



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Laboratoire d'étude et de recherche en technologie industrielle

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master en
Fabrication mécanique et productique

Titre

**DETERMINATION DES CONTRAINTES ET DES
DEPLACEMENTS DANS UNE PLAQUE EN
FLEXION PAR ELEMENTS FINIS**

Proposé et encadré par :

Dr. KIRAD Abdelkader

Réalisé par :

Mr. SIDI ALI MEBAREK Mustapha.

Mr. BELKACEM Mohamed.

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Tous d'abord, nous tenons à remercier Dieu clément et Miséricordieux de nous avoir données la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Nous remercions profondément l'encadreuse du mémoire Dr.Kirad et les membres de jury qui nous font l'honneur de présider et d'examiner ce modeste travail.

Nous sommes reconnaissantes à l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation avec beaucoup de dévouement et de compétence en n'oubliant jamais les personnes qui ont participé de près ou de loin à ce modeste travail.

Sans oublier en dernier, nos remerciements à tous nos familles nos amis pour leur aide, patiences leur compréhensions et leur encouragement.

Dédicace 01

*Avant tout je remercie Allah qui nous a aidé à élaborer ce modeste travail
que je dédie :*

A ma chère et tendre mère

*A celle qui a tant souffert sans me faire souffrir qu'elle trouve dans ce
mémoire le témoignage de ma reconnaissance de son affection pour les
sacrifices, l'extrême amour et de bonté qu'elle m'a offerts.*

Et particulièrement à mon père

*A qui je dois ma réussite et tout le respect, qu'il trouve ici l'expression de
mon affection et une récompense des sacrifices consentis pour moi.*

À mon cher chikh (Askri Mustapha)

*Qui était mon soutien dans cette vie et que je considère être mon père
J'espère que ces mots sont l'expression de ma gratitude pour ce que j'ai fait
pour moi*

A ma femme et à toute ma famille

A mon binôme mohamed et tout mes amis de l'université

*Ames amis sidali saadi, mounir djezar, riadh lalaoui et
mounir moumene*

A tous ceux que J'aime et qui m'aiment et qui me sont très chers

Sidi ali mebarek

Mustapha

Dédicace 02

*Avant tout je remercie Allah qui nous a aidé à élaborer ce modeste travail
que je dédie :*

A ma chère et tendre mère

*A celle qui a tant souffert sans me faire souffrir qu'elle trouve dans ce
mémoire le témoignage de ma reconnaissance de son affection pour les
sacrifices, l'extrême amour et de bonté qu'elle m'a offerts.*

Et particulièrement à mon père

*A qui je dois ma réussite et tout le respect, qu'il trouve ici l'expression de
mon affection et une récompense des sacrifices consentis pour moi.*

A ma sœur et son marié khalile

A toute ma famille

A mon binôme mustapha et tout mes amis de l'université

Ames amis sidali lameche , salah , oubyi , et chouaib

A tous ceux que J'aime et qui m'aiment et qui me sont très chers

Belkacem

Mohamed

RESUME

L'étude du comportement des plaques est un sujet très important non seulement dans le domaine de génie civil mais aussi dans le domaine de mécanique, aéronautique, biomécanique etc.... L'étude des plaques occupe une place très importante dans la recherche scientifique.

Le travail présenté consiste à vérifier l'équilibre statique, d'autre part la recherche des valeurs des contraintes et déplacements subit un corps donné soumise à une force extérieure perpendiculaire. On détermine la distribution de la contrainte afin de localiser la contrainte maximale.

Avec sa valeur pour ne pas avoir une rupture causée par ces efforts.

ABSTRACT

The study of plate behavior is a very important subject not only in the field of civil engineering, but also in the field of mechanics, aeronautics, biomechanics, etc ...

The study of the plates occupies a very important place in the research scientist.

The work presented consists in checking the static equilibrium, on the other hand the search for the values of the stresses and displacements underwent a given body subjected to a perpendicular external force. The distribution of the constraint at the end of the location of the maximum stress is determined.

With its value for not having a break caused by these efforts.

الخلاصة

إن دراسة سلوك الصفائح موضوع ذو أهمية ليس في مجال الهندسة المدنية فقط بل حتى في مجال الهندسة الميكانيكية وعلوم الطيران والبيوميكانيك... الخ فدراسة الصفائح يشغل فضاء واسعاً في مجال البحث العلمي. تتناول هذه المذكرة التحقق من التوازن الثابت والبحث عن قيم الاجتهادات والانتقالات لجسم يخضع لقوى خارجية عمودية وبالتالي تحديد توزيع هذه القيم وفي النهاية تحديد الحد الأقصى للإجهاد.

SOMMAIRE

Résumé
Remerciements
Liste des figures
Notations
Sommaire
Introduction générale

CHAPITRE I

Généralité sur les plaques et éléments fini

I.1 Introduction
I.2 type d'éléments finis
I.3 Solution par éléments finis des problèmes physique
I.4 Définition des plaques
I.5 Différents types de plaques
I.6 Attributs d'un élément fini

CHAPITRE II

Flexion des plaques

II.1 Introduction
II.2 hypothèses fondamentales
II.3 définition et notations générales
II.4 élément basé sur la théorie de Kirchhoff
II.5 matrice de rigidité de flexion basé sur la théorie de Kirchhoff

CHAPITRE III

APPLICATION PAR ANSYS ET RESULTAT

III.1 Introduction
III.2 Préprocesseur
III.3 Solution processor
III.4 Support étudiant

Conclusion
Bibliographie

Liste des figure

1) Figure 1.1: Processus de l'analyse par éléments finis.....	3
2) Figure 2.1: plaque en 3D.....	6
3) Figure 2.2 : variation des contraintes suivant l'axe OZ.....	7
4) Figure 2.3 : Notation d'une plaque.....	9
5) Figure 2.4: Eléments de plaque en flexion.....	13
6) Figure 2.5 : Repère cartésien.....	14
7) Figure 2.6: Repère adimensionnel.....	14
8) Figure 3.1: Support étudier.....	31
9) Figure 3.2: variation de la contraintes suivant l'axe x-x.....	59
10) Figure 3.3: variation de la contraintes suivant l'axe y-y.....	60
11) Figure 3.4: la résultant des contraintes.....	60

Notations

$\{\mathcal{E}\}$:	vecteur de déformation .
$\{\sigma\}$:	vecteur de contraintes .
$\{q\}$:	vecteur de déplacement .
$\{\}^t$:	Transposé d'un vecteur
$[K]$:	Matrice de rigidité .
K_{ij} :	Coefficients de la matrice de rigidité .
$[]^t$:	Transposé d'un matrice .
∂ :	Dérivée partielle .
δ :	Symbole de Kronecker .
E :	Module de « Young »
ν :	Coefficient de poisson

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul des structures complexes nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, et prenant en compte les spécifications de ces matériaux-structures. Du point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification des structures complexes.

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique permettant d'obtenir des solutions approximatives à une large variété des sciences de l'ingénieur.

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

La MEF avec l'apparition des ordinateurs, est devenue pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin et Topp, pour calculer des parties de structure d'un avion, ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des éléments finis.

Les applications de la méthode des éléments finis se scindent selon la nature du problème à résoudre en trois catégories. Dans la première catégorie, on y trouve le problème d'équilibre qui s'inscrit dans le domaine de la mécanique des solides, ou on a besoin de connaître les déplacements, les déformations et les contraintes pour un chargement mécanique ou thermique donné, dont on trouve la majorité des applications de la MEF. Dans la deuxième catégorie, on retrouve les problèmes des valeurs propres, ceux-ci, sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences naturelles et les modes de vibrations des solides et des fluides. Quant à la troisième catégorie, le facteur temps est intégré aux problèmes des deux premières catégories. Les domaines d'application de la MEF s'étendent à toutes les disciplines de l'ingénieur, mais reste que les ingénieurs en génie civil, mécanique et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode.

Parmi certaines applications de la méthode des éléments finis, on retrouve la modélisation des plaques ; sa géométrie, les conditions aux limites (appuyée ou encastree), l'épaisseur (mince ou épaisse), le matériau utilisé (homogène ou isotrope), tous ces paramètres devraient être bien connus au préalable et leurs prises en considération dans la conception du programme d'éléments finis est indispensable.

CHAPITRE I

Généralités sur les plaques et éléments finis

I.1. Introduction

la technique de calcul par éléments finis est actuellement très largement répandue dans l'analyse de l'ingénierie, et nous pouvons nous attendre à cette utilisation sans cesse manière significative dans l'avenir. Les procédures de calcul sont utilisées intensivement dans l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : nucléaire, mécanique, génie civil, génie maritime, etc....

la méthode des éléments finis dans l'engineering a été initialement développée sur une base physique pour l'analyse des problèmes dans la mécanique structurale. Cependant, il a été bientôt reconnu que la technique pourrait être également bien appliquée à la solution de beaucoup d'autres classes des problèmes. l'objectif de ce polycopié est de présenter des procédures des éléments finis dans le contexte des structures.

L'élaboration de la méthode des éléments finis (en abrégé M.E.F) pour la solution des problèmes pratiques technologiques a commencé par l'arrivée du calculateur numérique. Elle met en œuvre les connaissances en mécanique des structures (élasticité, plasticité, résistance des matériaux, ect...), l'analyse numérique (résolution des systèmes; méthodes d'approximation, etc..) et l'informatiques.

La M.E.F consiste à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts. D'une part, le domaine est basé sur la subdivision du domaine continu en sous-domaine de forme géométrique simple que l'on appellera « éléments finis » interconnectés en des points appelés « nœuds », d'autre part, les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide de calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme les méthodes des résidus pondérés. on cite comme exemple des sous-domaines, une approximation d'une surface d'un cercle subdivisé en plusieurs triangles.

I.2. Type d'éléments finis :

Les différents types d'éléments finis sont classés selon leur forme géométrique . on distingue :

-les éléments unidimensionnels : barres, poutres, rectiligne...

-les éléments bidimensionnels : élasticité plan (contrainte plane, déformation plane), plaque de flexion, coque courbes de forme triangulaire ou quadrangulaire,

-les éléments tridimensionnels : éléments de volume, coque épaisses

-les éléments axisymétrique : qui consiste une classe bien particulière : tores a section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques.

I.3.Solution par éléments finis des problèmes physique :

La méthode des éléments finis est employée pour résoudre des problèmes physique en engineering et de conception. Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées des ensembles aux géométries diverses : barres, poutres, plaque, coques, etc....

Le schéma 1 récapitule le processus de l'analyse par la M.E.F. le problème physique implique typiquement une structure réelle ou un composant structural soumis a certaines charges. L'idéalisation du problème physique a un modèle mathématique exige certaines prétentions qui mènent a un ensemble d'équation régissant le modèle mathématique l'analyse par éléments résout ce modèle mathématique. La procédure numérique des éléments finis nécessite d'évaluer l'exactitude de la solution.

Il est clair que la solution par éléments finis résoudra seulement le modèle mathématique choisi et que toutes les hypothèses du modèle seront reflétées dans la réponse prévue. Nous ne pouvons-nous attendre a plus d'information dans la prévision des phénomènes physiques que l'information contenue dans le modèle mathématique. Par conséquent le choix d'un modèle mathématique approprié est crucial et détermine complètement l'aperçu du phénomène physique réel.

Soulignons que, par notre analyse , nous pouvons seulement obtenir un aperçu du problème physique a considérer : nous ne pouvons pas prévoir la réponse exact du problème physique parce qu'il est impossible de reproduire dans le modèle mathématique toutes les informations qui sont présentes et contenue dans le problème physique naturel.

Une fois le modèle mathématique a été résolu exactement et les résultats ont été interprétés, nous pouvons raffiner ce modèle mathématique afin d'augmenter notre perspicacité dans la réponse du problème physique. En outre, un changement du problème physique peut être nécessaire, et celui-ci a son tour mènera également aux modèles mathématiques additionnels et aux solutions des éléments finis (voir le schéma 1).

L'étape principale dans l'analyse de l'ingénieur est le choix des modèles mathématiques appropriés. Ces modèles seront clairement choisis en fonction des phénomènes a prévoir, et il est plus important de choisir les modèles mathématiques qui sont fiables et efficaces en prévoyant les quantités recherchées. Pour définir la fiabilité et l'efficacité d'un modèle choisi , nous comparons a un modèle mathématique complet du problème physique et mesurons la réponse de notre modèle choisi par rapport a la réponse du modèle complet. En général, le modèle mathématique complet est une description entièrement tridimensionnelle qui inclut également des effets non-linéaires

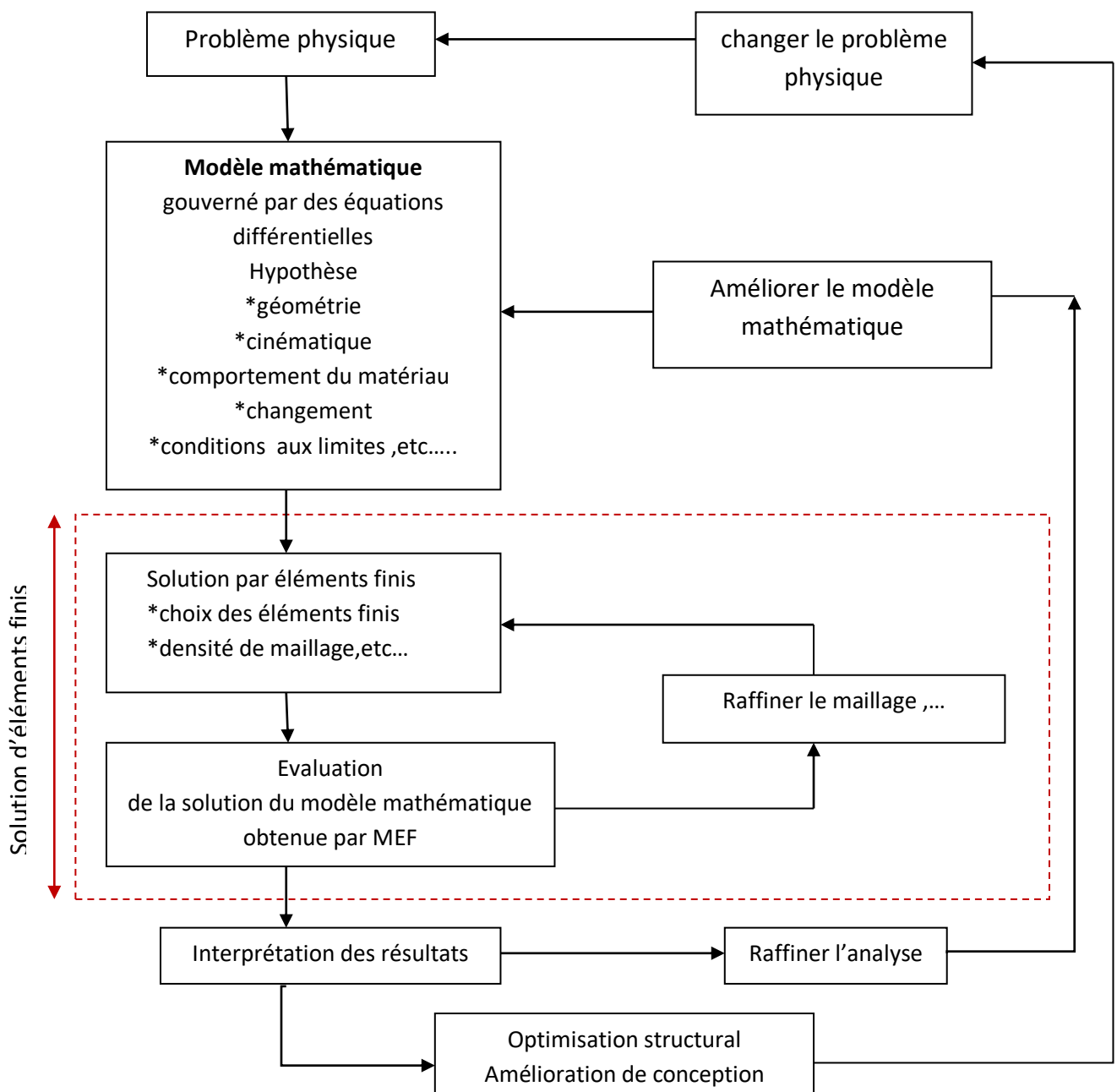
a) Efficacité d'un modèle mathématique :

Le modèle mathématique le plus efficace pour l'analyse est celui qui rapporte la réponse demandée à une exactitude suffisante et à moindre frais.

b) Fiabilité d'un modèle mathématique :

Le modèle mathématique choisi est fiable si la réponse exigée est connue pour être prévue dans un niveau choisi d'exactitude mesuré sur la réponse du modèle mathématique complet

Figure 1.1: Processus de l'analyse par éléments finis



I.4. Définition des plaques:

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan) et par une petite épaisseur (notée h) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane.

I.5. Différents types de plaques:

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories.

1) Les plaques isotropes: elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (: respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions mécanique .

2) Les plaques orthotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique.

3) Les plaques anisotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

I.6. Attributs d'un élément fini:

Un découpage, artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu, en éléments finis permet, d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants.

- **Géométrie :** un élément fini peut être segment de droit ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre . Les frontières entre éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droit ou de courbes, des faces planes ou courbes

- **Matériau:** le matériau d'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke)

- **Nœuds:** les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces, etc. on y choisit et définit les degrés de liberté du problème.

- **Degrés de liberté:** la fonction d'approximation choisie (en général le champ des déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout veillant à respecter certaines règles, dites critère de convergence.

- **Forces nodales:** à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température..)

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force.

CHAPITRE II

Flexion des plaques

II.1 introduction

Les éléments de plaque en flexion et de coque jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures

Ce chapitre sera plus spécialement consacré aux éléments de plaque en flexion

II.2 hypothèses fondamentales :

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne S_m

Par convention, cette surface moyenne sera le plan XY , l'axe OZ correspondant à l'axe transverse selon l'épaisseur

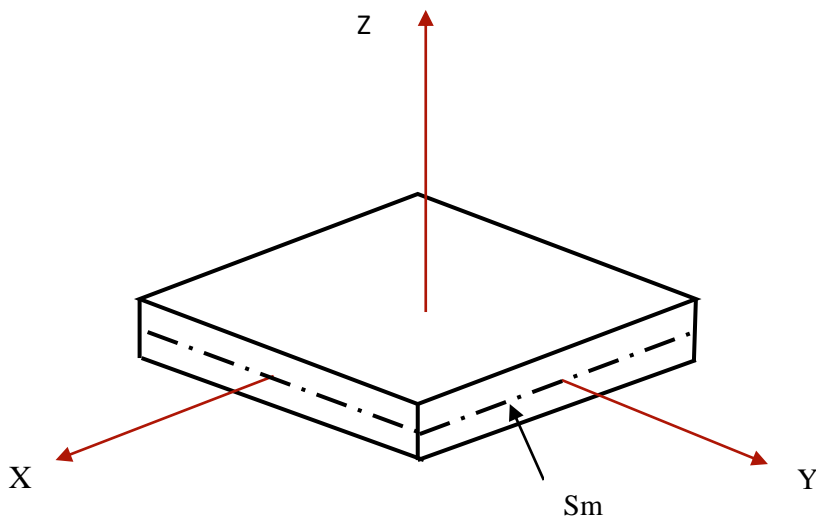


figure 2.1: plaque en 3D

La théories des plaques reposent sur les hypothèses suivantes :

1°) les contraintes normales σ_z sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes

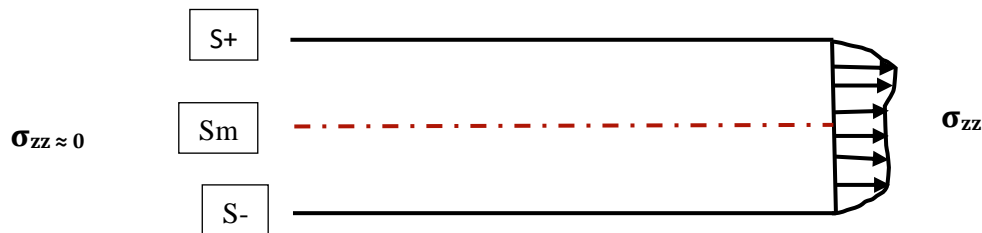


Figure 2.2 : variation des contraintes suivant l'axe OZ

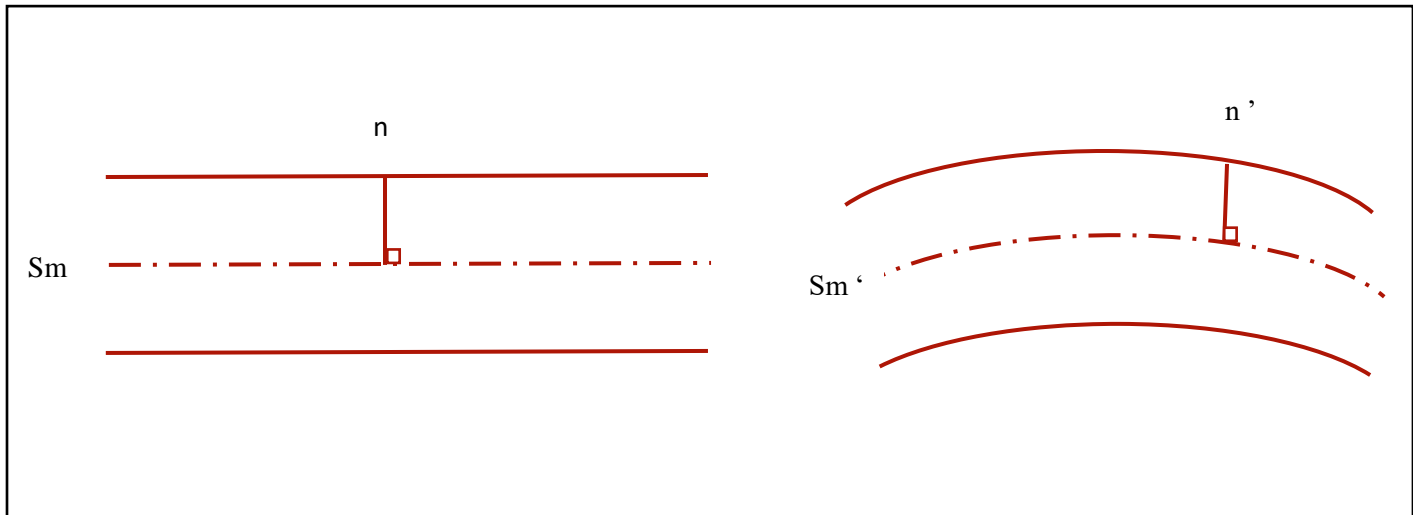
2°) les pentes de la surface moyenne S_m après déformation sont supposées petites par rapport à l'unité.

3°) on néglige l'interaction des phénomènes de membrane et de flexion due aux grandeurs déplacements.

4°) les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation.

Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse

$$\epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$$



Les éléments de plaques en flexion de type déplacement peuvent être classés en trois catégories :

a°) les éléments basés sur la **théorie de Kirchhoff** (sans effet de cisaillement transverse), qui sont en principe les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces, leurs formulation ne nécessite que l'approximation à une seule composante $W(x,y)$ ce qui est d'une simplicité apparente .

b°) les éléments basés sur la **théorie de hencky-mindlin** (avec effet de cisaillement transverse), qui sont les mieux adaptés, dans le cas des plaques d'épaisseur modérés. Leur formulation est basée sur une approximation à trois variables indépendantes : Le déplacement transversal W et les deux rotations transversales β_x et β_y

c°) les éléments obtenus à partir d'éléments iso paramétriques de volume sont également très intéressants le principe de leur formulation consiste à spécialiser un élément de volume par exemple (élément à 8 nœuds ou cube à 8 nœuds), au cas des plaques, pour éviter le problème de mauvaise conditionnement numérique que l'on rencontre lorsque l'épaisseur est petit par rapport à la longueur de l'élément.

La géométrie de la structure joue un rôle fondamental dans le choix du type d'élément pour le quel on aura une bonne modélisation, c'est pour cela qu'il faut poser toutes les hypothèses possibles concernant la géométrie afin de faire un bon choix de la théorie qui respecte ces hypothèses.

Le troisième choix est plus général par rapport aux deux autres, parce qu'il n'y a pas d'hypothèses et de conditions pour son application, mais il est comme même le plus difficile à appliquer.

Concernant notre étude qui traite des plaques minces, notre choix s'est porté sur **la théorie de Kirchhoff**.

II.3 définition et notations générales :

Les notations adoptées dans cette étude pour les déplacements sont définies dans la figure suivante :

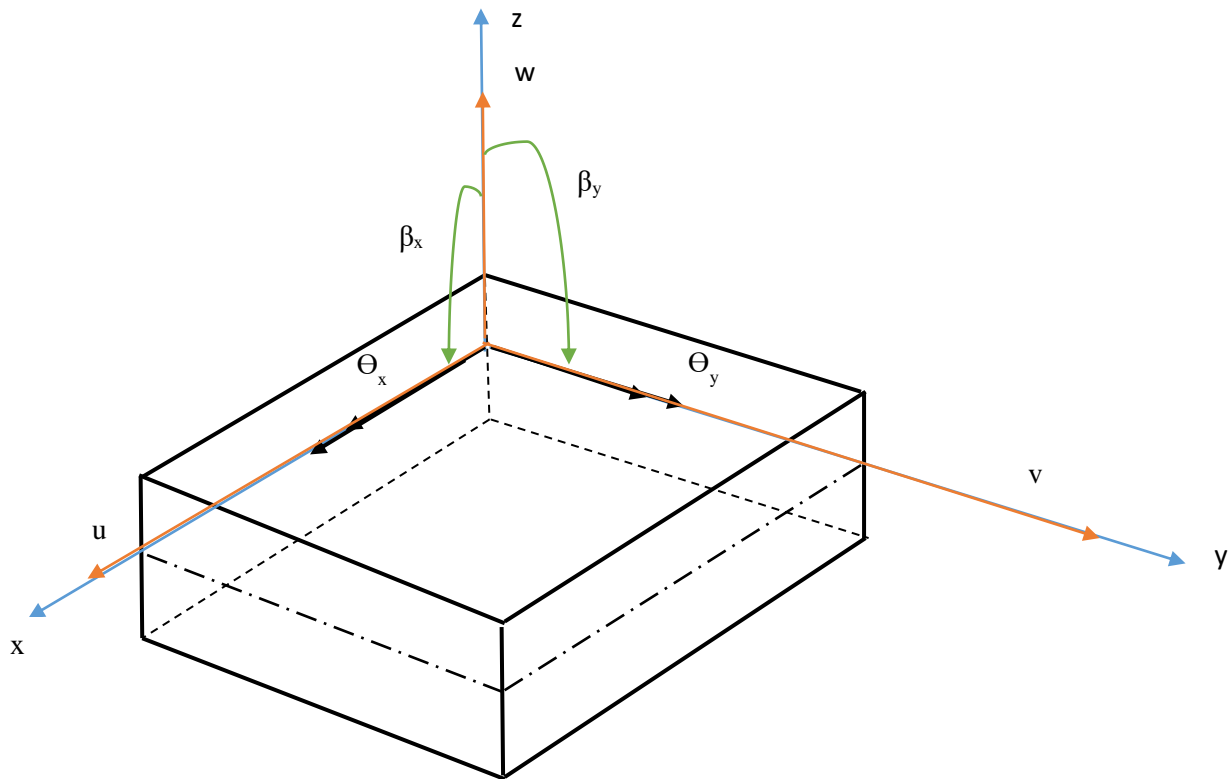


Figure 2.3 : Notation d'une plaque

Soient les déplacements dans le plan u et v, le déplacement transversale W et les rotations β_x et β_y ou θ_x et θ_y ;on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta_x &= \theta_y \\ \beta_y &= -\theta_x \end{aligned}$$

Pour la formulation des théories des plaques, nous utiliserons les rotations β_x et β_y , on peut ramener aux conventions θ_x et θ_y s'il est nécessaire pour le cas d'assemblage.

L'état de déformation d'une plaque peut être considéré comme la superposition de déformation de membrane et de flexion.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_F \quad (2.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}_F \quad (2.2)$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

a°) théorie de hencky-mindlin : (prise en compte du cisaillement transverse) .

Dans cette théorie, on donne un modèle de déplacement basé sur trois variables indépendantes

Le déplacement transverse $W(x,y)$

Les deux rotations $\beta_x(x,y)$, $\beta_y(x,y)$.

Le champ de déplacement s'exprime alors de la façon suivante :

$U = Z. \beta_x(x, y)$ $V = Z. \beta_y(x, y)$ $W = w(x, y)$	(2.4)
---	---------

L'état de déformation en fonction de W , β_x et β_y est le suivant :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = Z \cdot \frac{\partial \beta_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = Z \cdot \frac{\partial \beta_y}{\partial y}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = Z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

b°) théorie de Kirchhoff :

Dans la théorie de Kirchhoff, on néglige l'effet de cisaillement transverse : on a donc :

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

On aura donc d'après la théorie de Hencky – Mindlin :

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} = 0 &= \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \iff \beta_x = \frac{-\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 0 &= \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \iff \beta_y = \frac{-\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable : le déplacement transverse w en effet :

$$\begin{aligned} u &= -Z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -Z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Et les déformations deviennent :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} &= -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

II.4 élément basé sur la théorie de Kirchhoff :

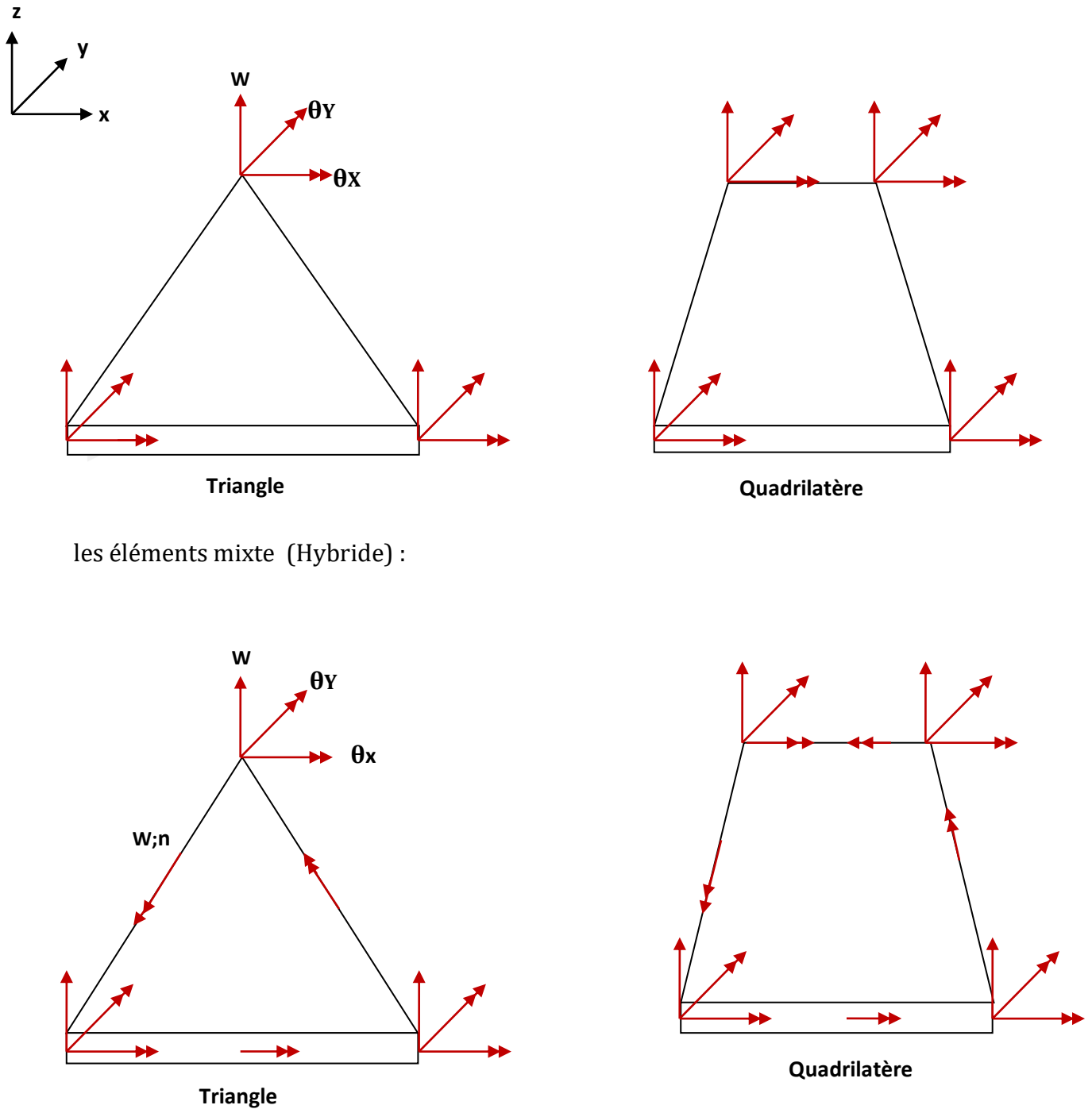


Figure 2.4 : Eléments de plaque en flexion

II.5 matrice de rigidité de flexion basé sur la théorie de Kirchhoff :

Pour simplifier l'étude, considérons un élément rectangulaire a quatre nœuds de dimension (a, b, e) avec cette fois trois (03) D.D.L

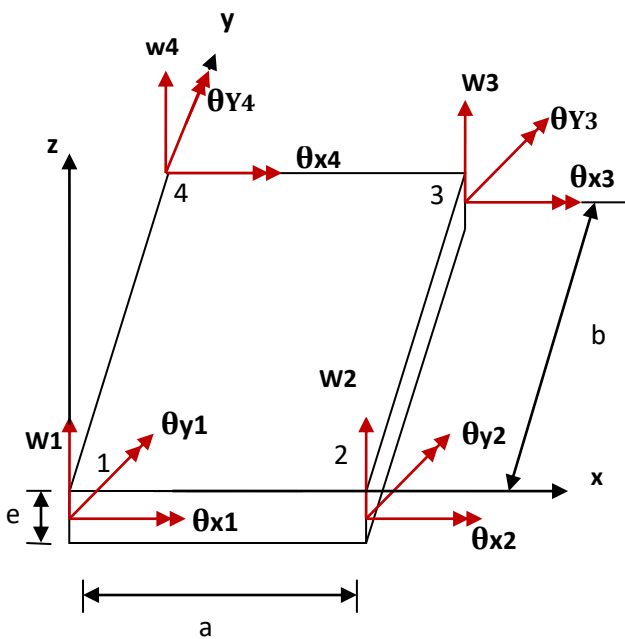


Figure 2.5: Repère cartésien

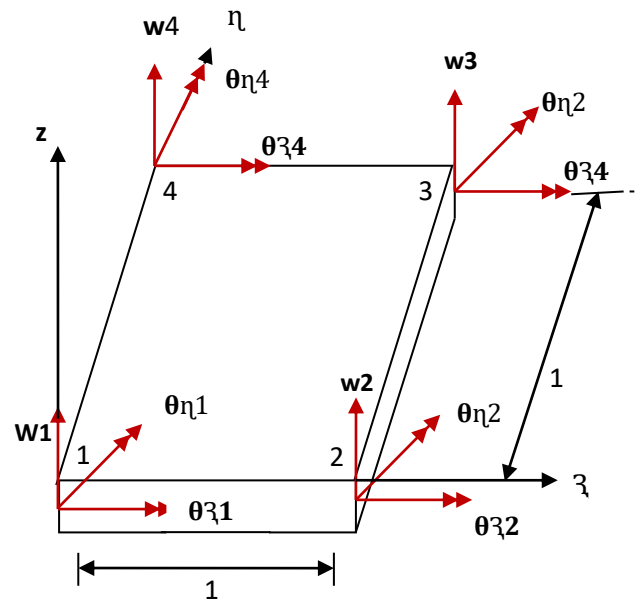


Figure 2.6: Repère adimensionnel

Pour chaque nœuds, (W, theta_x et theta_y) comme cet éléments possède 12 D.D.L , on aura le même membre de coordonnées généralisées. de cet effet, on peut approximer les déplacement à :

$$w(x, y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5xy + d_6y^2 + d_7x^3 + d_8x^2y + d_9xy^2 + d_{10}y^3 + d_{11}x^3y + d_{12}xy^3$$

on faisant le changement de variable suivant :

$$\xi = \frac{x}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Alors la fonction $w(x,y)$ devient :

$$w(\xi, \eta) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \eta + C_4 \xi^2 + C_5 \xi \eta + C_6 \eta^2 + C_7 \xi^3 + C_8 \xi^2 \eta + C_9 \xi \eta^2 + C_{10} \eta^3 + C_{11} \xi^3 \eta + C_{12} \xi \eta^3$$

Avec :

$$C_1 = d_1 \quad ; \quad C_2 = a d_2 \quad ; \quad C_3 = b d_3 \quad ; \quad C_4 = a^2 d_4 \quad ; \quad C_5 = a b d_5$$

$$C_6 = b^2 d_6 \quad ; \quad C_7 = a^3 d_7$$

$$C_8 = a^2 b d_8 \quad ; \quad C_9 = a b^2 d_9 \quad ; \quad C_{10} = b^3 d_{10} \quad ; \quad C_{11} = a^3 b d_{11} \quad ; \quad C_{12} = a b^3 d_{12}$$

La relation entre C_i et d_i n'a pas une importance.

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{b} \{ C_3 + C_5 \xi + 2C_6 \eta + C_8 \xi^2 + 2C_9 \xi \eta + 3C_{10} \eta^2 + C_{11} \xi^3 + 3C_{12} \xi \eta^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} = -\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ &= -\frac{1}{a} \{ C_2 + 2C_4 \xi + C_5 \eta + 3C_7 \xi^2 + 2C_8 \xi \eta + C_9 \eta^2 + 3C_{11} \xi^2 \eta + C_{12} \eta^3 \} \end{aligned}$$

la fonction de déplacement s'écrit :

$$\{\delta(\xi, \eta)\}_F = \begin{Bmatrix} w(\xi, \eta) \\ \theta_x(\xi, \eta) \\ \theta_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [g(\xi, \eta)]_F \{C\} \quad (2.8)$$

Telle que :

$$[g(\xi, \eta)] = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \xi/b & \frac{2\eta}{b} & 0 & \frac{\xi^2}{b} & \frac{2\xi\eta}{b} & \frac{3\eta^2}{b} & \frac{\xi^3}{b} & \frac{3\xi\eta^2}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2\xi}{a} & -\frac{\eta}{a} & 0 & -\frac{3\xi^2}{a} & -\frac{2\xi\eta}{a} & -\frac{\eta^2}{a} & 0 & -\frac{3\xi^2\eta}{a} & -\frac{\eta^3}{a} \end{pmatrix}$$

Le vecteur de déplacement $\{q\}$ s'écrit :

$$\{q\}_F^t = \{w_1, \theta_x, \theta_y, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}\} \quad (2.9)$$

D'autre part, sur chaque nœud le système de charge correspondant consistant aux deux (02) moments M_x, M_y et 1 une force de cisaillement P_z alors, l vecteur force s'écrit :

$$\{P\}^t = \{P_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, P_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, P_{z3}, M_{x3}, M_{y3}, P_{z4}, M_{x4}, M_{y4}\} \quad (2.10)$$

Les forces nodales et les déplacement sont reliés par :

$$\{P\} = [K]\{q\} \quad (2.11)$$

Pour trouver les constantes C_i ($i=1, 2, 3, \dots, 12$) il faut poser les conditions aux limites

***pour le nœud 1 :** $(\xi=0, \eta=0) \longrightarrow (x=0, y=0)$

$$W_1 = C_1$$

$$\theta_{x1} = \frac{1}{b} C_3$$

$$\theta_{y1} = -\frac{1}{a} C_2$$

***pour le nœud 2 :** $(\xi=1, \eta=0) \longrightarrow (x=a, y=0)$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= C_1 + C_2 + C_4 + C_7 \\
 \theta_{x2} &= \frac{1}{b}(C_3 + C_5 + C_8 + C_{11}) \\
 \theta_{y2} &= \frac{-1}{a}(C_2 + 2C_4 + 3C_7)
 \end{aligned}$$

***pour le nœud 3 :** $(\xi=1, \eta=1) \longrightarrow (x=a, y=b)$

$$\begin{aligned}
 w_3 &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} + C_{11} + C_{12} \\
 \theta_{x3} &= \frac{1}{b}(C_3 + C_5 + 2C_6 + C_8 + 2C_9 + 3C_{10} + C_{11} + 3C_{12}) \\
 \theta_{y3} &= \frac{-1}{a}(C_2 + 2C_4 + C_5 + 3C_7 + 2C_8 + C_9 + 3C_{11} + C_{12})
 \end{aligned}$$

***pour le nœud 4 :** $(\xi=0, \eta=1) \longrightarrow (x=0, y=b)$

$$\begin{aligned}
 w_4 &= C_1 + C_3 + C_6 + 3C_{10} \\
 \theta_{x4} &= \frac{1}{b}(C_3 + 2C_6 + 3C_{10}) \\
 \theta_{y4} &= \frac{-1}{a}(C_2 + C_5 + C_9 + C_{12})
 \end{aligned}$$

Sous la forme matricielle :

$$\{q\}_F = [H]_F \{C\}_F \quad (2.12)$$

Ce qui donne que :

$$\{C\}_F = [H]_F^{-1} \{q\}_F \quad (2.13)$$

$[H]_F =$

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\
 0 & \frac{-1}{a} & 0 & \frac{-2}{a} & 0 & 0 & \frac{-3}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & \frac{2}{b} & 0 & \frac{1}{b} & \frac{2}{b} & \frac{3}{b} & \frac{1}{b} & \frac{3}{b} \\
 0 & \frac{-1}{a} & 0 & \frac{-2}{a} & \frac{-1}{a} & 0 & \frac{-3}{a} & \frac{-2}{a} & \frac{-1}{a} & 0 & \frac{-3}{a} & \frac{-1}{a} \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & \frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-1}{a} & 0 & 0 & \frac{-1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a} & 0 & 0 & \frac{-1}{a}
 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\{\delta(\mathfrak{z}, \eta)\}_F = [g(\mathfrak{z}, \eta)]_F [H]_F^{-1} \{q\}_F. \quad (2.14)$$

Avec :

$$[H]_F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2a & 3 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -b & a & 1 & b & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a \\ 2 & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -b & 0 \\ 2 & 0 & -a & -2 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2a & -3 & 0 & -a & 3 & 0 & a & -3 & 0 & 2a \\ 3 & 2b & 0 & -3 & -2b & 0 & 3 & -b & 0 & -3 & b & 0 \\ 2 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & b & 0 \\ -2 & 0 & a & 2 & 0 & a & -2 & 0 & -a & 2 & 0 & -a \\ -2 & -b & 0 & 2 & b & 0 & -2 & b & 0 & 2 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

on pose :

$$[N(\xi, \eta)]_F = [g(\xi, \eta)]_F [H]_F^{-1}. \quad (2.15)$$

D'où :

$$\{\delta(\xi, \eta)\}_F = [N(\xi, \eta)]_F \{q\}_F. \quad (2.16)$$

Telle que :

$$[N(\xi, \eta)] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9 \ N_{10} \ N_{11} \ N_{12}]. \quad (2.17)$$

avec , Pour $0 \leq \xi \leq 1$ et $0 \leq \eta \leq 1$

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - 3\xi^2 - 3\eta + 2\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3.$$

$$N_2(\xi, \eta) = b(\eta - 3\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3).$$

$$N_3(\xi, \eta) = a(-\xi + 2\xi^2 + 3\eta - \xi^3 - 2\xi^2\eta + \xi^3\eta).$$

$$N_4(\xi, \eta) = 3\xi^2 + 3\eta - 2\xi^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3.$$

$$N_5(\xi, \eta) = b(3\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3).$$

$$N_6(\xi, \eta) = a(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta).$$

$$N_7(\xi, \eta) = -3\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3.$$

$$N_8(\xi, \eta) = b(-\xi^2\eta + \xi\eta^3).$$

$$N_9(\xi, \eta) = a(\xi^2\eta - \xi^3\eta).$$

$$N_{10}(\xi, \eta) = 3\eta + 3\eta^2 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 - 2\eta^3 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3.$$

$$N_{11}(\xi, \eta) = b(-\eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3).$$

$$N_{12}(\xi, \eta) = a(-3\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta).$$

***Relation deformation déplacement :**

$$\varepsilon_x = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -Z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -Z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w \quad (2.18)$$

En tenant compte du changement de variable on aura :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{1}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

Alors l'expression de déformation devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = -Z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{a^2 \partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{b^2 \partial \eta^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{ab \partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} w \quad (2.19)$$

En calculant chaque terme on obtient :

$$\varepsilon_{\xi} = -Z \frac{1}{a^2} (2C_4 + 6C_7\xi + 2C_8\eta + 6C_{11}\xi\eta).$$

$$\varepsilon_{\eta} = -Z \frac{1}{b^2} (2C_6 + 2C_9\xi + 6C_{10}\eta + 6C_{12}\xi\eta).$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -2Z \frac{1}{ab} (C_5 + 2C_8\xi + 2C_9\eta + 3C_{11}\xi^2 + 3C_{12}\eta^2).$$

Sous forme matricielle on a :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = -Z[\phi(\xi, \eta)]_F \{C\}_F \quad (2.20)$$

Telle que :

$$[\phi(\xi, \eta)]_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a^2} & 0 & 0 & \frac{6\xi}{a^2} & \frac{2\eta}{a^2} & 0 & 0 & \frac{6\xi\eta}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{b^2} & 0 & 0 & \frac{2\xi}{b^2} & \frac{6\eta}{b^2} & 0 & \frac{6\xi\eta}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{ab} & 0 & 0 & \frac{4\xi}{ab} & \frac{4\eta}{ab} & 0 & \frac{6\xi^2}{ab} & \frac{6\eta^2}{ab} \end{pmatrix}$$

Remplaçant l'expression $\{C\}_F = [H]_F^{-1}\{q\}$ dans la formule de déformation on obtient :

$$\{\varepsilon\} = -Z[\phi(\xi, \eta)]_F [H]_F^{-1} \{q\}_F \quad (2.21)$$

On pose :

$$[B(\xi, \eta)]_F = [\phi(\xi, \eta)]_F [H]_F^{-1} \quad (2.22)$$

D'où on obtient :

$$[\varepsilon(\xi, \eta)] = -Z[B(\xi, \eta)] \{q\}_F \quad (2.23)$$



Telle que :

$$[B(\zeta, \eta)]_F = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1\ 12} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2\ 12} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3\ 12} \end{pmatrix}$$

Avec :

$B_{11}(\zeta, \eta) = ((-6 + 12\zeta + 6\eta - 12\zeta\eta)/a^2)$	$; B_{12} = 0$
$B_{13}(\zeta, \eta) = (4 - 6\zeta - 4\eta + 6\zeta\eta)/a$	$; B_{14}(\zeta, \eta) = (6 - 12\zeta - 6\eta + 12\zeta\eta)/a^2$
$B_{15}(\zeta, \eta) = 0$	$; B_{16}(\zeta, \eta) = (2 - 6\zeta - 2\eta + 6\zeta\eta)/a$
$B_{17}(\zeta, \eta) = (6\eta - 12\zeta\eta)/a^2$	$; B_{18}(\zeta, \eta) = 0$
$B_{19}(\zeta, \eta) = (2\eta - 6\zeta\eta)/a$	$; B_{1\ 10}(\zeta, \eta) = (-6\eta + 12\zeta\eta)/a^2$
$B_{1\ 11}(\zeta, \eta) = 0$	$; B_{1\ 12}(\zeta, \eta) = (4\eta - 6\zeta\eta)/a$
$B_{21}(\zeta, \eta) = (-6 + 6\zeta + 12\eta - 12\zeta\eta)/b^2$	$; B_{22} = (-4 + 4\zeta + 6\eta - 6\zeta\eta)/b$
$B_{23}(\zeta, \eta) = 0$	$; B_{24}(\zeta, \eta) = (-6\zeta + 12\zeta\eta)/b^2$
$B_{25}(\zeta, \eta) = (-4\zeta + 6\zeta\eta)/b$	$; B_{26}(\zeta, \eta) = 0$
$B_{27}(\zeta, \eta) = (6\zeta - 12\zeta\eta)/b^2$	$; B_{28}(\zeta, \eta) = (-2\zeta + 6\zeta\eta)/b$
$B_{29}(\zeta, \eta) = 0$	$; B_{2\ 10}(\zeta, \eta) = (6 - 6\zeta - 12\eta + 12\zeta\eta)/b^2$
$B_{2\ 11}(\eta, \zeta) = (-2 + 2\zeta + 6\eta - 6\zeta\eta)/b$	$; B_{2\ 12}(\zeta, \eta) = 0$
$B_{31}(\zeta, \eta) = (-2 + 12\zeta + 12\eta - 12\zeta^2 - 12\eta^2)/ab$	$; B_{32}(\zeta, \eta) = (-2 + 8\eta - 6\eta^2)/a$
$B_{33}(\zeta, \eta) = (2 - 8\zeta + 6\zeta^2)/b$	$; B_{34}(\zeta, \eta) = (2 - 12\zeta - 12\eta + 12\zeta^2 + 12\eta^2)/ab$
$B_{35}(\zeta, \eta) = (2 - 8\eta + 6\eta^2)/a$	$; B_{36}(\zeta, \eta) = (-4\zeta + 6\zeta^2)/b$
$B_{37}(\zeta, \eta) = (-2 + 12\zeta + 12\eta - 12\zeta^2 - 12\eta^2)/ab$	$; B_{38}(\zeta, \eta) = (-4\eta + 6\eta^2)/a$
$B_{39}(\zeta, \eta) = (4\zeta - 6\zeta^2)/b$	$; B_{3\ 10}(\zeta, \eta) = (2 - 12\zeta - 12\eta + 12\zeta^2)/ab$
$B_{3\ 11}(\zeta, \eta) = (4\eta - 6\eta^2)/a$	$; B_{3\ 12}(\zeta, \eta) = (-2 + 8\zeta - 6\zeta^2)/b$

***Relation contraintes déformations :**

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [E]\{\mathcal{E}(\xi, \eta)\} \quad (2.24)$$

Substituant l'équation de l'expression $\{\mathcal{E}\}$ on aura :

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = -Z [E] [B(\xi, \eta)] \{q\} \quad (2.25)$$

Si on pose dans cette équation $Z=0$; on trouve :

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = \{0\} \quad \forall \{\xi, \eta\} \quad (2.26)$$

$Z=0$; représente alors la position de la surface neutre.

***détermination de la matrice de rigidité de flexion :**

Le calcul de la matrice de rigidité se fait par la formule suivante :

$$[K]_F = \int_V [B]^t [E] [B] dV \quad (2.27)$$

Qui deviant :

$$\begin{aligned} [K]_F &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [B]^t [E] [B] dA dZ \\ &= \frac{abh^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 [B(\xi, \eta)]^T [E] [B(\xi, \eta)] d\xi d\eta \end{aligned}$$

Les 78 valeurs de la matrice [K] se calculent à l'aide de la formule suivante :

$$K_{ij} = \frac{abh^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 \{ (B_{1i}B_{1j})e_{11} + (B_{2i}B_{1j} + B_{1i}B_{2j})e_{12} + (B_{2i}B_{2j})e_{22} + (B_{3i}B_{3j})e_{33} \} d\zeta d\eta$$

Pour

$$i=1, 2, 3, \dots, 12$$

$$j=i, i+1, \dots, 12$$

Pour calculer les éléments K_{ij} on peut utiliser un programme qui calcule l'intégrale numérique des fonctions :

Example: $K_{11} = ?$

- On posant $i=1, j=1$ dans la formule on trouve:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{abh^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 \{ B_{11}^2 e_{11} + 2B_{21}B_{11}e_{12} + B_{21}^2 e_{22} + B_{31}^2 e_{33} \} d\zeta d\eta \\ &= \frac{bh^3}{12a^3} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 12\zeta + 6\eta - 12\zeta\eta)^2 d\zeta d\eta e_{11} \\ &+ \frac{h^3}{12ab} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 12\zeta + 6\eta - 12\zeta\eta) (-6 + 6\zeta + 12\eta - 12\zeta\eta) d\zeta d\eta e_{12} \\ &+ \frac{ah^3}{12b^3} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 6\zeta + 12\eta - 12\zeta\eta)^2 d\zeta d\eta e_{22} \\ &+ \frac{h^3}{12ab} \int_0^1 \int_0^1 (-2 + 12\zeta + 12\eta - 12\zeta^2 - 12\eta^2)^2 d\zeta d\eta e_{33} \end{aligned}$$

On obtient le résultat suivant :

$$K_{11} = \frac{h^3}{12} \left(\frac{4b}{a^3} e_{11} + \frac{2}{ab} e_{12} + \frac{4a}{b^3} e_{22} + \frac{28}{5ab} e_{33} \right) \quad (2.28)$$

Avec la méthode on peut calculer tous les éléments k_{ij} on introduisant les fonctions nécessaires de la matrice $[B(\zeta, \eta)]$ dans la formule

L'expression finale de la matrice de rigidité de flexion est présentée au-dessous

$$[K] = \frac{h^3}{12}$$

$Q_1 + 2S_1$ $+ D_1$ $+ 2G_1$																						
$D_3 + 2G_2$ $+ Q_2$	$4G_3$ $+ 4Q_5$																					
$-2S_2$ $- D_2$ $- Q_3$	$-C_{12}$	$4S_3$ $+ 4Q_4$																				
$-Q_1$ $- 2S_1$ $- D_1 + G_1$	$-Q_2 - D_3$ $+ G_2$	$Q_3 + 2S_2$	$Q_1 + 2S_1$ $+ D_1$ $+ 2G_1$																			
$-D_3 + G_2$ $- Q_2$	$2G_3$ $- 4Q_5$	0	$D_3 + 2G_2$ $+ Q_2$	$4G_3$ $+ 4Q_5$																		
$-2S_2$ $- Q_3$	0	$2S_3 - Q_4$	$2S_2 + D_2$ $+ Q_3$	e_{12}	$4S_3$ $+ 4Q_4$																	
$Q_1 - S_1$ $+ D_1 - G_1$	$Q_2 - G_2$	$S_2 - Q_3$	$-Q_1 - D_1$ $+ 2G_1$ $+ S_1$	$-Q_2$ $- 2G_2$	$S_2 - D_2$ $- Q_3$	$Q_1 + D_1$ $+ 2S_1$ $+ 2G_1$																
$-Q_2 + G_2$	$G_3 + Q_5$	0	$2G_2 + Q_2$	$-Q_5$ $+ 2G_3$	0	$-Q_2 - D_3$ $- 2G_2$	$4G_3 + 4Q_5$															
$Q_3 - S_2$	0	$S_3 + Q_4$	$-Q_3 - D_2$ $+ S_2$	0	$2S_3$ $- 4Q_4$	$Q_3 + D_2$ $+ 2S_2$	$-e_{12}$	$4S_3$ $+ 4Q_4$														
$-Q_1 - P_1$ $- 2G_1$ $+ S_1$	$-Q_2$ $- 2G_2$	$Q_3 + D_2$ $- S_2$	$Q_1 + D_1$ $- S_1 - G_1$	$Q_2 - G_2$	$-S_2 + Q_3$	$-Q_1 - D_1$ $- 2S_1$ $+ G_1$	$Q_2 + D_3$ $- G_2$	$-Q_3$ $- 2S_2$	$Q_1 + D_1$ $+ 2S_1 + 2G_1$													
$Q_2 + 2G_2$	$2G_3 - Q_5$	0	$-Q_2 + G_2$	$Q_5 + G_3$	0	$D_3 - G_2$ $+ Q_2$	$2G_3 - 4Q_5$	0	$-Q_2 - D_3$ $- 2G_2$	$4G_3$ $+ 4Q_5$												
$-S_2 + D_2$ $+ Q_3$	0	$2S_3$ $- 4Q_4$	$-Q_3 + S_2$	0	$S_3 + Q_4$	$Q_3 + 2S_2$	0	$2S_3 - Q_4$	$-Q_3 - 2S_2$ $- D_2$	e_{12}	$4S_3$ $+ 4Q_4$											

SYM

- $S_1 = \frac{2b}{a^3} e_{11}$; $S_2 = \frac{b}{a^2} e_{11}$; $S_3 = \frac{b}{3a} e_{11}$

- $D_1 = \frac{2}{ab} e_{12}$; $D_2 = \frac{1}{b} e_{12}$; $D_3 = \frac{1}{a} e_{12}$

- $G_1 = \frac{2a}{b^3} e_{22}$; $G_2 = \frac{a}{b^2} e_{22}$; $G_3 = \frac{a}{3b} e_{22}$

- $Q_1 = \frac{28}{5ab} e_{33}$; $Q_2 = \frac{2}{5a} e_{33}$; $Q_3 = \frac{2}{5b} e_{33}$; $Q_4 = \frac{2a}{15b} e_{33}$; $Q_5 = \frac{2b}{15a} e_{33}$

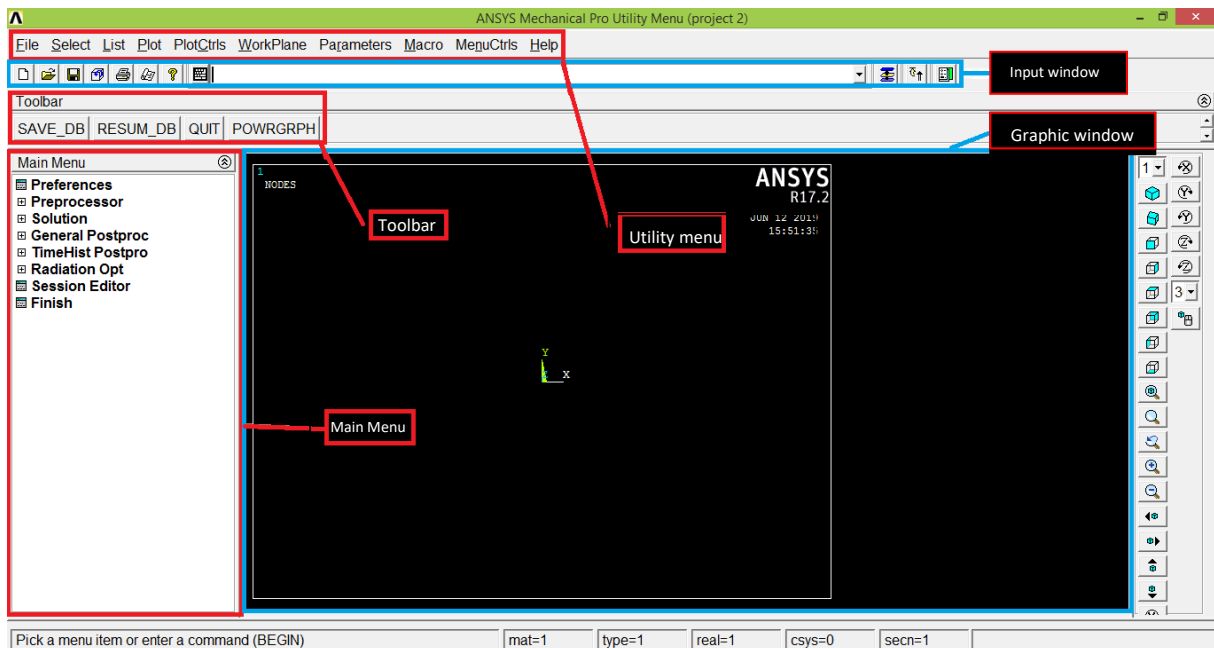
CHAPITRE III

Application par ANSYS et Résultat

III.1. Introduction :

La vue par défaut de ANSYS est bien adaptée pour des conceptions bidimensionnelles avec l'axe des abscisses indiqué horizontalement vers la droite. L'axe des ordonnées se dirigeant verticalement vers le haut, et l'axe z est perpendiculaire à l'écran. Zoom et repaint (or refresh screen) (ou régénérer l'écran) les commandes sont très semblables à celles utilisées dans la plupart des logiciels de traitement de DAO ou de texte.

- a. **Utility menu** : auquel vous pouvez accéder et ajuster les propriétés au sujet de votre session, telle que les commandes de fichier, la liste et les commandes graphiques.
- b. **Toolbar** : Boutons poussoirs aux commandes utilisées généralement.
- c. **Main menu** : ou vous pouvez trouver les processeurs utilisés en analysant votre problème.
- d. **Graphics window** : dans la fenêtre graphique votre modèle est montré : la géométrie, éléments, visualisation des résultats etc...
- e. **Input window** : Vous pouvez introduire des commandes dans la fenêtre d'entrée.



III.2. Préprocesseur :

Dans le préprocesseur le modèle est installé, il inclut un certain nombre d'étapes ; habituellement dans l'ordre suivant :

- **Build geometry** : construction de la géométrie, suivant la géométrie du problème une, deux dimensions ou tridimensionnelle, la géométrie créée se compose des lignes, des sections ou des volumes, puis au besoin, on peut créer d'autres géométries en employant des opérations boolean.

L'idée principale est que, quand on établit la géométrie on simplifie la génération de maillage. Par conséquent, cette étape est facultative mais

souvent la plus employée. Des nœuds et des éléments peuvent cependant être créés par des coordonnées seulement.

- **Define materials (définir les matériaux)** : un matériau est défini par ses constantes matérielles.
Chaque élément doit être assigné à un matériau particulier.
- **Generate element mesh (Génération de maillage)** : Le problème est discrétisé avec les points nodaux. Les nœuds sont reliés aux éléments finis de forme, qui constituent un ensemble du volume de matériau. Selon le problème et les hypothèses, le type d'élément doit être déterminé.

Les types d'éléments communs sont truss, beam, plate, shell and solid éléments.

Chaque type d'élément peut contenir plusieurs sous-types par exemple solide 2D-4 nœuds, solide 3D-20 nœuds. Par conséquent, le soin doit être pris quand le type d'élément est choisi.

Le maillage dans ANSYS peut être créé de plusieurs manières. La manière la plus commune est qu'elle soit automatiquement créée. Toutefois plus ou moins contrôlée. Par exemple vous pouvez spécifier un certain nombre d'éléments dans une section spécifique, ou vous pouvez forcer le générateur de maillage pour maintenir une taille spécifique d'élément dans une section. Certaines formes ou tailles d'élément ne sont pas recommandées et si ces limites sont dépassées, un avertissement sera affiché par ANSYS.

III.3. Solution processor

Lorsque que vous résolvez le problème en recueillant toutes les informations spécifiques au sujet du problème :

- **Apply loads (appliquer les charges)** : Les conditions aux limites sont généralement appliquées sur des nœuds ou des éléments. La quantité Prescrite peut être par exemple force, traction, déplacement, moment, rotation, les charges peuvent être également dans ANSYS éditées du préprocesseur.
- **Optain solution (obtenir la solution)** : La solution du problème peut être obtenir si le problème entier est définir.

Postprocessor :

Dans la présente partie de l'analyse vous pouvez par exemple :

- **Visualise the results (Visualiser les résultats)** : Par exemple tracer la forme déformée de la géométrie ou des efforts.
- **Liste the results (Listes des résultats)** : si vous préférez les listes tabulaires ou classez la liste imprimée, il est possible.

III.4 Support étudié

$e = 5\text{ mm}$; $F_1=1\text{ KN}$; $F_2=F_3=0.5\text{ KN}$; $R_1=25\text{mm}$; $R_2=15\text{mm}$; $r_1=r_2=r_3=r_4=5\text{mm}$ la plaque possède un module de young de $E=200\text{ GPa}$, et un coefficient de poisson $\nu=0.3$; et $\text{density} = 7.85 \cdot 10^{-6}\text{kg}\cdot\text{mm}^{-3}$

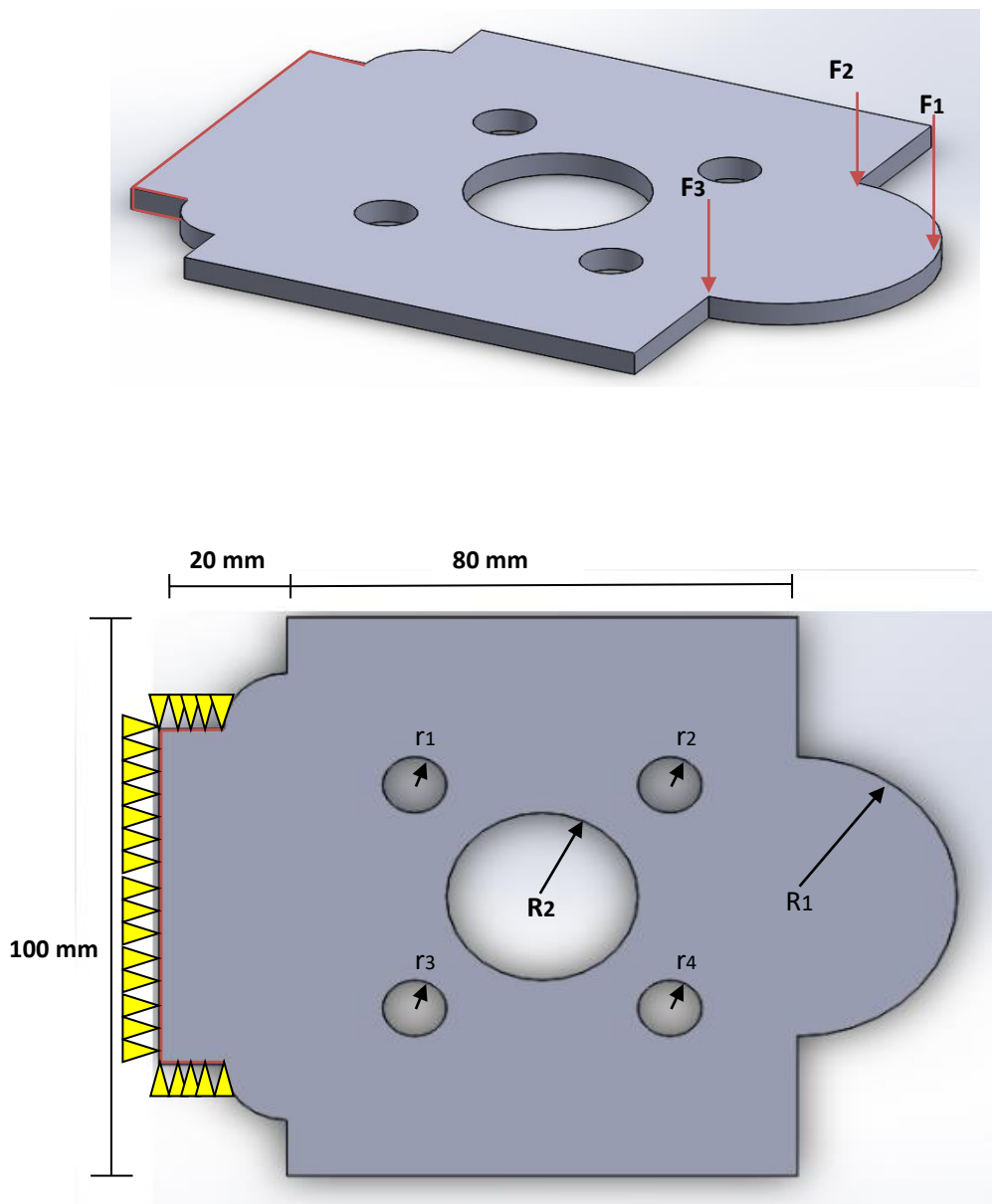
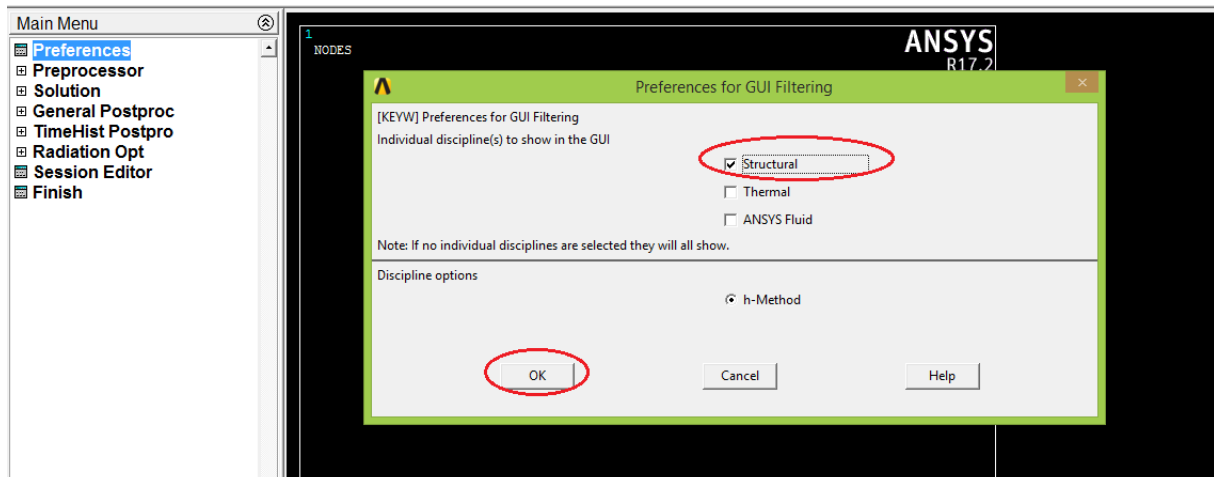
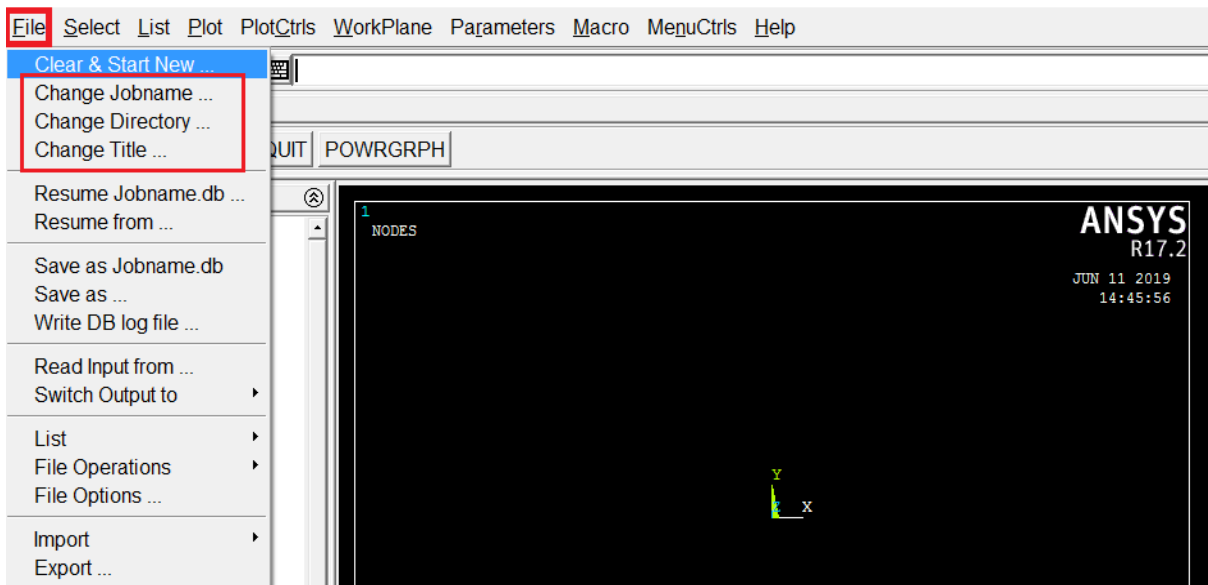
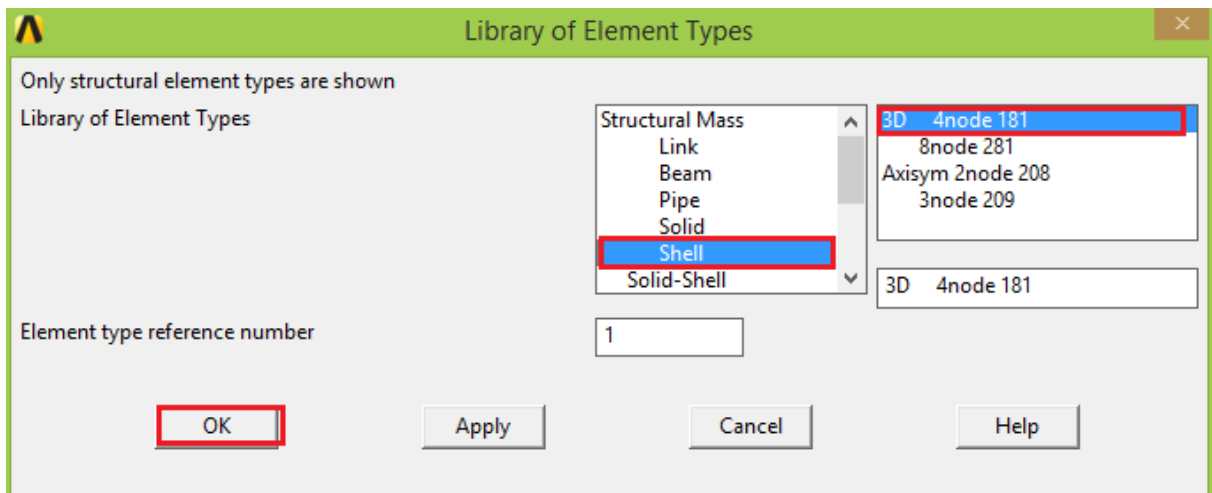
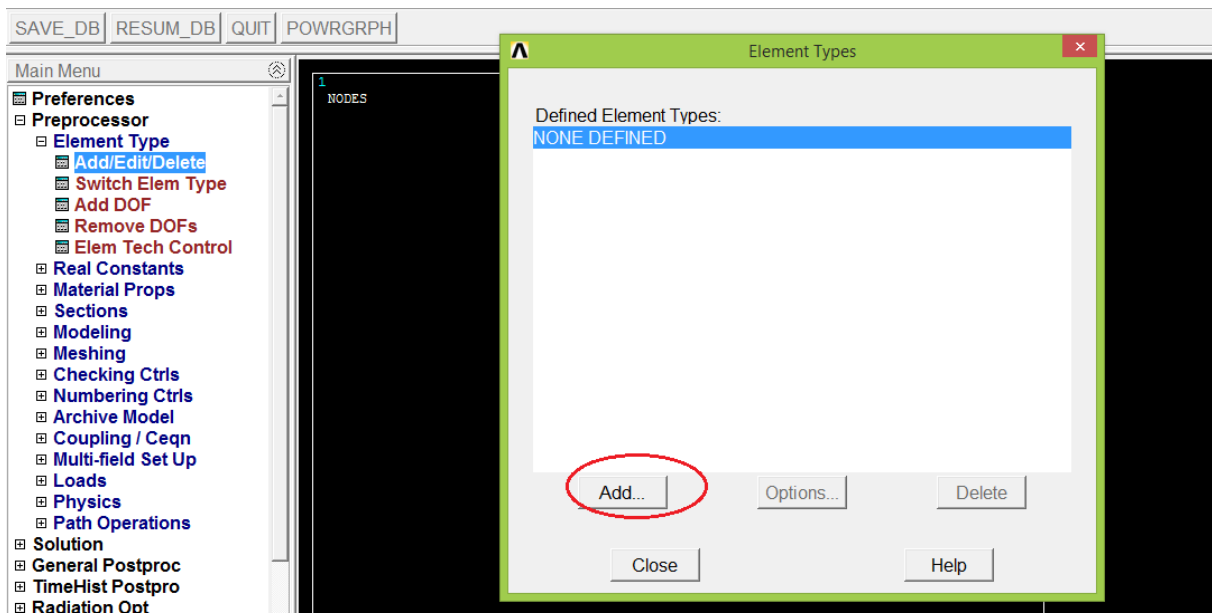
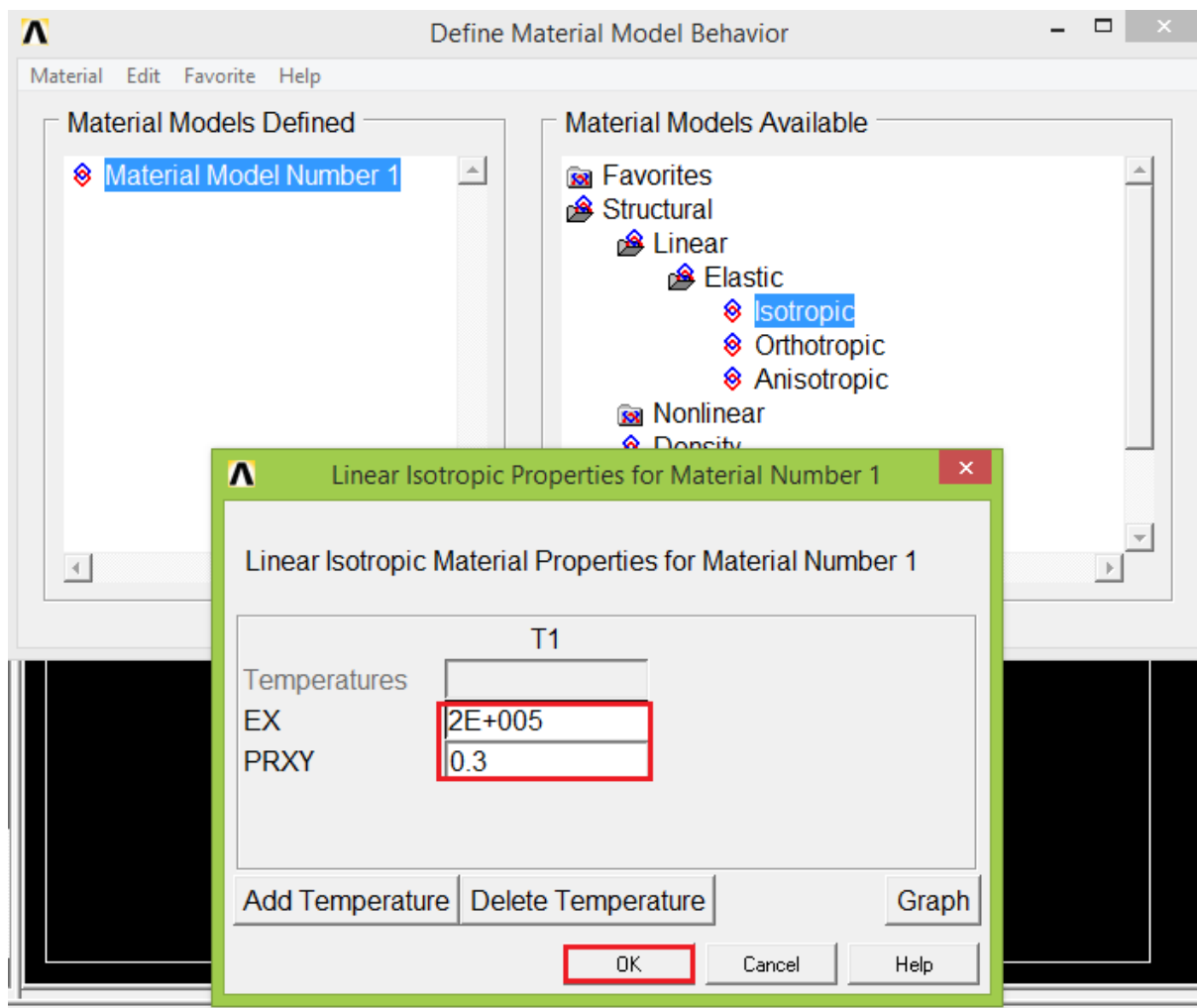
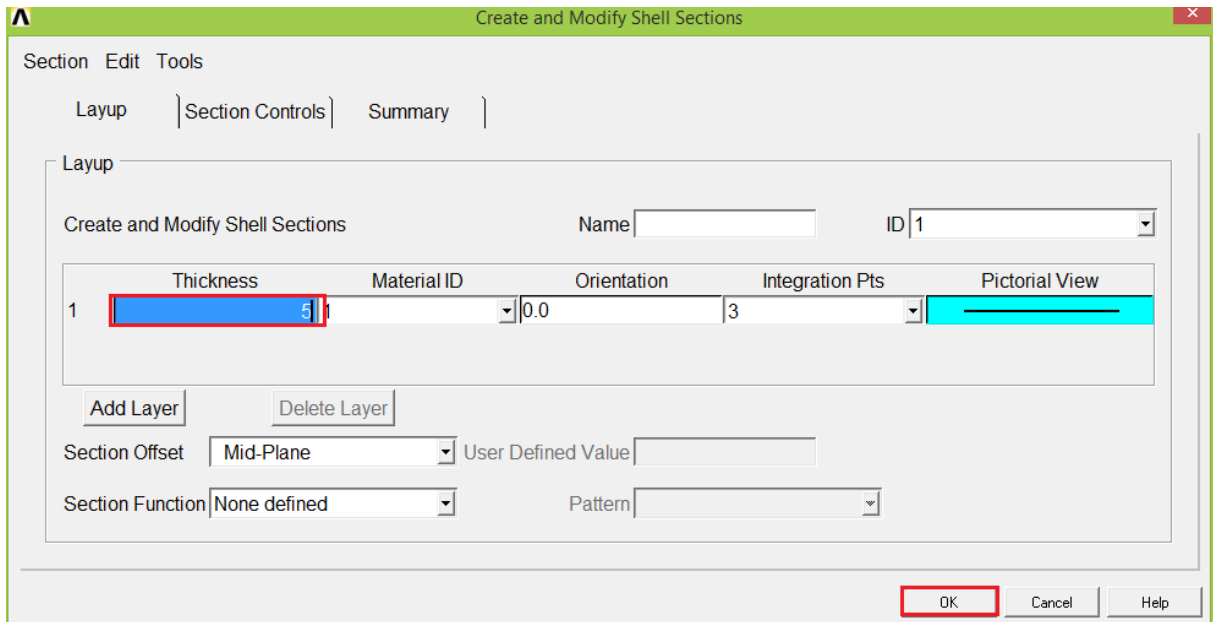
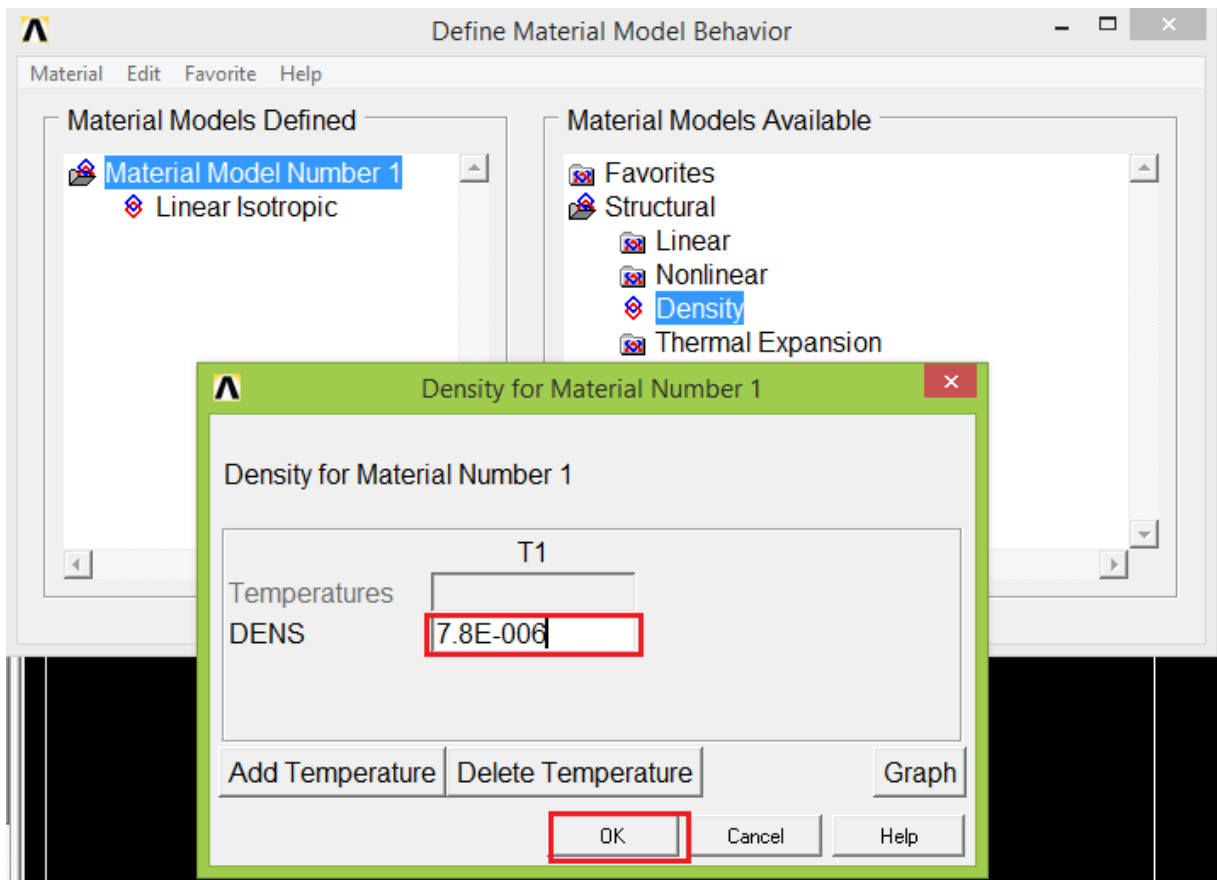


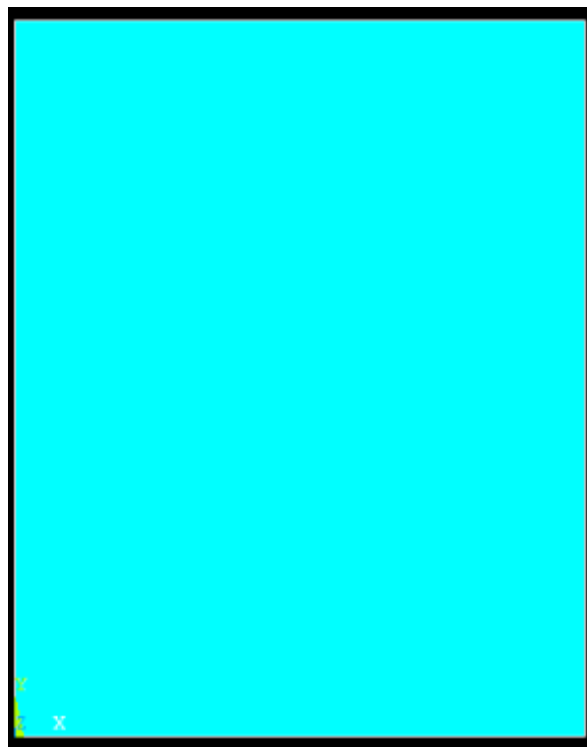
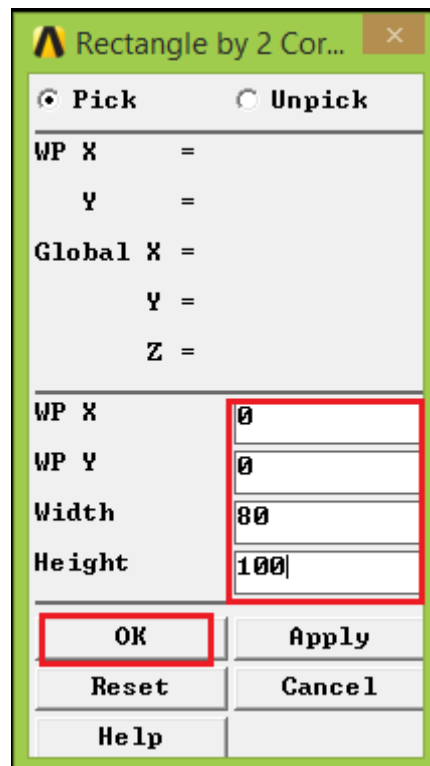
Figure 3.1: Support étudié

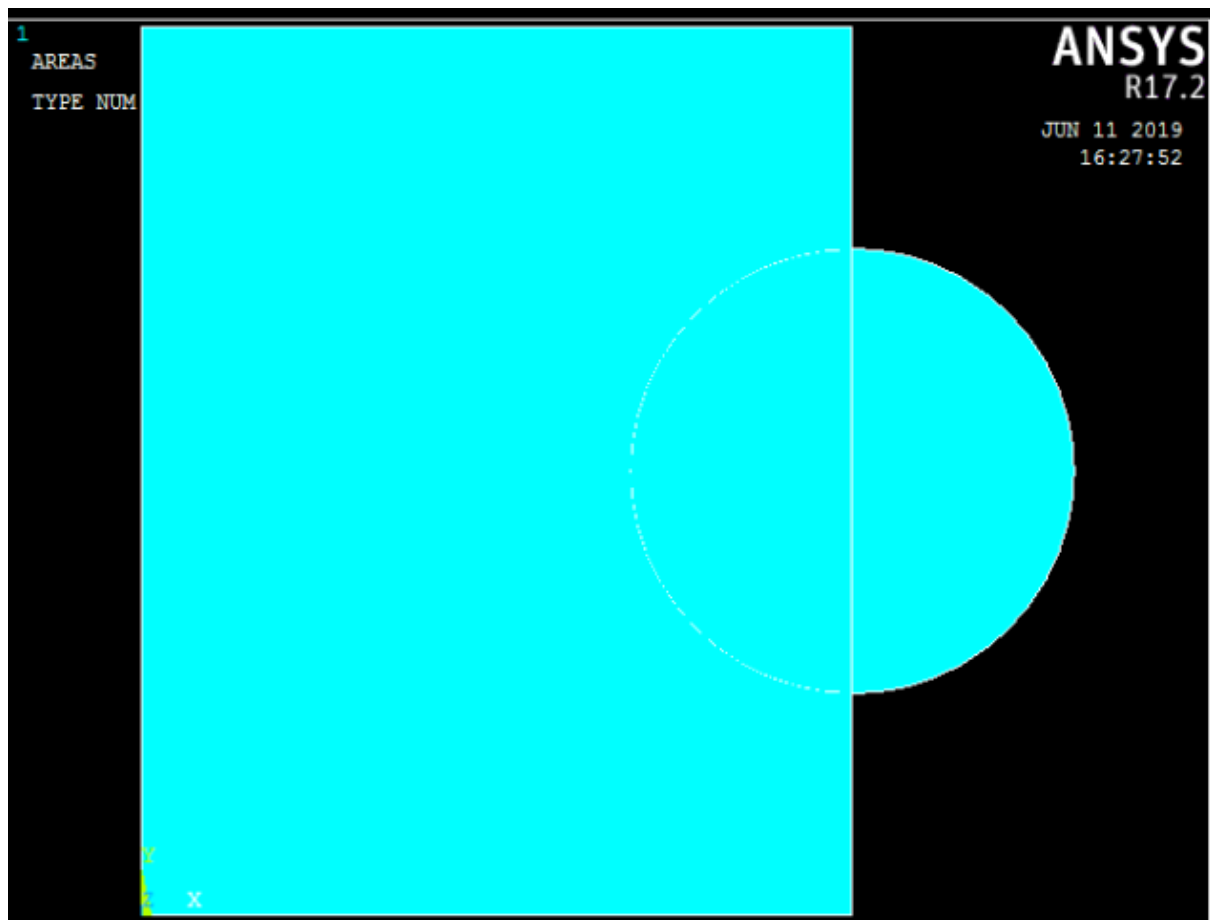
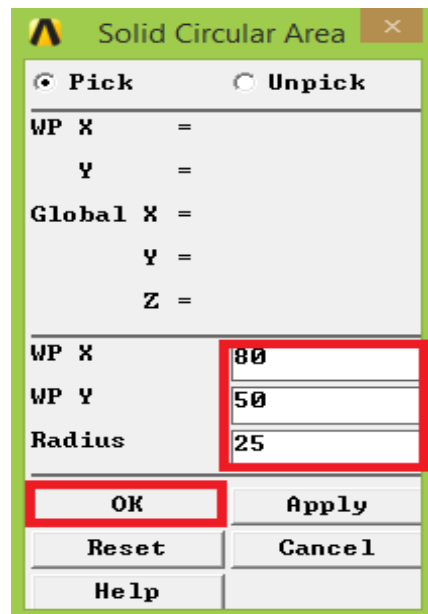


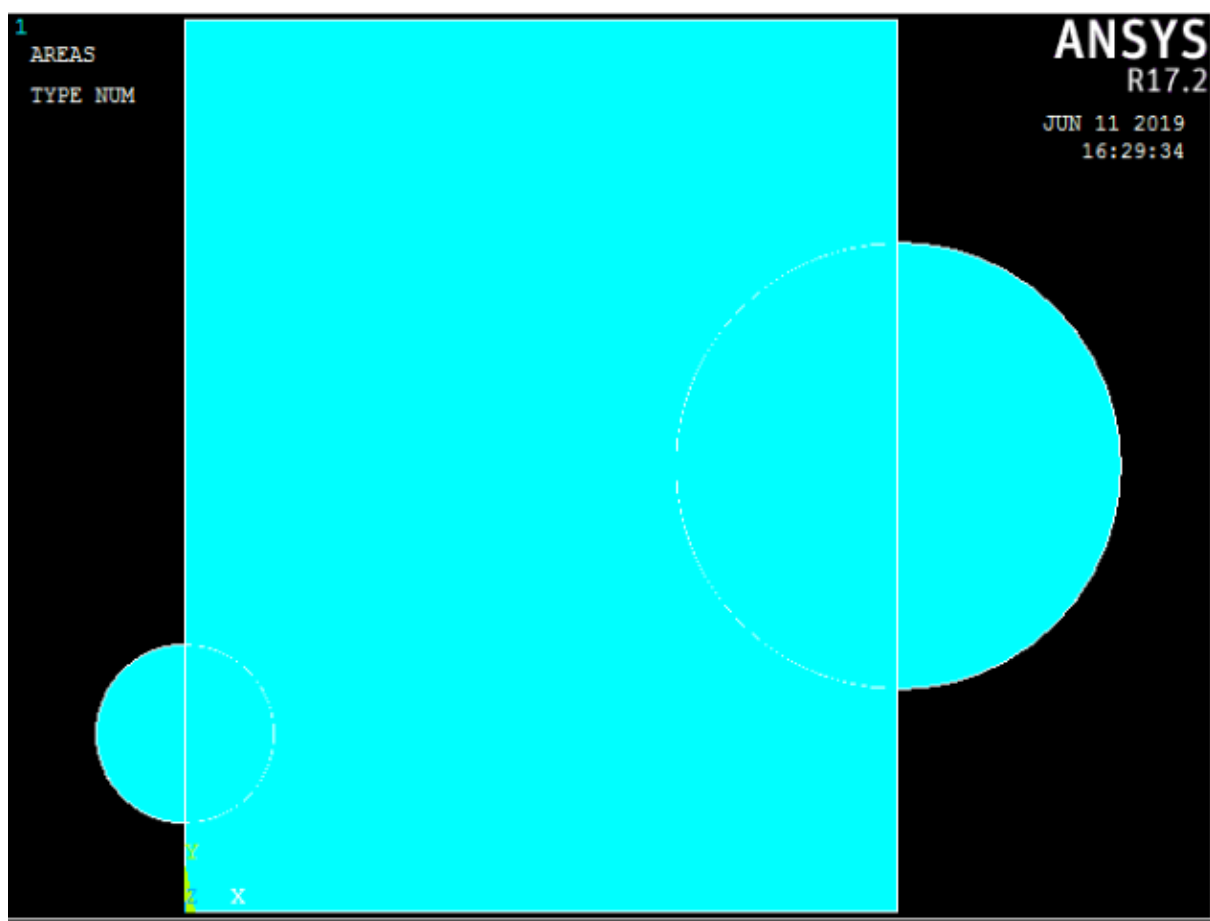
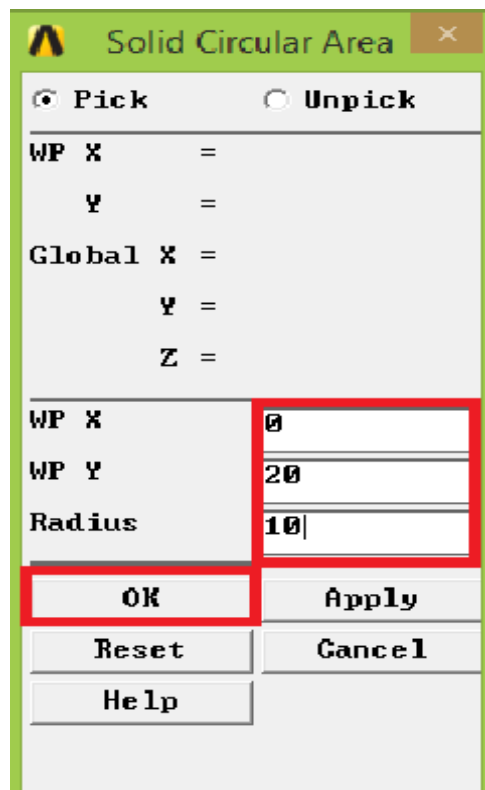


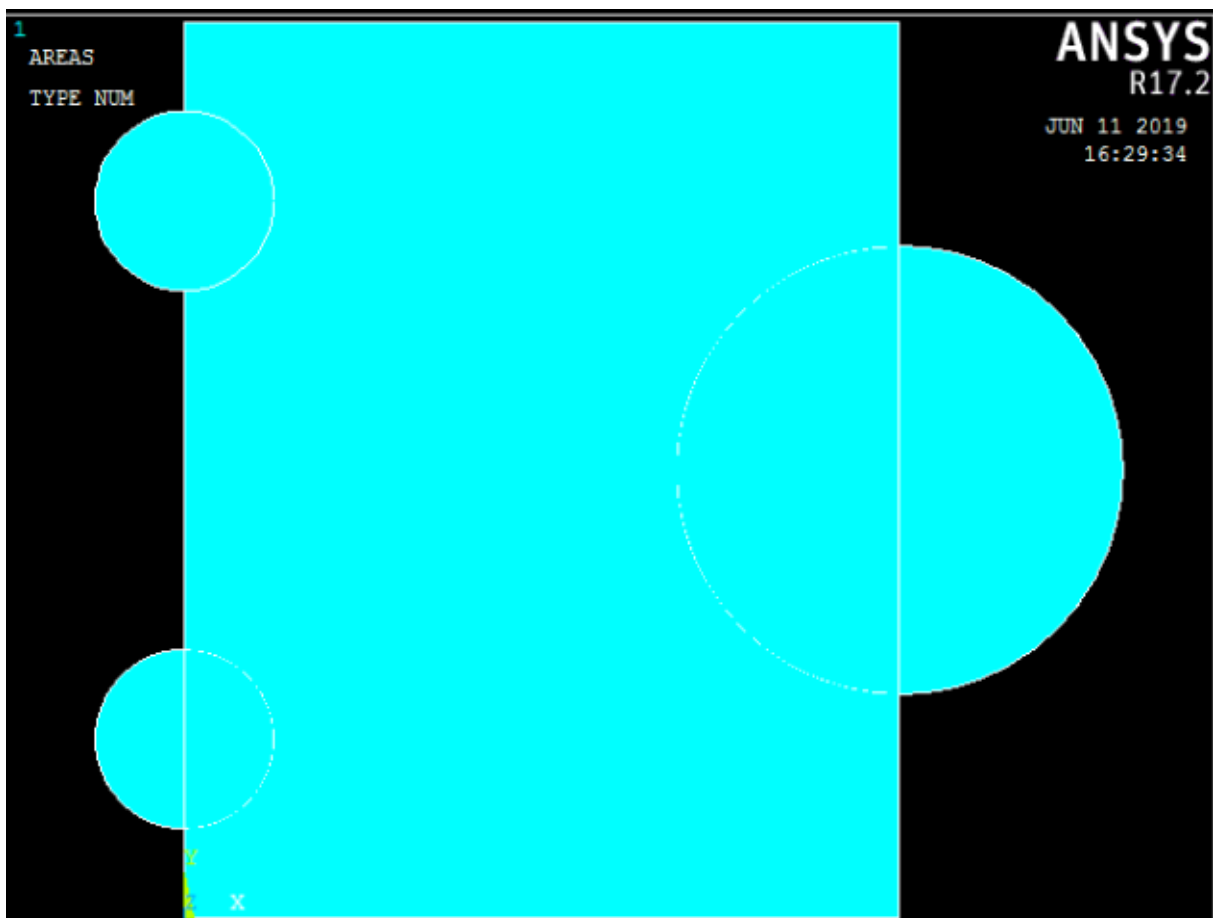
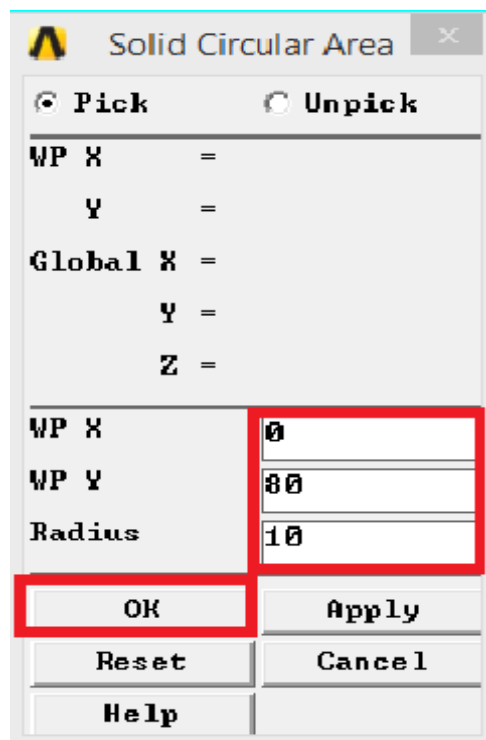


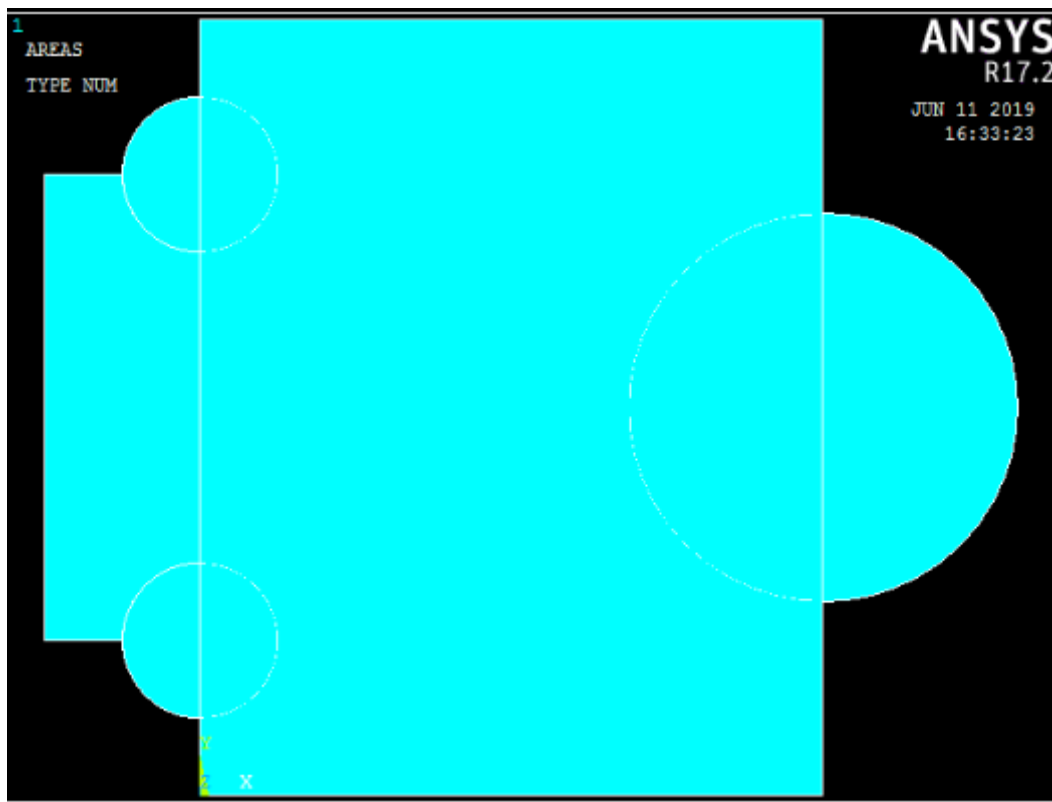
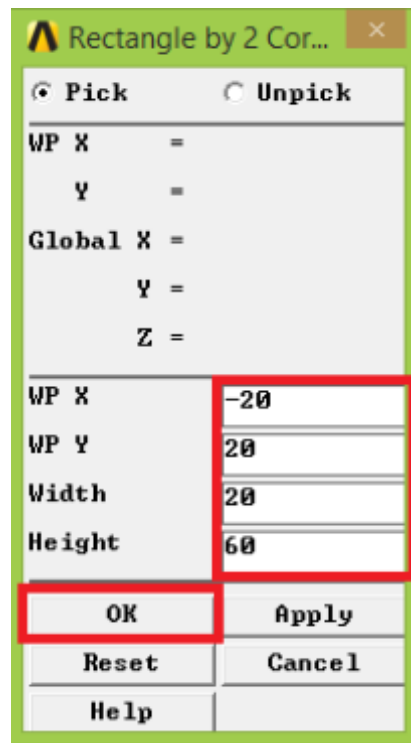


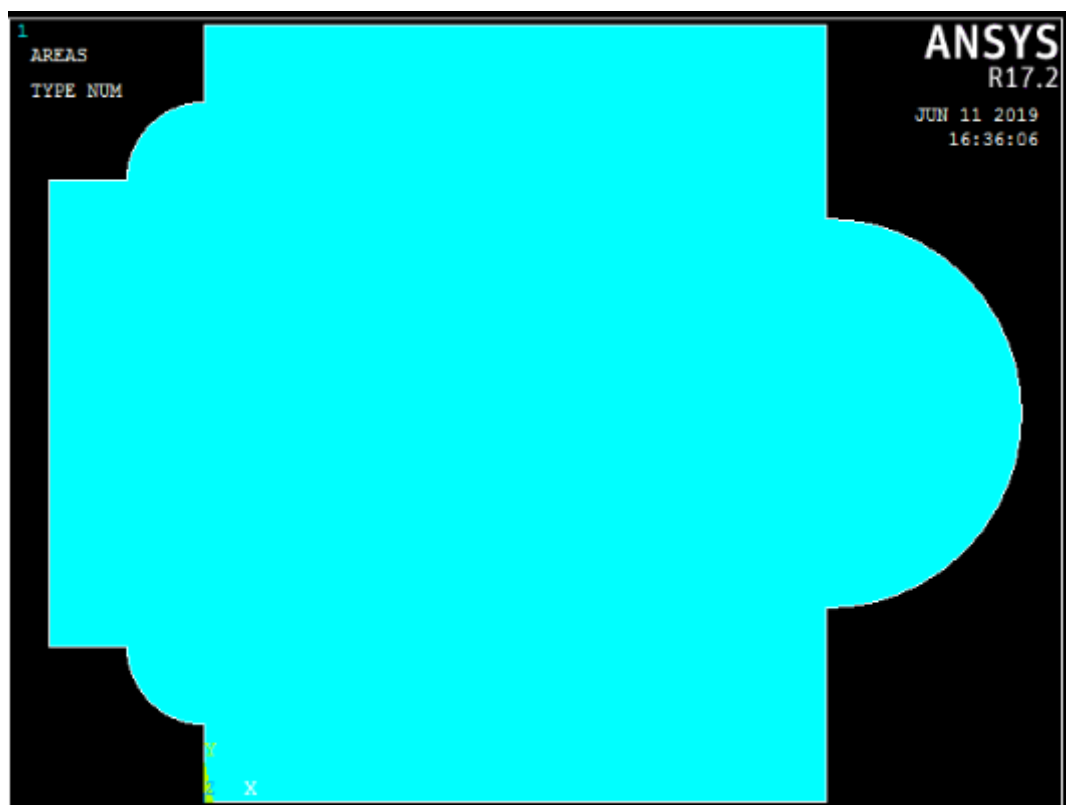
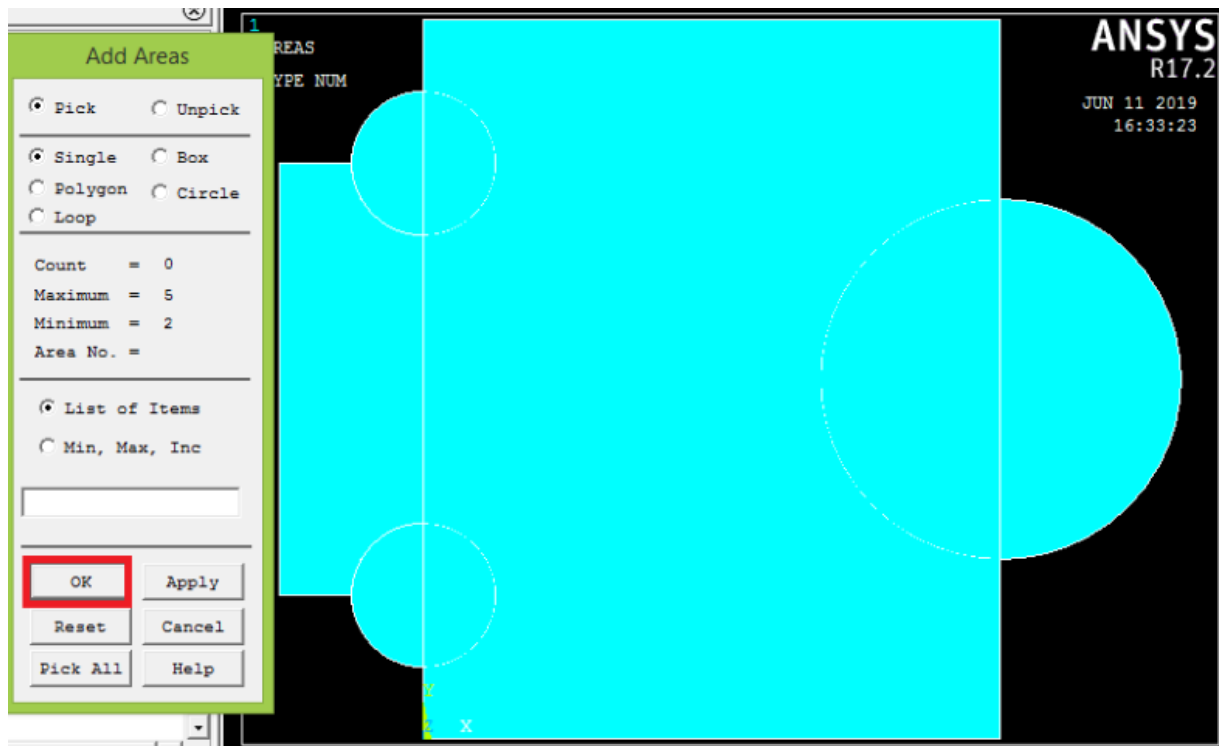


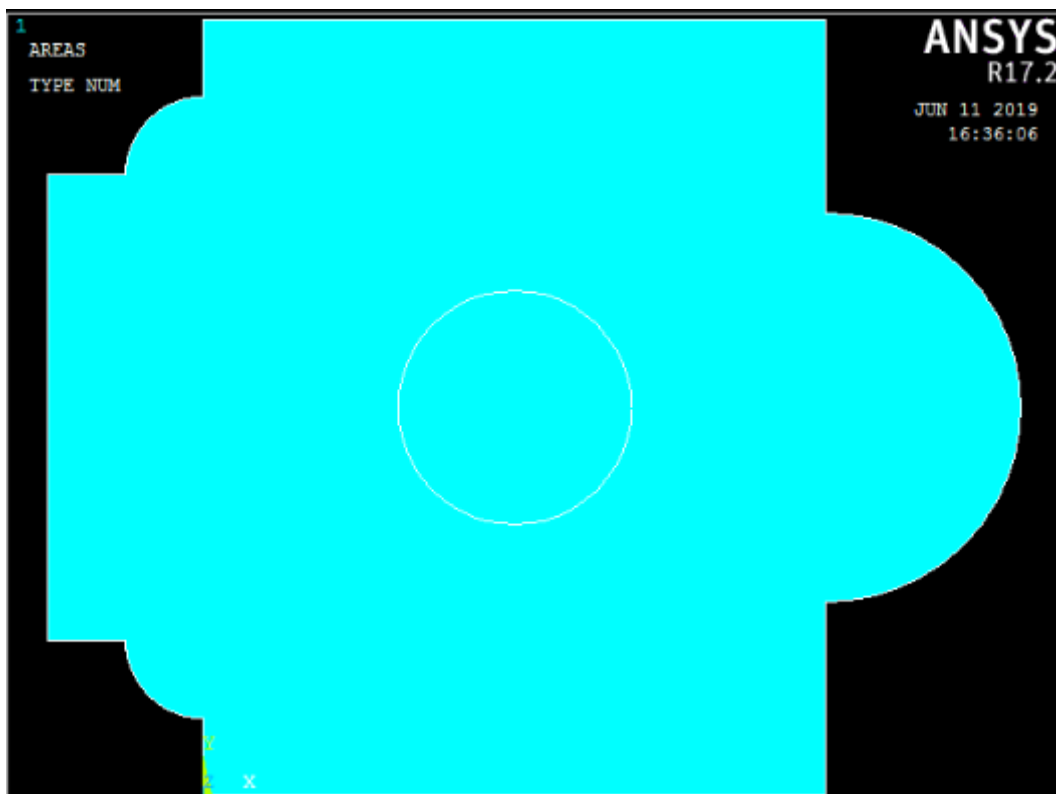
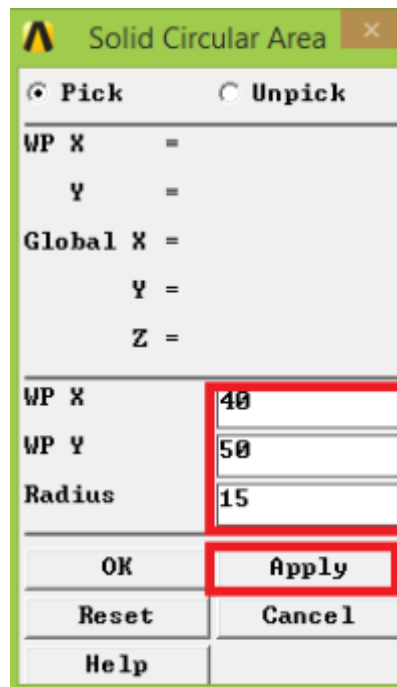


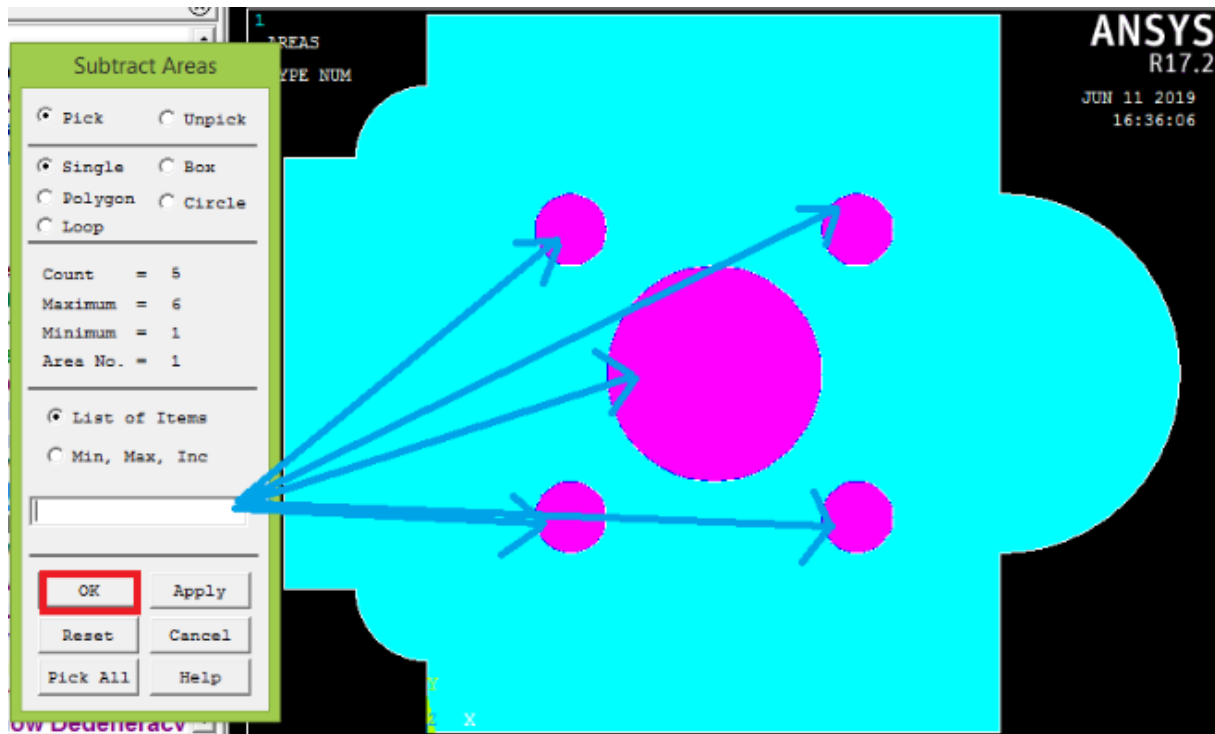
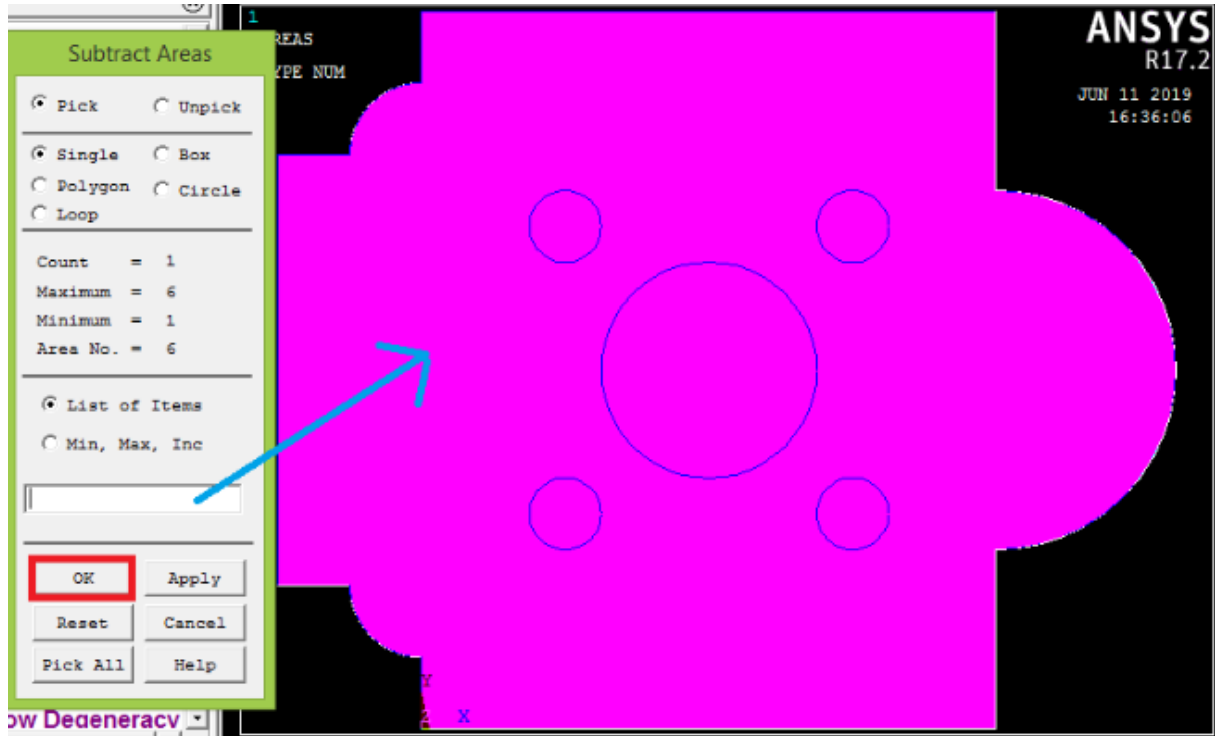


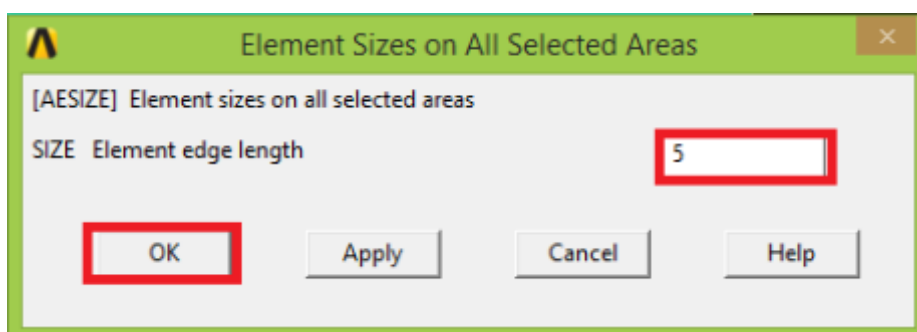
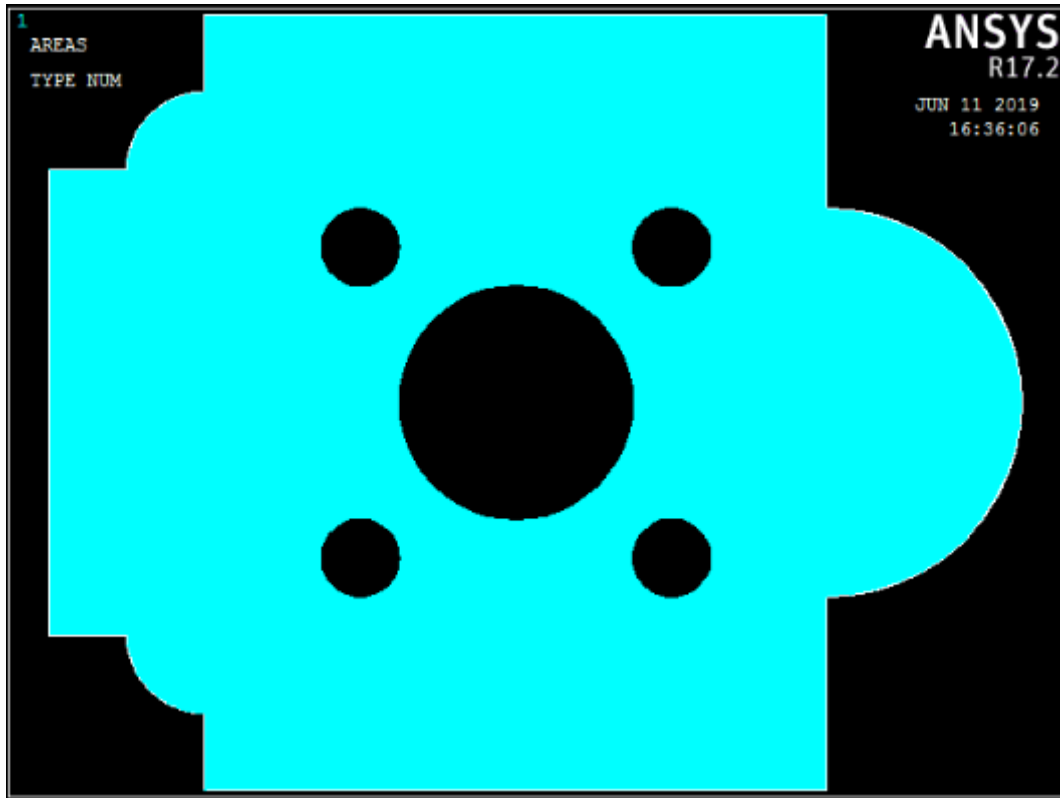


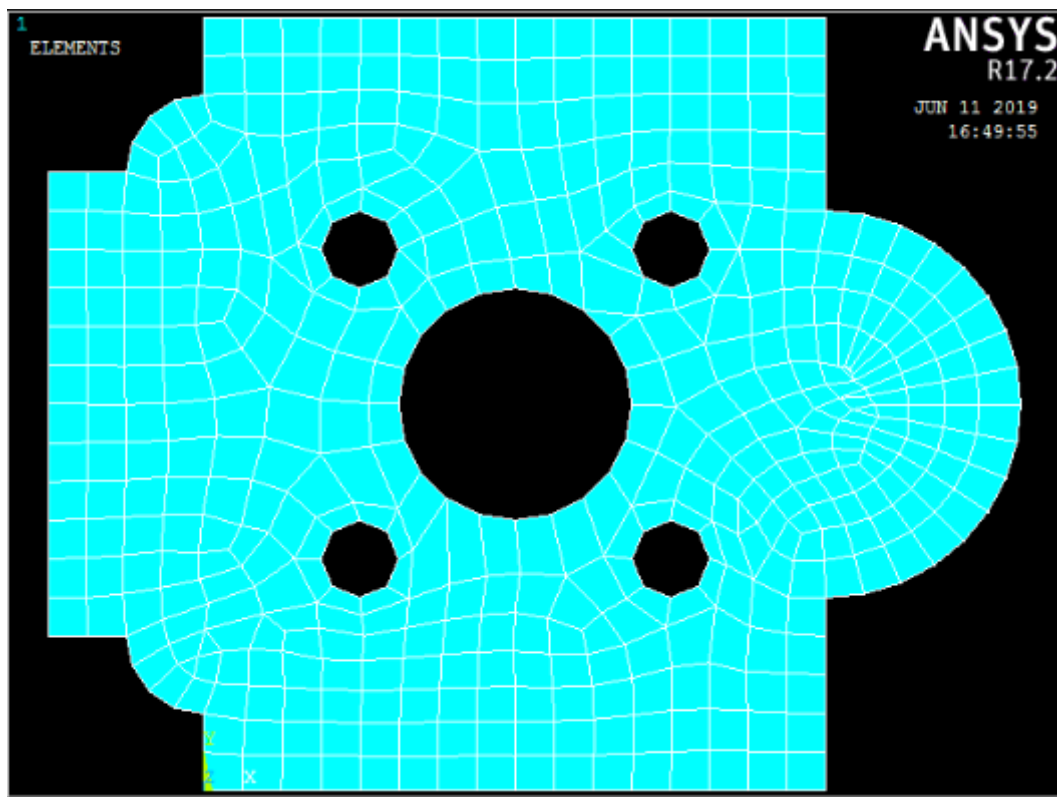
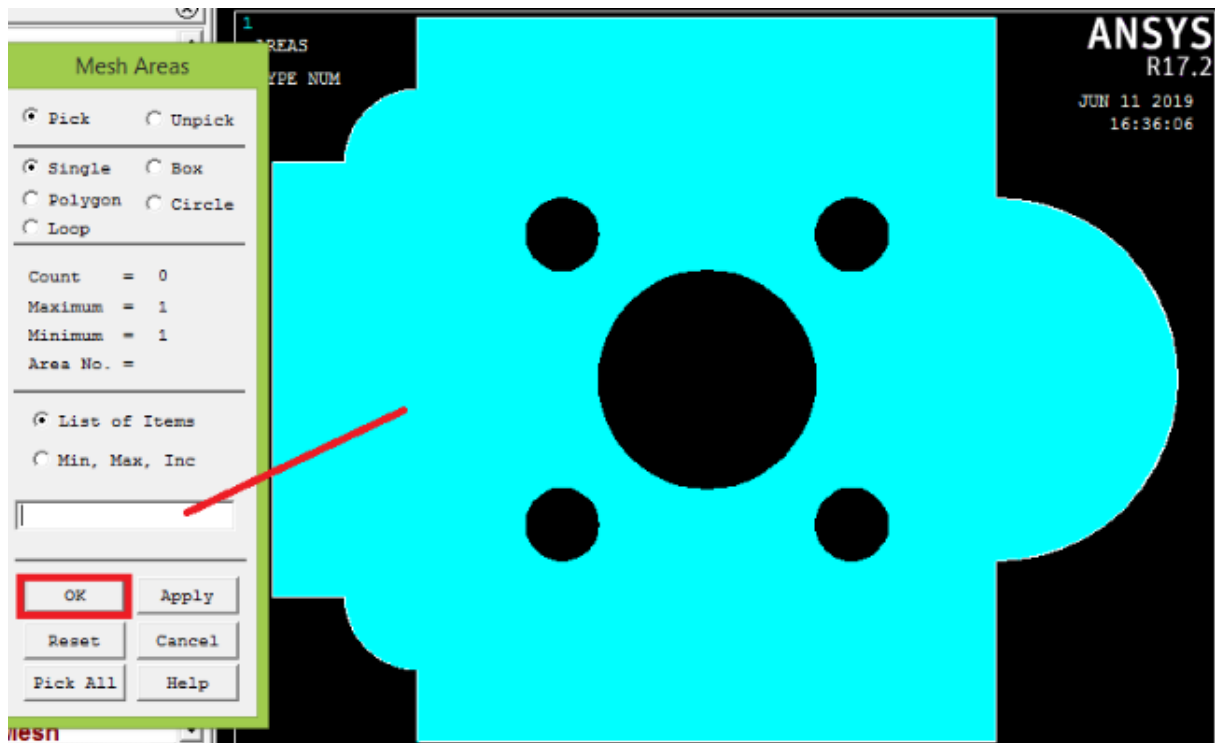


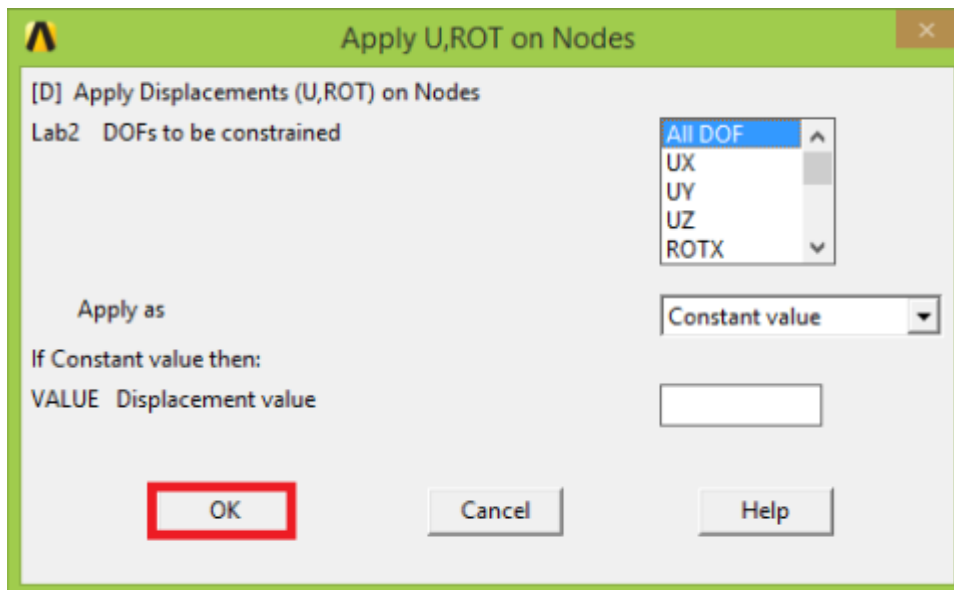
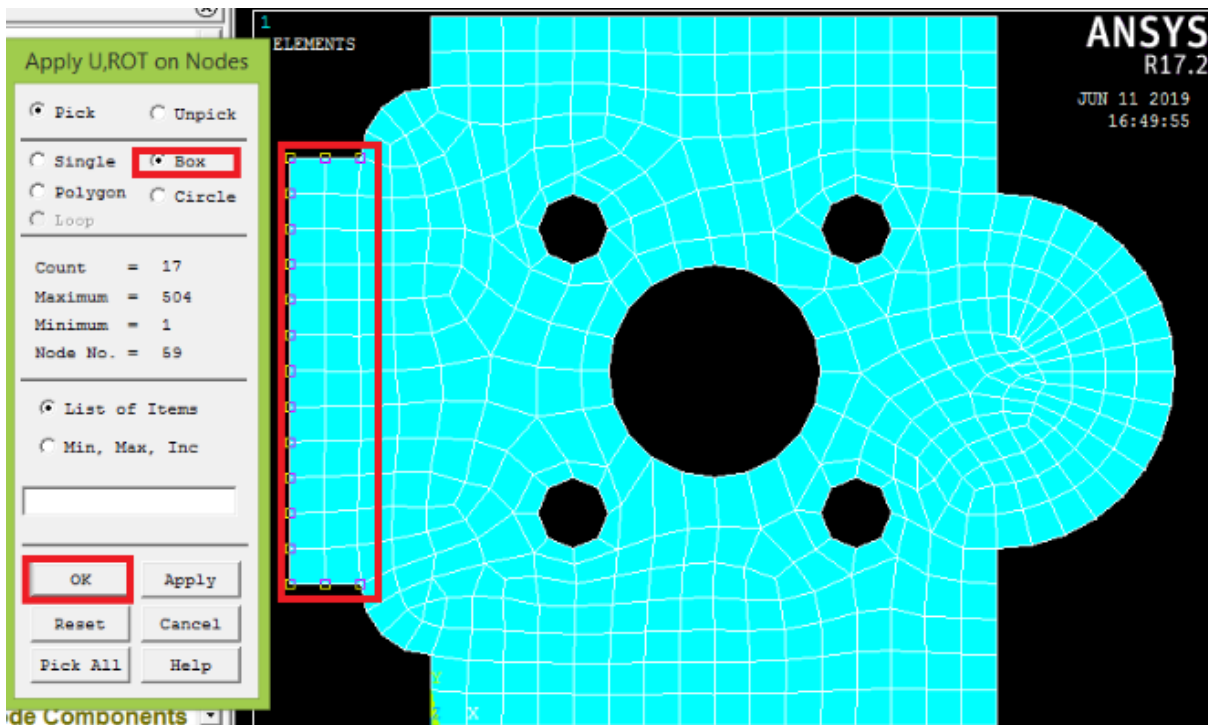


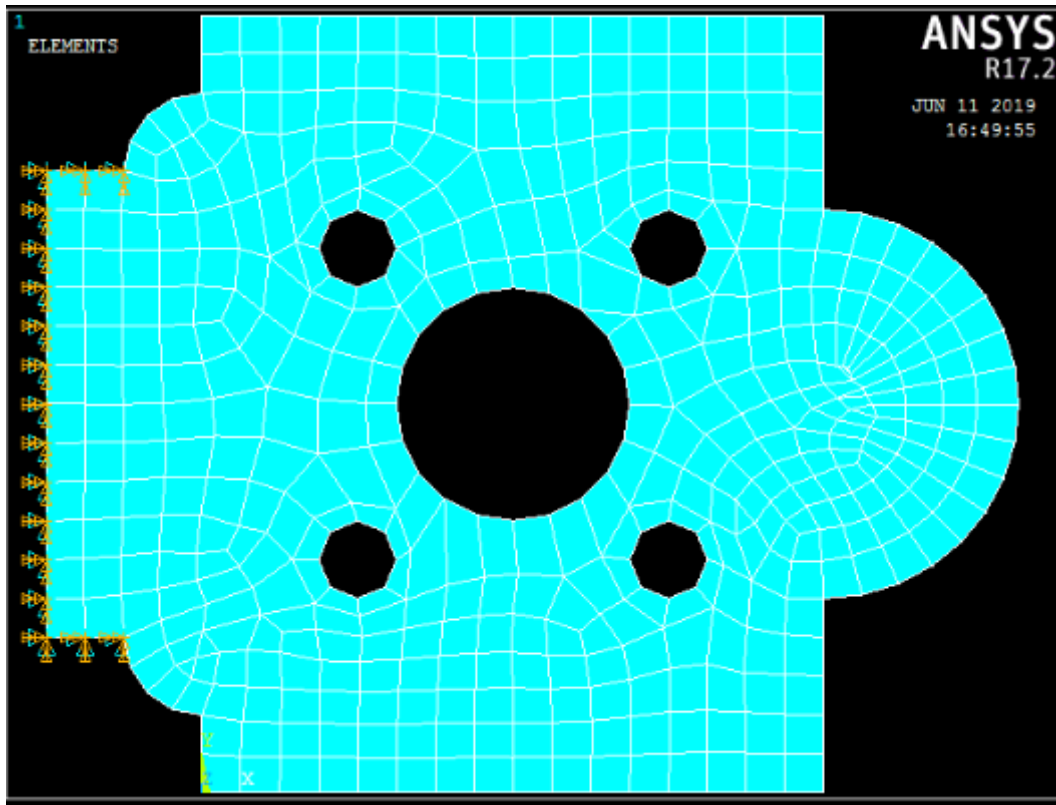


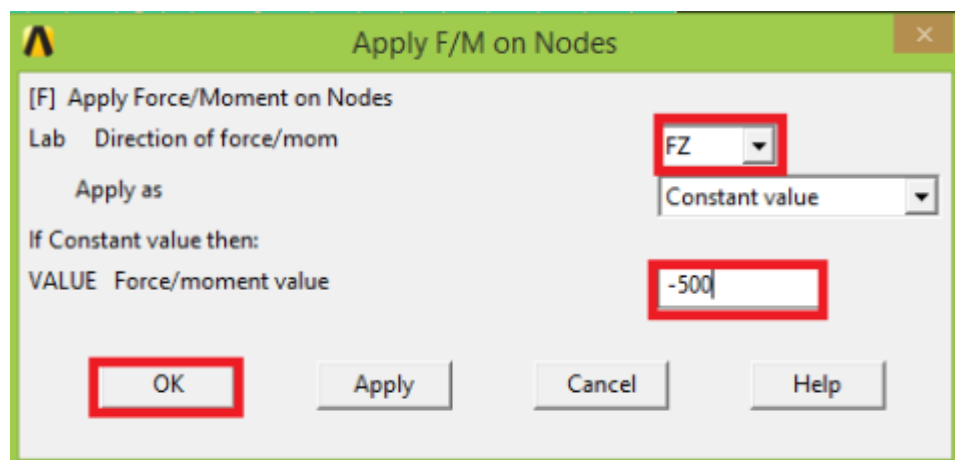
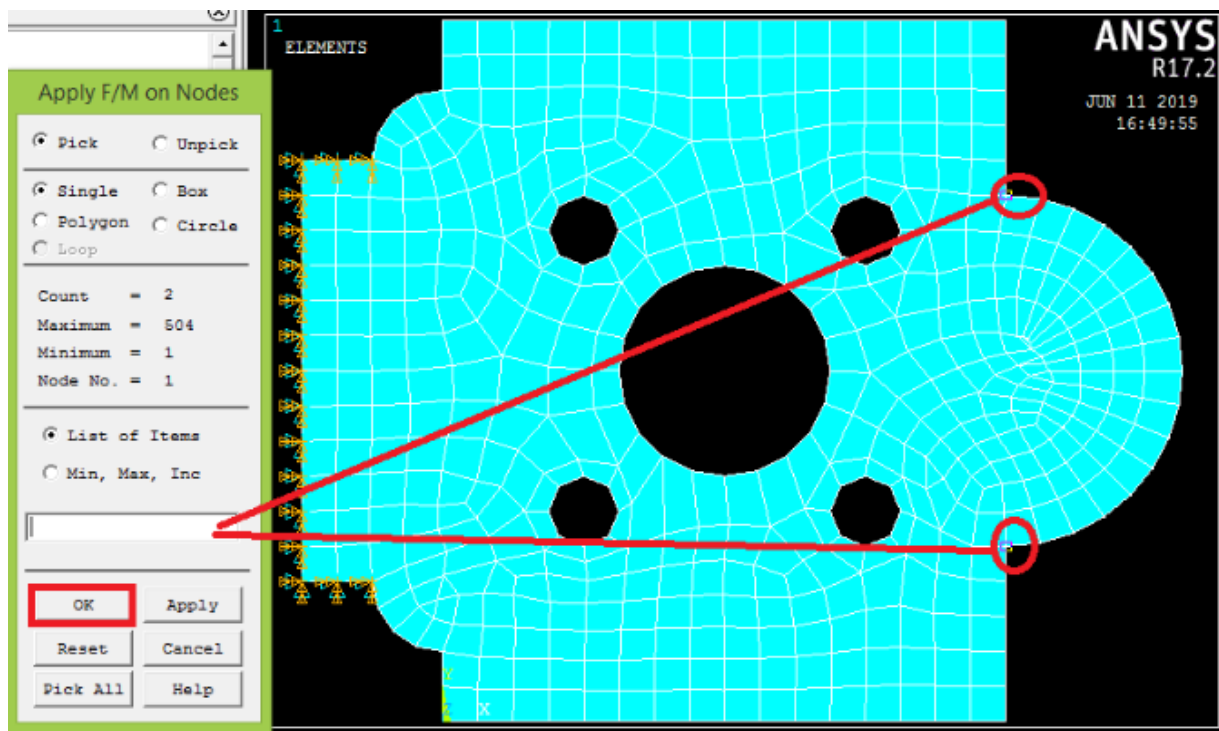


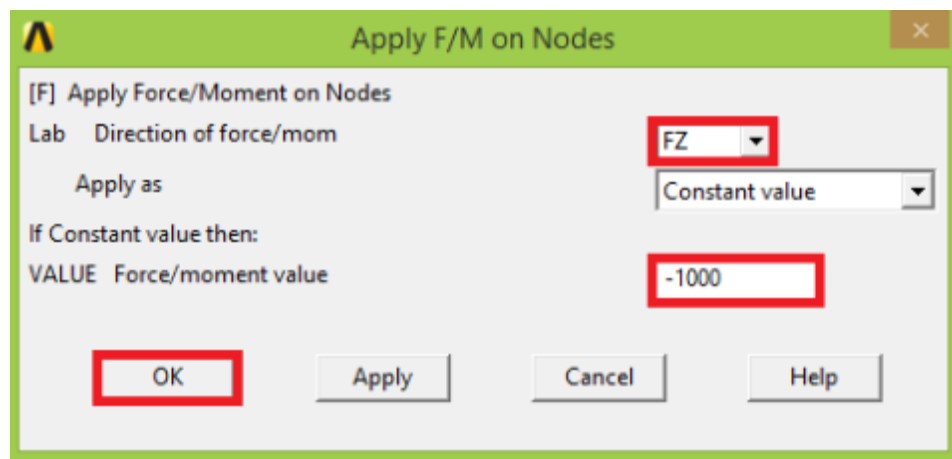
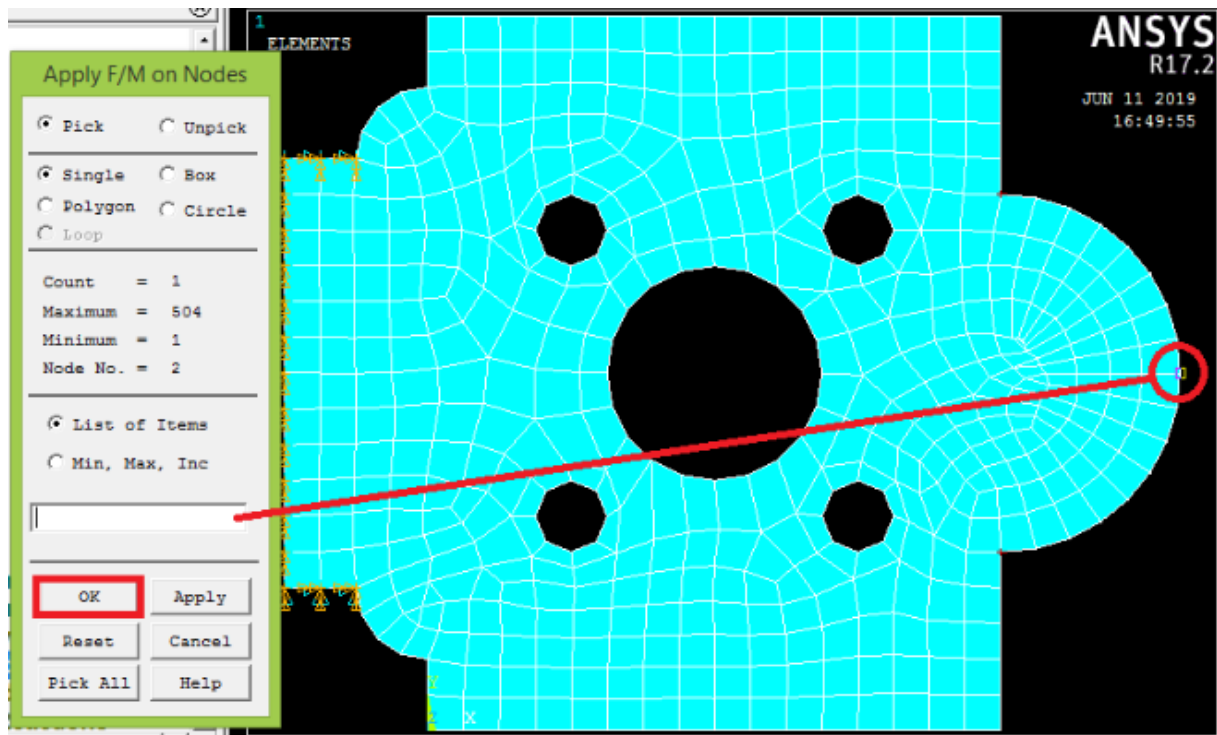


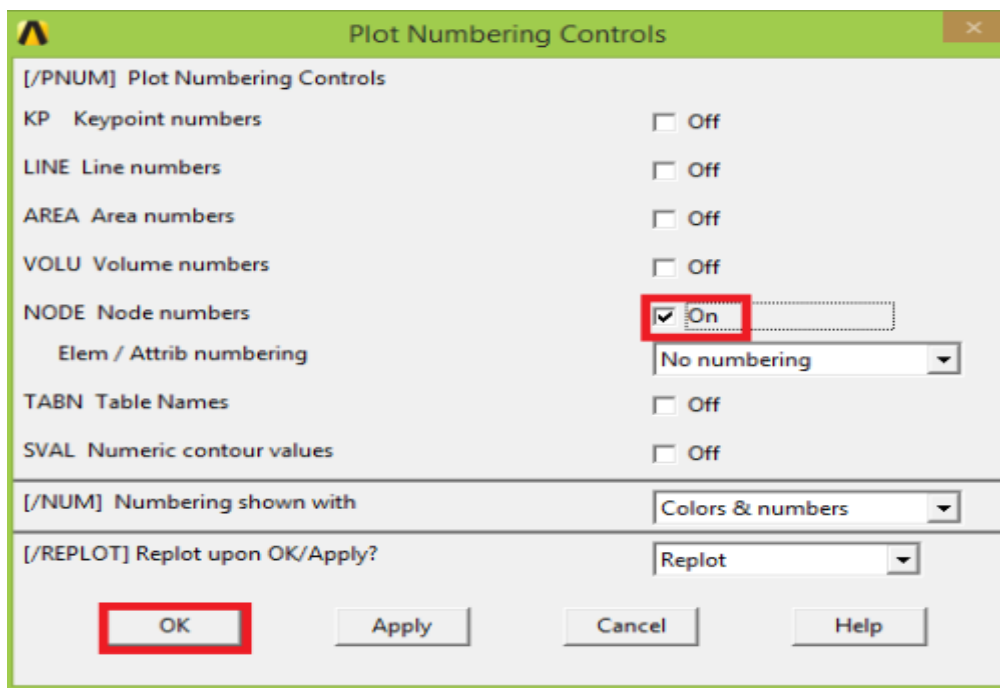
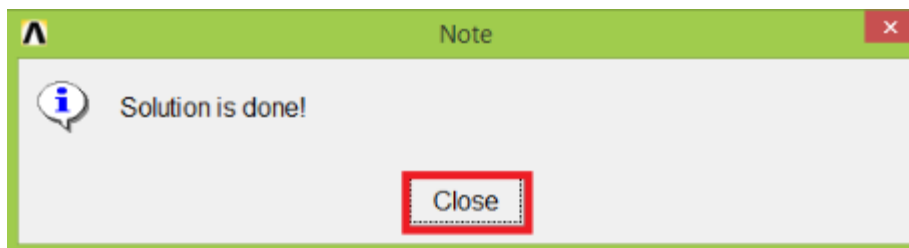
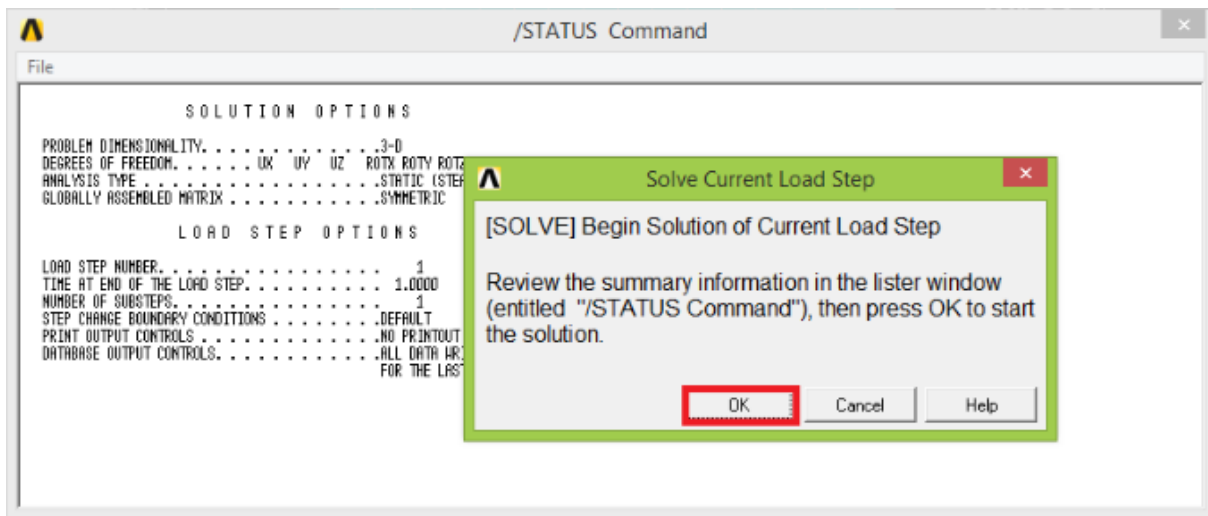


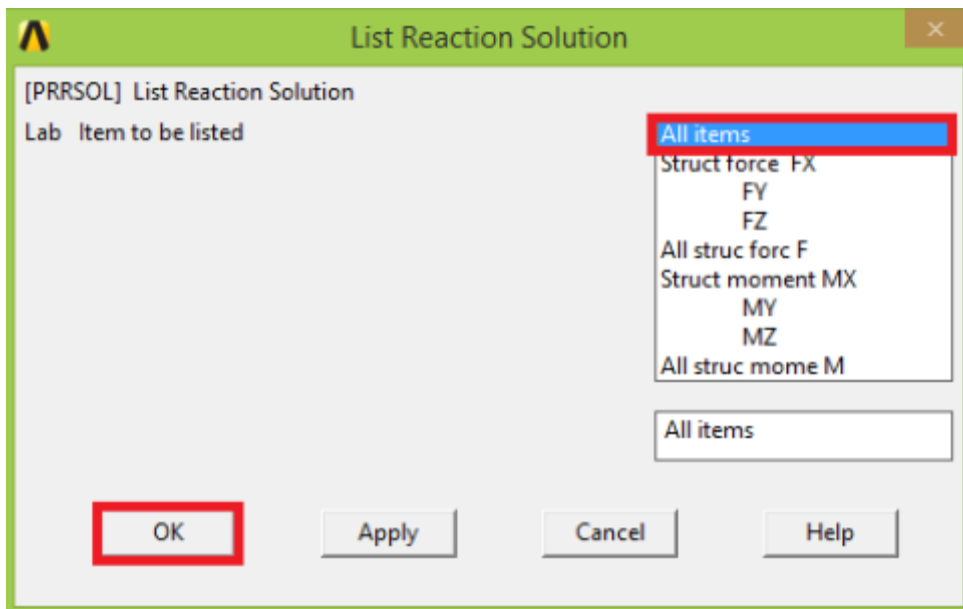
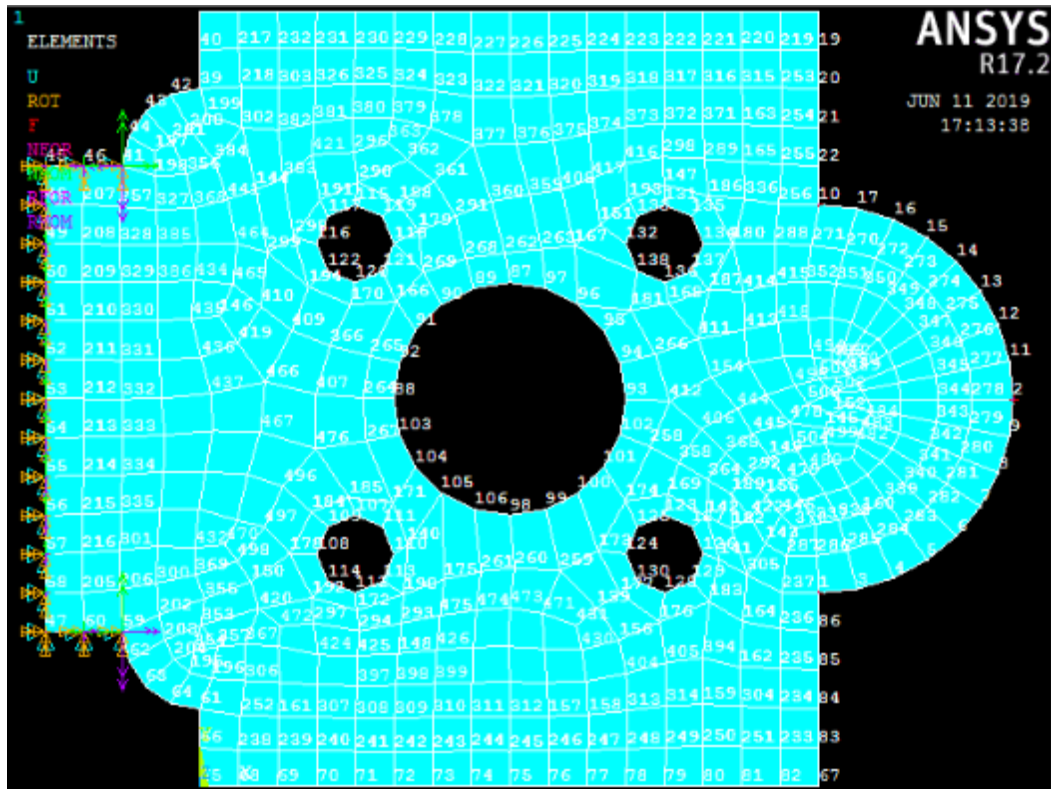


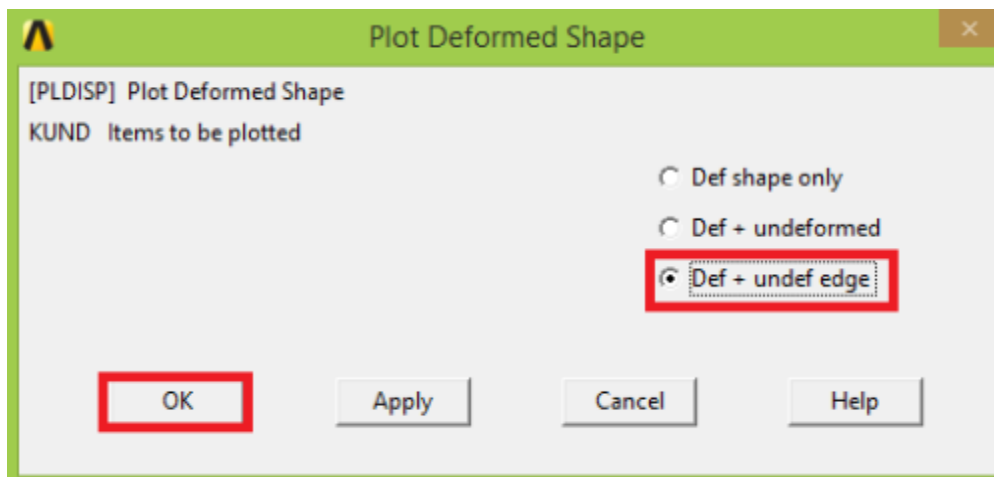
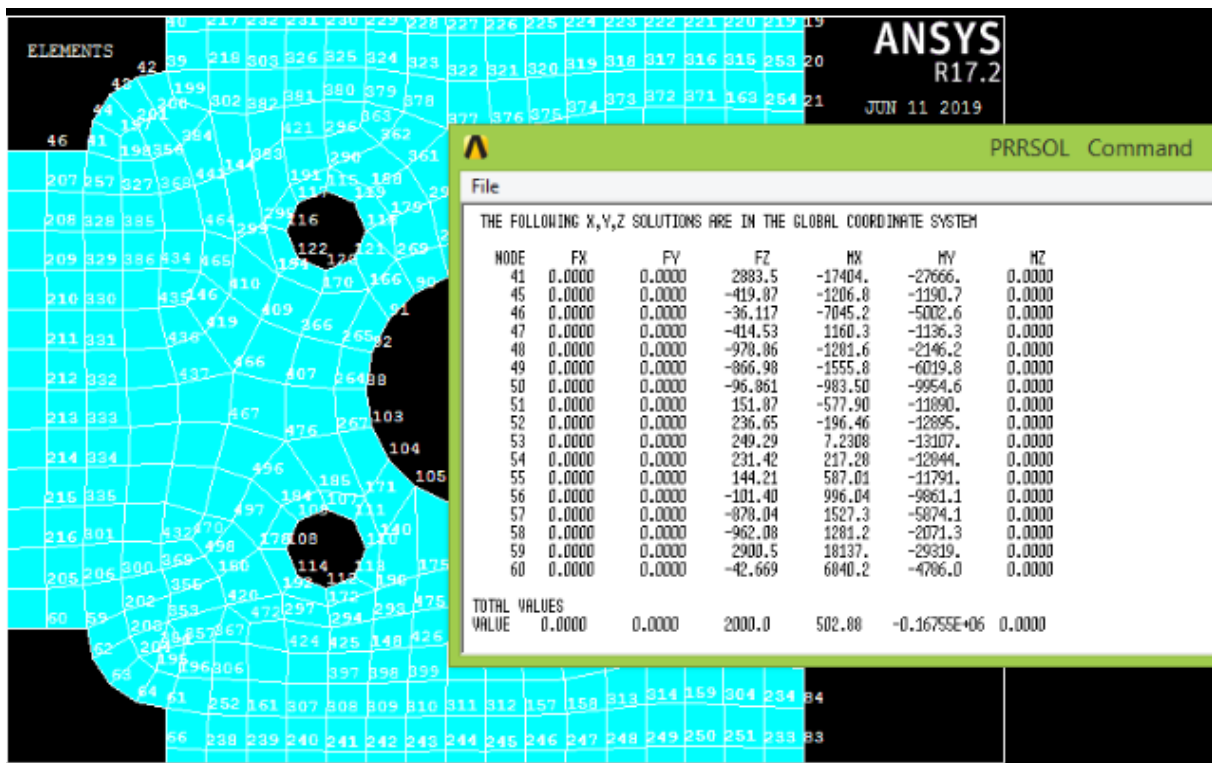


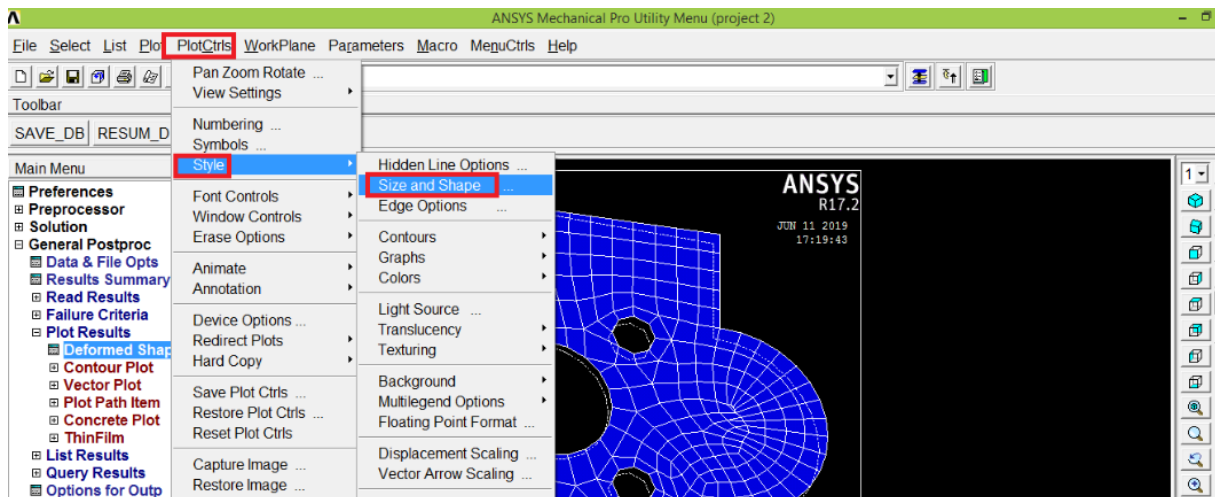
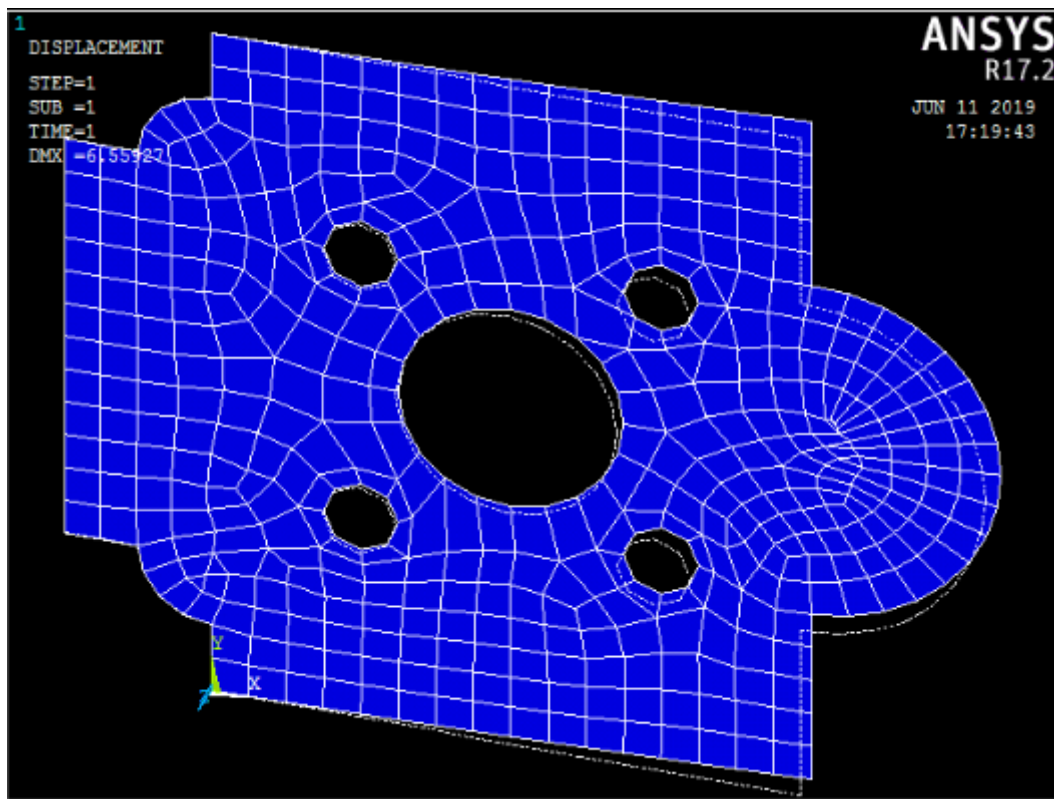


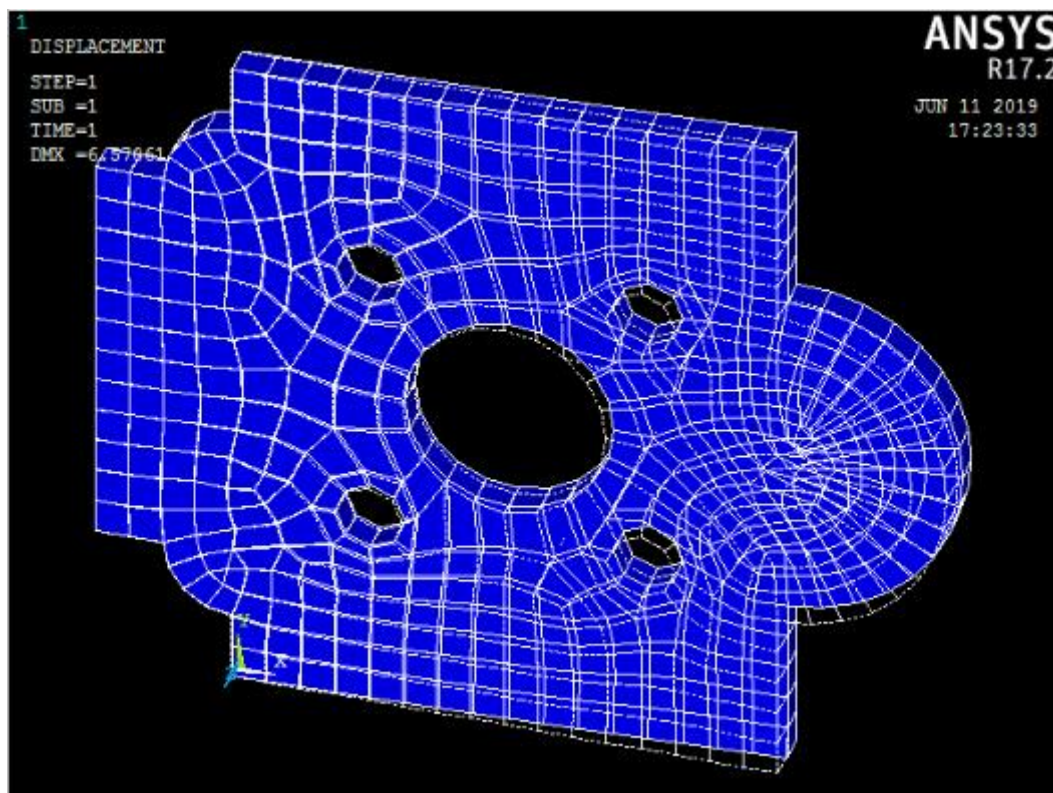
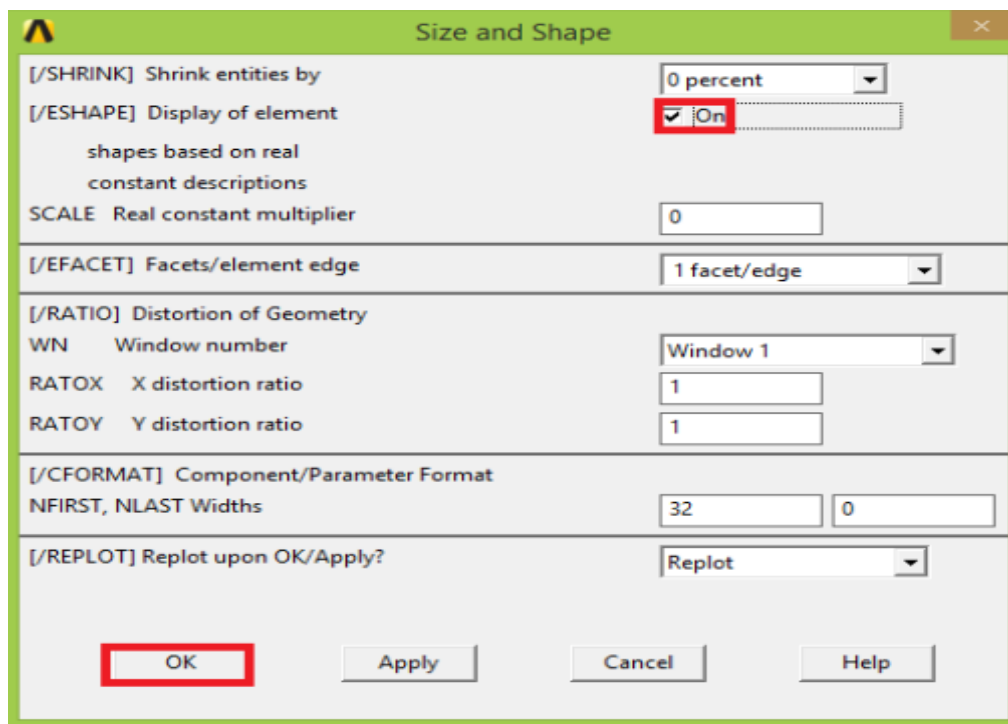


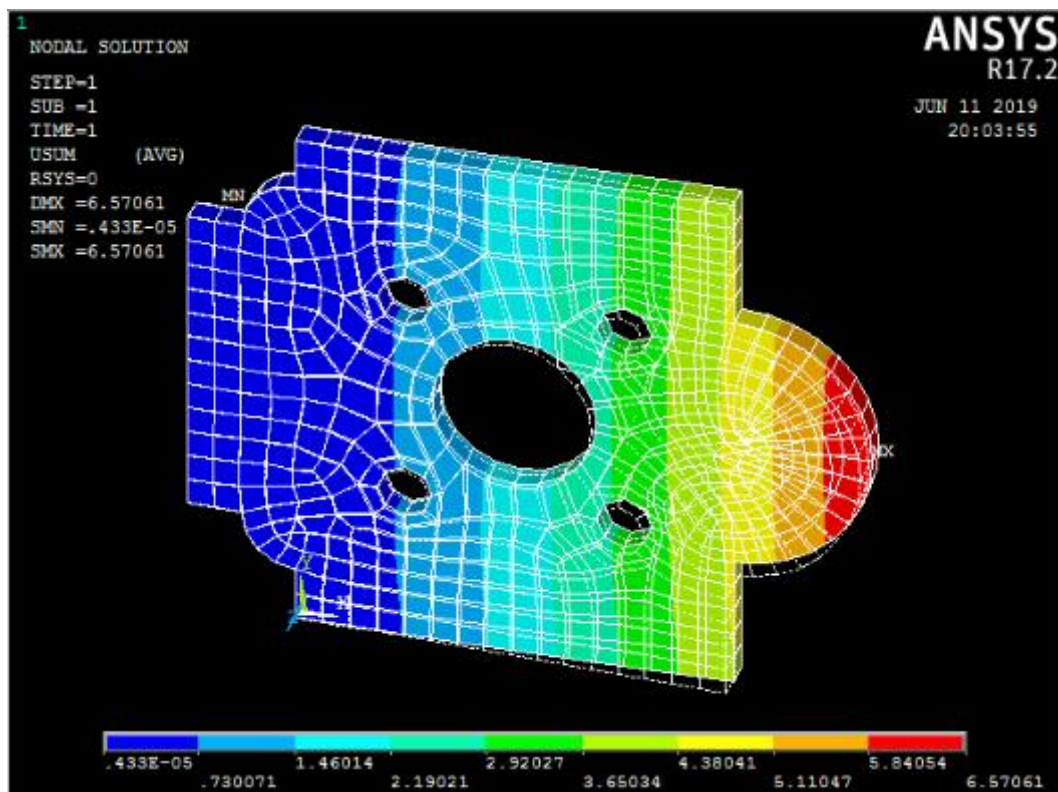
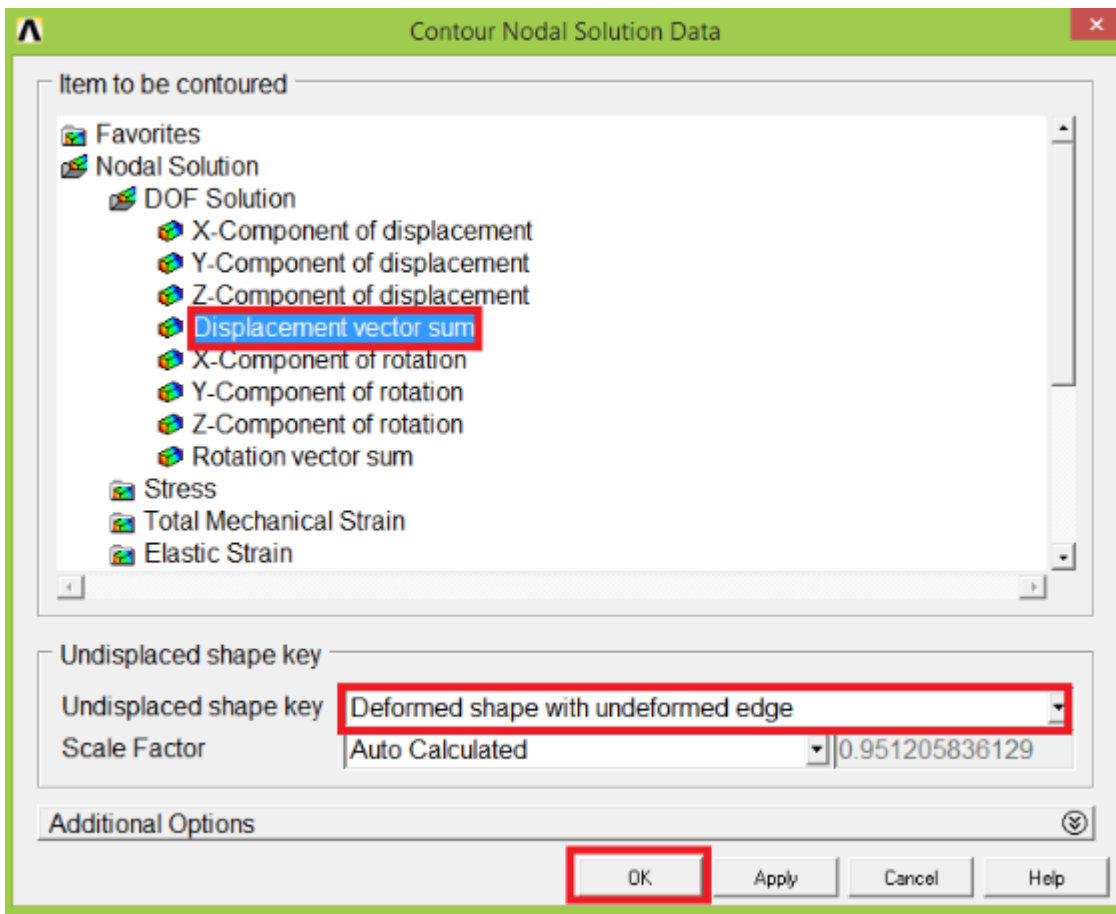


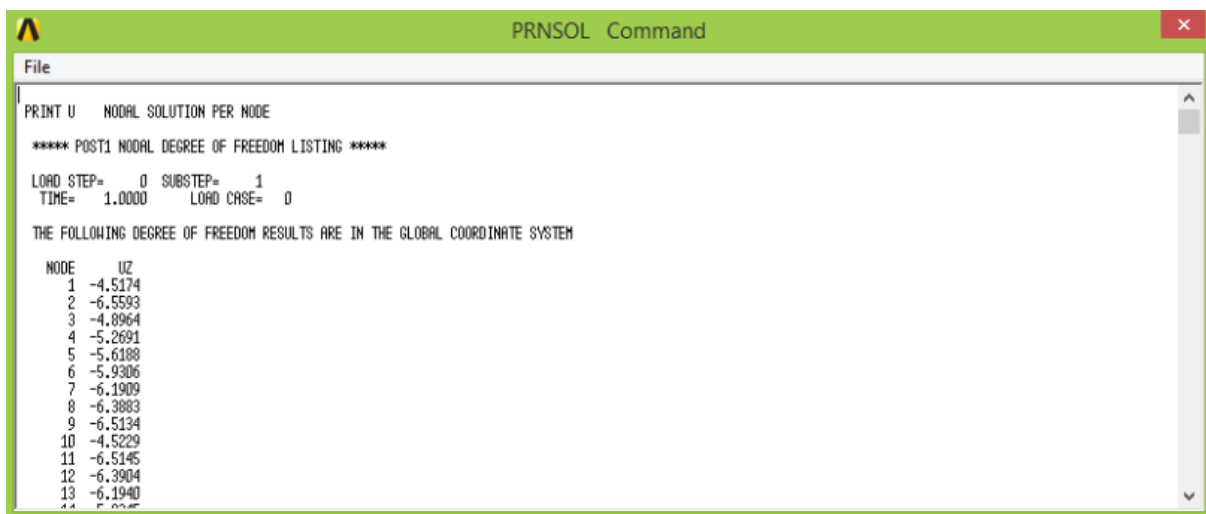
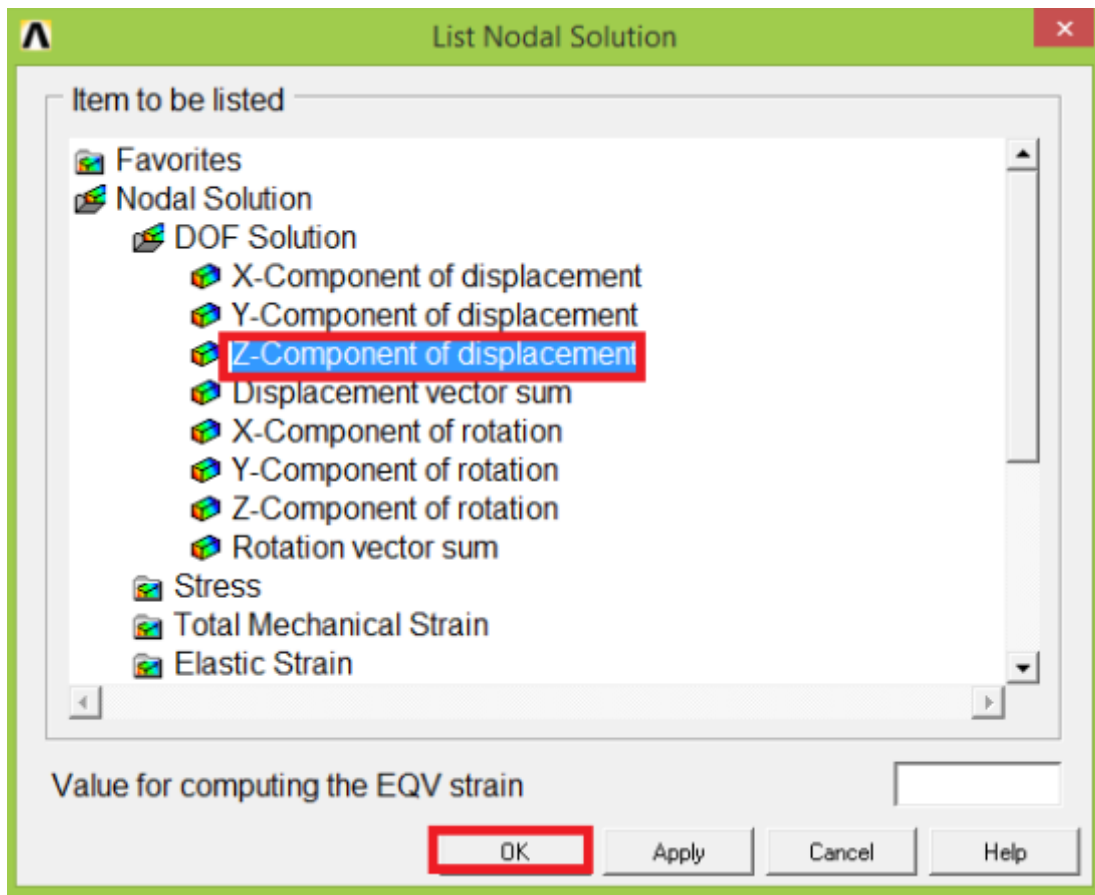


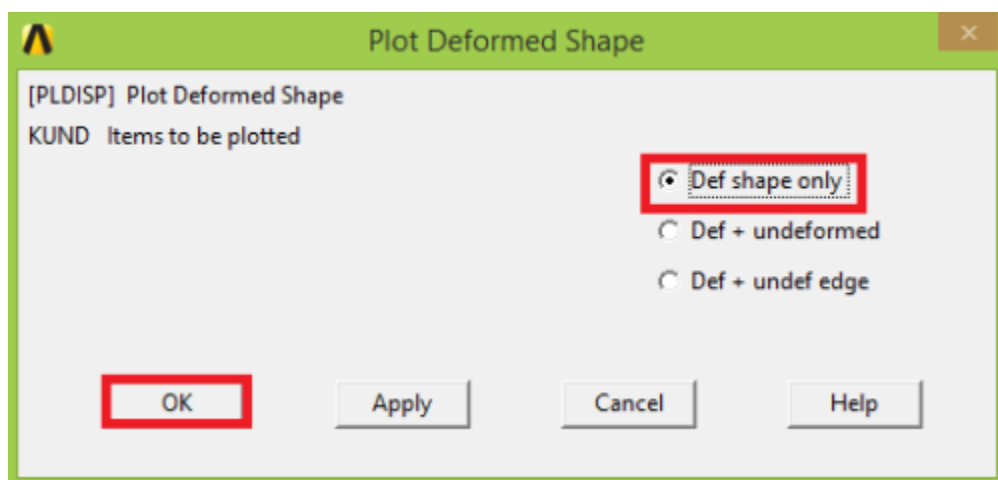
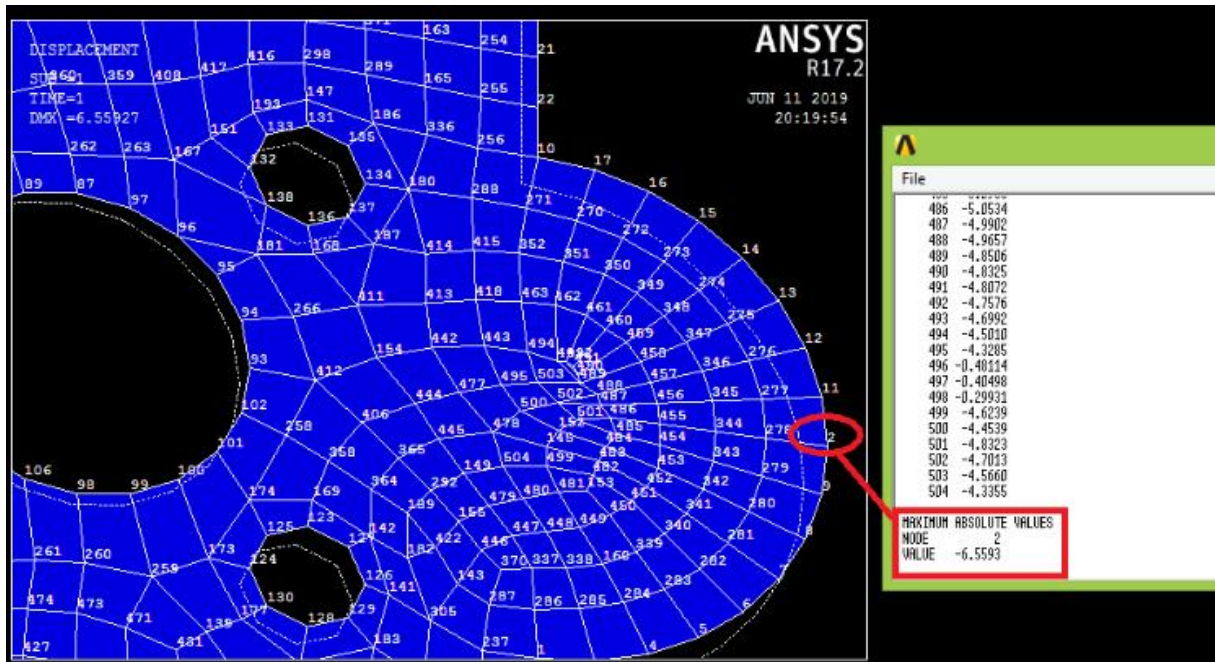


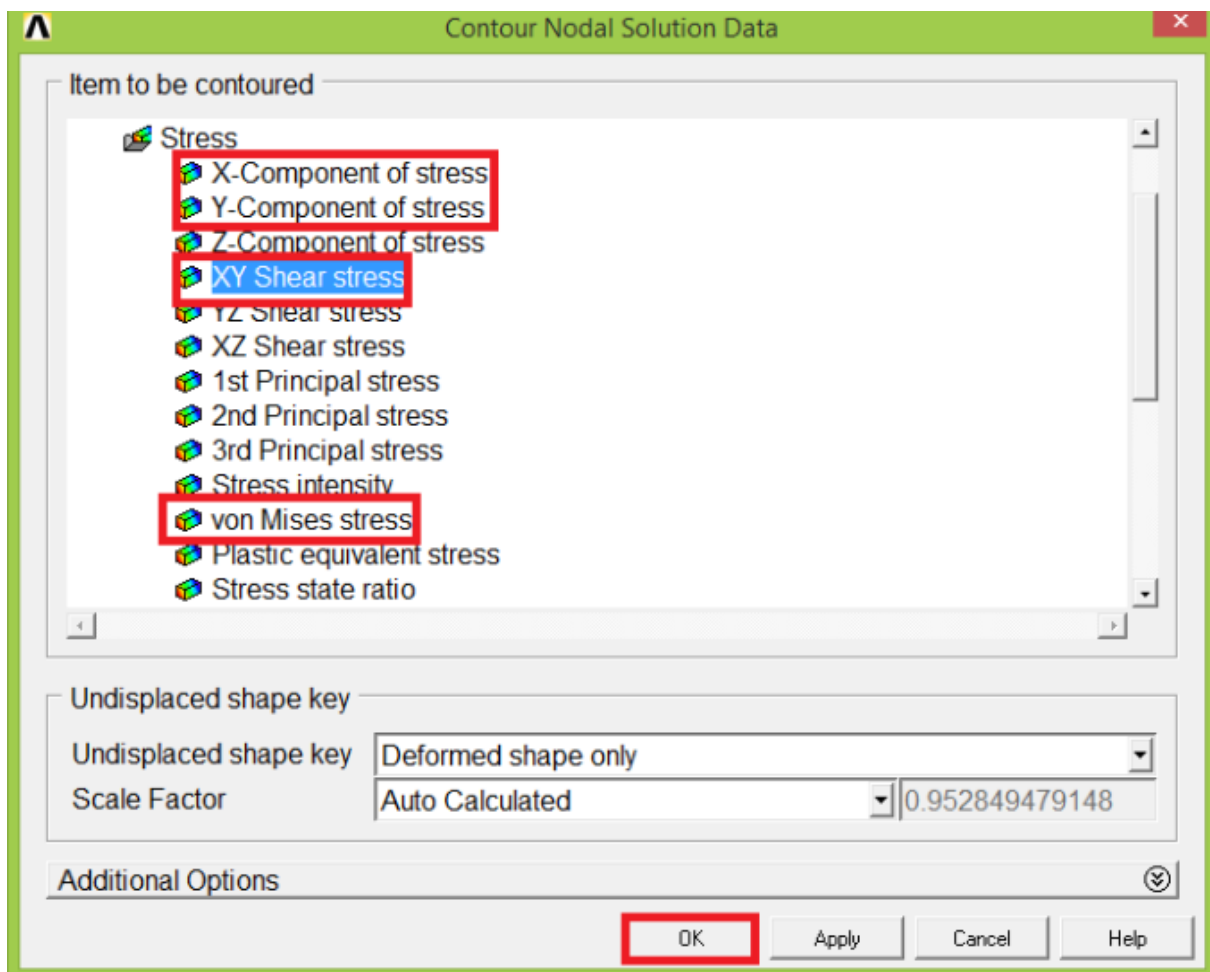
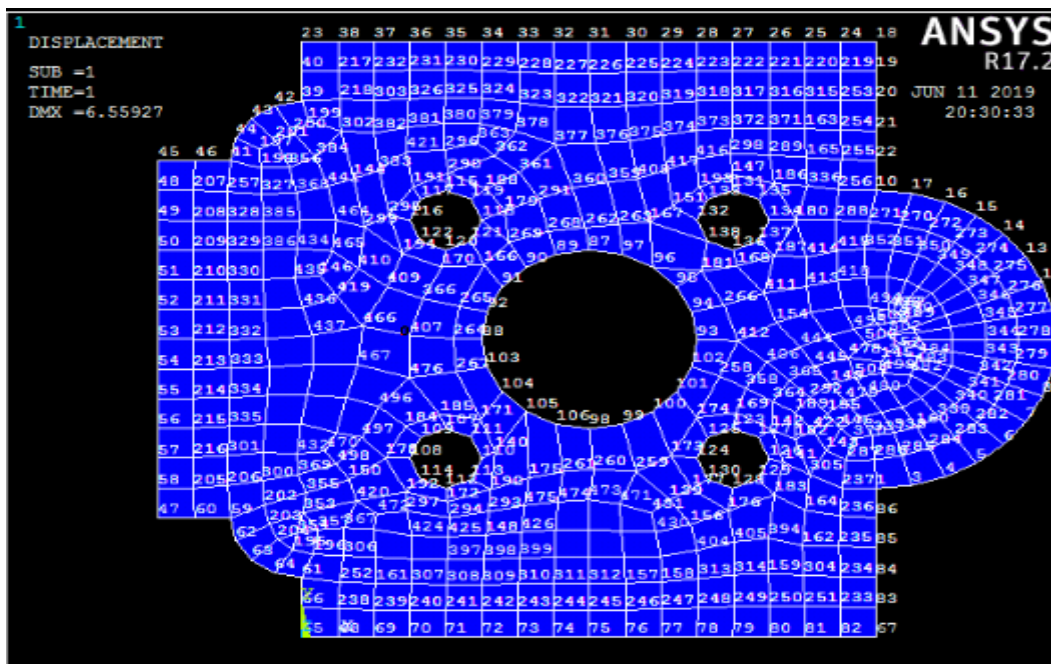












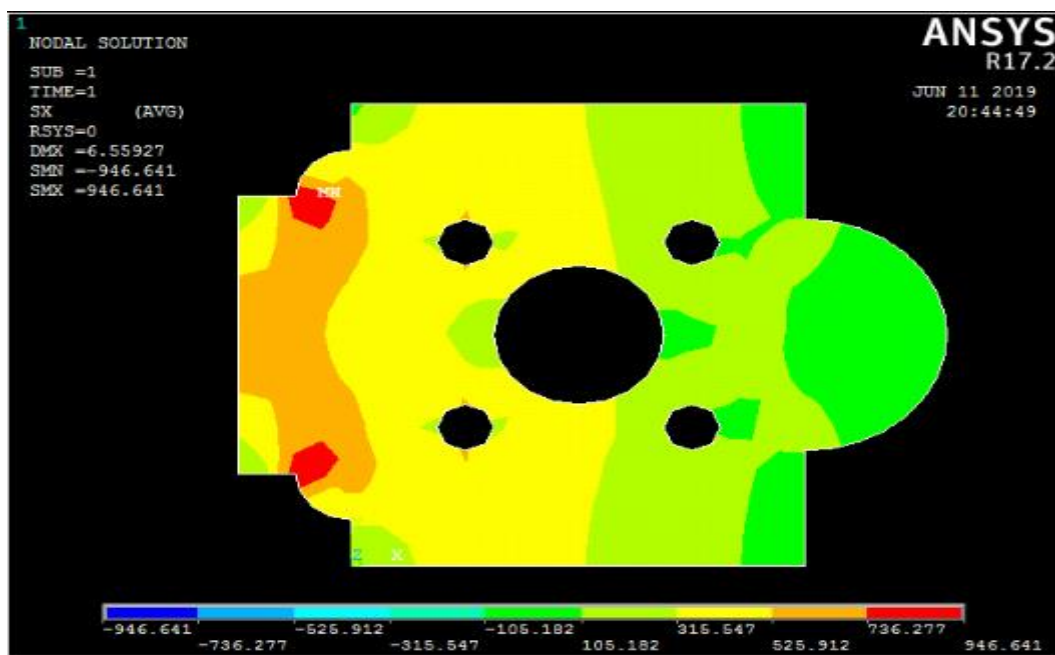


Figure 3.2: variation des contraintes suivant l'axe x-x

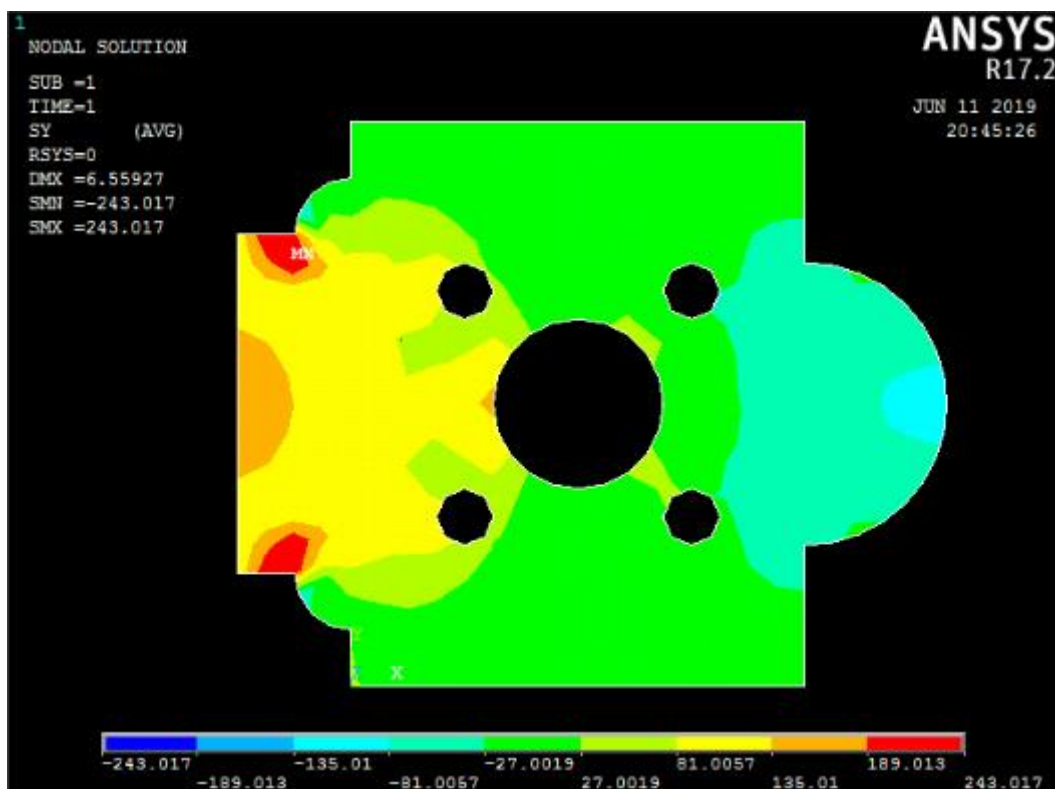


Figure 3.3: variation des contraintes suivant l'axe y-y

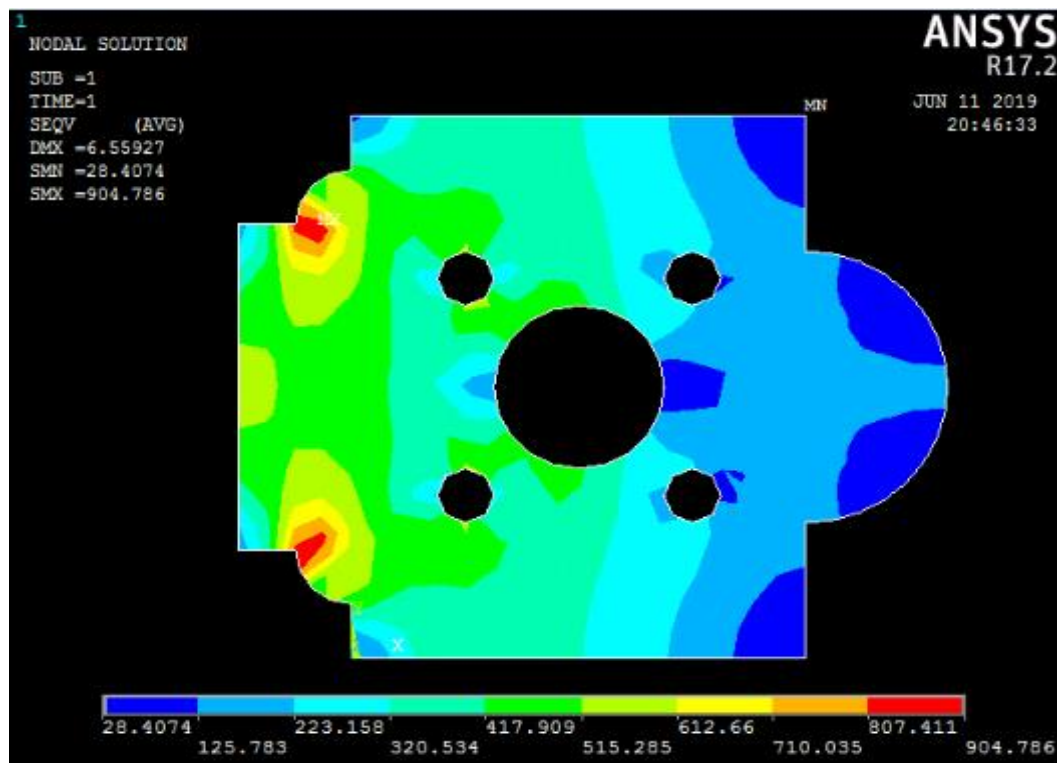


Figure 3.4: la résultante des contraintes

Interprétation des résultats:

D'après les figures on remarque que les contraintes deviennent maximale au niveau des points d'encastrement ; on remarque aussi que le déplacement est maximal au niveau de la zone où elle a été appliquée la plus grande force

Conclusion

Dans ce travail, après une synthèse théorique (chapitre **I**, chapitre **II**, chapitre **III**) et une Présentation de la méthode de formulation des éléments finis à travers les deux approches en déplacement et en déformation, utilisés pour l'étude des plaques, on a cité l'effet des différents paramètres qui influent sur la réponse et le comportement des plaques tel que, le module de Young, le coefficient de Poisson.

La résistance du matériau nous permet de traiter trois titres de problèmes, qui sont :

- Problème de dimensionnement.
- Problème des portances d'une construction.
- Problème de vérification, qui notre cas

Dans ce dernier titre, on connaît : les forces, les caractéristiques mécaniques du matériau et dimensions de la construction. On vérifie la résistance, la rigidité de la construction.

Le travail effectué dans ce mémoire se rapporte à la modélisation aux méthodes des éléments finis, d'un support.

On fait appel à la simulation numérique avec le logiciel ANSYS pour déterminer les contraintes, les déplacements et vérifier les résultats à leurs limites.

La précision de calcul augmente avec le raffinement de maillage, ce dernier entraîne des coupes de calculs additionnelles très importantes.

Dans notre étude, on a utilisé l'analyse structurelle avec l'ANSYS APDL.

BIBLIOGRAPHIE

[1].F.Imbert, *"Analyse Des Structures Par Eléments Finis "*, Cepadues, 3ème Ed, 1991.

[2] Jean-Louis Batoz , Gouri Dhatt, *"Modélisation Des Structures par éléments Finis , Volume 2 : Poutres et Plaques "*,Hermès Science Publication 1990.

[3] O.C.Zienkiewicz, *"La Méthode Des Eléments Finis"*Mc Graw Hill, 1997.

[4] Rahmani O et Kebdani S, *Introduction a la méthode des éléments Finis pour les ingénieur*, 2ème éd . OPU, 1994.

[5] Paul Louis George, *"Génération Automatique De Maillages: Application Aux Méthode d'éléments Finis"*,Dunod,1990.

[6] C.Zienkiewicz And R. L.Taylor, *"The Finite Element Methode For Solid And Structural Mechanics "*, Sixth Edition By O . Butterworth-Heinemann 2005.

[7] Cours élément Finis . Mr. KIRAD

[8] " DERBANE Said " *Mémoire en vue de l'obtention Du diplôme de Magister*