

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BLIDA 1

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales

Département Construction

Laboratoire des Sciences Aéronautiques



**MEMOIRE**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme du Master en Aéronautique

Option : Structures Aéronautiques

**THEME :**

***Solutions analytiques de flexion et de flambage  
d'une plaque composite semi-épaisse à gradient  
fonctionnel renforcée par des nanotubes en  
carbone***

❖ **Présenté par :**

- DERRADJI Mohamed El Amine & BOUSALEM Mohammed

❖ **Encadré par :**

- Dr Amale MAHI (MC Université Blida 1)

BLIDA 06/2018

## RESUME

Les matériaux à gradient fonctionnel renforcés par des nanotubes en carbone sont de nouveaux matériaux qui s'inscrivent dans la gamme des matériaux composites. Les nanotubes en carbone, proposé par le Pr Sumio Iijima au Japon en 1991, n'ont cessé d'attirer de nombreux chercheurs de divers horizons en vue d'exploiter au maximum et dans divers domaines les propriétés physiques et chimiques remarquables de ces nouveaux matériaux. En effet, ces derniers exhibent une grande résistance et une grande rigidité (rapportées à la masse) avec une faible masse volumique. Ils présentent également d'excellentes propriétés électriques et thermiques. Ces caractéristiques suggèrent que ces nanotubes en carbone peuvent être judicieusement utilisés comme renforcement dans les composites en polymères afin d'améliorer significativement leurs propriétés mécaniques, électriques et thermiques.

Dans ce mémoire de fin d'études, nous avons étudié la flexion et le flambage de plaques carrées et rectangulaires à gradient fonctionnel renforcées par des nanotubes de carbone (FG-CNTRC) en utilisant une approche analytique. Le modèle mathématique de la plaque FG-CNTRC est développé sur la base de la théorie de déformation en cisaillement de la plaque du premier ordre (FSDT) et en vertu du principe de Hamilton. Dans le cas de la condition aux limites simplement appuyée sur les quatre côtés de la plaque, et en appliquant la méthode de Navier sur les équations différentielles couplées du mouvement. Le problème est résolu pour donner la charge critique de flambage, les déplacements et les contraintes. Une comparaison des résultats obtenus avec ceux publiés est présentée pour démontrer la validité du code de calcul élaboré.

**Mots-clés** : nanotube de carbone ; flexion ; flambage ; FG-CNTRC ; FSDT ; principe de Hamilton ; Solution de Navier.

# ABSTRACT

Functionally graded carbon nanotube reinforced composite are new materials that fall within the range of composite materials. The carbon nanotubes, proposed by Professor Sumio Iijima in Japan in 1991, have attracted many researchers from diverse backgrounds in order to exploit to the maximum and in various fields the remarkable physical and chemical properties of these new materials. Indeed, they exhibit a high strength and rigidity (relative to the mass) with a low density. They also have excellent electrical and thermal properties. These characteristics suggest that these carbon nanotubes can be judiciously used as reinforcement in polymer composites in order to significantly improve their mechanical, electrical and thermal properties.

In this end-of-study memory, we studied bending and buckling of square and rectangular plates with functionally graded carbon nanotube reinforced composite (FG-CNTRC) using an analytical approach. The mathematical model of the FG-CNTRC plate is developed on the basis of First Order Shear Deformation plate theory (FSDT) and Hamilton's Principle. In the case of the boundary condition simply supported on all four sides of the plate and applying Navier's method on the coupled differential equations of motion, the problem is solved to give the critical buckling load, displacements and stress. A comparison of the results obtained with those published is presented to demonstrate the validity of the developed computation code.

**Keywords:** carbon nanotube; bending; buckling; FG-CNTRC; FSDT; Hamilton's principle; Navier solution.

## ملخص

الصفائح المستطيلة ذات التدرج الوظيفي والمدعمة بألياف الكربون هي مواد جديدة تقع ضمن نطاق المواد المركبة. وقد اجتذبت ألياف الكربون، التي اقترحها البروفيسور سوميو إجيما في اليابان في عام 1991 ، العديد من الباحثين من خلفيات متنوعة من أجل استغلال الخصائص الفيزيائية والكيميائية اللافتة لهذه المواد الجديدة في مختلف المجالات. في الواقع ، فإنها تظهر قوة وصلابة عالية (نسبة إلى الكتلة) بكثافة منخفضة. لديهم أيضا أولويات كهربائية وحرارية ممتازة. هذه الخصائص تشير إلى أن ألياف الكربون يمكن استخدامها بحكمة كتقوية في مركبات البوليمر من أجل تحسين خصائصها الميكانيكية و الكهربائية و الحرارية بشكل كبير.

في هذه المذكرة الخاصة بالتخرج ، درسنا الانحناء و الإلتواء للصفحة المربعة والمستطيلة ذات التدرج الوظيفي المعزز بواسطة ألياف الكربون باستخدام نهج تحليلي. تم تطوير النموذج الرياضي للوحة على أساس نظرية تشوه الصفائح من الدرجة الأولى ومبدأ هاملتون. في حالة شرط الحدود المدعوم ببساطة على جميع الجوانب الأربعة للوحة ، وتطبيق طريقة حل نافير على المعادلات التفاضلية المزدوجة المقترنة ، يتم حل المشكلة لإعطاء الحمل التزايدى الحرج والنزوح والقيود. مطلوب مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك المنشورة لإثبات رمز حساب المقدمة.

كلمات البحث: ألياف الكربون، الانحناء، التواء، مبدأ هاملتون، حل نافير.

# Remerciements

*Nous remercions dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Dr. MAHI AMALE**, son expérience a joué un rôle important dans la conception de ce projet. On la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*Merci à l'institut d'aéronautique et des études spatiales, pour nous avoir accordés sa confiance pour la réalisation de ce travail, pour ses précieux conseils, et sa disponibilité, et pour nous avoir guidés tout au long de nos cursus universitaires.*

*Nos remerciements s'adressent également à tous les membres de jury de notre mémoire et nos professeurs de l'institut d'aéronautique et des études spatiales de BLIDA, pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.*

*Merci à vous tous*

## Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à : A mes parents, aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.*

*A mon binôme **Mohamed El Amine** et toute la famille **DERRADJI**, avec lequel j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler, ma famille, mes amis et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.*

**BOUSALEM Mohammed**

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.*

*A mon partenaire de mémoire et mon ami **Mohammed** et toute la famille **BOUSALEM**, dont il était très Collaborateur dans notre projet, et à tous mes amis pour leurs esprits positives qui m'encouragent.*

**DERRADJI Mohamed El Amine**

# ***TABLE DES MATIERES***

**RESUME.**

**REMERCIEMENT & DEDICACES.**

**TABLE DES MATIERES.**

**LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS.**

**LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX.**

**INTRODUCTION GENERALE .....1**

***CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES .....4***

**1.1. Introduction : .....5**

**1.2. Définitions de base : : .....5**

**1.3. Définitions : .....5**

**1.3.1. Les composites à grande diffusion : .....6**

**1.3.2 Les composites à haute performance : .....6**

**1.4 Caractéristiques générales : .....6**

**1.5 Constituants des matériaux composites : .....8**

**1.5.1 Les renforts .....8**

**1.5.1.1 Fibres de verre : .....9**

**1.5.1.2 Fibres de Carbone : .....9**

**1.5.1.3 Fibres aramides : .....9**

**1.5.1.4 Fibres céramiques : .....9**

**1.5.1.5 Caractéristiques mécaniques des fibres : .....10**

**1.5.2 Les matrices : .....11**

**1.5.2.1 Les différentes natures des matrices : .....11**

**1.5.2.2 Charges et additifs : .....12**

**1.6 Classification des matériaux composites : .....13**

**1.6.1 Classification suivant la forme des constituants : .....14**

**1.6.1.1 Composites à particules : .....14**

**1.6.1.2 Les composites à fibres : .....15**

**1.6.2 Classification suivant la nature des constituants : .....15**

<u>1.6.2.1 Composites à matrice organique</u> :	15
<u>1.6.2.2 Composites à matrice métallique</u> :	15
<u>1.6.2.3 Composites à matrice minérale</u> :	16
<b>1.7. Conclusion</b> :	16
 <b>CHAPITRE 2 : LES MATERIAUX FGM ET LES NANO TUBES DE CARBONES (NTC).</b>	
<b>2.1. Introduction</b> :	19
<b>2.2. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)</b> :	20
<u>2.2.1 Types de matériaux fonctionnellement gradués</u> :	20
<u>2.2.1.1 Composition chimique du FGM</u> :	21
<u>2.2.1.2. Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité</u> :	22
<u>2.2.1.3. Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure</u> :	23
<u>2.2.2. Domaines d'application du FGM</u> :	26
<u>2.2.3. Avantages des FGM</u> :	27
<u>2.2.4. Inconvénients du FGM</u> :	28
<b>2.3. Les nanotubes de carbone NTC</b> :	29
<u>2.3.1. Histoire des nanotubes de carbone</u> :	29
<u>2.3.2. Morphologie NTC</u> :	30
<u>2.3.3. Structure nanotube de carbone</u> :	31
<u>2.3.4. Chiralité es nanotubes de carbone</u> :	32
<u>2.3.6. Propriétés des NTC</u> :	32
<u>2.3.6.1. Réactivité chimique</u> :	32
<u>2.3.6.2. Conductivité électrique</u> :	33
<u>2.3.6.3. Activité optique</u> :	33
<u>2.3.6.4. Force mécanique</u> :	33
<u>2.3.7. Limitations des NTC</u> :	33
<b>2.4. FGM renforcé par les nanotubes de carbone (FG-CNTRC)</b> :	34
<u>2.4.1. Définition</u> :	34
<u>2.4.2. Applications des FGM renforcées par les NTC</u> :	34
<b>2.5. Conclusion</b> :	36

## **CHAPITRE 3 : MODELISATION, THEORIES DE DEFORMATIONS ET**

### **FORMULATION ENERGITIQUE DES PLAQUES FG-CNTRC. ... .....37**

**3.1. Introduction : .....38**

**3.2. Modélisation d'une plaque FG-CNTRC : .....38**

**3.3. Vue d'ensemble des théories de la plaque FGM : .....40**

**3.3.1. Théorie classique des plaques minces (CPT) : .....42**

**3.3.2. La théorie des plaques du premier ordre : .....44**

**3.3.3. Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) : .....45**

**3.3.3.1. Théorie des plaques du second ordre : .....45**

**3.3.3.2. Théorie des plaques du troisième ordre : .....45**

**3.3.4. La théorie des plaques du premier ordre : .....46**

**3.3.4.1 Déplacements et déformations : .....46**

**3.3.4.2. Détermination des efforts et moments appliqués à la plaque FGM : .....50**

**3.3.4.3. Modélisation des charges externes : .....54**

**3.4. Formulation énergétique des plaques composite renforcée par des nanotubes en  
carbone : .....55**

**3.4.1. Energie de déformation : .....55**

**3.4.2. Travail des charges externes : .....55**

**3.4.3. Formulation variationnelle : .....56**

**3.4.3.1. Variation de l'énergie de déformation : .....56**

**3.4.3.2. La variation du travail : .....56**

**3.4.4. Application du principe d'Hamilton : .....57**

**3.4.4.1. Equations de mouvement : .....57**

<u>3.4.4.2. Équations de mouvement en termes de déplacements :</u>	58
<u>3.4.5. Relations fondamentales de flexion d'une plaque FGM :</u>	59
<u>3.4.6. Relations fondamentales de flambage d'une plaque FGM :</u>	60
3.5. Conclusion :	60
<b>CHAPITRE 4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.</b>	<b>61</b>
4.1. Introduction :	62
4.2. Solution de Navier pour des plaques rectangulaires simplement appuyées :	62
<u>4.2.1. Les équations de mouvement :</u>	62
<u>4.2.2. Conditions aux limites et solution Navier :</u>	63
4.3 Résolution des équations de flexion par la méthode de Navier :	64
4.4 Résolution des équations de flambage par la méthode de Navier :	65
4.5 Résolution numérique du problème statique :	67
<u>4.5.1 Modélisation numérique d'une plaque composite a gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes en carbone mono paroi :</u>	67
<u>4.5.2 Graphes de variation des propriétés de la plaque :</u>	67
<u>4.5.3 Calcul des rigidités du système statique :</u>	71
<u>4.5.4 Comparaison des résultats de flexion :</u>	75
<u>4.5.5 Etude paramétrique de flexion :</u>	82
<u>4.5.6 Comparaison des résultats de flambage :</u>	92
<u>4.5.7 Etude paramétrique de flambage :</u>	95
4.6. Organigramme des principales étapes du programme :	105
CONCLUSION GENERALE.....	107
REFERENCES	

# ***LISTE DES SYMBOLES***

$E_{11}^{CNT}$ ,  $E_{22}^{CNT}$  et  $G_{12}^{CNT}$ : Modules de Young de NTC et le module de cisaillement de NTC.

$E_{11}$ ,  $E_{22}$ : Modules de Young de la plaque.

$G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ : Module de cisaillement de la plaque.

$\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ : Coefficients de Poisson de la plaque.

$E_m$ ,  $G_m$ : Module de Young et le module de cisaillement de la matrice polymère.

$\eta_1$ ,  $\eta_2$  et  $\eta_3$ : Paramètres d'efficacité de NTC.

$V_{ecnt}$ ,  $V_m$ : Fraction volumique des NTC et de la matrice ( $V_{ecnt} = V_{CNT}^*$ ).

$V_{CNT}$ : Loi de distribution des CNT suivant l'épaisseur

$\nu_{12}^{CNT}$ ,  $\rho_{CNT}$ : Coefficient de Poisson et la masse volumique de NTC.

$\nu_m$ ,  $\rho_m$ : Coefficient de Poisson et la masse volumique de la matrice.

$W_{CNT}$ : Fraction massique des nanotubes.

$\varphi_i$ :  $i$ ème composante du déplacement ou de la contrainte.

$z$ : Coordonnée suivant l'épaisseur.

$\Omega_0$ : Plan médian non déformé de la plaque.

$R_{ij}^{(m)}$ : Résistances moyennes exprimées par unité d'épaisseur.

$u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ : Composants de déplacement le long des directions de coordonnées  $(x, y, z)$ .

$\phi_x$  et  $\phi_y$ : Rotations autour des axes  $x$  et  $y$ .

$\frac{a}{h}$ : Epaisseurs relatives.

$\frac{a}{b}$ : Rapport géométrique de la plaque.

$u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$  : Déplacements et rotations généralisés.

$\beta_x, \beta_y$  : Rotations autour des axes  $x$  et  $y$ .

$\gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  : Déformations transversales.

$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$  : Déformations normales suivant  $x$  et  $y$ .

$\gamma_{xy}$  : Déformations dans le plan  $(x, y)$ .

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  : Contraintes normales suivant  $x$  et  $y$ , contraintes de cisaillement dans le plan  $(x, y)$ .

$N_x, N_y, N_{xy}$  : Résultantes en membrane (normales et cisaillement).

$M_{xx}, M_{yy}$  et  $M_{xy}$  : Moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$  et moment de torsion

$Q_x, Q_y$  : Forces transversales résultantes.

$K_s$  : Coefficient de correction de cisaillement.

$U$  : Energie de déformation (énergie potentielle).

$K$  : Energie cinétique.

$V$  : Travail des charges externes.

$V_q$  et  $V_p$  : Travail fait par  $q$  et travail effectué par les forces externes.

$\lambda_1, \lambda_2$  : Paramètres de flambage.

$P_x, P_y, P_{xy}$  : Forces de compression.

$\delta U$  : Energie de déformation (énergie potentielle) virtuelle.

$\delta K$  : Energie cinétique virtuelle.

$\delta V$  : Travail des charges externes virtuelle.

$E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}, H_{mn}, I_{mn}$  : Paramètres arbitraires.

$q(x, y)$  : Charge mécanique.

$Q_{mn}$  : La coefficients de la charge uniformément répartie.

$q_0$  : Intensité de la charge appliquée à la plaque.

$[K]$  : Matrice globale de rigidité de la plaque.

$A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $A_{ij}^s$  : Rigidités de traction, de couplage traction - flexion, de flexion et de cisaillement.

## ***LISTE DES ABREVIATION***

**CMO** : Composites à matrice organique.

**CMC** : Composites à matrice céramique.

**CMM** : Composites à matrice métallique.

**PyC** : Pyrocarbone.

**PVC** : Polychlorures de vinyle.

**PAN** : Polyacrylnitrique.

**FGM** : Matériaux à gradient fonctionnel.

**SFF** : Solid Freeform.

**NTC** : Nanotubes de carbone.

**MWNT** : Nanotubes de carbone à paroi multiple.

**SWNT** : Nanotubes de carbone à paroi unique.

**FG-CNTRC** : Matériaux composites à gradient fonctionnel renforcé par les nanotubes de carbone.

**PVA** : Alcool polyvinylique.

**UD** : Distribution des NTC uniformément répartie.

**FG-O, FG-V, FG-X, FG-V** : Lois de distributions des NTC dans la matrice polymère.

**ESL** : Théories des plaques équivalentes à une seule couche.

**CPT** : Théorie classique des plaques stratifiées.

**FSDT** : Théorie de déformation par cisaillement du premier ordre.

**UDL** : Charge uniformément répartie.

**PmPV** : Poly {(m-phénylènevinylène) -co - [(2,5-dioctoxy-p-phe-nylène) vinylène]}.

# ***LISTE DES FIGURES***

## **CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES.**

<b>Figure 1.1.</b> Matériau composite .....	<b>7</b>
<b>Figure 1.2.</b> Types de renfort .....	<b>10</b>
<b>Figure 1.3.</b> Exemples de charges utilisées dans les CMO : (a) : microbilles de verre, (b) : noir de carbone, (c) : silice .....	<b>13</b>

## **CHAPITRE 2 : LES MATERIAUX FGM ET LES NANO TUBES DE CARBONES (NTC).**

<b>Figure 2.1.</b> Schéma de l'excision à gradient de porosité.....	<b>23</b>
<b>Figure 2.2.</b> Schéma de principe d'une partie cylindrique soumis à :(a) écoulement d'un métal liquide et, (b) de l'eau de refroidissement. ....	<b>24</b>
<b>Figure 2.3.</b> Schéma de microstructure classé. ....	<b>25</b>
<b>Figure 2.4.</b> Schéma du concept de gradation. ....	<b>26</b>
<b>Figure 2.5.</b> Domaines d'application pour les trois types de matériaux fonctionnellement gradués. ....	<b>27</b>
<b>Figure 2.6.</b> Molécules de fullerène. ....	<b>30</b>
<b>Figure 2.7.</b> La chiralité du NTC. ....	<b>32</b>

## **CHAPITRE 3 : MODELISATION, THEORIES DE DEFORMATIONS ET FORMULATION ENERGITIQUE DES PLAQUES FG-CNTRC.**

<b>Figure 3.1.</b> La distribution des CNT dans une matrice SWCNT.....	<b>38</b>
<b>Figure 3.2.</b> Déformation de la section normale par rapport au plan moyen.....	<b>41</b>
<b>Figure 3.3.</b> Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques....	<b>43</b>
<b>Figure 3.4.</b> : Schématisation des déformations dans le cas théorie des plaques du premier ordre.....	<b>45</b>
<b>Figure 3.5.</b> Géométries non déformées et déformées d'un bord d'une plaque sous les hypothèses de la théorie des plaques de premier ordre. ....	<b>47</b>
<b>Figure 3.6.</b> Composants du vecteur des contraintes. ....	<b>49</b>
<b>Figure 3.7.</b> Efforts agissant dans le plan. ....	<b>50</b>
<b>Figure 3.8.</b> Moments agissant sur un élément. ....	<b>51</b>
<b>Figure 3.9.</b> Efforts tranchants dans un élément. ....	<b>52</b>
<b>Figure 3.10.</b> Résistance de la force et du moment sur un élément de plaque.....	<b>53</b>
<b>Figure 3.11.</b> Equilibre d'un élément plaque. ....	<b>54</b>
<b>Figure 3.12.</b> Les forces distribuées de pré-flambage.....	<b>55</b>

## **CHAPITRE 4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.**

<b>Figure 4.1</b> Variation de la fraction volumique $V_{CNT}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour le différent type de distribution de CNT.....	<b>68</b>
<b>Figure 4.2.</b> Variation du module de Young $E_{11}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.....	<b>68</b>
<b>Figure 4.3.</b> Variation du module de Young $E_{22}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.....	<b>69</b>
<b>Figure 4.4.</b> Variation du module de la masse volumique $\rho$ suivant l'épaisseur de la plaque pour Les différents types de distribution de CNT.....	<b>69</b>

<b>Figure 4.5.</b> Variation du module de cisaillement $G_{12}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types De distributions de CNT.....	<b>70</b>
<b>Figure 4.6.</b> Variation du coefficient de Poisson $\nu_{12}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.....	<b>70</b>
<b>Figure 4.7.</b> Variation du coefficient de poisson $\nu_{21}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distributions de CNT.....	<b>71</b>
<b>Figure 4.8 :</b> Comparaison de la variation de la contrainte axiale adimensionnelle suivant l'épaisseur pour différentes distributions des nanotubes .....	<b>78</b>
<b>Figure 4.9 :</b> Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle $\sigma_x$ dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>79</b>
<b>Figure 4.10 :</b> Variation du déplacement longitudinale adimensionnel $u$ dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>80</b>
<b>Figure 4.11 :</b> Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle $\sigma_{xz}$ dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>80</b>
<b>Figure 4.12 :</b> Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle $\sigma_{xy}$ dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>81</b>
<b>Figure 4.13 :</b> Variation du déplacement transversal adimensionnel $w$ dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ )...	<b>82</b>
<b>Figure 4.14 :</b> Variation du déplacement central adimensionnel $w$ d'une plaque $FG - O$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>84</b>
<b>Figure 4.15 :</b> Variation du déplacement central adimensionnel $w$ d'une plaque $FG - V$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>85</b>
<b>Figure 4.16</b> Variation du déplacement longitudinal adimensionnel $u$ d'une plaque $FG - O$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>85</b>

<b>Figure 4.17 :</b> Variation du déplacement longitudinal adimensionnel $u$ d'une plaque $FG - V$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>86</b>
<b>Figure 4.18 :</b> Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle $\sigma_x$ d'une plaque $FG - O$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>86</b>
<b>Figure 4.19 :</b> Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle $\sigma_x$ d'une plaque $FG - V$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>87</b>
<b>Figure 4.20 :</b> Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\sigma_{xz}$ d'une plaque $FG - O$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>87</b>
<b>Figure 4.21 :</b> Variation de la contrainte de cisaillement longitudinale adimensionnelle $\sigma_{xz}$ d'une plaque $FG - V$ carrée en fonction du rapport $a/h$ pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>88</b>
<b>Figure 4.22 :</b> Variation du déplacement central adimensionnel $w$ d'une plaque $FG - X$ moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport $a/b$ pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>89</b>
<b>Figure 4.23 :</b> Variation du déplacement longitudinal adimensionnel $u$ d'une plaque $FG - X$ moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport $a/b$ pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).....	<b>89</b>
<b>Figure 4.24 :</b> Variation de la contrainte longitudinale adimensionnel $\sigma_x$ d'une plaque $FG - X$ moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport $a/b$ pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ) .....	<b>90</b>
<b>Figure 4.25 :</b> Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnel $\sigma_{xz}$ d'une plaque $FG - X$ moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport $a/b$ pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ) .....	<b>90</b>
<b>Figure 4.26 :</b> Variation de la contrainte de cisaillement en plan adimensionnel $\sigma_{xy}$ d'une plaque $FG - X$ moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport $a/b$ pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ) .....	<b>91</b>

<b>Figure 4.27a</b> : Variation de la charge adimensionnelle critique de flambage d'une plaque carrée FGM renforcée par des nanotubes en carbone et soumise à une compression uni-axiale ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, a/b = 1, V_{ecnt} = 0.11$ ).....	<b>94</b>
<b>Figure 4.27b</b> : Variation de la charge critique de flambage d'une plaque carrée FGM renforcée par des nanotubes en carbone et soumise à une compression uni-axiale ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, a/b = 1, V_{ecnt} = 0.11$ ).....	<b>94</b>
<b>Figure 4.28</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>96</b>
<b>Figure 4.29</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>97</b>
<b>Figure 4.30</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>97</b>
<b>Figure 4.31</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>98</b>
<b>Figure 4.32</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>98</b>
<b>Figure 4.33</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>99</b>
<b>Figure 4.34</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>99</b>
<b>Figure 4.35</b> : Influence du rapport $a/h$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>100</b>
<b>Figure 4.36</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>100</b>
<b>Figure 4.37</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>101</b>
<b>Figure 4.38</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>101</b>

<b>Figure 4.39</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>102</b>
<b>Figure 4.40</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>102</b>
<b>Figure 4.41</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>103</b>
<b>Figure 4.42</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ ).....	<b>103</b>
<b>Figure 4.43</b> : Influence du rapport $a/b$ sur la charge critique de flambage pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).....	<b>104</b>
<b>Figure 4.44</b> : Organigramme du programme de calcul (Maple).....	<b>106</b>

# ***LISTE DES TABLEAUX***

## ***CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES.***

<b>Tableau 1.1.</b> Types de composites, ainsi que leurs constituants et domaines d'application.....	<b>8</b>
<b>Tableau 1.2.</b> Caractéristiques mécaniques des fibres.....	<b>11</b>

## ***CHAPITRE 4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.***

<b>Tableau 4.1.</b> Rigidités de traction $A_{ij}$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.....	<b>72</b>
<b>Tableau 4.2.</b> Rigidités de couplage traction - flexion $B_{ij}$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.....	<b>73</b>
<b>Tableau 4.3.</b> Rigidités de flexion $D_{ij}$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.....	<b>73</b>
<b>Tableau 4.4.</b> Rigidités de cisaillement $A_{ij}^s$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.....	<b>74</b>
<b>Tableau 4.5.</b> Influence de la fraction volumique des nanotubes de renforcement sur la déflexion centrale adimensionnelle $w$ d'une plaque FGM sous un chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5$ N/m <sup>2</sup> ).....	<b>76</b>
<b>Tableau 4.6.</b> Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque carrée FGM renforcée par des nanotubes en carbone et soumise à une compression uni-axiale ( $\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = 0$ , $a/b = 1$ , $\nu_{\text{cent}} = 0.11$ ).....	<b>93</b>

# ***INTRODUCTION GENERALE***

Les matériaux à gradient fonctionnel (en anglais FGM : Functionally Graded Materials) ont été introduits pour la première fois en 1984 [1, 2] pour pallier aux problèmes engendrés par les composites stratifiés, en l'occurrence le délaminage et de décollement au niveau des interfaces dû à la discontinuité des propriétés thermomécaniques. En effet, les FGM sont des matériaux composites dont la microstructure et par conséquent les propriétés (telles que le module de Young, le coefficient de Poisson, la masse volumique, la conductivité thermique etc...) varient graduellement et continument à travers l'épaisseur. Ils sont conçus pour une performance ou une fonction spécifique.

Les matériaux à gradient fonctionnel renforcés par des nanotubes en carbone sont de nouveaux matériaux qui s'inscrivent dans la gamme des matériaux composites. Les nanotubes en carbone, proposé par le Pr Sumio Iijima au Japon en 1991, n'ont cessé d'attirer de nombreux chercheurs de divers horizons en vue d'exploiter au maximum et dans divers domaines les propriétés physiques et chimiques remarquables de ces nouveaux matériaux. En effet, ces derniers exhibent une grande résistance et une grande rigidité (rapportées à la masse) avec une faible masse volumique. Ils présentent également d'excellentes propriétés électriques et thermiques. Ces caractéristiques suggèrent que ces nanotubes en carbone [3] peuvent être judicieusement utilisés comme renforcement dans les composites en polymères afin d'améliorer significativement leurs propriétés mécaniques, électriques et thermiques.

Les nanotubes se présentent comme un ou plusieurs tubes creux concentriques séparés de 0,34 nanomètre avec un diamètre interne de l'ordre du nanomètre et une longueur de l'ordre de quelques micromètres [3].

Beaucoup d'études ont été réalisées ces dernières années sur les matériaux composites renforcés par des nanotubes de carbone. Diverses recherches existent dans la littérature, en termes de flexion et flambage de FG-CNTRC (Functionally Graded-Carbone Nano-Tube Reinforced Composite). Un modeste effort a été fait pour inclure quelques contributions importantes à cette

introduction et pour mettre en évidence la littérature la plus pertinente disponible pour l'étude mécanique des FG-CNTRC : Ainsi K.M Liew et Ping Zhu et Z.X Lei [4] ont étudié la flexion des plaques FG-CNTRC avec la méthode des éléments finis a été utilisée. Dans cette étude, quatre types de distributions du matériau de renforcement aligné uni axialement ont été considérés, c'est-à-dire uniformes et trois types de distributions fonctionnellement gradée de nanotubes de carbone le long de la direction de l'épaisseur des plaques. Les résultats ont révélé les influences des fractions volumiques des nanotubes de carbone et des rapports largeur /épaisseur sur les réponses de flexion [5.6] et les formes des plaques FG-CNTRC. De plus, ils ont découvert que les CNT répartis entre les surfaces supérieures et inférieures sont plus efficaces que ceux qui sont distribués près du plan central, afin d'augmenter la rigidité des plaques avec les faisceaux FG-CNTRC. En plus Kiani [7] a étudié le flambage basé sur la théorie du premier ordre des plaques FG-CNTRC avec une méthode de KP-Ritz dans différentes conditions aux limites.

Le but recherché à travers cette étude est d'abord de nous permettre de nous familiariser et de comprendre la nature et les caractéristiques de ces nouveaux composites renforcés par des nanotubes en carbone. Nous devons déterminer leurs propriétés en fonction des coordonnées du point considéré et de la loi de mélange choisie. L'étude nous permettra d'apprendre à modéliser ces matériaux pour pouvoir analyser leurs comportements en flambage (sous des charges axiales de compression) et en flexion (sous une charge externe ponctuelle ou répartie). Pour cela, nous utiliserons la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre pour décrire le champ des déplacements et de rotation applicable aux plaques minces et moyennement épaisses. Nous analyserons également l'influence du type de distribution des nanotubes à travers l'épaisseur de la plaque sur l'évolution des propriétés mécaniques de celle-ci.

En se servant de la version statique du principe de Hamilton, nous déterminerons les relations fondamentales en termes de déplacements et rotations pour le cas d'une plaque composite moyennement épaisse renforcée par des nanotubes en carbone. Pour cela, nous déterminerons l'énergie de déformation d'une part et le travail des efforts externes d'autre part. Nous résoudrons ensuite le système d'équations différentielles couplées par une méthode analytique. Une comparaison des résultats obtenus avec ceux publiés est demandée pour démontrer la validité du code de calcul élaboré. Les résultats représentant les charges critiques de flambage, les déplacements et les contraintes seront commentés et des graphes appropriés seront tracés pour

montrer l'influence des paramètres considérés (dimensions géométriques et fraction volumique des nanotubes) dans cette étude.

Une étude paramétrique de flexion et de flambage pour montrer l'influence de fraction volumique, et l'effet de la géométrie de la plaque pour les quatre types de renforcement sera faite. Des interprétations des résultats seront données au fur et à mesure et enfin le travail s'achèvera par une conclusion générale.

***CHAPITRE 1***  
***GENERALITES SUR LES***  
***MATERIAUX COMPOSITES***

## 1.1. Introduction :

Ce chapitre offre une présentation synthétique des matériaux composites « modernes » utilisés dans la fabrication des produits industriels.

L'accent est mis sur la nature des différents constituants. Les aspects structurels et géométriques des composites ne sont abordés que brièvement [10].

## 1.2. Définitions de base :

- Homogène : même propriétés en tout point du matériau.
- Hétérogène : en 2 points différents, propriétés différentes.
- Isotrope : même propriétés dans toutes les directions.
- Isotrope transverse : il existe un axe de symétrie. Symétrie par rapport à une droite.
- Orthotrope : propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- Anisotrope : les propriétés sont différentes selon les différentes directions.

## 1.3. Définitions :

Dans un sens large, le mot « composite » signifie « constituer de deux ou plusieurs parties différentes ». Au fait, l'appellation « matériau *composite* » ou « *composite* » est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif, qui sera précisé tout au long de ce chapitre. Nous en donnons pour l'instant la définition générale suivante :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble Des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. [11] :

Le principal intérêt de l'utilisation des matériaux composites provient de ses excellentes caractéristiques. Ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- Légèreté.
- Grande résistance à la fatigue.
- Liberté de formes.
- Maintenance réduite.

- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone).
- Insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines.
- Une bonne isolation électrique.

On distingue deux types de composites : « les composites à grande diffusion » et « les composites à haute performance ».

### **1.3.1. Les composites à grande diffusion :**

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiels, qui sont :

Optimisation des coûts par diminution des prix de revient, sa composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe d'élaboration du matériau (moulage par contact, SMC et injection) .

### **1.3.2 Les composites à haute performance :**

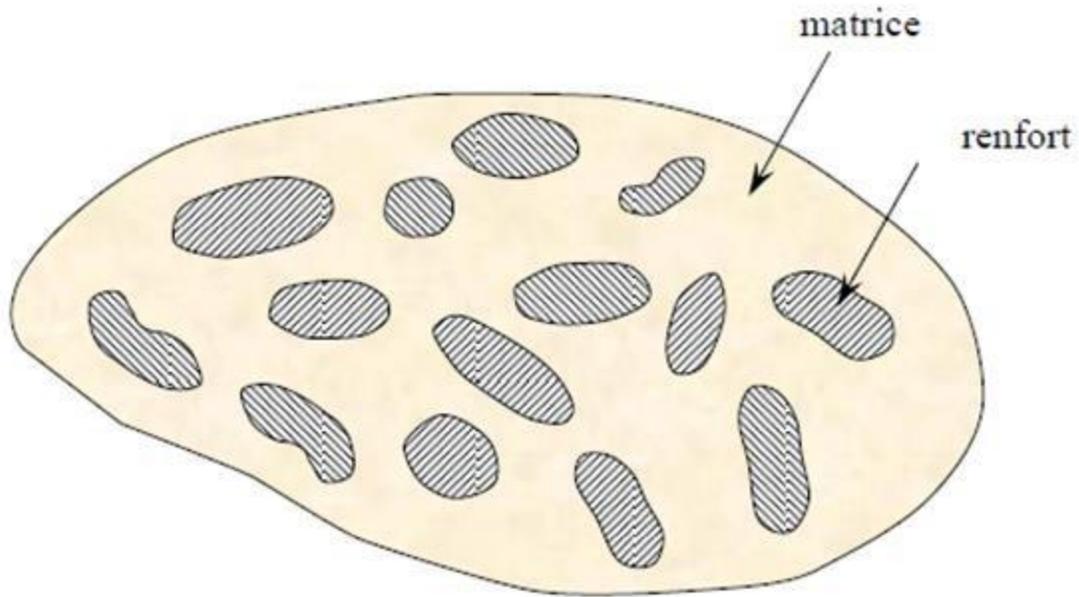
Les matériaux composites à hautes performances (tel que **les matériaux à gradient fonctionnel FGM**) sont utilisés dans le domaine d'aéronautique, l'Aerospace, la médecine...etc. où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées.

## **1.4 Caractéristiques générales :**

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la *matrice*. La phase discontinue est appelée le *renfort* ou *matériau renforçant* (**Figure 1.1**). Une exception importante à la description précédente est le cas de polymères modifiés par des élastomères, pour lesquels une matrice polymère rigide est chargée avec des particules élastomères. Pour ce type de matériau, les caractéristiques statiques du polymère (module d'Young, contrainte à la rupture, etc.) ne sont pratiquement pas modifiées par l'adjonction de particules élastomères, alors que les caractéristiques au choc sont améliorées.

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- des propriétés des matériaux constituants,
- de leur distribution géométrique, — de leurs interactions, etc.



**Figure 1.1.** Matériau composite.

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
<p>1. <i>Composites à matrice organique</i></p> <p><b>CMO</b> Papier, carton</p> <p>Panneaux de particules</p> <p>Panneaux de fibres</p> <p>Toiles enduites</p> <p>Matériaux d'étanchéité</p> <p>Pneumatiques</p> <p>Stratifiés</p> <p>Plastiques renforcés</p>	<p>Résine/charges/fibres cellulosiques</p> <p>Résine/copeaux de bois</p> <p>Résine/fibres de bois</p> <p>Résines souples/tissus</p> <p>Elastomères/bitume/textiles</p> <p>Caoutchouc/toile/acier</p> <p>Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères</p>	<p>Imprimerie, emballage, etc.</p> <p>Menuiserie</p> <p>Bâtiment</p> <p>Sports, bâtiment</p> <p>Toiture, terrasse, etc.</p> <p>Automobile</p> <p>Domaines multiples</p>

<p>2. <i>Composites à matrice minérale</i></p> <p><b>CMC</b></p> <p>Béton</p> <p>Composite carbone-carbone</p> <p>Composite céramique</p>	<p>Ciment/sable/granulats</p> <p>Carbone/fibres de carbone</p> <p>Céramique/fibres céramiques</p>	<p>Génie civil</p> <p>Aviation, espace, sports, biomédecine, etc. Pièces thermomécaniques</p>
<p>3. <i>Composites à matrice métallique</i></p> <p><b>CMM</b></p>	<p>Aluminium/fibres de bore</p> <p>Aluminium/fibres de carbone</p>	<p>Espace</p>
<p>4. <i>Sandwiches</i></p> <p>{ Peaux</p> <p>{ Ames</p>	<p>Métaux, stratifiés, etc.</p> <p>Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.</p>	<p>Domaines multiples</p>
<p>5. <b>Matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded material)</b></p>	<p><b>Métaux/céramique</b></p>	<p><b>Aérospatial, ingénierie, l'énergie nucléaire, optique, chimique, électronique, conversion d'énergie, matières biologiques, produits...</b></p>

**Tableau 1.1.** Types de composites, ainsi que leurs constituants et domaines d'application

## 1.5 Constituants des matériaux composites :

### 1.5.1 Les renforts :

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique à la traction et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques). Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri-directionnel ou plus). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la **figure (1.2)** [12].

### **1.5.1.1 Fibres de verre :**

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction des structures composites.

### **1.5.1.2 Fibres de Carbone :**

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres *précurseurs* utilisées sont des *fibres acryliques* élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur. Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone [12].

Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800, MR40, TR50, IM6, IM7, GY, M55J.

### **1.5.1.3 Fibres aramides :**

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisés. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

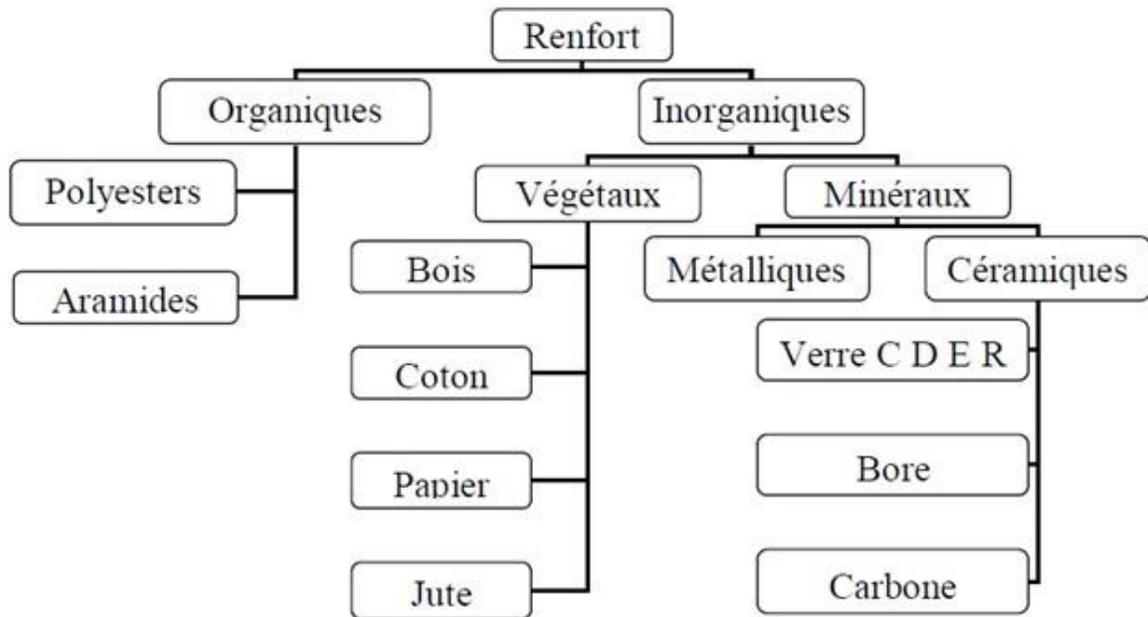
Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin, Japon).

### **1.5.1.4 Fibres céramiques :**

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre

500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- Fibres de Carbure de Silicium.
- Fibres de Bore.
- Fibres de Bore carbure de silicium.



**Figure 1.2.** Types de renfort

### **1.5.1.5 Caractéristiques mécaniques des fibres :**

Il existe différents types de fibres, elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible.

Renforts	$\rho \left( \frac{Kg}{m^3} \right)$	$\sigma_t^R (MPa)$	$\sigma_c^R (MPa)$	$E (GPa)$
<b>AS4</b>	1800		3599	235
<b>T300</b>	1700	1.2	3654	231
<b>IM6</b>		0.88	1460	
<b>IM8</b>	1800		5171	310
<b>kevlar 49</b>	1440	2.5	3620	124
<b>verre E</b>	2580	3.5	3450	69

**Tableau 1.2.** Caractéristiques mécaniques des fibres

### **1.5.2 Les matrices :**

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres. Elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique des fibres. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes.

#### **1.5.2.1 Les différentes natures des matrices :**

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.

Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

1. Composites à *matrice organique* (résine, charges), avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

2. Composites à *matrice métallique* (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- des fibres métalliques : bore,
- des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (Bor SiC).

3. Composites à *matrice minérale* (céramique), avec :

- des fibres métalliques : bore,
- des particules métalliques : cermets,
- des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

### **1.5.2.2 Charges et additifs :**

Enfin, des charges et additifs sont ajoutés au composite afin de lui conférer de nouvelles propriétés et, ainsi, de lui permettre de remplir davantage de fonctions techniques. De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso modo de la même façon que dans les plastiques « traditionnels ». On peut par exemple rencontrer (**figure 1.3**) :

- Des microbilles de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice ;
- Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière antiUV et comme antioxydant ;

- Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage... ;
- Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion... ;
- Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... ;



**Figure 1.3.** Exemples de charges utilisées dans les CMO :  
 (a) : microbilles de verre, (b) : noir de carbone, (c) : silice

Les additifs possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des agents d'interface, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice. On rencontre également :

- Des stabilisants, qui retardent les dégradations dues à l'oxygène, aux UV ou encore à l'ozone
- Des ignifugeants ou retardateurs de flamme (la plupart des polymères sont inflammables !), des agents de démoulage, des colorants...

Il est ainsi possible de conférer de nombreuses fonctions techniques au composite, et d'adapter finement ses propriétés aux besoins du concepteur.

## 1.6 Classification des matériaux composites :

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

## **1.6.1 Classification suivant la forme des constituants :**

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

### **1.6.1.1 Composites à particules :**

Un matériau composite est un composite à particules (tel que **les matériaux à gradient fonctionnel FGM**) lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Des particules de métaux fragiles tel le tungstène, le chrome et le molybdène, incorporé dans des métaux ductiles, augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

Les cermets sont également des exemples de composites métal-céramique à particules, adaptés à des utilisations à températures élevées. Par exemple, les cermets à base d'oxydes sont utilisés pour les outils de coupe à vitesse élevée, et pour les protections à hautes températures.

Également, des particules d'élastomère peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc, par diminution de la sensibilité à la fissuration.

Ainsi, les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse. Toutefois, compte tenu de leurs diversités, ce type de matériaux ne sera pas étudié dans le cadre de cet ouvrage.

### **1.6.1.2 Les composites à fibres :**

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- La nature des constituants,
- La proportion des constituants,
- L'orientation des fibres,

Suivant le cahier des charges imposées.

L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques. En conséquence, le présent ouvrage sera essentiellement consacré par la suite à l'étude de ce type de matériaux.

### **1.6.2 Classification suivant la nature des constituants :**

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

#### **1.6.2.1 Composites à matrice organique** (résine, charges), avec : [26]

- Des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- Des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

**1.6.2.2 Composites à matrice métallique** (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),

- Des fibres métalliques : bore,
- Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (Bor Sic).

### **1.6.2.3 Composites à matrice minérale** (céramique), avec :

- Des fibres métalliques : bore,
- Des particules métalliques : cermets,
- Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

## **1.7 Conclusion :**

Un matériau composite est un matériau hétérogène, formé d'au moins deux matériaux constituants non miscibles, disposé selon une organisation géométrique particulière. Alors, on distingue deux types de composites :

1. Les composites à grande diffusion : peu coûteux, et présentant près de 95% des composites à matrices organiques fabriquées, utilisés pour toutes les sortes de pièces faiblement sollicitées.
2. Les composites à haute performance : plus onéreux, mais présentant des qualités mécaniques supérieures, notamment employés dans l'aéronautique, le nautisme, les sports et loisirs ou encore la construction industrielle.

Quasiment tous les composites sont constitués :

- De renforts, prenant généralement la forme de fibres ou de particules, assurant l'essentiel des propriétés mécaniques du composite ;
- D'une matrice dans laquelle sont noyées les renforts, assurant la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts ainsi que l'essentiel des propriétés autres que mécaniques.
- De charges et additifs, L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre.

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants. En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres. Mais Selon la nature de la matrice, ils sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.

***CHAPITRE 2***

***LES MATERIAUX FGM ET LES  
NANO TUBES DE CARRBONES  
(NTC)***

## 2.1. Introduction :

Dans ces dernières années, la composition de plusieurs matériaux différents est souvent utilisée dans les composants structurels afin d'optimiser les réponses des structures subissant des charges sévères et des effets thermiques dus à des environnements complexes. Pour réduire les concentrations locales de contraintes induites par des transitions abruptes dans les propriétés du matériau, le concept de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) a été développé par des chercheurs au Japon au milieu des années 1980 où la transition entre différents matériaux est faite progressivement. Le résultat est une réduction considérable de la sévérité des contraintes interfaciales et de la préservation de la résistance structurelle et de la ductilité.

En général, les FGM sont fabriqués à partir d'un mélange de métaux et de céramiques et se caractérisent de manière à modifier graduellement la composition de chacun et la fraction volumique des constituants. En modifiant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, leurs propriétés thermomécaniques présentent un changement continu et régulier d'une surface à l'autre et, par conséquent, éliminent les problèmes d'interface et réduisent les concentrations de contraintes.

Des recherches fondamentales et pratiques sur les nanotubes ont montré des applications possibles dans divers domaines. Les applications réelles sont encore en cours de développement. Ce chapitre donne un aperçu de la technologie actuelle des nanotubes, avec un accent particulier sur la synthèse et la purification, les propriétés, les avantages et les applications.

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (**Figure 2.1**) ou discrète (**Figure 2.2**) à travers l'épaisseur (Mahi [14]). Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiales, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse

température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles :

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermique) ;
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température) ;

## **2.2. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :**

### **2.2.1 Types de matériaux fonctionnellement gradués :**

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et de le remplacer par l'interface progressivement changeante, qui a été traduite par la composition chimique changeante de ce composite. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine habituellement le type de FGM à utiliser. Dans l'application biomédicale, par exemple, certains implants doivent vraiment imiter l'organe humain qu'ils ont l'intention de remplacer ou de réparer, afin qu'ils puissent fonctionner correctement sans détruire les tissus environnants. Ils ont également besoin de pouvoir durer plus longtemps en service. On a constaté que la plupart du corps humain était constitué de FGM, en raison de l'exigence de fonctionnalité. C'est l'une des raisons pour lesquelles les implants doivent également être constitués de FGM, afin de faire correspondre la pièce en cours de remplacement ou de réparation. Les différents types de FGM qui se produisent maintenant comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté en détail dans les sections suivantes.

### **2.2.1.1 Composition chimique du FGM :**

C'est le type de matériaux fonctionnellement classés, où la composition chimique varie graduellement, en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait se faire sous la forme d'une seule phase, ou d'un matériau multi phase. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit en une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage [15]. Le changement progressif dans la répartition des éléments chimiques en phase unique entraîne la formation du matériau à gradation fonctionnelle. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau à phase unique (mais avec une composition chimique variable) en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins fréquent. Les matériaux fonctionnellement classés les plus couramment utilisés sont ceux avec une composition chimique polyphasée.

Les phases et la composition chimique sont faites pour varier selon le volume en vrac du matériau [16-17]. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideront à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçue. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication tels que le taux de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau.

Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre la composition de poudre requise couche par couche, puis on procède à un compactage en poudre puis à un frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieront selon la position spatiale dans le matériau à gradation fonctionnelle.

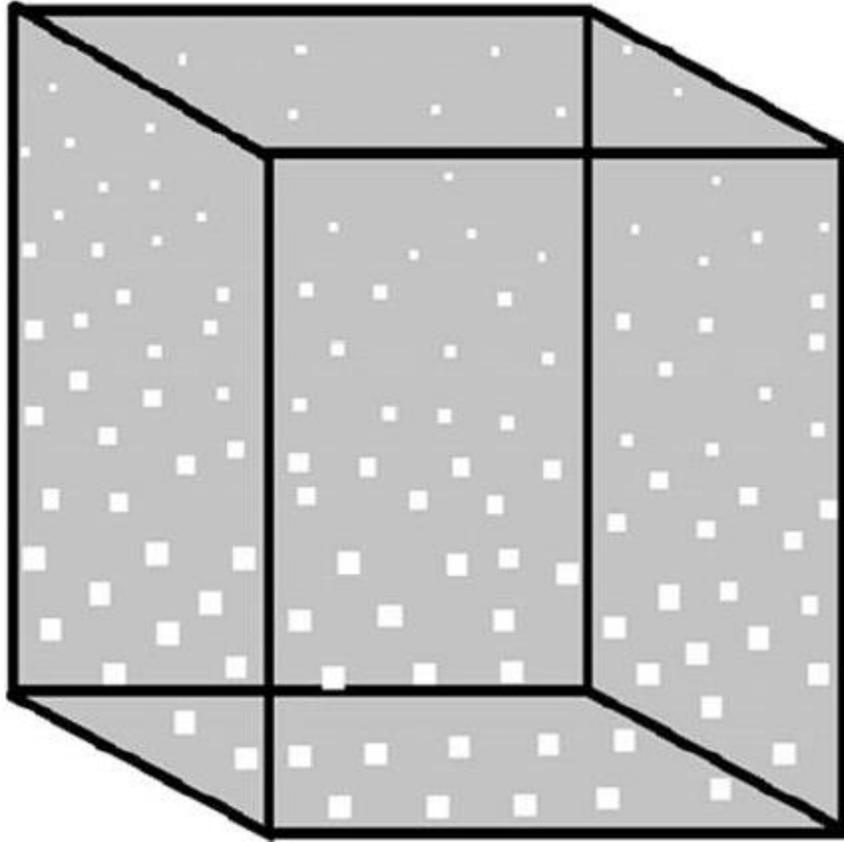
### **2.2.1.2. Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité :**

Le matériau à gradient fonctionnel à gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec la variation de la position spatiale dans le matériau en vrac. La forme et la taille du pore sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnelle. Le diagramme schématique d'un gradient de porosité typique, un matériau à gradient fonctionnel est représenté sur la **Figure 2.1**.

Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer se compose de porosité à gradient fonctionnel et la porosité graduée aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant, et elle contribue également à la circulation sanguine des tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids global de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant.

La gradation de la taille des pores peut être obtenue en faisant varier les granulométries de poudre qui sont utilisées à différents endroits du matériau en vrac pendant le processus de gradation. Il peut également être produit en faisant varier les paramètres de traitement de la production ou en utilisant différents paramètres de frittage pour produire le gradient de porosité requis, un matériau à gradient fonctionnel est représenté sur la **Figure 2.1**.

Le gradient de porosité dans un FGM a également un effet sur la résistance à la traction et le module de Young du matériau. Un certain nombre de FGM à gradient de porosité ont été rapportés dans la littérature pour une application biomédicale.

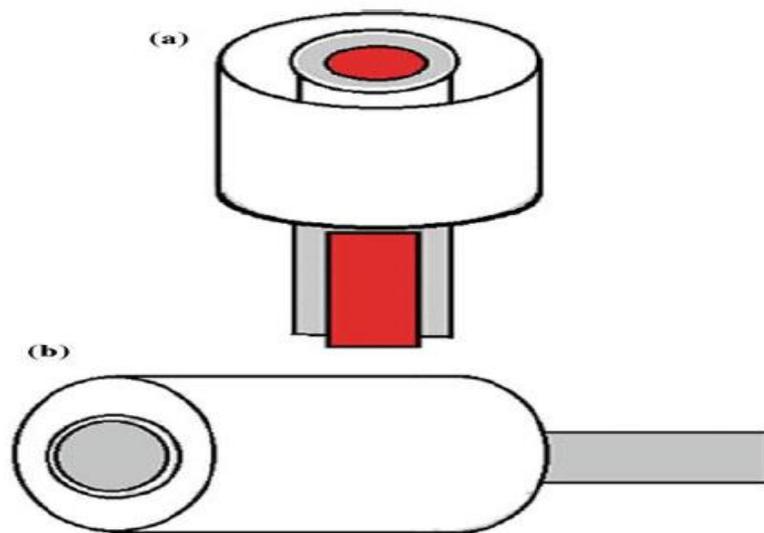


**Figure 2.1.** Schéma de l'excision à gradient de porosité.

### **2.2.1.3. Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure :**

Le matériau à gradient fonctionnel de microstructure est un autre type de FGM, où la microstructure est conçue de sorte que différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation en microstructures peut être réalisée pendant le processus de solidification, de telle sorte que la surface de la matière est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est autorisé à refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles sur la surface du matériau vers la partie la plus interne. En outre, la gradation microstructurale peut être obtenue grâce à un processus de traitement thermique contrôlé. Par exemple, une microstructure variable peut être produite par un traitement thermique contrôlé d'une partie cylindrique en alliage de titane, comme le montre le diagramme schématique de la **Figure 2.2.**

On peut obtenir une microstructure à gradation fonctionnelle par d'abord permettre à un métal liquide, dont la température de fusion est inférieure à la température de fusion de l'alliage de titane, et de telle sorte que soit atteint la température de recristallisation de l'alliage de titane lorsque ce métal fondu est exécuté dans un Type d'installation de l'échangeur de chaleur, comme le montre la **Figure 2.2.a**. Le métal liquide est autorisé à fonctionner pendant une certaine période de temps, puis retiré, puis la partie est autorisée à refroidir. La chaleur est transférée de la partie interne du cylindre à la partie externe. On s'attend à ce que la température de la partie la plus interne du cylindre soit beaucoup plus élevée que celle de la température la plus à l'extérieur.



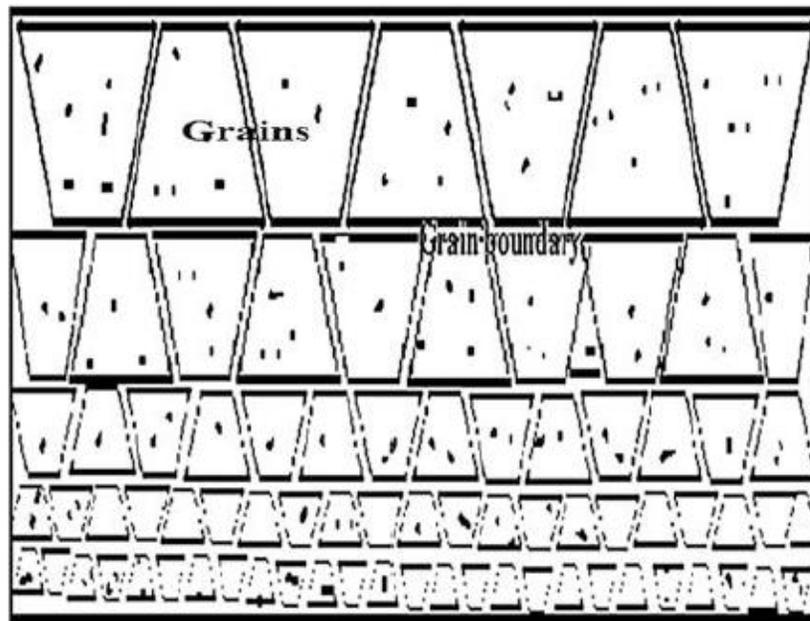
**Figure 2.2** Schéma de principe d'une partie cylindrique soumise à :  
(a) écoulement d'un métal liquide et, (b) de l'eau de refroidissement.

Cela entraînerait une microstructure variable, car la partie est autorisée à refroidir. La partie extérieure se comporterait comme un dissipateur de chaleur, et la microstructure de cette zone serait plus grande en raison de la croissance des grains, tandis que la microstructure la plus intérieure serait plus petite et équi-axe, en raison du processus de recristallisation et le refroidissement lent.

Dans un autre type de processus de gradation microstructural, le cylindre pourrait être chauffé à une certaine température, puis l'eau de refroidissement pourrait être traversée par la partie

interne du cylindre également dans une configuration d'échangeur de chaleur, comme le montre la **Figure.2.2. b**. La partie interne du cylindre serait soumise à un refroidissement rapide, provoquant ainsi la formation d'une microstructure non équilibrée sur cette face. La microstructure la plus interne consisterait en une microstructure martensitique plus difficile, tandis que la microstructure du cylindre, loin de la partie la plus interne, serait complètement différente de la microstructure sur la partie extérieure du cylindre.

Un diagramme schématique d'une microstructure classiquement gradués est représenté sur la **Figure 2.3**. C'est parce que la partie la plus extérieure du cylindre refroidirait plus lentement, ce qui favoriserait la formation d'une microstructure plus à l'équilibre et une microstructure largement équiaxe serait produite. Les gradients dans la microstructure en raison du traitement thermique pourraient également provoquer des changements dans la composition élémentaire, et dans certains cas, la phase intermétallique pourrait être produite dans la microstructure graduée.

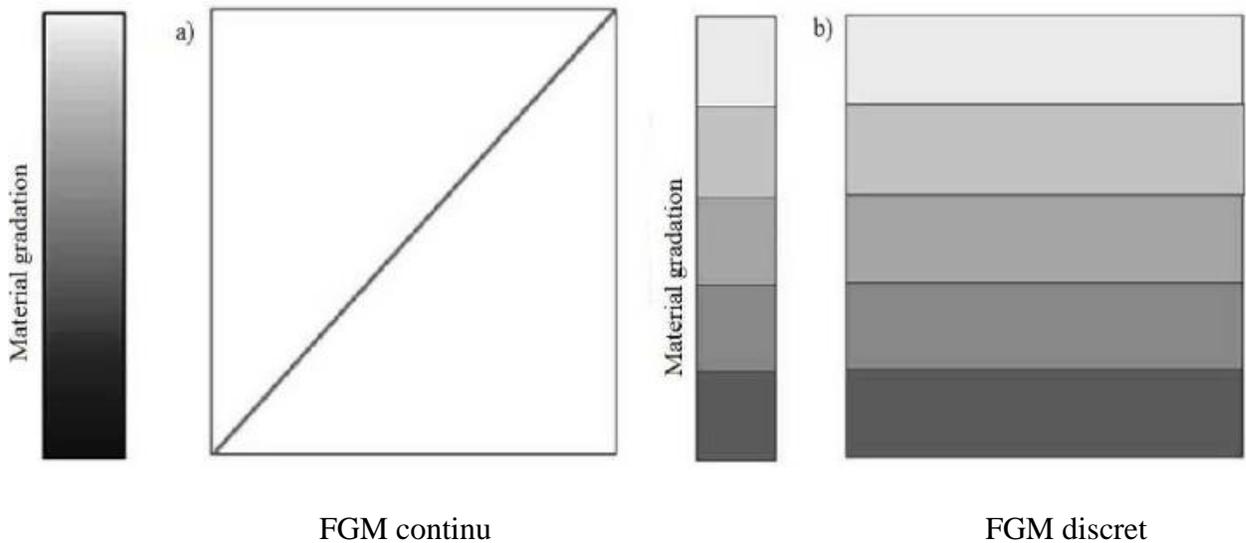


**Figure 2.3.** Schéma de microstructure classée.

La microstructure graduée entraînerait un changement graduel des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et parce que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau.

Le FGM de gradient microstructural trouve leur application dans les composants qui doivent avoir une surface très difficile de résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact important qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau à gradient fonctionnel comprend l'acier durci, les cames ou la couronne dentée, les roulements ou les arbres, et les applications de turbine [18-19]. Les domaines d'application des différents types de FGM sont présentés dans la section suivante et sont classés selon différents critères :

- Selon la structure : FGM structuré continue et discontinu (Layered) FGM. La différence est montrée par la **Figure 2.4.a** et la **Figure 2.4.b**.



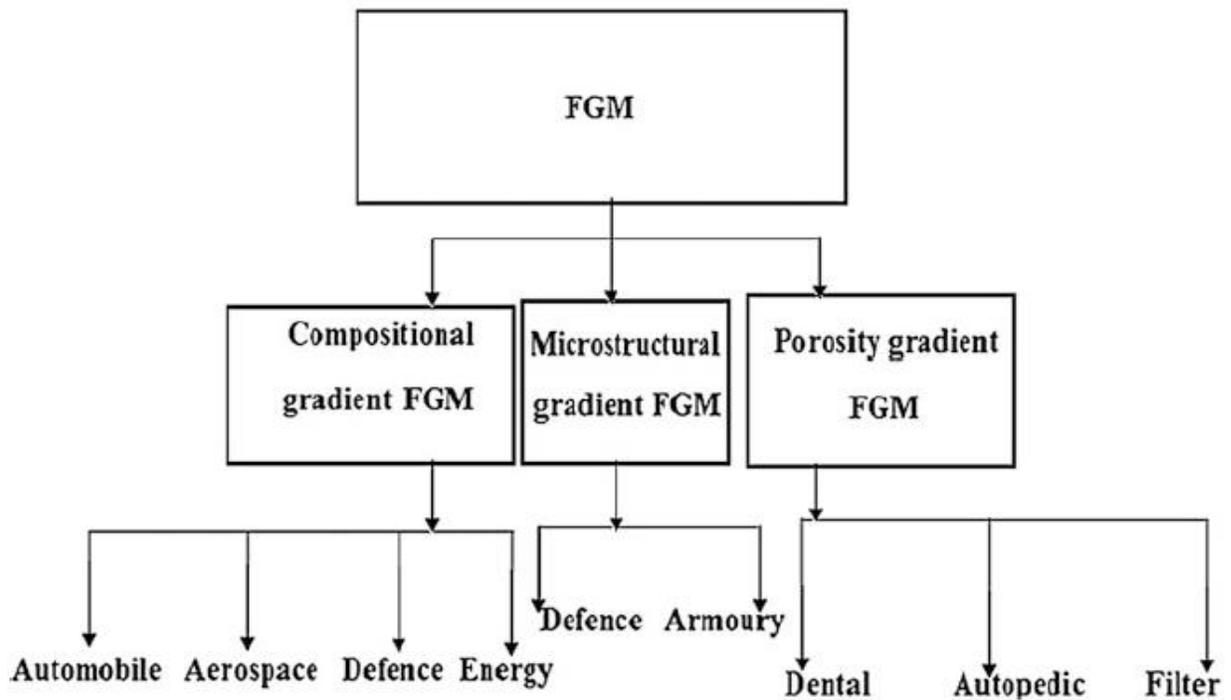
**Figure 2.4.** Schéma du concept de gradation.

- Selon le processus de fabrication : FGM mince et Bulk FGM.

### **2.2.2. Domaines d'application du FGM :**

Les caractéristiques importantes des FGM les ont favorisés dans presque tous les domaines humains. Les matériaux à gradation fonctionnel sont actuellement appliqués dans un certain nombre d'industries, avec un énorme potentiel à utiliser dans d'autres applications à l'avenir. Les applications actuelles et l'application futuriste des FGM sont présentées dans cette section. Les domaines d'application actuels comprennent l'aéronautique, l'automobile, la biomédicale, la défense, l'électricité / électronique, l'énergie, la marine, l'optoélectronique et la thermoélectronique. La **Figure 2.5** présente les différents types de FGM et leurs domaines d'application. les FGM offrent une grande promesse dans les applications avec des conditions de

fonctionnement difficiles, par exemple, pour des garnitures résistant à l'usure pour la manipulation de grandes particules de minerais abrasifs lourds dans l'industrie minière, pour les blindages thermiques de la fusée, pour les composants du moteur thermique, pour les tubes échangeurs de chaleur, pour les Parements au plasma pour les réacteurs à fusion dans les réacteurs nucléaires, les générateurs thermoélectriques et les applications isolantes électriques[20].



**Figure 2.5.** Domaines d'application pour les trois types de matériaux fonctionnellement gradués.

### **2.2.3. Avantages des FGM :**

Certains des avantages des matériaux fonctionnellement classés sont mis en évidence ci-dessous :

- Le FGM comme une couche d'interface pour connecter deux matières incompatibles peut grandement améliorer la force de liaison.
- Le revêtement de FGM et l'interface peuvent être utilisés pour réduire la contrainte résiduelle et le stress thermique.

- Le revêtement en FGM peut être utilisé pour relier des matériaux différents et permet d'éliminer la contrainte à l'interface.
- Le revêtement en FGM améliore la résistance des connexions
- Le FGM a la capacité de contrôler la déformation.
- Le FGM fournit également les occasions de prendre les avantages des différents types de matériaux, par exemple, des céramiques et des métaux. La partie céramique présente une bonne résistance thermique, une résistance à l'usure et à l'oxydation (rouille), alors que la partie métallique a une résistance à la rupture supérieure, une résistance élevée et une forte capacité de liaison.
- Les FGM sont utilisées dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur des pales de turbine dans un moteur à turbine à gaz.

#### **2.2.4. Inconvénients du FGM :**

Certaines questions nécessitent une étude approfondie et une attention particulière, principalement dans les aspects suivants :

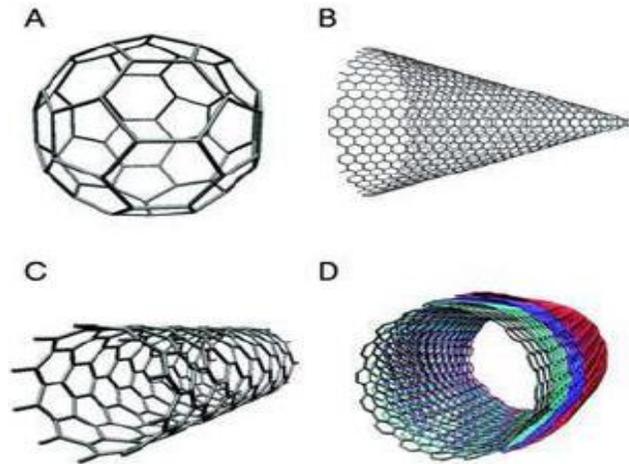
- Une base de données appropriée de matériau à gradient fonctionnel (comprenant les propriétés de matériaux, certains paramètres, le procédé de préparation des matériaux et de l'évaluation de la performance) doit être mise au point.
- Encore besoin d'autres recherches et un examen sur les propriétés physiques du modèle de matériau. La structure microscopique et la relation quantitative entre les conditions de préparation à établir afin de prévoir avec précision et fiabilité les propriétés physiques des matériaux classés.
- La recherche doit se concentrer sur la variation du gradient du matériau par rapport à la relaxation des contraintes thermiques et garder la route ouverte à la variété des applications d'ingénierie.
- Les matériaux à gradient fonctionnel préparés sont des échantillons de petite taille ou des structures simples. Des matériaux plus pratiques et valorisés doivent encore être développés.
- Les coûts de préparation sont très élevés.

## **2.3. Les nanotubes de carbone NTC :**

### **2.3.1. Histoire des nanotubes de carbone :**

Depuis leur découverte en 1991 par Iijima [3], des nanotubes de carbone ont été étudiés par de nombreux chercheurs partout dans le monde. Leur grande longueur (jusqu'à plusieurs microns) et un petit diamètre (quelques nanomètres) donnent un grand rapport d'élanement. Ils peuvent être considérés comme la forme presque unique de fullerènes. Par conséquent, ces matériaux devraient posséder d'autres propriétés électroniques, mécaniques et moléculaires intéressantes. Surtout au début, toutes les études théoriques sur les nanotubes de carbone ont porté sur l'influence de la structure presque unidimensionnelle sur les propriétés moléculaires et électroniques.

Les fullerènes sont des molécules entièrement composées de carbone sous la forme d'une sphère creuse, d'un ellipsoïde ou d'un tube. Le C<sub>60</sub> sphérique (**Figure 2.6.a**) est composé de 60 atomes de carbone disposés dans une série d'hexagones et de pentagones entrelacés (icosaèdre tronqué) ; Cependant, des configurations de Fullerène moins sphériques, telles que C<sub>20</sub>, C<sub>36</sub>, C<sub>70</sub> et C<sub>78</sub>, ont également été décrites. Les CNH sont des gaines en forme de cornes composées de feuilles de graphène à paroi unique, de 2 à 3 nm de diamètre, qui se regroupent en agrégats d'un diamètre d'environ 80 nm. Les CNH individuels sont des structures en carbone graphite de forme conique, avec leurs pointes par des anneaux à cinq chaînons (**Figure 2.6.b**). Les NTC ont des diamètres relativement bien définis avec des longueurs contrôlables, tandis que les CNH augmentent de diamètre à mesure que leur longueur augmente, car, à mesure que la longueur augmente, la base de l'anocone augmente.



**Figure 2.6** : molécules de fullerène.

### **2.3.2. Morphologie NTC :**

Les NTC appartiennent à la famille Fullerène d'allotropes carbone. Ce sont des molécules cylindriques constituées d'un arrangement hexagonal de  $sp^2$  atomes de carbone hybridé. Ils sont décrits comme des cylindres creux formés par laminage de couches simples ou multiples de feuilles de graphène dans des bouteilles sans soudure. Ces structures cylindriques ont deux formes (SWNT) et des nanotubes de carbone à paroi multiple (MWNT). Les SWNT sont composés d'une seule couche de graphène cylindrique coiffée aux deux extrémités dans une disposition hémisphérique des réseaux de carbone. La fermeture du cylindre résulte de l'inclusion de structures CC pentagonales et heptagonales pendant le processus de croissance. Les MWNT comprennent plusieurs à des dizaines de cylindres concentriques de coquilles graphitiques, chacun formant un SWNT. Les MWNT ont généralement un diamètre extérieur plus grand (2.5-100 nm) que les SWNT (0,6-2,4 nm) et se composent d'un nombre variable de couches SWNT concentriques, avec une séparation inter couches d'environ 0,3 nm. Les SWNT ont un diamètre mieux défini, tandis que les MWNT sont plus susceptibles d'avoir des défauts de structure, ce qui entraîne une nanostructure moins stable [21].

### **2.3.3. Structure nanotube de carbone :**

De nombreuses structures exotiques de fullerènes existent : des sphères régulières, des cônes, des tubes et des formes aussi compliquées et étranges. Ici, nous décrivons certaines des structures les plus importantes et les plus connues.

Les nanotubes (SWNT) peuvent être considérés comme des feuilles de graphène à longue enveloppe. Comme indiqué précédemment, les nanotubes ont généralement un rapport longueur / diamètre d'environ 1000 afin qu'ils puissent être considérés comme des structures à peu près unidimensionnelles.

Plus détaillé, un SWNT se compose de deux régions distinctes avec différentes propriétés physiques et chimiques. Le premier est le flanc du tube et le second est le capuchon d'extrémité du tube. La structure de capuchon d'extrémité est similaire ou dérivée à partir d'un plus petit fullerène, tel que C<sub>60</sub>. Ces atomes de carbone placés dans des hexagones et pentagones forment les structures de capuchon d'extrémité. On peut facilement dériver du théorème d'Euler que douze pentagones sont nécessaires pour obtenir une structure de cage fermée qui ne comporte que des pentagones et des hexagones. La combinaison d'un pentagone et de cinq hexagones environnants entraîne la courbure souhaitée de la surface pour entourer un volume.

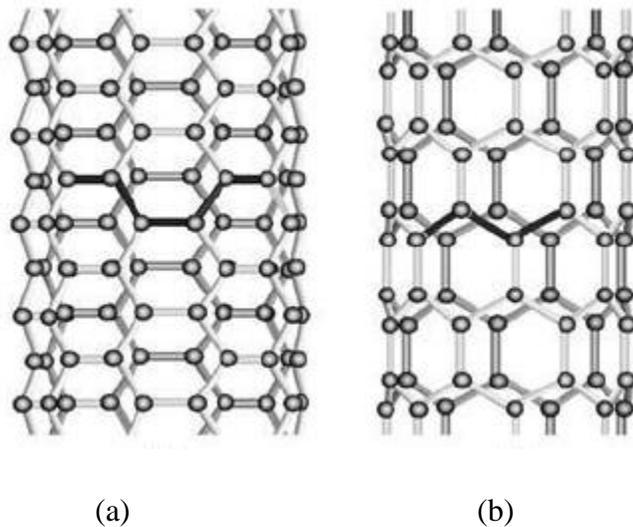
Une deuxième règle est la règle du pentagone isolée qui stipule que la distance entre les pentagones sur la coque Fullerène est maximisée afin d'obtenir une courbure locale minimale et un stress superficiel, ce qui donne une structure plus stable. La structure stable la plus petite qui peut être faite de cette façon est C<sub>60</sub>. Une autre propriété est que tous les Fullerènes sont composés d'un nombre pair d'atomes de carbone car ajouter un hexagone à une structure existante signifie ajouter deux atomes. L'autre structure dont un SWNT est composé est un cylindre. Il est généré lorsqu'une feuille de graphène d'une certaine taille est enveloppée dans une certaine direction. Comme le résultat est symétrique par cylindre, nous ne pouvons rouler que dans un ensemble discret de directions pour former un cylindre fermé.

Les nanotubes multi-murs (MWNT) peuvent être considérés comme une collection de SWNT concentriques à différents diamètres. La longueur et le diamètre de ces structures diffèrent beaucoup de ceux des SWNT et, bien sûr, leurs propriétés sont également très différentes.

### **2.3.4. Chiralité des nanotubes de carbone :**

La chiralité d'un SWNT est obtenue à partir de son vecteur chiral  $C$ , défini par une paire d'entiers  $(n, m)$  obtenus à partir de l'agencement des hexagones de graphite par rapport à l'axe SWNT.

La configuration du fauteuil (**Figure 2.7.a**) avec les vecteurs chiraux  $(n, n)$  se caractérise par la forme perpendiculaire de la chaise à l'axe du tube, alors que la conformation zigzag (**Figure.2.7. b**) est caractérisée par des vecteurs  $(n, 0)$  et a une forme en V perpendiculaire à l'axe du tube. La chiralité des SWNT détermine leur conductivité, permettant leur développement potentiel dans une grande variété de dispositifs de commutation électroniques basés sur SWNT.



**Figure 2.7 :** La chiralité du NTC.

### **2.3.5. Propriétés des NTC :**

Les propriétés électroniques, moléculaires et structurales des nanotubes de carbone sont déterminées dans une large mesure par leur structure presque unique. Les propriétés les plus importantes des NTC et leur origine moléculaire sont indiquées ci-dessous [22] :

#### **2.3.5.1. Réactivité chimique :**

La réactivité chimique d'un NTC est, comparée à une feuille de graphène, améliorée en conséquence directe de la courbure de la surface NTC. La réactivité des nanotubes de carbone est directement liée à l'incompatibilité orbitaire par pi-orbital provoquée par une courbure accrue. Par conséquent, une distinction doit être faite entre le flanc et les extrémités d'un nanotube. Pour la

même raison, un diamètre de nanotubes plus petit entraîne une réactivité accrue. La modification chimique covalente des parois latérales ou des extrémités s'est révélée possible. Par exemple, la solubilité des NTC dans différents solvants peut être contrôlée de cette façon. Cependant, l'étude directe des modifications chimiques sur le comportement des nanotubes est difficile car les échantillons de nanotubes bruts ne sont pas encore assez purs.

#### **2.3.5.2. Conductivité électrique :**

Selon leur vecteur chiral, les nanotubes de carbone à petit diamètre sont semi-conducteurs ou métalliques. Les différences dans les propriétés conductrices sont causées par la structure moléculaire qui aboutit à une structure de bande différente et donc à un écart de bande différent. Les différences de conductivité peuvent facilement être obtenues à partir des propriétés de la feuille de graphène. Il a été montré que  $(n, m)$  nanotube est métallique en tant que compte que :  $n = m$  ou  $(nm) = 3i$ , où  $i$  est un entier et  $n$  et  $m$  définissent le nanotube. La résistance à la conduction est déterminée par des aspects de la mécanique quantique et a été prouvé être indépendant de la longueur du nanotube.

#### **2.3.5.3. Activité optique :**

Les études théoriques ont révélé que l'activité optique de nanotube chiral disparaît si les nanotubes deviennent plus grands. Il est donc prévu que d'autres propriétés physiques sont influencées par ces paramètres aussi. L'utilisation de l'activité optique peut entraîner des dispositifs optiques dans lesquels les NTCs jouent un rôle important.

#### **2.3.5.4. Force mécanique :**

Les nanotubes de carbone ont un très grand module d'Young dans leur direction axiale. Le nanotube dans son ensemble est très flexible en raison de son grand rapport d'élancement. Par conséquent, ces composés sont potentiellement appropriés pour des applications dans des matériaux composites qui nécessitent des propriétés anisotropes.

#### **2.3.6. Limitations des NTC :**

- Le manque de solubilité dans la plupart des solvants compatibles avec le milieu biologique (à base aqueuse).
- la production de lots structurellement et chimiquement reproductibles de nanotubes de carbone ayant des caractéristiques identiques.
- La difficulté à maintenir une qualité élevée et impuretés minimales [23].

## **2.4. FGM renforcé par les nanotubes de carbone (FG-CNTRC) :**

### **2.4.1. Définition :**

Les matrices métalliques ou en céramique renforcées fonctionnellement offrent des améliorations dans les propriétés thermomécaniques telles que : la légèreté, la stabilité dimensionnelle, les propriétés de barrière ignifuge et résistance à la chaleur. Par rapport aux métaux, les composites FGM renforcés par les CNT présentent des rapports de résistance à la densité plus élevés, des rapports de rigidité à la densité plus élevée, une meilleure résistance à la fatigue, une plus grande résistance à l'usure et des propriétés de résistance à des températures élevées.

### **2.4.2. Applications des FGM renforcées par les NTC :**

La technologie FGM offre un grand potentiel pour créer la révolution technologique de la prochaine génération, en particulier dans le domaine de la biotechnologie et de la nanotechnologie.

Les matrices métalliques renforcées de NTC sont classiquement utilisées dans les outils de coupe, l'usinage de matériaux résistant à l'usure, les mines et le forage géothermique en raison de leur combinaison unique de dureté, de ténacité et de résistance à la chaleur. Les matériaux composites renforcés fonctionnellement de NTC ont la capacité de générer de nouvelles fonctionnalités et d'exécuter de nouvelles fonctions plus efficaces que les plus grandes structures et machines. En raison de la variation fonctionnelle de leurs compositions et de leurs propriétés physiques / chimiques (par exemple, stabilité, dureté, conductivité, réactivité, sensibilité optique, point de fusion, etc.), ils peuvent être manipulés pour améliorer les propriétés globales des matériaux classiques. Certaines des applications actuelles et futuristes des FGM sont répertoriées comme suit :

#### **• Commercial et industriel**

Certaines des applications dans le domaine commercial et industriel sont : les récipients sous pression, les réservoirs de carburant, les inserts d'outils de coupe, les cas d'ordinateur portable, les pales de turbines éoliennes, les bouteilles d'air de lutte contre l'incendie, les tubes cryogéniques à scanner IRM, les cadres de lunettes, les instruments de musique, l'arbre du moteur de forage, les rayons X Tables, casques.

### • **Automobiles**

Dans le domaine de l'automobile, les applications comprennent : les chambres de combustion (SiC-SiC), les garnitures de cylindre moteur (Al-SiC), les pistons moteurs diesel (SiCw / Al-alliage), les ressorts à lames (Eglass / époxy), les arbres d'entraînement (Al-C), Volants (Al-SiC), freins de voiture de course, amortisseurs (SiCp / Al-alliage).

### • **Équipement et structure aérospatiale**

Les FGM sont très utiles dans l'aéronautique spécialement pour la buse de fusée (TiAl-SiC), les panneaux d'échange de chaleur, la structure de treillis spatial, les réflecteurs, les panneaux solaires, le boîtier de caméra, les roues de turbine (fonctionnement supérieur à 40 000 tr / min), les capuchons de nez et le bord d'attaque des missiles et Navette spatiale, etc.

### • **Sous-marine**

Certaines des applications des FGM pour sous-marine impliquent : arbre de propulsion (carbone et fibres de verre), coque de pression cylindrique (graphite / époxy), domes sonar (verre / époxy), système de tuyauterie composite, bouteilles de plongée (Al-SiC).

### • **Biotechnologie**

Les bio-composites en gel polyvinylique renforcé à base de nano hydroxyapatite à gradient fonctionnel (Nano HA / PVA) peuvent être préparés par une méthode de coulée couche par couche combinant avec la technologie des cycles de congélation / décongélation. Nano HA / PVA gel bio composites ont été un matériau de réparation de cartilage articulaire artificiel prometteur et excellent. Par rapport aux matériaux à base d'hydrogel tels que ; L'alcool polyvinylique (PVA), l'acide poly lactique et le chitosane, les bio composites nano HA / PVA possèdent une bio activité et des propriétés mécaniques supérieures en raison de l'existence de nano HA dans les composites. Les applications potentielles des FGM sont à la fois diverses et nombreuses. D'autres applications des CNT dans FGM ayant des applications récentes sont les suivantes :

- Les actionneurs piézoélectriques à gradation fonctionnelle renforcés par la CNT.
- Revêtements de four et éléments de protection thermique en microélectronique.

- Les outils et les matrices à gradient fonctionnel renforcé par la CNT pour une meilleure gestion thermique, une meilleure résistance à l'usure, une réduction de la ferraille et une amélioration de la productivité des procédés.
- Les matériaux de phosphate de calcium à base de polymère renforcés par la CNT ont été renforcés pour le remplacement des os [24].

### **2.5. Conclusion :**

Les FGM fournissent un changement relatif en termes de propriétés des matériaux sur la distance et la direction. Ainsi, ils disposent d'une large gamme d'applications d'ingénierie qui devrait augmenter à mesure que le coût des processus de fabrication de ces matériaux sera réduit en améliorant les techniques de traitement.

Cette modeste recherche sur des nanotubes de carbone révèle une vue d'ensemble sur la structure, la morphologie et leurs propriétés ainsi que leurs avantages et leurs applications.

***CHAPITRE 3***  
***MODELISATION, THEORIES DE***  
***DEFORMATIONS ET FORMULATION***  
***ENERGITIQUE DES PLAQUES***  
***FG-CNTRC***

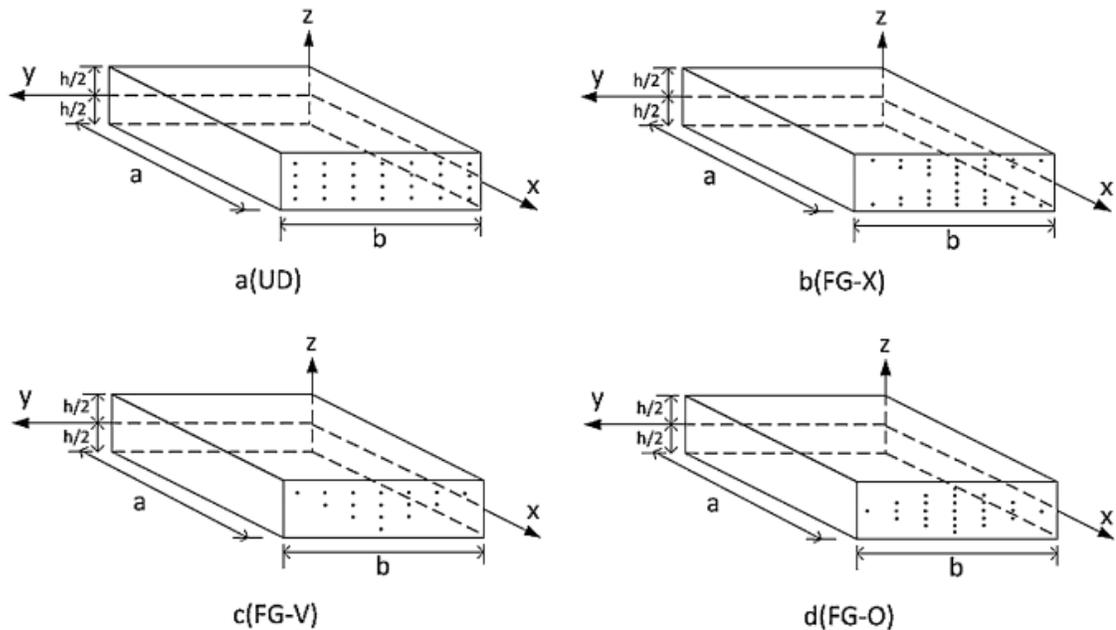
### 3.1. Introduction :

L'objectif de ce chapitre est de modéliser la plaque FG-CNTRC, ainsi que d'explicitier deux théories de plaques composites couramment utilisées, à savoir la théorie classique des plaques et la théorie de la plaque de déformation en cisaillement du premier ordre incluant l'effet de l'inertie de rotation. Pour donner un aperçu des théories discutées dans ce chapitre, un aperçu de la littérature pertinente sur les théories des plaques est inclus. Donc le présent chapitre a pour objectif d'établir les équations de mouvement de notre système structural, soit la plaque FG-CNTRC en se basant sur les théories sus-citées.

### 3.2. Modélisation d'une plaque FG-CNTRC :

- **Plaque composite à gradient fonctionnel renforcée aux nanotubes de carbone.**

Considérons une plaque FG-CNTRC avec la longueur  $a$ , la largeur  $b$  et l'épaisseur  $h$  comme indiqué sur la **Figure 3.1** :



**Figure 3.1.** La distribution des NTC dans une matrice SWCNT.

La matrice polymère de la plaque composite est renforcée par les SWCNT. La distribution des CNT dans une matrice peut être FG ou uniforme. Dans cette étude, on considère quatre types

de FG avec le cas réparti uniformément. UD, FG-O, FG-V et FG-X représentant les distributions FG des CNT dans la matrice polymère. La distribution uniforme est affichée par UD. Dans cette recherche, l'approche de la règle modifiée des mélanges qui contient les paramètres d'efficacité est largement utilisée pour extraire les propriétés élastiques de la plaque FG-CNTRC [24] :

$$E_{11} = \eta_1 \cdot V_{CNT} \cdot E_{11}^{CNT} + V_m \cdot E_m \quad (3.1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (3.2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3.3)$$

Où  $(E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT})$  sont les modules de Young et le module de cisaillement de NTC, respectivement.  $(E_m, G_m)$  Sont le module de Young et le module de cisaillement de la matrice polymère ;  $\eta_1, \eta_2$  et  $\eta_3$  sont les paramètres d'efficacité des NTC. La fraction volumique des NTC et de la matrice est désignée respectivement par  $V_{CNT}$  et  $V_m$ , qui peut être donnée par [25] :

$$V_m + V_{CNT} = 1 \quad (3.4)$$

Le coefficient de Poisson et la masse volumique effectifs dépendent faiblement de la position et sont exprimés par :

$$\nu_{12} = V_{CNT}^* \cdot \nu_{12}^{CNT} + V_m \cdot \nu_m \quad (3.5)$$

$$\rho = V_{CNT} \cdot \rho_{CNT} + V_m \cdot \rho_m \quad (3.6)$$

Où  $\nu_{12}^{CNT}, \rho_{CNT}$  et  $\nu_m, \rho_m$  sont le coefficient de Poisson et la masse volumique de NTC et de la matrice, respectivement.

La fraction volumique des NTC en fonction de la coordonnée z dans la direction de l'épaisseur peut être exprimée comme suit :

$$\left. \begin{aligned} V_{CNT}(z) &= V_{CNT}^* && \text{(UD CNTRC)} \\ V_{CNT}(z) &= \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^* && \text{(FG - V CNTRC)} \\ V_{CNT}(z) &= 2 \left(1 + \frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* && \text{(FG - O CNTRC)} \\ V_{CNT}(z) &= \left(\frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* && \text{(FG - X CNTRC)} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Où :

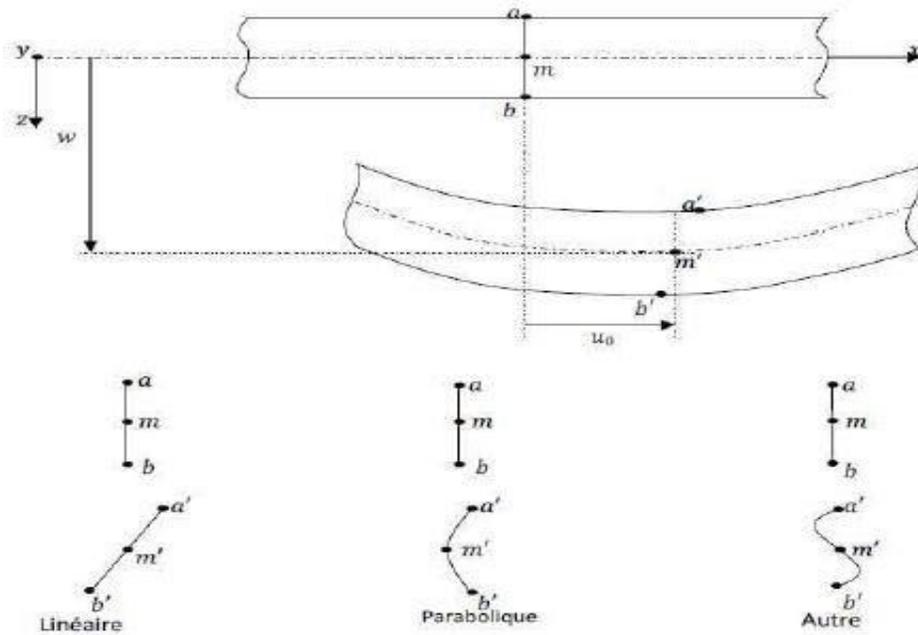
$$V_{CNT}^* = \frac{W_{CNT}}{W_{CNT} + \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) - \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) \cdot W_{CNT}} \quad (3.8)$$

$W_{CNT}$  : Est la fraction massique des nanotubes qui est la même pour les 4 types de distributions.

### 3.3. Vue d'ensemble des théories de la plaque FGM :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classique et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D).

Les théories des plaques équivalentes à une seule couche (ESL) sont dérivées de la théorie de l'élasticité 3-D en faisant des hypothèses appropriées concernant la cinématique de déformation ou l'état de contrainte par l'épaisseur du stratifié. Ces hypothèses permettent la réduction d'un problème 3-D à un problème 2-D. Dans la théorie de l'élasticité tridimensionnelle ou dans une théorie en couches, chaque couche est modélisée en solide 3-D.



**Figure 3.2.** Déformation de la section normale par rapport au plan moyen.

Les théories de plaques composites stratifiées à une seule couche équivalente sont celles dans lesquelles une plaque stratifiée hétérogène est traitée comme une couche unique statiquement équivalente ayant un comportement constitutif complexe, réduisant le problème continu 3D à un problème 2D. Les théories ESL sont développées en supposant la forme du champ de déplacement ou du champ de contrainte comme une combinaison linéaire de fonctions inconnues et la coordonnée d'épaisseur [26-28] :

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N (z)^j \varphi_i^j(x, y, t) \quad (3.9)$$

Où  $\varphi_i$  est la  $i$ ème composante du déplacement ou de la contrainte,  $(x, y)$  les coordonnées dans le plan,  $z$  la coordonnée d'épaisseur,  $t$  le temp, et  $\varphi_i^j$  sont des fonctions inconnues à déterminer.

Lorsque  $\varphi_i$  sont des déplacements, les équations régissant  $\varphi_i^j$  sont déterminées par le principe des déplacements virtuels (ou sa version statique lorsque la dépendance temporelle doit être incluse.

$$0 = \int_{\Omega_0} (\delta U + \delta V) dx dy \quad (3.10)$$

Ces quantités sont déterminées en termes de contraintes réelles et de contraintes virtuelles, qui dépendent des fonctions supposées de déplacement,  $\varphi_i$  et leurs variations. Pour les structures de plaques, laminées ou non, l'intégration sur le domaine de la plaque est représentée comme le produit (tensorant) de l'intégration sur le plan de la plaque et l'intégration sur l'épaisseur de la plaque, en raison de la nature explicite du déplacement supposé Champ dans la coordonnée d'épaisseur :

$$\int_{Vol} (.) dV = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega_0} (.) d\Omega dz \quad (x, y, t) \quad (3.11)$$

Où  $h$  désigne l'épaisseur totale de la plaque, et  $\Omega_0$  désigne le plan médian non déformé de la plaque, qui est choisi comme plan de référence. Étant donné que toutes les fonctions sont explicites dans la coordonnée d'épaisseur, l'intégration sur l'épaisseur de la plaque est réalisée explicitement, ce qui réduit le problème en deux dimensions. Par conséquent, les équations d'Euler-Lagrange de l'équation (3.10) consistent en des équations différentielles impliquant les variables dépendantes  $\varphi_i^j(x, y, t)$  et les résistances moyennes exprimées en épaisseur  $R_{ij}^{(m)}$ :

$$R_{ij}^{(m)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z)^m \sigma_{ij} dz \quad (3.12)$$

Les résultats peuvent être écrits en termes de  $\varphi_i$  à l'aide des équations constitutives présumées (relations contraintes-contraintes) et de contraintes de déplacement. Un développement plus complet de cette procédure se trouve dans ce chapitre.

La même approche est utilisée lorsque  $\varphi_i$  désigne les composantes de la contrainte, sauf que la base de la dérivation des équations de régulation est le principe des forces virtuelles, les théories basées sur la contrainte ne seront pas développées ici. La théorie de la plaque laminée ESL la plus simple est la théorie classique des plaques stratifiées (ou CPT) [29], qui est une extension de la théorie des plaques Kirchhoff (classique) aux plaques composites stratifiées sont basées sur le champ de déplacement :

### **3.3.1. Théorie classique des plaques mince (CPT) :**

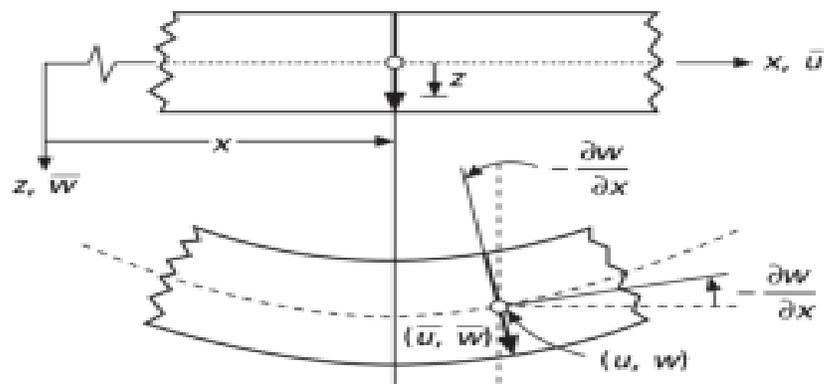
En 1850, Kirchhoff a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaque ». Le champ des déplacements d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant

(t) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= W_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Où  $U_0, V_0$  et  $W_0$  sont des déplacements le long des axes de coordonnées  $x, y$  et  $z$  d'un point du plan moyen (plan  $z = 0$ ).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (**Figure 3.3**), ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces (Ashton et Whitney, Timoshenko et Woinowsky-Krieger).



**Figure 3.3.** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont suivantes :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement  $\frac{h}{a}$  ou  $\frac{h}{b} \leq 0.05$ ). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligeable.

- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

### **3.3.2. Théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) :**

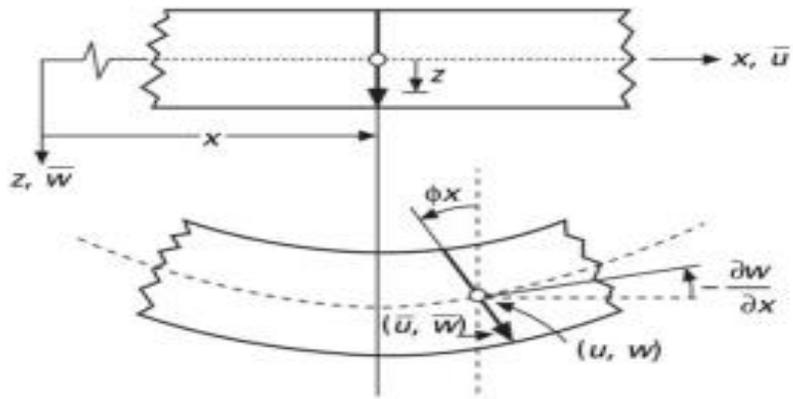
Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko, et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation en est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant (**Figure 3.4**) :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Où  $u_0, v_0$  et  $w_0$  sont les déplacements le long des coordonnées  $x, y$  et  $z$  d'un point du plan moyen (plan  $z = 0$ ) ;  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes  $x$  et  $y$  respectivement.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.



**Figure 3.4 :** Schématisation des déformations dans le cas théorie des plaques du premier ordre.

### **3.3.3. Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) :**

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2ème ordre, 3ème ordre, voire plus), dans le développement des déplacements en série. Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

#### **3.3.3.1. Théorie des plaques du second ordre :**

Le champ des déplacements de la théorie du second ordre s'exprime par :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) + z^2 \Psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) + z^2 \Psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Cette théorie apporte une amélioration substantielle par rapport à la théorie du premier ordre tout en nécessitant un facteur de correction comme pour la FSDPT.

#### **3.3.3.2. Théorie des plaques du troisième ordre :**

Dans la quête de théories plus raffinées et dans le souci de supprimer les limitations des précédentes théories, de nouvelles théories d'ordre supérieur, la théorie dominante utilisé dans les

études de flexion, de flambage et de vibration des plaques FGM est la théorie du troisième ordre de Reddy[30-31]. Le champ des déplacements de Reddy s'écrit comme suit :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) + z^3 \left( -\frac{4}{3h^2} \right) \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) + z^3 \left( -\frac{4}{3h^2} \right) \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Dans les plaques FGM semi épaisse, ont utilisé la théorie des plaques du premier ordre pour déterminer le champ de déformations et le champ de contrainte.

### **3.3.4. La théorie des plaques du premier ordre :**

#### **3.3.4.1 Déplacements et déformations :**

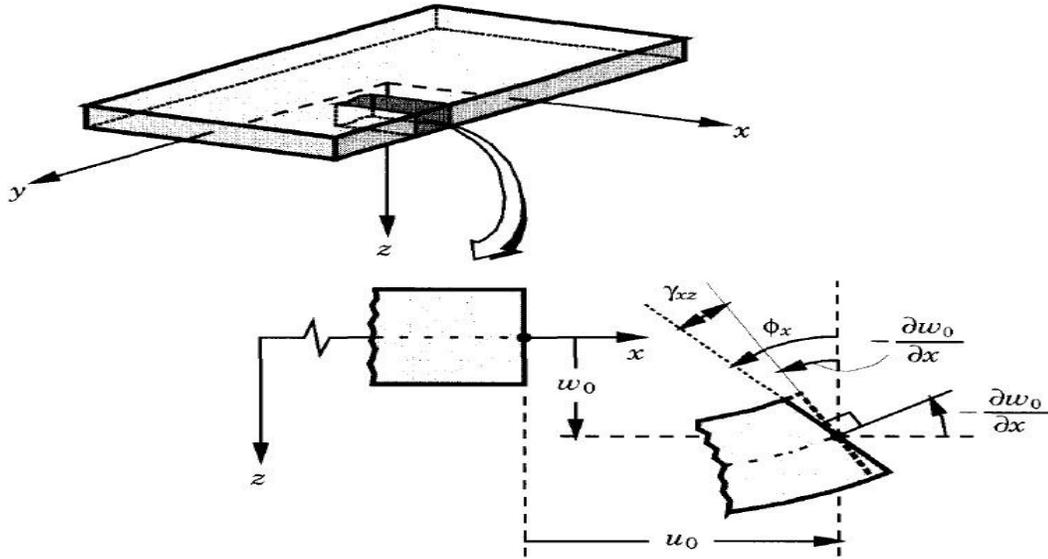
##### **• Détermination du champ des déformations :**

Dans la théorie des plaques composites de déformation par cisaillement (FSDT) du premier ordre, l'hypothèse de Kirchhoff est détendue en retirant la troisième partie ; C'est-à-dire que les normales transversales ne restent pas perpendiculaires à la surface médiane après déformation (**Figure 3.5**). Cela équivaut à inclure des déformations transversales de cisaillement dans la théorie. L'inextensibilité des normales transversales exige que  $w$  ne soit pas fonction de la coordonnée de l'épaisseur  $z$ . Sous les mêmes hypothèses et restrictions que dans la théorie du stratifié classique, le champ de déplacement de la théorie du premier ordre est sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Où  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  sont des fonctions inconnues à déterminer. Comme précédemment,  $(u_0, v_0, w_0)$  désignent les déplacements d'un point sur le plan ( $z = 0$ ). Notez que :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_y \quad (3.18)$$



**Figure 3.5.** Géométries non déformées et déformées d'un bord d'une plaque sous les hypothèses de la théorie des plaques de premier ordre.

Notons que  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les rotations d'une normale transversale autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement (**Figure 3.5**). La notation de  $\phi_x$  et  $\phi_y$  indique que la rotation autour de l'axe des abscisses peut être source de confusion pour certains, et ils ne suivent pas la règle de droite. Cependant, la notation a été largement utilisée dans la littérature. Si  $(\beta_x, \beta_y)$  désignent les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement, et qui suivent la règle de droite, alors :

$$\beta_x = -\phi_y, \beta_y = \phi_x \quad (3.19)$$

Les quantités  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  seront appelées les déplacements et rotations généralisés. Pour des plaques moyennement épaisses, c'est-à-dire lorsque le rapport dimensionnel / épaisseur de la plaque dans le plan est de l'ordre 50 ou supérieur, les fonctions de rotation  $\phi_x$  et  $\phi_y$  devraient s'approcher des pentes respectives de la déviation transversale :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.20)$$

Les déformations non linéaires associées au champ de déplacement (3.23) sont obtenues En utilisant l'équation (3.21) dans les relations de déplacement – déformation [32] :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{yz} \\ K_{xz} \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

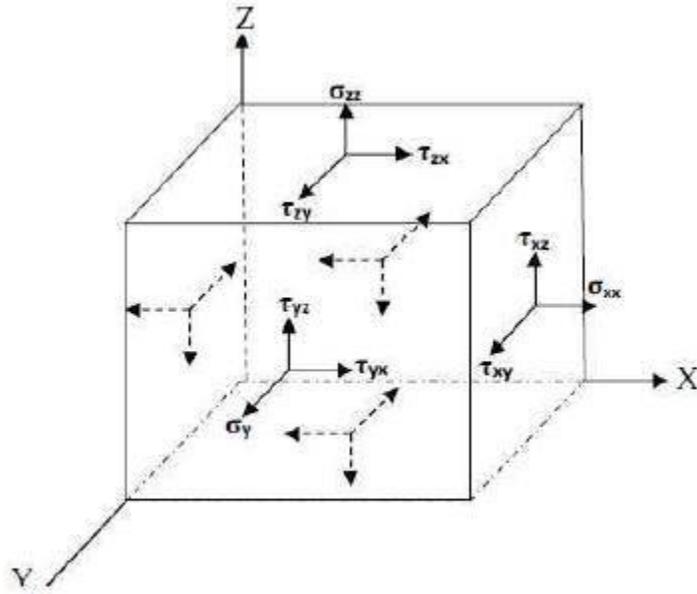
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{yz} \\ K_{xz} \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{yy} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Notons que les contraintes ( $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$ ) sont linéaires à travers l'épaisseur de la plaque, tandis que les contraintes transversales ( $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$ ) sont constantes par rapport à l'épaisseur du stratifié dans la théorie de la plaque laminée de premier ordre. Bien sûr, l'état constant des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque est une approximation grossière du champ de contrainte réelle, qui est au moins quadratique à travers l'épaisseur.

• **Détermination du champ des contraintes :**

Les différentes contraintes agissant sur un point matériel sont représentées sur la **Figure 3.6**.



**Figure 3.6.** Composants du vecteur des contraintes.

Les relations contraintes-déformations peuvent être écrites comme une fonction linéaire par l'équation suivante [32] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yy} &= Q_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \gamma_{yz} &= Q_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \\ \gamma_{xz} &= Q_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \\ \gamma_{xy} &= Q_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

### 3.3.4.2. Détermination des efforts et moments appliqués à la plaque FGM :

- **Résultantes en membrane :**

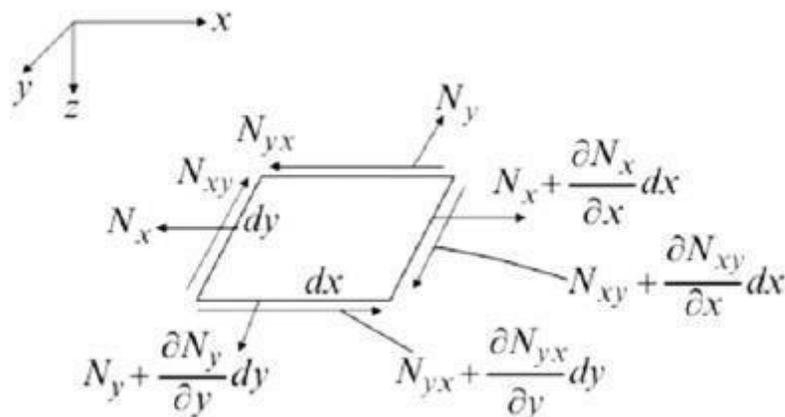
Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x, y)$  est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(x, y) dz \quad (3.27)$$

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (3.28)$$

Les composantes  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes, par unité de longueur de la plaque.

Elles sont schématisées symboliquement sur la **Figure 3.7**.



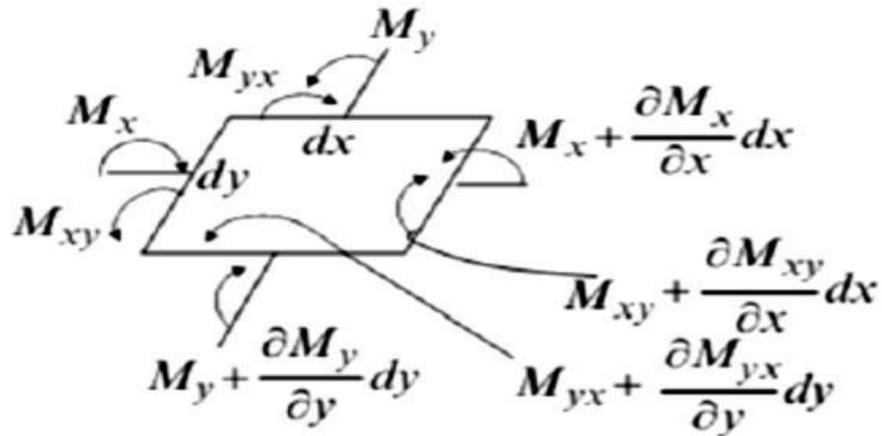
**Figure 3.7.** Efforts agissant dans le plan.

• **Moments de flexion et de torsion :**

Les relations fondamentales sont également intervenues les moments résultants des contraintes exercées sur un élément FGM. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.29)$$

Les composantes  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$  respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la **Figure 3.8**.



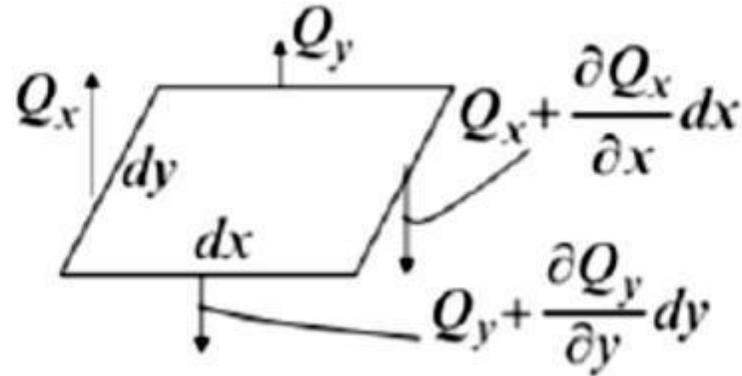
**Figure 3.8.** Moments agissant sur un élément.

• **Résultantes en cisaillement :**

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière (**Figure 3.9**) par :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.30)$$

Et les quantités  $(Q_x, Q_y)$  sont appelées les forces transversales résultantes.



**Figure 3.9.** Efforts tranchants dans un élément.

- **Facteurs de correction du cisaillement ;**

Étant donné que les déformations de cisaillement transversales sont représentées comme constantes par l'épaisseur du stratifié, il s'ensuit que les contraintes de cisaillement transversales seront également constantes. Il est bien connu de la théorie élémentaire des faisceaux homogènes que la contrainte de cisaillement transversale varie paraboliquement à travers l'épaisseur du faisceau. Dans les poutres et plaques stratifiées composites, les contraintes transversales de cisaillement varient au moins quadratiquement à travers l'épaisseur de la couche. Cet écart entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant prédit par la théorie du premier ordre est souvent corrigé dans le calcul de la force de cisaillement transversale résultante  $(Q_x, Q_y)$  en multipliant les intégrales dans l'équation (3.31) par un paramètre, appelé coefficient de correction de cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.31)$$

Où :  $K_s = 5/6$

La force et le moment résultant sont liés au déplacement généralisé ( $u_0, v_0, w_0, \phi_x$  et  $\phi_y$ ), en remplaçant les équations. (3.23) dans l'équation (3.24) et ensuite dans l'équation (3.28), (3.29) et (3.31) nous avons les formes matricielles suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

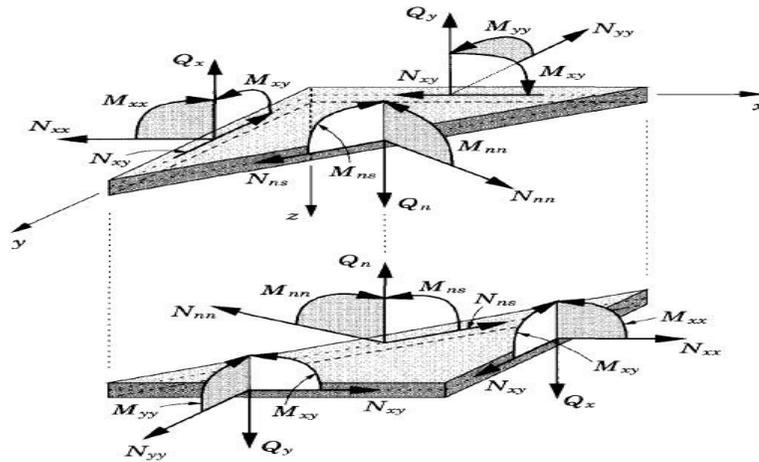
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Où :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) \cdot (1, z, z^2) \cdot dz ; (ij = 11,22,12,66) \quad (3.35)$$

$$A_{ij}^S = K_s \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz ; (ij = 44,55) \quad (3.36)$$



**Figure 3.10.** Résistance de la force et du moment sur un élément de plaque.

### 3.3.3.3. Modélisation des charges externes :

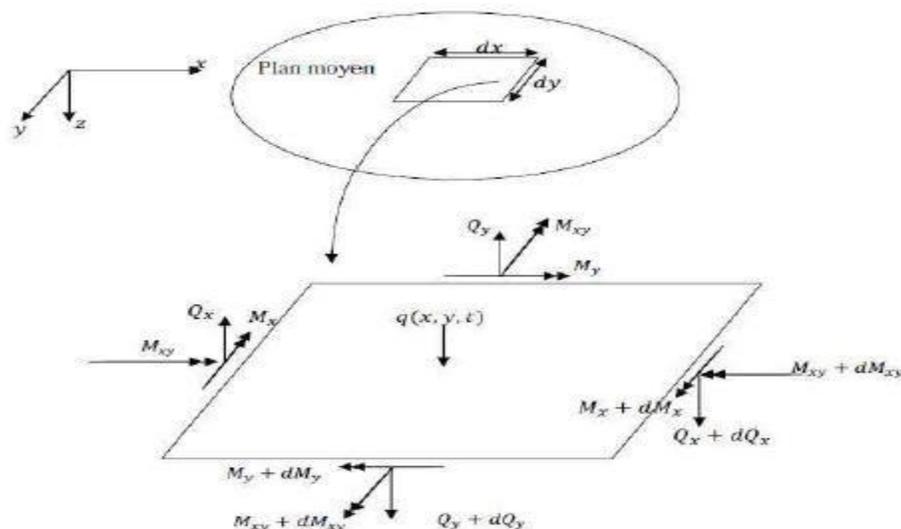
Dans le cas de l'étude des plaques en flexion, l'analyse la plus complexe est celle des plaques constituées d'un empilement quelconque, présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion.

Dans un problème d'élasticité, une plaque subissant des chargements transversaux au milieu (selon  $x$  et  $y$ ) que ces charges peuvent être sinusoïdales ou ayant toute autre forme de distribution d'intensité ( $x, y$ ) doit pouvoir supporter ces chargements, autrement dit, la plaque réagit de telle manière qu'elle puisse créer l'équilibre dans chacun de ses éléments. La **Figure 3.10** montre le cas général d'un élément d'une plaque en équilibre.

Ainsi, dans certains procédés de mise en forme, l'apparition des contraintes résiduelles est inévitable, et peut engendrer le flambage, qui se traduit en défauts géométriques.

Le phénomène de flambage apparait ainsi comme le processus qui produit un écart infiniment petit avec la position d'équilibre. Ceci exige la modélisation de ce phénomène d'instabilité mécanique afin de bien définir la forme de l'amplitude de ces présents articles.

On présente un modèle de flambage (**Figure 3.11**) possédant la faculté de détecter la charge critique de flambage d'une plaque FGM sous forces distribuées de pré-flambage ( $P_x, P_y$ ) sachant que :



**Figure 3.11.** Equilibre d'un élément plaque.

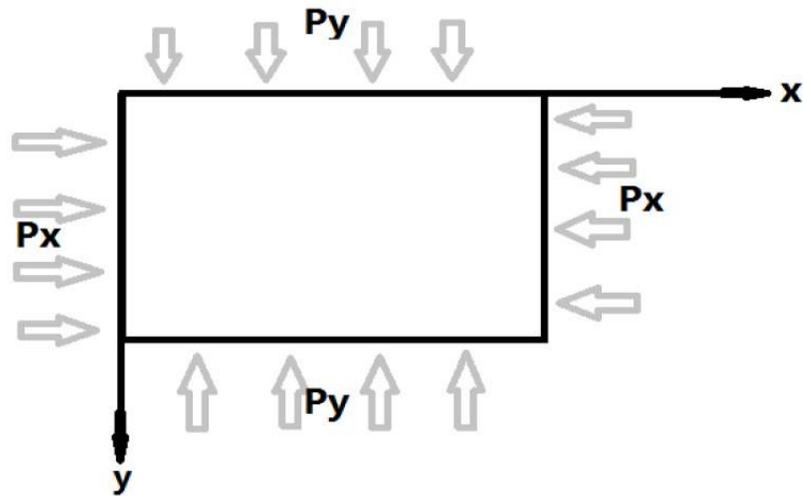


Figure 3.12. Les forces distribuées de pré-flambage.

### 3.4. Formulation énergétique des plaques composite renforcée par des nanotubes en carbone :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des FGM. Cette formulation associée aux conditions aux limites permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche de solutions approchées du comportement mécanique des FGM.

#### 3.4.1. Energie de déformation :

L'énergie de déformation (énergie potentielle) d'un solide élastique s'écrit comme suit :

$$U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}] dz \right\} dx dy \quad (3.37)$$

#### 3.4.2. Travail des charges externes :

Le travail fait par q est :

$$V_q = - \int_{\Omega_0} [qw_0] dx dy \quad (3.38)$$

Sachant que  $q$  est la charge transversale appliquée au milieu de la plaque (selon  $x$  ou  $y$ ).

Ainsi, le travail effectué par les forces externes est emmagasiné par la plaque sous forme d'énergie potentielle :

$$V_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + P_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2P_{xy} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (3.39)$$

Avec :

$$\left. \begin{array}{l} P_x = \lambda_1 P_{cr} \\ P_y = \lambda_2 P_{cr} \\ \text{avec } \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{array} \right\} \quad (3.40)$$

$\lambda_1, \lambda_2$  Sont les paramètres de flambage.

$P_x, P_y$  Sont des forces de compression.

Donc le travail total est :

$$V = V_q + V_p \quad (3.41)$$

$$V = - \int_{\Omega_0} [q w_0] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + P_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.42)$$

### 3.4.3. Formulation variationnelle :

#### 3.4.3.1. Variation de l'énergie de déformation :

La variation de l'énergie de déformation est :

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \sigma_{xx} \left( \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} \right) + \sigma_{yy} \left( \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} \right) + \sigma_{xy} \left( \delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)} \right) + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)} \right] dz \right\} dx dy \quad (3.43)$$

#### 3.4.3.2. La variation du travail :

Le travail sous forme virtuelle est donné par :

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} [q \delta w_0] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) + P_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (3.44)$$

Et par intégration par partie, on trouve :

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} [q \delta w_0] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \delta w_0 + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 \right] dx dy \quad (3.45)$$

### 3.4.4. Application du principe d'Hamilton :

#### 3.4.4.1. Equations de mouvement :

Le principe d'HAMILTON est un principe général pouvant être appliqué à une large classe de problèmes de mécanique des solides déformables et se traduit par :

$$0 = \int_{\Omega_0} (\delta U + \delta V) dx dy \quad (3.46)$$

Où  $\delta U$  et  $\delta V$  désignent l'énergie de déformation virtuelle, le travail virtuel effectué par les forces externes appliquées, respectivement.

Où toutes les variables ont été précédemment introduites.

Substituer  $\delta U$  et  $\delta V$  des équations. (3.43) et (3.45) dans l'énoncé de travail virtuel dans l'équation (3.46) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque FG-CNTRC, on obtient :

$$0 = \int_{\Omega_0} \left[ N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} + Q_x \delta \gamma_{xz}^{(0)} + Q_y \delta \gamma_{xz}^{(1)} + q \delta w_0 + P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \delta w_0 + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 \right] dx dy \quad (3.47)$$

Les quantités ( $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{xy}$ ) sont les forces normales et dans le plan ( $xy$ ) respectivement. ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  et  $M_{xy}$ ) Sont appelés les résultantes du moment (voir Figure 3.8).

Toutes ces quantités ont été définies dans les équations (3.32) -(3.34).

Retour à l'énoncé du travail virtuel dans l'équation (3.47), nous remplaçons les contraintes virtuelles dans l'équation (3.47) et intégrons par partie pour soulager les déplacements virtuels généralisés ( $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \phi_x$  et  $\delta \phi_y$ ) dans  $\Omega_0$  de toute différentiation, afin que nous puissions utiliser le lemme fondamental du calcul variationnel ; nous obtenons :

$$0 = \int_{\Omega_0} \left[ -(N_{xx,x} + N_{yy,y})\delta u_0 - (N_{xy,x} + N_{yy,y})\delta v_0 - (M_{xx,x} + M_{xy,y} - \phi_x)\delta \phi_x - (M_{xy,x} + M_{yy,y} - \phi_y)\delta \phi_y - \left( Q_x + Q_y + q + P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right) \delta w_0 \right] dx dy \quad (3.48)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont obtenues en posant les coefficients de

$(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x \text{ et } \delta \phi_y)$  dans  $\Omega_0$  égaux à zéro, séparément :

$$\left. \begin{aligned} \delta u_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_0: \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \delta \phi_x: \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \delta \phi_y: \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

#### 3.4.4.2. Équations de mouvement en termes de déplacements :

Les équations du mouvement (3.49) peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x \text{ et } \delta \phi_y)$  en substituant la force et le moment résultant des équations (3.32), (3.33) et (3.34). Pour les stratifiés homogènes, les équations de mouvement (3.49) prennent la forme :

$$A_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{11} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

$$A_{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$(P_x + A_{55}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + (P_y + A_{44}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + q = 0$$

$$B_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + D_{11} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - A_{55} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \phi_x \right) = 0$$

$$B_{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + D_{12} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - A_{44} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \phi_y \right) = 0 \quad (3.50)$$

**Donc :**

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} = 0 \quad (3.51.1)$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.51.2)$$

$$(P_x + A_{55}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + (P_y + A_{44}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3.51.3)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} - A_{55} \phi_x = 0 \quad (3.51.4)$$

$$B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} - A_{44} \phi_y = 0 \quad (3.51.5)$$

Les Equations (3.51) décrivent cinq équations différentielles partielles linéaires de second ordre en fonction des cinq déplacements généralisés. Par conséquent, la théorie des plaques stratifiées du premier ordre est une théorie du dixième ordre et il existe dix conditions aux limites.

### 3.4.5. Relations fondamentales de flexion d'une plaque FGM :

En tenant compte de la charge transversale, les relations fondamentales de la flexion sont données par les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} q \neq 0 \\ P_x = P_y = 0 \end{array} \right\} \quad (3.52)$$

Les relations fondamentales de la flexion sont données par les relations (3.52), les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  étant définis à partir des relations (3.35), (3.36) évoquées précédemment, associés à (3.52.a). La relation correspondant aux  $\delta w_0$  étant modifiée suivant :

$$A_{55} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + A_{44} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + q = 0 \quad (3.51.a)$$

### 3.4.6. Relations fondamentales de flambage d'une plaque FGM :

Les relations fondamentales de flambage sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} q = 0 \\ P_x = \lambda_1 P_{cr} \\ P_y = \lambda_2 P_{cr} \end{array} \right\} \quad (3.53)$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  Sont les paramètres de flambage :

- Flambage unidirectionnel (selon l'axe  $x$ ) :  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 = 0$
- Flambage unidirectionnel (selon l'axe  $y$ ) :  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$
- Flambage bidirectionnel (selon les axes  $x$  et  $y$ ) :  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$

Les équations fondamentales des plaques FGM permettant de formuler le flambage sont constituées des équations (3.53), La relation correspondant aux  $\delta w_0$  étant modifiée suivant :

$$(\lambda_1 P_{cr} + A_{55}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + (\lambda_2 P_{cr} + A_{44}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = 0 \quad (3.51.b)$$

### 3.5. Conclusion :

Le but de ce chapitre est de trouver la formulation de l'énergie de déformation d'une part, et celle du travail des charges externes d'une autre part. Nous avons ensuite déterminé les équations de mouvement en se servant du principe de Hamilton. Suite à cela, nous avons déterminé le système d'équations différentielles couplées pour le cas d'une plaque FG-CNTRC.

***CHAPITRE 4***  
***RESULTATS ET***  
***INTERPRETATIONS***

## 4.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter les méthodes utilisées pour la résolution des équations de flexion et de flambage. Ensuite, l'ensemble des résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul seront présentés. Ces résultats ont été utilisés grâce au code de calcul développé en langage Maple. Maple est un langage interprété, contrairement à Pascal et Fortran qui sont des langages compilés. On peut donc considérer que Maple est un interactif toujours attentif et prêt à réagir à vos commandes. Donc nous présentons d'abord les étapes des méthodes analytiques de résolution des équations de flexion et de flambage, et par la suite, nous allons résoudre les deux systèmes d'équations différentielles couplées. Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux des articles publiés. Les résultats représentant les contraintes et déplacements ainsi que la charge critique de flambage seront représentés sous forme de graphes appropriés pour montrer l'influence des paramètres considérés (dimensions géométriques, épaisseur relative et fraction volumique des nanotubes et leur distribution suivant l'épaisseur) dans cette étude.

## 4.2. Solution de Navier pour des plaques rectangulaires simplement appuyées :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en se référant au type de support utilisé. Nous sommes ici concernés par les solutions analytiques de l'équation 4.1 pour les plaques FG-CNTRC simplement supportées.

### 4.2.1. Les équations de mouvement :

Pour discuter la solution de Navier, les équations de mouvement obtenues dans le chapitre 3 (3.51) peuvent être écrites comme :

$$\frac{\partial}{\partial x} [A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial y} [A_{66} (\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}) + B_{66} (\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y})] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [A_{66} (\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}) + B_{66} (\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y} [A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [A_{55} (\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [A_{44} (\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)] + P_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial y} [B_{66} (\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}) + D_{66} (\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x})] - A_{55} (\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [B_{66} (\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}) + D_{66} (\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y} [B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}] - A_{44} (\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y) = 0 \quad (4.1)$$

#### 4.2.2. Conditions aux limites et solution Navier :

Les conditions aux limites le long des côtés d'une plaque simplement appuyée peuvent être écrites comme suit :

Pour la FSDT, les conditions aux limites de la plaque FG-CNTRC sont :

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, 0) = 0; & \quad u_0(x, b) = 0; & \quad v_0(0, y) = 0; & \quad v_0(a, y) = 0 \\ w_0(x, 0) = 0; & \quad w_0(x, b) = 0; & \quad w_0(0, y) = 0; & \quad w_0(a, y) = 0 \\ \phi_x(x, 0) = 0; & \quad \phi_x(x, b) = 0; & \quad \phi_y(0, y) = 0; & \quad \phi_y(a, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.a)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x(0, y) = 0; & \quad N_x(a, y) = 0; & \quad N_y(x, 0) = 0; & \quad N_y(x, b) = 0 \\ M_x(0, y) = 0; & \quad M_x(a, y) = 0; & \quad M_y(x, 0) = 0; & \quad M_y(x, b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.b)$$

Pour la solution analytique des équations (4.1), la méthode de Navier est utilisée. Elle reste valable uniquement pour les conditions aux limites spécifiées ci-dessus. Les fonctions de déplacement qui satisfont les équations (4.2) sont exprimées en séries de Fourier comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Psi_x(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \end{aligned}$$

$$\Psi_y(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \quad (4.3)$$

Où

$$\alpha = i \frac{\pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta = j \frac{\pi}{b} \quad (4.3.a)$$

Et  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$  et  $E_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer.

Toute charge mécanique  $(x, y)$  transversale appliquée à la plaque peut être aussi développée en séries de Fourier pour avoir :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \quad (4.4)$$

Les coefficients  $Q_{mn}$  pour le cas de charge uniformément répartie (UDL) sont définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} Q_{mn} &= \frac{16q_0}{mn\pi^2} \rightarrow \text{pour } m \neq n \\ Q_{mn} &= 0 \rightarrow \text{pour } m = n \end{aligned} \right\} \quad (4.4.a)$$

Où  $q_0$  représente l'intensité de la charge appliquée à la plaque.

### 4.3 Résolution des équations de flexion par la méthode de Navier :

Substituant les équations de Navier dans les équations (3.51.1) (3.51.2) (3.51.a) (3.51.4) et (3.51.5) on obtient :

$$A_{mn}(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}) + B_{mn} \alpha \beta (A_{12} + A_{66}) + D_{mn}(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + E_{mn} \alpha \beta (B_{12} + B_{66}) = 0$$

$$A_{mn} \alpha \beta (A_{12} + A_{66}) + B_{mn}(\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}) + D_{mn} \alpha \beta (B_{12} + B_{66}) + E_{mn}(\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) = 0$$

$$[\alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44}] C_{mn} + (\alpha A_{55}) D_{mn} + (\beta A_{44}) E_{mn} = 0$$

$$\begin{aligned}
& A_{mn}(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + B_{mn}\alpha\beta(B_{12} + B_{66}) + C_{mn}(\alpha A_{55}) + D_{mn}(\alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}) \\
& + E_{mn} \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) = 0 \\
& A_{mn}\alpha\beta(B_{12} + B_{66}) + B_{mn}(\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) + C_{mn}(\beta A_{44}) + D_{mn}\alpha\beta(D_{12} + D_{66}) + \\
& E_{mn}(\alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}) = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

En regroupant les termes devant les amplitudes  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$  nous obtenons la matrice suivante du système :

$$\begin{aligned}
& k_{11} = \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}; k_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}); k_{13} = 0; k_{14} = \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}; k_{15} = \alpha\beta(B_{12} + B_{66}); \\
& k_{21} = k_{12}; k_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}; k_{23} = 0; k_{24} = \alpha\beta(B_{12} + B_{66}); k_{25} = \alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}; \\
& k_{31} = 0; k_{32} = 0; k_{33} = \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44}; k_{34} = \alpha A_{55}; k_{35} = \beta A_{44}; \\
& k_{41} = k_{14}; k_{42} = k_{24}; k_{43} = k_{34}; k_{44} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}; k_{45} = \alpha\beta(D_{12} + D_{66}); \\
& k_{51} = k_{15}; k_{52} = k_{25}; k_{53} = k_{35}; k_{54} = k_{45}; k_{55} = \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44};
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Le système d'équations algébriques ainsi obtenu peut être mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{15} & k_{25} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{14} & k_{15} & k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

#### 4.4. Résolution des équations de flambage par la méthode de Navier :

En remplaçant les équations de Navier dans les équations (3.51.1) (3.51.2) (3.51.b) (3.51.4) et (3.51.5) on obtient :

$$\begin{aligned}
& A_{mn}(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}) + B_{mn}\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) + D_{mn}(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + E_{mn} \alpha\beta(B_{12} + B_{66}) = 0 \\
& A_{mn}\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) + B_{mn}(\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}) + D_{mn} \alpha\beta(B_{12} + B_{66}) + E_{mn}(\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) = 0 \\
& [\alpha^2(A_{55} + \lambda_1 P_{cr}) + \beta^2(A_{44} + \lambda_2 P_{cr})]C_{mn} + (\alpha A_{55})D_{mn} + (\beta A_{44})E_{mn} = 0 \\
& A_{mn}(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + B_{mn}\alpha\beta(B_{12} + B_{66}) + C_{mn}(\alpha A_{55}) + D_{mn}(\alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}) \\
& + E_{mn} \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) = 0
\end{aligned}$$

$$A_{mn}\alpha\beta(B_{12} + B_{66}) + B_{mn}(\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) + C_{mn}(\beta A_{44}) + D_{mn}\alpha\beta(D_{12} + D_{66}) + E_{mn}(\alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}) = 0 \quad (4.8)$$

En regroupant les termes devant les amplitudes  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$  nous obtenons la matrice suivante du système :

$$\begin{aligned} k_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}; k_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}); k_{13} = 0; k_{14} = \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}; k_{15} = \alpha\beta(B_{12} + B_{66}); \\ k_{21} &= k_{12}; k_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}; k_{23} = 0; k_{24} = \alpha\beta(B_{12} + B_{66}); k_{25} = \alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}; \\ k_{31} &= 0; k_{32} = 0; k_{33} = \alpha^2(A_{55} + \lambda_1 P_{cr}) + \beta^2(A_{44} + \lambda_2 P_{cr}); k_{34} = \alpha A_{55}; k_{35} = \beta A_{44}; \\ k_{41} &= k_{14}; k_{42} = k_{24}; k_{43} = k_{34}; k_{44} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}; k_{45} = \alpha\beta(D_{12} + D_{66}); \\ k_{51} &= k_{15}; k_{52} = k_{25}; k_{53} = k_{35}; k_{54} = k_{45}; k_{55} = \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le système d'équations algébriques ainsi obtenu peut être mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{25} \\ 0 & 0 & k_{33} + k & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Avec :

$$k = \lambda P_{cr}; \quad \lambda = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2; \quad (4.11)$$

Pour trouver la charge de flambage critique  $P_{cr}$  (la plus petite charge qui provoque le flambage), le système doit être écrit sous la forme canonique suivante :

$$\left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{25} \\ 0 & 0 & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} - P_{cr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Avec :

$$\bar{k}_{33} = k_{33}/\lambda; \quad \bar{k}_{34} = k_{34}/\lambda; \quad \bar{k}_{35} = k_{35}/\lambda; \quad (4.13)$$

## 4.5. Résolution numérique du problème statique :

### 4.5.1 Modélisation numérique d'une plaque composite à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes en carbone mono paroi :

Pour notre étude, on considère les mêmes données que celles de Zhu P. et al [9] pour pouvoir faire des comparaisons de résultats :

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés pour étudier la flexion et le flambage des plaques CNTRC. Le poly {(m-phénylènevinylène) –Co – [(2,5-dioctoxy –p-phénylène) vinylène]} (PmPV) est considéré comme la matrice du composite et les propriétés du matériau sont supposées être (à température ambiante 300 K) comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} v^m = 0,34 \\ \rho^m = 1150 \frac{kg}{m^3} \\ E^m = 2,1 \text{ GPa} \end{array} \right\} \text{ PmPV : matrice-en polymère.}$$

Les propriétés mécaniques des nanotubes (SWCNT) sont données par :

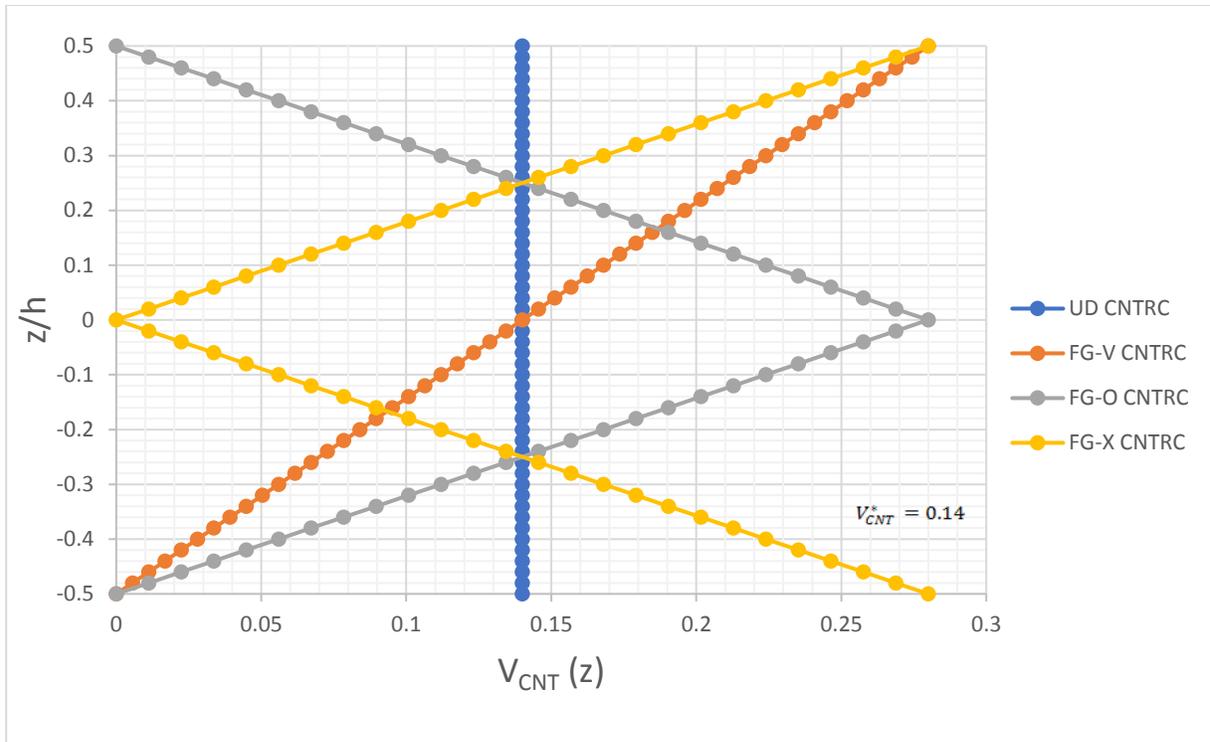
$$\left. \begin{array}{l} V_{12}^{CNT} = 0,175, \rho^{CNT} = 1400 \frac{kg}{m^3} \\ E_{22}^{CNT} = 7,0800 \text{ TPa}, G_{12}^{CNT} = 1,9445 \text{ TPa} \\ E_{11}^{CNT} = 5,6466 \text{ TPa} \end{array} \right\} \text{ Nanotubes en chaise [Armchair (10,10)].}$$

Les paramètres d'efficacité CNT sont donnés par :

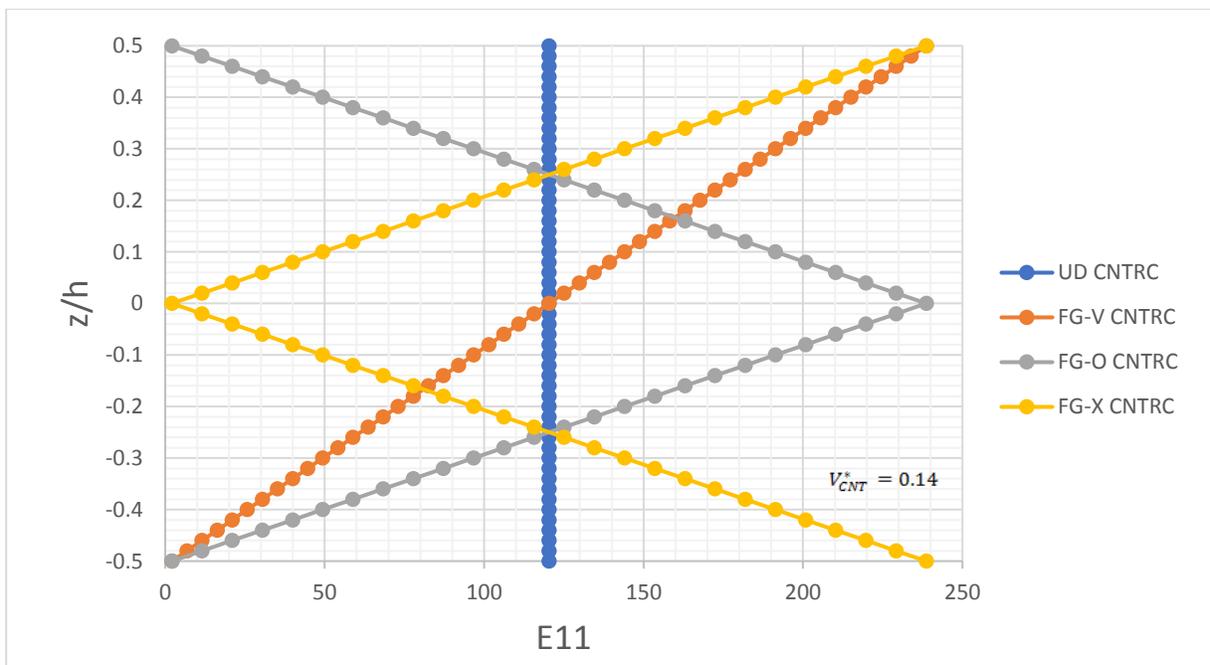
$$\left. \begin{array}{l} V_{CNT}^* = 0,11 \rightarrow \eta_1 = 0,149 \text{ et } \eta_2 = 0,934 \\ V_{CNT}^* = 0,14 \rightarrow \eta_1 = 0,150 \text{ et } \eta_2 = 0,941 \\ V_{CNT}^* = 0,17 \rightarrow \eta_1 = 0,149 \text{ et } \eta_2 = 1,381 \\ \eta_2 = \eta_3 \end{array} \right\} \text{ Nanotubes en chaise [Armchair(10,10)].}$$

### 4.5.2 Variation de la fraction volumique $V_{CNT}$ suivant l'épaisseur de la plaque :

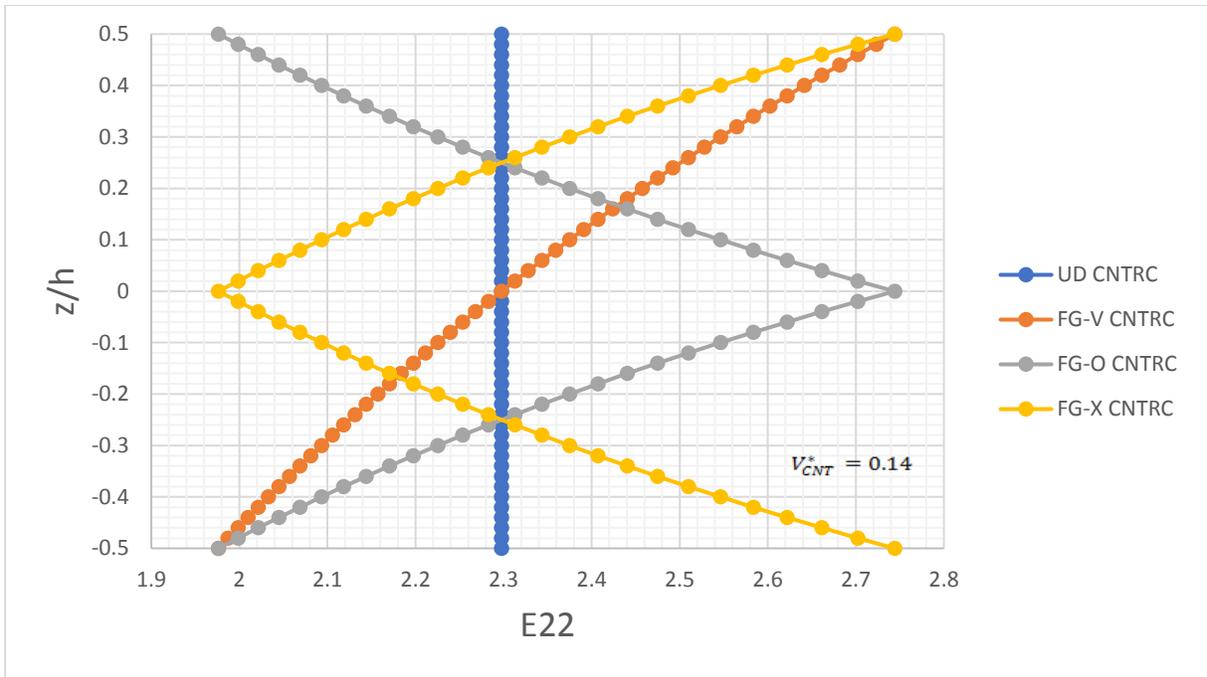
Après des séries de calcul, nous avons obtenus les graphes de  $V_{CNT}(z)$ ,  $V_{CNT}(UD)$ ,  $V_{CNT}(FGV)$ ,  $V_{CNT}(FGO)$  et  $V_{CNT}(FGX)$ .



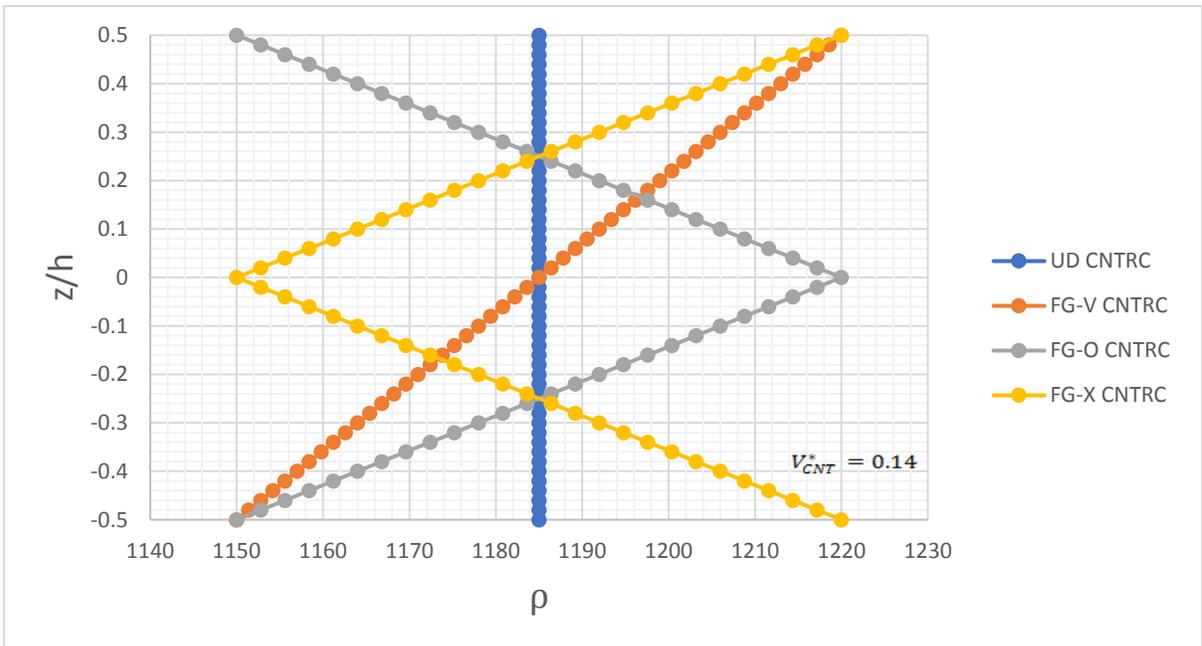
**Figure 4.1** Variation de la fraction volumique  $V_{CNT}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour différent type de distribution de CNT.



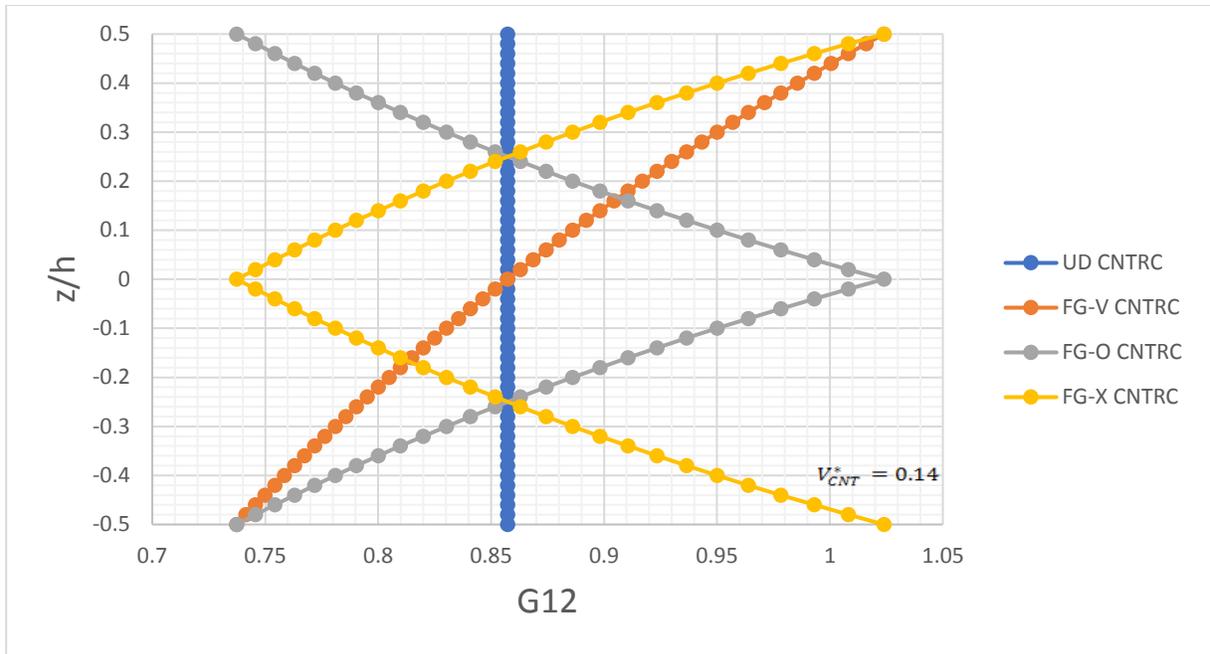
**Figure 4.2.** Variation du module de Young  $E_{11}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour différents types de distribution de CNT.



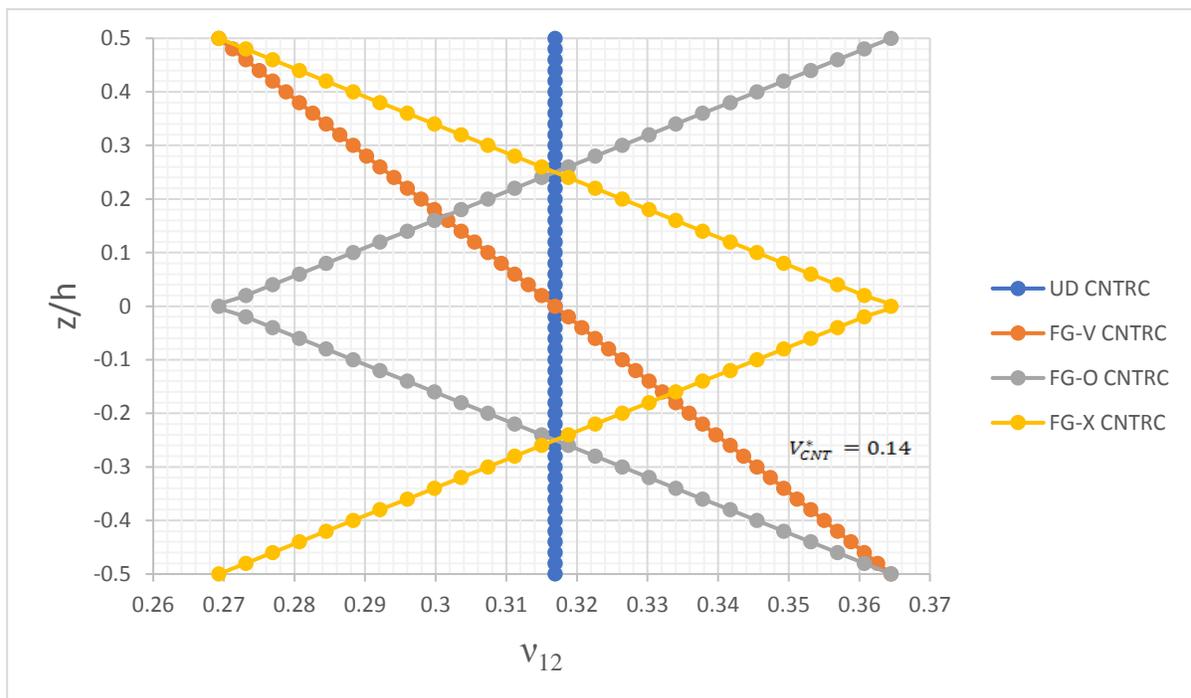
**Figure 4.3.** Variation du module de Young  $E_{22}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour différents types de distribution de CNT.



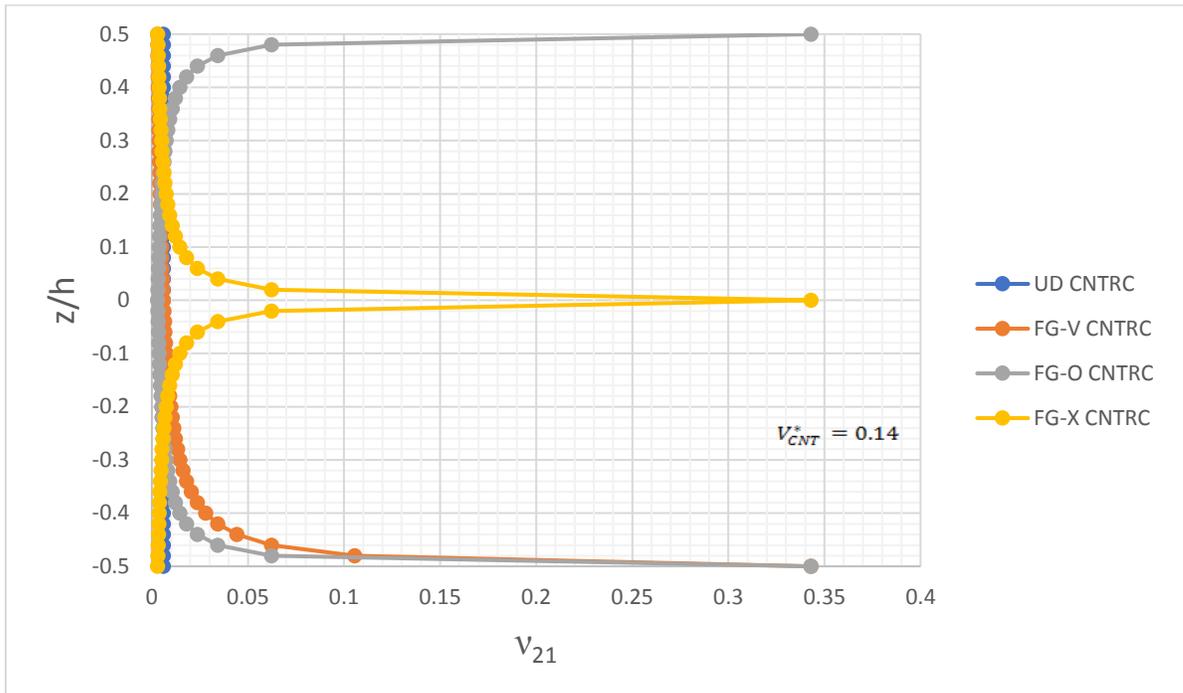
**Figure 4.4.** Variation du module de la masse volumique  $\rho$  suivant l'épaisseur de la plaque pour différents types de distribution de CNT.



**Figure 4.5.** Variation du module de cisaillement  $G_{12}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour différents types de distributions de CNT.



**Figure 4.6.** Variation du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour différents types de distribution de CNT.



**Figure 4.7.** Variation du coefficient de poisson  $v_{21}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour différents types de distributions de CNT.

Sur la base de l'analyse des courbes ci-dessus, nous notons :

- Des valeurs constantes (uniformes) des propriétés mécaniques dans le cas de distribution **UD-CNTRC** suivant l'épaisseur de la plaque (**figures 4.2-4.7**).
- Une variation linéaire des propriétés mécaniques pour le cas du **FG-V** (**figures 4.2-4.6**) et une variation parabolique du coefficient de poisson  $v_{21}$  (**figure 4.7**).
- Une variation symétrique des propriétés mécaniques par rapport au plan  $z/h = 0$  dans le cas des distributions **FG-X** et **FG-O** (**figures 4.2-4.7**).

### **4.5.3 Calcul des rigidités du système statique :**

- Rigidités de traction  $A_{ij}$ , de couplage traction - flexion  $B_{ij}$ , de flexion  $D_{ij}$  et de cisaillement  $A_{ij}^s$ .

Fraction volumique $V_{CNT}^*$	Rigidités de traction	Fractions volumiques (z)			
		UD CNTRC $Pa \cdot m (10^6)$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m (10^6)$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m (10^6)$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m (10^6)$
0.11	$A_{11}$	189.2912	189.2930	189.2930	189.2930
	$A_{12}$	1.4219	1.4275	1.4275	1.4275
	$A_{22}$	4.4181	4.4550	4.4550	4.4550
	$A_{66}$	1.6445	1.6530	1.6530	1.6530
0.14	$A_{11}$	241.2315	241.2332	241.2332	241.2332
	$A_{12}$	1.4590	1.4647	1.4647	1.4647
	$A_{22}$	4.6041	4.6581	4.6581	4.6581
	$A_{66}$	1.7146	1.7300	1.7300	1.7300
0.17	$A_{11}$	290.2243	290.2279	290.2279	290.2279
	$A_{12}$	2.1849	2.1973	2.1973	2.1973
	$A_{22}$	7.0042	7.1297	7.1297	7.1297
	$A_{66}$	2.6073	2.6446	2.6446	2.6446

**Tableau 4.1.** Rigidités de traction  $A_{ij}$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.

Fraction volumique $V_{CNT}^*$	Rigidités de couplage	Fractions volumiques $V_{CNT} (z)$			
		UD CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$
0.11	$B_{11}$	0	615.2606	0	0
	$B_{12}$	0	-0.0173	0	0
	$B_{22}$	0	1.6865	0	0
	$B_{66}$	0	0.6834	0	0
0.14	$B_{11}$	0	788.3350	0	0
	$B_{12}$	0	0.01471	0	0
	$B_{22}$	0	2.4042	0	0
	$B_{66}$	0	0.9450	0	0

<b>0.17</b>	$B_{11}$	0	950.7316	0	0
	$B_{12}$	0	0.0499	0	0
	$B_{22}$	0	4.6363	0	0
	$B_{66}$	0	1.8253	0	0

**Tableau 4.2.** Rigidités de couplage traction - flexion  $B_{ij}$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.

Fraction volumique $V_{CNT}^*$	Les rigidités de flexion	Fractions volumiques $V_{CNT}(z)$			
		UD CNTRC $Pa \cdot m^3$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m^3$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m^3$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m^3$
<b>0.11</b>	$D_{11}$	93.8609	63.0985	32.3348	93.8609
	$D_{12}$	0.4756	0.4783	0.4773	0.4756
	$D_{22}$	1.5725	1.4976	1.4038	1.5725
	$D_{66}$	0.5857	0.5532	0.5173	0.5857
<b>0.14</b>	$D_{11}$	80.4105	80.4119	40.9945	119.8280
	$D_{12}$	0.4863	0.4906	0.4881	0.4895
	$D_{22}$	1.5347	1.5697	1.4367	1.6771
	$D_{66}$	0.5715	0.5808	0.5304	0.6249
<b>0.17</b>	$D_{11}$	96.7414	96.7443	49.2064	144.2796
	$D_{12}$	0.7283	0.7377	0.7312	0.7362
	$D_{22}$	2.3347	2.4158	2.1545	2.6182
	$D_{66}$	0.8691	0.8916	0.7928	0.9753

**Tableau 4.3.** Rigidités de flexion  $D_{ij}$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT

Fraction volumique $V_{CNT}^*$	Rigidités de cisaillement	Fractions volumiques $V_{CNT}(z)$			
		UD CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$
0.11	$A_{44}$	1.3704	1.3775	1.3775	1.3775
	$A_{55}$	1.3704	1.3775	1.3775	1.3775
0.14	$A_{44}$	1.4288	1.4416	1.4416	1.4416
	$A_{55}$	1.4288	1.4416	1.4416	1.4416
0.17	$A_{44}$	2.1727	2.2039	2.2039	2.2039
	$A_{55}$	2.1727	2.2039	2.2039	2.2039

**Tableau 4.4.** Rigidités de cisaillement  $A_{ij}^s$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT

Ce que nous notons sur les valeurs des tableaux précédents est comme suit :

**Tableau 4.1 :**

- Ces valeurs augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique  $V_{CNT}^*$ .
- Valeurs presque identiques des rigidités de traction  $A_{ij}$  pour les quatre types de

**Tableau 4.2 :**

- Les valeurs de rigidités de couplage traction - flexion  $B_{ij}$  augmentent à cause de l'augmentation de  $V_{CNT}^*$  dans le type de **FG-V**, alors que les valeurs les autres types restent nulles (pas de couplage à cause de la symétrie des distributions par rapport au plan  $z/h = 0$ ).

**Tableau 4.3 :**

- On note une augmentation des rigidités de flexion  $D_{ij}$  à cause de l'augmentation de  $V_{CNT}^*$ , avec des valeurs plus importantes dans le cas de **FG-X**.

**Tableau 4.4 :**

- Valeurs presque identiques des rigidités de cisaillement  $A_{ij}^s$  pour les quatre types de distribution. On note aussi une augmentation de ces valeurs à cause de l'augmentation de  $V_{CNT}^*$ .

## 4.5. Présentation et interprétation des résultats :

Dans cette partie, nous exploitons la méthode de résolution des équations de flexion et de flambage d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes de carbone en appuis simples. Les résultats obtenus grâce au programme Maple élaboré seront affichés sous forme de tableaux et graphes. Ces résultats sont les solutions des équations des deux systèmes d'équations algébriques obtenues grâce à la méthode de Navier décrites dans ce chapitre. Dans un premier temps, nous comparerons les résultats obtenus avec ceux des articles publiés pour valider notre code de calcul pour le flambage et pour la flexion. Dans un deuxième temps, nous présenterons les résultats de calcul relatifs à l'étude paramétriques réalisée afin de mettre en exergue l'influence des paramètres considérés (géométrie de la plaque, distributions des nanotubes dans l'épaisseur et la valeur de la fraction volumique des nanotubes de renforcement) sur la charge critique de flambage et sur les déplacements et contraintes engendrés.

### 4.5.1 L'analyse de la flexion :

#### 4.5.1.1 Résultats et interprétations :

La plaque est supposée simplement supportée. Afin de valider les résultats issus de cette étude, ils sont présentés sur le **tableau 4.5** à des fins de comparaison. Nous utilisons dans le code de calcul les formes adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{u}(z) &= \frac{100.E.m.h^3}{|q_0|.a^4} u\left(0, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \\ \bar{W}(z) &= -\frac{1}{h} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) \\ \bar{\sigma}_x(z) &= \frac{h^2}{|q_0|.a^2} \sigma\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{-h}{2}\right) \\ \bar{\sigma}_{xy}(z) &= \frac{h^2}{|q_0|.a^2} \sigma\left(0, 0, \frac{-h}{2}\right) \\ \bar{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{h^2}{|q_0|.a^2} \sigma\left(0, \frac{b}{2}, \frac{-h}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.14}$$

Dans cette section, la réponse à la flexion d'une plaque FGM est obtenue sous l'action d'une charge transversale uniformément distribuée. **Le tableau 4.5** contient les résultats de flexion obtenus grâce à la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre pour une plaque FGM carrée ( $a/b=1$ ).

Le tableau 4.5 montre la déviation centrale non dimensionnelle  $w$  de trois types de plaques carrées simplement supportées et soumises à une charge transversale uniforme  $q_0$  pour différentes valeurs de fraction volumique des CNT ou  $V_{CNT} = (0,11 ; 0,14 ; 0,17)$  et pour différentes valeurs du rapport ( $b/h$ ). Les données sont les mêmes que celles des références utilisées pour la comparaison. Les résultats de la présente formulation sont comparés à ceux rapportés par Ping Zhu, Z.X. Lei, K.M. Liew [9]. Quatre types de distributions de nanotubes de carbone à paroi simple suivant l'épaisseur sont considérés ; dénommés dans la littérature par UD, FG-O, FG-V et FG-X. Nous utilisons un coefficient du cisaillement  $K$  égal à  $5/6$ . Il faut noter que les résultats présentés dans la **réf. [9]** ont été obtenus grâce à une analyse basée sur un code interne d'élément finis développé par les auteurs et qui sont comparés à ceux obtenus par le logiciel commercial ANSYS. Au vu des bons résultats trouvés, nous pouvons conclure que notre analyse, qui est basée sur une théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (nécessitant un volume de calcul moindre) et sur la méthode analytique de résolution, convient parfaitement aux problèmes de déformation des plaques FGM moyennement épaisse renforcées par des nanotubes en carbone en appuis simples.

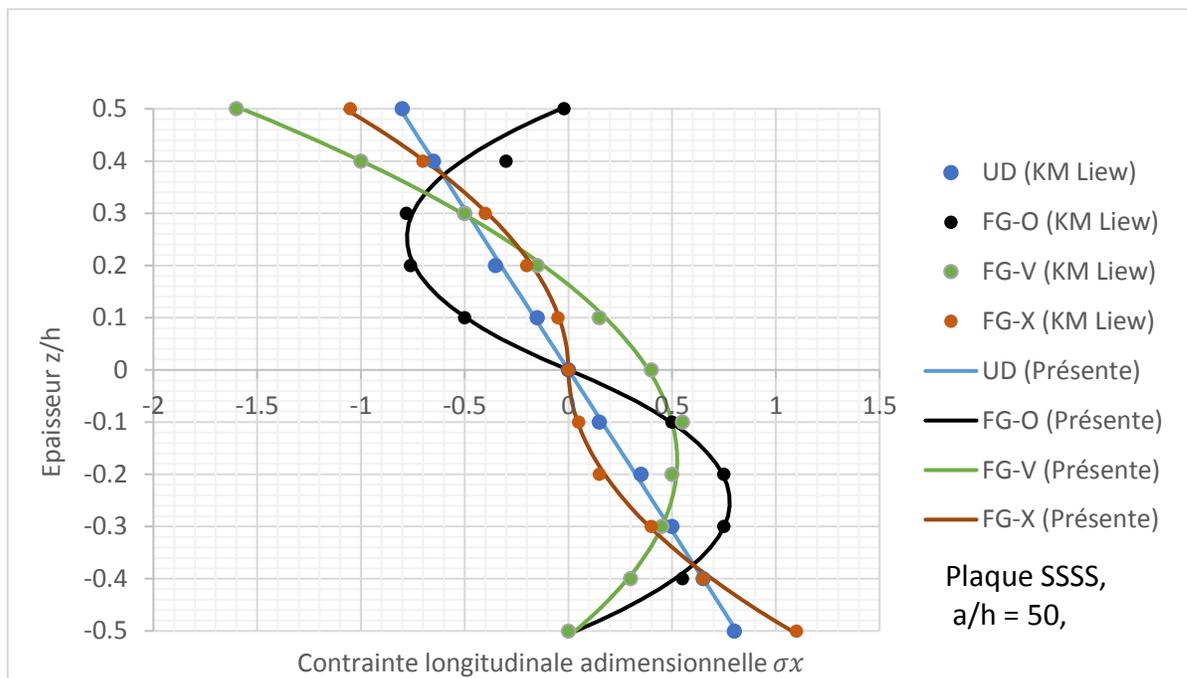
On peut observer que la fraction volumique de CNT a une influence sur la déflexion centrale des plaques car une augmentation de seulement 6% de la fraction volumique de CNT a conduit à la diminution de plus de 30% de la valeur de la déflexion centrale. Nous observons aussi que les déflexions centrales des plaques FG-V et FG-O CNTRC sont plus grandes que les déflexions des plaques UD-CNTRC et FG-X car ces dernières rendent la plaque plus rigide.

$V_{CNT}$	$b/h$	$V_{ECNT}$	<b>Présente</b>	K.M. Liew	ANSYS
<b>0.11</b>	<b>10</b>	<b>UD</b>	<b>3,750 X10<sup>-3</sup></b>	3,739 X10 <sup>-3</sup>	3,739 X10 <sup>-3</sup>
		<b>FG-V</b>	<b>4,475 X10<sup>-3</sup></b>	4,466 X10 <sup>-3</sup>	4,461 X10 <sup>-3</sup>
		<b>FG-O</b>	<b>5,235 X10<sup>-3</sup></b>	5,230 X10 <sup>-3</sup>	5,216 X10 <sup>-3</sup>
		<b>FG-X</b>	<b>3,189 X10<sup>-3</sup></b>	3,177 X10 <sup>-3</sup>	3,176 X10 <sup>-3</sup>

	20	UD	<b>3,640 X10<sup>-2</sup></b>	3,628 X10 <sup>-2</sup>	3,629X10 <sup>-2</sup>
		FG-V	<b>4,890 X10<sup>-2</sup></b>	4,879 X10 <sup>-2</sup>	4,876X10 <sup>-2</sup>
		FG-O	<b>6,162 X10<sup>-2</sup></b>	6,155 X10 <sup>-2</sup>	6,136 X10 <sup>-2</sup>
		FG-X	<b>2,713 X10<sup>-2</sup></b>	2,701 X10 <sup>-2</sup>	2,703 X10 <sup>-2</sup>
	50	UD	<b>1,159</b>	1,155	1,155
		FG-V	<b>1,657</b>	1,653	1,652
		FG-O	<b>2,159</b>	2,157	2,150
		FG-X	<b>0,794</b>	0,790	0,791
0.14	10	UD	<b>3,309 X10<sup>-3</sup></b>	3,306 X10 <sup>-3</sup>	3,305 X10 <sup>-3</sup>
		FG-V	<b>3,894 X10<sup>-3</sup></b>	3,894 X10 <sup>-3</sup>	3,889 X10 <sup>-3</sup>
		FG-O	<b>4,519 X10<sup>-3</sup></b>	4,525 X10 <sup>-3</sup>	4,512 X10 <sup>-3</sup>
		FG-X	<b>2,850 X10<sup>-3</sup></b>	2,844 X10 <sup>-3</sup>	2,842 X10 <sup>-3</sup>
	20	UD	<b>3,003 X10<sup>-2</sup></b>	3,001 X10 <sup>-2</sup>	3,002 X10 <sup>-2</sup>
		FG-V	<b>4,021 X10<sup>-2</sup></b>	4,025 X10 <sup>-2</sup>	4,021 X10 <sup>-2</sup>
		FG-O	<b>5,060 X10<sup>-2</sup></b>	5,070 X10 <sup>-2</sup>	5,053 X10 <sup>-2</sup>
		FG-X	<b>2,261 X10<sup>-2</sup></b>	2,256 X10 <sup>-2</sup>	2,258 X10 <sup>-2</sup>
	50	UD	<b>0.918</b>	0,917	0,918
		FG-V	<b>1.324</b>	1,326	1,325
		FG-O	<b>1.734</b>	1,738	1,732
		FG-X	<b>0.628</b>	0 ,627	0 ,628
0.17	10	UD	<b>2,402 X10<sup>-3</sup></b>	2,394 X10 <sup>-3</sup>	2,394 X10 <sup>-3</sup>
		FG-V	<b>2,870 X10<sup>-3</sup></b>	2,864 X10 <sup>-3</sup>	2,861 X10 <sup>-3</sup>
		FG-O	<b>3,379 X10<sup>-3</sup></b>	3,378 X10 <sup>-3</sup>	3,368 X10 <sup>-3</sup>
		FG-X	<b>2,021 X10<sup>-3</sup></b>	2,012 X10 <sup>-3</sup>	2,011 X10 <sup>-3</sup>
	20	UD	<b>2,357 X10<sup>-2</sup></b>	2,348 X10 <sup>-2</sup>	2,348 X10 <sup>-2</sup>
		FG-V	<b>3,181 X10<sup>-2</sup></b>	3,174 X10 <sup>-2</sup>	3,171 X10 <sup>-2</sup>
		FG-O	<b>4,023 X10<sup>-2</sup></b>	4,020 X10 <sup>-2</sup>	4,007 X10 <sup>-2</sup>
		FG-X	<b>1,746 X10<sup>-2</sup></b>	1,737 X10 <sup>-2</sup>	1,738 X10 <sup>-2</sup>
	50	UD	<b>0.755</b>	0,751	0,752
		FG-V	<b>1.084</b>	1,082	1,081
		FG-O	<b>1.417</b>	1,416	1,411
		FG-X	<b>0.516</b>	0,513	0,514

**Tableau 4.5.** Influence de la fraction volumique des nanotubes de renforcement sur la déflexion centrale adimensionnelle  $w$  d'une plaque FGM sous un chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>).

La figure suivante montre la comparaison des valeurs de la contrainte longitudinale  $\sigma_x$  à celles de la référence [9]. Pour une plaque avec  $a/h = 50$  simplement appuyée et avec une fraction volumique des nanotubes égale à 0.17, nous observons un très bon accord des résultats avec ceux de la référence [9] et ceci quel que soit le type de distribution des nanotubes de carbone dans l'épaisseur de la plaque (UD, FG-O, FG-V et FG-X). Ceci montre que la théorie de déformation du premier ordre couplée à la méthode de résolution de Navier a produit des résultats jugés bons comparativement à ceux de la référence [9] elle est donc suffisante pour ce type de problème à étudier.

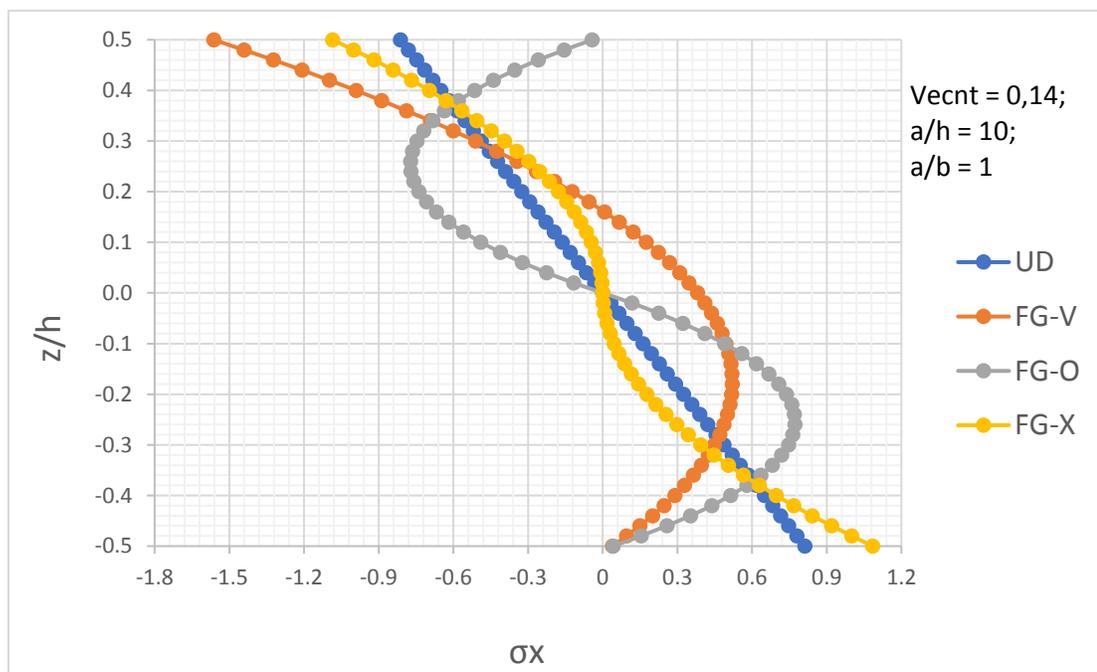


**Figure 4.8 :** Comparaison de la variation de la contrainte axiale adimensionnelle suivant l'épaisseur pour différentes distributions des nanotubes

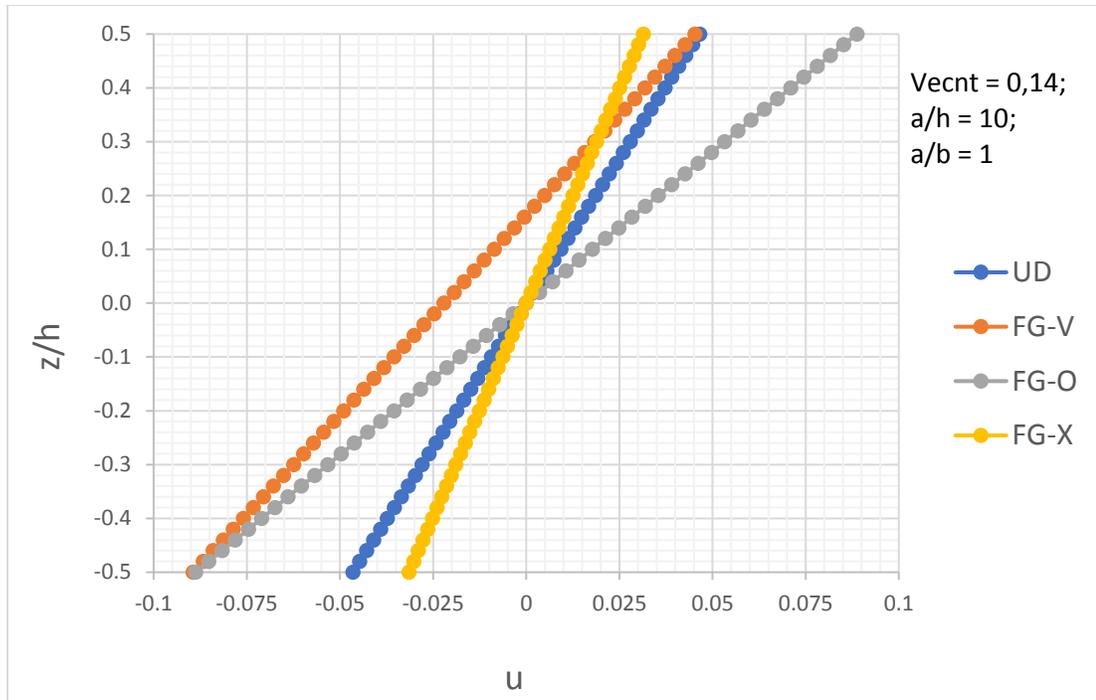
Nous observons que la variation des contraintes longitudinales dans la plaque FG-O CNTRC, FG-X CNTRC et UD CNTRC est symétrique en valeur absolue par rapport au plan  $Z = 0$ , en raison de la symétrie du renforcement en nanotubes. Pour la plaque FG-V CNTRC la distribution des contraintes est parabolique selon l'épaisseur  $h$ .

#### 4.5.1.2. Résultats de flexion :

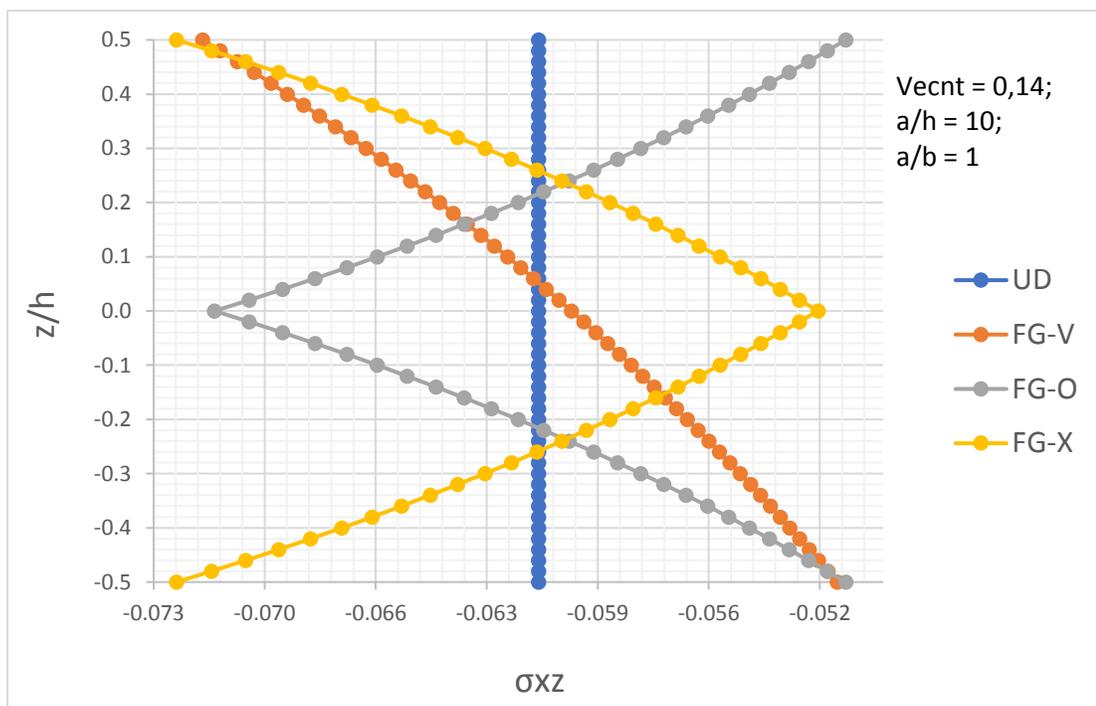
Dans cette partie, nous avons choisi de présenter les résultats issus de l'analyse paramétrique sous forme de figures en raison de grands tableaux de valeurs générées par le code de calcul pour différents paramètres choisis. Nous avons donc choisi une plaque FGM carrée moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) renforcée par des nanotubes de carbone dont la fraction volumique est de 0.14. Quatre types de distribution selon l'épaisseur de la plaque ont été utilisés. (UD, FG-V, FG-O et FG-X) Les figures suivantes montrent l'influence des quatre distributions sur les déplacements et les contraintes générées sur la plaque sous un chargement uniforme.



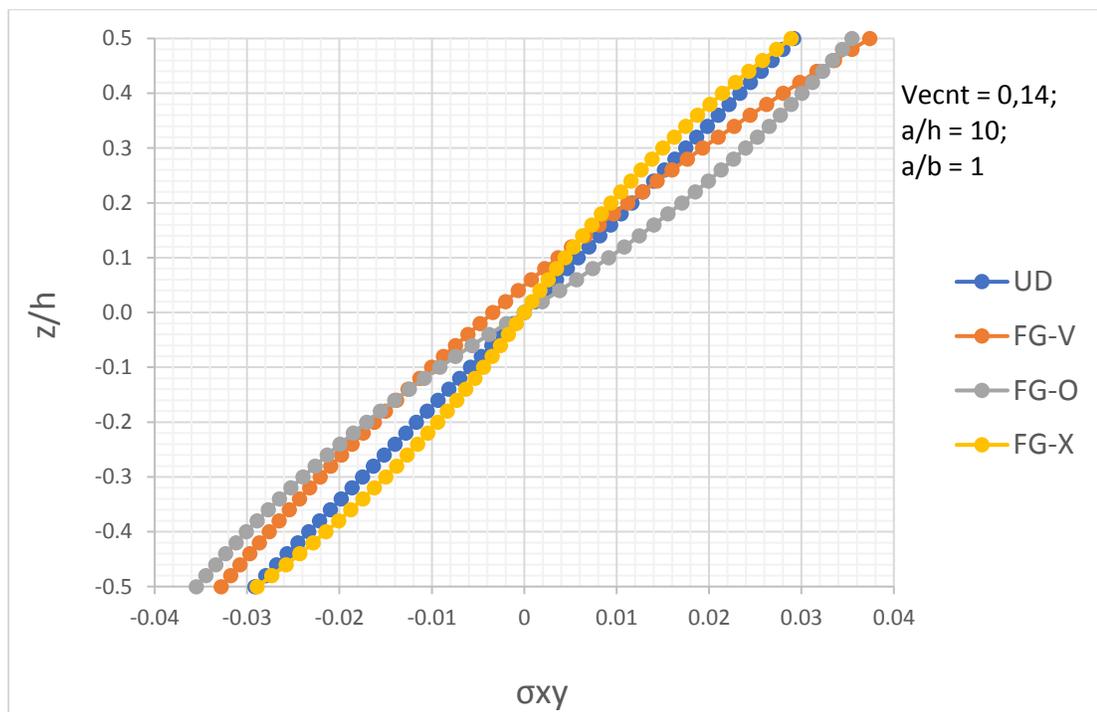
**Figure 4.9 :** Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle  $\sigma_x$  dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ )



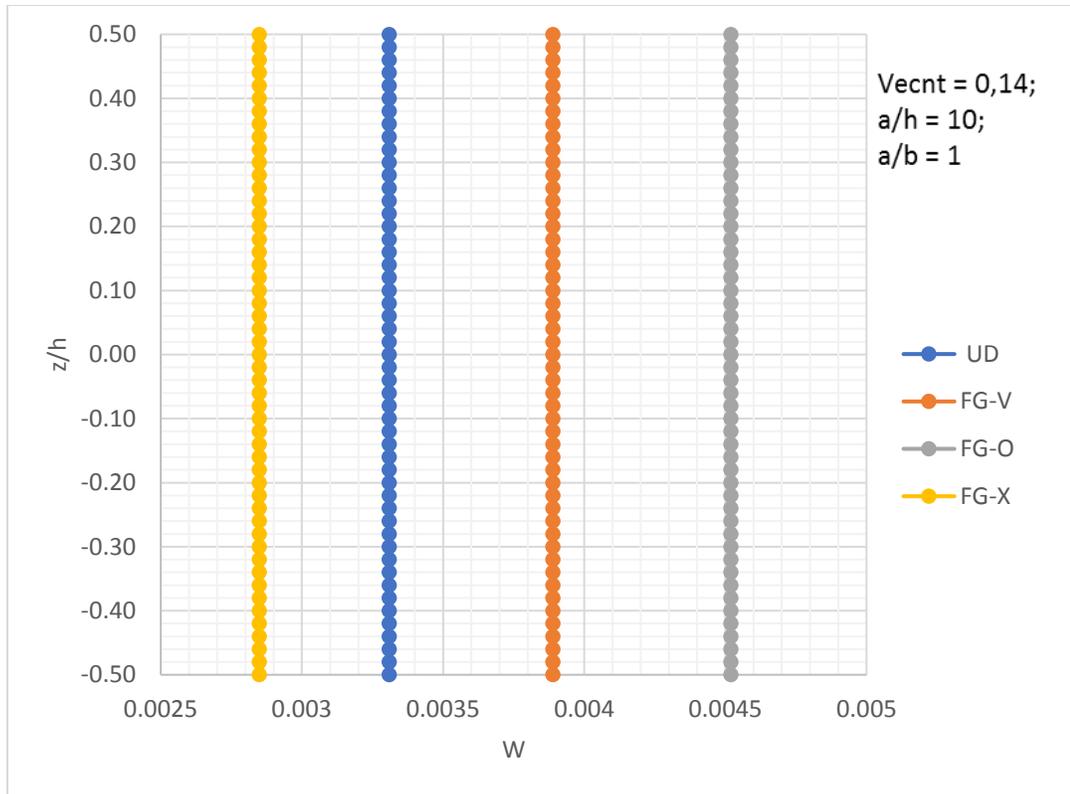
**Figure 4.10 :** Variation du déplacement longitudinale adimensionnel  $u$  dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>).



**Figure 4.11 :** Variation de la contrainte de cisailement adimensionnelle  $\sigma_{xz}$  dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ )



**Figure 4.12 :** Variation de la contrainte de cisailement adimensionnelle  $\sigma_{xy}$  dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ )



**Figure 4.13 :** Variation du déplacement transversal adimensionnel  $w$  dans l'épaisseur d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes en carbone sous chargement uniforme ( $q_0 = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ )

#### 4.5.1.3/ Etude paramétrique :

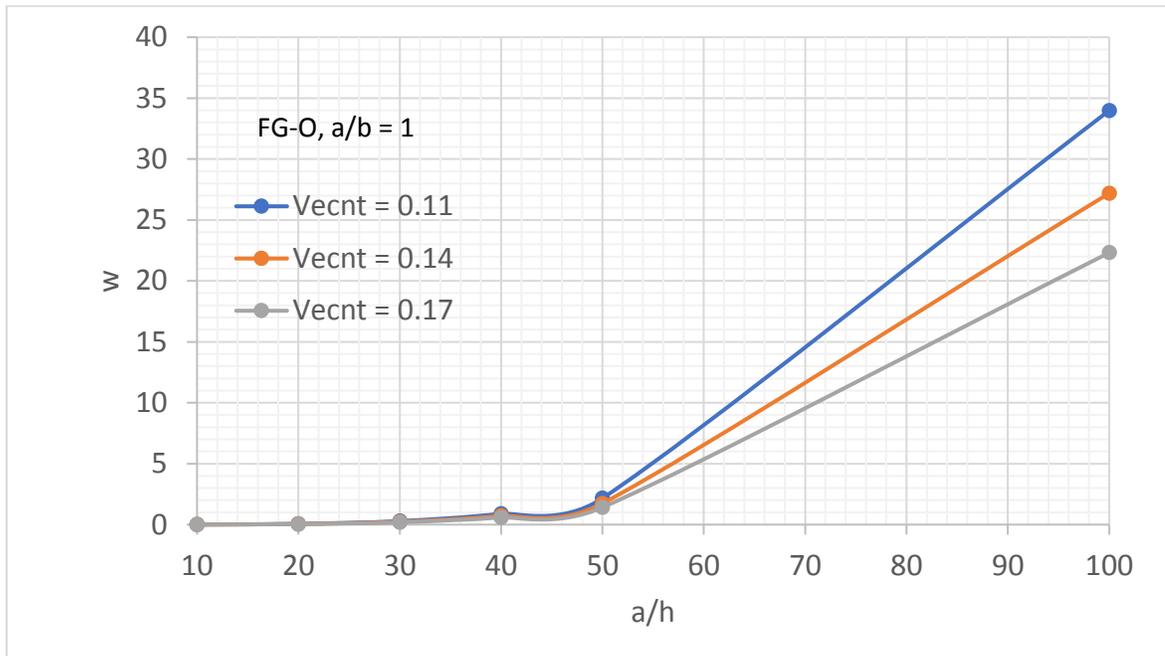
Dans cette section, nous étudions l'influence de la fraction volumique  $V_{ECNT}$  et de la géométrie sur la flexion d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes de carbone mono-paroi en appuis simples. Deux groupes de figures générées à partir de 14 tableaux (que nous n'avons pas listés ici en raison du nombre élevé de résultats). Le premier groupe (**Figures 4.14 - 4.21**) montre la variation des déplacements et contraintes pour une plaque carrée pour deux types de distributions  $V_{CNT}(z)$  (FG-O et FG-V) pour différentes valeurs du rapport  $a/h$  (10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 et 100) et pour 3 valeurs de la fraction volumique des nanotubes de carbone ( $V_{ECNT} = 0.11$  ; 0.14 et 0.17). Le deuxième groupe (**Figures 4.22 - 4.26**) de figures montre la variation des déplacements et contraintes pour une plaque moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) dont le type de distributions  $V_{CNT}(z)$  est FG-X et pour 3 valeurs de la fraction volumique des nanotubes de carbone ( $V_{ECNT} = 0.11$  ; 0.14 et 0.17). Six géométries sont prises en compte dans l'étude ( $a/b =$

10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 et 100) pour évaluer leurs influences sur la flexion de la plaque composite. Selon le premier de groupe de figure, le déplacement transversal adimensionnel  $w$  diminue lorsque la fraction volumique des nanotubes augmente car la plaque devient plus rigide globalement. Cependant, lorsque  $a/h$  est compris entre 10 et 50,  $w$  augmente légèrement mais lorsque  $a/h$  est supérieur à 50, la déflexion verticale  $w$  augmente rapidement car la plaque devient beaucoup plus flexible et ceci quel que soit la valeur de la fraction volumique des nanotubes. Dans tous les cas, la plaque FG-V possède une déflexion plus faible que la plaque FG-O qui est moins rigide globalement. Le déplacement  $u$  adimensionnel diminue lorsque le rapport  $a/h$  augmente et ceci en raison de l'augmentation de la flexibilité de la plaque quel que soit la valeur de la fraction volumique des nanotubes. La plaque FG-O possède un déplacement longitudinal adimensionnel  $u$  beaucoup plus grand que celui de la plaque FG-V car la rigidité de cette dernière est nettement influencée par la fraction volumique des nanotubes. Même variation et influence sont observées pour la contrainte adimensionnelle longitudinale. Cependant, lorsque  $a/h$  augmente, la contrainte de cisaillement augmente à cause de l'augmentation de la flexibilité de la plaque. Cette contrainte ne varie pratiquement pas en passant de la plaque FG-O à FG-V. Ceci peut être constaté aussi par la faible différence observée lorsque la fraction volumique des nanotubes varie de 0.11 à 0.17.

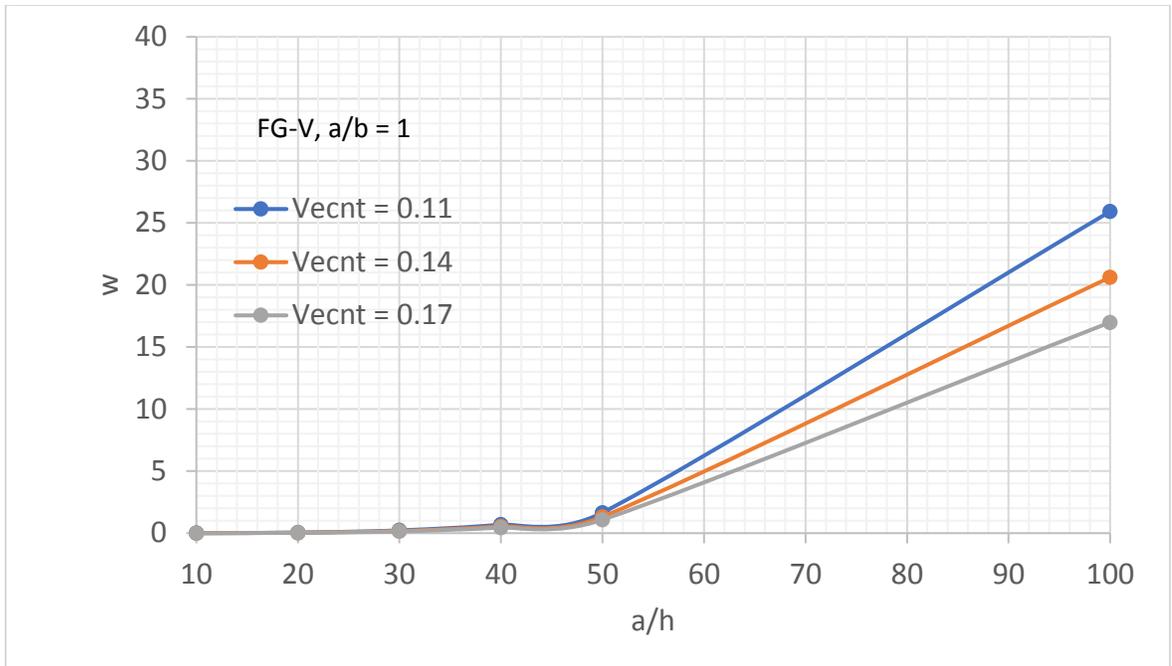
Nous pouvons d'ores et déjà conclure que le renforcement d'un composite par nanotubes en carbone est un moyen efficace pour contrôler la rigidité. Ceci nous permet donc de moduler les déplacements et les contraintes.

Le deuxième groupe de figure (**Figures 4.22 - 4.26**) montre la nette influence de la géométrie de la plaque (rapport  $a/b$ ). Lorsque  $a/b$  est compris entre 0.2 et 1, la variation est parabolique et la déflexion est plus faible lorsque  $a/b = 0.5$ . La plaque avec une fraction volumique des nanotubes égale à 0.17 possède la déflexion  $w$  la plus faible. Lorsque  $a/b$  est supérieur à 1, la déflexion  $w$  adimensionnelle diminue lorsque  $a/b$  augmente. Même observation sur les variations du déplacement longitudinal adimensionnel  $u$  en fonction de la géométrie ( $a/b$ ). La contrainte longitudinale adimensionnelle a la même allure en fonction de  $a/b$  que celle de  $w$  ou de  $u$ . Cependant, on constate très peu d'influence de la fraction volumique des nanotubes lorsque  $a/b$  est compris entre 0.2 et 1 et peu d'influence lorsque  $a/b$  est plus grand que 1. La contrainte de cisaillement adimensionnelle possède une variation parabolique lorsque  $a/b$  est compris entre 0.2 et 1 mais augmente très vite lorsque  $a/b$  est supérieur à 1. Quel que soit le rapport  $a/b$  et lorsque la

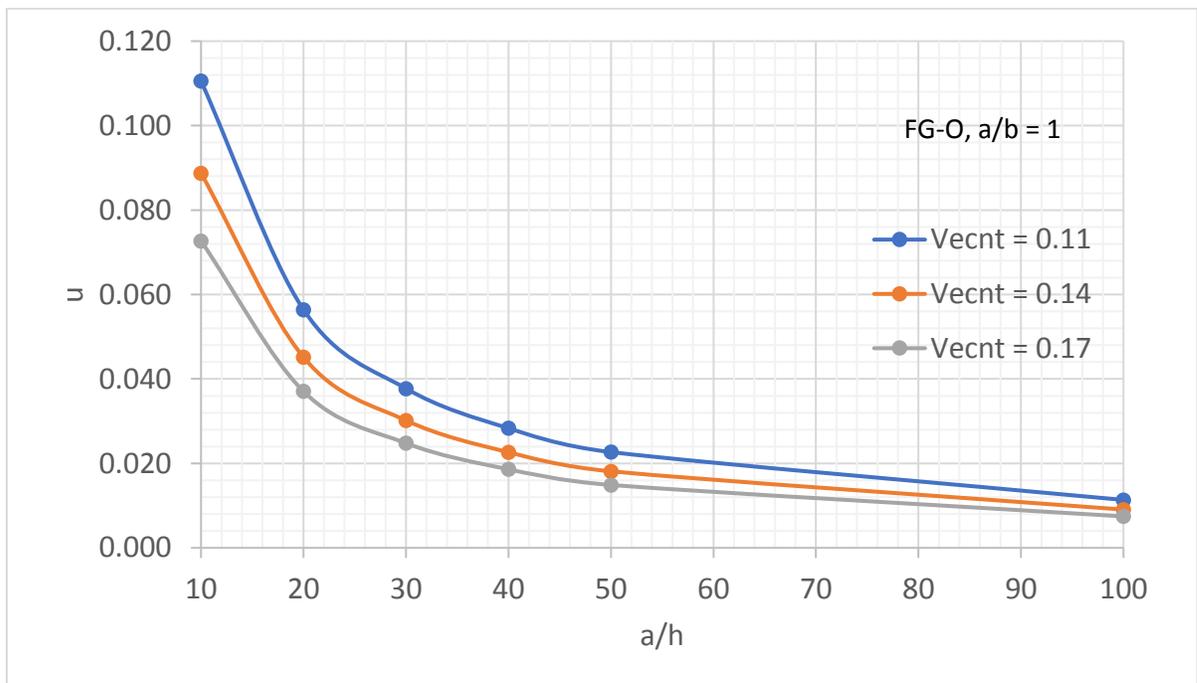
fraction volumique des nanotubes augmente, la contrainte de cisaillement adimensionnelle diminue car la plaque devient plus rigide. La contrainte dans le plan adimensionnelle possède une variation parabolique lorsque  $a/b$  varie entre 0.2 et 2. Elle est minimale lorsque  $a/b = 1.5$ . Pour une plaque FG-X, on observe que c'est la plaque avec une fraction volumique des nanotubes égale à 0.14 qui possède une contrainte en plan adimensionnelle la plus grande quel que soit  $a/b$ . Il semble que ce phénomène est en rapport avec la forme de distribution type FG-X. Ceci mérite une étude plus approfondie et comparative avec les autres distributions pour élucider le phénomène.



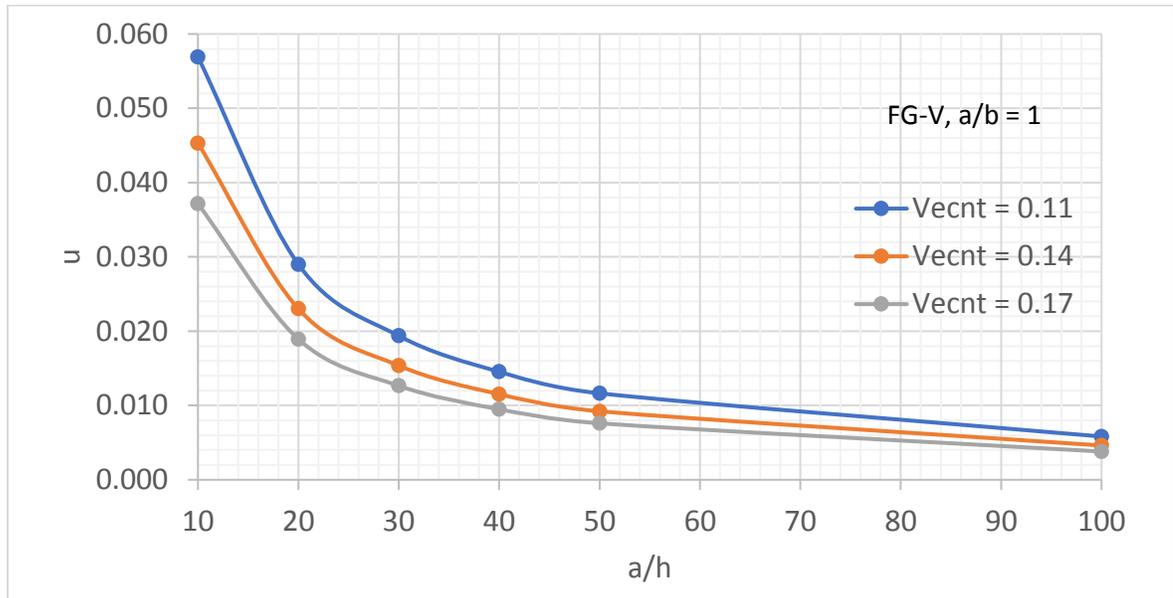
**Figure 4.14 :** Variation du déplacement central adimensionnel  $w$  d'une plaque  $FG - O$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ )



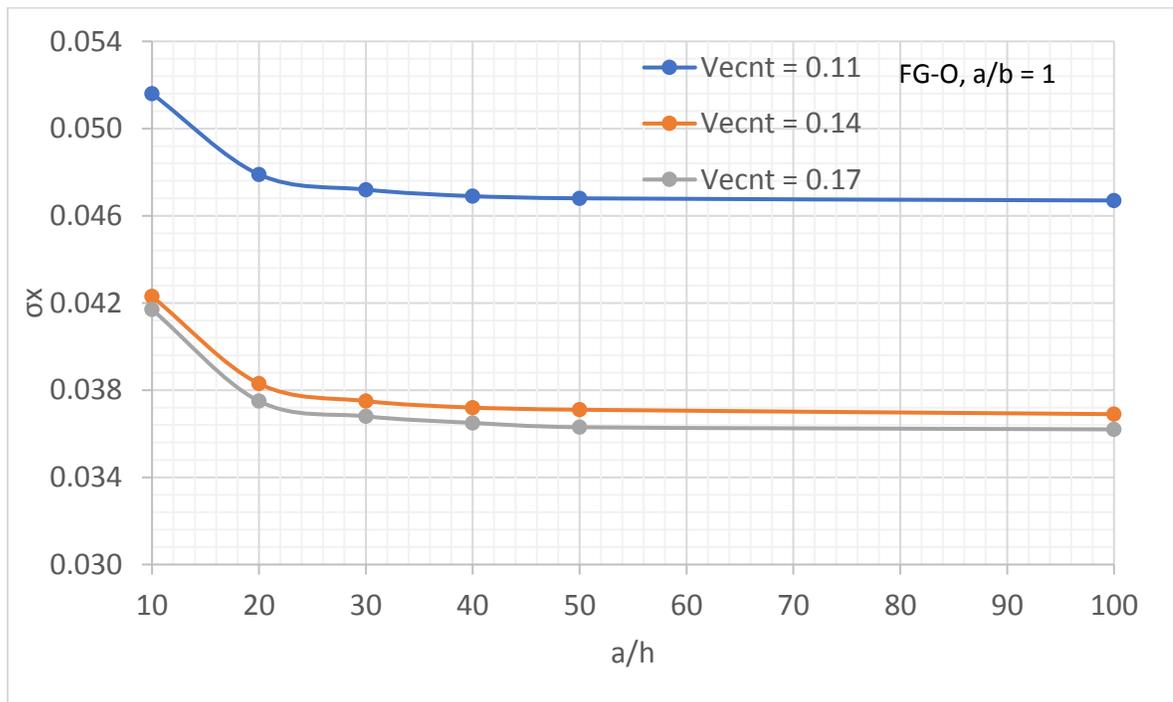
**Figure 4.15 :** Variation du déplacement central adimensionnel  $w$  d'une plaque  $FG - V$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ )



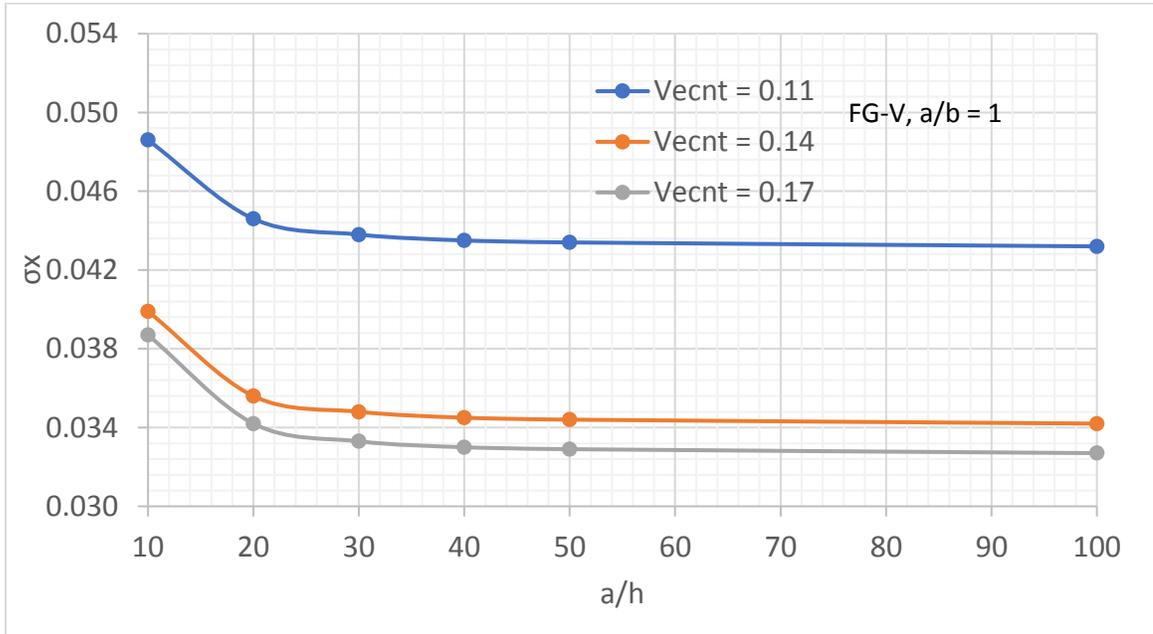
**Figure 4.16** : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel  $u$  d'une plaque  $FG - O$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ )



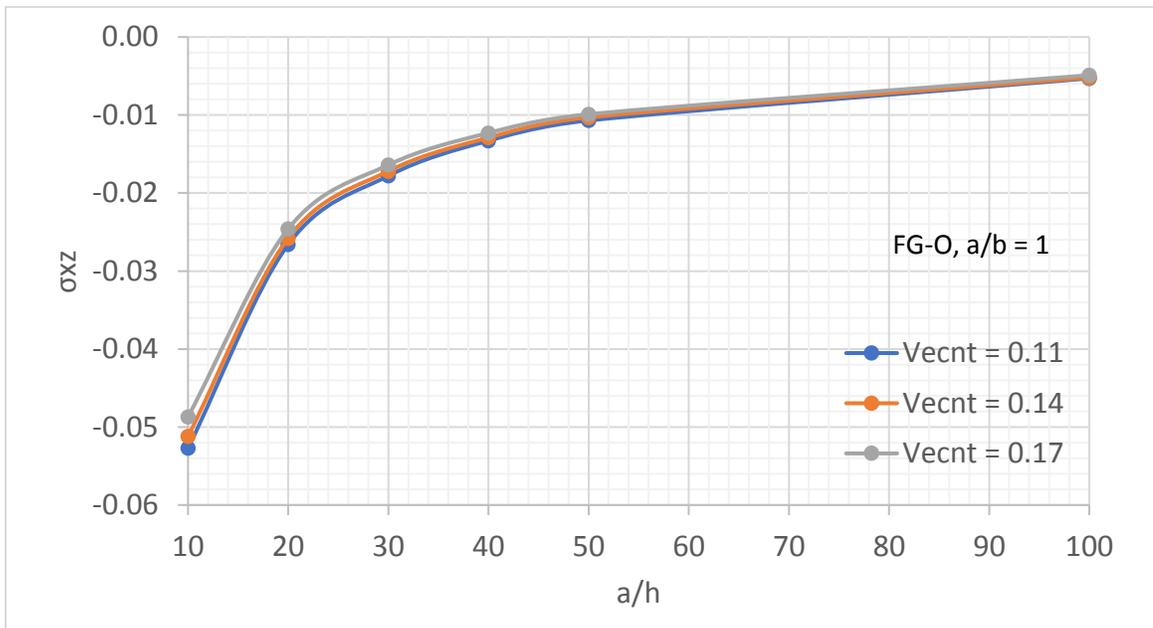
**Figure 4.17** : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel  $u$  d'une plaque  $FG - V$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



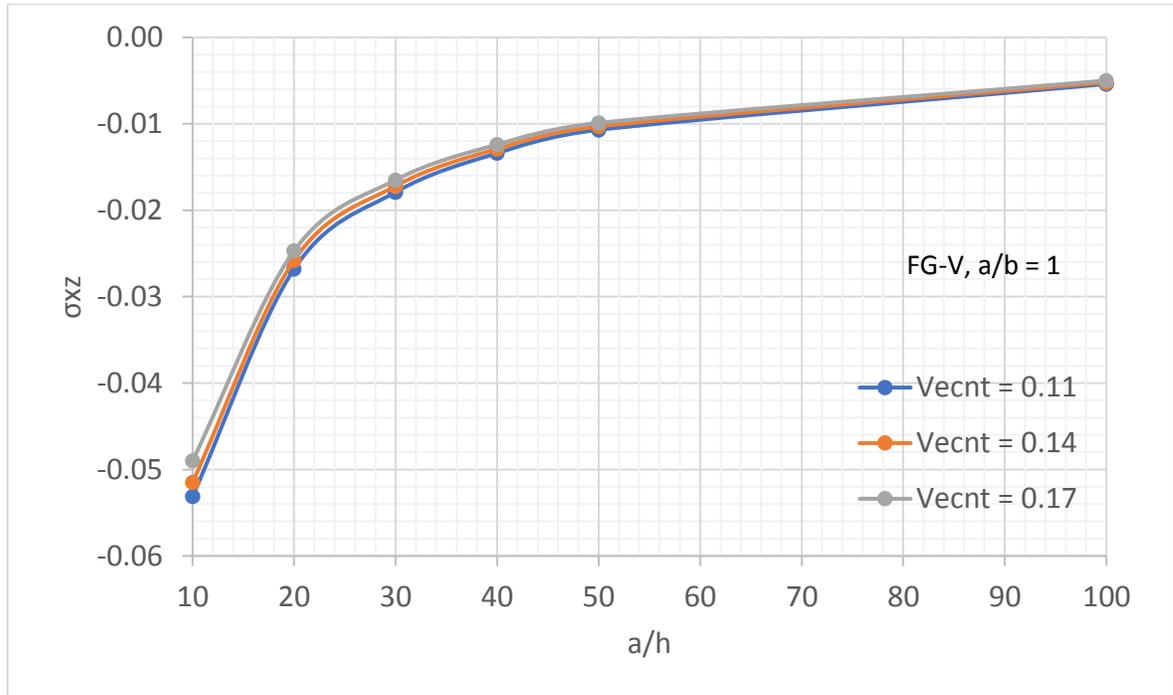
**Figure 4.18 :** Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle  $\sigma_x$  d'une plaque  $FG - O$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ),



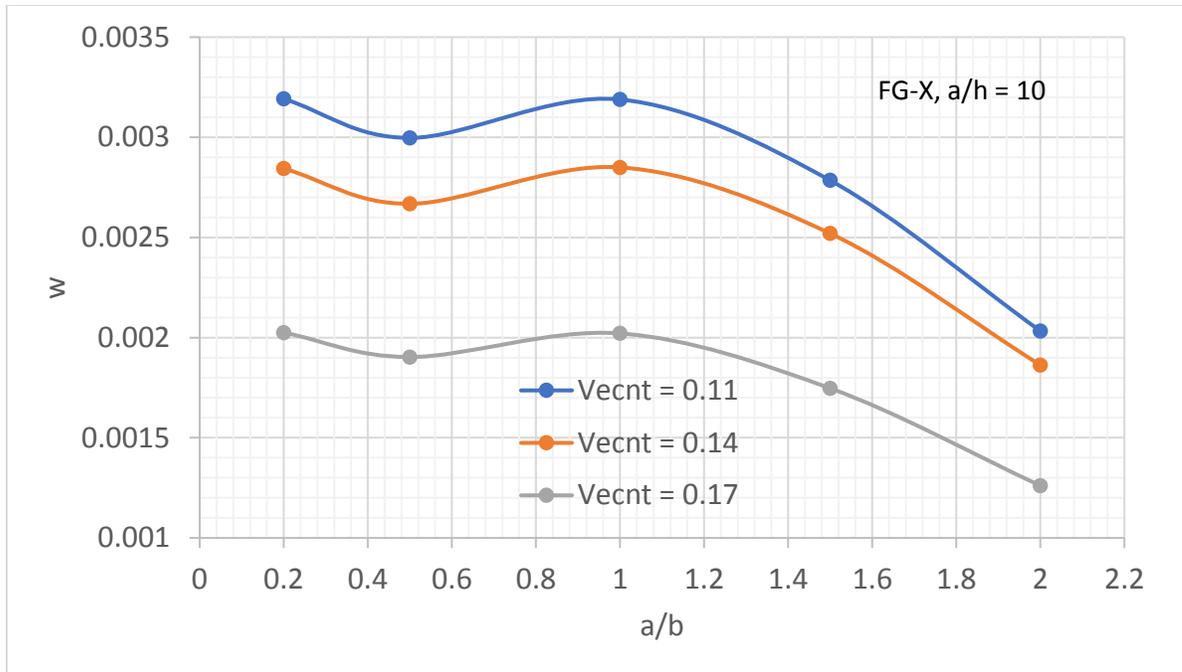
**Figure 4.19 :** Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle  $\sigma_x$  d'une plaque  $FG - V$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



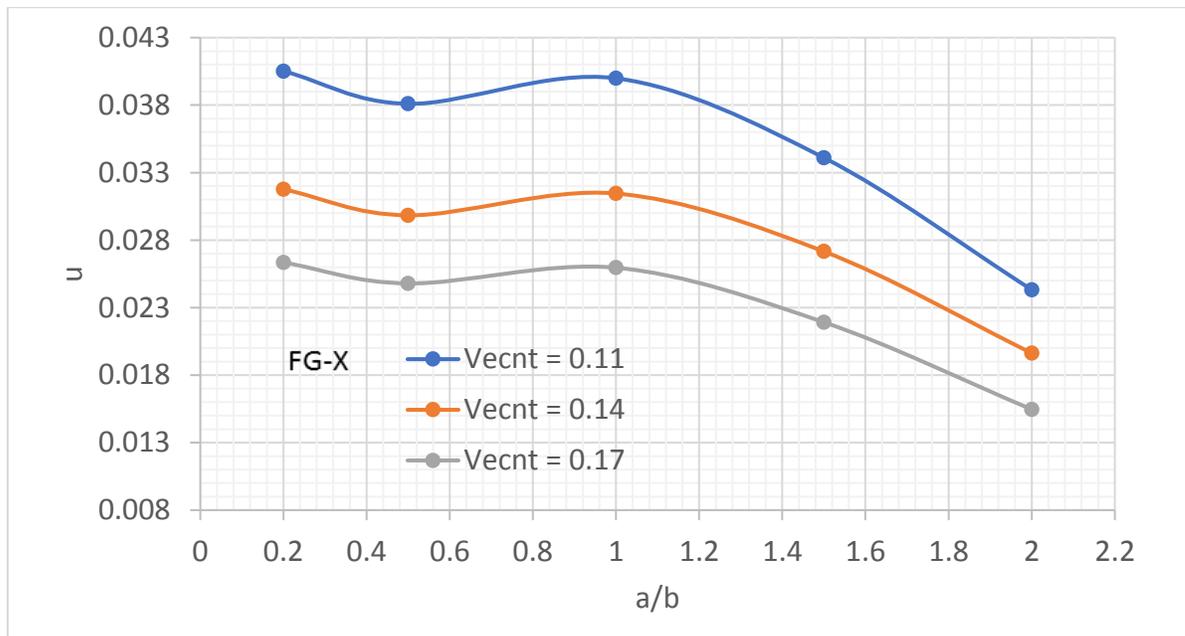
**Figure 4.20 :** Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle  $\sigma_{xz}$  d'une plaque  $FG - O$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



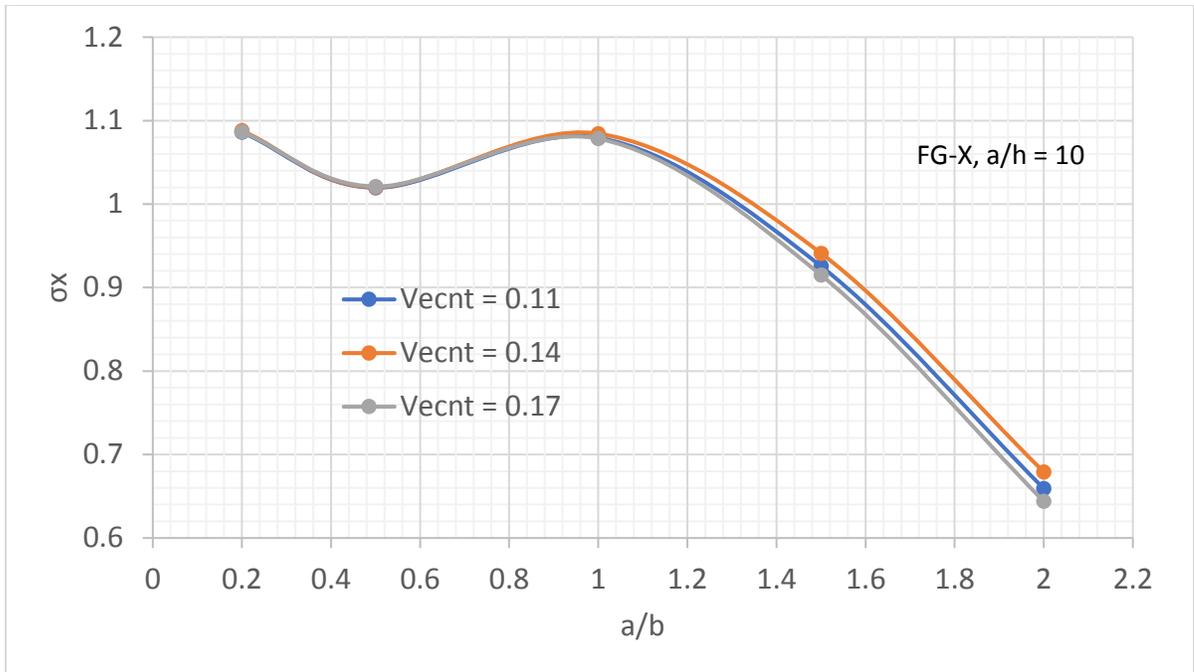
**Figure 4.21 :** Variation de la contrainte de cisaillement longitudinale adimensionnelle  $\sigma_{xz}$  d'une plaque  $FG - V$  carrée en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes fonctions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



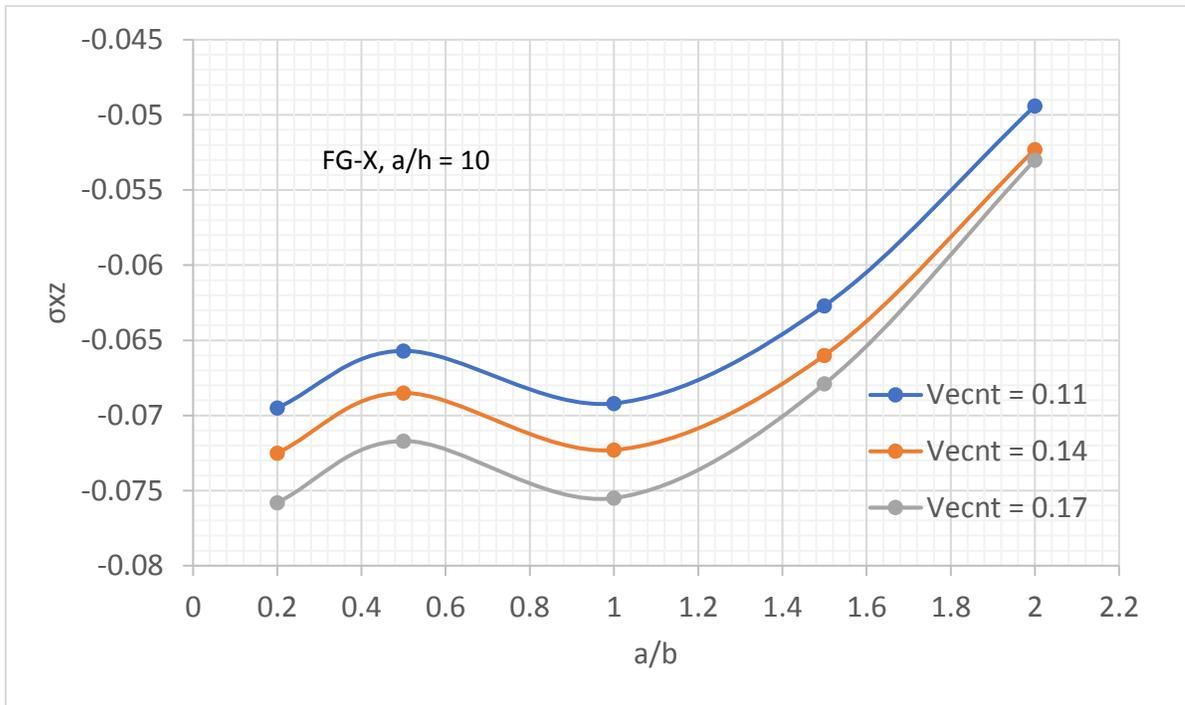
**Figure 4.22 :** Variation du déplacement central adimensionnel  $w$  d'une plaque  $FG - X$  moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport  $a/b$  pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



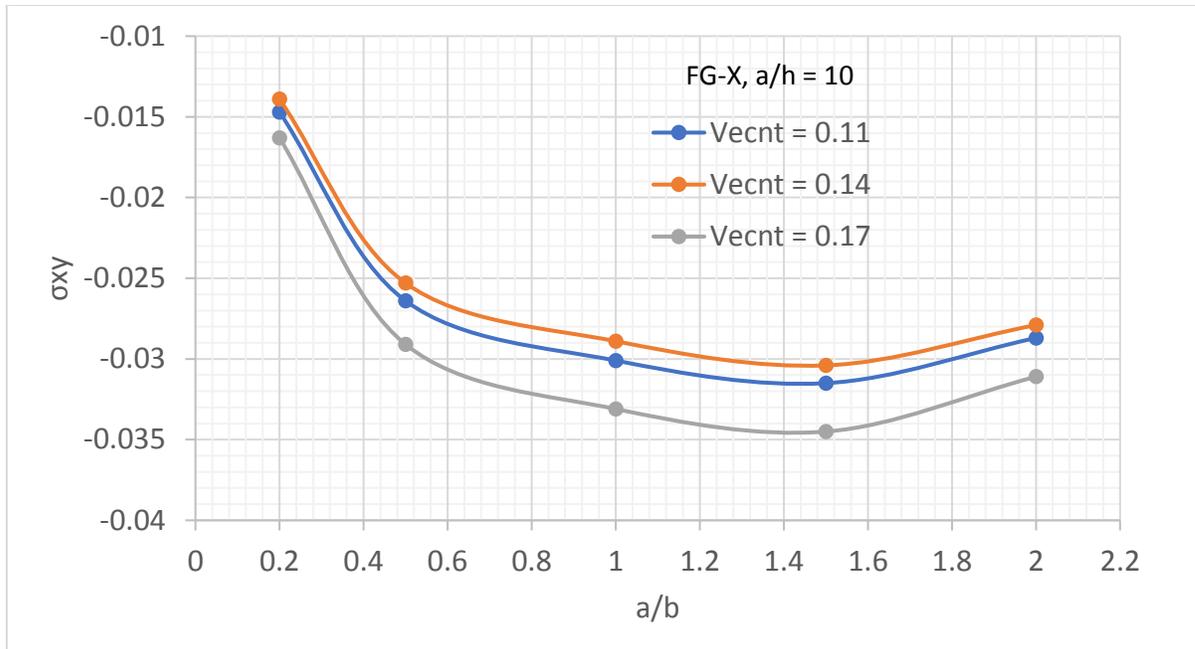
**Figure 4.23 :** Variation du déplacement longitudinal adimensionnel  $u$  d'une plaque  $FG - X$  moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport  $a/b$  pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



**Figure 4.24 :** Variation de la contrainte longitudinale adimensionnel  $\sigma_x$  d'une plaque  $FG - X$  moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport  $a/b$  pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



**Figure 4.25** Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnel  $\sigma_{xz}$  d'une plaque  $FG - X$  moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport  $a/b$  pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).



**Figure 4.26 :** Variation de la contrainte de cisaillement en plan adimensionnel  $\sigma_{xy}$  d'une plaque  $FG - X$  moyennement épaisse ( $a/h = 10$ ) en fonction du rapport  $a/b$  pour différentes fractions volumiques des nanotubes sous chargement uniforme ( $q_0 = -1.10^5 \text{ N/m}^2$ ).

#### 4.5.2. Conclusion :

Les CNT sont considérés comme prometteurs dans l'industrie et représentent un excellent candidat pour le renforcement des composites en polymère et un bon moyen pour « contrôler » les déplacements et contraintes générés. Leur atout majeur est lié à leurs propriétés mécaniques supérieures, c'est-à-dire une haute résistance et une très bonne rigidité.

Dans cette étude, nous avons cherché à étudier la flexion de différents types de plaques composites CNTRC (carbon nanotubes reinforced composite) en utilisant la méthode analytique de Navier. Les propriétés mécaniques dépendant de la position  $z$  suivant l'épaisseur ont été estimées par la règle étendue de mélange. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre incluant l'effet de l'inertie de rotation (FSDT) est utilisé pour approximer le champ de déplacement bidimensionnel. Nous avons validé notre code de calcul Maple en comparant nos résultats à ceux publiés. A cet effet, quatre types de composites CNTRC ont été considérés. Le tableau de comparaison inclut un tableau de la flèche et une figure de contrainte longitudinale centrale adimensionnelle. Les résultats trouvés grâce à la théorie de déformation choisie associée à la méthode numérique de Navier concordent bien avec ceux publiés. Il faut noter que le code de

calcul élaboré nécessite un volume de calcul bien inférieur à celui nécessaire pour mettre en œuvre la théorie de l'élasticité 3D, la méthode DQM ou la méthode des éléments finis. La seule limitation est que la présente méthode analytique n'est valable que pour le cas de plaques en appuis simples.

### **4.5.3. L'analyse du flambage :**

#### **4.5.3.1 Résultats et interprétations :**

La réponse au flambage par cisaillement de plaques en composite renforcées par des nanotubes de carbone (CNTRC) est étudiée. La distribution des NTC à travers l'épaisseur de la plaque peut être uniforme ou graduée par un motif symétrique médian. Les propriétés de la plaque CNTRC sont obtenues en utilisant la règle modifiée des mélanges. La théorie du premier ordre des plaques a été adoptée pour développer ou dériver les équations de base du mouvement de la plaque. Une formulation analytique basée sur la méthode de Navier a été implémentée pour obtenir les matrices de rigidité élastique. La méthode de solution proposée peut être utilisée pour des bords en appuis simples. Après avoir réalisé des études de convergence et de comparaison pour montrer l'efficacité et la précision de méthode proposée, des études paramétriques sont menées pour examiner l'influence de la géométrie de la plaque, de la loi de distribution selon l'épaisseur et de la fraction volumique des nanotubes de carbones à paroi mince. Il est montré que la capacité de flambage de la plaque peut être améliorée grâce à une répartition graduellement fonctionnelle judicieuse des nanotubes. En outre, l'enrichissement de la matrice avec des nanotubes améliore les charges de flambage par cisaillement des plaques FG-CNTRC. Comme pour l'étude de flexion, nous avons choisi de présenter les résultats issus de l'analyse paramétrique sous forme de figures en raison de grands tableaux de valeurs générées par le code de calcul pour différents paramètres choisis.

#### **4.5.3.2. Comparaison des résultats de flambage :**

Dans cette partie, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision et l'efficacité de la présente théorie dans la prédiction de la charge critique de flambage d'une plaque FG-CNTRC soumise à de différents types de charges de compression axiales Référence [34]. Les valeurs des charges critiques adimensionnelles de flambage sont obtenues par le programme Maple que nous avons élaboré en utilisant la forme adimensionnelle suivante :

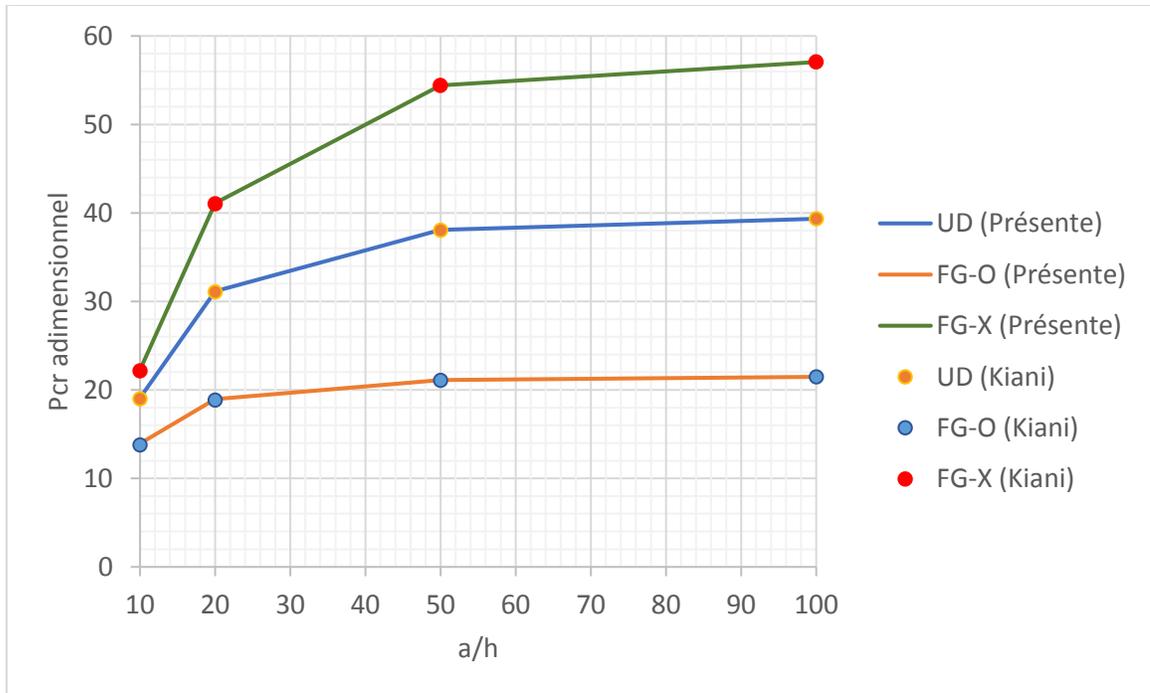
$$\bar{P}_{cr} = P_{cr} \cdot \frac{b^2}{E_m h^3} \quad (4.15)$$

Le tableau suivant montre la comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque carrée FGM renforcée par des nanotubes en carbone et soumise à une compression uni-axiale et dont la fraction volumique des nanotubes est égale à 0.11. Pour mieux apprécier l'évolution de cette charge en fonction du rapport a/h et du type de distribution des nanotubes suivant l'épaisseur de la plaque FGM, un graphe a été tracé à cet effet. Nous pouvons d'ores et déjà constater que l'erreur relative des résultats, comparativement à ceux déjà publiés, reste très faible pour tous les paramètres considérés. Ceci démontre bien l'efficacité du programme Maple élaboré ; ce qui le rend fiable pour mener une étude paramétrique que nous aborderons dans la section suivante.

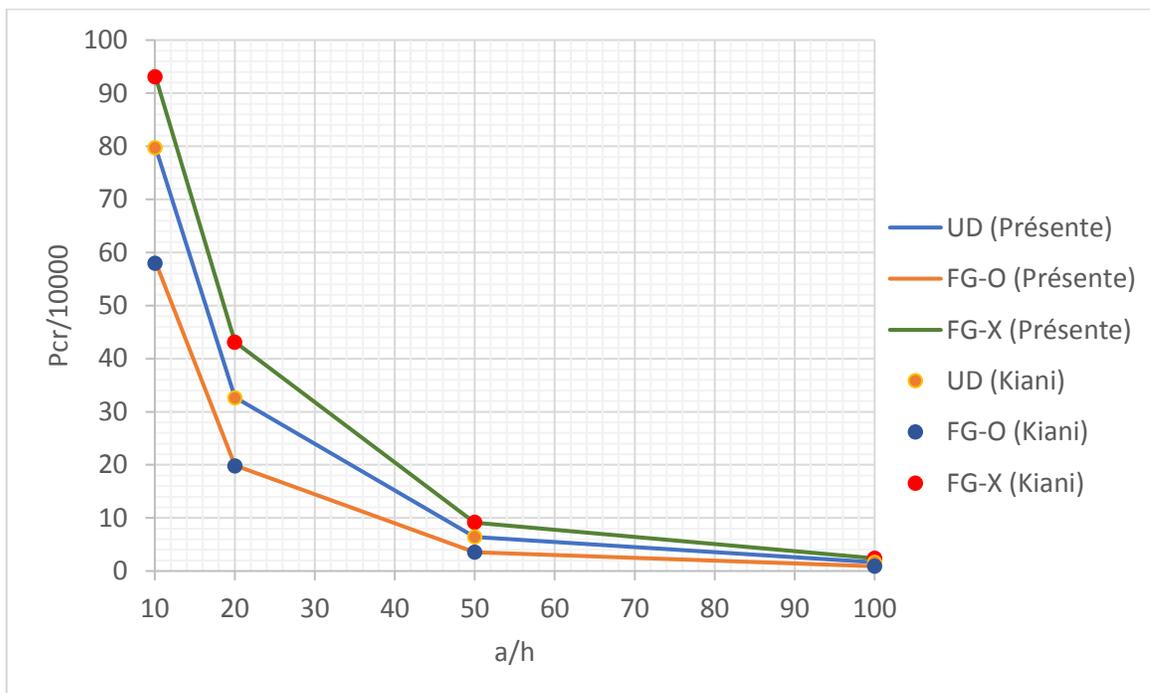
Type	Source	a/h			
		10	20	50	100
UD	Y. Kiani	18.9825	31.0703	38.0600	39.3391
	Zhang et al	18.9783	30.9221	37.7998	39.1158
	Présente	19.1027	31.1620	38.0828	39.3400
	Erreur (%)	-0.63 %	-0.30 %	-0.06 %	0.00 %
FG-O	Y. Kiani	13.7938	18.8456	21.0904	21.4639
	Zhang et al	13.8356	18.7618	20.9312	21.3316
	Présente	13.9426	18.9498	21.1227	21.4766
	Erreur (%)	-1.08 %	-0.55 %	-0.15 %	-0.06 %
FG-X	Y. Kiani	22.1655	41.0295	54.3867	57.0671
	Zhang et al	22.1612	40.8422	54.0305	56.7373
	Présente	22.2743	41.1137	54.3998	57.0551
	Erreur (%)	-0.49 %	-0.21 %	-0.02 %	0.02 %

**Tableau 4.6.** Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque carrée FGM renforcée par des nanotubes en carbone et soumise à une compression uni-axiale ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $a/b = 1$ ,  $V_{ecnt} = 0.11$ )

L'erreur relative a été calculée par rapport aux valeurs fournis par Y.Kiani (**Réf [34]**).



**Figure 4.27a :** Variation de la charge adimensionnelle critique de flambage d'une plaque carrée FGM renforcée par des nanotubes en carbone et soumise à une compression uni-axiale ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $a/b = 1$ ,  $\nu_{\text{cent}} = 0.11$ )



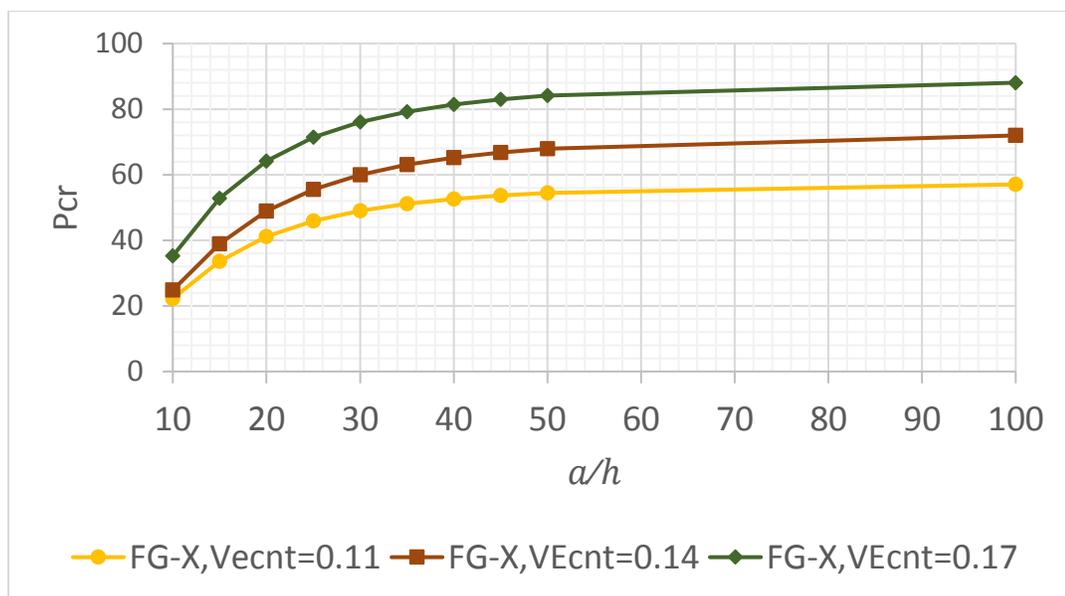
**Figure 4.27b :** Variation de la charge critique de flambage d'une plaque carrée FGM renforcée par des nanotubes en carbone et soumise à une compression uni-axiale ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $a/b = 1$ ,  $Vecnt = 0.11$ )

La **Figure 4.27a** montre que plus le rapport  $a/h$  augmente et plus la charge critique de flambage adimensionnelle augmente. Cependant et pour le cas de la plaque FG-O, cette augmentation est plus lente. Quel que soit le rapport  $a/h$ , la plaque FG-X possède la charge critique de flambage adimensionnelle la plus grande alors que celle de la plaque FG-O est la plus petite. Ceci est dû au fait que la distribution des nanotubes suivant l'épaisseur devient plus faible lorsque la plaque est moyennement épaisse. De ce fait, une distribution des nanotubes concentrée proche des surfaces supérieure et inférieure de la plaque est plus efficace que celle concentrée proche du plan médian. Physiquement, la variation de la charge critique de flambage en fonction du rapport  $a/h$  possède l'allure telle que montrée sur **la Figure 4.27b**. L'allure de la courbe de **la figure 4.27a** est due à la forme adimensionnelle utilisée. Pour résumé, plus la plaque est mince (en augmentant  $a/h$ ) et plus la charge critique de flambage supportée est faible car la plaque devient beaucoup plus flexible.

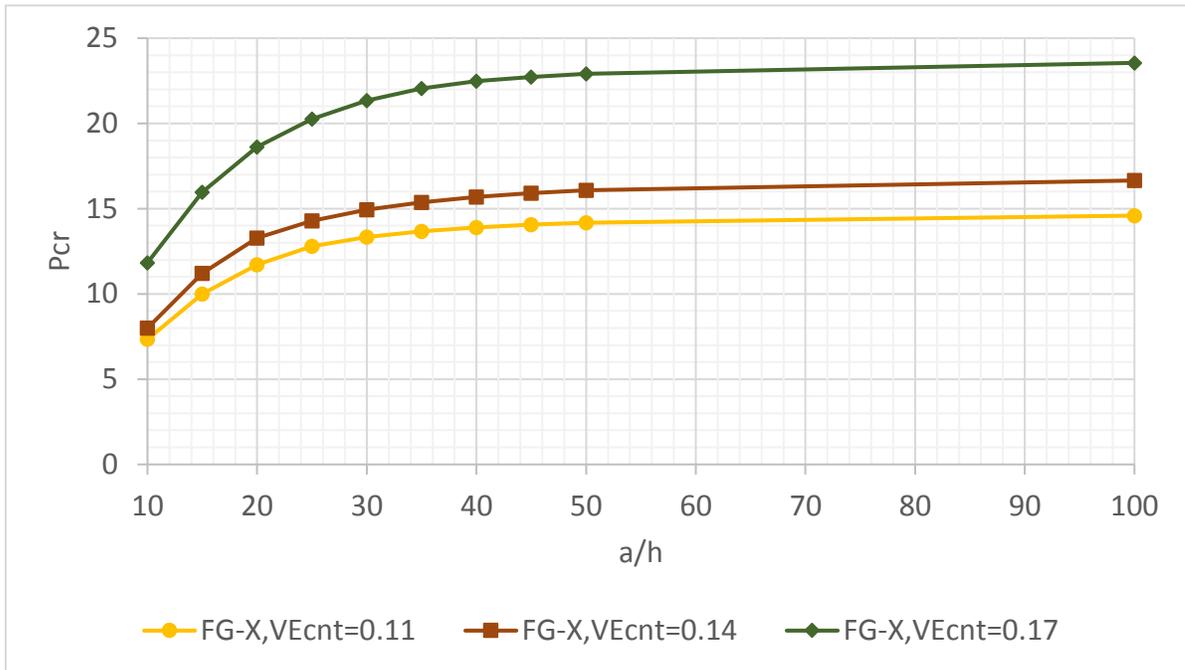
#### **4.5.4. Etude paramétrique :**

Dans cette section, nous étudions l'influence de la fraction volumique  $V_{CNT}$  et les rapports de dimensions  $a/b$  et  $a/h$  sur la charge adimensionnelle critique de flambage pour une plaque FG-CNTRC. D'après les figures ci-dessous, nous remarquons que la charge critique adimensionnelle de flambage augmente lorsque le rapport  $a/h$  augmente (on passe d'une plaque mince à une plaque moyennement épaisse) car la plaque devient plus rigide et ceci est valable pour toutes les fractions volumiques et les distributions des nanotubes de carbone choisies et du rapport  $a/b$  (plaque carrée ou rectangulaire) ; de plus, quand la plaque est soumise à une compression uni-axiale, la charge critique adimensionnelle de flambage est plus grande par rapport à la plaque quand elle est soumise à une compression biaxiales. En effet,  $\bar{P}_{cr}$  diminue lorsque le rapport  $a/b$  augmente car la plaque devient moins rigide et ceci est valable pour toutes les fractions volumiques et les distributions des nanotubes de carbone choisies. Cette augmentation de  $\bar{P}_{cr}$  s'explique physiquement par le fait que plus on ajoute des nanotubes en carbone comme renforcement plus on augmente  $Vecnt$  et plus on rigidifie la plaque. Nous pouvons d'ores et déjà conclure que le renforcement d'un composite par nanotubes en carbone est un moyen efficace pour contrôler la

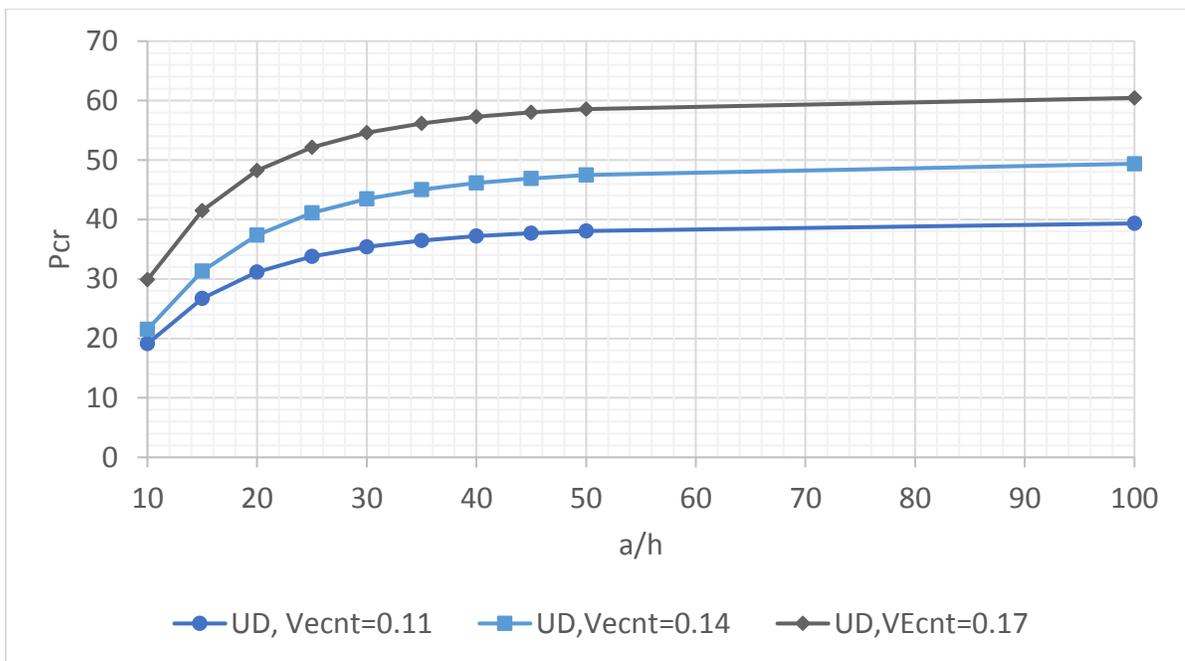
rigidité et donc la charge critique adimensionnelle de flambage. Comme signalé plus haut, la charge critique de flambage diminue lorsque le rapport  $a/h$  augmente (au fur et à mesure que la plaque devient plus flexible). L'allure des courbes des figures suivantes est due à la forme adimensionnelle utilisée. Cette variation reste valable quel que soit la loi de distribution des nanotubes à travers l'épaisseur de la plaque et le type de chargement (axial ou biaxial). On observe aussi que lorsque  $a/b$  augmente, charge critique adimensionnelle de flambage diminue mais la charge critique non adimensionnelle de flambage augmente car la plaque se rigidifie. Cette augmentation de la charge critique de flambage est valable pour toutes les lois de variation de la fraction volumique des nanotubes suivant l'épaisseur. Pour un même rapport  $a/h$ , la plaque FG-X possède la plus grande charge critique de flambage adimensionnelle alors que la plaque FG-O possède la plus petite charge critique de flambage adimensionnelle. Pour un chargement biaxial, la charge critique de flambage adimensionnelle est plus petite que pour un chargement axial pour la même géométrie et la même distribution des nanotubes suivant l'épaisseur. Ceci s'explique simplement par le fait que la plaque à chargement biaxial est doublement chargée, mais dans des directions perpendiculaires.



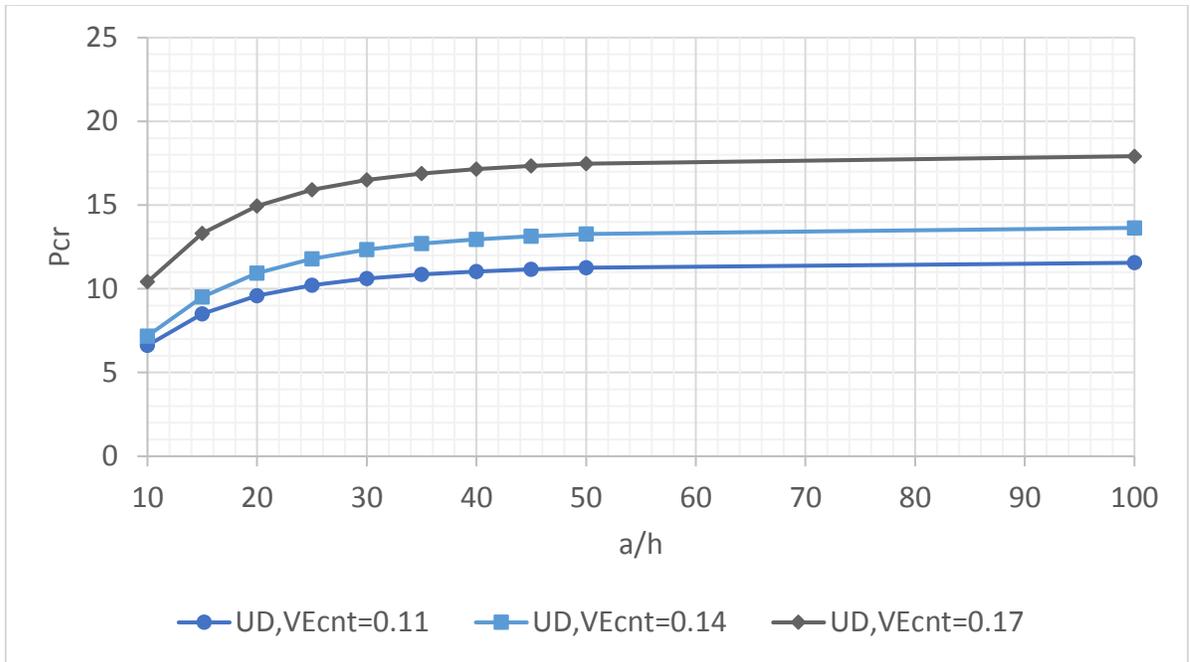
**Figure 4.28 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ )



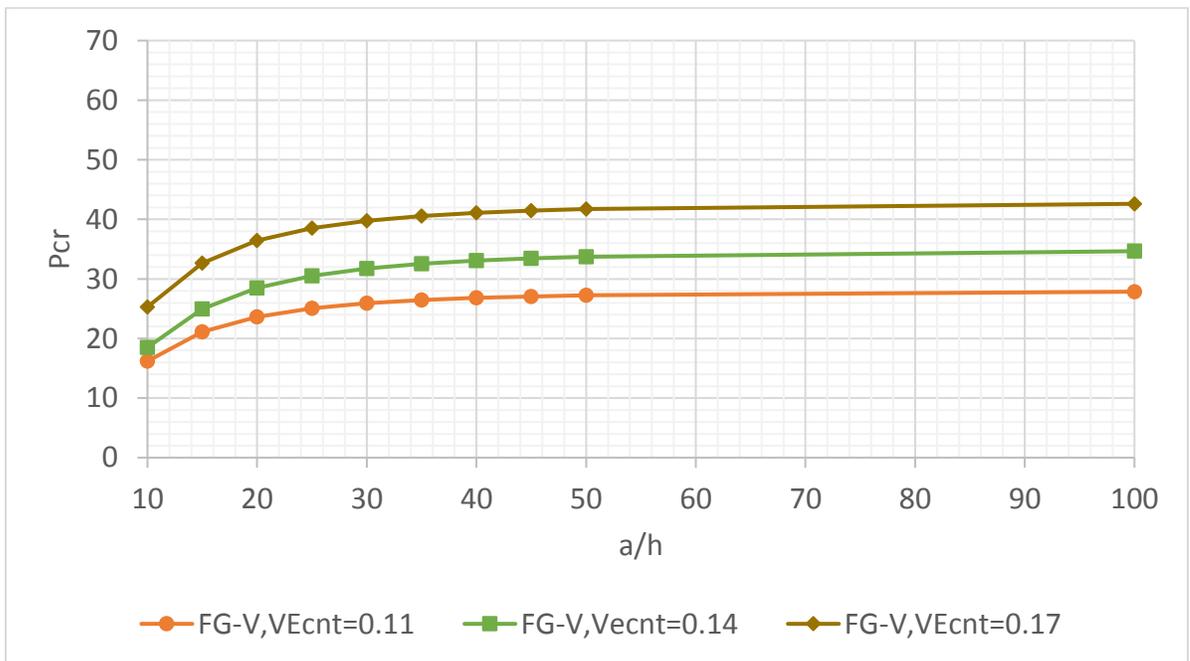
**Figure 4.29 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ )



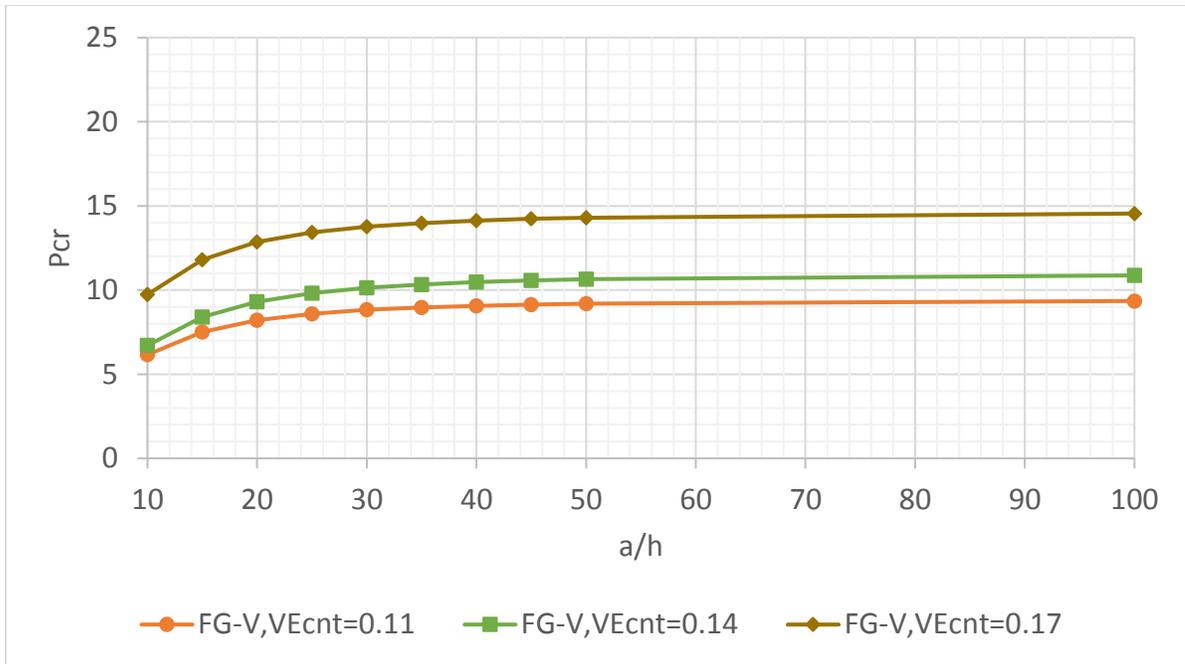
**Figure 4.30 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ )



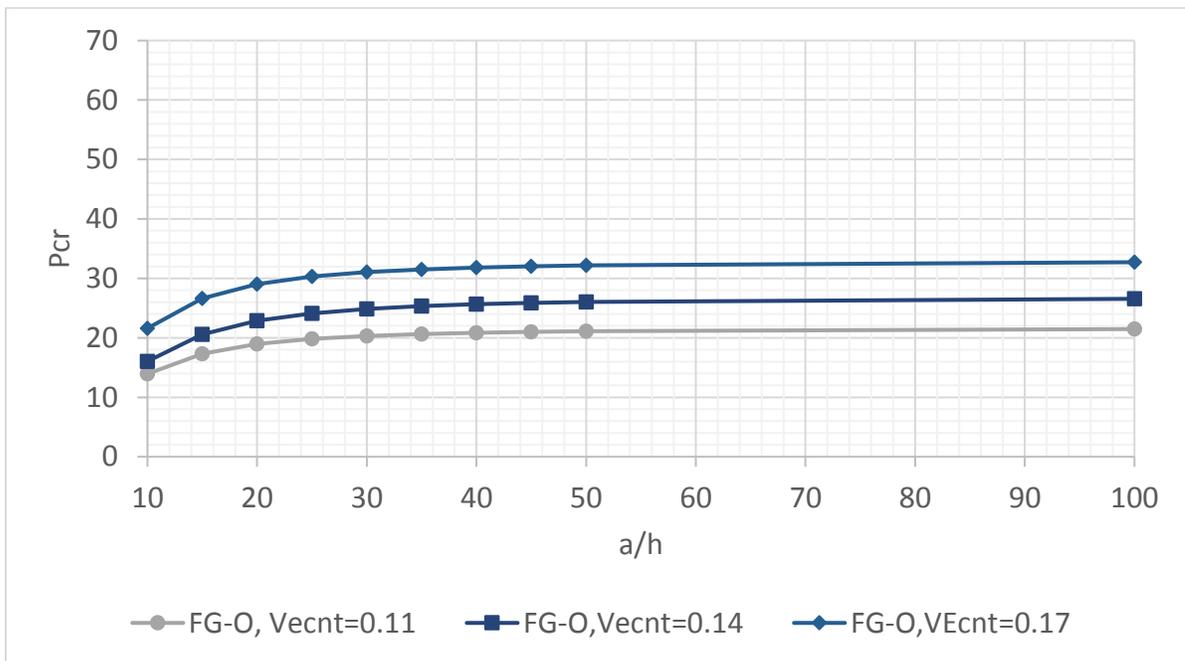
**Figure 4.31 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ )



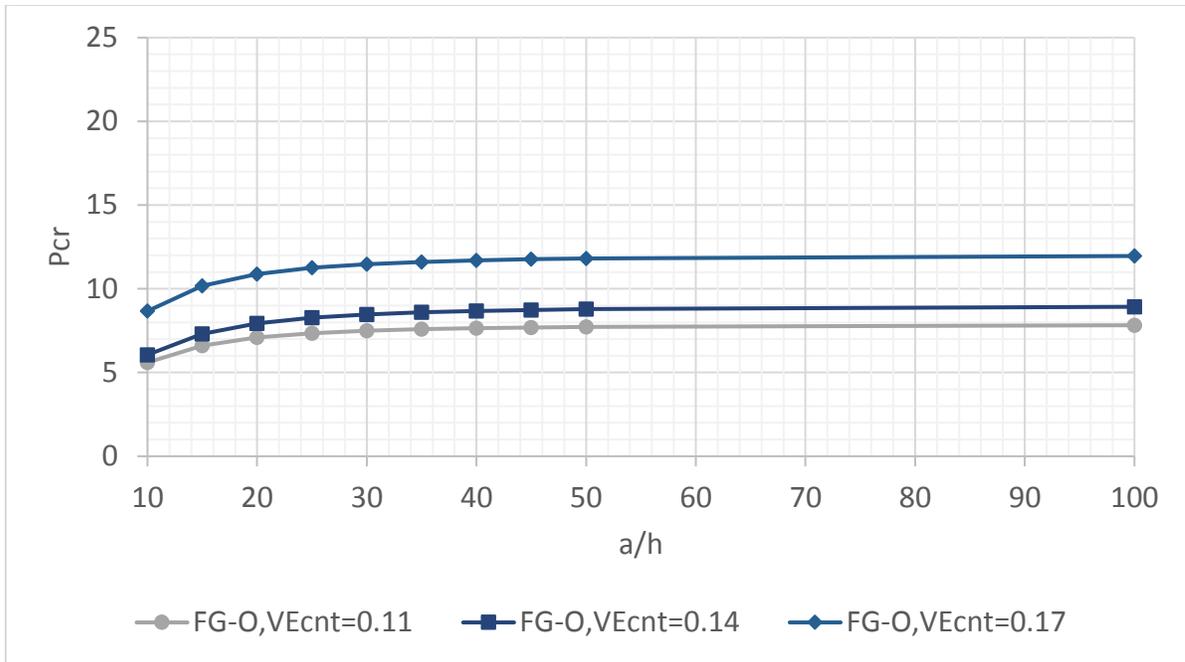
**Figure 4.32 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ )



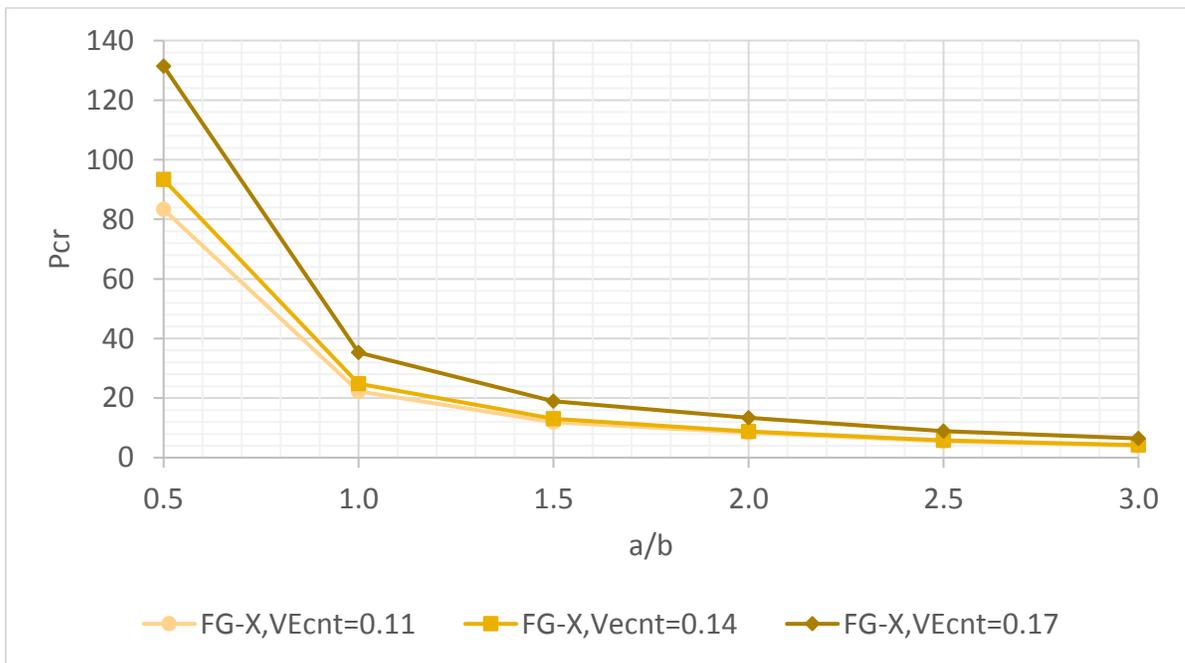
**Figure 4.33 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ )



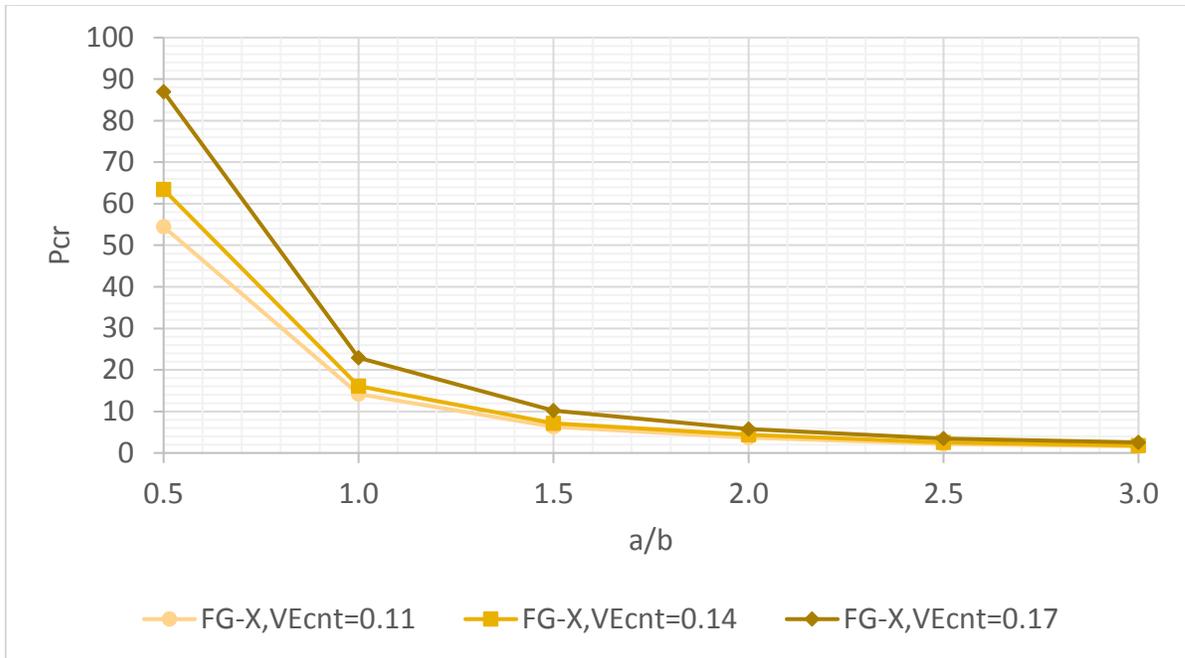
**Figure 4.34 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ )



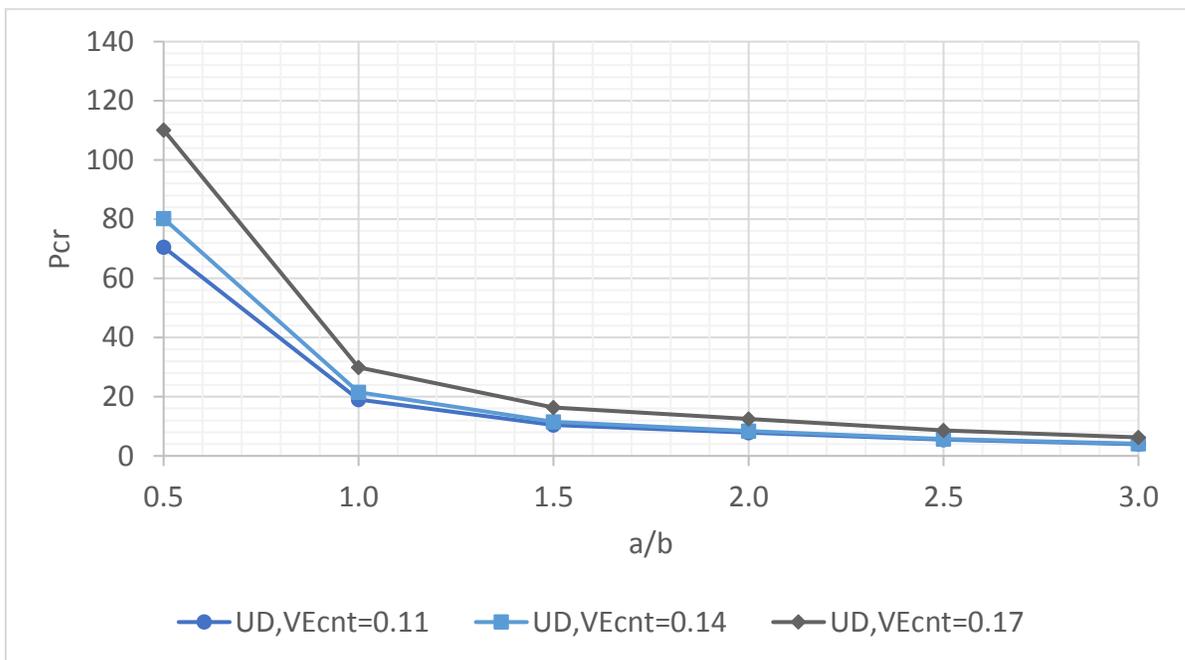
**Figure 4.35 :** Influence du rapport  $a/h$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1$ )



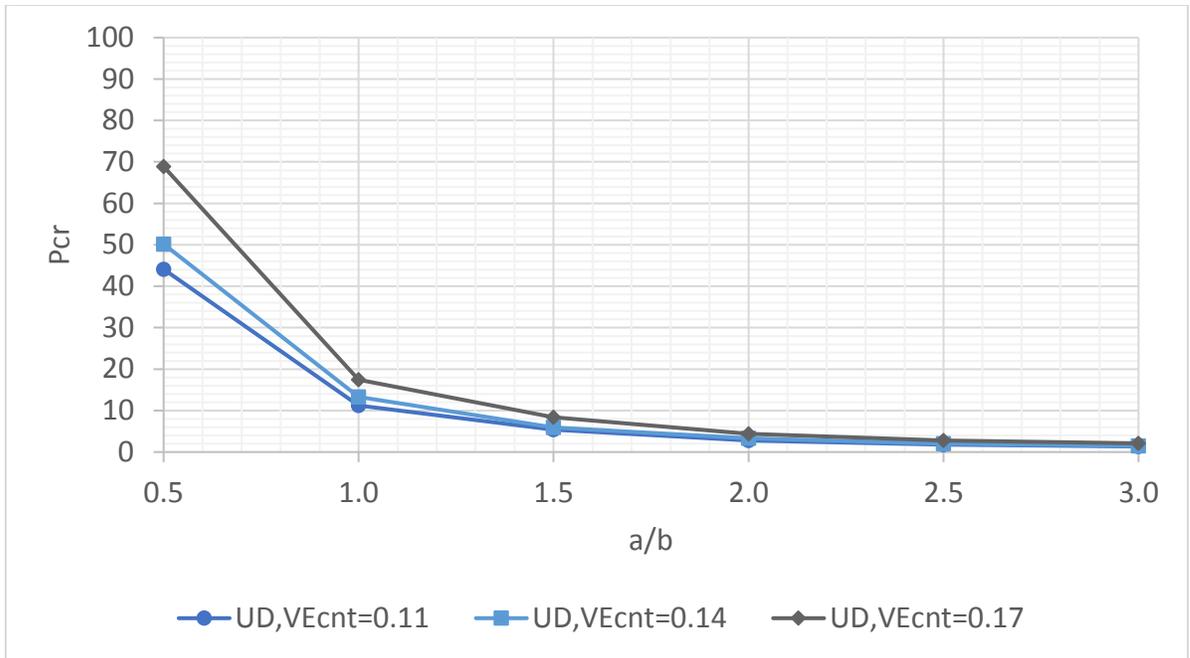
**Figure 4.36 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$ )



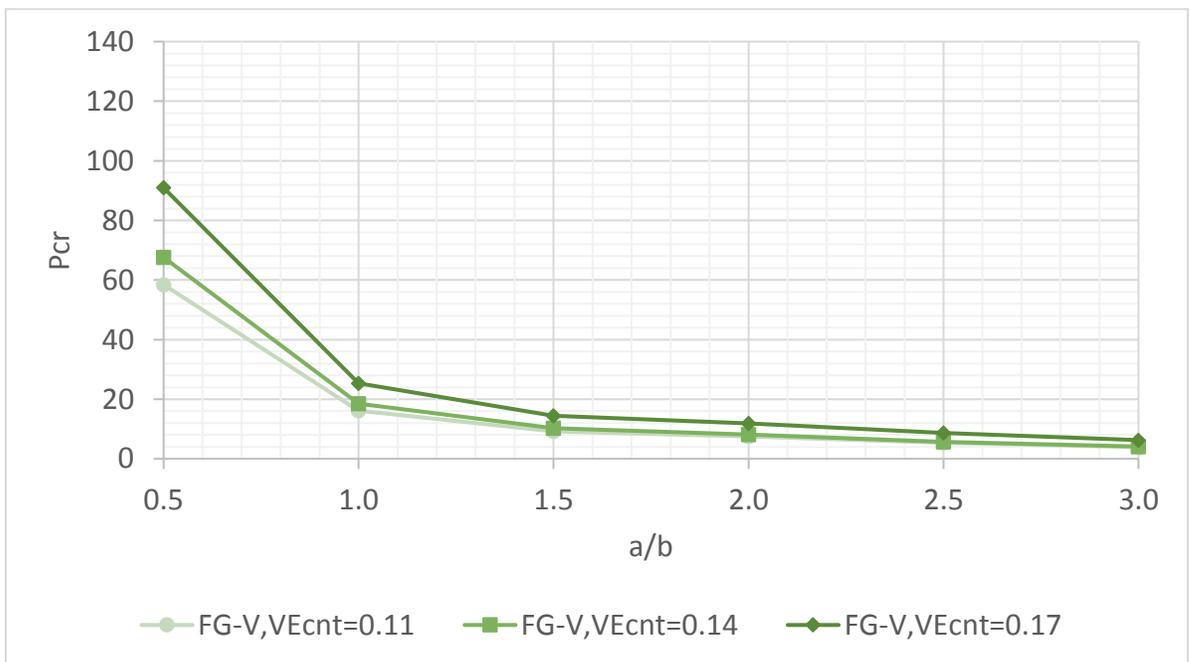
**Figure 4.37 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-X ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ )



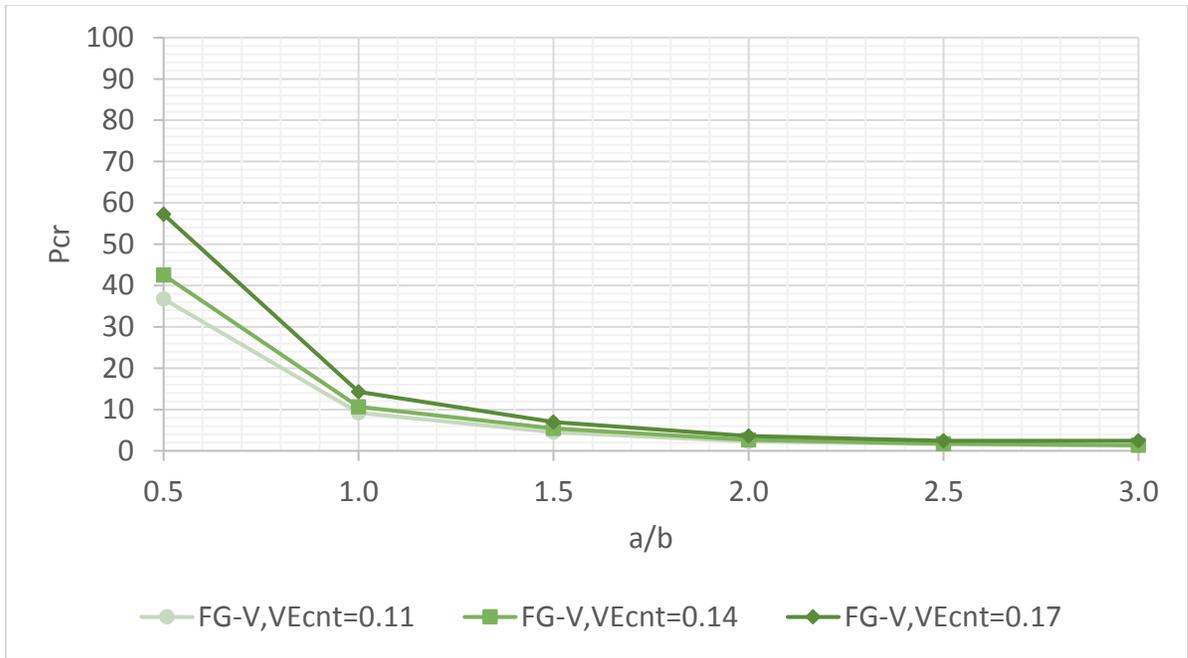
**Figure 4.38 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ )



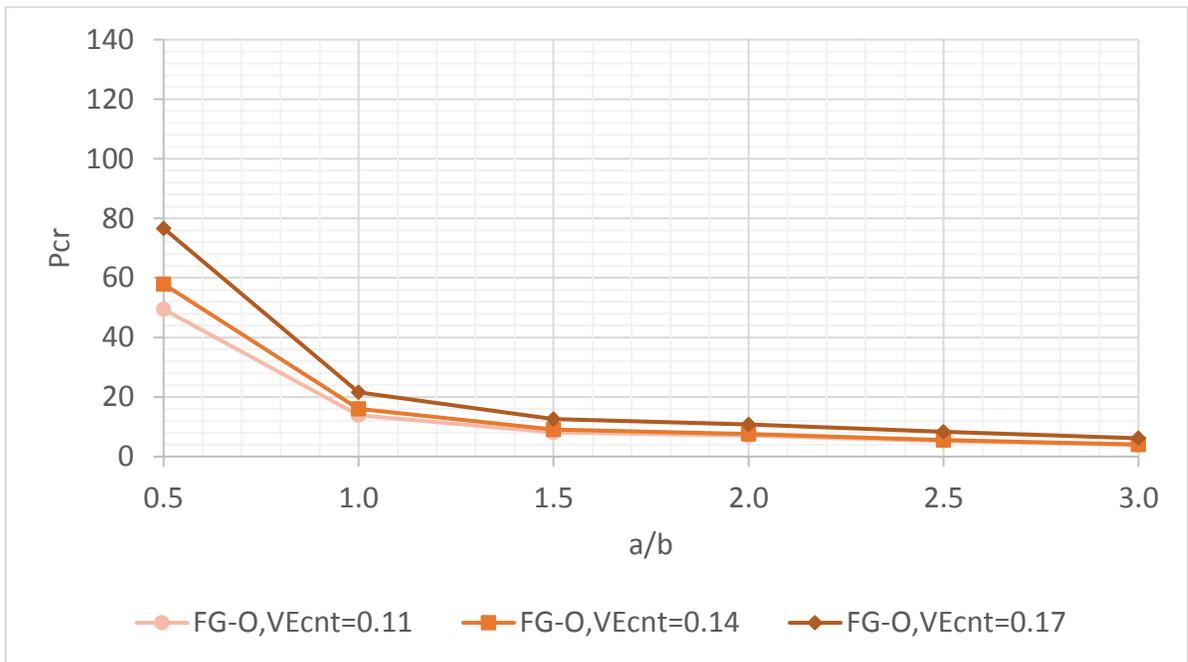
**Figure 4.39 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-UD ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ )



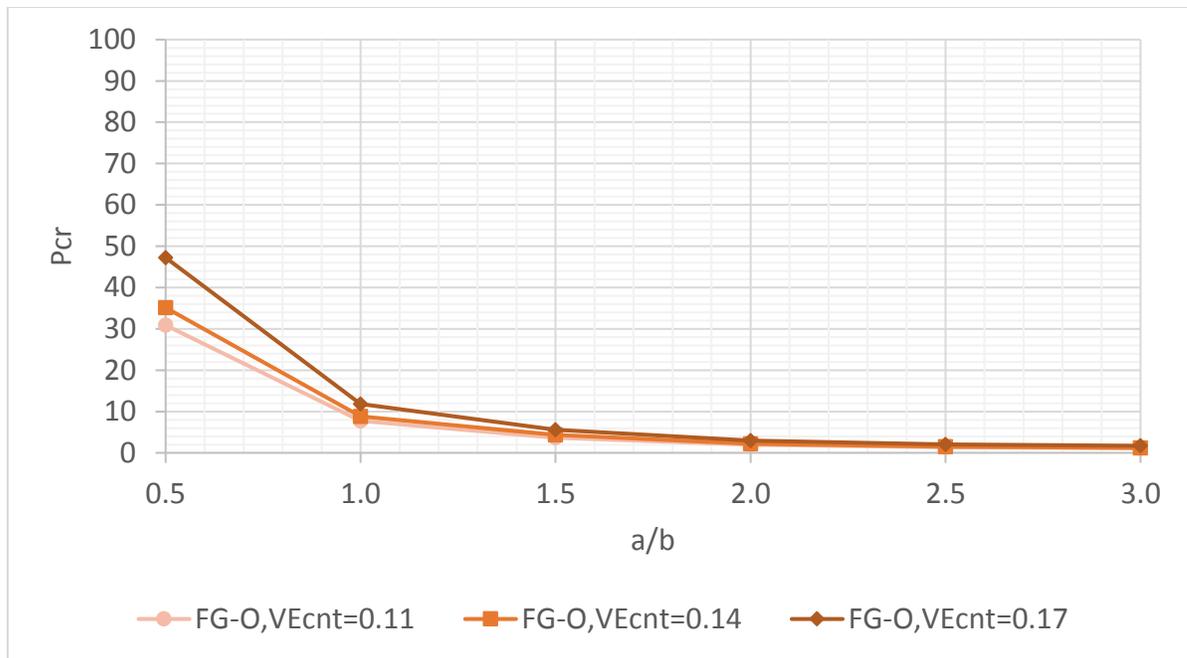
**Figure 4.40 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ )



**Figure 4.41 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-V ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ )



**Figure 4.42 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ )



**Figure 4.43 :** Influence du rapport  $a/b$  sur la charge critique de flambage adimensionnelle pour une plaque FG-O ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ )

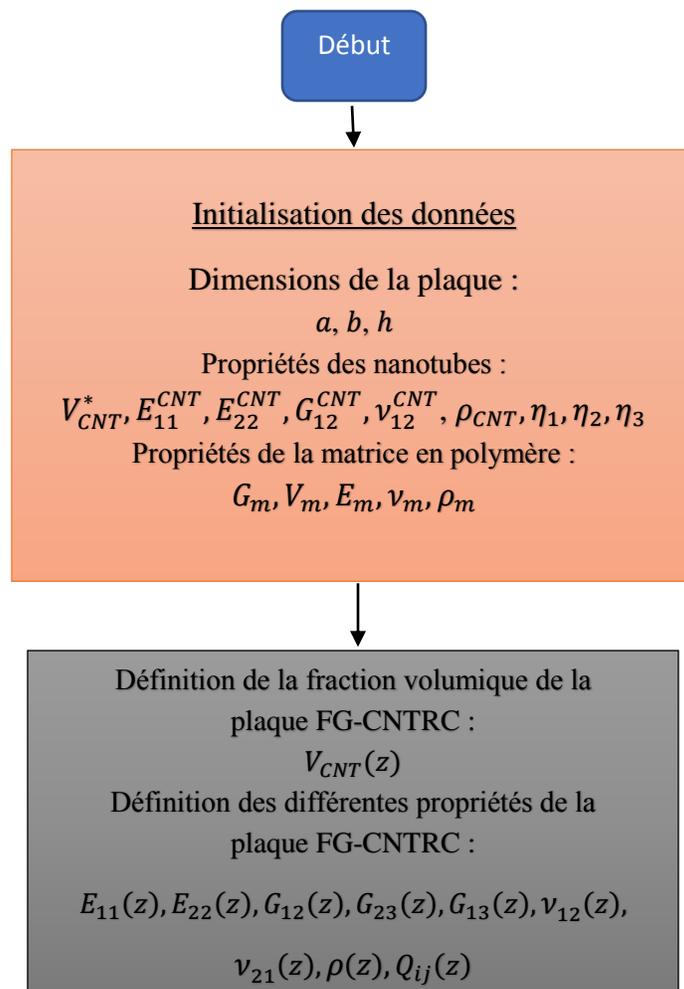
#### 4.5.5. Conclusion :

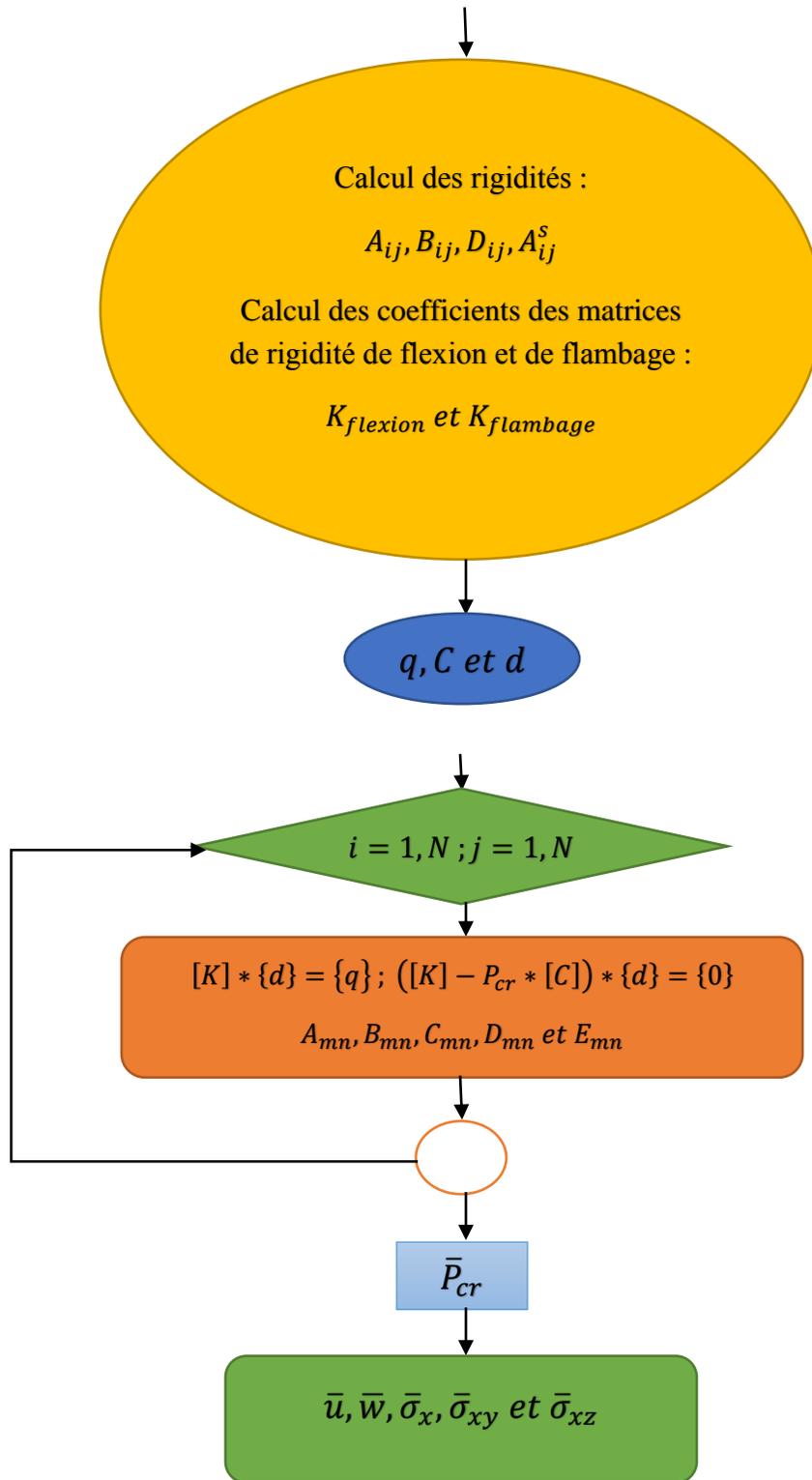
Dans cette étude, les caractéristiques de flambage d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes de carbone et soumise à des charges axiale et biaxiales ont été étudiées. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a été utilisée pour obtenir les équations de mouvement. Quatre types de distribution des NTC dans l'épaisseur de la plaque ont été considérées. L'analyse de la valeur propre des équations de flambage a été effectuée pour obtenir les charges critiques de flambage. Les résultats numériques sont représentés graphiquement pour montrer l'influence des paramètres considérés (géométrie de la plaque, la loi de variation de la fraction volumique des nanotubes suivant l'épaisseur et la fraction volumique des nanotubes de carbone) sur la charge critique de flambage. Nous avons montré que tous ces paramètres influent sur la charge critique de flambage. En particulier, nous avons observé que la fraction volumique des NTC et le profil de distribution des NTC influent tous deux sur la charge critique de flambage des plaques FG-CNTRC. L'analyse de flambage a montré que la distribution  $FG - X$  constitue le paramètre le plus influant. Dans ce type de distribution, les surfaces inférieures et supérieures avec

des distances plus élevées à partir du plan médian sont plus enrichis avec CNT, et ce qui rigidifie la plaque d'avantage. En conséquence, la raideur élastique de la structure associée à l'apparition de flambage augmente, ce qui est la cause des charges de flambage plus élevées. En outre, augmenter le volume fraction de CNT augmente la capacité de flambement de la plaque. Ce phénomène est dû à la différence de module d'élasticité de la matrice et des renforts. Les NTC comme renforcements ont un plus grand module élastique. Donc le renforcement des plaques avec plus de CNT conduit à un module d'élasticité supérieur du composite, ce qui permet d'avoir une charge de flambage plus conséquente.

#### 4.6. Organigramme des principales étapes du programme :

L'organigramme suivant résume les étapes principales employées dans le programme Maple pour la résolution des équations de mouvement de flexion et de flambage d'une plaque FG-CNTRC simplement appuyée grâce à la méthode de Navier.





**Figure 4.44:** Organigramme du programme de calcul (Maple).

## ***CONCLUSION GENERALE***

Dans ce mémoire, l'analyse des comportements en flexion (sous une charge transversale uniforme) et flambage (sous des charges axiale et biaxiale de compression), d'une plaque FGM renforcée par des nanotubes de carbone a été étudiée en se basant sur la théorie de déformation du premier ordre. Les propriétés des matériaux sont supposées être indépendantes de la température et varient continuellement à travers l'épaisseur. En se servant de l'énergie de déformation, ainsi que du travail des charges externes, le principe de Hamilton a été utilisé pour établir les équations de mouvement d'une plaque simplement appuyée. La résolution des deux systèmes d'équations différentielles couplées par la méthode analytique de Navier a été effectuée afin de déterminer les contraintes, les déplacements et la charge critique du flambage.

L'étude paramétrique que nous avons effectuée nous a permis d'obtenir de nombreux résultats numériques intéressants et qui sont représentés dans des graphes pour une meilleure interprétation. Grâce à ces résultats, plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- Le renforcement des plaques en composite par des nanotubes en carbone affecte d'une manière significative.
- L'effet de la fraction volumique des nanotubes sur les déplacements et les contraintes des plaques moyennement épaisses est plus prononcé.
- Nous retrouvons aussi des résultats généraux de l'influence de la géométrie de la plaque FGM sur le comportement statique. En effet, plus la plaque est relativement mince (rapport longueur sur épaisseur ou largeur sur épaisseur) et plus la flèche  $w$  est importante) l'augmentation du rapport  $a/h$  (plaque moyennement épaisse vers plaque mince), augmente la valeur des contraintes générées. Le déplacement longitudinal, quant à lui diminue. Le même effet est aussi constaté lorsque le rapport  $a/b$  (longueur sur largeur) augmente. Il convient de noter que les contraintes et le déplacement diminuent.
- Les contraintes et les déplacements de la plaque dépendent fortement de la fraction volumique des nanotubes de carbone utilisé comme renforcement. En effet, plus la fraction volumique augmente et plus la plaque devient rigide et plus la déformation de la plaque

sera petite. Ceci est vrai pour la plaque moyennement épaisse et pour la plaque mince. Cependant le paramètre le plus influent est la concentration des nanotubes loin de du plan médian. Donc la loi de distribution de la fraction volumique influe sur les contraintes et sur la charge critère de flambage quel que soit la géométrie de la plaque. Elle est quand même moins importante quand la plaque devient beaucoup plus mince où cette concentration des nanotubes proches des surfaces supérieure et inférieure diminue d'effet.

En guise de perspective, nous suggérons d'enrichir le présent travail pour apporter davantage de résultats qui montreraient :

- L'influence de l'épaisseur variable de la plaque sur la flexion et le flambage.
- L'effet des différentes conditions aux limites (encastré, libre, simplement supporté et leur combinaison) sur la charge critique de flambage et les contraintes et déplacements pour différents types de plaques et poutres CNTRC. Pour ce faire, nous suggérons d'utiliser des méthodes numériques appropriées (Galerkin, Ritz, DQM ou Méthodes sans maillage "Meshfree/Meshless methods", Eléments finis)
- L'effet des conditions hygrothermiques et des champs électromagnétiques.
- Effet des défauts initiaux (porosités, surfaces déformées, etc.)

## REFERENCES

- [1] **Yamanouchi M, Koizumi M, Hirai T, Shiota I.** Overall view of the P/M fabrication of functionally gradient materials. In: Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, 1990.p.59–64.
- [2] **Koizumi M.** The concept of FGM, ceramic transactions. *Funct Gradient Mater* 1993; 34:310.
- [3] **Iijima S, Ichihashi T.** Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter. *Nature* 1993; 363:6035.
- [4] **Timoshenko, S. P, and Goodier, J. N.:** Theory of elasticity, International Journal of Bulk Solids Storage in Silos, 1.4, **2014.**
- [5] **Szilard, R.:** Theory and analysis of plates, **1974.**
- [6] **Sokolnikoff, I. S. and Specht, R. D.:** Mathematical theory of elasticity, (Vol. 83), McGraw Hill, New York, **1956.**
- [7] Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method
- [8] **Reddy JN.** Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. Boca Raton, FL: CRC Press; 2004.
- [9] **Zhu P, Lei ZX, Liew KM.** Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory. *Compos Struct* 2012;94: 1450–60.
- [10] **Stephen Tsai et Thomas Hahn.** Introduction to composite materials. Technomic Publishing, 1980.
- [11] **Jean-Marie Berthelot.** Matériaux composites. Masson, 1996.
- [12] **Daniel Gay.** Matériaux composites. 3e édition. Hermès, 2005.
- [13] **Carl Herakovich.** Mechanics of fibrous composites. Wiley, 1998.

- [14] **Mahi, A.**, "Analyse et étude des plaques composites FGM en vibrations libres" [Dr], Blida : Université Saad Dahlab Blida, (2012).
- [15] **Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M.**: Novel applications of functionally graded nano, opto electronic and thermo-electric materials. *Int. J. Mater. Mech. Manuf.* 1, 221–224 (2013).
- [16] **Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T.**: Laser-metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC. *Mater. Des.* 84, 402–410 (2015).
- [17] **Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana, S.**: Functionally graded material: An overview. In: *Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012*, vol. 3, pp. 1593– 1597 (2012).
- [18] **Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V., Villain, G.**: Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT and E Int.* 44(2), 169–177 (2011).
- [19] **Shumiya, H., Kato, K., Okubo, H.**: Feasibility studies on FGMs (functionally graded materials) application for gas insulated equipment. In: *IEEE Conference on Electrical Insulation and dielectric Phenomena*, pp. 360–363 (2004).
- [20] **Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G.**: *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Kluwer Academic, Boston (1999).
- [21] **Dresselhaus MS, Dresselhaus G, Charlier JC, Hernandez E.** Electronic, Thermal and mechanical properties of carbon nanotubes. *PhilosTransact A Math PhysEngSci*; 362(2004);2065- 2098.
- [22] **Anazawa K, Shimotani K, Manabe C, Watanabe H, Shimizu M,** High purity carbon nano tube synthesis method, *Applied Physics Letters* 81;(2002);739-741.
- [23] **Hirlekar R., Yamagar. M., Garse.H., Vij. M., Kadam.V.,** Carbon nanotubes and its applications, *Asian Journal of Pharmaceutical and Clinical Research*, Vol 2, Issue 4,2009,2426.
- [24] **H.-S. Shen,** Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Compos. Struct.* 91 (2009) 9–19.

- [25] **Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew**, Buckling of FG-CNT reinforced composite thick skew plates resting on Pasternak foundations based on an element-free approach, *Appl. Math. Comput.* 266 (2015) 773–791.
- [26] **Gibson, R. F.**, “Principles of Composite Material Mechanics, McGraw-Hill, New York (1994).
- [27] **Jones, R. M.**,” Mechanics of Composite Materials, Second Edition”, Taylor & Francis, PA (1999).
- [28] **Reddy, J. N.** (Ed.), “Mechanics of Composite Materials. Selected Works of Nicholas J. Pagano”, Kluwer, The Netherlands (1994).
- [29] **Reddy, J. N. (Junuthula Narasimha)**, 1945- Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis I J.N. Reddy. - 2nd ed.
- [30] **Reddy, J. N.**, "A Generalization of Two-Dimensional Theories of Laminated Composite Plates," *Communications in Applied Numerical Methods*, 3, 173-180 (1987).
- [31] **Barbero, E. J., Reddy, J. N., and Teply, J. L.**, "General Two-Dimensional Theory of Laminated Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, 28(3), 544-553 (1990).
- [32] **Barbero, E. J., Reddy, J. N.**, "Modeling of Delamination in Composite Laminates Using a Layer-Wise Plate Theory," *International Journal of Solids and Structures*, 28(3), 373-388 (1991).
- [33] **Alibeigloo A, Emtemani A.** Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plate using differential quadrature method. *Meccanica*. 2015; 50:61-76.
- [34] **Y. Kiani.** Shear buckling of FG-CNT reinforced composite plates using Chebyshev-Ritz method. *Composites Part B* 105 (2016) 176-187.