

République algérienne démocratique et populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Saad Dahleb Blida 1



Faculté des sciences  
Département de physique

Mémoire de fin d'étude  
Pour l'obtention du diplôme de Master en

### **Physique Théorique**

Thème:

**Sur la génération des potentiels quantiques avec masse dépendante de la position via l'algèbre de lie  $sl(2, \mathbb{R})$**

Présenté par :

Abdelmadjid MAHIOU

Soutenu le 31 / 07 / 2019 devant le jury composé de :

Mell S.Saidani	MAA	USDB1	Présidente
Dr N. BOUAYED	MCA	USDB1	Examineur
Dr A. YANALLAH	MCB	USDB1	Examineur
Dr S.Yahaioui	MCB	USDB1	Encadreur

Blida 1 - 2018/2019

## المخلص

يمكن وصف أنظمة الكتلة المعتمدة على الموقف من قبل فئة من المشغلين بما في ذلك بن دانييل-ديوك هاميليانين. عادة ما تكون الطرق المعتادة لحل هذه المشكلات رقمية أو تلك التي تبحث عن اتصال مع مشاكل الكتلة الثابتة. في هذا العمل ، نقدم طريقة الجبر المولدة للطيف ، استنادًا إلى مفاهيم ميكانيكا الكم الفائقة التوافق مع لي جبري  $sl(2, \mathbb{R})$ . سوف نحصل على تعبيرات أطياف الطاقة ووظائف الموجة المقابلة لكل محتمل مستنتج.

**Résumé** Les systèmes de masse dépendantes de la position peuvent être décrits par une classe d'opérateurs comprenant l'hamiltonien de Ben Daniel-Duke. Les méthodes habituelles pour résoudre ce type de problèmes sont généralement numériques ou celles qui recherchent une connexion avec des problèmes de masse constante. Dans ce travail, nous présentons une démarche de génération du potentiels quantiques, basée sur les concepts de la mécanique quantique supersymétrique couplée avec l'algèbre de Lie spéciale  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Nous allons expliciter les expressions des spectres d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes pour chaque potentiel déduit.

**Abstract** Position-dependent mass systems can be described by a class of operators including the Ben Daniel-Duke Hamiltonian. The usual methods to solve such problems are usually digital or those looking for a connection with constant mass problems. In this work we present a spectrum generating algebra approach, based on the concepts of supersymmetric quantum mechanics combined with the Lie algebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . We will obtain the expressions of the energy spectra and the corresponding wave functions for each potential deduced.

## Remerciements

J'aimerais exprimer toute mon admiration pour Mr.S.A.Yahiaoui, Mettre de conférence classe B à l'université Saad DAHLEB de Blida (USDB). Il a dirigé mon travail avec compétence, efficacité et dans une très grande chaleur humaine. J'espère l'honorer dans le futur.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Melle.S.Saidani, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant la présidence du jury.

Je remercie tout particulièrement Mr.N.Bouayed, d'abord pour ses conseils précieux et son orientation durant tout mon parcours et aussi d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier vivement Mr.A.Yanallah, pour son aide et d'avoir accepté de faire partie de jury.

Mes plus grands remerciements vont aux membres de ma famille. A ma mère, j'aimerais la remercier de m'avoir aidé et de me donné le courage pour avancer et aller vers l'avant. A ma sœur et mes frères pour leurs constant soutien.

Je remercier bien sûr mes ami(es), Hamza Guemrraoui, Benaida Mahmoud yacine, Timsiline Mohand larbi, Allane Arezki, Jugurtha Ait ouareb, Benchicou Yasmine, Nait abderrahmane Ouerdia, Timsiline ouardia, Nait ouffela Lisa, H.Khaoula, pour leurs encouragements et avoir été toujours à mes côtés.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Supersymétrie de la mécanique quantique</b>	<b>3</b>
1.1	Supersymétrie et oscillateur harmonique	3
1.2	Le concept du superpotentiel	6
1.3	Supersymétrie brisée et non brisée	8
1.4	Isospectralité	9
1.5	Brisure de supersymétrie de la mécanique quantique	11
1.6	L'indice de Witten	12
1.7	Hiérarchisation des hamiltoniens supersymétrique	12
1.8	Invariance de la forme	14
1.8.1	Potentiels à forme invariante (SIP)	14
1.9	Liste des potentiels à forme invariante translationnelle	16
<b>2</b>	<b>Groupes et algèbre de Lie</b>	<b>19</b>
2.1	Groupe de Lie	19
2.1.1	Définition :	19
2.2	Algèbre de Lie	19
2.2.1	Définition et Structure d'algèbre de Lie	19
2.2.2	Constante de structure d'une algèbre de Lie	20
2.2.3	Homomorphisme d'une algèbre de Lie	20
2.3	Groupe linéaire	20
2.3.1	Générateur de groupe linéaire	21
2.3.2	Représentation de groupe linéaire	21
2.4	Étude du groupe de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	23
2.4.1	Définition	23
2.4.2	La représentation exponentielle et adjointe de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	23
2.5	Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	24
2.5.1	Les représentations $D^j$	24
2.5.2	Opérateur de Casimir de groupe de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	26
<b>3</b>	<b>Systèmes quantiques à masse dépendante de la position</b>	<b>27</b>
3.1	Hamiltoniens de von Roos et Ben Daniel-Duke	27
3.2	Forme générale du l'hamiltonien BDD	28
3.3	Exemple des système PDM	30
3.3.1	Profil quadratique	30
3.3.2	Profil linéaire	31
<b>4</b>	<b>Génération des potentiels</b>	<b>32</b>
4.1	Traitement par la supersymétrie de la mécanique quantique	32
4.2	Construction de l'équation de Schrödinger	35
4.3	Construction de L'algèbre	36
4.4	Applications	37

**Conclusion**

# Introduction générale

Notre vie est possible grâce aux propriétés physique des molécules qui nous entourent :  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2O$ ... Or ces propriétés physique dépendent de la symétrie. En physique la notion de symétrie, qui intimement associée à la notion d'invariance, renvoie à la possibilité de considérer un même système physique selon plusieurs points de vue distincts en terme de description physique mais équivalents quant aux prédictions effectuées sur son évolution.

En mécanique quantique, la question fondamentale lors de l'étude des systèmes quantiques, est comment résoudre l'équation de Schrödinger. A cet effet et dès l'avènement de la mécanique quantique, plusieurs méthodes ont été élaborées afin de trouver les solutions exactes ou approximatives à cette équation, c'est à dire, déterminer les spectres d'énergie et les fonctions d'ondes associées. Parmi ces méthodes, on cite la technique analytique usuelle, la méthode de l'équation intégrale et la méthode basée sur supersymétrie de la mécanique quantique *SUSYQM*, qui fera l'objet du premier chapitre de ce travail.

La supersymétrie de la théorie des champs a été introduite pour la première fois, en physique des particules, comme une symétrie qui relie les bosons aux fermions. Cette nouvelle théorie a été jumelée avec la mécanique quantique par Witten [9], Cooper et Freedman [20] où ils donnèrent naissance à un nouveau formalisme mathématique très puissant connu actuellement sous le nom de la mécanique quantique supersymétrique *SUSYQM*.

La *SUSYQM* a été utilisée pour la première fois dans le but de donner une description unifiée des interactions fondamentales de la nature. Bien qu'il n'y aucune évidence expérimentale de la *SUSY*, cette théorie a connue beaucoup du succès vu son applicabilité dans plusieurs domaines de la physique tels que, la physique atomique, physique de la matière condensée, physique statistique, physique nucléaire, et elle fait toujours l'objet de nombreuses recherches.

Dès le début des recherches sur la *SUSYQM*, il été clair qu'elle n'était pas seulement un modèle pour tester les méthodes de la théorie des champs, mais un utile très intéressant et puissant par ses propres idées. Ces idées ont été appliquées sur la mécanique quantique non relativiste dans les travaux de Nicolai[8] et Witten[9], qui ont montré le lien avec la méthode de la factorisation, proposé déjà par Schrödinger [10] pour résoudre algébriquement le problème de l'atome d'hydrogène. Ces travaux ont été généralisé par Infeld et Hull [21] qui ont obtenu une large classe de potentiels exactement solubles en considérant plusieurs forme de factorisation. Un développement considérable a été donné à ces travaux, notamment après l'introduction du concept d'invariance de la forme par Gendenshtein [11], qui est à l'origine de la découverte d'une large classe de potentiels analytiquement solubles.

Cette nouvelle approche est maintenant généralisée et appliquée à la résolution de problème avec potentiels non hermitiens et aux problèmes non relativistes avec masse dépendante de la position. C'est justement dans ce cadre que notre travail se situe, où nous allons constater que l'approche supersymétrique couplée à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  est capable de générer une classe de potentiels quantiques, et cela pour un système muni d'une masse dépendante de la position.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres. Le premier chapitre est une introduction à la supersymétrie de la mécanique quantique, où nous allons aborder quelques notions de base. Nous parlerons ensuite dans le deuxième chapitre de l'algèbre Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Le troisième

chapitre sera consacré à l'étude des systèmes à masse dépendante de la position. Le dernier chapitre est consacré à la présentation de la méthode utilisée. Nous allons expliciter les différentes étapes de la technique et on donnera vers la fin l'ensemble des résultats obtenus.



# Chapitre 1

## Supersymétrie de la mécanique quantique

Obtenir des solutions exactes à l'équation de Schrödinger et son partenaire relativiste, équation de Dirac, a toujours été au centre des préoccupations des études de la mécanique quantique. L'une des méthodes utilisées pour ce but est la méthode de factorisation. Un hamiltonien peut être décrit comme un produit de deux facteurs, souvent appelés opérateurs d'échelle. La méthode a beaucoup réduit la difficulté du calcul lors du traitement de l'équation de Schrödinger et de Dirac.

une décennie plus tard, Infeld et Hull [21] ont généralisé la méthode à de nombreux systèmes. Toutes ces observations se sont avérées être une manifestation d'une symétrie sous-jacente expliquée par la suite par la mécanique quantique supersymétrique.

L'impulsion suivante a été donnée au début des années 1980 lorsque les physiciens des particules élémentaires en essayant de trouver une structure sous-jacente pour les forces de base de la nature, ils ont supposé l'existence de particules partenaires aux particules élémentaires connues ou supposées. C'est cette partenariat de particule et leur interrelation qu'on appelle la supersymétrie [1].

### 1.1 Supersymétrie et oscillateur harmonique

La méthode de factorisation a été appliquée aux oscillateurs harmoniques dans le but de construire une nouvelle classe de potentiels unidimensionnels et donner leurs spectre d'énergie [2].

Soit  $H$  l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique de masse  $m$  et de pulsation  $\omega$ , tel que :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (1.1)$$

La méthode consiste à introduire deux opérateurs de création et d'annihilation notés respectivement  $b^\dagger$  et  $b$  qui sont donnés par :

$$b^\dagger = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega}} \left( -\frac{d}{dx} + m\omega x \right), \quad (1.2)$$

$$b = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega}} \left( \frac{d}{dx} + m\omega x \right). \quad (1.3)$$

Ces opérateurs agissent sur l'état du vide  $|0\rangle$  des états propres bosoniques et obéissent aux équations d'état suivantes :

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.4)$$

$$b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.5)$$

ici l'état du vide  $|0\rangle$  est l'état fondamentale le plus stable.

a afin de simplifier l'écriture des formes, on pose  $\hbar = 2m = 1$ . On définit aussi un nouveau nombre  $N_B = b^\dagger b$  qui est le nombre d'occupation bosonique vérifiant l'équation d'état

$$N_B |n\rangle = n |n\rangle, \quad (1.6)$$

tel que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.7)$$

Il est facile de vérifier que l'hamiltonien bosonique peut être écrit en fonction des opérateurs  $b$  et  $b^\dagger$ , il est donné par

$$H_B = \omega \left( b^\dagger b + \frac{1}{2} \right), \quad (1.8)$$

qui peut aussi se mettre sous la forme

$$H_B = \frac{\omega}{2} \{b^\dagger, b\}. \quad (1.9)$$

l'hamiltonien  $H_B$  et les opérateurs bosoniques vérifient les relations de commutations suivantes :

$$[b, b] = [b^\dagger, b^\dagger] = 0, \quad [b, b^\dagger] = 1, \quad \text{et} \quad [H_B, b^\dagger] = \omega b^\dagger.$$

Les états propres de  $H_B$  sont définis par

$$H_B = \omega \left( N_B + \frac{1}{2} \right), \quad \text{et} \quad H_B |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle. \quad (1.10)$$

Considérons maintenant deux autres opérateurs (d'annihilation et création) notés  $f$  et  $f^\dagger$  qui vérifient les relations d'anticommutation suivantes :

$$\{f, f\} = \{f^\dagger, f^\dagger\} = 0, \quad \{f, f^\dagger\} = 1.$$

Ces opérateurs admettent une représentation matricielle, telles que

$$f = \frac{1}{2} \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^\dagger = \frac{1}{2} \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

où  $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ ,  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont les matrices de Pauli et  $[\sigma_+, \sigma_-] = 4\sigma_3$ .

Il est possible de construire un nouveau nombre noté  $N_F = f^\dagger f$  qui désigne le nombre de fermions qui occupent un niveau d'énergie. Cependant, si  $N_B$  peut prendre toutes les valeurs  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $N_F$  ne peut prendre que deux valeurs  $N_F = 0, 1$ .

En effet

$$N_F^2 = N_F N_F = f^\dagger f f^\dagger f = f^\dagger (1 - f^\dagger f) f = f^\dagger f = N_F,$$

d'où  $N_F(N_F - 1) = 0$ , et donc  $N_F = 0, 1$ . De même, on peut écrire l'expression de l'hamiltonien fermionique en utilisant les deux opérateurs  $f$  et  $f^\dagger$ . En admettant que l'état fondamentale a  $-\frac{\omega}{2}$  comme valeur d'énergie  $H_F$  s'écrit

$$H_F = \omega \left( f^\dagger f - \frac{1}{2} \right), \quad \text{et} \quad H_F |0\rangle = -\frac{\omega}{2} |0\rangle.$$

De plus  $H_F$  peut se mettre sous la forme :

$$H_F = \frac{\omega}{2} [f^\dagger, f], \quad (1.11)$$

On voit bien que le commutateur dans (1.11) explique l'antisymétrisation connue des systèmes fermioniques, d'où l'idée de la *supersymétrie*.

En sommant les deux hamiltoniens  $H_B$  et  $H_F$ , nous décrivons une particule d'une masse  $m$  et du spin  $\frac{1}{2}$  dans un puits harmonique. L'énergie du vide bosonique compense celle du vide fermionique, l'hamiltonien total (superposé) s'écrit alors :

$$H = H_B + H_F = \omega (b^\dagger b + f^\dagger f). \quad (1.12)$$

On constate de (1.12) que l'énergie totale reste invariante sous l'effet simultané d'une destruction d'un boson et la création d'un fermion et vice-versa. Une telle symétrie entre bosons et fermions est appelée **supersymétrie**.

Si  $N_B$  et  $N_F$  sont nuls, alors  $\epsilon_0 = 0$  (l'état fondamental). A l'exception de l'état fondamental, le système (1.12) est doublement dégénéré.

Un état propre de  $H$  est le produit tensoriel des états  $|n\rangle$  de bosons et des états  $|m\rangle$  de fermions, i.e.,

$$|n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n (f^\dagger)^m |0, 0\rangle. \quad (1.13)$$

En ajoutant et en retranchant le terme  $b^\dagger b f^\dagger f$  dans  $H$  et en tenant compte des relations de commutation et d'anticommutation associées aux opérateurs, on aboutira à une nouvelle forme de l'hamiltonien  $H$  donnée par :

$$H = \omega (b f^\dagger f b^\dagger + f b^\dagger b f^\dagger). \quad (1.14)$$

On définit deux nouveaux opérateurs appelés supercharges qu'on exprime en termes des opérateurs fermioniques. Ils sont donnés sous la forme matricielle suivante

$$Q = b f^\dagger = f^\dagger b \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = f b^\dagger = f^\dagger b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que l'hamiltonien total  $H$  s'écrit sous forme d'un anticommutateur :

$$H = \omega \{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} b b^\dagger & 0 \\ 0 & b^\dagger b \end{pmatrix}.$$

Les représentations matricielles précédentes des opérateurs  $H$ ,  $Q$  et  $Q^\dagger$  conduisent aux relations de commutation suivantes :

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0.$$

Les supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  transforment un système d'un état bosonique à un état fermionique et vice-versa, se sont donc les générateurs de l'algèbre de la nouvelle symétrie dite supersymétrie. Cela apparaît clairement dans les équations suivantes :

$$Q|n, 0\rangle = \sqrt{\omega n} |n-1, 1\rangle, \quad (1.15)$$

$$Q^\dagger|n, 1\rangle = \sqrt{\omega(n+1)} |n+1, 0\rangle. \quad (1.16)$$

La forme anticommutative de l'hamiltonien total  $H$  conduit à une autre formulation pour ce dernier :

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2) \mathbb{1} + \frac{\omega}{2} \sigma_3. \quad (1.17)$$

l'équation (1.17) nous permet d'extraire les deux composantes de  $H$ , elles sont données par :

$$H_+ = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} (\omega^2 x^2 - \omega) = \omega b^\dagger b, \quad (1.18)$$

$$H_- = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} (\omega^2 x^2 + \omega) = \omega b b^\dagger. \quad (1.19)$$

on voit bien que les deux hamiltoniens  $H_\pm$  ont le même spectre énergétique pour un oscillateur harmonique, avec un décalage en énergie égal à  $\pm \hbar \omega$ .

Les deux supercharges définissent la supersymétrie  $N = 2$ . En fait, cette dernière consiste à construire deux opérateurs,  $Q_1$  et  $Q_2$ , tels que  $Q_1 Q_2 = -Q_2 Q_1$ .

L'hamiltonien total s'écrit à son tour en fonction de ces deux opérateurs, il est donné par :

$$H = 2Q_1^2 = 2Q_2^2 = Q_1^2 + Q_2^2. \quad (1.20)$$

où  $Q_1$  et  $Q_2$  sont exprimés en termes des supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  comme suit :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 + iQ_2), \quad (1.21)$$

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 - iQ_2). \quad (1.22)$$

On a alors  $Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0$  confirmant encore une fois le caractère anticommutatif de l'hamiltonien total  $H = \{Q, Q^\dagger\}$ .

Il est important de signaler que l'approche supersymétrique  $N = 2$  n'est pas la seule qui permet d'établir les propriétés de la SUSYQM. Autres approches sont possibles telles que  $N = 1$  (approche de Pauli) et  $N > 2$ .

## 1.2 Le concept du superpotentiel

En mécanique quantique, toutes les interactions sont décrites par la fonction potentiel  $V(x, a)$ , où  $x$  est la variable et  $a$  est un paramètre spécifique pour chaque fonction. Par exemple dans le problème de Coulomb, le potentiel effectif s'écrit  $V(r, e, l) = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} \hbar^2$ . Le puits de potentiel et son comportement sont gouvernés par ces paramètres, donc il est clair que même l'énergie du système est dépendante d'un paramètre ou plus.

On a vu dans la section précédente, qu'il est possible dans le cas d'un oscillateur harmonique de factoriser l'hamiltonien  $H$  en un produit de deux opérateurs de premier ordre, qu'on note ici  $A$  et  $A^\dagger$ , et une constante additive égale à  $\frac{\omega}{2}$  :  $H = A^\dagger A + \frac{\omega}{2}$  et les opérateurs  $A$  et  $A^\dagger$  sont donnés par

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x, \quad (1.23)$$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x. \quad (1.24)$$

On veut généraliser cette méthode pour des fonctions potentiels  $V(x, a)$  arbitraires. Pour un oscillateur harmonique, on voit bien que le terme  $\sqrt{\frac{m}{2}} \omega x$  dans  $A$  et  $A^\dagger$  génère le terme  $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ . Du coup, on définit une fonction qu'on note par  $W(x, a)$ , cette dernière est appelée le *superpotentiel*, il joue le rôle d'un générateur des potentiels  $V(x, a)$ . En effet,  $W(x, a)$  génère deux potentiels partenaire  $V_\pm(x, a)$ . Pour ce faire, on introduit encore une fois les opérateurs  $A$  et  $A^\dagger$ , mais exprimés cette fois-ci en termes de  $W(x, a)$  par :

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a), \quad (1.25)$$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a). \quad (1.26)$$

Le produit de ces deux opérateurs est équivalent à

$$A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \left[ W^2(x, a) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx} \right]. \quad (1.27)$$

Par conséquent, l'équation de Schrödinger pour un système quantique décrit par le potentiel  $V(x, a) = W^2(x, a) - \frac{dW(x, a)}{dx}$ , peut être factorisée comme suit :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \psi(x, a) \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x, a) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx} \right) \psi(x, a). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Si on inverse la position des opérateurs dans le produit précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \psi(x, a) \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x, a) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx} \right) \psi(x, a). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cette dernière est aussi une équation de Schrödinger, mais pour une fonction potentiel différente  $V(x, a) = W^2(x, a) + \frac{dW(x, a)}{dx}$ . Ainsi, le superpotentiel nous donne la possibilité d'extraire les deux composantes d'un hamiltonien total (superposé) notées  $H_\pm$ , telles que :

$$H_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_\pm(x, a),$$

associés aux potentiels partenaires  $V_\pm(x, a)$  :

$$V_\pm(x, a) = W^2(x, a) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx} \quad (1.30)$$

On note les valeurs propres et les fonctions propres de  $H_\pm$  par  $E_n^{(\pm)}$  et  $\psi_n^{(\pm)}(x, a)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , et en posant ( $\hbar = 2m = 1$ ), cela réduit l'écriture des opérateurs  $A$  et  $A^\dagger$  à  $\mp \frac{d}{dx} + W(x, a)$ . Du coup, on peut donner les remarques suivantes

- (1) Si  $\psi_0^{(-)}$  est une fonction normalisable qui vérifie l'équation  $A\psi_0^{(-)}(x, a) = 0$ . Alors, on peut dire que  $\psi_0^{(-)}(x, a)$  est une fonction propre à  $H_-$  avec la valeur propre zero,  $E_0 = 0$ .
- (2) Puisque  $A^\dagger$  est l'adjoint de l'opérateur  $A$ , et en tenant compte du fait que  $H_- \psi_n^{(-)}(x, a) = A^\dagger A \psi_n^{(-)}(x, a) = E_n \psi_n^{(-)}(x, a)$ , on a :

$$E_n^{(-)} = \frac{\int (\psi^{(-)})^* A^\dagger A \psi^{(-)} dx}{\int (\psi^{(-)})^* \psi^{(-)} dx} \geq 0 \quad (1.31)$$

- (3) L'équation  $A\psi_0^{(-)} = 0$  nous donne la possibilité de calculer d'une manière analytique la fonction propre de l'état fondamental, elle est donnée par

$$\psi_0^{(-)}(x, a) \sim \exp \left[ - \int^x W(x', a) dx' \right]. \quad (1.32)$$

De même, la fonction propre de l'état fondamental de  $H_+$  est donnée par la résolution de l'équation  $A^\dagger\psi(x,a) = 0$ . Elle s'exprime par

$$\psi_0^{(+)}(x,a) \sim \exp\left[\int^x W(x',a)dx'\right] \sim \frac{1}{\psi_0^{(-)}(x,a)}. \quad (1.33)$$

A partir de cette relation réciproque entre  $\psi_0^{(-)}$  et  $\psi_0^{(+)}$ , on constate qu'il n'est pas possible que les deux fonctions propres soient normalisables simultanément. Cela mène à trois possibilités, soit :

- \*  $\psi_0^{(-)}$  est normalisable contrairement à  $\psi_0^{(+)}$  ;
- \*  $\psi_0^{(+)}$  est normalisable contrairement à  $\psi_0^{(-)}$  ;
- \* Les deux ne sont pas normalisables.

Les trois cas seront analysés et discutés dans la section suivante.

### 1.3 Supersymétrie brisée et non brisée

Considérons les trois possibilités ci-dessus. Dans les deux premiers cas, l'énergie de l'état fondamental de  $H_-$  ou  $H_+$  est nulle. Dans le troisième cas, aucun des deux hamiltoniens n'a un état lié à l'énergie nulle. Alors, la brisure de la supersymétrie est liée à la nature de l'état fondamental de l'un des deux Hamiltonien. On dit alors que lorsque l'un des deux hamiltoniens partenaires a un état lié d'énergie zéro, le système possède une supersymétrie non brisée. Dans le cas où les deux Hamiltoniens ne possèdent aucun état lié d'énergie zéro, la supersymétrie est dite *spontanément brisée*.

Les fonctions propres des états fondamentaux associés aux hamiltoniens  $H_\pm$  sont liées au superpotentiel  $W(x,a)$ , donc il est commode de voir quelles sont les propriétés de  $W(x,a)$  qui déterminent si la supersymétrie est brisée ou non. Dire que la fonction propre est normalisable exige l'annulation de cette dernière à  $(x = \pm\infty)$ .

$$\psi_0^{(-)}(\pm\infty) \sim \exp\left[-\int_{x_0}^{\pm\infty} W(x,a)dx\right] = 0, \quad (1.34)$$

cela implique

$$\int_{x_0}^{\pm\infty} W(x,a)dx = \infty. \quad (1.35)$$

Pour une analyse plus claire, on considère les deux intégrales séparément. L'intégrale  $\int_{x_0}^{+\infty} W(x,a)dx$  est la surface sous la courbe de 0 à  $+\infty$  qui est infinie. Cela implique que le superpotentiel  $W(x,a)$  doit avoir une valeur positive à l'infini. De même, l'intégrale  $-\int_{-\infty}^{x_0} W(x,a)dx = \int_{x_0}^{-\infty} W(x,a)dx = +\infty$ , implique que la surface sous la courbe de  $x_0$  à  $-\infty$  est égale à  $-\infty$ . Par conséquent,  $W(x,a)$  doit avoir une valeur négative à l'infini. D'où,  $W(x,a)$  doit couper l'axe des  $X$  et il est d'une parité impaire, ceci est illustré à la Fig(1.1). Alors on peut conclure que toutes fonctions  $W(x,a)$  impaire ayant la propriété  $\int_{x_0}^{\pm\infty} W(x,a)dx = \infty$  conduira à une supersymétrie non brisée. Par exemple la fonction  $W(x,a) = A \tanh x$  qui est une fonction impaire conduit à un système avec une supersymétrie non brisée.

Noter que pour les cas qui ont un domaine fini,  $x = -\infty$  et  $x = +\infty$  doivent être remplacés par  $x_g$  et  $x_d$ , les points limites gauche et droit, respectivement. La normalisation de  $\psi_0^{(-)}$  nécessiterait alors que  $W(x,a)$  diverge (positivement à  $x_d$  et négativement à  $x_g$ ) aux deux points limites finis. En bref, un superpotentiel ayant le même signe aux deux extrémités du domaine générera un système avec une supersymétrie brisée, et un système ayant un signe opposé conduira à une supersymétrie non brisée.

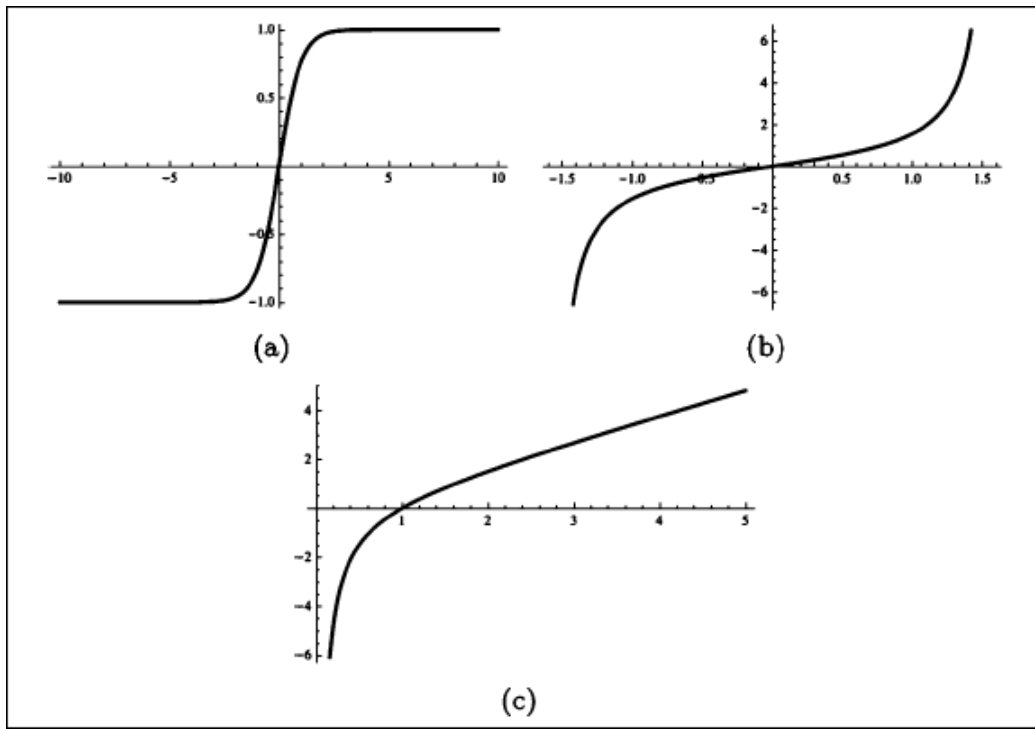


Fig.1.1 Exemple de superpotentiel  $W(x, a)$  conduisant à une supersymétrie non brisée pour (a) un demain infini, (b) demain fini et (c) un demain semi-fini [1].

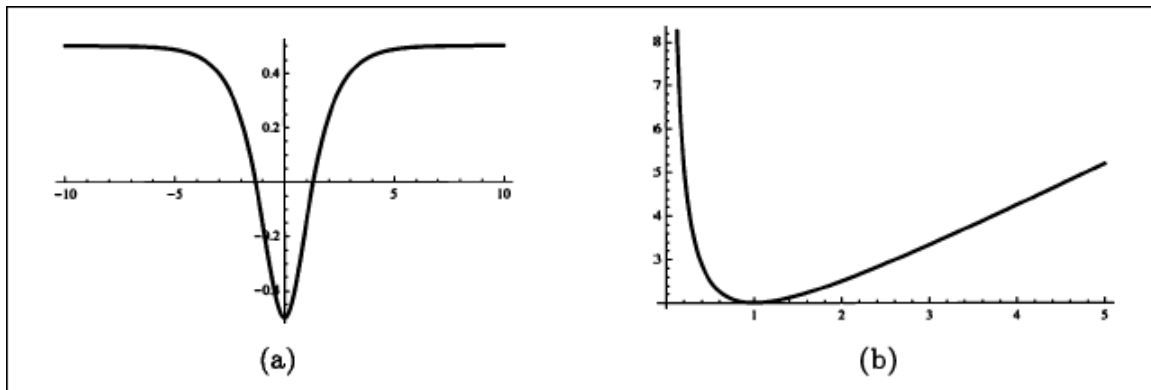


Fig.1.2 Exemple de superpotentiel  $W(x, a)$  conduisant à une supersymétrie brisée pour (a) un demain infini, (b) un demain semi-fini [1].

## 1.4 Isospectralité

Dans la section 1.3, on a vu qu'il est possible et à partir d'un superpotentiel de construire deux hamiltoniens partenaires  $H_{\pm}$ . Il est important d'abord d'aborder l'une des caractéristiques qui relie les deux hamiltoniens qui est *l'isospectralité*. C'est à dire, à l'exception de l'état fondamental de  $H_{-}$ , les deux hamiltoniens ont exactement le même ensemble de valeurs propres. Les fonctions d'onde de  $H_{\pm}$  sont aussi liées grâce aux opérateurs  $A^{\dagger}$  et  $A$ . Si on note par  $\psi_n^{(\pm)}$  les fonctions propres de  $H_{\pm}$  avec les énergies propres  $E_n^{(\pm)}$ , alors on peut écrire les relations suivantes

$$H_{+}(A\psi_n^{(-)}) = A(A^{\dagger}(A\psi_n^{(-)})) = AH_{-}\psi_n^{(-)} = E_n^{(-)}(A\psi_n^{(-)}). \quad (1.36)$$

Ainsi, pour une fonction propre  $\psi_n^{(-)}$  de  $H_{-}$ , la fonction  $A\psi_n^{(-)}$  est une fonction propre de  $H_{+}$  avec l'énergie propre  $E_n^{(-)}$ . Tous les états excités des deux hamiltoniens se correspondent

les uns aux autres et on écrit

$$\psi_{n-1}^{(+)} = c A \psi_n^{(-)}, \quad \text{et} \quad E_{n-1}^{(+)} = E_n^{(-)}.$$

où  $c$  est une constantes de normalisation.

Alors, les relations entre les fonctions propres associées à  $H_{\pm}$  peuvent être généralisées pour un nombre d'états donné  $n$ , telles que :

$$\psi_n^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(-)}}} A \psi_{n+1}^{(-)}, \quad \text{et} \quad \psi_n^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n-1}^{(+)}}} A^{\dagger} \psi_{n-1}^{(+)}. \quad (1.37)$$

Si la supersymétrie n'est pas brisée, l'état fondamental de  $H_-$  obéit à l'équation  $A\psi = 0$ , et il ne connecte à aucun état de  $H_+$ . C'est pour cela qu'on n'introduit pas le cas  $n = 0$ . D'autre part, si la supersymétrie est brisée,  $A\psi = 0$  n'a pas de solution normalisable, nous aurions une isospectralité stricte entre les deux hamiltoniens :  $E_n^{(+)} = E_n^{(-)}$ . Ainsi, dans chaque cas, si on connaît la fonction et l'énergie propre de l'un des deux hamiltoniens, on peut alors déterminer celles de l'autre.

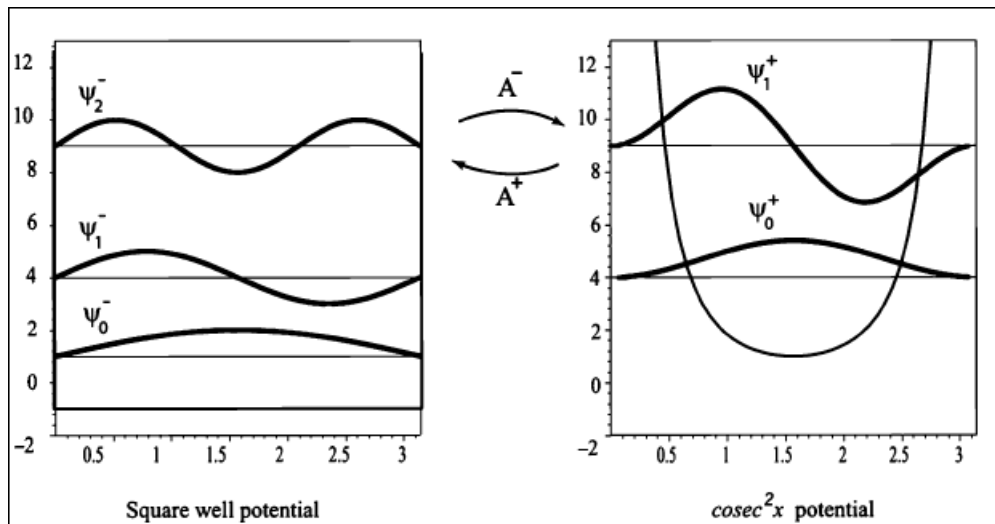


Fig.1.3 Le puits carré infini et son partenaire le potentiel Pöschl-Teller, ainsi que quelques niveaux d'énergie et les fonctions propres correspondantes. Noter que c'est un cas d'une supersymétrie non brisée[1].

Voici un exemple spécialement sélectionné pour montrer l'efficacité de ce formalisme. Un superpotentiel rigoureusement choisi donnera deux potentiels partenaires, l'un le potentiel bien connu le puits infini et l'autre, le potentiel  $\text{cosec}^2 x$  connu sous le nom de Pöschl-Teller trigonométrique. La détermination du spectre énergétique du premier est facile  $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$  contrairement au seconde. Le formalisme d'isospectralité nous donne facilement le spectre des deux potentiel et on trouve qu'ils sont les même à l'exception de l'état fondamentale dans le domaine  $(0, \pi)$ , ceci est illustré sur schéma suivant



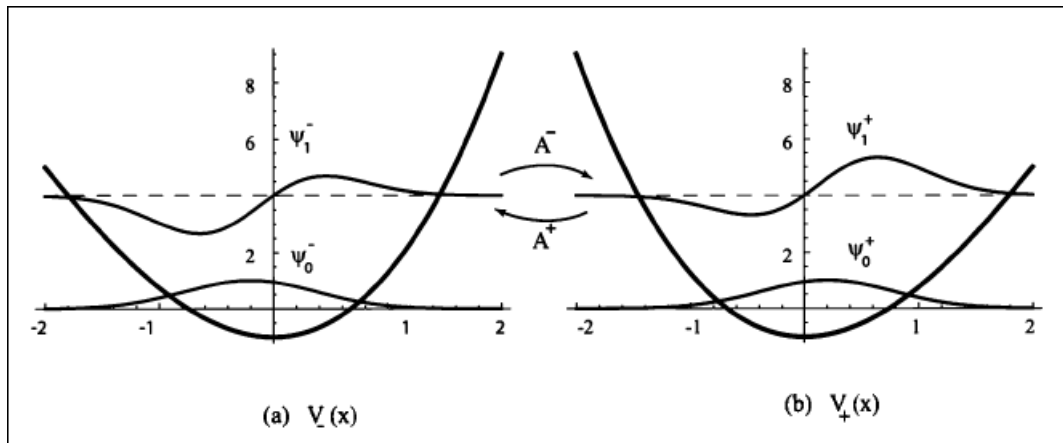


Fig.1.4 Un diagramme schématique pour deux potentiels partenaires dans le cas d'une SUSY brisée. Notez que les opérateurs  $A^\dagger$  et  $A$  ne modifie pas la structure nodale des fonctions propres sur lesquelles ils agissent. De plus, l'état fondamental d'énergie  $E_n^{(+)}$  et  $E_n^{(-)}$  sont supérieures à zéro[1].

## 1.5 Brisure de supersymétrie de la mécanique quantique

Malgré cette structure de symétrie au niveau des opérateurs, il est possible d'avoir un système où la symétrie est brisée. Considérons le cas où la supersymétrie est la symétrie de l'hamiltonien,  $HQ^\dagger = Q^\dagger H$ . Si ce n'est pas le cas on dit que la supersymétrie est explicitement brisée. Mais même si  $H$  commute avec  $Q^\dagger$ , il existe un autre genre de brisure de symétrie connue sous le nom brisure spontanée de supersymétrie. Pour mieux voir ceci, introduisons un opérateur unitaire qui génère les transformations de supersymétrie d'un état et qui s'écrit sous la forme  $\exp(\epsilon Q - \bar{\epsilon} Q^\dagger)$ , où  $\epsilon$  est un paramètre qui mesure la déviation d'un état par rapport à l'état d'origine. Il est clair que pour  $\epsilon = 0$  on obtient l'identité.

L'état fondamental ou l'état du vide, représenté par  $|0\rangle$ , doit être unique; en d'autres termes il est invariant sous l'action de l'opérateur unitaire déjà défini. Alors, si on veut garder la supersymétrie de notre système, on doit toujours avoir :

$$\exp(\epsilon Q - \bar{\epsilon} Q^\dagger) |0\rangle = |0\rangle. \quad (1.38)$$

Ceci où  $\epsilon \in \mathbb{C}$ . Implique que pour une supersymétrie non brisée, on doit avoir aussi  $Q^\dagger |0\rangle = 0$ . Si  $Q^\dagger |0\rangle \neq 0$ , on est devant une supersymétrie spontanément brisée.

Sachant que l'hamiltonien est donné par  $(QQ^\dagger + Q^\dagger Q)$ , la supersymétrie est non brisée si et seulement si l'énergie de l'état fondamental de  $H$  est égale à zéro. Dans le cas où cette énergie est non nulle cela signifie que la supersymétrie est brisée.

Si la supersymétrie est non brisée, on a alors

$$\begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(-)}(x) \\ \phi^{(+)}(x) \end{pmatrix} = 0, \quad (1.39)$$

en d'autres termes  $A^\dagger A \phi^{(-)}(x) = 0$  et  $AA^\dagger \phi^{(+)}(x) = 0$ , ce qui implique

$$A \phi^{(-)}(x) = 0 \quad \text{et} \quad A^\dagger \phi^{(+)}(x) = 0.$$

Les solutions de ces équations sont

$$\phi^{(\pm)}(x) = N_\pm \exp\left(\pm \int^x W(x', a_0) dx'\right). \quad (1.40)$$

## 1.6 L'indice de Witten

Dans le cas d'une supersymétrie brisée, il n'y a pas d'état fondamental à énergie nulle. Cela veut dire que le nombre d'états fermioniques est égal au nombre d'états de type bosoniques,  $N_f = N_b$ . Lorsque la supersymétrie est non brisée, le nombre d'états bosoniques est supérieur à celui d'états fermioniques. On définit alors un opérateur  $F$  qui donne la valeur zéro en agissant sur un état bosonique et qui garde les états fermioniques invariants. Ainsi, les états bosoniques et fermioniques seront des états propres de  $(-1)^F$  avec les valeurs propres  $\pm 1$  respectivement. Cela nous permet de définir un indice, dit indice de Witten, tel que

$$\Delta(\beta) = \left( \text{tr}(-1)^F \exp(-\beta H) \right),$$

qui est nul si et seulement si  $N_b - N_f = 0$ . Cet indice nous donne l'information concernant la brisure de la supersymétrie. Dans le cas d'une brisure, il donne zéro et 1 dans le cas contraire.

## 1.7 Hiérarchisation des hamiltoniens supersymétrique

La supersymétrie nous permet de créer un superpartenaire hamiltonien  $H_2$  ayant le même spectre que l'hamiltonien du départ  $H_1$  en décalant le spectre de ce dernier par une constante. Ce n'est pas tout, on peut faire la même chose pour  $H_2$  afin d'obtenir un troisième hamiltonien  $H_3$ , etc.

En répétant cette procédure un certain nombre de fois, on obtient une famille d'hamiltoniens superpartenaires les uns aux autres. Cette méthode s'avère être très utile et avantageuse, elle nous donne la possibilité de reconstruire le spectre de  $H_1$  en connaissant les états fondamentaux des hamiltoniens  $H_n$ , ( $n > 1$ ).

Commençons par l'hamiltonien du départ écrit dans le système des unités naturelles  $\hbar = 2m = 1$ , c'est à dire :

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad (1.41)$$

où  $V_1$  est une fonction de superpotentiel  $W_1$

$$V_1(x) = W_1^2(x) - \frac{d}{dx}W_1(x) + E_0^{(1)}. \quad (1.42)$$

Le second hamiltonien se construit tout simplement en permutant les deux opérateurs  $A_1$  et  $A_1^\dagger$ . Du coup,  $H_2$  s'exprime par

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (1.43)$$

avec

$$V_2(x) = V_1(x) + 2\frac{d}{dx}W_1(x). \quad (1.44)$$

on sait que  $A_1 \psi_0^{(1)} = 0$ , ce que implique  $W_1 = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)}(x)$ , alors, le potentiel  $V_2(x)$  s'écrit

$$V_2(x) = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \psi_0^{(1)}(x) \right). \quad (1.45)$$

En toute évidence, les spectres énergétiques et les fonctions propres des deux hamiltoniens sont reliés entre eux par les relations de récurrence :

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)}, \quad (1.46)$$

$$\psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} A_1 \psi_{n+1}^{(1)}(x). \quad (1.47)$$

On veut construire un troisième hamiltonien superpartenaire aux deux premiers ayant une énergie propre  $E_n^{(3)}$  et une fonction d'onde  $\psi_n^{(3)}$ . Pour ce faire, admettant que l'état fondamental de  $H_2$  est  $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ , alors,

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = A_2^\dagger A_2 + E_0^{(2)} = A_2^\dagger A_2 + E_1^{(1)},$$

$A_2^\dagger$  et  $A_2$  sont fonctions de  $W_2(x)$ , tels que

$$A_2^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_2(x), \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x).$$

En substituant les expressions de  $A_2^\dagger$  et  $A_2$  dans  $H_2$ , on trouve l'équation de Riccati suivante :

$$W_2^2(x) - \frac{d}{dx} W_2(x) = V_2(x) - E_0^{(2)}, \quad (1.48)$$

la solution de cette équation en terme de  $W(x)$  est donnée par :

$$W_2(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(2)}(x). \quad (1.49)$$

Ainsi, le superpartenaire de  $H_2$  est donné par  $H_3$ , avec

$$H_3 = A_2 A_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x), \quad (1.50)$$

où

$$V_3(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \psi_0^{(1)}(x) \psi_0^{(2)}(x) \right).$$

De même, les énergies propres et les fonctions d'ondes de  $H_2$  et  $H_3$  sont liés par :

$$E_{n+1}^{(2)} = E_n^{(3)}, \quad (1.51)$$

$$\psi_n^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)} - E_1^{(1)}}} A_2 \psi_{n+1}^{(2)}(x). \quad (1.52)$$

On voit bien qu'il y a une correspondance entre les trois hamiltoniens générés, ce qui nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}, \quad (1.53)$$

$$\psi_n^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}}} \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}}} A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)}(x). \quad (1.54)$$

Il est possible de poursuivre la construction des hamiltoniens  $H_m$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots, N$ ), où  $m$  est le nombre d'états liés de  $H_1$ . Alors, les  $(N - 1)$  hamiltoniens susceptibles d'être construits vont avoir le même spectre d'énergie (équidistants ou pas) à l'exception des  $(m - 1)$  premières valeurs propres de  $H_1$ . Le schéma ci-dessus représente une chaîne d'hamiltoniens construits par cette méthode.

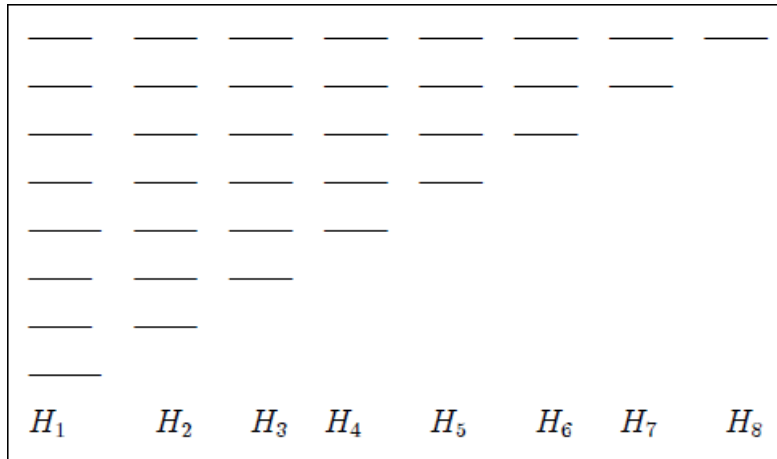


Fig.1.5 Spectre énergétique d'une famille d'hamiltoniens isospectraux, dont le nombre d'états liés de  $H_1$  est à  $m = 8$ .

Afin de généraliser la connexion entre les caractéristiques des hamiltoniens superpartenaires, on donne les relations de récurrence suivantes :

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = E_{n+2}^{(m-2)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)}, \quad (1.55)$$

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \psi_0^{(1)}(x) \psi_0^{(2)}(x) \psi_0^{(3)}(x) \dots \psi_0^{(m-1)}(x) \right), \quad (1.56)$$

$$\psi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}}} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} A_{m-1} A_{m-2} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)}(x), \quad (1.57)$$

$$\psi_{n+m-1}^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}}} A_1^\dagger A_2^\dagger \dots A_{m-1}^\dagger \psi_n^{(m)}(x). \quad (1.58)$$

Ainsi, la connaissance des énergies propres  $E_n$  d'un hamiltonien et ses fonctions d'onde  $\psi_n$  permet la construction de  $(m-1)$  hamiltoniens superpartenaires à celui du départ, où  $m$  est le nombre d'états liés de ce dernier.

## 1.8 Invariance de la forme

Nous avons vu dans les sections précédentes que les systèmes quantiques générés par un superpotentiel  $W(x)$  mène à deux hamiltoniens partenaire  $H_-(x, a)$  et  $H_+(x, a)$ . D'après le formalisme de la SUSYQM, ces deux hamiltoniens sont reliés entre eux. Cette connexion s'exprime par le faite que la connaissance de spectre de l'un d'eux, permet de trouver celui de l'autre. Mais est-il possible de déterminer ces spectres sans avoir un spectre fondamentale ?.

### 1.8.1 Potentiels à forme invariante (SIP)

En SUSYQM, il existe une classe de superpotentiels  $W(x, a)$  pour lesquels les potentiels superpartenaires  $V_\pm(x, a)$  obéissent à une contrainte spéciale appelée *invariance de la forme*. Pour cette classe de potentiels, on n'a pas à connaître le spectre d'un hamiltonien partenaire pour pouvoir trouver celui de l'autre.

La condition de l'invariance de la forme s'écrit :

$$V_+(x, a_0) = V_-(x, a_1) + R(a_0), \quad (1.59)$$

où  $a_1$  est en fonction de  $a_0$  et  $R(a_0)$  est une constante additive.

La condition président s'écrit en terme d'hamiltonien comme suit

$$H_+(x, a_0) + g(a_0) = H_-(x, a_1) + g(a_1), \quad (1.60)$$

où  $R(a_0) = g(a_1) - g(a_0)$ .

On constate que les deux hamiltoniens diffèrent par une constante additive, cela veut dire que même leurs valeurs propres vont être différentes par la même constante :  $E_n^{(+)}(a_0) = E_n^{(-)}(a_1) + R(a_0)$ . Il est important de savoir que les deux hamiltoniens ont exactement les même fonctions propres  $\psi_n^{(+)}(x, a_0) = \psi_n^{(-)}(x, a_1)$ , pour toutes valeurs de  $n$ .

Supposons qu'on cherche à déterminer le spectre de  $H_-(x, a_0)$ . Pour ce faire, admettons que les superpotentiels  $W(x, a_i)$ ,  $i = 0, 1, 2 \dots n$  engendrent des fonctions d'ondes normalisables  $\psi_0^{(-)}(x, a_i) \sim \exp(-\int^x W(x', a_i) dx')$ . Cela veut dire qu'on a une supersymétrie non brisée, par conséquent l'énergie de l'état fondamental  $E_0^{(-)}(a_i) = 0$ ,  $i = 0, 1 \dots, n$ . D'après la condition de l'invariance de la forme (1.60), on déduit que  $E_0^{(+)}(a_0) = E_0^{(-)}(a_1) + g(a_0) - g(a_1) = g(a_0) - g(a_1)$ . D'autre part, l'isospectralité des hamiltoniens superpartenaires exige que  $E_1^{(-)}(a_0) = E_0^{(+)}(a_0)$ . Du coup, les deux premières valeurs de spectre de  $H_-$  sont données par :  $E_0^{(-)}(a_0) = 0$  et  $E_1^{(-)}(a_0) = g(a_0) - g(a_1)$ .

Passons maintenant au deuxième état excité d'énergie  $E_2^{(-)}(a_0)$ . On sait que  $E_2^{(-)}(a_0) = E_1^{(+)}(a_0)$ . Alors, la condition d'invariance s'écrit  $E_1^{(+)}(a_0) = E_1^{(-)}(a_1) + g(a_1) - g(a_0)$ . En utilisant encore une fois l'isospectralité, on a  $E_1^{(-)}(a_1) = E_0^{(+)}(a_1)$ , qui est égal en terme de l'invariance de la forme à  $E_0^{(-)}(a_2) + g(a_2) - g(a_1)$ , où  $a_2$  est un autre paramètre qui est relié à  $a_1$  qui est à son tour relié à  $a_0$ , à savoir,  $a_1 = f(a_0)$  et  $a_2 = f(a_1)$ .

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} E_2^{(-)}(a_0) &= E_1^{(+)}(a_0) \\ &= E_1^{(-)}(a_1) + g(a_1) - g(a_0) \\ &= E_0^{(-)}(a_2) + g(a_2) - g(a_1) + g(a_1) - g(a_0) \\ &= g(a_2) - g(a_0) \end{aligned} \quad (1.61)$$

d'où

$$E_0^{(-)}(a_2) = 0.$$

La relation de récurrence des valeurs propres de  $H_-(x, a_0)$ , s'écrit alors,

$$E_n^{(-)}(a_0) = g(a_n) - g(a_0).$$

Les fonctions propres de l'état fondamentale et du premier état excité de  $H_-$  sont données par

$$\psi_0^{(-)}(x, a_0) \sim \exp\left(-\int^x W(x', a_0) dx'\right), \quad (1.62)$$

$$\psi_1^{(-)}(x, a_0) \sim A^\dagger(x, a_0) \psi_0^{(+)}(x, a_0). \quad (1.63)$$

Cependant, de l'invariance de la forme, nous avons  $\psi_0^{(+)}(x, a_0) = \psi_0^{(-)}(x, a_1)$ . Par conséquent, on déduit :

$$\psi_1^{(-)}(x, a_0) \sim A^\dagger(x, a_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x W(x, a_1) dx\right). \quad (1.64)$$

On s'intéresse maintenant à déterminer  $\psi_2^{(-)}(x, a_0)$ . L'état fondamental de  $H_-(x, a_2)$  est exprimé par  $\psi_0^{(-)}(x, a_2) \sim \exp(-\int^x W(x', a_2)dx')$ , et en utilisant (1.63), la fonction propre correspondante est donnée selon

$$\begin{aligned}
 \psi_2^{(-)}(x, a_2) &= \frac{1}{\sqrt{E_1^{(+)}(a_0)}} A^\dagger(x, a_0) \psi_1^{(+)}(a_0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{E_1^{(+)}(a_0)}} A^\dagger(x, a_0) \psi_1^{(-)}(a_1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{E_1^{(+)}(a_0) E_0^{(+)}(a_1)}} A^\dagger(x, a_0) A^\dagger(x, a_1) \psi_0^{(+)}(x, a_1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{E_1^{(+)}(a_0) E_0^{(+)}(a_1)}} A^\dagger(x, a_0) A^\dagger(x, a_1) \psi_0^{(-)}(x, a_2)
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Toutes les fonctions propres et les valeurs propres peuvent être déterminées par cette méthode itérative. Donc, la (SUSYQM) et la (SIP) déterminent le spectre d'un potentiel sans avoir besoin de connaître son partenaire a priori. La méthode est illustrée par la figure ci-dessous.

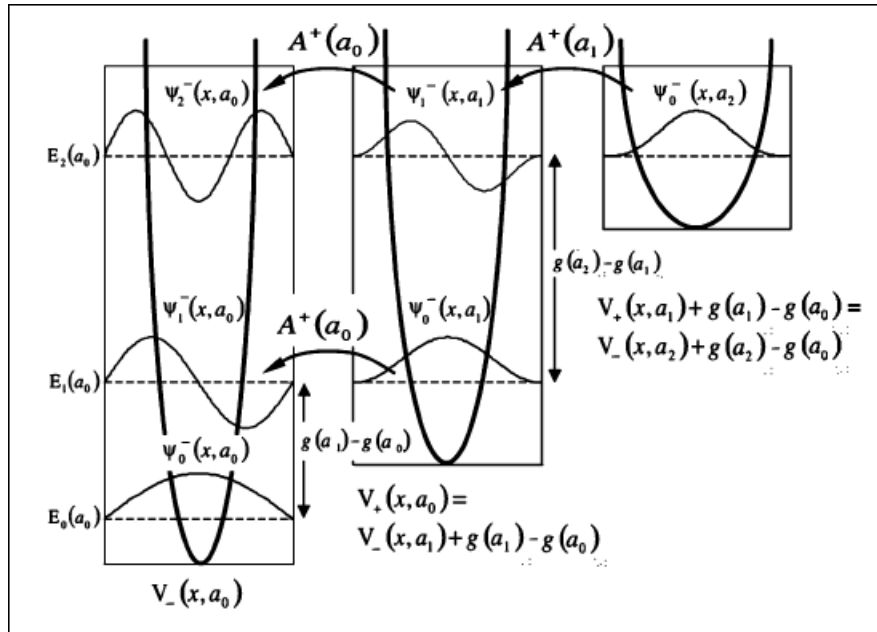


Fig.1.6 Potentiel forme à invariante, leurs niveaux d'énergie et les fonctions propres correspondantes,[1].

## 1.9 Liste des potentiels à forme invariante translationnelle

Nous énumérons ci-dessous plusieurs potentiels à forme invariante translationnelle, ainsi que leurs superpotentiels correspondants et paramètres.

### 1. Oscillateur harmonique à 1 D

Super potentiel :  $W = \frac{1}{2}\omega x, \quad -\infty < x < +\infty$

Potentiel :  $V_- = \frac{1}{4}\omega x^2 - \frac{1}{2}\omega$

$a_0 :$   $a_0$

$a_1 :$   $a_0 + 1$

$$g(a_0) : \quad g(a_0) = \omega a_0$$

$$\text{Energie propre :} \quad E_n^- = n\omega$$

### 2. *Oscillateur harmonique radial*

$$\text{Super potentiel :} \quad W = \frac{1}{2}\omega r - \frac{l+1}{r}, \quad 0 < r < +\infty$$

$$\text{Potentiel :} \quad V_- = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2l+3}{2} + \frac{\omega^2 r^2}{4}$$

$$a_0 : \quad l$$

$$a_1 : \quad l+1$$

$$g(a_0) : \quad g(a_0) = 2\omega l$$

$$\text{Energie propre :} \quad E_n^- = 2n\omega$$

### 3. *Coulomb*

$$\text{Super potentiel :} \quad W = \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{l+1}{r}, \quad 0 < r < +\infty$$

$$\text{Potentiel :} \quad V_- = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{4(l+1)^2}$$

$$a_0 : \quad l$$

$$a_1 : \quad l+1$$

$$g(a_0) : \quad g(a_0) = -\frac{e^4}{4(a_0+1)^2}$$

$$\text{Energie propre :} \quad E_n^- = \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{l+1} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{l+n+1} \right)^2$$

### 4. *Morse*

$$\text{Super potentiel :} \quad W = A - \exp(-x), \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{Potentiel :} \quad V_- = A^2 + \exp(-2x) - (2A+1)\exp(-x)$$

$$a_0 : \quad -A$$

$$a_1 : \quad -A+1$$

$$g(a_0) : \quad g(a_0) = -a_0^2$$

$$\text{Energie propre :} \quad E_n^- = A^2 - (A-n)^2$$

### 5. *Scarf (Hyperbolique)*

$$\text{Super potentiel :} \quad W = A \tanh(x) + B \sec(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{Potentiel :} \quad V_- = -[A(A+1) - B^2] \sec^2(x) + (2A+1)B \tanh(x) \sec(x) + A^2$$

$$a_0 : \quad -A$$

$$a_1 : \quad -A+1$$

$$g(a_0) : \quad g(a_0) = -a_0$$

$$\text{Energie propre :} \quad E_n^- = A^2 - (A-n)^2$$

### 6. *Rosen-Morse (hyperbolique)*

$$\text{Super potentiel :} \quad W = A \tanh(x) + \frac{B}{A}, \quad -\infty < x < +\infty \quad B < A^2$$

$$\text{Potentiel :} \quad V_- = -A(A+1)\sec^2 x + 2B \tanh x + A^2 + \frac{B^2}{A^2}$$

$$a_0 : \quad -A$$

$$a_1 : \quad -A+1$$

$$g(a_0) : \quad g(a_0) = -a_0 - \frac{B^2}{a_0^2}$$

$$\text{Energie propre :} \quad E_n^- = A^2 - (A-n)^2 - \frac{B^2}{(A-n)^2} + \frac{B^2}{A^2}$$

**7. Eckart**

Super potentiel :  $W = -A \cot r + \frac{B}{A}, \quad 0 < r < +\infty \quad B > A^2$

Potentiel :  $V_- = A(A-1) \operatorname{cosech}^2(r) - 2B \coth(r) + A^2 + \frac{B^2}{A^2}$

$a_0 : A$

$a_1 : A+1$

$g(a_0) : g(a_0) = -a_0 - \frac{B^2}{a_0^2}$

Energie propre :  $E_n^- = A^2 - (A+n)^2 + B \left[ \frac{1}{(A)^2} - \frac{1}{(A+n)^2} \right]$

**8. Pöschl-Teller (hyperbolique)**

Super potentiel :  $W = A \coth(r) - B \operatorname{cosech}(r), \quad 0 < r < +\infty \quad B > A$

Potentiel :  $V_- = [A(A+1) + B^2] \operatorname{cosech}^2(r) + A^2 - (2A+1)B \coth(r) \operatorname{cosech}(r)$

$a_0 : -A$

$a_1 : -A+1$

$g(a_0) : g(a_0) = -a_0$

Energie propre :  $E_n^- = A^2 - (A-n)^2$

**9. Rosen-Morse (trigonométrique)**

Super potentiel :  $W = -A \cot(x) - \frac{B}{A}, \quad 0 < x < \pi$

Potentiel :  $V_- = A(A-1) \operatorname{cosec}^2(x) + 2B \cot(x) - A^2 + \frac{B^2}{A^2}$

$a_0 : A$

$a_1 : A+1$

$g(a_0) : g(a_0) = a_0 - \frac{B^2}{a_0^2}$

Energie propre :  $E_n^- = -A^2 + (A+n)^2 + B^2 \left[ \frac{1}{(A)^2} - \frac{1}{(A+n)^2} \right]$

**10. Scarf (Trigonométrique)**

Super potentiel :  $W = A \tan(x) - B \sec(x), \quad -\pi < x < +\pi$

Potentiel :  $V_- = -[A(A-1) + B^2] \sec^2(x) - (2A+1)B \tan(x) \sec(x) - A^2$

$a_0 : A$

$a_1 : A+1$

$g(a_0) : g(a_0) = -a_0^2$

Energie propre :  $E_n^- = -A^2 + (A+n)^2$



# Chapitre 2

## Groupes et algèbre de Lie

La théorie des groupes et l'algèbre de Lie ont apparues à la fin du *XIX* ième siècle avec les travaux du mathématicien suédois Sophus Lie. Elles ont connues de nombreuses ramifications : *groupe algébrique, groupe quantique, théorie de représentation, ...*, et elles font encore l'objet de nombreuses recherches. Par ailleurs ces objets interviennent aussi dans des branches plus éloignées dans la physique théorique et mathématique [17].

### 2.1 Groupe de Lie

#### 2.1.1 Définition :

Un groupe de Lie réel (resp. complexe) est une variété différentielle réelle (resp. analytique complexe) munie d'une structure de groupe  $G$ . En d'autres termes, elle est munie d'une loi de composition interne qui est la multiplication, vérifie l'associativité, elle possède un élément neutre et chaque élément ayant un symétrique. La dimension de variété sous-jacente est constante, elle est aussi la dimension du groupe de Lie [17].

#### Remarques :

- *ce groupe possède une infinité continue d'éléments.*
- *L'application inverse  $(J_n, J_m) \longrightarrow J_n J_m^{-1}$  est holomorphe, donc tout groupe isomorphe à un groupe de Lie est un groupe de Lie.*

#### Exemple :

L'ensemble des matrices inversibles  $M(R)$  du groupe linéaire noté  $GL(n, \mathbb{K})$  est un groupe de Lie; en effet :

- $GL(n, \mathbb{K})$  est une variété analytique, car  $GL(R)$  est un ouvert dans  $M(R)$  comme image réciproque de  $R^*$  par l'application continue.
- Pour deux éléments  $A$  et  $B$  appartenant à  $GL(n, \mathbb{K})$ , chaque élément de  $AB^{-1}$  est fonction polynomiale des éléments de  $A$  et  $B$ , donc l'application  $(A, B) \longrightarrow AB^{-1}$  est **holomorphe**.

### 2.2 Algèbre de Lie

#### 2.2.1 Définition et Structure d'algèbre de Lie

En mathématiques, une algèbre de Lie est un espace vectoriel (réel ou complexe) qui est muni d'un crochet de Lie, c'est à dire une loi de composition interne **Bilinéaire**, antisymétrique et qui vérifie la relation de Jacobi. Elle sera notée  $(J_n, J_m) \longrightarrow [J_n, J_m]$  de  $g * g$  dans  $g$  pour

tous  $J_n, J_m \in g$  ( $g$  est une algèbre de Lie), et qui satisfait les conditions suivantes :

- **identité de Jacobi** :

$$[[J_n, J_m], J_l] + [[J_m, J_l], J_n] + [[J_l, J_n], J_m] = 0, \quad \forall J_n, J_m \in g.$$

- **linéarité** :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  et  $J_n, J_m \in g$ ,

$$[\alpha J_n + \beta J_m, J_l] = \alpha [J_n, J_l] + \beta [J_m, J_l], \quad \text{et} \quad [\alpha J_n, \beta J_n] = 0.$$

La deuxième équation montre en particulier que toutes les algèbres de Lie de crochets nuls sont abéliennes.

- **antisymétrique** : Pour  $(J_n, J_m) \in g$ ,

$$[\alpha J_n, \beta J_m] = -[\alpha J_m, \beta J_n].$$

### 2.2.2 Constante de structure d'une algèbre de Lie

Soit  $g$  une algèbre de Lie de dimension finie  $R$ , et soient les  $(J_m)_{j=1}^R$  l'ensemble des vecteurs constituant une de ses bases. On appelle relation de commutation la donnée des  $R^2$  crochets de Lie  $[J_n, J_m]$ ,  $n, m \in (1, 2, 3, \dots, R)$ . Puisque le crochet de Lie est une loi interne dans  $g$ , alors, elle peut être réécrite sous la forme suivante [18] :

$$[J_n, J_m] = \sum_{l=1}^R C_{nm}^l J_l,$$

les  $C_{nm}^l$  sont constantes de structure de l'algèbre de Lie  $g$ .

Les constantes de structure dépendent du choix de la base. De plus, on a :

- L'antisymétrie du crochet de Lie implique que  $C_{nm}^l = -C_{mn}^l$ .
- L'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Lie implique que

$$\forall (n, m, h, k), \quad \sum_{l=1}^R (C_{nm}^l C_{lk}^h + C_{mk}^l C_{ln}^h + C_{kn}^l C_{lm}^h) = 0.$$

### 2.2.3 Homomorphisme d'une algèbre de Lie

On a besoin des représentations pour exploiter les explications physiques. En générale, on peut parler des représentations matricielles ou bien des réalisations par des opérateurs différentiels agissant sur des espaces vectoriels. Ce passage est assuré par **homomorphisme** de l'algèbre de Lie [18].

Soient  $g$  et  $g'$  deux algèbres de Lie, un homomorphisme est défini dans l'espace vectoriel  $K$  comme suit  $\rho : g \rightarrow g'$ . L'homomorphisme vérifie la condition de l'algèbre de Lie donnée par

$$\rho[J_n, J_m] = [\rho(J_n), \rho(J_m)], \quad \forall (J_n, J_m) \in g.$$

## 2.3 Groupe linéaire

Par définition le groupe linéaire  $GL(n, \mathbb{K})$  de degré  $n$  d'un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , est le groupe des matrices  $(n \times n)$  inversibles ayant les éléments appartenant à  $\mathbb{K}$ , muni de la loi multiplication matricielle [19]. Et nous écrivons

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{J \in M(n, \mathbb{K}), \det(J) \neq 0\}.$$

Ces groupes sont importants dans la théorie des représentations de groupes et apparaissent lors de l'étude des symétries et des polynômes.

### 2.3.1 Générateur de groupe linéaire

Soit  $K$  un corps commutatif, pour  $i \neq j$  et  $n \geq 2$ , on définit les matrices  $T_{ij}$  et  $D_i(\alpha)$ , telles que

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}, \quad D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}.$$

où  $I_n$  et  $E_{ij}$  sont des matrices.

On appelle les matrices  $T_{ij}(\lambda)$  et  $D_i(\alpha)$  respectivement, matrice de **transvection** et les matrices **dilatation** qui sont diagonales. Le groupe  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  est engendré par les matrices transvection, tandis que le groupe  $GL(n, \mathbb{K})$  est généré par les deux matrices simultanément. Le produit des deux matrices revient à effectuer les opérations élémentaires suivantes :

à gauche :

$$T_{ij}(\lambda) = L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j D_i(\alpha) = L_i \longleftarrow \alpha L_i, \quad (2.1)$$

à droite :

$$T_{ij}(\lambda) = C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i D_i(\alpha) = C_i \longleftarrow \alpha C_i. \quad (2.2)$$

### 2.3.2 Représentation de groupe linéaire

#### Représentation exponentielle [24]

Soit l'application exponentielle  $\exp : M(n, k) \longrightarrow GL(n, K)$ , définie par la série :

$$\exp(J) = \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{J^M}{M!}, \quad (2.3)$$

Cette série converge pour toute matrice  $J \in M(n, k)$ , par effet de la majoration  $p! \leq \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}$ , on déduit l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{1}{p!} J^p \right\| \leq \frac{1}{p!} \|J^p\| \leq \left( \frac{2\|J^2\|}{p} \right)^{\frac{p}{2}}, \quad (2.4)$$

cette dernière majore la norme du terme général de cette série par série géométrique. Plus précisément, la série entière  $(Z)$ .

On définit le commutateur de deux matrices  $J_n$  et  $J_m$ , il est donné par

$$[J_n, J_m] = J_n J_m - J_m J_n, \quad (2.5)$$

si  $J_n$  et  $J_m$  commutent entre eux, nous pouvons écrire

$$\exp(J_n J_m) = \exp(J_n) \exp(J_m), \quad (2.6)$$

En particulier,  $\exp(J_n) \exp(-J_n) = I_n$  et l'image de l'application exponentielle est bien contenue dans  $GL(n, \mathbb{K})$ . La multiplication des matrices  $J$  par deux nombres quelconques  $t$  et  $u$  appartenant à  $K$ , conserve l'équation précédente, et on écrit :

$$\exp((t+u)J) = \exp(Jt) \exp(Ju). \quad (2.7)$$

Ainsi, pour  $J$  fixé, les matrices  $F(t) = \exp(tJ)$  forment un groupe à un seul paramètre, où  $J$  est considéré comme étant son générateur. Dans un groupe de Lie réel, par opposition à un groupe de Lie complexe, le paramètre  $t$  est contraint de prendre que des valeurs réelles. Les sous-groupes à un paramètre dans un groupe continu sont la contrepartie des sous-groupes cycliques dans un groupe discret. Pour tout nombre non nul  $t$  réel dans le cas d'un groupe

de Lie réel, les matrices  $J$  et  $tJ$  génèrent le même sous-groupe à un paramètre, bien que paramétré de deux manières différentes.

En utilisant la série de définition :

$$\frac{d}{dt} (\exp(tJ)) = J \exp(tJ) = J, \quad (2.8)$$

ainsi, le générateur d'un groupe à un paramètre est la dérivée de l'identité, où :

$$J = \frac{d}{dt} \exp(tJ) |_{t=0}. \quad (2.9)$$

Une autre relation qui est généralement valable et souvent utile est la suivante :

$$\exp(J_n) J_m \exp(-J_n) = J_m + [J_n, J_m] + \frac{1}{2!} [J_n, [J_n, J_m]] + \dots \quad (2.10)$$

Cette dernière peut être prouvée comme suit :

$$S(t) = \exp(tJ_n) J_m \exp(-J_n),$$

en dérivant cette dernière, on trouve (par définition)

$$S'(t) = J_n S(t) - S(t) J_n = [J_n, S(t)] = ad(J_n) S(t).$$

adjointe de la matrice  $J_n$ , qui est un opérateur qui agit sur matrices par commutation, telle que,  $ad(J_n) : J_m \rightarrow [J_n, J_m]$ .

La solution de l'équation différentielle écrite en termes  $S(t)$ , et en posant la condition initiale  $S(t=0) = J_m$  est donnée par :

$$\begin{aligned} S(t) &= \exp(t Ad(J_n) J_m), \\ &= J_m + t [J_n, J_m] + \frac{t^2}{2!} [J_n, [J_n, J_m]] + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

La relation générale suivante découle également de la définition de l'application exponentielle,

$$\det(\exp[J]) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \det \left( I + \frac{J}{p} \right) \right)^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{tr(J)}{p} \right)^p = \exp(tr(J)). \quad (2.12)$$

Nous avons vu ci-dessus, que si  $J$  est un générateur, la matrice  $tJ$  est aussi un générateur. Pour compléter la preuve que l'ensemble des générateurs est un espace vectoriel, il suffit de prouver que la somme de deux générateur  $J_n$  et  $J_m$  est un générateur. Cette condition est bel et bien vérifiée, elle découle du développement de la série de puissance du produit :

$$\exp(tJ_n) \exp(tJ_m) = I + t(J_n + J_m) + O(t^2). \quad (2.13)$$

où  $O(t^2)$  désigne le terme de second ordre en  $t$ .

### **Représentation Adjointe** [24]

Soit  $M$  une matrice inversible appartenant au groupe de Lie linéaire  $GL(n, \mathbb{K})$ ,  $J$  est un générateur de l'algèbre de Lie  $L$ , alors :

$$Ad_J(M) = M J M^{-1} \quad (2.14)$$

Chaque algèbre de Lie  $L$  agit sur elle-même par commutation, cette action est une représentation linéaire appelée représentation **adjointe**. Si  $J_n, J_m \in L$ , alors,  $Ad(J_n)$  agit sur l'action  $J_m$  comme suit :

$$\begin{aligned} ad_{J_n}(J_m) &= [J_n, J_m], \\ Ad_{[J_n, J_m]} &= [ad_{J_n}, ad_{J_m}]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La relation suivante est donc valable par définition, pour tout  $t \in K$  et  $J \in L$

$$Ad_{\exp(tJ)} = \exp(t Ad_J). \quad (2.16)$$

## 2.4 Étude du groupe de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

### 2.4.1 Définition

Le groupe spécial linéaire  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  est un sous groupe de  $GL(2, \mathbb{R})$  de dimension 3. Il est le groupe des matrices carrés  $n \times n$  de déterminant égale à 1 et une trace nulle. Il est présentée comme suit

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{M \in GL(2, \mathbb{R}) | \det(M) = 1\},$$

la représentation matricielle de  $GL(2, \mathbb{R})$  est donnée comme suit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la condition  $tr(M) = 0$ , implique que  $a + d = 0$ . Dès lors,  $M$  peut s'écrire également sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de coup, on peut prendre les matrices  $J_0$ ,  $J_+$  et  $J_-$  comme une base (générateurs), telles que

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois dernières matrices vérifiées les crochets suivants :

$$[J_0, J_+] = 2J_+, \quad [J_0, J_-] = -2J_-, \quad [J_+, J_-] = J_0.$$

En introduisant les matrice de Pauli  $\sigma_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), les matrices de base  $J_0$ ,  $J_+$  et  $J_-$  sont données sous la forme suivante :

$$J_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2), \tag{2.17}$$

et

$$J_0 = \sigma_3. \tag{2.18}$$

Les matrices de Pauli vérifiées la relation de commutation

$$\left[ \frac{i\sigma_i}{2}, \frac{i\sigma_j}{2} \right] = -\epsilon_{ijk} \frac{i\sigma_k}{2}.$$

### 2.4.2 La représentation exponentielle et adjointe de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Comme nous l'avons déjà dit, les conditions sur  $M$  pour qu'elle appartienne à  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  sont :  $\det(M) = 1$ ,  $tr(M) = 0$  et elle doit être sur la base  $\{J_0, J_+, J_-\}$ .

Rappelons que :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = aJ_0 + bJ_+ + cJ_-.$$

Pour pouvoir déterminer la représentation exponentielle de la matrice  $M$ , on introduit l'application exponentielle. Voyons l'effet de cette dernière sur la matrice  $M$  :

$$\begin{aligned}
 \exp(M) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I_n + \frac{M}{n} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M)^n \\
 &= I_n + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 \dots \\
 &= I_n + M + \frac{1}{2!} (a^2 + bc) I_n + \frac{1}{3!} (a^2 + bc) M + \frac{1}{4!} (a^2 + bc)^2 I_n \dots \\
 &= \left[ 1 + \frac{1}{2!} (a^2 + bc) + \frac{1}{4!} (a^2 + bc)^2 + \dots \right] I_n + \left[ 1 + \frac{1}{3!} (a^2 + bc) + \frac{1}{5!} (a^2 + bc)^2 + \dots \right] M \\
 &= \left[ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots \right] I_n + \left[ 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots \right] M. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

En particulier,  $\exp(M)\exp(-M) = (-a^2 - bc) I_n$ , mais  $-a^2 - bc = 1$ , alors,  $\exp(M)\exp(-M) = I_n$ .

La relation suivante découle directement de la définition de la fonction  $\exp(M)$

$$\begin{aligned}
 \det(\exp M) &= \exp \operatorname{tr}(M) \\
 &= 1 + \operatorname{tr}(M) + \frac{1}{2!} \operatorname{tr}(M)^2 + \dots \\
 &= 1 \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

## 2.5 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

### 2.5.1 Les représentations $D^j$

On considère le groupe  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  muni de la base  $J_0, J_+, J_-$  dans laquelle les relations de commutation s'écrivent

$$\begin{aligned}
 [J_0, J_{\pm}] &= \pm 2 J_{\pm}, \\
 [J_+, J_-] &= J_0. \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Soit  $(E, R)$  une représentation irréductible de dimension finie de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . L'opérateur  $R(J_0)$  admet au moins une valeur propre,  $\lambda$ , et un vecteur propre,  $u$ , pour cette valeur propre, satisfaisant  $u \neq 0$  et

$$R(J_0)u = \lambda u.$$

D'après la relation de commutation (2.21), on a :

$$R(J_0)R(J_+)u = (R(J_+)R(J_0) + 2R(J_+))u = (\lambda + 2)R(J_+)u, \tag{2.22}$$

et

$$R(J_0)R(J_-)u = (R(J_-)R(J_0) - 2R(J_-))u = (\lambda - 2)R(J_-)u. \tag{2.23}$$

Comme il ne peut y avoir qu'un nombre fini de valeurs propres distinctes de  $R(J_0)$ , il existe une valeur propre  $\lambda_0$  et un vecteur propre  $u_0$ , tels que  $R(J_0)u_0 = \lambda_0 u_0$  et

$$R(J_+)u_0 = 0. \tag{2.24}$$

On pose alors, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$u_k = R(J_-)^k u_0.$$

En itérant la relation (2.23), on voit que les vecteurs  $u_k$  sont les vecteurs propres de  $R(J_0)$  pour les valeurs propres distinctes,  $\lambda_0 - 2k$ ,

$$R(J_0)u_k = (\lambda_0 - 2k)u_k.$$

Montrons, par récurrence sur  $k$ , que, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$R(J_+)u_k = k(\lambda_0 - k + 1)u_{k-1}.$$

La relation est vérifiée pour  $k = 1$  car, d'après (2.21) et (2.24),

$$R(J_+)u_1 = R(J_+)R(J_-)u_0 = R(J_0)u_0 = \lambda_0 u_0.$$

Supposons que la relation est vraie pour  $k$ . En utilisant l'hypothèse,  $u_{k+1} = R(J_-)u_k$ , et la deuxième relation de (2.21), on obtient

$$R(J_+)u_{k+1} = R(J_+)R(J_-)u_k = (R(J_-)R(J_+) + R(J_0))u_k = (k+1)(\lambda_0 - k)u_k,$$

ce qui démontre la relation. Les vecteurs propres  $u_k$  étant linéairement indépendants et l'espace vectoriel  $E$  étant supposé de dimension finie, il existe un entier  $n$  tel que

$$u_0 \neq 0, u_1 \neq 0, \dots, u_k \neq 0, \quad u_{k+1} = 0.$$

D'où, en écrivant  $R(J_+)u_{k+1} = 0$ ,

$$\lambda_0 = n.$$

On vérifie alors que,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$[R(J_+), R(J_-)]u_k = R(J_0)u_k, \quad [R(J_0), R(J_\pm)]u_k = \pm 2R(J_\pm)u_k.$$

Les vecteurs,  $u_0, u_1, \dots, u_n$  engendrent un sous espace de  $E$  invariant par  $R$ , et comme la représentation cherchée est irréductible, ils engendrent  $E$ , qui est donc de dimension  $n+1$ . En résumé, nous avons trouvé une représentation  $(E^{(n)}, R^{(n)})$  de dimension  $n+1$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  et une base  $u_0, u_1, \dots, u_n$  de  $E^{(n)}$ , telles que :

$$\begin{aligned} R^{(n)}(J_0)u_k &= (n - 2k)u_k, \\ R^{(n)}(J_-)u_k &= u_{k+1}, \\ R^{(n)}(J_+)u_k &= k(n - k + 1)u_{k-1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Pour  $0 \leq k \leq n$  et  $u_{k+1} = 0$ . Montrons que la représentation  $(E^{(n)}, R^{(n)})$  est irréductible.

Supposons que  $v$  soit un vecteur non nul d'un sous-espace vectoriel,  $F$ , de  $E^{(n)}$ , invariant par  $R^{(n)}$ . Alors,

$$v = \sum_{k=0}^n v_k u_k, \quad v_k \in \mathbb{C}.$$

Supposons  $v_{k_0} \neq 0, v_{k_0+1} = \dots = v_n = 0$ , où  $0 < k_0 \leq n$ . Alors  $(R^{(n)}(J_+))^{k_0}v$  est proportionnel à  $u_0$  avec un coefficient non nul. Donc  $u_0$  appartient à  $F$  et par conséquent aussi tous les  $u_k$ , pour  $k = 0, \dots, n$ . Donc tout sous-espace invariant non nul coïncide avec l'espace entier. D'autre part, la démonstration ci-dessus a prouvé que toute représentation irréductible de dimension finie de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  est de la forme  $(E^{(n)}, R^{(n)})$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2.5.2 Opérateur de Casimir de groupe de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

En mathématique, est plus spécifiquement en algèbre, l'opérateur de Casimir est un opérateur particulier. Plus précisément, étant donné une algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire non dégénérée et invariante, et une représentation de dimension finie, l'opérateur de Casimir est une application linéaire continue particulière sur l'espace vectoriel de la représentation. Cet opérateur commute avec la représentation. Pour certaines algèbre cet opérateur, peut jouer le rôle du laplacien.

Soit  $g$  une algèbre de Lie,  $B(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire non-dégénérée invariante associée à l'algèbre d'une invariante à représentation adjointe  $ad_{J_0}(J_1) = [J_0, J_1]$  pour tout  $J_0, J_1, J_2 \in g$  on trouve :

$$B(ad_{J_0}(J_1), J_2) = -B(J_1, ad_{J_0}(J_2)) \quad (2.26)$$

Ou encore :

$$B([J_0, J_1], J_2) = -B(J_2, [J_0, J_1]) \quad (2.27)$$

Par définition l'application linéaire  $\rho : g \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  nous prenons la base  $\{J_\mu, \mu = 1 \dots n\}$  de  $g$ , et on note  $\{J^\mu, \mu = 1 \dots n\}$  la base duale :

$$B(J^\mu, J_\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

En mécanique quantique, l'opérateur de casimir a aidé à mieux connaître les opérateurs agissant sur la fonction d'onde et les invariants associés qui sont les nombre quantique on sait que  $J^2 = J_0^2 + J_1^2 + J_2^2$  commute avec chacun des  $J_i$ . On appelle  $J^2$  un opérateur de casimir de groupe. Un opérateur de casimir est généralement un polynôme ou une combinaison linéaire ou quadratique des générateurs d'un groupe. Pour une algèbre semi-simple le nombre d'opérateurs de casimir est égal au rang de l'algèbre. Pour les groupes de lie semi-simple, on utilise la formule de **Cartan-Killing** pour calculer l'opérateur de casimir quadratique de groupe.



# Chapitre 3

## Systèmes quantiques à masse dépendante de la position

La description des porteurs de charges dans les hétérostructures semi conducteurs a été fournie historiquement par les hamiltoniens de masse dépendante de la position (PDM), dont la déduction des premiers principes a produit une vaste famille aux propriétés différentes, allant des opérateurs non hermitiens à des opérateurs hermitiens avec plusieurs type de conditions aux limites [3-5].

D'autre part, la génération de systèmes solubles présente un intérêt pratique, bien qu'elle soit également importante du point de vue théorique. Car l'identification de tout nouvel Hamiltonien résoluble ouvre la porte à des zones inexplorées et fournit un ensemble d'informations à analyser[6-7].

Le problème de la masse effective dépendante de la position a été étudié pour la première fois en 1966 par les physiciens Ben Daniel et Duke[23], où ils donnèrent naissance à un nouveau hamiltonien noté,  $H_{BDD}$ , décrivant les systèmes physiques ayant une masse variable.

Quelques années plus tard, le physicien hollandais von Roos [3] donna une autre forme pour l'hamiltonien de Ben Daniel-Duke dont la partie cinétique est écrite en deux terme ce que résout le problème d'ordre d'opérateurs (symétrisation). Le nouveau hamiltonien  $H_{VR}$  et grâce aux paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma)$  introduits dans son expression en obéissant à l'équation paramétrique  $\alpha + \beta + \gamma = -1$ , permet d'aller vers plusieurs hamiltoniens et même d'obtenir l'hamiltonien de Schrödinger qui est écrit dans le cadre de la masse constante.

### 3.1 Hamiltoniens de von Roos et Ben Daniel-Duke

Il existe plusieurs façons de définir le terme cinétique pour un hamiltonien d'un système à masse variable (PDM). L'un des plus généraux, qui est automatiquement hermitien, a été proposé par von Roos sous la forme suivante[3] :

$$H_{VR} = \frac{1}{4} \left( m^\alpha(x) p m^\beta(x) p m^\gamma(x) + m^\gamma(x) p m^\beta(x) p m^\alpha(x) \right) + V(x), \quad (3.1)$$

où  $m(x)$  est une masse dépend de la position,  $V$  est un potentiel réel. Différentes sélections de ces constantes mènent aux différents Hamiltoniens, un choix donné est généralement basé sur des considérations physiques[12].

Cependant, le problème peut être traité d'un point de vue différent en écrivant l'équation précédente en tant qu'opérateur différentiel :

$$H_{VR} = -\frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 m'(x)}{2m^2(x)} \frac{d}{dx} + V_{eff}(x), \quad (3.2)$$

avec

$$V_{eff}(x) = V(x) + \hbar^2 \left( \frac{(1+\beta)m''(x)}{4m^2(x)} - \frac{(m'(x))^2}{2m^3(x)} (\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta + 1) \right). \quad (3.3)$$

Dans la suite de ce travail, au lieu de (3.1), nous travaillerons avec l'expression (3.2), qui implique  $V_{eff}$ . Si on s'intéresse à un ordre particulier défini par l'équation (3.1),  $V(x)$  doit être exprimé en termes de  $V_{eff}$  et un terme supplémentaire résultant de cet ordre, c'est à dire

$$V(x) = V_{eff}(x) - \hbar^2 \left( \frac{(1+\beta)m''(x)}{4m^2(x)} - \frac{(m'(x))^2}{2m^3(x)} (\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta + 1) \right). \quad (3.4)$$

L'expression (3.2) s'écrit sous une autre forme donnée par Ben Daniel-Duke, telle que

$$H_{BDD} = \frac{1}{2^p} \frac{1}{m(x)} p = -\frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d^2}{dx^2} + V_{BDD} \frac{\hbar^2 m'(x)}{2m^2(x)} \frac{d}{dx} + V_{BDD}(x). \quad (3.5)$$

Nous travaillerons désormais avec l'hamiltonien (3.5) et les indices correspondants seront supprimés.

## 3.2 Forme générale du hamiltonien BDD avec des opérateurs d'échelle de premier ordre

Considérons un système gouverné par un hamiltonien  $H_{BDD}$ , tel qu'il est défini dans l'équation (3.5), et deux opérateurs d'échelle  $L$  et  $L^\dagger$  vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[H, L^\dagger] = \Delta_E L^\dagger, \quad [H, L] = -\Delta_E L, \quad \Delta_E \in \mathbb{R}.$$

La relation précédente montre que pour une fonction propre  $\psi$  de  $H$  avec une valeur propre  $\epsilon$ , l'action des opérateurs d'échelle  $L^\dagger$  sur  $\psi$  produit de nouvelles fonctions propres de  $H$  avec des valeurs propres  $\epsilon \pm \Delta_\epsilon$ , pour autant qu'elles satisfassent les conditions aux limites, à savoir ;

$$H(L^\dagger \psi) = (\epsilon + \Delta_\epsilon)(L^\dagger \psi), \quad (3.6)$$

$$H(L \psi) = (\epsilon - \Delta_\epsilon)(L \psi). \quad (3.7)$$

Puisque l'hamiltonien  $H_{BDD}$  est hermitien, nous pouvons choisir  $L^\dagger$  et  $L$  comme adjoints l'un à l'autre, ce qui pour des hamiltoniens non hermitiens ne peut pas être fait en général.

Si le spectre d'énergie de  $H$  doit être borné par le bas, il devrait exister un ensemble de fonctions propres formelles de  $H$  qui seraient également annihilées par  $L$ , tel que  $L\psi_0 = 0$ . Certaines d'entre elles pourraient remplir les conditions aux limites. Les valeurs propres appartiendront au spectre de  $H$  et seront appelées états extrêmes du système, en analogie avec les problèmes de masse constante régis par les algèbres polynomiales de Heisenberg. Le niveau d'énergie le plus bas associé à ces états extrêmes sera appelé aussi énergie d'état fondamental.

Supposons maintenant que  $L$  est un opérateur d'échelle différentielle de premier ordre de la forme :

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha_1(x) \frac{d}{dx} + \beta_1(x) \right), \quad (3.8)$$

la relation de commutation entre  $H$  et  $L$  doit être remplie, cela nous conduit à un ensemble d'équations différentielles couplées reliant  $m(x)$ ,  $\alpha_1(x)$ ,  $\beta_1(x)$  et  $V(x)$ , à savoir :

$$\alpha_1'(x) + \frac{m'(x)}{2m(x)}\alpha_1(x) = 0, \quad (3.9)$$

$$\beta_1'(x) = -\frac{1}{2}\alpha_1''\frac{m'(x)\alpha_1'}{2m(x)} + \alpha_1(x) \left[ \left( \frac{m'(x)}{m(x)} \right)^2 + \frac{\Delta_E m(x)}{\hbar^2} - \frac{m''(x)}{2m(x)} \right], \quad (3.10)$$

$$\alpha_1(x)V'(x) = \Delta_E\beta_1(x) + \frac{\hbar^2 m'(x)\beta_1'(x)}{2m^2(x)} - \frac{\hbar^2\beta_1''(x)}{2m(x)}. \quad (3.11)$$

Sachant que le profil de masse est fixé pour des raisons physiques, il est naturel de résoudre l'ensemble d'équations précédent en terme de  $m(x)$  et dont les solutions correspondantes sont données par :

$$\alpha_1(x) = am^{-\frac{1}{2}}(x), \quad (3.12)$$

$$\beta_1(x) = \frac{a}{2} \left( m^{-\frac{1}{2}}(x) \right)' + \frac{a\Delta_E}{\hbar^2} \int m^{\frac{1}{2}}(x)dx, \quad (3.13)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_E}{\hbar} \right)^2 \left[ \int m^{\frac{1}{2}}(x)dx \right]^2 - \frac{\hbar^2}{8} \left( \left( m^{-\frac{1}{2}}(x) \right)' \right)^2 - \frac{\hbar^2 \left( m^{-\frac{1}{2}}(x) \right)''}{4m^{\frac{1}{4}}(x)}. \quad (3.14)$$

$a$  est une constante pour alléger l'écriture des équations.

Comme  $L$  est un opérateur différentiel du premier ordre, on ne peut trouver qu'une seule fonction d'onde formelle qui est celle de l'état fondamental, elle est donnée par :

$$\psi_0(x) = c_0 m^{\frac{1}{4}}(x) \exp \left( -\frac{\Delta_E}{2\hbar^2} \left[ \int m^{\frac{1}{2}}(x)dx \right] \right), \quad (c_0 = cte). \quad (3.15)$$

pour laquelle on associé l'énergie

$$E_0 = \frac{\Delta_E}{2}. \quad (3.16)$$

Dans ce cas, l'adjoint de l'opérateur d'annihilation est l'opérateur de création s'écrit

$$L^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\alpha_1(x) \frac{d}{dx} + \beta_1(x) - \alpha_1'(x) \right). \quad (3.17)$$

Ainsi, les états excités sont obtenus successivement par l'action de  $L^\dagger$  sur l'état fondamental  $\psi_0$ , tel que

$$\psi_n(x) \propto (L^\dagger)^n \psi_0(x), \quad \text{et} \quad E_n = E_0 + n\Delta_E \quad n \in N_0.$$

Les deux opérateurs vérifient la relation de commutation suivante :

$$[L, L^\dagger] = \frac{a^2\Delta_E}{\hbar^2}. \quad (3.18)$$

Il est important de savoir que tout au long de ce travail, nous nous limiterons aux cas où le théorème d'oscillation est valide. Ainsi, la présence ou l'absence des valeurs propres formelles correspondantes dans le spectre de  $H$  dépendra de ce que les états générés satisfont ou non aux conditions aux limites imposées par la théorie de Sturm-Liouville.

### 3.3 Exemple des système PDM

Il n'est pas difficile de trouver dans la littérature des exemples où des structures de  $GaAs$  et  $Al_zGa_{1-z}As$  sont créées [4]. A l'intérieur de ce type de semi-conducteurs, les électrons et les trous possèdent une masse effective qui varie en fonction de  $m = m_0 + m_1z$ ,  $m_0$  et  $m_1$  étant deux constantes définies par le matériau et  $z$  est définie par le gradient de  $Al$  dans la structure. Plus précisément dans [4],  $z$  varie en fonction de la fonction d'erreur, mais il est également suggéré que la concentration puisse adopter en quelque sorte le profil souhaité. Cette suggestion a été utilisée dans [13-14], où des profils quadratiques inverses et linéaires ont été considérés. Ci-dessous, nous nous en tiendrons également à cette proposition en choisissant des profils simples qui nous fourniront des informations physiquement intéressantes.

#### 3.3.1 Profil quadratique

En travaillant en unités atomiques  $\hbar = 1$ , supposons que le profil de masse est de la forme  $m(x) = \frac{x^2}{2} + m_0$ . Des calculs simples nous conduisent aux expressions suivantes :

$$\alpha_1(x) = \frac{a}{\sqrt{\frac{x^2}{2} + m_0}}, \quad (3.19)$$

$$\beta_1(x) = \frac{a \left( \sqrt{2m_0 + x^2} \left( \frac{\Delta_E x}{2} - \frac{x}{(2m_0 + x^2)^2} \right) + m_0 \Delta_E \log(\sqrt{2m_0 + x^2} + x) \right)}{\sqrt{2}}, \quad (3.20)$$

$$V(x) = \frac{1}{8} \Delta_E^2 x^2 + \frac{\Delta_E^2 x^4}{16} - \frac{5}{4(2m_0 + x^2)^2} + \frac{7m_0}{2(2m_0 + x^2)^3} + \frac{1}{4} m_0^2 \Delta_E^2 \log^2(\sqrt{2m_0 + x^2} + x) + \frac{1}{4} m_0 \Delta_E^2 x \sqrt{2m_0 + x^2} \log(\sqrt{2m_0 + x^2} + x), \quad (3.21)$$

avec une fonction d'onde de l'état fondamental donnée par :

$$\psi_0(x) = (2m_0 + x^2)^{\frac{1}{4}} (\sqrt{2m_0 + x^2} + x)^{-\frac{m_0 \Delta_E x \sqrt{2m_0 + x^2}}{4}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{16} \Delta_E \left[ 4m_0^2 \log^2(\sqrt{2m_0 + x^2} + x) + 2m_0 x^2 + x^4 \right] \right\} \quad (3.22)$$

On voit clairement sur la figure ci-dessous que autour de  $x = 0$ , la forme du potentiel change de manière radicale. Cependant, il n'est pas singulier pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

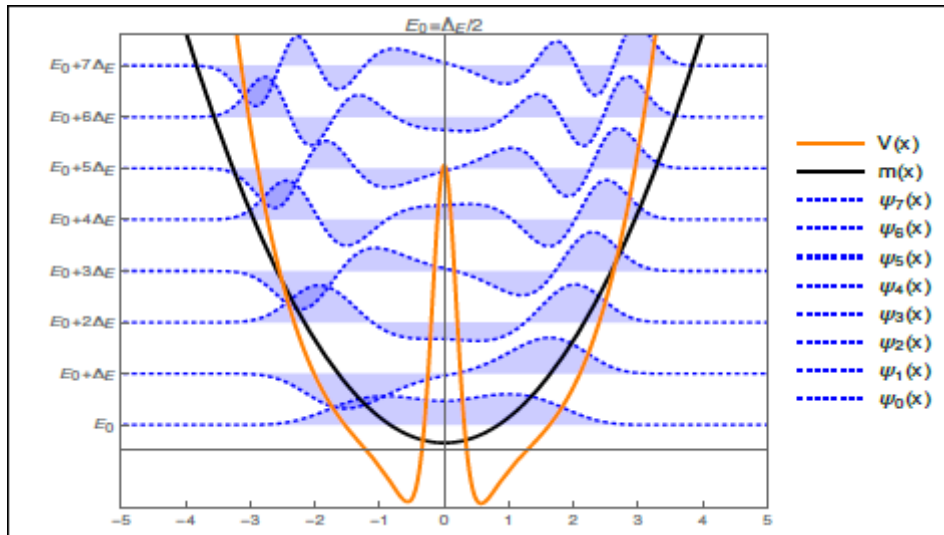


Fig.3.1 Graphe du profil de masse quadratique avec  $m_0 = 0.15$  [16].

### 3.3.2 Profil linéaire

Comme dernier exemple, supposons que le profil de masse varie linéairement  $m(x) = x$ , ce qui induira une singularité dans le potentiel à  $x = 0$ . Les fonctions définissant l'opérateur d'échelle et le potentiel sont données par :

$$\alpha_1(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}, \quad (3.23)$$

$$\beta_1(x) = \frac{1}{8}a \left( \frac{3}{16}\Delta_E x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (3.24)$$

$$V(x) = \frac{1}{96} \left( \frac{64\Delta_E x^3}{3} - \frac{21}{x^3} \right). \quad (3.25)$$

Avec une fonction propre de l'état fondamental donnée par :

$$\psi_0(x) = x^{\frac{1}{4}} \exp -\frac{1}{9}(2\Delta_E x^3). \quad (3.26)$$

Sur la figure (3.2), nous pouvons voir que parmi toutes les fonctions propres formelles générées en agissant successivement  $L^\dagger$  sur  $\psi_0$ , seule la moitié satisfait les conditions aux limites à l'origine décrites à la section précédente (celles étiquetées par des indices impairs).

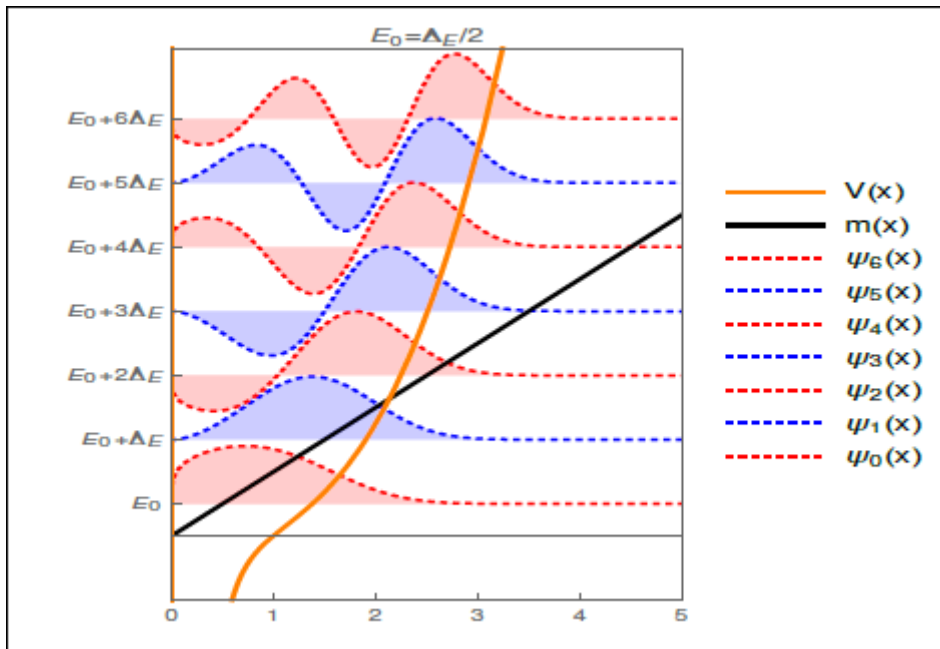


Fig.3.2 Graphiques du profil de masse linéaire, du potentiel correspondant avec un spectre infini équidistant et de certaines fonctions propres associées aux valeurs propres formelles les plus basses exprimées en unités atomiques[16].

# Chapitre 4

## Génération des potentiels quantique exactement solubles via l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Dans ce chapitre, nous allons générer une large classe de potentiels quantiques exactement solubles (E.S.). Nous allons aussi déterminer les fonctions d'ondes et les spectres d'énergie associés à chaque potentiel. Pour ce faire, nous utilisons une méthode bien puissante basée sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .

Donnant d'abord les définitions des deux classes de potentiels les plus connues en physique :

1. La classe des potentiels de type E.S. est celle dont l'équation de Schrödinger accepte une solution analytique complète (spectre d'énergie et fonction d'onde). Elle contient l'ensemble des 12 potentiels connus de Natanson[22].
2. La classe des potentiels de type Q.E.S. appartient à la classe des potentiels dits non solubles (N.S.) et elle est le lien manquant entre E.S. et N.S. Pour cette classe, il est possible de déterminer uniquement une partie de spectre total, ce qui revient à dire que dans un espace infini de Hilbert, il existe un sous-espace fini  $h_i$  dans lequel l'équation de Schrödinger accepte une algébrisation partielle.

### 4.1 Traitement par la supersymétrie de la mécanique quantique

Considérons l'hamiltonien de Ben Daniel-Duke muni d'une masse dépendante de la position. En réalité on dit que la particule est soumise à un champ effectif moyen donnant l'impression que la particule change de masse lors de son déplacement. Nous avons vu que le formalisme de la supersymétrie de la mécanique quantique **SUSYQM** permet de factoriser l'hamiltonien de Ben Daniel-Duke  $H = pU(x)p + V(x)$  en un produit de deux opérateurs, nommés d'annihilation  $A$  et création  $A^\dagger$ .

L'opérateur d'annihilation est donné par :

$$A = U(x) \frac{d}{dx} + W(x), \quad (4.1)$$

où  $U(x) = m^{-\frac{1}{2}}(x)$ ,  $W(x)$  est le superpotentiel et  $p = -i \frac{d}{dx}$ . Dans la suite de notre travail on pose  $\hbar = 1$ .

La factorisation nous permet alors d'admettre l'existence de deux hamiltoniens isospectraux  $H^{(\pm)}$  tels que,

$$H^+ = A^\dagger A, \quad \text{et} \quad H_- = A A^\dagger,$$

où l'opérateur de création est donné par :

$$A^\dagger = -U(x) \frac{d}{dx} + W(x) - U'(x). \quad (4.2)$$

Du coup, l'hamiltonien  $H^{(+)}$  s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H^{(+)} &= A^\dagger A \\ &= -\frac{1}{m(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{m'(x)}{m^2(x)} \frac{d}{dx} + W^2(x) - (U(x)W(x))', \end{aligned} \quad (4.3)$$

et en inversant l'ordre des deux opérateurs, on trouve

$$\begin{aligned} H^{(-)} &= A A^\dagger \\ &= -\frac{1}{m(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{m'(x)}{m^2(x)} \frac{d}{dx} + W^2(x) + (W'(x)U(x) - U'(x)W(x)) - U''(x)U(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

On voit bien que la partie cinétique de  $H_{BDD}$  est égale à celles des deux produit, ceci nous permet de déduire les expressions des potentiels  $V^{(+)}$  et  $V^{(-)}$  associés aux hamiltoniens  $H^{(+)}$  et  $H^{(-)}$ , respectivement :

$$V^{(+)}(x) = W^2(x) - (W(x)U(x))', \quad (4.5)$$

$$V^{(-)}(x) = W^2(x) + (W'(x)U(x) - U'(x)W(x)) - U''(x)U(x). \quad (4.6)$$

Dans le cadre de la hiérarchisation des hamiltoniens, on propose d'exprimer  $H^-$  en termes d'un nouveau hamiltonien  $H_1^{(+)}$  (acceptant une factorisation en termes de  $A_1$  et  $A_1^\dagger$ ) par

$$H^{(-)} = H_1^{(+)} + \epsilon = A_1^\dagger A_1 + \epsilon, \quad (4.7)$$

où par définition  $A_1 = U(x) \frac{d}{dx} + W_1(x)$ . Ici,  $W_1(x)$  est le nouvel superpotentiel et  $\epsilon = E_1^{(+)} = E_0^{(-)}$ .

En effectuant le même calcul des produit d'opérateur, on aboutira à la relation suivante

$$V^{(-)}(x) = V_1^{(+)} + \epsilon = W_1^2(x) - (U(x)W_1(x))' + \epsilon, \quad (4.8)$$

en combinant les relation (4.5) et (4.6), on retrouve l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} V^{(-)} &= V_1^{(+)} + \epsilon, \\ W_1^2(x) - W^2(x) + \epsilon &= U'(x)(W_1(x) - W(x)) + U(x)(W_1(x) + W(x))' - U(x)U''(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En effet, cette dernière n'est autre que l'équation de **Ricatti**, exprimée soit en termes de  $W_1(x)$  ou  $W(x)$ . Sa résolution revient à déterminer la forme de  $V(x)$ . Malheureusement il n'est pas possible de la résoudre analytiquement. Ce faisant, on pose le changement de fonction suivant

$$W_\pm(x) = W_1(x) \pm W(x), \quad (4.10)$$

où les superpotentiels  $W_-(x)$  et  $W(x)$  peuvent être exprimés en termes de  $U, U', U'', W_+, \epsilon$ . Pour ce faire on substitue (4.10) dans (4.8) et (4.9),

$$\frac{1}{4}(W_+(x) + W_-(x))^2 - \frac{1}{4}(W_+(x) - W_-(x))^2 = U'(x)W_-(x) + U(x)W'_+(x) - U''(x)U(x) - \epsilon, \quad (4.11)$$

soit en termes de  $W_-(x)$  :

$$W_-(x) = \frac{U(x)W'_+(x)}{W_+(x) - U'(x)} - \frac{U''(x)U(x)}{W_+(x) - U'(x)} - \frac{\epsilon}{W_+(x) - U'(x)}. \quad (4.12)$$

ou

$$W(x) = \frac{1}{2} \left( W_+(x) - \frac{U(x)W'_+(x)}{W_+(x) - U'(x)} + \frac{U''(x)U(x)}{W_+(x) - U'(x)} + \frac{\epsilon}{W_+(x) - U'(x)} \right), \quad (4.13)$$

les deux dernières équations nous exige de poser la condition  $W_+(x) \neq U'(x)$ .

Introduisant maintenant une nouvelle fonction dite fonction génératrice donnée par

$$Z(x) = W_+(x) - U'(x), \quad (4.14)$$

ainsi, l'équation (4.13) devient

$$W(x) = \frac{1}{2} \left( U'(x) + Z(x) + \frac{\epsilon}{Z(x)} - U(x) \frac{Z'(x)}{Z(x)} \right). \quad (4.15)$$

Du même pour l'équation (4.5), elle peut s'écrire en fonction  $U'(x), U''(x), U(x), Z'(x), Z(x)$  par :

$$\begin{aligned} V^{(+)}(x) &= W^2(x) - (W(x)U(x))' \\ &= \frac{1}{2} \left[ U'^2(x) + 2Z^2(x) + \epsilon - 2U(x)Z'(x) + 2\frac{\epsilon^2}{Z^2(x)} - 2U^2(x)\frac{Z'^2(x)}{Z^2(x)} \right. \\ &\quad \left. + U^2(x)\left(\frac{Z'(x)}{Z(x)}\right)' + U(x)U'(x)\frac{Z'(x)}{Z(x)} \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

La fonction d'onde de l'état fondamental associée à  $V^{(+)}$  peut être calculée d'une manière analytique. En fait, elle est la seule qui est obtenue de cette manière, car les opérateurs mis en jeu sont du premier ordre. Elle est donnée comme suit

$$A\psi_0(x) = \left( U(x)\frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0(x) = \exp\left(-\int \frac{W(x)}{U(x)} dx\right). \quad (4.17)$$

En remplaçant l'expression de  $W(x)$  dans (4.17) on trouve

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\int^x \frac{Z(x')}{U(x')} dx' - \frac{\epsilon}{2}\int^x \frac{dx'}{Z(x')U(x')}\right]. \quad (4.18)$$

La fonction d'onde du premier état excité  $\psi_1(x)$  est obtenue en appliquant l'opérateur  $A^\dagger$  sur  $\psi_0(x)$  écrite en fonction de  $W_1(x)$  non pas celle exprimée en terme de  $W(x)$ .

$$\psi_1(x) = A^\dagger \exp\left[-\int^x \frac{W_1(x')}{U(x')} dx'\right], \quad (4.19)$$

et en tenant compte des changement de fonction utilisés précédemment, (4.19) devient

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{Z(x)}{U(x)} dx - \frac{\epsilon}{2}\int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx\right] \exp\left[\epsilon \int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx\right] \\ &= \psi_0(x) \exp\left[\epsilon \int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx\right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$



D'après les résultats précédents, on remarque qu'il y a une récurrence dans l'allure de la fonction d'onde, ceci nous a permis de déduire une forme générale pour la fonction d'onde  $\psi_n$ . La forme qu'on propose ici est donnée en terme de la fonction d'onde de l'état fondamentale  $\psi_0(x)$  et une autre fonction, notée  $\phi_n(x)$ , telle que :

$$\psi_n(x) \sim \psi_0(x)\phi_n(x, \epsilon) = \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int^x \frac{Z(x')}{U(x')} dx' - \frac{\epsilon}{2} \int^x \frac{dx'}{Z(x')U(x')} \right] \phi_n(x, \epsilon), \quad (4.21)$$

où  $\phi_0(x, \epsilon) = 1$  et  $\phi_1(x, \epsilon) = \exp \left[ \epsilon \int \frac{dx}{Z(x)U(x)} \right]$ .

## 4.2 Construction de l'équation de Schrödinger

Jusqu'à présent, on a utilisé le traitement *SUSYQM*. On a pu déterminer les superpotentiel et potentiel associé à notre problème et on a arrivé à concevoir la forme de la fonction d'onde générale. Passons à une autre étape de notre procédure qui consiste à construire l'équation de Schrödinger.

A cette fin, nous introduisons une fonction *auxiliaire génératrice*,  $\xi(x)$ , donnée par

$$\xi(x) \equiv \phi_1(x, \epsilon) = \exp \left[ \epsilon \int^x \frac{dx'}{Z(x')U(x')} \right]. \quad (4.22)$$

Cette dernière est une transformation de variable, elle nous donne la possibilité de passer de l'ancienne variable  $x$  vers une nouvelle variable  $\xi$ . Du coup, les opérateurs différentiels  $\frac{d}{dx}$  et  $\frac{d^2}{dx^2}$  s'expriment en termes de  $\frac{d}{d\xi}$  et  $\frac{d^2}{d\xi^2}$ ; ceci permet alors d'écrire notre hamiltonien  $H_{BDD}$  en terme de la nouvelle variable  $\xi$ .

Les deux opérateurs différentiels sont donnés alors par :

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \frac{\epsilon}{Z(x)U(x)} \frac{d}{d\xi}. \quad (4.23)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{\epsilon}{Z(x)U(x)} \xi \left[ \frac{(Z(x)U(x))'}{Z(x)U(x)} \frac{d}{d\xi} + \frac{\epsilon}{Z(x)U(x)} \frac{d}{d\xi} + \frac{\epsilon}{Z(x)U(x)} \xi \frac{d^2}{d\xi^2} \right]. \quad (4.24)$$

L'équation de Schrödinger s'écrit

$$H_{BDD}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad (4.25)$$

en substituant  $\psi_n(x)$  et  $H_{BDD}$  dans l'équation (4.25), et en utilisant les résultats précédents, l'équation de Schrödinger associée peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H_{BDD}(\psi_0(x)\phi_n(x, \epsilon)) &= \left[ -\frac{d}{dx} U^2(x) \frac{d}{dx} + V(x) \right] \psi_0(x)\phi_n(x, \epsilon), \\ &= \left[ -\left( \frac{\epsilon}{Z(x)U(x)} \frac{d}{d\xi} \right) U^2(x) \left( \frac{\epsilon}{Z(x)U(x)} \frac{d}{d\xi} \right) + V(x) \right] \psi_0(x)\phi_n(x, \epsilon), \\ &= \left[ -\epsilon^2 \frac{\xi(x)^2}{Z^2(x)} \frac{d^2}{d\xi^2} + \epsilon \xi(x) \frac{d}{d\xi} \right] \phi_n(x, \epsilon) = E_n(\psi_0(x)\phi_n(x, \epsilon)). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Noter que dans le calcul précédent, on a utilisé les deux expressions de la fonction d'onde de l'état fondamental  $\psi_0(x)$  (4.17) et (4.18).

### 4.3 Construction de L'algèbre

Nous intéressons maintenant à la construction de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  qui s'avère être une excellente algèbre génératrice des spectre d'énergie des potentiels quantique unidimensionnels. Cette algèbre est générée par trois générateurs (opérateurs d'échelle), notés :  $J_{\pm}$  et  $J_0$ .

Dans le cadre de la fonction auxiliaire génératrice  $\xi(x)$  déjà introduite, il est commode d'exprimer les trois opérateurs sous la forme suivante,

$$J_+ = \xi^2 \frac{d}{d\xi} - n\xi, \quad J_- = \frac{d}{d\xi}, \quad \text{et} \quad J_0 = \xi \frac{d}{d\xi} - \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Les trois opérateurs vérifient les relations de commutation suivante

$$[J_+, J_-] = -2J_0, \quad [J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}.$$

L'algèbre  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  possède un opérateur de Casimir et pour des raisons de symétrie, nous imposons à l'opérateur hamiltonien de cette algèbre (*proportionnel à l'opérateur de Casimir*) de s'exprimer comme une combinaison quadratique et linéaire de ses générateurs, tel que :

$$C = - \sum_{a=(0,\pm)} \sum_{b=(0,\pm)} c_{ab} J_a J_b - \sum_{a=(0,\pm)} c_a J_a - D_n, \quad (4.27)$$

où  $c_{ab}$  sont des coefficients symétriques en indices  $c_{ab}=c_{ba}$  et  $D_n$  est une constante dépendante de  $n$ .

En remplaçant les opérateurs par leurs expressions et en tenant compte des relations de commutation, l'équation précédente peut se mettre sous la suivante :

$$C(\xi) = - \sum_{k=2}^4 \beta_k(\xi) \frac{d^{k-2}}{d\xi^{k-2}}, \quad (4.28)$$

où les fonction  $\beta_k(\xi)$ , ( $k = 2, 3, 4$ ), sont données par :

$$\beta_4(\xi) = c_{++}\xi^4 + 2c_{+0}\xi^3 + c_{00}\xi^2 + 2c_{0-}\xi + c_{--}, \quad (4.29)$$

$$\beta_3(\xi) = \frac{1-n}{2} \frac{d}{d\xi} \beta_4(\xi) + \Delta_2(\xi), \quad (4.30)$$

$$\beta_2(\xi) = \frac{n(n-1)}{12} \frac{d^2}{d\xi^2} \beta_4(\xi) - \frac{n}{2} \frac{d}{d\xi} \Delta_2(\xi) + \frac{n(n+2)}{12} c_{00} + D_n. \quad (4.31)$$

avec  $\Delta_2(\xi) = c_+ \xi^2 + c_0 \xi + c_-$ .

On remarque que  $C$  ne contient pas le coefficient  $c_{+-}$ , ceci est justifié, car il est contraint de commuter avec tous les opérateurs de son algèbre, i.e.

$$[C, J_{(0,\pm)}] = 0 \quad (4.32)$$

Suite aux données théorique déduites dans les deux premières parties, nous essayons de combiner les deux approches afin de déterminer les coefficients  $c_i$  et  $c_{ij}$  qui joueront un rôle très important dans la génération des potentiels.

Pour ce faire, on fait l'égalité entre l'équation de Schrödinger effective et celle associé à l'opérateur de Casimir, telle que,

$$\left[ -\epsilon^2 \frac{\xi(x)^2}{Z^2(x)} \frac{d^2}{d\xi^2} + \epsilon \xi(x) \frac{d}{d\xi} - E_n \right] \phi_n(x, \epsilon) = - \sum_{k=2}^4 \beta_k(\xi) \frac{d^{k-2}}{d\xi^{k-2}} \phi_n(x, \epsilon), \quad (4.33)$$

et en comparant termes-à-termes, on peut déduire les équations résultantes suivantes :

$$\beta_4(\xi) = c_{++}\xi^4 + 2c_{+0}\xi^3 + c_{00}\xi^2 + 2c_{0-}\xi + c_{--} = \epsilon^2 \frac{\xi^2(x)}{Z^2(x)}, \quad (4.34)$$

$$\beta_3(\xi) = \frac{1-n}{2} \frac{d}{d\xi} \beta_4(\xi) + \Delta_2(\xi) = -\epsilon \xi(x), \quad (4.35)$$

$$\beta_2(\xi) = \frac{n(n-1)}{12} \frac{d^2}{d\xi^2} \beta_4(\xi) - \frac{n}{2} \frac{d}{d\xi} \Delta_2(\xi) + \frac{n(n+2)}{12} c_{00} + D_n = E_n. \quad (4.36)$$

L'équation (4.34) peut se mettre sous une autre forme dans le but d'exprimer la fonction auxiliaire génératrice  $\xi(x)$  en fonction d'une autre fonction dite *fonction de masse auxiliaire* notée  $\mu(x)$ ,

$$\mu(x) \equiv \int^x \frac{dx'}{U(x')} = \pm \int^{\xi(x)} \frac{d\theta(x)}{\sqrt{c_{++}\theta^4(x) + 2c_{+0}\theta^3(x) + c_{00}\theta^2(x) + 2c_{0-}\theta(x) + c_{--}}}. \quad (4.37)$$

Revenons à notre objectif de cette partie et qui consiste à déterminer les différentes valeurs et expressions des coefficients  $c_i$  et les  $c_{ij}$ .

Les équations (4.35) et (4.36) permettent de déduire les expressions suivantes :

$$c_{++} = 0, \quad c_{+} = 0, \quad c_{-} = (n-1)c_{0-}, \quad \epsilon = (n-1)c_{00} - c_0 = \frac{c_{-}}{c_{0-}}c_{00} - c_0, \quad c_{+0} = 0.$$

En remplaçant les différents coefficients par leurs valeurs dans (4.37), l'énergie  $E_n$  s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{n}{6}(n-1)c_{00} - \frac{n}{2}c_0 + \frac{n(n+2)}{12}c_{00} + D_n \\ &= \frac{n}{6}(\epsilon + c_0) - \frac{n}{2}c_0 + \frac{n^2}{12}c_{00} + \frac{c_{00}}{6} + D_n \\ &= \frac{n^2}{12}c_{00} + \frac{\epsilon + c_{00} - 2c_0}{6} + D_n. \end{aligned} \quad (4.38)$$

ainsi, l'équation (4.37), après la substitution des coefficients, devient

$$\mu(x) \equiv \int^x \frac{dx'}{U(x')} = \pm \int^{\xi(x)} \frac{d\theta(x)}{\sqrt{c_{00}\theta^2(x) + 2c_{0-}\theta(x) + c_{--}}}. \quad (4.39)$$

## 4.4 Applications

A présent, on a construit l'équation de Schrödinger associée et l'algèbre correspondante, on a combiné deux approches différentes pour élaborer un modèle mathématique permettant d'obtenir des résultats exactes. Par la suite, nous allons tester la puissance et l'efficacité de notre modèle en procédant à la déduction des différents potentiels quantiques appartenant à la classe des potentiels exactement soluble (E.S.), ainsi que les spectres d'énergie et les fonctions d'onde associés, respectivement  $E_n$  et  $\psi_n$ , sous l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .

Pour ce faire, nous allons partager la tâche en trois étapes; la première consiste à la génération des potentiels, tandis que la deuxième et la troisième sont consacrées à la construction des spectres d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes pour chaque potentiel. A cette fin, nous commençons par résoudre l'intégrale (3.39), i.e.

$$\mu(x) \equiv \int^x \frac{dx'}{U(x')} = \pm \int^{\xi(x)} \frac{d\theta(x)}{\sqrt{c_{00}\theta^2(x) + 2c_{0-}\theta(x) + c_{--}}}, \quad (4.40)$$

directement afin d'exprimer  $\xi(x)$  en terme de  $\mu(x)$  et cela pour les différentes valeurs attribuées aux paramètres libres  $c_{00}$ ,  $c_{0-}$ ,  $c_{--}$ . Cette détermination nous conduit à fixer les quantités  $Z(x)$  (la fonction génératrice),  $W(x)$  (le superpotentiel), et  $V_{eff}$  (le potentiel effectif).

### 1. Oscillateur Harmonique à 1D

L'oscillateur harmonique est le cas le plus simple à déduire, il est obtenu pour le choix suivant des coefficients  $c_{00} = c_{0-} = 0$  et  $c_{--} \neq 0$ . Pour ces valeurs, l'intégrale (4.39) devient

$$\mu(x) \equiv \int^x \frac{dx'}{U(x')} = \pm \int^{\xi(x)} \frac{d\theta(x)}{\sqrt{c_{--}}} \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = \sqrt{c_{--}}\mu(x).$$

D'autre part,  $\xi(x) = \exp\left[\epsilon \int^x \frac{dx'}{Z(x')U(x')}\right]$ , les quantités  $Z(x)$ ,  $W_{eff}$  et  $V_{eff}$  sont maintenant déterminables, en utilisant les deux équations (4.14),(4.15) et (4.16) on trouve les résultats suivants :

$$Z(x) = \frac{\epsilon \xi(x)}{\xi(x)U(x)} = \epsilon \mu(x), \quad (4.41)$$

$$W_{eff} = W(x) + W_\mu(x) = \frac{\epsilon}{2}\mu(x) - \frac{\mu''(x)}{2\mu'^2(x)}, \quad (4.42)$$

$$V_{eff} = V(x) + V_\mu(x) = \frac{\epsilon^2 \mu^2(x)}{4} - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\mu'''(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.43)$$

En posant  $\epsilon = \omega$ , l'équation (4.42) et (4.43) s'écrivent :

$$W_{eff} = \frac{\omega}{2}\mu(x) - \frac{\mu''(x)}{2\mu'^2(x)}, \quad (4.44)$$

$$V_{eff} = \frac{\omega^2 \mu^2(x)}{4} - \frac{\omega}{2} + \frac{\mu'''(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.45)$$

Par conséquent, le potentiel de l'oscillateur harmonique est donné par l'expression suivante :

$$V(x) = \frac{\omega^2 \mu^2(x)}{4} - \frac{\omega}{2}. \quad (4.46)$$

et

$$V_{\mu(x)} = \frac{\mu^{(3)}(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.47)$$

On remarque que le potentiel est décalé par une quantité d'énergie égale à  $-\frac{\omega}{2}$ , cette énergie sera compensée par la suite dans le spectre d'énergie  $E_n$ .

On passe maintenant au spectre d'énergie qui est exprimé sous la forme suivante :  $E_n = \frac{n^2}{4}c_{00} - \frac{n}{2}c_0 + D_n$ . On sait que  $\epsilon = (n-1)c_{00} - c_0$ , et pour le même choix des coefficients précédent,  $c_0 = -\omega$ .

En choisissant  $D_n = \frac{n\omega}{2}$ , le spectre d'énergie est calculé, et il vaut

$$E_n = n\omega \quad (4.48)$$

dû au décalage de  $V(x)$  avec  $-\frac{\epsilon}{2} = -\frac{\omega}{2}$ , et en restaurant la constante de Planck  $\hbar$ , on trouve

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.49)$$

La fonction de l'état fondamental est calculée à partir de l'équation (4.18), elle est exprimée par :

$$\begin{aligned}
 \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{Z(x)}{U(x)} dx - \frac{\epsilon}{2} \int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx \right] \\
 &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int Z(x) d\mu(x) - \frac{\omega}{2} \int \frac{d\mu(x)}{Z(x)} dx \right] \\
 &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{\omega}{2} \int \mu(x) d\mu(x) - \frac{1}{2} \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{\omega}{4} \mu^2(x) - \frac{1}{2} \ln \mu(x) \right] \\
 &\sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \exp \left( -\frac{\omega^2}{4} \mu^2(x) \right).
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

D'après (4.19), le premier état excité est donné par :

$$\psi_1(x) = \psi_0(x) \exp \left[ \epsilon \int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx \right] = \psi_0(x) \xi(x), \tag{4.51}$$

donc il est possible d'écrire  $\psi_1$  en terme de  $\mu(x)$  comme suit

$$\psi_1(x) \sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \mu(x) \exp \left( -\frac{\omega^2}{2} \mu^2(x) \right). \tag{4.52}$$

Il est possible de calculer toutes les fonctions d'onde associées pour chaque niveau d'énergie par l'application successive de l'opérateur  $A^\dagger$  sur l'état fondamental  $\psi_0(x)$ . La forme générale  $\psi_n(x)$  est donnée par :

$$\psi_n(x) \sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \exp \left( -\frac{\omega^2}{4} \mu^2(x) \right) H_n[\mu(x)], \tag{4.53}$$

où  $H_n[\mu(x)]$  désigne le polynôme orthogonal d'Hermite, avec  $n = 0, 1, 2, \dots$ , avec  $H_0[\mu(x)] = 1$  et  $H_1[\mu(x)] = \mu(x)$ .

## 2. Oscillateur Harmonique Radial

Pour l'oscillateur harmonique radial, on choisit nos coefficients de la manière suivante :  $c_{00} = 0$ ,  $c_{0-} \neq 0$  et  $c_{--} \neq 0$ . Commençons par évaluer l'intégrale (4.39)

$$\begin{aligned}
 \mu(x) &\equiv \int^x \frac{dx'}{U(x')} = \pm \int^{\xi(x)} \frac{d\theta(x)}{\sqrt{2c_{0-}\theta(x) + c_{--}}} = \frac{1}{\sqrt{c_{0-}}} \sqrt{2c_{0-}\xi(x) + c_{--}}, \\
 \text{soit} \quad \xi(x) &= \frac{c_{0-}}{2} \mu^2(x) - \frac{c_{--}}{2c_{0-}}.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

En substituant le résultat précédent dans (4.16), et en utilisant (4.14) et (4.15), on trouve les résultats suivants :

$$Z(x) = \frac{\epsilon \xi(x)}{\xi(x)U(x)} = \frac{\epsilon}{2} \mu(x) - \frac{\epsilon c_{--}}{2c_{0-}^2} \frac{1}{\mu(x)} \tag{4.55}$$

$$W(x) = W_{eff}(x) - W_\mu(x) = \frac{\epsilon}{4} \mu(x) - \frac{2 - \frac{\epsilon c_{--}}{c_{0-}^2}}{4\mu(x)}, \tag{4.56}$$

$$V(x) = V_{eff} - V_\mu(x) = \frac{\epsilon^2 \mu^2(x)}{16} + \left( \frac{\epsilon^2 c_{--}^2}{16c_{0-}^4} + \frac{3}{4} - \frac{\epsilon c_{--}}{2c_{0-}^2} \right) \frac{1}{\mu^2(x)} - \frac{\epsilon^2 c_{--}}{8c_{0-}^2}, \quad (4.57)$$

On remarque que le potentiel  $V(x)$  est décalé par une quantité d'énergie égale à  $\frac{\epsilon^2 c_{--}}{8c_{0-}^2}$ , qui sera compensée par le spectre d'énergie  $E_n$ , d'où l'idée de poser  $\epsilon = 2\omega$ , et donc  $c_0 = -\epsilon = -2\omega$  et  $\frac{\epsilon^2 c_{--}}{8c_{0-}^2} = \omega \left( l + \frac{3}{2} \right)$ . Ceci implique que  $\left( \frac{\epsilon^2 c_{--}^2}{16c_{0-}^4} + \frac{3}{4} - \frac{\epsilon c_{--}}{2c_{0-}^2} \right) = l(l+1)$ . Alors,  $V(x)$  et  $W(x)$  s'écrivent de la manière suivante

$$W(x) = \frac{\omega}{2} \mu(x) - \frac{l+1}{\mu(x)}, \quad (4.58)$$

$$V(x) = \frac{\omega^2}{4} \mu^2(x) + \frac{l(l+1)}{\mu^2(x)} - \omega \left( l + \frac{3}{2} \right), \quad (4.59)$$

$$V_{\mu(x)} = \frac{\mu^{(3)}(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.60)$$

Le spectre d'énergie dans ce cas là et pour  $D_n = n\omega$  est donné par :

$$E_n = -\frac{n}{2} c_0 + D_n = 2n\omega \quad (4.61)$$

dû au décalage de  $V(x)$  avec  $\frac{\epsilon^2 c_{--}}{8c_{0-}^2} = \omega \left( l + \frac{3}{2} \right)$ . La même quantité est compensée par le spectre et il est finalement donné par :

$$E_n = \left( 2n + l + \frac{3}{2} \right) \omega \quad (4.62)$$

Après avoir déterminé l'expression du potentiel  $V(x)$  et le spectre d'énergie  $E_n$  associé, on passe à la fonction d'onde correspondante  $\psi_n(x)$ . Commençons par celle de l'état fondamental  $\psi_0(x)$ . Elle est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{Z(x)}{U(x)} dx - \frac{\epsilon}{2} \int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \left( \omega \mu(x) - \frac{2l+3}{\mu(x)} \right) d\mu(x) - \frac{\epsilon}{2} \int \frac{d\mu(x)}{\left( \omega \mu(x) - \frac{2l+3}{\mu(x)} \right)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{4} \mu^2(x) + \frac{2l+3}{2} \ln(\mu(x)) - \frac{\epsilon}{4\omega} \int \frac{2\omega \mu(x) d\mu(x)}{\omega \mu^2(x) - (2l+3)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{4} \mu^2(x) + \frac{2l+3}{2} \ln \mu(x) - \frac{1}{2} \ln(\omega \mu^2(x) - (2l+3)) \right] \\ &\sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \mu^{l+1}(x) \exp \left( -\frac{\omega^2}{4} \mu^2(x) \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

La fonction d'onde générale  $\psi_n(x)$  est donnée en terme de  $\mu(x)$  par :

$$\psi_n(x) \sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \exp \left( -\frac{\omega^2}{4} \mu^2(x) \right) L_n^{\frac{l+1}{2}}[\mu(x)], \quad (4.64)$$

où  $L_n^{\frac{l+1}{2}}$  est le polynôme de Laguerre généralisé (associé) avec  $\frac{l+1}{2} > -1$ .

Dans la suite de ce travail, on utilisera l'identité 2.261 de la référence [15].

Notation :  $R = cx^2 + bx + a$  et  $\Delta = 4ac - b^2$ , alors

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left( \frac{2\sqrt{cR} + 2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \right), & c > 0. \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \left( \frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \right), & [c > 0, \Delta > 0]. \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2cx + b), & [c = 0, \Delta = 0]. \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \left( \frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \right), & [c < 0, \Delta < 0]. \end{aligned}$$

### 3. Morse

Pour ce type du potentiel, nous choisissons nos coefficients de la manière suivante :  $c_{--} \neq 0$ ,  $c_{0-} \neq 0$  et  $c_{00} = 0$ , ce qui nous donne au dénominateur sous la racine carrée un polynôme de deuxième degré en  $\xi$ .

Prenant l'équation  $c_{00}\theta^2 + c_{0-}\theta + c_{--} = 0$ . Pour la résoudre, il suffit de calculer le discriminant  $\Delta = 4ac - b^2$ . On s'intéresse au cas  $\Delta = 0$ , ceci implique que l'équation précédente accepte une solution double donnée par  $\theta_0 = -\frac{c_{0-}}{c_{00}}$ . Du coup, l'intégrale (4.39) devient

$$\begin{aligned} \mu(x) &\equiv \int^x \frac{dx'}{U(x')} = \pm \int^{\xi(x)} \frac{d\theta(x)}{\sqrt{c_{00}(\theta(x) + \frac{c_{0-}}{c_{00}})^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{c_{00}}} \int^{\xi(x)} \frac{2c_{00}d\theta}{2c_{00}\theta(x) + 2c_{0-}}, \\ \Rightarrow \quad \xi(x) &= \frac{1}{2c_{00}} \exp(\pm \sqrt{c_{00}}\mu(x)) - 2c_{0-}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

en remplaçant le résultat précédent dans (4.14) et en utilisant les expressions (4.15) et (4.16), on aboutit aux expressions suivantes :

$$Z(x) = \frac{\epsilon}{\sqrt{c_{00}}} - 4\epsilon c_{0-} \sqrt{c_{00}} \exp\left(-\sqrt{c_{00}}\mu(x)\right), \quad (4.66)$$

$$W(x) = W_{eff}(x) - W_{\mu}(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon}{\sqrt{c_{00}}} + \sqrt{c_{00}} - 4\epsilon c_{0-} \exp\left(-\sqrt{c_{00}}\mu(x)\right) \right], \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= 4\epsilon^2 c_{0-}^2 c_{00} \exp(-2\sqrt{c_{00}}\mu(x)) \\ &+ \left( -\epsilon^2 c_{0-} - 3\epsilon c_{0-} c_{00} \right) \exp\left(-\sqrt{c_{00}}\mu(x)\right) + \frac{(\epsilon + c_{00})^2}{4c_{00}}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$V_{\mu(x)} = \frac{\mu^{(3)}(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.69)$$

On remarque que le potentiel est décalé par une quantité d'énergie égale à  $\frac{(\epsilon + c_{00})^2}{4c_{00}}$ , qui sera ajouté par la suite au spectre d'énergie  $E_n$ .

Pour déterminer les valeurs exactes de nos coefficients, on pose d'abord  $c_{00} = \alpha^2$  et  $\left(\frac{\epsilon}{\alpha} + \alpha\right) = 2A$ , ceci implique que  $\epsilon = 2A\alpha - \alpha^2$ .

D'autre part, on a  $\epsilon = (n-1)c_{00} - c_0$  ceci implique  $c_0 = n\alpha^2 - 2A\alpha$ .

On peut aussi poser le facteur de l'exponentielle élevée au carré comme une seule constante qu'on note par B, tel que,  $B = \pm 2\epsilon c_{0-} \sqrt{c_{00}}$ .

Le spectre d'énergie est calculé à partir de l'expression (4.38)

$$E_n = \frac{n\alpha^2}{4} - \frac{n}{2}(n\alpha^2 - 2A\alpha) + D_n = -\frac{n\alpha^2}{4} - An\alpha + D_n. \quad (4.70)$$

d'où  $D_n = \frac{3}{4}(12An\alpha - n^2\alpha^2)$ . dû au décalage de  $V(x)$  par la quantité  $\frac{(\epsilon+c_{00})^2}{4c_{00}} = A^2$ , le spectre d'énergie final est donné par :

$$E_n = -n^2\alpha^2 + 2An\alpha - A^2 = -(A - n\alpha)^2. \quad (4.71)$$

L'expression du potentiel de Morse est donnée enfin par

$$V(x) = B^2 \exp(-2\alpha\mu(x)) - B(2A + \alpha) \exp(-\alpha\mu(x)). \quad (4.72)$$

Passons maintenant à la fonction d'onde générale  $\psi_n(x)$  associée à ce type du potentiel. Pour la déterminée, on commence par celle de l'état fondamental  $\psi_0(x)$  définie par :

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{Z(x)}{U(x)} dx - \frac{\epsilon}{2} \int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \left( \frac{\epsilon}{\alpha} + B \exp(-\alpha\mu(x)) \right) d\mu(x) - \frac{\epsilon}{2} \int \frac{\alpha d\mu(x)}{(\epsilon - 2B\alpha \exp(-\alpha\mu(x)))} \right] \\ &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{\epsilon}{2\alpha} \mu(x) \right] \exp \left[ -\frac{B}{\alpha} \exp(-\alpha\mu(x)) \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{\alpha d\mu(x)}{1 - \frac{2B\alpha \exp(-\alpha\mu(x))}{\epsilon}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{B}{\alpha} \exp(-\alpha\mu(x)) \right] \exp \left( -\frac{\epsilon\mu(x)}{2\alpha} \right) \exp \left( -\frac{\ln(Z(x))}{2} \right) \\ &\sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \exp \left( -\frac{B}{\alpha} \exp(-\alpha\mu(x)) \right) \exp \left( -\frac{\epsilon\mu(x)}{2\alpha} \right), \end{aligned} \quad (4.73)$$

la fonction d'onde générale correspondante est calculée et elle donnée par :

$$\psi_n(x) = \mu(x)^{\frac{(\nu-n)}{2}} \exp \left( -\frac{\mu(x)}{2} \right) L_n^{\frac{(2\nu-2n)}{2}} [\mu(x)]. \quad (4.74)$$

#### 4. Scarf Hyperbolique

Comme le cas précédent, nous gardons nos coefficients non nuls. Nous allons résoudre l'équation du deuxième degré en  $\xi$  avec  $\Delta = 4ac - b^2 > 0$ , ceci implique l'existence de deux solutions distinctes  $\xi_{\pm} = \frac{-2c_{0-} \pm \sqrt{\Delta}}{2c_{00}}$ . Alors, l'intégrale (4.39) s'écrit

$$\begin{aligned} \mu(x) \equiv \int^x \frac{dx'}{U(x')} &= \pm \int^{\xi(x)} \frac{d\theta(x)}{\sqrt{c_{00} \left( \theta(x) + \frac{c_{0-}}{c_{00}} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2c_{00}} \right) \left( \theta(x) + \frac{c_{0-}}{c_{00}} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2c_{00}} \right)}}, \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{c_{00}}} \int^{\xi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta}}{2c_{00}} \left( \frac{2c_{00}\xi(x)}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2c_{0-}}{\sqrt{\Delta}} - 1 \right) \left( \frac{2c_{00}\xi(x)}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2c_{0-}}{\sqrt{\Delta}} + 1 \right)}}, \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{c_{00}}} \arcsin \left( \frac{2c_{00}\xi(x) + 2c_{0-}}{\sqrt{\Delta}} \right) \\ \Rightarrow \quad \xi(x) &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2c_{00}} \sinh(\sqrt{c_{00}}\mu(x)) - \frac{c_{0-}}{c_{00}}. \end{aligned} \quad (4.75)$$



En posant  $-\frac{c_{0-}}{c_{00}} = b$ ,  $\sqrt{c_{00}} = \alpha$  et  $\frac{\sqrt{\Delta}}{2c_{00}} = a$ ,  $\xi(x)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\xi(x) = b + a \sinh(\alpha\mu(x)). \quad (4.76)$$

En substituant  $\xi(x)$  dans l'équation (4.14), et en utilisant encore une fois les équations (4.15) et (4.16), on trouve les résultats ci-dessous

$$Z(x) = \frac{\epsilon}{a\alpha \cosh(\alpha\mu(x))} (b + a \sinh(\alpha\mu(x))), \quad (4.77)$$

$$W(x) = W_{eff}(x) - W_{\mu}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{b\epsilon}{a\alpha \cosh(\alpha\mu(x))} + \frac{a(\alpha^2 + \epsilon) \tanh(\alpha\mu(x))}{a\alpha} \right), \quad (4.78)$$

$$V(x) = \frac{1}{8} \left[ \frac{2a^2(\alpha^2 + \epsilon)^2 - 2[a^2(\alpha^2 + \epsilon)(3\alpha^2 + \epsilon) - b^2\epsilon^2]}{a^2\alpha^2 \cosh^2(\alpha\mu(x))} + \frac{4b\epsilon}{a\alpha^2 \cosh(\alpha\mu(x))} (2\alpha^2 + \epsilon) \tanh(\alpha\mu(x)) \right]. \quad (4.79)$$

$$V_{\mu(x)} = \frac{\mu^{(3)}(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.80)$$

On voit bien que le potentiel est décalé avec une quantité d'énergie égale à  $\left(\frac{\alpha^2 + \epsilon}{2\alpha}\right)^2$ , d'où l'idée de poser  $\left(\frac{\alpha^2 + \epsilon}{2\alpha}\right)^2 = A$ . D'autre part, il est commode de poser  $\frac{b\epsilon}{2a\alpha} = B$ . Un calcul simple nous donne l'expression suivante :

$$V(x) = \frac{B^2 - A(A + \alpha)}{\cosh^2(\alpha\mu(x))} + B(2A + \alpha) \frac{\tanh(\alpha\mu(x))}{\cosh(\alpha\mu(x))}. \quad (4.81)$$

Les coefficients  $c_{00}$ ,  $\epsilon$  et  $c_0$  sont donnés par :

$$c_{00} = \alpha^2, \quad \epsilon = 2A\alpha - \alpha^2, \quad \text{et} \quad c_0 = n\alpha^2 - 2A\alpha.$$

Il est possible maintenant de déterminer le spectre d'énergie en remplaçant les coefficients déjà trouvés dans l'équation (4.38)

$$E_n = -\frac{n^2\alpha^2}{4} + nA\alpha + D_n, \quad (4.82)$$

d'où  $D_n = -\frac{3n^2\alpha^2}{4} + nA\alpha$ .

Dû au décalage de  $V(x)$  par la quantité d'énergie  $A^2$ , le spectre d'énergie total est donné finalement par

$$E_n = -A^2 - n^2\alpha^2 + 2nA\alpha = -(A - n\alpha)^2 \quad (4.83)$$

On passe maintenant à la fonction d'onde de l'état fondamental  $\psi_0(x)$ . Pour ce faire, on donne d'abord l'expression de la fonction génératrice  $Z(x)$ , telle que

$$Z(x) = \frac{2B}{\cosh(\alpha\mu(x))} + \frac{\epsilon}{\alpha} \tanh(\alpha\mu(x)) \quad (4.84)$$

Alors, la fonction d'onde  $\psi_0(x)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{Z(x)}{U(x)} dx - \frac{\epsilon}{2} \int \frac{1}{Z(x)U(x)} dx \right] \\
 &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{2Bd\mu(x)}{\cosh(\alpha\mu(x))} - \frac{\epsilon}{2\alpha} \int \tanh(\alpha\mu(x))d\mu(x) - \frac{\epsilon}{2\alpha} \int \frac{\alpha \cosh(\alpha\mu(x))d\mu(x)}{2B\alpha + \epsilon \sinh(\alpha\mu(x))} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{B}{\alpha} \arctan[\sinh(\alpha\mu(x))] + \frac{\alpha^2 - 2\alpha A}{2\alpha^2} \ln[\cosh(\alpha\mu(x))] - \frac{1}{2} \ln[2B\alpha + \epsilon \sinh(\alpha\mu(x))] \right] \\
 &= \sqrt{\frac{Z(x)}{U(x)}} \exp \left[ -\frac{B}{\alpha} \arctan[\sinh(\alpha\mu(x))] - \frac{A}{\alpha} \ln[\cosh(\alpha\mu(x))] - \frac{1}{2} \ln[Z(x)] \right] \\
 &\sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \cosh^{-\frac{A}{\alpha}}(\alpha\mu(x)) \exp \left[ -\frac{B}{\alpha} \arctan[\sinh(\alpha\mu(x))] \right]. \tag{4.85}
 \end{aligned}$$

### 5. Scarf Trigonométrique

Ce potentiel est obtenue pour choix de coefficients suivant :  $c_{00} < 0$ ,  $c_{0-} \neq 0$  et  $c_{--} \neq 0$  et on s'intéresse au cas  $\Delta < 0$ . En calculant l'intégrale (4.39), on trouve le résultat suivant :

$$\mu(x) = \frac{-1}{\sqrt{-c_{00}}} \arcsin \left( \frac{2c_{00}\xi(x) + 2c_{0-}}{\sqrt{-\Delta}} \right), \tag{4.86}$$

et en appliquant la fonction réciproque, on obtient l'expression de  $\xi(x)$ ,

$$\xi(x) = \frac{-c_{0-}}{c_{00}} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2c_{00}} \sin[\sqrt{-c_{00}}\mu]. \tag{4.87}$$

En remplaçant  $\xi(x)$  dans l'équation (4.14), et en calculant les équations (4.15) et (4.16), on trouve les expressions ci-dessous :

$$Z(x) = \frac{\epsilon}{a\alpha \cos \alpha\mu(x)} [b + a \sin \alpha\mu(x)], \tag{4.88}$$

$$W(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{b\epsilon}{a\alpha \cos \alpha\mu(x)} + \frac{(\epsilon - \alpha^2)}{\alpha} \tan[\alpha\mu(x)] \right], \tag{4.89}$$

$$V(x) = \frac{(A^2 + B^2 - A\alpha)}{\cos^2[\alpha\mu(x)]} + \frac{B(2A - \alpha) \tan[\alpha\mu(x)]}{\cos[\alpha\mu(x)]} - A^2, \tag{4.90}$$

$$V_{\mu(x)} = \frac{\mu^{(3)}(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \tag{4.91}$$

$$\text{avec} \quad A = -\frac{(\epsilon - \alpha^2)}{2\alpha}, \quad \text{et} \quad B = \frac{\epsilon c_{0-}}{a\alpha},$$

dans ce cas, les coefficients mis en jeu sont calculés et ils sont donnés par :

$$c_{00} = -\alpha^2, \quad \epsilon = \alpha^2 + 2A\alpha, \quad c_0 = n\alpha^2 - 2A\alpha.$$

Le spectre d'énergie associé est donné par l'expression suivante

$$E_n = (A - n\alpha)^2, \quad \text{avec} \quad D_n = \frac{3}{4} (n\alpha)^2 - 3n\alpha A.$$

Enfin, la fonction d'onde de l'état fondamentale s'exprime par

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \tan^{-\frac{B}{\alpha}} \left[ \frac{\alpha\mu(x)}{2} \right] \cos^{\frac{A}{\alpha}} [\alpha\mu(x)]. \tag{4.92}$$

### 6. *Eckart Trigonométrique*

Ce potentiel est été généré pour le choix des coefficient suivant :  $c_{00} \neq 0$ ,  $c_{--} \neq 0$  et  $c_{0-} = 0$ . Les différents résultats associés à ce potentiel sont donnés ci-dessous.

$$\xi(x) = \frac{c_{--} \cos[\alpha\mu(x)] + c_{--}}{c_{00}}, \quad (4.93)$$

$$Z(x) = -\frac{\epsilon(1 + \cos[\alpha\mu(x)])}{\alpha \sin[\alpha\mu(x)]}, \quad (4.94)$$

$$W(x) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{(\epsilon + (\epsilon - \alpha^2) \cos[\alpha\mu(x)])}{\alpha \sin[\alpha\mu(x)]} \right], \quad (4.95)$$

$$V(x) = \frac{(A^2 + B^2 - A\alpha)}{\sin^2[\alpha\mu(x)]} + B(B - \alpha) \frac{\cot[\alpha\mu(x)]}{\sin[\alpha\mu(x)]} - A^2, \quad (4.96)$$

$$V_{\mu(x)} = \frac{\mu^{(3)}(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.97)$$

avec

$$A = \frac{(\alpha^2 - \epsilon)}{2\alpha}, \quad \text{et} \quad B = \frac{\epsilon}{2\alpha},$$

on donne aussi les valeurs ou expression de chaque coefficient impliqué dans notre calcul, à savoir :

$$c_{00} = -\alpha^2, \quad \epsilon = \alpha^2 - 2A\alpha, \quad c_0 = n\alpha^2 + 2A\alpha - 2\alpha^2.$$

Le spectre d'énergie est donné par :

$$E_n = (A + n\alpha)^2 - (A + B)^2, \quad \text{avec} \quad D_n = \frac{3}{4}(n\alpha)^2 - 3n\alpha A - (A + B)^2.$$

Enfin, nous donnons la fonction d'onde de l'état fondamentale associée à ce potentiel, elle est écrite sous la forme suivante :

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \tan^B \left[ \frac{\alpha\mu(x)}{2} \right] \sin^{-\frac{A}{\alpha}}[\alpha\mu(x)]. \quad (4.98)$$

### 7. *Rosen-Morse hyperbolique*

Ce potentiel est déduit pour le même choix des coefficients que le cas précédent, on donne alors les résultats correspondants

$$\xi(x) = \frac{c_{--} \cosh[\alpha\mu(x)] + c_{--}}{c_{00}}, \quad (4.99)$$

$$Z(x) = -\frac{\epsilon(1 + \cosh[\alpha\mu(x)])}{\alpha \sinh[\alpha\mu(x)]}, \quad (4.100)$$

$$W(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\epsilon + (\epsilon + \alpha^2) \cosh[\alpha\mu(x)])}{\alpha \sinh[\alpha\mu(x)]} \right], \quad (4.101)$$

$$V(x) = \frac{(A^2 + B^2 + A\alpha)}{\sinh^2[\alpha\mu(x)]} - B(2A + \alpha) \frac{\coth[\alpha\mu(x)]}{\sinh[\alpha\mu(x)]} + A^2, \quad (4.102)$$

$$V_{\mu(x)} = \frac{\mu^{(3)}(x)}{2\mu'^3(x)} - \frac{5}{4} \left( \frac{\mu''(x)}{\mu'^2(x)} \right)^2. \quad (4.103)$$

avec

$$A = \frac{(\alpha^2 + \epsilon)}{2\alpha}, \quad \text{et} \quad B = -\frac{\epsilon}{2\alpha},$$

On donne aussi les valeurs ou expression de chaque coefficient impliqué dans notre calcul, à savoir :

$$c_{00} = -\alpha^2, \quad \epsilon = 2A\alpha - \alpha^2, \quad c_0 = n\alpha^2 - 2A\alpha,$$

Le spectre d'énergie est donné par :

$$E_n = -(A + n\alpha)^2 \quad \text{avec} \quad D_n = -\frac{3}{4}(n\alpha)^2 - 3n\alpha A.$$

Enfin, la fonction d'onde de l'état fondamental associée à ce potentiel s'écrit sous la forme suivante

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{\frac{1}{U(x)}} \tanh^{\frac{B}{\alpha}} \left[ \frac{\alpha\mu(x)}{2} \right] \sinh^{-\frac{A}{\alpha}} [\alpha\mu(x)]. \quad (4.104)$$

# Conclusion

Dans ce mémoire de master, on a montré l'efficacité de l'approche supersymétrique pour l'étude des systèmes muni d'une masse dépendante de la position. Nous avons montré que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , combinée à la supersymétrie de la mécanique quantique, s'avère être une excellente algèbre génératrice des potentiels quantiques exactement solubles.

En guise d'application, on a présenté notre méthode et les différentes étapes de la génération des potentiels quantiques en se fondant sur l'ensemble des données introduites dans nos développement analytiques proposé dans le chapitre 4. Concernant les potentiels de l'oscillateur harmonique, de l'oscillateur harmonique isotropique et de Morse, l'étude a été effectuée en détail. Nous avons explicité les expressions de  $\xi(x)$ ,  $Z(x)$ ,  $W(x)$ ,  $V(x)$ , ainsi que les différents paramètres permettant de fixer l'allure du spectre d'énergie et de la fonction d'onde (fondamentale et totale). D'autres potentiels ont été déduits et sont présentés d'une manière directe sans présenter le détail du calcul.

La méthode a bien montré sa puissance et sa rigueur en donnant des résultats exacts, malgré quelques difficultés rencontrés, notamment lors de la détermination de quelques paramètres afin de fixer l'allure des grandeurs physiques associées au potentiel déduit.

Parmi les questionnements qu'on se pose à propos de notre approche est :

1. de savoir s'il est possible de trouver un formalisme mathématique ayant l'aptitude de déterminer les différents paramètres intervenant dans nos calcul et qui permettra de rendre cette méthode parfaite, et
2. de savoir si l'algèbre de Lie utilisée dans notre mémoire est apte à générer des potentiels quasi-exactement solubles.

# Bibliographie

- [1] A. Gangopadhaya, J. Mallow and C. Rasinariu, *Supersymmetric quantum mechanics*, 2nd ed, (2017).
- [2] S. A. Yahiaoui, M. Bentaiba, *J. Phys. A : Math. Theor.* **45** (2012) 44034 (12pp); *J. Phys. A : Math. Theor.* **58** (2017) 063503; *J. Phys. A : Math. Theor.* **58** (2017) 063507; *Int. J. Theor. Phys.* **48** (2009)315.
- [3] O. von Roos, *Phy. Rev. B* **27** (1983) 12.
- [4] K.L. Kuhn and T.L. Li, *Phy. Rev. B* **47** (1993) 19.
- [5] T. Gora and F. Williams, *Phy.Rev.* **177** (1969) 3.
- [6] R. Koc and S. Sayin, *J.Phys. A :Math. Theor.* **43** (2010) 455203.
- [7] S. Cruz y Cruz, J. Negro, and L.M. Nieto, *J.Pyhs. Conf. Ser.* **128** (2008) 012053.
- [8] H. Nicollai, *J.Phys. A :Math. Gen.* **9** (1976) 1497 .
- [9] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **188** (1981) 513.
- [10] E. Schrödinger, Proc.Roy.Irish.Acad. **46** A,(1941) 183.
- [11] L. Gendenshtein, *JEPT. lett.* **38** (1983) 356.
- [12] A. de souza Dutra, *J.Phys. A :Math. Gen.* **39** (2006) 203-208.
- [13] R. Koc, M. Koca and G. Sahinoglu, *Eur. Phys. J. B* **48**(2005) 391-423.
- [14] R. Khordad, *Physica B* **406** (2011) 3911-3916.
- [15] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 7th ed (2007).Arxiv : Math-ph/1902.09095 (2019) **v1**.
- [16] F. Iachello, *"Lie Algebras and Applications"*, Springer, Berlin (2006).
- [17] A.O. Barut, R. Raczka, *"Theory of Groups Representation and Applications"*, PWN, Warsaw (1977).
- [18] A.O. Barut, *"Dynamical Group Generalized Symmetries in Quantum Mechanics"*, University of Canterbury, Christchurch, NewZealand (1972).
- [19] F. Cooper, B, Fredman, *Ann. Phys.* **146** (1983) 262.
- [20] L. Infeld, T.E. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23** (1951) 21.
- [21] G.A. Natanzon, *Vestnik Leningrad Univ.* **10** (1971) 22 ;  
G.A. Natanzon, *Teor. Mat. Fiz.* **38** (1979) 146.
- [22] J. Ginocchio, *Ann. Phys.* **152** (1984) 203 ;  
J. Ginocchio, *Ann. Phys.* **159** (1985) 467.
- [23] G. Faraut *groupe st Algèbre de Lie. un cours d'initiation.* (voir : chap. 8, pp. 87).