J. Lelong-Ferrand
J.M. Arnaudiès

Cours de mathématiques

Tome 4

Equations différentielles, intégrales multiples

2e édition

Classes préparatoires
1er cycle universitaire

Dunod Université

Table des matières

CHAPITRE I. **Equations différentielles. Généralités, cas linéaire** 1

§ 1 Systèmes différentiels. Forme normale 2
§ 2 Equations différentielles vectorielles ; problème de Cauchy 5
§ 3 Equations différentielles linéaires. Généralités 7
§ 4 Théorème de Cauchy (cas des équations linéaires) 11
§ 5 Equations différentielles scalaires linéaires du premier ordre. Etude directe 15
§ 6 Equations et systèmes homogènes 22
§ 7 Méthode de variation des constantes 27
§ 8 Equations différentielles linéaires du second ordre 30
§ 9 Equations scalaires d'ordre quelconque 38
§ 10 Intégration par développement en série 43
§ 11 Equations du type de Fuchs 48

CHAPITRE II. **Equations différentielles linéaires à coefficients constants** 56

§ 1 Principes généraux 56
§ 2 Cas où E est de dimension finie 60
§ 3 Exemples de systèmes homogènes 63
§ 4 Systèmes non homogènes 70
§ 5 Utilisation d'un changement de base 75
§ 6 Cas d'une équation scalaire d'ordre n à coefficients constants 81
§ 7 Equations d'Euler 88
§ 8 Calcul symbolique 90

CHAPITRE III. **Equations différentielles non linéaires. Exemples et applications** 97

§ 1 Théorème de Cauchy-Lipschitz 97
§ 2 Résultats pratiques 104
§ 3 Cas d'une équation non résolue par rapport aux dérivées 106
§ 4 Cas élémentaires. Etude locale 110
§ 5 Equations de la forme $y'' = f(y)$ 116
§ 6 Equations de Bernoulli et de Riccati 126
§ 7 Courbes intégrales. Point de vue géométrique 130
§ 8 Equations de la forme $f(x, y') = 0$ ou $f(y, y') = 0$ 134
§ 9 Equations homogènes 138
§ 10 Equations de Lagrange et de Clairaut 147
§ 11 Trajectoires d'un champ de vecteurs 154
§ 12 Exemples de trajectoires 161
§ 13 Trajectoires orthogonales 167

CHAPITRE IV. **Intégrales multiples. Définitions. Propriétés générales** **172**

§ 1 Fonctions en escalier sur un pavé de $\mathbf{R}^n$ 173
§ 2 Intégrale des fonctions en escalier 175
§ 3 Intégration sur un pavé 179
§ 4 Intégration sur un ensemble borné 183
§ 5 Conditions d'intégrabilité 185
§ 6 Propriétés de l'intégrale 188
§ 7 Ensembles quarrables. Mesure 192
§ 8 Propriétés de la mesure 195
§ 9 Sommes de Riemann 199
§ 10 Sommes de Darboux 203

CHAPITRE V. **Calcul des intégrales multiples** **205**

§ 1 Intégration sur un produit de pavés 205
§ 2 Applications 209
§ 3 Calcul des intégrales doubles 212
§ 4 Intégrales triples. Calcul des volumes 215
§ 5 Changement de variables 219
§ 6 Exemples de changement de variables 225
§ 7 Quelques exemples de calcul d'aires et de volumes 229
§ 8 Aire des surfaces 233
§ 9 Intégrales généralisées 241
§ 10 Un exemple d'intégrale généralisée ; comparaison avec une série double 244
§ 11 Exemples d'intégrales généralisées sur des ensembles bornés 250
§ 12 Intégrales multiples dépendant d'un paramètre 255

CHAPITRE VI. **Formes différentielles. Intégrales curvilignes. Intégrales de surface** **258**

§ 1 Formes différentielles de degré un 259
§ 2 Intégrales curvilignes 262
§ 3 Formule de Riemann-Green 269
§ 4 Application : Formule du changement de variables pour les intégrales doubles 275
§ 5 Eléments d'algèbre extérieure 277
§ 6 Formes différentielles de degré p 284
§ 7 Intégration des formes différentielles 291
§ 8 Intégrales de surface ; interprétation géométrique 295
§ 9 Formule d'Ostrogradski 301
§ 10 Formule de Stokes 308
§ 11 Le problème des primitives 314

CHAPITRE VII. **Masses, centres et moments d'inertie des systèmes matériels** .. **321**

§ 1 Notion de mesure positive sur un compact 321
§ 2 Systèmes matériels. Masses 324
§ 3 Centres de gravité (ou d'inertie) 326
§ 4 Propriétés des centres d'inertie 329
§ 5 Théorèmes de Guldin 334

§ 6 Moments d'inertie 336
§ 7 Relations entre les moments d'inertie 339
§ 8 Tenseur et matrices d'inertie 342

CHAPITRE VIII. **Fonctions holomorphes ; calcul des résidus** **349**

§ 1 Définitions. Exemples 349
§ 2 Différentiabilité. Formules de Cauchy 352
§ 3 Première formule de Cauchy 357
§ 4 Propriétés des intégrales curvilignes de fonctions complexes 358
§ 5 Théorème de d'Alembert 361
§ 6 Deuxième formule de Cauchy 362
§ 7 Développement en série entière 364
§ 8 Analyticité des fonctions holomorphes 370
§ 9 Résidus 373
§ 10 La formule des résidus 378
§ 11 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus 381
§ 12 Autres exemples 386
§ 13 Autres exemples 390
§ 14 Exemples d'intégrales de fonctions non uniformes 393

EXERCICES 399

BIBLIOGRAPHIE 452

INDEX ALPHABÉTIQUE 453