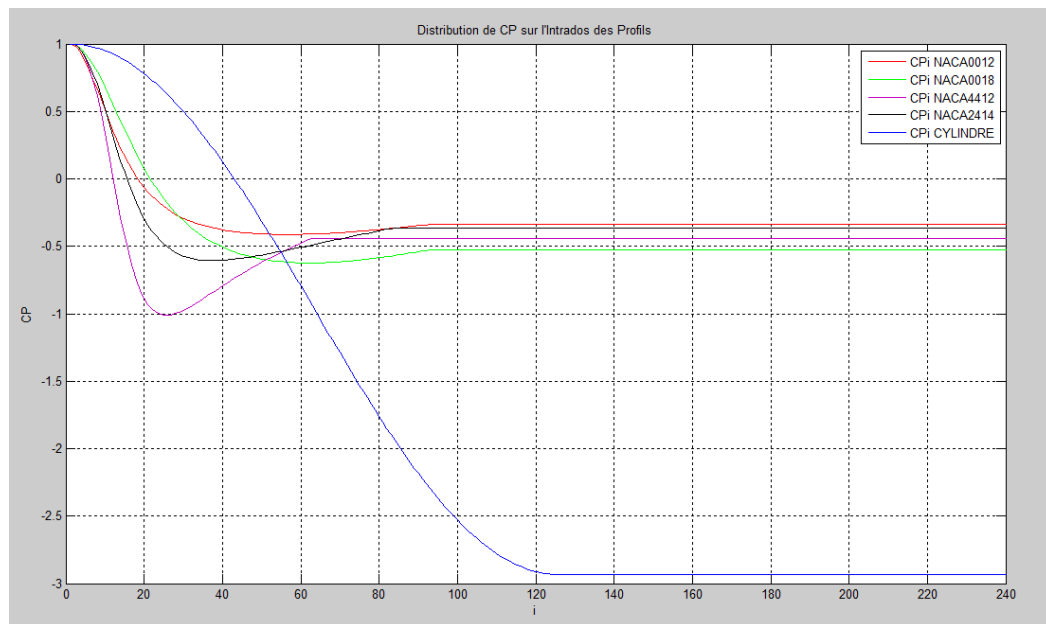


FIG. VII.6. Distribution de C_p sur l'intrados des profils

d) influence sur la distribution de C_f :

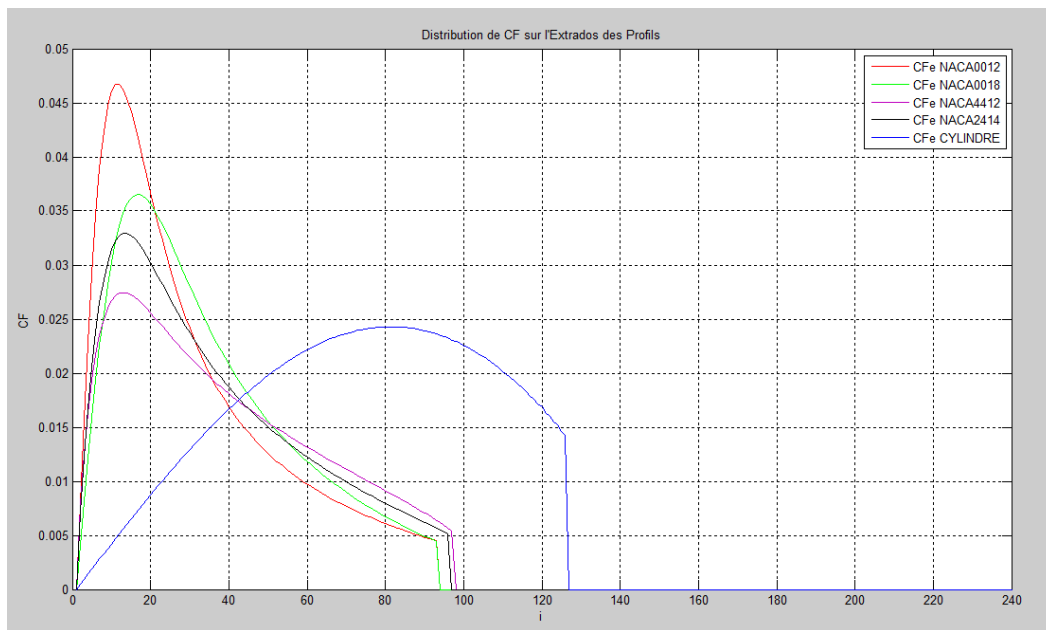


FIG.VII.7. Distribution de CF sur l'extrados des profils

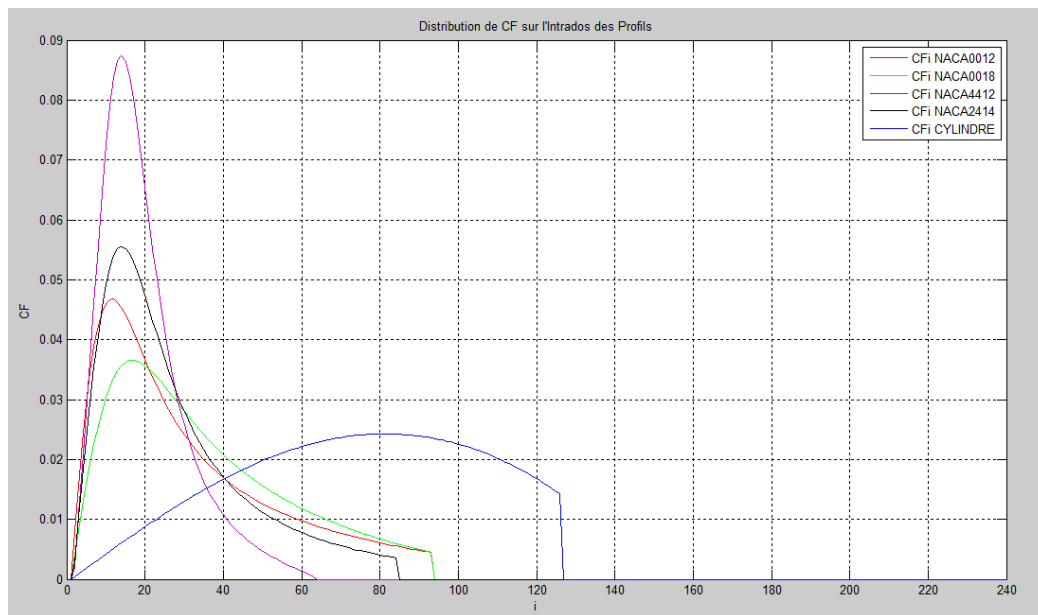


FIG.VII.8. Distribution de CF sur l'intrados des profils

D'après les figures (VII.3...VII.8) on remarque que chaque profil (obstacle) possède une distribution d'un paramètre donné (V , C_p , C_f) qui lui est propre, car cette distribution dépend directement de la forme géométrique de l'obstacle.

REMARQUE :

Pour les trois critères de comparaison qui reste nous avons pris comme obstacle un profil très utilisé dans la littérature (*ION PARASCHIVOIU [11]*, *HERMANN SCHLICHTING [10]*, *A. R. S. Bramwell, George Done&David Balmford Bramwell's Helicopter Dynamics Second edition [1]*), il s'agit du profil d'aile symétrique NACA0012.

VII.3.2. Influence de la vitesse amont :

- Obstacle : NACA0012.
- $V_{\infty} = 1, 20, 40, 60, 80\text{m/s}$.
- Angle d'incidence = 0° .
- Angle De Décollement : Non Simulé.

a) influence sur le point de stagnation et le point de décollement :

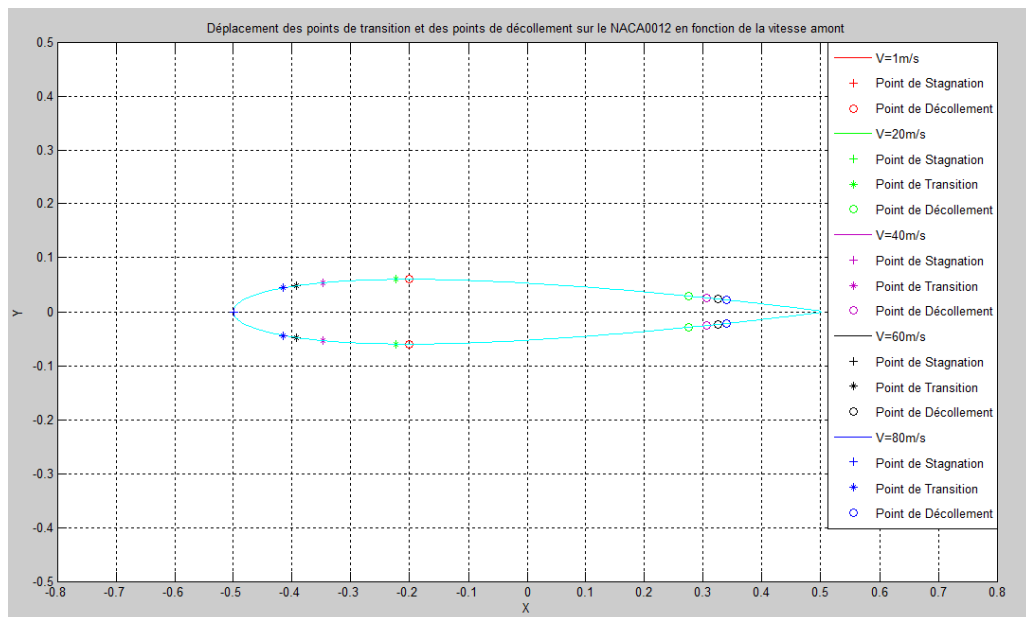


FIG.VII.9. Déplacement des points de transition et des points de décollement sur le profil NACA0012 en fonction de la vitesse amont.

Sur cette figure on remarque très bien le déplacement de point de transition et des points de décollement le long de notre profil en fonction de la vitesse amont, à la vitesse de 1m/s la couche limite est laminaire depuis le point de stagnation jusqu'au point de décollement qui est au voisinage de l'épaisseur max c'est-à-dire au début du gradient de pression inverse, mais à partir de la vitesse 20m/s la couche limite est laminaire seulement depuis le point de stagnation jusqu'au point de transition, puis elle devient turbulente, cette turbulence permet de combattre l'effet de gradient inverse et par conséquent retardé le point de décollement.

Donc d'après cette figure nous pouvons dire que la couche limite turbulente se décolle moins facilement que la couche limite laminaire, cette particularité est due au fait que la couche limite turbulente et le fluide libre échangent des quantité de mouvement d'une façon

beaucoup plus vive et importante que la couche laminaire, ainsi les particules de fluide voisines de la paroi conservent-elle plus facilement leur énergie cinétique dans la première que dans la second.

b) influence sur la distribution de vitesse :

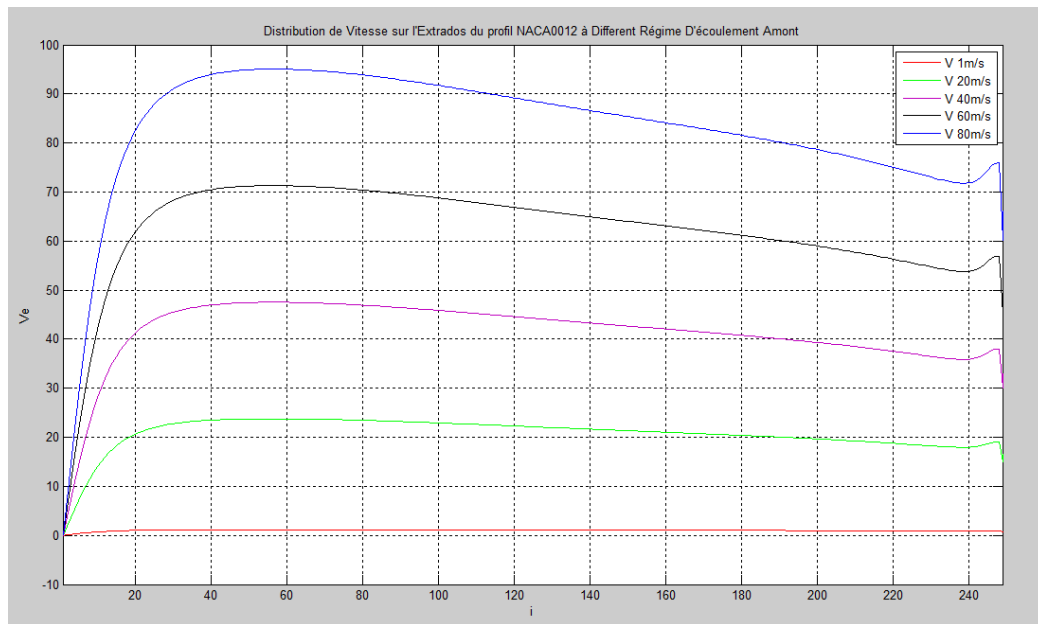


FIG.VII.10. Distribution de vitesse sur l'extrados du profil NACA0012 à différent vitesse d'écoulement amont.

Cette figure (VII.10) nous montre que la distribution de vitesse sur le profil est liée directement à la vitesse de l'écoulement amont.

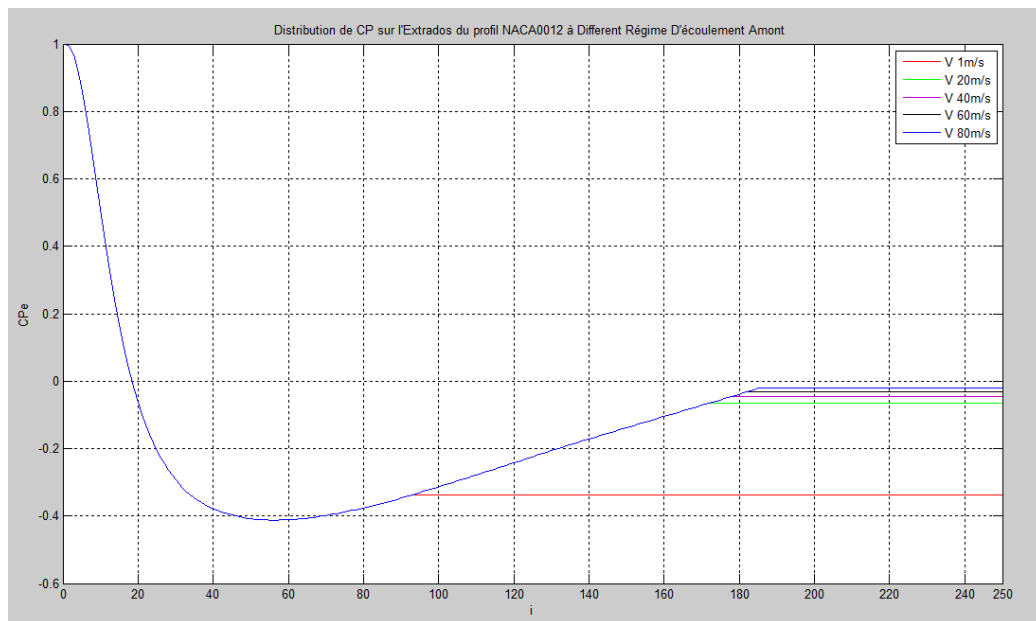
c) influence sur la distribution de C_p :

FIG.VII.11. Distribution de C_p sur l'extrados du profil NACA0012 à différent vitesse d'écoulement amont.

Dans cette figure (VII.11) on remarque que plus la vitesse d'écoulement amont augmente plus l'augmentation de C_p est importante, on peut expliquer ce phénomène par la relation de Bernoulli car puisque le décollement de la couche limite selon la figure (VII.9) est de plus en plus retardé alors le fluide suit de plus en plus le contour qui forme un divergeant derrière le point de la pression minimum.

d) influence sur la distribution de C_f :

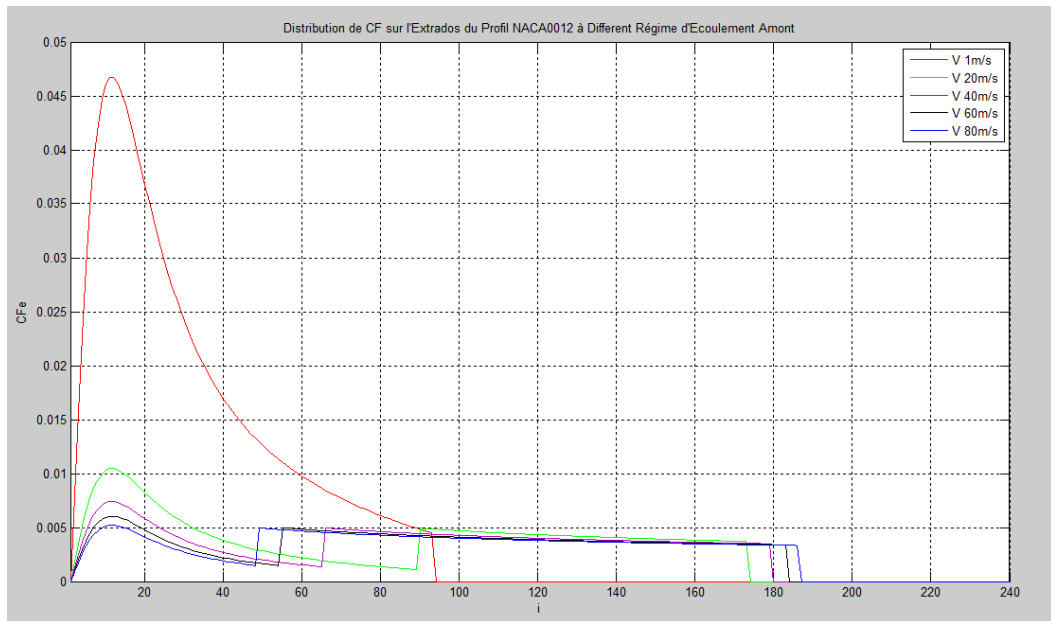


FIG.VII.12. Distribution de C_f sur l'extrados du profil NACA0012 à différent vitesse d'écoulement amont.

Cette figure (VII.12) nous montre que le coefficient de frottement local varie inversement avec la vitesse infinie amont, on remarque aussi qu'il y'a une augmentation brutal de ce coefficient à un point donner ce point correspond au point de transition laminaire-turbulent à partir de quelle l'échange de quantité de mouvement et d'énergie devient important entre l'écoulement de fluide libre et la couche limite ce qui a permet de retarder le décollement de la couche limite turbulente, et finalement on peut observer l'annulation de ce coefficient au point de décollement, car derrière le point de décollement il n'y pas un contacte entre le fluide et la paroi.

VII.3.3. Influence de l'angle d'incidence :

- Obstacle : NACA0012.
- $V_{\infty} = 1\text{m/s}$.
- Angle d'incidence = $0^{\circ}, 3^{\circ}, 6^{\circ}, 9^{\circ}, 12^{\circ}$.
- Angle De Décollement : Non Simulé.

a) influence sur le point de stagnation et le point de décollement :

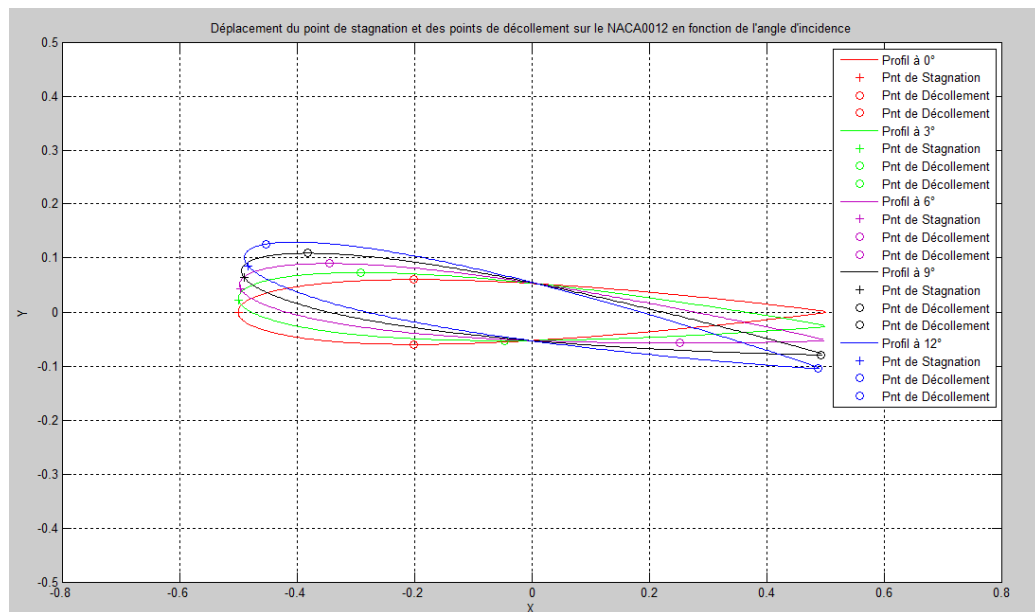


FIG.VII.13. Déplacement du point de stagnation et des points de décollement sur le NACA0012 en fonction de l'angle d'incidence.

En observons cette figure (VII.13) nous pouvons immédiatement voir l'impact de l'angle d'incidence sur la position des points de décollement, sur l'extrados ce décollement s'en trouve prématuré si il y'a un accroissement de l'angle d'incidence, par contre sur l'intrados ce point s'en trouve repoussé. Un autre aspect positif pour confirmé nos résultats peut être retiré de cette figure, il s'agit précisément de l'angle de décrochage aérodynamique; car à un angle d'incidence de 12° on remarque que le point de décollement se trouve au voisinage du bord d'attaque, cette angle en réalité caractérise le décrochage aérodynamique du profil utilisé (ION PARASCHIVOIU page 226) [11].

b) Influence sur la distribution de vitesse :

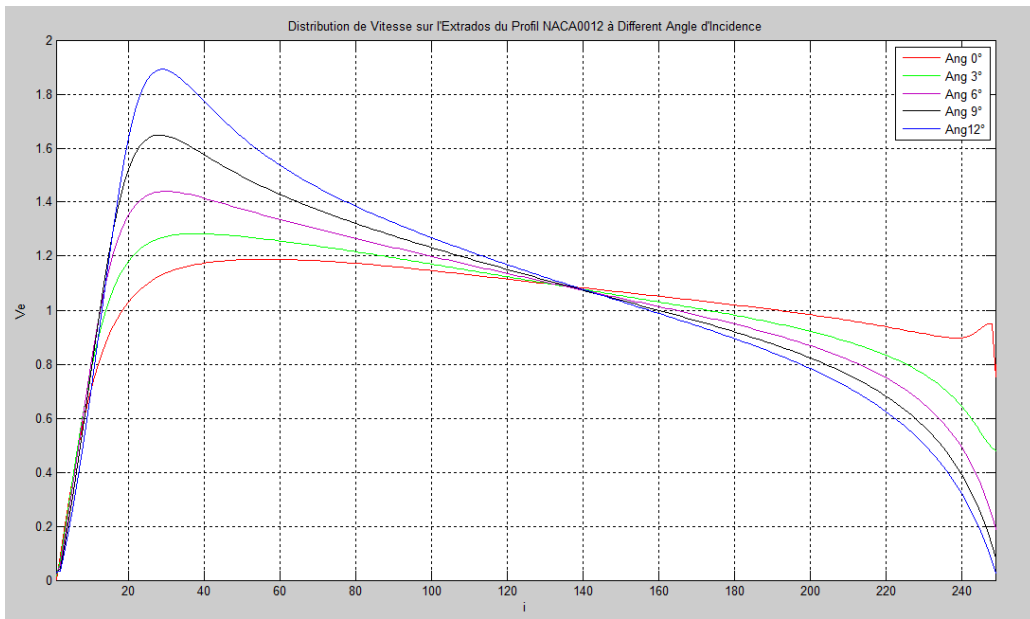


FIG.VII.14. Distribution de vitesse sur l'extrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.

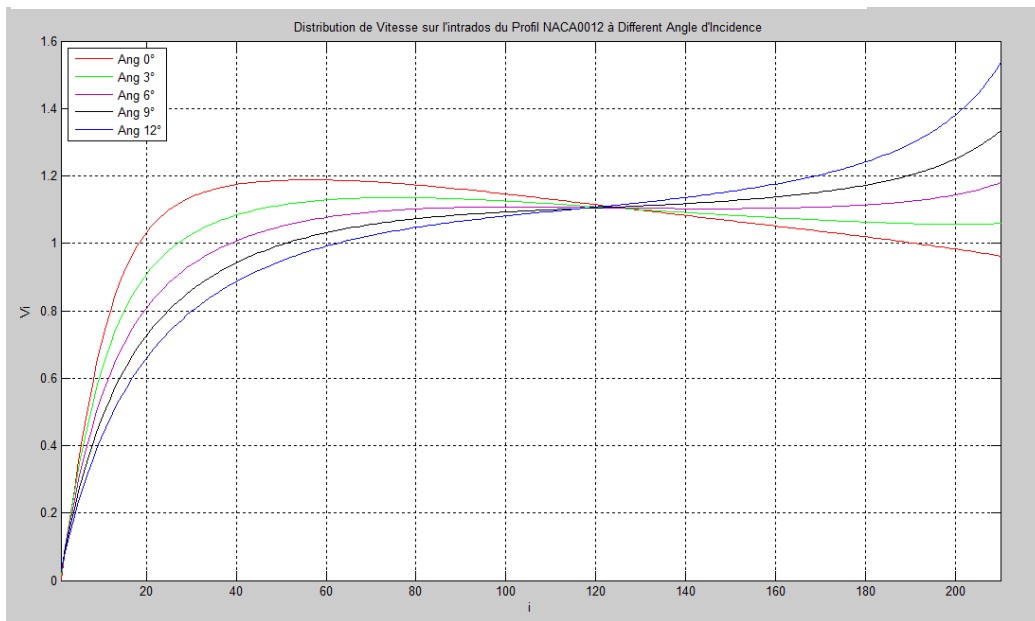


FIG.VII.15. Distribution de vitesse sur l'intrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.

Ces deux figure [VII.14 ,et VII.15], présente respectivement la distribution de vitesse sur l'extrados et sur l'intrados, à différents angle d'incidence allant de 0° à 12°, sur l'extrados on peut remarquer une région de forte accélération près du bord d'attaque cette accélération croit proportionnellement avec l'angle d'incidence, puis il y'a une décélération jusqu'au bord

de fuite, d'autre part sur l'intrados on remarque qu'au voisinage du bord d'attaque l'accélération est inversement proportionnel avec l'angle d'incidence, en revanche au voisinage de bord de fuite l'accélération est proportionnel à l'angle d'incidence, ce phénomène est en accord avec l'équation de continuité.

c) Influence sur la distribution de C_p :

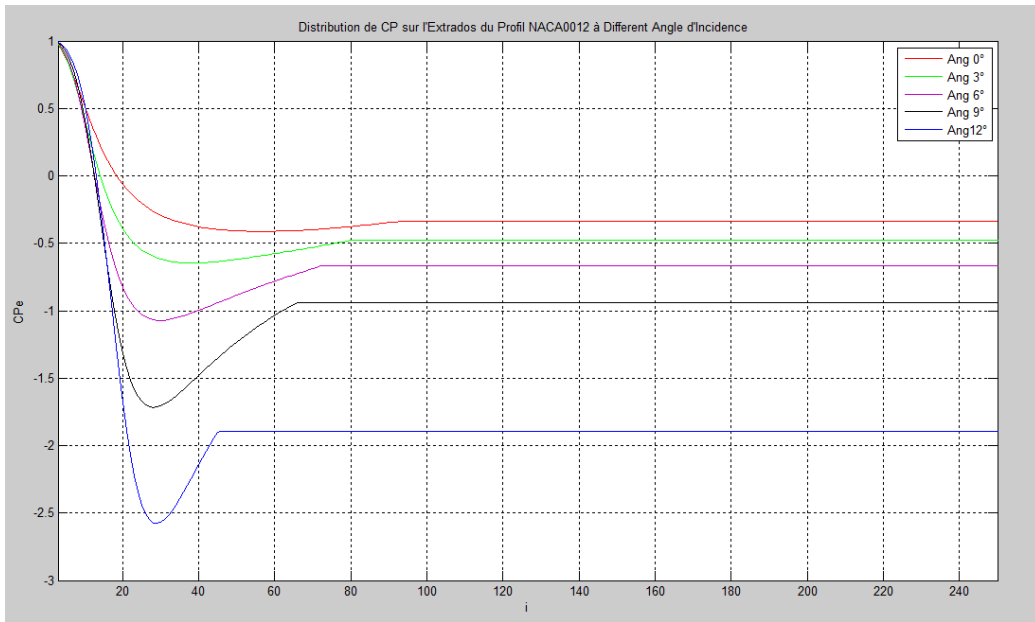


FIG.VII.16. Distribution de CP sur l'extrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.

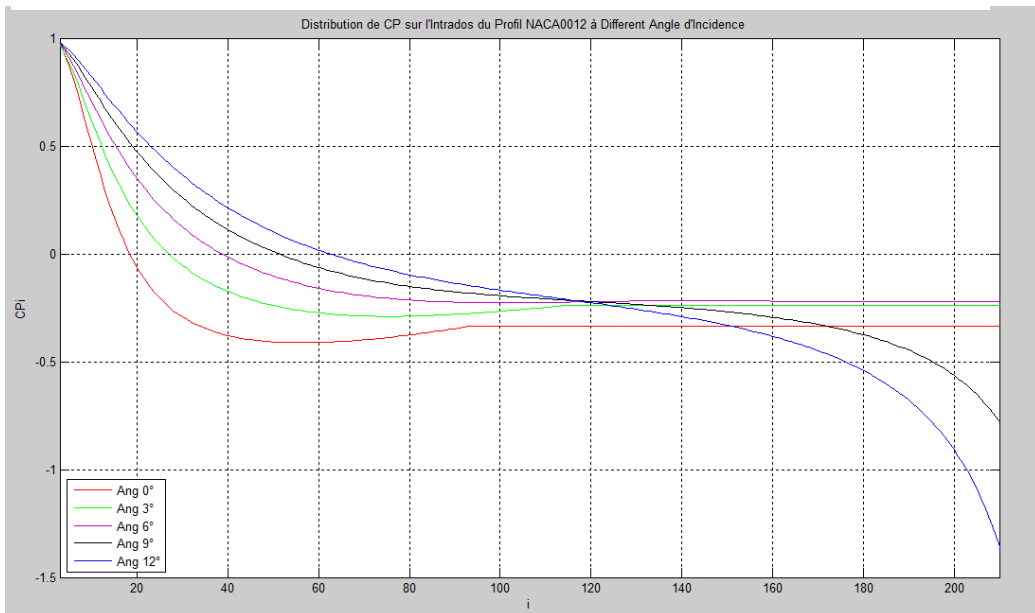


FIG.VII.17. Distribution de CP sur l'intrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.

Sur ces deux figure [VII.16, et VII.17], on remarque une région de forte dépression au voisinage du bord d'attaque représentant la région où le fluide subit une accélération, ce phénomène est en accord avec l'équation de Bernoulli, mais on peut apercevoir le décollement de la couche limite, sur l'extrados ce décollement est autant prématuré que l'angle d'incidence est important, d'autre part sur l'intrados on constate qu'à partir de 9° il n'y a pas un décollement, ce qui à permet la dépression jusqu'au bord de fuite.

d) Influence sur la distribution de C_f :

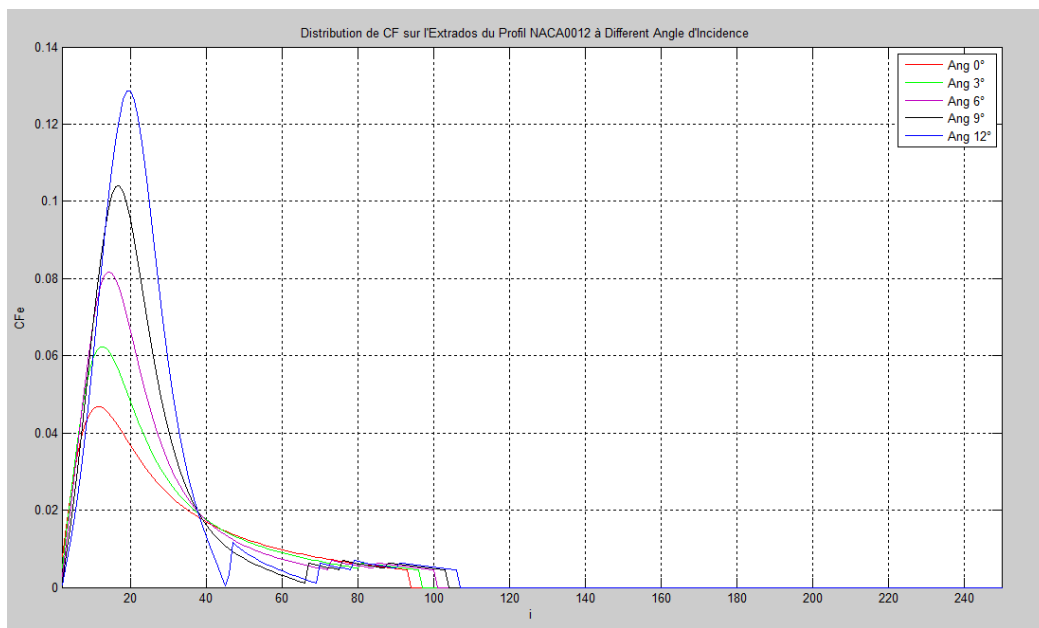


FIG.VII.18. Distribution de C_f sur l'extrados NACA0012 à différent angle d'incidence.

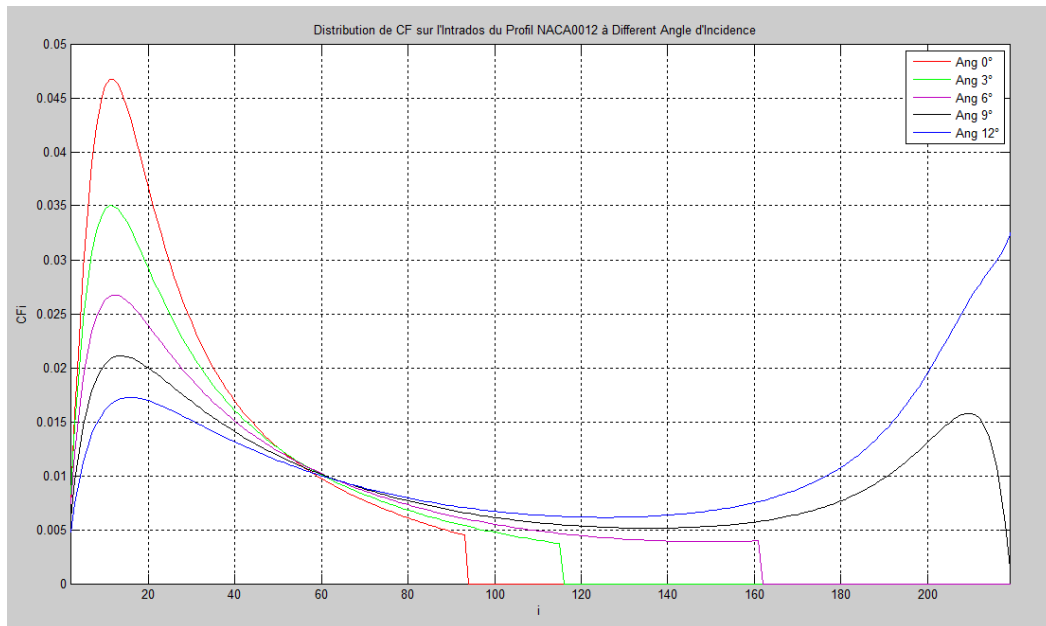


FIG.VII.19. Distribution de CF sur l'intrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.

D'après ces deux figure [VII.18 , et VII.19], on peut en déduire que le frottement pariétal est d'autant plus important que la vitesse est importante au voisinage de la couche limite (fluide libre), mais ce coefficient s'annule à partir du point de décollement car à partir de ce point le fluide n'épouse plus la paroi, cette dernière peut être confirmé par la non annulation de ce coefficient sur l'intrados à partir d'un angle de 9° ou il n'y a pas une séparation de la couche limite.

VII.4. Influence de l'angle de décollement simulé :

- Obstacle : NACA0012.
- $V_{\infty} = 1\text{m/s}$.
- Angle d' incidence = 0° .
- Angle De Décollement : 10%, 20%, 30%, 40%, 50%.

a) influence sur le point de décollement :

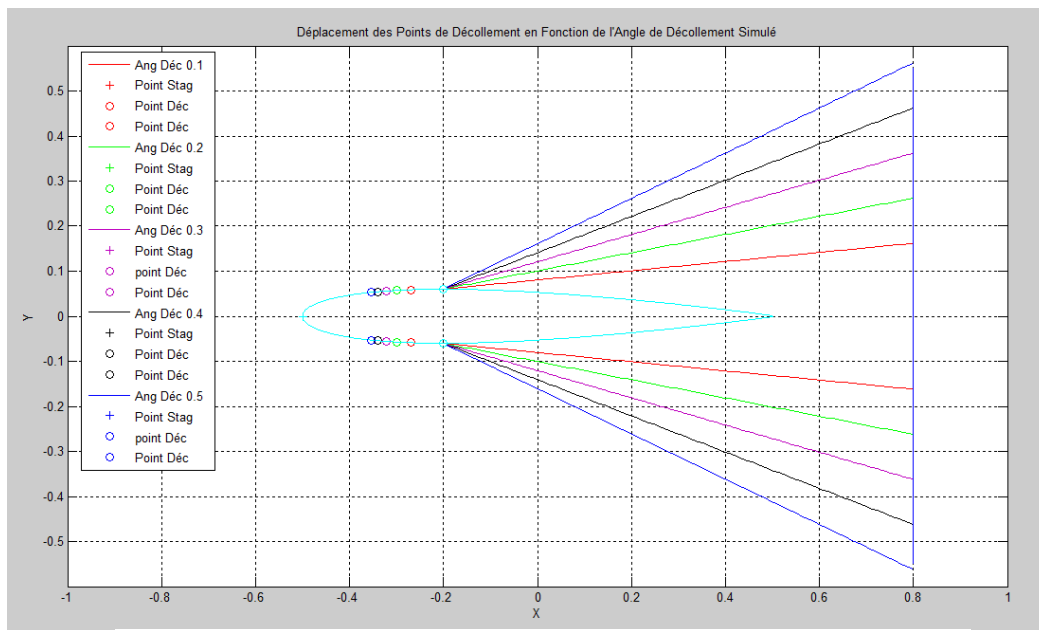


FIG.VII.20. Déplacement des points de décollement en fonction de l'angle de décollement simulé sur le profil NACA0012.

Cette figure nous montre l'influence de l'angle de séparation de la couche limite sur la position du point de décollement, nous pouvons facilement constater que plus l'angle de décollement est important, plus ce point se déplace vers l'avant.

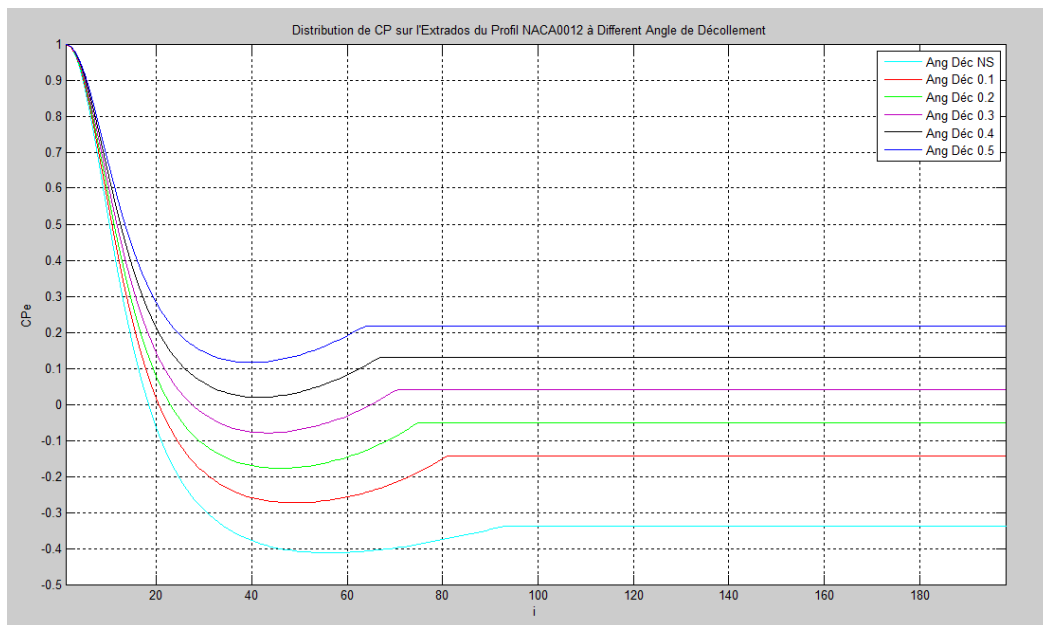
b) Influence sur la distribution de pression :

FIG.VII.21. Distribution de CP sur l'extrados du profil NACA0012 à différent angle de décollement.

Après avoir analysé cette figure nous avons conclu que la courbe de distribution de CP se déplace vers le haut si on inclut dans la simulation le décollement lui-même, cette conclusion est très importante de point de vue pratique car pour obtenir des résultats qui concorde avec l'expérimentation il faut avoir une bonne approche de cette angle de décollement.

Enfin nous pouvons confirmer la nécessité de prendre en considération le phénomène de décollement de la couche limite dans une simulation d'écoulement autour d'un obstacle.

CONCLUSION

CONCLUSION :

L'utilisation de la méthode des éléments finis de frontière , nous a permis de construire un code informatique souple et rapide pour le calcul des coefficients aérodynamiques locaux et globaux.

En fait, en n'utilisant que des éléments à la frontière, il est alors possible de relocaliser facilement les coordonnées de ces éléments sans avoir à remailler tout le domaine. C'est pourquoi, cette méthode offre une flexibilité accrue par rapport aux autres méthodes déjà existantes.

Les résultats de simulation obtenus pour les quatre géométries suivantes: NACA0012, NACA0018, NACA4412, et le cylindre démontrent que le code peut traiter les problèmes d'écoulement d'une manière efficace. Ainsi, on a pu obtenir les mêmes courbes caractéristiques entre les deux logiciels disponibles et notre programme de calcul, peu importe l'obstacle simulé.

Ces résultats prouvent ainsi la validité de l'approche par tranche; c'est-à-dire la méthode qui consiste à résoudre l'écoulement à l'extérieur de la couche limite indépendamment de l'écoulement à l'intérieur de cette borne.

Bien que le développement mathématique soit des plus satisfaisants pour la localisation des points de séparation de la couche limite, nous devons cependant améliorer le modèle par une petite modification supplémentaire, il s'agit d'inclure les équations de quantité de mouvement appliquées au sillage pour l'évaluation des angles de divergence que fait la couche limite après la séparation de la surface.

Il est à noter cependant que cette modification reste mineure et n'affecte en rien la validité des équations développées pour résoudre l'écoulement autour d'un obstacle ou celles localisant les points de séparation de la couche limite.

En fait, ces modifications visent plutôt à élargir la capacité de simulation du modèle en effectuant des manipulations de la géométrie pour tenir compte des singularités particulières.

L'utilisation d'un logiciel de visualisation nous a beaucoup facilité la représentation et la compréhension des résultats obtenus.

CONCLUSION

En fin, vue la rareté des données expérimentales pour les formes utilisées, il est recommandé d'effectuer des essais en utilisant d'autres logiciels plus performants telle que le FLUENT ou le CFX, et cela pour fin de comparaison. Cette étape serait un atout pour l'ajustement du modèle.

Bibliographie

1. A. R. S. Bramwell, George Done & David Balmford. **Bramwell's Helicopter Dynamics**. Butterworth-Heinemann, 2001. Second edition. 373 pages.
2. ABBOTT, I.H. et Von Doenhoff A.E. **Theory of wing sections: including a summary of airfoil data**. New York, Dover publications Inc., c1959, 693 p.
3. ANDRE FORTIN. **Analyse numérique pour ingénieurs**. L'Ecole Polytechnique de Montréal. 448 pages.
4. BRADSHAW, P, CEBECI, T. et WHITEHEAD. 3.H. **Engineering calculation methods for turbulent flow**. New-York. Academic press Inc. c1981. 331p.
5. C.A. BREBBIA & J. DOMINGUEZ. **Boundary Elements An Introductory Course**. WIT PRESS Boston, Southampton Computational Mechanics Publications. Second Edition. 314 pages.
6. DAVID V. HUTTON. **Fundamentals of Finite Element Analysis**. The McGraw-Hill Companies, 2004. 494 pages.
7. DUNCAN, W.J., Thorn et A.S., YOUNG. A.D. **An elementary treatise on the mechanics of fluids**. Northern Ireland, The University Press c 1960, 714 p.
8. EDWARD LEWIS HOUGHTON, PETER WILLIAM CARPENTER. **Aerodynamics for engineering students**. Butterworth-Heinemann, 2003. Fifth edition. 590 pages.
9. Franck Jedrzejewski. **Introduction aux méthodes** numériques. Springer-Verlag France, Paris 2005. deuxième édition
10. HERMANN SCHLICHTING (Traduit par Joseph Kestin) . **Boundary-Layer Theory**. McGraw-Hill Companies. Seventh Edition. 535 pages.
11. ION PARASCHIVOIU . **Aérodynamique subsonique**. Presses Internationales Polytechnique École Polytechnique. 529 pages.

Bibliographie

12. J. BLAZEK. **Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications**. Elsevier Ltd. First edition 2001. 440 pages.
13. PETER HUNTER. **FEM/BEM Notes**. Department of Engineering Science The University of Auckland New Zealand (February 21, 2001). 141 pages.
14. PIJUSH K. KUNDU, IRA M. COHEN, P. S. (CON) AYYASWAMY, H. H. (CON) HU. **Fluid mechanics**. Academic Press. Second Édition. 872 pages.
15. RAYMOND. COMOLET. **Mecanique expérimentale des fluides**. MASSON. 3eme édition.
16. SERGEY EDWARD LYSHEVSKI. **Engineering and Scientific Computations Using MATLAB**. Wiley-IEEE. 227 p.
17. STRICKLAND, 3.H., OLER O.M., IM B.J. et SMITH T.G. **A preliminary dynamic stall model using a vortex panel method** . TEXAS tech. university, Lubbock. from USA. AIAA 2nd terrestrial energy systems conference. Colorado Spring, Colorado USA. Dec. 1-3, 1981 .
18. TUNCER CEBECI, JEAN COUSTEIX .**Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows**. HORIZONS PUBLISHING Long Beach, California Heidelberg, Germany Second Edition. 502 pages.
19. WILLIAM H. PRESS, SAUL A. TEUKOLSKY, WILLIAM T. VETTERLING, BRIAN P. FLANNERY. **Numerical recipes in FORTRAN 77**. Cambridge University Press, 1992. Second Édition. 933 pages.
20. Ewald HUNSINGER, Michaël OFFERLIN. **L'AERODYNAMIQUE ET L'ORIGINE DES TRAINÉES PARASITES**. inter.action
21. **Computational, Visualisation, Programing in MATLAB**

LISTE DES SYMBOLES

\vec{n} : Vecteur normal.

(x, y) : les axes hors couche limite.

(l, n) : les axes dans la couche limite.

R_l : Nombre de Reynolds.

R_{δ_2} : Nombre de Reynolds de l'épaisseur de quantité de mouvement.

$R_{\delta_{2tr}}$ = Nombre de Reynolds de l'épaisseur de quantité de mouvement au point de transition.

U_l : la vitesse dans le fluide libre (au voisinage de la couche limite).

δ : Épaisseur de la couche limite.

δ_1 : Épaisseur de déplacement (ou de refoulement).

δ_2 : Épaisseur de quantité de mouvement.

δ_{2tr} = épaisseur de quantité de mouvement évalué au point de transition.

H : facteur de forme.

L_1 : paramètre (de THWAITES) associé à la friction en surface.

m_1 : paramètre (de THWAITES) pour le gradient de pression.

l_m : la position du point où la pression est minimale.

l^* : la position d'un bord d'attaque imaginaire.

u : Composante de la vitesse sur la direction de l .

v : Composante de la vitesse sur la direction de n .

ν : Viscosité cinématique de l'air.

μ : Viscosité dynamique de l'air

ρ : Masse volumique de l'air.

∞ : Propriété de l'écoulement libre.

C : la Corde du profil.

CP : Coefficient de pression.

CF : Coefficient de frottement.

CL : Coefficient de portance.

CM : Coefficient de moment.

CDP : Coefficient de traînée de pression.

CDF : Coefficient de traînée de frottement.

$CDTOT$: Coefficient de traînée totale

LISTE DES SYMBOLES

A : Domain d'intégration.

\oint : Intégrale de contour fermé.

ϕ_i : Fonction de pondération.

δ : Fonction de Dirac.

d : Frontière du domaine.

l : Frontière de l'obstacle.

l_j : Élément de frontière (obstacle ou domaine).

i : indice du nœud considéré.

j : indice de l'élément considéré.

r_i : La distance mesuré depuis le nœud i jusqu'au point sous considération.

N : nombre d'éléments sur la frontière de l'obstacle.

NP : nombre d'éléments sur la frontière du domaine.

NT : le nombre total d'éléments.

$N1$: Fonction d'interpolation.

$N2$: Fonction d'interpolation.

q : Flux (vitesse tangentielle).

ψ : Fonction de courant.

ε : Rayon de disque.

α : Angle de coin.

(x_i, y_i) : Coordonnée du nœud i .

$(x(\xi), y(\xi))$: Coordonnée du point d'intégration.

ξ : la coordonnées local

$\langle G_{ij} \rangle$: Vecteur des fonctions d'interpolation de l'intégral
pour chaque élément j par rapport au noeud i

$\langle H_{ij} \rangle$: Vecteur des fonctions d'interpolation de l'intégral
pour chaque élément j par rapport au noeud i

$\{q_j\}$: vecteur de flux de courant au noeuds de l'élément j .

$\{\psi_j\}$: vecteur de la fonction de courant au noeuds de l'élément j .

Ang Déc : l'angle de décollement.

Ang : angle d'incidence.

LISTE DES SYMBOLES

C_{Pe} : coefficient de pression sur l'extrados.

C_{Pi} : coefficient de pression sur l'intrados.

V_e : vitesse sur l'extrados.

V_i : vitesse sur l'intrados.

C_{Fe} : coefficient de frottement sur l'extrados.

C_{Fi} : coefficient de frottement sur l'intrados.

$C_{p_{Bf_i}}$: Coefficient de pression Bord de fuite.

LISTE DES FIGEURES

- Fig .II.1 :Domaine d'integration avec conditions limite	7
- Fig .II.2 :Représentation des conditions limites pour un domaine circulaire (on évite ici les singularités de coins)	7
- Fig .II.3 :Représentation de la couche limite.....	7
- Fig .III.1 :Direction de numérisation pour une surface interne et externe.....	14
- Fig .III.2 :Domaine utiliser pour évaluer les coefficients de la solution fondamentale.....	16
- Fig .III.3 :Illustration de l'élargissement du domaine lorsque le point est singulier à la frontière.....	19
- Fig .III.4 :Point sur la frontière faisant un angle de coin.....	20
- Fig .III.5 :Présentation a double frontière.	21
- Fig .III.6 Discrétisation de la frontière en 'n' éléments.	22
- Fig .III.7 Les différents types d'éléments.	23
- Fig .III.8 Élément liniéare. définition basic.	24
- Fig .III.9 Illustartion de la baisse de la ri comme nœud i approches élément lj.....	26
- Fig .III.10 Schéma d'une maille en coin.	33
- Fig .III.11 Utilisation d'une géometrie différente pour délimiter le domaine afin d'éviter les singularités de coin.	34
- Fig.V.1 : Organigramme général du sous-programme de résolution d'un écoulement potentiel. Sous-programme RESOL.FOR.....	49
- Fig V.2 : Organigramme logique de la séquence d'assemblage des éléments et de la formation du système $[A] [X] = [F]$	54
- Fig.V.3 : Organigramme logique pour la localisation des points de séparation en régime laminaire.	55
- Fig.V.4 : Organigramme détaillé du cheminement mathématique effectué pour la résolution de la couche limite laminaire et turbulente.....	56
- Fig.V.5 : Schéma présentatif du déroulement de programme.....	57
- Fig.VI.1. distribution de vitesse sur le profil NACA0012 avec 70 points.....	59
- Fig.VI.2. distribution de vitesse sur le profil de cylindre avec 70 points.....	59
- Fig.VI.3. distribution de vitesse sur l'extrados du profil NACA4412 avec 70 points.....	60
- Fig.VI.4. distribution de vitesse sur l'intrados du profil NACA4412 avec 70 points.....	60
- Fig.VI.5. distribution de CP sur le profil de cylindre de 300 points.....	61

LISTE DES FIGEURES

- Fig.VI.6. distribution de CP sur le profil NACA0012 avec 300 points.....	61
- Fig.VI.7. distribution de CP sur le profil NACA0018 avec 300 points.....	62
- Fig.VI.8. variation de CL en fonction de l'angle d'incidence.....	63
- FIG.VII.1. représentation de profil NACA0012 et du domaine.....	64
- FIG.VII.2. représentation des profils avec leurs points de stagnation et de décollement.....	65
- FIG.VII. 3. Distribution de vitesse sur l'extrados des profils.....	66
- FIG.VII. 4. Distribution de vitesse sur l'intrados des profils.....	66
- FIG.VII.5. Distribution de CP sur l'extrados des profils.....	67
- FIG.VII.6. Distribution de CP sur l'intrados des profils.....	67
- FIG.VII.7. Distribution de CF sur l'extrados des profils.....	68
- FIG.VII.8. Distribution de CF sur l'intrados des profils.....	68
- FIG.VII.9. Déplacement des points de transition et des points de décollement sur le NACA0012 en fonction de vitesse amont.	70
- FIG.VII.10. Distribution de vitesse sur l'extrados du profil NACA0012 à différent régime d'écoulement amont.....	71
- FIG.VII.11. Distribution de CP sur l'extrados du profil NACA0012 à différent régime d'écoulement amont.	72
- FIG.VII.12. Distribution de CF sur l'extrados du profil NACA0012 à différent régime d'écoulement amont.	73
- FIG.VII.13. Déplacement du point de stagnation et des points de décollement sur le NACA0012 en fonction de l'angle d'incidence.	74
- FIG.VII.14. Distribution de vitesse sur l'extrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.	75
- FIG.VII.15. Distribution de vitesse sur l'intrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.....	75
- FIG.VII.16. Distribution de CP sur l'extrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.	76
- FIG.VII.17. Distribution de CP sur l'intrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.	76
- FIG.VII.18. Distribution de CF sur l'extrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.	77
- FIG.VII.19. Distribution de CF sur l'intrados du profil NACA0012 à différent angle d'incidence.	78

LISTE DES FIGEURES

- FIG.VII.20. Déplacement des points de décollement en fonction de l'angle de décollement simulé sur le profil NACA001279
- FIG.VII.21. Distribution de CP sur l'extrados du profil NACA0012 à différent angle de décollement.80

1. La fonction Dirac Delta :

La **distribution de Dirac**, aussi appelée par abus de langage fonction δ de Dirac, qui prend une valeur infinie en '0', et la valeur '0' partout ailleurs, et dont l'intégrale sur \mathbb{R} est égale à 1. La représentation graphique de la fonction ' δ ' peut être assimilée à l'axe des abscisses en entier et le demi-axe des ordonnées positives.

La fonction δ de Dirac est très utile comme approximation de fonctions dont la représentation graphique a la forme d'une grande pointe étroite. C'est le même type d'abstraction qui représente une charge ponctuelle, ou une masse ponctuelle.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases} \quad (III.1)$$

et telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (III.2)$$

-Si on considère maintenant l'intégral suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx \quad (III.3)$$

Où f est une fonction continue quelconque. Cette intégrale peut être évaluée par l'argument suivant : puisque $\delta(x)$ est nulle pour $x \neq 0$, les bornes d'intégration peuvent être remplacées par $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, où ε est un nombre positif infiniment petit qui tend vers 0.

De plus, puisque f est continue en $x=0$, ses valeurs dans l'intervalle $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ tend vers $f(0)$, alors on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) f(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (III.4)$$

Si on considère maintenant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx \quad (III.5)$$

On pose $x-a=\zeta$, et on écrit $f(\zeta+a)=g(\zeta)$ alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\zeta)g(\zeta)d\zeta = g(0) = f(a) \quad (III.6)$$

On peut encor écrire:

$$\delta(x-a, y-b) = \delta(x-a)\delta(y-b)$$

Donc si nous voulons résumer, nous avons:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \quad (3)$$

$$\delta(x-a, y-b) = \delta(x-a)\delta(y-b) \quad (4)$$

1- Intégration numérique :

Il existe plusieurs méthodes d'intégration numérique dans la littérature, mais certaines sont désignées pour des problèmes spécifiques, la quadrature de Gauss est générale, simple, efficace et très précise.

Nous allons donc présenter la formule d'intégration de Gauss pour les fonctions non singulières, elle est souvent utilisée dans la méthode des éléments finis de frontière, et dans la méthode des éléments finis standard.

1.1. Formule de quadrature de Gauss d'une dimension

Dans le cas d'une seule dimension, l'intégrale peut être écrite sous la forme :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \omega_i f(\xi_i) + E_n \quad (1.1)$$

Cette expression est appelée quadrature de Gauss à n points. Les ξ_i sont appelés points d'intégration, tandis que les coefficients ω_i sont les poids d'intégration.

n : le nombre de points d'intégration.

ξ_i : la coordonnée de $i^{\text{ème}}$ point d'intégration.

ω_i : le $i^{\text{ème}}$ poids d'intégration.

$$E_n = \frac{2^{2N+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n!)]^3} \frac{d^{2n}f(\xi)}{d\xi^{2n}}; \quad (-1 < \xi < 1)$$

La formule (1.1) est basée sur la représentation de $f(\xi)$ par un polynôme $P_n(\xi)$.

La valeur de ξ_i est la coordonnée du point i quand P_n est nul, et pour laquelle le poids d'intégration est donné suivant la formule :

$$\omega_i = 2/(1 - \xi_i^2) \left[\frac{dP_n(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i}^{-2}$$

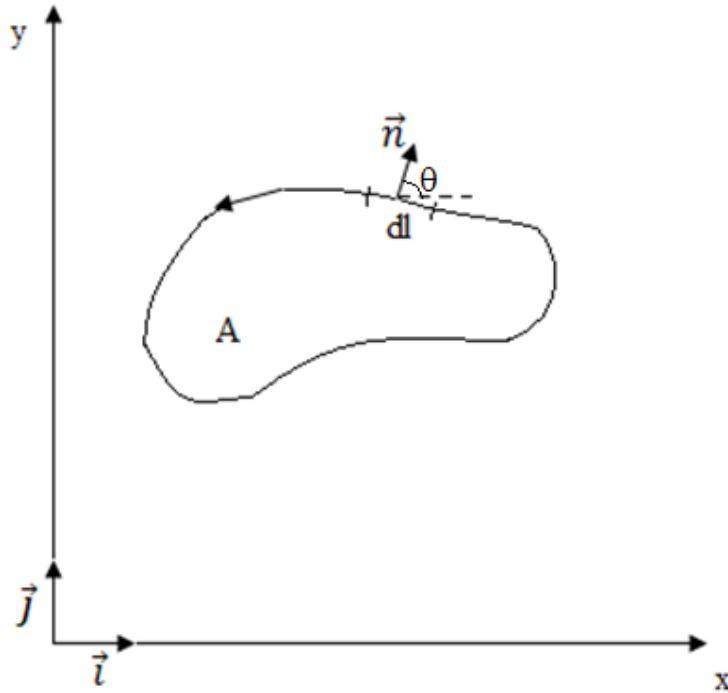
1.2. Le tableau des quadratures :

Le tableau suivant résume les principales quadratures de Gauss, on note que la valeur de ξ_i est symétrique par rapport à $\xi = 0$.

ANNEXE 2

$\pm \zeta_i$	w_i	$\pm \zeta_i$	w_i
			<i>n</i> = 8
	<i>n</i> = 2	0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887
	<i>n</i> = 3	0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88888	0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55555		<i>n</i> = 9
	<i>n</i> = 4	0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546	0.32425 34234 03809	0.31234 70770 40003
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454	0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935
	<i>n</i> = 5	0.83603 11073 26636	0.18064 81606 94857
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889	0.96816 02395 07626	0.08127 43883 61574
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366		<i>n</i> = 10
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189	0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753
	<i>n</i> = 6	0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996
0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691	0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139	0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50581
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170	0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688
	<i>n</i> = 7	<i>n</i> = 12	
0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469	0.12523 34085 11469	0.24914 70458 13403
0.40584 51513 77397	0.38183 00505 05119	0.36783 14989 98180	0.23349 25365 38355
0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277	0.58731 79542 86617	0.20316 74267 23066
0.94910 79123 42759	0.12948 49661 68870	0.76990 26741 94305	0.16007 83285 43346
		0.90411 72563 70475	0.10693 93259 95318
		0.98156 06342 46719	0.04717 53363 86512

. L'évaluation d'une dérivée par rapport à la normal n :



$A = \text{Surface}$

$\vec{n} = \text{Vecteur normal au contour}$

$l = \text{Coordonnée du contour}$

$$a = \vec{n} \cdot \vec{i} = \cos\theta$$

$$b = \vec{n} \cdot \vec{j} = \sin\theta$$

$$dx = -b dl$$

$$dy = a dl$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

ANNEXE 5

Profil cylindre

X	Y				
1	0	.7408906	-.4381458	.2233314	-.4164787
.9998903	-.0104709	.7316622	-.4430944	.2146702	-.4105934
.9995614	-2.093721E-02	.7223322	-.4478486	.2061342	-.404528
.9990134	-3.139434E-02	.7129048	-.4524064	.1977271	-.3982852
.9982466	-4.183769E-02	.7033839	-.4567658	.1894525	-.3918677
.9972611	-.0522627	.6937738	-.4609248	.1813142	-.3852783
.9960576	-6.266478E-02	.6840788	-.4648817	.1733156	-.3785199
.9946365	-7.303938E-02	.6743029	-.4686347	.1654604	-.3715955
.9929984	-8.338194E-02	.6644506	-.4721822	.1577518	-.3645082
.9911441	-9.368792E-02	.6545263	-.4755225	.1501934	-.3572609
.9890745	-.1039528	.6445341	-.4786542	.1427884	-.3498569
.9867902	-.1141721	.6344786	-.4815761	.1355401	-.3422995
.9842925	-.1243413	.624364	-.4842867	.1284516	-.334592
.9815823	-.134456	.6141949	-.4867849	.1215261	-.3267377
.978661	-.1445118	.6039758	-.4890696	.1147666	-.3187401
.9755297	-.1545041	.593711	-.4911397	.1081761	-.3106027
.9721898	-.1644287	.5834051	-.4929945	.1017574	-.302329
.9686428	-.1742811	.5730627	-.494633	9.551342E-02	-.2939228
.9648903	-.1840571	.5626882	-.4960546	8.944683E-02	-.2853876
.9609339	-.1937524	.5522861	-.4972586	8.356031E-02	-.2767273
.9567752	-.2033627	.5418612	-.4982446	7.785645E-02	-.2679456
.9524163	-.2128838	.5314179	-.4990119	7.233775E-02	-.2590463
.9478589	-.2223115	.5209609	-.4995604	6.700663E-02	-.2500335
.943105	-.2316418	.5104946	-.4998899	6.186541E-02	-.2409109
.9381569	-.2408704	.5000237	-.5	5.691637E-02	-.2316827
.9330165	-.2499934	.4895528	-.4998908	5.216167E-02	-.2223529
.9276863	-.2590067	.4790865	-.4995624	.0476034	-.2129256
.9221684	-.2679064	.4686294	-.4990149	4.324355E-02	-.2034049
.9164654	-.2766886	.458186	-.4982485	3.908404E-02	-.1937949
.9105797	-.2853495	.447761	-.4972636	3.512669E-02	-.1841
.9045139	-.2938852	.4373589	-.4960606	3.137324E-02	-.1743243
.8982707	-.3022292	.4269843	-.49464	2.782534E-02	-.1644721
.8918528	-.3105662	.4166416	-.4930024	2.448453E-02	-.1545479
.8852631	-.3187042	.4063356	-.4911486	2.135229E-02	-.1445558
.8785043	-.3267024	.3960706	-.4890794	1.842999E-02	-.1345003
.8715796	-.3345573	.3858512	-.4867957	1.571892E-02	-.1243858
.8644919	-.3422655	.3756819	-.4842985	1.322025E-02	-.1142168
.8572443	-.3498236	.3655671	-.4815888	1.093509E-02	-.1039977
.84984	-.3572282	.3555112	-.4786679	8.864439E-03	-9.373292E-02
.8422822	-.3644761	.3455188	-.4755371	7.009205E-03	-8.342707E-02
.8345744	-.3715642	.3355941	-.4721977	5.370201E-03	-7.308462E-02
.8267198	-.3784893	.3257415	-.4686512	3.948147E-03	-6.271012E-02
.8187219	-.3852484	.3159654	-.4648992	2.743667E-03	-5.230812E-02
.8105842	-.3918386	.3062699	-.4609432	1.757288E-03	-4.188316E-02
.8023103	-.3982568	.2966594	-.4567851	9.894428E-04	-3.143984E-02
.7939038	-.4045004	.2871381	-.4524266	4.404691E-04	-2.098273E-02
.7853683	-.4105666	.2777102	-.4478697	1.106073E-04	-1.051642E-02
.7767077	-.4164527	.2683797	-.4431163	2.069726E-09	-4.549424E-05
.7679258	-.4221561	.2591508	-.4381685	1.087019E-04	1.042545E-02
.7590263	-.4276744	.2500275	-.4330286	4.36659E-04	2.089182E-02
.7500133	-.433005	.2410139	-.4276987	9.837297E-04	3.134904E-02
		.2321139	-.4221813	1.749674E-03	4.179249E-02

ANNEXE 5

Profil cylindre

2.734156E-03	5.221763E-02	.3158791	.464865	.8266471	.378552
3.936744E-03	6.261985E-02	.3256545	.4686189	.834503	.3716285
5.35691E-03	7.299461E-02	.3355064	.4721672	.8422121	.364542
6.994031E-03	8.333736E-02	.3454305	.4755084	.8497712	.3572955
8.84739E-03	9.364355E-02	.3554223	.4786411	.8571768	.3498924
1.091617E-02	.1039087	.3654775	.4815638	.8644258	.3423358
1.319947E-02	.1141282	.3755917	.4842753	.871515	.3346291
1.569629E-02	.1242977	.3857605	.4867744	.8784412	.3267756
1.840553E-02	.1344127	.3959794	.48906	.8852014	.3187787
.021326	.1444687	.406244	.4911312	.8917927	.3106421
2.445642E-02	.1544613	.4165496	.4929869	.8982121	.3023691
2.779542E-02	.1643862	.4268919	.4946263	.9044569	.2939636
3.134153E-02	.174239	.4372662	.4960489	.9105242	.2854292
.0350932	.1840154	.447668	.4972538	.9164116	.2767695
3.904878E-02	.1937111	.4580928	.4982407	.9221163	.2679885
4.320654E-02	.2033218	.468536	.499009	.9276358	.2590899
4.756466E-02	.2128433	.4789929	.4995585	.9329678	.2500777
5.212121E-02	.2222714	.4894591	.4998889	.9381099	.2409558
5.687422E-02	.2316021	.4999299	.5	.9430599	.2317282
6.182158E-02	.2408312	.5104008	.4998918	.9478154	.222399
6.696113E-02	.2499547	.520867	.4995644	.9523746	.2129723
7.229061E-02	.2589685	.5313241	.4990178	.9567354	.2034521
.0778077	.2678687	.5417675	.4982524	.9608959	.1938427
8.350996E-02	.2766515	.5521926	.4972685	.9648542	.1841483
.0893949	.2853129	.5625947	.4960664	.9686086	.1743731
9.545994E-02	.2938492	.5729694	.4946468	.9721575	.1645214
.1017024	.3022566	.5833122	.4930102	.9754993	.1545976
.1081196	.3105314	.5936183	.4911574	.9786326	.1446059
.1147086	.31867	.6038834	.4890892	.9815559	.1345509
.1214667	.3266688	.614103	.4868065	.984268	.1244368
.1283907	.3345244	.6242725	.4843102	.9867677	.1142682
.1354778	.3422332	.6343875	.4816015	.9890539	.1040494
.1427247	.3497919	.6444435	.4786816	.9911256	9.378499E-02
.1501284	.3571972	.6544362	.4755517	.9929819	8.347945E-02
.1576855	.3644459	.6643612	.4722133	.994622	7.313729E-02
.1653927	.3715346	.6742141	.4686677	.9960452	6.276307E-02
.1732468	.3784605	.6839905	.4649166	.9972507	.0523613
.181244	.3852202	.6936863	.4609616	.9982382	4.193658E-02
.189381	.391811	.7032971	.4568044	.9990072	3.149346E-02
.1976543	.39823	.7128187	.4524469	.9995573	2.103652E-02
.2060602	.4044742	.7222471	.4478909	.9998882	1.057037E-02
.214595	.4105411	.7315779	.4431385	1	9.957155E-05
.223255	.4164279	.7408072	.4381917		
.2320364	.4221321	.7499308	.4330527		
.2409353	.4276511	.7589448	.4277237		
.2499478	.4329826	.7678453	.4222072		
.25907	.4381241	.7766282	.4165055		
.2682979	.4430735	.7852899	.4106211		
.2776274	.4478286	.7938264	.4045566		
.2870544	.4523872	.802234	.3983147		
.2965748	.4567474	.8105091	.3918981		
.3061845	.4609073	.818648	.3853095		

ANNEXE 5

Profil NACA0012

X	Y	.7316622	-3.348953E-02	.2061342	-5.771556E-02
1	-.00126	.7223322	-3.443189E-02	.1977271	-5.724234E-02
.9998903	-1.275387E-03	.7129048	-3.537203E-02	.1894525	-.0567245
.9995614	-1.321519E-03	.7033839	-3.630906E-02	.1813142	-5.616213E-02
.9990134	-1.398342E-03	.6937738	-3.724208E-02	.1733156	-5.555537E-02
.9982466	-1.50576E-03	.6840788	-3.817019E-02	.1654604	-5.490445E-02
.9972611	-1.643643E-03	.6743029	-3.909247E-02	.1577518	-5.420964E-02
.9960576	-1.811816E-03	.6644506	-4.000798E-02	.1501934	-5.347126E-02
.9946365	-2.010066E-03	.6545263	-4.091579E-02	.1427884	-5.268971E-02
.9929984	-2.238153E-03	.6445341	-4.181496E-02	.1355401	-.0518654
.9911441	-2.495797E-03	.6344786	-4.270451E-02	.1284516	-5.099884E-02
.9890745	-2.782669E-03	.624364	-4.358349E-02	.1215261	-5.009058E-02
.9867902	-3.09844E-03	.6141949	-4.445089E-02	.1147666	-4.914118E-02
.9842925	-3.442717E-03	.6039758	-4.530575E-02	.1081761	-.0481513
.9815823	-3.815087E-03	.593711	-4.614704E-02	.1017574	-.0471216
.978661	-4.215098E-03	.5834051	-4.697377E-02	9.551342E-02	-4.605281E-02
.9755297	-4.642286E-03	.5730627	-.0477849	8.944683E-02	-4.494567E-02
.9721898	-5.096142E-03	.5626882	-4.857941E-02	8.356031E-02	-4.380098E-02
.9686428	-5.576133E-03	.5522861	-4.935625E-02	7.785645E-02	-4.261955E-02
.9648903	-6.081712E-03	.5418612	-5.011438E-02	7.233775E-02	-4.140222E-02
.9609339	-6.612296E-03	.5314179	-5.085276E-02	6.700663E-02	-4.014988E-02
.9567752	-7.167286E-03	.5209609	-5.157032E-02	6.186541E-02	-3.886339E-02
.9524163	-7.746056E-03	.5104946	-.052266	5.691637E-02	-3.754367E-02
.9478589	-8.34797E-03	.5000237	-5.293875E-02	5.216167E-02	-3.619162E-02
.943105	-8.972357E-03	.4895528	-5.358751E-02	.0476034	-3.480817E-02
.9381569	-9.618538E-03	.4790865	-5.421121E-02	4.324355E-02	-3.339423E-02
.9330165	-1.028583E-02	.4686294	-5.480881E-02	3.908404E-02	-3.195075E-02
.9276863	-1.097352E-02	.458186	-5.537925E-02	3.512669E-02	-3.047863E-02
.9221684	-1.168088E-02	.447761	-5.592148E-02	3.137324E-02	-2.897878E-02
.9164654	-1.240718E-02	.4373589	-5.643449E-02	2.782534E-02	-2.745211E-02
.9105797	-1.315169E-02	.4269843	-5.691725E-02	2.448453E-02	-.0258995
.9045139	-1.391365E-02	.4166416	-5.736877E-02	2.135229E-02	-2.432181E-02
.8982707	-1.469228E-02	.4063356	-5.778804E-02	1.842999E-02	-2.271987E-02
.8918528	-1.548683E-02	.3960706	-.0581741	1.571892E-02	-.0210945
.8852631	-1.629651E-02	.3858512	-5.852601E-02	1.322025E-02	-1.944649E-02
.8785043	-1.712055E-02	.3756819	-5.884286E-02	1.093509E-02	-1.777658E-02
.8715796	-1.795816E-02	.3655671	-5.912374E-02	8.864439E-03	-1.608548E-02
.8644919	-1.880854E-02	.3555112	-.0593678	7.009205E-03	-1.437386E-02
.8572443	-.0196709	.3455188	-.0595742	5.370201E-03	-1.264235E-02
.84984	-2.054442E-02	.3355941	-5.974216E-02	3.948147E-03	-1.089154E-02
.8422822	-2.142833E-02	.3257415	-5.987091E-02	2.743667E-03	-9.121971E-03
.8345744	-2.232178E-02	.3159654	-5.995974E-02	1.757288E-03	-7.334129E-03
.8267198	-2.322399E-02	.3062699	-6.000798E-02	9.894428E-04	-5.528458E-03
.8187219	-2.413413E-02	.2966594	-6.001499E-02	4.404691E-04	-3.705347E-03
.8105842	-2.505139E-02	.2871381	-.0599802	1.106073E-04	-1.865134E-03
.8023103	-2.597493E-02	.2777102	-5.990307E-02	2.069726E-09	-8.104187E-06
.7939038	-2.690394E-02	.2683797	-5.978313E-02	1.106073E-04	1.865134E-03
.7853683	-2.783758E-02	.2591508	-5.961993E-02	4.404691E-04	3.705347E-03
.7767077	-2.877502E-02	.2500275	-5.941312E-02	9.894428E-04	5.528458E-03
.7679258	-2.971541E-02	.2410139	-5.916236E-02	1.757288E-03	7.334129E-03
.7590263	-3.065792E-02	.2321139	-5.886739E-02	2.743667E-03	9.121971E-03
.7500133	-3.160168E-02	.2233314	-5.852803E-02	3.948147E-03	1.089154E-02
.7408906	-3.254584E-02	.2146702	-5.814411E-02	5.370201E-03	1.264235E-02

ANNEXE 5

Profil NACA0012

7.009205E-03	1.437386E-02	.3555112	.0593678	.8644919	1.880854E-02
8.864439E-03	1.608548E-02	.3655671	5.912374E-02	.8715796	1.795816E-02
1.093509E-02	1.777658E-02	.3756819	5.884286E-02	.8785043	1.712055E-02
1.322025E-02	1.944649E-02	.3858512	5.852601E-02	.8852631	1.629651E-02
1.571892E-02	.0210945	.3960706	.0581741	.8918528	1.548683E-02
1.842999E-02	2.271987E-02	.4063356	5.778804E-02	.8982707	1.469228E-02
2.135229E-02	2.432181E-02	.4166416	5.736877E-02	.9045139	1.391365E-02
2.448453E-02	.0258995	.4269843	5.691725E-02	.9105797	1.315169E-02
2.782534E-02	2.745211E-02	.4373589	5.643449E-02	.9164654	1.240718E-02
3.137324E-02	2.897878E-02	.447761	5.592148E-02	.9221684	1.168088E-02
3.512669E-02	3.047863E-02	.458186	5.537925E-02	.9276863	1.097352E-02
3.908404E-02	3.195075E-02	.4686294	5.480881E-02	.9330165	1.028583E-02
4.324355E-02	3.339423E-02	.4790865	5.421121E-02	.9381569	9.618538E-03
.0476034	3.480817E-02	.4895528	5.358751E-02	.943105	8.972357E-03
5.216167E-02	3.619162E-02	.5000237	5.293875E-02	.9478589	8.34797E-03
5.691637E-02	3.754367E-02	.5104946	.052266	.9524163	7.746056E-03
6.186541E-02	3.886339E-02	.5209609	5.157032E-02	.9567752	7.167286E-03
6.700663E-02	4.014988E-02	.5314179	5.085276E-02	.9609339	6.612296E-03
7.233775E-02	4.140222E-02	.5418612	5.011438E-02	.9648903	6.081712E-03
7.785645E-02	4.261955E-02	.5522861	4.935625E-02	.9686428	5.576133E-03
8.356031E-02	4.380098E-02	.5626882	4.857941E-02	.9721898	5.096142E-03
8.944683E-02	4.494567E-02	.5730627	.0477849	.9755297	4.642286E-03
9.551342E-02	4.605281E-02	.5834051	4.697377E-02	.978661	4.215098E-03
.1017574	.0471216	.593711	4.614704E-02	.9815823	3.815087E-03
.1081761	.0481513	.6039758	4.530575E-02	.9842925	3.442717E-03
.1147666	4.914118E-02	.6141949	4.445089E-02	.9867902	3.09844E-03
.1215261	5.009058E-02	.624364	4.358349E-02	.9890745	2.782669E-03
.1284516	5.099884E-02	.6344786	4.270451E-02	.9911441	2.495797E-03
.1355401	.0518654	.6445341	4.181496E-02	.9929984	2.238153E-03
.1427884	5.268971E-02	.6545263	4.091579E-02	.9946365	2.010066E-03
.1501934	5.347126E-02	.6644506	4.000798E-02	.9960576	1.811816E-03
.1577518	5.420964E-02	.6743029	3.909247E-02	.9972611	1.643643E-03
.1654604	5.490445E-02	.6840788	3.817019E-02	.9982466	1.50576E-03
.1733156	5.555537E-02	.6937738	3.724208E-02	.9990134	1.398342E-03
.1813142	5.616213E-02	.7033839	3.630906E-02	.9995614	1.321519E-03
.1894525	.0567245	.7129048	3.537203E-02	.9998903	1.275387E-03
.1977271	5.724234E-02	.7223322	3.443189E-02	1	.00126
.2061342	5.771556E-02	.7316622	3.348953E-02		
.2146702	5.814411E-02	.7408906	3.254584E-02		
.2233314	5.852803E-02	.7500133	3.160168E-02		
.2321139	5.886739E-02	.7590263	3.065792E-02		
.2410139	5.916236E-02	.7679258	2.971541E-02		
.2500275	5.941312E-02	.7767077	2.877502E-02		
.2591508	5.961993E-02	.7853683	2.783758E-02		
.2683797	5.978313E-02	.7939038	2.690394E-02		
.2777102	5.990307E-02	.8023103	2.597493E-02		
.2871381	.0599802	.8105842	2.505139E-02		
.2966594	6.001499E-02	.8187219	2.413413E-02		
.3062699	6.000798E-02	.8267198	2.322399E-02		
.3159654	5.995974E-02	.8345744	2.232178E-02		
.3257415	5.987091E-02	.8422822	2.142833E-02		
.3355941	5.974216E-02	.84984	2.054442E-02		
.3455188	.0595742	.8572443	.0196709		

ANNEXE 5

Profil NACA0018

X	Y				
1	-.00189	.7408906	-4.881876E-02	.2233314	-8.779205E-02
.9998903	-1.913081E-03	.7316622	-5.023431E-02	.2146702	-8.721617E-02
.9995614	-1.982279E-03	.7223322	-5.164784E-02	.2061342	-8.657334E-02
.9990134	-2.097513E-03	.7129048	-5.305805E-02	.1977271	-8.586352E-02
.9982466	-2.25864E-03	.7033839	-.0544636	.1894525	-8.508676E-02
.9972611	-2.465465E-03	.6937738	-5.586313E-02	.1813142	-8.424319E-02
.9960576	-2.717724E-03	.6840788	-5.725529E-02	.1733156	-8.333307E-02
.9946365	-3.015099E-03	.6743029	-.0586387	.1654604	-8.235668E-02
.9929984	-3.35723E-03	.6644506	-6.001198E-02	.1577518	-8.131447E-02
.9911441	-3.743695E-03	.6545263	-6.137369E-02	.1501934	-.0802069
.9890745	-4.174004E-03	.6445341	-6.272244E-02	.1427884	-7.903457E-02
.9867902	-4.647661E-03	.6344786	-6.405677E-02	.1355401	-7.779811E-02
.9842925	-5.164075E-03	.624364	-6.537523E-02	.1284516	-7.649827E-02
.9815823	-5.722631E-03	.6141949	-6.667635E-02	.1215261	-7.513587E-02
.978661	-6.322647E-03	.6039758	-6.795863E-02	.1147666	-7.371178E-02
.9755297	-6.96343E-03	.593711	-6.922057E-02	.1081761	-7.222695E-02
.9721898	-7.644214E-03	.5834051	-7.046065E-02	.1017574	-7.068241E-02
.9686428	-.0083642	.5730627	-7.167736E-02	9.551342E-02	-6.907921E-02
.9648903	-9.122567E-03	.5626882	-7.286911E-02	8.944683E-02	-6.741851E-02
.9609339	-9.918445E-03	.5522861	-7.403438E-02	8.356031E-02	-6.570147E-02
.9567752	-1.075093E-02	.5418612	-7.517157E-02	7.785645E-02	-6.392933E-02
.9524163	-1.161908E-02	.5314179	-7.627914E-02	7.233775E-02	-6.210334E-02
.9478589	-1.252196E-02	.5209609	-7.735548E-02	6.700663E-02	-6.022482E-02
.943105	-1.345854E-02	.5104946	-7.839901E-02	6.186541E-02	-5.829509E-02
.9381569	-1.442781E-02	.5000237	-7.940814E-02	5.691637E-02	-.0563155
.9330165	-1.542875E-02	.4895528	-8.038127E-02	5.216167E-02	-5.428743E-02
.9276863	-1.646028E-02	.4790865	-8.131683E-02	.0476034	-5.221225E-02
.9221684	-1.752132E-02	.4686294	-8.221322E-02	4.324355E-02	-5.009135E-02
.9164654	-1.861078E-02	.458186	-8.306887E-02	3.908404E-02	-4.792612E-02
.9105797	-1.972754E-02	.447761	-8.388223E-02	3.512669E-02	-4.571794E-02
.9045139	-2.087047E-02	.4373589	-8.465175E-02	3.137324E-02	-4.346817E-02
.8982707	-2.203842E-02	.4269843	-8.537589E-02	2.782534E-02	-4.117817E-02
.8918528	-2.323025E-02	.4166416	-8.605316E-02	2.448453E-02	-3.884925E-02
.8852631	-2.444477E-02	.4063356	-8.668206E-02	2.135229E-02	-3.648271E-02
.8785043	-2.568083E-02	.3960706	-8.726116E-02	1.842999E-02	-3.407981E-02
.8715796	-2.693724E-02	.3858512	-8.778903E-02	1.571892E-02	-3.164176E-02
.8644919	-2.821281E-02	.3756819	-8.826429E-02	1.322025E-02	-2.916974E-02
.8572443	-2.950635E-02	.3655671	-8.868562E-02	1.093509E-02	-2.666487E-02
.84984	-3.081664E-02	.3555112	-.0890517	8.864439E-03	-2.412822E-02
.8422822	-3.214249E-02	.3455188	-8.936131E-02	7.009205E-03	-2.156079E-02
.8345744	-3.348268E-02	.3355941	-8.961324E-02	5.370201E-03	-1.896353E-02
.8267198	-3.483599E-02	.3257415	-8.980637E-02	3.948147E-03	-1.633731E-02
.8187219	-3.620121E-02	.3159654	-8.993962E-02	2.743667E-03	-1.368296E-02
.8105842	-3.757709E-02	.3062699	-9.001198E-02	1.757288E-03	-1.100119E-02
.8023103	-.0389624	.2966594	-.0900225	9.894428E-04	-8.292688E-03
.7939038	-4.035591E-02	.2871381	-8.997031E-02	4.404691E-04	-5.558021E-03
.7853683	-4.175638E-02	.2777102	-8.985462E-02	1.106073E-04	-2.797701E-03
.7767077	-4.316254E-02	.2683797	-.0896747	2.069726E-09	-1.215628E-05
.7679258	-4.457312E-02	.2591508	-8.942991E-02	1.106073E-04	2.797701E-03
.7590263	-4.598688E-02	.2500275	-8.911968E-02	4.404691E-04	5.558021E-03
.7500133	-4.740252E-02	.2410139	-8.874354E-02	9.894428E-04	8.292688E-03
		.2321139	-.0883011	1.757288E-03	1.100119E-02

ANNEXE 5

Profil NACA0018

2.743667E-03	1.368296E-02	.3159654	8.993962E-02	.8267198	3.483599E-02
3.948147E-03	1.633731E-02	.3257415	8.980637E-02	.8345744	3.348268E-02
5.370201E-03	1.896353E-02	.3355941	8.961324E-02	.8422822	3.214249E-02
7.009205E-03	2.156079E-02	.3455188	8.936131E-02	.84984	3.081664E-02
8.864439E-03	2.412822E-02	.3555112	.0890517	.8572443	2.950635E-02
1.093509E-02	2.666487E-02	.3655671	8.868562E-02	.8644919	2.821281E-02
1.322025E-02	2.916974E-02	.3756819	8.826429E-02	.8715796	2.693724E-02
1.571892E-02	3.164176E-02	.3858512	8.778903E-02	.8785043	2.568083E-02
1.842999E-02	3.407981E-02	.3960706	8.726116E-02	.8852631	2.444477E-02
2.135229E-02	3.648271E-02	.4063356	8.668206E-02	.8918528	2.323025E-02
2.448453E-02	3.884925E-02	.4166416	8.605316E-02	.8982707	2.203842E-02
2.782534E-02	4.117817E-02	.4269843	8.537589E-02	.9045139	2.087047E-02
3.137324E-02	4.346817E-02	.4373589	8.465175E-02	.9105797	1.972754E-02
3.512669E-02	4.571794E-02	.447761	8.388223E-02	.9164654	1.861078E-02
3.908404E-02	4.792612E-02	.458186	8.306887E-02	.9221684	1.752132E-02
4.324355E-02	5.009135E-02	.4686294	8.221322E-02	.9276863	1.646028E-02
.0476034	5.221225E-02	.4790865	8.131683E-02	.9330165	1.542875E-02
5.216167E-02	5.428743E-02	.4895528	8.038127E-02	.9381569	1.442781E-02
5.691637E-02	.0563155	.5000237	7.940814E-02	.943105	1.345854E-02
6.186541E-02	5.829509E-02	.5104946	7.839901E-02	.9478589	1.252196E-02
6.700663E-02	6.022482E-02	.5209609	7.735548E-02	.9524163	1.161908E-02
7.233775E-02	6.210334E-02	.5314179	7.627914E-02	.9567752	1.075093E-02
7.785645E-02	6.392933E-02	.5418612	7.517157E-02	.9609339	9.918445E-03
8.356031E-02	6.570147E-02	.5522861	7.403438E-02	.9648903	9.122567E-03
8.944683E-02	6.741851E-02	.5626882	7.286911E-02	.9686428	.0083642
9.551342E-02	6.907921E-02	.5730627	7.167736E-02	.9721898	7.644214E-03
.1017574	7.068241E-02	.5834051	7.046065E-02	.9755297	6.96343E-03
.1081761	7.222695E-02	.593711	6.922057E-02	.978661	6.322647E-03
.1147666	7.371178E-02	.6039758	6.795863E-02	.9815823	5.722631E-03
.1215261	7.513587E-02	.6141949	6.667635E-02	.9842925	5.164075E-03
.1284516	7.649827E-02	.624364	6.537523E-02	.9867902	4.647661E-03
.1355401	7.779811E-02	.6344786	6.405677E-02	.9890745	4.174004E-03
.1427884	7.903457E-02	.6445341	6.272244E-02	.9911441	3.743695E-03
.1501934	.0802069	.6545263	6.137369E-02	.9929984	3.35723E-03
.1577518	8.131447E-02	.6644506	6.001198E-02	.9946365	3.015099E-03
.1654604	8.235668E-02	.6743029	.0586387	.9960576	2.717724E-03
.1733156	8.333307E-02	.6840788	5.725529E-02	.9972611	2.465465E-03
.1813142	8.424319E-02	.6937738	5.586313E-02	.9982466	2.25864E-03
.1894525	8.508676E-02	.7033839	.0544636	.9990134	2.097513E-03
.1977271	8.586352E-02	.7129048	5.305805E-02	.9995614	1.982279E-03
.2061342	8.657334E-02	.7223322	5.164784E-02	.9998903	1.913081E-03
.2146702	8.721617E-02	.7316622	5.023431E-02	1	.00189
.2233314	8.779205E-02	.7408906	4.881876E-02		
.2321139	.0883011	.7500133	4.740252E-02		
.2410139	8.874354E-02	.7590263	4.598688E-02		
.2500275	8.911968E-02	.7679258	4.457312E-02		
.2591508	8.942991E-02	.7767077	4.316254E-02		
.2683797	.0896747	.7853683	4.175638E-02		
.2777102	8.985462E-02	.7939038	4.035591E-02		
.2871381	8.997031E-02	.8023103	.0389624		
.2966594	.0900225	.8105842	3.757709E-02		
.3062699	9.001198E-02	.8187219	3.620121E-02		

ANNEXE 5

Profil NACA2414

X	Y	.7408906	-2.442606E-02	.2233314	-5.218418E-02
1	-.00147	.7316622	-2.518222E-02	.2146702	-5.212819E-02
.9998903	-1.480641E-03	.7223322	-2.594266E-02	.2061342	-5.203281E-02
.9995614	-1.512545E-03	.7129048	-2.670678E-02	.1977271	-5.189703E-02
.9990134	-1.565681E-03	.7033839	-.027474	.1894525	-5.171986E-02
.9982466	-1.639994E-03	.6937738	-2.824371E-02	.1813142	-5.150042E-02
.9972611	-1.735408E-03	.6840788	-2.901526E-02	.1733156	-5.123783E-02
.9960576	-1.85182E-03	.6743029	-2.978799E-02	.1654604	-.0509313
.9946365	-1.989107E-03	.6644506	-3.056121E-02	.1577518	-5.058011E-02
.9929984	-2.14713E-03	.6545263	-3.133418E-02	.1501934	-5.018356E-02
.9911441	-2.325728E-03	.6445341	-3.210617E-02	.1427884	-4.974105E-02
.9890745	-2.52471E-03	.6344786	-3.287639E-02	.1355401	-4.925202E-02
.9867902	-2.743891E-03	.624364	-3.364402E-02	.1284516	-4.871597E-02
.9842925	-2.983043E-03	.6141949	-3.440824E-02	.1215261	-4.813247E-02
.9815823	-3.241936E-03	.6039758	-3.516816E-02	.1147666	-4.750114E-02
.978661	-3.520312E-03	.593711	-3.592288E-02	.1081761	-4.682167E-02
.9755297	-3.817912E-03	.5834051	-3.667148E-02	.1017574	-4.609378E-02
.9721898	-4.134452E-03	.5730627	-3.741298E-02	9.551342E-02	-4.531728E-02
.9686428	-4.469637E-03	.5626882	-3.814639E-02	8.944683E-02	-4.449202E-02
.9648903	-4.823166E-03	.5522861	-3.887068E-02	8.356031E-02	-.0436179
.9609339	-5.194724E-03	.5418612	-3.958482E-02	7.785645E-02	-4.269487E-02
.9567752	-5.583983E-03	.5314179	-.0402877	7.233775E-02	-4.172292E-02
.9524163	-5.990608E-03	.5209609	-4.097823E-02	6.700663E-02	-.0407021
.9478589	-6.414262E-03	.5104946	-4.165529E-02	6.186541E-02	-.0396325
.943105	-6.854588E-03	.5000237	-.0423177	5.691637E-02	-3.851424E-02
.9381569	-7.311231E-03	.4895528	-.0429643	5.216167E-02	-3.734749E-02
.9330165	-7.783837E-03	.4790865	-.0435939	.0476034	-3.613245E-02
.9276863	-8.272036E-03	.4686294	-4.420528E-02	4.324355E-02	-3.486934E-02
.9221684	-8.775461E-03	.458186	-4.479721E-02	3.908404E-02	-3.355841E-02
.9164654	-9.293743E-03	.447761	-4.536846E-02	3.512669E-02	-3.219996E-02
.9105797	-9.82651E-03	.4373589	-4.591778E-02	3.137324E-02	-3.079429E-02
.9045139	-1.037338E-02	.4269843	-4.644392E-02	2.782534E-02	-2.934171E-02
.8982707	-1.093397E-02	.4166416	-4.694561E-02	2.448453E-02	-2.784257E-02
.8918528	-1.150792E-02	.4063356	-4.742161E-02	2.135229E-02	-.0262972
.8852631	-1.209483E-02	.3960706	-4.787172E-02	1.842999E-02	-2.470597E-02
.8785043	-1.269433E-02	.3858512	-4.830538E-02	1.571892E-02	-2.306925E-02
.8715796	-1.330604E-02	.3756819	-4.872393E-02	1.322025E-02	-.0213874
.8644919	-1.392956E-02	.3655671	-.0491259	1.093509E-02	-1.966078E-02
.8572443	-1.456451E-02	.3555112	-4.950984E-02	8.864439E-03	-1.788977E-02
.84984	-.0152105	.3455188	-4.987427E-02	7.009205E-03	-1.607472E-02
.8422822	-1.586714E-02	.3355941	-.0502177	5.370201E-03	-1.421599E-02
.8345744	-1.653402E-02	.3257415	-5.053869E-02	3.948147E-03	-1.231393E-02
.8267198	-1.721076E-02	.3159654	-5.083576E-02	2.743667E-03	-1.036887E-02
.8187219	-1.789694E-02	.3062699	-5.110748E-02	1.757288E-03	-8.381142E-03
.8105842	-1.859214E-02	.2966594	-.0513524	9.894428E-04	-6.351047E-03
.8023103	-1.929595E-02	.2871381	-5.156913E-02	4.404691E-04	-4.278882E-03
.7939038	-2.000794E-02	.2777102	-5.175627E-02	1.106073E-04	-2.164931E-03
.7853683	-2.072767E-02	.2683797	-5.191248E-02	2.069726E-09	-9.454678E-06
.7767077	-2.145468E-02	.2591508	-.0520364	1.106073E-04	2.187049E-03
.7679258	-2.218851E-02	.2500275	-5.212677E-02	4.404691E-04	4.366928E-03
.7590263	-2.292868E-02	.2410139	-5.218232E-02	9.894428E-04	6.54869E-03
.7500133	-.0236747	.2321139	-5.220185E-02	1.757288E-03	8.731828E-03

ANNEXE 5

Profil NACA2414

2.743667E-03	1.091573E-02	.3159654	8.907031E-02	.8267198	3.697856E-02
3.948147E-03	1.309966E-02	.3257415	.0891601	.8345744	3.555014E-02
5.370201E-03	1.528282E-02	.3355941	8.918066E-02	.8422822	3.413229E-02
7.009205E-03	1.746428E-02	.3455188	8.913221E-02	.84984	.0327265
8.864439E-03	1.964301E-02	.3555112	8.901502E-02	.8572443	3.133425E-02
1.093509E-02	.0218179	.3655671	.0888295	.8644919	2.995703E-02
1.322025E-02	2.398775E-02	.3756819	8.857609E-02	.8715796	2.859634E-02
1.571892E-02	2.615126E-02	.3858512	8.825533E-02	.8785043	2.725362E-02
1.842999E-02	2.830706E-02	.3960706	8.786785E-02	.8852631	2.593036E-02
2.135229E-02	3.045368E-02	.4063356	8.741715E-02	.8918528	2.462802E-02
2.448453E-02	.0325896	.4166416	8.691484E-02	.8982707	2.334801E-02
2.782534E-02	3.471322E-02	.4269843	8.636301E-02	.9045139	2.209179E-02
3.137324E-02	3.682287E-02	.4373589	8.576271E-02	.9105797	2.086078E-02
3.512669E-02	3.891683E-02	.447761	.085115	.9164654	1.965635E-02
3.908404E-02	4.099333E-02	.458186	8.442102E-02	.9221684	1.847992E-02
4.324355E-02	4.305054E-02	.4686294	8.368194E-02	.9276863	1.733284E-02
.0476034	4.508661E-02	.4790865	8.289893E-02	.9330165	1.621643E-02
5.216167E-02	4.709962E-02	.4895528	8.207322E-02	.9381569	1.513202E-02
5.691637E-02	4.908764E-02	.5000237	8.120606E-02	.943105	1.408091E-02
6.186541E-02	5.104875E-02	.5104946	8.029872E-02	.9478589	1.306434E-02
6.700663E-02	5.298095E-02	.5209609	7.935251E-02	.9524163	1.208352E-02
7.233775E-02	5.488228E-02	.5314179	7.836874E-02	.9567752	1.113969E-02
7.785645E-02	5.675075E-02	.5418612	7.734875E-02	.9609339	1.023397E-02
8.356031E-02	5.858438E-02	.5522861	.0762939	.9648903	9.367494E-03
8.944683E-02	6.038121E-02	.5626882	7.520556E-02	.9686428	8.54134E-03
9.551342E-02	6.213927E-02	.5730627	7.408512E-02	.9721898	7.756547E-03
.1017574	6.385662E-02	.5834051	7.293399E-02	.9755297	7.014089E-03
.1081761	6.553137E-02	.593711	7.175355E-02	.978661	6.314917E-03
.1147666	6.716162E-02	.6039758	7.054526E-02	.9815823	5.659934E-03
.1215261	6.874554E-02	.6141949	6.931052E-02	.9842925	5.049962E-03
.1284516	7.028134E-02	.624364	6.805078E-02	.9867902	4.485804E-03
.1355401	7.176726E-02	.6344786	6.676748E-02	.9890745	3.968185E-03
.1427884	.0732016	.6445341	6.546207E-02	.9911441	3.497798E-03
.1501934	7.458273E-02	.6545263	.064136	.9929984	3.075227E-03
.1577518	7.590906E-02	.6644506	6.279075E-02	.9946365	2.701047E-03
.1654604	7.717909E-02	.6743029	6.142776E-02	.9960576	2.37575E-03
.1733156	7.839138E-02	.6840788	6.004851E-02	.9972611	2.09976E-03
.1813142	7.954455E-02	.6937738	5.865448E-02	.9982466	1.873445E-03
.1894525	8.063731E-02	.7033839	5.724714E-02	.9990134	1.697117E-03
.1977271	8.166844E-02	.7129048	5.582796E-02	.9995614	.001571
.2061342	8.263682E-02	.7223322	5.439843E-02	.9998903	1.495262E-03
.2146702	.0835414	.7316622	5.296002E-02	1	.00147
.2233314	8.438122E-02	.7408906	5.151424E-02		
.2321139	8.515541E-02	.7500133	5.006255E-02		
.2410139	8.586318E-02	.7590263	4.860646E-02		
.2500275	8.650383E-02	.7679258	4.714746E-02		
.2591508	8.707678E-02	.7767077	4.568705E-02		
.2683797	.0875815	.7853683	4.422669E-02		
.2777102	8.801757E-02	.7939038	4.276792E-02		
.2871381	8.838467E-02	.8023103	4.131222E-02		
.2966594	8.868258E-02	.8105842	.0398611		
.3062699	8.891115E-02	.8187219	3.841605E-02		

ANNEXE 5

Profil NACA4412

X	Y	.7408906	-5.457662E-03	.2233314	-2.633098E-02
1	-.00126	.7316622	-5.711734E-03	.2146702	-.0267309
.9998903	-1.260765E-03	.7223322	-5.976124E-03	.2061342	-2.711155E-02
.9995614	-1.263064E-03	.7129048	-6.250851E-03	.1977271	-2.747093E-02
.9990134	-1.266907E-03	.7033839	-6.535923E-03	.1894525	-2.780706E-02
.9982466	-1.272308E-03	.6937738	-6.831309E-03	.1813142	-.028118
.9972611	-1.279291E-03	.6840788	-7.136937E-03	.1733156	-2.840183E-02
.9960576	-1.287885E-03	.6743029	-.0074527	.1654604	-2.865667E-02
.9946365	-1.298126E-03	.6644506	-7.778443E-03	.1577518	-2.888069E-02
.9929984	-1.310056E-03	.6545263	-8.113973E-03	.1501934	-.0290721
.9911441	-1.323727E-03	.6445341	-8.459061E-03	.1427884	-2.922916E-02
.9890745	-1.339195E-03	.6344786	-8.813422E-03	.1355401	-2.935017E-02
.9867902	-1.356528E-03	.624364	-9.176731E-03	.1284516	-2.943348E-02
.9842925	-1.375798E-03	.6141949	-9.548612E-03	.1215261	-2.947751E-02
.9815823	-1.39709E-03	.6039758	-9.928647E-03	.1147666	-2.948071E-02
.978661	-1.420492E-03	.593711	-1.031637E-02	.1081761	-.0294416
.9755297	-1.446109E-03	.5834051	-1.071126E-02	.1017574	-2.935876E-02
.9721898	-1.474048E-03	.5730627	-1.111275E-02	9.551342E-02	-2.923083E-02
.9686428	-1.504429E-03	.5626882	-1.152023E-02	8.944683E-02	-2.905649E-02
.9648903	-1.537384E-03	.5522861	-1.193303E-02	8.356031E-02	-.0288345
.9609339	-1.573052E-03	.5418612	-1.235045E-02	7.785645E-02	-2.856367E-02
.9567752	-1.611583E-03	.5314179	-1.277172E-02	7.233775E-02	-2.824286E-02
.9524163	-1.653141E-03	.5209609	-1.319604E-02	6.700663E-02	-2.787103E-02
.9478589	-1.697897E-03	.5104946	-1.362256E-02	6.186541E-02	-2.744714E-02
.943105	-1.746033E-03	.5000237	-1.405039E-02	5.691637E-02	-2.697026E-02
.9381569	-1.797743E-03	.4895528	-1.447859E-02	5.216167E-02	-2.643949E-02
.9330165	-1.853233E-03	.4790865	-1.490618E-02	.0476034	-2.585401E-02
.9276863	-1.912717E-03	.4686294	-1.533214E-02	4.324355E-02	-2.521303E-02
.9221684	-1.976418E-03	.458186	-1.575543E-02	3.908404E-02	-2.451583E-02
.9164654	-2.044574E-03	.447761	-1.617494E-02	3.512669E-02	-2.376176E-02
.9105797	-2.117428E-03	.4373589	-1.658957E-02	3.137324E-02	-.0229502
.9045139	-2.195231E-03	.4269843	-1.699816E-02	2.782534E-02	-2.208061E-02
.8982707	-2.278245E-03	.4166416	-1.739954E-02	2.448453E-02	-2.115247E-02
.8918528	-2.366738E-03	.4063356	-.0177925	2.135229E-02	-2.016533E-02
.8852631	-2.460985E-03	.3960706	-1.817796E-02	1.842999E-02	-1.911879E-02
.8785043	-2.561264E-03	.3858512	-1.857606E-02	1.571892E-02	-1.801249E-02
.8715796	-2.667861E-03	.3756819	-1.899071E-02	1.322025E-02	-1.684614E-02
.8644919	-2.781061E-03	.3655671	-1.942015E-02	1.093509E-02	-1.561945E-02
.8572443	-2.901152E-03	.3555112	-1.986261E-02	8.864439E-03	-1.433223E-02
.84984	-3.028426E-03	.3455188	-2.031625E-02	7.009205E-03	-.0129843
.8422822	-3.163168E-03	.3355941	-2.077919E-02	5.370201E-03	-1.157552E-02
.8345744	-3.305664E-03	.3257415	-.0212495	3.948147E-03	-1.010581E-02
.8267198	-3.45619E-03	.3159654	-.0217252	2.743667E-03	-8.57512E-03
.8187219	-3.615025E-03	.3062699	-2.220431E-02	1.757288E-03	-6.983444E-03
.8105842	-3.782431E-03	.2966594	-2.268482E-02	9.894428E-04	-5.330815E-03
.8023103	-3.958661E-03	.2871381	-2.316466E-02	4.404691E-04	-3.617302E-03
.7939038	-4.143961E-03	.2777102	-2.364178E-02	1.106073E-04	-1.843016E-03
.7853683	-4.338555E-03	.2683797	-2.411411E-02	2.069726E-09	-8.103773E-06
.7767077	-4.542656E-03	.2591508	-2.457956E-02	1.106073E-04	1.887253E-03
.7679258	-4.756456E-03	.2500275	-2.503606E-02	4.404691E-04	3.793393E-03
.7590263	-4.98013E-03	.2410139	-.0254815	9.894428E-04	5.726102E-03
.7500133	-5.213823E-03	.2321139	-2.591383E-02	1.757288E-03	7.684815E-03

ANNEXE 5

Profil NACA4412

2.743667E-03	9.668822E-03	.3159654	9.819429E-02	.8267198	4.299179E-02
3.948147E-03	1.167727E-02	.3257415	9.849232E-02	.8345744	4.133791E-02
5.370201E-03	1.370918E-02	.3355941	9.870513E-02	.8422822	3.969348E-02
7.009205E-03	1.576342E-02	.3455188	9.883215E-02	.84984	3.806042E-02
8.864439E-03	1.783872E-02	.3555112	9.887298E-02	.8572443	3.644064E-02
1.093509E-02	.0199337	.3655671	9.882733E-02	.8644919	3.483602E-02
1.322025E-02	2.204685E-02	.3756819	9.869501E-02	.8715796	3.324846E-02
1.571892E-02	2.417652E-02	.3858512	9.847596E-02	.8785043	3.167984E-02
1.842999E-02	2.632095E-02	.3960706	9.817024E-02	.8852631	3.013204E-02
2.135229E-02	2.847828E-02	.4063356	9.778358E-02	.8918528	2.860692E-02
2.448453E-02	3.064653E-02	.4166416	9.733799E-02	.8982707	2.710631E-02
2.782534E-02	3.282362E-02	.4269843	9.683634E-02	.9045139	2.563206E-02
3.137324E-02	3.500736E-02	.4373589	9.627941E-02	.9105797	2.418596E-02
3.512669E-02	3.719549E-02	.447761	9.566803E-02	.9164654	2.276979E-02
3.908404E-02	3.938567E-02	.458186	9.500307E-02	.9221684	2.138533E-02
4.324355E-02	4.157544E-02	.4686294	9.428547E-02	.9276863	2.003432E-02
.0476034	4.376233E-02	.4790865	9.351625E-02	.9330165	1.871843E-02
5.216167E-02	4.594374E-02	.4895528	9.269643E-02	.9381569	1.743933E-02
5.691637E-02	4.811707E-02	.5000237	9.182711E-02	.943105	1.619868E-02
6.186541E-02	5.027964E-02	.5104946	9.090944E-02	.9478589	1.499804E-02
6.700663E-02	5.242873E-02	.5209609	8.994459E-02	.9524163	1.383897E-02
7.233775E-02	5.456159E-02	.5314179	.0889338	.9567752	1.272299E-02
7.785645E-02	5.667543E-02	.5418612	8.787832E-02	.9609339	1.165154E-02
8.356031E-02	5.876746E-02	.5522861	8.677946E-02	.9648903	1.062604E-02
8.944683E-02	6.083485E-02	.5626882	8.563858E-02	.9686428	9.647837E-03
9.551342E-02	6.287479E-02	.5730627	8.445704E-02	.9721898	8.718237E-03
.1017574	6.488444E-02	.5834051	8.323628E-02	.9755297	7.838463E-03
.1081761	.066861	.593711	8.197772E-02	.978661	7.009703E-03
.1147666	6.880166E-02	.6039758	8.068284E-02	.9815823	6.233084E-03
.1215261	7.070365E-02	.6141949	7.935318E-02	.9842925	5.509635E-03
.1284516	7.256421E-02	.624364	7.799024E-02	.9867902	4.840353E-03
.1355401	7.438064E-02	.6344786	.0765956	.9890745	4.226144E-03
.1427884	7.615025E-02	.6445341	7.517085E-02	.9911441	3.667866E-03
.1501934	7.787043E-02	.6545263	7.371761E-02	.9929984	3.16625E-03
.1577518	.0795386	.6644506	7.223752E-02	.9946365	2.722006E-03
.1654604	8.115225E-02	.6743029	7.073224E-02	.9960576	2.335746E-03
.1733156	8.270893E-02	.6840788	6.920344E-02	.9972611	2.007996E-03
.1813142	8.420625E-02	.6937738	6.765285E-02	.9982466	1.739211E-03
.1894525	8.564194E-02	.7033839	6.608219E-02	.9990134	1.529777E-03
.1977271	8.701376E-02	.7129048	6.449321E-02	.9995614	1.379974E-03
.2061342	8.831957E-02	.7223322	6.288766E-02	.9998903	1.290009E-03
.2146702	8.955733E-02	.7316622	6.126733E-02	1	.00126
.2233314	9.072508E-02	.7408906	5.963402E-02		
.2321139	9.182096E-02	.7500133	5.798953E-02		
.2410139	9.284321E-02	.7590263	.0563357		
.2500275	9.379017E-02	.7679258	5.467437E-02		
.2591508	9.466031E-02	.7767077	5.300739E-02		
.2683797	9.545214E-02	.7853683	5.133661E-02		
.2777102	9.616438E-02	.7939038	4.966392E-02		
.2871381	9.679575E-02	.8023103	.0479912		
.2966594	9.734517E-02	.8105842	4.632035E-02		
.3062699	9.781164E-02	.8187219	4.465324E-02		