dunod université 500

mathématiques

p. krée

introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales

p.2 , maîtrise de m.a.f.

dunod

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

GÉNÉRALITÉS

10. Calcul des propositions. Algèbre de Boole **2**

10.1 Définitions 2
10.2 Opérations 2
10.3 Propriétés 3
10.4 Implications, équivalences 4
10.5 Théorie des circuits de commutation 4
10.6 Exemple 1 : additionneur 5
10.7 Exemple 2 : commande de machine hydraulique 8
Annexe : propositions avec quantificateurs 9

11. Notions sur les ensembles **13**

11.1 Historique 13
11.2 Applications 15
11.3 Opérations. La relation d'inclusion 17
11.4 Relations binaires définies sur un ensemble 19
11.5 Relations d'équivalence 20
11.6 Relations de préordre et d'ordre 22
11.7 La méthode PERT (Program evaluation and Review Technic) 23
Annexe : Introduction à la théorie des ensembles 28

12. Les opérations algébriques **38**

12.1 Les opérations 38
12.2 Propriétés possibles des opérations 41
12.3 Groupes et groupes commutatifs 42
12.4 Les anneaux et les corps 45

DEUXIÈME PARTIE

ESPACES VECTORIELS. ALGÈBRES

20. Espaces vectoriels et espaces affines. Sous-espaces **54**

20.1 Définitions 54
20.2 Systèmes libres. Systèmes liés 55
20.3 Bases 56
20.4 Espace vectoriel et espace affine associé 62
20.5 Sous-espaces vectoriels. Sous-espaces affines 64

20.6 Quotient par un sous-espace vectoriel 68
20.7 Formes linéaires et affines. Hyperplans 69

21. Barycentre et convexité, Programmes linéaires et théorie des jeux 75

21.1 Barycentre 75
21.2 Principe fondamental de la géométrie analytique 77
21.3 Propriétés topologiques des espaces vectoriels de dimension finie 78
21.4 Ensembles convexes et polyèdres convexes 81
21.5 Enoncés des problèmes de programmation linéaire 84
21.6 Résolution des problèmes de programmation linéaire 86
21.7 Généralités sur la stratégie dans les duels 90
21.8 Jeux avec un nombre fini de stratégies pures 94
Annexe : fonctions convexes 98

22. Applications linéaires et matrices 102

22.1 Introduction 102
22.2 Les transformations linéaires et leurs matrices 105
22.3 Opérations sur les matrices 106
22.4 Etude géométrique des transformations linéaires 109
22.5 Transformations linéaires inversibles. Matrices inversibles 112
22.6 Matrices de changement de base 114
22.7 Cas des espaces de dimension quelconque 118
Annexe : la structure d'algèbre 119

23. Déterminants, tenseurs, formes extérieures 132

23.1 Formes n-linéaires alternées sur $\mathbf{R}^n$: déterminants d'ordre n 132
23.2 Préliminaires 140
23.3 Formes p-linéaires sur $\mathbf{R}^n$; les tenseurs du type $\binom{0}{p}$ 142
23.4 Formes p-linéaires alternées sur $\mathbf{R}^n$; p-formes extérieures 147
23.5 Les tenseurs du type $\binom{q}{p}$ 152

24. Décomposition de l'espace associée à un opérateur linéaire 167

24.1 Valeurs propres et directions propres 167
24.2 Un lemme de Gergoshin 169
24.3 Décomposition de l'espace, en somme directe, associée à un opérateur linéaire 170
24.4 Exemples d'application 173
24.5 Matrices à termes positifs 177
24.6 Application aux chaînes de Markov 179

25. Espaces euclidiens. Formes quadratiques 185

25.1 Espaces euclidiens 185
25.2 Groupe orthogonal et matrices carrées orthogonales 188
25.3 Opérateurs symétriques d'un espace euclidien et matrices symétriques 189
25.4 Application à la réduction des formes quadratiques sur un espace euclidien 193
25.5 Application de la réduction des formes quadratiques 194
25.6 Espaces hermitiques. Groupe unitaire 197
25.7 Espace de la relativité restreinte 198
Annexe : Formes quadratiques sur un espace vectoriel réel 199

TROISIÈME PARTIE

INTRODUCTION A L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

30. Propriétés topologiques de la droite **208**

30.1 Définitions relatives aux nombres réels 208
30.2 Les théorèmes fondamentaux 210
30.3 Les séries à termes réels 213
30.4 Fonctions continues. Parties fermées bornées de R 216
30.5 Propriétés topologiques des espaces vectoriels réels de dimension finie... 219
30.6 Norme sur un espace vectoriel. Distance 221
30.7 Comportement d'une fonction au voisinage d'un point..... 223
30.8 Symboles O et o 224
30.9 Propriétés générales des symboles O et o 236

31. L'intégration des fonctions **236**

31.1 Mesure de Lebesgue sur une partie P de $\mathbf{R}^n$ 236
31.2 Intégration des fonctions simples 238
31.3 Intégration des fonctions positives 239
31.4 Intégration des fonctions de signe quelconque 245
31.5 Etude de $\varphi(t) = \int f(x, t)\, dx$ 249
31.6 Familles dénombrables sommables 251
31.7 Exemples d'application 253
Annexe : intégration des fonctions à valeurs vectorielles 255

32. Fonctions dérivables et applications..... **260**

32.1 Applications dérivables 260
32.2 Fonctions holomorphes 266
32.3 Intégration des fonctions holomorphes 268
32.4 Systèmes différentiels linéaires 272

33. Relation entre le calcul différentiel, l'intégration et la géométrie..... **284**

33.1 Bouts de variétés orientées de dimension p 284
33.2 Variétés à bord 286
33.3 Exemple de formule de transformation d'intégrales 290
33.4 Analyse tensorielle 293
33.6 Intégration de formes différentielles 299
33.7 La formule de Stockes..... 302
Annexe : coordonnées curvilignes orthogonales sur un ouvert de $\mathbf{E}_n$..... 305

34. Suites et séries de fonctions **333**

34.1 Divers modes de convergence des fonctions 333
34.2 Séries entières 336
34.3 Séries de Fourier 340

QUATRIÈME PARTIE

INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMÉRIQUE

40. Généralités sur l'analyse numérique **352**

40.1 Entropie et quantité d'information 352
40.2 Nécessité de la représentation numérique des fonctions et des opérateurs 354
40.3 Généralités sur l'analyse numérique 355
40.4 L'affichage des données et des résultats 359
40.5 Les erreurs..... 359

41. Utilisation des ordinateurs électroniques **362**

41.1 Logogramme d'un calcul 362
41.2 Principe du fonctionnement d'un ordinateur 365
41.3 Possibilités d'utilisation d'un ordinateur 366
41.4 *Généralités sur les langages* *367*
41.5 *Traduction du logogramme par le programmeur* *368*
41.6 Importance des logogrammes 373

42. Problèmes numériques relatifs aux suites de nombres **376**

42.1 Opérateurs de convolution dans l'espace des polynômes 376
42.2 Théorème fondamental 378
42.3 Polynômes d'Appell d'un opérateur de convolution dans $\mathbf{C}[x]$ 381
42.4 Applications à l'interpolation 384
42.5 Formules sommatoires d'Euler Mac Laurin 385
42.6 Application à l'évaluation des sommes $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 387

43. Problèmes numériques liés aux matrices **392**

43.1 Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres 392
43.2 Résolution des systèmes linéaires 393
43.3 Application à la résolution des problèmes différentiels aux limites 402
43.4 Inversion des matrices carrées 409

44. Existence et approximation des solutions des équations non linéaires **417**

44.1 Exemples de méthodes itératives 417
44.2 Généralités sur les méthodes itératives 419
44.3 La méthode des approximations successives 423
44.4 La méthode de Newton-Raphson 425
44.5 Recherche des extremums d'une fonction numérique 429
44.6 Détermination des zéros d'un polynôme 430

CINQUIÈME PARTIE

INITIATION AU CALCUL DES PROBABILITÉS ET AUX SCIENCES STATISTIQUES

50. Initiation à la théorie des probabilités **442**

50.1 Préliminaires sur les σ-algèbres de Boole 443
50.2 Hasard. Evénements. Probabilités 444
50.3 Règles du calcul des probabilités 447
50.4 Probabilités conditionnelles 447
50.5 Evénements indépendants 449
50.6 Variables aléatoires numériques 452
50.7 Variables aléatoires à composantes 455
50.8 Indépendance de deux variables aléatoires 458
50.9 Variables aléatoires dont la loi a une densité 461
50.10 Applications de l'indépendance 469
50.11 Les fonctions génératrices 472
50.12 Les lois de probabilités usuelles 474

51. Initiation aux sciences statistiques **490**

51.1 *Introduction* 490
51.2 Généralités 491
51.3 Les échantillons. Les statistiques. Considérations fondamentales 493
51.4 Exemples d'application des théorèmes du calcul des probabilités aux sciences statistiques 495
51.5 Méthodes de construction des estimateurs de paramètres 497
51.6 Utilisation des estimateurs de paramètres 502
51.7 Généralités sur les tests non paramétriques 505
51.8 Construction de tests non paramétriques à l'aide d'une statistique dont on connaît la loi dans le cas où l'hypothèse (à tester) est vraie 507

Tables de lois de probabilités 515
Bibliographie 519
Index alphabétique 521