

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Saad DAHLEB de Blida
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département D'Aéronautique

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme

D'ingénieur d'état en Aéronautique

Option : Construction et Maintenance Aéronautique

Spécialité : Structure

RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DE PRANDTL POUR LA TORSION DES POUTRES CYLINDRIQUE DE SECTIONS NON CIRCULAIRE SIMPLEMENT ET DOUBLEMENTS CONNEXES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Présenté par :

- *HAMMOUM Assia.*
- *LAKEHAL Mohamed.*

Dirigé par :

Mr. KIRAD Abdelkader
Mr. ZEBBICHE Toufik

Année Universitaire: 2010/2011

Résumé

Le présent travail consiste à élaborer un programme de calcul numérique permettant d'évaluer la distribution de la contrainte de torsion dans des sections non circulaires, complexes, simplement et doublement connexes soumises à un moment de torsion en utilisant la méthode des éléments finis. Cette étude est connue encore par le problème de PRANDAL. L'application sera pour des sections de profil d'aile et d'autres sections type rectangle, secteur, hexagone... utilisées dans le domaine de la mécanique en général.

On doit procéder à la génération de maillage dans la section en découpant le domaine en petits sous-domaines de section triangulaire ou quadrilatère suivant le type d'éléments finis utilisés.

Dans les applications de torsion, généralement les formules et les résultats pour la section circulaire sont utilisés, malgré que la section dans le cas réel est de type non circulaire. Cela est dû au manque de formule pour les sections considérées. Notons ici que chaque section possède sa propre formule mathématique de l'angle de rotation et de contrainte qui diffère d'une section à l'autre.

La comparaison des résultats sera faite avec la section circulaire connue dans la littérature. Après le développement du programme de calcul pour différentes sections non circulaires, on doit appliquer encore, le programme pour la section circulaire afin de comparer les résultats avec les résultats théoriques connus pour une section circulaire. En fin un calcul d'erreur de contrainte entre la section circulaire et les sections non circulaires sera effectué.

Mots clés :

-Contrainte – Moment de torsion – Profil d'aile – Éléments finis.

Abstract

The present work is to develop a numerical calculation to evaluate the distribution of torque stress in non-circular section, complex, single and double subject related to torque using the finite element method. This study is yet known about the problem of PRANDAL. The application will be for airfoil sections and another section rectangle type, industry, hexagon ... used in the field of mechanics in general.

We must make the mesh generation in the section by cutting the domain into small subdomains with a triangular section or the type of quadrilateral finite elements used. In applications of torsion, the authors generally use the formulas and results for the circular cross section, although the section in the real case and non-circular type. This is due to the lack of formula for the sections considered. Note here that each section has its own mathematical formula for the angle of rotation and strain that differs from one section to another.

A comparison of the results will be made with the circular section known in the literature. After development of calculation program for non-circular sections, must be applied again, the program for the circular section to compare the results with the theoretical results known for a circular cross section. At the end of a calculation error in stress between the circular and non circular sections will be made.

Keys words:

-Stress – Torque moment – Airfoil section – Finites elements.

ملخص

هذا العمل هو عبارة عن تطوير برنامج عددي لتقييم توزيع الإجهاد الصادر عن الفتل في المقاطع الأسطوانية غير الدائرية باستخدام طريقة العناصر المنتهية، هذه الدراسة معروفة أيضا بمسألة (برانند).

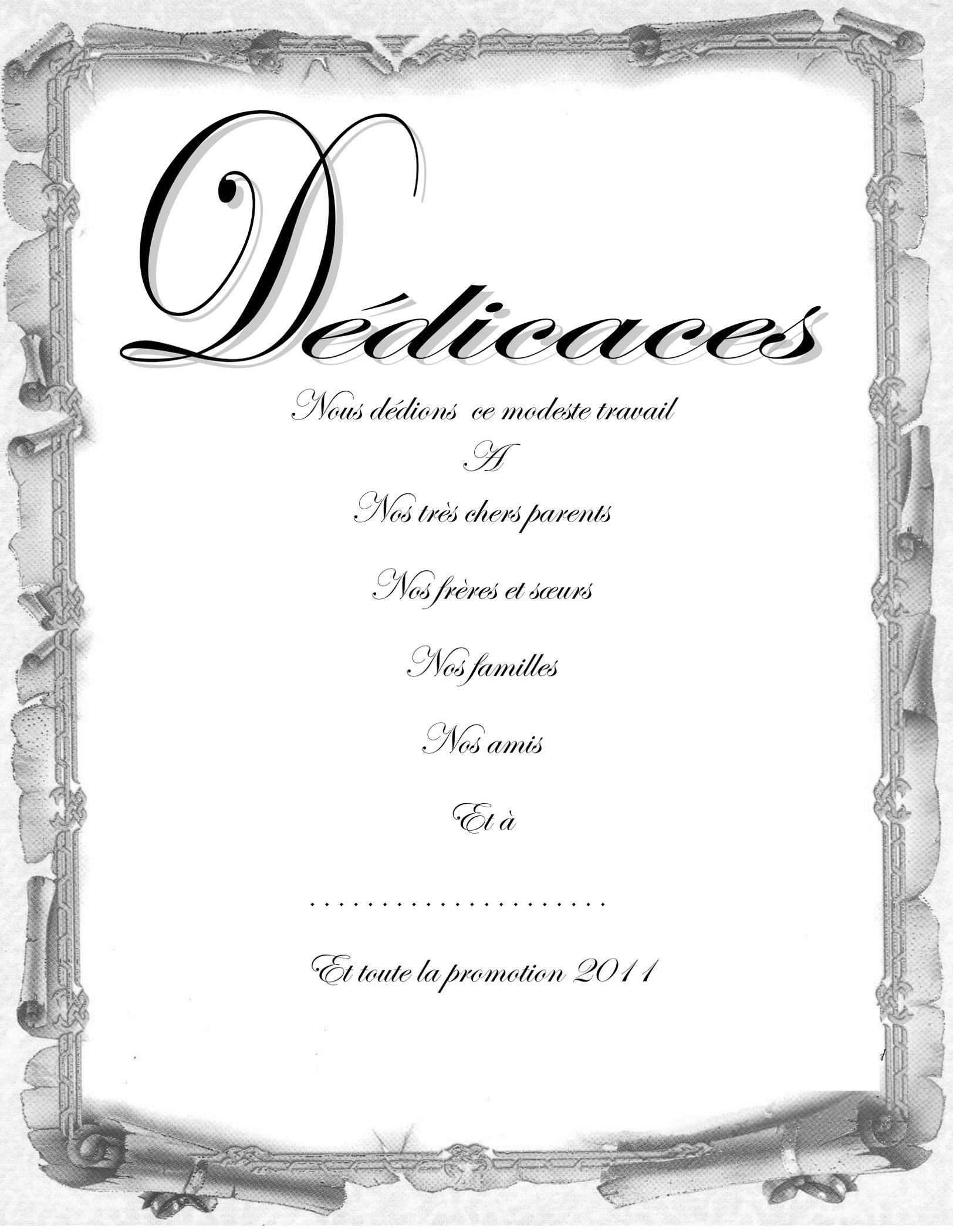
التطبيق كان على (المقطع في جناح الطائرة) وعلى مقاطع أخرى مستعملة في مجال الميكانيك بصفة عامة.

قمنا بتقسيم المقاطع باستعمال عناصر مثلثيه و أخرى رباعية للمقارنة, نستعمل صيغ و نتائج المقطع العرضي الدائري، على الرغم من أن المقاطع في مجال الطيران تكون غير دائرية غالبا، هنا تجب الإشارة إلى أن كل مقطع له صيغته الرياضية الخاصة لزاوية الدوران الحدودية ثابت الفتل و الإجهاد الذي يختلف من مقطع إلى آخر.

مقارنة النتائج كانت مع المقطع الدائري المعروفة نتائجه نظرياً. بعد تطوير البرنامج لعدة مقاطع دائرية، نطبق أيضا البرنامج من اجل المقاطع غير الدائرية و في الأخير يتم حساب الخطأ الوارد في حساب الضغط .

الكلمات المفتاح :

- الإجهاد - الفتل - العناصر المنتهية.



Dédicaces

Nous dédions ce modeste travail

A

Nos très chers parents

Nos frères et sœurs

Nos familles

Nos amis

Et à

.....

Et toute la promotion 2011

Remerciement

Nous remercions premièrement et avant tous notre dieu qui nous a donner la volonté pour terminer ce travail.

Nous tenons de donner notre gratitude remerciement à notre promoteur Mr KIRAD Abdelkader pour ces conseils et suivis de notre travail dans toutes les phases de préparation de ce sujet.

Nous n'oublions pas de remercie notre Co-promoteur Mr ZEBBICHE Toufik pour ces remarques et sa confiance à notre travail.

Nous remercions les membres de jury qui ont accepté de corriger et enrichir notre travail.

Nous tenons à remercier toute les enseignants de département d'aéronautique pour leurs suivis durant notre cursus.

Nous voudrions profiter l'occasion pour remercier tous les enseignants et les personnels du Département d'Aéronautique qui de près ou de loin ont contribué à notre formation en aéronautique. Merci d'avoir nous encadrés, observés, aidés, conseillés et critiqués.

Nous remercions aussi tous nos collègues qui nous aident durant la préparation de ce modeste travail.

Merci à Vous.

Table des matières

Dédicace	i	
Remerciement	ii	
Résumé	iii	
Table des matières	iv	
Liste des figures	vii	
Liste des tableaux	xiv	
Nomenclature	xv	
Introduction générale	01	
Chapitre I	Connaissances fondamentales	03
I.1	Introduction.....	03
I.2	Définitions et principe de fonctionnement.....	03
	I.2.1 Caractéristiques géométriques d'une section droite plane ...	03
	I.2.2. Moment statique d'une section droite par rapport à un axe.	04
	I.2.3. Centre de gravité d'une surface plane.....	06
	I.2.4. Moment d'inertie d'une surface plane.....	08
	I.2.5. Moment d'inertie polaire.....	08
	I.2.6. Produit d'inertie.....	09
	I.2.7. Caractéristique géométrique d'un triangle linéaire donné par les coordonnées de ces trois nœud.....	10
	I.2.8. Caractéristique géométrique d'une surface plane décomposé en des petites surfaces triangulaires.....	12
I.3	Notion de contrainte et déformation	14
	I.3.1. Forces et moments externes et forces internes.....	14
	I.3.1.a. Forces et moments externes.....	14
	I.3.1.b. Forces internes.....	15
	I.3.2. Contrainte.....	15
	I.3.2.a. Convention de signes.....	18
	I.3.2.b. Etat de contrainte en un point.....	18
	I.3.3. Déformation.....	20
	I.3.3.a. Convention de signes.....	21
	I.3.4. Relations constitutives.....	22
	I.3.4.a. Notions de base.....	22
	I.3.4.b. Relation de Hooke applicables au domaine élastique..	23
	I.3.4.c. Ensemble d'équations d'élasticité.....	24

Chapitre II	Développement mathématique du problème	
II.1	Introduction.....	26
II.2	Méthode de saint-venant.....	26
	II.2.1. Etude des déformations et de la compatibilité géométrique.....	26
	II.2.2. Etude des contraintes.....	28
	II.2.3 Étude des conditions d'équilibre.....	29
	II.2.4 Conditions aux rives latérales.....	30
II.3	Fonction de contraintes	31
	II.3.1 Compatibilité géométriques.....	31
	II.3.2 Equilibre différentiel.....	32
	II.3.3 Conditions aux rives latérales.....	32
	II.3.4 Équilibre avec charge extérieure.....	32
	II.3.5 Représentation physique de la fonction de contrainte Φ	33
II.4	Méthode de l'analogie avec la membrane élastique (méthode de Prandtl).....	34
	II.4.1. Équilibre dans une membrane élastique soumise à une déformation.....	35
	II.4.2. Analogie entre les problèmes posés par la torsion et ceux posés par la membrane élastique.....	36
Chapitre III	Cas particulières – Solutions exactes	
III.1	Introduction.....	38
III.2	Sections circulaire pleine ou creuse et d'épaisseur constant.....	38
	III.2.1. Conventions et système de coordonnées.....	38
	III.2.2. Etude du mode de déformation.....	39
	III.2.3. Relation entre la contrainte et la déformation.....	41
	III.2.4. Conditions d'équilibre.....	42
	III.2.5. Contraintes et déformations en fonction du moment de torsion appliqué.....	43
III.3	Tube à paroi mince	45
	III.3.1 Observations concernant la répartition des Contraintes.....	46
	III.3.2. Flux de cisaillement et équilibre.....	47
	III.3.3. Déformation angulaire.....	50
	III.3.4. Quelques solution particulières.....	52
	III.3.4.1. Résolution pour un barreau de section elliptique.....	53
	III.3.4.2. Résolution pour une section triangulaire (triangle équilatéral).....	55
	III.3.4.3. Résolution pour une section rectangulaire.....	56
Chapitre IV	Formulation et adaptation de la méthode des éléments finis	59
IV.1	Introduction.....	59
IV.2	Bref historique de la méthode des éléments finis.....	59
IV.3	Démarches de la méthode des éléments finis.....	60
IV.4	Formulation variationnelle (intégrale).....	61

IV.5	Formulation en élément fini.....	63
	IV.5.1.Dérivation du modèle forme globale.....	63
	IV.5.2.Dérivation du modèle forme faible « WEAK FORM »...	64
IV.6	Fonctions d'interpolation	66
	IV.6.1.Séries polynomiales	66
	IV.6.2.Différents types d'élément finis adapte.....	67
	IV.6.3.Fonction d'interpolation pour un élément triangulaire a trois nœuds.....	68
	IV.6.4.Fonctions d'interpolations pour un élément quadrilatère a quatre nœuds	70
	IV.6.5 .Fonctions d'interpolations pour un élément quadrilatères ou triangulaire à P nœud (P>4).....	71
IV.7	Calcul des matrices d'éléments	73
	IV.7.1.Matrice d'élément pour un élément triangulaire linéaire...	74
	IV.7.2. Matrice de rigidité pour un élément quadrilatère bilinéaire.....	75
	IV.7.3.Matrice de rigidité pour un élément quadrilatère ou triangulaire à «p» nœuds (P>4)	77
IV.8	Transformation de l'intégrale pour un triangle et un quadrilatère.	81
IV.9	Assemblage des matrices d'éléments.....	86

Chapitre V Génération de maillage

V.1	Introduction	90
V.2	Aspect de la génération de maillage	90
	V.2.1. Concept des différents types domaines.....	90
	V.2.1.a. Région simplement connexe.....	91
	V.2.1.b. Région doublement et multi connexes.....	91
	V.2.2. Classification des techniques de génération de maillage...	91
V.3	Procédures de génération de maillage	92
	V.3.1. Configuration simplement connexe	92
	V.3.1.1. Génération des nœuds sur le contour du domaine	93
	V.3.1.2. Génération des nœuds internes pour maillage de type 'H'	98
	V.3.1.3. Connexion des éléments du maillage type 'H'	102
	V.3.1.4. Génération des nœuds pour un maillage de type 'C' ...	107
	V.3.1.5. Connexion des éléments du maillage type 'C'.....	108
	V.3.2. Fonction de condensation unidimensionnelle.....	111
	V.3.3.Configuration multi-connexes.....	113
	V.3.3.1.Génération des nœuds internes pour un domaine doublement connexes de type 'O'	113
	V.3.3.2.Connexion des éléments du maillage type 'O'	114
	V.3.3.3 .Aperçu sur la génération des nœuds internes pour un domaine multi-connexes quelconque.....	116
	V.3.3.4.Connexion des éléments du maillage obtenu.....	116
	V.3.4.Filtrage des nœuds internes.....	117

Chapitre VI	Résolution numérique et Programmation.....	122
VI.1	Introduction.....	122
VI.2	Méthodes de stockage des matrices bandes sous forme de vecteur	122
VI.2.1	Stockage en colonne.....	
VI.2.2	Stockage en diagonal.....	
VI.2.3	Stockage en ligne	
VI.2.4	Stockage en ligne de serpent.....	
VI.2.5	Stockage en escalier.....	
VI.2.6	Gain en espace mémoire par la méthode de stockage bande	
VI.3	Influence de la numérotation des nœuds sur la forme de la matrice de rigidité	
VI.3.1	Evaluation de la demi-bande d'une matrice bande.....	
VI.3.2	Exemple illustrant l'influence de la numérotation des nœuds.....	
VI.4	Méthode de stockage d'une matrice a diagonales séparées.....	
VI.5	Stockage économique d'une matrice symétrique creuse.....	
VI.5.1	Procédure de chargement de AD et le vecteur force global VF.....	
VI.6	Méthodes de résolution d'un système d'équations linéaire (adaptés a nos problèmes).....	
VI.6.1	Méthodes directe.....	
VI.6.1.A	Méthode de décomposition de KHALESTKI.....	
VI.6.1.B	Méthodes de décomposition de CHOLEVSKI	
VI.6.1.C	Ordre de grandeurs du nombre d'opérations de l'algorithme de KHALETSKI.....	
VI.6.2	Méthodes itératives.....	
VI.6.2.A	Méthode de Gauss Seidel.....	
VI.6.2.B	Méthode itérative de Gauss-Seidel accélérée.....	
VI.6.2.C	Ordre de grandeurs pu nombre d'opérations (G.S.Accéléré).....	
VI.6.2.D	Condition nécessaire et suffisante de convergence du processus de Gauss –Seidel.....	
Conclusion	194
Annexe A	Les abréviations de programme	
Annexe B	intégration numérique par la méthode de « GAUSS-LEGENDRE »	
Annexe C	Menu de différente possibilité d'INPUT	

Liste des figures

Chapitre I

Figure (I.1)	Surfaces élémentaires différentes dans une section A.	04
Figure (I.2)	Moment statique par rapport à un axe (XX').	04
Figure (I.3)	Moment statique par rapport à un repère (OXY).	05
Figure (I.4)	Moment statique par translation du repère ($O_2X_2Y_2$) à ($O_1X_1Y_1$).	06
Figure (I.5)	Coordonnées du centre de gravité.	07
Figure (I.6)	Moment polaire d'une section par rapport au point O.	09
Figure (I.7)	Signes du produit d'inertie dans les quadrants du repère.	10
Figure (I.8)	Coordonnées des nœuds d'un triangle	11
Figure (I.9)	Section arbitraire formée de triangles.	12
Figure (I.10)	Corps soumise à des forces externes.	16
Figure (I.11)	Coupe suivant un plan m d'un corps soumise à des forces externes	16
Figure (I.12)	La force $\overline{\Delta F}$ est décomposée.	17
Figure (I.13)	les composantes de contrainte agissent en I.	18
Figure (I.14)	Etat de contrainte au point I	19
Figure (I.15)	Corps soumise à une déformation	20
Figure (I.16)	Trois éléments parallèles aux axes de référence.	21
Figure (I.17)	Mise en évidence $\gamma_{xy} > 0$.	22

Chapitre II

Figure II.1	Déformations qui, sous l'effet d'un moment de torsion.	26
Figure II.2	Déformation affectant une membrure prismatique sous l'effet d'un moment de torsion.	28
Figure II.3	Contraintes agissant sur une surface élémentaire dA de section de la membrure.	30
Figure II.4	Conditions imposées aux contraintes de cisaillement sur le contour.	30
Figure II.5	Représentation des contraintes de cisaillement par les dérivées partielles de la fonction de contrainte.	34
Figure II.6	Équilibre d'une membrane soumise à une pression.	35

Chapitre III

Figure III.1	Système de coordonnées cylindriques et convention de signe.	39
Figure III.2	Déformation apparent d'un barreau en caoutchouc de section circulaire	39
Figure III.3	les sections étant semblables et soumises au même moment interne.	40
Figure III.4	Mesure de la déformation d'un élément d'une membrure de section circulaire en torsion.	41
Figure III.5	Contrainte de cisaillement agissant sur un petit élément.	42
Figure III.6	Section circulaire creuse.	45
Figure III.7	Angle de rotation total entre deux sections.	45
Figure III.8	Répartition de la contrainte de cisaillement dans des sections soumise à un moment de torsion.	46
Figure III.9	Système de coordonnées d'un tube et les composantes de contraintes pouvant être déterminées.	47
Figure III.10	Le flux de cisaillement.	48
Figure III.11	Le flux de cisaillement doit être constant d'un point à l'autre de contour de la section.	48
Figure III.12	Relation entre le moment de torsion et le flux de cisaillement.	49
Figure III.13	Le travail à fournir pour obtenir une déformation angulaire dans un tube à paroi mince.	50
Figure III.14	Section elliptique d'un barreau prismatique.	53
Figure III.15	Section, en forme de triangle équilatéral d'un barreau prismatique.	55
Figure III.16	Section rectangulaire d'un barreau prismatique soumise à une torsion.	57

Chapitre IV

Figure IV.1	Discrétisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.	63
Figure IV.2	Equilibre interne entre les différents éléments du domaine.	65
Figure IV.3	Élément fini en bidimensionnelle de 3,4 ,5,6 et 8 nœuds.	68
Figure IV.4	Représentation de la fonction continue $u(x, y)$ par une fonction d'interpolation linéaire pour un exemple de triangle à 3 nœuds.	70
Figure IV.5	Élément fini Ω^e de P nœuds.	71
Figure IV.6	Élément quadrilatère a quatre nœuds en décompositions.	76
Figure IV.7	Intégration le long du contour d'un triangle.	82
Figure IV.8	Assemblage des deux éléments triangulaires à 3.	86
Figure IV.9	Assemblage de deux éléments quadrilatères à 8 nœuds.	88

Chapitre V

Figure V.1	Connexité d'un domaine quelconque. (a) Domaine simplement connexe. (b) Domaine multi-connexes.	91
Figure V.2	Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle.	93
Figure V.3	Courbe d'une fonction multivoque	94
Figure V.4	Discrétisation sur le coté AB.	95
Figure V.5	Discrétisation sur le coté AD.	96
Figure V.6	Génération des nœuds sur la frontière du domaine	97
Figure V.7	Illustration de la procédure de détermination des abscisses.	98
Figure V.8	Illustration de la procédure de détermination des ordonnées.	100
Figure V.9	Discrétisation en éléments triangulaires et numérotation des nœuds et des éléments.	103
Figure V.10a	Connexion type 'H'.	105
Figure V.10b	Connexion type 'H'.	105
Figure V.10c	Connexion type 'H'.	105
Figure V.10d	Connexion type 'H'.	106
Figure V.10e	Connexion type 'H'.	106
Figure V.15f	Connexion type 'H'.	106
Figure V.11	Discrétisation d'un maillage de type 'C'.	107
Figure V.12	Illustration d'un maillage final de type 'C'.	108
Figure V.13	Maillage typique 'C' d'un secteur.	109
Figure V.14a	Connexion d'un maillage 'C'	110
Figure V.14b	Connexion d'un maillage 'C'.	110
Figure V.14c	Connexion d'un maillage 'C'	111
Figure V.15	Distribution des nœuds par condensation selon la relation (V.15)	112
Figure V.16	Transformation d'une région doublement connexe à une région	114
Figure V.17a	Connexion pour un maillage type 'O'	115
Figure V.17b	Connexion pour un maillage type 'O'	115
Figure V.18	Coupure et génération d'un maillage multi connexes	116
Figure V.19	Les indices des formules de filtrage pour les noeuds internes des éléments triangulaire.	119
Figure V.20	Les indices des formules de filtrage pour les noeuds internes des éléments quadrilatères.	121

Liste des Tableaux

Chapitre II

Tableau II.1	Correspondance entre les paramètres des équations relatives à la torsion et ceux des équations qui concernent la membrane.....	36
---------------------	--	----

Chapitre IV

Tableau IV.1	Correspondances entre les nœuds globaux et les nœuds des éléments	88
---------------------	---	----

Nomenclature des symboles

$A, A^{(e)}$:	Surface de la section d'un conduit, et la section d'un élément d'un élément fini. m^2 .
A, B, C, \dots, H :	Points spécifiques sur la frontière du domaine.
b :	Largeur de la demi- bande de la matrice de rigidité.
$c_1, c_2 \dots c_8$:	Constante pour l'approximation de la fonction $N(x, y)$.
d_1, d_2 :	Dimension caractéristique.
$F_i^{(e)}$:	Élément du vecteur de sollicitation d'un élément fini.
H :	Type de maillage.
$I_{m, n}$:	Intégrale d'une fonction a deux variable ou la puissance 'm' pou la variable 'x' et la puissance 'n' pou la variable 'y', pour un élément fini typique .
I_{00} :	Aire de la surface d'un élément triangulaire ou quadrilatère ($m=n=0$).
L, l :	Position d'une casa d'un vecteur.
M :	Moment de torsion appliqué.
N_j, N :	Fonction d'interpolation d'un élément fini. le rang de la matrice $[K]$.
N_x, N_y :	Nombres des nœuds suivant les axes x et y respectivement.
n :	Nombre de termes de la fonction d'interpolation.
\vec{n} :	Vecteur unité.
n_x, n_y :	Composantes de vecteur unité.
P, Q :	Paramètre pour le contrôle des points de maillage.
Q :	Flux de contrainte.
R :	Rayon de cylindre.
S :	Section droite, Aire.
u, v, w :	Composantes de placement en coordonnées cartésiennes.
$\{V_k\}, \{VD1\} \dots \{VD4\}$:	Vecteur remplaçants la matrice de rigidité $[K]$ selon méthode de Stockage.

x, y, z :	Coordonnées cartésiennes. r, θ, z : coordonnées cylindrique.
(x_i, y_j) :	Coordonnées de nœud j .
$[K], [K^e]$:	Matrice de rigidité globale et élémentaire respectivement.
$[F], [F^e]$:	Vecteur de sollicitation (forces) globale. Vecteur de sollicitation élémentaire.
$[H]$:	Matrice triangulaire déterminée par la décomposition de la matrice de rigidité.
$[L]$:	Matrice de système créant les fonctions d'interpolation N_j , tel que L est l'inverse de H .
$[S^{ii}]$:	Matrices de base constitutives de la matrice de rigidité $[K]$, ($i=1$ ou 2).

Symboles Grec

α, β, γ :	Coefficient des fonction d'interpolation d'un élément triangulaire a trois nœuds.
θ :	L'angle de torsion unitaire.
ϕ :	L'angle de rotation
ψ :	Fonction de contrainte
ω :	Ongle d'un secteur.
δ_{ij} :	Symbole de kronecker.
τ :	Contrainte de cisaillement.
p :	Contrainte tangentielle a la paroi.
σ :	Contraint normale.
ϵ :	Déformation normale.
γ :	Déformation de cisaillement.
Γ :	Frontière de domaine.
Ω, Ω^e :	Domaine globale arbitraire d'étude. Domaine de l'élément fini.
ξ, η :	Système des coordonnées locales pour un rectangle.
$\bar{\xi}$:	Variable normalisée.

Indices et Exposant

i, j, k :	Compteur sur les nœuds ou les cases d'un vecteur.
T :	Transposée d'un vecteur ou matrice.

m, n : Puissances des polynôme de x et y respectivement pour le calcul de l'intégral.

(e) : Indique l'élément fini 'e'.

Introduction générale

Dans le passé, les scientifiques utilisent la méthode expérimentale, afin de prouver et valider leurs théories et les hypothèses de la recherche scientifique qui n'ont pas une estimation analytique, mais, lorsque certains phénomènes naturels sont trop complexes, trop vastes, trop dangereux, trop chers, ou trop long à reproduire dans une expérience, il était nécessaire de créer un processus ou un dispositif simplifié ce soi-disant actuellement la simulation ou le modèle. Qu'il peut s'agir d'un modèle réduit (maquette) ou d'un modèle vivant, comme la souris qui permet d'éviter des expériences sur des humains ou d'un modèle numérique (programme de simulation par ordinateur). Dans notre cas tant que nous travaillons dans la physique et justement dans la résistance des matériaux prendront soin de modèle numérique pour l'appliquer sur notre problème. Mentionnons ici qu'il y actuellement un bon nombre des logiciels qui a porté ce type de problèmes mais ils restent un secret et des boites noirs dans lesquelles les démarches de résolution reste caché. Ces logiciels basez sur la résolution numérique des équations différentielles des dérivées partiales par une des méthodes de résolution connues, référence finie, éléments finies, volumes finies, la méthode spectrale et autres.

La résistance des matériaux donne des relations de torsion pour des sections cylindriques circulaires mais pour un avion, la plus part des ses structures sont non circulaire (Aile, Fuselage, Dérive, Langerons)

La présente étude consiste alors, à réaliser un calcul numérique de contrainte de torsion pour des poutre cylindrique de section non circulaire, en effet, la complexité de ce sections induit que la solution analytique (exacte) du problème n'existe pas, et évidemment notre intérêt s'oriente vers la recherche de solutions numériques approchée. La méthode des éléments finis a été introduite et appliqué avec succès puisqu'elle s'adapte pour n'importe quelle section choisie.

La modélisation et la discrétisation des équations gérant se phénomène physique (la torsion) sont donc fondées sur la méthode des éléments finis (2D) dont le principal avantage est de permettre une bonne représentation des géométries complexes, mais relativement assez lourde en volume et en temps de calcul.

Introduction générale

Cependant, deux difficultés principales se rencontrent, si la méthode des éléments finis est utilisée, La difficulté majeure est la manière optimale de génération de maillage ainsi que l'adaptation des équations au modèle mathématique de la résolution, l'autre difficulté est le choix de la méthode numérique adéquate à la résolution du système d'équations algébrique vu le nombre important de degrés de liberté alloué.

Pour cela, il faut subdiviser le domaine en petit sous domaines de géométrie simple connue telle que la géométrie triangulaire et quadrilatère par l'intermédiaire des fonctions d'interpolations. Un nombre important d'éléments finis sera établi et appliqué pour le développement d'un programme numérique afin d'avoir une convergence et rapidité d'exécution et faire une comparaison entre les résultats des différents types d'éléments finis choisis.

Une fois le programme marche avec un type d'élément fini qui sera choisi au départ triangulaire à trois nœuds, on adapte d'autres éléments de type triangulaire à 4 et 6 nœuds ainsi que des éléments quadrilatères à 4, 5 et 8 nœuds ainsi leurs connections adéquatement pour les différentes géométries complexes optés. Et pour chaque type d'éléments, on teste la convergence, et l'efficacité.

Ce mémoire est organisé en sept (7) chapitres qui présente un développement mathématique de problème, les divers concepts de la méthode des éléments finis ainsi que les techniques numériques et informatiques correspondantes.

Le premier chapitre faisant des connaissances fondamentales sur les propriétés des corps étudiés, qui peuvent souvent être divisée en deux parties, des propriétés liées à la géométrie et d'autres liées à la matière, ces corps dans la nature ou dans le monde de l'industrie sont exposés à des sollicitations extérieures sont souvent divisés en forces et moments.

Dans le deuxième chapitre un développement mathématique du problème basé sur un calcul différentiel arrivant à l'équation différentielle des dérivées partielles de deuxième ordre connue sous le nom d'équation de Poisson.

Ensuite un troisième chapitre où on a déterminé la solution exacte de quelques cas particuliers tel que la section circulaire et les tubes à paroi mince d'épaisseur constante en utilisant des méthodes spéciales basées sur la mécanique des solides.

Nous présenterons, par la suite dans le quatrième chapitre une description de la formulation en éléments finis de l'équation de Poisson et la transformation en un système algébrique linéaire ainsi les matrices de rigidités élémentaires des éléments finis triangulaires et quadrilatères et la manière de procéder à l'assemblage pour l'obtention de système d'équations pour le domaine complet

Introduction générale

Le cinquième chapitre a pour but de présenter la technique de génération de maillage opté pour notre étude et la méthode numérique nécessaire pour construire le système d'équations.

Nous présenterons dans le sixième chapitre une description des méthodes numériques pour résoudre le système d'équation formés aux cinquième chapitre et les technique de stockage des matrices sous forme de vecteur, un aperçu sur le nombre des opération mathématique effectué pou le programme réalisé et une estimation du temps d'exécution par ordinateur et finalement les technique de calcul de quelque paramètres physiques nécessaires pour l'interpolation de la solution.

Le dernier chapitre présente les différent résultats mathématique calculés pour déférentes domaines, commençant par la plus simple afin de justifier et comparer les résultats et de valider le programme réalisé, ensuite vers quelque autres complexes ou le domaine présente un intérêt physique et la solution exacte est absente.

I.1. Introduction :

La plupart des auteurs traitant les problèmes sur leurs ouvrages après avoir passer sur des introductions qui mènent à partir de laquelle d'expliquer le thème général de l'exposition et d'expliquer certains des concepts et de rappeler certains des renseignements qui aideront le spécialiste lecteur et non-spécialiste de comprendre le contenu de ces ouvrages. Nous avons donc décidé, avant de prendre le sujet de la recherche qu'il est dans nos mains de réserver ce chapitre juste pour expliquer certains des concepts et offrent certaines des informations nécessaires qui nous allons utiliser et qui servira de base à ce modeste travail.

Les corps, qu'ils soient naturels ou fabriqués différents et distincts les uns des autres, et ce qui les distingue les uns des autres est un ensemble de propriétés qui peuvent souvent être divisée en deux parties, des propriétés liées à la géométrie et d'autres liées à la matière, et ces corps dans la nature ou dans le monde de l'industrie sont exposés à des sollicitations extérieures sont souvent divisés en forces et moments, mais le comportement de chaque corps Comme nous l'avons dit est différent en fonction des caractéristiques de géométrie et de matière.

I.2. Caractéristiques géométriques d'une section droite plane :

Le matériau est considéré généralement de ces configurations de surface, de la forme de section; ainsi que leur description par rapport aux charges sollicitantes.

D'après les caractéristiques géométriques des sections planes d'une barre, nous avons :

- L'aire;
- Le moment statique;
- Les coordonnées du centre de gravité;
- Le moment d'inertie;
- Le produit d'inertie;
- Le moment d'inertie polaire

I.2.1. Aire d'une section plane:

Le calcul des aires des surfaces se base sur l'intégrale définie. En considérant une section droite plane A délimitée par une courbe; découpons cette section en petites surfaces élémentaires simples : $dA_1, dA_2, dA_3, \dots, dA_n$; telles que des rectangles, triangles; ou autres équivalents dont on connaît leurs valeurs :Figure (I.1).

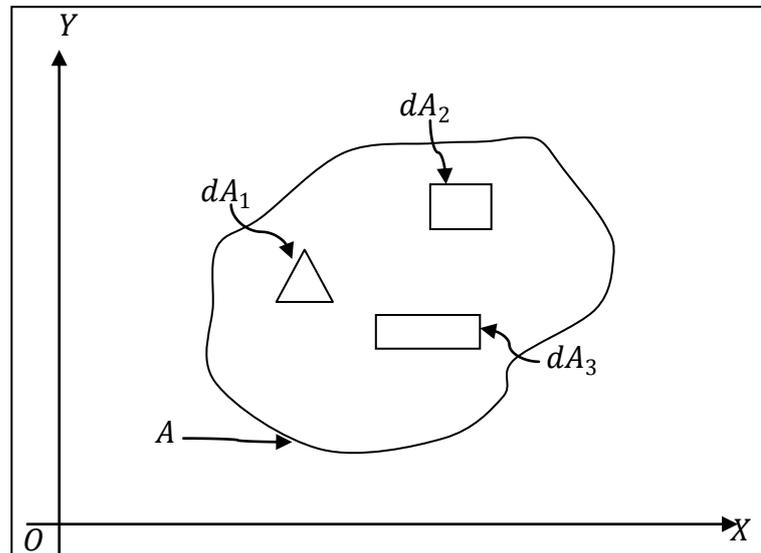


Figure (I.1): Surfaces élémentaires différentes dans une section A.

L'aire totale de la surface est donnée par [28] :

$$A = dA_1 + dA_2 + dA_3 + \dots + dA_n$$

$$A = \sum_{i=1}^n dA_i$$

Si $n \rightarrow \infty$ $A = \int_A dA$ (I.1)

L'intégrale (I.1) est une intégrale double, on intègre suivant une direction, ensuite suivant l'autre, selon la disposition du problème.

I.2.2. Moment statique d'une section droite par rapport à un axe :

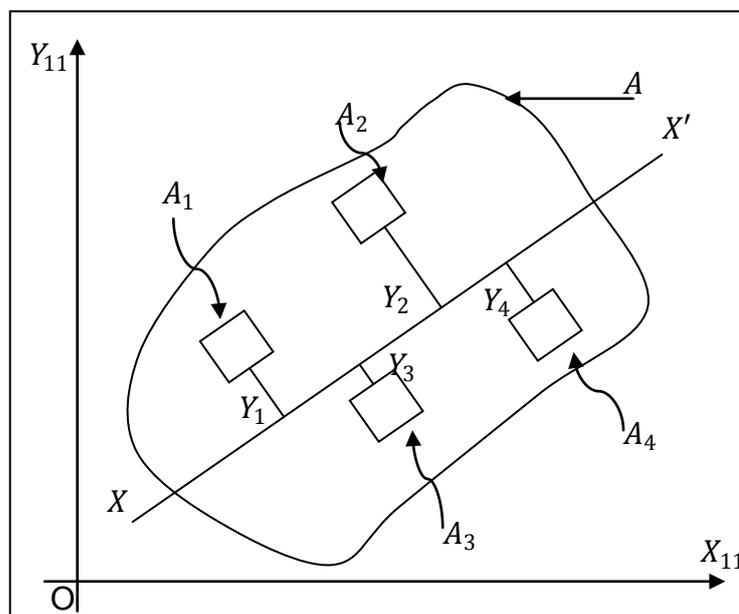


Figure (I.2): Moment statique par rapport à un axe (XX').

Considérant une surface plane A et un axe (XX') situé dans son plan; décomposons cette section en une infinité d'éléments infiniment petits d'aires : $dA_1, dA_2, dA_3, \dots, dA_n$; dont les distances à l'axe (XX') sont respectivement : $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$; Figure (I.2)

On appelle moment statique de la surface A par rapport à l'axe xx' ; la somme [28] :

$$S_{xx'} = Y_1 dA_1 + Y_2 dA_2 + Y_3 dA_3 + \dots + Y_n dA_n$$

$$S_{xx'} = \sum_{i=1}^n y_i dA_i$$

Ou encore :

$$S_{xx'} = \int_A y dA \tag{I.2}$$

Par rapport aux axes des coordonnées : Figure (I.3); on définit

1- Moment statique par rapport à l'axe (OX) par:

$$S_{xx'} = \int_A y dA \tag{I.2a}$$

2- Moment statique par rapport à l'axe (OY) par:

$$S_{yy'} = \int_A x dA \tag{I.2b}$$

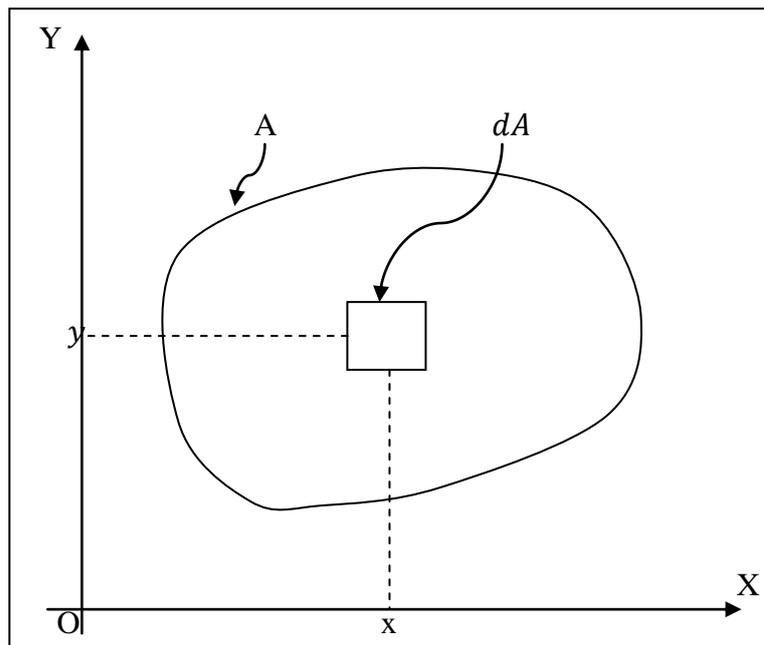


Figure (I.3): Moment statique par rapport à un repère (OXY).

Considérant un repère (O_2XY) obtenu par translation par rapport au repère (O_1XY) comme la montre la figure (I.4) :

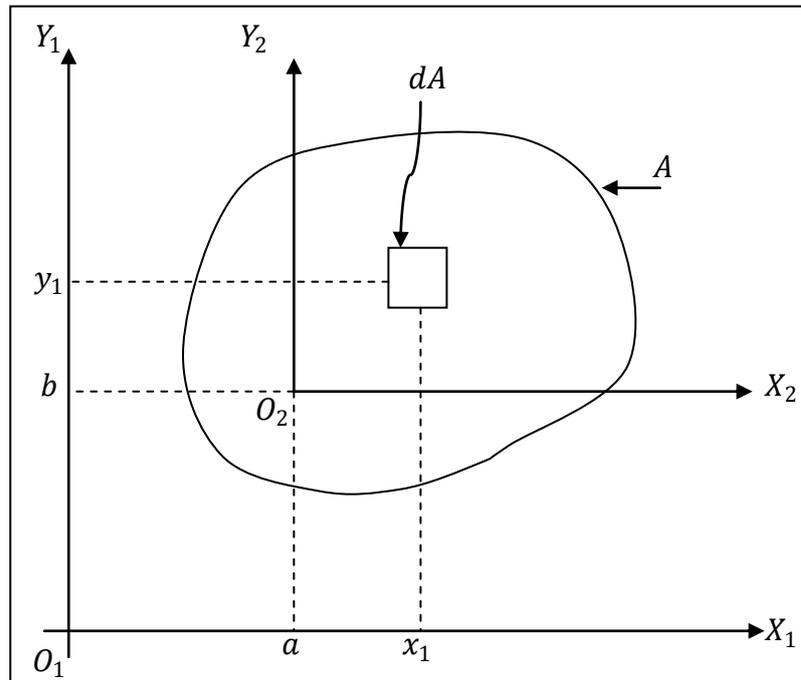


Figure (I.4): Moment statique par translation du repère $(O_2X_2Y_2)$ à $(O_1X_1Y_1)$.

$$x_1 = x_2 + a$$

$$y_1 = y_2 + b$$

D'après la définition, on a :

$$S_{x_1} = \int_A y_1 dA$$

Donc:

$$S_{x_1} = S_{x_2} + bA \quad (I.3)$$

De la même manière on a :

$$S_{y_1} = \int_A x_1 dA$$

Alors :

$$S_{y_1} = S_{y_2} + aA \quad (I.4)$$

En confondant l'origine du repère $(O_2X_2Y_2)$ avec l'élément dA où le moment statique s'annule; on passe à la définition du centre de gravité.

I.2.3. Centre de gravité d'une surface plane:

En tenant compte du moment statique avec les équations (I.3) et (I.4), tout en négligeant les moments statiques par rapport au deuxième repère avec $S_{x_2} = 0$ et $S_{y_2} = 0$ [28] :

C'est à dire :

$$S_{x1} = bA \qquad b = \frac{S_{x1}}{A} \qquad (I.5)$$

$$S_{y1} = aA \qquad a = \frac{S_{y1}}{A} \qquad (I.6)$$

Et comme un axe par lequel, le moment statique est nul est appelé axe centrale, dont leur intersection est le centre de gravité, sa position est:

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{S_x}{A} \qquad (I.7)$$

Finalement la détermination du centre de gravité (\bar{x}, \bar{y}) , nécessite en général un calcul des intégrales suivants :

$$A = \int_A dA$$

$$S_x = \int_A y dA \qquad (I.8)$$

$$S_y = \int_A x dA$$

Ou de la même manière avec les deux intégrales [28]:

$$\bar{x} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy} \qquad (I.9a)$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy} \qquad (I.9b)$$

Qui sont les composantes du centre de gravité d'une section droite plane.

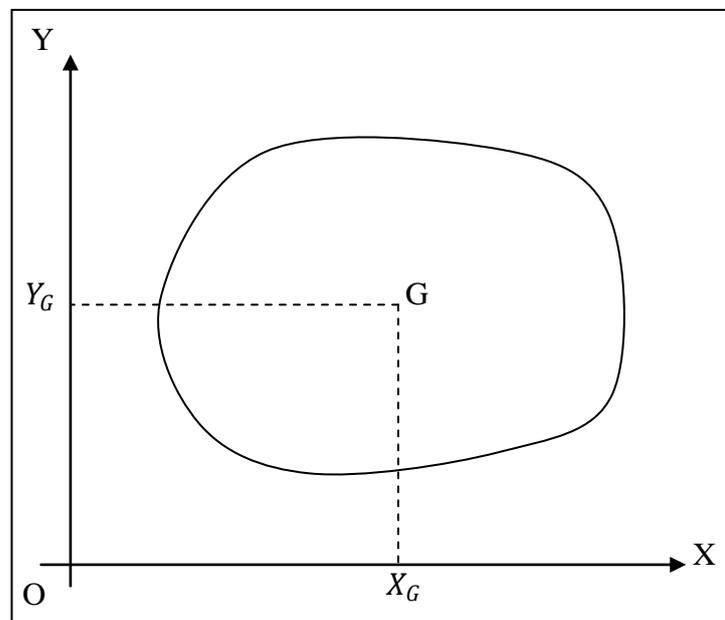


Figure (I.5) : Coordonnées du centre de gravité.

I.2.4. Moment d'inertie d'une surface plane :

Soit une surface plane A et un axe (XX') situé dans son plan. En décomposant cette surface en une infinité d'éléments, infiniment petits, $dA_1, dA_2, dA_3, \dots, dA_n$. Dont les distances à l'axe (XX') sont respectivement $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Par définition, on appelle moment d'inertie d'une surface A par rapport à l'axe (xx') la somme des produits de tous les éléments de cette surface par le carré des distances respectives de ces éléments de cet axe [28].

Et on écrira Par:

$$I_{XX'} = y_1^2 dA_1 + y_2^2 dA_2 + \dots + y_n^2 dA_n$$

$$I_{XX'} = \sum_{i=1}^n y_i^2 dA_i \quad (I.10)$$

Ou encore

$$I_{XX'} = \int_A y^2 dA$$

1- Le moment d'inertie par rapport à l'axe (OX) par :

$$I_X = \int_A y^2 dA \quad (I.11)$$

2- Le moment d'inertie par rapport à l'axe (OY) par :

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (I.12)$$

Le moment d'inertie dI_x d'une bande élémentaire est obtenue en multipliant la surface élémentaire dA par y^2 .

I.2.5. Moment d'inertie polaire:

On désigne la distance r de l'élément dA à l'origine des coordonnées, alors on appelle le moment d'inertie polaire d'une surface par rapport au point O situé dans le plan de cette surface, la somme des produits de tous les éléments de cette surface par le carré de leurs distances aux points considérés; voir figure (I.6).

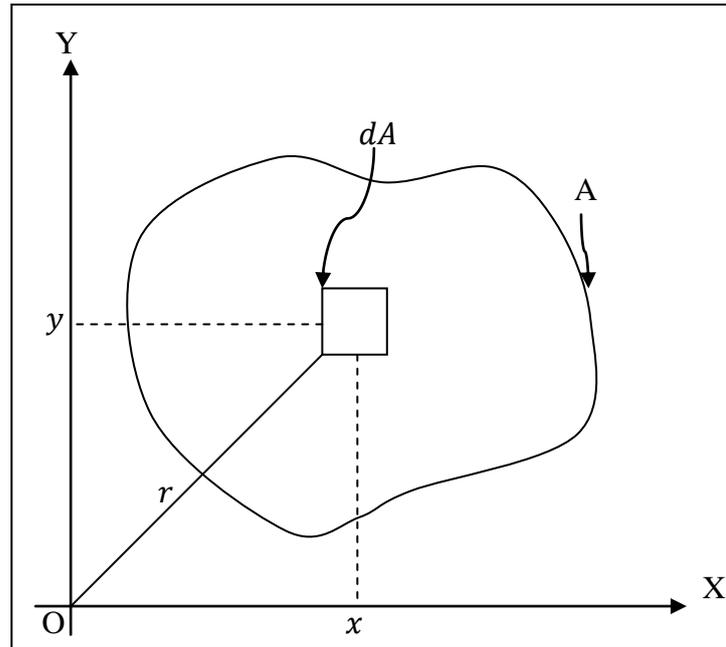


Figure (I.6): Moment polaire d'une section par rapport au point O.

On a:

$$J_0 = \int_A r^2 dA \quad (\text{I.13})$$

Comme:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ J_0 &= \int_A (x^2 + y^2) dA \\ J_0 &= \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA \\ J_0 &= I_x + I_y \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

D'où, on déduit la somme des moments d'inertie d'une surface plane, par rapport à deux axes perpendiculaires, passant par le centre de gravité considéré; est une quantité constante [28].

I.2.6. Produit d'inertie :

On désigne par produit d'inertie ; le moment par rapport à deux axes et le produit d'une surface A par rapport aux axes des coordonnées [28] :

$$\begin{aligned} I_{xy} \\ &= \int_A xy dA \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Le produit d'inertie I_{xy} peut être positif ou négatif suivant la disposition de la surface par rapport aux axes considérés.

Positif si le produit I_{xy} dont la plus grande partie de la section se trouve sur le cadre I et II. Négatif si le produit d'inertie I_{xy} dont la plus grande partie de la section se trouve sur le cadre II et IV, Figure (I.7).

Pour une intégrale double

$$I_{xy} = \iint xy \, dx \, dy$$

Elle est nulle si l'un des axes x et u est un axe de symétrie, ou les deux.

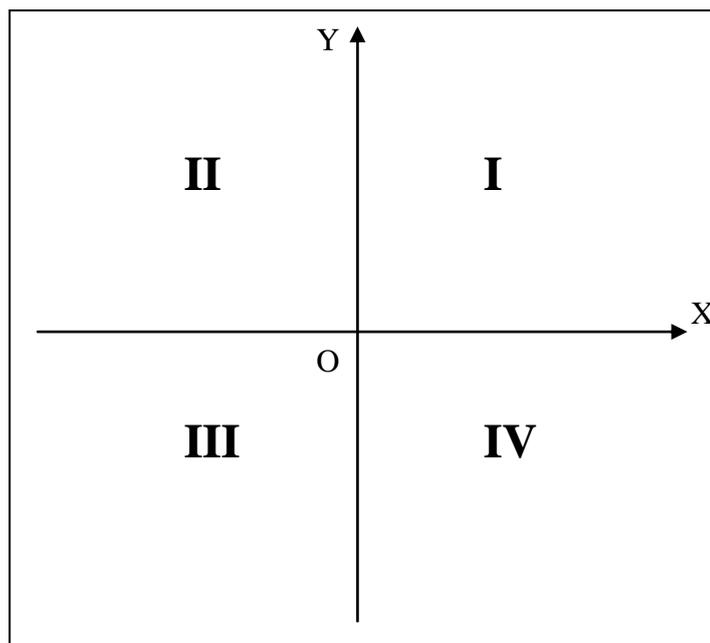


Figure (I.7): Signes du produit d'inertie dans les quadrants du repère.

I.2.7. Caractéristique géométrique d'un triangle linéaire donné par les coordonnées de ces trois nœud :

Il est par fois très utile de décomposer une surface plane en des petites surfaces triangulaires. Le calcul des caractéristique géométrique de cette surface devient sur la bas des caractéristique géométrique des triangles obtenus.

Considérons un triangle quelconque de nœuds $i = 1, 2, 3$ et de coordonnées (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) par rapport au repère d'axes (XOY) quelconque donné, comme est montré dans la figure (I. 8).

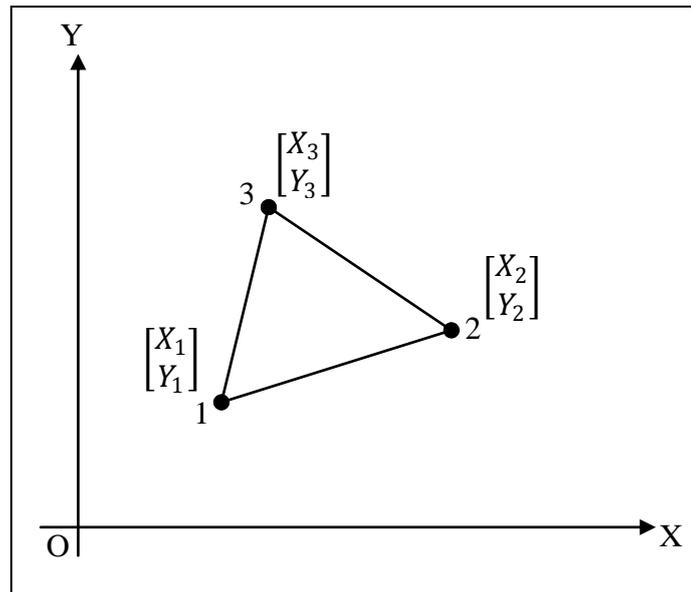


Figure (I.8): Coordonnées des nœuds d'un triangle

Le moment d'inertie d'un triangle est donné par l'intégrale suivante :

$$I_{mn} = \iint_A x^m y^n dx dy \quad (\text{I.16})$$

Où m et n sont des entiers positifs.

Pour évaluer cette intégrale, il est commode d'utiliser la transformation de GREEN pour passer d'une intégrale surface à une intégrale simple curviligne le long du contour du triangle dans le sens antihoraire.

1^{re} cas : $m = 0, n = 0$:

Cette intégrale nous donne dans le cas $m = 0, n = 0$; l'aire de la surface du triangle.

$$I_{00} = \iint_A dx dy = A \quad (\text{I.17})$$

Le résultat de l'intégrale (1.16) donne :

$$A = \frac{1}{2} \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

2^{eme} cas : ($m = 1, n = 0$) et ($m = 0, n = 1$) :

Nous aurons le moment statique avec le centre de gravité du triangle à partir du l'intégrale (I.16) :

$$I_{10} = \iint_A x dx dy = A\bar{x}$$

$$I_{01} = \iint_A y dx dy = A\bar{y}$$

Tel que

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=3} x_i = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=3} y_i = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$$

3^{eme} cas m = 1, n = 1 :

Nous aurons d'après l'intégrale (I.16) le produit d'inertie d'un triangle à m = 1, n = 1, l'intégrale suivant :

$$I_{11} = \iint_A x y dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^{i=3} x_i y_i + 9 \bar{x} \bar{y} \right) \quad (I, 18)$$

4^{eme} cas (m = 2 , n = 0) et (m = 0 , n = 2) :

L'intégrale (I.16) nous donne le moment d'inertie du triangle de la figure (I.8) par la forme suivante :

$$I_{20} = \iint_A x^2 dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^{i=3} x_i^2 + 9 \bar{x}^2 \right) \quad (I, 19)$$

$$I_{02} = \iint_A y^2 dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^{i=3} y_i^2 + 9 \bar{y}^2 \right) \quad (I, 20)$$

I.2.8. Caractéristique géométrique d'une surface plane décomposé en des petites surfaces triangulaires :

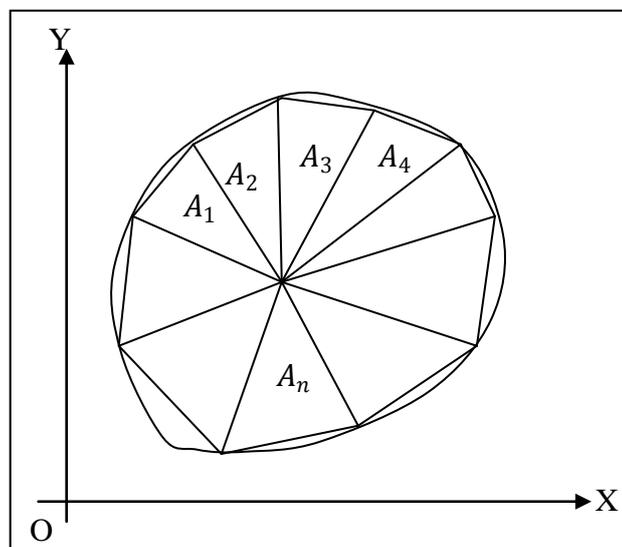


Figure (I.9): Section arbitraire formée de triangles.

On considère une surface arbitraire composée de N triangle quelconque l'aire de cette surface est donnée par la somme des aires des triangles, Figure (I.9) :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_N \quad (I.21)$$

Et le centre de gravité de cette surface est donné par [28]:

$$\bar{x} = (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \dots + x_N A_N) / A \quad (I.22a)$$

$$\bar{y} = (y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + \dots + y_N A_N) / A \quad (I.22b)$$

Avec : (x_i, y_i) : Coordonnées de chaque triangle

A_i : Surface d'un triangle

Et pour avoir le moment d'inertie nous sommes les moments d'inertie des triangles d'où on aura :

$$I_x = \sum_{i=1}^{i=n} (I_x)_i \quad (I.23)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{i=n} (I_y)_i \quad (I.24)$$

Avec : $(I_x)_i, (I_y)_i$ Moment d'inertie de chaque triangle

Suite à ce moment nous aurons aussi le produit d'inertie qui set la somme de tout les produits d'inertie des triangles considérés [28]:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{i=n} (I_{xy})_i \quad (I.25)$$

A partir des équations (I.23) et (I.24) on utilise la théorie des axes parallèles dont en aura le moment d'inertie par rapport au centre de gravité d'une seul figure .

$$(I_x)_{G1} = (I_x)_1 - Ay^2 \quad (I.26)$$

$$(I_y)_{G1} = (I_y)_1 - Ax^2 \quad (I.27)$$

Et pour tous les figures, le moment d'inertie par rapport au centre de gravité sera donné :

$$(I_x)_G = \sum_{i=1}^{i=n} (I_x)_{Gi} \quad (I.28)$$

$$(I_y)_G = \sum_{i=1}^{i=n} (I_y)_{Gi} \quad (I.29)$$

Sont les moments d'inertie par rapport au centre de gravité après la sommation de ces deux moments, leur résultat est le moment d'inertie polaire par rapport au centre de gravité [28].

$$I_p = (I_x)_G + (I_y)_G \quad (I.30)$$

I_p : Moment d'inertie polaire.

I.3. Notion de contrainte et déformation :

I.3.1. Forces et moments externes et forces internes :

I.3.1.a. Forces et moments externes :

On représente les charges appliquées (ou sollicitations) sur un système par des forces ou des moments, ce qui permet de quantifier et d'idéaliser l'interaction entre deux systèmes mécaniques. Un point de contact, par exemple, est remplacé, sur chacun des deux corps en contact, par une force normale et une force tangentielle. La résultante de ces forces sur l'un des corps est orientée et elle agit dans le sens opposé à la résultante des forces sur l'autre corps. En outre, la gravité exerce une force sur chacun des points du volume d'un corps. Quoique les deux types de forces (de contact et de gravité) soient des forces externes (elles sont toutes deux causées par des actions extérieures aux corps considérés), elles sont différentes, car, dans le cas de la résultante au point de contact, on est en présence d'une force externe de surface alors que, dans le cas des forces dues à la gravité, on a affaire à des forces externes de volume.

- Forces de surface :

Les forces de surface qui, comme leur nom l'indique, agissent à la surface de la pièce, peuvent être exprimées soit par une force totale résultante, soit par des forces réparties (par unité de surface ou de longueur). On détermine les forces externes de surface à partir des conditions d'équilibre, en utilisant la géométrie du corps non déformé ; cela signifie qu'on néglige les variations d'angle et de longueur qui résultent de l'application des forces. Cette façon de faire offre l'avantage d'éviter l'introduction de la non-linéarité dans le développement mathématique. Elle donne des résultats adéquats, sauf lorsque les matériaux sont tellement mous qu'ils ne peuvent garder leur forme initiale sous l'effet des forces appliquées (caoutchoucs mous, tissus biologiques, etc.). L'étude de cas particuliers de grandes déformations dépasse toutefois le cadre de notre travail.

- Forces de volume :

Les forces de volume, qui sont réparties en tout point du volume du corps, sont exprimées en unités de force par unité de volume. De telles forces sont créées par la gravité, par les effets centrifuges, par des champs électromagnétiques, etc. Il arrive souvent qu'on néglige les forces de volume pour simplifier l'analyse d'un problème ; on ne peut cependant le faire que si ces dernières ne représentent qu'une petite fraction du chargement total agissant sur la pièce sollicitée. On peut également classer les forces externes d'après la durée et le

mode d'application de la sollicitation ; on distingue alors les sollicitations constantes et les sollicitations variables.

➤ **Sollicitations constantes :**

Les forces et les moments demeurent constants sur de longues périodes de temps et sont appliqués lentement et sans choc. C'est ce type de sollicitations que nous allons considérer dans cet aise. On peut traiter le cas des fluctuations lentes comme celui des sollicitations constantes.

➤ **Sollicitations variables :**

Les forces et les moments peuvent varier de façon rapide (vibrations, impacts) et causer des phénomènes dynamiques en ce qui concerne le comportement du matériau. Ces phénomènes dynamiques étant souvent complexes à analyser.

I.3.1.b. Forces internes :

L'étude des matériaux révèle qu'il existe des forces d'attraction et de répulsion intermoléculaires, forces qui sont en équilibre et qui maintiennent un certain espacement entre les molécules. Sous l'action de sollicitations externes, cet équilibre est modifié, ce qui entraîne la déformation du matériau. Les forces engendrées par l'action des sollicitations sont appelées forces internes. Le matériau doit être suffisamment résistant pour supporter l'action des forces internes sans se détériorer : c'est là l'essence même de l'étude de la résistance des matériaux.

L'analyse des forces internes sur le plan moléculaire n'a pas de valeur pratique, étant donné les imperfections inhérentes à tous les matériaux. C'est donc sur le plan macroscopique que nous nous situerons, et nous nous contenterons de faire porter l'analyse des forces internes sur un élément qui, quoiqu'infinésimal, est assez grand pour satisfaire aux hypothèses de continuité, d'homogénéité et d'isotropie.

I.3.2. Contrainte :

Considérons un corps sollicité par un système de forces externes F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et déterminons l'état des forces internes en un point I. Figure (I.11).

Choisissons, au départ, un système d'axes de référence (x, y, z) : ce système est en général déterminé, pour plus de commodité, par la forme du corps ; ainsi, dans le cas d'une membrure mince et droite, l'axe longitudinal coïncide avec un des axes de référence.

Pour déterminer les forces internes en I, sectionnons le corps selon un premier plan normal, par exemple, à l'axe des x et passant par I. Figure (I.11a). Dans cette section, des forces internes agissent en tout point et peuvent varier en intensité et en direction d'un point à l'autre.

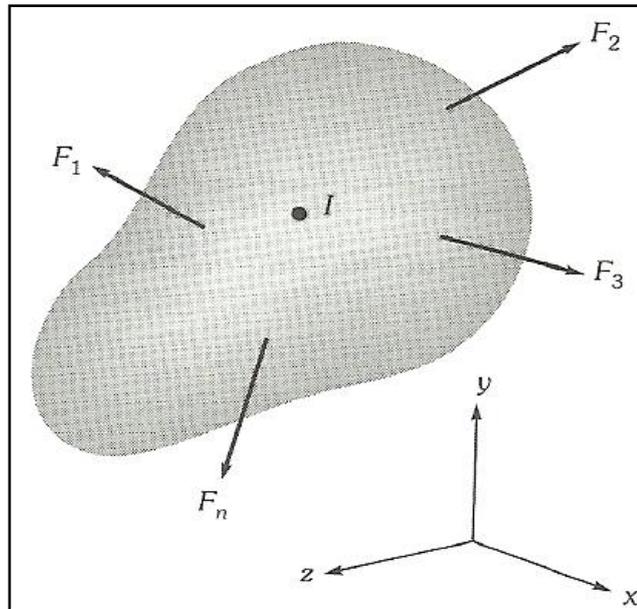


Figure (I.10): Corps soumise à des forces externes.

Divisons la section en un grand nombre de petites surfaces et examinons, en particulier, la zone qui entoure le point I. Figure (I.11b). Une force interne $\overline{\Delta F}$ agit sur un élément de surface, $\Delta A_x = \Delta_y \Delta_z$. Cette force a une direction et une intensité qui dépendent de l'état d'équilibre global qui existe entre les forces internes à la section m et les forces externes agissant sur la partie gauche du corps.

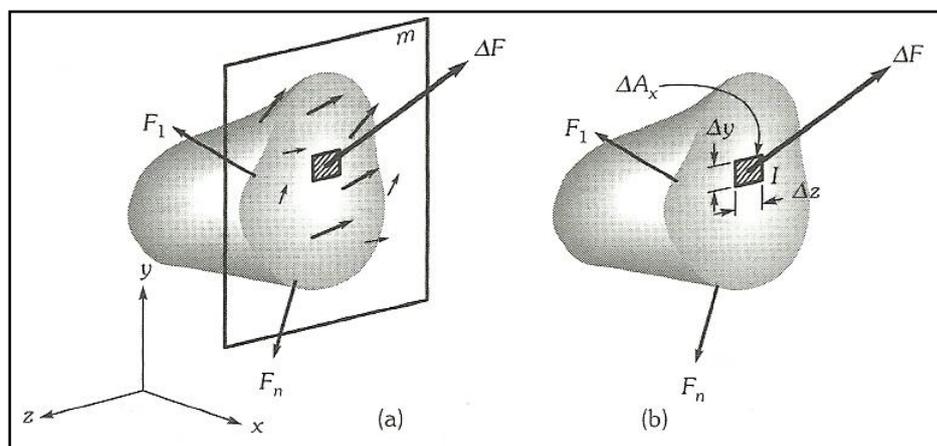


Figure (I.11): Coupe suivant un plan m d'un corps soumise à des forces externes.

Décomposons le vecteur $\overline{\Delta F}$ selon le système d'axes de référence ; nous obtenons : ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z . Figure (I.12). L'intensité moyenne de chacune de ces composantes, par unité de surface, est donc [29] :

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} = \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} = \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} \quad (\text{I. 31})$$

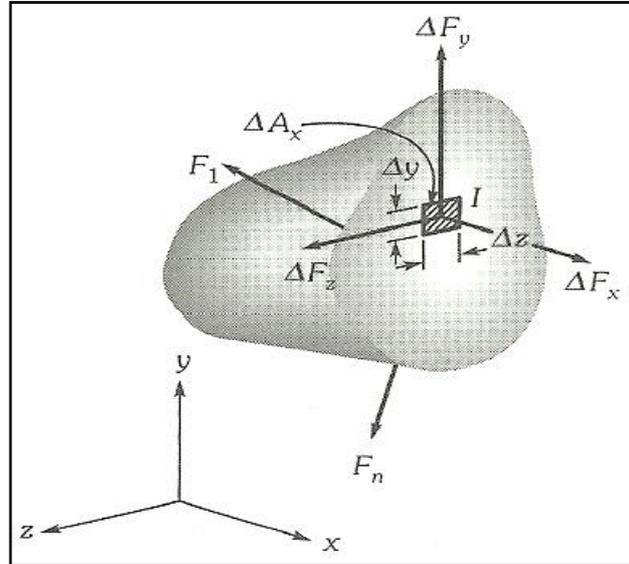


Figure (I.12): La force $\overline{\Delta F}$ est décomposée.

Si ΔA_x tend vers zéro, ces trois rapports tendent vers des limites qu'on définit comme étant les composantes de contrainte qui agissent sur la face normale à l'axe des x , au point I . Le comportement physique relié au premier rapport $\Delta F_x / \Delta A_x$ est différent de celui relié aux deux autres puisque, dans ce cas, la force interne agit dans la direction normale à la face considérée. On appelle ce premier rapport contrainte normale, σ . Dans les deux autres cas, la force agit parallèlement à la face, et on appelle contrainte de cisaillement τ , chacune de ces deux autres composantes. Ces deux contraintes sont illustrées à la figure (I.13). On définit la contrainte normale σ par la relation suivante [29]:

$$\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad (\text{I. 32})$$

Et la contrainte de cisaillement par :

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} \quad (\text{I. 33})$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} \quad (\text{I. 34})$$

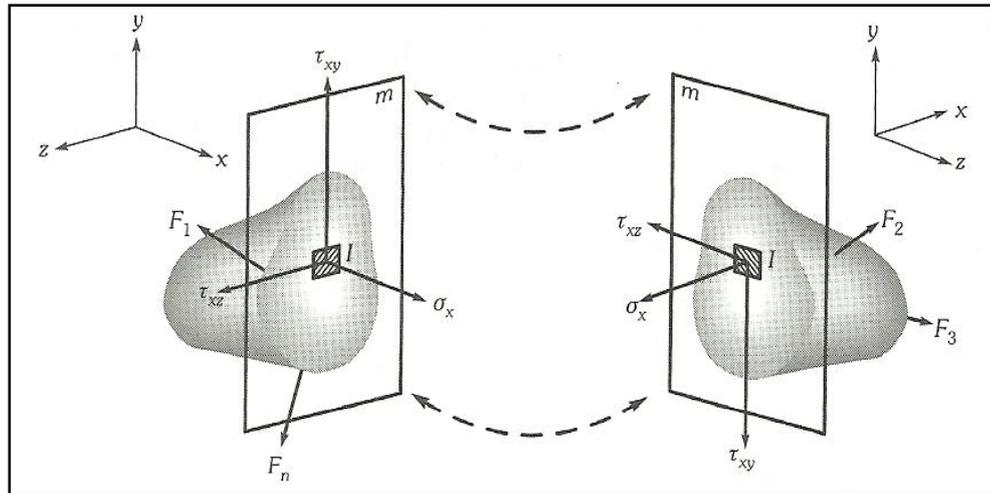


Figure (I.13): les composantes de contrainte agissent en I.

I.3.2.a. Convention de signes :

La figure (I.13) présente les deux moitiés du corps original, sectionné selon le plan m . On aurait pu utiliser pour la partie droite, avec le même résultat, le cheminement suivi précédemment pour déterminer les composantes de contrainte σ_x , τ_{xy} et τ_{xz} au point I. Cependant, pour satisfaire à l'équilibre des forces internes, on aurait indiqué pour celles-ci un sens opposé à celui de la partie gauche. Pour avoir des composantes de contrainte de même signe lorsqu'elles agissent dans des sens opposés sur des faces opposées, il faut adopter la convention de signes suivante :

- Une face est positive lorsque sa normale externe est dirigée dans le sens positif d'un axe ;
- Une contrainte est positive lorsqu'elle agit dans le sens positif d'un axe sur une face positive, ou dans le sens négatif d'un axe sur une face négative. Toutes les composantes de contrainte illustrées à la figure (I.13) sont positives.

I.3.2.b. Etat de contrainte en un point :

En reprenant le même processus, mais en sectionnant le corps au point I selon un plan normal à l'axe des y ou à l'axe des z , on obtient les composantes de contrainte suivantes :

- sur la face normale à l'axe des y : σ_y , τ_{yz} et τ_{yx} ;
- sur la face normale à l'axe des z : σ_z , τ_{zy} et τ_{zx} .

Enfin, on peut isoler complètement le point I et identifier son état de contrainte en définissant six plans, de façon à isoler un parallélépipède infinitésimal de dimensions Δ_x , Δ_y , Δ_z . Figure (I.14). Notons toutefois que, sur deux faces parallèles (par exemple les faces AEHD et BFGC) séparées par une distance infinitésimale Δ_x , les intensités des contraintes correspondantes ne sont pas nécessairement les mêmes. Ainsi, la contrainte normale σ'_x

agissant sur AEHD diffère en général de la contrainte σ_x agissant sur BFGC, mais d'une quantité infinitésimale.

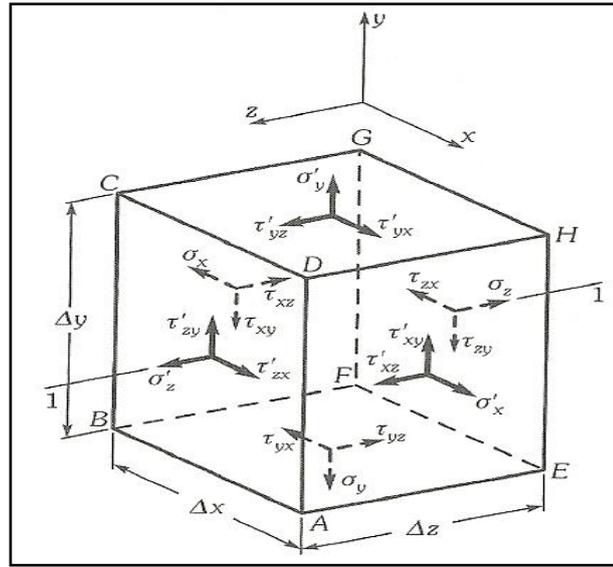


Figure (I.14): Etat de contrainte au point I.

Il est utile d'établir dès maintenant une relation importante qui régit les contraintes de cisaillement. Considérons. Figure (I.14). Les composantes de contrainte qui contribuent, par exemple, au cisaillement selon le plan xy : les composantes τ_{xy} et τ_{yx} agissent sur les faces négatives, et leurs contreparties τ'_{xy} et τ'_{yx} agissent sur les faces positives. Ces dernières peuvent être différentes des premières mais, comme nous l'avons mentionné précédemment, d'une quantité infinitésimale. L'équilibre des moments autour d'un axe (1-1) parallèle à l'axe des z et passant par le centre de l'élément donne [29]:

$$\left(\sum M\right)_{(1-1)} = 0, [+ \uparrow] \quad (I.35)$$

$$(\tau_{xy} + \tau'_{xy}) \Delta_y \Delta_z \frac{\Delta_x}{2} - (\tau_{yx} + \tau'_{yx}) \Delta_x \Delta_z \frac{\Delta_y}{2} = 0 \quad (I.36)$$

Si on divise par le volume de l'élément ($\Delta_x \Delta_y \Delta_z$) et qu'on fasse tendre les dimensions de l'élément vers zéro, les composantes de contrainte sur les faces positives tendent vers leurs contreparties sur les faces négatives. On obtient ainsi [29]:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (I.37)$$

L'étude du cisaillement selon les plans dont les normales sont y et z donnerait des résultats équivalents pour les autres composantes de contrainte de cisaillement soit [29]:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (I.38)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (I.39)$$

I.3.3. Déformation :

Sous l'action d'un chargement externe ou d'une variation de température, les dimensions d'un corps varient : il en résulte une déformation. Nous pouvons distinguer deux types de déformations. Le premier concerne la variation de longueur : c'est la déformation normale ; le second a trait à la variation d'angle : c'est la déformation de cisaillement. La figure (I.15) représente un corps avant et après déformation (comme pour l'étude de la contrainte, le système d'axes de référence adopté est x, y, z) ; il s'agit d'étudier les déformations qui se produisent en un point I.

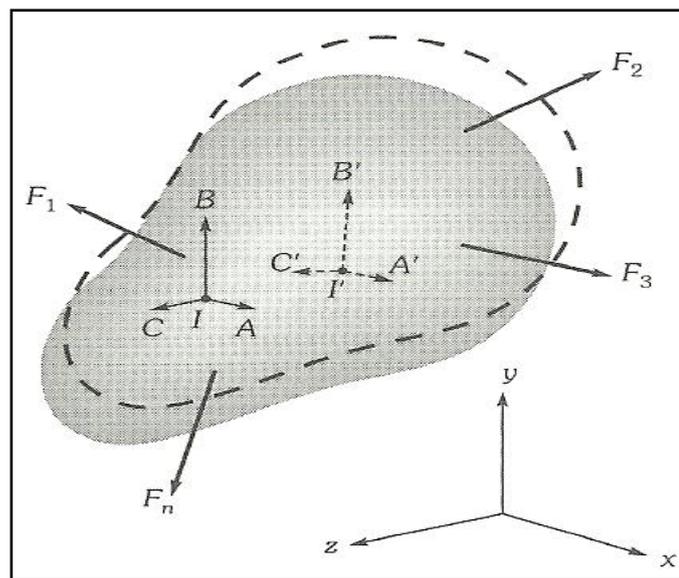


Figure (I.15): Corps soumis à une déformation

Identifions, au point I, trois éléments de longueur infinitésimale, parallèles aux axes de référence, soit $IA = \Delta_x$, $IB = \Delta_y$ et $IC = \Delta_z$. Après déformation, ces trois éléments deviennent $I'A'$, $I'B'$ et $I'C'$. Figure (I.16). On définit la déformation normale e comme le quotient de la variation de longueur par la longueur initiale, lorsque celle-ci tend vers zéro.

Puisqu'on a identifié trois directions initiales, on obtient trois déformations normales, soit [29]:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{I'A' - IA}{IA} \quad (I.40)$$

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta_y \rightarrow 0} \frac{I'B' - IB}{IB} \quad (I.41)$$

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta_z \rightarrow 0} \frac{I'C' - IC}{IC} \quad (I.42)$$

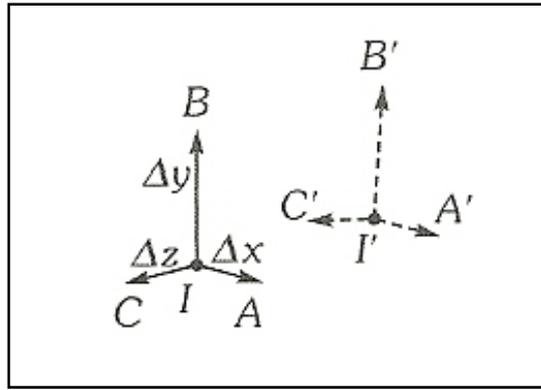


Figure (I.16): Trois éléments parallèles aux axes de référence.

On définit la déformation de cisaillement γ comme la variation (en radians) d'un angle initialement droit lorsque les côtés qui sous-tendent l'angle tendent vers zéro. Pour les trois angles droits initiaux (AIB, BIC et CIA) dont les côtés sont respectivement parallèles à xy, à yz et à zx, et dans le cas de petites variations d'angle, ce qui permet de remplacer une variation d'angle par la tangente de cette variation, on a effectivement trois déformations de cisaillement [29]:

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{AIB'} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{AIB'} \right) \quad (\text{I. 43})$$

$$\gamma_{yz} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BIC'} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BIC'} \right) \quad (\text{I. 44})$$

$$\gamma_{zx} = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{CIA'} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{CIA'} \right) \quad (\text{I. 45})$$

Il est plus facile de visualiser la déformation de cisaillement lorsqu'elle ne se manifeste que sur un seul plan Figure (I.17).

Les valeurs de ε et de γ sont adimensionnelles. Il est cependant usuel de les exprimer en mètres par mètre (m/m), en micromètres par mètre ($\mu\text{m}/\text{m} = 10^{-6} \text{ m}/\text{m}$) ou en pourcentage. Par ailleurs, on peut exprimer γ en radians.

I.3.3.a. Convention de signes :

Nous adoptons la convention de signes suivante pour les déformations :

- Une déformation normale ε est positive lorsqu'il y a allongement (c'est-à-dire accroissement de la longueur) ;
- Une déformation de cisaillement est positive lorsque l'angle droit, sous-tendu par des côtés dirigés selon le sens positif d'axes de référence, diminue figure (I.17).

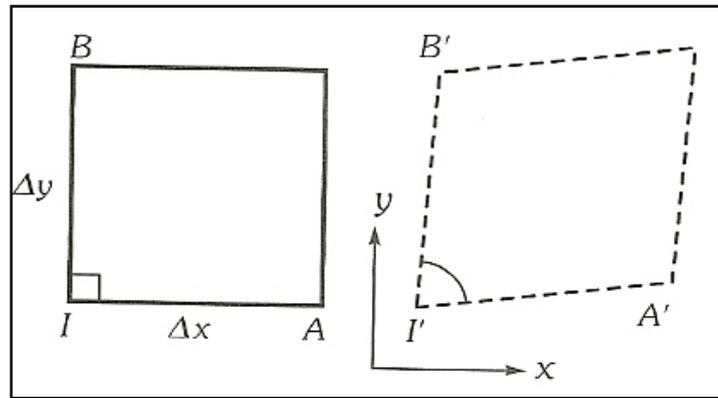


Figure (I.17): Mise en évidence $\gamma_{xy} > 0$.

I.3.4. Relations constitutives:

I.3.4.a. Notions de base:

Nous mentionnons qu'il faut tenir compte, dans la résolution d'un problème de résistance des matériaux, des relations forces/déplacements, ce qui équivaut à des relations contraintes/déformations. Nous avons défini et étudié la notion de contrainte (causée par les forces externes) et celle de déformation (provenant du changement de géométrie). Les relations que nous avons alors établies étaient indépendantes des propriétés du matériau. Toutefois, il y a nécessairement une relation entre la contrainte et la déformation, relation qui dépend du type de matériau utilisé.

L'étude détaillée des matériaux, de leur structure moléculaire et de leur comportement particulier étant traitée dans plusieurs ouvrages, nous n'établirons ici que les relations constitutives dont nous avons besoin, à partir des observations expérimentales macroscopiques des déformations et des relations de celles-ci avec les contraintes en présence.

Cette approche dite «phénoménologique» est très utile, car elle permet de décrire de façon relativement simple le comportement des matériaux et de les classer en fonction de leur comportement idéalisé. On distingue ainsi les comportements élastique, plastique et visqueux.

➤ **Comportement élastique:**

Un matériau a un comportement élastique lorsque, après avoir subi une déformation sous l'action de sollicitations, il reprend instantanément sa forme initiale dès que celles-ci cessent. Si, en outre, il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations, le matériau est réputé avoir un comportement linéaire. C'est à ce type de comportement que nous nous intéresserons particulièrement, car il s'applique à la plupart des matériaux

d'ingénierie (de moins jusqu'à une certaine limite de déformation). On utilise les relations tirées de la loi de Hooke pour décrire le comportement élastique (nous les exposerons brièvement après).

➤ **Comportement plastique:**

Un matériau a un comportement plastique lorsqu'il se déforme de façon permanente, c'est-à-dire s'il conserve une partie de sa déformation même après le retrait des sollicitations. La plupart des matériaux d'ingénierie se comportent de façon plastique au-delà d'une certaine limite de contrainte appelée limite élastique.

➤ **Comportement visqueux:**

Un matériau a un comportement visqueux lorsque les déformations qu'il subit varient en fonction du temps, même si les sollicitations auxquelles il est soumis demeurent constantes (Il en va autrement des comportements élastique et plastique qui, par définition, sont indépendants du temps : dans ce cas, les déformations se produisent dès l'application des sollicitations et ne changent que si celles-ci changent).

A température moyenne, la plupart des matériaux métalliques sont très peu visqueux. La viscosité s'accroît dès que la température d'un matériau atteint le tiers de celle de son point de fusion.

I.3.4.b. Relation de Hooke applicables au domaine élastique:

C'est Robert Hooke qui, le premier, énonça, à fin du XVII^e siècle, la loi de la déformation élastique : « Ut tention sic vis » (l'allongement suit la force). On exprime cette loi de la façon suivante [29]:

$$\delta = \frac{1}{K} F \quad (\text{I. 46})$$

Où δ = déplacement relatif, ou allongement résultant, suivant la direction de la force

K = rigidité

F = force appliquée

La rigidité, K , est constante pour une géométrie et un matériau donnés, à condition que le matériau soit élastique. La loi de Hooke a cependant été généralisée pour permettre d'établir une corrélation entre la déformation et la contrainte. Pour un matériau élastique isotrope soumise à une seule contrainte, soit σ_x ou τ_{xy} , on a les relations linéaires suivantes [29]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (\text{I. 47})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (\text{I. 48})$$

Ou E est appelé module d'élasticité (ou module de Young) et G, module de rigidité (ou module d'élasticité en cisaillement).

Il est souligner que les équations (I.64) et (I.65) , qui sont une simplification des relation générales de Hooks, ne sont valides que si elles relient une seul composante de contrainte à une seul composante de déformation. Dans ces conditions, on peut écrire $\varepsilon = \sigma / E$ et $\gamma = \tau / G$, ce qui suppose que les indices des contraintes et des déformations sont identiques.

I.3.4.c. Ensemble d'équations d'élasticité :

A l'aide des relations entre contraintes et déformations que nous venons de mettre en évidence, il nous est possible de résumer et de rassembler, en ce qui concerne un matériau isotrope, les équations valable dans le domaine élastique. Ce sont les équations d'élasticité fondamentales.

La résolution d'un problème d'élasticité consiste donc à évaluer, lorsqu'on considère les trois dimensions, les 15 fonctions fondamentales suivantes [29]:

- Les six contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$;
- Les six déformations $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$;
- Les trois déplacements u, v, w.

Ces 15 équations (qui, en général, dépendent de x, de y et de z) doivent satisfaire aux 15 équations d'élasticité (regroupées sous les trois rubriques suivantes) ainsi qu'aux conditions aux rives.

Equations d'équilibre :

On va établi les équation d'équilibre et en incluant les forces massiques par unité de volume, F_x et F_z [29] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (I.49)$$

Rappel : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Equations de compatibilité géométrique :

Il s'agit des relations entre déformations et déplacements [29].

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{I.50}$$

Relations déformations/contraintes :

On a [29] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned}
 \tag{I.51}$$

II.1. Introduction :

Le chargement uniaxial, la flexion et la torsion sont les trois modes de chargement fondamentaux pouvant agir sur une membrure prismatique droite nous étudions et nous concentrons dans ce travail sur la question de la torsion. On retrouve ce dernier mode de chargement, seul ou combiné avec les autres, dans un grand nombre d'éléments de structures et de machine. Les arbres de transmission de l'énergie mécanique utilisée dans le système de propulsion d'une automobile ainsi que les systèmes de suspension employant des barres de torsion sont certainement des exemples familiers et on le trouve au domaine aéronautique dans les ailes et les aubes du compresseur et de la turbine.

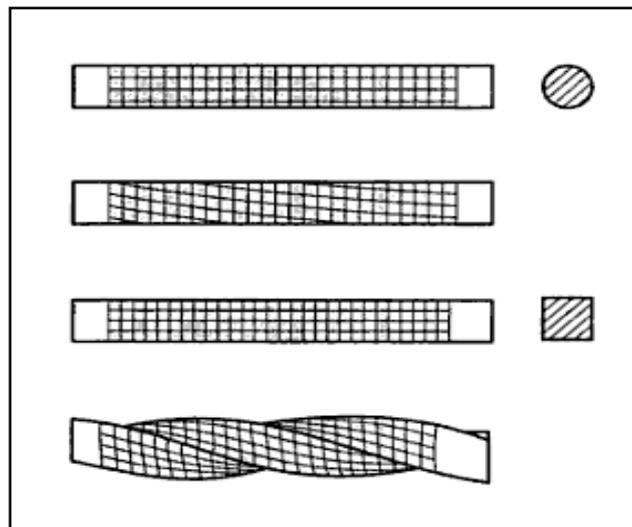


Figure (II.1): Déformations qui, sous l'effet d'un moment de torsion.

Pour étudier la torsion d'un barreau prismatique de section non circulaire, nous devons recourir aux méthodes plus générales découlant de la théorie de l'élasticité. La figure (II.1) illustre les déformations subies par un barreau de section circulaire et par un barreau de section carrée soumis à un moment de torsion. En général, une section plane, normale à l'axe longitudinal de la membrure, ne reste plus, plane après déformation.

II.2. Méthode de saint-venant :

Considérons une membrure, de section uniforme, soumise à un moment de torsion M à ses extrémités. Selon le principe de Saint-Venant, à une section suffisamment éloignée des points d'application du moment de torsion, la répartition des contraintes dépend uniquement de l'intensité de ce moment et, pour une membrure assez longue, la répartition des contraintes aux extrémités n'affecte pas celle qu'on retrouve à la section considérée.

II.2.1. Etude des déformations et de la compatibilité géométrique :

Puisque les principes de symétrie ne s'appliquent pas ici la méthode de Saint-Venant nous oblige à émettre l'hypothèse selon laquelle la membrure, originalement

doit posséder un axe de rotation autour duquel chaque section se déplace. Les projections des déplacements des sections sur le plan normal à l'axe de torsion, sont comparables aux déplacements dus à la rotation d'un corps rigide

Dans le système de coordonnées cartésiennes x, y, z , l'axe des x est l'axe de torsion de la membrure et le plan yz (avec $x=0$), le plan de référence, figure (II.2a).

Considérons un point A , de coordonnées x, y et z figure (II.2a). Quand on applique un moment M , ce point se retrouve en A' , dont les coordonnées sont $x+u, y+v$ et $z+w$. Les déplacements v et w sont associés principalement à la rotation de la section qui contient le point A , rotation d'un angle φ relié à β (angle de torsion unitaire) par [29]:

$$\beta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (\text{II. 1})$$

Lorsque β est constante la relation (II.1) donne l'équation :

$$\varphi = \beta x \quad (\text{II. 2})$$

La figure (II.2b) montre la projection des points A et A' en A_1 et en A^* dans le plan de référence; les expressions des déplacements v et w en fonction de β sont données par les relations suivantes :

$$V = -r\beta x \sin\theta = -\beta x z \quad (\text{II. 3a})$$

$$W = r\beta x \cos\theta = \beta x y \quad (\text{II. 3b})$$

Le déplacement selon l'axe longitudinal (u) est dû au gauchissement de la section. D'après le principe de Saint-Venant, ce déplacement ne dépend pas de x .

On peut donc écrire :

$$u = u(y, z) \quad (\text{II.4})$$

On obtient les déformations à partir des équations suivantes (voir chapitre I équation (I.50)) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{II. 5a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II. 5b})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 5c})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - \beta z \quad (\text{II. 5d})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{II. 5e})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \beta y \quad (\text{II. 5f})$$

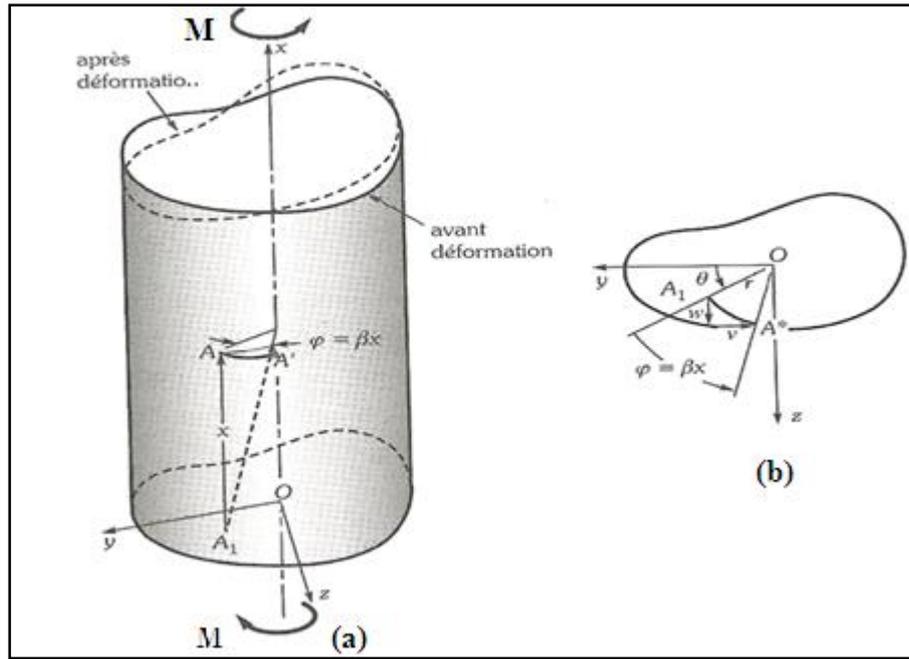


Figure (II.2): Déformation affectant une membrure prismatique sous l'effet d'un moment de torsion.

Puisque le déplacement $u(y, z)$ n'est pas défini, on peut l'éliminer en soustrayant la dérivée partielle de γ_{xz} par rapport à y de celle de γ_{xy} par rapport à z , ce qui donne (équation (II.5d) et (II.5f)):

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = -2\beta \quad (\text{II. 6})$$

II.2.2. Etude des contraintes :

En ce qui concerne le comportement élastique d'une membrure prismatique de matériau isotrope soumise à une torsion, l'application des relations contraintes/déformations permet d'écrire :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (\text{II. 7a})$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0 \quad (\text{II. 7b})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \neq 0 \quad (\text{II. 7d})$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \neq 0 \quad (\text{II. 7e})$$

Le fait qu'ici $\tau_{yz} = \gamma_{yz} = 0$ confirme que les sections normales à l'axe longitudinal de la membrure ne subissent aucune distorsion dans leur propre plan ; par conséquent, un angle droit dont les deux côtés sont situés dans le plan de la section ne peut subir aucune modification.

D'après les équations (II.5d), (II.5f), (II.7c) et (II.7d), on a :

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \beta z \right) \quad (\text{II. 8a})$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \beta y \right) \quad (\text{II. 8b})$$

Ces relations conduisent, en ce qui concerne les contraintes, à une équation similaire à l'équation

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\beta \quad (\text{II. 9})$$

II.2.3 Étude des conditions d'équilibre :

Équations différentielles d'équilibre :

Si les forces de volume sont négligeables, les conditions d'équilibre différentiel, équation (I.66) appliquées à la torsion donnent les résultats suivants :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 10a})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 10b})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 10c})$$

Les équations (II.10b) et (II.10c) sont automatiquement satisfaites par les équations (II.4), (II.8a) et (II.8b). Puisque, les contraintes τ_{xy} et τ_{xz} doivent satisfaire à l'équation (II.10a) en utilisant les équations (II.8a) et (II.8b), on obtient [29]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II. 11})$$

L'équation (II.11), qui permet de calculer les déplacements due au gauchissement est connue sous le nom d'équation différentielle de Laplace ; sa solution est une fonction harmonique.

Conditions générales d'équilibre :

La répartition des contraintes τ_{xy} et τ_{xz} sur une section normale à l'axe longitudinale doit satisfaire aux conditions générales d'équilibre statique.

A partir de la figure (II.3), on obtient les relations suivantes :

$$\left(\sum F \right)_x = 0 \quad (\text{vérifié}) \quad (\text{II. 12a})$$

$$\left(\sum F \right)_y = 0 \quad , \text{d'où} \quad \int_A \tau_{xy} dA = 0 \quad (\text{II. 12b})$$

$$\left(\sum F\right)_z = 0, \text{ d'où } \int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad (\text{II. 12c})$$

$$\left(\sum M\right)_x = 0, \text{ d'où } \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA - M = 0 \quad (\text{II. 12d})$$

$$\left(\sum M\right)_y = 0 \text{ (vérifié)} \quad (\text{II. 12e})$$

$$\left(\sum M\right)_z = 0 \text{ (vérifié)} \quad (\text{II. 12f})$$

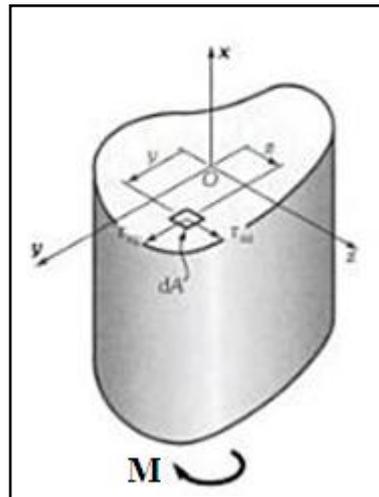


Figure (II.3) : Contraintes agissant sur une surface élémentaire dA de section de la membre.

II.2.4 Conditions aux rives latérales :

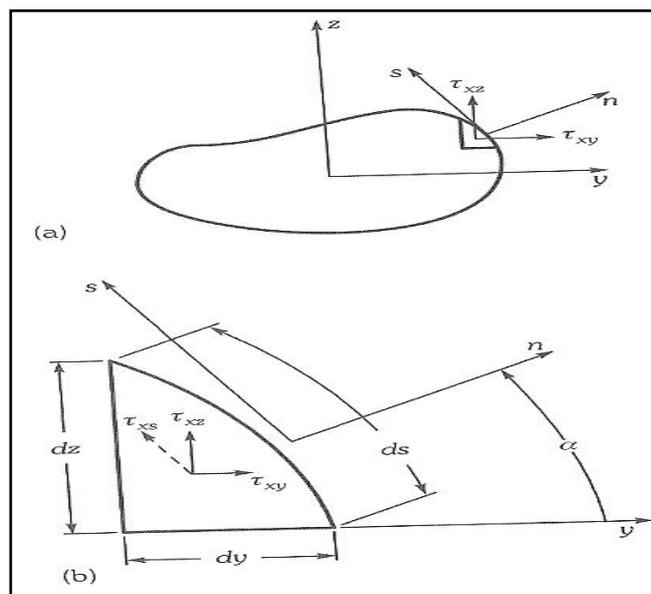


Figure (II.4): Conditions imposées aux contraintes de cisaillement sur le contour.

Puisque la surface latérale d'une membrure prismatique soumise à une torsion est libre de contraintes, la résultante (τ) des contraintes de cisaillement qui affectent un élément situé sur le contour de la section doit agir selon la direction tangentielle s au contour, au point qui représente cet élément, figure (II.4). Cette résultante est donnée par l'équation suivante :

$$\tau_{xs} = -\tau_{xy} \sin\alpha + \tau_{xz} \cos\alpha \quad (\text{II.13})$$

Où α est l'angle formé par la normale n à la paroi est l'axe des y . la projection des composante τ_{xy} et τ_{xz} sur la direction n donne ce que suit :

$$\tau_{xy} \cos\alpha + \tau_{xz} \sin\alpha = 0 \quad (\text{II.14})$$

La figure (II.4b) montre que :

$$\sin\alpha = -\frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{dz}{ds}$$

Par conséquent les équations (II.13) et (II.14) deviennent respectivement :

$$\tau_{xs} = \tau_{xy} \frac{dy}{ds} + \tau_{xz} \frac{dz}{ds} \quad (\text{II.15a})$$

$$\tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (\text{II.15b})$$

II.3. Fonction de contraintes :

Pour résoudre un problème posé par la torsion, il suffit de calculer les valeurs des quatre inconnues τ_{xy} , τ_{xz} , u et β , à l'aide des équations (II.8a), (II.8b), (II.11), (II.12b), (II.12c) et (II.12d), tout en respectant les conditions aux rives, équation (II.15b).

Par la suite, Prandtl a introduit le concept selon lequel on pouvait résoudre les problèmes posés par la torsion en calculant la valeur d'une seule inconnue, appelée «fonction de contraintes» $\Phi(y, z)$. Cette fonction est différentiable et elle est associée aux contraintes de la manière suivante [29] :

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{II.16a})$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{II.16b})$$

La fonction Φ doit satisfaire aux conditions de compatibilité géométriques d'équilibre différentielle, ainsi qu'aux conditions aux rives latérales [29].

II.3.1 Compatibilité géométriques :

Si on introduit les dérivées partielles équation (II.16) dans l'équation (II.9), on obtient l'équation de Prandtl :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\beta \quad (\text{II.17})$$

II.3.2 Equilibre différentiel :

On s'aperçoit que les équations (II.16) satisfont automatiquement aux équations d'équilibre différentiel, équation (II.10), puisqu'on a alors :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = 0 \quad (\text{II. 18})$$

II.3.3 Conditions aux rives latérales :

En ce qui concerne les conditions aux rives latérales équation (II.15b), on obtient, si on utilise les équations (II.16) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad (\text{II. 19})$$

Selon cette équation, Φ est une constante sur tous le contour de la section, constante qui peut prendre une valeur arbitraire, y comprise zéro [29].

II.3.4 Équilibre avec charge extérieure :

Pour satisfaire aux trois équations d'équilibre (II.12b), (II.12c), et (II.12d), la fonction Φ doit posséder certaines caractéristiques.

- a) En ce qui concerne la condition $(\sum F)_y = 0$, si on insère l'équation (II.16a) dans l'équation (II.12b), on obtient :

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial z} dA = 0 \quad (\text{II. 20})$$

Considérons, sur la section, une bande de largeur dy figure (II.5). Puisque Φ ne dépend que de z , il est possible, le long de cette bande, de remplacer la dérivée partielle par rapport a cette variable par la dérivée totale, ce qui donne :

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial z} dA = \int_A \frac{d\Phi}{dz} dz dy = dy \int_{\Phi(zB)}^{\Phi(zC)} d\Phi = dy [\Phi(zC) - \Phi(zB)] = 0 \quad (\text{II. 21})$$

Ou z_B et z_c sont les valeurs de z pour le contour de la section, l'équation (II.12b) automatiquement satisfaite.

- b) Par une démonstration similaire on arrive a la conclusion que l'équation (II.12c) [condition $(\sum F)_z = 0$] est également satisfaite.
- c) En ce qui concerne la condition $(\sum M)_x = 0$, on peut écrire ainsi l'équation (II.12d) [29]:

$$M = \int_A \left[y + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] dA \quad (\text{II. 22})$$

Puisque

$$y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial(\Phi y)}{\partial y} - \Phi$$

$$z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial(\Phi z)}{\partial z} - \Phi$$

L'équation (II.22) devient :

$$M = - \int_A \left[\frac{\partial}{\partial y} \Phi y + \frac{\partial}{\partial z} \Phi z - 2\Phi \right] dA \quad (II.23)$$

Si on applique le lemme de Green selon la quelle, si A est une zone plane dont le contour est appelé C et si $D(x,y)$, $V(x,y)$, $\partial D/\partial y$ et $\partial V/\partial x$ sont des fonctions continues en tout point on a :

$$\int_C (Ddx + Vdy) = \int_A \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} \right) dx dy$$

On peut écrire l'équation (II.23) sous la forme suivant :

$$M = - \int_C [-z\Phi dy + y\Phi dz] + 2 \int_A \Phi dA \quad (II.24)$$

Où la première intégrale - effectuée sur le contour C de la section - est nulle, car $\phi =$ constante sur ce contour. On écrit donc l'équation (II.24) ainsi :

$$M = 2 \int_A \Phi dA \quad (II.25)$$

II.3.5 Représentation physique de la fonction Φ :

On peut représenter la fonction comme une surface bombée qui s'étend sur toute la section de la membrure. Il est possible d'interpréter ses caractéristiques, exprimées par les équations (II.16), ainsi : la pente de la surface, selon la direction z, indique que l'intensité de la contrainte de cisaillement qui agit dans la direction y, et la pente selon la direction y donne, avec le signe contraire, la contrainte de cisaillement qui agit dans la direction z. on peut voir à la figure (II.5a) les contrainte qui agissent en général en un point A [29].

Dans le plan de la section, considérons un système d'axes (n, s) formant avec le système (y, z) un angle α , figure (II.5) on peut établir les relations suivantes :

$$\text{Cos}\alpha = \frac{dy}{dn} \text{ (figure (II.5b))} = \frac{dz}{ds} \text{ (figure (II.5c))} \quad (II.26a)$$

$$\text{Sin}\alpha = \frac{dz}{dn} \text{ (figure (II.5b))} = - \frac{dy}{ds} \text{ (figure (II.5c))} \quad (II.26b)$$

a) La composante de la contrainte de cisaillement qui agit selon la direction s, figure (II.5b), est donnée par l'équation suivante, équation (II.13):

$$\tau_{xs} = -\tau_{xy} \sin\alpha + \tau_{xz} \cos\alpha \quad (II.27)$$

À partir des équations (II.16), (II.26) et (II.27), on obtient

$$\tau_{xs} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dn} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \tag{II.28}$$

La composante de la contrainte de cisaillement qui agit selon la direction n est donnée par l'équation :

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} \sin\alpha + \tau_{xz} \cos\alpha \tag{II.29}$$

En effectuant les mêmes opérations, figure (II.5c), on obtient

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \tag{II.30}$$

En général, la dérivée partielle de la fonction Φ , effectuée selon une direction quelconque, donne l'intensité de la contrainte qui est normale à cette direction.

Si la direction n coïncide avec la normale au contour (défini par $\Phi = \text{constante}$) passant par le point A, la composante τ_{xn} est nulle, car $\partial\Phi/\partial s = 0$, ce qui implique que la composante τ_{xs} est tangentielle au contour ($\Phi = \text{constante}$), au point de rencontre avec la normale passant par le point A [29]

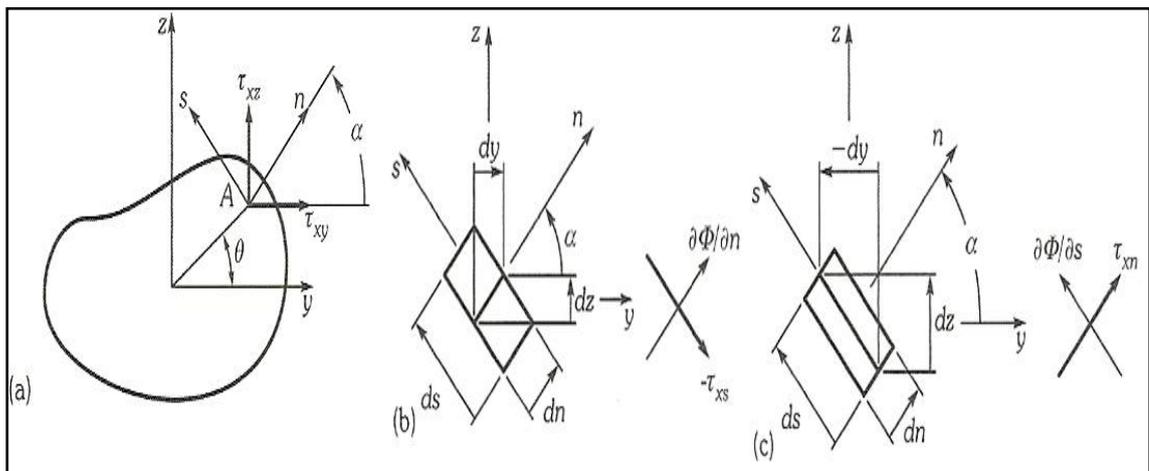


Figure (II.5): Représentation des contraintes de cisaillement par les dérivées partielles de la fonction de contrainte.

II.4. Méthode de l'analogie avec la membrane élastique (méthode de Prandtl) :

Ce qui précède vient prouver que la résolution analytique, pour toute section non circulaire, est relativement difficile, et ce même pour des géométries simples. Bien souvent, la difficulté étant insurmontable, il faut envisager de rechercher des solutions approximatives. La méthode de l'analogie avec la membrane (méthode de Prandtl) permet d'obtenir de telles approximations.

Cette méthode consiste à résoudre les problèmes posés par la torsion en apparentant la fonction de contrainte Φ aux déplacements qui affectent une membrane élastique soumise à une pression p ; la membrane est tendue sur une ouverture géométriquement similaire à la section du barreau figure (II.6a).

À l'aide des démonstrations suivantes, nous allons mettre en évidence l'analogie entre les problèmes posés par la membrane et ceux posés par la torsion.

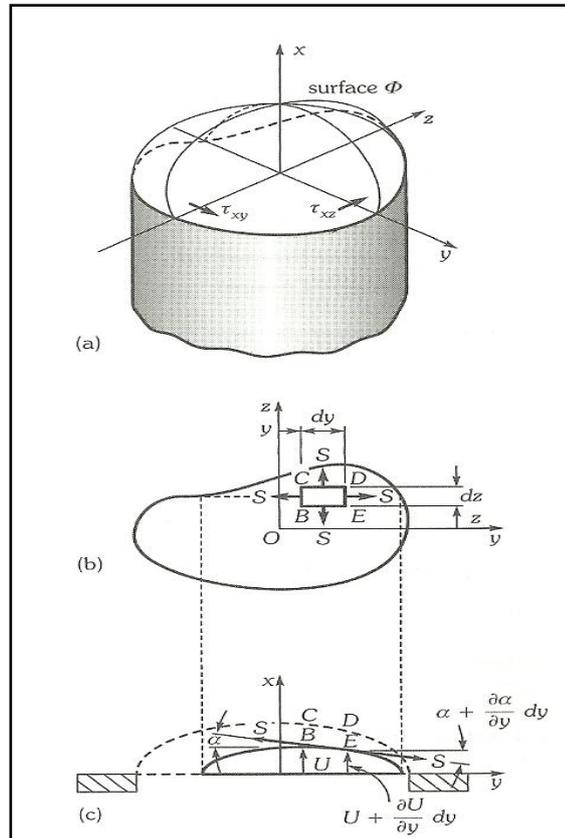


Figure (II.6) : Équilibre d'une membrane soumise à une pression.

II.4.1. Équilibre dans une membrane élastique soumise à une déformation :

La pression P tend à faire prendre à la membrane la forme d'une surface bombée. Désignons par U le déplacement qui affecte un point quelconque de la membrane (par exemple B), selon la direction x . Sur l'élément de surface isolé défini par $dydz$ (soit $BCDE$, figure (II.10b)), une force de tension S (par unité de longueur) doit s'exercer afin de maintenir en équilibre l'élément soumis à l'action de la pression p . Si on projette sur le plan xy , figure (II.10c) la force S qui s'exerce sur le côté BC (en supposant que les déplacements de la membrane sont faibles, c'est-à-dire que $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$), on obtient l'expression de son orientation par rapport à l'axe des y à partir de la relation suivante[29] :

$$\alpha = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{II.31}$$

En ce qui concerne la force S qui s'exerce sur le côté DE, on trouve (à partir de l'équation (II.29)) :

$$\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{II.32})$$

En fin, on détermine les composantes des forces S qui s'exercent sur BC et DE, soit

$$-S dz \frac{\partial U}{\partial y} + S dz \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy \right] = S \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy dz \quad (\text{II.33})$$

De façon similaire, on établit les composantes des forces de tension qui s'exercent sur CD et BE, soit

$$-S dy \frac{\partial U}{\partial z} + S dy \left[\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz \right] = S \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dy dz \quad (\text{II.34})$$

Il y a équilibre des forces selon la direction x si :

$$S \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy dz + S \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dy dz + P dy dz = 0 \quad (\text{II.35})$$

Ce qui donne finalement:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{P}{S} \quad (\text{II.36})$$

L'équation (II.36) est l'équation différentielle du déplacement U qui, sous l'action de la pression p, affecte la membrane élastique.

II.4.2. Analogie entre les problèmes posés par la torsion et ceux posés par la membrane élastique :

Si on compare les équations (II.17) et (II.36), on peut reconnaître les paramètres équivalents entre les équations relatives à la torsion et celles qui concernent la membrane, tableau (II.1)[29].

Tableau II.1 : Correspondance entre les paramètres des équations relatives à la torsion et ceux des équations qui concernent la membrane.

Torsion	Membrane	Correspondance
$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\beta$	$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{P}{S}$	On pose $U = c\Phi \quad (\text{II.37})$
$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\frac{\partial U}{\partial z}$	Ou c=cte. On obtient $\frac{P}{S} = c(2G\beta) \quad (\text{II. 38})$
$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial U}{\partial y}$	Et, enfin :
$M = 2 \iint \Phi \, dydz$	$V = 2 \iint U \, dydz$	$\Phi = \frac{2G\beta S}{P} U \quad (\text{II. 39})$
	Ou V=volume sous la membrane	

On s'aperçoit que les déplacements U qui affectent la membrane sont proportionnels à la valeur de la fonction de contrainte Φ . Par conséquent, les valeurs des contraintes de cisaillement sont proportionnelles à la dérivée partielle de la fonction qui définit la surface bombée. Autrement dit, en un point donné, la pente de la surface indique, de façon proportionnelle, l'intensité de ces contraintes. Ainsi, la membrane déformée permet d'avoir une image globale de la répartition des contraintes de cisaillement qui agissent dans une membrure prismatique soumise à une torsion.

III.1. Introduction:

Nous avons étudié au chapitre précédant la torsion d'un barreau prismatique de section non circulaire, on a utilisé une méthode plus générale découlant de la théorie de l'élasticité et nous avons obtenu l'équation différentielle gouvernante de Saint-Venant qu'elle est relativement facile mais elle ne s'applique qu'à quelques cas particuliers. Dans ce chapitre on va déterminer la solution exacte de quelques cas particuliers tel que la section circulaire et les tubes à paroi mince d'épaisseur constante où nous allons utiliser des méthodes spéciales basées sur la mécanique des solides, et les sections elliptique, rectangulaire, carré..... , où nous allons utiliser la méthode de Saint-Venant .

III.2. Sections circulaire pleine ou creuse et d'épaisseur constante:

La section circulaire est non seulement géométriquement simple, mais en outre la plus efficace en torsion. Grâce à la symétrie de cette section autour de l'axe longitudinal de la membrure, la solution analytique est relativement simple ; on la déduit des deux principes de la mécanique des solides. L'équilibre et la compatibilité des déformations.

III.2.1. Conventions et système de coordonnées:

Pour ce type de section, il est plus naturel de se référer à un système de coordonnées cylindriques (x, r, θ) , figure (III.1a). Pour représenter vectoriellement le moment de torsion, nous utiliserons la flèche à double pointe en adoptant la convention habituelle selon laquelle le moment de torsion agit dans le sens des aiguilles d'une montre autour de cette flèche lorsque nous regardons dans la direction de sa trajectoire, figure (III.1b). Le moment de torsion peut aussi être représenté par une flèche courbe dans le sens de son action figure (III.1c).

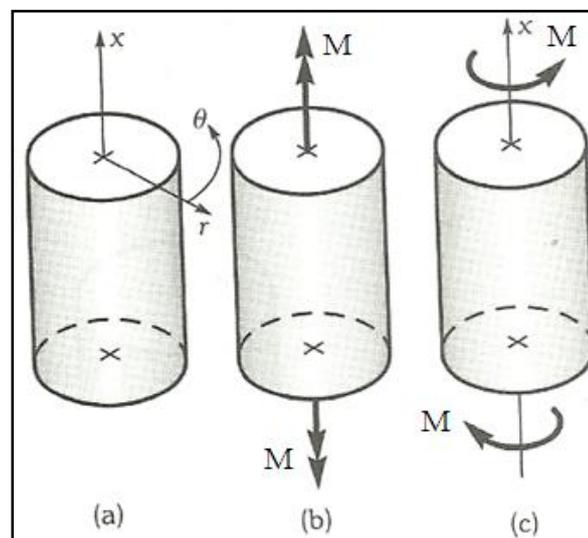


Figure (III.1): Système de coordonnées cylindriques et convention de signe.

Une Composante est positive lorsqu'elle agit dans la direction positive de l'axe sur une face positive (celle dont la normale extérieure est également dans la direction positive de l'axe) ou lorsqu'elle agit sur une face négative dans la direction négative de l'axe [29].

III.2.2. Etude du mode de déformation:

Pour étudier le mode de déformation de la membrure, commençons par une expérience relativement simple. Prenons un barreau de section circulaire, de préférence en caoutchouc (pour pouvoir le déformer facilement). Mesurons préalablement sa longueur et son diamètre initiaux et traçons sur sa surface latérale un réseau de lignes longitudinales et circonférentielles figure (III.2a).

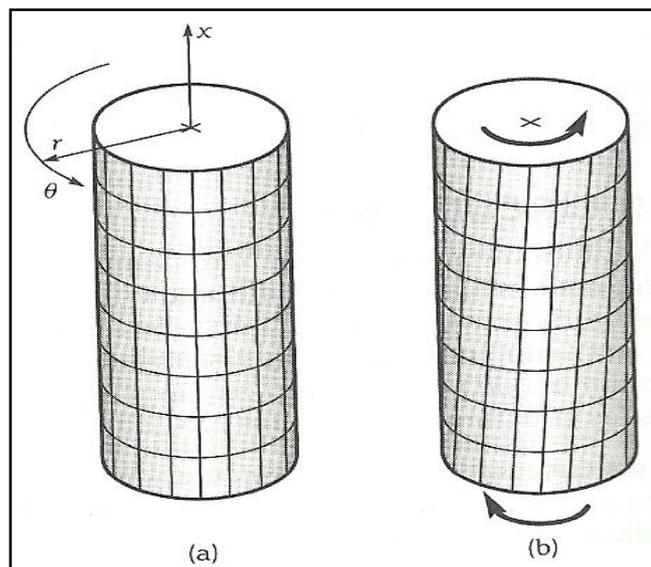


Figure (III.2): Déformation apparente d'un barreau en caoutchouc de section circulaire.

Si on applique un moment de torsion suffisamment élevé pour que les déformations soient apparentes, le barreau prendra l'aspect illustré à la figure (III.2b). Si on en mesure de nouveau le diamètre et la longueur, on constate que ces dimensions n'ont pratiquement pas changé. En outre, les lignes circonférentielles ne semblent pas avoir subi de déformation ; par contre, les lignes longitudinales forment maintenant des hélices autour de la membrure. La seule déformation apparente sur la surface latérale du barreau consiste donc un changement de l'angle que les lignes du réseau forment entre elles (à l'origine, elles formaient un angle droit).

Considérons une membrure droite soumise à un moment de torsion à ses deux extrémités figure (III.3a). En ce qui concerne l'équilibre, il est clair que le moment de torsion doit être le même à chacune des sections de la membrure, figure (III.3b), et qu'il est transmis d'une extrémité à l'autre. Puisque le moment de torsion est constant le long de la membrure,

que la section est uniforme et que le matériau est homogène et isotrope, toutes les sections doivent se déformer de la même façon.

Nous allons maintenant utiliser des arguments basés sur la symétrie afin de mettre en évidence deux caractéristiques fondamentales de la déformation après l'application d'un moment de torsion, à savoir [29]:

- a) Première caractéristique : une section transversale plane reste plane
- b) Deuxième caractéristique : un diamètre reste droit

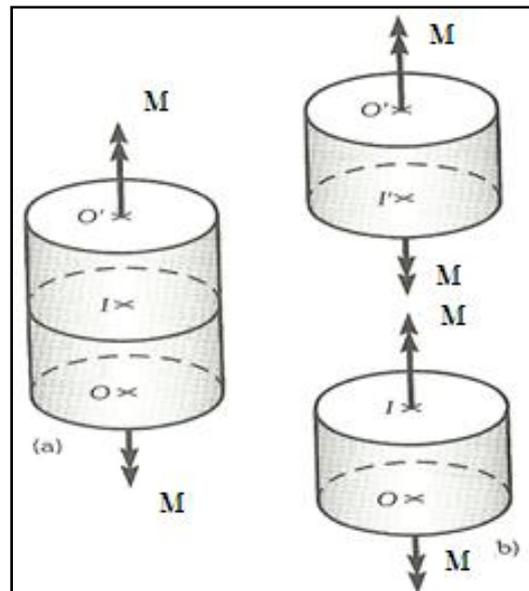


Figure (III.3): Les sections étant semblables et soumises au même moment interne.

Pour déterminer quantitativement la valeur de cette déformation, considérons uniquement une partie déformée de la membrure, figure (III.4a), et isolons en outre l'élément situé à une distance quelconque r de l'axe des x , figure (III.4b). Cet élément a subi une déformation de cisaillement et, puisqu'il était défini en fonction des axes des x et des θ , nous appelons cette déformation $\gamma_{x\theta}$, Chapitre (I). Si on détermine la valeur de l'angle EFE' , on peut associer la déformation de cisaillement $\gamma_{x\theta}$ à l'angle de torsion ($\Delta\varphi$) ; ainsi [29] :

$$\gamma_{x\theta} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{EE'}{EF} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta x}$$

D'où:

$$\gamma_{x\theta} = r \frac{d\varphi}{dx} \quad (\text{III. 1})$$

Il est important de souligner que cette déformation est directement proportionnelle au rayon. Elle varie linéairement de zéro (au centre de la section) à une valeur maximale (au périmètre extérieur). Le rapport $d\varphi/dx$, qu'on appelle «angle de torsion unitaire», est constant

puisque, la section étant uniforme, tous les éléments de la membrure, de longueur Δx , se déforment de la même façon figure (III.2b) [29].

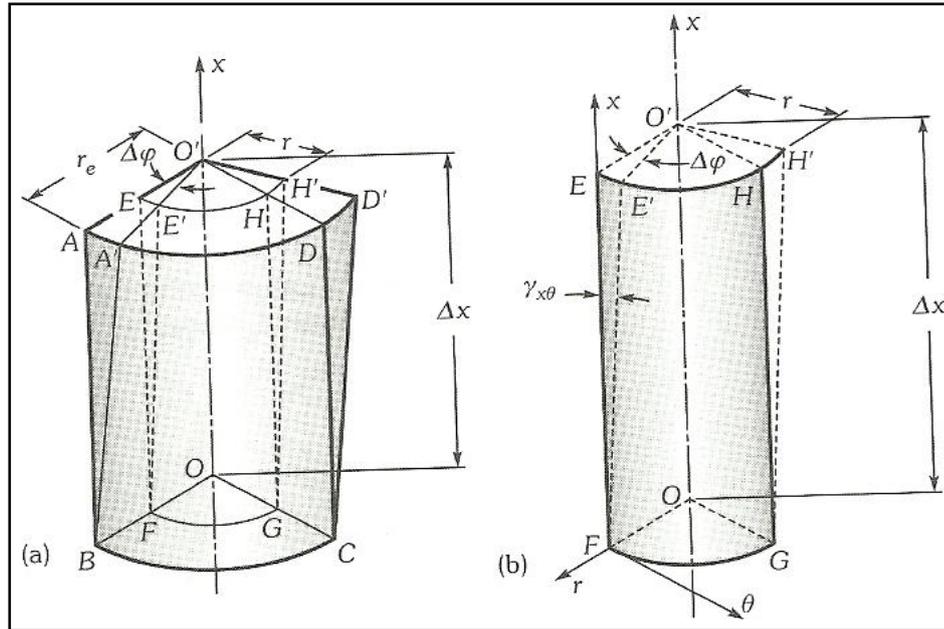


Figure (III.4): Mesure de la déformation d'un élément d'une membrure de section circulaire en torsion.

Finalement, à cause de la symétrie par rapport à l'axe des x de la membrure, on constate que le raisonnement qui a conduit à l'équation (III.1) est valable pour toutes les sections circulaires, que celles-ci soient pleines ou évidées [29].

III.2.3. Relation entre la contrainte et la déformation:

Au chapitre (I), équation (I.65), nous avons vu que, pour de petites déformations, il y avait une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et la déformation de cisaillement. L'équation suivante exprime cette relation :

$$\tau_{x\theta} = G \gamma_{x\theta} \quad (III. 2)$$

Où G est le module d'élasticité en cisaillement (ou module de rigidité) du matériau. D'après les équations (III.1) et (III.2), on peut écrire :

$$\tau_{x\theta} = G \gamma_{x\theta} = Gr \frac{d\phi}{dx} \quad (III. 3)$$

La figure (III.5a) illustre cette contrainte agissant sur un petit élément, tandis que la figure (III.5b) montre sa répartition sur la section de la membrure.

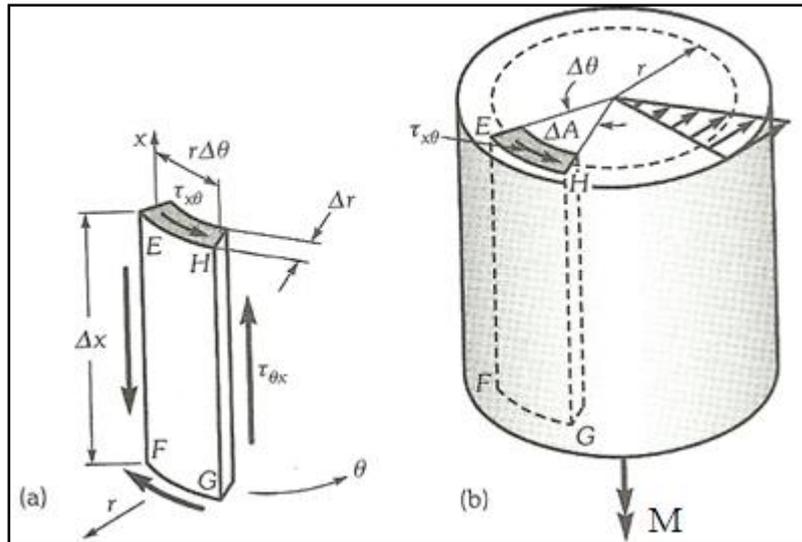


Figure III.5: Contrainte de cisaillement agissant sur un petit élément.

III.2.4. Conditions d'équilibre:

L'étude du mode de déformation et de la relation entre contrainte et déformation a permis de mettre en évidence, dans les paragraphes précédents, des équations relatives à la répartition de la déformation et de la contrainte dans une section circulaire soumise à une torsion. La déformation de cisaillement et la contrainte de cisaillement sont proportionnelles à la valeur de l'angle de torsion unitaire $d\varphi/dx$. Nous allons maintenant étudier les conditions nécessaires pour que chacune des parties de la membrure soit en équilibre [29].

Équilibre interne:

Considérons dans un premier temps le petit élément de la membrure soumise à une torsion, illustré à la figure (III.5). Cet élément, situé à une distance quelconque r de l'axe longitudinal de la membrure, a pour dimensions : $r\Delta\theta$ (largeur), Δx (hauteur) et Δr (épaisseur). Selon l'équation (III.3), l'élément est soumis à une contrainte de cisaillement $\tau_{x\theta}$ constante, puisqu'elle est indépendante des θ et des x . Cette contrainte agit sur la face supérieure EH de l'élément ainsi que sur sa face inférieure FG . Par ailleurs, chapitre (I), équation (I.7), l'élément étant en équilibre, il doit nécessairement y avoir sur les faces latérales EF et HG (perpendiculaire à θ) une contrainte longitudinale $\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta}$.

Ainsi, les conditions d'équilibre des contraintes agissant à l'intérieur de la membrure sont satisfaites puisque, sur un élément choisi arbitrairement, on a [29]:

$$\begin{aligned} (\sum F)_{\theta} &= (\sum F)_x = (\sum F)_r = 0 \\ (\sum M)_x &= (\sum M)_{\theta} = 0 \\ (\sum M)_r &= \tau_{\theta x}(r\Delta\theta\Delta r)\Delta x - \tau_{x\theta}(\Delta x\Delta r)r\Delta\theta = 0 \end{aligned}$$

Car :

$$\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta}$$

Équilibre aux rives:

Il faut qu'il y ait également équilibre entre les contraintes agissant à l'intérieur de la membrure et les forces externes agissant aux rives. En réexaminant la figure (III.5b), on peut voir que, à cause de la symétrie de la répartition de la contrainte autour de l'axe des x , la seule résultante de cette répartition est un moment qui ne peut qu'être égal au moment de torsion agissant à l'extrémité de la membrure.

Considérons un élément de surface ΔA de la section, situé à une distance r de l'axe du cylindre. Le moment ΔM_x , généré par la force provenant de la contrainte qui agit sur cet élément ΔA autour de l'axe des x est [29] :

$$\Delta M_x = r (\tau_{x\theta} \Delta A)$$

D'où:

$$M = \int_A dM_x = \int_A r (\tau_{x\theta} dA) \quad (\text{III. 4})$$

III.2.5. Contraintes et déformations en fonction du moment de torsion appliqué:

Dans les paragraphes précédents, nous avons analysé le mode de déformation d'une membrure de section circulaire. Nous avons ensuite utilisé la relation existant entre contrainte et déformation pour obtenir la contrainte et, pour terminer, nous avons déterminé les conditions d'équilibre. Les équations (III.1), (III.3) et (III.4) expriment ces résultats.

Nous allons maintenant combiner ces résultats de façon à obtenir des relations utiles, c'est-à-dire des relations exprimant la contrainte $\tau_{x\theta}$ et la rotation angulaire $\Delta\varphi$ en fonction du moment de torsion appliqué.

Dans l'équation d'équilibre (III.4), on remplace $\tau_{x\theta}$ par sa valeur, équation (III.3), avec G et $d\varphi/dx$ sont constants ; on obtient alors :

$$M = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A r^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} J \quad (\text{III. 5})$$

Où $J = \int_A r^2 dA$ est le second moment polaire de la section par rapport à l'axe de la membrure. Pour une section évidée de rayon intérieure r_i et de rayon extérieure r_e , figure (III.6), on peut facilement effectuée l'intégration, ce qui donne :

$$J = \int_A r^2 dA = \int_{r_i}^{r_e} r^2 (2\pi r dr) = \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_i^4)$$

$$J = \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4) \quad (\text{III. 6})$$

Où d_i et d_e sont respectivement les diamètres intérieur et extérieur. Dans le cas particulier d'un cylindre à paroi mince, de rayon moyen $r = \frac{r_e + r_i}{2}$ est l'épaisseur de paroi $t = r_e - r_i$, l'équation (III.6) peut se simplifier ainsi (on néglige les termes en t^2) [29] :

$$J = \frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2}(r_e - r_i)(r_e + r_i)(r_e + r_i)$$

$$J = \frac{\pi}{2}t(2r) \left(\left(r + \frac{t}{2} \right)^2 + \left(r + \frac{t}{2} \right)^2 \right)$$

$$J \cong 2\pi r^3 t$$

À partir de l'équation (III.5), on obtient l'expression de l'angle de torsion unitaire en fonction du moment de torsion, soit :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{GJ} \quad (\text{III. 7})$$

Pour une membrure de longueur L soumise à un moment de torsion à ses extrémités, figure (III.7), on détermine l'angle de rotation totale entre ces extrémités en intégrant l'équation (III.7). Ainsi :

$$\Delta\varphi = \int_0^L \frac{M}{GJ} dx = \frac{ML}{GJ} \quad (\text{III. 8})$$

Finalement, en remplaçant, dans l'équation (III.3), $d\varphi/dx$ par sa valeur, équation (III.7), on obtient l'expression de la contrainte de cisaillement en fonction du moment de torsion, ce qui donne :

$$\tau_{x\theta} = \frac{Mr}{J} \quad (\text{III. 9})$$

La contrainte de cisaillement prend la valeur maximale à la paroi du cylindre (ou à la paroi externe d'un cylindre creux) ; ainsi.

$$(\tau_{x\theta})_{\max} = \frac{Mr_e}{J} \quad (\text{III. 10})$$

Où r_e est le rayon extérieur.

En résumé, nous avons étudié le problème d'une membrure de section circulaire soumise à une torsion. Nous avons obtenu l'équation (III.8), qui met en relation le moment de torsion et la déformation angulaire, et l'équation (III.9), qui associe le moment de torsion à la répartition de la contrainte.

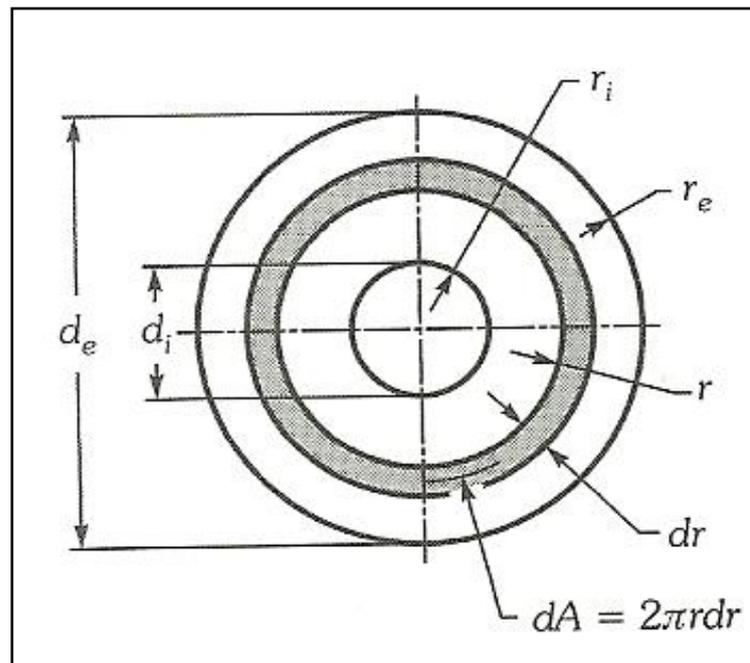


Figure (III.6): Section circulaire creuse.

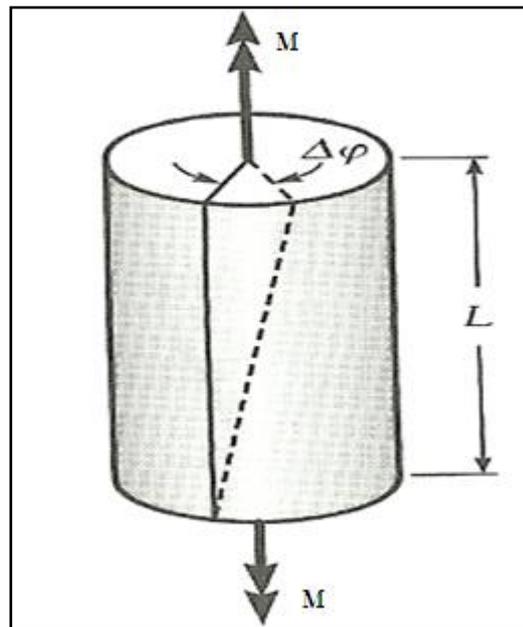


Figure (III.7): Angle de rotation total entre deux sections.

III.3. Tube à paroi mince:

Les résultats que nous avons obtenus précédemment ne sont valables que pour les membrures de section circulaire pleine ou creuse et d'épaisseur constante. En ce qui concerne les tubes à paroi mince, cependant, on peut envisager une solution simple et d'une grande importance sur le plan pratique. Géométriquement, le tube est composé d'éléments minces formant un contour fermé.

Même si la solution proposée ici n'est pas rigoureusement exacte du point de vue analytique, parce qu'elle ne satisfait qu'aux conditions d'équilibre, elle offre l'avantage, en pratique, d'être d'une application très simple ; des vérifications expérimentales ont d'ailleurs démontré qu'elle donnait de bons résultats [29].

III.3.1. Observations concernant la répartition des contraintes:

Dans une section circulaire, la répartition de la contrainte de cisaillement est linéaire, figure (III.8a), et, si la paroi est mince, on peut considérer que cette contrainte est, à toutes fins utiles, constante dans l'épaisseur de la paroi, figure (III.8b). Maintenant, si on compare les figures (III.8b) et (III.8c), on peut logiquement supposer que, dans une section à paroi mince de forme géométrique quelconque, la contrainte de cisaillement est tangentielle à la paroi et à peu près constante à travers l'épaisseur de cette dernière.

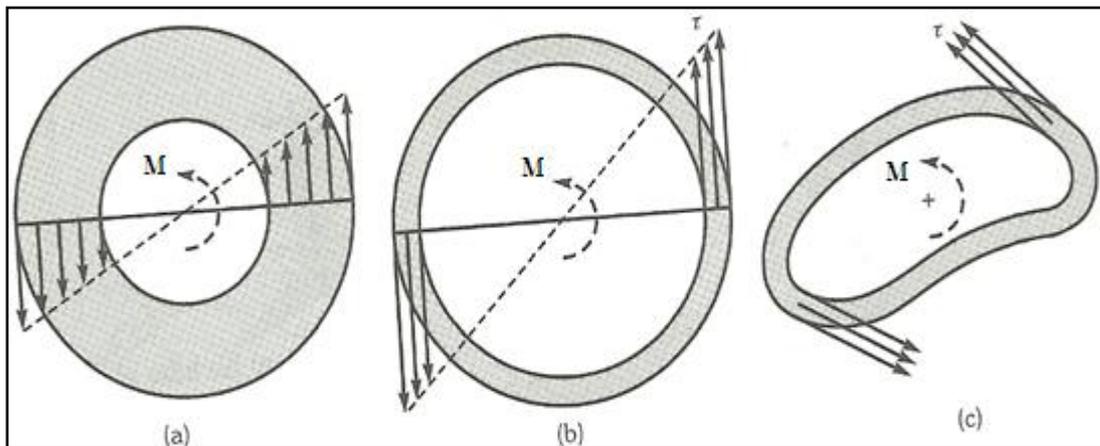


Figure (III.8): Répartition de la contrainte de cisaillement dans des sections soumises à un moment de torsion.

On constate d'abord que, dans la direction longitudinale, toutes les sections sont identiques et qu'elles subissent toutes le même moment de torsion M . Elles se déforment donc de la même façon et supportent les mêmes contraintes. On peut par conséquent conclure que l'intensité des contraintes ne varie pas dans la direction longitudinale. La composante σ_x est donc nulle partout puisqu'elle est nulle aux extrémités du tube et que celles-ci ne sont soumises à aucune force extérieure dans la direction x [29].

Considérons maintenant les composantes $\sigma_n, \tau_{ns}, \tau_{nx}$. et ces composantes sont nulles sur les surfaces latérales intérieure et extérieure de la paroi, puisque ce sont là des surfaces libres où aucune force n'agit. Nous pouvons supposer que, dans toute l'épaisseur de la paroi, ces mêmes composantes de contrainte, si elles existent, sont négligeables, puisque la paroi est mince.

Enfin, si on examine la composante σ_s , on constate qu'elle est également négligeable puisque, si elle existe, elle ne peut être équilibrée que par les composantes de cisaillement, τ_{ns} et τ_{nx} , qui sont elles-mêmes négligeables, figure (III.9c)[29].

En conclusion, on peut écrire [29] :

$$\begin{aligned} \tau_{xs} &\neq 0 \\ \sigma_x &= 0 \\ \sigma_n &\approx \sigma_s \approx \tau_{ns} \approx \tau_{nx} \approx 0 \end{aligned}$$

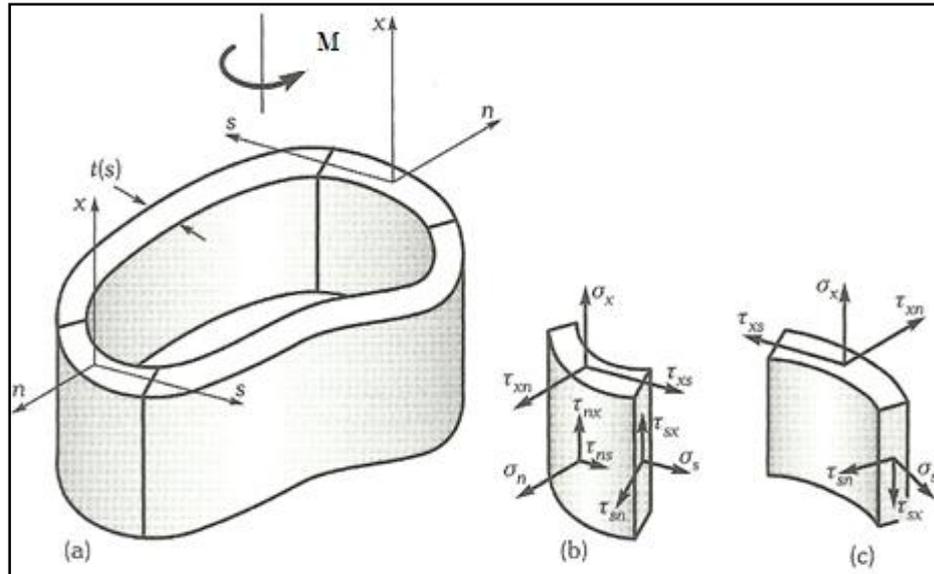


Figure (III.9): Système de coordonnées d'un tube et les composantes de contraintes pouvant être déterminées.

III.3.2. Flux de cisaillement et équilibre:

Nous venons d'établir que τ_{xs} constituait la seule composante de contrainte importante et qu'elle était à peu près constante dans toute l'épaisseur de la paroi. Pour pouvoir tenir compte de l'épaisseur variable de la paroi dans la direction circonférentielle, nous allons faire intervenir un nouveau paramètre, le flux de cisaillement q , qu'on exprime de la façon suivante, figure (III.10) [29] :

$$q = q_{xs} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xs} \, dn \approx \tau_{xs} t \tag{III. 11}$$

Il est important de signaler ici que le flux de cisaillement q est une force de cisaillement par unité de longueur de paroi. Par ailleurs, puisqu'un élément donné de la paroi est en équilibre et que $\tau_{xs} = \tau_{sx}$ on sait également que $q_{xs} = q_{sx} = q$ signifie que le flux de cisaillement agit non seulement le long du contour de la section de la membrure, mais aussi dans le sens longitudinal de cette dernière. Finalement, il est bon de rappeler que, en un point

quelconque de la section, la contrainte et le flux de cisaillement sont constants dans la direction longitudinale.

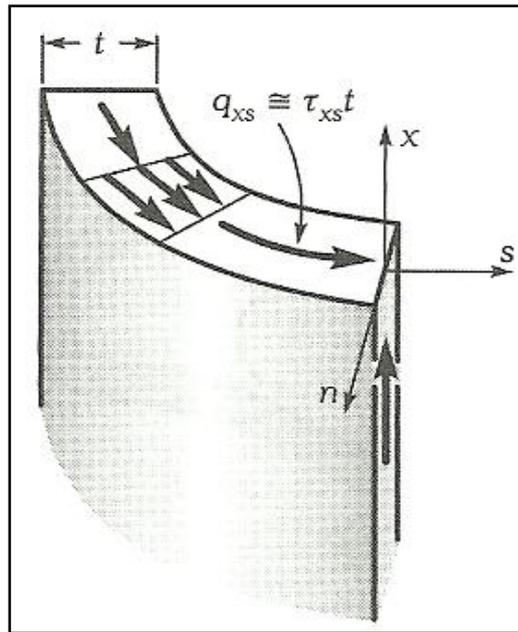


Figure (III.10): Le flux de cisaillement.

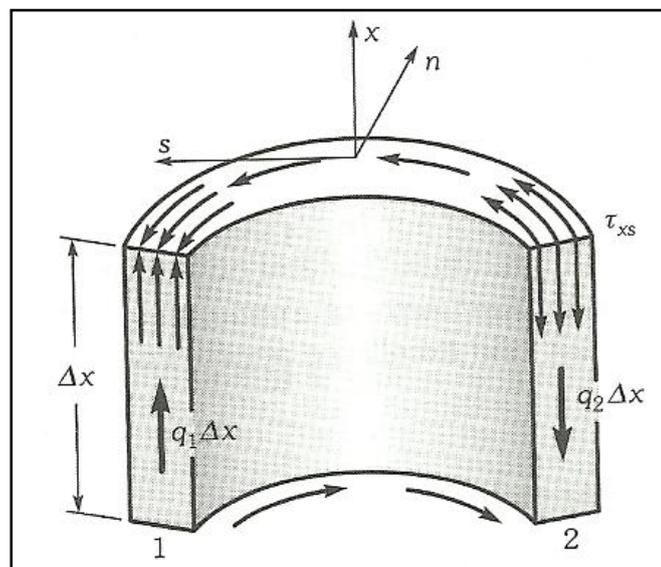


Figure (III.11): Le flux de cisaillement doit être constant d'un point à l'autre de contour de la section.

Isolons maintenant un élément du tube, de longueur Δx , pour en déterminer les conditions d'équilibre, figure (III.11). Considérons le flux de cisaillement agissant sur les faces 1 et 2. Pour que les conditions d'équilibre soient satisfaites dans la direction x , il faut que :

$$(\sum F)_x = 0$$

D'où:

$$q_1 \Delta x = q_2 \Delta x$$

Ou encore:

$$q_1 = q_2$$

Puisque $q_1 = q_2$ et qu'il en est également ainsi pour n'importe quel autre élément de la membrure, on en vient à conclure que le flux de cisaillement est constant autour de la section, même si l'épaisseur de la paroi varie. Cette conclusion explique l'origine de l'expression «flux de cisaillement» ; celle-ci provient d'une analogie avec l'écoulement d'un fluide dans un canal de largeur variable ; ainsi : $q = \text{constant}$

Considérons maintenant une section du tube figure (III.12). La force de cisaillement totale, agissant sur un élément de surface de la section de longueur d_s , est égale à $q d_s$. Si on étudie l'équilibre des moments autour de l'axe des x passant par un point quelconque 0, on obtient :

$$(\sum M)_x = 0$$

D'où:

$$M = \oint h(s) q ds = q \oint h(s) ds \quad (\text{III. 12})$$

Dans cette expression, q est une constante, tandis que $h(s) ds$ représente une surface égale à deux fois l'aire du triangle hachuré, de base ds et de hauteur $h(s)$, figure (III.12a). L'intégrale, sur le contour de la section, de la quantité $h(s) ds$ est donc égale à deux fois l'aire comprise à l'intérieur du périmètre moyen de la section, figure (III.12b). Si on représente cette aire par le symbole \bar{A} , l'équation (III.12) devient :

$$M = 2q\bar{A} \quad (\text{III. 13})$$

D'où on peut tirer :

$$q = \frac{M}{2\bar{A}} \quad (\text{III. 14})$$

Selon la définition du flux de cisaillement, équation (III.11), et à l'aide de l'équation (III.13), la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\tau_{xs} = \frac{q}{t} = \frac{M}{2\bar{A}t} \quad (\text{III. 15})$$

Cette solution, basée uniquement sur le concept d'équilibre, est applicable quel que soit le comportement du matériau (linéaire ou non linéaire). Par ailleurs, même si cette solution n'est pas rigoureusement exacte, des études expérimentales ont démontré qu'elle constituait une excellente approximation lorsque l'épaisseur de la paroi est faible [29].

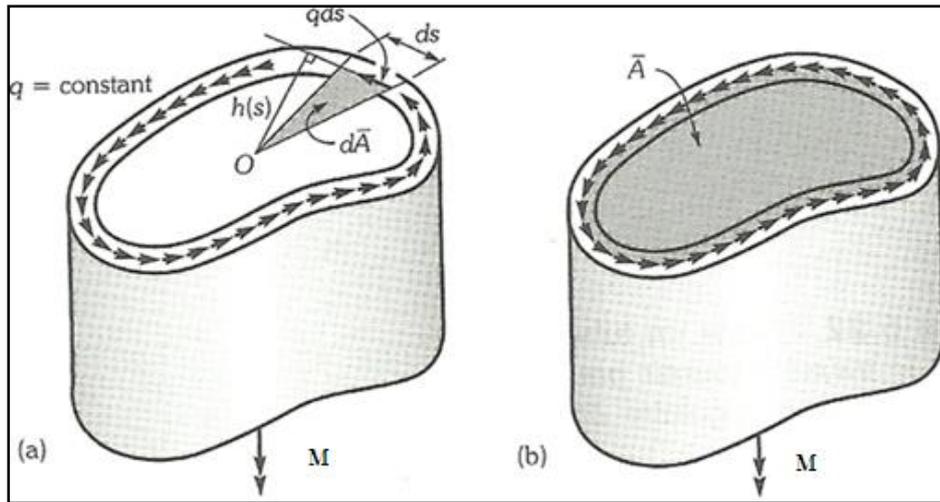


Figure (III.12): Relation entre le moment de torsion et le flux de cisaillement.

III.3.3. Déformation angulaire:

Pour exprimer la déformation angulaire du tube à paroi mince, nous allons utiliser une méthode basée sur l'énergie de déformation.

Soit un tube à paroi mince encastré à l'une de ses extrémités ; on applique graduellement un moment de torsion à son autre extrémité, figure (III.13a). Si on représente graphiquement la variation du moment appliqué en fonction de la déformation angulaire, on obtient, pour un matériau au comportement linéaire, la courbe de la figure (III.13b).

Au cours du chargement, il faut fournir au système une quantité de travail, représentée par la surface hachurée située sous la courbe, qui s'exprime ainsi [29] :

$$W = \frac{1}{2} M \Delta\varphi \quad (III. 16)$$

Ce travail est emmagasiné par le système sous forme d'énergie de déformation qui sera restituée à l'enlèvement de la charge.

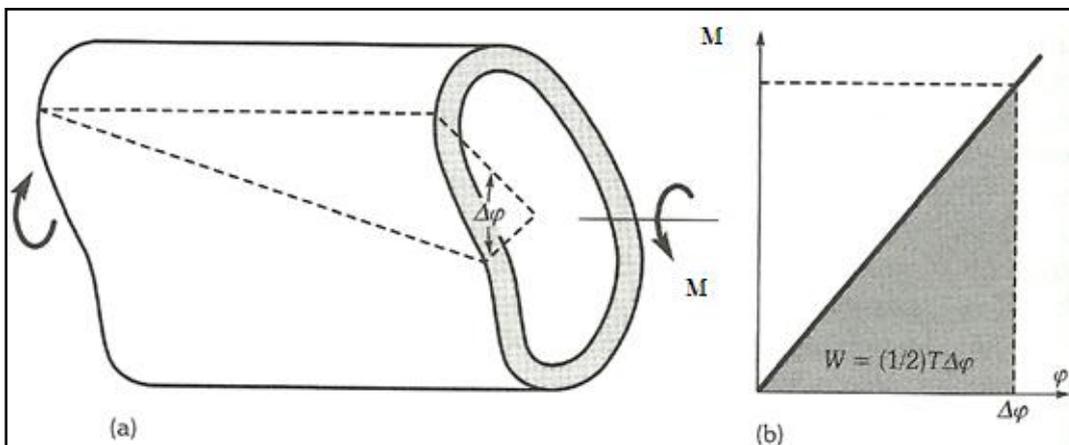


Figure (III.13): Le travail à fournir pour obtenir une déformation angulaire dans un tube à paroi mince.

Examinons maintenant comment est emmagasinée cette énergie de déformation. Considérons un élément du système, de dimensions db , dh et dt , figure (III.14a). Lorsque cet élément est soumis à une contrainte de cisaillement τ , il subit une déformation de cisaillement γ qui est proportionnelle à la contrainte appliquée dans le cas d'un matériau au comportement linéaire. Si l'arête AB de cet élément est fixe, l'arête CD est soumise à une force $\tau dh dt$ et elle se déplace proportionnellement d'une valeur γdb dans la direction de cette force, figure (III.14a).

Encore une fois, on peut représenter l'énergie de déformation absorbée par l'élément par la surface hachurée, située sous la courbe de la figure (III.14b), et elle s'exprime ainsi :

$$dU = \frac{1}{2} \tau dh dt \gamma db = \frac{1}{2} \tau \gamma dh db dt$$

D'où:

$$dU = \frac{1}{2} \tau \gamma dV \tag{III.17}$$

Où dV représente le volume de l'élément.

L'énergie de déformation totale absorbée par le système s'écrit donc :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dV = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 dV \tag{III.18}$$

Car $\gamma = \tau/G$ pour un matériau au comportement linéaire.

Puisque le travail fourni au système est égal à l'énergie de déformation totale emmagasinée par ce dernier, en combinant les équations (III.16) et (III.18) on peut écrire :

$$\frac{1}{2} M \Delta\varphi = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 dV$$

D'où:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{MG} \int_V \tau^2 dV \tag{III.19}$$

Dans le cas d'un tube à paroi mince, la contrainte est donnée par l'équation (III.15) et on a :

$$\Delta\varphi = \frac{M}{4\bar{A}^2 G} \int_V \frac{dV}{t^2}$$

Dans cette expression, tous les termes sont constants sauf l'épaisseur de la paroi $t(s)$ qui peut varier selon la direction circonférentielle du tube. Par ailleurs, $dV = Lt(s)ds$, où L représente la longueur totale du tube. Donc, en remplaçant dV par sa valeur dans l'expression précédente, on obtient:

$$\Delta\varphi = \frac{Ml}{4\bar{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t(s)} \tag{III.20}$$

Afin d'obtenir finalement une équation semblable à l'équation (III.8), on peut également écrire :

$$\Delta\varphi = \frac{ML}{GJ}$$

Ou :

$$J = \frac{4\bar{A}^2}{\left(\oint \frac{ds}{t(s)}\right)} \quad (\text{III. 21})$$

J est une constante qui dépend uniquement de la géométrie du tube, appelée «constante de torsion».

III.4. Quelques solutions particulières:

En général, pour analyser le comportement d'une membrure prismatique soumise à une torsion, il faut obtenir la solution exacte de l'équation (II.17), qui doit satisfaire aux conditions aux rives latérales.

Une fois la fonction Φ déterminée, on trouve les valeurs des contraintes à partir des équations(II.16), puis celle du moment à partir de l'équation (II.25).

En général, il est difficile de déterminer la fonction Φ . Cependant, pour certaines sections simples (cercle, ellipse, triangle équilatéral), on peut obtenir l'expression de Φ à l'aide des équations qui définissent le contour de chacune de ces sections.

Considérons donc une section dont le contour est défini par la relation [29] :

$$f(y, z) = 0 \quad (\text{III. 22})$$

Soumettons la membrure à un moment de torsion ; on peut exprimer la fonction Φ à l'aide de la relation suivante :

$$\Phi = Cf(y, z) \quad (\text{III. 23})$$

Où C est une constante déterminée à l'aide de l'équation (II.17), à partir de l'angle de torsion unitaire β .

Comme pour le cas de la torsion qui affecte un barreau de section circulaire, il est parfois utile d'exprimer le moment M en fonction de trois paramètres indépendants : le module de rigidité du matériau (G), l'angle de torsion unitaire (β) et un paramètre (J) qui dépend uniquement de la géométrie de la section. De là, on obtient :

$$M = GJ\beta \quad (\text{III. 24})$$

En combinant les équations (II.25) et (III.24), on établit l'expression du paramètre J (qui, dans le cas du barreau de section circulaire, en était le second moment polaire) appelé

constante de torsion du barreau, soit

$$J = \frac{2}{G\beta} \int_A \Phi \, dA \quad (\text{III. 25})$$

Les déplacements dans le plan yz peuvent finalement prendre la forme suivante, équation (II.3) :

$$v = -\frac{M}{GJ} xz \quad (\text{III. 26a})$$

$$w = \frac{M}{GJ} xy \quad (\text{III. 26b})$$

III.4.1. Résolution pour un barreau de section elliptique:

Fonction Φ : Si on se réfère à l'équation de l'ellipse qui définit le contour de la section, figure (III.14a), on peut exprimer la fonction Φ sous la forme suivante :

$$\Phi = C \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (\text{III. 27})$$

La fonction Φ est donc nulle sur le contour.

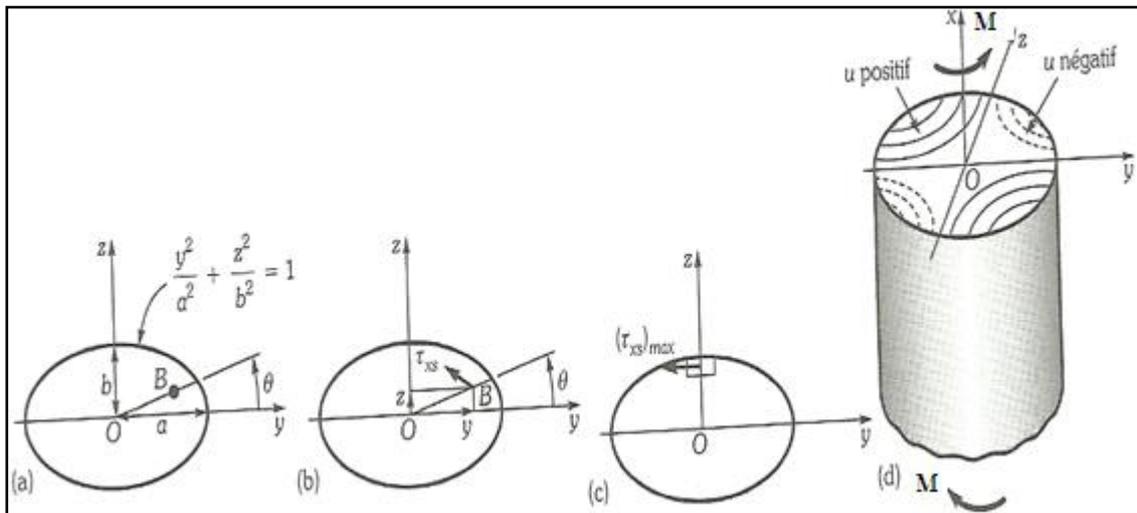


Figure (III.14): Section elliptique d'un barreau prismatique.

On détermine la constante C à partir de l'équation (II.17) (compatibilité géométrique), soit

$$C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\beta \quad (\text{III. 28})$$

En remplaçant C par sa valeur dans l'équation (III.23), on obtient l'équation suivante :

$$\Phi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\beta \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (\text{III. 29})$$

Soumettons la membrure à un moment de torsion M. On exprime alors l'équilibre à l'aide de l'équation (II.25), soit

$$M = -\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} G\beta \int_{-b}^b \int_{(-a/b)\sqrt{b^2-z^2}}^{(a/b)\sqrt{b^2-z^2}} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dydz \quad (\text{III. 30})$$

Après intégration et simplification, on a [29] :

$$M = -\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G\beta \quad (\text{III. 31})$$

Et la fonction Φ s'exprime alors ainsi [29] :

$$\Phi = -\frac{M}{\pi ab} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (\text{III. 32})$$

Contraintes de cisaillement:

On trouve les expressions des contraintes de cisaillement à l'aide des équations (II.16) :

$$\tau_{xy} = -\frac{2Mz}{\pi ab^3} \quad (\text{III. 33})$$

$$\tau_{xz} = \frac{2My}{\pi a^3 b} \quad (\text{III. 34})$$

L'expression de la contrainte résultante (τ_{xs}), qui agit en un point quelconque de la section, figure (III.14b), est donnée par l'équation :

$$\tau_{xs} = \frac{2M}{\pi ab} \left(\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4} \right)^{1/2} \quad (\text{III. 35})$$

Cette contrainte s'exerce tangentiellement au contour d'une ellipse semblable à celle du contour de la section, et passant par ce point quelconque.

On peut obtenir l'expression de la contrainte de cisaillement maximale résultante à partir de l'équation (III.35), et on peut démontrer que cette contrainte se produit aux points extrêmes du petit axe de l'ellipse, figure (III.14c). On a ainsi

$$(\tau_{xs})_{max} = (\tau_{xy})_{max} = \frac{2M}{\pi ab^2} \quad (\text{III. 36})$$

Déplacements:

A partir de l'équation (III.31), on obtient l'expression de l'angle de Rotation unitaire β . à l'aide des équations (II.3a) et (II.3b), on établit celles des composantes de déplacement dans le plan yz, soit

$$v = -\beta xz = -\frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M}{G} xz \quad (\text{III. 37})$$

$$w = \beta xy = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M}{G} xy \quad (\text{III. 38})$$

On trouve l'expression du gauchissement de la section à l'aide de l'équation (II.8a) (relation associée à τ_{xy}) combinée avec les équations (III.31) et (III.33), soit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G} + \beta z = \frac{M}{\pi a^3 b^3 G} (b^2 - a^2)z \quad (\text{III. 39})$$

Après intégration, la fonction u s'écrit [29] :

$$u(y, z) = \frac{M}{\pi a^3 b^3 G} (b^2 - a^2)yz + f(z) \quad (\text{III. 40})$$

Où $f(z)$ est une fonction de z uniquement.

Si on reprend les mêmes opérations avec la relation associée à τ_{xz} , équation (II.8b), on obtient l'équation :

$$u(y, z) = \frac{M}{\pi a^3 b^3 G} (b^2 - a^2)yz + g(y) \quad (\text{III. 41})$$

Où $g(y)$ est une fonction de y uniquement.

On comparant les équations (III.40) et (III.41), on peut conclure que $f(z) = g(y) =$ constante, constante qu'on peut poser égale à zéro, ce qui donne [29] :

$$u(y, z) = \frac{M}{\pi a^3 b^3 G} (b^2 - a^2)yz \quad (\text{III. 42})$$

Le gauchissement de la section lui confère la forme d'un hyperboloïde. Les lignes $y = 0$ et $z = 0$ ne se déplacent donc pas selon la direction longitudinale ; ailleurs, les déplacements sont antisymétriques par rapport aux axes des y et des z , figure (III.7d).

III.4.2. Résolution pour une section triangulaire (triangle équilatéral):

Dans le système de coordonnées dont l'origine O est située au centroïde du triangle, figure (III.15a), les équations qui définissent les côtés AC , AB et BC sont respectivement [29]:

$$y - \sqrt{3} z - \frac{2}{3}h = 0 \quad (\text{III. 43})$$

$$y + \sqrt{3} z - \frac{2}{3}h = 0 \quad (\text{III. 44})$$

$$y + \frac{h}{3} = 0 \quad (\text{III. 45})$$

Où h est la hauteur du triangle.

La fonction de contraintes, de la forme [29] :

$$\Phi(y, z) = C \left[\left(y - \sqrt{3} z - \frac{2}{3}h \right) \left(y + \sqrt{3} z - \frac{2}{3}h \right) \left(y + \frac{h}{3} \right) \right] \quad (\text{III. 46})$$

(Où C est une constante) satisfait aux conditions d'équilibre imposées au extérieur.

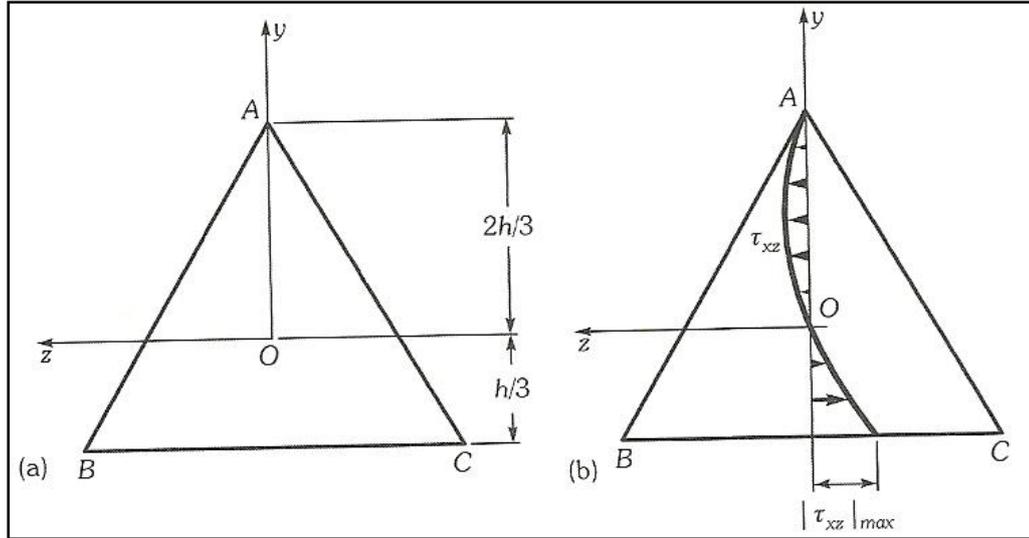


Figure (III.15): Section, en forme de triangle équilatéral d'un barreau prismatique.

Par ailleurs, pour satisfaire à la condition de compatibilité géométrique, il faut que $C = -G\beta$ (résultat qu'on obtient d'ailleurs de l'équation (II.17)). L'équation (III.41) donc s'écrire comme suit :

$$\Phi(y, z) = -G\beta \left[\frac{1}{2}(y^2 + z^2) - \frac{1}{2h}(y^2 - 3yz^2) - \frac{2}{27} h^2 \right] \quad (III. 47)$$

Par conséquent, équations (II.16a) et (II.16b) :

$$\tau_{xy} = -G\beta \left(z + \frac{3yz}{h} \right) \quad (III. 48)$$

$$\tau_{xz} = G\beta \left(y - \frac{3y^2}{2h} + \frac{3z^2}{2h} \right) \quad (III. 49)$$

Notes:

a) Aux trois sommets et au centroïde de la section, les deux contraintes de cisaillement τ_{xy} et τ_{xz} sont nulles.

b) Sur l'axe des y, la contrainte de cisaillement τ_{xy} est nulle ; la répartition de τ_{xz} apparaît à la figure (III.8b).

c) La contrainte de cisaillement maximale s'exerce en un point situé sur le contour. Si on examine la répartition de τ_{xz} le long du côté BC, on constate que le cisaillement maximal dû à la torsion s'exerce au point situé au milieu de ce côté. On peut donc écrire la valeur absolue maximale de la contrainte de cisaillement, soit

$$|\tau_{xz}|_{max} = \left| \frac{15\sqrt{3}}{2h^3} M \right| \quad (III. 50)$$

III.4.3. Résolution pour une section rectangulaire:

La méthode indirecte ne permet pas d'obtenir de solution pour une section rectangulaire, figure (III.16a). Nous devons donc déterminer une fonction de gauchissement $\psi(y, z)$ qui satisfasse aux conditions d'équilibre différentiel. La solution complète figurant dans des ouvrages plus spécialisés, nous nous contenterons ici de résumer les résultats finals. La constante de torsion du barreau (J) s'exprime ainsi.

$$J = \frac{bt^3}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{t}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh K_n b}{(2n + 1)^5} \right] \tag{III. 51}$$

Où

$$K_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2t} \tag{III. 52}$$

Note:

En vue d'une application pratique, on peut calculer la valeur de J, avec une marge d'erreur de 0,5 %, à l'aide de l'expression suivante :

$$J \approx \frac{bt^3}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{t}{b} \tanh \frac{\pi b}{2t} \right) \tag{III. 53}$$

La contrainte de cisaillement maximale, qui s'exerce aux points situés au milieu des plus grands côtés de la section, points A, figure (III.15a), s'exprime ainsi

$$(\tau_{xy})_{max} = \frac{Mt}{J} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2 \cosh K_n b} \right] \tag{III. 54}$$

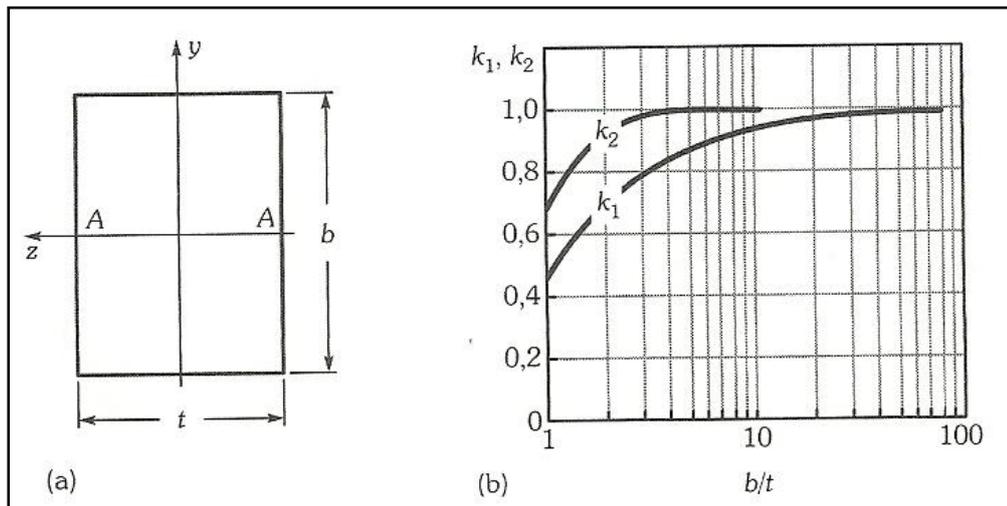


Figure (III.16): Section rectangulaire d'un barreau prismatique soumise à une torsion.

Il est souvent utile d'exprimer les résultats déjà obtenus sous les formes suivantes, à partir des équations (III.24), (III.53) et (III.54) [29] :

$$J = K_1 \frac{bt^3}{3} \quad (\text{III. 55})$$

$$\beta = \frac{1}{K_1} \frac{M}{\left(\frac{Gbt^3}{3}\right)} \quad (\text{III. 56})$$

$$(\tau_{xy})_{max} = K_2 \frac{Mt}{J} = \frac{K_2}{K_1} \frac{Mt}{\left(\frac{bt^3}{3}\right)} \quad (\text{III. 57})$$

Où K_1 et K_2 sont des paramètres qui varient en fonction de b/t , figure (III.15b). On peut voir que, pour les grandes valeurs de b/t (rectangles allongés), K_1 et K_2 tendent vers l'unité. Ainsi, lorsque $b/t = 10$, $K_1 = 0,936$ et $K_2 = 1$. La différence entre les solutions obtenues à partir des équations (III.46) et (III.50) est de l'ordre de 6 %.

Note:

Pour les rectangles allongés ($b/t > 10$), les expressions ci-dessus se réduisent aux formes que la méthode de l'analogie avec la membrane élastique permet d'obtenir facilement [29].

VI .I. Introduction:

Cette partie du projet est la plus importante, elle consiste à résoudre le problème numériquement. Pour cela, on a suivi et appliqué deux voies, dont la première consiste à appliquer une méthode de stockage bande dans un vecteur $\{V\}$ uni-colonne représentant la matrice de rigidité fictive, qui donne l'équivalence à la matrice $[K]$, tel qu'on suit une procédure de récurrence la plus efficace et moins d'opérations pour la programmation. Puisque le travail sur la méthode des éléments finis a été abouté à des matrices $[K]$ symétriques et bande. Ces deux propriétés ont conduit à stocker la partie supérieure (ou inférieure) de la matrice, en éliminant les zéros qui se trouvent à l'extérieur de la bande.

En résumé, à chaque fois qu'on se positionne sur une case de la matrice $K(i, j)$ la méthode donne sa position dans le vecteur $\{V\}$ à base des certaines formules qui varie avec la façon de stockage, dont seront données par la suite.

- Si on se trouve au-dessus de la diagonale (partie supérieure) et à l'extérieur de la bande, le calcul sera ignoré puisque cette case est réellement nulle.
- Si on se trouve au-dessous de la diagonale (partie inférieure) il suffit uniquement d'utiliser la propriété de la symétrie ($K(i, j) = K(j, i)$) et le traitement se fait comme étant une case $K(i, j)$.

Puis, toujours dans la première voie, on passe à la résolution du système d'équations obtenu en utilisant une méthode directe : de KHALESTKI, où on l'a adaptée pour des matrices bandes et symétriques en gagnant assez de mémoire et d'opérations de calcul.

Dans la deuxième voie, on a formulé et réaliser une méthode de stockage spéciale qui consiste à stocker que les cases non nulles de la partie supérieure de la matrice de rigidité globale $[K]$ dans deux vecteurs différents. Tel que l'un prend les valeurs des cases de la diagonale de la matrice, l'autre stocke les cases restantes de sa partie supérieure.

Vu que ce procédé de stockage peut atteindre des échelles de discrétisation très élevé, il est déconseillé d'utiliser une méthode d'inversion directe du système. Alors, on a adapté une méthode itérative puissante, c'est la méthode de GAUSS SEIDEL Accéléré avec un facteur de relaxation déterminé numériquement. Les algorithmes et les procédures sont donnés après les méthodes de la première voie.

En fin, la procédure générale de calcul et les étapes du programme sont exposées à la fin du chapitre.

Remarque:

- Les éléments finis développés dans le programme sont linéaires et non linéaires: c'est des triangles (à trois, quatre et six nœuds) ainsi que des quadrilatères (à quatre, cinq et huit nœuds).
- On a réalisé un programme en FORTRAN où la figure (VI. L7) illustre son organigramme général simplifié. Ce programme est spécialement conçu pour un cadre de discrétisation élevée.

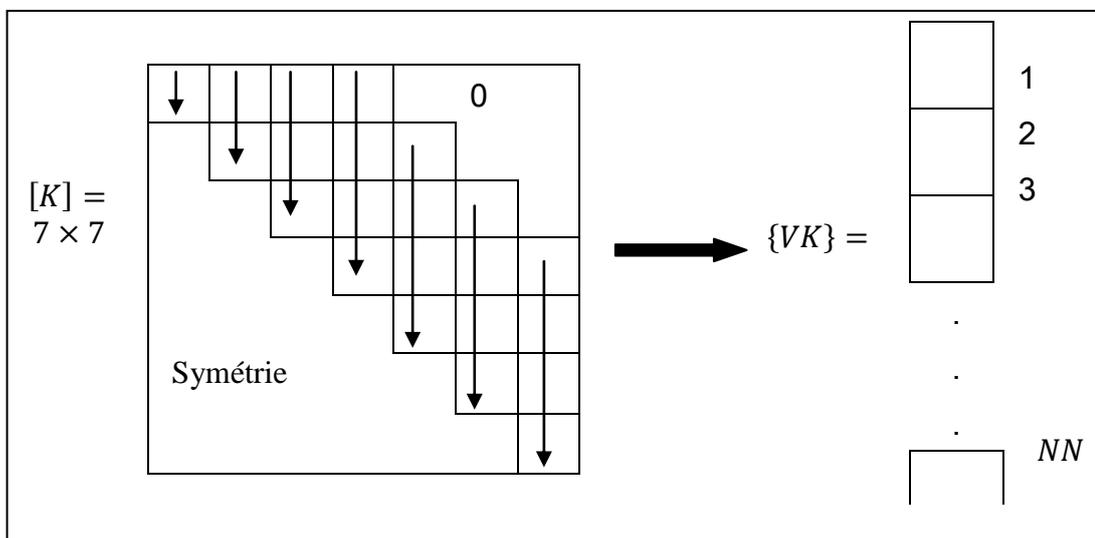
VI.2. Méthodes de stockage des matrices bandes sous forme de vecteur:

Considérons une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ symétrique et bande avec la largeur de la demi-bande est B . Le problème est de savoir stocker les cases de cette matrice dans un vecteur $\{Vk\}$. Il est parfois difficile de faire une équivalence entre une case de la matrice $[K]$ et la case du vecteur, ce qui a supposé plusieurs formes de stockages sous forme de vecteur. Ces formes de stockages sont différentes suivant la manière de stockage et la formule de récurrence convenable.

Alors, on va proposer cinq (5) formes de stockage en prenant une matrice $[K]$ d'ordre (7×7) symétrique et sa bande B est égale à 4, et cela pour fixer les idées. Ces formes sont : le stockage en colonne, en diagonal, en ligne, en ligne de serpent, en escalier... (Existe d'autres) [24].

VI.2.1. Stockage en colonne:

La méthode de stockage choisie est représentée par la direction des flèches. C'est-à-dire colonne par colonne, comme le montre la figure (VI. 1):



Figure(VI.1): Illustration de stockage en colonne.

Tel que:

$$\begin{aligned}
 VK(1) &= K(1,1) & VK(2) &= K(1,2) & VK(3) &= K(2,2) & VK(4) &= K(1,3) \\
 VK(5) &= K(2,3) & VK(6) &= K(3,3) & VK(7) &= K(1,4) & VK(8) &= K(2,4) \\
 VK(9) &= K(3,4) & VK(10) &= K(4,4) & VK(11) &= K(2,5) & VK(12) &= K(3,5) \\
 VK(13) &= K(4,5) & VK(14) &= K(5,5) & VK(15) &= K(3,6) & VK(16) &= K(4,6) \\
 VK(17) &= K(5,6) & VK(18) &= K(6,6) & VK(19) &= K(4,7) & VK(20) &= K(5,7) \\
 VK(21) &= K(6,7) & VK(22) &= K(7,7) & & & &
 \end{aligned}$$

On, peut remarquer pour cet exemple, que la dimension nécessaire du vecteur $\{Vk\}$ est égal à 22, c'est-à-dire $NN = 22$.

Si on veut généraliser à une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ symétrique, la dimension du vecteur $\{Vk\}$ doit être égale à :

$$NN = 1 + 2 + 3 + \dots + B + B(N - B) = \sum_{i=1}^{i=B} i + B(N - B)$$

Comme:
$$\sum_{i=1}^{i=B} i = \frac{B(B + 1)}{2}$$

Somme d'une suite arithmétique de raison unité donc :

$$NN = \frac{B(B + 1)}{2} + B(N - B) \Rightarrow NN = \frac{B(2N - B + 1)}{2} \tag{VI.1}$$

On peut vérifier cette formule pour l'exemple précédent :

$$\begin{cases} N = 7 \\ B = 4 \end{cases} \rightarrow NN = \frac{4(2 \times 7 - 4 + 1)}{2} = 22.$$

On procède maintenant à la détermination de la formule de récurrence de stockage des éléments de la matrice $[K]$ (les éléments de la bande uniquement) dans le vecteur $\{Vk\}$. Pour cela on divise la matrice $[K]$ en deux blocs.

a- Pour une case $K(i, j)$ telle que $j \leq B$, son équivalence en position dans le vecteur $Vk(L)$ est :

Avec :
$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + (j - 1) + i = \frac{(j-1)j}{2} + i$$

Alors :
$$L = \frac{j(j - 1)}{2} + i \quad \text{si} \quad j \leq B \tag{VI.2}$$

On peut remarquer que le nombre $(j-1)j$ est un nombre pair.

b- Pour une case $K(i, j)$ telle que $j > B$, son équivalence en position dans le vecteur $Vk(L)$ est

$$\begin{aligned}
 L &= 1 + 2 + 3 + \dots + B + (j - B - 1)B + i - (j - B) \\
 L &= i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2}
 \end{aligned}$$

Alors :
$$L = i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2} \quad \text{Si } j > B \quad (VI.3)$$

Remarques:

- Pour la formule (VI.2), le compteur 'i' varie de $1 \leq i \leq j$.
- Pour la formule (VI.3), le compteur 'i' varie de $j - (B - l) \leq i \leq j$.
- La fonction $L(i, j)$ est continue au point $j = B$. Donc pour ce point, on peut applique n'importe quelles formules (VI.2) ou (VI.3).
- Pour les formes suivantes, on va seulement donner les formules de récurrence de stockage sans détaillé le calcul [4],

VI.2.2. Stockage en diagonal:

Les éléments de la bande supérieure de la matrice $[K]$ seront transférés diagonalement dans le vecteur $\{Vk\}$ par : $Vk\{L\} = K(i, j)$

Tel que :

$$L = \sum_{P=1}^{P=j-i} (N + 1 - P) + i = \frac{1}{2}(j - i) \cdot (2N - j + i + 1) + i \quad (VI.4)$$

Avec: $\begin{cases} j = 1, 2, 3, \dots, B \\ i = 1, 2, 3, \dots, B \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} j = B + 1, B + 2, \dots, N \\ i = j - B, j - B + 1, \dots, j \end{cases}$

L'exemple suivant pour une matrice d'ordre (7 x 7) illustre schématiquement le transfert des casés entre la matrice et le vecteur correspondant.

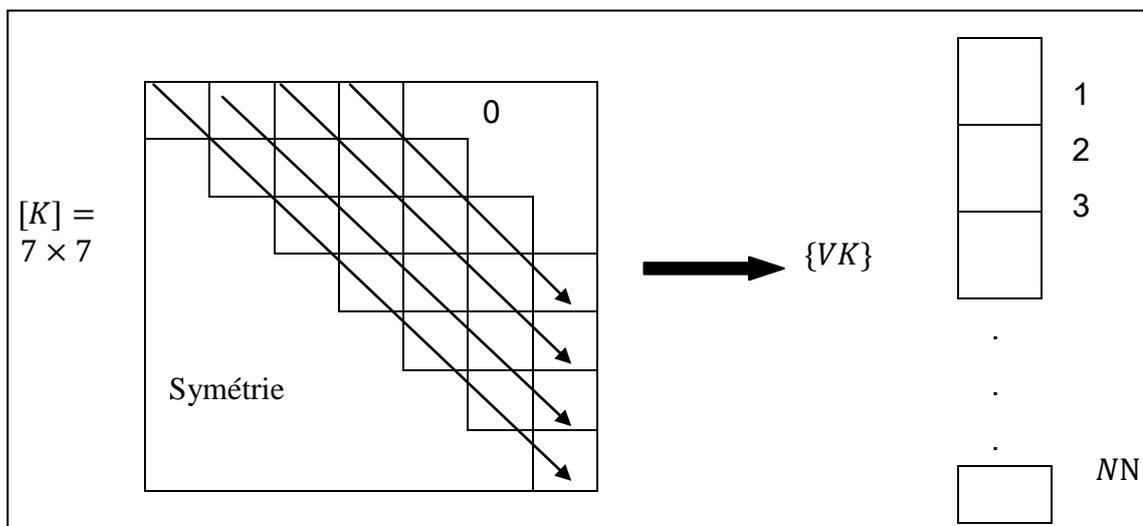


Figure (VI.2): Illustration de stockage en diagonal.

La dimension nécessaire de ce vecteur est donnée toujours par la formule (VI. 1). Si on applique la formule de récurrence (VI.4) à l'exemple précédent, c.à.d. cette matrice de l'ordre (7x7) et B=4 pour bien illustrer le procédé de stockage, on trouvera les résultats suivants :

$$\begin{array}{llll}
 VK(1) = K(1,1) & VK(2) = K(2,2) & VK(3) = K(3,3) & VK(4) = K(4,4) \\
 VK(5) = K(5,5) & VK(6) = K(6,6) & VK(7) = K(7,7) & VK(8) = K(1,2) \\
 VK(9) = K(2,3) & VK(10) = K(3,4) & VK(11) = K(4,5) & VK(12) = K(5,6) \\
 VK(13) = K(6,7) & VK(14) = K(1,3) & VK(15) = K(2,4) & VK(16) = K(3,5) \\
 VK(17) = K(4,6) & VK(18) = K(5,7) & VK(19) = K(1,4) & VK(20) = K(2,5) \\
 VK(21) = K(3,6) & VK(22) = K(4,7) & &
 \end{array}$$

VI.2.3. Stockage en ligne:

Les éléments de la bande supérieure de la matrice [K] seront transférés ligne par ligne dans le vecteur {VK} par : $VK(L) = K(i, j)$, comme le montre la figure (VI.3).

Telle que :

$$L = (i - 1) B + j - i + 1 \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N - B \\ j = i, i + 1, i + 2, \dots, i + B - 1 \end{cases} \quad \text{(VI.5)}$$

$$L = \frac{B}{2} (2N - B + 1) - \frac{1}{2} (N - i)(N - i + 1) - N + j \quad \text{(VI.6)}$$

$$\text{Si} \quad \begin{cases} i = N - B + 1, \dots, N \\ j = i, i + 1, \dots, N \end{cases}$$

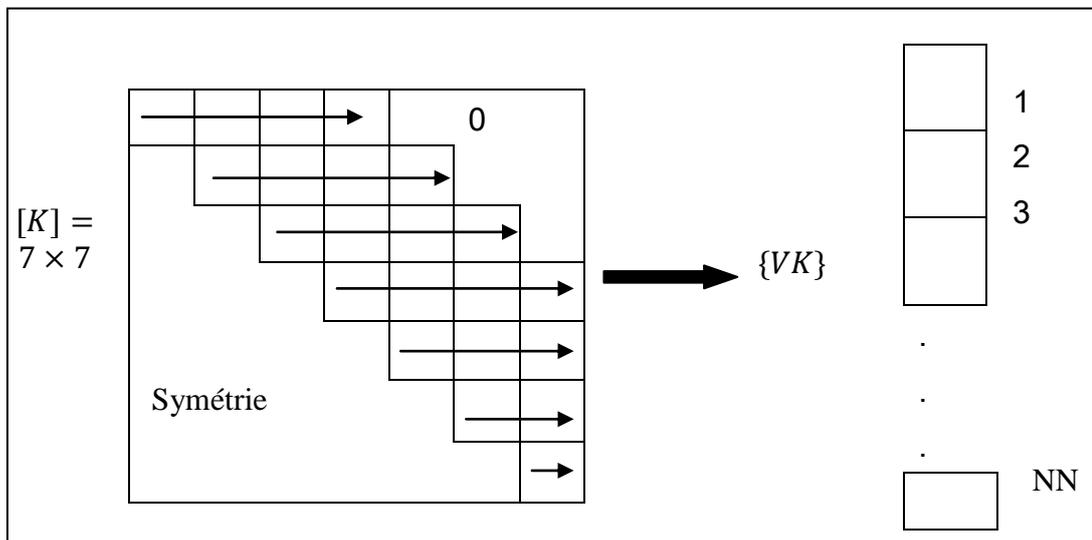


Figure (VI.3): Illustration de stockage en ligne.

La dimension nécessaire du vecteur {Vk} est donnée toujours par la formule (VI.1) Si on applique les deux formules (VI.5) et (VI.6) à cette matrice d'ordre (7x7) et B = 4, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants

$$\begin{array}{llll}
 VK(1) = K(1,1) & VK(2) = K(1,2) & VK(3) = K(1,3) & VK(4) = K(1,4) \\
 VK(5) = K(2,2) & VK(6) = K(2,3) & VK(7) = K(2,4) & VK(8) = K(2,5) \\
 VK(9) = K(3,3) & VK(10) = K(3,4) & VK(11) = K(3,5) & VK(12) = K(3,6) \\
 VK(13) = K(4,4) & VK(14) = K(4,5) & VK(15) = K(4,6) & VK(16) = K(4,7)
 \end{array}$$

$$VK(17) = K(5,5) \quad VK(18) = K(5,6) \quad VK(19) = K(5,7) \quad VK(20) = K(6,6)$$

$$VK(21) = K(6,7) \quad VK(22) = K(7,7)$$

VI.2.4. Stockage en ligne de serpent:

La matrice [K] (les éléments de la bande supérieure) sera transférée ligne par ligne alternativement dans le vecteur {Vk} par : $Vk\{L\} = K(i, j)$.

Telle que :

$$L = (i - 1)B + (-1)^{i-1}(j - i + 1) + \left(i + 1 - 2 \cdot \text{int}\left(\frac{i}{2}\right)\right) \cdot (B + 1) \quad (\text{VI.7})$$

$$\text{Si } \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N - B \\ j = i, i + 2, \dots, i - B - 1 \end{cases}$$

$$\text{Et } L = \frac{B}{2}(2N - B + 1) - \frac{1}{2}(N - i)(N - i + 1) - N + j + \left[i + 1 - 2 \cdot \text{int}\left(\frac{N}{2}\right)\right] (N - 2j + i)$$

$$\text{Si } \begin{cases} i = N - B + 1, \dots, N \\ j = i, i + 1, \dots, N \end{cases} \quad (\text{VI.8})$$

De même, la dimension du vecteur {VK} est donnée par la formule (VI.1) si on applique les deux formules (VI.7) est (VI.8) à cet exemple N=7, b=4, on trouve les résultats suivants:

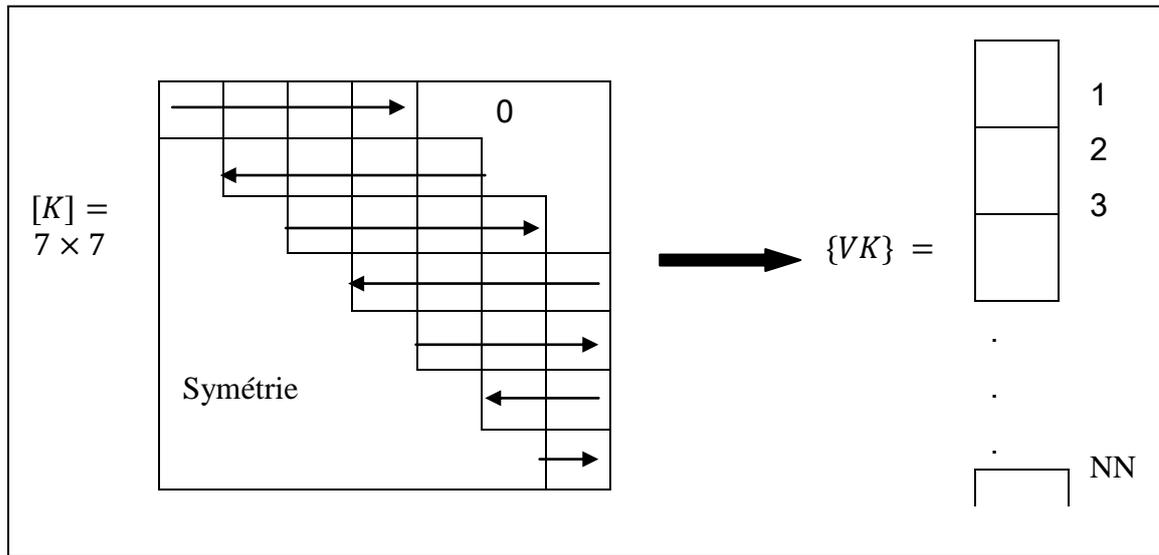


Figure (VI.4): Illustration de stockage en serpent.

$$VK(1) = K(1,1) \quad VK(2) = K(1,2) \quad VK(3) = K(1,3) \quad VK(4) = K(1,4)$$

$$VK(5) = K(2,5) \quad VK(6) = K(2,4) \quad VK(7) = K(2,3) \quad VK(8) = K(2,2)$$

$$VK(9) = K(3,3) \quad VK(10) = K(3,4) \quad VK(11) = K(3,5) \quad VK(12) = K(3,6)$$

$$VK(13) = K(4,7) \quad VK(14) = K(4,6) \quad VK(15) = K(4,5) \quad VK(16) = K(4,4)$$

$$VK(17) = K(5,5) \quad VK(18) = K(5,6) \quad VK(19) = K(5,7) \quad VK(20) = K(6,7)$$

$$VK(21) = K(6,6) \quad VK(22) = K(7,7)$$

VI.2.5. Stockage en escalier:

Le schéma de transfert des éléments de la matrice [K] se fait comme l'indique l'exemple suivant pour N=7 et B=4. Et pour bien voir le transfert des éléments voici la correspondance :

$$\begin{aligned}
 VK(1) &= K(1,1) & VK(2) &= K(1,2) & VK(3) &= K(1,3) & VK(4) &= K(1,4) \\
 VK(5) &= K(2,5) & VK(6) &= K(3,6) & VK(7) &= K(4,7) & VK(8) &= K(2,2) \\
 VK(9) &= K(2,3) & VK(10) &= K(2,4) & VK(11) &= K(3,5) & VK(12) &= K(4,6) \\
 VK(13) &= K(5,7) & VK(14) &= K(3,3) & VK(15) &= K(3,4) & VK(16) &= K(4,5) \\
 VK(17) &= K(5,6) & VK(18) &= K(6,7) & VK(19) &= K(4,4) & VK(20) &= K(5,5) \\
 VK(21) &= K(6,6) & VK(22) &= K(7,7) & & & &
 \end{aligned}$$

Pour une matrice d'ordre (NxN) avec une bande B, le transfert des éléments se fait la formule de récurrence suivant :

$$VK(L) = k(i, j)$$

Or :

$$L = (i + 1) \cdot \frac{(2N - i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, B \\ j = i, i + 1, \dots, B \end{cases} \quad (VI. 9)$$

$$L = (B - j + 1) \frac{2N - B + i}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, B \\ j = B + 1, B + 2, \dots, i + B - 1 \end{cases} \quad (VI. 10)$$

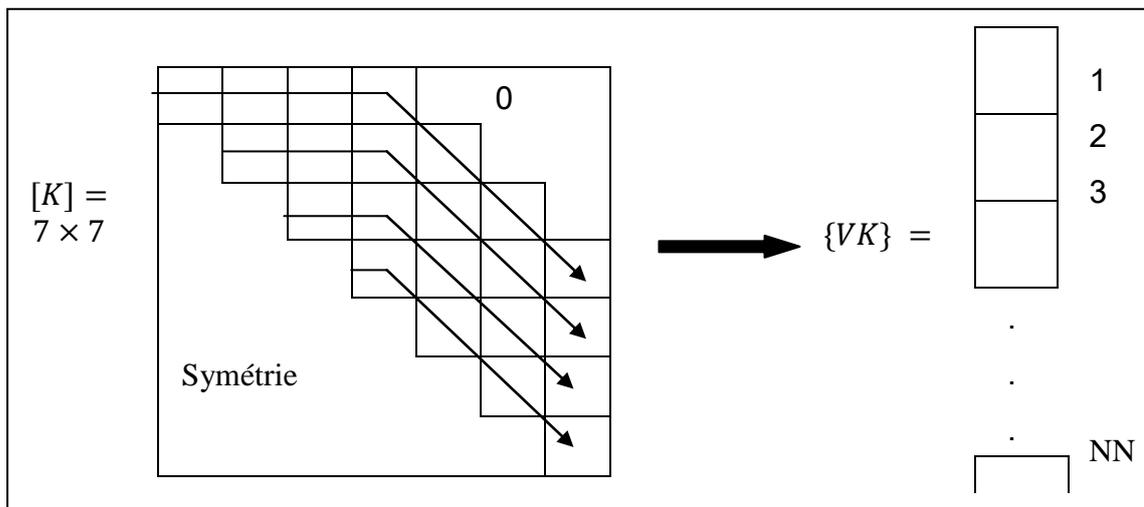


Figure (VI.5): Illustration de stockage en escalier.

VI.2.6. Gain en espace mémoire par la méthode de stockage bande:

La méthode des matrices bandes sous forme de vecteur nous a permis de gagner un espace mémoire de l'ordre suivant :

Pour une matrice [K] d'ordre (NxN) symétrique et bande, on a :

$$NDCE = N \times N - NN = N^2 - \frac{B(2N - B + N)}{2} \quad (VI.11)$$

Avec NDCE : Nombre De Case Eliminée

Au lieu de stocké N^2 dans la mémoire de l'ordinateur, on stocke, uniquement NN cases pour voir une idée sur la valeur de NDCE, on propose les exemples suivants :

Tableau (VI.1): Pourcentage des cases gagnées pour N=100.

B	N^2	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
100	10 000	5050	4950	49.50%
70	10 000	4855	5415	54.15%
35	10 000	2905	7095	70.95%
10	10 000	955	9045	90.45%
5	10 000	490	90510	95.10%

Tableau (VI.2): Pourcentage des cases gagnées pour N=5000.

B	N^2	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
480	25 000 000	2 285 040	22 714 960	90.85%
270	25 000 000	1 313 685	23 685 315	94.74%
150	25 000 000	738 825	24 261 175	97.04%
70	25 000 000	347 585	24 625 415	98.61%

Il est bien claire d'après ces exemples que plus la largeur de la demi bande est petite plus le nombre des case gagnées augmente rapidement, ce qui veut dire que durant la numérotation des nœuds du maillage généré, il est important donc de choisir celle qui donne la bande minimale ce que l'on appelle par la numérotation optimale.

On peut démontrer que toute région plane simplement connexe peut être transformée ou considérée comme un carré ou rectangle. Le maillage générée est de type 'H'. pour un carré, considérons N_x nœuds suivant l'axe horizontal 'x' et N_y nœuds suivant l'axe vertical 'y'. alors le nombre de nœuds total N est donné par :

$$N = N_x \times N_y$$

On suppose que : $N_x \leq N_y$ Si $N_x > N_y$, il suffit de permettre les axes des coordonnées.

Alors, on peut démontrer que nombre de nœuds restant après l'introduction des conditions aux limites (si ces dernières sont de type DIRICHLET), en d'autre terme :

L'ordre de la matrice [K] pour la résolution finale, est donné par :

$$N = N_x \cdot N_y - 2N_x - 2N_y + 4 \quad (VI.12)$$

Dans ce cas, la largeur optimale de la demi-bande B est donnée par :

$$B \leq N_x + 2$$

Alors, le cas le plus défavorable de B est donné par :

$$B_{max} = N_x + 2 \quad (VI.13)$$

Pour bien voir l'ordre de la dimension 'NN' nécessaire du vecteur $\{Vk\}$ au stockage après l'application des conditions aux limites, ainsi que le pourcentage des cases gagnées (avec la bande B_{max}), on considère les exemples suivants :

Tableau(VI.3): Pourcentage des cases gagnées pour $N_y = 100$ en fonction de N_x .

N_x	B_{max}	N	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
100	102	9 604	974 457	91262 359	$\approx 98,94 \%$
80	82	7644	623 487	57 807 249	$\approx 98,93 \%$
50	52	4 704	243 282	21 884 334	$\approx 98,90 \%$
30	32	2 744	87 312	7 442 224	$\approx 98,84 \%$
10	12	784	9 342	605 314	$\approx 98,48 \%$
3	5	98	480	9 124	$\approx 95,00 \%$

Tableau(VI.4): Pourcentage des cases gagnées pour $N_y = 500$ en fonction de N_x .

N_x	B_{max}	N	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
500	502	248 004	124 372 257	61381611 759	$\approx 99,797 \%$
300	302	148 404	44 772 557	21 978 974 659	$\approx 99,796 \%$
120	122	58 764	7 161 827	3 446 045 869	$\approx 99,792 \%$
50	52	23 904	1 241 682	570 159 534	$\approx 99,782 \%$
3	5	498	2 480	245 524	$\approx 99,000 \%$

On peut bien remarquer que le nombre de cases gagnées dans le cas le plus défavorable dépasse 90 % de la méthode classique de stockage complet. Donc, on voit clairement l'intérêt pratique de la technique de la matrice bande.

VI.3. Influence de la numérotation des nœuds sur la forme de la matrice de rigidité:

La numérotation des nœuds joue un rôle très important pour la mémorisation des matrices, surtout si le rang de la matrice devient de plus en plus élevé. Pour une matrice carrée

quelconque d'ordre N , il faut stocker N^2 cases, ce qui devient impossible pour des valeurs de N élevées.

Quel que soit le type de l'ordinateur, la mémoire centrale est limitée or le besoin en mémoire pour notre problème est important, ce qui nous oblige à penser à remédier par une technique adéquate afin de résoudre un système d'équations élevé avec une précision voulue.

Les deux propriétés (symétrie + bande) des matrices, obtenues par l'application de la méthode des éléments finis, donnent un avantage très important et répondent bien au problème de mémorisation des éléments de la matrice de rigidité. En premier lieu, on peut diviser les éléments de la matrice $[K]$ en deux parties :

- Cases nuls. - Cases non nuls.

Puisque le zéro est connu et il n'est pas nécessaire de réserver toute une case pour le stocker. Comme leur nombre peut être important suivant la numérotation, il reste d'indiquer uniquement leurs positions exactes dans la matrice de rigidité $[K]$.

Alors, il est très important de rendre la matrice $[K]$ pleine de zéros à fin de minimiser la mémorisation. Ce souhait ne sera réalisable qu'après faire une très bonne numérotation des nœuds dont le but est de serrer aux maximums les cases non nulles vers la diagonale principale.

Ce type de matrice est appelé matrice bande, elle est caractérisée par la valeur de la demi-bande. Le problème se pose donc au niveau de la valeur de cette bande. Le nombre des zéros de la matrice augmente si la valeur de la demi-bande diminue, la forme générale de la matrice bande symétrique est la suivante

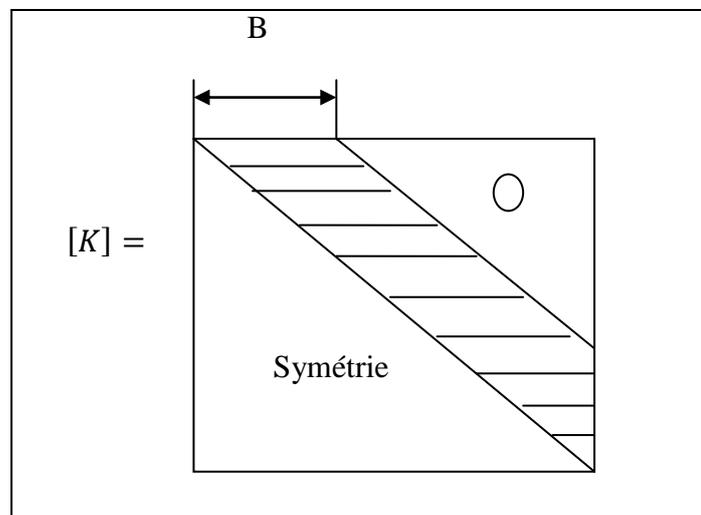


Figure (VI.6): Forme générale d'une matrice bande symétrique.

La partie hachurée contient les éléments non nuls (partis bande).

Il est à noter qu'on peut trouver dans la partie bande des éléments nuls. Mais si on veut calculer avec des matrices bandes, on ne peut pas éliminer ces éléments de la mémorisation puisque le travail avec ce type de matrice, ainsi que la décomposition en deux matrices triangulaires, nous oblige de stocker tous les éléments de la bande. Or notre 2^{ème} méthode de stockage qui est le stockage complexe se consacre que pour la conservation des cases non nulles de la demi-bande de la matrice dans un vecteur en ordre, en gardant leurs indices de ligne et colonne.

On note encore que, si on calcul le nombre des zéros qui se trouvent dans la bande, on peut trouver pour certaines numérotations, un nombre qui dépasse la moitié ou même 80% !. Pour cela, on mise en lumière en premier lieu le calcul de la demi-bande et son algorithme dans prochain paragraphe.

VI.3.1. Evaluation de la demi-bande d'une matrice bande:

L'évaluation de la demi largeur de la bande est donnée par la différence maximale entre les numéros de deux nœuds d'un même élément, multiplié par le nombre de degré de liberté des nœuds (notre cas, chaque nœud contient un degré de liberté) et en ajoutant 1 (problème des intervalles).

Si on a un domaine plan, formé par 'NEL' éléments triangulaires à trois nœuds, la valeur de la demi-bande 'B' avant l'application des conditions aux limites est donnée comme suit :

- Soit B_L la bande donnée par l'élément numéro 'L':

$$\text{Alors:} \quad B_1 = \text{Max}(i, j, k) - \text{Min}(i, j, k) + 1 \quad (\text{VI. 14a})$$

Avec i, j et k les numéros globales (non locales) des trois nœuds de l'élément L.

Par suite la valeur de B est donnée par :

$$B = \text{Max} (B_1, B_2, \dots, B_L, \dots, B_{NEL}) \quad (\text{VI. 14b})$$

Avec NEL : le nombre d'éléments finis.

Pour un élément quadrilatère à 4 nœud ou triangle à 4 nœud, la bande donnée par cet élément est égale à :

$$B_p = \text{Max}(i, j, k, l) - \text{Min}(i, j, k, l) + 1 \quad \text{Et} \quad B = \text{Max}(B_1, B_2, \dots, B_p, \dots, B_n) \quad (\text{VI. 15})$$

Dans le cas général, pour un élément quadrilatère ou triangulaire a 'P' nœuds pour les l'évaluation de la bande donnée par cet élément 'L' est égale à :

$$B_L = \text{Max}(i, j, k \dots m \dots p) - \text{Min}(i, j, k \dots P) + 1 \quad (\text{VI. 16})$$

Par suite la valeur de B pour tout le domaine est donnée par la formule (VI.14b).

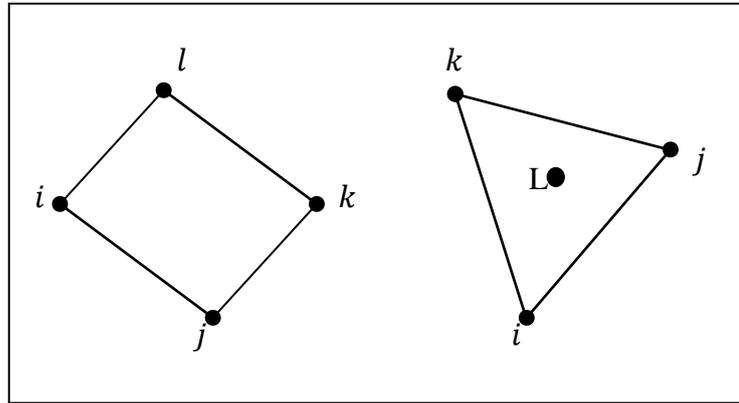


Figure (VI.7): Eléments typique à quatre nœuds.

Maintenant, si on fait le calcul après l'introduction des conditions aux limites ; l'expression (VI.15) reste la même sauf qu'on ajoute la condition qui exprime que les numérotations globales i, j, \dots, P doivent être apparient qu'aux nœuds interne du domaine, c.à.d. la valeur du vecteur $ICL(i)$ indiquant les nœuds de frontières égale à « 0 » pour ce nœud 'i' par exemple. Or pour les nœuds de frontières il égale à « 1 ».

Dans ce cas, la partie du programme (Subroutine bande) qui calcul la valeur de la demi-bande avant et après l'introduction l'effet des conditions aux limites, est donnée comme suit :

```

C***** CALCUL DE LA BANDE AVANT LA REDUCTION *****
      IBAV=0
      DO 501=1, NEL
        IP=NNE (I, 1)      ; IG=NNE (L1)
      DO 201 1=2, NNPE
        IP=MIN (NNE (I, II), IP)
20      IG=MAX (NNE (I,II), IG)
        IBB=IG-IP+1
        IF (IBB.GT.IBAV) IBAV=IBB
50 CONTINUE
C*****CALCUL DE LA BANDE APRES LA REDUCTION *****
      IBAP=0
      DO 701=1, NNT
        IF(ICL(I) EQ1) GOTO 70
        NPCNN=I ; NDCNN=NPCNN+IBAV-1
        IF (NDCNN. GT.NNT) NDCNN=NNT
        IBB=0
      DO 60 J=NPCNN, NDCNN
        IF (ICL (J).EQ.0) IBB=IBB+1
60 CONTINUE
        IF (IBB.GT.IBAP) IBAP=IBB
70 CONTINUE
C*****

```

Tel que:

IBAV : La largeur du la demi bande avant l'introduction des C.A.L.

IBAP : Largeur de la demi-bande après l'introduction des C.A.L.

NNE : Matrice de connexion des éléments (voir les paragraphes de connexion du Chapitre (V)).

NNT : Nombre Totale des Nœuds du maillage.

NPCNN : Numéro du Premier Case Non Nulle de la ligne.

NDCNN : Numéro de Dernière Case Non Nulle de la même ligne.

IP, IG : Variables pour stocker la valeur du numéro le plus grand et le plus petit d'un élément.

ICL (..) : Vecteur qui indique les nœuds de frontière lorsque = 1, sinon il égale à 0 pour les nœuds interne.

VI.3.2. Exemple illustrant l'influence de la numérotation des nœuds :

Pour illustrer ce qu'on a dit, on reprend l'exemple de chapitre (V) de paragraphe § (IV.3.A.4) où en faisant varier la numérotation d'un domaine pour différent cas, ainsi la valeur de la demi bande B. Pour chaque cas, on trace la matrice $[K]$ pour présenter sa taille et les positions des cases non nulles et calculer le nombre des zéros.

Le domaine est de forme rectangulaire qui sera discrétisé en 30 éléments triangulaires à trois nœuds, comme l'indique la figure (VI .8):

Chaque élément du domaine contient trois nœuds, alors la matrice de rigidité élémentaire d'après le chapitre (IV), est de l'ordre 3×3 .

On considère pour cet exemple trois cas de numérotation des nœuds différents et pour chaque cas, on va construire la matrice de rigidité du domaine complet et ça indépendamment des conditions aux limites. Il est à noter que pour cet exemple, le nombre de nœuds est égal à 24, alors la matrice de rigidité $[K]$ est de rang 24×24 .

Remarque:

La numérotation des éléments ne pose aucun problème sur la valeur de la demi-bande de la matrice de rigidité, c'est-à-dire, elle est indépendante de la bande. Donc, on a :

1^{ere} Cas: On va numéroter les nœuds suivant l'axe horizontal de gauche vers la droite en montant suivant y, voir la figure (VI.9a) pour plus d'illustration.

On peut bien remarquer que la largeur de la demi-bande 'B' est égale à : $B = 8$ ainsi que le nombre des zéros à l'extérieur de la bande est égal à $\frac{16 \times 17}{2} = 136$ cases.

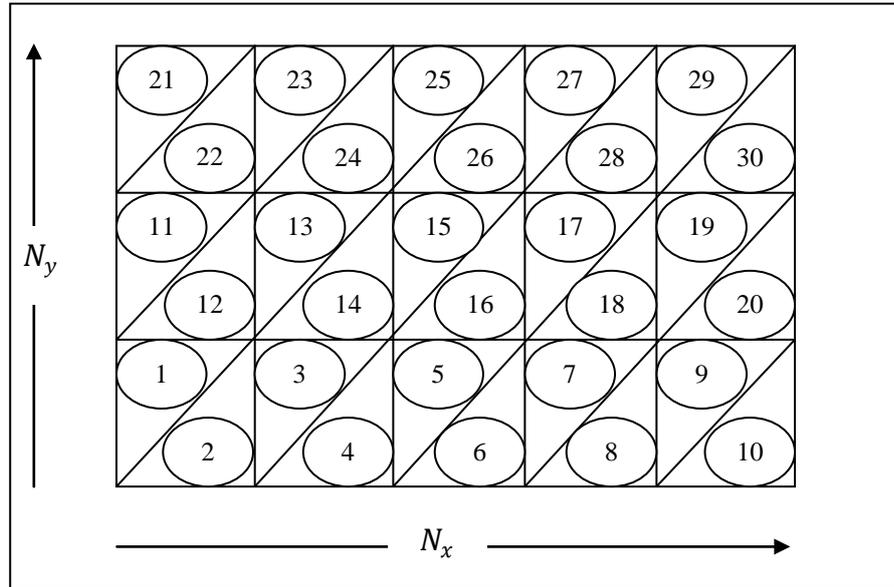


Figure (VI.8): Numérotation des éléments.

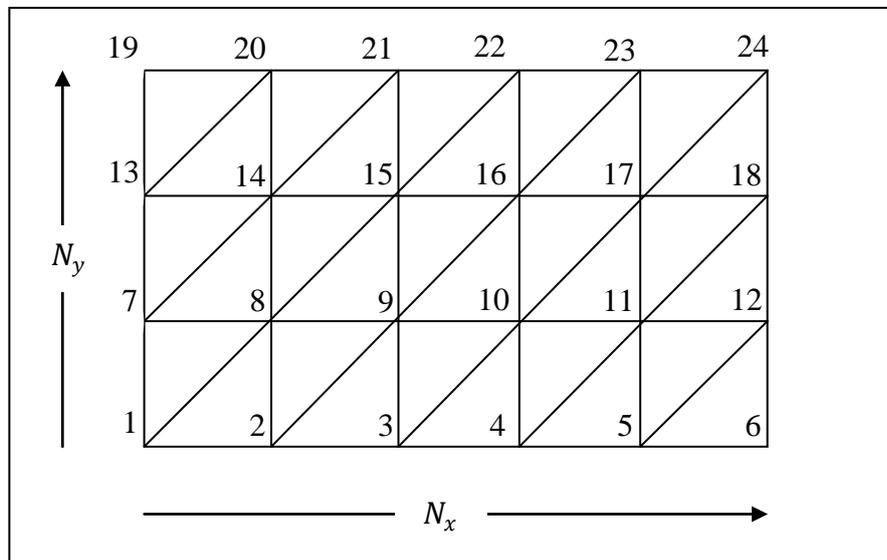


Figure (VI.9a): Discrétisation en éléments triangulaire 1^{ère} cas.

La case qui contient plus d'un cochet (x) veut dire qu'elle sera rempli autant de fois le cochet.

Exemple:

$$K(10,10) = K^5(2,2) + K^6(3,3) + K^7(3,3) + K^{16}(2,2) + K^{17}(1,1) + K^{18}(1,1)$$

La matrice de rigidité de ce domaine possède.

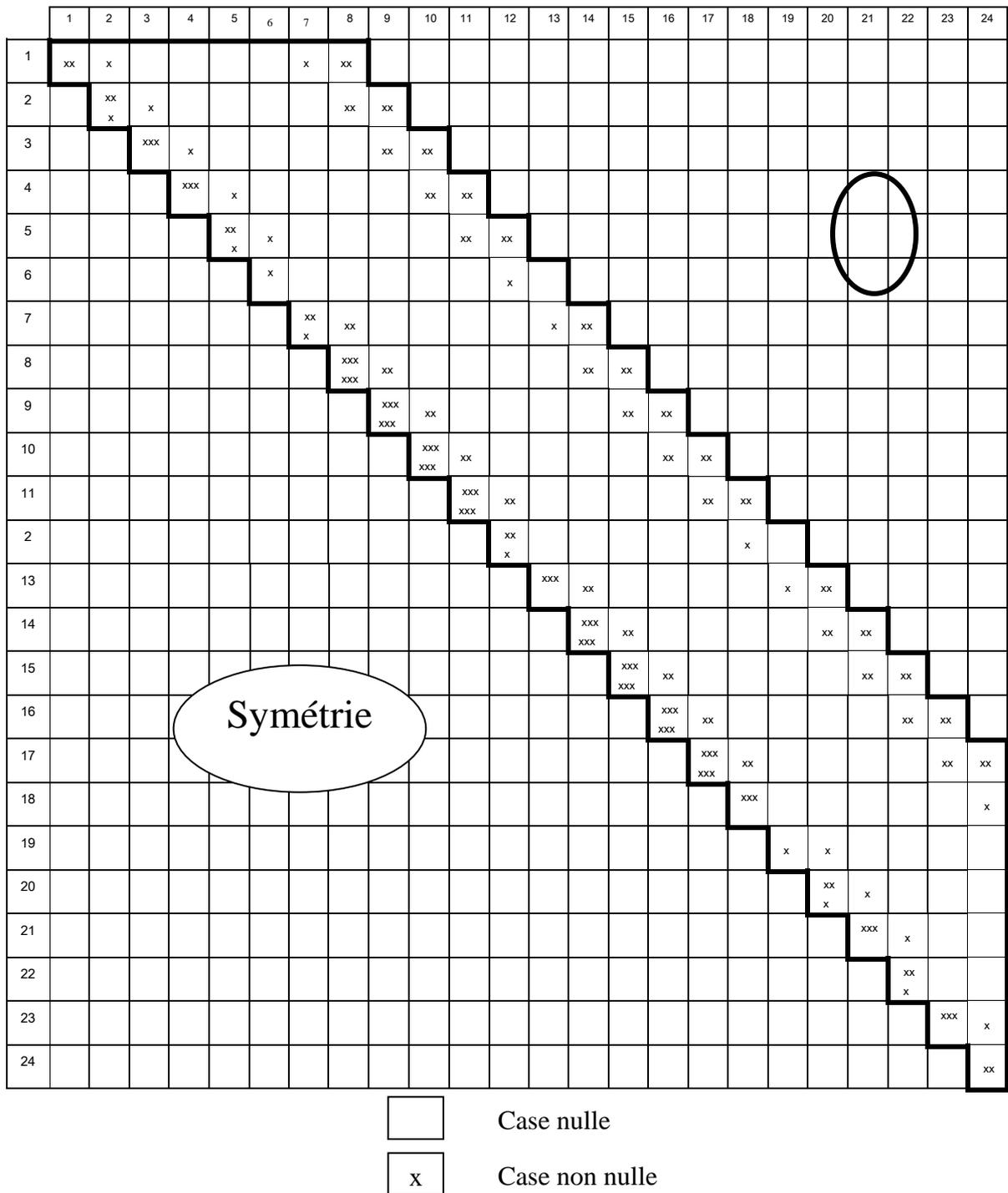


Figure (VI.10a): Illustration de la matrice de rigidité $[K]$ de rang 24×24 , 1^{ère} cas.

Remarque:

On peut considérer plusieurs formes de calcul de $K(10,10)$.

- $K(9,10)$ contient la somme de deux valeurs puisque les nœuds 9 et 10 sont communs entre les éléments 5 et 16.

- K (6,12) par exemple contient la somme d'une valeur unique puisque l'arrête qui contient les nœuds 6 et 12 est sur la frontière du domaine. Autrement dit, elle est liée uniquement à un seul élément de numéro 10.

- K (1,1) contient la somme de deux valeurs, puisque le nœud 1 est commun entre les éléments 1 et 2.

- Chaque nœud de maillage est commun au maximum entre six (06) éléments finis, qui est vrai pour les nœuds internes. Les nœuds de frontières sauf les coins, sont liés entre trois (03) éléments finis. Or les points des coins restant sont liés en un élément ou deux.

Maintenant, si on considère que : $NNT = N_x \times N_y$

Avec: N_x : égale au nombre de nœuds suivant le rangé 'x'.

N_y : égale au nombre de nœuds suivant le rangé 'y'.

NNT : égale au nombre de nœuds total. Alors, la valeur de la demi-bande est donnée, avant d'introduire les conditions aux limites, par :

$$B = N_x + 2$$

Pour cet exemple on a :

$$N_x = 6 \quad ; \quad N_y = 4$$

$$\Rightarrow NNT = N_x \times N_y = 24 \quad \text{Et} \quad B = 6 + 2 = 8$$

Remarque:

Les cases nulles qui se trouvent à l'intérieure de la bande seront discutées dans la section prochaine de stockage des matrices de forme multi-diagonale séparées.

2^{ere} Cas: On va numéroter maintenant les nœuds suivant l'axe vertical des y de bas en haut en se déplaçant suivant x de gauche vers la droite, voir figure (VI.9b) pour plus d'illustration.

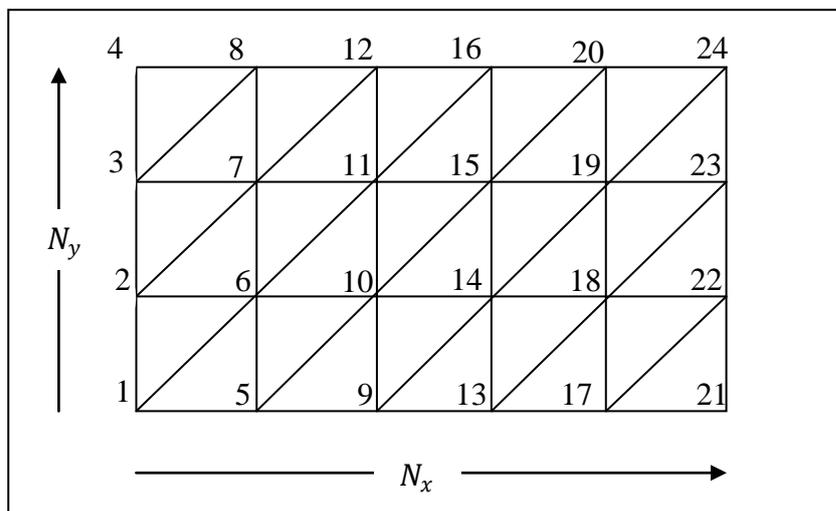


Figure (VI.9b): Discrétisation en élément fini triangulaire, 2^{eme} cas.

La matrice de rigidité pour ce type de numérotation est donnée par:

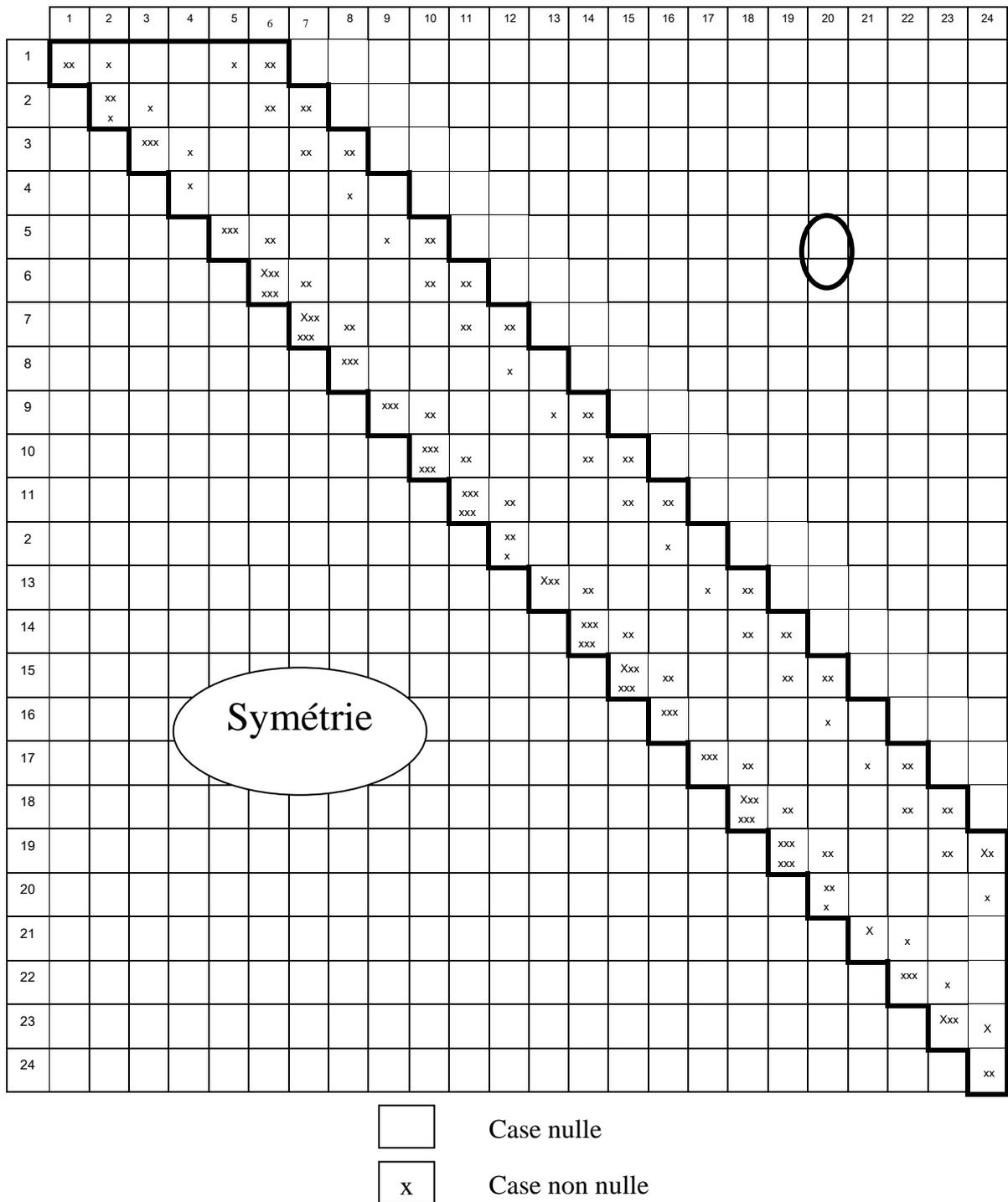


Figure (VI.10b): Illustration de la matrice de rigidité [K] de rang 24x24, 2^{eme} cas.

On peut bien remarquer que la largeur de la demi-bande 'B' est égale à : $B=6$. Ainsi que le nombre des zéros à l'extérieur de la bande est égal à $\frac{18 \times 19}{2} = 171$ cases.

De même, si on considère que :

$$NNT = N_x \times N_y$$

Alors on aura pour ce cas la valeur de la demi-bande 'B' est égale à :

$$B = N_y + 2$$

Pour cet exemple on a :

$$N_x = 6 ; N_y = 4$$

$$\Rightarrow NNT = 6 \times 4 = 24 \quad \text{Et} \quad B = 4 + 2 = 6.$$

3^{eme} Cas: On va numéroter maintenant les nœuds d'une façon aléatoire, voir figure (VI.9c) pour plus d'illustration :

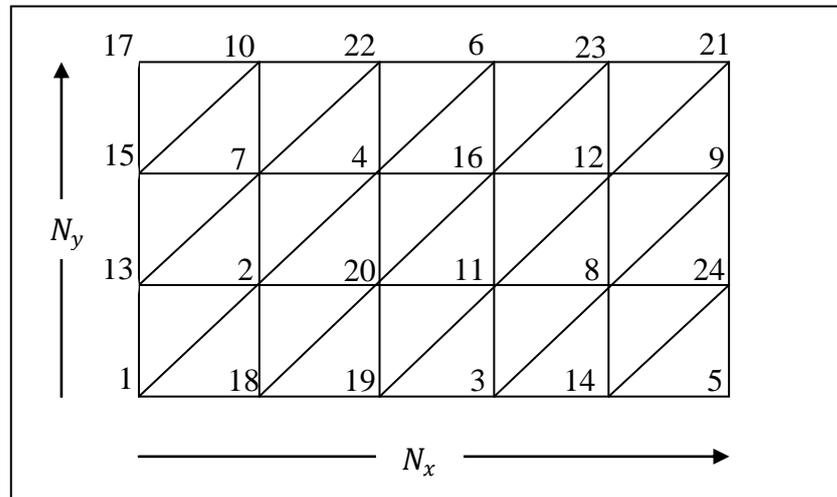


Figure (VI.9c): Discretisation en éléments triangulaire 3^{eme} cas.

On procède maintenant au calcul de la valeur de la bande de cette matrice. Comme la numérotation est aléatoire, on essaye de calculer la bande donnée pour chaque élément par la formule (VI.14a) ensuite la bande par la formule (VI.14b).

On a :

$$B_1 = \text{Max}(1,2,13) - \text{Min}(1,2,3) + 1 = 12$$

$$B_2 = \text{Max}(1,18,2) - \text{Min}(1,2,18) + 1 = 18$$

$$B_3 = \text{Max}(18,20,2) - \text{Min}(18,20,2) + 1 = 19$$

$$B_4 = \text{Max}(18,19,20) - \text{Min}(18,19,20) + 1 = 3$$

$$B_5 = \text{Max}(19,20,11) - \text{Min}(19,20,11) + 1 = 10$$

$$B_6 = \text{Max}(19,11,3) - \text{Min}(19,11,3) + 1 = 17$$

$$B_7 = \text{Max}(11,8,3) - \text{Min}(11,8,3) + 1 = 9$$

Pour les éléments de 7 Jusqu'à 24, on trouve respectivement, 9, 12, 11, 20, 9, 12, 6, 19, 17, 10, 6, 5, 5, 17, 8, 9, 16, 19, 19, 13, 18, 12, 12, 13.

Alors la valeur de la demi bande de la matrice de rigidité [k] est calculée par :

$$B = \text{Max} (B_1, B_2, B_3, \dots, B_{30}) = \text{Max} (12, 18, 19, 3, \dots, 13)$$

Donc: $B = 20$

Pour ce cas, le nombre de zéros gagnés égale à 10 cases.

En conclusion, on déduit que le deuxième cas correspond à une numérotation optimale pour laquelle les cases non nulles se condensent le plus possible vers la diagonale principale.

La matrice de rigidité pour ce type de numérotation est donnée par :

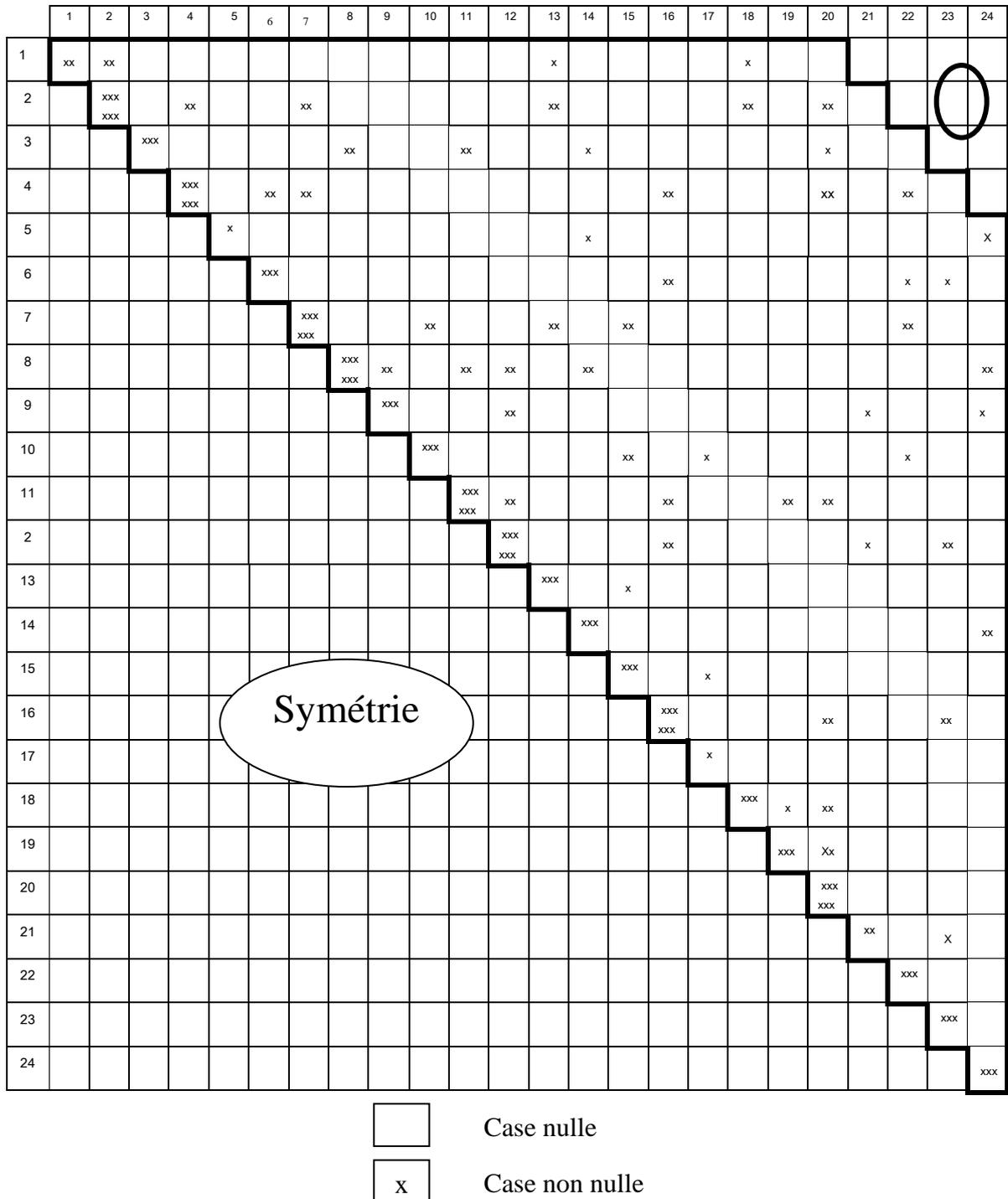


Figure (VI.10c): Illustration de la matrice de rigidité $[K]$ de rang 24×24 , 3^{eme} cas.

Remarque:

Dans le cas général d'un domaine quelconque, il n'est pas facile d'obtenir une numérotation optimale. On est amené à faire une estimation pour obtenir la plus petite valeur possible de la bande.

Finalement, si on veut généraliser maintenant à un domaine simplement connexe quelconque type 'H' à titre d'exemple, avec les conditions aux limites de type DIRICHLET, qui peut être considéré ou transformée en rectangle avec une discrétisation de N_x nœuds suivant l'axe horizontal des 'x' et N_y nœuds suivant l'axe vertical des 'y', donc on suit les étapes suivantes :

1. Le nombre des éléments finis est :

-Pour un élément triangulaire :

$$NEL = 2. (N_x - 1)(N_y - 1) \quad (VI. 17a)$$

-Pour un élément quadrilatère :

$$NEL = (N_x - 1)(N_y - 1) \quad (VI. 17b)$$

2. Le nombre total des nœuds NNT du domaine est donné par :

-Pour un triangle 3 nœuds T3N ou quadrilatère à 4 nœuds Q4N :

$$NNT = N_x \times N_y \quad (VI. 18a)$$

-Pour un triangle 4 nœuds T4N ou quadrilatère à 5 nds Q5N :

$$NNT = N_x \times N_y + NEL \quad (VI. 18b)$$

- Pour d'autres éléments avec différent nombre de nœuds, voir le programme suivant selon leur NTEF.

On résume pour ces formules par la partie suivante du programme qui fait ce calcul :

```
C ***** CALCUL DU NBR DES NOEUDS TOTALE ET D'ELEMENTS SELON NTEF*****
40 IF (NTEF.LT.4) THEN
    NEL=(NNX-1)*(NNY-1)*2
    ELSE
    NEL=(NNX-1)*(NNY-1)
    ENDIF
    IF (NTEF.EQ.1.OR.NTEF.EQ.4) NNT=NNX*NNY
    IF (NTEF.EQ.2.OR.NTEF.EQ.5) NNT=NNX*NNY+NEL
    IF (NTEF.EQ.3) NNT=(2*NNX-1)*(2*NNY-1)
    IF (NTEF.EQ.6) NNT=(2*NNX-1)*(2*NNY-1)-NEL
C*****
```

3. On commence la numérotation suivante la direction qui possède le nombre de nœud minimal:

Si $N_x < N_y$ on suivie la numérotation comme le cas 1.

Si $N_x > N_y$ on suivie la numérotation comme le cas 2.

La longueur de la demi-bande est donnée, avant d'introduire des conditions aux limites par :

$$B = \text{Min}(N_x, N_y) + 2 \quad (\text{VI.19})$$

4. Le nombre de nœuds qui se trouvent sur la frontière du domaine, où la solution du problème est connue c'est-à-dire à éliminer de la résolution, est donné par :

$$NDDLE = 2N_x + 2N_y - 4 \quad (\text{VI.20})$$

5. Les numéros des nœuds éliminés (nœuds de la frontière pour D.D.L =1) sont donnés par :

- Si $N_x \leq N_y$ on a :

$$\begin{cases} K = i & i = 1, 2, 3, \dots, N_x \\ K = (N_y - 1) \cdot N_x + i \\ K = (j - 1) \cdot N_x + 1 & j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \\ K = j \cdot N_x \end{cases}$$
- Si $N_x > N_y$ on a :

$$\begin{cases} K = j & j = 1, 2, 3, \dots, N_y \\ K = (N_x - 1)N_y + j \\ K = (i - 1)N_y + 1 & i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \\ K = i \cdot N_x \end{cases}$$

6. Le nombre des inconnus restants qui entre dans la solution du problème pour un domaine Type 'H' à titre d'exemple (c'est-à-dire le rang de la matrice de rigidité après l'introduction des C.A.L) est donné par :

$$\begin{aligned} NDDL R &= NN - NDDLE \\ NDDL R &= N_x \cdot N_y - 2N_x - 2N_y + 4 \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

7. La valeur finale de la demi-bande de La matrice de rigidité pour la résolution est donnée par:

$$B = \text{Min}(N_x, N_y) \quad (\text{VI.22})$$

Rappelant que la partie du calcul du programme après l'introduire des conditions aux limites est donnée dans le §(VI.4.1) précédent.

8. Le nombre des zéros qui se trouvent à l'extérieure de la bande (partie supérieure) est donné par :

$$NZERO = 1 + 2 + 3 + \dots + N - B = \frac{(N - B) \cdot (N - B + 1)}{2} \quad (\text{VI.23})$$

Par suite, dans les prochains paragraphes on traite le problème de stockage qui est plus amélioré que celui de précédent (bande). C'est le stockage des matrices à diagonales séparées et puis le stockage le plus économique en espace mémoire, c'est le stockage économique (ou complexe aléatoire).

VI.4. Méthode de stockage d'une matrice à diagonales séparées:

Le résultat considéré du § précédent de l'influence de la numérotation montre que la forme de la matrice de rigidité, obtenue par les différentes méthodes de numérotations, est bande et symétrique avec la largeur de la demi-bande ' B ' doit être la plus petite possible.

Maintenant, si on regarde encore approfondissement à la forme de la matrice à l'intérieure de la demi-bande, on voit qu'elle contient un nombre important des zéros. Autrement, la matrice peut être de la forme de quatre diagonales séparées ou bi-bloc séparés, chaque bloc contient deux diagonales, figure (VI.11).

Ce type de matrice n'est obtenu que si on suit une méthode de numérotation optimale (c.à.d. une matrice avec une valeur minimale de la demi-bande).

Si les conditions aux limites sont de type DIRICHLET, la forme générale de la matrice de rigidité est de la forme suivante, Figure (VI.11).

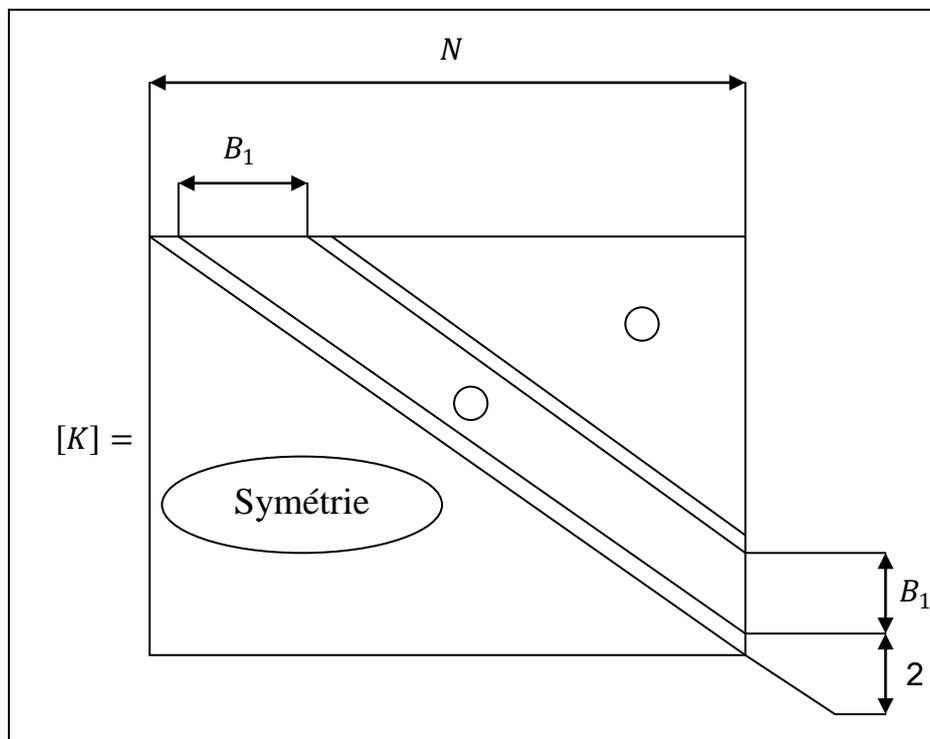


Figure (VI.11): Matrice symétrique à quatre diagonales.

Cette matrice contient quatre diagonales qui sont :

- La diagonale principale a N élément.
- La diagonale adjacente à celle principale a $(N - 1)$ éléments.
- Une diagonale après " B_1 diagonales vide" contient $N - B_1 - 2$ éléments.

- Une diagonale adjacente à cette dernière contient $N - B_1 - 3$ éléments.

Avec B_1 : Le nombre des diagonales vides, c.à.d. celles qui contiennent des zéros.

N : Le rang de la matrice.

Si on considère que cette matrice est bande, alors la relation existante entre B_1 et B est donnée par: $B = B_1 + 4$.

Avec B : Largeur de la demi-bande complète.

On constate bien que ce type de matrice contient un nombre très important de zéros à l'intérieur de la bande. Il est donné par:

$$NZERO = \frac{B(2N - B + 1)}{2} - N - (N - 1) - (N - B_1 - 2) - (N - B_1 - 3)$$

$$NZERO = \frac{(B_1 + 4)(2N - B_1 - 4 + 1)}{2} - N - (N - 1) - (N - B_1 - 2) - (N - B_1 - 3)$$

Donc :
$$NZERO = \frac{B_1(2N - B_1 + 1)}{2} \quad (VI. 24)$$

Par contre, le nombre des éléments des diagonales non nuls qui se trouvent à l'intérieur de la bande dans la demi-partie supérieur de la matrice est donné par :

$$NCNN = N + (N - 1) + (N - B_1 - 2) + (N - B_1 - 3)$$

Donc:
$$NCNN = 4N - 2B_1 - 6 \quad (VI. 25)$$

Tel que $NCNN$: Nombre des Cases Non Nuls.

Notre grand souhait est d'avoir $NCNN$ le plus petit possible, implique que B_1 doit être la plus grande valeur possible. Comme $B = B_1 + 4$ alors, il faut que la valeur de la demi-bande soit, pour ce type de stockage, la plus grande possible.

Remarque:

Pour obtenir une largeur de la demi-bande plus grande possible afin que le nombre des diagonales vides B_1 soit plus grand et pour obtenir un nombre de cases non nuls le plus petit possible, on suive la numérotation par la direction du coté qui contient le nombre de nœuds maximal.

Dans ce cas, la valeur de la demi-bande de la matrice de rigidité avant l'introduction des conditions aux limites est donnée par :

$$B = \text{Max}(N_x, N_y) + 2 \quad (VI. 26a)$$

Alors:
$$B_1 = B - 4 = \text{Max}(N_x, N_y) - 2 \quad (VI. 26b)$$

Et sa valeur après l'introduction ces conditions aux limites (c'est à dire pour la matrice de rang NDDL), est donnée par :

$$B = \text{Max} (N_x, N_y) + 2 \tag{VI.27a}$$

Alors: $B_1 = B - 4 = \text{Max} (N_x, N_y) - 2 \tag{VI.27b}$

Pour illustrer la procédure de stockage des matrices à diagonales séparées et ces paramètres, nous considérons l'exemple typique suivant :

Soit un rectangle avec : $N_x = 9$ Et $N_y = 7$

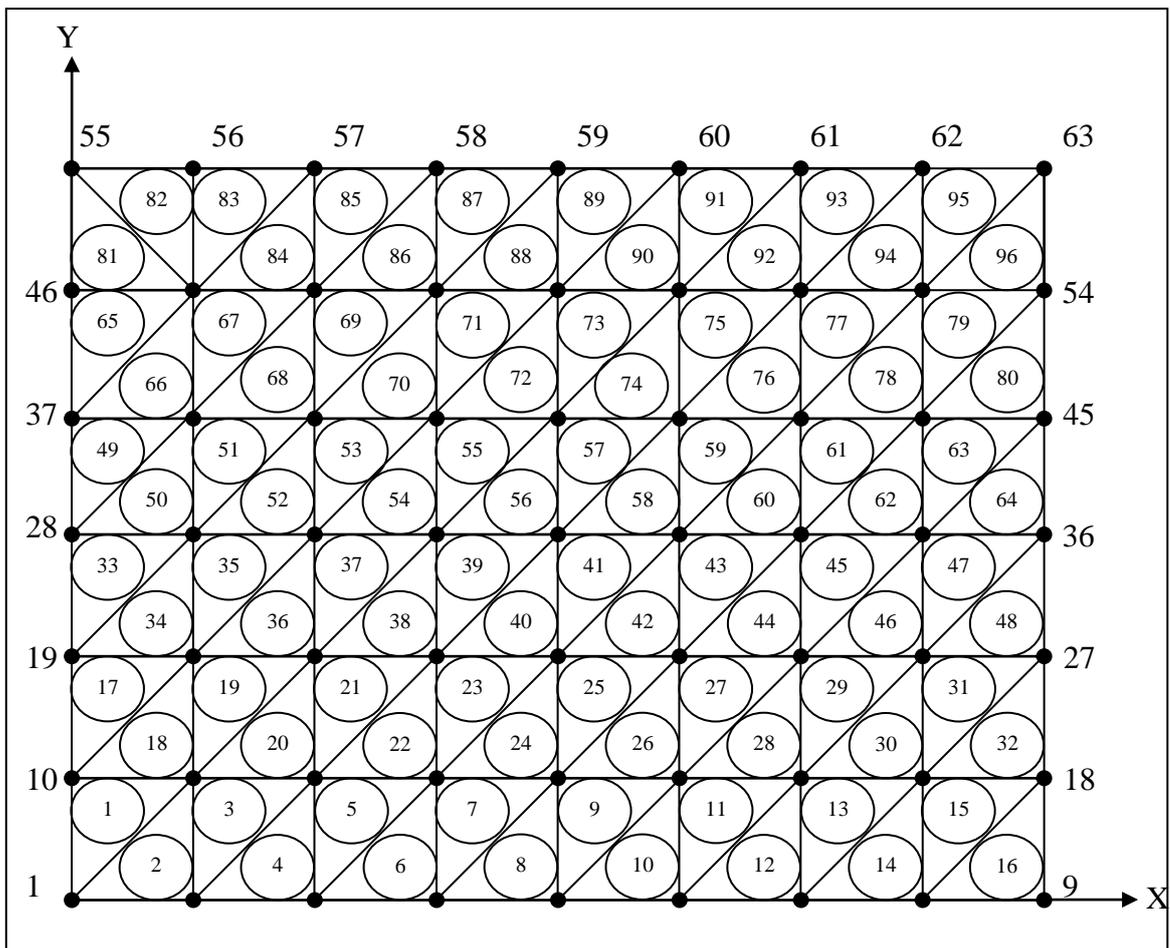


Figure (VI.12): Maillage typique subdivisé et numéroté.

Numérotation:

La façon de subdivision et de numérotation sera suivant l'axe horizontal des (X) puisque le nombre de nœuds N_x suivant l'axe x est supérieure au nombre de nœuds N_y suivant l'axe vertical des (Y), et cela de gauche à droite en montant avec l'axe y, voir figure (VI.12) pour plus illustration.

Pour éliminer les zéros (cases nulles) ainsi que la partie inférieure de la matrice, on s'intéresse à stocker uniquement les éléments des quatre diagonales de la façon suivante :

Chaque diagonale sera stockée dans un vecteur unicollone à part Pour cela, on déclare quatre (4) vecteurs {VD1} {VD2} {VD3} et {VD4} pour stocker respectivement les éléments de la diagonale principale, celle adjacente, l'autre après 'B₁AP + 2' diagonales et celle après 'B₁AP + 3' diagonales.

Alors :

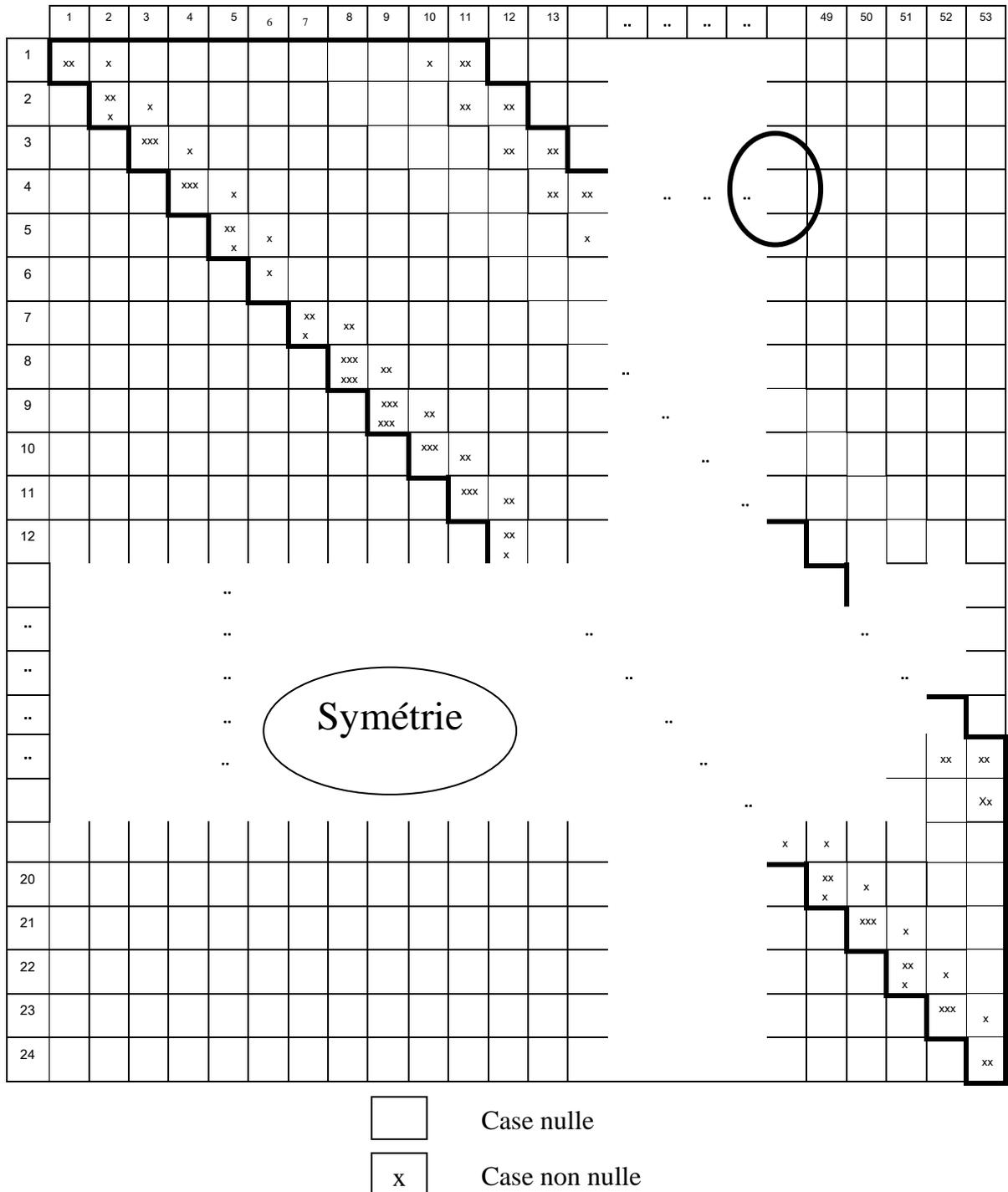


Figure (VI.13): La matrice de rigidité après l'introduction des conditions aux limites.

- Pour la diagonale principale et la diagonale après ($B_1AP + 2$ diagonales) :

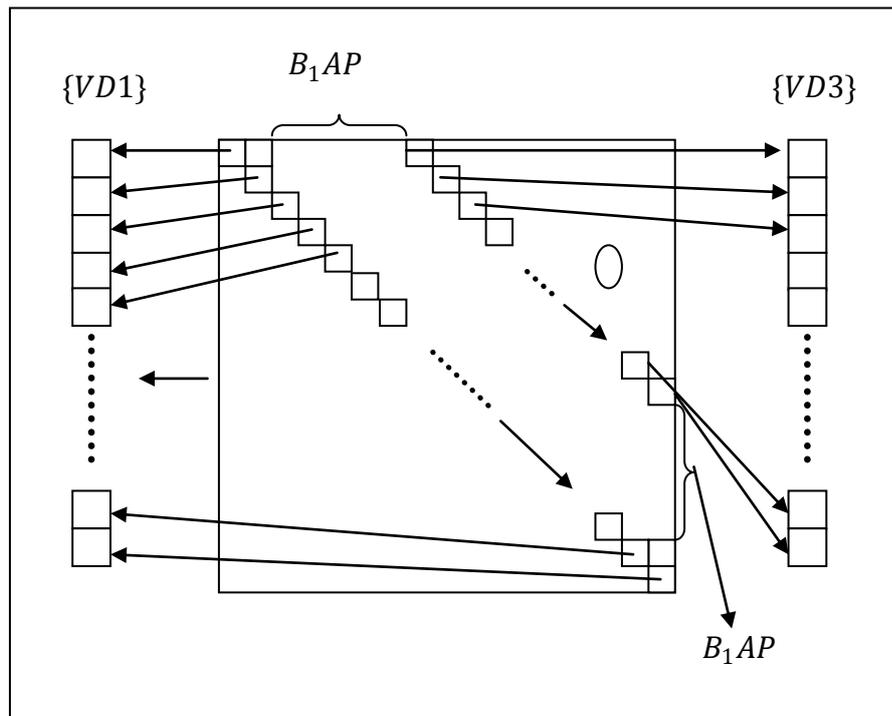


Figure (VI.14a): Stockage des diagonales de la matrice dans les vecteurs $\{VD1\}$, $\{VD3\}$.

- Pour la 2^{eme} diagonale et la dernière diagonale:

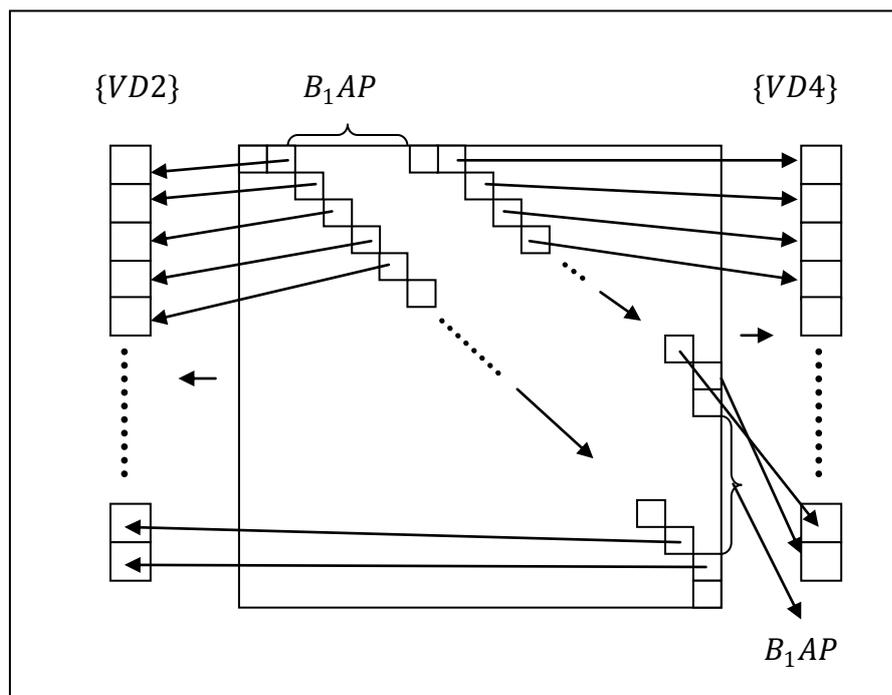


Figure (VI.14b): Stockage des diagonales de la matrice dans les vecteurs $\{VD2\}$, $\{VD4\}$.

La dimension des vecteurs $\{VD1\}$ et $\{VD2\}$ ne dépend pas de la valeur de B_1AP , tandis que la dimension des vecteurs $\{VD3\}$ et $\{VD4\}$ dépend essentiellement de la valeur de B_1AP . On peut bien remarquer que plus B_1AP est grande, plus la dimension de $\{VD3\}$ et $\{VD4\}$ diminue considérablement. On a encore :

- Dimension de $\{VD4\}$ = dimension de $\{VD3\}$ - 1.
- Dimension de $\{VD2\}$ = dimension de $\{VD1\}$ - 1.

Si le rang de la matrice $[k]$ est égal à NDDLRL, alors :

- Dimension de $\{VD1\}$ est égale à NDDLRL.
- Dimension de $\{VD2\}$ est égale à NDDLRL - 1 .
- Dimension de $\{VD3\}$ est égale à NDDLRL - B_1AP - 2.
- Dimension de $\{VD4\}$ est égale à NDDLRL - B_1AP - 3.

Alors, le transfert des cases entre la matrice $[K]$ et les vecteurs $\{VD1\}$, $\{VD2\}$, $\{VD3\}$ et $\{VD4\}$ se fait de la manière suivante :

- $VD1(i) = K(i, i)$ $i = 1, 2, 3, \dots, NDDLRL.$
- $VD2(i) = K(i, i+1)$ $i = 1, 2, 3, \dots, NDDLRL-1.$ (VI.28)
- $VD3(i) = K(i, i+B_1AP+2)$ $i = 1, 2, 3, \dots, NDDLRL - B_1AP - 2.$
- $VD4(i) = K(i, i+B_1AP+3)$ $i = 1, 2, 3, \dots, NDDLRL - B_1AP - 3$

Pour les éléments de la partie inférieure de la matrice $[K]$ (Puisque la matrice est symétrique) sont donnés par :

- $K(i, i-1) = VD2(i-1)$ $i=2, 3, \dots, NDDLRL.$
- $K(i, i - B_1AP-2) = VD3(i-B_1AP-2)$ $i=B_1AP+3, B_1AP+4, \dots, NDDLRL$ (VI.29)
- $K(i, i - B_1AP-3) = VD4(i-B_1AP-3)$ $i=B_1AP+4, B_1AP+5, \dots, NDDLRL$

Remarque:

Vu que, on a pu d'aboutir à une méthode plus économique en mémoire que celle là (stockage à diagonales séparées), alors on n'a pas donné ses algorithmes nécessaires où on a satisfait par ces illustrations précédentes. Dans la suite, on entame cette méthode de stockage économique.

VI.5. Stockage économique d'une matrice symétrique creuse :

Si on regarde encore bien aux valeurs de la bande optimale (2^{eme} cas du § (VI.3)) et puis ses diagonales non nulles, on constate qu'il y a quelques cases encore nulles. Où elles

deviennent importantes pour des échelles de discrétisation élevées, d'où l'intérêt de chercher encore un procédé le plus économique.

L'idée de cette technique de stockage, inspiré de la recherche bibliographique [20], est développée dans la suite ainsi que son organigramme détaillé est exposé.

La difficulté principale qui réside dans cette technique, c'est comment arriver à stocker uniquement les cases des matrices élémentaires qui sont non nulles dans un vecteur tout en connaissant leurs positions réelles dans la matrice de rigidité globale. Donc, c'est de déterminer la procédure convenable et correcte de stockage, et de faire la correspondance entre la matrice globale et ce (ces) vecteur(s) économique(s).

Vu la symétrie de la matrice $[K]$ (démontrer au § (IV.5.1)), on s'intéresse au stockage que sa partie triangulaire supérieure dans deux vecteurs réels $\{AD\}$ et $\{AE\}$, tel que :

- $\{AD\}$ vecteur contenant les valeurs de la Diagonale principale de la matrice globale $[K]$.
- $\{AE\}$ vecteur contenant toutes les valeurs Extérieures à cette diagonale de la demi-bande supérieure.

Alors, on procède au chargement de la matrice de rigidité globale $[K]$ à partir des matrices élémentaires comme suit :

- On met les coefficients diagonaux de $[K]$ dans le vecteur $AD(NNT)$ de dimension égale au Nombre de Nœuds Total du maillage 'NNT'.
- Pour les coefficients non diagonaux et non nuls de la partie triangulaire supérieure de la matrice $[K]$ sont stockés dans le vecteur $AE (NcasMax)$ qui a une dimension de l'ordre en général trois fois 'NNT'.

On crée deux autres vecteurs entiers $\{IL\}$ et $\{IC\}$, où on stocke dans le premier vecteur $IL(NNT)$ le nombre de cases de $\{AE\}$ dans chaque ligne de la matrice globale $[K]$. Cependant, on stocke dans le deuxième vecteur $IC (NcasMax)$ l'indice de colonne des éléments de $\{AE\}$.

V.5.1. Procédure de chargement de $\{AD\}$ et le vecteur force global $\{VF\}$:

On note par $AKE(i, j)$ la case d'une matrice de rigidité élémentaire d'un élément fini 'k' après son chargement selon son type montrer dans § (IV7), tel que cette case se trouve sur la j^{eme} ligne et dans le j^{eme} colonne.

Alors, pour balayer tous les éléments, on fait varier k de 1 à NEL (le Nombre d'élément dans le maillage). Pour k fixé, on à 'i' varie de 1 à $NNPE$, donc on charge en même temps le vecteur diagonal $\{AD\}$ et le vecteur force $\{AF\}$ global:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 K = 1, NEL \\
 \dots \\
 I = 1, NNPE \\
 \dots \\
 m = IGNR (NNE (k, 1)) \\
 AD (m) = AD (m) + AKE (i, i) \\
 AF (m) = AF (m) + VFE (i)
 \end{array} \right\} \quad (VI.30)
 \end{array}$$

Tel que :

m: Indice du nœuds de la numérotation globale du maillage après l'introduction des conditions aux limites, déterminer par le vecteur IGNR (...) et la matrice connexion NNE (k, i) décrit au chapitre V.

i: Indice de la numérotation locale de l'élément fini 'k'.

IGNR(.) : vecteur inverse (Inverse de la numérotation Globale des Nœuds Restant après l'introduction des C.A.L) de vecteur NGNR (au sens de fonction inverse) où ce dernier conserve la numérotation première faite avant l'application des C.A.L sur le système d'équation, donc sur la matrice de rigidité globale.

Remarque:

Le rang de la matrice de rigidité du système avant l'introduction des conditions aux limites est égale à NN qui est égale à $N_x N_y$, et après l'application des conditions aux limites, le rang de la matrice sera réduit à la valeur $NDDL$. A titre d'exemple pour un maillage type 'H' simplement connexe :

$$NDDL = (N_x - 2) (N_y - 2).$$

Alors, il est indispensable de créer un vecteur qui indique les numéros de nœuds restant après avoir appliqué les conditions aux limites, donc des lignes (et des colonnes), de la matrice globale seront éliminées, permettant l'assemblage des matrices élémentaires, pour cela on note le vecteur NGNR (Numérotation Globale des Nœuds Restant) et évidemment pour le besoin de calcul on a créé le vecteur IGNR(i) détermine les indices du vecteur NGNR précédent donc son inverse.

Pour connaître la procédure de chargement de ces vecteurs, voir le paragraphe § (VI.5.2).

V.5.2. Procédure et organigramme de chargement de {AE}, {IL}, et {IC} :

Rappelant que la difficulté de programmation qui se présente est de repérer et de charger l'élément 'e' du vecteur {AE} correctement dans lequel l'élément a_{ij}^k de la matrice élémentaire [AKE] va se placer.

Alors, dans cette partie on va essayer de décrire les démarches de repérage et de stockage en détail et puis, on ajoute un organigramme qui récapitule ces étapes. Où on va le programmer pour nos calculs.

En premier lieu, on entame le chargement du vecteur {AE}, et ces compléments : les vecteurs {IL} et {IC} en parallèle comme suit :

Pour un élément k fixé, on fait varier i de 1 à NNPE-1 et j de 'i+1' à NNPE, vu la symétrie des matrices élémentaires. Et en imposant que $n > m$, tel que m et n sont les correspondances de la numérotation globale du maillage des nœuds locaux i et j respectivement, afin de ne stocker que la partie triangulaire supérieure de la matrice symétrique [K], figure (V.15).

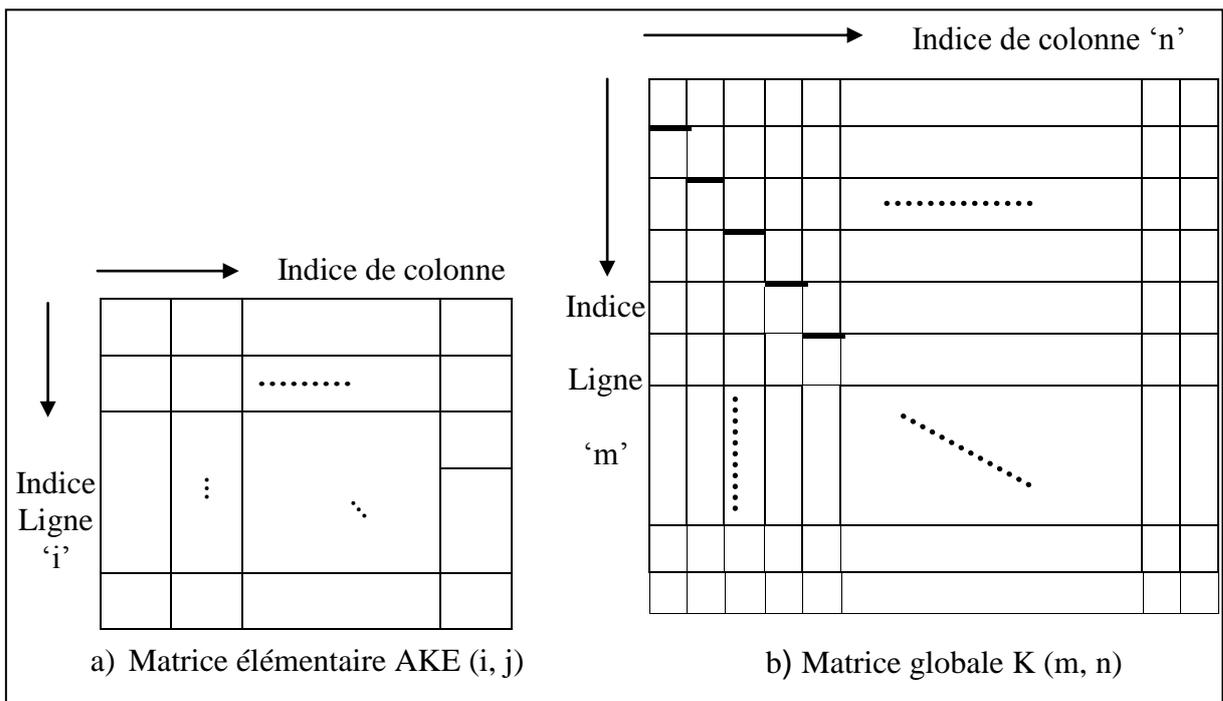


Figure (VI.15): Illustration des indices des matrices élémentaires et globale.

On crée les variables compléments suivants :

- L : indice servant à repérer une case 'e' de la ligne m de [K].
- Ncase : nombre de cases 'e' des lignes de la matrice [K] situant avant la ligne 'm'.
- NcasMax : nombre total de case 'e' stocker dans {AE}, inconnu au départ.
- ii : compteur utilisé par les boucles.

Alors, nous utilisons les conséquences logiques exposées si dessous pour construire les tableaux et les algorithmes du chargement de {AE}:

Pour i et j fixés Dans un élément k : deux cas majeurs (I) et (II) se présentent, organigramme (VI.1). Alors :

D) $m > 1$: Qu'il y ait ou non des cases 'e' dans les lignes avant 'm' on a:

$$Ncase = \sum_{i=1}^{m-1} IL(ii) \tag{VI.31}$$

On initialise L : $L = 1$ (VI.32)

On teste: Si Ncase égale NcasMax, deux cas (I.1) et (I.2) se présentent.

I.1) Si Oui, donc :

$$Ncase = NcasMax \tag{VI.33}$$

Dans ce cas, on passe à créer une case 'e' correspond au premier élément de la ligne 'm'.

Alors :

- NcasMax augmenté d'une unité :

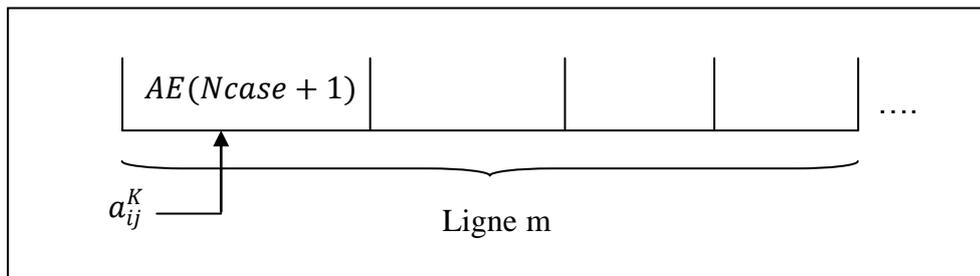
$$NcasMax = NcasMax + 1 \tag{VI.34}$$

- IL(m) augmente d'une unité :

$$IL(m) = IL(m) + 1 \tag{VI.35}$$

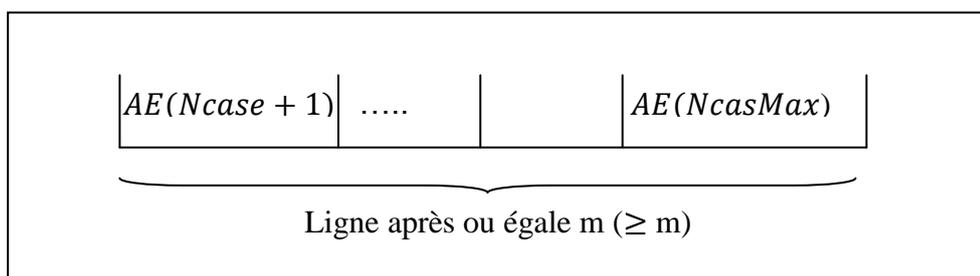
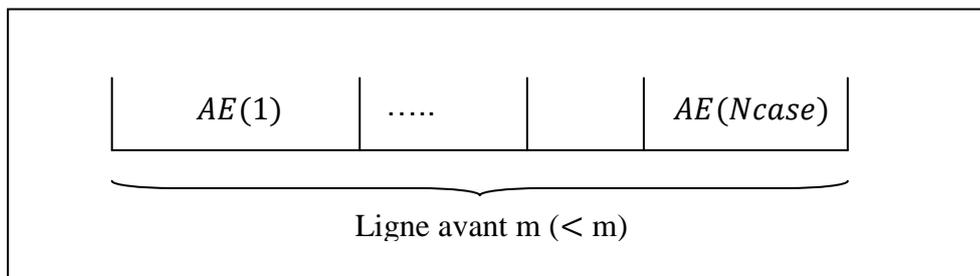
- a_{ij}^k est placé dans AE (Ncase+1) :

$$\begin{cases} AE(Ncase + L) = AE(Ncase + L) + AKE(i, j) \\ IC(Ncase + 1) = n \end{cases} \tag{VI.36}$$



I.2) Non donc:

$$Ncase < NcasMax \tag{VI.37}$$



On teste : Si la ligne 'm' ne contient pas de case 'e' ; deux cas se présente (I.2.a) et (I.2.b).

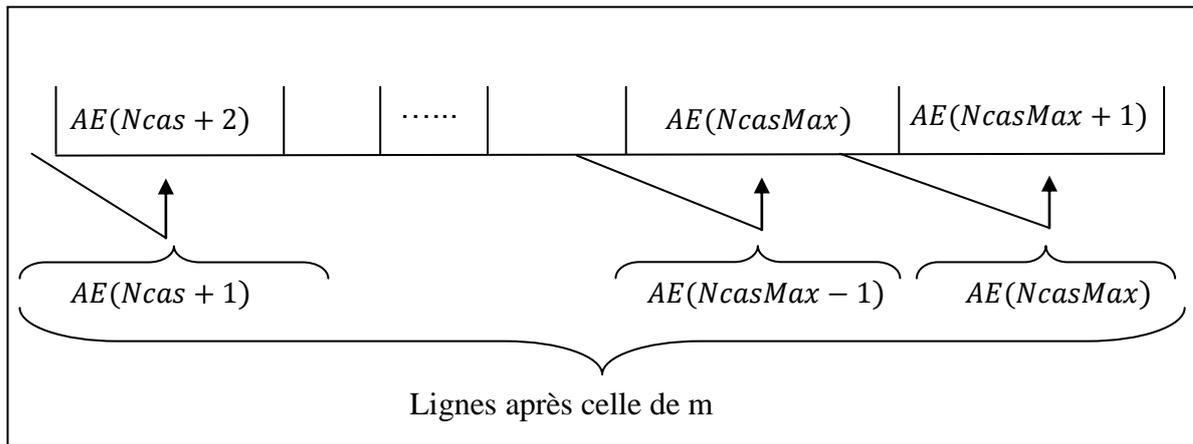
I.2.a) Oui, donc :

$$IL(m) = 0 \tag{VI.38}$$

Sous l'hypothèses (I.2) et (I.2.a), on a AE (Ncase+1) ... AE (NcasMax) occupée par des cases 'e' des lignes après m, (< m).

Avant de placer a_{ij}^k , il est nécessaire de décaler ces cases 'e', tout en conservant les indices de colonne. Donc on décale comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} ii = NcasMax + 1, Ncase + L, -1 \quad (ii \text{ est décrémenté d'un, c.à.d } M' - 1') \\ AE(ii) = AE(ii - 1) \\ IC(ii) = IC(ii - 1) \\ AE(Ncase + L) = 0 \end{array} \right. \tag{VI.39}$$



Après avoir décaler les cases, on place a_{ij}^k dans AE (Ncase + 1). Donc on est ramené au cas (I.1) à partir de l'équation (VI.34).

I.2.b) Non, donc :

$$IL(m) > 1 \tag{VI.40}$$

On cherche s'il existe une case 'e' de la ligne m dans lequel a_{ij}^k va se placer; on commence par 'n' et IC (Ncase+L). On teste: si n égale IC (Ncase+L), deux cas (I.2.b.1) et (I.2.b.2) se présentent.

I.2.b.1) Oui, donc:

$$n = IC(Ncase + L)$$

a_{ij}^k est placé dans {AE} par l'équation (VI.36) de cas (I.1).

1.2.b.2) Non, donc:

$$n \neq IC(Ncase + L)$$

On teste : Si $n < IC(Ncase+L)$, deux cas (1.2.b.2.1) et (1.2.b.2.2) se présentent :

I.2.b.2.1) Oui, donc:

$$n < lC(Ncase + L)$$

Il n'existe pas de case 'e' de la ligne m dans lequel a_{ij}^k peut se placer ; On est ramené donc à l'étape de cas (1.2.a) à partir de l'équation (VI.39).

I.2.b.2.2) Non, donc :

$$n > lC(Ncase + L)$$

On cherche s'il y a une case 'e' de la ligne m où a_{ij}^k peut être placé, on augmente L d'une unité:

$$L = L + 1$$

On teste: Si 'L' plus grand IL(m), deux cas se présentent:

I.2.b.2.2.a) Oui, donc :

$$L > ll(m)$$

Il n'existe pas de case pour la ligne m dans lequel a_{ij}^k va se placer, alors on est ramené à l'étape de cas (1.2.a) à partir de l'équation (VI.39).

I.2.b.2.2.b) Non,

$$L < ll(m)$$

On est ramené au test de cas (1.2.b).

II) Si $m = 1$, il n'y a aucune ligne avant 1, donc :

$$Ncase = 0 \quad (VI.41)$$

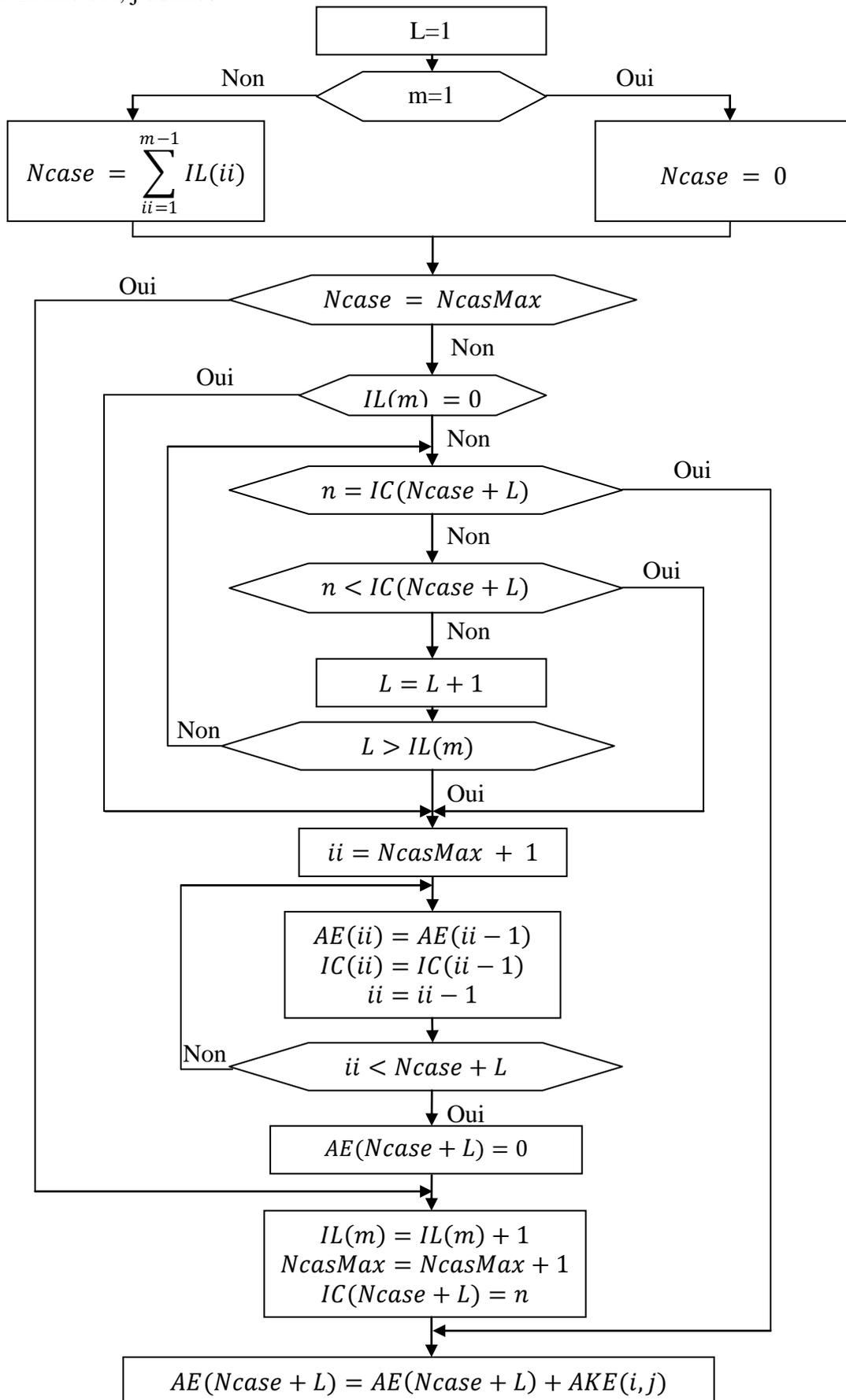
On initialise L : $L = 1$.

Puis, on est ramené au test de dernier paragraphe de l'étape de cas (I) après l'équation (VI.32).

En fin, on expose l'organigramme de chargement du vecteur {AE} et ses compléments dans la suite :

Organigramme (VI.1): Chargement de AE et ses compléments.

Pour K fixé et i, j donnés



Incrémentation de i, j et k.....

Donc le nombre final de cases non nulles est ‘NcasMax’ calculé par le programme après l’assemblage de tous les éléments.

Exemple:

Afin de bien éclaircir ces démarches et mise en lumière cette procédure, on traite un exemple de remplissage de tous ces vecteurs. Tel que, on reprend les données de l'exemple du § (V.3.2), (avant l'introduction les conditions aux limites), tel qu'on se limite pour les cas de numérotations ‘2’ et ‘3’ du § (V.3.2). En regardant les figures (VI.8), (VI.9a) et (VI.9b) et les figures (VI.10b), (VI.10c) on trouve :

- Les coefficients diagonaux ‘AD(m)’ de quelques lignes ‘m’ de la matrice de rigidité sont données par les tableaux suivants:

Numérotation de 2^{eme} cas:

On note le coefficient élémentaire a_{ij}^k de l'élément fini ‘k’ situant à la ligne T et à la colonne ‘j’ pour éclaircir ces indices, par Ak (i, j). Tel que k est un chiffre varie de ‘1’ jusqu’à ‘NEL’.

Tableau (VI.5): Pour la numérotation de 2^{eme} cas.

Ligne m	1	2	3	4	5
AD(m)	A1(1,1) + A2(1,1)	A1(3,3) + A11(1,1) + A12(1,1)	A11(3,3) + A21(1,1) + A22(1,1)	A21(3,3)	A2(2,2) + A3 (1,1) + A4(1,1)
Suite m	6		7		8 ...
AD(m)	A1(2,2) + A2(3,3) + A3(3,3) + A12(2,2) + A13(1,1) + A14(1,1)		A11(2,2) + A12(3,3) + A13(3,3) + A22(2,2) + A23(1,1) + A24(1,1)		A21(2,2) + A22(3,3) + A23(3,3) ...

Numérotation de 3^{eme} cas:

Tableau (VI.6): Pour la numérotation de 3^{eme} cas.

Ligne m	1	2	3	4	5
AD(m)	A1(1,1) + A2(1,1)	A1(3,3) + A11(1,1) + A12(1,1)	A11(3,3) + A21(1,1) + A22(1,1)	A21(3,3)	A2(2,2) + A3 (1,1) + A4(1,1)
Suite m	6		7		8 ...
AD(m)	A1(2,2) + A2(3,3) + A3(3,3) + A12(2,2) + A13(1,1) + A14(1,1)		A11(2,2)+A12(3,3)+ A13(3,3) +A22(2,2)+A23(1,1)+ A24(1,1)		A21(2,2) + A22(3,3) + A23(3,3) ...

- Les coefficients non diagonaux de ‘AE(L)’ et ses compléments sont données par les tableaux suivants, (Pour quelques lignes de la matrice de rigidité globale [K]) :

Numérotation de 2^{eme} cas:

Tableau (VI.7): Pour la numérotation de 2^{eme} cas.

L	AE(L)	C(L)	
1	A 1(1,3)	2	IL (1)=3
2	A2(1,2)	5	
3	A1(1,2) +A2(1,3)	6	
4	A11 (1,3)	3	IL(2)=3
5	A1 (3,2) + A12(1,2)	6	
6	A11(1,2) + A12(1,3)	7	
7	A21 (1,3)	4	IL(3) = 3
8	A11(3,2) + A22(1,2)	7	
9	A21(1,2) +A22(3,2)	8	
10	A21(3,2)	8	IL(4)= 1
11	A2(2,3) + A3(1,3)	6	
12	A4(1,2)	9	IL(5) = 3
13	A3(1,2) + A4(1,3)	10	
14	A 12(2,3) + A 13(1,3)	7	IL(6) = 3
15	A3(3,2) +A14(1,2)	10	
16	A13(1,2) + A14(1,3)	11	
17	A22(2,3) + A23(1,3)	8	IL(7) = 3
18	A13(3,2) + A24(1,2)	11	
...	

Numérotation de 2^{eme} cas:

Tableau (VI.8): Pour la numérotation de 3^{eme} cas.

L	AE(L)	C(L)	
1	A1(1,2)+ A2(1,3)	2	IL (1) = 3
2	A1(1,3)	13	
3	A2(1,2)	18	
4	A13(1,2) + A14(1,3)	4	IL(2) = 5
5	A12(2,3) + A13(1,3)	7	
6	A1(2,3) + A12(2,1)	13	
7	A2(3,2) + A3(3,1)	18	
8	A3(3,2) + A14(1,2)	20	IL(3) = 4
9	A7(1,2) + A8(1,3)	8	
10	A6(2,3) + A7(1,3)	11	
11	A8(1,2)	14	
12	A6(2,1)	19	IL(4) = 5
13	A25(1,2) + A26(1,3)	6	
14	A13(2,3) + A24(2,1)	7	
15	A15(3,2) + A26(1,2)	16	
16	A14(3,2) + A15(3,1)	20	
17	A24(2,3) + A25(1,3)	22	

18	A10(2,1)	14	IL(5) = 2
19	A10(2,3)	24	
20	A26(3,2) + A27(3,1)	16	IL(6) = 3
21	A25(2,3)	22	
22	A27(3,2)	23	
23	A22(2,3) + A23(1,3)	10	IL(7) = 4
24	A11(2,1) + A12(3,1)	13	
...	

Remarque1:

On remarque d'après le processus complexe de remplissage du vecteur {AE} que ses cases sont chargées d'une manière alternée aléatoire. C'est à dire, dans quelque fois en avançant par création des nouvelles cases vides et en incrémentant sa taille. Cependant dans quelque fois en revenant à l'arrière le long de ces cases et à position calculée, on décale certaines par création d'une nouvelle case vide, puis elle est remplie par une valeur correspondante d'une case de la matrice d'élément.

Ainsi que, on aperçoit que le transfère de ces valeurs élémentaires vers les cases de {AE}, suit une technique la plus économique possible, mais n'a pas une récurrence simple comme le cas de stockage bande ou le cas de stockage à diagonales séparées. D'où le nom qu'on propose pour cette technique qui est « le stockage économique complexe aléatoire ».

Remarque 2:

On constate après une inspection profonde des matrices de rigidité des différents exemples traités précédemment que : Avec cette technique de stockage économique (complexe) le nombre de cases non nulles est indépendant de la façon de numérotation des nœuds de maillage suivie.

De la, on conclue qu'en plus de l'avantage de gain de mémoire maximum atteint, le problème de la numérotation optimale traitée auparavant est dépassé et il ne présente plus un aléa.

D'où d'après ces remarques et les explications du chapitre (V), on recommande pour les cas de géométries simplement connexes de maillage type non 'H' ou celle des géométries multi connexe, d'utiliser le procédé de stockage économique (complexe) surtout pour des échelles de discrétisation moyennes ou élevées.

Enfin, après avoir prêté le problème de stockage et l'influence de la numérotation, on va procéder maintenant à la description qualitative des méthodes de résolution d'un système d'équations adaptées pour des matrices bandes stockées sous forme d'un vecteur.

VI.6. Méthodes de résolution d'un système d'équations linéaire (adaptées à nos problèmes):

Après avoir remplie et stocké la matrice de rigidité $[K]$ globale et le vecteur $\{F\}$, et afin de déterminer le vecteur solution $\{u\}$, on est amené à résoudre le système d'équations suivant:

$$[K] \{F\} = \{u\} \quad (\text{VI. 42})$$

On a adapté deux méthodes principales pour la résolution numérique du système (VI.42). L'une est une méthode directe caractérisée par un nombre d'opérations fini et limité donc résolvant des systèmes à taille modérée. L'autre est une méthode itérative caractérisée par un nombre d'opérations inconnu (indéterminé) pour avoir la solution à une précision prés, mais l'avantage qu'elle est apte à résoudre des systèmes assez élevés en taille.

VI.6.1. Méthodes directe:

VI.6.1.a. Méthode de décomposition de KHALESTKI:

Supposons dans la première étape que la matrice $[K]$ est quelconque mais carrée et pleine. Nous présenterons l'algorithme de résolution de cette matrice [4], ensuite nous déduirons l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et Bande. Pour cela, on à choisi la méthode de KHALESTKI comme méthode de résolution.

I) Matrice carrée pleine et quelconque:

Mettons la matrice $[K]$ sous la forme d'un produit de deux matrices, l'une triangulaire inférieure $[L] = [L_{ij}]$ et l'autre triangulaire supérieure $[H] = [H_{ij}]$ à diagonale unité. C'est à dire que: $[K] = [L] [H]$

Où :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ L_{n1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & H_{13} & \cdot & \cdot & H_{1n} \\ & 1 & H_{23} & \cdot & \cdot & H_{2n} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & H_{3n} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments L_{ij} et H_{ij} se calculant par les formules suivants :

$$\begin{aligned}
 L_{11} = K_{11} \quad , \quad H_{ij} = \frac{K_{ij}}{L_{11}} \quad j = 2, 3, \dots, n \\
 \left. \begin{aligned}
 L_{ij} = K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} H_{kj} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \\
 H_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left(K_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} H_{kj} \right) \quad j = i+1, i+2, i+3, \dots, n
 \end{aligned} \right\} i = 2, 3, \dots, n \quad (VI.43)
 \end{aligned}$$

Donc, on aura deux systèmes d'équations à matrice triangulaire:

$$[K]\{u\} = \{F\} \Rightarrow [L].[H].\{u\} = \{F\}$$

On pose: $[H].\{u\} = \{y\}$ (VI.44)

Alors : $[L].\{y\} = \{F\}$ (VI.45)

La résolution de système (VI.44) se fait par les procédures suivantes :

$$\begin{cases}
 Y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\
 Y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} Y_{kj} \right) \quad i = 2, 3, \dots, n
 \end{cases} \quad (VI.46)$$

$$\begin{cases}
 u_n = Y_n \\
 u_i = Y_i - \sum_{k=i+1}^n H_{ik} u_k \quad i = 2, 3, \dots, n
 \end{cases} \quad (VI.47)$$

II) Matrice carrée symétrique et bande:

Comme la matrice $[K]$ de notre problème est symétrique et bande, nous extrairons à partir des formules (VI.46) et (VI.47) l'algorithme pour des matrices symétriques et bandes et cela en éliminant les opérations sur les zéros. La matrice $[K]$ est de la forme générale suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix}
 K_{11} & & & & & & & & & \\
 K_{21} & K_{22} & & & & & & & & \\
 K_{31} & K_{32} & K_{33} & & & & & & & \\
 \cdot & \cdot & & & & & & & & \\
 K_{B1} & K_{B1} & \cdot & & & & & & & \\
 0 & 0 & K_{B+1,2} & \cdot & K_{ii} & & & & & \\
 \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & & & & & \\
 \cdot & \cdot & & & K_{B+i-1i} & & & & & \\
 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & K_{nn} &
 \end{bmatrix} \quad (VI.48)$$

Avec : n : L'ordre de la matrice.

B : La largeur de la demi-bande.

K ₁₁											
K ₂₁	K ₂₂										
K ₃₁	K ₃₂	K ₃₃									
K ₄₁	K ₄₂	K ₄₃	K ₄₄								
K ₅₁	K ₅₂	K ₅₃	K ₅₄	K ₅₅							
	K ₆₂	K ₆₃	K ₆₄	K ₆₅	K ₆₆						
		K ₇₃	K ₇₄	K ₇₅	K ₇₆	K ₇₇					
			K ₈₄	K ₈₅	K ₈₆	K ₈₇	K ₈₈				
				K ₉₅	K ₉₆	K ₉₇	K ₉₈	K ₉₉			
	O				K _{10,6}	K _{10,7}	K _{10,8}	K _{10,9}	K _{10,10}		
						K _{11,7}	K _{11,8}	K _{11,9}	K _{11,10}	K _{11,11}	
							K _{12,8}	K _{12,9}	K _{12,10}	K _{12,11}	K _{12,12}

Symétrie

Figure (VI.16): Exemple d’une matrice bande de l’équation (VI.48).

VI.6.1.b. Méthodes de décomposition de CHOLEVSKI [23], [19]:

Dans le cas d’une matrice indéfinie, la matrice $[K]$ symétrique peut être décomposée sous la forme suivante:

$$[K] = [L] [D] \cdot [L]^T \tag{VI. 52}$$

Avec $[L]$: Matrice triangulaire inférieure (les éléments au-dessous de la diagonale sont non nuls) avec une diagonale unité.

$[D]$: Matrice triangulaire avec les éléments Pivots $d_{ii} \neq 0$.

$[L]^T$: La transposée de la matrice $[L]$.

Remarque:

Les algorithmes de cette décomposition et la résolution de leurs systèmes issus sont donnés par la référence [21].

Si la matrice $[K]$ est symétrique et définie positive, on peut décomposer la matrice $[K]$ sous la forme suivante:

$$[K] = [L]^T [L] \tag{VI. 53}$$

Dans ce cas la matrice $[L]$ est triangulaire supérieure (les éléments au-dessus de la diagonale sont non nul) et sous la forme matricielle possède la structure suivante [23]:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} \\ & L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{2n} \\ & & L_{33} & \cdots & L_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & L_{nn} \end{bmatrix}$$

Algorithme:

L’algorithme qui donne la factorisation de $[K]$ pour ce type de matrice est le suivant [21] :

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \sqrt{K_{11}} & L_{1j} &= K_{1j} / L_{11} & j &= 2, 3, \dots, n \\ L_{pp} &= \sqrt{K_{pp} - \sum_{r=1}^{p-1} L_{rp}^2} \\ L_{pj} &= \frac{1}{L_{pp}} \left(K_{pj} - \sum_{r=1}^{p-1} L_{rp} L_{rj} \right) & j &= p + 1, p + 2, \dots, n \end{aligned} \right\} p = 2, 3, \dots, n \quad (VI.54)$$

Le déterminant de la matrice $[K]$ est obtenu par :

$$\det[K] = \left(\prod_{i=1}^{i=n} L_{ii} \right)^2 \quad (VI.55)$$

Remarques:

- Les éléments de la diagonale de la matrice $[K]$ sont tous positifs et non nuls.
- L’algorithme de CHOLEVSKY présenté par les équations (VI.54) ne pose de problème de division par zéro puisque on a de l’équation (VI.55):

$$\det[K] = L_{11}^2 \cdot L_{22}^2 \cdot L_{33}^2 \cdot \dots \cdot L_{nn}^2 \text{ et } \det[K] \neq 0$$

Alors ils failent que les ‘ $L_{ii} \ i = 1, 2, 3, \dots, n$ ’ soient tous différents a zéro.

- Le problème de la racine d’un nombre négatif de l’algorithme (VI.54) pour déterminer les éléments diagonaux de la matrice $[L]$ ne se pose plus, puisque la matrice $[K]$ est définit positif.
- On n’a pas présenté ici les détails de l’algorithme de CHOLEVSKY pour des matrices symétriques et bandes vu que on n’a pas le but de la programmer. Cette méthode elle semble à certaine niveau à celle de KHALETSKI, où le but est de montrée les variantes de choix.

VI.6.1.c. Ordre de grandeurs du nombre d'opérations de l'algorithme de KHALETSKI:

Dans la suite, on traite l’ordre de grandeurs des opérations mathématiques effectuées par l’algorithme de KHALETSKI (pour des matrices symétriques et bandes) pour la résolution du système d’équations (VI.42). De là, il faut connaître :

- L'ordre de la matrice $[K]$ ainsi que la valeur de la demi-bande ' B '.
- Les éléments de la matrice $[K]$ et du vecteur $\{F\}$.

Alors, le programme qui permet la résolution de ce système par la méthode de KHALETSKI nécessite la déclaration des vecteurs suivants :

- $\{VK\}$: Vecteur de dimension NN pour stocker les éléments de la bande de la matrice $[K]$ en utilisant une méthode convenable, et puis pour stocker les éléments de la bande de la matrice $[L]$. Ce vecteur est noté dans le programme par ' AE '.
- $\{VK\}, \{F\}$: des vecteurs de dimension N pour stocker respectivement la solution du problème et le vecteur force. La valeur de N est donnée par la formule (VI.12), (maillage H).
- Déclaration de quelques variables comme des compteurs des boucles et autres paramètres.

Il est parfois utile, pour une bonne programmation, de déclarer $\{F\}$ pour stocker les éléments du vecteur force en suite du vecteur $\{p\}$ et finalement le vecteur solution $\{u\}$. Cette idée nous donne un gain en mémoire de N cases. Avants d'écraser le vecteur $\{F\}$ (les résultats réels de $\{F\}$), on les stocke dans un fichier avant détérioration si on a besoin de ces valeurs ultérieurement.

Suivant la taille de mémoire (d'ordinateur) et le type de la numérotation des nœuds, on peut avoir l'ordre maximum du système d'équation qu'on peut résoudre. Le temps d'exécution d'un tel programme dépend essentiellement de :

- Le type de langage de programmation.
- Le type des caractéristiques de l'ordinateur.
- Le nombre d'opérations effectué par le programme.

Pour bien estimer le temps d'exécution, on essaye de calculer le nombre des opérations effectués pour la phase de la résolution du système d'équations par la méthode de KHALETSKI. Les opérations mathématiques effectuées sont : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division entre les entiers ou les nombres déclarés en double précision. Ajoutant aussi les opérations d'affectation effectuées entre les vecteurs ainsi que la détermination de la position des cases de L_{ij} ou K_{ij} dans les vecteurs correspondants.

Par exemple, pour la forme de stockage en colonne on a : $Vk(m) = K(i, j)$ tel que :

- Si $j \leq B$:

$$m = \frac{1}{2} (j - 1)j/2 + 1$$

Alors il faut. 04 opérations pour déterminer m .

- Si $j > B$:

$$m = \frac{B}{2}(1 - B) + (B - 1)j + i$$

Alors il faut : 07 opérations pour déterminer m.

Finalement afin de calculer le nombre des opérations, on écrit l'algorithme assez optimisé de la formule (VI.49) pour la phase concernant la décomposition de la matrice de rigidité $[K]$ on obtient le modèle suivant :

1^{er} Partie:

```

Pour I = 1 jusqu'à B
  Faire
    I1 = I*(I-1) /2
    Pour J = 2 jusqu'à I
      Faire
        JM1 = J-1
        J1 = I* (JM1) /2
        Some = 0.0
        Pour k = 1 jusqu'à JM1
          Faire
            K1 = K+I1
            KJ = K+J1
            KK = K*(K+1) /2
            Some = Some+Vk(K1)*Vk(KJ) /Vk(KK)
          Fin faire
          JI = J+I1
          Vk(JI) = Vk(JI) - Some
        Fin faire
      Fin faire
    Fin faire
  
```

2^{ème} Partie:

```

C1 = B+1 ; C2=l-B
C3 = B*C2/2
Pour I = C1 jusqu'à N
  Faire
    I1 = C3-I*C2
    Pour J = I+C2 jusqu'à I
      Faire
        JM1 = J-1
        J1 = C3-J*C2
        Some = 0.0
        Pour k = I + C2 jusqu'à JM1
          Faire
            KI = K+I1 ; KJ=K+J1
            KK = B*K + C3
            Som = Some + Vk(KI)*Vk(KJ) /Vk(KK)
          Fin faire
          JI = J+I1
          Vk(JI) = Vk(JI) - Some
        Fin faire
      Fin faire
    Fin faire
  
```

Le nombre d'opérations effectuées par cet algorithme est donné en totale comme suit :

$$-\frac{5}{2} B^2 + (4N + 1)B^2 + \left(4N + \frac{3}{2}\right)B - 2N = f(B, N) \text{ Opérations} \quad (\text{VI.56})$$

Tel que : $B \leq N$

Maintenant, si on écrit l'algorithme assez optimisé des formules (VI.50) et (VI.51) pour la phase de résolution concernant la détermination des vecteurs {Y} et {u}, on aura le modèle suivant :

Algorithme de la formule (VI.50):

```

1er Partie:      u(1) = f(1) / Vk(1)
                    Pour I = 2 jusqu'à B
                    Faire
                    |   Some = 0.0
                    |   IM1 = I-1
                    |   I1 = I*IM1 / 2
                    |   Pour k = 1 jusqu'à IM1
                    |       Faire
                    |           |   KI = K + I1
                    |           |   Some = Some + Vk(KI) * u(K)
                    |           Fin Faire
                    |   II = I+I1
                    |   u (I) = (f (I)-Some) /Vk (II)
                    Fin Faire

2ème partie:    C1 = B-1 ; C2 = 1-B
                    C3 = B*C2 / 2
                    Pour I = B+1 jusqu'à N
                    Faire
                    |   Some = 0.0
                    |   IM1 = I-1
                    |   IC = I * C1 + C3
                    |   Pour k = I+C2 jusqu'à IM1
                    |       Faire
                    |           |   KI = K + IC
                    |           |   Some = Some + Vk(KI) * u(K)
                    |           Fin Faire
                    |   II = I+IC
                    |   u(I) = (f(I)-Some) /Vk(II)
                    Fin Faire
    
```

Le nombre total d'opérations effectuées par cet algorithme est donné comme ainsi :

$$\left(4N + \frac{5}{2}\right)B - \frac{5}{2} B^2 + 3N - 6 = f(B, N) \text{ Opérations} \quad (\text{VI.57a})$$

Sans ajouter les trois opérations de C1, C2 et C3, (le détaille de calcul est similaire au précédent).

Algorithme de la formule (VI.51): Cette partie donne le vecteur solution {u} :

```

C1 = B-1
C3 = B*(1 -B) /2
NB = N-C1
Pour I = N-1 jusqu'à NB avec pas = -1
  Faire
    Some=0.0
    IC = I + C3
    Pour k = I+1 jusqu'à N
      Faire
        Si K ≤ B alors KI = I+K*(K-1) /2
        Si K > B alors K1= IC+C1*K
      Fin Faire
    Si I ≤ B alors II = I*(I+1) /2
    Si I > B alors II = I*B + C3
    u (I) = u (I) – Some /√k(II)
  Fin Faire
Pour I = N-B jusqu'à 1 avec pas = - 1
  Faire
    Some = 0.0
    IC = I+ C3 ; IC1 = I + C1
    Pour k = I + 1 jusqu'à IC1
      Faire
        Si K ≤ B alors KI = I + K*(K-1) /2
        Si K > B alors KI = IC + C1*K
        Some = Some + √k(KI) * u(K)
      Fin Faire
    Si I ≤ B alors II = I*(I+1) /2
    Si I > B alors II = I*B + C3
    u(I) = u(I) – Some /√K(II)
  Fin Faire

```

Le nombre total d'opérations effectuées par cet algorithme est donné comme ainsi :

$$\left(4N + \frac{5}{2}\right)B + 3N - 6 = f(B, N) \text{ Opérations.} \tag{VI. 57b}$$

Pour illustrer exactement l'ordre de grandeur de nombre des opérations effectuées par la procédure de factorisation on considère les exemples suivants :

Pour illustrer exactement l'ordre de grandeur de nombre des opérations effectuées par la procédure de factorisation on considère les exemples suivants :

- N=100 B = 12 → 55 642 Opérations
- B = 20 → 144 230 Opérations
- N=500 B = 250 → 1213 490 375 Opérations
- B = 350 → 2 346 425 525 Opérations
- N=10 000 B = 202 → 1 615 615 087 Opérations
- B = 502 → 9 774 167 737 Opérations

Pour illustrer le nombre des opérations effectuées par la procédure de factorisation (VI.49) et de résolution complète (VI.50) et (VI.51), on considère les exemples suivants :

➤ <u>N=100</u>	B = 12 → 65 170	Opérations
	B = 20 → 158 918	Opérations
➤ <u>N=500</u>	B = 100 → 202 480 638	Opérations
	B = 250 → 1 242 440 090	Opérations
	B = 350 → 2 359 844 763	Opérations
➤ <u>N=10 000</u>	B = 202 → 1 631 632 065	Opérations
	B = 502 → 9 813 130 215	Opérations

Concernant la partie de remplissage de la matrice de rigidité $[K]$ globale et le vecteur force $\{F\}$, on n'a pas fait le calcul de nombre d'opérations mathématiques, puisqu'il est négligeable devant le nombre donné par la phase de la résolution du système et que cette phase prend seule 80 % de nombre d'opérations total du problème à résoudre.

V.6.2. Méthodes itératives:

V.6.2.a. Méthode de Gauss Seidel :

Pour des matrices à très grande dimension, les méthodes directes de résolution d'un Système d'équations linéaires deviennent non recommandées, puisque le calcul devient énorme et la taille des matrices dévient de plus en plus élevée et à un certain niveau sera limitée. La solution est recherchée donc par l'utilisation des schémas itératifs.

Le schéma le plus utilisé est celui de GAUSS SEIDEL et de GAUSS SEIDEL Accéléré. Alors pour un système général à $(N \times N)$ équations linéaires quelconques suivant:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & & K_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (\text{VI. 58})$$

La méthode itérative avec relaxation de GAUSS SEIDEL consiste essentiellement à passer de l'étape (r) à l'étape $(r+1)$ par Le schéma suivant (Tel que $U^{(r)}$ étant déjà calculé), donné par [21], [4]... :

$$U_i^{r+1} = (1 - \omega)U_i^r - \frac{\omega}{K_{ii}} \left\{ \sum_{j=1}^{j=i-1} K_{ij} U_j^r + \sum_{j=i+1}^{j=N} K_{ij} U_j^r - F_i \right\} \quad (\text{VI. 59})$$

Avec : i : indice sur les cases du vecteur ($i= 1, 2, 3, \dots, n$)
 r : indice sur l'itération ($r = 0$, le vecteur initial)
 ω : facteur sur-relaxation.

V.6.2.b. Méthode itérative de GAUSS SEIDEL Accélérée:

Nous réécrivons le système d'équations (VI.58) d'une façon plus compacte et utilisant les symboles qui conviennent nos paramètres comme suivant :

$$\sum_{n=1}^N a_{mn} u_n = F_m \quad ; \quad m = 1, \dots, N \quad (\text{VI. 60})$$

Tel que a_{mn} : Est un élément de la matrice de rigidité $[K]$ situant à la ligne 'm' et à la colonne 'n'.

Le modèle (VI.59) peut être modifié en accélérant encore le processus de convergence par le remplacement avec des valeurs de la solution déjà calculé de l'itération actuelle, immédiatement dans le schéma itératif pour la détermination des valeurs restantes.

L'algorithme sera modifié par [20]:

Faire $m = 1$, jusqu'à N

$$som = \sum_{n < m} a_{mn} u_n^{(r+1)} + \sum_{n < m} a_{mn} u_n^{(r)} \quad (\text{VI. 61})$$

$$u_m^{(r+1)} = (1 - \omega)u_m^{(r)} + \frac{\omega}{a_{mm}}(F_m - som)$$

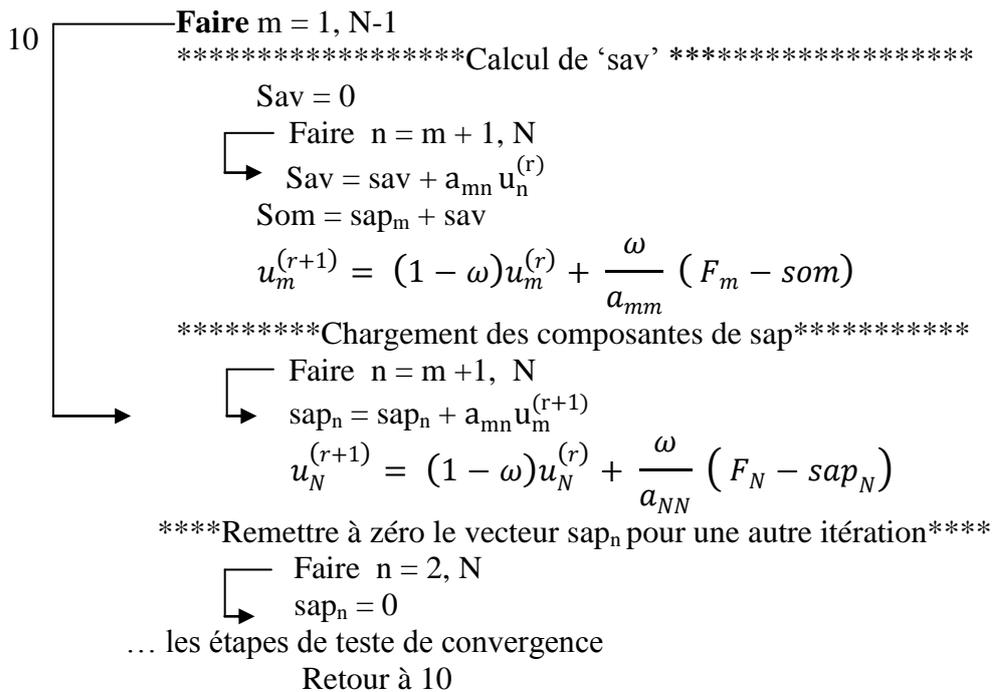
Le paramètre de relaxation ' ω ' étant à choisir dans l'intervalle] 0, 2[, or pour notre type d'application, il est choisi entre [1,2[, Et dite le 'Facteur sur-relaxation (Over- relaxation factor).

Ainsi, pour passer de l'étape (r) à (r+1), on introduit le réel (Sav): Somme Avant, des termes de l'étape précédente (r), et le vecteur (Sapi) Somme Après, des termes de l'étape actuelle (r+1), qui sont définis par:

$$\begin{cases} sav = \sum_{n > m} a_{mn} u_n^{(r)} \\ sap_m^{(r+1)} = \sum_{n < m} a_{mn} u_n^{(r+1)} \end{cases}, \quad m > 1 \quad , \quad Sap_i = 0 \quad (\text{VI. 62})$$

Tel que, en même temps que l'on calcul la variable (Sav), on charge les composantes de (Sapi) par la séquence suivante, en considérant la symétrie de $[K]$:

Après initialisation de u et Sap:



Remarque:

- On a noté les boucles par des flèches pour le gain d'espace (à l'écriture).
- Dans la boucle de 'n' pour le chargement de 'sap' on tient compte de la symétrie de la matrice (a_{mn}). On pourra se persuader de l'algorithme de passage (r) à (r+1) à la main les séquences pour N=3.

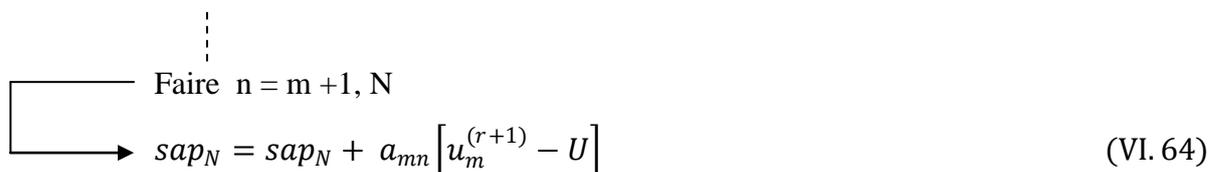
Revenons à l'expression de sap_n^(r+1), l'équation (VI.62), on observe que :

$$sap_m^{(r+1)} - sap_m^{(r)} = \sum_{n < m} a_{mn} (u_m^{(r+1)} - u_m^{(r)}) \tag{VI.63}$$

On peut alors éviter la remise de Sap_i à zéro d'une façon qu'on crée une variable réel 'U' où on stocke la valeur de u_n^(r) de l'itération (r). Tel que, on ajoute la ligne suivante :

$$U = u_m^{(r)}$$

A la séquence précédente avant le calcul de u_n^(r+1) (voir l'algorithme final du même §). Et on change la boucle de chargement de Sap_i, comme suit:



Adaptation à notre type de stockage:

-Pour mise en lumière l'algorithme final de résolution (du système linéaire), il est essentiel de rappeler que le stockage utilisé et opté de la matrice symétrique $[K]$ pour cette méthode est le stockage complexe aléatoire (le plus économique) dans les vecteurs $\{AD\}$ et $\{AE\}$.

-Donc pour positionner le coefficient (a_{mn}) dans les boucles de calcul ainsi le remplissage de Sav et Sap_m, on utilise les vecteurs $\{IC_m\}$ et $\{IL_m\}$, défini au § (VI.5), et on crée un vecteur entier $\{NCP_m\}$ qui donne le nombre total de cases stocker dans $\{AE\}$ avant la ligne m de la matrice A. Tel que :

$$NCP_1 = 0 \quad ; \quad NCP_m = \sum_{i=1}^{m-1} IL \quad \text{et} \quad m > 1 \quad (\text{VI.65})$$

-Avec : $\{IL_i\}$ le vecteur ligne qui indique le nombre de cases non nuls de chaque ligne 'i' de la matrice $[K]$, (la partie triangulaire supérieur sans le diagonal).

-Ainsi que, rappelant que la résolution est faite pour le système d'équations réduit sur les nœuds internes du maillage considéré. De la, on va utiliser:

- La variable NDDL (le Nombre De Degré de Liberté Restant) qui représente le rang de la matrice $[K]$ réduite par l'application des conditions aux limites,
- Le vecteur NGR_m qui donne la numérotation globale des nœuds restants (sans les nœuds de frontière), où il est chargé dans une sous-routine indépendante.

Finalement, on propose l'algorithme suivant qui fait l'objet d'une sous-routine de résolution itérative efficace. Tel qu'après l'initialisation du vecteur inconnu u_m sur les nœuds internes et par les C.A.L sur les nœuds du frontière, on procède au chargement du vecteur $\{NCP_m\}$ comme l'indique l'équation précédente (VI.65). Puis, on initialise le vecteur produit $\{Sap_m\}$ et puis, on passe aux itérations de résolution selon le schéma de GAUSS-SEIDEL Accéléré (avec son facteur sur-relaxation ω) jusqu'à la convergence selon les tests imposés.

On a donc :

```

*****Initialisation du vecteur solution u *****
  Faire I = 1, NNT
  Si ( ICL(I) = 1)
    Alors u(I) = 0.0      Nœuds de frontières (condition de DIRICHLET).
    Si non W(i) = 1.0    Nœuds internes.
  Fin Si
*****Chargement de NCP*****
  NCP(1) = 0
  Faire m = 2, NDDL
  NCP(m) = NCP(m-1) + IL(m-1)

```

*****Initialisation de Sap*****

```

    Faire I = 1, NDDLR
        Sap(I) = 0
    Faire m = 1, NDDLR-1
        L0 = NCP(m) + 1
        L1 = NCP(m+1)
        Faire L = L0, L1
            II = JC(L)
            Sap(II) = Sap(II) + AE(L)* u( NGR(m) )
    
```

*****Passage de l'itération (r) à (r+I)*****

```

    Nit = 0 ; Nitmax = 'valeur maximale à donnée'
100 Nit = Nit + 1 ; Eps = 0.0 ; Epsmax = 'valeur de tolérance acceptée'
    
```

```

    Faire I = 1, NDDLR-1
        m = NGR(I)
        L0 = NCP(I) + 1 ; L1 = NCP(I + 1)
    
```

*****Calcul de 'Sav' et 'Som'*****

```

        Sav = 0
        Faire L = L0, L1
            mm = NUR(IC(L))
            Sav = Sav + AE(L) .u(mm)
        Som = Sap(I) + Sav
    
```

*****Calcul de la solution u*****

```

        U = u(m)
        u (m) = (I - ω).u (m) + ω. (F(I)-Som) /AD(i)
    
```

*****Calcul de l'erreur 'eps'*****

```

        err = u(m) - U
        Si ( |err| > eps)
            | alors eps = | err |
        Finsi
    
```

*****Chargement de Sap avec u^(r+1)*****

```

        Faire L = L0, L1
            Sap[IC(L)] = Sap[IC(L)] + AE(L).[u(m) - U]
            mm = NGR(NDDLR)
            U = u(mm)
            u(mm) = (1-ω).u(mm)+ ω( F(N D D LR)-Sap(N D DLR) ) / AD(NDDLR)
            eps = Max (eps, |U - u(nim)| )
        
```

*****Test de convergence*****

```

        Si (eps < EpsMax et Nit < Nitmax)
            | Alors écrire 'La convergence est atteinte à Nit itérations'
            | Sinon aller à 100 (en incrémentant l'itération)
200 Finsi
    
```

*****Return (Fin de la sousroutine)*****

Avec :

U : Pour stocker le résultat de $u^{(r)}$ de l'itération précédente (r).

Sap (I) : Pour stocker les résultats de l'itération actuelle multipliée par les coefficients de [K],

Eps : Erreur maximale entre deux itérations successives.

EpsMax : Erreur absolue acceptée.

Nit : Nombre d'itération appliquée.

Nitrmax : Nombre maximum d'itérations autorisées si la précision désiré n'est pas atteinte.

ICL(I) : Vecteur indique les nœuds de frontière par sa valeur qui égale à 1.

NNT : Nombre de Nœuds Total du maillage considéré.

VI.6.2.c. Ordre de grandeurs du nombre d'opérations (G.S.Accélééré):

Rappelons que le nombre d'itérations pour avoir la solution désirée dépend de trois paramètres :

- Le choix du vecteur initial de départ.
- La valeur de la tolérance, c'est à dire, l'erreur absolue acceptée.
- La valeur du facteur de relaxation ω .

On va procéder dans la suite au calcul très rapproché de nombre d'opération effectué par l'algorithme de GAUSS SEIDEL:

- **La partie d'initialisation de u:** Dans ce cas on a :

- | | | |
|---|---|----------|
| – 02 Affectations : de I et de u(I) | } | NNT fois |
| – 01 Test de Si | | |
| – 01 Opération de (+) de deux entier pour l'incrémention de I | | |

- **Pour le chargement de NCP:**

- | | | |
|-----------------------------------|---|--------------------------------|
| – 04 Opérations + 02 Affectations | } | NDDL – 1 fois + 01 Affectation |
|-----------------------------------|---|--------------------------------|

- **Pour l'initialisation du vecteur Sap:** Pour cette partie on a :

La boucle de 'I':

- | | | |
|---|---|-----------|
| – 02 Affectations. | } | NDDL fois |
| – 01 Opération de (+ ou –) d'incrémention | | |

La boucle de ‘m’:

$$\left. \begin{array}{l} - 03 \text{ Affectations} + 03 \text{ Opérations} + \text{La boucle de 'L':} \\ \hspace{10em} \text{entre L0 et L1} \\ - 03 \text{ Affectations} \\ - 03 \text{ Opérations} \end{array} \right\} \begin{array}{l} B \text{ fois (c'est la demi - bande,} \\ \text{le cas le} \\ \text{plus défavorable pour un maillage type H)} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} - 03 \text{ Affectations} \\ - 03 \text{ Opérations} \end{array}} \right\} \text{NDDLR fois}$$

- **Passage de l'itération (r) à (r+ 1):**

$$\begin{array}{l} - 03 + 2 \text{ Affectations} + 02 \text{ Opérations} \hspace{10em} \} 1 \text{ fois} \\ \\ - 04 + 1 \text{ Affectations} + 02 \text{ Opérations} \\ - 03 \text{ Affectations} + 03 \text{ Opérations} \\ - 02 \text{ Affectations} + 04 \text{ Opérations} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \text{les boucles de 'L'} \\ \Rightarrow B \text{ fois (Cas max)} \end{array} \right) \\ \\ - 04 \text{ Affectations} + 07 \text{ Opérations} + 01 \text{ Test} \end{array} \right\} (\text{NDDLR} - 1) \text{ fois}$$

$$- 04 \text{ Affectations} + 08 \text{ Opérations} \hspace{10em} \} 1 \text{ fois}$$

- **Tests de convergence :**

$$\begin{array}{l} - 02 \text{ Tests} \\ - 01 \text{ Instruction (écriture ou aller à).} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} - 02 \text{ Tests} \\ - 01 \text{ Instruction (écriture ou aller à).} \end{array}} \right\} \mathbf{1} \text{ fois}$$

Remarques:

- On ne peut retrancher exactement le nombre d'affectations données par les tests précédents.
- On a fait la confusion entre le temps effectué pour les différents types d'opérations.
- La valeur de b est inconnue et vari d'une étape à l'autre de la boucle 'L' limité entre L0 et L1. Tel que pour un maillage type 'H' elle prend comme valeur max '6'.
- Concernant l'affichage, on ne l'a pas donnée dans cet algorithme, tel qu'il fait l'objet d'un autre algorithme.

Au total pour une seule itération de calcul, l'algorithme de GAUSS SEIDEL Accélérée effectue un nombre d'opérations entre les étiquettes '100' et '200' (les instructions de passage de l'itération (r) à (r+1)) d'environ de :

$$\begin{aligned} & 10 + (\text{NDDLR}-1). (9+7.B) \text{ 'Opérations'} \hspace{10em} (\text{VI.66}) \\ & (\text{NDDLR}-1). (9+5.B) + 9 \text{ 'Affectations'} \\ & \text{NDDLR}+1 \text{ 'Tests'} \text{ et } 01 \text{ 'Instruction'} \text{ (d'écriture ou aller à).} \end{aligned}$$

Pour voir le nombre d'opérations du calcul effectué par une seule itération de l'algorithme, on considère les exemples suivants dans ce tableau (VI.9) pour l'équation (VI.66)

Exemples:

Tableau (VI.9): Nombre d'opérations effectuées par une itération ($N_x=10$).

N_y	B	NDDLRL	Nombre d'opérations effectuées par une itération
10	6	4	3 223
20	16	144	17 313
50	46	384	126 783
100	96	784	533 233

VI.6.2.d. Condition nécessaire et suffisante de convergence du processus de GAUSS – SEIDEL:

Considérons le système général précédent (VI.60). Parmi les critères de convergence, on a :

Le processus itératif de GAUSS SEIDEL converge si on vérifie les inégalités suivantes :

$$a) \quad |a_{mm}| > \sum_{n=1}^{n=m-1} |a_{mn}| + \sum_{n=m+1}^{n=N} |a_{mn}| \quad m = 1,2,3, \dots, N \quad (VI. 67)$$

Ou:

$$b) \quad |a_{nn}| > \sum_{m=1}^{m=n-1} |a_{mn}| + \sum_{m=n+1}^{m=N} |a_{mn}| \quad n = 1,2,3, \dots, N \quad (VI. 68)$$

Donc la convergence à lieu si les modules des éléments diagonaux de la matrice $[K] = [a_{mm}]$ du système (VI.60) dépassent pour chaque ligne 'm' la somme des modules des éléments non diagonaux de cette ligne ; ou par chaque colonne dépasse la somme des modules des éléments non diagonaux de cette colonne.

Puisque la solution de ce système d'équations représente la variation d'un certain paramètre d'un phénomène physique, alors la solution mathématique existe, ce qui donne que la convergence est assuré. Autrement, on estime que la condition de convergence (VI.67) ou (VI.68) de processus de GAUSS SEIDEL est toujours vérifiée.

VI.7. Calcul numérique des paramètres de problème:

Après la détermination de la variable dépendante (u) en chaque point du domaine, on est amené à passer au calcul des différents paramètres de notre problème dans la maille d'éléments finis, par l'utilisation des formules vue au chapitre (II).

VI.7.1. Calcule de la surface:

Notre domaine, représente la section A d'une membrure prismatique de dimensions caractéristiques données, pour évaluer cette surface, on doit calculer les surfaces élémentaires A_e de toute la maille, et faire la sommation de ces surfaces élémentaires (voir chapitre (I)) par:

$$A = \sum_{i=1}^{NEL} A_i \quad (\text{VI. 69})$$

VI.7.2. Calcule de moment d'inertie polaire:

Pour le calcul de moment d'inertie polaire on va faire la même procédure que celle utilisée au calcul de surface, on utilise les formule vue au chapitre (I):

$$J = \sum_{i=1}^{NEL} J_i \quad (\text{VI. 70})$$

Les surfaces élémentaires et les moments d'inertie polaire élémentaires sont de deux types (triangulaire et quadrilatère), calculer dans la Subroutine de chargement des matrices d'éléments selon leur type:

- Pour le cas des triangles à trois (3) nœuds on a la séquence suivante:

VI.7.3. Détermination de l'angle de torsion unitaire:

L'angle de torsion unitaire calculée par l'expression suivante (voir chapitre (II)) :

$$M = 2 \int_A \Phi \, dA \quad (\text{VI. 71})$$

Ou:

$$M = 2 \iint_A \Phi \, dx dy \quad (\text{VI. 72})$$

Alors :

$$M = 2 \sum_{i=1}^{NEL} \iint_{A_i} \Phi(x, y) \, dx dy \quad (\text{VI. 73})$$

En faisant le changement de variable :

$$\Phi = 2G\theta u \quad (\text{VI. 74})$$

On aura le moment de torsion:

$$M = 2 \sum_{i=1}^{NEL} (2G\theta) \iint_{A_i} u(x, y) dx dy \quad (\text{VI. 75})$$

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \iint_{A_i} u(x, y) dx dy \quad (\text{VI. 76})$$

La formulation en éléments finis donne pour un élément fini à (NNPE) nœuds (voir chapitre(IV)) :

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{NNPE} u_j N_j(x, y) \quad (\text{VI. 77})$$

- Pour un élément triangulaire a trois (3) nœuds:

$$u = \sum_{j=1}^3 u_j N_j$$

$$u(x, y) = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 \quad (\text{VI. 78})$$

Connaissions à partir de chapitre (IV) que :

$$N_i = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{VI. 79})$$

On trouve :

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \iint_{A_i} (u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3) dx dy \quad (\text{VI. 80})$$

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \left\{ u_1 \iint_{A_i} N_1 dx dy + u_2 \iint_{A_i} N_2 dx dy + u_3 \iint_{A_i} N_3 dx dy \right\} \quad (\text{VI. 81})$$

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \left\{ u_1 \iint_{A_i} \frac{1}{2A_i} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) dx dy + u_2 \iint_{A_i} \frac{1}{2A_i} (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y) dx dy \right. \\ \left. + u_3 \iint_{A_i} \frac{1}{2A_i} (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y) dx dy \right\} \quad (\text{VI. 82})$$

L'intégrale donne :

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \left\{ u_1 \frac{[\alpha_1(I_{00})_i + \beta_1(I_{10})_i + \gamma_1(I_{01})_i]}{2A_i} + u_2 \frac{[\alpha_2(I_{00})_i + \beta_2(I_{10})_i + \gamma_2(I_{01})_i]}{2A_i} \right. \\ \left. + u_3 \frac{[\alpha_3 I_{00} + \beta_3(I_{10})_i + \gamma_3(I_{01})_i]}{2A_i} \right\} \quad (\text{VI. 83})$$

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \left\{ u_1 \frac{[\alpha_1 A_i + \beta_1 A_i \bar{x}_i + \gamma_1 A_i \bar{y}_i]}{2A_i} + u_2 \frac{[\alpha_2 A_i + \beta_2 A_i \bar{x}_i + \gamma_2 A_i \bar{y}_i]}{2A_i} + u_3 \frac{[\alpha_3 A_i + \beta_3 A_i \bar{x}_i + \gamma_3 A_i \bar{y}_i]}{2A_i} \right\} \quad (\text{VI. 84})$$

$$M = 2G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \{ u_1 [\alpha_1 + \beta_1 \bar{x}_i + \gamma_1 \bar{y}_i] + u_2 [\alpha_2 + \beta_2 \bar{x}_i + \gamma_2 \bar{y}_i] + u_3 [\alpha_3 + \beta_3 \bar{x}_i + \gamma_3 \bar{y}_i] \} \quad (\text{VI. 85})$$

$$M = 2G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \left\{ u_1 \frac{2}{3} A_i + u_2 \frac{2}{3} A_i + u_3 \frac{2}{3} A_i \right\} \quad (\text{VI. 86})$$

Finalement:

$$M = \frac{4}{3} G\theta \sum_{i=1}^{NEL} A_i (u_1 + u_2 + u_3) \quad (\text{VI. 87})$$

Alors l'angle de torsion unitaire s'écrit:

$$\theta = \frac{M}{\frac{4}{3} G \sum_{i=1}^{NEL} A_i (u_1 + u_2 + u_3)} \quad (\text{VI. 88})$$

Par identification avec la formule de la torsion, équation (III.7) :

$$\theta = \frac{M}{GC} \quad (\text{VI. 89})$$

D'où on aura la constante de torsion comme suit :

$$C = \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{NEL} A_i (u_1 + u_2 + u_3) \quad (\text{VI. 90})$$

Où la constante de torsion représente le moment d'inertie polaire dans le cas d'une section circulaire

Et cette constante qu'on calcule numériquement dans les sections non circulaires.

- Pour un élément quadrilatère à quatre (4) nœuds:

$$u = \sum_{j=1}^4 u_j N_j$$

$$u(x, y) = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4$$

Connaissions à partir de chapitre (IV) que :

$$[N(x, y)] = [1 \quad x \quad y \quad xy] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VI. 92})$$

Et :

$$\begin{Bmatrix} N_1(x_1, y_1) \\ N_2(x_2, y_3) \\ N_3(x_3, y_3) \\ N_3(x_4, y_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{21}x + L_{31}y + L_{41}xy \\ L_{12} + L_{22}x + L_{32}y + L_{42}xy \\ L_{13} + L_{23}x + L_{33}y + L_{43}xy \\ L_{14} + L_{24}x + L_{34}y + L_{44}xy \end{Bmatrix} \quad (\text{VI. 93})$$

On trouve :

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \iint_{A_i} [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} dx dy \quad (\text{VI. 94})$$

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{Bmatrix} \iint_{A_i} N_1 dx dy \\ \iint_{A_i} N_1 dx dy \\ \iint_{A_i} N_1 dx dy \\ \iint_{A_i} N_1 dx dy \end{Bmatrix} \quad (\text{VI. 95})$$

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{Bmatrix} \iint_{A_i} (L_{11} + L_{21}x + L_{31}y + L_{41}xy) dx dy \\ \iint_{A_i} (L_{12} + L_{22}x + L_{32}y + L_{42}xy) dx dy \\ \iint_{A_i} (L_{13} + L_{23}x + L_{33}y + L_{43}xy) dx dy \\ \iint_{A_i} (L_{14} + L_{24}x + L_{34}y + L_{44}xy) dx dy \end{Bmatrix} \quad (\text{VI. 96})$$

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{Bmatrix} L_{11}(I_{00})_i + L_{21}(I_{10})_i + L_{31}(I_{01})_i + L_{41}(I_{11})_i \\ L_{12}(I_{00})_i + L_{22}(I_{10})_i + L_{32}(I_{01})_i + L_{42}(I_{11})_i \\ L_{13}(I_{00})_i + L_{23}(I_{10})_i + L_{33}(I_{01})_i + L_{43}(I_{11})_i \\ L_{14}(I_{00})_i + L_{24}(I_{10})_i + L_{34}(I_{01})_i + L_{44}(I_{11})_i \end{Bmatrix} \quad (\text{VI. 97})$$

$$\theta = M/4G \sum_{i=1}^{NEL} [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{Bmatrix} L_{11}(I_{00})_i + L_{21}(I_{10})_i + L_{31}(I_{01})_i + L_{41}(I_{11})_i \\ L_{12}(I_{00})_i + L_{22}(I_{10})_i + L_{32}(I_{01})_i + L_{42}(I_{11})_i \\ L_{13}(I_{00})_i + L_{23}(I_{10})_i + L_{33}(I_{01})_i + L_{43}(I_{11})_i \\ L_{14}(I_{00})_i + L_{24}(I_{10})_i + L_{34}(I_{01})_i + L_{44}(I_{11})_i \end{Bmatrix} \quad (\text{VI. 98})$$

Par identification avec la formule de la torsion, équation (III.7), on aura la constante de torsion comme suit :

$$C = 4 \sum_{i=1}^{NEL} [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{Bmatrix} L_{11}(I_{00})_i + L_{21}(I_{10})_i + L_{31}(I_{01})_i + L_{41}(I_{11})_i \\ L_{12}(I_{00})_i + L_{22}(I_{10})_i + L_{32}(I_{01})_i + L_{42}(I_{11})_i \\ L_{13}(I_{00})_i + L_{23}(I_{10})_i + L_{33}(I_{01})_i + L_{43}(I_{11})_i \\ L_{14}(I_{00})_i + L_{24}(I_{10})_i + L_{34}(I_{01})_i + L_{44}(I_{11})_i \end{Bmatrix} \quad (\text{VI. 99})$$

- Pour un élément triangulaire ou quadrilatère à (P) nœuds:

A partir de l'équations (VI.76) et (VI.77) et tel que $u_j = Cte$ dans l'élément fini on trouve :

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \sum_{j=1}^P u_j \iint_{A_i} N_j(x, y) dx dy \quad (VI.100)$$

Tel que, d'après le paragraphe § (IV.6.5) les fonctions d'interpolations définies par (IV.36) ou (IV.49), sont :

$$N_j(x, y) = \sum_{k=1}^P L_{kj} \cdot G_k(x, y)$$

$$G_k(x, y) = \sum_{Nterm=1}^r x^{XpuisI(Nterm)} y^{YpuisI(Nterm)}$$

Avec r : est le nombre de sous-termes d'interpolation.

Pour un quadrilatère $A_i = A^1 + A^2$ somme des aires des deux triangles qui le constituent, figure (IV.6).

On note donc de (VI.99) :

$$\begin{cases} SN(j) = \iint_{A_i} N_j dx dy = \iint_{A_1} N_j dx dy + \iint_{A_2} N_j dx dy \\ SN(j) = S_1 + S_2 \end{cases}$$

Et

$$S_1 = \iint_{A_1} N_j dx dy = \iint_{A_1} \sum_{k=1}^P L_{kj} \sum_{Nterm=1}^r x^{XpuisI(Nterm)} y^{YpuisI(Nterm)} dx dy$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^P L_{kj} \sum_{mm=1}^r \iint_{A_1} x^m y^n dx dy \quad \begin{cases} m = XpuisI(mm) \\ n = YpuisI(mm) \end{cases} \quad (VI.101)$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^P L_{kj} \sum_{mm=1}^r I_{mn} \quad ; \quad I_{mn} = \iint_{A_1} x^m y^n dx dy$$

D'après le paragraphe § (IV.8) de la transformation de l'intégrale double I_{mn} , cette dernière s'écrit sous une manière permettant d'appliquer l'intégrale numérique de GAUSS LEGENDRE (qui a une précision élevée) comme suit, équation (IV.65) :

$$I_{mn} = \iint_{A_1} x^m y^n dx dy = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{+1} F(Z, ITYPE) dZ \quad (VI.102)$$

Avec :

$$F(Z, ITYPE) = \sum_{i=1}^{ITYPE+2} XDIF(i) [-XDIF(i)Z + XSOM(i)]^m \cdot [-YDIF(i)Z + YSOM(i)]^{n+1}$$

Tel que: - pour un triangle: ITYPE = 1. - Pour un quadrilatère : ITYPE = 2 .

Les expressions des vecteurs $XDIF$, $XSOM$, $YDIF$ et $YSOM$ sont données dans le § (IV.8).

Finalement l'équation (VI.99) devient:

$$M = 4G\theta \sum_{i=1}^{NEL} \sum_{j=1}^P u_j \cdot SN_j \quad (VI.103)$$

Et:

$$SN_j = \sum_{k=1}^P L_{kj} \sum_{m=1}^r I_{mn} \quad ; \quad \begin{cases} m = XpuiI(mm) \\ n = YpuiI(mm) \end{cases} \quad (VI.104)$$

$$\theta = \frac{M}{4G \sum_{i=1}^{NEL} \sum_{j=1}^P u_j \cdot SN_j} \quad (VI.105)$$

$$C = 4G \sum_{i=1}^{NEL} \sum_{j=1}^P u_j \cdot SN_j \quad (VI.106)$$

Donc, on propose la partie suivante du programme permettant le calcul la constante de torsion ainsi que de l'angle de torsion unitaire quoi se soit le type d'élément fini à $NNPE$ nœuds. Où il utilise les Subroutines qui recalculent les fonctions d'interpolation N_i convenablement au type d'élément fini, ainsi que celles qui calculent l'intégrale de surface de ces fonctions d'interpolations par la méthode de GAUSS LEGENDRE et il donne finalement les résultats de ces paramètres.

```

DO 200 L = 1, .NEL
C*****CALCUL DE XXi , YYi*****
DO 100 J = 1, NNPE
  XX (I) = X (NNE (L, I))
100  YY (I) = Y (NNE (L, I))
C***** REPLISSAGE DE COF DE [H] ET CALCUL DE SON INVERSE [L]*****
  CALL RempCoffH
C*****CALCUL DE L'INTEGRAL.E SURFACE DE L.A FONCTION D'INTERPOLATION N*****
  Ctors = 0.D0
  DO 120 J = 1, NNPE
    CALL CalcVFE (J,SN)
    Ctors = Ctors +SN*u(NNE(L, j))
120 CONTINUE
200 Ctors =4* Ctors
Ators = M/ (G*Ctots)
RETURN
C*****

```

Remarque:

Les Subroutines RempCoffH et CalcVFE seront exposées avec leurs algorithmes à l'annexe A.

VI.7.4. Calcul de contraintes:

Après la détermination de la variable dépendante (u), la constante de torsion (C) et l'angle de torsion unitaire (θ), on peut déterminer la contrainte de cisaillement dans les deux directions (X) et (Y) pour chaque nœud du domaine de calcul par l'utilisation des équations (II.16a) et (II.16b) :

$$\tau_{ZX} = 2G\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\tau_{ZY} = 2G\theta \frac{\partial u}{\partial X}$$

Et La formulation en éléments finis:

$$u = \sum_{i=1}^N N_i u_i$$

- Pour un élément triangulaire a trois (3) nœuds:

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i$$

$$u(x, y) = u_1 N_1(x, y) + u_2 N_2(x, y) + u_3 N_3(x, y)$$

Avec:

$$N_j = \frac{1}{2A_i} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \quad i = 1, 2, 3$$

Alors:

$$\tau_{ZX} = 2G\theta \left(u_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} \right)$$

Et

$$\tau_{ZY} = 2G\theta \left(u_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \right)$$

Alors:

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{\beta_j}{2A_i} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{\gamma_j}{2A_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Autrement :

$$\tau_{ZX} = 2G\theta \left\{ u_1 \frac{\gamma_1}{2A_i} + u_2 \frac{\gamma_2}{2A_i} + u_3 \frac{\gamma_3}{2A_i} \right\}$$

$$\tau_{ZY} = 2G\theta \left\{ u_1 \frac{\beta_1}{2A_i} + u_2 \frac{\beta_2}{2A_i} + u_3 \frac{\beta_3}{2A_i} \right\}$$

D'où :

$$\tau_{ZX} = \frac{G\theta}{A_i} (u_1 \gamma_1 + u_2 \gamma_2 + u_3 \gamma_3) \quad (VI. 107)$$

$$\tau_{ZY} = \frac{G\theta}{A_i} (u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + u_3\beta_3) \quad (\text{VI. 108})$$

- Pour un élément quadratique à quatre (4) nœuds:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

$$u(x, y) = u_1 N_1(x, y) + u_2 N_2(x, y) + u_3 N_3(x, y) + u_4 N_4(x, y)$$

$$[N(x, y)] = [1 \quad x \quad y \quad xy] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

Et :

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1) \\ N_2(x_2, y_2) \\ N_3(x_3, y_3) \\ N_4(x_4, y_4) \end{cases} = \begin{cases} L_{11} + L_{21}x + L_{31}y + L_{41}xy \\ L_{12} + L_{22}x + L_{32}y + L_{42}xy \\ L_{13} + L_{23}x + L_{33}y + L_{43}xy \\ L_{14} + L_{24}x + L_{34}y + L_{44}xy \end{cases}$$

Avec:

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1(x_1, y_1)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2(x_2, y_2)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3(x_3, y_3)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4(x_4, y_4)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{21} + L_{41}y \\ L_{22} + L_{42}y \\ L_{23} + L_{43}y \\ L_{24} + L_{44}y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1(x_1, y_1)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2(x_2, y_2)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3(x_3, y_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4(x_4, y_4)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{31} + L_{41}x \\ L_{32} + L_{42}x \\ L_{33} + L_{43}x \\ L_{34} + L_{44}x \end{pmatrix}$$

Autrement :

$$\tau_{ZX} = 2G\theta \left\{ u_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} + u_4 \frac{\partial N_4}{\partial y} \right\}$$

$$\tau_{ZY} = 2G\theta \left\{ u_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} + u_4 \frac{\partial N_4}{\partial x} \right\}$$

D'où:

$$\tau_{ZX} = 2G\theta \sum_{j=1}^4 u_j \frac{\partial N_j}{\partial y} = 2G\theta \sum_{j=1}^4 u_j \begin{Bmatrix} L_{3j} + L_{4j} x \\ L_{3j} + L_{4j} x \\ L_{3j} + L_{4j} x \\ L_{3j} + L_{4j} x \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{ZY} = 2G\theta \sum_{j=1}^4 u_j \frac{\partial N_j}{\partial x} = 2G\theta \sum_{j=1}^4 u_j \begin{Bmatrix} L_{2j} + L_{4j} y \\ L_{2j} + L_{4j} y \\ L_{2j} + L_{4j} y \\ L_{2j} + L_{4j} y \end{Bmatrix}$$

- Pour un élément triangulaire ou quadrilatère à (P) nœuds:

$$u = \sum_{i=1}^P N_i u_i$$

$$u(x, y) = u_1 N_1(x, y) + u_2 N_2(x, y) + \dots + u_P N_P(x, y)$$

$$[N(x, y)] = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ \dots \ x^m y^n] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1p} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2p} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & L_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{p1} & L_{p2} & L_{p3} & \dots & L_{pp} \end{bmatrix}$$

D'où:

$$\begin{Bmatrix} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \\ N_3(x, y) \\ \vdots \\ N_p(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} + L_{12} x + L_{13} y + L_{14} xy + \dots + L_{1p} x^m y^m \\ L_{21} + L_{22} x + L_{23} y + L_{24} xy + \dots + L_{2p} x^m y^m \\ L_{31} + L_{32} x + L_{33} y + L_{34} xy + \dots + L_{3p} x^m y^m \\ \vdots \\ L_{p1} + L_{p2} x + L_{p3} y + L_{p4} xy + \dots + L_{pp} x^m y^m \end{bmatrix} \quad (VI.109)$$

Ou bien:

$$N_i(x, y) = \sum_{j=1}^{j=p} L_{ij} g_j(x, y) \quad i = 1, 2, 3, \dots, p \quad (VI.110)$$

$$\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \dots, \frac{\partial N_p}{\partial x} \right]$$

Avec:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = L_{1i} \frac{\partial g_1}{\partial x} + L_{2i} \frac{\partial g_2}{\partial x} + L_{3i} \frac{\partial g_3}{\partial x} + \dots + L_{ji} \frac{\partial g_j}{\partial x} + \dots + L_{pi} \frac{\partial g_p}{\partial x} \quad i = 1, 2, \dots, P$$

Donc:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^P L_{ji} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} \quad i = 1, 2, 3, \dots, P \quad (VI.111)$$

De même

$$\left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \dots, \frac{\partial N_p}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^P L_{ji} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} \quad i = 1, 2, 3, \dots, P \quad (VI.112)$$

Concéderons la fonction $g_m(x, y)$ sous la forme indiquée à la fin du paragraphe (IV.6.5) comme suit :

$$g_m(x, y) = x^{S1}y^{R1} + x^{S2}y^{R2} + \dots + x^{Sm}y^{Rm} \Rightarrow g_m(x, y) = \sum_{n=1}^{n=m} x^{Sn}y^{Rn} \quad (VI.113)$$

D'où les termes de dérivation deviennent :

$$\frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{n=m} S_n \cdot x^{S_n-1}y^{R_n} \quad , \quad \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{n=m} R_n \cdot x^{S_n}y^{R_n-1} \quad (VI.114)$$

Autrement :

$$\tau_{ZY} = 2G\theta \left\{ u_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + \dots + u_P \frac{\partial N_P}{\partial y} \right\}$$

$$\tau_{ZY} = 2G\theta \left\{ u_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + \dots + u_P \frac{\partial N_P}{\partial x} \right\}$$

D'où:

$$\tau_{ZX} = 2G\theta \sum_{j=1}^P u_j \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial y} = 2G\theta \sum_{j=1}^P u_j L_{ji} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} \quad (VI.115)$$

$$\tau_{ZX} = 2G\theta \sum_{j=1}^P u_j \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial x} = 2G\theta \sum_{j=1}^P u_j L_{ji} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} \quad (VI.116)$$

VI.8. Procédure de calcul:

Dans cette partie, on donne une description grossière du programme à partir de l'organigramme de la figure (VI.17).

Alors, après la déclaration des différentes variables et constantes à utilisées dans le programme (partie déclaration), l'appelle au sous-programme INPUT, permet de choisir la géométrie du domaine d'étude et le type d'élément fini utilisé pour la discrétisation de ce domaine à partir des menus d'input. Ainsi que un choix entre les méthodes de résolution du système d'équations, qui soient directes ou itératives avec les modes de stockage qui les correspondent, à partir d'un menu spécial.

L'introduction des différents paramètres caractérisant le matériau étudié, tel que : Le module d'élasticité 'E' (module de YOUNG) et le coefficient de POISSON 'ν', permet de calculer le module d'élasticité en cisaillement 'G' et les autres paramètres de notre problème.

Les subdivisions N_x et N_y seront aussi entrées à la fin de cette Subroutine. Puis l'appelle aux sous-programmes des différentes géométries selon la valeur de la variable NF , permet de générer le maillage et de discrétiser ces domaines afin d'obtenir les coordonnées géométriques nodales (positions des nœuds), En assurant et vérifiant en parallèle les conditions de génération d'un maillage en élément fini en fonction de son type. Les caractéristiques de la discrétisation $NNT, NEL, NNPE \dots$ (voir la nomenclature) seront calculées par la suite.

La Subroutine CONNECT permet de faire la connexion entre les éléments finis en fonction de leur numérotation et leur type de maillage et le type d'élément fini afin de remplir la matrice connexion NNE .

Le réarrangement des nœuds du domaine dans un ordre d'affichage convenable permet le traçage et la représentation graphique des maillages, cela est grâce au subroutine RESULTMAILLAGE.

Les conditions aux limites qui ferment notre système d'équations, permet de minimiser les calculs donc, on appelle le sous programme CONDLIMIT, en réduisant ainsi la taille de la matrice globale et les vecteurs correspondant et de remplir le vecteur indiquant les nœuds de frontière ICL.

Si la méthode de résolution choisie est celle de KHALETSKI dont son algorithme est adapté au stockage bande type colonne, voir paragraphe (VI.2.1), l'appel à la Subroutine est fait pour le calcul des paramètres nécessaire, comme $IBAV, IBAP$ et $NDDL$.

Arrivant à ce stade, nous passons à une étape importante dans le programme, c'est le remplissage des matrices et des vecteurs élémentaires, ainsi que leurs assemblages dans la matrice globale et du vecteur global. Pour cela, nous appelons les Subroutines ELMTRIANG ou ELMQUADRI selon le type d'élément fini choisi ($NTEF > 3$ ou non).

En premier lieu le remplissage des matrices élémentaires est fait par les formules des fonctions d'interpolations montrées au chapitre (IV) selon le nombre de nœuds par élément ($NNPE$). Tel que pour $NTEF > 1$, on utilise les Subroutines REMPCOFFH pour le calcul des coefficients de la matrice $[H]$, Voir le paragraphe (IV.7.2) puis le calcul de son inverse $[L]$ par la Subroutines INVMAT, ainsi que le calcul de I_{mn} et les surfaces élémentaires afin d'avoir les coefficients finaux $K_{ij}^{(e)}$ et $F_{ij}^{(e)}$ en utilisant autant de fois les sous programmes CALCAFE, SOMAK et INTGRAL...

Puis l'appelle l'une des Subroutines d'assemblage : ASSEMBAND ou ASSEMCOMP selon le choix (valeur de $MSOL$) de la méthode de résolution, permet de remplir les vecteurs qui (jouent le rôle de la matrice globale) servent à la résolution du système d'équations du

problème, suivant le stockage bande (de forme colonne par colonne le paragraphe (VI.2)) ou le stockage économique, voir le paragraphe (VI.5).

Une fois la matrice de rigidité globale et le vecteur force global sont obtenus, nous passons à une phase très importante c'est la résolution du système $[K]\{u\} = \{F\}$. La méthode utilisée pour sa résolution est la méthode directe de KHALETSKI par la Subroutine RSOLKALT si $MSOL = 1$, sinon c'est la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL Accéléré par la Subroutine RSOLGAUS pour $MSOL = 2$, adaptée difficilement au stockage économique.

Nous obtenons donc la variable dépendante $u(i)$ dans tous les points du maillage considéré. Les autres paramètres tel que : la surface, le moment d'inertie polaire, l'angle de torsion unitaire, la contrainte maximale... sont calculés par une Subroutine PARAMETERS qui appel aussi aux d'autres Subroutines complémentaires.

Si notre géométrie possède une solution analytique tel que (cercle, ellipse, rectangle ...), l'appelle au sous-programme ANALYTIQUE donne les solutions analytiques de toutes les géométries qui possèdent ces solutions analytiques, voir le chapitre (III). Ce ci permettra de faire une comparaison et une estimation de l'erreur pour la validation des résultats obtenus par la méthode d'éléments finis (notre programme) pour les autre sections.

Finalement, nous affichons tous les résultats obtenus par la Subroutine AFFICHAGE permettant le traçage graphique et la comparaison des résultats.

VI.9. Organigramme général qui illustre les procédures de calcul :

IV.1.Introduction:

Les techniques de calcul des structures ont connu un développement très considérable dans ces dernières décennies, tout cela est pour les besoins de l'industrie et soutenu par les progrès dans le domaine des ordinateurs.

Parmi ces approches, nous optons la technique des éléments finis pour la résolution de notre problème vu à son principal avantage qui permet une bonne représentation des géométries complexes mais relativement assez lourde en volume et en temps de calcul.

Dans la suite, on entame la formulation de cette technique (la méthode) en traitant deux types d'éléments finis, afin de valider les résultats d'une part et d'autre part en comparant avec ceux des résultats analytiques pour les géométries simples disponibles.

IV.2. Bref historique de la méthode des éléments finis:

Depuis une cinquantaine d'années, la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et poutres [7]. Le comportement de chaque élément de barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux.

A partir des matrices élémentaires, nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments ou nœuds. La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure.

L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie et de l'aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique entre les années 1950 et 1960 : TURNER, CLOUGH, MARTIN ET TOPP [9] introduisent en 1956 le concept d'élément fini. Ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement, à partir de ce concept, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution, c.à.d. aux déplacements en tout point du milieu continu [13]

Dès 1960 la méthode des éléments finis est réputée un développement rapide dans plusieurs directions :

- La méthode est reformulée, à partir des considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale des résidus pondérés [2], [21].
- De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments à côtés curvilignes ou iso-paramétriques [25].

- La méthode des éléments finis est reconnue un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : mécanique des fluides, nucléaire, thermique, etc. [10], [18].

- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle [14].

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis [21], [23] et [28]. Elle est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire.

Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides, étude des phénomènes de pollution thermique ou chimique, des interactions fluide-structure. Dans la suite, nous citons les principales démarches de cette méthode.

IV.3. Démarches de la méthode des éléments finis:

Les démarches suivies dans l'analyse d'élément fini pour un problème typique sont :

1/-Discrétisation (ou représentation) du domaine donné dans une collection en choisissant l'E.F.

- a) Construire la maille d'élément fini en choisissant l'élément, Figure (IV-1a).
- b) Numéroté les nœuds et les éléments.
- c) Engendrer les propriétés de la géométrie (coordonnées, l'aire de la section, ...) d'avoir besoin pour le calcul du problème.

2/-Dérivation de l'équation d'élément pour tous les éléments de la maille.

- a) Construire la formulation variationnelle de l'équation différentielle donnée sur l'élément typique.
- b) Supposer que la variable dépendant typique (u) est de la forme :

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \Psi_j$$

Tel que n est le nombre de nœuds du domaine.

En lui substituant dans la démarche (2a), on obtient l'équation d'élément (e) sous la forme :

$$[K^e]u^e = F^e$$

c) Dériver les fonctions d'interpolations Ψ_j de l'élément et calculer les matrices d'élément

3/- Assembler les équations pour obtenir le système équations entière du problème.

- a) Identifier les conditions de continuité de l'inter de l'élément parmi les variables principales (parenté entre les degrés de liberté locaux et les degrés de libertés globaux).
- b) Assembler les équations d'éléments en utilisant (3a) et la propriété de superposition.

4/- Imposer les conditions aux limites du problème.

- a) Identifier les spécifiques degrés de liberté principale globale.
- b) Identifier les spécifiques degrés de liberté secondaires globale.

5/- Solution de l'équation d'assemblage (le système algébrique) et autres paramètres.

- a) Résoudre le système d'équations pour la variable dépendant inconnu (u).
- b) Calculer le gradient de la solution ou autres quantités désirées à partir de degrés de liberté principaux (u) calculé à la démarche (5a).

Remarque:

Dans les problèmes à deux dimensions, nous ne cherchons pas seulement une solution approximative du système d'équations différentielles partielles mais, nous avons aussi des approximations sur le domaine donné par un maillage approprié d'élément fini. Par conséquent, nous aurons des erreurs dues à l'approximation de la solution et aussi les erreurs de discrétisation dues à l'approximation du domaine par des éléments finis (2D).

La maille des éléments finis est constituée par des simples éléments à deux dimensions tel qu'un triangle, rectangle et quadrilatérale... etc., qui sont collectés les uns aux autres par des nœuds sur leurs périphériques, figure (IV.1a).

Labilité de représenter le domaine de forme irrégulière, par collection d'éléments finis fait de la méthode un outil pratique très valable pour la résolution des problèmes de conditions aux limites de valeur limitée, qui sont rencontrés dans plusieurs domaines de l'ingénieur.

Maintenant, dans la suite nous traitons le concept de la méthode d'éléments finis par ces formulations théoriques.

IV.4. Formulation variationnelle (intégrale):

Le problème que nous allons considérer, dans cette formulation après l'étude mathématique effectuée, c'est la résolution de l'équation différentielle partielle de second ordre (l'équation de Prandtl) de type elliptique, connue sous le nom de l'équation de **POISSON**, associée avec des conditions aux limites du 1^{er} type dites de DIRICHLET dans un domaine arbitraire plan $\Omega(x,y)$ de frontière quelconque (Γ).

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\beta$$

Si on pose que $\Phi = 2G\beta u$ on aura l'équation (IV.1) devient sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 2G\beta u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 2G\beta u}{\partial y^2} = -2G\beta$$

Alors on a :

$$2G\beta \left(\frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u)}{\partial y^2} \right) = -2G\beta$$

Alors, le problème est comme suit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{avec } f = -1 \quad (\text{IV.1})$$

Avec conditions aux limites :

$$\Phi = 0 \quad \text{sur } (\Gamma) \quad (\text{IV.2})$$

Pour les problèmes à deux dimensions, il y a plusieurs formes géométriques qui peuvent être utilisées comme élément fini, Figure (IV.3).

On développe la forme variationnelle de l'équation (IV.1) pour un élément typique en multipliant cette équation par une fonction test $\Psi(x, y)$, dont en supposant dérivable une fois par rapport à x et y , et puis on intègre dans le domaine de l'élément (Ω^e):

$$\iint_{\Omega^e} \Psi \left[\frac{\partial(F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(F_2)}{\partial y} - f \right] dx dy = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Avec:

$$F_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad F_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dans l'ordre de distribuer la différentiation pour Ψ et u , nous intégrons les deux premiers termes de l'équation (IV.3) par partie. Premièrement on note les identités:

Premièrement on note les identités:

$$\Psi \frac{\partial(F_1)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot F_1 \quad (\text{IV.4a})$$

$$\Psi \frac{\partial(F_2)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot F_2 \quad (\text{IV.4b})$$

Puis nous rappelons la forme des composantes de l'opérateur gradient (ou divergence) pour un contour fermé avec le théorème de « GREEN » :

$$\iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) dx dy = \oint_{\Gamma^e} \Psi F_1 n_x ds \quad (\text{IV.5a})$$

$$\iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) dx dy = \oint_{\Gamma^e} \Psi F_2 n_y ds \quad (\text{IV.5b})$$

Tel que : « ds » est la longueur d'arc infinitésimale de l'élément le long de son contour Γ^e , et n_x, n_y sont les composantes du vecteur unité normale \vec{n} sur la frontière Γ^e , figure (IV.1b).

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} = \cos(\alpha) \vec{i} + \sin(\alpha) \vec{j} \quad (\text{IV.6})$$

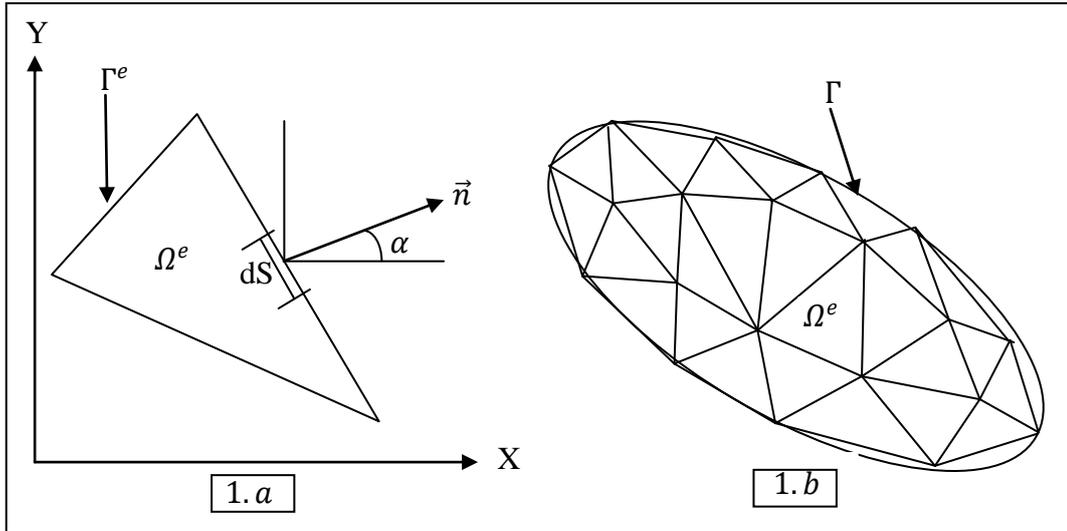


Figure (IV.1): Discretisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.

En suite, en substituant l'équation (IV.4) et (IV.5) dans l'équation (IV.3) on obtient :

$$\iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \Psi \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \Psi \left[n_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + n_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d = 0 \quad (\text{IV.7})$$

A partir d'une inspection du terme de la frontière de cette équation, nous montrons que la spécification de (u) constitue la condition essentielle aux limites (d'où u est la variable principale), et la spécification de q_n constitue la condition au limite naturelle de la formulation (d'où q_n est la variable secondaire) [10] :

$$q_n = n_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + n_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{IV.8})$$

La forme variationnelle devient :

$$\iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \Psi \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \Psi q_n ds = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Cette équation variationnelle (intégrale) forme la base du modèle de l'élément fini de l'équation (IV.1).

IV.5. Formulation en élément fini:

IV.5.1. Dérivation du modèle forme globale:

La forme variationnelle donnée par l'équation (IV.9) montre que l'approximation choisie de (u) doit être au moins bilinéaire dans x et y d'une manière que les deux premiers termes de l'équation (IV.9) et q_n dans l'équation (IV.8) sont non nuls [10].

Supposons que (u) est approximée par l'expression :

$$u = \sum_{j=1}^n u_j N_j \quad (IV.10)$$

Où u_j sont les valeurs de (u) au point (x_j, y_j) et N_j est la fonction d'interpolation avec la propriété :

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

Avec : δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

La forme spécifique de N_i sera dérivée pour des éléments triangulaires et quadrilatères à différent nombre de nœuds dans le paragraphe (IV.6)

Substituant l'équation (IV.10) dans la forme variationnelle (IV-8), nous obtenons

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\} u_j + \iint_{\Omega^e} N_i f dx dy + \oint_{\Gamma^e} N_i q_n ds = 0 / j = 1, 2, \dots, n \quad \uparrow \quad (IV.11)$$

Autrement :

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = F_i^{(e)}$$

Tel que :

$$\begin{cases} K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} N_i f dx dy + \oint_{\Gamma^e} N_i q_n ds \end{cases} \quad (IV.12)$$

On note que $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$ (c.à.d. [K] symétrique).

Remarque :

On peut montrer dans la suite que la matrice [K] est symétrique et défini positive.

Soit \bar{B} un vecteur quelconque, avec b_j est Sa j^{eme} valeur et \bar{B}^T son vecteur transposé.

Si $\bar{B} \neq \bar{0}$ alors:

$$\bar{B}^T K \bar{B} = \iint_{\Omega^e} \left\{ \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy > 0$$

On a le deuxième terme de cette équation est positif. De la, [K] est défini positive et symétrique, [14]. Donc le système d'équation (IV.1) et (IV.2) de notre problème a une solution unique.

IV.5.2. Dérivation du modèle forme faible « WEAK FORM » [14]:

Le second terme de $F_i^{(e)}$ dans l'équation (IV.13) qui représente l'intégrale sur la frontière $\Gamma^{(e)}$ peut être écrite sous différentes formes en utilisant la dérivation directionnelle, figure(IV.1b):

$$\oint_{\Gamma^{(e)}} q_n N_i ds = \oint_{\Gamma^{(e)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) N_i ds$$

$$\oint_{\Gamma^{(e)}} q_n N_i ds = \oint_{\Gamma^{(e)}} (\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}) N_i ds$$

$$\oint_{\Gamma^{(e)}} q_n N_i ds = \oint_{\Gamma^{(e)}} \frac{\partial u}{\partial n} N_i ds$$

Tel que $\partial/\partial n$ représente la différentiation dans la direction normale sortante à la frontière $\Gamma^{(e)}$. De la, si une portion de $\Gamma^{(e)}$ se trouve à l'intérieure du domaine global Ω , figure(IV.2b), alors la quantité $q_n^{(e)}$ de l'élément (e) s'annule avec $q_n^{(f)}$ de l'élément (f) qui se coïncide sur la même portion $\Gamma^{(e)}$. De cet élément (e). Ceci peut être vu comme étant un équilibre interne entre les différents éléments du domaine (forces internes).

Si une autre portion de $\Gamma^{(e)}$ se coïncide avec la frontière globale Γ du domaine, alors l'évaluation de l'intégrale de frontière est basée sur le calcul de q_n et de la valeur de la fonction d'interpolation N_i sur cette frontière.

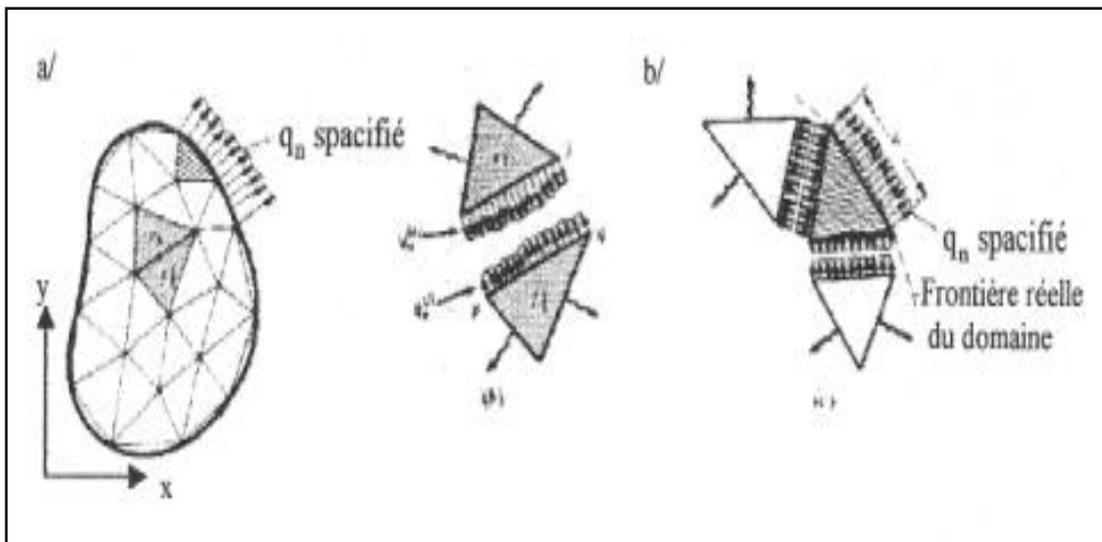


Figure (IV.2): Equilibre interne entre les différents éléments du domaine.

Cependant, dans notre formulation les fonctions d'interpolations vérifient la propriété suivante :

$$N_i(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \in (\Gamma)$$

Implicite, vérifier donc la condition aux limites $u=0$ sur (Γ) Ainsi, le système (IV.12)

devient:

$$\begin{cases} K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} N_i f dx dy \end{cases} \quad (IV.13)$$

Substituant cette équation dans celle de (IV.11), on obtient la forme dite : «Weak form» dans l'équation suivante :

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\} u_j = - \iint_{\Omega^e} N_i f dx dy \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (IV.14)$$

Finalement l'équation (IV.14) représente le modèle de l'élément fini de l'équation (IV.1). Dans la suite, nous traitons la dérivation des fonctions d'interpolations.

IV.6. Fonctions d'interpolation:

IV.6.1. Séries polynomiales:

Le comportement de la variable dépendante (u) dans un élément est décrit par l'approche la plus simple, cela consiste à approximer son champ de variation par des séries de polynôme dont les coefficients C_j sont les coordonnées généralisées de l'approximation [10].

Dans le cas bidimensionnel, pour chaque variable dépendante on a :

$$u_i(x, y) = \sum_{j=1}^n c_j x_i^p y_i^p \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (IV.15)$$

Ceci permet d'écrire l'approximation sous la forme matricielle suivante :

$$u_i(x, y) = [H_m(x, y)]\{c\}$$

Avec m nombre de degré de liberté et $\{c\}$ vecteurs des coefficients C_j .

Pour cela, il est utile d'utiliser le triangle de PASCAL pour mettre en évidence le nombre de termes présents dans ce type d'approximation. Soit :

	1	<i>constant</i>			$m = 0, n = 1$
	x	y	<i>linéaire</i>		$m = 1, n = 2$
	x^2	xy	y^2	<i>quadratique</i>	
	x^3	x^2y	xy^2	y^3	<i>cubique</i>
	x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
					<i>4^{ème} degré</i>
					$m = 4, n = 15$

Le nombre total de coordonnées de l'approximation doit être égal au nombre total de variables nodaux de 1 élément.

Si on choisit une approximation d'ordre élevé, on est donc amené à adopter des nœuds supplémentaires qui correspondent aux termes supplémentaires d'approximation. Ainsi, on définit des nœuds additionnels soit aux interfaces, soit à l'intérieur de l'élément.

Dans notre problème, l'examen de l'équation formant le modèle de l'élément fini (IV.14) et les matrices d'éléments finis (IV.13), montre que N_i doit être au moins une fonction bilinéaire en x et y .

Comme cité auparavant, il y a une correspondance entre le nombre des nœuds et le nombre des termes utilisés dans l'approximation polynomiale d'une variable dépendante dans l'élément.

Alors, dans le problème unidimensionnel avec une équation différentielle de 2^{ème} degré, le nombre de nœuds (n) dans un élément a défini uniquement le degré (r) du polynôme, tel que la correspondance entre (n) et (r) étant ($n = r + 1$).

Tandis que dans les problèmes à deux dimensions, la correspondance entre le nombre de nœuds (qui est égale au nombre de termes d'approximations polynomiales) et le degré de polynôme n'est pas unique. Par exemple, le polynôme :

$$u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (\text{IV.16})$$

Contient trois termes (linéairement indépendants) et il est linéaire dans x et y , d'un autre côté le polynôme :

$$u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \quad (\text{VI.17})$$

Contient quatre termes (linéairement indépendants) est également linéaire dans x et y .

La première forme nécessite un élément avec trois nœuds (avec un inconnu primaire par nœud). Or, la deuxième nécessite un élément avec quatre nœuds. Quand le nombre de nœuds égale à quatre, on peut choisir un triangle avec trois nœuds et on met le quatrième nœud au centre de ce dernier, où on choisit un rectangle (quadrilatéral) avec les nœuds à ses sommets. Le polynôme avec cinq constantes l'équation (IV.18) est un polynôme quadratique (incomplet) :

$$u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy + c_5(x^2 + y^2) \quad (\text{IV.18})$$

Le polynôme peut être utilisé pour construire un élément avec cinq nœuds (rectangle avec un nœud à chaque sommet et l'autre est situé au centre du rectangle). On fait la même chose avec six nœuds et sept nœuds, ... etc.

IV.6.2. Différents types d'élément finis adaptés:

La discrétisation du domaine d'étude se fait par des éléments finis d'un seul type ou bien mixte. Dans l'analyse numérique abordée, on a opté à faire le calcul de maillage par les éléments suivants :

- Triangles ayons 3,4 ou 6 nœuds , figure (IV.3.a, b et c).
- Quadrilatères ayons 4, 5 ou 8 nœuds, figure (IV.3.d, e et f).

Afin de mener à bien le calcul et pouvoir comparer les résultats avec une suffisance et avoir une discussion vaste, on a choisi et adapté ces éléments pour les différentes étapes du calcul de programme.

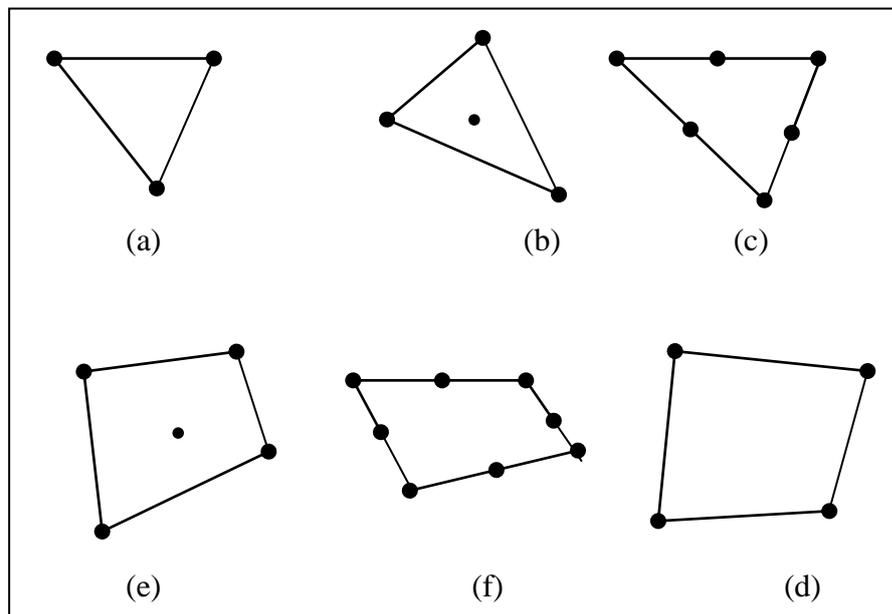


Figure (IV.3): Élément fini en bidimensionnelle de 3, 4, 5, 6 et 8 nœuds.

IV.6.3. Fonction d'interpolation pour un élément triangulaire a trois nœuds:

Nous considérons l'approximation linéaire (IV.16) la donnée $\{1, x, y\}$ est linéairement indépendante et aussi complète. Nous devons réécrire par suite l'approximation (IV.16) tel qu'elle satisfait les conditions :

$$u(x_i, y_i) = u_i \quad i = 1,2,3 \quad (\text{IV.19})$$

Où (x_i, y_i) avec $(i = 1,2,3)$ sont les coordonnées des trois nœuds du triangle de figure (IV.3a).

Autrement dit, nous déterminons les trois constantes c_i dans l'équation (IV.16) en fonction de u_i à partir de l'équation (IV.19), donc :

$$u_1 = u(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1$$

$$u_2 = u(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \quad (\text{IV.20})$$

$$u_3 = u(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3$$

Sous la forme matricielle on a :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Notons que les nœuds sont numérotés dans le sens anti-horaire, est en résolvant l'équation (IV.20) par rapport à c_i , nous obtenons :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2A} [u_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + u_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + u_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)] \\ c_2 &= \frac{1}{2A} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \\ c_3 &= \frac{1}{2A} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

Avec: A est l'aire du triangle, tel que :

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] \quad (\text{IV.23})$$

Remarque:

Le déterminant doit avoir un signe opposé lorsque les nœuds numérotés dans le sens des aiguille d'une montre.

Substituant les expressions de c_i d'après l'équation (IV.22) dans l'équation (IV.16), on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_1 N_1(x, y) + u_2 N_2(x, y) + u_3 N_3(x, y) \\ u(x, y) &= \sum_{i=1}^m u_i N_i \quad , m = 3 \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Où N_i sont les fonctions d'interpolations d'un élément triangulaire.

Et

$$N_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.25a})$$

Avec α_i, β_i et γ_i sont des constantes : Tel que i, j, k permute dans un ordre naturel

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad (\text{IV.25b})$$

Par exemple, α_2 est donné en posant $i = 2, j = 3$ et $K = 1$ dans l'équation (IV.25b) :

$$\alpha_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

Notons que les fonctions N_i ont les propriétés suivantes :

$$N_i(x_i, y_i) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (IV. 26a)$$

$$\sum_{i=1}^3 N_i = 1 \quad (IV. 26b)$$

Avec : δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

On note également que l'équation (IV.24) détermine la surface plane actuelle à travers u_1, u_2 et u_3 . De la, l'utilisation de l'interpolation linéaire N_i résulte une approximation d'une surface courbée $u(x, y)$ par une fonction plane équation (IV.24), figure(IV.4).

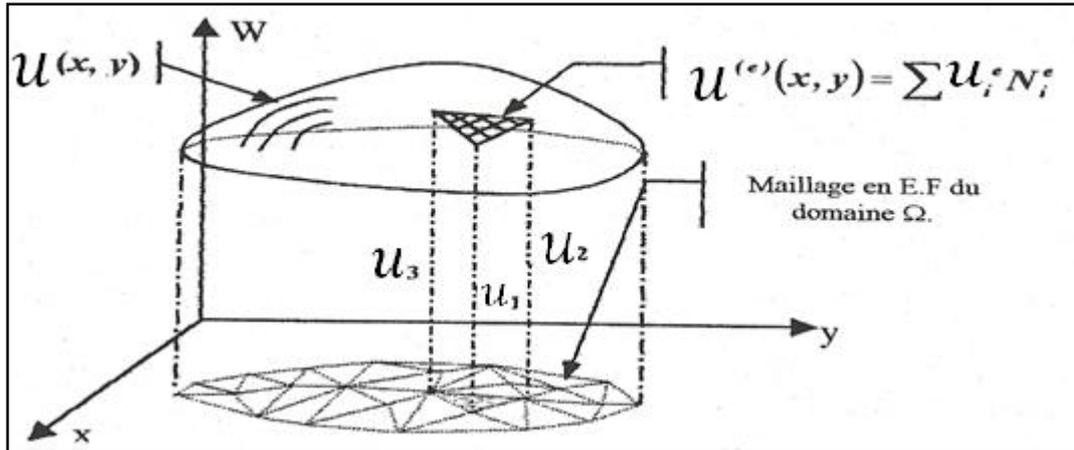


Figure (IV.4): Représentation de la fonction continue $u(x, y)$ par une fonction d'interpolation linéaire pour un exemple de triangle à 3 nœuds.

IV.6.4. Fonctions d'interpolations pour un élément quadrilatère a quatre nœuds:

En utilisant l'approximation polynomiale bilinéaire (IV.17) pour la variable u , on obtient le système suivant (IV.27) pour un élément quadrilatère à quatre nœuds figure (IV. 3 d). Les fonctions d'interpolations de cet élément sont déduites à partir de ce système par la procédure suivante.

$$\text{On a: } \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 + c_4 x_1 y_1 \\ u_2 = u_2(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 + c_4 x_2 y_2 \\ u_3 = u_3(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 + c_4 x_3 y_3 \\ u_4 = u_4(x_4, y_4) = c_1 + c_2 x_4 + c_3 y_4 + c_4 x_4 y_4 \end{cases} \quad (IV. 27)$$

En posant :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} ; \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} ; [H] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}$$

On aura:

$$\{u\} = [H]\{C\} \quad (IV. 28)$$

Alors: $\{C\} = [H]^{-1}\{u\}$

Ainsi que on pose: $\{L\} = [H]^{-1}$, tel que : $[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$

On aura : $\{C\} = [L]\{u\}$

Alors l'équation (IV.27) dans la forme générale (x, y) sera :

$$u(x, y) = [g][L]\{u\} \tag{IV. 29}$$

Tel que on note : $[g] = [1 \ x \ y \ xy]$

De la on utilisent (IV.10) et (IV.27) on obtient les fonctions d'interpolations N_i

$$[N] = [g][L]$$

Elles peuvent s'écrire donc sous la forme :

$$[N(x, y)] = [1 \ x \ y \ xy] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \tag{IV. 30}$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} N_1(x_1, y_1) \\ N_2(x_2, y_2) \\ N_3(x_3, y_3) \\ N_3(x_4, y_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy \\ L_{41} + L_{42}x + L_{43}y + L_{44}xy \end{Bmatrix} \tag{IV. 31}$$

IV.6.5. Fonctions d'interpolations pou un élément quadrilatères ou triangulaire à P nœud (P>4) :

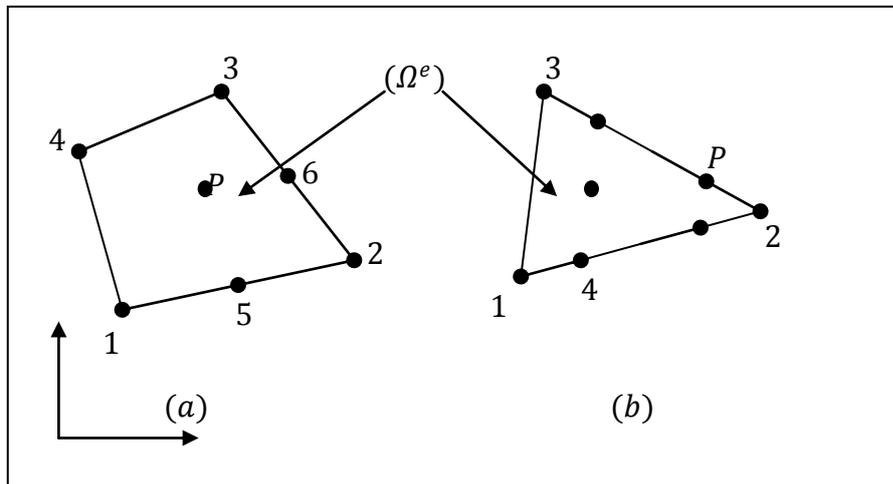


Figure (IV.5): Elément fini Ω^e de P nœuds.

L'élément fini (Ω^e) est un triangle de P nœuds Figure (IV.5a) ou quadrilatère à P nœuds Figure (IV.5 b). Tel que, pour aborder le calcul des coefficients des fonctions N_i on commence la numérotation des nœuds des sommets de l'élément fini dans le sens anti-horaire, en suite les nœuds des arêtes et puis dans la surface et le centre de l'élément.

Les coordonnées des nœuds $(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, P$ sont calculées comme suit :

- On calcul en premier lieu les $(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$ des sommets à partir des soubrountines de génération de maillage du domaine étudié (Voir le chapitre V), tel que $m = 3$ pour un triangle et $m = 4$ pour un quadrilatère.
- Puis on calcul les coordonnées des nœuds des arêtes à partir des coordonnées des sommets qui délimitent l'arête, par exemple :

$$x_{milieu} = \frac{x_{sommets\ 1} + x_{sommets\ 2}}{2}$$

$$y_{milieu} = \frac{y_{sommets\ 1} + y_{sommets\ 2}}{2}$$

- On choisi les coordonnées des nœuds de la surface et on calcul celles du centre de l'élément par les coordonnées des sommets (Voir le chapitre V).

On approxime la fonction $u(x, y)$ par :

$$u(x, y) = C_1 g_1(x, y) + C_2 g_2(x, y) + C_3 g_3(x, y) + \dots + C_i g_i(x, y) + \dots + C_p g_p(x, y)$$

$$u(x, y) = [g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y), \dots, g_p(x, y)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix} =$$

$$[G(x, y)].\{C\} \quad (IV.32)$$

Les fonctions d'interpolations de l'élément sont déduites à partir du système (IV.33) par la procédure suivante, On a :

$$u_i = u(x_i, y_i) = C_1 g_1(x_i, y_i) + C_2 g_2(x_i, y_i) + \dots + C_i g_i(x_i, y_i) + \dots + C_p g_p(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Sous la forme explicite et matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, y_1), g_2(x_1, y_1), \dots, g_p(x_1, y_1) \\ g_1(x_2, y_2), g_2(x_2, y_2), \dots, g_p(x_2, y_2) \\ g_1(x_3, y_3), g_2(x_3, y_3), \dots, g_p(x_3, y_3) \\ \vdots \\ g_1(x_p, y_p), g_2(x_p, y_p), \dots, g_p(x_p, y_p) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix} \quad (IV.33)$$

En posant :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{Bmatrix} ; \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix} ; [H] = \begin{bmatrix} g_1(x_1, y_1), g_2(x_1, y_1), \dots, g_p(x_1, y_1) \\ g_1(x_2, y_2), g_2(x_2, y_2), \dots, g_p(x_2, y_2) \\ g_1(x_3, y_3), g_2(x_3, y_3), \dots, g_p(x_3, y_3) \\ \vdots \\ g_1(x_p, y_p), g_2(x_p, y_p), \dots, g_p(x_p, y_p) \end{bmatrix}$$

$$\text{On aura : } \{u\} = [H]\{C\}$$

$$\text{Donc : } \{C\} = [H]^{-1}\{u\}$$

Tel que les éléments H_{ij} de la matrice $[H]$ sont calculés par :

$$H_{ij} = g_j(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

Posant :

$$[L] = [H]^{-1}, \quad \text{tel que} \quad [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1p} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2p} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & L_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{p1} & L_{p2} & L_{p3} & \dots & L_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\text{On aura : } \{C\} = [L]\{u\}$$

Substituant cette équation (IV.34) dans l'équation (IV.32), $u(x, y)$ sera:

$$\begin{aligned} u(x, y) \\ = [g(x, y)][L]\{u\} \end{aligned} \quad (\text{IV. 34})$$

De la, en utilisant l'équation (IV.10) et (IV.34) on obtient les fonctions d'interpolations N_i :

$$[N(x, y)] = [g(x, y)][L]$$

Elles peuvent s'écrire donc sous la forme:

$$[N(x, y)] = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ \dots \ x^m y^n] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1p} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2p} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & L_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{p1} & L_{p2} & L_{p3} & \dots & L_{pp} \end{bmatrix}$$

D'où:

$$\begin{Bmatrix} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \\ N_3(x, y) \\ N_i \\ N_p(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy + \dots + L_{1p}x^m y^m \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy + \dots + L_{2p}x^m y^m \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy + \dots + L_{3p}x^m y^m \\ \vdots \\ L_{p1} + L_{p2}x + L_{p3}y + L_{p4}xy + \dots + L_{pp}x^m y^m \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 35})$$

Ou bien:

$$N_i(x, y) = \sum_{j=1}^{j=p} L_{ij} g_j(x, y) \quad i = 1, 2, 3, \dots, p \quad (\text{IV. 36})$$

Remarque:

Il est parfois très utile d'utiliser les fonctions $g_i(x, y)$ comme la somme de plusieurs termes, dont le but est de rendre l'approximation symétrique et complète. Où elles ont la forme :

$$g_i(x, y) = x^{S1}y^{R1} + x^{S2}y^{R2} + \dots + x^{Si}y^{Ri} \Rightarrow g_i(x, y) = \sum_{n=1}^{n=i} x^{Sn} y^{Rn}$$

IV.7. Calcul des matrices d'éléments:

Le calcul de la matrice de rigidité de l'élément $[k^{(e)}]$ et le vecteur force $\{F^{(e)}\}$ dans l'équation (IV.13) par la méthode conventionnelle (par l'intégration exacte) est en général difficile.

Cependant, dans notre problème et avec les hypothèses optées, le deuxième membre de l'équation (IV.13) est une constante. Donc, il est possible d'évaluer les intégrales de surface dans les expressions de $[k^{(e)}]$ et $\{F^{(e)}\}$.

Pour une raison de simplicité, nous réécrivons comme étant la somme de deux matrices de base. : $[S^{11}]$ et $[S^{22}]$.

$$\text{c.à.d:} \quad [k^{(e)}] = [S^{11}] + [S^{22}] \quad (\text{IV.37a})$$

Avec:

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx dy \\ S_{ij}^{22} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \end{cases} \quad (\text{IV.37b})$$

Ainsi que nous avons :

$$F_i^{(e)} = - \int_{\Omega^e} f N_i dx dy \quad (\text{IV.38})$$

Maintenant, nous poursuivons le calcul des matrices dans les équations (IV.37) et (IV.38) en utilisant les fonctions d'interpolations développées dans la section précédente.

IV.7.1. Matrice d'élément pour un élément triangulaire linéaire [10]:

Pour un triangle quelconque, figure(IV.3a) les évaluations de la formule des intégrales exactes suivante :

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (\text{IV.39})$$

Sont données après un calcul mathématique en utilisant la formule de **Green** (paragraphe (IV.8))

L'aire du triangle:

$$I_{00} = A = \frac{1}{2} \{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\}$$

Les coordonnées moyennes:

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_{\Delta} x \, dx dy = A \bar{x} I_{01} = \int_{\Delta} y \, dx dy = A \bar{y} \\ I_{11} &= \oint_{\Delta} x y \, dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9 \bar{x} \cdot \bar{y} \right) \\ I_{20} &= \oint_{\Delta} x^2 \, dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 \bar{x}^2 \right) \\ I_{02} &= \oint_{\Delta} y^2 \, dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 \bar{y}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

En utilisant les fonctions d'interpolations (IV.25) dans les équations (IV.37b) et (IV.38) et notant que:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A} \quad , \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A}$$

Nous obtenons:

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j \\ S_{ij}^{22} = \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j \end{cases} \quad (\text{IV.41a})$$

$$\Rightarrow K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A} (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.41b})$$

Ainsi que, vu l'identité $\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y} = 2A/3$ [à partir des équations (IV.25), (IV.38) et (IV.40)], nous avons:

$$F_i^{(e)} = - \iint_A f \cdot N_i \, dx dy = - \frac{f}{2} (\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) = -f \frac{A}{3} \quad (\text{IV.42})$$

Et pour ce type de fonction d'interpolation N_i de trois termes, on a la relation mathématique suivante [30] :

$$\int_A N_i^a N_j^b = \frac{a! + b!}{(a + b + 2)!} 2A$$

Une fois les coordonnées des nœuds de l'élément sont connues, on peut calculer α_i , β_i et γ_i par l'équation (IV.25b) et les substituer dans les équations (IV.41 b) et (IV.42), pour obtenir les matrices et les vecteurs d'éléments

IV.7.2. Matrice de rigidité pour un élément quadrilatère bilinéaire:

L'élément quadrilatère à quatre nœuds est divisé en deux éléments triangulaires comme l'indique la figure (IV.6).

A l'aide de l'équation (IV.39) et les formules (IV.40) on peut calculer les intégrales concernant l'élément quadrilatère comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_{00} &= \int_{\Omega} dx dy = A_{123} + A_{134} \\
 I_{10} &= \int_{\Omega} x dx dy = A_{123} \bar{x}_{123} + A_{134} \bar{x}_{134} \\
 I_{01} &= \int_{\Omega} y dx dy = A_{123} \bar{y}_{123} + A_{134} \bar{y}_{134} \\
 I_{20} &= \int_{\Omega} x^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9\bar{x}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + 9\bar{x}_{134}^2) \\
 I_{02} &= \int_{\Omega} y^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9\bar{y}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (y_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + 9\bar{y}_{134}^2) \\
 I_{11} &= \int_{\Omega} xy dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9\bar{x}_{123} \bar{y}_{123}) \\
 &\quad + \frac{A_{134}}{12} (x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 9\bar{x}_{134} \bar{y}_{134})
 \end{aligned} \tag{IV.43}$$

Tel que:

$\bar{x}_{123}, \bar{y}_{123}$: Cordonnées du centre de gravité du triangle 123.

$$\bar{x}_{123} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \quad \bar{y}_{123} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$\bar{x}_{134}, \bar{y}_{134}$: Cordonnées du centre de gravité du triangle 134

$$\bar{x}_{134} = \frac{1}{3} (x_1 + x_3 + x_4), \quad \bar{y}_{134} = \frac{1}{3} (y_1 + y_3 + y_4)$$

A_{123}, A_{134} : Aires de la surface des triangles limités respectivement par les nœuds 1, 2, 3 et 1, 3, 4.

$$A_{123} = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$A_{134} = \frac{1}{2} \{ (x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_1) \}$$

* Ω : surface limité par un quadrilatère.

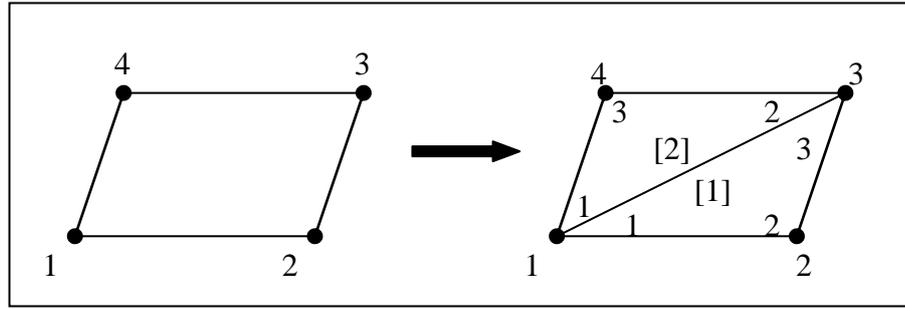


Figure (IV.6): Elément quadrilatère à quatre nœuds en décompositions.

En appliquant toujours les équations (IV.37), (IV.38), avec les fonctions d'interpolation (IV.31); on obtient :

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = L_{2i}L_{2j} \int_{\Omega} dx dy + (L_{2i}L_{4j} + L_{2j}L_{4i}) \int_{\Omega} y dx dy + L_{4i}L_{4j} \int_{\Omega} y^2 dx dy \\ S_{ij}^{22} = L_{3i}L_{3j} \int_{\Omega} dx dy + (L_{3i}L_{4j} + L_{3j}L_{4i}) \int_{\Omega} x dx dy + L_{4i}L_{4j} \int_{\Omega} x^2 dx dy \end{cases} \quad (IV.44a)$$

Sachant que:

$$[k^{(e)}] = [S^{11}] + [S^{22}]$$

Donc:

$$K_{ij} = (L_{2i}L_{2j} + L_{3i}L_{3j})I_{00} + (L_{2i}L_{4j} + L_{2j}L_{4i})I_{01} + (L_{3i}L_{4j} + L_{4i}L_{3j})I_{10} + (L_{4i}L_{4j})I_{02} + (L_{4i}L_{4j})I_{20} \quad (IV.44b)$$

$$F_i^{(e)} = -f \left[L_{i1} \int_{\Omega} dx dy + L_{i2} \int_{\Omega} x dx dy + L_{i3} \int_{\Omega} y dx dy + L_{i4} \int_{\Omega} xy dx dy \right]$$

$$F_i^{(e)} = L_{i1}I_{00} + L_{i2}I_{10} + L_{i3}I_{01} + L_{i4}I_{11} \quad (IV.44c)$$

IV.7.3. Matrice de rigidité pour un élément quadrilatère ou triangulaire à «p» nœuds (P>4):

A partir des formules des matrices de rigidité les équations (IV.37) et (IV.38) en utilisant les fonctions d'interpolation (IV.36) développées dans la section précédente, on détermine leurs termes comme suit [24] :

• Détermination de la matrice de rigidité [K]:

A partir de la relation (IV.36), on a :

$$\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \dots, \frac{\partial N_p}{\partial x} \right]$$

Avec:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = L_{1i} \frac{\partial g_1}{\partial x} + L_{2i} \frac{\partial g_2}{\partial x} + L_{3i} \frac{\partial g_3}{\partial x} + \dots + L_{ji} \frac{\partial g_j}{\partial x} + \dots + L_{pi} \frac{\partial g_p}{\partial x} \quad i = 1, 2, \dots, P$$

Donc:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^P L_{ji} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} \quad i = 1, 2, 3, \dots, P \quad (\text{IV. 45})$$

De même

$$\left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \dots, \frac{\partial N_p}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^P L_{ji} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} \quad i = 1, 2, 3, \dots, P \quad (\text{IV. 46})$$

Alors:

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy$$

Utilisant les relations (IV.45) et (IV. 46) dans la matrice $[K]$ pour les termes en 'i' et 'j', on trouve :

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^P L_{ki} \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial x} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} \\ + \sum_{k=1}^P L_{ki} \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial y} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} \end{array} \right] dx dy$$

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[\begin{array}{l} \left\{ L_{1i} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} + L_{2i} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} \right. \\ \left. + \dots + L_{pi} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_p(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} \right\} \\ + \left\{ L_{1i} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} + L_{2i} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} \right. \\ \left. + \dots + L_{pi} \cdot \sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_p(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} \right\} \end{array} \right] dx dy$$

Sous forme compacte, la matrice de rigidité $[K_{ij}]$ sera:

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[\left\{ \sum_{k=1}^P L_{ki} \left(\sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x} \right) \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^P L_{ki} \left(\sum_{m=1}^P L_{mj} \frac{\partial g_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y} \right) \right\} \right] dx dy$$

Après un réarrangement et un calcul mathématique, cette forme devient :

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{k=1}^P \sum_{m=1}^P L_{ki} L_{mj} \left[\iint_{\Omega^e} \left(\frac{\partial g_k(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \right] \quad (\text{IV. 47})$$

• **Détermination de vecteur force $\{F\}$:**

Substituant l'équation (IV.36) dans l'équation (IV.38), on aura :

$$F_i^{(e)} = \left[\iint_{\Omega^e} \sum_{m=1}^P L_{m,i} g_m(x, y) \right] dx dy \quad (IV.48)$$

Concéderons la fonction $g_m(x, y)$ sous la forme indiquée à la fin du paragraphe (IV.6.5) comme suit :

$$g_m(x, y) = x^{S1} y^{R1} + x^{S2} y^{R2} + \dots + x^{Sm} y^{Rm} \Rightarrow g_m(x, y) = \sum_{n=1}^{n=m} x^{Sn} y^{Rn} \quad (IV.49)$$

D'où les termes de dérivation deviennent :

$$\frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{n=m} S_n \cdot x^{S_n-1} y^{R_n} \quad , \quad \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{n=m} R_n \cdot x^{S_n} y^{R_n-1} \quad (IV.50)$$

A fin de faciliter la compréhension de la Procédure développée pour la programmation de cette partie de nos calculs, on donne deux exemples d'application avec la forme finale des matrices de rigidités;

Donc pour cela, on déclare deux sous matrices et un vecteur, tel qu'ils sont nommés par:

$$- X_{puisI} (NNPE, 3), Y_{puisI} (NNPE, 3)$$

Ou elles représentent S_m et R_m respectivement, qui sont les puissances de 'x' et 'y' de la fonction d'interpolation de l'équation (IV.49). Tel qu'on posé 3 colonnes comme Max suivant le nombre Max de sous termes dans chaque partie de cette fonction d'interpolation

- $Nterm(NNPE)$: C'est le nombre de termes existants dans chaque partie de la fonction d'interpolation généralement $Nterm = 1$, mais il existe des cas ou $Nterm = 2$ ou 3 . Avec: (NNPE) Représente le nombre de termes par élément, qui implique le nombre de termes d'interpolations, vu qu'on a un degré de liberté par nœud.

Exemple1:

Pour un élément à quatre nœuds, on peut parmi les plusieurs approximations de la fonction u de considérer la suivante :

$$u(x, y) = c_1 + C_2(x + y) + C_3xy + C_4(x^2 + y^2)$$

On a donc : $NNPE = 4 \Rightarrow$ un triangle à '4 nœuds' ou un quadrilatère à '4 nœuds'. Alors, on procède au remplissage des sous-matrices $X_{puisI}(4,3)$, $Y_{puisI}(4,3)$ et $Nterm(4)$ comme suit :

	$X_{puisI}(NNPE\ 3)$		
1	0	-	-
2	1	0	-
3	1	-	-
4	2	0	-

	$Y_{puisI}(NNPE\ 3)$		
0	-	-	
0	1	-	
1	-	-	
0	2	-	

	$Nterm(NNPE)$
	1
	2
	1
	2

Exemple 2:

Pour la fonction u suivante :

$$u(x, y) = C_1 + C_2x - C_3y + C_4y + C_5x^2 + C_6y^2 + C_7(x^3 + y^3) + C_8(x^2y + xy^2)$$

On a donc dans ce cas: $NNPE = 8 \Rightarrow$ un quadrilatère a '8 nœuds'. Alors, on procède au remplissage des tableaux comme suit.

	$X_{puisI}(NNPE\ 3)$		
1	0	-	-
2	1	-	-
3	0	-	-
4	1	-	-
5	2	-	-
6	0	-	-
7	3	0	-
8	2	1	-

	$Y_{puisI}(NNPE\ 3)$		
0	-	-	
0	-	-	
1	-	-	
1	-	-	
1	-	-	
0	-	-	
2	-	-	
0	3	-	
1	2	-	

	$Nterm(NNPE)$
	1
	1
	1
	1
	1
	1
	2
	2

De la, en utilisant les vecteurs précédemment développés et l'équation (IV.49), la relation (IV.48) devient :

$$F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} \left[\sum_{m=1}^{m=NNPE} L_{m,i} \cdot \sum_{n=1}^{n=Nterm(m)} x^{X_{puisI}(m,n)} y^{Y_{puisI}(m,n)} \right] f \cdot dx dy$$

Après un réarrangement mathématique, ce vecteur devient finalement :

$$F_i^{(e)} = -f \sum_{m=1}^{m=NNPE} L_{m,i} \sum_{n=1}^{n=Nterm(m)} \left[\iint_{\Omega^e} x^{X_{puisI}(m,n)} y^{Y_{puisI}(m,n)} dx dy \right]$$

$$F_i^{(e)} = -f \sum_{m=1}^{m=NNPE} L_{m,i} \sum_{n=1}^{n=Nterm(m)} [I_{XpuiI(m,n)YpuiI(m,n)}] \quad (IV.51)$$

Tel que le calcul de l'intégrale 'I_{m,n}' de l'équation (IV.51) sur un domaine quadrilatère ou triangle de 'NNPE' nœuds est donnée et bien montrée dans la prochaine section.

De même pour la relation (IV.47), en utilisant l'équation (IV.50), elle devient.

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{k=1}^{k=NNPE} \sum_{m=1}^{m=NNPE} L_{k,i} L_{m,j} \iint_{\Omega^e} \left(\begin{array}{l} \left\{ \sum_{n=1}^{n=Nterm} XpuiI(k,n) \cdot x^{XpuiI(k,n)-1} y^{YpuiI(k,n)} \right\} \\ \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{n=Nterm} XpuiI(m,l) \cdot x^{XpuiI(m,l)-1} y^{YpuiI(m,l)} \right\} \\ + \left\{ \sum_{n=1}^{n=Nterm} YpuiI(k,n) \cdot x^{XpuiI(k,n)} y^{YpuiI(k,n)-1} \right\} \\ \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{n=Nterm} YpuiI(m,l) \cdot x^{XpuiI(m,l)} y^{YpuiI(m,l)-1} \right\} \end{array} \right) dx dy \quad (IV.52)$$

Connaissons bien la relation suivante, avec a_i, b_i deux vecteur quelconque [10] :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} (a_i, b_j) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{j=n} b_j \right)$$

Alors l'équation (IV.52) après un réarrangement matématique en utilisant l'idée de l'équation précédente, elle devient finalement :

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{k=1}^{NNPE} \sum_{m=1}^{NNPE} L_{k,i} L_{m,j} \left[\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{Nterm(k)} \sum_{l=1}^{Nterm(m)} \left\{ \iint_{\Omega^e} XpuiI(k,n) XpuiI(m,l) \cdot x^{SPX-2} y^{SPY} dx \cdot dy \right\} \\ + \sum_{n=1}^{Nterm(k)} \sum_{n=1}^{Nterm(m)} \left\{ \iint_{\Omega^e} YpuiI(k,n) YpuiI(m,l) \cdot x^{SPX} y^{SPY-2} dx \cdot dy \right\} \end{array} \right] \quad (IV.53)$$

Avec:

$$SPX = XpuiI(k,n) + XpuiI(m,l)$$

$$SPY = YpuiI(k,n) + YpuiI(m,l)$$

Ce sont les somme des puissances de terme 'x' pour SPX et du 'y' pour SPY

Le calcul des intégrales de l'équation (IV.53) sur un domaine quadrilatéou triangle de NNPE nœuds est donnée et montrée aussi dans la prochaine section .

IV.8. Transformation de l'intégrale pour un triangle et un quadrilatère:

Soit:

$$I_{mn} = \iint_{\Delta} x^m y^n \cdot dx dy \quad (\text{IV.54})$$

La transformation de GREEN nous permet de transformer une intégrale double de surface à une intégrale simple curviligne le long de la frontière de l'élément considéré. Elle est donnée par [10], [34]:

$$\iint_{\text{surface}} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (F dx + G dy) \quad (\text{IV.55})$$

Pour qu'on puisse transformer l'intégrale (IV.54) pour un triangle en premier lieu, on peut considérer figure (IV.7), [24] :

$$G = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\partial F}{\partial y} = x^m y^n \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \frac{-x^m y^{n+1}}{n+1}$$

Alors:

$$I_{mn} = \oint_L \frac{-1}{n+1} x^m y^{n+1} dx$$

$$I_{mn} = \frac{-1}{n+1} \oint_L x^m y^{n+1} dx = \frac{-1}{n+1} \left\{ \int_{12} x^m y^{n+1} dx + \int_{23} x^m y^{n+1} dx + \int_{31} x^m y^{n+1} dx \right\} \quad (\text{IV.56})$$

- Sur le coté 12, figure (IV.7) son équation est donnée par : $y = ax + \beta$

On a pour deux points :

$$x = x_1 \rightarrow y = y_1 \quad \text{et} \quad x = x_2 \rightarrow y = y_2$$

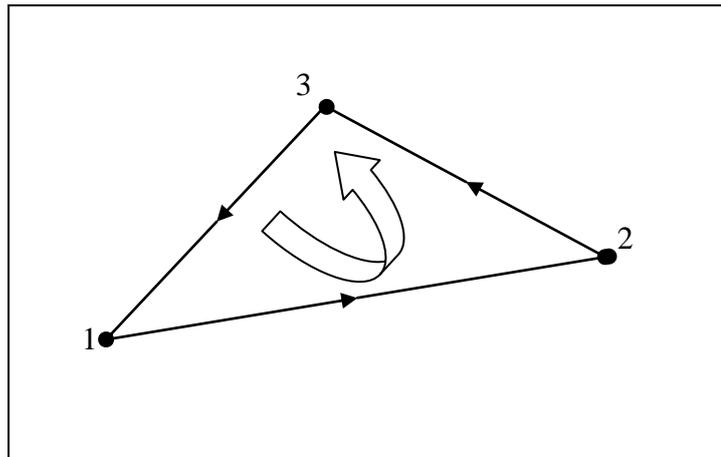


Figure (IV.7): Intégration le long du contour d'un triangle.

Alors:

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) + y_1$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + y_1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 \Rightarrow y = \alpha_{12}x + \beta_{12} \quad (\text{IV.57a})$$

- Sur le coté 23 de la même manière, on obtient:

$$\Rightarrow y = \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)x + y_2 - \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)x_2 \Rightarrow y = \alpha_{23}x + \beta_{23} \quad (\text{IV.57b})$$

- Sur le coté 31 de la même manière, on obtient:

$$\Rightarrow y = \left(\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}\right)x + y_3 - \left(\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}\right)x_3 \Rightarrow y = \alpha_{31}x + \beta_{31} \quad (\text{IV.57c})$$

En substituant les trois équations précédentes dans les 'y' de l'équation (IV.56), alors on obtient :

$$I_{mn} = \frac{-1}{n+1} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} x^m (\alpha_{12}x + \beta_{12})^{n+1} dx + \int_{x_2}^{x_3} x^m (\alpha_{23}x + \beta_{23})^{n+1} dx + \int_{x_3}^{x_1} x^m (\alpha_{31}x + \beta_{31})^{n+1} dx \right\} \quad (\text{IV.58a})$$

Tel que:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & ; & \quad \beta_{12} = y_1 - \alpha_{12}x_1 \\ \alpha_{23} &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} & ; & \quad \beta_{23} = y_2 - \alpha_{23}x_2 \\ \alpha_{31} &= \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} & ; & \quad \beta_{31} = y_3 - \alpha_{31}x_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.58b})$$

A fin de permettre de calculer l'intégrale par la méthode la plus convenable et efficace qui est celle de GAUSS-LEGENDRE, on transforme la relation (IV.58) dans l'intervalle [+1, -1].

On a pour l'équation : $x = a.Z + b$

- $Z = -1 ; x = x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 - x_1}{2}Z + \frac{x_1 + x_2}{2}$
- $Z = +1 ; x = x_2 \Rightarrow x = \frac{x_3 - x_2}{2}Z + \frac{x_2 + x_3}{2}$
- $Z = -1 ; x = x_2 \Rightarrow x = \frac{x_3 - x_2}{2}Z + \frac{x_2 + x_3}{2}$
- $Z = +1 ; x = x_3 \Rightarrow x = \frac{x_1 - x_3}{2}Z + \frac{x_1 + x_3}{2}$
- $Z = -1 ; x = x_3 \Rightarrow x = \frac{x_1 - x_3}{2}Z + \frac{x_1 + x_3}{2}$
- $Z = +1 ; x = x_1 \Rightarrow x = \frac{x_1 - x_3}{2}Z + \frac{x_1 + x_3}{2}$

Alors:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} x^m (\alpha_{12}x + \beta_{12})^{n+1} dx &= \int_{-1}^{+1} \left[\frac{x_2 - x_1}{2}Z + \frac{x_1 + x_2}{2} \right]^m \\ &\quad \cdot \left[\alpha_{12} \left(\frac{x_2 - x_1}{2}Z + \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \beta_{12} \right]^{n+1} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) dZ \end{aligned}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x^m (\alpha_{12}x + \beta_{12})^{n+1} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2^m} [(x_2 - x_1)Z + (x_1 + x_2)]^m \cdot \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} Z + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2 + x_1}{2} + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \right]^{n+1} \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) dZ$$

Notant:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Donc, en substituant cette relation dans l'équation précédente, on aura :

$$\int_{x_1}^{x_2} x^m (\alpha_{12}x + \beta_{12})^{n+1} dx = \frac{(x_2 - x_1)}{2^{m+n+2}} \int_{-1}^{+1} [(x_2 - x_1)Z + (x_1 + x_2)]^m \cdot [(y_2 - y_1)Z + (y_1 + y_2)]^{n+1} dZ \quad (\text{IV.59})$$

De même pour les autres termes :

$$\int_{x_2}^{x_3} x^m (\alpha_{23}x + \beta_{23})^{n+1} dx = \frac{(x_3 - x_2)}{2^{m+n+2}} \int_{-1}^{+1} [(x_3 - x_2)Z + (x_3 + x_2)]^m \cdot [(y_3 - y_2)Z + (y_3 + y_2)]^{n+1} dZ \quad (\text{IV.60})$$

$$\int_{x_3}^{x_1} x^m (\alpha_{31}x + \beta_{31})^{n+1} dx = \frac{(x_1 - x_3)}{2^{m+n+2}} \int_{-1}^{+1} [(x_1 - x_3)Z + (x_1 + x_3)]^m \cdot [(y_1 - y_3)Z + (y_1 + y_3)]^{n+1} dZ \quad (\text{IV.61})$$

En remplaçant les relations (IV.59), (IV.60) et (IV.61) dans (IV.58) on obtient :

$$I_{mn} = \frac{-1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{m+n+2}} \left\{ (x_2 - x_1) \int_{-1}^{+1} [(x_2 - x_1)Z + (x_1 + x_2)]^m [(y_2 - y_1)Z + (y_1 + y_2)]^{n+1} dZ \right. \\ \left. + (x_3 - x_2) \int_{-1}^{+1} [(x_3 - x_2)Z + (x_3 + x_2)]^m [(y_3 - y_2)Z + (y_3 + y_2)]^{n+1} dZ \right. \\ \left. + (x_1 - x_3) \int_{-1}^{+1} [(x_1 - x_3)Z + (x_1 + x_3)]^m [(y_1 - y_3)Z + (y_1 + y_3)]^{n+1} dZ \right\}$$

Finalement l'intégrale sera pour un triangle quelconque :

$$I_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2^{m+n+2} \cdot (n+1)} (x_1 - x_2) \left\{ \int_{-1}^{+1} [-(x_2 - x_1)Z + (x_2 + x_1)]^m [(y_2 - y_1)Z + (y_2 + y_1)]^{n+1} dZ \right. \\ \left. + (x_2 - x_3) \int_{-1}^{+1} [-(x_2 - x_3)Z + (x_3 + x_2)]^m [-(y_2 - y_3)Z + (y_3 + y_2)]^{n+1} dZ \right\}$$

$$+(x_3 - x_1) \int_{-1}^{+1} [-(x_3 - x_1)Z + (x_1 + x_3)]^m [-(y_3 - y_1)Z + (y_1 + y_3)]^{n+1} dZ \quad (IV.62)$$

On peut démontrer la relation suivante pour un quadrilatère. Pour plus de détails voir [24] :

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(2)} = & \frac{1}{(n+1)} \int_{-1}^{+1} \frac{(x_1 - x_2)}{2} \left[\frac{-(x_1 - x_2)}{2} Z + \frac{(x_2 + x_1)}{2} \right]^m \left[\frac{-(y_1 - y_2)}{2} Z + \frac{(y_2 + y_1)}{2} \right]^{n+1} \\ & + \frac{1}{(n+1)} \frac{(x_2 - x_3)}{2} \left[\frac{-(x_2 - x_3)}{2} Z + \frac{(x_2 + x_3)}{2} \right]^m \left[\frac{-(y_2 - y_3)}{2} Z + \frac{(y_2 + y_3)}{2} \right]^{n+1} \\ & + \frac{1}{(n+1)} \frac{(x_3 - x_4)}{2} \left[\frac{-(x_3 - x_4)}{2} Z + \frac{(x_3 + x_4)}{2} \right]^m \left[\frac{-(y_3 - y_4)}{2} Z + \frac{(y_3 + y_4)}{2} \right]^{n+1} \\ & + \frac{1}{(n+1)} \frac{(x_4 - x_1)}{2} \left[\frac{-(x_4 - x_1)}{2} Z + \frac{(x_4 + x_1)}{2} \right]^m \left[\frac{-(y_4 - y_1)}{2} Z + \frac{(y_4 + y_1)}{2} \right]^{n+1} dZ \quad (IV.63) \end{aligned}$$

Sous la forme compacte :

$$I_{mn}^{(I\ TYPE)} = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{+1} F(Z) dZ \quad (IV.63^*)$$

Dans le même but de génération les nœuds relations précédentes de I_{mn} (IV.62) et (IV.63), on définit 4 vecteurs « XDIF(i), XSOM(i), YDIF(i), et YSOM(i) », afin de parvenir les somations et les soustractions des coefficients de la fonction $F(Z)$ pour les abscisses ‘x’ et ‘y’.

Ainsi qu’on déclare un exposant ‘ITYPE’ égale à ‘1’ pour l’élément fini triangle ou égale à ‘2’ pour l’élément fini quadrilatère. Alors on a:

- **Pour triangle (ITYPE=1):**

$$\begin{aligned} XDIF(1) &= (x_1 - x_2)/2 & XSOM(1) &= (x_1 + x_2)/2 \\ XDIF(2) &= (x_2 - x_3)/2 & XSOM(2) &= (x_2 + x_3)/2 \\ XDIF(3) &= (x_3 - x_1)/2 & XSOM(3) &= (x_3 + x_1)/2 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} YDIF(1) &= (y_1 - y_2)/2 & YSOM(1) &= (y_1 + y_2)/2 \\ YDIF(2) &= (y_2 - y_3)/2 & YSOM(2) &= (y_2 + y_3)/2 \\ YDIF(3) &= (y_3 - y_1)/2 & YSOM(3) &= (y_3 + y_1)/2 \end{aligned}$$

- **Pour un quadrilatère (ITYPE =2) :**

C’est les mêmes vecteurs et expressions sauf qu’on modifie les dernières par :

$$\begin{aligned} XDIF(3) &= (x_3 - x_4)/2 & XSOM(3) &= (x_3 + x_4)/2 \\ YDIF(3) &= (y_3 - y_4)/2 & YSOM(3) &= (y_3 + y_4)/2 \end{aligned}$$

Et on ajoute les expressions (pour i=4) :

$$XDIF(4) = (x_4 - x_1)/2 \quad XSOM(3) = (x_4 + x_1)/2$$

$$YDIF(4) = (y_4 - y_1)/2 \quad YSOM(3) = (y_4 + y_1)/2$$

Alors, on peut les expliciter par une boucle de programme qui englobe toutes ces expressions. Pour la mise en clarté de cette idée, on expose sa partie du programme suivante.

Tel que 'xx' et 'yy' sont les coordonnées locales des sommets de nombre '2+ITYPE' d'un élément fini quelconque :

```
C*****REEMPLISSAGE DES VECTEURS DE LA FONCTION F*****
DO 240 i=1,2+ITYPE
  j=j+1
  IF (j.GT.2+ITYPE ) j=1
  XDIF(i) = (xx(i)-xx(j))/2.
  XSOM(i) = (xx(i)+xx(j))/2.
  XDIF(i) = (yy(i)-yy(j))/2.
  YSOM(i) = (yy(i)+yy0)/2.
240 CONTINUE
```

En fin, la forme générale des équations (IV.62) et (IV.63) s'écrit :

$$I_{mn} = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_{i=1}^{i=ITYPE+2} XDIF(i)[-XDIF(i).Z + XSOM(i)]^m \right. \\ \left. .[-YDIF(i).Z + YSOM(i)]^{n+1} dZ \right. \quad (IV.64)$$

D'où, la fonction F à intégrer de l'équation (IV.63*) a la forme :

$$F(Z) = \sum_{i=1}^{i=ITYPE+2} XDIF(i)[-XDIF(i)Z + XSOM(i)]^m \\ .[-YDIF(i)Z + YSOM(i)]^{n+1} \quad (IV.65)$$

Pour le détail sur la méthode de GAUSS-LEGENDRE et la procédure d'intégration de l'équation (IV.63*) tel que la fonction 'F' est donnée par l'équation (IV.65), Annexe B.

IV.9. Assemblage des matrices d'éléments:

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale $[K]$ et le vecteur global $\{F\}$ à partir des matrices élémentaires $[K^{(e)}]$ et des vecteurs élémentaires $\{F^{(e)}\}$ des éléments finis du domaine complet.

Pour représenter l'assemblage des matrices d'éléments finis, nous illustrons la procédure en considérant que le maillage est construis par deux éléments triangulaires.

Soient $[K_{ij}^{(1)}]$ et $[K_{ij}^{(2)}]$ ($i, j = 1, 2, 3$) les coefficients des matrices de rigidité correspondant à ces éléments Le maillage d'éléments finis est présenté dans la figure (IV.8).

A partir de ce maillage, nous notons la correspondance entre les valeurs globales et les valeurs nodales d'éléments.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(1)} & , & & u_2 &= u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \\ u_3 &= u_3^{(1)} = u_3^{(2)} & , & & u_4 &= u_2^{(2)} \end{aligned} \quad (IV.66)$$

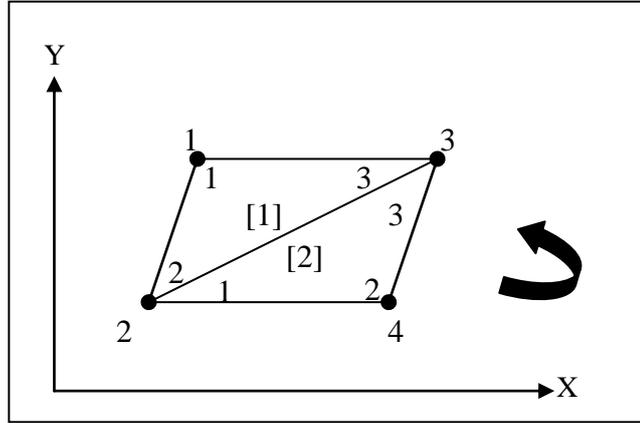


Figure (IV.8): Assemblage des deux éléments triangulaires à 3.

Pour l'élément (1) :

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} \end{bmatrix}$$

La matrice assemblée sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{23}^1 + K_{13}^2 & K_{12}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{31}^2 & K_{33}^1 + K_{33}^2 & K_{32}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{23}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Pour l'élément (2) :

$$[K^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

En suit, nous utilisons les conditions de continuité d'inter élément (IV.66) pour assembler les équations d'élément fini.

$$n_1 = 3 \quad , \quad n_2 = 3$$

$$\sum_{e=1}^2 \{\delta u^{(e)}\}^T ([K^{(e)}]\{u^{(e)}\} - \{F^{(e)}\}) = \sum_{e=1}^2 \sum_{i=1}^{n_e} \delta u_i^{(e)} \left[\sum_{j=1}^{n_e} K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} - F_i^{(e)} \right] = 0 \quad (IV.67)$$

Collectant les coefficients de $\delta u_i^{(e)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), séparément et mettant eux en zéros, nous obtenons après un réarrangement le système sous forme matricielle suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{23}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{21}^2 & K_{33}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_3^{(1)} + F_3^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad (IV68)$$

La procédure d'assemblage décrit précédemment, peut nous permet d'éviter l'équation algébrique très lente (IV.67), en se rendant directement après l'assemblage donc à l'équation (IV.68).

Un examen final du maillage des éléments finis de la figure (IV.8) montre les correspondances suivantes entre les nœuds globaux pairs et les nœuds des éléments pairs.

Tableau (IV.1): Correspondances entre les nœuds globaux et les nœuds des éléments.

Numérotation globale	Les nœuds globaux	Les nœuds de l'élément
1	(1,1)	(1,1) de l'élément 1
-	(1,2)	(1,2) de l'élément 1
-	(1,3)	(1, 3) de l'élément 1
-	(1,4)	Aucune correspondance
2	(2,2)	(2,2) de l'élément 1 et (1,1) de l'élément 2
-	(2, 3)	(2, 3) de l'élément 1 et (1,3) de l'élément 2
-	(1,4)	(1,2) de l'élément 2
3	(3,3)	(3,3) de l'élément 1 et (3,3) de l'élément 2
-	(3,4)	(3,2) de l'élément 2
4	(4,4)	(2,2) de l'élément 2

Cette correspondance nous donne un chemin facile d'assemblage des matrices des éléments finis pour obtenir les coefficients de la matrice globale avec des entiers convenables.

Par exemple, l'emplacement des coefficients (1,2) de la matrice globale contient $K_{12}^{(1)}$, l'emplacement du (1,4) de la matrice globale ne contient aucune correspondance, et l'emplacement(3,3) contient $K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)}$...etc.

Alors, la correspondance entre les nœuds globaux et les nœuds d'éléments, nous fournit finalement une méthode d'assemblage des matrices de rigidités adéquate pour obtenir les coefficients globaux de la matrice de rigidité globale (du domaine approprié).

Finalement, La figure (IV.9) montre un maillage d'assemblage de deux éléments quadrilatères typique ayant '8' nœuds : sur les sommets et au milieu des arêtes, de chaque élément.

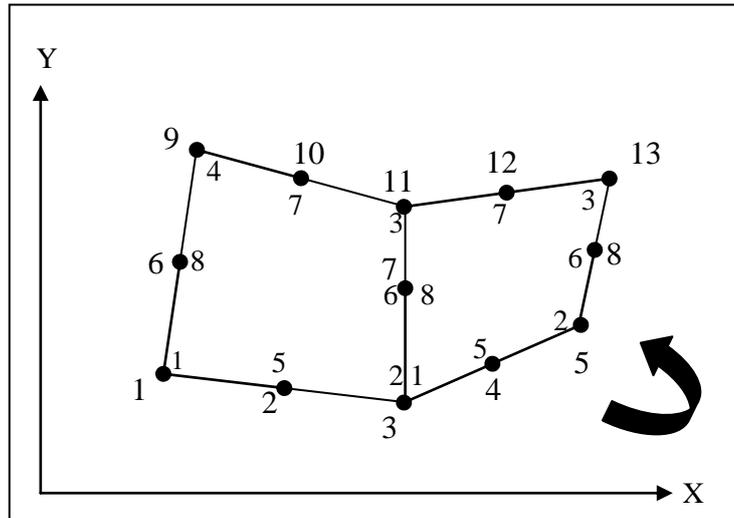


Figure (IV.9): Assemblage de deux éléments quadrilatères à 8 nœuds.

De la même manière que le maillage à deux triangles, le système final déterminé après l'assemblage de ces deux éléments quadrilatères à 8 nœuds est le suivant :

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^1 & K_{15}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & K_{18}^1 & K_{16}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{17}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\
 & K_{55}^1 & K_{52}^1 & 0 & 0 & K_{58}^1 & K_{56}^1 & 0 & K_{54}^1 & K_{57}^1 & K_{53}^1 & 0 & 0 \\
 & & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{15}^2 & K_{12}^2 & K_{28}^1 & K_{26}^1 + K_{18}^2 & K_{16}^2 & K_{24}^1 & K_{27}^1 & K_{23}^1 + K_{14}^2 & K_{17}^2 & K_{13}^2 \\
 & & & K_{55}^2 & K_{52}^2 & 0 & K_{58}^2 & K_{56}^2 & 0 & 0 & K_{54}^2 & K_{57}^2 & K_{53}^2 \\
 & & & & K_{22}^2 & 0 & K_{28}^2 & K_{26}^2 & 0 & 0 & K_{24}^2 & K_{27}^2 & K_{23}^2 \\
 & & & & & K_{88}^1 & K_{86}^1 & 0 & K_{84}^1 & K_{87}^1 & K_{83}^1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & K_{66}^1 + K_{88}^2 & K_{86}^2 & K_{64}^1 & K_{67}^1 & K_{63}^1 + K_{84}^2 & K_{87}^2 & K_{83}^2 \\
 & & & & & & & K_{66}^2 & 0 & 0 & K_{64}^2 & K_{67}^2 & K_{63}^2 \\
 & & & & & & & & K_{44}^1 & K_{47}^1 & K_{43}^1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & K_{77}^1 & K_{73}^1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & K_{33}^1 + K_{44}^2 & K_{47}^2 & K_{43}^2 \\
 & & & & & & & & & & & K_{77}^2 & K_{73}^2 \\
 & & & & & & & & & & & & K_{33}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9 \\
 u_{10} \\
 u_{11} \\
 u_{12} \\
 u_{13}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1^1 \\
 F_5^1 \\
 F_2^1 + F_1^2 \\
 F_5^2 \\
 F_2^2 \\
 F_8^1 \\
 F_6^1 + F_8^2 \\
 F_6^2 \\
 F_4^1 \\
 F_7^1 \\
 F_3^1 + F_4^2 \\
 F_7^2 \\
 F_3^2
 \end{Bmatrix}$$

Symétrie

V.1. Introduction:

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite dans le chapitre précédent, nécessite l'utilisation des méthodes numériques variées et puissantes pour résoudre le système algébrique qui en résulte. Ces équations se résolvent dans un domaine discret, en passant d'un milieu continu à un milieu discrétisé.

Ce chapitre donne la description de la méthode et les procédures adaptées à la génération de maillage sur les domaines étudiés soit simplement ou multi connexes bidimensionnels.

V.2. Aspect de la génération de maillage:

La génération de maillage est une partie importante de la modélisation des problèmes de calcul des structures par la méthode des éléments finis. Pour cela, le développement des méthodes numériques rapides et efficaces est l'objectif principal de cette procédure.

Alors, il existe plusieurs types de domaine selon la forme de sa frontière, ainsi qu'il existe plusieurs méthodes ou techniques de génération de maillage, selon le degré de complexité du même domaine, mais le maillage doit toujours vérifier les conditions suivantes [24] :

- Une adaptation aux frontières, et aux conditions aux limites.
- Une adaptation aux propriétés des différentes régions du domaine physique.
- Une bonne régularité.

Le but de cette partie donc, est de donner un rappel sur ces types de domaines et les techniques de génération de maillage.

V.2.1. Concept des différents types des domaines:

Le domaine est une collection de points dans une région de l'espace avec la propriété que si P est un point dans le domaine, alors tous les points qui sont suffisamment près de P appartiennent au domaine. La propriété implique que le domaine se constitue uniquement des points intérieurs. Si deux points quelconques, du domaine peuvent être reliés par une ligne entièrement étendue à l'intérieur du domaine, alors le domaine se dit d'être convexe (courbé) et simplement connexe. La limite du domaine est un ensemble de points tel que dans n'importe quel voisinage de chacun de ces points il y a des points qui appartiennent au domaine aussi bien que d'autres points ne le sont pas [2].

Notons de la définition du domaine que les points dans la frontière n'appartiennent pas au domaine. Dans notre étude, on doit prendre en considération les domaines qui sont

connectés par multiplication, figure (V.1). On doit utiliser le symbole (Ω) pour dénoter un domaine arbitraire et (Γ) pour dénoter sa frontière.

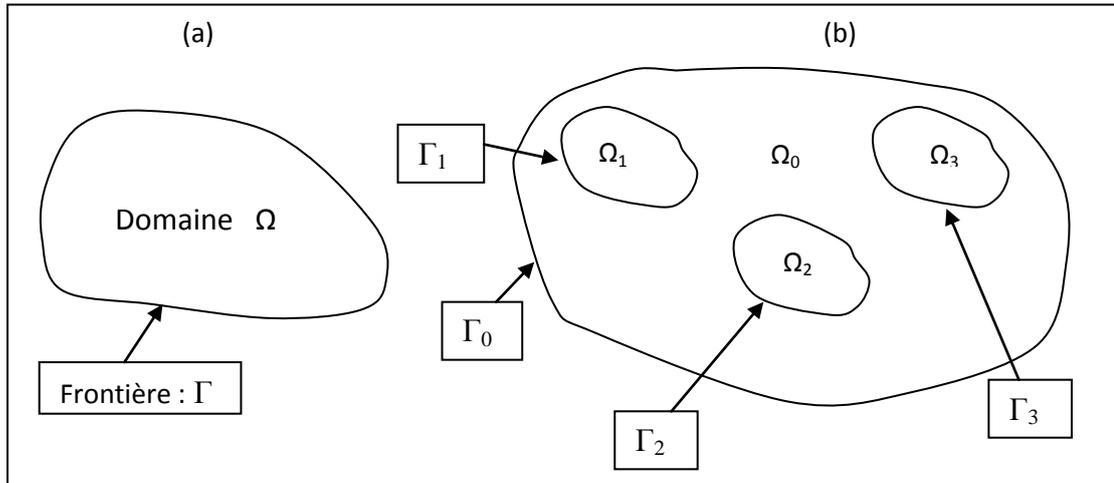


Figure (V.1): Connexité d'un domaine quelconque. (a) Domaine simplement connexe. (b) Domaine multi-connexes.

$$\Gamma = \Gamma_0 + (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)$$

$$\Omega = \Omega_0 + (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3)$$

V.2.1.a. Région simplement connexe:

Une région de l'espace est dite simplement connexe si toutes les courbes reliant deux points quelconques sont conciliables (ou réductible) par variation continue. Ou bien en d'autre terme, si tout contour fermé dans cette région peut être réduit à un point par déformation continue sans jamais quitter la région, figure (V.1a).

V.2.1.b. Région doublement et multi connexes:

Une région de l'espace est dite doublement connexe s'il n'existe que deux chemins non conciliables pour relier deux points quelconques ou bien que toutes les courbes reliant deux points quelconques puissent être classées en deux familles [32]. Dans cette région, il n'existe alors qu'un seul contour fermé irréductible.

On peut facilement généraliser ces concepts pour définir des régions multi-connexes en terme du nombre de contours irréductibles, figure (V.1b).

V.2.2. Classification des techniques de génération de maillage:

Il existe plusieurs méthodes et techniques de génération de maillage que se soit triangulaires ou quadrilatères. Rappelons que ces méthodes peuvent se classer en deux catégories. La première consiste à générer une grille de nœuds dans le domaine et sa

frontière, en discrétisant la géométrie physique continue vers le domaine discret, tout en conservant sa forme et ses frontières. Or l'autre consiste à transformer le domaine discret (la grille de nœuds compliquée) vers un domaine computationnel (de calcul), caractérisé par un maillage simple dans sa forme et les pas de discrétisation. Citons à titre exemple les méthodes suivantes qu'on peut les trouver dans la littérature et les références indiquées.

Notre but ici, ce n'est pas de faire une synthèse sur les méthodes existantes, mais pour fixée les idées nous donnons uniquement le nom de la méthode.

- Maillage algébrique par interpolation linéaire entre deux parois [31].
- Maillage structuré par résolution de l'équation de Laplace [31].
- Maillage structuré de type 'O', 'C' et autres par coupure [31].
- Maillage structuré par la technique des transformations conformes [32].
- Maillage structuré par la méthode de variable complexe.
- Maillage structuré par la méthode de Gilding [32] et [31].
- Maillage structuré par technique de multi surface.
- Maillage non structuré par la triangulation de Delaunay.
- Maillage triangulaire non structuré de Klenstreurer.
- Maillage par la méthode de résolution des équations aux dérivées partielles.

La liste des méthodes existantes reste ouverte, il suffit uniquement de consulter les références pour faire le choix de la méthode qui convient pour le domaine considéré. Ici dans notre modeste travail, on va utiliser la technique algébrique qui donne un maillage structuré. Les maillages qu'on va obtenir sont de types 'H', 'O' et 'C'.

Tel qu'ils sont modifiés et adapter pour les différents types d'éléments finis et selon nos géométries choisies, dont les cellules sont de formes quadrilatères qu'on peut facilement les transformer en des cellules triangulaires.

V.3. Procédures de génération de maillage:

Les différents domaines optés à l'application de génération du maillage et à l'exécution de leurs souboutines réalisées dans notre programme principal, sont donnés en détaille dans le chapitre (VII) des résultats. Tel que, la liste reste ouverte pour d'autres géométries à adapter selon le besoin du constructeur.

Vu cette diversité de géométries, on a jugé opportuns de décrire la procédure de génération des maillages suivant la démarche citée au paragraphe précédent, c.à.d simplement connexe et multi connexes.

V.3.1. Configuration simplement connexe:

Pour faire la génération de maillage d'un domaine simplement connexe dont la forme générale est donnée par la figure (V.2), et parmi les plusieurs méthodes et techniques existantes et suivant la méthode de résolution du système algébrique ainsi que la manière de considération de la forme de la matrice de rigidité, il est très intéressant d'appliquer l'idée de génération de maillage dans les régions rectangulaires.

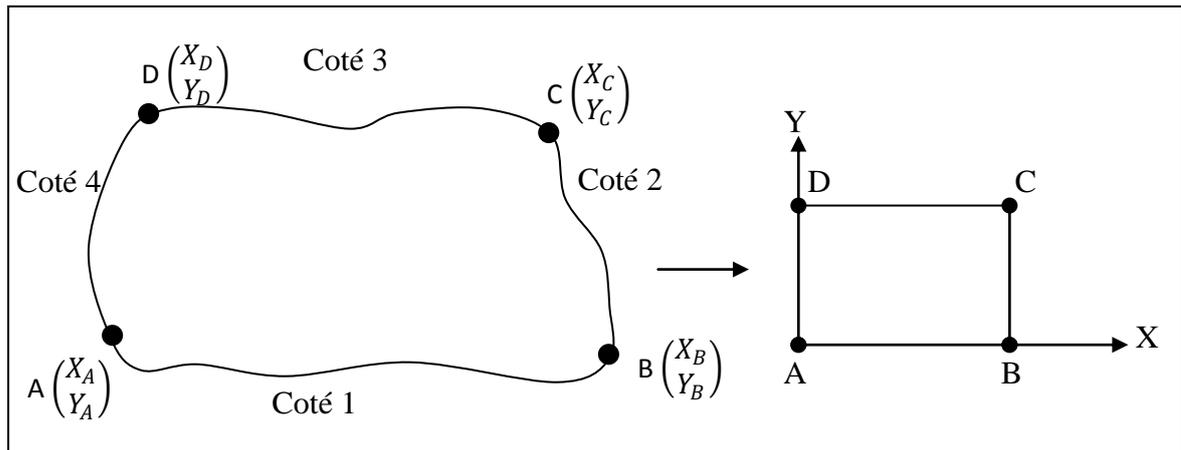


Figure (V.2): Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle.

On obtient par conséquent quatre cotés qui sont respectivement AD, AB, BC et CD. Si on fait des transformations continues à chaque cotés, on peut les rendre des lignes de droites comme le montre la figure précédente. Alors le coté AB du domaine joue le rôle de la partie basse du rectangle. Le coté CD est celui de la partie haute du rectangle. Les cotés AD et BC sont ceux de la partie gauche et droite du rectangle.

Pour ce rectangle, considérons la subdivision par N_x et N_y nœuds sur l'axe horizontal des x et vertical des y respectivement. Par analogie, les cotés AB et CD du domaine seront subdivisés en N_x nœuds et les cotés AD et BC seront subdivisés en N_y nœuds. Pour cela, on procède à la génération suivant deux étapes principales. La première étape c'est la génération des nœuds de frontière de chaque cotés puis l'étape de génération des nœuds internes.

V.3.1.1. Génération des nœuds sur le contour du domaine:

Plusieurs procédures peuvent être considérées et cela suivant la disposition de la courbure de chaque cotés. Dans le cas général, il n'est pas facile de procéder à une méthode universelle qui sera applicable pour n'importe quelles courbes, mais on essaye d'adapter pour chaque forme complexe une procédure convenable, sans oublier de dire que le choix des points A, B, C et D influe sur la forme des quatre cotés du domaine.

Parmi les critères de choix des positions des points A, B, C et D est que les fonctions sur les cotés AB, BC, CD et DA doivent être univoque en x ou y, c'est-à-dire, pour chaque valeur de x il y a une image sur les cotés AB et CD. En ce qui concerne les fonctions qui passent par les points AD et BC, elles doivent être aussi univoques mais en y.

Par exemple, la courbe suivante, figure (V.3), est multivoque en x et y. Dans ce cas, pour rendre les cotés univoques, il faut faire soit :

- Changer les positions des points A, et B.
- Subdiviser le domaine en quelques blocs de tel sorte que les cotés soient univoques.

Ici, il faut respecter la continuité de passage des nœuds entre les blocs.

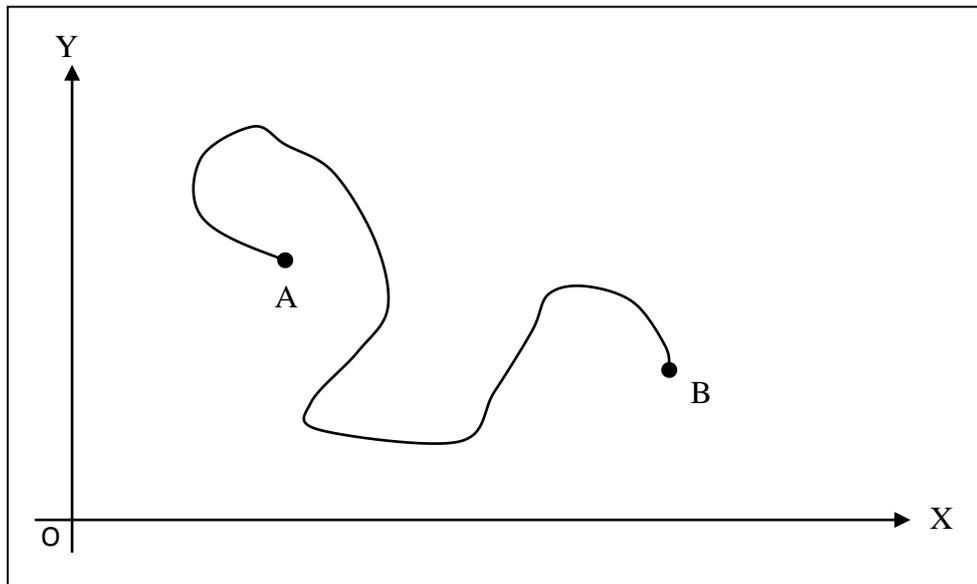


Figure (V.3): Courbe d'une fonction multivoque.

Dans ce qui suit, on suppose que les fonctions des cotés choisies du domaine sont univoques. Considérons les cotés AB et CD. Les positions des points A, B, C et D sont données. On regarde ensuite est ce qu'on divise le segment $[x_A, x_B]$ en Nx nœuds pour déterminer les y_i ($i = 1, 2, \dots, Nx$) correspondantes ou, de diviser le segment $[y_A, y_B]$ en Nx nœuds puis déterminer les x_i ($i = 1, 2, \dots, Nx$). Pour prendre décision, on essaye de calculer les valeurs suivantes :

$$x_{dis} = |x_B - x_A| \quad ; \quad y_{dis} = |y_B - y_A| \tag{V.1}$$

On calcul la valeur maximale entre x_{dis} et y_{dis} par:

$$d_{max} = \text{Max}(x_{dis}, y_{dis}) \tag{V.2}$$

Si $d_{max} = x_{dis}$: on propose les valeurs des x_i ($i = 1, 2, \dots, Nx$) ensuite on détermine les y_i en utilisant la fonction qui passe par les points A et B du coté AB. Dans certain cas, pour prendre décision, il est mieux de voir encore si la fonction est donnée par $y = f_{AB}(x)$ ou $x = g_{AB}(y)$ Pour ne Pas calculer la fonction inverse.

On suppose qu'on a fait le choix des x_i ensuite calculer les y_i alors, on divise le segment $[x_A, x_B]$ en Nx nœuds dont les points A et B sont inclus.

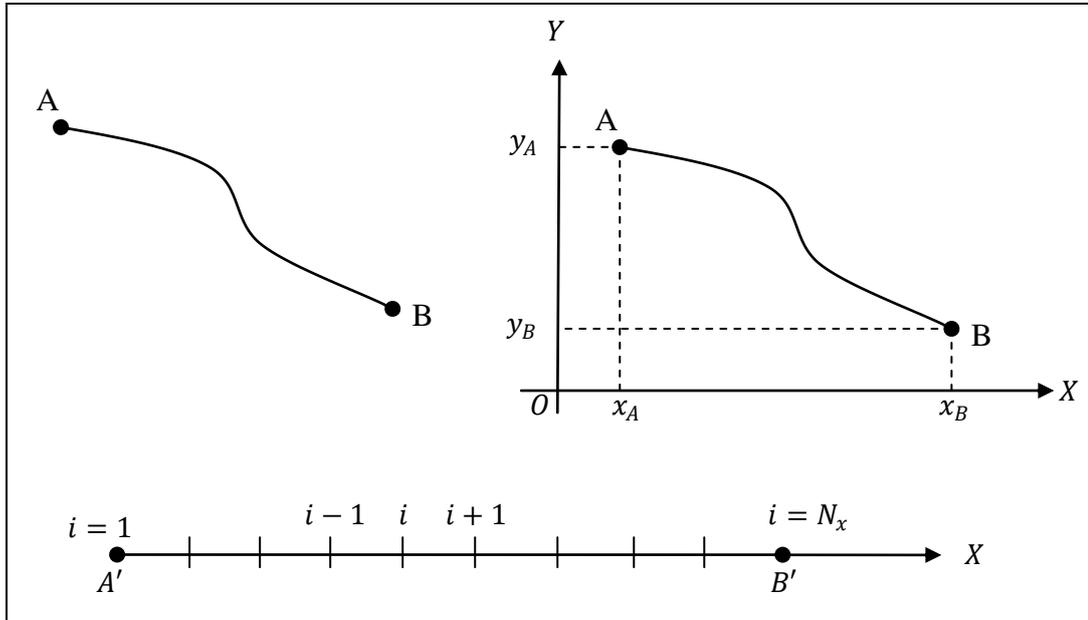


Figure (V.4): Discretisation sur le coté AB.

Avec: A' et B' projections des points A et B respectivement sur l'axe horizontal des x.

Pour simplifier, on choisit un pas constant de subdivision et si le coté est courbé au voisinage du point A ou B ou n'importe quelle région, il est recommandé d'utiliser une procédure de condensation des nœuds, dont on propose sa procédure dans un prochain paragraphe. On obtient, par conséquent $(Nx - 1)$ sous intervalles. La longueur de chaque intervalle est donnée par :

$$\Delta x_{AB} = \frac{|x_B - x_A|}{(Nx - 1)} \tag{V.3}$$

Les abscisses des points de ce coté sont données par :

$$x_{AB}(i) = x_A + (i - 1)\Delta x_{AB} \quad i = 1, 2, 3, \dots, Nx \tag{V.4}$$

Avec :

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad ; \quad x_{AB}(i = 1) = x_A \\ i = Nx & \quad ; \quad x_{AB}(i = Nx) = x_B \end{aligned}$$

Les ordonnées des points sont données par :

$$y_{AB}(i) = F_{AB}(x_{AB}(i)) \quad i = 1,2,3, \dots, N_x \quad (V.5)$$

Où $F_{AB}(x)$: La fonction du coté AB supposée donner en coordonnées cartésiennes.

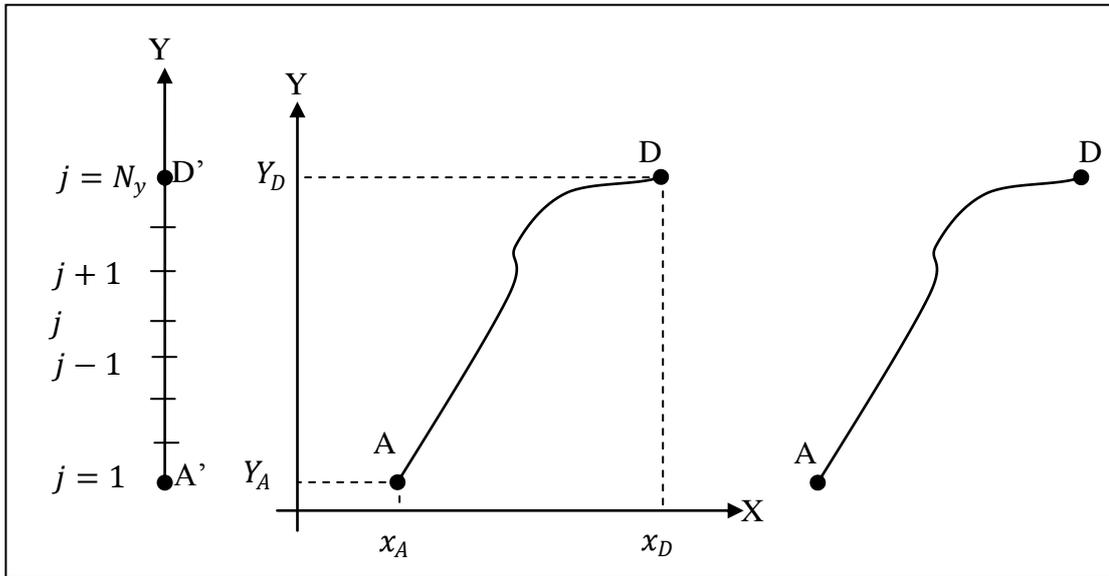
Concernons maintenant le coté CD et par analogie avec le coté AB, on aura le suivant en changeons uniquement A par D, B par C et $F_{AB}(x)$ par $F_{DC}(x)$.

La génération des nœuds sur les contours AD et BC se fait de la même démarche que celle des cotés AB et DC. Ici suivant la disposition de ces cotés. Si $x_A \neq x_D$ et $x_D \neq x_C$ en plus les deux fonctions sont univoques, on peut suivre exactement la démarche précédente pour les cotés AB et DC. On aura

$$\Delta x_{AD} = \frac{|x_D - x_A|}{(N_y - 1)}$$

$$x_{AD}(j) = x_A + (j - 1)\Delta x_{AD} \quad j = 1,2,3, \dots, N_y \quad (V.6a)$$

$$y_{AD}(j) = F_{AD}(x_{AD}(j)) \quad j = 1,2,3, \dots, N_y \quad (V.6b)$$



Figure(V.5): Discrétisation sur le coté AD.

Mais si $x_A = x_D$, l'algorithme (V.6) ne marche plus et on procède comme suit. On divise le segment $[y_A, y_D]$ en N_y nœuds dont les points A et D sont inclus comme le montre la figure (V.5). Avec: A' et D' sont les projections des points A et D sur l'axe des ordonnées.

Alors:

$$\Delta y_{AD} = \frac{|y_D - y_A|}{(N_y - 1)} \quad (V.7)$$

Les coordonnées des points de ce coté sont données par :

$$y_{AD}(j) = y_A + (j - 1)\Delta y_{AD} \quad j = 1,2,3, \dots, N_y \quad (V.8a)$$

$$x_{AD}(j) = F_{AD}^{-1}(y_{AD}(j)) \quad j = 1,2,3, \dots, N_y \quad (V.8b)$$

Avec $F_{AD}^{-1}(y)$: La fonction inverse du coté AD.

Pour déterminer la racine de la fonction inverse si $F_{AD}(y)$ est implicite on utilise l'algorithme de Dichotomie par exemple (ou de Newton).

Après qu'on génère les nœuds sur la frontière on obtient le schéma de la figure (V.6). On note ici que, entre chaque deux nœuds successifs sur un coté on assimile la courbure de la frontière à un segment de droite. L'exemple suivant sur cette figure est pour $N_x = 10$ et $N_y = 6$.

Finalement, Il est à noter aussi qu'on a fait le stockage des positions des nœuds de frontière dans les vecteurs uni-colonnes X(NNT) et Y(NNT) par la position 'L' et non des matrices à deux colonnes, tel que l'algorithme déterminant ces positions en fonction des vecteurs de quatre cotés est présenté comme suivant :

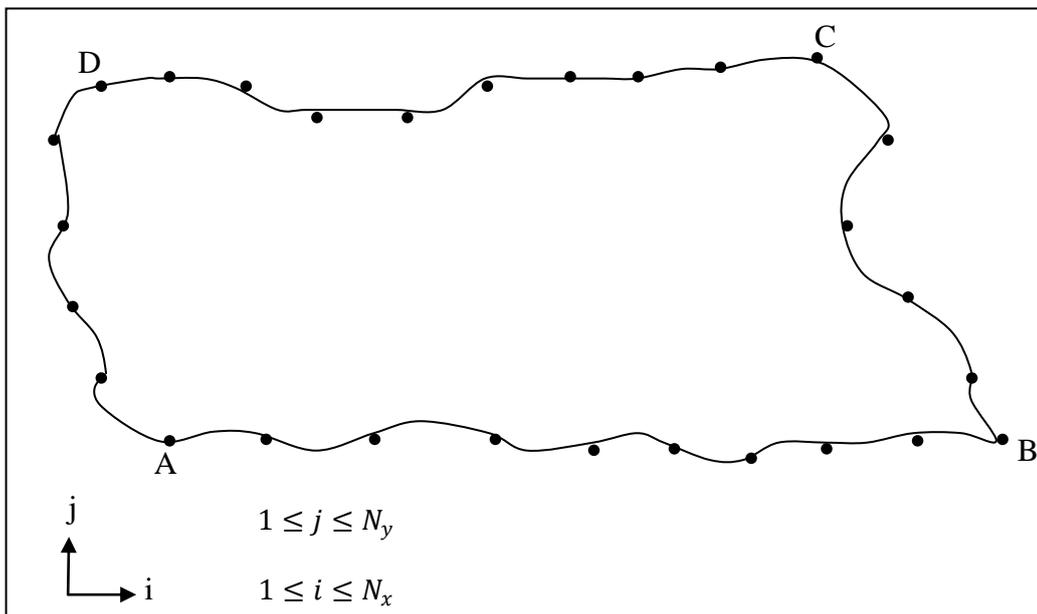


Figure (V.6): Génération des nœuds sur la frontière du domaine.

```

DIMENSION nn(6)
  NX=NNX      ;      NY=NNY
IF(NTEF.EQ.3.OR.NTEF.EQ.6)THEN
  NX=2*NNX-1  ;      NY=2*NNY-1
ENDIF
nn(1)=NX      ;      nn(2)=(3*NX)-2
nn(3)=NX      ;      nn(4)=NX
nn(5)=(2*NX)-1 ;      nn(6)=NX
Ipas=1
IF(NTEF.EQ.3.OR.NTEF.EQ.6) Ipas=2 ! le pas de la boucle
C*****REPLISSAGE DES POSITIONS DES COTES DANS LES VECTEUR X ET Y*****
C*****LES COTES BASSES ET HAUTES DANS LES COTE1 ET COTE2*****
DO 123 I=1,NX
  X(I)=XCOTE1(I) ; Y(I)=YCOTE1(I)
  ICL(I)=1
  L=(NY-1)*nn(NTEF)+I
  IF(NTEF.EQ.6) L=(NY-1)*nn(NTEF)-NEL+1
  X(L)=XCOTE3(I) ; Y(L)=YCOTE3(I)
123 CONTINUE
C*****LES COTES GAUCHE ET DROITE DANS COTE2 ET COTE4*****
DO 124 J=2,NY-1

```

```

L=(J-1)*nn(NTEF)+1
IF(NTEF.EQ.6) L=(J-1)*nn(NTEF)+1-((NNX-1)*((J+1)/2-1))
X(L)=XCOTE4(J)      ;      Y(L)=YCOTE4(J)
ICL(L)=1
L=(J-1)*nn(NTEF)+NX
IF(NTEF.EQ.6) L=(J)*nn(NTEF)-((NNX-1)*((J+2)/2-1))
X(L)=XCOTE2(J)      ;      X(L)=XCOTE2(J)
ICL(L)=1
124  CONTINUE
    
```

V.3.1.2. Génération des nœuds internes pour maillage de type ‘H’:

Après qu'on a déterminé les positions des nœuds de la frontière du domaine, on procède maintenant à la présentation de la méthode développée pour la génération des nœuds internes. Le maillage obtenu pour cette partie est de type ‘H’.

On obtient des petites cellules ou domaines de formes quadrilatères. Chaque nœud est caractérisé par deux valeurs (x, y) qui permet de déterminer sa position dans le domaine. La procédure qu'on présente, est divisée en deux étapes. La première consiste à déterminer les abscisses x_i de tous les points, et cela par une interpolation entre les cotés gauche et droite. Une fois les abscisses sont obtenues, on procède en deuxième étape à la détermination des ordonnées y_i de ces nœuds par une interpolation entre les cotés bas et haut du domaine.

En effet, comme le nombre de nœuds sur les cotés gauche et droite égal à N_y , alors, à chaque nœud d'un coté sera relié avec un nœud de l'autre coté par une courbe qui contient N_x nœuds, dont les extrémités sont incluses, figure (V.7).

Pour déterminer les abscisses des nœuds sur la courbe FG on s'intéresse uniquement aux abscisses des nœuds des extrémités gauche et droite qui sont connues. La projection de la courbe reliant les points F et G sur l'axe horizontal donne un segment de droite comme illustre la figure (V.7).

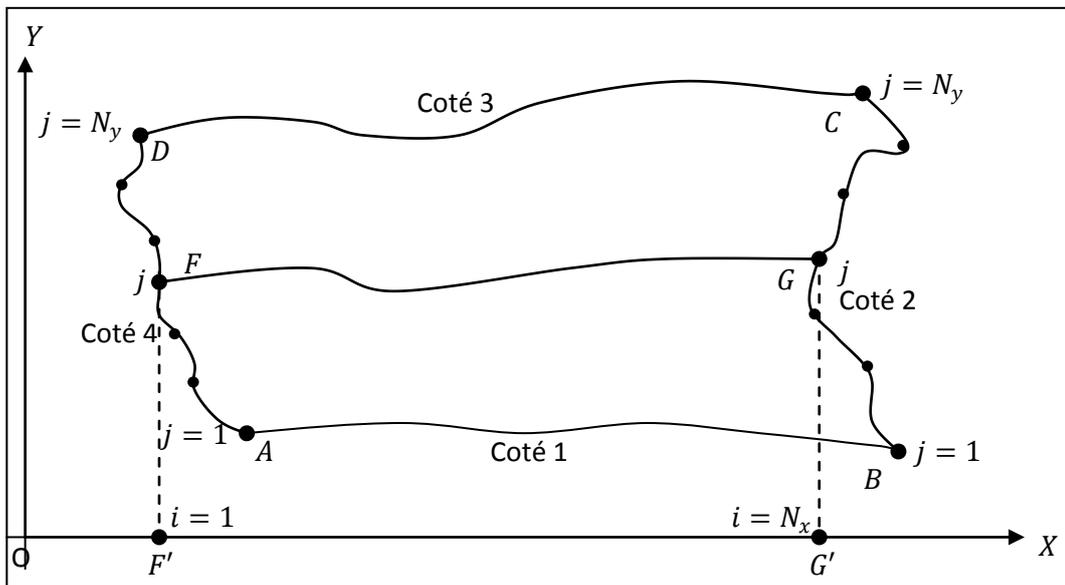


Figure (V.7): Illustration de la procédure de détermination des abscisses.

Où : F' et G' sont les projections respectivement des points F et G.

En divisant le segment $[F', G']$ en N_x points dont ceux des extrémités sont inclus, on obtient par conséquent $(N_x - 1)$ intervalles égaux. L'abscisse de chaque point sur cet intervalle (et par suite sur la courbe FG) est obtenue par :

$$x_i = x_F + (i - 1)\Delta x \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_x$$

Avec:

$$\Delta x = \frac{x_G - x_F}{(N_x - 1)} \quad (V.9)$$

En faisant varier le point F sur le coté gauche de point A jusqu'au point D et de même pour le point G du coté droite, on passe du point B jusqu'au point C, on obtient les abscisses des nœuds d'autres courbes en faisant l'extension de la relation (V.9) par :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(j) &= \frac{x_{\text{Coté2}}(j) - x_{\text{Coté4}}(j)}{(N_x - 1)} \\ x(i) &= x_{\text{Coté4}}(j) + (i - 1)\Delta x(j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_x \end{aligned} \right\} j = 1, 2, 3, \dots, N_x \quad (V.10)$$

La deuxième étape consiste à déterminer les ordonnées des nœuds internes en utilisant par conséquent l'interpolation linéaire entre le coté 3 du haut et le coté 1 du bas, figure (V.8). La projection de la courbe reliant les points H et R sur l'axe vertical des y donne un segment de droite. Avec R' et H' sont les projections respectivement des points R et H sur l'axe des ordonnées, figure (V.8).

Comme chaque courbe contient N_y nœuds, alors, chaque segment contient N_y nœuds. On divise ce dernier en $(N_y - 1)$ intervalles égaux, l'ordonnée de chaque nœud est donnée par:

$$y_j = y_R + (j - 1)\Delta y \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_y$$

Avec:

$$\Delta y = \frac{y_H - y_R}{(N_y - 1)} \quad (V.11)$$

En faisant varier maintenant le point R sur le coté 1 du bas et le point H sur le coté 3 du haut, on obtient des autres courbes dont les ordonnées de ces nœuds sont données par le système suivant par l'extension de la relation (V.11).

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(i) &= \frac{y_{\text{Coté3}}(i) - y_{\text{Coté1}}(i)}{(N_y - 1)} \\ y(j) &= y_{\text{Coté1}}(i) + (j - 1)\Delta y(i) \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_y \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3, \dots, N_x \quad (V.12)$$

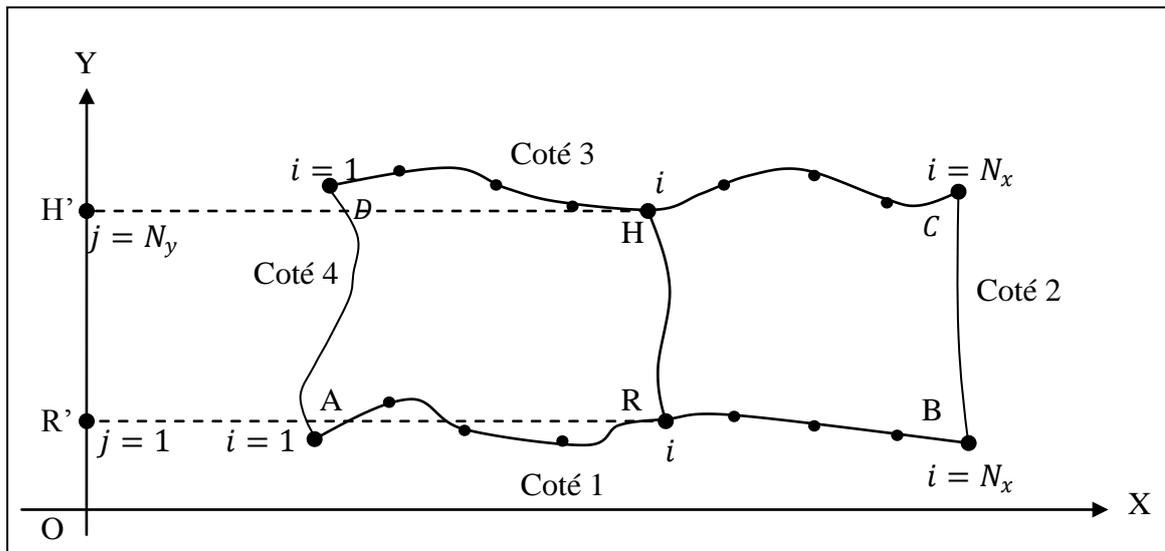


Figure (V.8): Illustration de la procédure de détermination des ordonnées.

Finalement, les relations (V.10) et (V.12) déterminent rapidement les positions des nœuds internes du maillage qui représentent les sommets des éléments finis obtenus, or pour les positions des nœuds des milieux des côtés et aux centres des surfaces des éléments finis, on a développé -pour le calcul de leurs positions- des corrélations en fonction des coordonnées des sommets de chaque élément fini et en fonction de son type qui soit triangulaire à 3, 4...nœuds ou quadrilatère à 4, 5...nœuds. De la, on montre dans la suite ces relations selon chaque cas (type d'élément fini) avec les affectations directes dans les vecteurs coordonnées X et Y par une partie du programme de la sousroutine SUITGEOM. Tel qu'on a fait le stockage des positions de ces nœuds internes dans les vecteurs uni-colonnes X(NNT) et Y(NNT) par la position 'L' et non des matrices à deux colonnes, comme indiqué précédemment pour les nœuds de frontières.

```

C*****DETERMINATION DES COORDONNEES DES NOEUDS DES SOMMETS INTERNES*****
      GOTO (10,10,10,10,10,200)NTEF
C*****CAS DE NTEF=1 OU 3 OU 4 ET UNE PARTIE DE 2 ET DE 5*****
10    DO 30 J=2,NY-1
        DXJ=(XCOTE2(J)-XCOTE4(J))/(NX-1)    ;    JJ=(J-1)*NN(NTEF)
      DO 30 I=2,NX-1
        DYI=(YCOTE3(I)-YCOTE1(I))/(NY-1)    ;    L=JJ+I
        X(L)=XCOTE4(J)+(I-1)*DXJ
30    Y(L)=YCOTE1(I)+(J-1)*DYI
        IF(NTEF.EQ.2)GOTO 40
        IF(NTEF.EQ.3)GOTO 250
        IF(NTEF.EQ.5)GOTO 60
      GOTO 500
C*****DETERMINATION DES COORDONNEES DES NOEUDS INTERNES INTERMEDIAIRES*****
C*****CAS DE NTEF=2 (LA SUITE)*****
40    DO 50 J=1,NY-1
        JJ=(J-1)*NN(NTEF)
      DO 50 I=1,NX-1
        I1=I+JJ    ;    L=I1+NX+I-1

```

```

        I2=I1+NN(NTEF) ; I3=I2+1 ; I4=I1+1
        X(L)=(X(I1)+X(I2)+X(I3))/3.D0
        Y(L)=(Y(I1)+Y(I2)+Y(I3))/3.D0
        X(L+1)=(X(I1)+X(I3)+X(I4))/3.D0
50      Y(L+1)=(Y(I1)+Y(I4)+Y(I3))/3.D0
        GOTO 500
C*****CAS DE NTEF=5 (LA SUITE)*****
60      DO 120 J=1,NY-1
        JJ=(J-1)*NN(NTEF)
        DO 120 I=1,NX-1
        I1=I-JJ ; I2=I1+1 ; L=I1+NX ; I3=L+NX-1 ; I4=I3+1
        X(L)=(X(I1)+X(I2)+X(I3)+X(I4))/4.D0
120     Y(L)=(Y(I1)+Y(I2)+Y(I3)+Y(I4))/4.D0
        GOTO 500
C*****CAS DE NTEF=6*****
C*****LES SOMMETS*****
200     DO 210 J=3,NY-1
        DXJ=(XCOTE2(J)-XCOTE4(J))/(NX-1) ; JJ=(J-1)*NN(NTEF)-((NNX-1)*((J+1)/2-1))
        DO 210 I=2,NNX-1
        II=2*I-1 ; DYI=(YCOTE3(II)-YCOTE1(II))/(NY-1)
        L=JJ+II
        X(L)=XCOTE4(J)+(I-1)*DXJ*2 ; Y(L)=YCOTE1(II)+(J-1)*DYI
210     CONTINUE
C*****LES NOEUDS INTERNES INTERMEDIERE NTEF=6*****
        DO 240 J=2,NY-1
        JJ=(J-1)*NN(NTEF)-((NNX-1)*((J+1)/2-1))
        IF(MOD(J,2).NE.0)GOTO 220
        DO 215 I=2,NNX-1
        II=2*I-1 ; L=JJ+I ; L1=JJ-NX+II ; L2=L1+2*NX-(NNX-1)
        X(L)=(X(L1)+X(L2))/2.D0 ; Y(L)=(Y(L1)+Y(L2))/2.D0
215     CONTINUE
        GOTO 240
220     DO 230 I=1,NX-1,IPAS
        L=JJ+I
        X(L)=(X(L-1)+X(L+1))/2.D0
        Y(L)=(Y(L-1)+Y(L+1))/2.D0
230     CONTINUE
240     CONTINUE
        GOTO 500
C*****CAS DE NTEF=3 (LA SUITE)*****
C*****LES NOEUDS INTERNES INTERMEDIERE*****
250     DO 300 J=2,NY-1 ; JJ=(J-1)*NN(NTEF)
        IF(MOD(J,2).NE.0)GOTO 280
        DO 260 I=2,NX-1
        L=JJ+I ; L1=L-NX-1 ; L2=L1+2*NX+2
        IF(MOD(I,2).EQ.0)THEN
        X(L)=(X(L1)+X(L2))/2.D0 ; Y(L)=(Y(L1)+Y(L2))/2.D0
        ELSE
        X(L)=(X(L1-1)+X(L2+1))/2.D0 ; Y(L)=(Y(L1-1)+Y(L2+1))/2.D0
        ENDIF
260     CONTINUE
        GOTO 300
280     DO 290 I=2,NX-1,IPAS
        L=JJ+I
        X(L)=(X(L-1)+X(L+1))/2.D0 ; Y(L)=(Y(L-1)+Y(L+1))/2.D0
290     CONTINUE
300     CONTINUE
GOTO 500

```

Les figures qui illustrent les nœuds indicés par L, II, 12, 13...sont similaires à celles qui seront montrées dans le prochain paragraphe (V.3.1.3) selon les types des éléments finis.

Remarques:

Une fois, on s'intéresse à un raffinement du maillage dans une région qui contient un fort gradient, on peut utiliser la procédure de condensation des nœuds présentée dans le paragraphe (V.3.2), ou bien utiliser encore l'option de filtrage des nœuds internes présentée dans le paragraphe (V.3.4).

Des exemples sur la génération des maillages sur différents domaines simplement connexes (et multi-connexes) ainsi que pour différentes discrétisations avec et sans procédure de condensation, seront présentées dans la première partie du chapitre des résultats (VII).

Le prochain paragraphe traite la connexion des éléments finis (en fonction de leur type).

V.3.1.3. Connexion des éléments du maillage type 'H':

Après avoir fait la discrétisation type H du domaine en petits éléments, on obtient un ensemble de nœuds et d'éléments finis quadrilatères. Pour avoir les éléments triangulaires, on procède à la division de chaque élément quadrilatère en deux sous éléments triangulaires comme le montre la figure (III.6) du paragraphe (III.7.2).

Chaque élément a sa propre matrice de rigidité $[K^{(e)}]$ et son vecteur force $\{f^{(e)}\}$. Le problème consiste à faire l'assemblage de ces matrices élémentaires pour obtenir celle du domaine complet, où le principe est donné dans le paragraphe (§.III.9) du chapitre (III). Pour arriver aux résultats, il faut connaître les numéros globaux des nœuds locaux de chaque élément. Pour cela, on déclare une matrice de connexion d'ordre (NEL x NNPE) pour les éléments obtenus qui ont NNPE nœuds. On désigne cette matrice par NNE.

On note que la numérotation optimale est donnée selon la condition que la largeur de la demi-bande soit minimale pour le stockage type Matrice bande ou une numérotation quelconque pour le stockage type Matrice creuse (complexe). Le problème de l'influence de cette numérotation sera exposé en détail au prochain chapitre lorsqu'on aborde le problème de stockage.

Dans la suite, on donne un exemple de numérotation d'un maillage rectangulaire de dimension $N_x \times N_y = 6 \times 4$, qui a des éléments triangulaires à trois nœuds (T3N). La matrice NNE (NEL,3) sera remplie de la façon suivante, tel que la numérotation interne d'élément est de direction antihoraire :

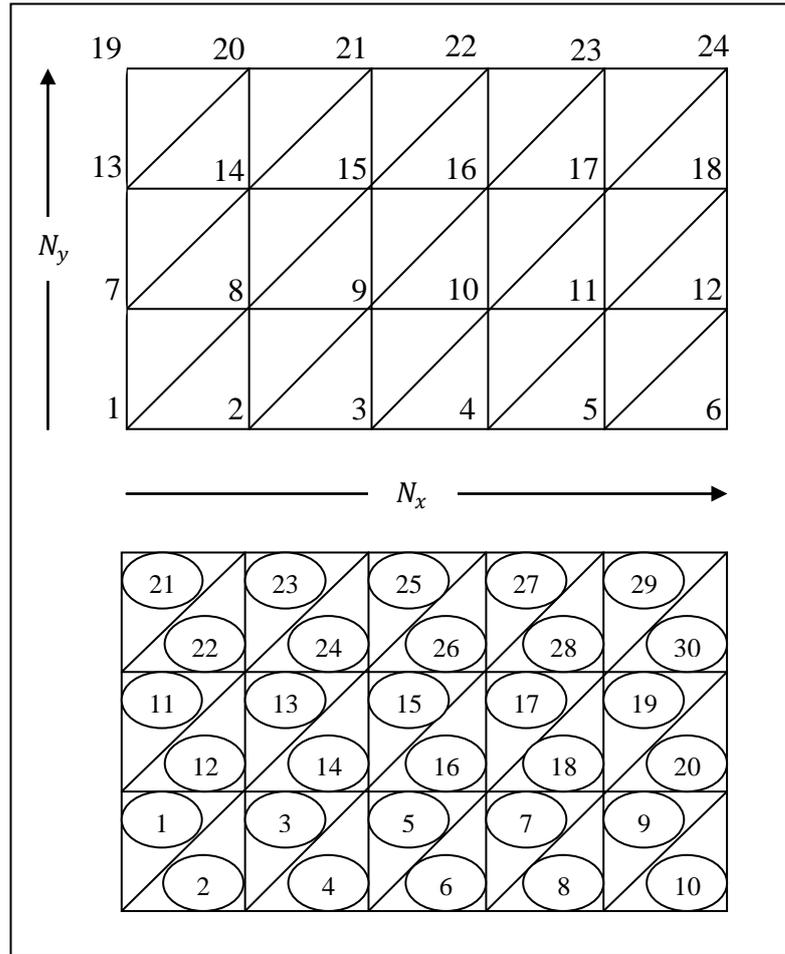


Figure (V.9): Discrétisation en éléments triangulaires et numérotation des nœuds et des éléments.

Afin de voir plus sur la numérotation, des exemples d'illustrations sur les numérotations globales d'un domaine type 'H' seront montrées dans le chapitre IV au paragraphe (IV.3.2) dans la figure (IV.9),

Les trois valeurs de chaque ligne du vecteur NNE (NEL,3) représentent les numéros des lignes et des colonnes de la matrice de rigidité globale du domaine complet avant l'introduction des conditions aux limites. Par exemple pour la ligne 14, on a l'élément triangulaire numéro 14 aux trois nœuds de numéros 8, 9 et 15 dans le sens antihoraire. Autrement dit, le nœud local 1 de ce triangle est égal à 8 global du domaine. On peut prendre le nœud local 1 égale à 9 ou 15, mais il faut que les trois numéros permutent dans le sens antihoraire.

Si la numérotation des nœuds est aléatoire, le remplissage de cette matrice sera d'une façon manuel, vu l'inexistence d'une formule de récurrence.

Dans le cas général pour tous les types d'éléments fini, on propose le programme suivant permettant le remplissage du vecteur NNE (NEL, NNPE), en donnant uniquement le nombre de nœuds N_x et N_y (noté par NNX et NNY) et le type NTEF. Pour plus d'illustration, ajoutons les figures correspondantes.

NEL	NNE (NEL, 3)		
1	1	8	7
2	1	2	8
3	2	9	8
4	2	3	9
5	3	10	9
6	3	4	10
7	4	11	10
8	4	5	9
9	5	6	11
10	6	12	11
11	7	14	13
12	7	8	14
13	8	15	14
14	8	9	15
15	9	16	15
16	9	10	16
17	10	17	16
18	10	11	17
19	11	18	17
20	11	12	18
.....

```

L=1
N1=NNX-1
N2=NNX+1
GOTO(5,15,25,35,45,55)NTEF
C*****CAS DE NTEF=1,(T3N)*****
      I1=(J-1)*N1+J
DO 10 I=1,N1
      I2=I1+N2
      I3=I2-1
      NNE(L,1)=I1
      NNE(L,2)=I2
      NNE(L,3)=I3

```

```

NNE(L+1,1)=I1
NNE(L+1,2)=I1+1
NNE(L+1,3)=I2
L=L+2
I1=I1+1
GOTO 700
    
```

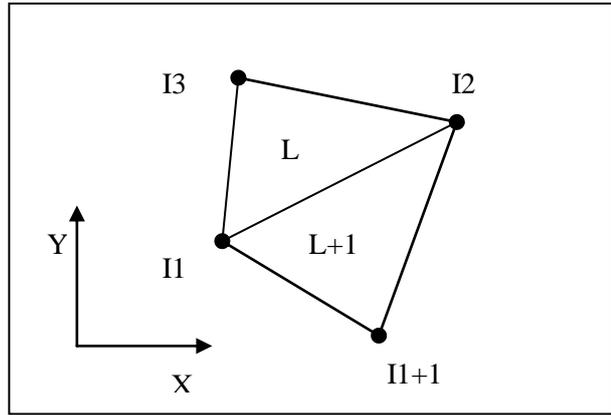


Figure (V.10a): Connexion type 'H'.

```

C*****CAS DE NTEF=2,(T4N)*****
    
```

```

15 DO 20 J=1,NNY-1
    I1=(J-1)*N1*3+J
    DO 20 I=1,N1
        I2=I1+N2+N1*2
        I3=I2-1
        I4=N1+I1+1
        NNE(L,1)=I1
        NNE(L,2)=I2
        NNE(L,3)=I3
        NNE(L,4)=I4
        NNE(L+1,1)=I1
        NNE(L+1,2)=I1+1
        NNE(L+1,3)=I2
        NNE(L+1,4)=I4+1
        L=L+2
        I1=I1+1
20 GOTO 700
    
```

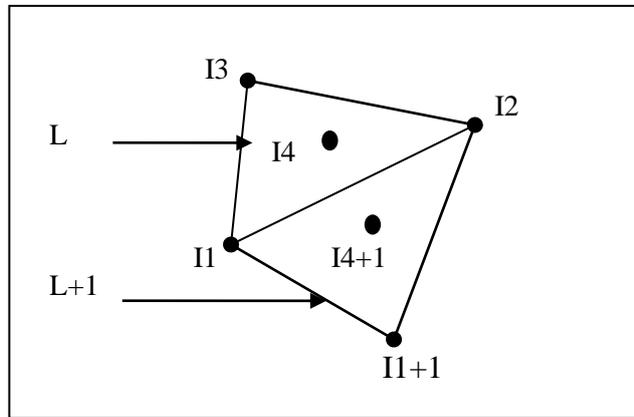


Figure (V.10b): Connexion type 'H'.

```

C*****CAS DE NTEF=3,(T6N)*****
    
```

```

25 N3=4*NNX-2
    N4=2*NNX
    DO 30 J=1,NNY-1
        I1=(J-1)*N3+1
        DO 30 I=1,N1
            I2=I1+N4
            I3=I2+N4
            I4=I3-1
            I5=I4-1
            I6=I2-1
            NNE(L,1)=I1
            NNE(L,2)=I3
            NNE(L,3)=I5
            NNE(L,4)=I2
            NNE(L,5)=I4
            NNE(L,6)=I6
            NNE(L+1,1)=I1
            NNE(L+1,4)=I1+1
            NNE(L+1,2)=I1+2
            NNE(L+1,5)=I2+1
            NNE(L+1,3)=I3
            NNE(L+1,6)=I2
    
```

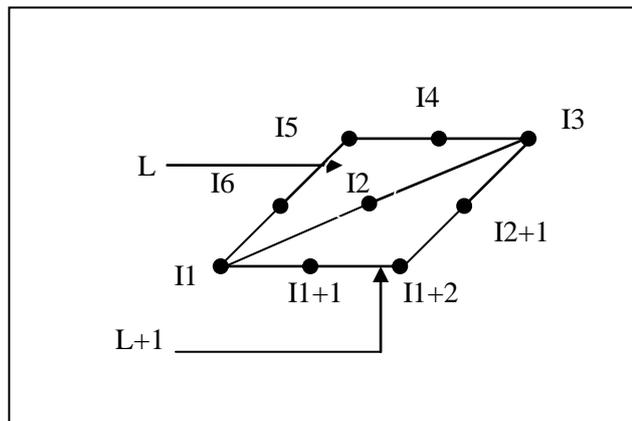


Figure (V.10c): Connexion type 'H'.

```

L=L+2
30   I1=I1+2
      GOTO 700
*****CAS DE NTEF=4,(Q4N)*****
35   L=1
      DO 40 J=1,NNY-1
          I1=(J-1)*N1+J
          I2=I1+1
          DO 40 I=1,N1
              I3=I1+N2
              NNE(L,1)=I1
              NNE(L,2)=I2
              NNE(L,3)=I3
              NNE(L,4)=I3-1
              L=L+1
              I1=I1+1
              I2=I1+1
40   GOTO 700

```

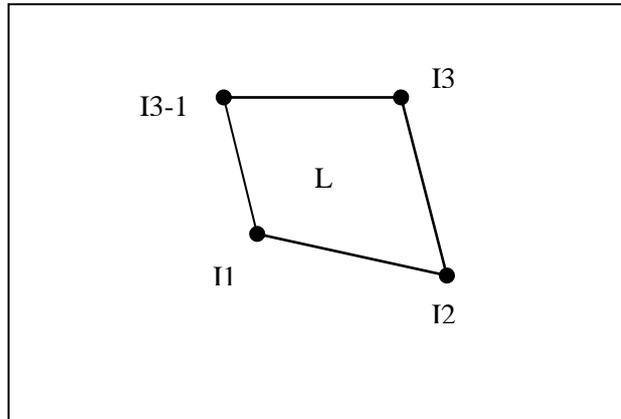


Figure (V.10d): Connexion type 'H'.

```

*****CAS DE NTEF=5,(Q5N)*****
45   N3=2*N1
      DO 50 J=1,NNY-1
          I1=(J-1)*N3+J
          I2=I1+1
          DO 50 I=1,N1
              I3=I1+2*NNX
              NNE(L,1)=I1
              NNE(L,2)=I2
              NNE(L,3)=I3
              NNE(L,4)=I3-1
              NNE(L,5)=I1+NNX
              L=L+1
              I1=I1+1
              I2=I1+1
50   GOTO 700

```

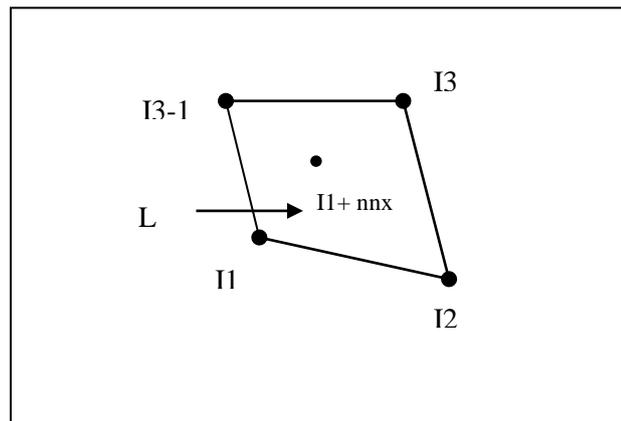


Figure (V.10e): Connexion type 'H'.

```

*****CAS DE NTEF=6,(Q6N)*****
DO 60 J=1,NNY-1
    I1=(J-1)*N3+1
    I2=I1+1
DO 60 I=1,N1
    I3=I1+2
    I5=I1+3*NNX+1
    NNE(L,1)=I1
    NNE(L,5)=I2
    NNE(L,2)=I3
    NNE(L,6)=I1+2*NNX-(I-1)
    NNE(L,3)=I5
    NNE(L,7)=I5-1
    NNE(L,4)=I5-2
    NNE(L,8)=I1+2*NNX-1-(I-1)
    L=L+1
    I1=I1+2
    I2=I1+1
60 CONTINUE

```

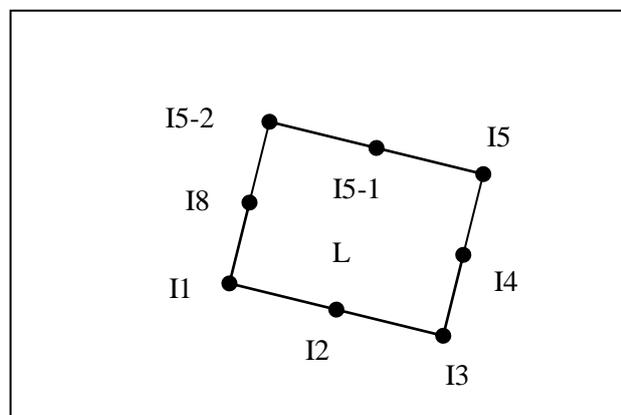


Figure (V.10f): Connexion type 'H'.

V.3.1.4. Génération des nœuds pour un maillage de type 'C':

L'intérêt de faire appelle à des méthodes de génération automatique est indispensable, puisque le domaine de notre étude est simplement et multi-connexes. Pour cela, nous avons adapté la méthode suivante pour la génération du maillage type 'C' de quelques domaines simplement connexes qui se comporte bien avec ce type de génération.

Nous allons illustrer la procédure sur une demi-partie de la géométrie d'un demi cercle, pour raison de symétrie. On donne alors en premier lieu le rayon du demi-cercle (R), et les nombres de subdivision (N_x, N_y). Prennent l'exemple suivant pour : $N_x = N_y = 4$, figure (V.11a). La procédure consiste premièrement à déterminer dr et $d\Gamma$:

$$dr = \frac{R}{N_x} \tag{V.13a}$$

$$d\Gamma = \frac{\text{teta}}{2N_y - 1} \tag{V.13b}$$

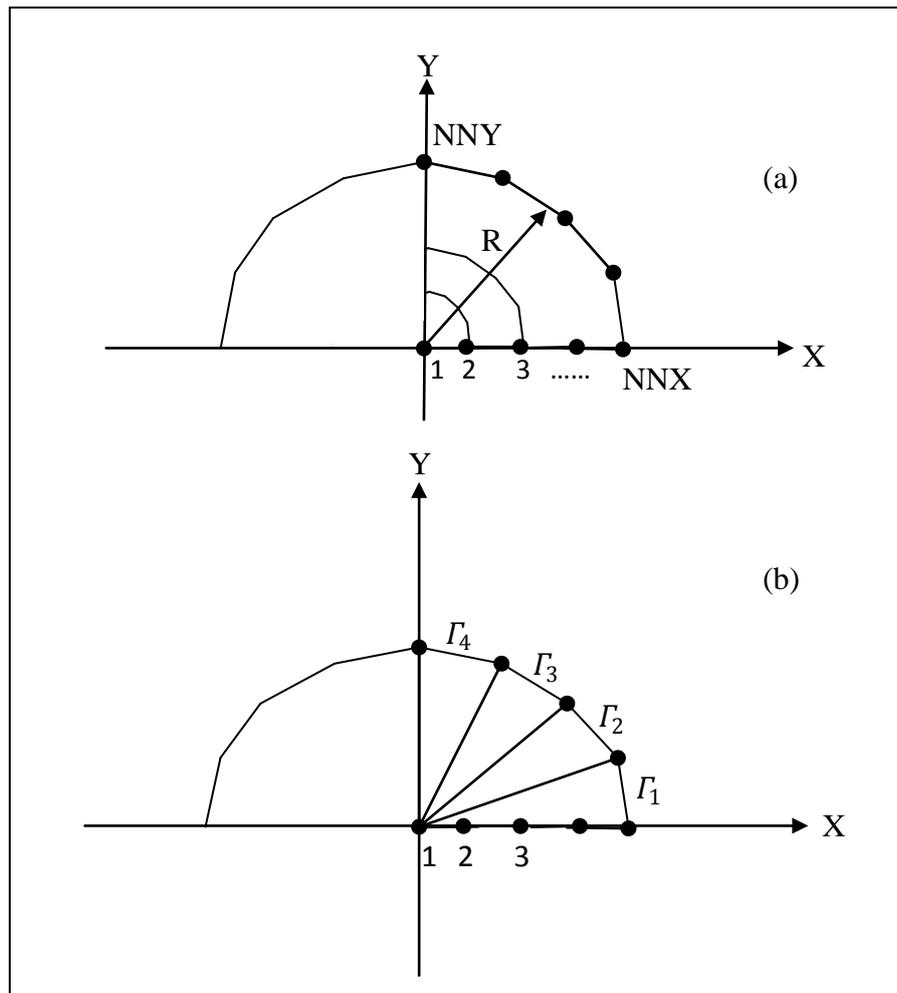


Figure (V.11): Discrétisation d'un maillage de type 'C'.

Puis, on procède à la détermination des valeurs des angles $\Gamma(i)$ Situés entre les nœuds sur l'arc limité entre les arêtes du secteur (L'exemple de domaine demi-cercle, figure (V.11b), par :

$$\Gamma(i) = (i - 1)d\Gamma \qquad i = 1,2,3, \dots \dots \dots 2N_y$$

Puis, on divise le rayon et on le fait varié d'une façon à obtenir à chaque fois un demi-cercle, autour du point de centre de l'intersection des axes de coordonnées, figure (V.11a).

En combinant entre les étapes précédentes, et avec un réarrangement des nœuds, nous obtenons finalement la discrétisation de notre géométrie, figure (V.12).

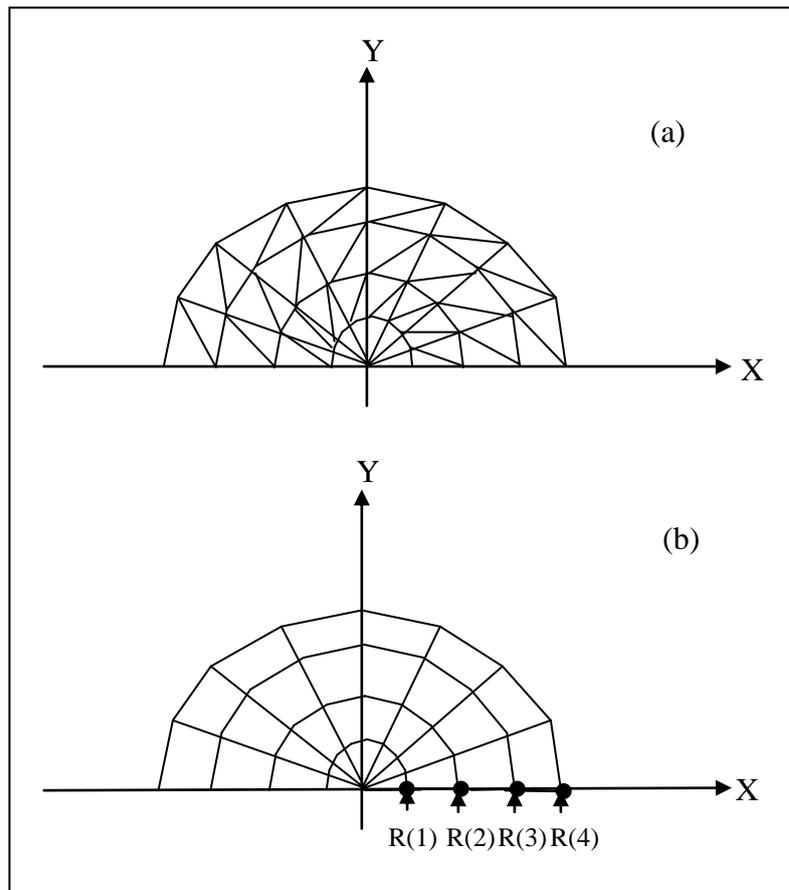


Figure (V.12): Illustration d'un maillage final de type 'C'.

Finalement, pour obtenir des éléments triangulaires on découpe chaque cellule rectangulaire en deux éléments.

V.3.1.5. Connexion des éléments du maillage type 'C':

Afin d'assembler les matrices de rigidité élémentaires et de permettre la résolution du système d'équations obtenu par discrétisation en éléments finis, on procède à la connexion des éléments du maillage considéré. Similaire au cas du maillage 'H', on considère la matrice de connexion NNE d'ordre (NEL x NNPE) qu'il faut remplir, voir l'annexe (A) pour les symboles.

Pour cela, considérons le cas d'un domaine secteur, figure (V13). L'idée de la procédure de connexion des maillages type 'C' est de subdiviser la région en deux parties A et B. tel que la partie A constitue tous les éléments liés au nœud '1' de l'intersection des arêtes du secteur, où les expressions de récurrence de la connexion sont données par la suite. Tandis que la partie B englobe les éléments restants du maillage formant ainsi une partie similaire au maillage 'H'. Dans la suite on donne quelques parties de la subroutine CONNECT qui permet de charger la matrice NNE pour tous les types d'éléments finis. Tel que, on montre le cas du triangle à 3 nœuds (T3N) et triangle à 6 nœuds (T6N) et puis le cas d'un quadrilatère à 8 nœuds (Q8N).

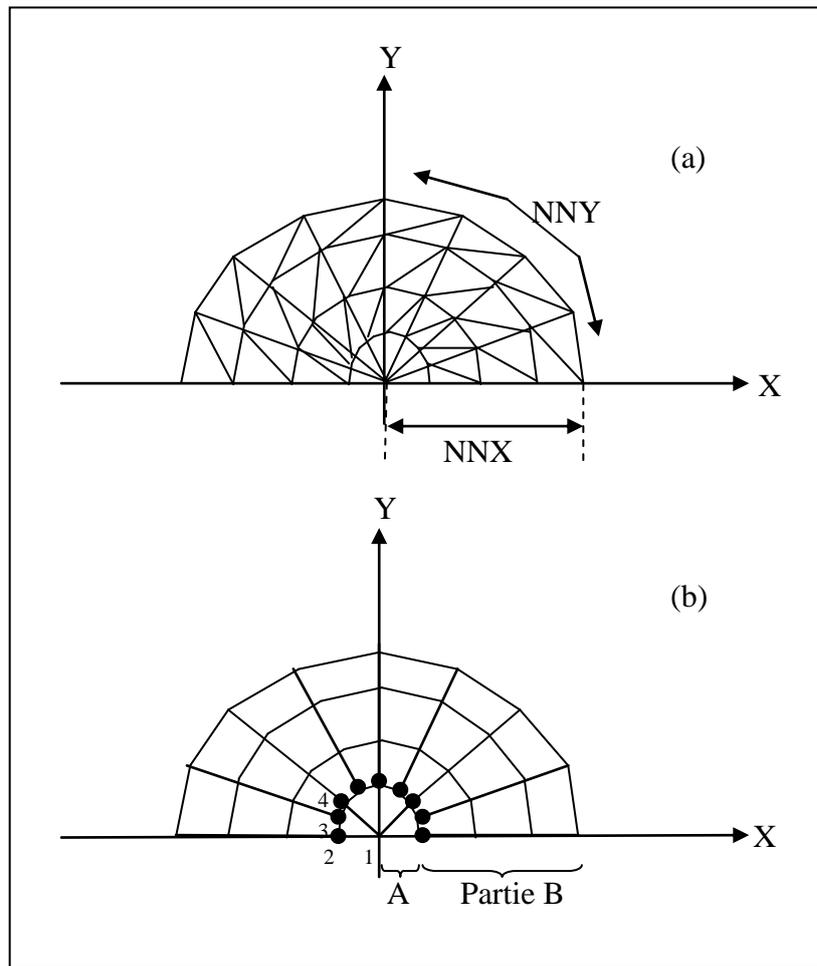


Figure (V.13): Maillage typique 'C' d'un secteur.

Pour le cas de T3N

```

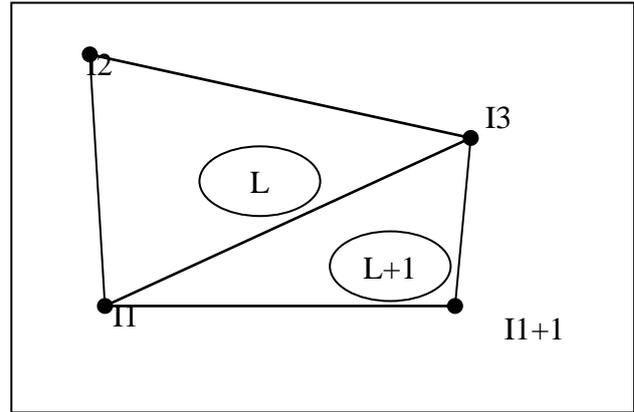
C*****CONNECTION D'UN SECTEUR (MAILLAGES TYPE*****
100      NX=2*NNY-1
          NY=NNX
          GOTO(110,120,130,140,150,160)NTEF
C*****CAS DE NTEF=1,(T3N), PARTIE A*****
110     DO 115 L=1,NX-1
          NNE(L,1)=1
          NNE(L,2)=L+2
    
```

115 NNE(L,3)=L+1

C*****PARTIE B*****

```

L=NX
DO 117 J=1,NY-1
  I1=(J-1)*NX+2
DO 117 I=1,NX-1
  I2=I1+NX
  I3=I2+1
  NNE(L,1)=I1
  NNE(L,2)=I3
  NNE(L,3)=I2
  NNE(L+1,1)=I1
  NNE(L+1,2)=I1+1
  NNE(L+1,3)=I3
  L=L+2
117 I1=I1+1
GOTO 700
    
```



Figure(V.14a): Connexion d'un maillage 'C'

Pour le cas de T6N

C*****CAS DE NTEF=3,(T6N), PARTIE A*****

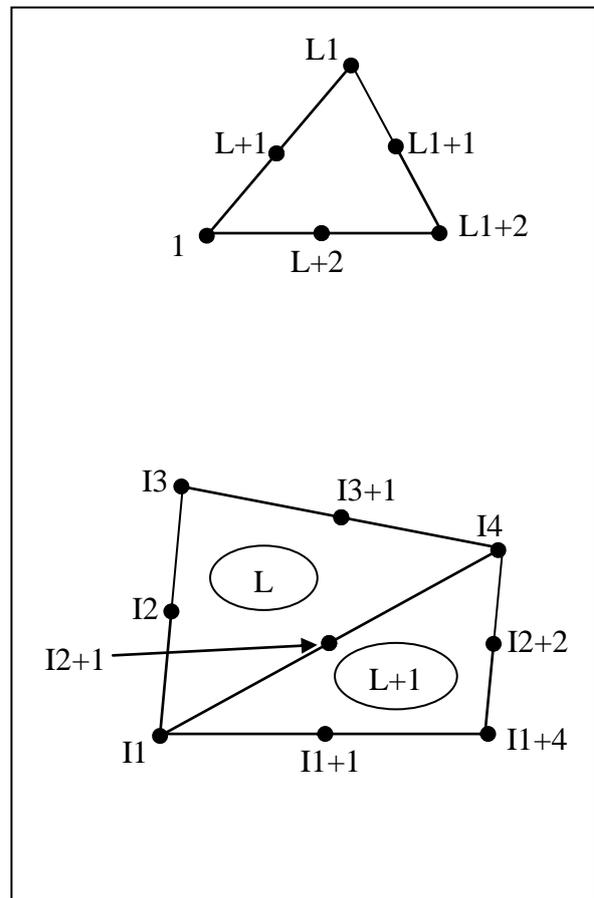
```

130 DO 135 L=1,NX-1
  I1=NX+2*L
  NNE(L,1)=1
  NNE(L,2)=I1+2
  NNE(L,3)=I1
  NNE(L,4)=L+2
  NNE(L,5)=I1+1
135 NNE(L,6)=L+1
    
```

C*****PARTIE B*****

```

L=NX
N1=4*NX-2
N2=2*NX-1
DO 137 J=1,NY-1
  I1=(J-1)*N1+NX+2
DO 137 I=1,NX-1
  I2=I1+N2
  I3=I2+N2
  I4=I3+2
  NNE(L,1)=I1
  NNE(L,2)=I4
  NNE(L,3)=I3
  NNE(L,4)=I2+1
  NNE(L,5)=I3+1
  NNE(L,6)=I2
  NNE(L+1,1)=I1
  NNE(L+1,2)=I1+2
  NNE(L+1,3)=I4
  NNE(L+1,4)=I1+1
  NNE(L+1,5)=I2+2
  NNE(L+1,6)=I2+1
  L=L+2
137 I1=I1+2
GOTO 700
    
```



Figure(V.14b): Connexion d'un maillage 'C'.

Pour le cas de Q8N

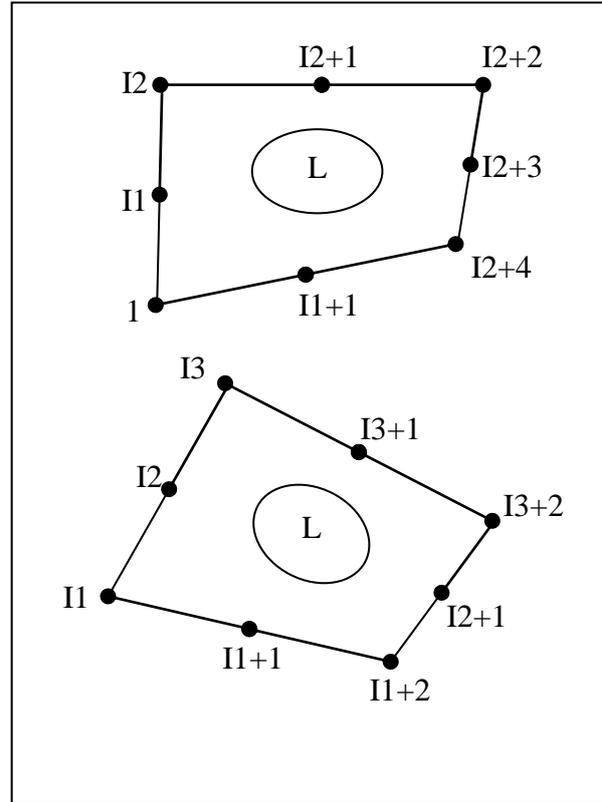
C*****CAS DE NTEF=6,(Q8N) PARTIE A*****

```

160 N1=NNY-2
DO 165 L=1,NNY-1
  I1=L+1
  I2=4*L+N1
    
```

```

NNE(L,1)=1
NNE(L,2)=I2+4
NNE(L,3)=I2+2
NNE(L,4)=I2
NNE(L,5)=I1+1
NNE(L,6)=I2+3
NNE(L,7)=I2+1
165 NNE(L,8)=I
C*****PARTIE B*****
L=NNY
N1=3*NX-1
N2=NNY+2
N3=2*NX
DO 167 J=1,NNY-1
  I1=(J-1)*N1+N2
DO 167 I=1,NX-1
  I3=I1+N1
  I2=I1+N3-I
  NNE(L,1)=I1
  NNE(L,2)=I1+2
  NNE(L,3)=I3+2
  NNE(L,4)=I3
  NNE(L,5)=I1+1
  NNE(L,6)=I2+1
  NNE(L,7)=I3+1
  NNE(L,8)=I2
  L=L+1
167 I1=I1+2
GOTO 700
    
```



Figure(V.14c): Connexion d'un maillage 'C'.

V.3.2. Fonction de condensation unidimensionnelle:

La fonction de condensation unidimensionnelle (stretching fonction) est généralement utilisée pour distribuer les points le long d'une frontière particulière où une région d'un domaine nécessite une résolution précise.

Par exemple, pour étudier un écoulement visqueux sur un profil d'aile nécessite l'introduction de cette fonction ou équivalente pour renforcer la précision de la solution au niveau de la surface du profil d'aile et par conséquent, les points de la frontière se condensent volontairement vers une région voulue. Le gradient de la solution est fort au niveau de cette région [31], [24].

Mathématiquement, il est intéressant d'introduire une variable indépendante dans la fonction pour la normalisation. Pour la fonction de condensation unidimensionnelle appliquée sur le coté EA dans la figure (V.15), la variable indépendante normalisée est donnée par :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_E - \eta_A} \tag{V.14}$$

Avec : $0 \leq \eta^* \leq 1$ et $\eta_A \leq \eta \leq \eta_E$

Où : η peut représenter x ou y.

On peut même donner la distribution sur l'intervalle [0,1] par η avec des sous intervalles égaux.

La fonction de condensation développée par **Robert** en 1971 [31] ensuite modifier par **Eisemann** en 1979 est donnée par :

$$s = P\eta^* + (1 - P) \left[1 - \frac{\tanh[Q(1 - \eta^*)]}{\tanh[Q]} \right] \tag{V.15}$$

Où : P et Q sont deux paramètres de contrôles de points de maillage.

Si la valeur de P proche de l'unité, le deuxième membre de la formule se disparaît rapidement. Une fois 's' est obtenu, il est demandé de spécifier la distribution de x et y. Par exemple, définissons :

$$\frac{x - x_A}{x_A - x_E} = f(s) \tag{V.16a}$$

$$\frac{y - y_A}{y_A - y_E} = g(s) \tag{V.16b}$$

Ces formules génèrent $x(s)$ et $y(s)$ directement. On prend un simple choix, soit: $f(s)=g(s)=s$, tels que les relations (V.16) donnent :

$$x = x_A + s(x_A - x_E) \tag{V.17a}$$

Des distributions typiques des points sur le segment EA en utilisant la relation (V.15) pour différentes valeurs de P et Q, sont présentées sur la figure (IV-15) suivante :

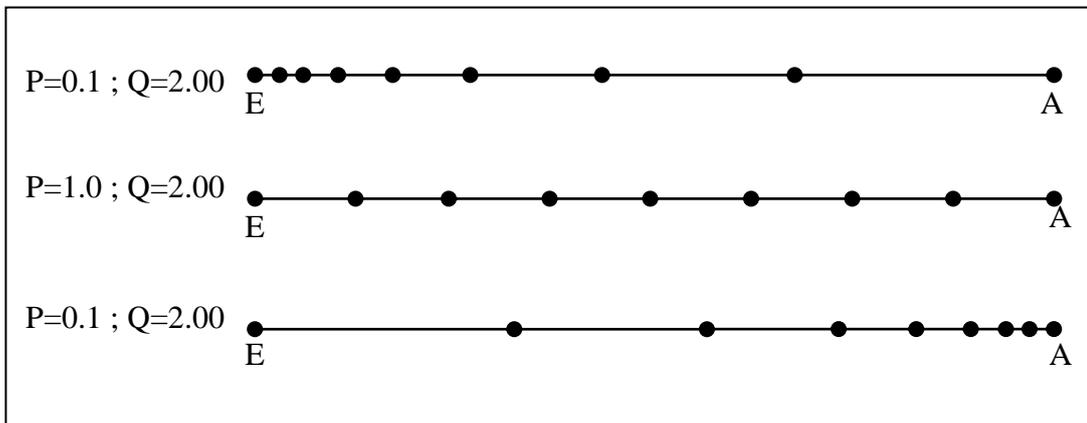


Figure (V.15): Distribution des nœuds par condensation selon la relation (V.15).

Pour des valeurs de $P > 1.0$, il est possible de condenser les nœuds vers le point A. De même, pour condenser les nœuds vers le point 'E', il suffit de prendre des valeurs de P Proche de zéro. On peut remarquer que si on choisi la fonction $f(s) = 1 - s$, on trouve la configuration inverse, c'est-à-dire, pour des valeurs de $P > 1.0$ les points se condensent vers l'extrémité E au lieu de l'extrémité A.

On propose l'algorithme suivant permettant de positionner les nœuds sur le segment EA en utilisant la fonction de condensation (V.15) :

LIRE N, P, x_E , x_A

$$\Delta x = \frac{x_A - x_E}{(N - 1)}$$

POUR I=1 **JUSQU'A** N

FAIRE

$$xx = x_E - (I - 1)\Delta x$$

$$\eta^* = \frac{xx - x_A}{x_E - x_A}$$

$$s = P \eta^* + (1 - P) \left[1 - \frac{\tanh [Q(1-\eta^*)]}{\tanh [Q]} \right]$$

$$x(I) = x_A + s(x_E - x_A)$$

$$y(I) = F_{EA}(x(I))$$

FIN FAIRE

Où $F_{EA}(x)$: La fonction de la courbure EA. Ici on a pris une ligne de droite, figure (V.15).

V.3.3. Configuration multi-connexes:

Dans cette partie on va entamer les procédures de génération des maillages pour les domaines multi connexes, en traitant les maillages type 'O' puis celles générées par coupure.

V.3.3.1. Génération des nœuds internes pour un domaine doublement connexes de type 'O':

Nous avons déjà cité dans l'aspect physique les différentes régions topologiques que l'on peut rencontrer et parmi lesquelles on trouve les régions doublement connexes. L'exemple le plus typique est l'écoulement dans une conduite ayant un obstacle interne. En outre, on peut citer aussi l'écoulement externe autour d'un ou plusieurs obstacles comme dans le cas des ailettes d'une hélice ou les parties constituant les ailes (le bec, le bord de fuite...).

La procédure consiste à découper le domaine dans une façon à le rendre mono connexe, puis on subdivise le contour de la frontière externe en NNX nœuds, même chose avec la frontière interne. Reliant ces points entre ces deux frontières on obtient une famille de lignes radiale. Subdivisant ces dernières en NNY nœuds et reliant ces nœuds, on obtient une autre famille de courbes qui ont la forme des contours internes, dont leurs ensembles avec la première famille de courbes forment la grille du maillage désiré, voir la figure (V.16).

Sans perdre la vue que pour obtenir les éléments finis, il faut connecter et faire la correspondance entre les nœuds obtenus, et aussi bien les nœuds des côtes A et A' tel que, il faut les superposer et contrôler leurs connexions, (voir la figure suivante et le paragraphe de la connexion du maillage type 'O').

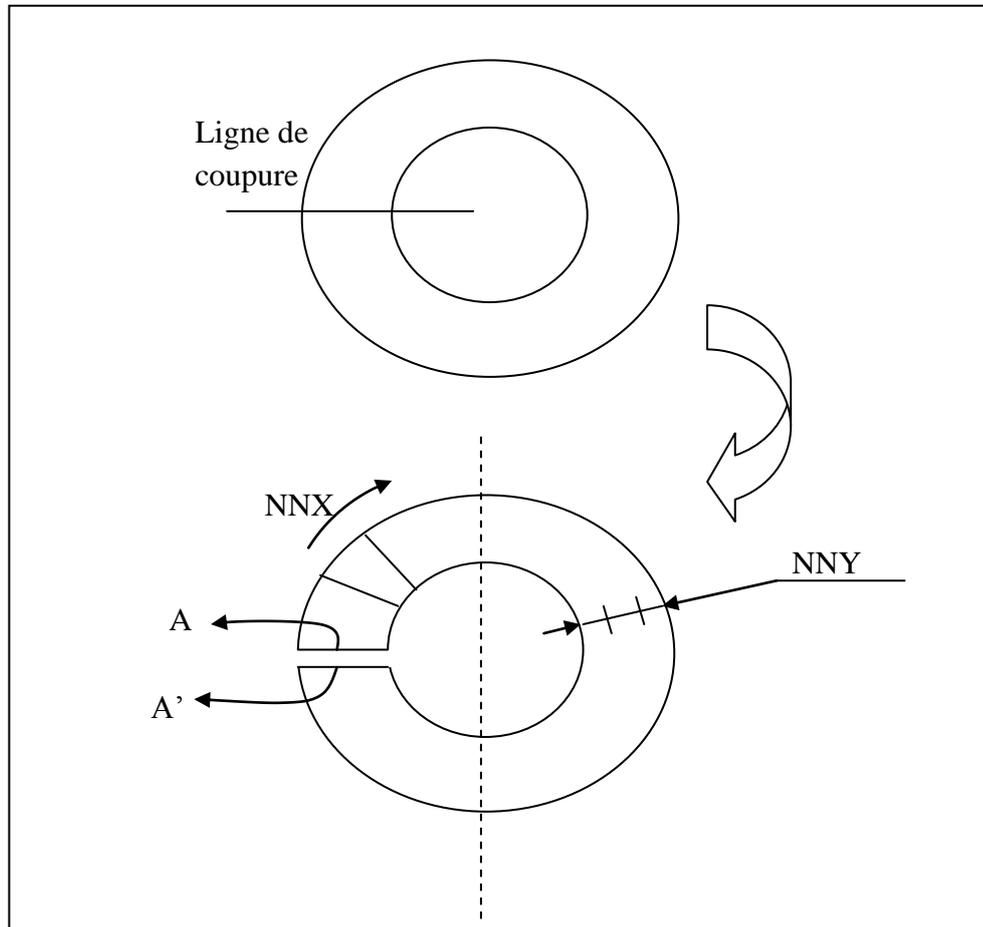


Figure (V.16): Transformation d'une région doublement connexes à une région simplement connexe 'O'.

Pour adapter le maillage au comportement de la solution du problème physique connu par une étude qualitative du modèle d'équations d'origine expérimentale ou théorique, il faut utiliser l'option de filtrage des nœuds du domaine.

V.3.3.2. Connexion des éléments du maillage type 'O':

La connexion pour ce type de maillage se fait dans la première phase comme étant un maillage type 'H' après la découpe du domaine, puis dans une autre phase on relie les points des éléments situant entre les lignes de découpe obtenant ainsi la connexion complète d'un maillage O.

Dans la suite, on donne un exemple d'une partie de la subroutine **Connect** concernant la connexion des éléments finis type triangulaire à 6 nœuds (T6N) et des éléments finis type quadrilatère à 8 nœuds (Q8N).

```
C*****CONNECTION DOUBLEMENT CONNEXE*****
200     NX=4*NNX
        NY=NNY+1
        L=1
        GOTO(210,220,230,240,250,260)NTEF
```

Pour le cas T6N

```
C*****CAS DE NTEF=3,(T6N)*****
230     N1=4*NX
        N2=2*NX
        DO 235 J=1,NY-1
            I1=(J-1)*N1+1
            DO 235 I=1,NX
                I2=I1+N2
                I3=I1+N1
                I4=I3+2
                NNE(L,1)=I1
                NNE(L,2)=I4
                NNE(L,3)=I3
                NNE(L,4)=I2+1
                NNE(L,5)=I3+1
                NNE(L,6)=I2
                NNE(L+1,1)=I1
                NNE(L+1,2)=I1+2
                NNE(L+1,3)=I4
                NNE(L+1,4)=I1+1
                NNE(L+1,5)=I2+2
                NNE(L+1,6)=I2+1
                IF(I.EQ.NX) NNE(L,2)=I4-N2
                IF(I.EQ.NX) NNE(L+1,2)=I1+2-N2
                IF(I.EQ.NX) NNE(L+1,5)=I2+2-N2
                IF(I.EQ.NX) NNE(L+1,3)=NNE(L,2)
                L=L+2
235     I1=I1+2
```

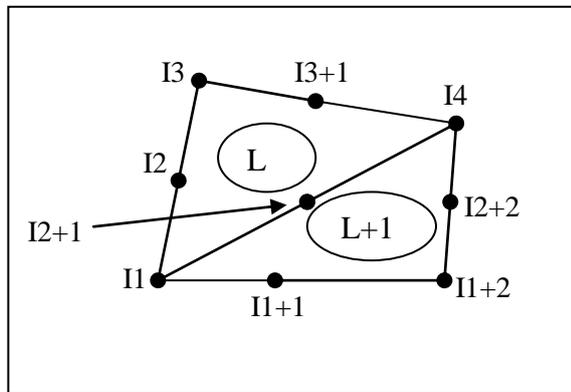


Figure (V.17a): Connexion pour un maillage type ‘O’.

Pour le cas T8N

```
C*****CAS DE NTEF=6,(Q8N)*****
260     N1=3*NX
        N2=NX*2+1
        DO 265 J=1,NY-1
            I1=(J-1)*N1+1
            DO 265 I=1,NX
                I2=I1+N2-I
                I3=I1+N1
                NNE(L,1)=I1
                NNE(L,2)=I1+2
                NNE(L,3)=I3+2
                NNE(L,4)=I3
                NNE(L,5)=I1+1
                NNE(L,6)=I2+1
                NNE(L,7)=I3+1
                NNE(L,8)=I2
```

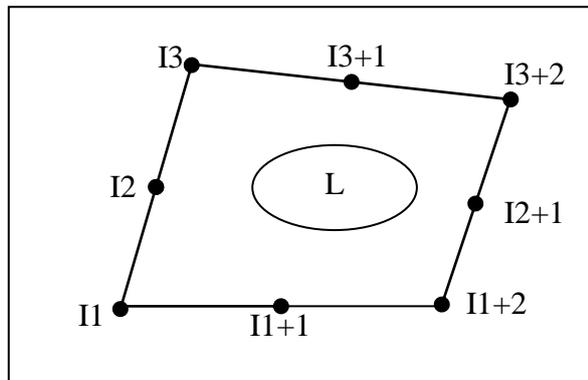


Figure (V.17b): Connexion pour un maillage type ‘O’.

```

IF(I.EQ.NX)NNE(L,2)=I1+3-N2
IF(I.EQ.NX)NNE(L,3)=I3+3-N2
IF(I.EQ.NX)NNE(L,6)=NNE(L,5)+1
      L=L+1
265      I1=I1+2
    
```

V.3.3.3. Aperçu sur la génération des nœuds internes pour un domaine multi-connexes quelconque:

Plusieurs procédures peuvent être considérées et cela suivant la disposition de la courbure de chaque cotés. Une région multi-connexes peut être rendue mono-connexe par l'introduction de limite(s) ou ligne(s) de coupure à partir de la limite interne (obstacles) jusqu'à la limite la plus externe. Cette limite ne peut pas être traversée [32], voir figure (V.18).

Pour l'exemple d'application suivant d'un domaine former par un grand cercle moins deux petits cercles internes, prenant premièrement la partie supérieure on discrétise le domaine commettant un mono-connexe, après la découpe comme le montre la figure (V.18), tout on reprend les étapes d'un maillage type 'H'. Puis, on passe pour générer les nœuds de la partie inférieure par symétrie à l'autre partie.

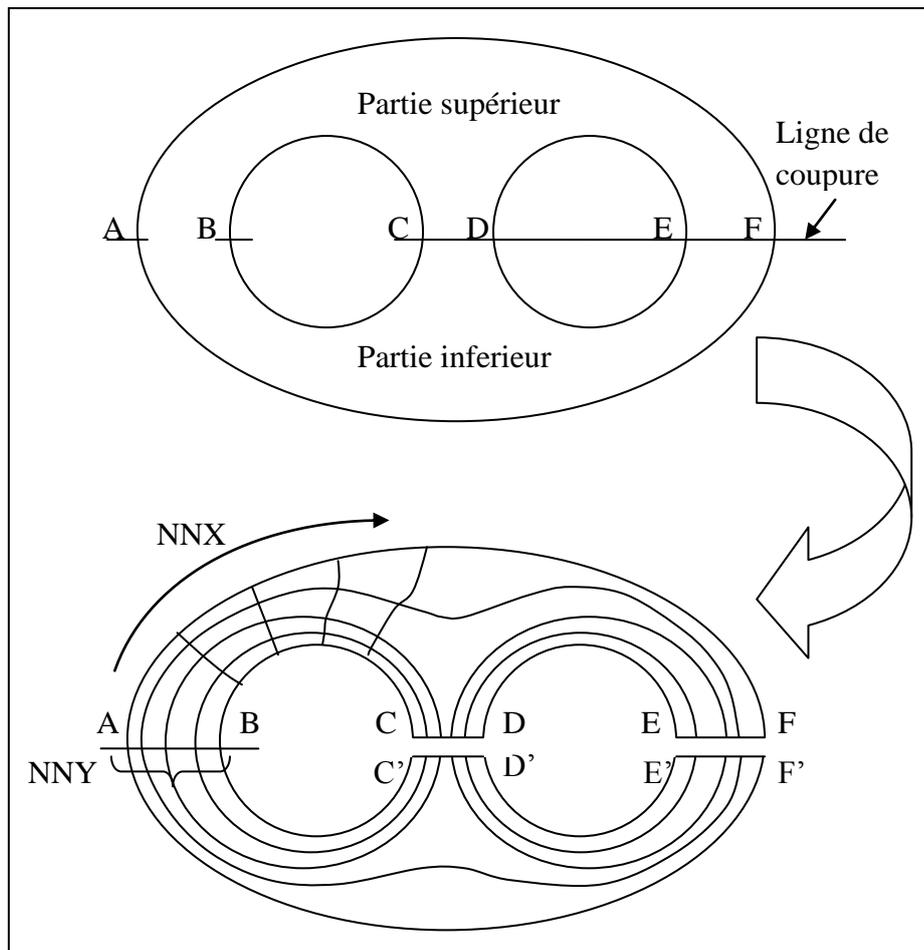


Figure (V.18): Coupure et génération d'un maillage multi connexes.

V.3.3.4. Connexion des éléments du maillage obtenu:

Cette technique de coupure constitue un outil très efficace pour traiter les problèmes de multi connexes. Pour l'exemple de la figure précédente on procède en premier lieu à la connexion des parties similaire aux maillages type 'H' en conservant l'ordre de la numérotation d'une partie à une autre. Dans une autre étape on reprend les parties coupées et faisant la connexion de telle manière à lier ces frontières et reproduisant la forme initiale du domaine dans les parties coupées comme illustrer dans le cas de maillage 'O'.

V.3.4. Filtrage des nœuds internes:

Il est parfois très efficace d'utiliser une option appelée filtrage des nœuds. Dans certain cas, la procédure de condensation des nœuds ne permet pas une bonne répartition de ces derniers dans des régions où la solution à recherchée demande un grand recombement des nœuds, surtout devant les frontières, au voisinage d'une grande courbure, ou un grand gradient de variation de la solution du problème.

La technique de filtrage utilisée par pas mal d'auteurs ([31], [24]) est donnée dans le cas général par l'algorithme suivant:

$$x_i^{nouveau} = x_i^{ancien} - \frac{\omega}{m} \sum_{K=1}^{K=m} (x_K^{ancien} - x_i^{ancien}) \quad (V.18a)$$

$$y_i^{nouveau} = y_i^{ancien} - \frac{\omega}{m} \sum_{K=1}^{K=m} (y_K^{ancien} - y_i^{ancien}) \quad (V.18b)$$

Avec m: le nombre de nœuds qui sont reliés par une arrête avec le nœud de numéro 'i' à filtrer.

- ω : Facteur de relaxation compris $0 < \omega < 1$.
- (x_k, y_k) : $k = 1, 2, 3, \dots, m$: les positions des 'm' nœuds reliés avec le nœud 'i'

L'algorithme (V.18), à refaire entre 20 jusqu'à 100 itérations. On peut même aller à 2000 itérations, à savoir la forme finale du maillage obtenu.

Pour le maillage de type 'H' et élément fini triangulaire à trois nœuds, chaque nœuds interne est relié avec six (06) nœuds, donc $m=6$. Alors la relation (V.18) sera donc adaptée comme suit ;

$$x_{i,j}^{nouveau} = x_{i,j}^{ancien} - \frac{\omega}{6} \left(\begin{array}{l} x_{i-1,j-1}^{ancien} + x_{i,j-1}^{ancien} + x_{i,j+1}^{ancien} + x_{i+1,j+1}^{ancien} \\ + x_{i-1,j}^{ancien} + x_{i+1,j}^{ancien} - 6x_{i,j}^{ancien} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3, 4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2, 3, 4, \dots \dots N_y - 1 \end{array} \right. \quad (V.19a)$$

$$y_{i,j}^{nouveau} = y_{i,j}^{ancien} - \frac{\omega}{6} \begin{pmatrix} y_{i-1,j-1}^{ancien} + y_{i,j-1}^{ancien} + y_{i,j+1}^{ancien} + y_{i+1,j+1}^{ancien} \\ + y_{i-1,j}^{ancien} + y_{i+1,j}^{ancien} - 6y_{i,j}^{ancien} \end{pmatrix} \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (\text{V.19b})$$

Il est à noter que le stockage des positions des nœuds dans des vecteurs uni-colonnes $x(L)$ et $y(L)$ est fait par la position 'L' et non par des matrices à deux colonnes 'i, j'. Les indices des systèmes (V.18), (V.19) sont donnés juste pour illustration. Donc, les expressions qui servent à la programmation sont données selon le type de chaque élément fini dans la suite. Tel que, on note les nouvelles valeurs de $x(L)$ et $y(L)$ par les vecteurs $xn(L)$ et $yn(L)$ - Pour T3N, on a (Figure V.19a) :

$$xn(L) = x(L) + \frac{\omega}{6} (XSOM - 6 \cdot x(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (\text{V.20a})$$

$$yn(L) = y(L) + \frac{\omega}{6} (YSOM - 6 \cdot y(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (\text{V.20b})$$

Tel que:

$$XSOM = x(I1) + x(I1) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6)$$

$$YSOM = y(I1) + y(I1) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6)$$

$$L = i + N_x \cdot (j - 1)$$

$$I1 = i - 1 + (j - 2) \cdot N_x \quad ; \quad I2 = I1 + 1 \quad ; \quad I3 = L - 1 \quad ; \quad I4 = L + 1$$

$$I5 = i + j \cdot (3N_x - 2) \quad ; \quad I6 = I5 + 1$$

- Pour l'élément fini triangulaire à quatre nœuds T4N, on a pour les nœuds des sommets $m=6$:

$$xn(L) = x(L) + \frac{\omega}{6} (XSOM - 6 \cdot x(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (\text{V.21a})$$

$$yn(L) = y(L) + \frac{\omega}{6} (YSOM - 6 \cdot y(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (\text{V.21b})$$

Tel que :

$$XSOM = x(I1) + x(I1) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6)$$

$$YSOM = y(I1) + y(I1) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6)$$

$$L = i + (3N_x - 2) \cdot (j - 1)$$

$$I1 = i - 1 + (j - 2) \cdot (3N_x - 2) \quad ; \quad I2 = I1 + 1 \quad ; \quad I3 = L - 1$$

$$I4 = L + 1 \quad ; \quad I5 = i + j \cdot (3N_x - 2) \quad ; \quad I6 = I5 + 1$$

Et pour les nœuds des milieux des triangles, on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets, comme le montre les algorithmes de génération des maillages de paragraphe (V.3.1.2), voir figure (V.19b).

- Pour l'élément fini triangulaire à six nœuds T6N, on a pour les nœuds des sommets $m=6$:

$$xn(L) = x(L) + \frac{\omega}{6} (XSOM - 6 \cdot x(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (\text{V.22a})$$

$$yn(L) = y(L) + \frac{\omega}{6} (YSOM - 6 \cdot y(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (V.22b)$$

Tel que :

$$XSOM = x(I1) + x(I1) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6)$$

$$YSOM = y(I1) + y(I1) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6)$$

$$L = i + (2 \cdot N_x - 1) \cdot (j - 1)$$

$$I1 = i - 2 + (j - 3) \cdot (2N_x - 1) ; I2 = I1 + 1 ; I3 = L - 1$$

$$I4 = L + 1 ; I5 = i + (j + 1) \cdot (2 \cdot N_x - 1) ; I6 = I5 + 1$$

Et pour les nœuds des milieux des arêtes, figure (V.19c), on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets de chaque arête, comme le montre les algorithmes de génération des maillages de paragraphe (V.3.1.2).

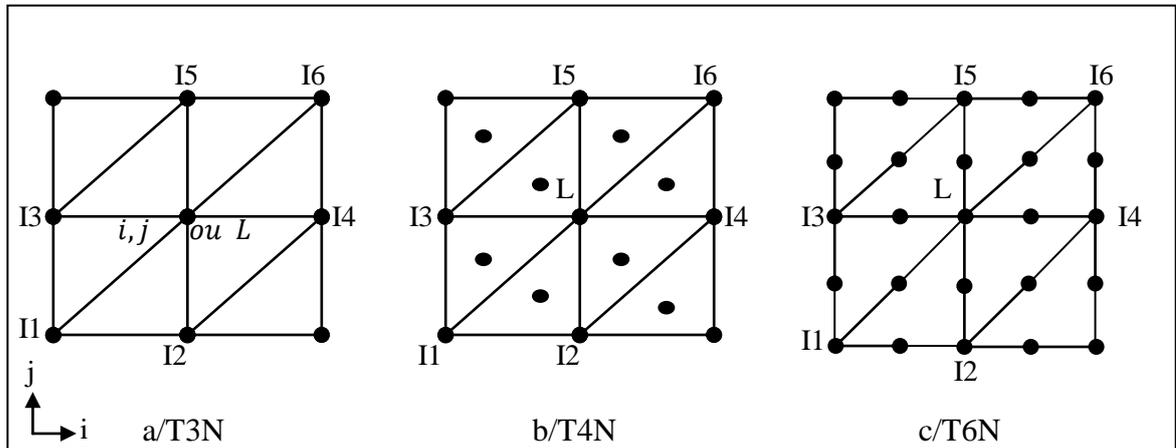


Figure (V.19): Les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments triangulaire.

- Pour l'élément fini quadrilatère à quatre nœuds Q4N, on a m=4, figure (V.20a), donc :

$$xn(L) = x(L) + \frac{\omega}{4} (XSOM - 4 \cdot x(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (V.23a)$$

$$yn(L) = y(L) + \frac{\omega}{4} (YSOM - 4 \cdot y(L)) \begin{cases} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{cases} \quad (V.23b)$$

Tel que :

$$XSOM = x(I1) + x(I1) + x(I3) + x(I4)$$

$$YSOM = y(I1) + y(I1) + y(I3) + y(I4)$$

$$L = i + N_x \cdot (j - 1)$$

$$I1 = i + (j - 2) \cdot N_x ; I2 = L - 1 ; I3 = L + 1 ; I4 = L + N_x$$

- Pour l'élément fini quadrilatère à cinq nœuds Q5N, on a pour les nœuds des sommets m=4, figure (V.20b), alors :

$$xn(L) = x(L) + \frac{\omega}{4} (XSOM - 4 \cdot x(L)) \left\{ \begin{array}{l} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{array} \right. \quad (V.24a)$$

$$yn(L) = y(L) + \frac{\omega}{4} (YSOM - 4 \cdot y(L)) \left\{ \begin{array}{l} i = 2,3,4, \dots \dots N_x - 1 \\ j = 2,3,4, \dots \dots N_y - 1 \end{array} \right. \quad (V.24b)$$

Tel que :

$$XSOM = x(I1) + x(I1) + x(I3) + x(I4)$$

$$YSOM = y(I1) + y(I1) + y(I3) + y(I4)$$

$$L = i + (2N_x - 1) \cdot (j - 1)$$

$$I1 = i + (j - 2) \cdot (2N_x - 1) ; I2 = L - 1 ; I3 = L + 1$$

$$I4 = L + (2N_x - 1)$$

Pour les nœuds des milieux des quadrilatères, on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets, comme le montre les algorithmes de paragraphe (V.3.1.2).

- Pour l'élément fini quadrilatères à huit nœuds Q8N, on a pour les nœuds des sommets m=4 :

$$xn(L) = x(L) + \frac{\omega}{4} (XSOM - 4 \cdot x(L)) \left\{ \begin{array}{l} i = 3,5,7 \dots 2N_x - 3 \text{ Pas} = 2 \\ j = 2,3,4, \dots N_y - 1 \text{ Pas} = 1 \end{array} \right. \quad (V.25a)$$

$$yn(L) = y(L) + \frac{\omega}{4} (YSOM - 4 \cdot y(L)) \left\{ \begin{array}{l} i = 3,5,7 \dots 2N_x - 3 \text{ Pas} = 2 \\ j = 2,3,4, \dots N_y - 1 \text{ Pas} = 1 \end{array} \right. \quad (V.25b)$$

Tel que :

$$XSOM = x(I1) + x(I1) + x(I3) + x(I4)$$

$$YSOM = y(I1) + y(I1) + y(I3) + y(I4)$$

$$L = i + (j - 1) \cdot (3N_x - 1)$$

$$I1 = i - 2 + (j - 2) \cdot (3 \cdot N_x - 1) ; I2 = L - 2 ; I3 = L + 2$$

$$I4 = i + (j) \cdot (3N_x - 1)$$

Et pour les nœuds des milieux des arêtes figure (V-20c), on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets de chaque arête, comme suit :

$$xn(K) = \frac{(x(I1) + x(I2))}{2} \quad (V.26a)$$

$$yn(K) = \frac{(y(I1) + y(I2))}{2} \quad (V.26b)$$

Telque :

Si « j » impaire :

$$k = i + \frac{(j - 1)}{2} (3N_x - 1) \quad i = 2,4,6, \dots \dots \dots, 2N_x - 2 \text{ Pas} = 2$$

$$I1 = L - 1 ; I2 = L + 1 \quad j = 2,3, \dots \dots \dots, 2N_y - 1$$

Si « j » paire :

$$k = i + \frac{j}{2}(3N_x - 1) - N_x \quad i = 2,3,4, \dots, N_x - 1 \quad Pas = 1$$

$$I1 = L - 2N_x + i \quad j = 2,3, \dots, 2N_y - 1$$

$$I2 = I1 + (3N_x - 1)$$

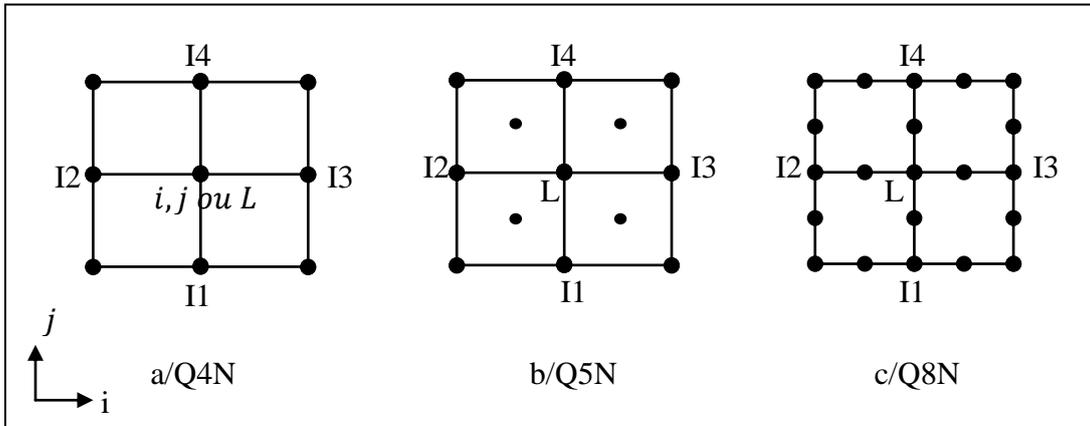


Figure (V.20): Les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments quadrilatères.

Remarque :

Après le calcul des nouvelles coordonnées x_n et y_n , on procède au rechargement les vecteurs $x(L)$ et $y(L)$ pour qu'ils soient applicables par les autres sous-routines du programme.

VII.1. Introduction :

Après la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis en programmant plusieurs types d'éléments finis, et les procédés de la génération des maillages pour les différentes géométries optées, ainsi que les techniques numériques employées pour la résolution du problème ; Nous avons procédé à l'exécution du programme de calcul, afin d'obtenir les résultats correspondants.

Les géométries traitées sont :

- Géométrie d'un cercle.
- Géométrie d'une ellipse.
- Géométrie d'un rectangle ou carrée.
- Géométrie d'un demi-cercle ou secteur à différents angles.
- Géométrie d'un profil.
- Géométrie d'un hexagone.
- . Géométrie complexe aux frontières.
- Géométrie d'un rectangle moins un demi-cercle au côté bas.
- Géométrie d'un rectangle moins un cercle au milieu et pour une autre non au milieu.
- Géométrie d'un grand cercle moins un petit cercle au centre (et une autre non au centre).

Le programme prend en charge le moment de torsion appliqué dans la poutre de dimensions données soit simplement ou doublement connexe.

L'application de la méthode des éléments finis a permis d'obtenir les résultats numériques tels que la contrainte de torsion dans la section des poutres étudiées et les différentes caractéristiques géométriques des différentes sections.

Afin de valider et interpréter ces résultats, nous avons entamé la résolution analytique du modèle mathématique pour les géométries simples. La comparaison entre les résultats obtenus par le programme en éléments finis et les résultats analytiques obtenus du phénomène étudié, est faite. Notre comparaison est basée aussi sur les résultats des différents types d'éléments finis programmé pour la même géométrie, et sur la variation du nombre d'éléments de la maille discrétisée (par cet élément).

VII.2. Données du programme :

Dans le cadre d'exécution du programme de calcul, nous avons opté pour les données suivantes :

- Le moment de torsion appliqué M [N.m].
- Le module d'élasticité (module de Young) E

- Le coefficient de poisson ν

Les données géométriques des différentes sections sont données dans les paragraphes suivants, où nous avons cité leurs figures

VII.3. Résultats des sorties graphiques des maillages :

Les résultats suivants sont des maillages pour des configurations mono-connexes à frontières simples et complexes, ainsi que pour des configurations multi-connexes qui peuvent présenter le cas d'un cercle moins un cercle au milieu par exemple.

Remarque:

Pour obtenir les maillages des sections voulues il faut donner les informations suivantes :

- Numéro de fichier de la géométrie désirée (NF) à partir d'un menu.
- Numéro du type d'élément fini (NTEF) (Triangulaire à 3, 4 ou 6 nœuds ou quadrilatère à 4,5 ou 8 nœuds) à partir d'un menu.
- Dimensions géométriques (largueurs, longueurs, rayon, positions des domaines internes ...).
- Nombre de discrétisation NNX et NNY.

Rappelons que, les sorties graphiques sont obtenues à partir des fichiers résultats de la subroutine Mesh et l'utilisation systématique de logiciel conçu pour le traçage des maillages d'une façon séquentielle.

- Les figures (VII.1 a, b, c) présentent des maillages de type 'H' triangulaire gros pour les éléments finis type T3N, T4N et T6N dans un domaine circulaire (NF=1). Les figures (VII.1 d, e, f) présentent des maillages de type quadrilatère gros pour les éléments finis type Q4N, Q5N et Q8N. On a prit un rayon $R = 1$ et différentes subdivisions (NNX, NNY) voir tableau (VII .1) Les positions des points A, B, C, et D sont choisis aux milieux de chaque quadrant. On obtient dans ce cas NNT nœuds (nombre de nœuds totale), NEL éléments et NNPE nœuds (nombre de nœuds par élément), voir le tableau (VII .1) pour ces nombres de chaque cas de maillage.
- La figure (VII.2) présente un type de maillage fin dont, le but est de voir la forme des cellules dans le maillage lorsqu'on augmente les nombres de subdivisions. L'exemple choisi ici est pour NNX=50 et NNY=50. Le nombre de nœuds obtenu est égale à 2000 dont 176 sont sur la frontière du domaine et le nombre des triangles est égale à 3822, voir tableau (VII. 1).

Tableau (VII.1) : caractéristique des maillages d'un domaine circulaire

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
(VII. 1a)	1	10	10	3	100	162
(VII. 1b)	2	10	10	4	262	162
(VII. 1c)	3	10	10	6	361	162
(VII. 1d)	4	10	10	4	100	81
(VII. 1e)	5	10	10	5	181	81
(VII. 1f)	6	10	10	8	280	81
(VII. 2)	1	50	50	3	2000	3822

- Les figures (VII.3 a, b, c) présentent des maillages de type 'H' triangulaire gros pour les éléments finis type T3N, T4N et T6N respectivement dans un domaine rectangulaire (NF=2 ou 3). Les figures (VII.3 d, e, f) illustrent aussi des maillages de même domaine mais de type quadrilatère gros pour les éléments finis type Q4N, Q5N et Q8N. Les caractéristiques des maillages sont données dans le tableau (VII.2) suivant.

Tableau (VII.2) : Caractéristiques des maillages d'un domaine rectangulaire

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
(VII.3 a)	1	10	10	3	100	162
(VII. 3b)	2	10	10	4	262	162
(VII. 3c)	3	10	10	6	361	162
(VII. 3d)	4	10	10	4	100	81
(VII. 3e)	5	10	10	5	181	81
(VII. 3f)	6	10	10	8	280	81

- Les figures (VII.4 a, b, c) présentent des maillages de type 'H' triangulaire gros pour les éléments finis type T3N, T4N et T6N respectivement dans un domaine elliptique (NF=4). Les figures (VII.4 d, e, f) illustrent aussi des maillages de même domaine mais de type quadrilatère gros pour les éléments finis type Q4N, Q5N et Q8N. Les caractéristiques des maillages sont données dans le tableau (VII.3) suivant.

Tableau (VII.3) : Caractéristiques des maillages d'un domaine elliptique

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
(VII.4 a)	1	11	11	3	121	200
(VII. 4b)	2	11	11	4	321	200
(VII. 4c)	3	11	11	6	441	200
(VII. 4d)	4	11	11	4	121	100
(VII. 4)	5	11	11	5	221	100
(VII. 4f)	6	11	11	8	341	100

- Les figures (VII.5 a, b) présentent des maillages de type 'C' triangulaire, tel que la première figure illustre le domaine d'un demi-cercle (NF=5) avec un exemple d'élément fini type T4N. La deuxième montre un quart de cercle, avec l'élément fini type T3N. Le rayon utilisé est R=1 (m).
- Les figures (VII.5 b, c) illustrent des maillages d'un domaine secteur (NF=6) pour différents angles où les angles sont limités entre 100 et 350 dont le but de montrer tous les cas de traçage et tous les types d'éléments finis utilisés par le programme, et par suite l'efficacité des sous-routines de génération des maillages. Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau (VII.4) suivant avec les différents angles utilisés.

Tableau (VII.4) : Caractéristiques des maillages d'un domaine secteur

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	Angle(°)
(VII.5 a)	2	10	10	4	533	342	180
(VII. 5b)	1	7	8	3	106	182	90
(VII. 5c)	4	7	6	4	43	33	60
(VII. 5d)	3	7	13	6	663	312	310

- La figure (VI.6 a) montre un maillage doublement connexe de type '0' triangulaire d'un domaine qui représente un rectangle moins un cercle centré (NF=10) avec un exemple d'élément fini type T6N, où les côtes du rectangle sont A=1 et B=2 (m), or le rayon du cercle est R=0.1

Avec des éléments quadrilatères, on a la figure (VI.6 b) qui montre un même domaine mais avec des éléments finis quadrilatères type Q5N.

Tableau (VII.5) : Caractéristiques des maillages d'un domaine rectangle moins cercle centré

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
(VII.6a)	3	8	9	6	1216	576
(VII. 6b)	5	8	9	5	608	288

- La figure (VII.7a) représente un maillage de type '0' triangulaire d'un domaine doublement connexe qui représente un grand cercle moins un petit cercle centré (NF=13) avec un exemple d'élément fini type T4N, où le rayon du grand cercle égale à $R_g = 1$ et le rayon du petit cercle égale à $R_p = 0.1$ m. La figure (VII.7b) montre un même domaine mais avec des éléments finis quadrilatères type Q4N.
- La figure (VII.8a) montre un maillage triangulaire du même domaine mais avec un cercle non centré (NF=14), tel que ses coordonnées sont $X = 0.1$ et $Y = 0.004$ m, où l'élément fini utilisé est de type T3N. Tandis que, la figure (VII.8b) illustre le même domaine mais avec des éléments finis quadrilatères type Q8N; Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau (VII.6) suivant.

Tableau (VII.6) : Caractéristiques des maillages du domaine grand cercle moins un petit cercle centré et non centré

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	XPC. YPC
(VII.7a)	2	5	4	4	700	440	00,00
(VII. 7b)	5	5	4	5	180	80	00,00
(VII. 8a)	1	5	6	3	240	150	0.1, 0.004
(VII. 8b)	6	5	6	8	400	120	0.1, 0.004

- La figure (VII.9) représente un maillage mono-connexes gros de type 'H' d'une section de forme profil d'aile (NF=7) avec un élément fini quadrilatère type Q4N. L'exemple choisi ici est le profil NACA 0012 symétrique, tel que la corde est $Cr_d = 1.0$ (unité) et l'épaisseur $t = 12\%$.
- Les figures (VII.10 a, b, c, d) montrent dans le même domaine des maillages avec différents types d'éléments finis. T3N, T6N, Q5N et Q8N Les caractéristiques de tous ces maillages sont donnés dans le tableau (VII.7).

Tableau (VII.7) : Caractéristiques des maillages d'une section de forme profil d'aile

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
(VII.9)	4	20	20	4	400	361
(VII. 10a)	1	10	10	3	100	162
(VII. 10b)	3	7	7	6	169	72
(VII. 10c)	5	10	11	5	200	90
(VII. 10c)	6	10	11	8	309	90

- La figure (VII.11) montre un maillage quadrilatère type 'H' d'un domaine Hexagone (NF= 8) à avec une côte A=1. Pour un maillage type '0' triangulaire, on a la figure (VII.12). Afin de voir d'autre type d'éléments, on présente les figures (VII.13 a, b) dont la première illustre un maillage type 'H' modéré de même domaine avec des éléments finis triangulaires type T4Nor l'autre figure est consacrée pour les éléments finis quadrilatères type Q8N. Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau suivant.

Tableau (VII. 8) : Caractéristiques des maillages du domaine Hexagone (NF= 8)

N ⁰ Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
(VII.11)	4	7	9	4	63	48
(VII. 12)	1	9	9	3	97	160
(VII.13a)	2	12	19	4	624	396
(VII.13b)	6	12	19	8	653	198

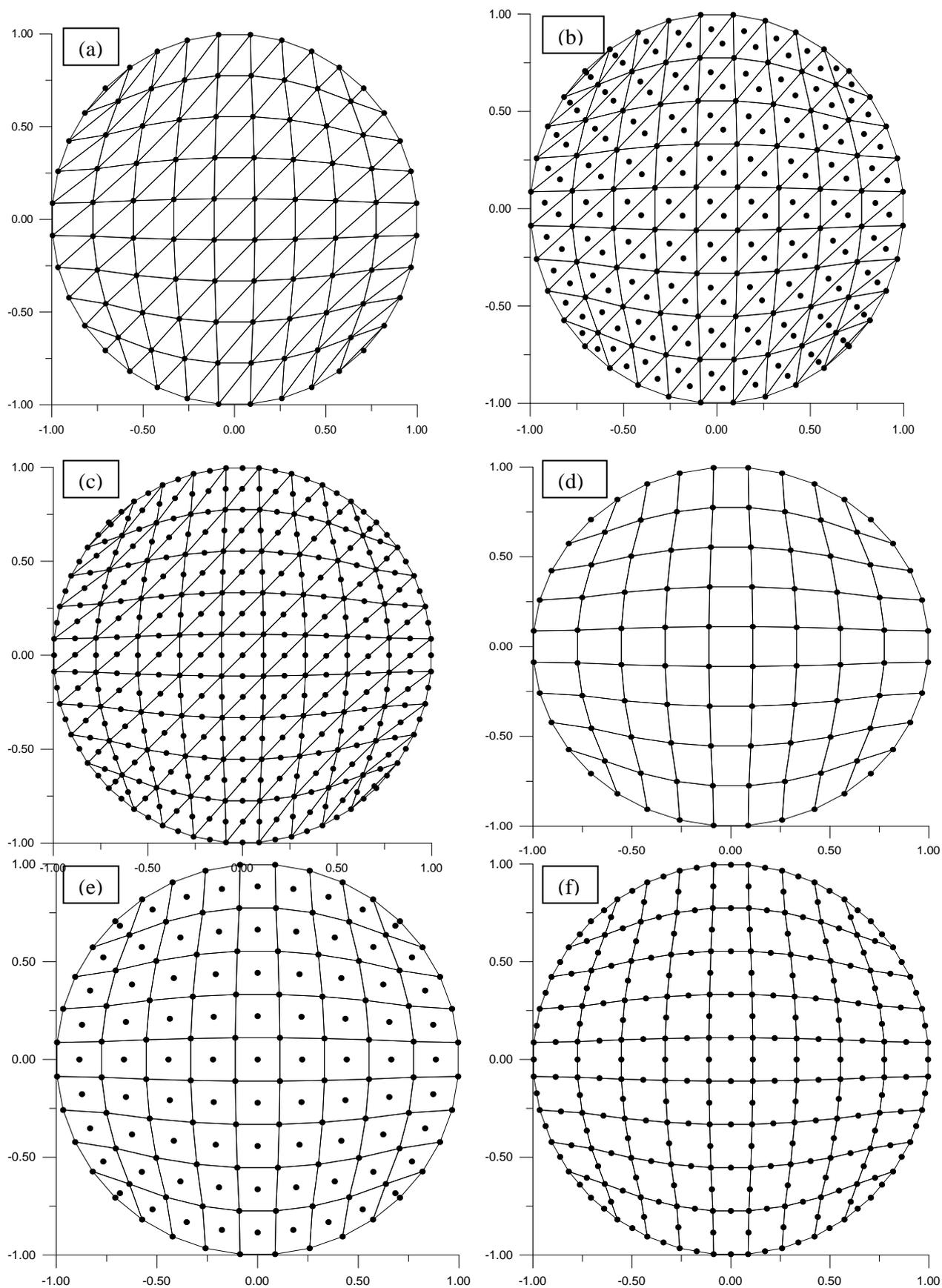
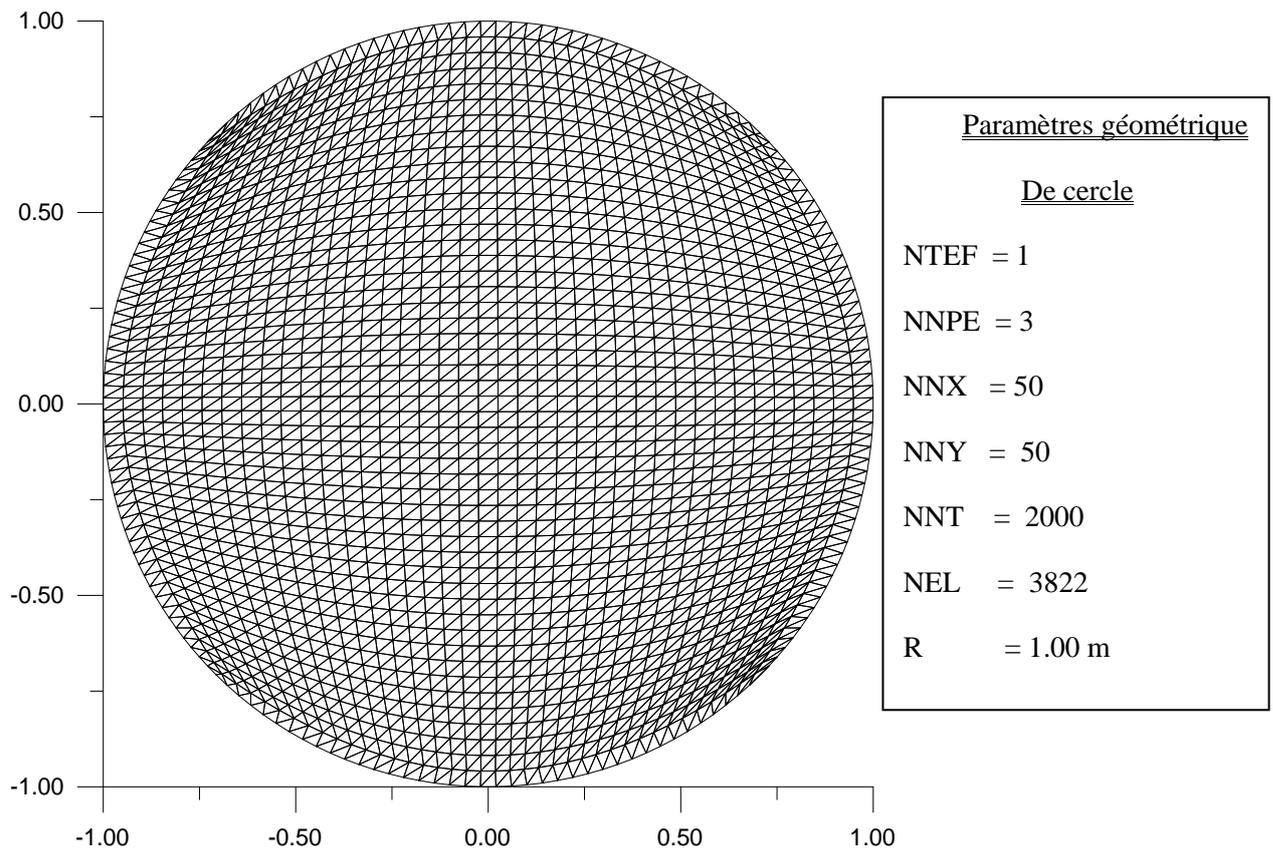


Figure (VII.1) : Maillage dans un domaine circulaire pour les éléments type T3N, T4N , T6N, Q4N, Q5N et Q8N



Figure(VII.2) : Maillage triangulaire fin dans un domaine circulaire pour les éléments type T3N (NNX =NNY=50)

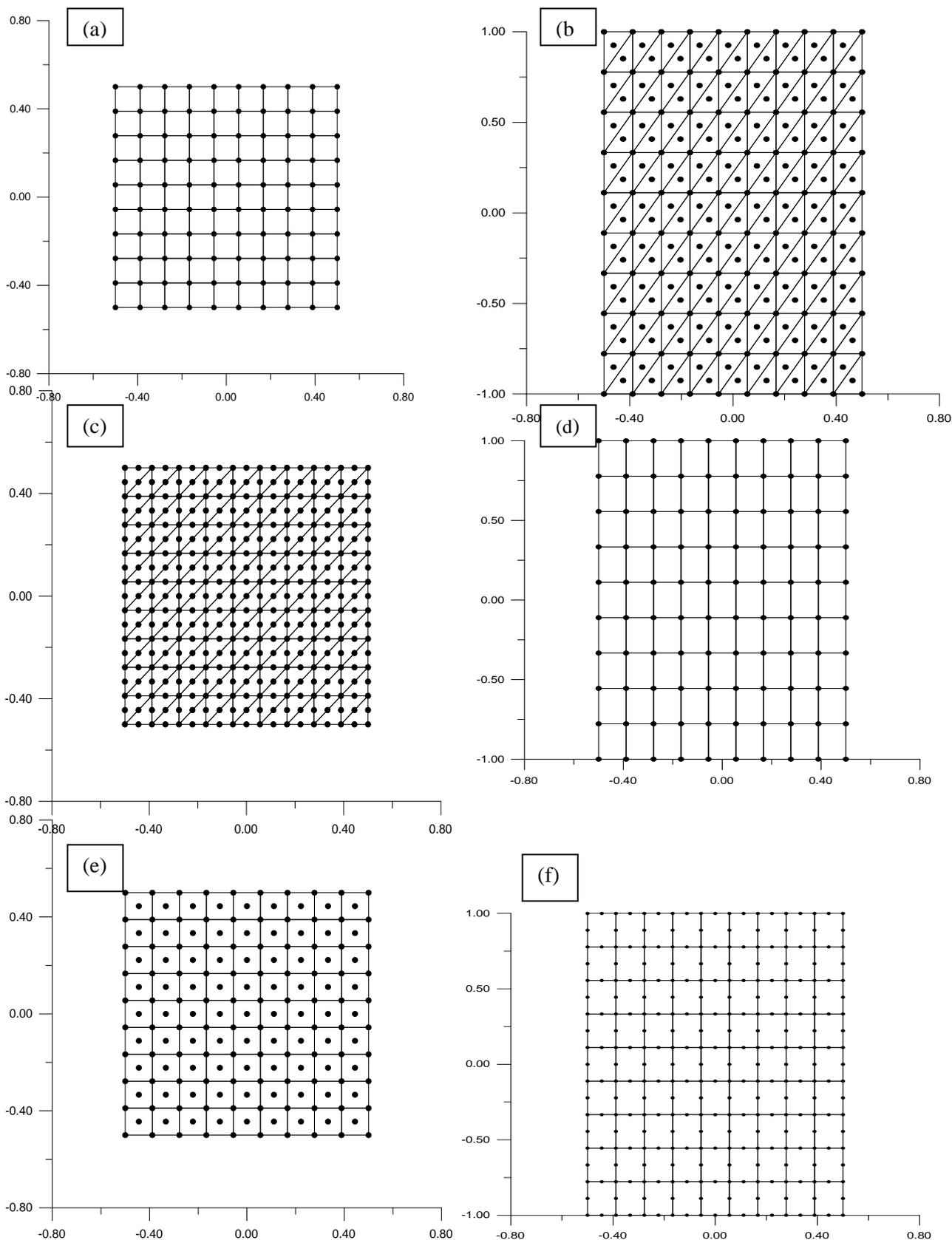


Figure (VII.3) : Maillage dans un domaine rectangulaire pour les éléments type T3N, T4N, T6N, Q4N, Q5N et Q8N

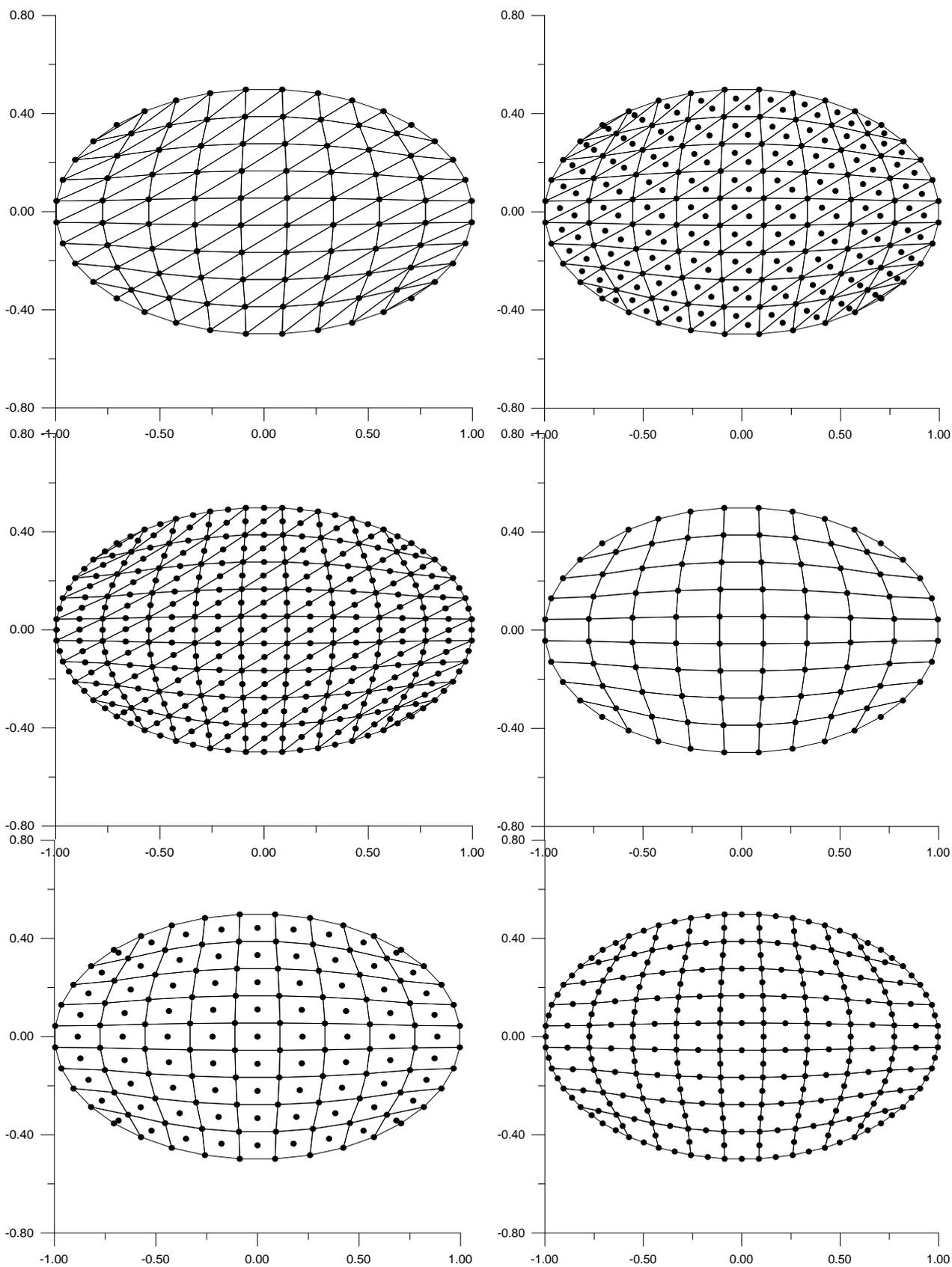


Figure (VII.4) : Maillage dans un domaine elliptique pour les éléments type T3N, T4N, T6N Q4N, Q5N et Q8N

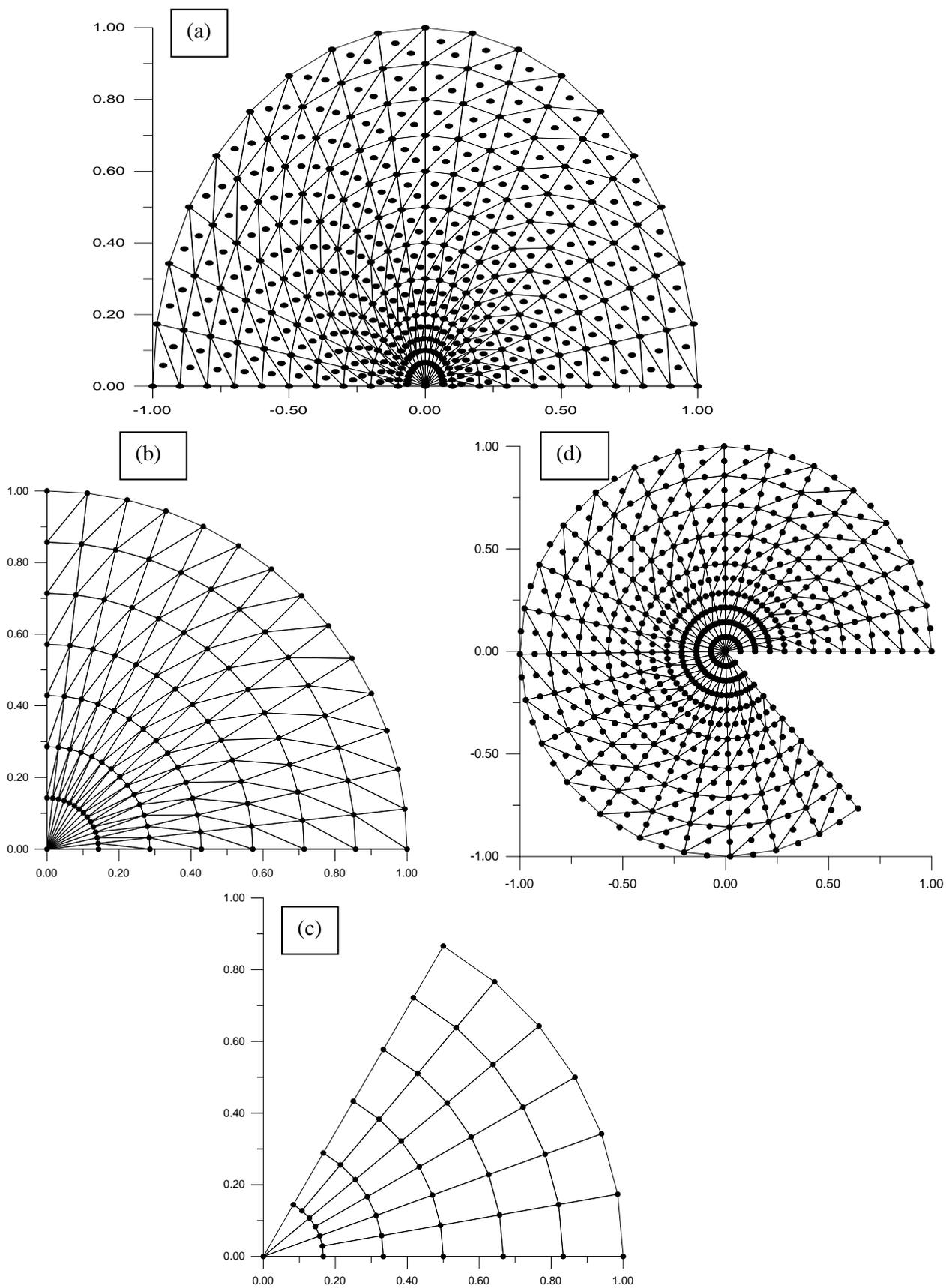


Figure (VII.5) : Maillage dans un domaine secteur pour les éléments type T3N, T4N T6N et Q4N

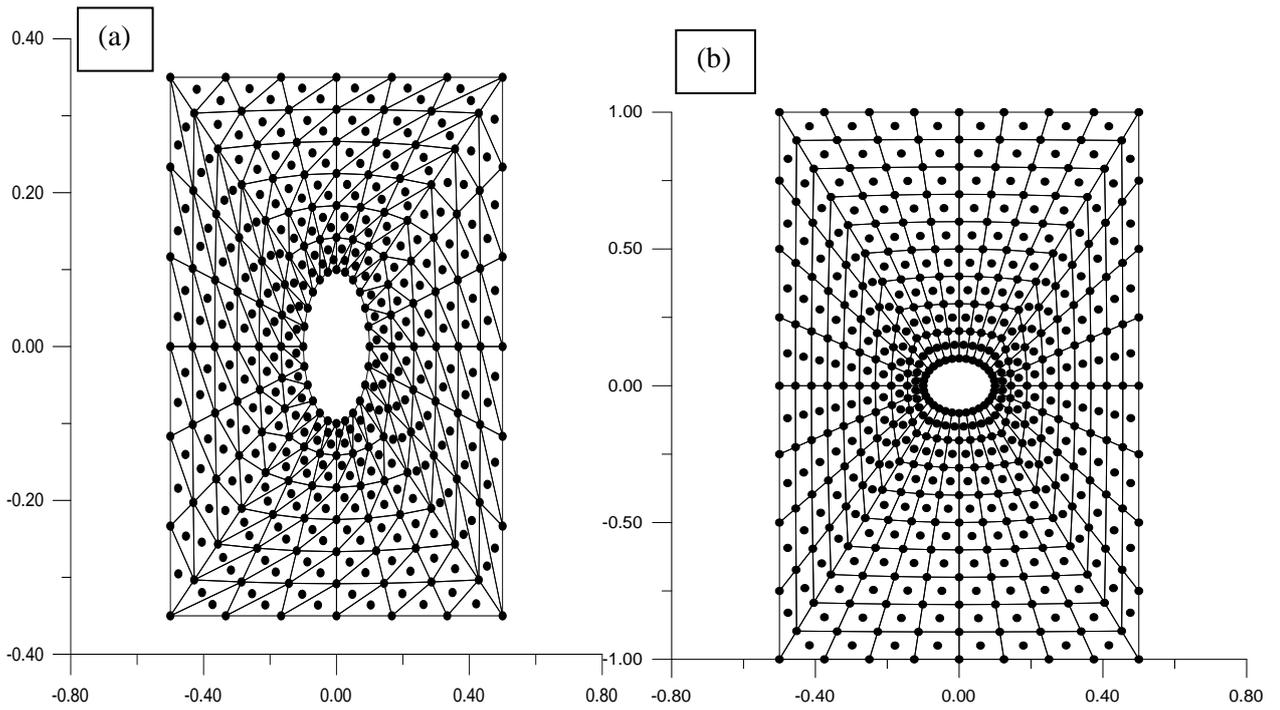


Figure (VII.6) : Maillage dans un domaine rectangulaire moins cercle centré pour les éléments type T4N et Q5N.

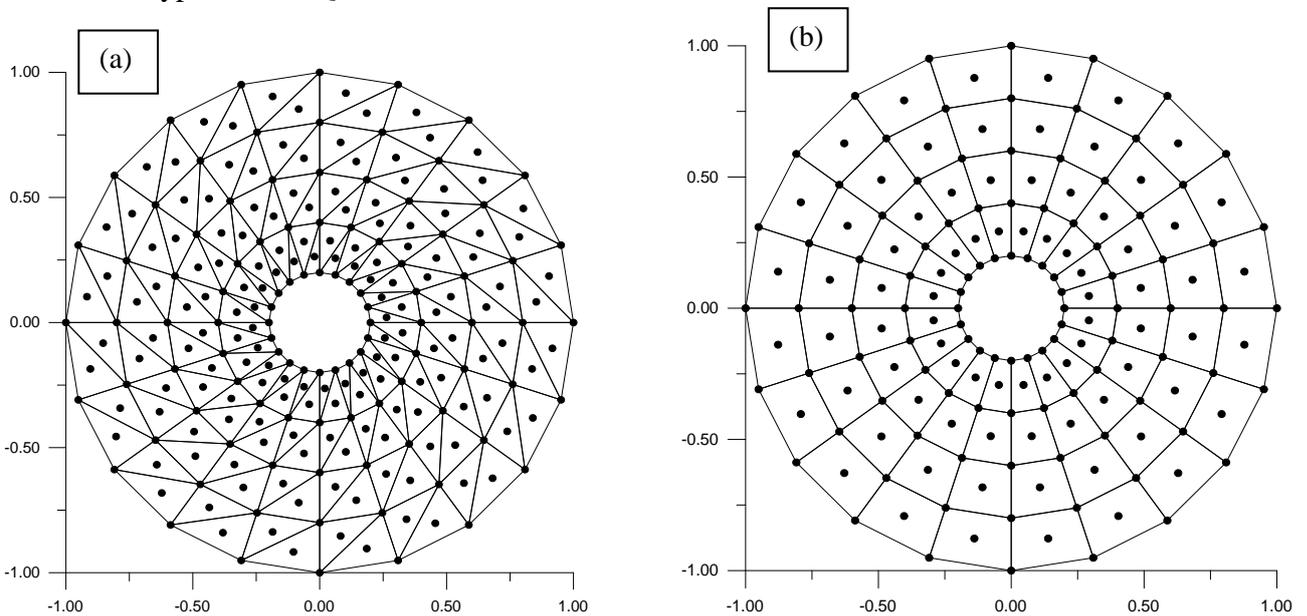


Figure (VII.7) : Maillage dans un domaine grand cercle moins petite cercle centré pour les éléments type T4N et Q5N

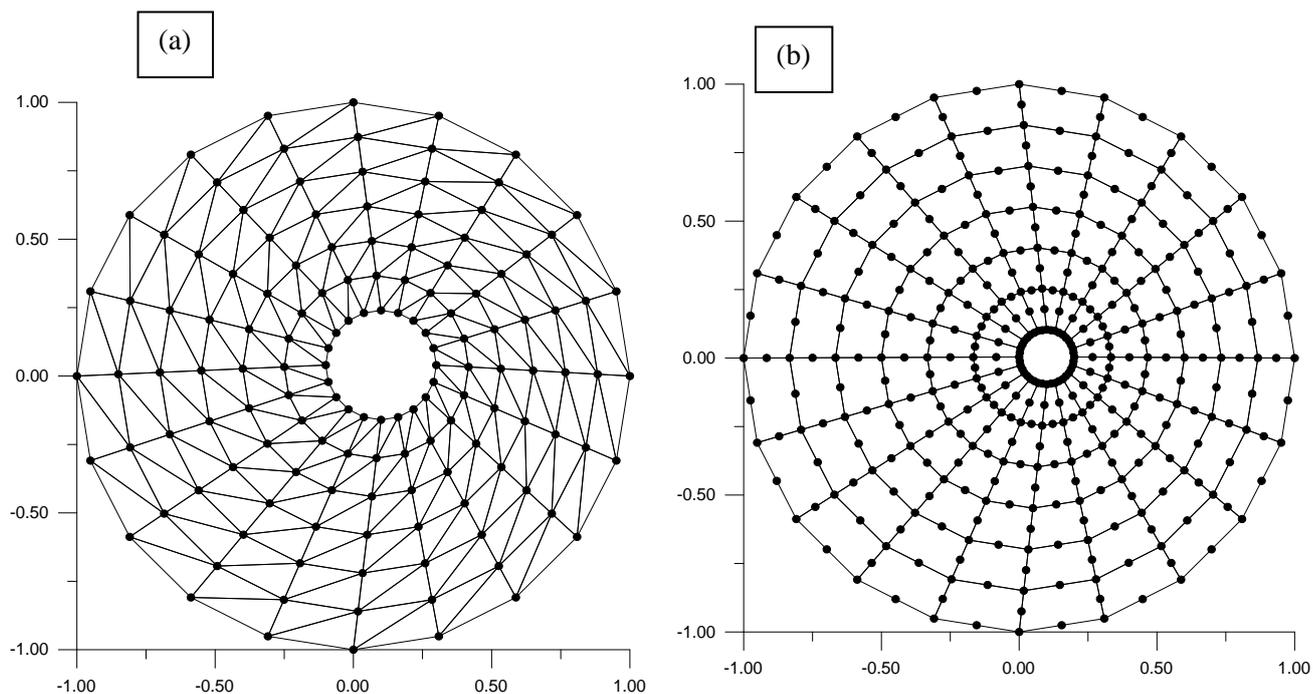


Figure (VII.8) : Maillage dans un domaine grand cercle moins petite cercle non centré pour les éléments type T3N et Q8N

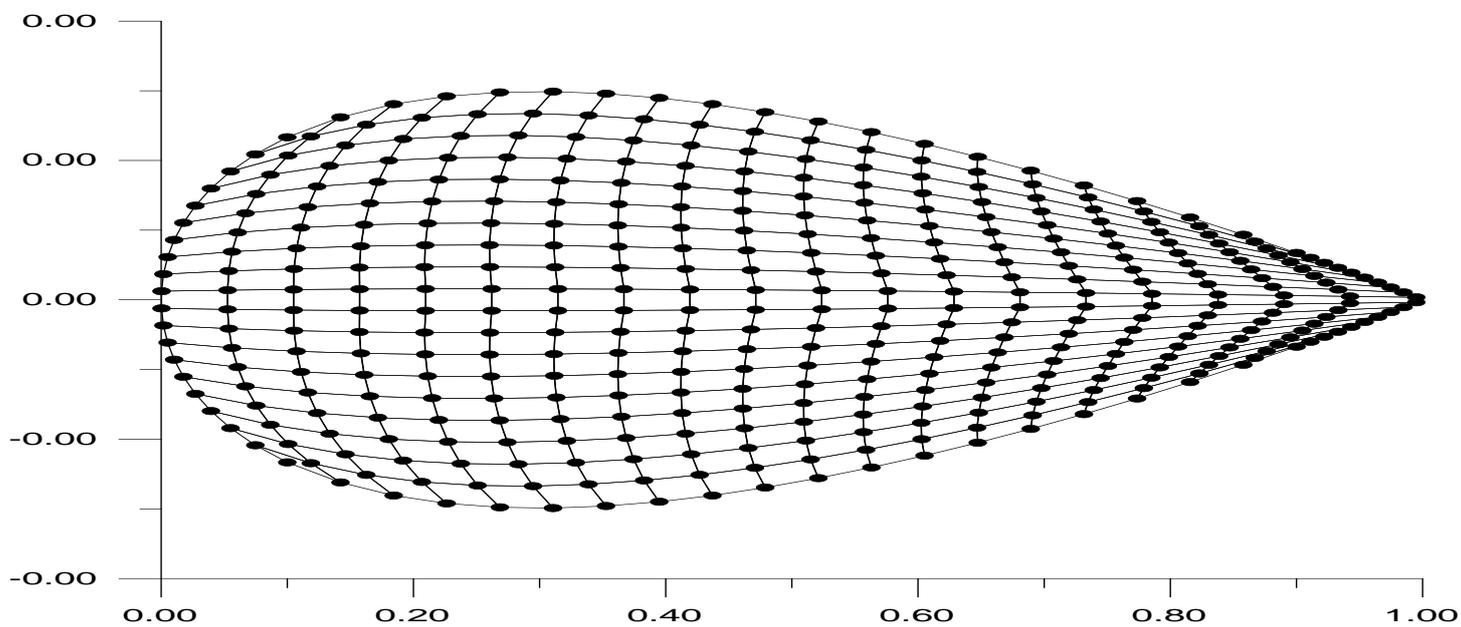


Figure (VII.9) : Maillage mono-connexes gros de type 'H' dans une section de forme profil avec un élément fini type Q4N.

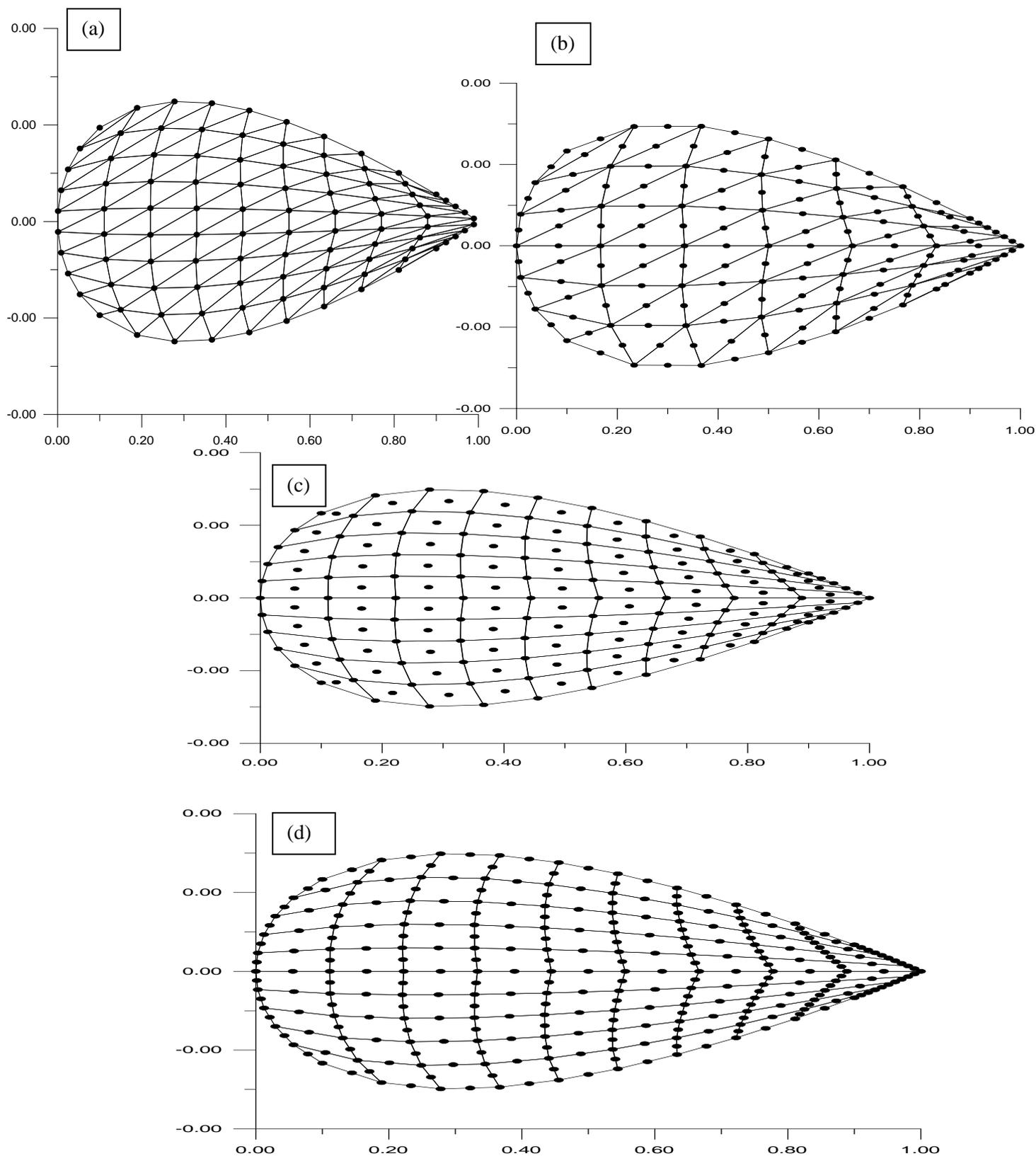


Figure (VII.10) : Maillage d'une section de forme profil d'aile

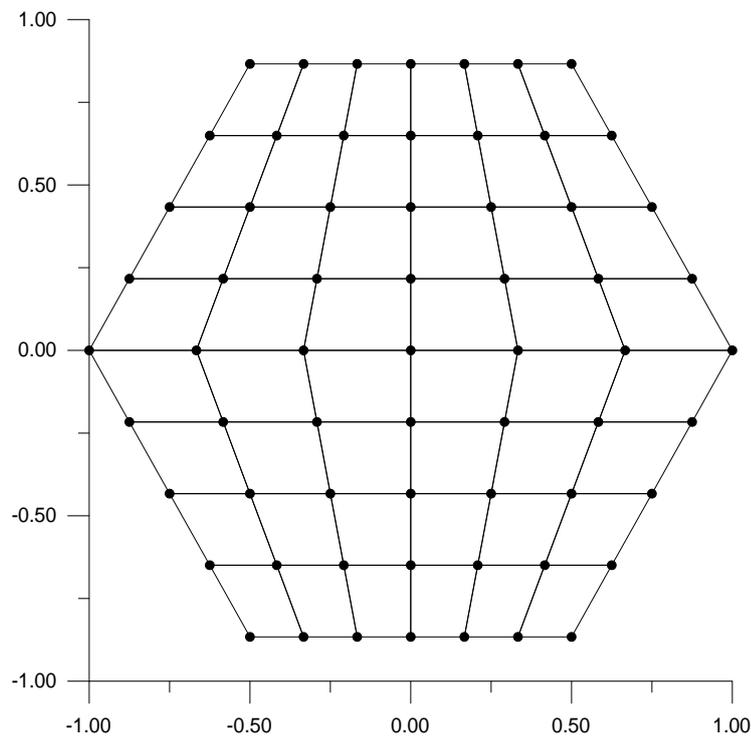


Figure (VII.11) : Maillage type 'H' d'un domaine Hexagone avec des éléments Q4N

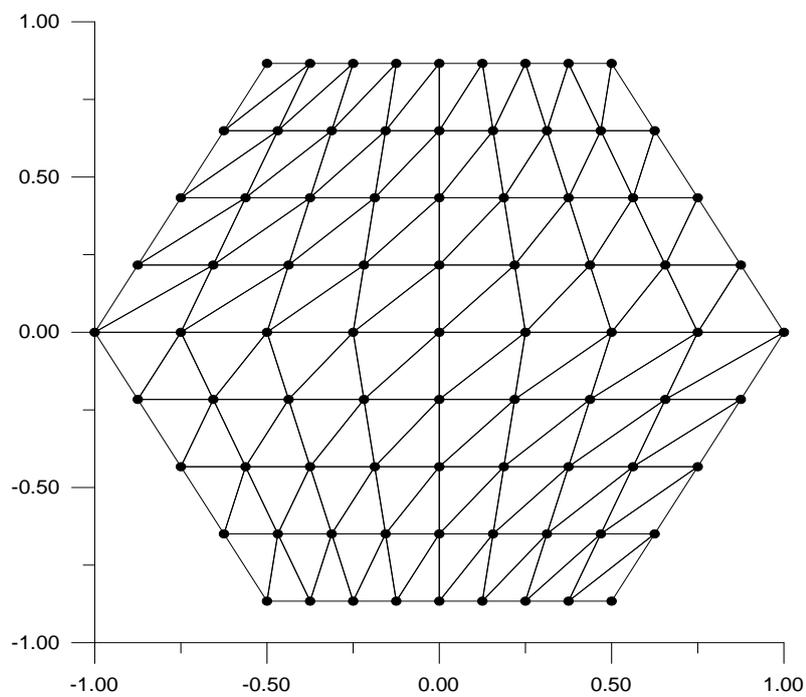


Figure (VII.12): Maillage type 'O' d'un domaine Hexagone avec des éléments T3N

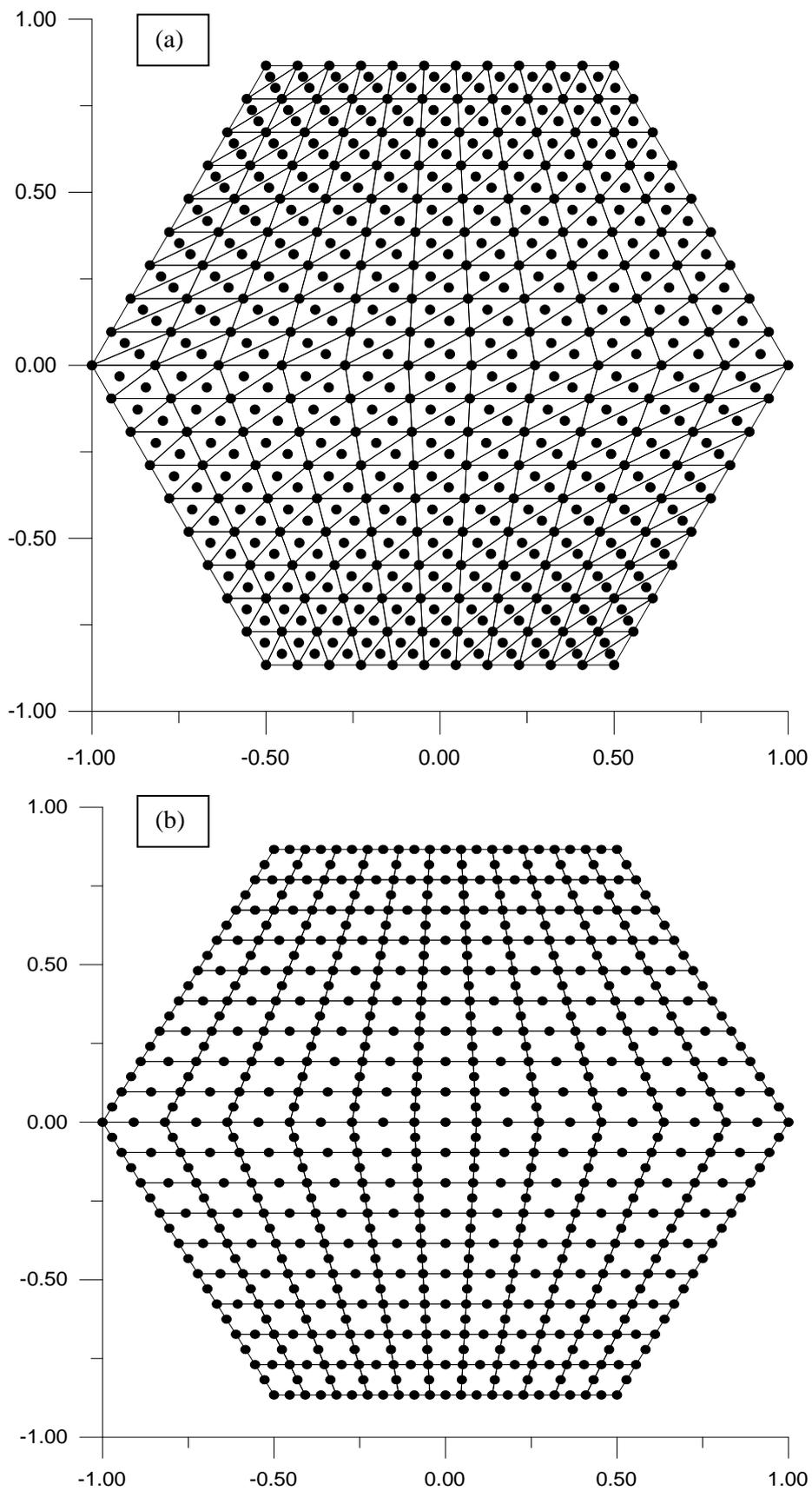


Figure (VII.13) : Maillage d'une section de forme hexagone

VII.4 Exploitations des résultats numériques des solutions :

Dans cette partie, on va présenter quelques résultats numériques et graphiques obtenus par la résolution de l'équation de Poisson, avec les conditions aux limites appropriées pour toutes les géométries traitées, ainsi que l'enrichir avec quelques remarques et interprétations.

Remarques

Rappelons que les polynômes d'interpolations $u(x, y)$ sont présentés selon plusieurs choix et en fonctions de nombres des nœuds par élément fini. Ces fonctions sont données comme suit, ou en montrant celle qui ne converge pas :

✓ Élément fini à trois nœuds (T3N) :

$$U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y \quad (\text{polynôme complet linéaire})$$

✓ Élément fini à quatre nœuds (T4N ou Q4N) :

$$\text{polynôme 1: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4xy$$

$$\text{polynôme 2: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4(x^2 + y^2)$$

✓ Élément fini à Cinque nœuds (Q5N) :

$$\text{polynôme 1: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5y^2 \quad (\text{ne converge pas})$$

$$\text{polynôme 2: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4(x^2 + y^2) + C_5xy$$

✓ Élément fini à 6 nœuds (T6N) :

$$\text{polynôme 1: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 \quad (\text{polynôme complet})$$

✓ Élément fini à huit nœuds (Q8N) :

$$\text{polynôme 1: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 + C_7x^3 + C_8y^3$$

$$\text{polynôme 2: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 + C_7x^2y + C_8xy^2$$

$$\text{polynôme 3: } U(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 + C_7(x^2y + xy^2) + C_8(x^3 + y^3)$$

On peut remarquer que pour le dernier polynôme (3) ; la présence des termes cubiques ont induit des résultats erronés (non admissibles), et de non convergence de polynôme '1' on observe aussi que, le polynôme 1 pour l'interpolation d'un élément fini à 5 nœuds n'a pas convergé ; tandis que l'ajout de terme bilinéaire 'xy' au polynôme 2 de même élément a permis l'obtention de la convergence de la solution.

VII.4.1 Résultat de domaine circulaire :

Le premier domaine à étudier et celui d'un cercle, c'est pour faire la validation de notre programme après la comparaison des résultats numérique avec la solution analytique quelle est donnée au troisième chapitre. Tell que le cercle à étudier est de rayon R, avec les conditions aux limites $U=0$ sur la frontière ' Γ '.

VII.4.1 .1 Effet de la discrétisation sur la convergence :

Le but de ce paragraphe est de voir l'effet de la discrétisation sur la convergence de la solution pour ce domaine circulaire ; en utilisant des éléments triangulaires (T3N) en premier lieu et puis des éléments quadrilatères (Q4N). Pour cela, on va changer le nombre des nœuds NNX et NNY de la discrétisation. Tel que pour chaque cas, on calcul le nombre total des nœuds (NNT) et d'éléments (NEL), le nombre de degrés de liberté restants (NDLR), le nombre de degrés de liberté éliminés (NDLE), la largeur de la demi bande de la matrice de rigidité global avant sa réduction (IBAV) et après sa réduction (IBAP), ainsi que le nombre de case stockées de cette matrice en utilisant la méthode de stockage bande (NCASE), et aussi quelque paramètres plus importants qui sont : le temps de calcul (TEMPS) la surface (SURFACE), la constante de torsion (CTORS), l'angle de torsion unitaire (ATORS), et la contrainte de torsion maximale (THOMAX). On aura les résultats suivants.

Tableaux (VII.11 a, b, c) : Effet de la discrétisation. Élément triangulaire (T3N)

- a) NNX=215

NNY	NNT	NEL	NDEL	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
215	46225	91592	856	45369	217	215	9731330
235	50176	100152	892	49284	217	215	10647230
255	54756	108712	932	53824	217	215	11563130
275	59049	117272	968	62001	217	215	12479030
295	63001	125832	1000	58081	217	215	13394930

NNY	Temps 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
215	112.93	3.1384229191660	1.56911619775639	63.7301432124564	654.2127783375255
235	138.35	3.1384251480542	1.56912309346454	63.7298631423523	653.6720328608232
255	159.63	3.1384273279969	1.56912980147336	63.7295906980437	653.1109747573324
275	186.77	3.1384290633807	1.56913511081875	63.7293750617951	652.6384745558310
295	214.00	3.1384304512432	1.56913933386784	63.7292035459369	652.2420160818339
AN	/	3.14159265358979	1.570796326794897	63.66197723675813	636.6197723675814

- b) NNX=255

NNY	NNT	NEL	NDEL	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
215	54756	108712	932	53824	217	215	11563130
235	59536	118872	972	58564	237	235	13825520
255	65025	129032	1016	64009	257	255	16289910
275	69696	139192	1052	68644	257	255	17580210
295	75076	149352	1092	73984	257	255	18870510

NNY	Temps 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
215	165.25	3.13842732799697	1.569129801473362	63.72959069804374	653.1109747573324
235	192.01	3.13842924438980	1.569135662835896	63.72935264199539	652.5877459515132
255	231.25	3.13843109651880	1.569149371104887	63.72912412172086	652.0515340520212
275	264.39	3.13843244224402	1.569145349739980	63.72895921755802	651.6405909217724
295	307.70	3.13843378417561	1.569141289451943	63.72879589505676	651.2106315767392
AN	/	3.14159265358979	1.570796326794897	63.66197723675813	636.6197723675814

- c) NNX=295

NNY	NNT	NEL	NDEL	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
215	63001	125832	1000	62001	217	215	13394930
235	69169	137592	1048	68121	237	235	16015720
255	75076	149352	1092	73984	257	255	18870510
275	80656	161112	1176	85849	297	275	21959300
295	87025	172872	1132	79524	277	295	25282090

NNY	Temps 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
215	218.61	3.138430451243223	1.569139333867848	63.72920354593693	652.2420160818339
235	260.90	3.138436169705880	1.569144920402813	63.72897665457769	651.6850905502979
255	308.65	3.138433784175616	1.569149371104887	63.72879589505676	651.2106315767392
275	358.07	3.138434986382208	1.569152946764805	63.72865067498653	650.8063145691931
295	421.48	3.138432299536258	1.569156437333865	63.72850891139240	650.3885507965043
AN	/	3.14159265358979	1.570796326794897	63.66197723675813	636.619772367581

Tableaux (VII.12 a, b, c) : Effet de la discrétisation. Élément quadrilatère (Q4N)

- a) NNX=215

NNY	NNT	NEL	NDEL	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
215	46225	45796	856	45369	217	215	9731330
235	50176	50076	892	49284	217	215	10647230
255	54756	54356	932	53824	217	215	11563130
275	59049	58636	968	58081	217	215	12479030
295	63001	62916	1000	62001	217	215	13394930

NNY	Temps 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
215	112.95	3.141564443162779	1.570686864398847	63.66641388974325	652.9050238222329
235	136.92	3.141566674282133	1.570693767009517	63.66613409970584	652.3653592818306
255	159.94	3.141568856406920	1.570700481732927	63.66586192783982	651.8054227190745
275	187.02	3.141570593527717	1.570705796392933	63.66564650722386	650.9382010696146
295	213.97	3.141571982779471	1.570710023669228	63.66547516288005	651.3338670333126
AN	/	3.141592653589793	1.570796326794897	63.66197723675813	636.6197723675814

- b) NNX=255

NNY	NNT	NEL	NDEL	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
215	54756	54356	932	53824	217	215	11563130
235	59536	59436	972	58564	237	235	13825520
255	65025	64516	1016	64009	257	255	16289910
275	69696	69596	1052	73984	257	255	18870510
295	75076	74676	1092	68644	257	255	17580210

NNY	Temps 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
215	159.94	3.14156885640692	1.570700481732927	63.66586192783982	651.8054227190745
235	190.30	3.14157077471809	1.570706348962634	63.66562410984367	651.2832398341707
255	231.25	3.14157262870103	1.570711981210912	63.66539581808425	650.7480998084499
275	264.00	3.1415739757733	1.570716045563186	63.66506791964509	650.3379781429734
295	307.76	3.14157531904813	1.570720070953432	63.66523107882598	649.9088782756106
AN		3.141592653589793	1.570796326794897	63.66197723675813	636.6197723675814

- b) NNX=295

NNY	NNT	NEL	NDEL	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
215	63001	62916	1000	62001	217	215	13394930
235	69169	68796	1048	68121	237	235	16015720
255	75076	74676	1092	73984	257	255	18870510
275	87025	80556	1132	85849	277	275	21959300
295	80656	86436	1176	79524	297	295	25282090

NNY	Temps 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
215	214.96	3.141571982779471	1.570710023669228	63.66547516288005	650.9382010696146
235	274.60	3.141573832922665	1.570715615796276	63.66524849840810	650.3823888178786
255	316.69	3.141575319048139	1.570720070953432	63.66506791964509	649.9088782756106
275	379.20	3.141576522458148	1.570723650192516	63.66492284479416	649.5053694873736
295	463.98	3.141577706966222	1.570727144255613	63.66478122296106	649.0884408137123
AN	/	3.141592653589793	1.570796326794897	63.66197723675813	636.6197723675814

On remarque bien à partir des résultats obtenus par le programme, la convergence de la valeur des paramètres vers ceux des solutions exactes montrées dans ces tableaux. Tel que cette convergence est lente, puisque chaque fois qu'on augmente les valeurs de NNX et NNY, on a une petite variation aux valeurs obtenues pour les paramètres qu'on a calculé (la deuxième partie de tableaux). Ainsi que, on constate une augmentation pour les autres paramètres (NNT, NEL. ...). Mais la largeur de la demi bande (réduit ou non) conserve sa valeurs minimale pour de celle de la discrétisation minimale sur l'un des axes (x ou y). Par exemple pour la discrétisation 215x215, IBAV=215 et pour 215x295, IBAV=215.

Ainsi que d'après les résultats de tous les tableaux, la discrétisation qui nous satisfait pour la suite c'est celle qui donne un nombre des nœuds total NNT supérieur à 80656 nœuds.

VII.4.1 .2 Convergence et stabilité des résultats

Le but de ce paragraphe et de voir la convergence des résultats, et de cherche les zone ou ces résultat se stabilise ainsi que le temps optimal pour les résultats les plus exactes. Pour cette étude nous avons utilisé deus type d'élément fini T3N et Q4N, le NNT reste constant avec les deux types pour une même discrétisation (NNX et NNY).

Tableaux (VII. 13a, b) : Convergence et stabilité des résultats

a) T3N

NNX =NNY	NNT	Temp 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
10	100	0.00	3.122541571048	1.518322749916	65.86214953670	735.83111892204
30	900	2.99E-002	3.136916681683	1.564353896838	63.92415437585	680.40719157172
60	3600	6.49E-001	3.138080348569	1.568026965710	63.77441344234	675.56140815708
90	8100	3.29	3.138288165367	1.568687314445	63.74756720422	668.45230387569
120	14400	10.47	3.138359961983	1.568916521969	63.73825413890	663.28178122897
150	22500	25.80	3.138392967555	1.569021772032	63.73397857343	659.52761085243
180	32400	54.09	3.138410820763	1.56907833282	63.73168114562	656.71096449660
210	44100	101.8	3.138421554608	1.569111960358	63.73031531614	654.52915826307
240	57600	180.2	3.138428506654	1.569133410811	63.72944410653	652.79274299166
270	72900	289.8	3.138433265337	1.569147819824	63.72885889819	651.37940532043
295	87025	420.1	3.138436169705	1.569156437333	63.72850891139	650.38855079650
AN			3.141592653589	1.570796326794	63.66197723675	636.61977236758

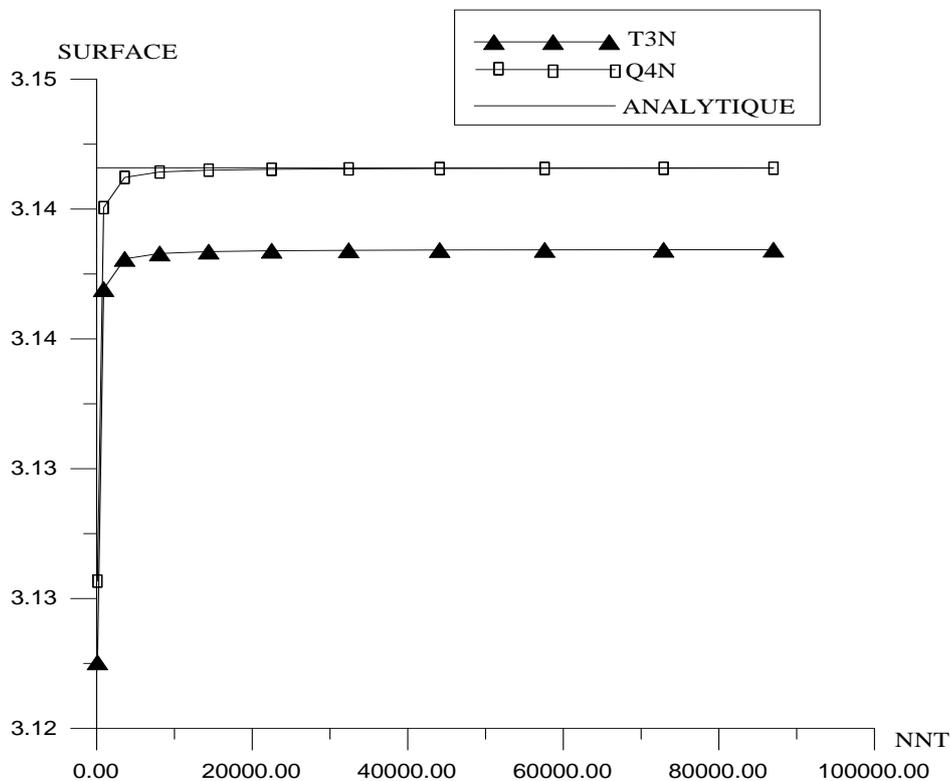
b) Q4N

NNX =NNY	NNT	Temp 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
10	100	0.00	3.1256671980047	1.51984257292	65.79628823511	734.3602114434
30	900	5E-002	3.1400566979542	1.56591979647	63.86023104448	679.0470750981
60	3600	6 E-001	3.1412215296574	1.56959654204	63.71063984997	674.2109782799
90	8100	3.32	3.1414295544768	1.57025755178	63.68382045774	667.1160849151
120	14400	10.50	3.1415014229606	1.57048698873	63.674516705370	661.9558980101
150	22500	25.79	3.1415344615707	1.57059234415	63.670245415409	658.2092321236
180	32400	53.91	3.1415523326503	1.57064896156	63.667950284995	655.3982161714
210	44100	101.8	3.1415630772397	1.57068262275	63.666585821333	653.2207713124
240	57600	183.7	3.1415777069662	1.57072714425	63.664781222961	651.4878270905
270	72900	290.2	3.1415747996907	1.57071851812	63.665130859782	650.0773146449
295	87025	430.3	3.1415700362440	1.57070409468	63.665715482920	649.0884408137
AN			3.1415926535897	1.57079632679	63.66197723675	636.6197723675

Après une comparaison entre les résultats des deux tableaux (VII.13 a, b) on peut dire que pour un élément fini de type quadrilatère la méthode des éléments finis donne des résultats plus proche des résultats analytiques que pour un élément fini de type triangulaire par exemple pour $NNX=NNY=295$, $THOMAX(T3N)=650.38$, $THOMAX(Q4N)=649.08$ et $THOMAX(ANALYTIQUE)=636.619$.

Les figure (VII. 14), (VII. 15), (VII. 16) renforcent notre remarque, tel que les solutions des deux type plus la solution analytique sont montrés dans le même graphe pour le calcul de SURFACE, CTORS, ATORS, THOMAX, ainsi que le calcul de l'erreur pour la contrainte de torsion maximale (THERREUR) et le temps d'exécution (TEMPS).

La concordance entre les graphes des figures (VII.17), (VII.18) et (VII.19) fait sortir la discrétisation la plus favorable, c'est le point où la solution est la plus exacte possible pour un temps d'exécution le plus court possible, tel que il est très intelligent et même utile de sacrifier avec quelque centaine d'exactitude pour faire éviter une très grande augmentation de temps d'exécution, par exemple entre les deux points $THOMAX(NNT=72900)$ et $THOMAX(NNT=87025)$ $\Delta THOMAX = 1,0$ le temps que entre les points $TEMPS(NNT=72900)$ et $TEMPS(NNT=87025)$ $\Delta Temps = 140$, alors le cas le plus favorable est pour $NNT=72900$.



Figure(VII.14) : la convergence de la surface

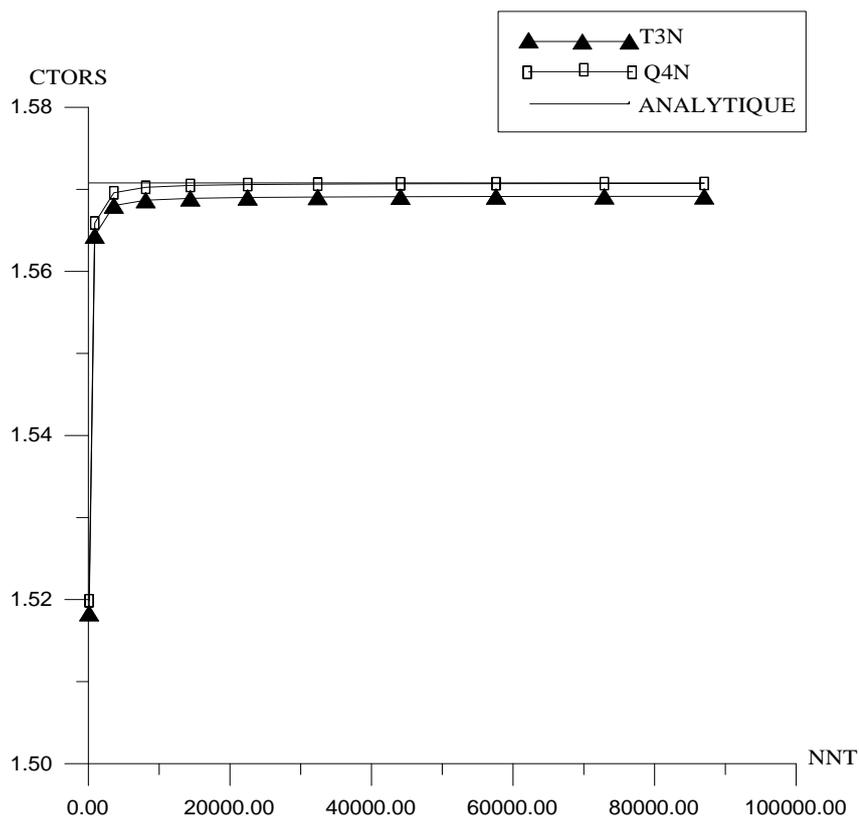


Figure (IV.15) : la convergence de la valeur de CTORS

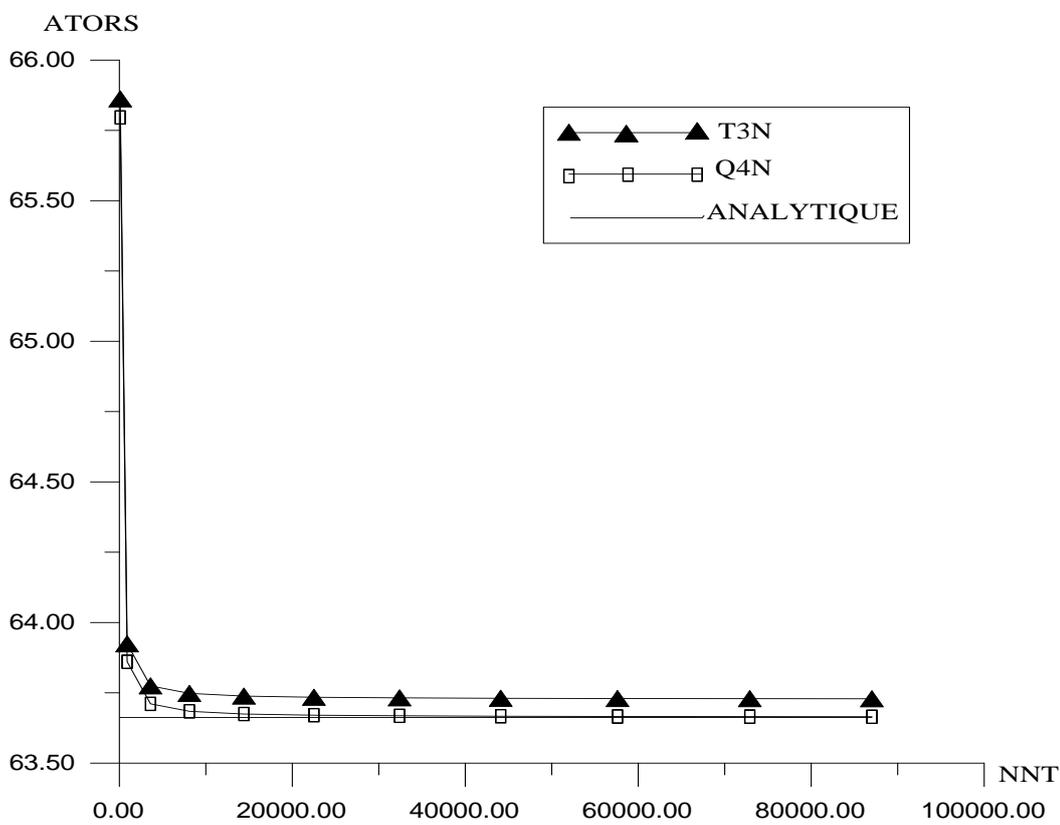


Figure (IV.16) : la convergence de la valeur de ATORS

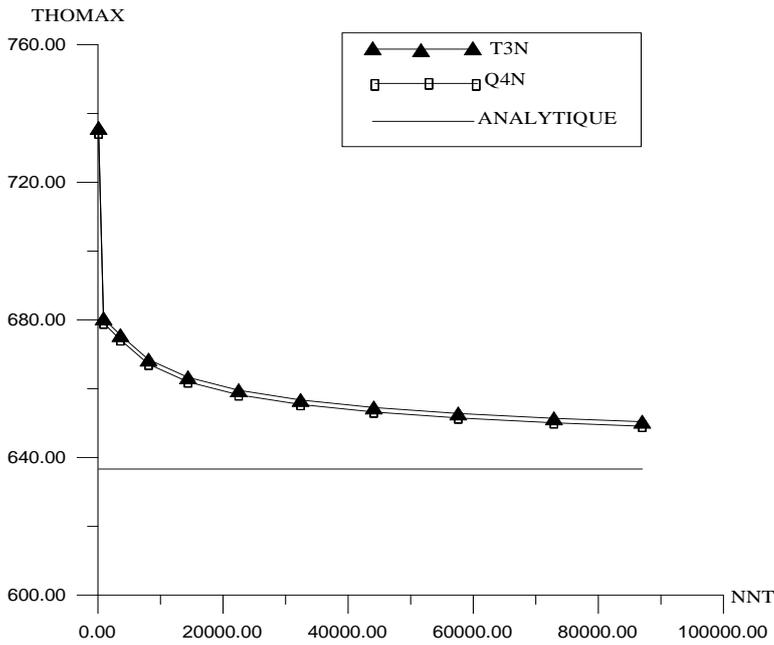


Figure (IV.17) : la convergence de la valeur de THOMAX

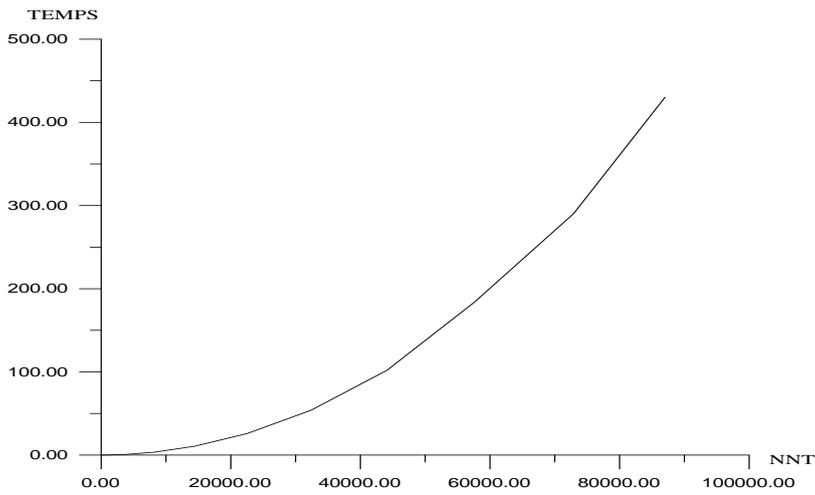


Figure (IV.18) : la variation de temps d'exécution avec le NNT

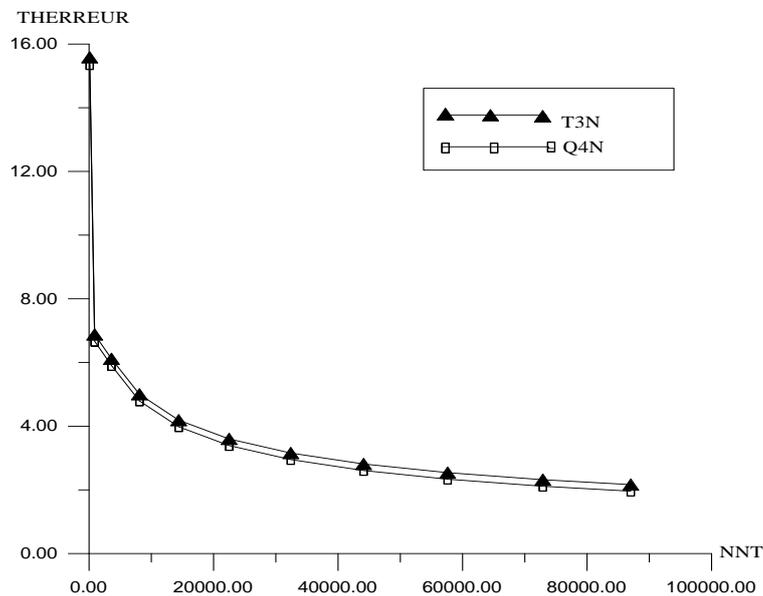


Figure (IV.19) : la variation de THERREUR avec le NNT

VII.4.1 .3 La position de la contrainte de torsion maximale

La figure (VII.18) illustre la position de la contrainte de torsion maximal dans un cercle de rayon $R=1m$, avec une discrétisation d'ordre 130×130 en utilisant des éléments fini quadrilatère Q8N.

La contrainte maximale se trouve dans le point $(x=-6.23 \text{ E-}001, y=7.81 \text{ E-}001)$, elle est présenté par une croix.

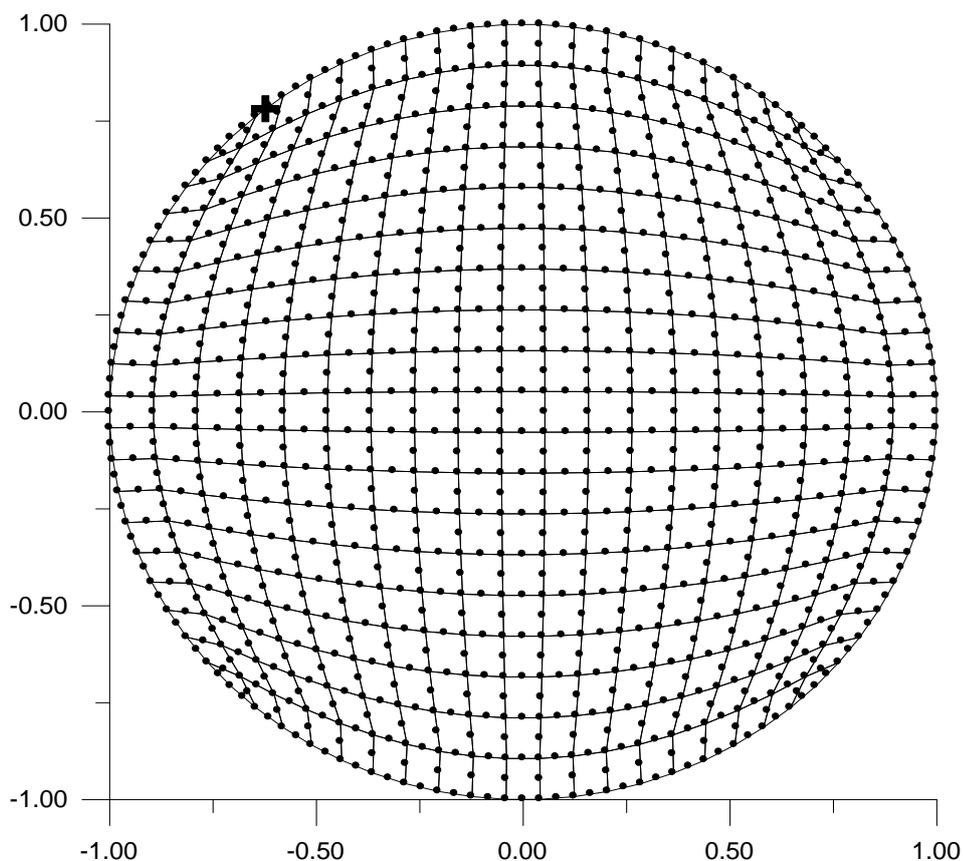


Figure (IV.20) : la position de la contrainte de torsion maximale dans un domaine circulaire

Il est bien clair que la position se trouve à frontière de cercle ce qui se coïncide avec la théorie ; mais le programme donne ce point le temps que la contrainte de torsion est maximale sur tous les points de frontière à cause des petites différences entre les valeurs numériques de la contrainte de torsion

VII.4.2 Résultat de domaine de la forme d'un profil d'aile :

Le présent résultat concerne le cas d'une section de géométrie type profil d'aile ; pour son intérêt dans le domaine aéronautique

L'exemple pris ici est de la série NACA00't', c'est un profil symétrique donné par rapport au repère 'xoy' par l'équation suivante [31]:

$$y(x) = t(a_1\sqrt{x} + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4) \quad 0 \leq x \leq 1$$

Avec :

$$a_1 = 1.4779155, \quad a_2 = -0.624424, \quad a_3 = -1.7478095, \quad a_4 = 1.384087, \quad a_5 = -0.489769$$

Si le profil est le NACA0012, alors, l'épaisseur maximale est égale à $t=12\%$ ou égale à 0.12m. Elle est située à une distance de $x=0.2991671707$ à partir de bord d'attaque. Pour l'intrados, on ajoute à l'équation le signe moins (-) par raison de symétrie. Ici la corde de profil est égale à l'unité (1m).

VII.4.2.1 Convergence et stabilité des résultats

Le but de ce paragraphe est de chercher les zones où les résultats se stabilisent pour ce domaine profil. Pour cette étude nous avons utilisé trois types d'éléments finis T3N, Q4N et Q5N. On aura les résultats suivants.

Tableaux (VII. 13a, b) : convergence des résultats pour la géométrie de profil

a) T3N

NNX =NNY	NNT	Temp 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
10	100	0.00	8.0659019831	1.59557721767	62.6732438219	540.23250262610
30	900	5.00E-	8.1116692220	1.64862955753	60.6564400975	565.18401779725
60	3600	6.69E- 001	8.1154005559	1.65315676545	60.4903310379	574.78171790066
90	8100	3.27	8.1160674021	1.65397418007	60.4604359636	578.04767148161
120	14400	10.49	8.1162978183	1.65425758216	60.4500780763	579.69657273792
150	22500	26.27	8.1164037486	1.65438809114	60.4453093775	580.69093673859
180	32400	53.91	8.1164610495	1.65445875750	60.4427275966	581.35583674913
210	44100	104.66	8.1164955009	1.65450127235	60.4411744318	581.83168589347
240	57600	200.55	8.1165178144	1.65452882093	60.4401680616	582.18904779096
270	87025	290.28	8.1165330881	1.65454768435	60.4394789860	582.46726192473
295	72900	432.22	8.1165438755	1.65456006869	60.4390265982	582.65926419875

b) Q4N

NNX =NNY	NNT	Temp 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
10	100	0.00	8.0739758551	1.59717437148	62.6105713850	539.1525917500
30	900	5.00E-002	8.1197889063	1.65027981610	60.5957844384	564.0542294841
60	3600	6.39E-001	8.1235239752	1.65481155570	60.4298414856	573.6327440319
90	8100	3.65	8.1241914889	1.65562978854	60.3999763060	576.8921690557
120	14400	10.93	8.1244221358	1.65591347431	60.3896287765	578.5377742008
150	22500	25.82	8.1245281722	1.65604411394	60.3848648463	579.5301504934
180	32400	53.90	8.1245855304	1.65611485103	60.3822856472	580.1937213859
210	44100	102.31	8.1246200163	1.65615740844	60.3807340355	580.6686193200
240	57600	180.80	8.1246423522	1.65618498459	60.3797286717	581.0252668603
270	72900	289.38	8.1246576412	1.65621626363	60.3790402851	581.3029248512
295	87025	420.52	8.1246684393	1.65620386689	60.3785883497	581.494543317

c) Q5N

NNX =NNY	NNT	Temp 's'	SURFACE	CTORS	ATORS	THOMAX
10	169	1.99E-002	8.0969474507	1.623158384654	61.6082823126	545.7079974648
30	1681	1.49E-001	8.1222037642	1.653162578707	60.4901183271	569.3756677614
60	7056	2.50	8.1241130820	1.655533479382	60.4034900201	576.4239555237
90	15876	12.91	8.1244495696	1.655947258644	60.3883967185	578.7737206003
120	28561	42.53	8.1245725207	1.656096063665	60.3829706464	579.9869882155
150	44521	104.01	8.1246516452	1.656160279196	60.3806293727	580.6882787276
180	64009	221.42	8.1246237931	1.656195195741	60.3793564050	581.1579933566

On remarque la stabilité des résultats a partir de NNT= 44100 c'est à dire pour NNX= NNY=210 pour les éléments fini de type T3N et Q4N et NNX=NNY = 150 pour les éléments fini de type Q5N.

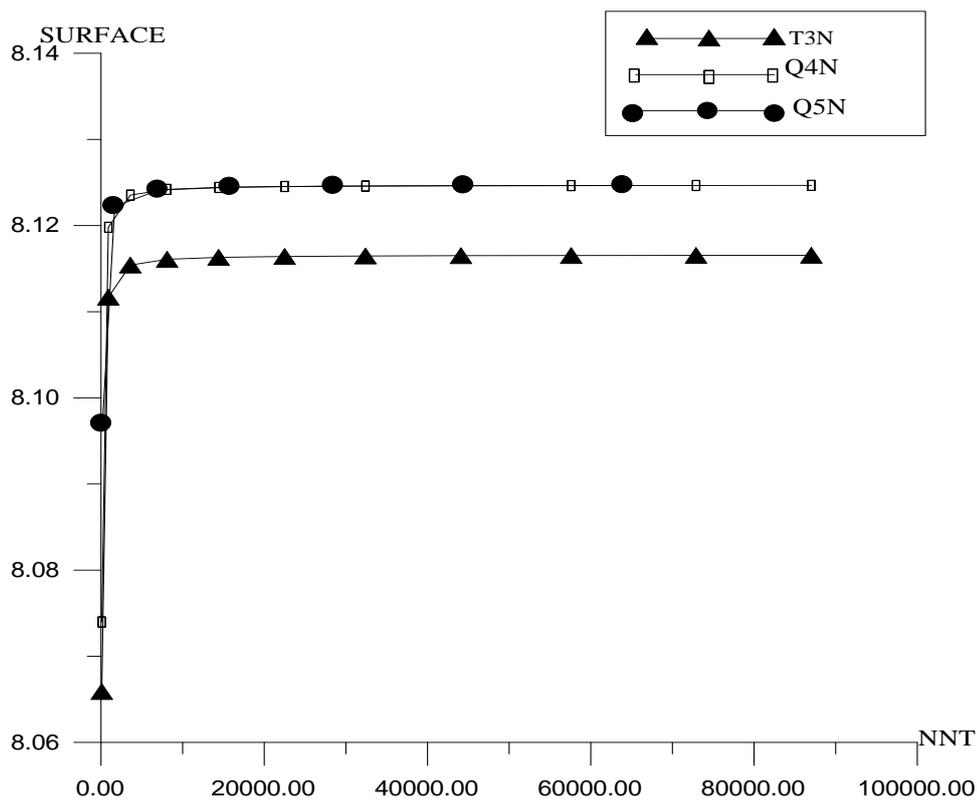


Figure (IV.21) : la variation de SURFACE avec NNT

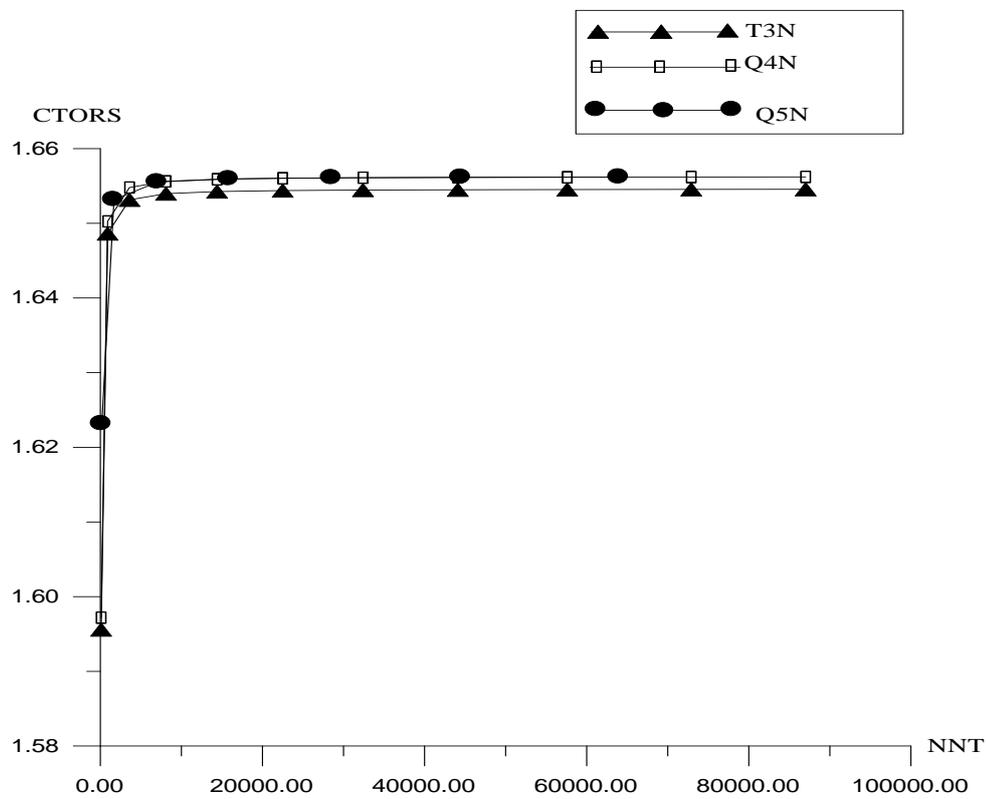


Figure (IV.22) : la variation de CTORS avec NNT

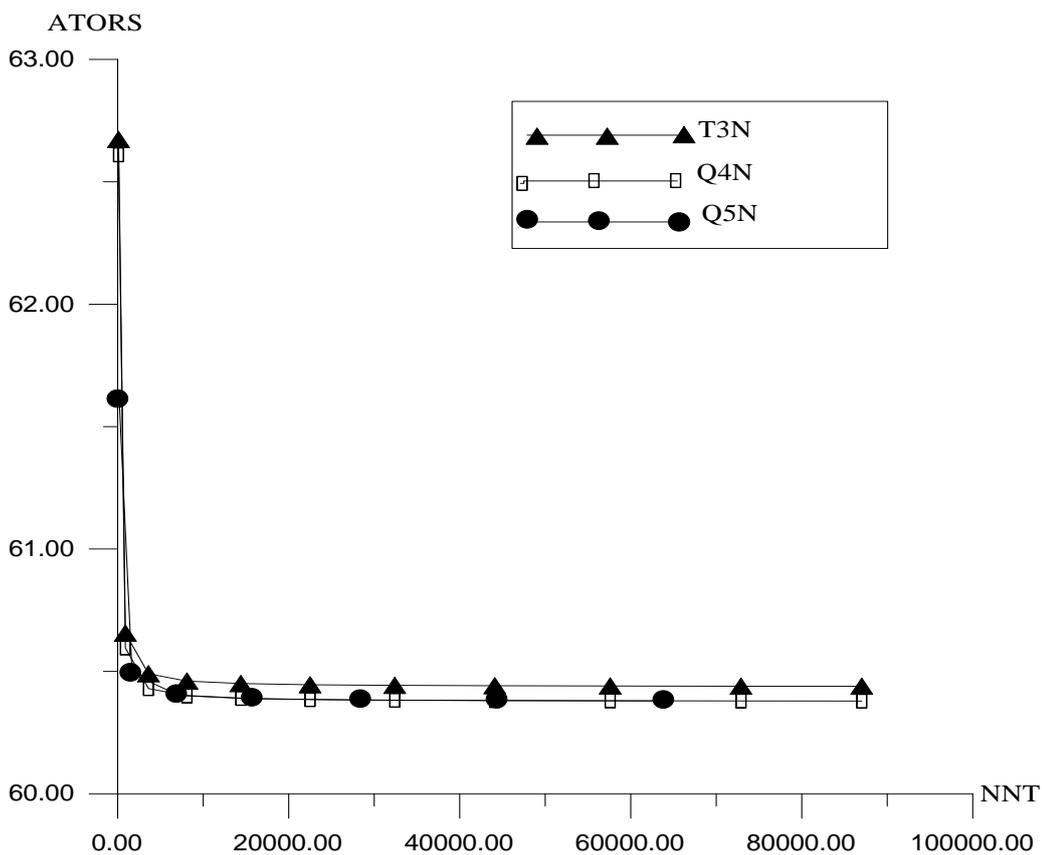


Figure (IV.23) : la variation de ATORS avec NNT

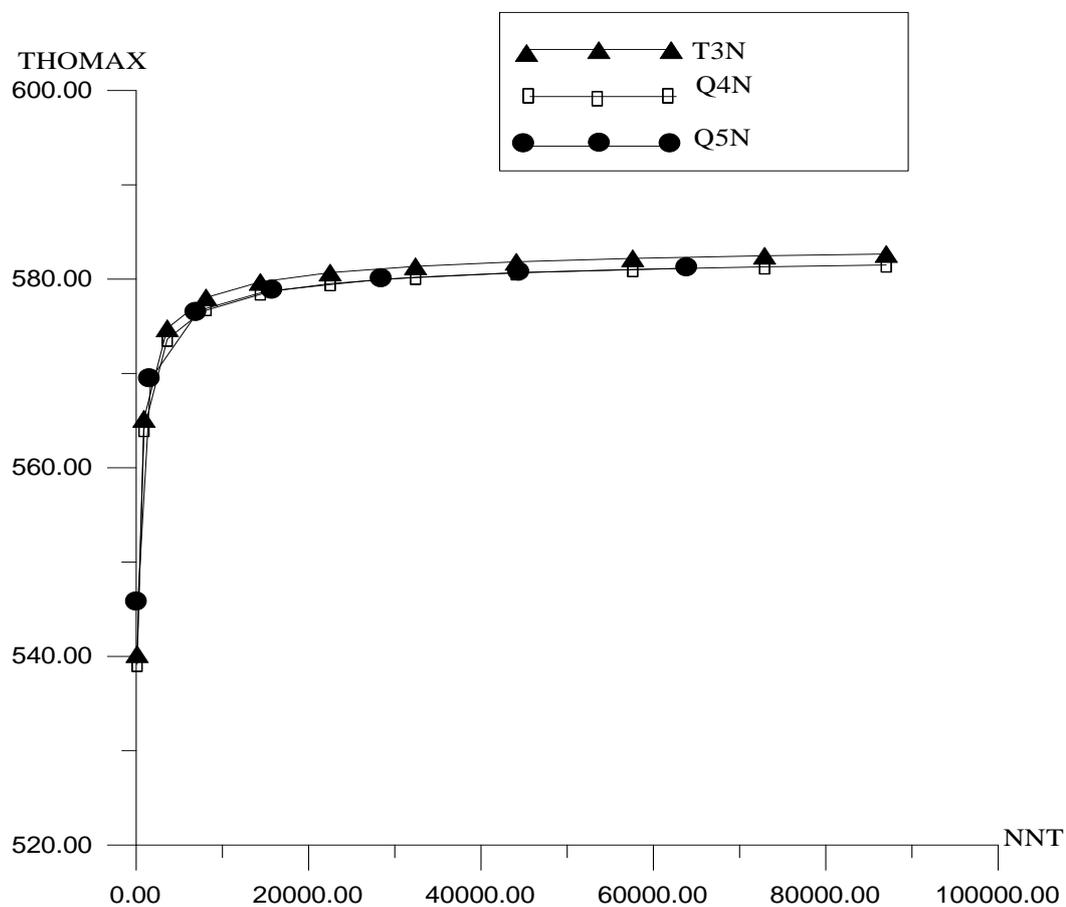


Figure (IV.24) : la variation de THOMAX avec NNT

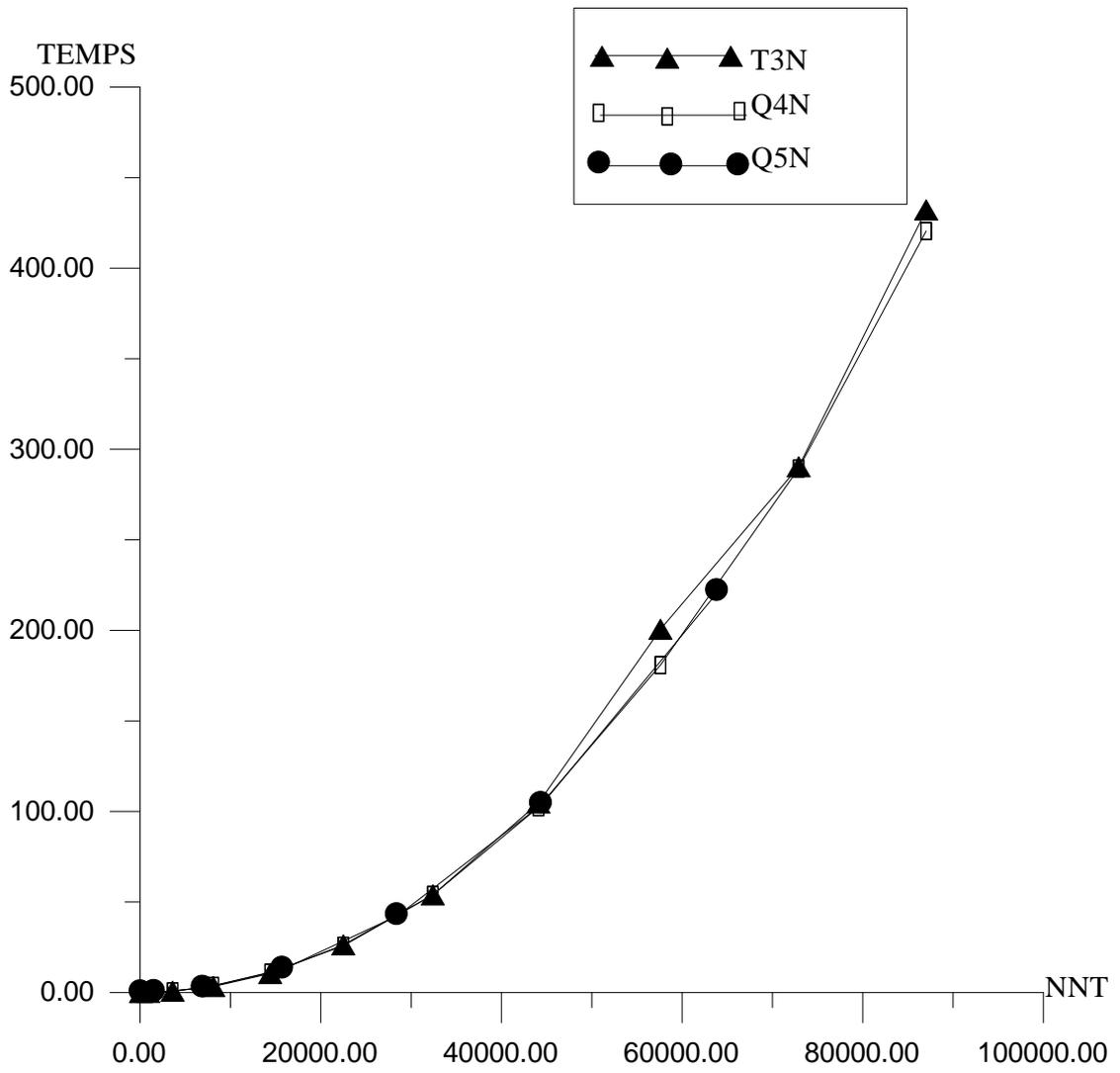


Figure (IV.25) : la variation de TEMPS avec NNT

VII.4.2 .2 La position de la contrainte de torsion maximale

La figure (VII.26) illustre la position de la contrainte de torsion maximal dans un profil NACA0012, dont on a cité son épaisseur 't' sa position et la corde 'C' précédemment, avec une discrétisation d'ordre 130x130 en utilisant des éléments fini quadrilatère Q8N.

La contrainte maximale se trouve dans le point ($x=1.24 \text{ E-}001$, $y= 5.02 \text{ E-}002$), elle est présenté par une croix

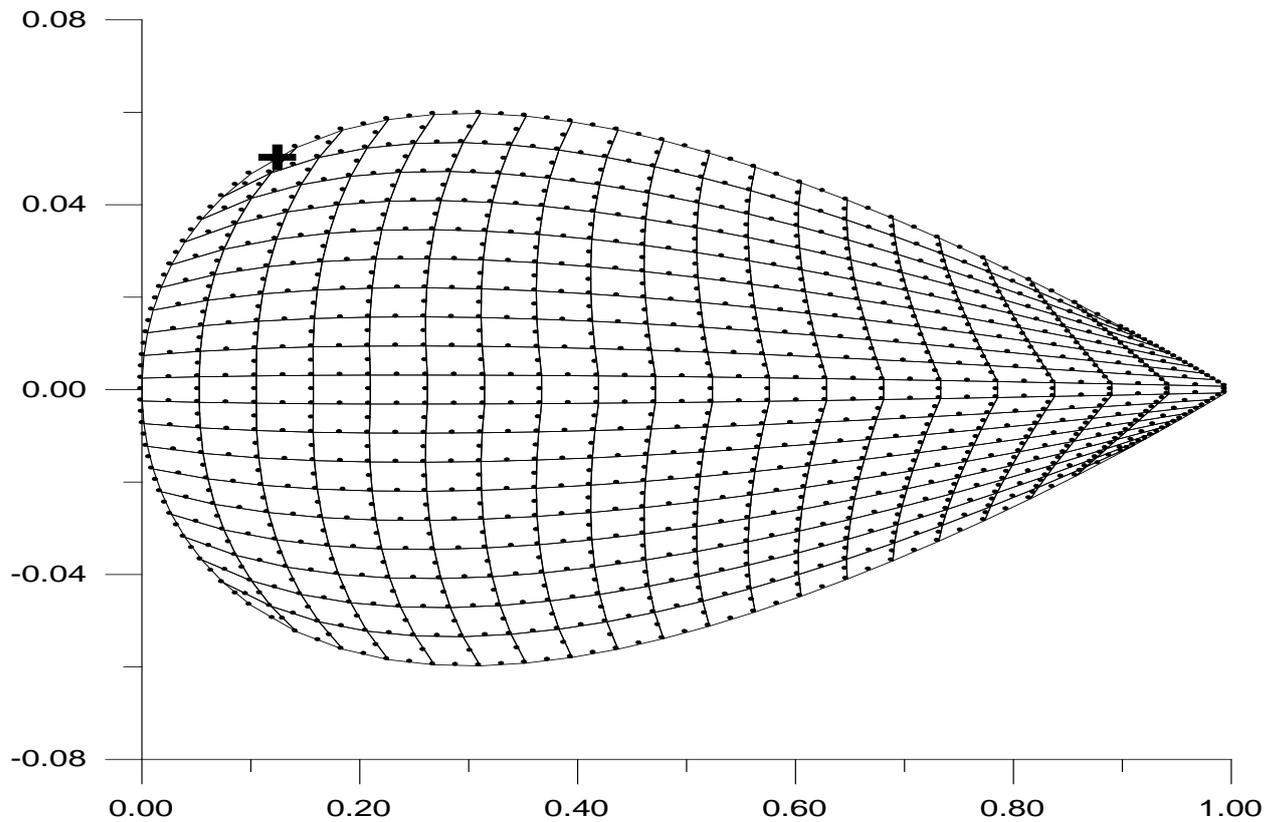


Figure (IV.26) : la position de la contrainte de torsion maximale dans un domaine profil.

VII.4.3 Résultats de quelques géométries :

Les paramètres calculés ont fait aussi l'objet d'une comparaison avec les résultats analytiques disponibles pour quelques géométries. Ces résultats sont représentés dans les prochains tableaux (VII.14), (VII.15) et (VII.16) L'utilité de cette comparaison est de permettre de voir les meilleurs résultats et déduire la méthode de calcul la plus précise (l'élément fini utilisé) en comparant avec les résultats analytiques ; Et en plus, la comparaison permet à l'utilisateur des poutres d'opter un choix judicieux de géométrie de la poutre à utilisée selon ses besoins et ses différentes applications dans les différents domaines.

Ces paramètres sont : la surface totale de la section, l'angle de torsion unitaire, la constante de torsion, la contrainte de torsion maximale. Ainsi que le temps de calcul et le nombre de nœuds et d'éléments fini utilisés pour chaque géométrie. Pour cela, on a choisi trois géométries à titre d'illustration. Les résultats de chaque méthode de calcul, sont mis dans des colonnes facilitant ainsi la comparaison en fonction des paramètres cités précédemment.

La figure (VII.27) illustre la position de la contrainte de torsion maximal dans un domaine hexagone, tel que la cote $A=0.1$, avec une discrétisation d'ordre 130×130 en utilisant des éléments fini quadrilatère Q8N, dont la contrainte maximale se trouve dans le point $(x = -0.76, y = -0.40)$, elle est présentée par une croix

Dans la suite, on présente quelques remarques concernant les résultats, puis les tableaux qui vont clôturer ce chapitre.

Remarques et conclusion

Les résultats obtenus après le calcul effectué avec les différents éléments sont très concordants, dont ceux calculés avec l'élément Q8N sont les plus précis, et cela est dû à l'avantage d'appliquer le concept de la méthode des éléments finis, connu comme une méthode d'une très bonne précision. Sauf le cas avec le triangle à 4 nœuds, a donné des résultats loin en comparant avec les autres éléments, ainsi que la méthode avec l'élément quadrilatère à 5 nœuds, qui a montré des résultats moins précis. De là, dans le dernier tableau (hexagone), on ne présente que les résultats des éléments T3N, T6N, Q4N et Q8N.

Concernent le temps de calcul pour chaque géométrie, en remarquant que, lorsqu'on augmente le nombre de nœuds d'interpolations dans un élément fini, qui soit triangulaire ou quadrilatère, le temps de calcul augmente aussi. Tel qu'avec l'élément Q8N, ce temps est toujours plus important, vu le nombre de termes d'interpolations et leurs degrés mise en calcul et vu la taille des matrices de rigidités élémentaire qu'il faut remplir. Constatant aussi que le

temps de calcul par des quadrilatères est supérieur que celui avec des éléments triangulaires pour une configuration similaire.

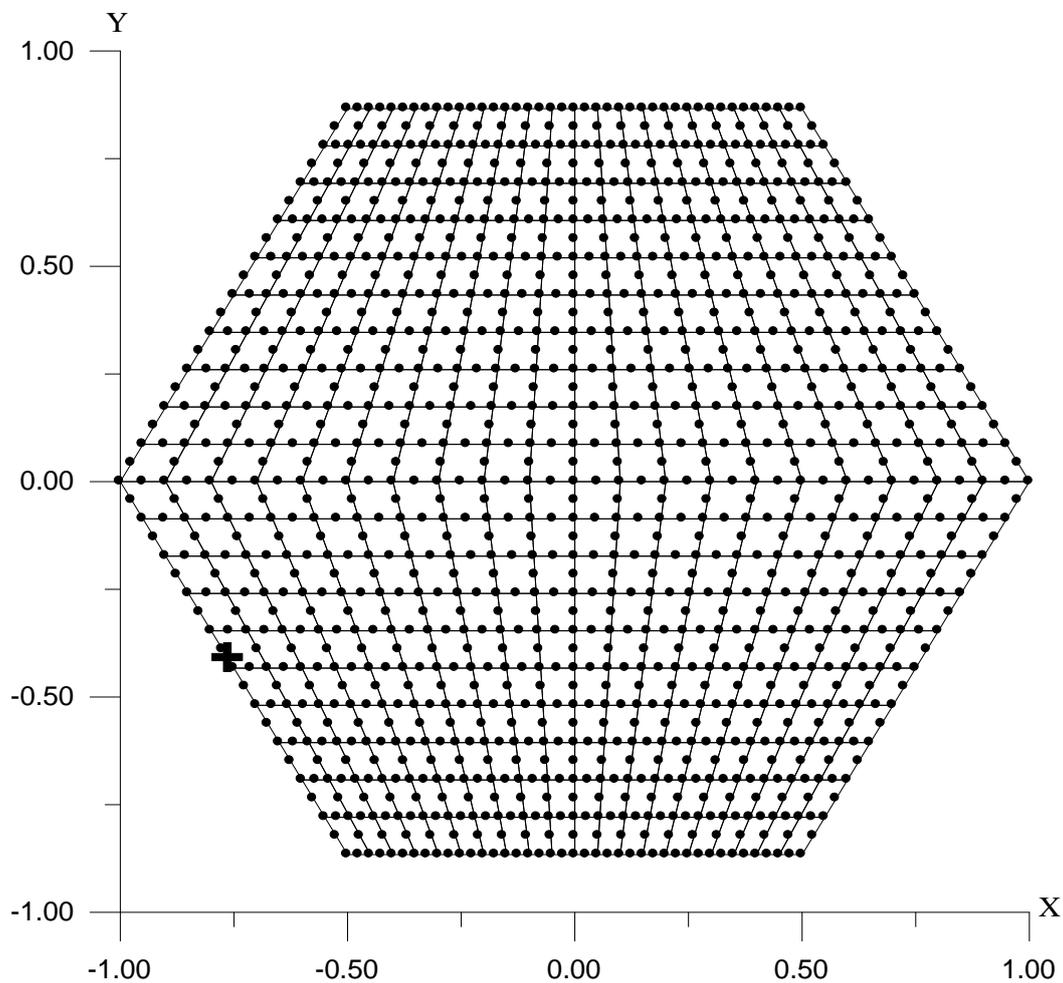


Figure (IV.27) : la position de la contrainte de torsion maximale dans un domaine hexagone.

Références bibliographique

- [1] H.KARDESTUNCER AND ALL, 'FINITE ELEMENT HANBOOK, ' MCGRAW-HILLBOOK COMPANY, 1987, USA.
- [2] GOURI FHATT et GILBERT TOUZOT, ' une présentation de la méthode des éléments finis, 'MALOINE S EDITEUR, 1984, France.
- [3] J.F.IMBERT, ANALYSES DES STRUCTURES PAR ELEMENTS FINIS,' 3^{ème} Edition, SIP'AERO, CEPADUES-EDITIONS, 1991, France.
- [4] ZEBBICHE TOUFIK,'Eléments Finis' Cours 4^{ème} Année Ingénieur Aéronautique Option Structure, Institut d'Aéronautique, Université de Blida.
- [5] BOURDACHE MAHMOUD et DJAIDER MUSTAPHA,' Résolution Numérique de Problème de Prandtl pour la torsion des Poutres cylindrique Non Circulaire Par la Méthode des Eléments Finis : Application aux Pales d'Hélicoptères' Thèse d'Ingénieur en Aéronautique, 1997, Promoteur, M^r ZEBBICHE TOUFIK.
- [6] ZEBBICHE TOUFIK, 'Calcul le nombre des opérations mathématique effectuées par un programme basé sur la méthode des éléments finis ' Document Personnel, Institut d'Aéronautique
- [7] J.N. REDDY, 'An Introduction to the finite Element Method, 'Edition MCGRAW-HILL Book Company, 1988.
- [8] B.DEMIDOVITCH et I. MARRON, Elément de Calcul Numérique,' Edition MIR, MOSCO, 1987
- [9] RAMI ABOUGALYOUN, 'Génération de Maillage Autour des configurations Multi-Profiles Par la Méthode de Transformation Conforme de Vonkarmann Treffz, ' Thèse d'Ingénieur d'Etat en Aéronautique, 2000, Promoteurs, (Mr ZEBBICHE TOUFIK et ELAICHI TOUFIK).
- [10] BERKANI ABDELHALIM et TALI FAYCEL, 'Résolution Numérique de l'Equation de Poisson dans un Domaine Simplement Connexe Quelconque avec Condition Aux Limites de Type Dirichlet' Thèse d'Ingénieur d'Etat en Aéronautique, 2001, Promoteurs, (Mr ZEBBICHE TOUFIK).
- [11] AISSANI MOULOUD 'Calcul de l'Ecoulement Subsonique Laminaire dans des Conduites de Sections Complexes par la Méthode des Eléments Finis' Thèse de Magistère en Aéronautique, 2002, Promoteurs, (Mr ZEBBICHE TOUFIK et M^r YOUNI ZINE EDDINE).
- [12] W .F Hughes & E. W Gaylord. 'Basic Equations of Engineering Science' **Schaums Outline serie. Mc Graw-Hill Book Company**, (1964).

- [13] GOURI Dhatt & GILBERT Touzot. 'Une présentation de méthode des éléments finis' Université LAVAL, Moline S. A Editeur, Paris (1981).
- [14] N. J HOFF 'Analysis of Structures'. Wiley, New York, (1956)
- [15] M. TURNER, R.W.CLOUGH, H. MARTIN & L.J.TOPP 'Stiffness and Deflection Analyses of Complex Structures' Journal of Aeronautical science, Vol. 23, pp.: 805-823,(1956)
- [16] G. STRANG A.A. 'An Analysis Of The Finite Element method' Wellesley- Combridge Press, Wellesley (1973)
- [17] HRENNIKOFF A. ' Solution Of Problems in Elasticity by The Framework Method' J.Appel. Mech, Vol. 8,pp 169-175, (1941).
- [18] N & S TAIBI . 'Pratique du FORTRAN 77', Berti Edition, 1992
- [19] MASATAKE Movi.' The Finites Elements Method And Its Application' MAC Millan publishing company, New York (U.S.A) 1986
- [20] G. BEAUQUET et M.POGU. 'Programmation des éléments finis (2D)' Edition CEPADUES – Toulouse, France (1987)
- [21] M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN 'Méthodes Numérique Appliquées' Edition OPU, Algérie, (1983)
- [22] O.C ZIENKIEWICZ. 'The Finite Element Method In Engineering Science' 2nd Edition McGRAW-HILL, London (1971)
- [23] Amar KHENANE. 'Méthodes des éléments finis, énoncé des principes de base' Edition OPU, Algérie (1997)
- [24] B.M. IRONS &O.C. ZIENKIEWICZ ' The Isoparametric Finite Element System – a new concept in Finite Element Analysis ' Proceedings, conference on recent advances in stress analysis. Royal Aeronautical Society, London. (1968)
- [25] J.S PRZEMIENIECKI 'Theory of Matrix Structural Analysis' McGRAW-HILL , New York, (1968)
- [26] AMTOT. A.'Cours d'Analyse Numérique de Magister ' Institut d'Aéronautique, Université de Blida, Algérie, (1998).

- [27] OURACH Youcef (Maitre-assistant I.N.G.M)'Aide-Mémoire Mathématique pour Ingénieurs' Partie 'II' Edition OPU, Algérie, (1993).
- [28] ZEBBICHE TOUFIK, 'Résistance des Matériaux ' Cours 4^{ème} Année Ingénieur Aéronautique Option Structure, Institut d'Aéronautique, Université de Blida.
- [29] ANDRE BAZERGUI, THANG BUI-QUOC, ANDRE BOIRO, GEORGES MCLNTYRE et CHARLES LABERAGE 'Résistance des Matériaux ' Troisième édition Canada (2003)
- [30] Toufik AL-AICHI. 'Application Des Technique De Génération De Maillage Pour Le Calcul Des Ecoulements Transsonique Stationnaires' Mémoire de MAGISTRAIRE Institut d'Aéronautique, université de Blida, (1997)
- [31] C.A.G FLETCHER ' Computational Techniques In Fluid Dynamique ' Volume 2, Berlin Heidelber, (1988,1990).

Annexe B

INTEGRATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DE « GAUSS-LEGENDRE »

Intégration numérique

Dans la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, et vu que l'intégration numérique fait une partie intégrante de cette méthode, on a opté la méthode de GAUSS-LEGENDRE puisqu'elle est la plus utilisée et efficace que d'autres méthodes comme celle de NEWTON-COTE ou IMPSON ...

Dans la méthode de GAUSS-LEGENDRE, les « r » poids « Wp_i » et les « r » abscisses ξ_i sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre « $m' < 2r-1$ ».

Détermination des poids « W_i » et des abscisses ξ_i :

Si « F » est une fonction polynomiale de degré « $m' \leq r-1$ », nous pouvons l'intégrer exactement par la méthode de GAUSS-L sur l'intervalle [-1, +1] :

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r Wp_i F(\xi_i) \quad (\text{B.1})$$

L'équation (B.1) est donc vérifiée pour le polynôme suivant :

$$F(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (\text{B.2})$$

Pour déterminer les poids Wp_i et les abscisses ξ_i qui sont aussi inconnus, nous portons l'expression (B.2) dans (B.1) nous aurons alors :

$$\begin{aligned} a_1 \int_{-1}^{+1} d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi \\ = a_1 (W_1 + W_2 + \dots + W_r) + a_{2r} (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r) + \dots \\ + a_{2r} (W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + W_r \xi_r^{2r-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Pour que (B.3) soit identiquement vérifiée pour tout a_1, a_2, \dots, a_{2r} , il faut que :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+2} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r \\ \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r-1 \end{aligned}$$

Soit :

$$2 = W_1 + W_2 + \dots + W_r$$

$$0 = W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r \quad (\text{B.4})$$

$$2/3 = W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_r \xi_r^2$$

$$0 = W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1}$$

Le système (B . 4) est linéaire en W_i et non linéaire en ξ_i il détermine les $2r$ paramètres de (B.1) sous les conditions :

$$\left. \begin{array}{l} W_i > 0 \\ 0 < \xi_i < 1 \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

Les abscisses ξ_i , solution de (B.4) sont aussi les racines du polynôme de LEGENDRE d'ordre 'r'

$P_r(\xi) = 0$, défini par la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} P_0(\xi) &= 0 \\ P_1(\xi) &= \xi \\ &\vdots \\ P_k(\xi) &= \frac{2k-1}{k} \xi \cdot P_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k} \xi \cdot P_{k-2}(\xi) \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (\text{B.5})$$

Les poids W_i sont donnés par :

$$W_i = \frac{2(1 - \xi_i^2)}{(r \cdot P_{r-1}(\xi_i))^2} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{B.6})$$

L'erreur d'intégration est donnée par :

$$e = \frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1) \cdot ((2r)!)^3} \frac{d^{2r} F}{d\xi^{2r}} \quad (\text{B.7})$$

Le tableau suivant donne les valeurs des abscisses ξ_i et des poids W_i pour : r=1 jusqu'à 7. Les abscisses ξ_i sont symétrique par rapport à $\xi_i=0$. Les poids W_i correspondant à deux points symétriques sont égaux : (la précision est de l'ordre 10^{-19})

Tableau 1 : les abscisses ξ_i et les poids W_i de l'intégration numérique par la méthode de GAUSS-LEGENDRE, pour : r=1 jusqu'à 7.

r	ξ_i	W_i
1	0.000000 000000 000000	2.000000 000000 000000
2	$\pm 0.577350 26189 625764$	1.000000 000000 000000
3	$\pm 0.7745996 669241 483377$ 0.000000 000000 000000	0.555555 555555 555555 0.888888 888888 888888
4	$\pm 0.861136 371594 052575$ $\pm 0.339981 043584 85626$	0.347854 845137 453857 0.652145 154862 546142
5	$\pm 0.906179 845938 663992$ $\pm 0.538469 310105 683091$ 0.000000 000000 000000	0.236926 885056 189087 0.478628 670499 366468 0.568888 888888 888888
6	$\pm 0.932469 514203 152027$ $\pm 0.661209 366466 264513$ $\pm 0.238619 185083 166908$	0.171324 492379 170345 0.360761 573048 138607 0.467913 934572 691047
7	$\pm 0.949107 912342 758524$ $\pm 0.741531 185599 394439$ $\pm 0.405845 151377 397166$ 0.000000 000000 000000	0.129484 966168 869693 0.279705 391489 276667 0.381830 050505 118944 0.417959 183673 469387

Génération à un intervalle d'intégration quelconque

Jusqu'à présent, nous avons présenté la méthode de GAUSS-L dans l'intervalle $[-1, +1]$ sans se soucier de sa généralisation à un intervalle quelconque $[a, b]$ sur lequel 'F' est définis. Avec un changement de variable approprié, une intégrale de type suivant, peut facilement se ramener à une intégrale sur l'intervalle $[-1, +1]$.

$$\int_a^b F(x)dx \quad (B.8)$$

Le changement de variable qu'il faudrait opérer est le suivant :

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot \xi + \frac{b+a}{2}$$

Après remplacement de x par sa valeur, l'intégrale (B.8) s'écrit :

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi))d\xi$$

Que nous pouvons l'évaluer par la méthode de GAUSS-LIGENDRE.

D'après ce qui précède, nous pouvons évaluer l'intégrale double suivante :

$$I = \int_a^b \int_c^d F(x, y)dx dy \quad (B.9)$$

Avec cette méthode, tous on utilisant dans chaque direction (x et y) une intégration numérique à une dimension. Pour cela, nous devons opérer un changement de variable :

$$\begin{array}{l} x = x(\xi) \\ y = y(\eta) \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -1 \leq \eta \leq +1 \end{cases}$$

Après remplacement de x et y par leur nouvelle expression dans (B.9), l'intégrale 'I' s'écrit de manière suivante :

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta))d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_1} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) \end{aligned} \quad (B.10)$$

Avec r_1 points dans le sens de 'x' et r_2 points dans le sens de 'y', la méthode de GAUSS-L Permet d'intégrer exactement le produit d'un polynôme en x d'ordre $2r_1 - 1$ et d'un polynôme en y d'ordre $2r_2 - 1$.

Remarque

Le terme :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b-a}{2} \\ (b-a)(d-c) \\ 4 \end{array} \right\} \text{ intégration a une dimension ou intégration double}$$

Sont constants, parce que les limites d'intégration sont constantes. En effet, ce sont les déterminations des matrices Jacobéennes des transformations :

$$\begin{array}{ccc} (x) & \xrightarrow{\tau_1} & (\xi) \\ (x, y) & \xrightarrow{\tau_2} & (\xi, \eta) \end{array}$$

Exemple :

$$[J_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Les déterminants de ces matrices peuvent ne pas être constants. Dans ce cas nous n'avons pas le droit de les faire sortir des signes « Σ » somme, et ils doivent être évalués aux points d'intégration de GAUSS-L. la forme d'intégration devient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} F(x, y) dx dy \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta)) \text{Det}[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_1} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) \text{Det}[J(\xi, \eta)] \end{aligned}$$

***Introduction
générale***

Chapitre I :
Connaissances
fondamentales

Chapitre II :
Développement
mathématique du
problème

Chapitre III :
Solution exacte-
Cas particulières

Chapitre IV :
Formulation et
adaptation de la
méthode des éléments
finis

Chapitre V :
Génération de
maillage

Chapitre VI :
Résolution
numérique et
programmation

Chapitre VII :
Résultats et
discussions

***Conclusion générale
et perspectives***

***Références
bibliographiques***

Annexes