

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ DE BLIDA 1**



**Faculté des Sciences  
Département de Mathématique**



# **Mémoire**

En vue de l'obtention du diplôme de

**MASTER EN MATHÉMATIQUES**

**Spécialité : Recherche Opérationnelle**

Thème

## **L'ARÊTE-DOMINATION ET L'ARÊTE- DOMINATION INDEPENDANTE DANS LES ARBRES**

Par

**M<sup>r</sup> ZEROUAL Mohamed**

**M<sup>lle</sup> KHERROUBI Ibtissem**

Devant le jury composé de :

**M<sup>r</sup>BLIDIA Mostafa**

**M<sup>me</sup>RAMOUL Amina**

**M<sup>me</sup>MEDDAH Nacéra**

**Professeur, U.S.D.Blida 1 Président**

**M.C.B, U.S.D.Blida 1 Examinatrice**

**M.C.B, U.S.D.Blida 1 Promotrice**

Année universitaire 2019/2020

## RÉSUMÉ

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Un sous ensemble  $D$  de  $E(G)$  est dit arête-dominant de  $G$  si toute arête  $e \in E(G) \setminus D$  est adjacente à au moins une arête  $e' \in D$ . Un ensemble arête-dominant est ainsi un sous ensemble des arêtes qui dominant toutes les arêtes de  $G$ . La cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant de  $G$  est appelée le nombre de l'arête-domination et est notée par  $\gamma'(G)$ . Un ensemble arête-dominant avec une telle cardinalité est appelé  $\gamma'(G)$ -ensemble. Un sous ensemble  $S$  de  $E$  est un arête-dominant indépendant de  $G$  si toutes ses arêtes sont deux-à-deux non-adjacentes. La cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant indépendant maximal est appelée le nombre d'arête-domination indépendante inférieur de  $G$ , et est notée par  $i'(G)$ . La détermination de ces deux paramètres dans les graphes en général est un problème difficile (NP-Complet).

Notre objectif principal dans ce mémoire est l'étude de ces deux paramètres et notre travail s'articule autour de la caractérisation des arbres  $T$  (resp. chaînes) tels que le nombre de l'arête-domination  $\gamma'(T)$  est fortement égal au nombre de l'arête-domination indépendante inférieur  $i'(T)$  i.e  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ . On note de tels arbres par  $(\gamma', i')$ -arbres et de telles chaînes par  $(\gamma', i')$ -chaînes.

# ABSTRACT

Let  $G = (V, E)$  be a simple graph. A subset  $D$  of  $E(G)$  is an edge dominating of  $G$  if any edge  $e \in E(G) \setminus D$  is adjacent to at least one edge  $e' \in D$ . Thus, an edge dominating set is a subset of the edges which dominate all the other edges of  $G$ . The minimum cardinality of an edge dominating set of  $G$  is called edge domination number and is denoted by  $\gamma'(G)$ . An edge dominating set with such a cardinality is called  $\gamma'(G)$ -set. A subset  $S$  of  $E(G)$  is an edge independent dominating if all its edges are two-by-two non-adjacent. The minimum cardinality of a maximal independent edge dominating set is called the lower number of independent edge domination of  $G$ , and is denoted by  $i'(G)$ . The determination of these two parameters in graphs in general is a difficult problem (NP-complete).

Our main objective in this thesis is the study of these two parameters and our work revolves around the characterization of trees  $T$  (resp. paths) such that the number of edge domination  $\gamma'(T)$  is strongly equal to the number of lower independent edge domination  $i'(T)$  ie  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ . We note such trees by  $(\gamma', i')$ -trees and such paths by  $(\gamma', i')$ -paths.

## ملخص

ليكن  $G=(V,E)$  بيانا بسيطا. مجموعة جزئية  $D$  من الحواف للبيان  $G$  تسمى حواف مسيطرة إذا كان لكل حافة  $e \in E(G)$  على الاقل حافة مجاورة في  $D$ . إن مجموعة حواف مسيطرة هي مجموعة جزئية من الحواف التي تهيمن على جميع الحواف. الأصلي الأدنى لمجموعة حواف مسيطرة للبيان  $G$  يسمى بعدد الحواف المسيطرة و يرمز له بالرمز  $\gamma'(G)$ . مجموعة حواف مسيطرة بهذا العدد تسمى  $\gamma'(G)$ -مجموعة. مجموعة جزئية  $S$  من الحواف للبيان  $G$  تسمى حواف مسيطرة مستقلة إذا كانت كل حوافه منفصلة مثنى مثنى. الأصلي الأدنى لمجموعة حواف مسيطرة مستقلة للبيان  $G$  يسمى بعدد ال حواف المسيطرة المستقلة و يرمز له بالرمز  $i'(G)$ . إيجاد قيمة كل من هذين الوسيطين للبيانات بصفة عامة هو مشكل صعب (NP-Comple).

الهدف الرئيسي في هذه الأطروحة هو دراسة هذين الوسيطين , و عملنا يرتكز حول تمييز بنائي للأشجار  $T$  و السلاسل  $P_n$  حيث عدد ال حواف المسيطرة  $\gamma'(T)$  يساوي بقوة عدد ال حواف المسيطرة المستقلة  $i'(T)$ . نرمز لهذه الأشجار بال  $(\gamma', i')$  - أشجار و لهذه السلاسل بال  $(\gamma', i')$  -سلاسل.

## REMERCIEMENTS

Nous tenons en premier lieu à exprimer notre profonde gratitude et notre vifs remerciements à notre promotrice M<sup>me</sup> **MEDDAH** Nacéra, qui nous a accueilli, accompagné et conseillé tout au long de ce parcours. Son aide et sa confiance nous ont grandement aidé à mener à bien notre travail. Nous remercions sincèrement les membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail. Un grand Merci à tous nos enseignants de département de mathématiques.

Nous tenons également à remercier Monsieur **BLIDIA Mostafa**, Professeur à l'université SAAD DAHLEB de Blida1, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire et examiner le travail .

Nous adressons nos sincères et vifs remerciements à M<sup>me</sup> **RAMOUL Amina**, MCB à l'université SAAD DAHLEB de Blida1, d'avoir accepté d'être membre de jury.

Nos remerciements les plus chaleureux vont vers toutes nos familles en général, vers nos parents en particulier, qui nous supportent et soutiennent depuis toujours. Et bien sûr nos proches amis, qui nous 'ont soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

# TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ . . . . .	1
ABSTRACT . . . . .	2
RÉSUMÉ EN ARABE . . . . .	3
REMERCIEMENTS . . . . .	4
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES . . . . .	7
INTRODUCTION . . . . .	8
<b>CHAPITRE 1. Concepts fondamentaux . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1. Notions de base sur la théorie des graphes . . . . .	12
1.1.1. Définition et notations . . . . .	12
1.1.2. Quelques graphes particuliers . . . . .	15
1.1.3. Propriétés de graphes . . . . .	18
1.1.4. Invariants de graphes . . . . .	19
1.2. La domination dans les graphes . . . . .	20
1.2.1. Définitions et propriétés . . . . .	21
1.2.2. Paramètres de domination . . . . .	23
1.3. L'arête-domination dans les graphes . . . . .	24
1.3.1. Paramètres d'arête-domination . . . . .	25
1.4. Applications de la domination et l'arête-domination . . . . .	26

CHAPITRE 2. <b>L'arête-domination dans les graphes avec quelques résultats antérieurs</b> . . . . .	<b>28</b>
2.1. L'arête-domination et l'arête-domination indépendante . . . . .	28
2.1.1. Définitions et notations . . . . .	28
2.2. Quelques résultats antérieurs . . . . .	30
CHAPITRE 3. <b>Forte égalité entre les deux nombres de l'arête-domination et de l'arête-domination indépendante inférieur dans les arbres et les chaînes</b> . . . . .	<b>34</b>
3.1. Définitions et résultats préliminaires . . . . .	34
3.2. Caractérisations des $(\gamma', i')$ -arbres . . . . .	36
3.3. Caractérisations des $(\gamma', i')$ -chaînes . . . . .	39
CONCLUSION ET PERSPECTIVES . . . . .	<b>42</b>

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

FIGURE 1.1.	Un graphe $G$ avec 4 sommets et 3 arêtes . . . . .	13
FIGURE 1.2.	Une chaîne $P_4$ et un cycle $C_4$ . . . . .	14
FIGURE 1.3.	Un graphe $G$ , un graphe partiel et un sous-graphe induit de $G$ . . . . .	15
FIGURE 1.4.	Un graphe $G$ et son complémentaire $\overline{G}$ . . . . .	15
FIGURE 1.5.	Un graphe $G$ et son graphe adjoint $L(G)$ . . . . .	16
FIGURE 1.6.	Graphes complets $K_3$ et $K_4$ . . . . .	16
FIGURE 1.7.	Un graphe biparti complet $K_{2,3}$ . . . . .	17
FIGURE 1.8.	Une étoile $K_{1,3}$ et une étoile double $S_{2,2}$ . . . . .	18
FIGURE 1.9.	Une étoile $K_{1,3}$ . . . . .	20
FIGURE 1.10.	Un échiquier $5 \times 5$ et un échiquier $8 \times 8$ . . . . .	20
FIGURE 1.11.	Un graphe $G$ . . . . .	22
FIGURE 1.12.	Un graphe $G$ . . . . .	24
FIGURE 2.1.	Un graphe $G$ avec 4 sommets et 3 arêtes . . . . .	29
FIGURE 2.2.	Un graphe $G$ avec 6 sommets et 5 arêtes . . . . .	30
FIGURE 3.1.	Graphe $P_5$ . . . . .	36
FIGURE 3.2.	L'arbre $R_{2,2}(u)$ . . . . .	36
FIGURE 3.3.	Arbre $T$ avec $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ . . . . .	41
FIGURE 3.4.	La première décomposition de l'arbre $T$ . . . . .	42
FIGURE 3.5.	La deuxième décomposition de l'arbre $T$ . . . . .	42



## INTRODUCTION

La vie moderne mène l'homme actuel à confronter des situations problématiques d'un système de relations sociales et économiques très complexe. De plus en plus d'éléments doivent être pris en compte lors des prises des décisions concernant une action donnée qui deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques appropriés. C'est ainsi que s'est développé un domaine de mathématiques centré sur l'activité de décision : la Recherche Opérationnelle. Cette discipline est définie comme étant l'approche scientifique des problèmes complexes rencontrés dans la direction et la gestion de grands systèmes. La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation dans les réseaux, les processus aléatoires, la théorie de jeux, les . . . les files d'attente, . . . . sont les principales techniques mathématiques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La recherche opérationnelle (RO) est une discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la RO s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la RO a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public. La recherche opérationnelle est née pendant la *Seconde Guerre mondiale* des efforts conjugués d'éminents mathématiciens (*Neumann, Dantzig, Blackett*) à qui il avait été demandé de fournir des techniques d'optimisation des ressources militaires. Le premier succès de cette approche a été obtenue en 1940 par le *Prix Nobel de physique Patrick Blackett* qui résolut un problème d'implantation optimale de radars de surveillance. La dénomination est restée par la suite, même si le domaine militaire n'est plus le principal champ d'application de cette discipline, le mot opérationnelle prenant alors plutôt le sens d'effectif. Ce sont donc ces mathématiciens qui ont créé une nouvelle méthodologie caractérisée par les mots-clés modélisation et optimisation.

A partir des années 50, la recherche opérationnelle fait son entrée dans les entreprises. En France, des entreprises comme EDF, Air France, la SNCF créent à cette époque des services de recherche opérationnelle (qui existent toujours). La discipline commence à être enseignée dans les universités et les grandes écoles. Puis, au milieu des années 70, sans doute à cause d'un excès d'enthousiasme au départ et à l'inadéquation des moyens informatiques à l'application des méthodes de la RO, la discipline s'essouie. A partir du milieu des années 90, on assiste à un retour en force de la RO, les outils informatiques étant maintenant à la hauteur des méthodes proposées par la recherche opérationnelle. On assiste depuis à une explosion du nombre de logiciels commerciaux et l'apparition de nombreuses boîtes de conseil. Pour la France, notons Ilog (65 millions d'euros de CA), Eurodécision (2,8 millions d'euros de CA), Artelys (1,6 millions d'euros de CA) à l'étranger Dash-Optimization (racheté début 2008 pour 32 millions de dollars par Fair Isaac), IBM Optimization et beaucoup d'autres (le site de INFORMS Institute of Operations Research and Management Science en liste près de 240). Si l'on cherche à trouver des précurseurs à la Recherche Opérationnelle, on peut penser à Alcuin ou à Euler qui se sont tous deux intéressés à des problèmes du type RO, bien qu'aucune application n'ait motivé leur travail.

Sans que l'on en soit toujours conscient, la théorie des graphes est aujourd'hui très présente dans notre société moderne. Cette branche des mathématiques, dont on fait remonter l'origine à Euler. L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au 18<sup>ème</sup> siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes. Parmi les problèmes les plus importants et très étudié en théorie des graphes sont les problèmes de domination, les problèmes de coloration et les problèmes de noyau dans les graphes, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un

ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, . . . Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

La technique de domination est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets dans un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. La domination dans les graphes est un thème important dans la théorie des graphes du fait de sa grande utilité pour de nombreuses applications. En 1958, *Claude Berge* donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Un sous-ensemble de sommets  $D$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est dit dominant si tout sommet extérieur à  $D$  a au moins un voisin dans  $D$ . Plusieurs variantes de domination sont dérivées de la domination classique, en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, on cite par exemple *l'arête-domination* et *l'arête-domination indépendante* ( le même concept avec la domination en remplaçant les sommets par les arêtes).

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce document (les définitions des notions nécessaires de la théorie des graphes). Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui-même. Ainsi, nous évoquons la notion de la domination dans les graphes, en donnant en premier l'histoire de départ de concept de la domination. Nous présentons par la suite quelques invariants de graphes et quelques paramètres de domination, à la fin quelques applications de la notion de domination.

Dans le deuxième chapitre, nous définissons dans la première partie les deux notions, l'arête-domination et l'arête-domination indépendante avec quelques propriétés préliminaires dans les graphes, et nous donnons quelques exemples illustratifs. Dans la seconde partie, nous présentons quelques résultats antérieurs sur ces deux notions dans différentes classes de graphes.

Au chapitre trois, nous étudions la forte égalité entre le nombre d'arête-domination et

le nombre d'arête-domination indépendante inférieur dans les arbres (respectivement les chaînes), en caractérisant les arbres (respectivement les chaînes) qui vérifient cette forte égalité.

A la fin, notre mémoire s'achève par une conclusion générale et des perspectives sur les travaux réalisés le long de ce mémoire.

## CHAPITRE 1

# Concepts fondamentaux

Nous rappelons dans ce chapitre les notions et terminologies utilisées le long de ce document. Dans la première partie nous donnons quelques définitions de base de la théorie des graphes. Dans la seconde partie, une brève présentation sur la domination dans les graphes sera donnée, où on présente quelques paramètres de domination. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de C.Berge [1] et Chartrand et Lesniak [2]. Pour la théorie de la domination dans les graphes, on recommande l'ouvrage de Haynes et al. [3].

## 1.1 Notions de base sur la théorie des graphes

### 1.1.1 Définition et notations

Un *graphe*  $G$  est défini par un couple  $(V(G), E(G))$ , où  $V(G)$  est un ensemble de *sommets* et  $E(G)$  est un ensemble de paires de sommets appelées *arêtes*. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons simplement  $V$  et  $E$ . Le nombre de sommets dans le graphe  $G$  est appelé *ordre* de  $G$ , est noté par  $n = |V(G)|$ , et le nombre d'arêtes est appelé la *taille* de  $G$ , et est noté par  $m = |E(G)|$ . Un graphe est dit *fini* ou *infini* suivant son ordre.

Soit  $G$  un graphe et soient  $u, v$  deux sommets de  $G$ . Une arête reliant deux sommets  $u, v$  est notée  $uv$  au lieu de  $\{u, v\}$ . Si  $uv \in E$ , alors  $u$  et  $v$  sont dits *adjacents* ou *voisins*. Par contre, si  $uv \notin E$ , alors  $u$  et  $v$  sont dits *non-adjacents* ou *non-voisins*. Si  $e = uv$  est une arête de  $G$ , alors  $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $e$ , et  $e$  est dite *incidente* à  $u$  et  $v$ . Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité en commun. Une *boucle* est une arête dont les extrémités sont confondues.

Un *graphe simple* est un graphe sans boucles ni arête multiple (i.e tout couple de sommets est relié par au plus une arête). Dans tout ce qui suit on s'intéresse qu'à des graphes simples et finis.

A titre d'exemple d'un graphe, on considère le graphe  $G$  de la Figure suivante, dont l'ensemble des sommets est  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  et l'ensembles des arêtes est  $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_2$  sont adjacents dans  $G$ , alors que  $v_1$  et  $v_3$  ne le sont pas.

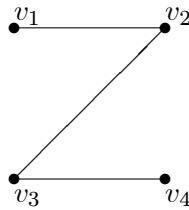


FIGURE 1.1. Un graphe  $G$  avec 4 sommets et 3 arêtes

### Voisinage et degrés:

Pour un sommet  $v$  d'un graphe  $G$ , le *voisinage ouvert* est défini par l'ensemble  $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$  et le *voisinage fermé* est défini par  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . Pour un ensemble  $S \subseteq V(G)$ , le voisinage ouvert est défini par  $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$  et le voisinage fermé de l'ensemble  $S$  est défini par  $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$ . Pour un sommet  $v$  de graphe  $G$ , le *degré* de  $v$  noté par  $d_G(v)$  (aussi par  $d(v)$ ) est le nombre de sommets adjacents à  $v$ , i.e  $|N_G(v)|$ . Un sommet de degré 0 est dit sommet *isolé*, et un sommet de degré 1 est dit sommet *pendant* et son voisin est dit *support*. Dans un graphe  $G$  le degré minimum d'un sommet est noté par  $\delta(G)$  et le degré maximum est noté par  $\Delta(G)$ . Les degrés des sommets  $v_1$  et  $v_3$  dans le graphe de la figure précédente, sont  $d(v_1) = 1$  et  $d(v_3) = 2$ .

### Chaînes et cycles

Une *chaîne* de longueur  $k - 1$  dans un graphe  $G$  est une séquence alternée de sommets et d'arêtes  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$  telle que  $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ . Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa *longueur* et le nombre de sommets définit son *ordre*. L'entier  $k \geq 1$  représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se repète est dite *simple* et une chaîne dans laquelle aucun

sommet ne se répète est dite *élémentaire*. Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par  $k$  sommets, notée  $P_k$ , est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* noté  $C_k$  de longueur  $k$  est une chaîne de longueur  $k \geq 1$  dans lequel les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, dans ce cas le nombre de sommets de  $C_k$  est égal à sa longueur.

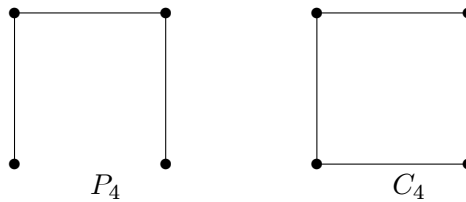


FIGURE 1.2. Une chaîne  $P_4$  et un cycle  $C_4$

### Connexité :

Un graphe  $G$  est dit *connexe*, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets  $u, v \in V(G)$ . Un graphe qui n'est pas connexe est dit *disconnexe* ou *non connexe*. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe. Un sommet  $v$  du graphe  $G$  est appelé *un sommet d'articulation* du graphe  $G$  si le graphe  $G - v$  a plus de composantes connexes que  $G$ , i.e si  $G$  est connexe alors  $G - v$  n'est pas connexe. Une arête  $e$  est appelée *un isthme* (arête d'articulation) de graphe  $G$  si le graphe  $G - e$  possède plus de composantes connexes que  $G$ , i.e si  $G$  est connexe alors  $G - e$  n'est pas connexe. Dans la suite, à moins qu'il ne soit mentionné le contraire, nous travaillons avec des graphes connexes.

### Distance, diamètre et excentricité :

On peut définir la distance entre deux sommets  $u, v$ , notée  $d(u, v)$  : par la longueur de la plus courte chaîne joignant  $u$  et  $v$ . Le *diamètre* dans un graphe  $G$ , noté  $\text{diam}(G)$ , est la distance maximum entre deux sommets de  $G$ ; c-à-d  $\text{diam}(G) = \max_{x, y \in V} (d(x; y))$ . L'*excentricité* de  $v$  est  $\text{exc}(v) = \max\{d(v; w) : w \in V\}$ .

### 1.1.2 Quelques graphes particuliers

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.

#### a) Graphe partiel et sous-graphe :

Le graphe  $H$  est appelé un *sous-graphe* partiel de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$  et il est appelé un *graphe partiel* du graphe  $G$  si  $V(H) = V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ . Pour un sous ensemble de sommets non vide  $S \subseteq V(G)$  du graphe  $G$ , le sous graphe  $H = (S, E)$  induit par  $S$  dans  $G$ , noté par  $G[S]$ , est le sous graphe du graphe  $G$  avec l'ensemble de sommets  $V(G[S]) = S$  et l'ensemble d'arêtes  $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$ .

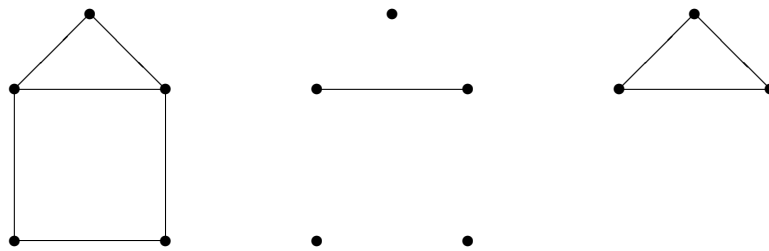


FIGURE 1.3. Un graphe  $G$ , un graphe partiel et un sous-graphe induit de  $G$

#### b) Graphe complémentaire :

Le graphe complémentaire de  $G$ , noté  $\overline{G}$ , est un graphe ayant le même ensemble de sommets que  $G$  et une arête est dans  $\overline{G}$  si elle n'est pas dans  $G$  (Voir Figure 1.4).

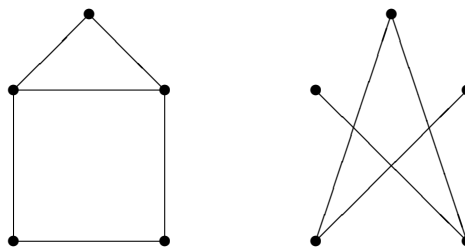


FIGURE 1.4. Un graphe  $G$  et son complémentaire  $\overline{G}$ .



c) Graphe adjoint :

Le *graphe adjoint*  $L(G)$  est le graphe défini de la façon suivante :

- Chaque sommet de  $L(G)$  représente une arête de  $G$ ,
- Deux sommets de  $L(G)$  sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes partagent une extrémité commune dans  $G$  (on dit alors qu'elles sont adjacentes).

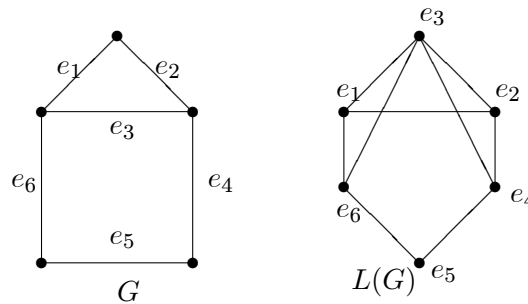


FIGURE 1.5. Un graphe  $G$  et son graphe adjoint  $L(G)$

d) Graphe complet :

Un graphe *complet* d'ordre  $n$ , noté par  $K_n$ , est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents. Un sous-graphe induit complet  $H$  de  $G$  est une clique de  $G$  et nous la notons également  $K_n$  (où  $n = |V(H)|$ ). Comme illustration du concept, les graphes complets  $K_3, K_4$  sont représentés dans la figure 1.6 suivante :

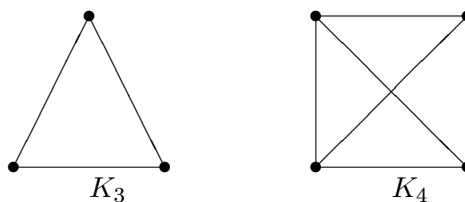


FIGURE 1.6. Graphes complets  $K_3$  et  $K_4$

e) Graphe multiparti :

Un graphe  $G$  est dit *multiparti*, si l'ensemble des sommets peut être partitionné en  $q$  sous ensembles avec  $q \geq 2$ , sachant qu'aucune arête du graphe  $G$  ne joint deux sommets

appartenant au même sous ensemble. Pour  $q = 2$ , le graphe  $G$  est appelé *biparti*. Un graphe est dit biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impaires.

Si un sommet appartenant à un ensemble  $V_i$  de la partition d'un graphe multiparti est adjacent à tout sommet des autres ensembles  $\{V_j : j \neq i\} \forall i = \overline{1, q}$ , alors le graphe  $G$  est appelé *multiparti complet*. Un graphe multiparti avec  $|V_i| = p_i, i = 1, 2, \dots, q$ , est noté par  $K_{p_1, p_2, \dots, p_q}$ . Si  $p_1 = p_2 = \dots = p_q = p$ , alors le graphe  $G$  *multiparti complet* est noté par  $K_{q \times p}$ . A titre d'exemple le graphe biparti complet  $K_{2,3}$  représenté dans la Figure 1.7 suivante:

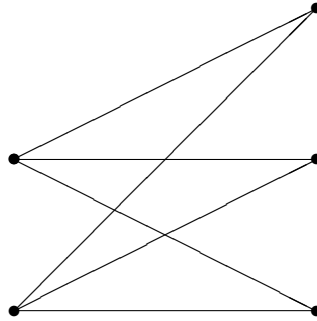


FIGURE 1.7. Un graphe biparti complet  $K_{2,3}$

f) **Arbre :**

Les graphes connexes sans cycles (*acycliques*) jouent un rôle prépondérant dans diverses applications. Un *arbre*  $T = (V, E)$  d'ordre  $n$ , est un graphe connexe, sans cycles et comporte  $n - 1$  arêtes.

Une **étoile**, notée  $K_{1,p}$ , est un arbre obtenu en attachant  $p$  sommets pendants à un sommet autre pendant (appelé le centre de l'étoile). Cela peut aussi être vu comme un *biparti complet*.

Une **étoile double**, notée  $S_{p,q}$ , est un arbre obtenu à partir de deux étoiles  $K_{1,p}, K_{1,q} : p, q \geq 1$ , en attachant les deux centres par une arête.

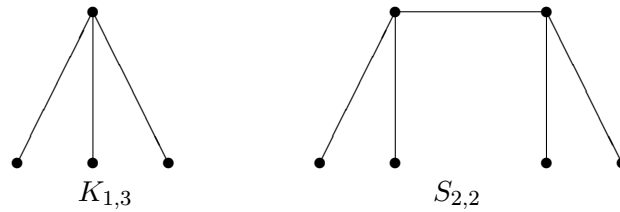


FIGURE 1.8. Une étoile  $K_{1,3}$  et une étoile double  $S_{2,2}$

### 1.1.3 Propriétés de graphes

Nous définissons une propriété  $\mathcal{P}$  de graphes et la classe des graphes satisfaisants cette propriété. Une propriété de graphes est non triviale si elle est vraie pour un ensemble infini de graphes et fausse pour un ensemble infini de graphes. Une propriété de graphes  $\mathcal{P}$  est héréditaire si elle est close par suppression de sommets, c'est-à-dire pour tout graphe  $G$  satisfaisant  $\mathcal{P}$ , tout sous-graphe induit de  $G$  satisfait  $\mathcal{P}$ . Une propriété de graphes est monotone si elle est close par suppression de sommets ou d'arêtes, c'est-à-dire, pour tout graphe de  $\mathcal{P}$ , tout sous-graphe (non nécessairement induit) satisfait cette propriété. Ainsi, une propriété monotone est héréditaire. De nombreuses classes de graphes très étudiés sont de propriétés monotones ou héréditaires.

*Ensemble minimal/maximal et ensemble minimum/maximum :*

Soit une propriété  $\mathcal{P}$ . On dit qu'un ensemble  $S$  est *minimal* pour la propriété  $\mathcal{P}$  si aucun sous-ensemble strict de  $S$  ne vérifie cette propriété. Un ensemble est dit *minimum* pour la propriété  $\mathcal{P}$  si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble) ne vérifie la propriété. Ainsi, un ensemble minimum est nécessairement minimal, mais l'inverse n'est pas vrai en général. De même, on dit qu'un ensemble  $S$  est *maximal* pour la propriété  $\mathcal{P}$  si aucun ensemble contenant  $S$  et différent de  $S$  ne vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ . Il est *maximum* si aucun ensemble plus grand que  $S$  (sans nécessairement le contenir) ne vérifie  $\mathcal{P}$ .

*Forte égalité de deux paramètres de domination :* Soient  $G = (V(G), E(G))$  un graphe simple,  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux propriétés différentes des sous ensembles de  $V(G)$  (ou  $E(G)$ ). On suppose que tout sous-ensemble de  $V(G)$  avec la propriété  $\mathcal{P}_2$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}_1$ .

Soient  $\Psi_1(G)$  et  $\Psi_2(G)$ , respectivement, les cardinalités minimum des ensembles avec les propriétés  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , respectivement. Alors  $\Psi_1(G) \leq \Psi_2(G)$ . Si  $\Psi_1(G) = \Psi_2(G)$  et si tout  $\Psi_1(G)$ -ensemble est un  $\Psi_2(G)$ -ensemble, alors on dit que  $\Psi_1(G)$  est fortement égal à  $\Psi_2(G)$ , et on écrit  $\Psi_1(G) \equiv \Psi_2(G)$ .

#### 1.1.4 Invariants de graphes

Pour un graphe  $G$  d'ordre  $n$ , nous définissons quelques invariants de graphes intervenant dans ce manuscrit.

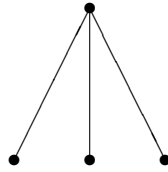
##### Isomorphisme :

Un *isomorphisme* entre deux graphes  $G$  et  $G'$  désigne toute fonction bijective  $\phi$ , associant à chaque sommet de  $G$  un sommet de  $G'$  telle que  $uv \in E(G)$  si et seulement si  $\phi(u)\phi(v) \in E(G')$ . S'il existe un isomorphisme entre  $G$  et  $G'$ , alors  $G$  et  $G'$  sont dits isomorphes.

##### Couplage :

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ . On appelle *couplage* de  $G$  un sous-ensemble d'arêtes de  $E$  deux à deux non adjacentes. Un *couplage maximum* est un couplage de taille maximale. On désigne par  $\beta'_1(G)$  la taille d'un couplage maximum dans  $G$ . Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de  $G$  est dit *parfait*.

- Le cardinal d'un couplage d'un graphe d'ordre  $n$  est au plus  $n/2$ , ceci est dû au fait que chaque arête du couplage sature deux sommets.
- Un *couplage est parfait* si et seulement si  $\beta'_1(G) = n/2$ .
- Tout graphe d'ordre impair ne contient pas de couplage parfait. Egalement, un graphe d'ordre pair ne possède pas nécessairement un couplage parfait (voir le graphe de la Figure 1.9, qui est d'ordre 4, mais il ne possède pas un couplage parfait).

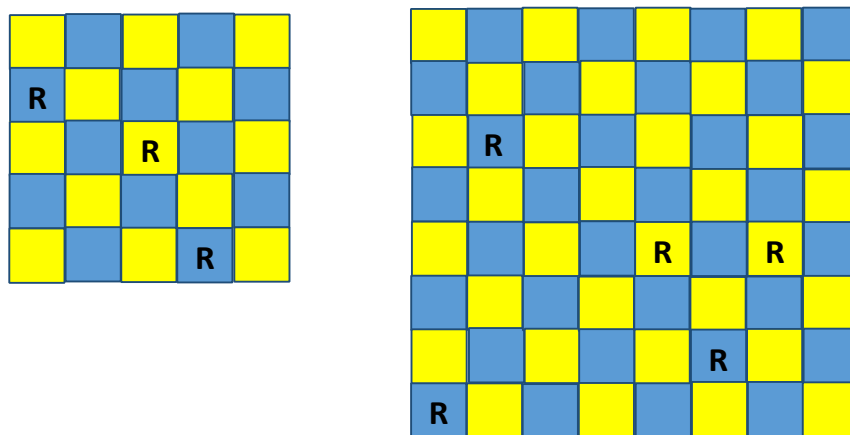
FIGURE 1.9. Une étoile  $K_{1,3}$ 

### Stable :

On appelle *stable* (*indépendant*) d'un graphe  $G = (V, E)$  un sous ensemble de sommets de  $V$  deux à deux non adjacents. Un stable maximum de  $G$  est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité, et est notée par  $\beta(G)$ .

## 1.2 La domination dans les graphes

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16<sup>ème</sup> siècle en Inde (Voir [6]). En 1862, De Jaenisch [7] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un Echiquier  $5 \times 5$  le nombre minimum est 3 et pour un échiquier  $8 \times 8$  le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier  $n \times n$  reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [8].

FIGURE 1.10. Un échiquier  $5 \times 5$  et un échiquier  $8 \times 8$

En 1958, Claude Berge [9] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.

L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [10] en 1962. La domination n'a connue sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [11] en 1977. Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complexe (Voir [12] [13]). Une étude approfondie de quelques types de domination fera l'objet des prochains chapitres.

### 1.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 1.1.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Un ensemble **dominant** est un sous ensemble de sommets  $D \subseteq V$  tel que tout sommet de  $V \setminus D$  est adjacent à au moins un sommet de  $D$ . Un ensemble dominant  $D$  est dit **minimal** si aucun sous ensemble propre de  $D$  n'est un ensemble dominant.

Un dominant de cardinalité minimum est un dominant minimal l'inverse est faux.

Il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

- $D \subseteq V$  est un ensemble dominant  $\iff \forall v \in V \setminus D, |N(v) \cap D| \geq 1$ .
- $D \subseteq V$  est un ensemble dominant  $\iff \forall v \in V \setminus D, N(v) \cap D \neq \emptyset$ .
- $D \subseteq V$  est un ensemble dominant  $\iff N[D] = N(D) \cup D = V$ .

**Définition 1.2.** Soient un sommet  $v$  et un ensemble de sommets  $S$  dans un graphe  $G = (V, E)$ . Le voisinage privé dans  $S$ , noté  $pn(v, S)$  est l'ensemble des voisins de  $v$  qui ne sont voisins d'aucun autre sommet de  $S$  :  $pn(v, S) = N(v) \setminus N(S - \{v\})$ . De façon équivalente, on peut écrire  $pn(v, S) = \{u \in V \mid N(u) \cap S = \{v\}\}$ . Si  $u \in pn(v, S)$ , on dit que  $u$  est un voisin privé de  $v$  dans  $S$ , ou  $S$ -voisin privé.

**Définition 1.3.** Le nombre de domination inférieur (ou nombre de domination) d'un graphe  $G$ , noté  $\gamma(G)$ , représente **la cardinalité minimum** d'un ensemble dominant de  $G$ . Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé  $\gamma(G)$ -ensemble.

On note qu'un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $\gamma(G)$ -ensembles. **La cardinalité maximum** d'un ensemble dominant minimal est appelée *nombre de domination supérieur*, et est noté par  $\Gamma(G)$ . D'une manière générale si on considère que  $\mathfrak{F}$  est la famille des ensembles dominants minimaux.  $D \subseteq V$ , alors on peut définir les deux paramètres :

$$\gamma(G) = \min_{D \in \mathfrak{F}} (|D|) : \text{nombre de domination inférieur.}$$

$$\Gamma(G) = \max_{D \in \mathfrak{F}} (|D|) : \text{nombre de domination supérieur.}$$

Par exemple pour le graphe de la Figure 1.11, on a

$$\mathfrak{F} = \{\{v_3, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\}\}$$

Donc  $\gamma(G) = 2$  et  $\Gamma(G) = 3$ .

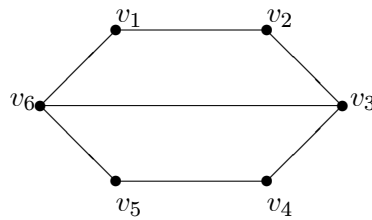


FIGURE 1.11. Un graphe  $G$

De ce qui précède nous avons les propriétés générales suivantes :

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Si  $D$  est un ensemble dominant du graphe  $G$ , alors:

- Un sous-ensemble de  $D$  n'est pas nécessairement un ensemble dominant de  $G$ , tandis que tout ensemble contenant  $D$  est un ensemble dominant de  $G$ .
- $D$  contient tous les sommets isolés de  $G$ .

- Puisque l'ensemble des sommets  $V$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et  $1 \leq \gamma(G) \leq |V|$ .

$\gamma(G) = 1$  si et seulement si  $G$  possède un sommet  $v$  de degré  $n - 1$ , dans ce cas  $\{v\}$  est un ensemble dominant minimum de  $G$ .

$\gamma(G) = n$  si et seulement si  $G \equiv \overline{K_n}$ , et  $V$  est l'unique ensemble dominant de  $G$ .

La notion d'*indépendance* (*stabilité*) dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. Cette notion est reliée à celle de domination par le fait qu'un ensemble indépendant maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant minimal. Dans un graphe  $G$ , un sous ensemble  $S$  de  $V$  est un indépendant si  $\Delta(G[S]) = 0$ , .i.e il n'existe pas deux sommets dans  $S$  adjacents. Un ensemble indépendant  $S$  de  $G$  est **maximal** si pour tout sommet  $x$  dans  $V \setminus S$ ,  $S \cup \{x\}$  n'est pas un indépendant.

On donne ci-dessous les conditions pour lesquelles un ensemble indépendant d'un graphe  $G$  soit maximal.

- Un ensemble indépendant  $S$  d'un graphe  $G$  est maximal si et seulement si pour tout sommet  $v \in V \setminus S$ ,  $v$  est adjacent à au moins un sommet de  $S$ .
- Un ensemble indépendant  $S$  est maximal si et seulement si il est dominant.
- Tout ensemble indépendant maximal de  $G$  est un dominant minimal de  $G$ .
- Un ensemble indépendant et dominant est un dominant minimal.

Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelée *nombre d'indépendance supérieur* (resp. *nombre d'indépendance inférieur*) de  $G$ , noté par  $\beta(G)$  (resp.  $i(G)$ ). Un ensemble indépendant maximal avec une telle cardinalité est appelé  $\beta(G)$ -ensemble (resp.  $i(G)$ -ensemble). On note qu'un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $\beta(G)$ -ensembles et plusieurs  $i(G)$ -ensembles. Soit  $\mathfrak{S}$  la famille des ensembles stables maximaux. Dans  $\mathfrak{S}$  on définit deux paramètres:



$i(G) = \min_{S \in \mathfrak{S}} (|S|)$  nombre de stabilité inférieur.

$\beta(G) = \max_{S \in \mathfrak{S}} (|S|)$  nombre de stabilité supérieur

Pour le graphe de la figure 1.12, on a

$$\mathfrak{S} = \{\{v_1, v_3, v_4, v_5\}, \{v_2, v_6, v_7, v_8\}, \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}\}$$

Donc  $i(G) = 4$  et  $\beta(G) = 6$ .

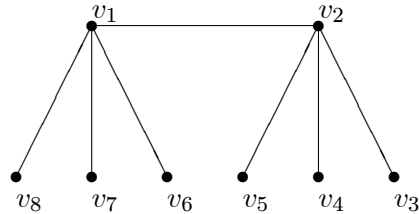


FIGURE 1.12. Un graphe  $G$ .

### 1.2.2 Paramètres de domination

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un ensemble dominant  $D$  de  $G$ . On peut définir plusieurs types de domination, à titre d'exemple on peut citer :

- *La domination totale* : Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit dominant total de  $G$  si tout sommet de  $V$  possède un voisin dans  $D$ , autrement dit, si  $D$  est un dominant et le sous graphe induit par  $D$ ,  $G[D]$ , ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale, noté  $\gamma_t(G)$ , désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant total de  $G$ .
- *La domination couplée* : Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit *dominant couplé* de  $G$  si le sous graphe induit par  $V$  contient un *couplage parfait*. Le nombre de domination couplée, noté  $\gamma_{pr}(G)$ , désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant couplé de  $G$ .

### 1.3 L'arête-domination dans les graphes

Le concept de *domination par les arêtes* a été introduit par Mitchell and Hedetniemi [28]. Un sous ensemble  $F$  de  $E$  est un arête-dominant de  $G$  si chaque arête dans  $E \setminus F$  est adjacente à au moins une arête dans  $F$ . Le nombre de l'arête-domination  $\gamma'(G)$ , d'un graphe  $G$  (ou  $\gamma'$ ) représente la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant minimal de  $G$ . Un ensemble arête-dominant avec une telle cardinalité est appelé un  $\gamma'(G)$ -ensemble, on note qu'un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $\gamma'(G)$ -ensembles, à titre d'exemple dans le graphe de la Figure 1.11,  $\{v_1v_2, v_3v_6, v_4v_5\}$  est un arête-dominant de cardinalité 3, mais  $\{v_1v_6, v_3v_4\}$  est un arête-dominant de cardinalité 2, et  $\gamma'(G) = 2$ . La cardinalité maximum d'un ensemble arête-dominant minimal est appelée *nombre d'arête-domination supérieur*, et est noté par  $\Gamma'(G)$ . Pour le même graphe de la Figure 1.11,  $\{v_1v_2, v_3v_6, v_4v_5\}$  est un arête-dominant minimal de cardinalité maximum, d'où  $\Gamma'(G) = 3$ .

Puisque pour un graphe simple  $G$ , on a  $\gamma'(G) = \gamma(L(G))$  et  $i'(G) = i(L(G))$ , alors ce qu'on peut dire : Comme  $L(G)$  est sans  $K_{1,3}$ , d'après Allan et Laskar [29] ( si  $G$  est sans  $K_{1,3}$  alors  $\gamma(G) = i(G)$ ), on a,  $\gamma'(G) = i'(G)$ .

La réponse sur le problème d'existence d'un ensemble arête-dominant d'une taille donnée dans un graphe, est un problème *NP-complet* (et donc la détermination d'un ensemble arête-dominant minimum est un problème *NP-complet*). Yannakakis et Gavril (1980) [33] ont montré que le problème également est *NP-complet* pour les graphes bipartis avec un degré maximum 3. Il existe un algorithme polynomial approximatif simple avec un facteur d'approximation 2 qui trouve n'importe quel couplage maximal (un couplage maximal est un ensemble arête-dominant).

#### 1.3.1 Paramètres d'arête-domination

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un ensemble arête-dominant  $D$  de  $G$ . On peut définir plusieurs types de l'arête-domination, à titre d'exemple on peut citer :

- *L'arête-domination indépendante* : Un ensemble arête-dominant  $E'$  est appelé ensemble arête-dominant indépendant s'il ne contient pas des arêtes adjacentes. Le nombre de l'arête-domination indépendante inférieur  $i'(G)$ , d'un graphe  $G$  (ou  $i'$ ) est la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant indépendant maximal de  $G$ .
- *L'arête-domination totale* : Un ensemble arête-dominant  $E'$  est appelé ensemble arête-dominant totale s'il ne contient pas des arêtes isolés. Le nombre d'arête-domination totale inférieur  $\gamma'_t(G)$ , d'un graphe  $G$  (ou  $\gamma'_t$ ) est la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant totale minimal de  $G$ .
- *L'arête-domination connexe* : Un ensemble arête-dominant  $E'$  est appelé ensemble arête-dominant connexe si toutes les arêtes de  $D$  sont reliées. Le nombre d'arête-domination connexe inférieur  $\gamma'_c(G)$ , d'un graphe  $G$  (ou  $\gamma'_c$ ) est la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant connexe minimal de  $G$ .
- *L'arête-domination parfaite* : Un ensemble arête-dominant  $E'$  est appelé ensemble arête-domination parfait si toute arête dans  $E \setminus D$  est dominée exactement par une seule arête dans  $D$ . Le nombre de l'arête-domination parfaite inférieur  $\gamma'_p(G)$ , d'un graphe  $G$  (ou  $\gamma'_p$ ) est la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant parfait minimal de  $G$ .

## 1.4 Applications de la domination et l'arête-domination

La domination est utilisée dans beaucoup de situations concrètes et son développement théorique a énormément contribué dans la résolution de problèmes pratiques comme les problèmes relevant des réseaux de communications, les systèmes de surveillances (par Radars), les systèmes électriques, les réseaux informatiques et d'autres. Le côté pratique de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres nouveaux paramètres de domination, en effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose une condition supplémentaire sur l'ensemble dominant. Cette condition peut être

intérieure à l'ensemble dominant, extérieure à l'ensemble dominant ou bien intérieure et extérieure en même temps à l'ensemble dominant. Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un dominant double est un dominant sans sommet isolé qui domine au moins deux fois tout sommet extérieur. Pour son application, on considère :

1. *Le problème de localisation des radars* : Pour contrôler une région donnée: Un certain nombre de points stratégiques  $a, b, c, \dots$  (les cellules) sont surveillés par des unités militaires pourvues de radars; on exige que chaque cellule soit surveillée par au moins un radar. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leur emplacement de telle manière à contrôler toutes les cellules en respectant la contrainte de la domination pour chaque cellule.
2. *Un réseau de communication* : Considérons un réseau de communication constitué de stations fixes, et entre deux stations quelconques il peut exister une communication directe. Le problème posé est de sélectionner un ensemble minimum de stations pour installer des transmetteurs, tout en assurant pour les stations qui ne possèdent pas de transmetteurs d'avoir une liaison directe avec ceux qui en possèdent.
3. *Un réseau de communication téléphonique* : Une autre application liée à un réseau de commutation téléphonique conçu pour acheminer les appels téléphoniques des lignes entrantes vers les lignes réseau sortantes (nous supposons qu'une ligne réseau ne peut passer qu'un appel téléphonique à la fois). Le problème est de trouver le comportement le plus défavorable du réseau, c'est-à-dire le nombre minimum d'appels acheminés lorsque le réseau est saturé et qu'aucun appel ne peut être ajouté. Pour cela, nous construisons un graphe biparti  $B$  en connectant une ligne à un tronc si et seulement si la ligne peut être commutée sur le tronc. Ensuite, le problème équivaut à déterminer la taille d'un ensemble arête-dominant indépendant minimum de  $B$ . Pour d'autres applications de l'arête-domination voir [33].

## CHAPITRE 2

# L'arête-domination dans les graphes avec quelques résultats antérieurs

Le concept de *domination par les arêtes* a été introduit par *Mitchell et Hedetniemi* [28], et a été exploité par plusieurs chercheurs. *Arumugam et Velammal* [24], *Arumugam et Jerry* [25], *Kulli et Soner* [26]. Les graphes bipartis avec nombre d'arête-domination égal au cardinal de couplage maximum sont caractérisé par *Dutton et Klostermeyer* [27].

Nous allons consacrer ce chapitre composé d'une seule section, où nous énonçons le concept de l'arête-domination et de l'arête-domination indépendance, nous définissons la notion de l'arête-domination avec quelques propriétés préliminaires dans les graphes et faisons quelques rappels sur des graphes particuliers, nous présentons quelques résultats et théorèmes antérieurs sur ces notions dans différentes classes de graphes.

## 2.1 L'arête-domination et l'arête-domination indépendante

### 2.1.1 Définitions et notations

Pour un graphe simple  $G = (V, E)$ , on donne les définitions suivantes:

**Définition 2.1.** *Un sous-ensemble d'arêtes  $D \subseteq E(G)$  est un arête-dominant de  $G$  si toute arête  $e \in E(G)$  est adjacente à au moins une arête  $e' \in D$ . Un arête-dominant est ainsi un sous ensemble des arêtes qui domine toutes les arêtes de  $G$ . Un ensemble arête-dominant  $D$  est dit arête-dominant minimal si aucun sous ensemble propre de  $D$  n'est un ensemble arête-dominant. Le nombre d'arête-domination inférieur,  $\gamma'(G)$ , d'un graphe  $G$  représente la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant minimal de  $G$ . Un ensemble arête-dominant avec une telle cardinalité est appelé  $\gamma'(G)$ -ensemble.*

On note qu'un ensemble arête-dominant d'un graphe  $G$  est un dominant pour son graphe adjoint  $L(G)$ , et vice versa.

On note qu'un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $\gamma'(G)$ -ensembles, à titre d'exemple, le graphe de la Figure 2.1, dont l'ensemble des sommets  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  et l'ensembles des arêtes est  $\{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4\}$ . L'ensemble  $\{v_1v_2\}$  est un  $\gamma'(G)$ -ensemble, sa cardinalité est égale à 1, et il n'est pas l'unique, il existe d' autres ensembles  $\gamma'(G)$ -ensemble :  $\{v_2v_3\}$  et  $\{v_2v_4\}$ .

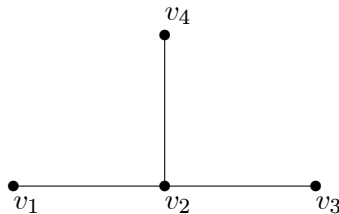


FIGURE 2.1. Un graphe  $G$  avec 4 sommets et 3 arêtes .

**Définition 2.2.** *Un sous-ensemble d'arêtes  $S \subseteq E(G)$  est un arête-dominant indépendant de  $G$  s'il n'existe pas deux arêtes adjacentes dans  $S$ . Un ensemble arête-dominant est ainsi un ensemble arête-dominant indépendant s'il ne contient pas des arêtes adjacentes. Le nombre de l'arête-domination indépendante inférieur,  $i'(G)$ , d'un graphe  $G$  (ou  $i'$ ) est la cardinalité minimum d'un ensemble arête-domination indépendante maximal de  $G$ .*

On note qu'un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $i'(G)$ -ensembles, à titre d'exemple, le graphe de la Figure 2.2, dont l'ensemble des sommets  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  et l'ensembles des arêtes est  $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_3v_6\}$ . l'ensemble  $\{v_1v_2, v_3v_4\}$  est un  $i'(G)$ -ensemble, sa cardinalité est égale à 2, et il n'est pas l'unique, il existe un autre ensemble  $\{v_2v_3, v_4v_5\}$  de même cardinalité 2.

La cardinalité maximum d'un ensemble arête-dominant indépendant maximal est appelée *nombre d'arête-domination indépendante*, et est noté par  $\beta'(G)$ . Pour le même graphe de la Figure 2.2, on a l'ensemble  $\{v_1v_2, v_3v_6, v_4v_5\}$  est un  $\beta'(G)$ -ensemble de cardinalité égale à 3.

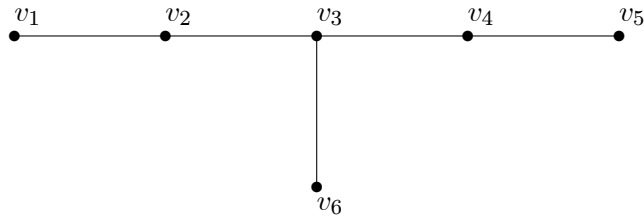


FIGURE 2.2. Un graphe  $G$  avec 6 sommets et 5 arêtes .

## 2.2 Quelques résultats antérieurs

**Théorème 2.3.** [29]. *Pour un graphe  $G$  sans  $K_{1,3}$ , on a  $\gamma(G) = i(G)$ .*

Puisque le graphe adjoint  $L(G)$  d'un graphe  $G$  est sans  $K_{1,3}$ , alors on a le résultat suivant:

**Corollaire 2.4.** [29] *Pour tout graphe  $G$ , on a  $\gamma'(G) = i'(G)$ .*

**Proposition 2.5.** [32] **a)** *Pour une chaîne  $P$  de longueur  $k$ ,*

$$\gamma'(P) = \begin{cases} k/3 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{3} \\ (k+2)/3 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{3} \\ (k+1)/3 & \text{si } k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

**b)** *Pour un cycle  $C_n$  d'ordre  $n \geq 3$ ,  $\gamma'(C_n) = \lceil n/3 \rceil$*

**c)**  $\gamma'(K_{m,n}) = \begin{cases} \min(n, m) & \text{si } 2 \leq n, m \\ 1 & \text{si } n = 1 \text{ ou } m = 1 \end{cases}$

**Définition 2.6.** [24] *Soit  $G = (V, E)$  un graphe. L'ordre maximum d'une partition de  $E$  en arête-dominants ensembles de  $G$  est appelé le nombre domatic  $d'(G)$*

**Théorème 2.7.** [24] *Pour tout graphe connexe  $G$  d'ordre pair  $n$ ,  $\gamma'(G) = n/2$  si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $K_n$  ou  $K_{n/2, n/2}$*

**Théorème 2.8.** [24] *Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \neq 2$  :  $\gamma'(G) \leq (n-1)/2$  : avec égalité si et seulement si  $T$  est isomorphe à une étoile subdivisée.*

Pour le résultat suivant, on note par  $C_{3,n}$  le graphe obtenu à partir d'un cycle  $C_3$  et  $n(\geq 0)$  copies de  $K_2$  en reliant une extrémité de chaque  $K_2$  avec un sommet fixe de  $C_3$ .

On note par  $C_{4,n}$  le graphe obtenu à partir d'un cycle  $C_4$ , en reliant un sommet de  $C_4$  avec le centre de l'étoile subdivisée  $S_n^*$  obtenu à partir d'une étoile  $K_{1,n}$  en subdivisant chaque arête une seule fois.

**Théorème 2.9.** [24] Si  $G$  est un graphe connexe unicyclique d'ordre  $n$ , alors  $\gamma'(G) = \lfloor n/2 \rfloor$  si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $C_4; C_5; C_7; C_{3,p}$  ou  $C_{4,p}$  pour  $p \geq 0$ .

**Théorème 2.10.** [24] Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n$  et  $e = uv$  une arête de degré maximum  $\Delta'$ , on a  $\gamma' = |E| - \Delta'$  si et seulement si  $\text{diam}(T) \leq 4$  et  $\text{deg}(w) \leq 2$  pour tout sommet  $w \neq u, v$ .

**Théorème 2.11.** [24] Pour tout graphe connexe unicyclique  $G = (V, E)$  avec un cycle  $C$ , on a  $\gamma' = |E| - \Delta'$  si et seulement si un des cas suivants est vérifié :

- i)  $G = C_3$ .
- ii)  $C = C_3 = (u_1u_2u_3u_1)$ ,  $\text{deg}(u_1) \geq 3$ ,  $\text{deg}(u_2) = \text{deg}(u_3) = 2$ ,  $d(u_1; w) \leq 2$  pour tout sommet  $w$  n'appartient pas au cycle  $C$  et  $\text{deg}(w) \geq 3$  pour au plus un sommet  $w$  qui n'est pas dans  $C$ .
- iii)  $C = C_3 = (u_1u_2u_3u_1)$ ,  $\text{deg}(u_1) \geq 3$ ,  $\text{deg}(u_2) \geq 3$ ,  $\text{deg}(u_3) = 2$ , tous les sommets qui n'appartiennent pas à  $C$  adjacents à  $u_1$  ont un degré au plus 2 et tous les sommets dont la distance par rapport à  $u_1$  est 2 sont des sommets pendants.
- iv)  $C = C_3$ ,  $\text{deg}(u_1) = 3$ ,  $\text{deg}(u_2) \geq 3$ ,  $\text{deg}(u_3) \geq 3$  et tous les sommets qui n'appartiennent pas à  $C$  sont des sommets pendants.
- v)  $G = C_4$ .
- vi)  $C = C_4$ , et aussi un sommet exactement de  $C$ , ou deux sommets adjacents de  $C$  ont un degré au moins 3 et tous les sommets qui n'appartiennent pas à  $C$  sont des sommets pendants.

**Définition 2.12.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. L'indice chromatique  $\chi'(G)$  est défini par le nombre minimum de couleurs des arêtes de sorte que deux arêtes adjacentes ne soient pas colorées par la même couleur.



**Théorème 2.13.** [32] *Pour tout graphe  $G$  de taille  $m$ , on a  $\gamma'(G) \leq m - \Delta'$ , où  $\Delta'$  présente le degré maximum d'une arête dans  $G$ .*

**Théorème 2.14.** [32] *Pour tout graphe  $G$  de taille  $m$ , on a  $\gamma'(G) \leq m - \beta_1 + q_0$ , où  $q_0$  présente le nombre des arêtes isolées dans  $G$ .*

**Théorème 2.15.** [32] *Pour tout graphe  $G$  de taille  $m$ , on a  $\gamma'(G) + \chi'(G) \leq m + 1$ .*

**Théorème 2.16.** [24] *Pour tout graphe  $G$  de taille  $m$ ,  $\gamma'(G) + \chi'(G) = m + 1$  si et seulement si  $G = C_3$  ou  $K_{1,n-1}$  ou  $qK_2$ .*

Avant de présenter le reste des résultats, on donne les définitions de quelques graphes particuliers.

**Définition 2.17.** [36] *On appelle graphe ombre d'un graphe  $G$ , noté  $D_2(G)$ , le graphe construit en prenant deux copies de  $G$ , disons  $G'$  et  $G''$ . Joignez chaque sommet  $u'$  de  $G'$  aux voisins du sommet correspondant  $u''$  de  $G''$ .*

**Définition 2.18.** [36] *On appelle graphe milieu d'un graphe  $G$ , noté par  $M(G)$ , le graphe dont l'ensemble de sommets est  $V(G) \cup E(G)$  où deux sommets sont adjacents si*

- i) *Ils sont deux arêtes adjacentes de  $G$ , ou*
- ii) *L'un est un sommet de  $G$  et l'autre est une arête incidente à ce sommet.*

**Définition 2.19.** [35] *un graphe total d'un graphe  $G$ , noté par  $T(G)$ , est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $V(G) \cup E(G)$  et deux sommets sont adjacents dans  $T(G)$  si :*

- i) *Ils sont deux arêtes adjacentes dans  $G$ , ou*
- ii) *L'un est un sommet de  $G$  et l'autre est une arête incidente à ce sommet, ou*
- iii) *Les deux sont des sommets adjacents dans  $G$ .*

Il est facile de voir que  $T(G)$  contient toujours à la fois  $G$  et le graphe adjoint  $L(G)$  comme sous-graphes induits.

**Définition 2.20.** *Pour un graphe  $G = (V, E)$ , le degré d'une arête  $e \in E$  est le nombre des arêtes adjacentes à  $e$  dans  $G$ .*

**Lemme 2.21.** *[33] On considère le graphe  $G = (V, E)$  et son graphe total  $T(G)$ . Soit  $M$  un ensemble des arêtes de  $G$ . Si  $M$  est le couplage maximal de  $G$  et  $M \cup (V - V_M)$  est un ensemble indépendant maximum de  $T(G)$ , alors  $M$  est un ensemble arête-dominant indépendant minimum.*

**Théorème 2.22.** *[33] Si  $M$  est un ensemble arête-dominant indépendant minimum de  $G$ , alors  $M \cup (V - V_M)$  est un ensemble indépendant maximum de  $T(G)$ .*

Pour les différentes notations théoriques et terminologies de graphe, nous suivons [37] tandis que les termes relatifs au concept de domination sont utilisés dans le sens de [3]. Dans la partie suivante, nous étudions le nombre de l'arête-domination de *graphe milieu*, *graphe total* et *graphe ombre* des chaînes  $P_n$  et des cycles  $C_n$ .

**Théorème 2.23.** *[38] Si  $P_n$  un chaîne, alors  $\gamma'(D_2(P_n)) = 2\lceil(n-1)/3\rceil$ .*

**Théorème 2.24.** *[38] Si  $P_n$  un chaîne, alors  $\gamma'(M(P_n)) = \lfloor n/2 \rfloor$ .*

**Théorème 2.25.** *[38] Si  $P_n$  un chaîne, alors :*

$$\gamma'(T(P_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod{3} \\ \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème 2.26.** *[38] Si  $C_n$  un cycle, alors :*

$$\gamma'(D_2(C_n)) = \begin{cases} 2\lceil \frac{n-1}{3} \rceil & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod{3} \\ 2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème 2.27.** *[38] Si  $C_n$  un cycle, alors :*

$$\gamma'(T(C_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{3} \\ \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème 2.28.** *[38] Si  $C_n$  un cycle, alors  $\gamma'(M(C_n)) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ .*

## CHAPITRE 3

# Forte égalité entre les deux nombres de l'arête- domination et de l'arête-domination indépendante inférieure dans les arbres et les chaînes

Dans [29], Allan et Laskar ont montré que pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma'(G) = i'(G)$ , ainsi  $G$  possède un ensemble à la fois  $\gamma'(G)$ -ensemble et  $i'(G)$ -ensemble. Cette propriété sera utilisée pour la démonstration de notre propre résultat.

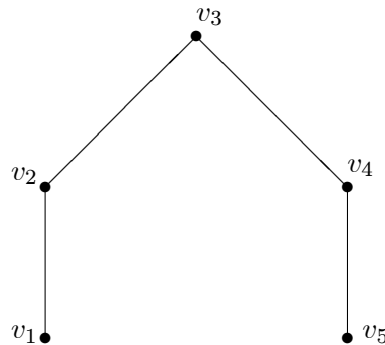
Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la caractérisation des arbres  $T$  tels que le nombre de l'arête-domination  $\gamma'(T)$  est fortement égal au nombre d'arête-domination indépendante inférieure  $i'(T) : \gamma'(T) \equiv i'(T)$ . On note de tels arbres par  $(\gamma', i')$ -arbres. Ainsi en déduisant une caractérisation des chaînes dont on a cette forte égalité, et on note de même de telles chaînes par  $(\gamma', i')$ -chaînes.

Le travail présenté dans ce chapitre à été réalisé en collaboration avec Mme Meddah.

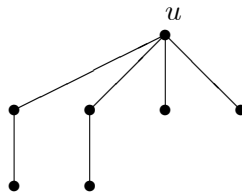
### 3.1 Définitions et résultats préliminaires

**Observation 3.1.** [29] Pour tout graphe  $G$ , on a  $\gamma'(G) = i'(G)$ .

Bien que l'égalité  $\gamma'(G) = i'(G)$  soit assurée pour tout graphe  $G$ , mais la forte égalité ne l'est pas. A titre d'exemple, le graphe  $P_5$  de la Figure 3.1, dont l'ensemble des arêtes  $\{v_2v_3, v_3v_4\}$  est un  $\gamma'(P_5)$ -ensemble mais n'est pas un  $i'(P_5)$ -ensemble car les deux arêtes  $v_2v_3$  et  $v_3v_4$  sont adjacentes.

FIGURE 3.1. Graphe  $P_5$ 

Pour deux entiers positifs  $t_1$  et  $t_2$  avec  $t_1 + t_2 \geq 1$ , soit  $R_{t_1, t_2}(u)$  l'arbre obtenu à partir d'une étoile  $K_{1, t_1 + t_2}$  centrée en  $u$  en attachant à  $t_2 \geq 1$  sommets pendants de l'étoile, chacun au moins un sommet pendent. Il est clair que  $R_{t_1, 0}(u)$  est une étoile  $K_{1, t_1}$ . De même, il est facile de voir que  $\gamma'(R_{t_1, t_2}(u)) = t_2 \forall t_2 \geq 1$  et que  $\gamma'(R_{t_1, t_2}(u)) \not\cong i'(R_{t_1, t_2}(u))$  si  $t_2 \geq 2$ . A titre d'exemple de l'arbre  $R_{t_1, t_2}(u)$ , le graphe de la Figure 3.2.

FIGURE 3.2. L'arbre  $R_{2,2}(u)$ .

**Définition 3.2.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Le voisinage ouvert d'une arête  $e$  est  $N(e) = \{e' \in E : e' \text{ est adjacente à } e\}$ . Le voisinage fermé d'une arête  $e$  est  $N[e] = N(e) \cup \{e\}$ .

**Définition 3.3.** Le voisinage privé d'une arête  $e = xy$  par rapport à l'extrémité  $y$  et par rapport à un ensemble d'arêtes  $D$ , noté  $pn[e, D]_y$  est l'ensemble des arêtes incidentes à  $y$  qui n'ont pas d'autres arêtes voisines dans  $D$  :  $pn[e, D]_y = \{e' : N[e'] \cap D = \{e\}\}$ .

**Proposition 3.4.** Soit  $T$  un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial  $T'$  d'ordre au moins 3, et un arbre  $R_{t_1, t_2}(w)$  avec  $t_2 \geq 1$ , en ajoutant l'arête  $xw$  à un sommet  $x$  de  $T'$ . Alors :

1.  $\gamma'(T) = \gamma'(T') + t_2$
2.  $i'(T) = i'(T') + t_2$ .

Preuve. Soient  $\{x_1, \dots, x_{t_1}\}$  l'ensemble des sommets pendants voisins à  $w$ ,  $\{y_1, \dots, y_{t_2}\}$  l'ensemble des sommets supports voisins à  $w$  dans  $T_w$  qui est isomorphe à une étoile double  $S_{t_1, t_2}(w) : t \geq 1$ , si  $t_2 = 1$  ou isomorphe à un arbre  $R_{t_1, t_2}(w)$  si  $t_2 \geq 2$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, t_2\}$ , soit  $y'_i$  un des sommets pendants de  $y_i$ .

1. Soit  $D$  un  $\gamma'(T)$ -ensemble. Sans perte de généralité supposons que  $wy_i \in D$  pour  $i \in \{1, \dots, t_2\}$ . Soient  $e$  une arête incidente à  $x$  dans  $T'$  et  $D' = D \cap E(T')$ . Si  $wx \notin D$ , alors l'ensemble  $D'$  est un arête-dominant de l'arbre  $T'$ , d'où  $\gamma'(T') \leq \gamma'(T) - t_2$ . Si maintenant  $wx \in D$ , alors l'ensemble  $D' \cup \{e\}$  est un ensemble arête-dominant de  $T'$  et donc :

$$\begin{aligned} \gamma'(T') &\leq |D \cap E(T') \cup \{e\}| \\ &= \gamma'(T) - t_2 - 1 + 1 \\ &= \gamma'(T) - t_2 \end{aligned}$$

L'égalité  $\gamma'(T) = \gamma'(T') + t_2$  est obtenue par le fait que chaque  $\gamma'(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble arête-dominant de  $T$  en ajoutant  $\bigcup_{i=1}^{t_2} \{wy_i\}$ .

2. Par l'Observation 3.1, on a  $i'(T) = \gamma'(T)$  et  $i'(T') = \gamma'(T')$ , et par l'item a, on a  $\gamma'(T) = \gamma'(T') + t_2$ , d'où l'égalité  $i'(T) = i'(T') + t_2$ .

□

### 3.2 Caractérisations des $(\gamma', i')$ -arbres

Nous arrivons à la caractérisation constructive de la famille  $\mathcal{O}$  des arbres  $T$  tels que  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ . On définit la famille  $\mathcal{O}$  de tous les arbres  $T$  qui peuvent être obtenus récursivement à partir d'une séquence  $T_1, T_2, \dots, T_k$  ( $k \geq 1$ ) d'arbres, où  $T_1 = K_{1,p}$  ( $p \geq 2$ ), ou  $T_1 = S_{p,q}$  ( $p, q \geq 1$ ),  $T = T_k$ , et, si  $k \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  est obtenu à partir de  $T_i$  en utilisant les opérations  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  définies ci-dessous :

- *Opération  $\mathcal{O}_1$*  : Ajouter une étoile  $K_{1,t}$  :  $t \geq 2$  de centre  $u$ , en attachant un des sommets pendants  $v$  par une arête  $vx$  à un sommet  $x$  de  $T'$  avec la condition que pour tout  $\gamma'(T')$ -ensemble  $D$ , si une arête  $xy \in D$ , alors  $pn[xy, D]_y \neq \emptyset$ .
- *Opération  $\mathcal{O}_2$*  : Ajouter l'étoile double  $S_{t,j}$  de sommet supports  $u$  et  $v$ , tels que  $|L_u| = t \geq 1$  et  $|L_v| = j \geq 1$ , en attachant  $v$  par une arête  $vx$  à un sommet  $x$  de  $T'$  avec la condition que pour tout  $\gamma'(T')$ -ensemble  $D$ , si une arête  $xy \in D$ , alors  $pn[xy, D]_y \neq \emptyset$ .

On constate le lemme suivant.

**Lemme 3.5.** *Si  $T = P_2$  ou  $T \in \mathcal{O}$ , alors  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ .*

Preuve. Si  $T = P_2$ , alors il est évident que  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ . Maintenant soit  $T$  un arbre de  $\mathcal{O}$ , alors  $T$  est obtenu à partir d'une séquence  $T_1, T_2, \dots, T_k$  ( $k \geq 1$ ) d'arbres, où  $T_1 = K_{1,p}$  ( $p \geq 2$ ) ou  $T_1 = S_{p,q}$  ( $p, q \geq 1$ ),  $T = T_k$ , et si  $k \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  est obtenu récursivement à partir de  $T_i$  en utilisant l'une des deux opérations définies ci-dessus.

Par induction sur le nombre d'opérations effectuées pour construire  $T$ . Il est clair que la propriété est vraie si  $k = 1$ , ceci établit les cas de base. Supposons maintenant que  $k \geq 2$  et que le résultat est vérifié pour tous les arbres  $T \in \mathcal{O}$  qui peuvent être construits à partir d'une séquence d'au plus  $k - 1$  opérations, et soit  $T' = T_{k-1}$ . Par hypothèse d'induction,  $T'$  est un  $(\gamma', i')$ -arbre. Soit  $D$  un  $\gamma'(T)$ -ensemble et  $D' = D \cap E(T')$ . Alors d'après les items 1 et 2 de la Proposition 3.4 pour  $t_2 = 1$ ,  $i'(T) = i'(T') + 1$  et  $\gamma'(T) = \gamma'(T') + 1$ . Considérons la situation suivante :

La dernière opération effectuée sur l'arbre  $T'$  obtenu par  $k - 1$  opérations est  $\mathcal{O}_1$  (respectivement  $\mathcal{O}_2$ ). Si  $vx \in D$ , alors la substitution de l'arête  $vx$  par une arête  $e = xy$  incidente à  $x$  dans  $T'$ , implique que l'ensemble  $D'' = \{e\} \cup D'$  est un arête-dominant de  $T'$ . Et par la Proposition 3.4 pour  $t_2 = 1$ ,  $D''$  est un  $\gamma'(T')$ -ensemble qui vérifie la condition  $pn[e, D'']_y = \emptyset$ , contradiction avec la condition imposée par l'opération  $\mathcal{O}_1$  (respectivement  $\mathcal{O}_2$ ). Par conséquent  $vx \notin D$ . Puisque  $T'$  est un  $(\gamma', i')$ -arbre et comme on peut étendre tout  $\gamma'(T')$ -ensemble à un ensemble arête-dominant de  $T$ , en ajoutant l'arête  $uv$ , alors cet

ensemble est un arête-dominant indépendant de  $T$ . Il s'ensuit que  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ , ce qui implique que  $T$  est un  $(\gamma', i')$ -arbre.  $\square$

**Théorème 3.6.** *Si  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 2$ , alors  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$  si et seulement si  $T = P_2$  ou  $T \in \mathcal{O}$ .*

Preuve. Si  $T = P_2$  ou  $T \in \mathcal{O}$ , alors d'après le Lemme 3.5,  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ .

Montrons maintenant la nécessité: Il est évident que,  $\gamma'(P_2) \equiv i'(P_2)$ . Maintenant supposons que  $n \geq 2$ . Par induction sur l'ordre  $n$  de l'arbre  $T$ : Si  $n = 2$ , alors  $T = P_2$  qui vérifie  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ . Si  $n = 3$ , alors  $T = K_{1,2}$  qui appartient à  $\mathcal{O}$ . Supposons que tout  $(\gamma', i')$ -arbre  $T'$  d'ordre  $n', 2 \leq n' < n$ , est dans  $\mathcal{O}$ , et soit  $T$  un  $(\gamma', i')$ -arbre d'ordre  $n$ . Si  $T$  est une étoile double, alors  $T \in \mathcal{O}$ . D'où toutes les étoiles doubles sont dans  $\mathcal{O}$ . Si  $\text{diam}(T) = 4$ , alors  $T = R_{t_1, t_2}(u)$  avec  $t_2 \geq 2$ , et dans ce cas il est simple de vérifier que  $\gamma'(T) \not\equiv i'(T)$ . Donc on peut supposer que  $T$  a un diamètre au moins 5.

Enracinons  $T$  en un sommet pendant  $r$  de la plus longue chaîne. Soit  $u$  un sommet à distance  $\text{diam}(T) - 1$  de  $r$  sur la plus longue chaîne commençant par  $r$ . Puisque  $\text{diam}(T) \geq 5$ , soit  $v, w$  les sommets parents de  $u$  et  $v$ , respectivement. Aussi soit  $D$  un  $i'(T)$ -ensemble. Soient  $t_1$  le nombre de sommets pendants reliés à  $v$  et  $t_2$  le nombre de sommets supports reliés à  $v$  dans l'arbre  $T_v$ . Soient  $T' = T \setminus T_v$  et  $D' = D \cap E(T')$ . Sans perte de généralité supposons que  $uv \in D$ . Ainsi on distingue les deux cas suivants:

**Cas 1 :**  $t_2 = 1$  : Soit  $t \geq 1$  le nombre de sommets pendants attachés au support  $u$ . Dans ce cas, l'arbre  $T_v$  est isomorphe à  $S_{t, t_1}(v)$  si  $t_1 \geq 1$  ou à  $K_{1, t+1}(v)$  si  $t_1 = 0$ . Puisque  $\text{diam}(T) \geq 5$ , alors l'ordre de  $T'$  est au moins 3, aussi si  $T'$  est une étoile alors  $w$  n'est pas son centre, sinon  $\text{diam}(T) = 4$ . Soit  $E'$  l'ensemble de toutes les arêtes incidentes à  $w$  dans  $T'$ . Il est clair que  $0 \leq |E' \cap D'| \leq 1$  (car si  $|E' \cap D'| > 1$ , alors l'ensemble  $D$  n'est pas forcément un  $i'(T)$ -ensemble). D'après la Proposition 3.4, on a  $\gamma'(T') = \gamma'(T) - 1$ ,  $i'(T') = i'(T) - 1$ .

Supposons en premier que  $|E' \cap D'| = 0$ . En particulier, et puisque l'ensemble  $D$  est un  $i'(T)$ -ensemble, alors cette propriété reste préservée pour l'ensemble  $D'$  dans l'arbre  $T'$ . Donc par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{O}$ . Ainsi, si  $t_1 = 0$ , alors  $T \in \mathcal{O}$  car il est obtenu à partir

de  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_1$ , et si  $t_1 \geq 1$ , alors  $T \in \mathcal{O}$  car il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_2$ .

Maintenant supposons que  $|E' \cap D'| = 1$  et soit  $e = wz \in E'$  tel que  $z$  est un voisin de  $w$  dans  $T'$ . Si on suppose que  $pn[e, D']_z = \emptyset$ , alors l'arête  $e$  est privée d'elle même dans  $D'$ . Ainsi l'ensemble  $\{vw\} \cup D' \setminus \{e\}$  est un autre  $\gamma'(T)$ -ensemble mais qui n'est pas un  $i'(T)$ -ensemble. Contradiction avec l'hypothèse que  $T$  est un  $(\gamma', i')$ -arbre. Par conséquent  $pn[e, D']_z \neq \emptyset$ . En outre la substitution de  $e$  avec  $vw$  est impossible. En particulier, et puisque l'ensemble  $D$  est à la fois un  $\gamma'(T)$ -ensemble et  $i'(T)$ -ensemble, alors cette propriété reste préservée pour l'ensemble  $D'$  dans l'arbre  $T'$ . Donc par induction sur l'ordre de  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{O}$ . Et Ainsi, si  $t_1 = 0$ , alors  $T \in \mathcal{O}$  car il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_1$ , et si  $t_1 \geq 1$ , alors  $T \in \mathcal{O}$  car il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_2$ .

**Cas 2 :**  $t_2 \geq 2$  : Dans ce cas l'arbre  $T_v$  est isomorphe à l'arbre  $R_{t_1, t_2}(v)$  de centre  $v$ , défini auparavant. Soit  $\{u, y_2, \dots, y_{t_2}\}$  l'ensemble des sommets supports attachés à  $v$  dans  $T_v$ . Si on suppose que l'ensemble  $\{vu, vy_2, \dots, vy_{t_2}\}$  appartenant à  $D$ , alors on aura une contradiction avec notre hypothèse  $T$  un  $(\gamma', i')$ -arbre, car les arêtes  $vu, vy_2, \dots, vy_{t_2}$  sont toutes adjacentes.  $\square$

### 3.3 Caractérisations des $(\gamma', i')$ -chaînes

A présent la caractérisation des  $(\gamma', i')$ -chaînes devient une conséquence directe de la caractérisation des  $(\gamma', i')$ -arbres. On définit la sous famille  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$  de toutes les chaînes  $P_n$  qui peuvent être obtenues récursivement à partir d'une séquence  $T_1, T_2, \dots, T_k$  ( $k \geq 1$ ) de chaînes, où  $T_1 = K_{1,2}$ , ou  $T_1 = S_{1,1}$ ,  $T = T_k$ , et, si  $k \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  est obtenue à partir de  $T_i$  en utilisant l'opération  $\mathcal{F}_1$  définie ci-dessous :

- *Opération  $\mathcal{F}_1$*  : Ajouter une chaîne  $P_3 = wuv$ , en attachant le sommet  $v$  par une arête  $vx$  à un sommet pendant  $x$  de  $T'$ .



**Corollaire 3.7.** *Si  $P_n$  est une chaîne d'ordre  $n \geq 2$ , alors  $\gamma'(P_n) \equiv i'(P_n)$  si et seulement si  $P_n = P_2$  ou  $P_n \in \mathcal{F}$ .*

Donc à partir de l'arbre de base  $T_1$  qui est une chaîne  $P_3 (K_{1,2})$  ou une chaîne  $P_4 (S_{1,1})$  et en utilisant l'opération  $\mathcal{F}_1$  on aura la caractérisation suivante :

**Corollaire 3.8.** *Si  $P_n$  est une chaîne d'ordre  $n \geq 2$ , alors  $\gamma'(P_n) \equiv i'(P_n)$  si et seulement si  $n = 2$  ou  $(n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{3})$ .*

**Exemple d'application:** Pour illustrer la construction de la famille  $\mathcal{O}$ , on considère l'arbre  $T := T_{x_7}$  de la Figure 3.3, tel que  $\gamma'(T) \equiv i'(T) = 3$ . Soit le sous ensemble  $D = \{x_0x_1, x_3x_4, x_5x_6\}$  qui est à la fois un  $\gamma'(T)$ -ensemble et un  $i'(T)$ -ensemble. Démontrons que cet arbre appartenant à la famille  $\mathcal{O}$ .

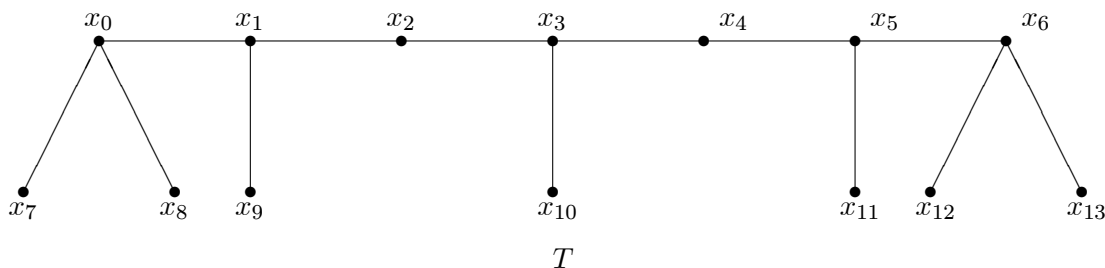


FIGURE 3.3. Arbre  $T$  avec  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$

En premier, le sommet  $x_6$  est le sommet support le plus loin de la racine  $x_7$  et son père est  $x_5$ . Soit  $T_1 := T \setminus T_{x_5}$  (voir la Figure 3.4). D'après la Proposition 3.4,  $\gamma'(T) = \gamma'(T_1) + 1$ ,  $i'(T) = i'(T_1) + 1$ . Notons que l'ensemble  $D_1 = D \cap E(T_1) = \{x_0x_1, x_3x_4\}$  est à la fois un  $\gamma'(T_1)$ -ensemble et un  $i'(T_1)$ -ensemble. Il en résulte que l'arbre  $T$  est obtenu à partir de  $T_1$  en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_2$ .

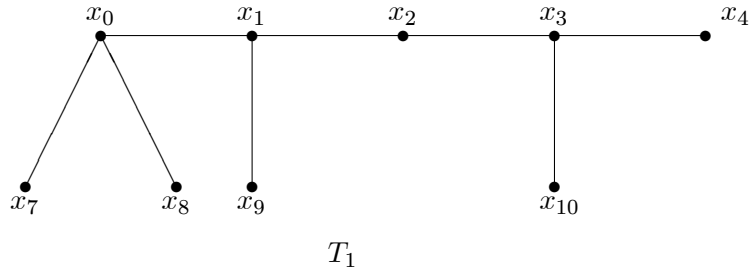


FIGURE 3.4. La première décomposition de l'arbre  $T$

On considère maintenant l'arbre  $T_1$  avec  $\gamma'(T_1) \equiv i'(T_1) = |D_1| = 2$ . Il est clair que  $x_3$  est le sommet support à distance maximum de  $x_7$ . Soit  $T_2 := T_1 \setminus T_{x_2}$  avec  $x_2$  le père de  $x_3$  dans  $T_1$  (voir la Figure 3.5). Ainsi, d'après la Proposition 3.4,  $\gamma'(T_1) = \gamma'(T_2) + 1$ ,  $i'(T_1) = i'(T_2) + 1$ . Soit  $D_2 = D_1 \cap E(T_2) = \{x_0x_1\}$  qui est un  $\gamma'(T_2)$ -ensemble et un  $i'(T_2)$ -ensemble. Donc l'arbre  $T_1$  est obtenu à partir de  $T_2$  en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_1$ .

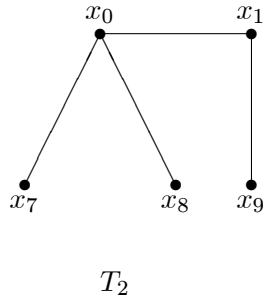


FIGURE 3.5. La deuxième décomposition de l'arbre  $T$

Notons que l'arbre  $T_2 = S_{2,1}$  est un arbre de base de la famille  $\mathcal{O}$ . Donc l'arbre  $T$  est obtenu à partir de la séquence d'arbres  $T_2$  et  $T_1$  en appliquant successivement les opérations  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ . D'où  $T \in \mathcal{O}$ .

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de la notion de l'arête-domination dans les arbres. Cette notion a été intensivement étudiée au cours de ces dernières années, et les résultats qui la concerne sont peu nombreux. Et cela par la caractérisation constructive de la famille des arbres  $T$  tels que le nombre de l'arête-domination  $\gamma'(T)$  est fortement égal au nombre de l'arête-domination indépendante  $i'(T)$  ie  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ . Cette caractérisation a été basé essentiellement sur le résultat important de *Allan et Laskar [29]*, qui ont montré que pour tout graphe  $G$ ;  $\gamma'(G) = i'(G)$ , ainsi  $G$  possède un ensemble à la fois  $\gamma'(G)$ –ensemble et  $i'(G)$ –ensemble. Une caractérisation particulière des chaînes dont on a cette forte égalité se déduit facilement à partir de la caractérisation des arbres avec  $\gamma' \equiv i'$ .

Bien que les travaux réalisés le long de ce mémoire et les travaux réalisés auparavant soient importants, nous sommes loin de répondre aux nombreux problèmes posés dans le domaine de l'arête-domination et l'arête-domination indépendante.

La contribution réalisée durant ce mémoire ouvre plus de perspectives de recherche. Suite aux résultats obtenus sur le nombre de l'arête-domination et de l'arête-domination indépendante dans les graphes, l'étude de ces problèmes peut être poursuivie dans des classes particulières de graphes ayant des structures simples tels que : Les graphes bipartis, les graphes triangulés, .... etc.

Il serait intéressant de même, de caractériser d'autres classes particulières de graphes  $G$  ayant une structure simple, avec  $\gamma'(G) \equiv i'(G)$ . Un autre problème qui s'avère intéressant est la caractérisation de la famille des arbres  $T$  tels que  $\gamma'(T) \equiv i'(T)$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] C.Berge, *Graphe et Hypergraphes*.Dunod, deuxième édition, 1970.
- [2] G.Chartrand, et L. Lesniak, *Graphs & Diagraphs*. Third Edition, Chapman&Hall, London, 1996.
- [3] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Domination in Graphs*. Advanced Topics. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [4] T. Gallai, *Über extreme Punkt – und Kantenmengen*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 2(1959)133 – 138.
- [5] D. König, *Graphen und Matrizen*, Mat. Fiz. Lapok 38(1931)116 – 119.
- [6] ] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*, Discrete Mathematics 86(1990)3 – 9.
- [7] C.F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petrograde (1862).
- [8] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin and W.D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards*, A brief survey, dans *Graph Theory , Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995)507 – 528.
- [9] C. Berge, "*Les problèmes de coloration en théorie des graphes*". Publ.Inst. Statist. Univ. Paris 9, (1960)123 – 160.
- [10] O. Ore, "*theory of graphs*", Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38(1962).
- [11] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, "*Towards a theory of domination in graphs*", Networks 7(1977)247 – 261.

- [12] K.S. Booth et J.H. Johnson, "*Dominating sets in chordal graphs*". SIAM J. Comput.11(1982)191 – 199.
- [13] R. Laskar, J. Pfaß and S.T. Hedetniemi, "*NP-complittness of total dominationand connected domination*", and "*irredundance for bipartite graphs*". Technical Report 428, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).
- [14] M.R. Garey and D.S. Johnson. "*Computers and Intractability*": A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman, 1979.
- [15] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi and D.J. Miller, "*Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs*", Canad Math . Bull. 21(1978)461 – 468
- [16] M.R. fellow,G.H. Fricke, S.T. Hedetniemi and D.P. Jacobs, "*The private neighbor cube*". SIAM J. Discrete Math., 7(1)(1994)41 – 47.
- [17] J. Pfaff, "*Algorithmic Complexity of domination-related Graph Parameters*". PhD thesi, Clemson Univ.,1984.
- [18] T.W. Haynes and P.J. Slater, "*Paired domination in graphs*". Networks 32(1998)199–206.
- [19] E. Sampathkumar and H.B. Waliker. "*The connected domination number*" of a graph. J. Math. Phys. Sci. 13(1979)607 – 613.
- [20] J. Pfaff, R. Laskar and S.T. Hedetniemi." *NP-completeness of total and connected domination, and irredundance for bipartite graphs*". Technical Report 428, Dept. Mathematical Science, Clemson Univ. 1983.
- [21] F. Harary and T.W. Haynes." *Double domination in graphs*". Ars Combin. 55(2000)201 – 203.
- [22] C.S Liao and G.J. Chang,,"*k-tuple domination in graphs*". Information Processing Letters 87(2003)45 – 50.

- [23] Krishnendu Chakrabarty, Mark G. Karpovsky et Lev B. Levitin, "*On a new class of codes for identifying vertices in graph*", IEEE Transactions on Information Theory 44(1998), 599 – 611. —
- [24] S. Arumugam and S. Velammal, "*Edge domination in graphs*", Taiwanese Journal of Mathematics Vol. 2, No.2, 173 – 179, June 1998.
- [25] S. Arumugam and S. Jerry, "*Fractional edge domination in graphs*", Applicable Analysis and Discrete Mathematics, vol. 3, no.2, pp.359 – 370, 2009.
- [26] V. R. Kulli and N. D. Soner, "*Complementary edge domination in graphs*", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol.28, no.7, pp.917 – 920, 1997.
- [27] R. Dutton and W. F. Klostermeyer, "*Edge dominating sets and vertex covers*", Discussiones Mathematicae, vol. 33, no.2, pp.437 – 456, 2013.
- [28] S. Mitchell and S. T. Hedetniemi, "*Edge domination in trees*", Congr. Numer.19(1977), 489 – 509.
- [29] R. B. Allan and R. Laskar, "*On domination and independent domination of a graph*", Discrete Math. 23(1978), 73 – 76.
- [30] R.B. Allan and R. Laskar, "*On domination and independent domination numbers of a graph*", Discrete Mathematics 23(1978)73 – 76.
- [31] F. Harary, "*Graph Theory*", Addison-Weseley, Reading Mass, 1969.
- [32] S. R. Jayaram, "*Line domination in graphs*", Graphs Combin., 3(1987), 357 – 363.
- [33] M. Yannakakis and F. Gavril, "*Edge dominating sets in graphs*", SIAM Journal on Applied Mathematics, 38(3) : 364 – 372, June 1980.
- [34] B. Basavanagoud and Sunilkumar M. Hosamani, "*Edge dominating graph*", Tamkang journal of mathematics, Winter 2012.
- [35] M. Behzad, "*A criterion for the planarity of the total graph of a graph*", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1967.

- [36] J. A. Gallian, "*A dynamic survey of graph labeling*," The Electronic Journal of Combinatorics, vol. 16, article #DS6, 2013.
- [37] D. B. West, "*Introduction to Graph Theory*", Prentice Hall, New Delhi, India, 2003.
- [38] S. K. Vaidya and R. M. Pandit, "*Edge Domination in Some Path and Cycle Related Graphs*", Hindawi Publishing Corporation. ISRN Discrete Mathematics, 2014.
- [39] G. Chartrand and S. Schuster, "*On the independence number of complementary graphs*", Trans. New York Acad. Sci.,1974