

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

En Mathématiques

Spécialité : Recherche opérationnelle

Equations différentielles stochastiques
Et évaluations des options en finance

Par

Slimi Boualem

Devant le jury composé de :

M. CHELLALI	Maître de conférences, U. de Blida	Président
F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Examineur
M. MOULAÏ	Maître de conférences, U. S. H. B, Alger	Examineur
A. MATAOUI	Analyste financier à Reuters	Invité
S. MANSEUR	Chargé de cours, U. de Blida	Rapporteur
A. MALKI	Chargé de cours, U. de Blida	Co-promoteur

Blida, 23 septembre 2008

RESUME

Dans ce mémoire nous présentons les techniques de simulation Monte- Carlo (MMC) avec application au calcul d'une option call européen à un actif financier. Nous considérons aussi l'accélération de la convergence via les méthodes quasi Monte Carlo (MQMC) avec possibilité de randomisation totale et partielle.

La MMC est une approche puissante et flexible pour fournir des estimations du prix d'option. Toutefois elle présente l'inconvénient d'une convergence lente. On peut éviter cet inconvénient en utilisant les méthodes de réduction de variance, malheureusement la réduction de la variance (méthode Monte - Carlo à des variables antithétiques) s'accompagne en général d'une augmentation du temps d'exécution de l'algorithme. Des autres approches dites les MQMC qui sont des alternatives déterministes basées sur les séquences à discrécances faibles. Plusieurs applications financières sont basées sur l'utilisation des MQMC. Les séquences (ou suites) déterministes ont une propriété similaire aux suites de variables aléatoires (i.i.d). utilisées par MMC en ce sens qu'elles sont "bien" dispersées sur tout l'hyper cube d'unité. Bien que la MQMC accélère MMC, elle ne permet pas une estimation pratique de l'erreur (Intervalle de confiance). La randomisation de la MQMC permet d'avoir les deux bonnes propriétés des deux méthodes : Convergence rapide conduisant à un intervalle de confiance. Nous nous intéressons à la technique proposée par Owen, connue sous le nom méthode de randomisation (méthodes hybrides de MQMC). Faure fournit une permutation optimale pour le cas unidimensionnelle d'une suite à discrécance faible. Aussi Ken et Boyle, ont introduit une modification récente de la technique de randomisation totale. Cette méthode s'appuie sur la randomisation partielle, avec une limite probabiliste sur l'erreur de la méthode de MQMC. La randomisation des points a conserve la propriété de discrécance, elle fournit une représentation simplifiée de la technique de randomisation totale, notamment, pour les problèmes de grandes dimensions. En considérant une série des études empiriques, nous observons que la randomisation accélère la convergence et permet d'utiliser des intervalles de confiance de l'estimation de l'erreur.

Mots –Clé : Simulation Monte - Carlo, quasi Monte- Carlo, Randomisation, évaluation, D'option, Equations Différentielles Stochastiques.

SUMMARY

In this memory we present the techniques of simulations Monte- Carlo (MCM) with application to the calculation of an option call to a financial credit. We consider also the acceleration of convergence via the methods quasi Monte - Carlo (QMCM) with possibility of total and partial randomization.

The MCM are a powerful and flexible approach to provide estimation of the option price. However it presents the disadvantage of a slow convergence. One can avoid this disadvantage by using the methods of variance reduction, unfortunately the reduction of the variance (Monte Carlo method with antithetic variables) is accompanied in general by an increase in the execution time of the algorithm. Other approaches known as MQMC which are deterministic alternatives based on the weak discrepancies sequences. Several financial applications are based on the use of the QMCM. The deterministic sequences (or series) have a property similar to the series of random variables i.i.d. used by MCM in the sense that they are "well" dispersed on all the cubic hyper of unit. Although the QMCM accelerates MCM, it does not allow a practical estimate of the error (confidence Interval). The randomization of the QMCM allow to have two good properties of the two methods: Fast convergence leading to a confidence interval. We are interested in the technique suggested by Owen, known as method of randomization (hybrid methods of QMCM). *Faure* provides an optimal permutation for the one-dimensional case of series with weak discrepancy. Also Ken and Boyle introduced a recent modification of the total randomization technique. This method is based on the partial randomization, with a probabilistic limit on the error of the QMCM. Method It is based on the randomization of the points by preserving the property of discrepancy; it gives a simplification to the technique of total randomization in particular for the large-sized problems. By considering a series of the empirical studies, we observe that the randomization accelerates convergence and makes it possible to use confidence intervals of the error estimation.

Key words: Monte-Carlo simulation without and with variables antithetic, quasi Monte- Carlo, Randomization, option evaluation, Differential Stochastic equations.

ملخص

نقوم في هذا العمل، بدراسة طريقة المحاكاة بواسطة المتغيرات العشوائية لحساب الخيارات المتداولة على الأسهم، (طريقة مونتي كارلو، MMC)، مع اعتبار طريقة شبه مونتي كارلو لتسريع التقارب (MQMC)، وكذلك إمكانية إدخال المتغيرات العشوائية على هذه التقنية باستعمال التبديلات بشكل كلي أو جزئي.

فطريقة مونتي كارلو هي عبارة عن مقارنة فعالة و مرنة لإعطاء تقديرات لسعر الاختيار، إلا أننا نلاحظ عليها تقاربها البطيء، فاستعمال طريقة تخفيض قيمة التشتت، خصوصا تقنية مونتي كارلو ذات المتغيرات العشوائية المتناقضة ترفع في سرعة التقارب إلا أنها تكون مصحوبة دوما بزيادة في وقت التنفيذ.

فوجود مقاربات أخرى كطرق شبه مونتي كارلو التي تعتمد أساسا على متتاليات ذات تباعدات، ضعيفة، فهذه الأخيرة ذات خاصية مماثلة لمتتاليات المتغيرات العشوائية المستقلة و المتساوية التوزيع المستعملة من طرف MMC، فهي موزعة بشكل منتظم على كل مجال التكامل حيث أن MQMC تسرع MMC غير أنها لا تسمح بتقدير عملي للخطأ «مجال الائتمان».

فطريقة إدخال المتغيرات العشوائية على MQMC تسمح بإعطاء الخاصيتين المميزتين لـ MMC و MQMC، التقارب السريع و إمكانية حساب الخطأ في التقدير. نهتم خصوصا في هذه الدراسة بالتقنية المقترحة من طرف أوان المعروفة باسم التبديلات الكلية، كما نهتم بتقنية كان و بويل التي تعتمد على التبديلات الجزئية التي تعطي تمثيل مبسط لتقنية التبديلات الكلية لاسيما في حساب الخيارات المتداولة على عدة سندات مالية. فعندما نعتبر سلسلة من الدراسات التجريبية نلاحظ أن إدخال المتغيرات العشوائية على MQMC تسرع من التقارب و تسمح باستعمال مجالات الائتمان في تقدير الخطأ.

كلمات المفتاح: طريقة المحاكاة « مونتي كارلو » شبه مونتي كارلو، إدخال المتغيرات العشوائية على MQMC و تقدير الاختيار، المعادلات التفاضلية العشوائية.

REMECEMENT

Tout d'abord, je tiens à remercier le Dieu puissant pour m'avoir donné la santé, la volonté et de m'avoir guidé vers la connaissance et le savoir.

Je tiens à remercier vivement Monsieur A. Malki qui a encadré ce travail de thèse. Par sa compétence et sa maturité scientifique, il a su me guider de façon pertinente dans mes recherches. Sa disponibilité, son écoute et ses qualités humaines m'ont permis d'avancer sereinement. Je lui suis infiniment reconnaissant d'avoir renforcé ma motivation à poursuivre dans la recherche.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Salah Manseur pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et guidé ce travail en me faisant bénéficier de ses conseils, ses idées brillantes et critiques qui m'ont été d'une aide précieuse. Par sa compétence et sa maturité scientifique, il a su me guider de façon pertinente dans mes recherches.

Je remercie Monsieur Mustapha CHELLALI, Maître de Conférences à l'université de Blida d'avoir honorer ma soutenance en président le jury.

Je tiens à remercier Monsieur Farouk HANNANE, Professeur à l'université de Blida, d'avoir honorer ma soutenance en acceptant de faire partie de jury.

Je tiens à remercier Monsieur Mustapha MOULAI, Maître de Conférences à l'université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne d'avoir honorer ma soutenance en acceptant de faire partie de jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Abdelaziz MATAOUI Analyste financier à Reuters, que je remercie pour ses encouragements et pour les précieux conseils qu'il m'a prodigué. La lecture approfondie de mon manuscrit et, les remarques qu'il a formulé sont à la base de la plupart des rectifications.

Merci à ma chère mère, mon cher père pour leur soutien constant, merci à mes frères et sœurs pour leur patience.

Je remercie enfin mes chers amis Redha, Kamel, tous mes camarades et compagnons de recherche du département de mathématique pour leur éternelle bonne humeur et leur sympathie.

TABLE DES MATIERS

RESUME.....	01
REMERCIEMENTS.....	04
TABLE DES MATIERES.....	05
LISTES DES FIGURES.....	10
INTRODUCTION... ..	11

CHAPITRE 1. MARCHES FINANCIERS ET TEEORIES DES OPTIONS

1.1 Introduction.....	16
1.2 Le marché financier.....	17
1.3 Le marché primaire.....	17
1.3.1 Le marché secondaire.....	17
1.4 Equilibre arbitrage et efficience d'un marché financier	18
1.4.1 Equilibre.....	18
1.4.2 Absence d'opportunités d'arbitrage.....	18
1.4.3 Efficience.....	19
1.5 Les instruments financiers.....	19
1.6 La théorie du portefeuille.....	20
1.6.1 Les actions.....	20
1.7 Marche au hasard du prix d'un actif financier (sous – jacent).....	20
1.8 Définition et généralités sur les contrats d'options	21
1.8.1 Les options.....	21
1.8.2 Options sur actions.....	22
1.8.3 Limites d'arbitrage de la valeur d'une option.....	23
1.9 Les quatre stratégies élémentaires.....	24
1.10 Achat d'une option d'achat.....	24
1.10.1 Achat d'une option de vente.....	24
1.10.2 Vente d'une option d'achat.....	25
1.10.3 Vente d'une option de vente.....	25

1.10.4 Représentation graphique.....	26
1.11 Les composantes qui influent sur la prime des options.....	27
1.11.1 les paramètres exogènes.....	27
1.11.2 Les paramètres endogènes.....	29

CHAPITRE 2. SIMULATION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE NORMALE

2.1 Génération de nombres aléatoires de loi uniforme.....	30
2.2 La loi Normale.....	31
2.3 La loi log – normale.....	32
2.4 La génération des variables aléatoires normalement distribuée.....	33
1.4.1 Méthode de la somme.....	33
1.4.2 Méthode de Box – Muller.....	33
1.4.3 La méthode du rejet polaire de Marsaglia et Bray.....	35
1.4.4 Méthode de Sibuya.....	35
2.5 Quelques résultats commentés.....	36
2.6 Méthode de l'inversion de la loi normale.....	38
1.6.1 Première inversion (approximative) de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.....	38
1.6.2 L'inversion de Moro de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.....	39

CHAPITRE 3. CALCUL STOCHASTIQUE ET EVALUATION D'UNE OPTION D'ACHAT EUROPEENNE

3.1 Introduction.....	41
3.2 Notions sur les calculs des probabilités.....	41
3.2.1 Définition d'une tribu.....	42
3.2.2 Mesurabilité.....	42
3.2.3 Probabilité.....	42
3.2.4 Ensembles négligeables.....	42
3.2.5 Loi de probabilité.....	43
3.2.6 Lois conditionnelles.....	43
3.2.7 Convergence de v.a.....	43

3.2.8	Convergence presque sûre.....	44
3.2.9	Convergence quadratique.....	44
3.2.10	Convergence en probabilité.....	44
3.2.11	Convergence en loi.....	45
3.2.12	Espérance.....	45
3.2.13	Espérance conditionnelle.....	45
3.2.14	propriétés de espérance conditionnelle.....	45
3.3	Processus stochastiques.....	45
3.3.1	Filtration.....	45
3.3.2	Processus.....	45
3.3.3	Processus Croissant.....	45
3.3.4	Processus Gaussiens.....	47
3.3.5	Processus de Markov.....	47
3.4	Martingales.....	48
3.5	Mouvement Brownien.....	48
3.5.1	Propriété de la martingale.....	50
3.5.2	Simulation d'un mouvement Brownien.....	50
3.5.3	Lemme de Itô pour un Mouvement Brownien.....	52
3.6	Equation différentielle stochastique et Mouvement Brownien.....	54
3.6.1	Simulation d'une équation différentielle Stochastique.....	55
3.7	Estimation de la volatilité du rendement du cours d'une action.....	57
3.7.1	Estimation volatilité implicite.....	57
3.7.2	Estimation de la volatilité historique.....	57
3.8	Mouvement Brownien géométrique.....	59
3.9	Raisonnement risque – neutre.....	60
3.10	Formule de Black & Scholes par le raisonnement risque neutre.....	62

CHAPITRE 4. SIMULATION MONTE - CARLO

4.1	Introduction.....	64
4.2	Description de la méthode de Monte-Carlo.....	65
4.3	Méthode de Monte Carlo appliquée en finance.....	66
4.4	Les algorithmes de simulation Monte Carlo.....	69
4.5	Convergence et limites de la méthode.....	70

4.5.1	La loi forte des grands nombres.....	70
4.5.2	Théorème central limite.....	71
4.5.3	Construction d'intervalle de confiance.....	72
4.5.4	Construction d'intervalle de confiance cas de Monté Carlo.....	72
4.6	Test de l'algorithme de MMC en référence au modèle Black & Scholes.....	73
4.7	Accélération de la convergence de MMC.....	77

CHAPITRE 5. METHODES QUASI MONTE – CARLO

5.1	Introduction.....	81
5.2	Suites à discrédance faible.....	82
5.2.1	Suite de Van Der Corput.....	86
5.2.2	Algorithme de construction d'une suite de Van Der Corput.....	87
5.2.3	Exemple numérique sur les suites de Van Der Corput.....	87
5.2.4	Les (t, s)-suites et les (t, m, s)-réseaux.....	88
5.2.5	L'uniformité d'une suite à discrédance faible.....	89
5.3	Méthode de Quasi Monte Carlo appliqué en finance.....	91
5.4	L' algorithmes de Quasi Monte Carlo.....	93
5.5	Etude comparative avec les méthodes de MMC , MMCA en référence au modèle Black & Scheles.....	93

CHAPITRE 6. RANDOMISATION DE LA METHODE QUASI MONTE CARLO

6.1	Introduction.....	96
6.2	Techniques de randomisation totale.....	97
6.2.1	Exemple numérique sur les suites de Van Der Corput randomisées.....	97
6.3	Evaluation d'une option européenne par la technique de randomisation totale de MQMC.....	99
6.3.1	Algorithme de randomisation totale de MQMC.....	99
6.4	Etude statistique pour la convergence et limites de la méthode.....	100
6.5	.Etude comparative avec la méthode de MMC, MMCA et MQMCRT en référence au modèle de Black & Scholes.....	101
6.6	Randomisations partielles.....	105
6.6.1	Etude comparative entre MQMCRP et les techniques MMC, MMCA et	

MMC, MMCA et MQMCRT avec le Modèle de Black & Scholes.....106

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Représentation des stratégies élémentaires	26
Figure 2.1	Représentation de fonction de densité $f(u)$ de la loi normale	32
Figure 3.1	Simulation de trajectoires Browniennes	52
Figure 4.1	Convergence de l'algorithme de la simulation Monte Carlo	75
Figure 4.2	Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC	76
Figure 4.3	Ecart avec le Modèle de Black & Scholes	77
Figure 4.5	Convergence du prix de l'option en fonction du nombre d'itérations avec et sans variables antithétiques.	79
Figure 4.6	Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC et MMCA en fonction de nombre de simulations	79
Figure 5.1	La dispersion de 100 et 1000 points de la suite de van der Corput sur l'hyper cube unité en base 2	86
Figure 5.2	Caractérisation des quatre intervalles élémentaires pour 8 points	90
Figure 5.3	Convergences respectives de la MMC sans et avec variables antithétique et de la MQMC	94
Figure 5.4	Ecart avec le modèle de Black et Scholes	95
Figure 6.1	Convergence de l'algorithme de randomisation totale de Quasi Monte Carlo vers la formule de Black & Scholes, comparée par MMC sans et avec variables antithétiques	102
Figure 6.2	Erreur de simulation MMC, MMCA, MQMCRT	104
Figure 6.3	Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC, MMCA et MQMCRT	104
Figure 6.4	Convergence de la méthode de randomisation partielle de MQMC, vers le Modèle de Black & Scholes, par apport aux autres méthodes	107
Figure 6.6	Ecart absolu avec B- S de MMC, MMCA, MQMCRT, MQMCRP	108
Figure 6.7	Amplitude d'intervalle de confiance de Méthodes MMC, MMCA MQMCRT, MOMCRP	109
Tableau 2.1	Résultat obtenu par la méthode de Box – Muller	36
Tableau 2.2	Résultat obtenu par la méthode de Marsaglia	37
Tableau 2.3	Résultat obtenu par la méthode de Sibuya	37
Tableau 4.1	Convergence de la méthode Monte Carlo.	75

Tableau 4.2	Convergence de la méthode Monte Carlo MMC et MMCA	78
Tableau 5.1	Convergence de la méthode quasi -Monte Carlo.	94
Tableau 6.2	Etude de la convergence de la MQMCRP et la RMQMCT et MMC et MMCA	107

INTRODUCTION

L'histoire des options se confond, presque, avec l'histoire de l'humanité. Depuis la nuit des temps, en effet, s'échangent des contrats permettant à leurs acquéreurs d'acheter (option d'achat) ou bien de vendre (option de vente) un actif déterminé, à un prix –dit d'exercice- et à une date future, préalablement fixés, moyennant le règlement immédiat, au vendeur du contrat, d'une prime, dont le montant est librement débattu par les co-contractants.

Les options sur actions ont fait leur apparition, dès la fin du 17^e siècle en Grande- Bretagne, et au 18^e siècle aux Etats –Unis mais les contrat négociés n'étaient pas standardisés, les marchés n'étaient pas réglementés, de plus ces marchés n'ont consisté, jusqu'en 1973, qu'en des marchés primaires, les opérateurs étant, pratiquement, privés de la possibilité de se défaire, à tout moment, de leur contrat, sur un marché secondaire actif.

En 1973, les initiateurs du « Chicago Board Options Exchange (CBOE) » ont donné naissance à un nouveau type d'option dont la négociabilité, sur un marché secondaire actif, permettait aux opérateurs de solder leurs positions à tout moment et à moindre frais. Une chambre de compensation fut créée pour servir d'intermédiaire, entre acheteurs et vendeurs, et permettre la négociation de contrats d'options, entièrement standardisés, tant en ce qui concerne leur prix d'exercice, que leur date d'échéance : les opérateurs peuvent désormais prendre leurs bénéfices ou, au contraire, limiter leurs pertes sur une position en option, avant l'échéance limite de celle-ci. Cette initiative fut couronnée de succès et on a vu la prolifération de marchés semblables, un peu partout, sur les grandes places financières.

Cette prolifération a été, d'autant plus motivée, que l'accroissement de l'incertitude de l'environnement n'arrête pas de stimuler les agents économiques à

gérer les risques de marché. Les risques de change, de taux d'intérêt et de variation des cours boursiers sont devenus un sujet de préoccupation omniprésent. La gestion de ces risques est une activité stratégique qui est en train de connaître un essor considérable et un gain d'intérêt de plus en plus important de la part des institutions financières, des gérants de fonds et de nombreuses entreprises industrielles et commerciales.

Après des années de croissance effrénée et peu réglementée, nous assistons, aujourd'hui, à une phase de plus grande réglementation et de gestion plus contrôlée des risques. Cette gestion a fait des progrès notables grâce au développement des produits dérivés. Un produit dérivé ou contingent est un actif financier négocié sur un marché dont la valeur dépend du prix d'un autre actif appelé sous-jacent.

Cet essor considérable qu'ont connu les produits dérivés, s'explique, essentiellement, par l'accroissement de la volatilité et, donc des risques financiers. C'est la nécessité de couvrir ces risques qui a été le véritable stimulant du développement des instruments dérivés. A travers le temps, ces derniers ont connu une vague de réformes sans précédent. En effet, face à l'accroissement des taux d'intérêt et des cours boursiers, conséquence des décisions prises pour la libération du commerce international et de l'économie, toute une série de nouveaux instruments financiers ont vu le jour grâce à l'imagination et au pragmatisme des intervenants sur le marché.

Les options négociables offrent un intérêt essentiel pour la gestion de portefeuille. Elles contribuent à rendre le marché financier plus complet, en permettant à tout opérateur, d'atteindre l'objectif de rentabilité et de risque souhaité qui, sans elles aurait été impossible à obtenir avec un faible coût.

Pour les entreprises, la principale innovation introduite par l'option est la diversification des profils de risque. Elles peuvent désormais choisir le cours ou le taux à partir duquel elles cèdent leur risque à la banque.

De plus les chercheurs se sont vite aperçus, qu'au delà du cadre des marchés financiers, stricto sensu, de nombreux problèmes de finance d'entreprise peuvent

être traités dans le contexte de la théorie des options : le renouvellement de la théorie du choix des investissements, domaine assurance et réassurance, gestion de portefeuille,..., etc. L'évaluation des options est devenue, plus que jamais, un problème très important et très complexe. Il a attiré beaucoup d'économistes et de mathématiciens (Samuelson, Merton, Ross, Black & Scholes, ..., etc.).

Dans sa thèse intitulée «la théorie de la spéculation » Bachelier [1] a été le premier qui a suggéré une méthode pour le calcul d'un prix équitable d'une option basé sur un mouvement du marché modélisé par un processus stochastique. Il a supposé que le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement Brownien (avec un drift nul) et à procéder à l'évaluation de l'option d'achat sur ce sous-jacent. Les deux déficiences de ce modèle sont, d'une part, avec une probabilité égale à 1, le modèle engendre des prix de sous-jacent négatifs et le prix de l'option peut être supérieur au prix du sous-jacent, ce qui est en contradiction avec la réalité du marché financier, d'autre part, l'hypothèse de nullité de la moyenne espérée de la variation du prix induit un taux d'intérêt nul.

Samuelson [2] a amélioré la procédure en considérant un processus Brownien géométrique et en calculant la valeur de l'option comme l'espérance du *payoff* actualisé à un taux continue égale au drift réel de l'option dont on cherche la valeur.

Les travaux d'Itô, qui a développé dans les années 40 et 50 une théorie mathématique pour la modélisation des processus stochastiques continus, ont été utilisés par Black & Scholes [3] pour la résolution du problème d'évaluation de l'option d'achat d'un actif financier qui a aboutit à leur formule célèbre.

En se basant sur une logique d'arbitrage, appliquée d'une manière continue dans le temps, et en supposant l'absence de coût de transaction, d'impôt, de copte de marge et de toutes sortes de friction, ces auteurs ont développé une équation mettant en relation la valeur de l'option avec ses déterminants qui sont notamment la valeur du sous-jacent, la volatilité, le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque et la maturité.

Bien que le modèle de Black & Scholes [3] apporte une solution théorique et empirique aux problèmes d'évaluation des contrats d'options européennes, il

demeure toutefois tributaire d'un certain nombre d'hypothèses qui ne sont pas en accord avec les conditions concrètes du négoce des options et par conséquent limitent l'étendue de son application. S'il est aujourd'hui populaire c'est essentiellement parce que la formule qui en découle est facile à mettre en œuvre, et a été le début de l'ère de la finance. Les méthodes de simulation de type Monte Carlo, Quasi Monte Carlo et la randomisation de la méthode Quasi Monte Carlo sont utilisées dans le cadre de la valorisation des instruments financiers où on a pas de modèle analytique, comme l'option américaine, bermudienne ou exotique.

Notre but dans ce mémoire est donc de prolonger, la notion de la MMC, cette technique, basée sur un raisonnement risque – neutre, permet de simuler le prix du sous – jacent, en générant des lois normales centrées réduites, à partir de lois uniformes sur l'intervalle $[0,1]$, générées elles-mêmes par l'ordinateur. Cette génération des lois normales doit se faire, suivant une forme, qui consomme le moins de temps. La notion de la simulation quasi Monte- Carlo (MQMC) qui est un analogue déterministe des techniques de Monte- Carlo où les suites pseudo aléatoires sont remplacées par des suites à discrétion faible se répartissant plus uniformément sur le domaine d'étude, permettant ainsi un meilleur « échantillonnage ». L'inconvénient de cette méthode est l'absence d'un moyen d'estimer l'erreur. La notion de la randomisation de MQMC, qui est basée sur la permutation totale de Owen [4], et la permutation partielle de Ken et Boyle [5], permet de préserver la vitesse de convergence, et estimer l'intervalle de confiance, nous étudions dans ce travail. Pour cela ce mémoire est structuré de la manière suivante :

Le premier chapitre présente la terminologie et le contexte des options négociables sur action.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse aux techniques de simulation d'une variable aléatoire normale. L'estimation des valeurs du sous – jacent, est accompagnée par génération des variables aléatoires normales, à partir des lois uniformes sur $[0,1]$.

Le troisième chapitre donne des notions sur le calcul de probabilité et des définitions sur l'espérance conditionnelle, la filtration et les martingales. Il présente aussi le principe de calcul stochastique il s'agit d'évaluer un actif financier par l'espérance actualisée de l'intégration du flux des revenus qui lui est associé. Le mouvement Brownien et la simulation d'une équation différentielle stochastique ont été définis dans ce chapitre.

Le quatrième chapitre présente la méthode d'évaluation des options d'achat européennes, comme approximation nous utilisons la méthode de simulation de Monte Carlo (approche puissante et flexible) pour fournir des estimations du prix d'option surtout pour le cas multidimensionnel. Toutefois elle présente l'inconvénient d'une convergence lente. Bien que la technique des variables antithétiques permet d'améliorer l'efficacité de la simulation de Monte Carlo, qui pour un temps donné de calcul réduit la variance et, donc améliore la précision.

Le cinquième chapitre est consacré aux méthodes MQMC qui sont des alternatives déterministes basées sur les séquences à discrédances faibles. Plusieurs applications financières sont basées sur l'utilisation des MQMC. Les séquences (ou suites) déterministes ont une propriété similaire aux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuée (i.i.d). Utilisées par MMC en ce sens qu'elles sont "bien" dispersées sur tout l'hyper cube unité. Bien que la MQMC accélère MMC, elle ne permet pas une estimation pratique de l'erreur (intervalle de confiance).

Le dernier chapitre traite l'idée de la randomisation de la MQMC qui permet d'avoir les deux bonnes propriétés des deux méthodes : convergence rapide conduisant à un intervalle de confiance. Nous nous intéressons à la technique proposée par Owen, [4] connue sous le nom méthode de randomisation (MQMCRT) (méthodes hybrides de MQMC). Faure [6] fournit une permutation optimale pour une interprétation unidimensionnelle d'une suite à discrédance faible. Aussi Ken & Boyle [5], ont introduit une modification récente de la technique de randomisation totale. Cette méthode s'appuie sur la randomisation partielle (MQMCRP), avec une limite probabiliste sur l'erreur de la méthode de MQMC. Elle est basée sur la

randomisation des points en conservant la propriété de discrédance, elle donne une simplification à la technique de randomisation totale notamment pour les problèmes de grandes dimensions. Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion. Nous indiquons aussi que les résultats numériques, les tableaux et les figures sont obtenus par un programme sous Delphi 7 sur (P 4, HOR 2 GHz, RAM 256 Mo, Elite Groupe).

CHAPITRE 1

MARCHES FINANCIERS ET THEORIE DES OPTIONS

1.1 INTRODUCTION

La théorie des marchés financiers et la compréhension de leur comportement a fait des progrès considérables depuis quarante ans. La connaissance de ces développements est d'autant plus intéressante et importante, leur adéquation à la réalité devient chaque jour plus évidente, au fur et à mesure que les comportements des acteurs, et que les conditions de fonctionnement des marchés financiers rendent ceux-ci de plus en plus efficaces au sens économique du terme. Les progrès de la théorie et l'évaluation du champ d'étude qu'elle cherche à mieux formaliser ont eu, et continueront à avoir dans l'avenir, des implications profondes sur la théorie financière en général, notamment de la gestion de portefeuille.

La prise en compte d'un écoulement continu du temps, ainsi que les hypothèses faites à la fois sur l'évaluation des cours et sur l'altitude des opérateurs, ont montré que chaque investisseur constitue défavorablement de l'ensemble d'opportunités dues aux mouvements stochastiques des variables d'état. Les investisseurs, déposent une part de leur avoir dans un portefeuille de marché, une autre dans l'actif sans risque, mais encore, une stratégie de couverture en plaçant (implicitement) le reste de leur fortune dans des fonds spécialement construits pour leur permettre de se couvrir contre les risques.

Les financiers ont proposé aux investisseurs de nouveaux produits, permettant une couverture explicite de leur risque à l'aide de contrats, en particulier à l'aide d'options, dont le succès a été considérable. Il s'agit de contrats conditionnels par

lesquels l'une des parties s'engage à fournir à l'autre, à (ou jusqu'à) une date donnée, si cette dernière le demande, un volume donné de valeurs mobilières à un prix convenu d'avance, le prix d'exercice, moyennant le versement d'une prime. Cet instrument financier a élargi la base des marchés financiers. Pour plus de détaille, nous allons définir dans ce chapitre les notions de marché financier, équilibre, arbitrage et efficience d'un marché financier, les instruments financiers, marche au hasard du prix d'un actif financier, la théorie du portefeuille, les contrats d'options, les quatre stratégies élémentaires, les composantes qui influent sur la prime des options. Pour plus de détaille le lecteur peut se référé aux ouvrages [1], [2], [7], [8], [10], [11].

1.2 Le marché financier

Un marché financier [7] permet de confronter l'offre et la demande de capitaux, traditionnellement on distingue les marchés d'actions et les marchés de dettes. Les praticiens distinguent les marchés selon la catégorie d'instruments financiers qui y sont cotés. Mais on peut dresser une typologie plus complète. Le marché des émissions de titres ou marché primaire, et le marché boursier ou marché secondaire.

Le marché primaire n'est différent du marché secondaire que sur le plan conceptuel. Le premier est le marché de l'émission de titres nouveaux, le second est celui de la négociation de titres déjà émis. Le marché primaire est le marché « du neuf ». Le marché secondaire celui est de « l'occasion ».

1.3 Le marché primaire

Le marché de l'émissions de titres nouveaux, ce marché regroupe toutes les opérations d'appel public à l'épargne, est le plus important pour l'économie dans la mesure, où il permet aux entreprises qui fréquentent de créés des actions à fin d'augmenter leur capital, où de financer leur investissements, et à l'état et collectivités locales de lancer des emprunts à long terme et émettent des obligations représentatives de la créance des souscripteurs.

1.3.1 Le marché secondaire

Le marché financier assure la liquidité et la mobilité de l'épargne. En permettant la « mobilisation » de l'épargne investie en actions ou en obligations, la Bourse assure le bon fonctionnement du marché primaire. C'est en effet, la perspective qu'ont les investisseurs de pouvoir négocier à tout moment sur le marché les actions, et les obligations qu'ils ont en portefeuille, ou qu'ils comptent acheter qui rend ces placements séduisants. En effet, la liquidité du marché leur permet de réaliser rapidement des arbitrages de portefeuille sans qu'ils aient à attendre l'échéance des titres qui le composent ou à rechercher individuellement une éventuelle contrepartie.

1.4 Equilibre arbitrage et efficience d'un marché financier

1.4.1 Equilibre

Un marché est dit en équilibre [8] si l'offre du produit financier considéré est égale à sa demande. Cette égalité s'obtient grâce à l'ajustement des prix. Dès lors sur un marché financier en équilibre et suffisamment liquide, tout opérateur trouvera une contrepartie acceptant de traiter au prix du marché. L'équilibre compétitif, tout opérateur peut acheter ou vendre des quantités arbitraires au prix du marché alors qu'il ne trouvera aucun vendeur acceptant un prix inférieur.

1.4.2 Absence d'opportunités d'arbitrage

L'arbitrage [9] est une opération qui n'implique aucune mise de fonds et qui n'engendre que des flux de trésorerie positifs ou nuls. L'existence d'opportunité d'arbitrage sur un marché est incompatible avec l'équilibre de celui-ci. En effet, l'opportunité d'arbitrage déclenche une offre sur les produits « surcotés » et une demande sur les produits sous-cotés. En revanche, un marché libre d'opportunité d'arbitrage n'est pas nécessairement en équilibre. La condition d'équilibre est, donc, plus forte que celle d'absence d'arbitrage, bien que cette dernière conduise, dans de nombreux contextes, à des modèles importants et constitue la pierre angulaire de la théorie financière moderne et, notamment, dans l'évaluation des options.

En effet, cette méthode de raisonnement par arbitrage est, très fréquemment, utilisée en finance, dès lors qu'on cherche à déterminer le prix d'un produit dérivé dont la valeur est liée à celle d'un actif sous-jacent. Elle repose sur l'idée que les actifs en question sont négociés sur des marchés parfaits ou que chaque information est prise en compte dès sa survenance et où n'interviennent que des investisseurs rationnels. Dès lors, toute possibilité d'arbitrage gagnant est exploitée à l'instant même de son apparition par des arbitragistes qui vont, en gonflant la demande du produit sous-évalué et l'offre du produit surévalué, ramener les prix de ces actifs à une valeur normale, et annuler ainsi, dans un temps très court, les possibilités d'arbitrage gagnant.

1.4.3 Efficience

L'équilibre d'un marché financier peut, éventuellement, résulter d'offres et de demandes émanant d'opérateurs irrationnels et / ou mal informés. Dans de telles conditions, le prix d'équilibre n'incorpore pas, nécessairement, toutes les informations potentiellement disponibles et joue mal son rôle dans l'allocation des ressources.

D'après Fama (1970) [10], un marché est efficient quand à chaque instant, les prix incorporent toute l'information pertinente et disponible.

Quand cette condition d'efficience est satisfaite, les prix du marché à l'instant précédent l'instant présent, incorporent correctement toute l'information disponible pertinente à la prévision des prix futurs et les rendements sont dits normaux. A contrario, quand le marché est inefficient, des informations disponibles peuvent être utilisées pour obtenir des rendements anormaux.

Selon le système d'information, présumé disponible à l'instant précédent l'instant présent, on considère trois formes d'efficience [10]: l'efficience faible, l'efficience semi-forte et l'efficience forte.

L'efficience forte est celle qui caractérise un marché dont les prix incorporent toute l'information disponible, qu'elle ait été rendue publique ou non. Sur un tel

marché, l'information privilégiée est très rapidement incorporée dans les prix d'équilibre et les profits d'initiés sont pratiquement inexistantes.

1.5 Les instruments financiers

Un instrument financier [7] est un titre émis par un agent économique qui confère à son détenteur des droits particuliers, un droit monétaire auquel s'ajoute, dans le cas des actions, un droit regard sur la gestion. Ces droits diffèrent en général selon que l'émetteur est public ou privé, ils diffèrent également en fonction de la nature des instruments financiers.

Le trait commun des instruments financiers est leur négociabilité. Les instruments financiers sont susceptibles d'être inscrits sur un marché réglementé.

1.6 La théorie du portefeuille

Un portefeuille [11] est un ensemble d'instruments financiers qu'un acteur de marché peut détenir. Les instruments financiers se dérivent sous la forme d'actions, d'obligations et d'options.

La rentabilité du portefeuille est la somme des rentabilités de chaque titre pondérée par la proportion, que représente la valeur du titre dans l'ensemble de la valeur du portefeuille.

1.6.1 Les actions

Par définition, une action [7] représente une partition dans le capital d'une entité économique. Une action est synonyme d'un pourcentage de propriété dans une corporation. Le détenteur de l'action a le droit de regard sur les revenus générés, et sur tous les titres émis par la corporation dont il est actionnaire. Il a le droit également aux bénéfices (dividendes), et aux gain en capital générés grâce à l'accroissement des cours.

Les actions ne comportent pas de date d'échéance et n'engage pas leur émetteur à payer un intérêt annuel. Ces valeurs ont une durée de vie indéfinie et ne rapportent un dividende que lorsque l'émetteur a dégagé un profit satisfaisant.

1.7 Marche au hasard du prix d'un actif financier (sous – jacent)

La marche aléatoire d'un actif financier et d'une manière générale, du prix des sous – jacent, est due à l'hypothèse d'efficience du marché financier.

L'efficience, quelque soit sa forme, engendre les deux points suivants [12] :

- Les prix présents des actifs financiers reflètent leur historique.
- Le marché financier incorpore, immédiatement, toute nouvelle information concernant un actif financier.

Ainsi, la connaissance du passé du processus du cours du prix de l'actif ne nous fournit aucune information sur son évolution à venir, en dehors de celle contenue dans la valeur présente qui seule détermine la distribution future des cours, en l'absence de nouvelles informations. Il s'agit, donc, d'un processus markovien typique.

En cas d'absence de frictions, le rendement instantané du sous- jacent est :

$\frac{dS_t}{S_t}$ où S_t est le prix de l'actif sous- jacent et dS_t est la variation de son prix pendant

un intervalle de temps infinitésimal de longueur dt . Ce rendement instantané :

$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz$ est dû à deux contributions : la première est déterministe et

prévisible : μdt (où μ est une constante) et la deuxième représente la variation aléatoire du prix de l'actif (σdz), due à des effets externes, comme des nouvelles inattendues, σ étant la volatilité du rendement de l'actif et dz est un processus de Wiener- Lévy.

1.8 Définition et généralités sur les contrats d'options

1.8.1 Les options

L'option [7] est l'un des produits financiers les plus utilisés, une option est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix prédéterminé, et ce pendant une période de temps donnée. Un tel contrat représente un droit et non une obligation pour son détenteur. En d'autre terme, l'investisseur n'est pas contraint d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent. Pour une option européenne, la décision d'exercer ou de ne pas exercer ce droit aura lieu à l'échéance du contrat. Par contre, pour une option de type américaine, cette décision peut avoir lieu à n'importe quel moment de la vie du contrat. La plupart des options standardisées négociées, aujourd'hui, sur l'ensemble de la planète sont des options américaines. La plupart des options européennes sont aujourd'hui négociées sur le marché des options sur action.

Si l'option accorde à celui qui la détient une possibilité d'achat, il s'agit d'une option négociable d'achat, appelée *call*. Si l'option accorde à celui qui la détient une possibilité de vente, il s'agit d'une option de vente, dénommée *put*. L'option est librement négociable sur un marché jusqu'à sa date d'échéance.

La valeur d'une option est la prime (ou *premium*) que l'acheteur doit payer pour acquérir l'option, qu'elle soit exercée ou pas. Le prix d'exercice est le cours auquel l'acheteur d'une option d'achat, (ou l'acheteur d'une option de vente) peut acquérir (ou céder) l'actif sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. La date d'exercice, ou échéance, de l'option est le dernier jour auquel l'option peut être exercée.

Les options se distinguent, par l'actif sur lequel elles portent, autrement dit l'actif sous-jacent. Celui-ci peut être une action, une obligation, un indice, ..., etc.

En ce qui concerne les produits financiers, la grande popularité des options auprès des investisseurs tient au fait qu'elles représentent un outil de placement extrêmement souple. Combinées à des portefeuilles d'actions, les options peuvent aider l'investisseur à limiter le risque de perte ou à augmenter le potentiel du rendement des actions détenues. De plus, les options permettent à l'investisseur audacieux d'ajouter du levier à ses placements, et à l'investisseur moins audacieux de fixer le prix d'un achat ou d'une vente ultérieure d'action. En un mot, les options représentent un outil précieux de contrôle des risques du portefeuille et, pour cette raison, elles doivent occuper une place importante dans les stratégies de placement de l'investisseur.

Les éléments caractéristiques d'une option sont donc la nature de l'option (*call* ou *put*), le prix d'exercice et la prime.

1.8.2 Options sur actions

Le développement des options négociables commença avec des options ayant pour support des actions individuelles. Les options portent sur les plus grandes sociétés de la cote. Les options ont également été introduites pour des actions de petites sociétés ayant des caractéristiques attrayantes, telles que leur forte croissance ou leur participation dans un secteur particulier (pétroles, par exemple).

Les options sur actions sont en général protégées contre des ajustements en capital tel que des distributions d'actions gratuites mais non contre le paiement de dividendes. De ce fait, il peut être avantageux d'exercer une option sur action juste avant le versement du dividende, au lieu de la garder et perdre le montant du dividende.

1.9 Limites d'arbitrage de la valeur d'une option

Afin de respecter le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage sans risque, une option doit vérifier un certain nombre de conditions qui correspondent à des valeurs limites de l'option

Considérée.

Dans le cas, où l'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes, les conditions que doit vérifier la valeur d'une option d'achat sont [13]:

- Une option est un actif financier qui procure une responsabilité limitée. La perte maximale que peut supporter l'acheteur d'un call est la valeur de l'option. De ce fait la valeur de l'option ne peut être négative : $C_t \geq 0$.
- Si à l'échéance, le prix du sous-jacent est S_T est supérieur au prix d'exercice K . l'option d'achat est exercée et sa valeur est $S_T - K$. Par contre. Si à échéance le prix du sous-jacent est inférieur ou égale au prix d'exercice de l'option. La valeur de l'option d'achat est nulle : soit $C_t(S_T, 0, K) = \text{Max}(0, S_T - K)$.
- De toute évidence, le prix d'une option d'achat est une fonction décroissante du prix d'exercice de l'option : $C_t(S_t, \tau, K_1) \leq \text{Max}(S_t, \tau, K_2)$ si $K_1 \geq K_2$ Où $\tau = T - t$ est la durée vie résiduelle
- Le prix d'un call ne peut être supérieur à celui de l'actif sous-jacent. En effet, si c'était le cas, un investisseur achètera le sous-jacent et jamais l'option. On a donc : $C_t(S_t, \tau, K) \leq S_t$ comme la valeur de l'option ne peut être négative (condition 1). Si la valeur du sous-jacent est nulle la valeur de l'option sera, également, nulle et aura : $C_t(0, \tau, K) = 0$.

- Cette condition s'énonce : $C_t(0, \tau, K) \geq S - K e^{-rt}$. de l'option, t : étant la date courant
et T la date d'échéance.

1.10 Les quatre stratégies élémentaires

Il existe deux classes d'options (CALL et PUT) et deux types d'opérations (ACHAT et VENT). On peut ainsi envisager les quatre stratégies suivantes [7]:

- 1 – Achat d'une option d'achat.
- 2 – Achat d'une option de vente.
- 3 – Vente d'une option d'achat.
- 4 – Vente d'une option de vente.

Appelons : C_t le prix d'un call, P_t : le prix d'un put, et analysons ces quatre stratégies.

1.10.1 Achat d'une option d'achat

L'opérateur acquiert le droit d'acheter à (jusqu'à) l'échéance le titre support, au prix K moyennant le paiement immédiat de C_t . Il espère que le cours du sous-jacent atteindra un niveau supérieur au prix d'exercice augmenté de la prime C_t . Si son anticipation se confirme, il pourra acheter le titre au prix convenu K , puis par exemple le revendre immédiatement en réalisant un profit. Si au contraire sa prévision est mauvaise, il subit une perte dont la valeur maximale est égale à la prime du call, puisque si le cours est inférieur au prix d'exercice, il n'exercera pas son option. Le lecteur notera le délai qui s'écoule entre le paiement de la prime (immédiat) et le règlement de l'achat éventuel de l'actif support.

1.10.2 Achat d'une option de vente

L'opérateur acquiert le droit de vendre un titre au prix K à (jusqu'à) l'échéance, moyennant le versement immédiate de P_t . Il espère que le prix du titre va baisser. Si

tel le cas, il exerce son option, sinon il abandonne l'option et sa perte maximale est de P_t , même remarque en ce qui concerne le décalage de temps entre le versement de la prime et l'encaissement du produit de la vente éventuelle du support.

1.10.3 Vente d'une option d'achat

C'est la contrepartie de l'opération 1. L'opérateur s'engage, si l'option est exercée, à livrer le titre à l'échéance au prix K , en échange de C_t , que lui verse l'acheteur immédiatement. L'opérateur espère une baisse du titre. Si tel est bien le cas, l'acheteur n'exerce pas son option, le veneur conserve la prime de toute façon. Sinon le cours peut augmenter d'un montant supérieur au prix d'exercice augmenté de C_t , et la perte peut être très sévère, en théorie sans limite, mais, c'est bien connu, les arbres ne montent pas jusqu'au ciel.

1.10.4 Vente d'une option de vente

C'est la contrepartie de l'opération 2. L'opérateur s'engage, si l'option est exercée, à livrer le titre à l'échéance au prix K , et peut subir une perte également sévère, même remarque que précédemment.

Les ventes d'options constituent des stratégies particulièrement exposées. Pour éviter d'éventuelles défaillances, dans les marchés organisés d'options, s'interpose entre vendeurs et acheteurs une chambre de compensation. Celle-ci impose, aux vendeurs d'options le versement d'un dépôt de garantie, à l'ouverture d'une position et les soumet à un système d'appels de marge.

1.10.5 Représentation graphique des stratégies

Graphiquement ces stratégies correspondent aux schémas suivants exprimant le profit ou la perte réalisés à l'échéance en fonction de l'évaluation des cours.

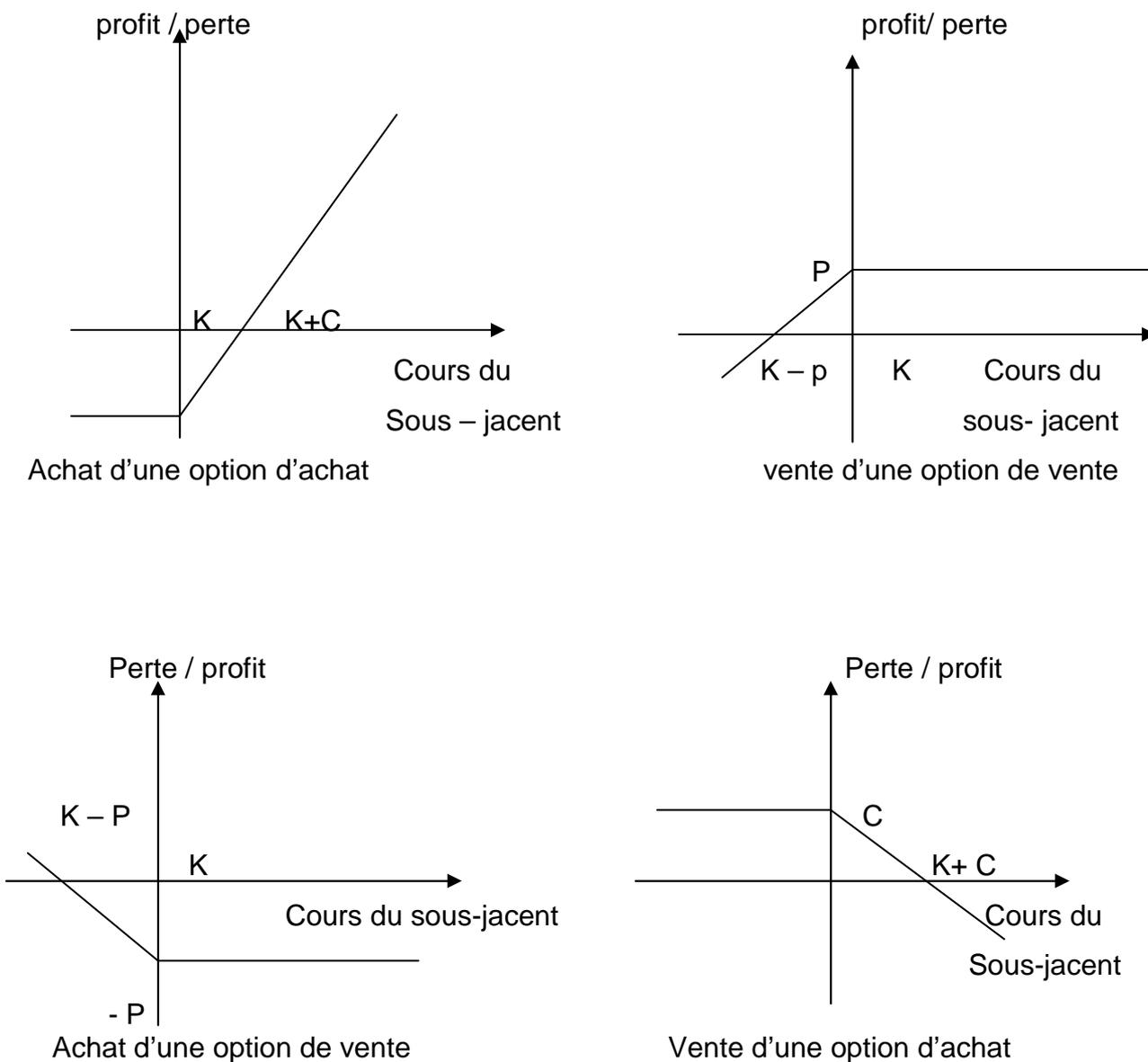


Figure 1.1: Représentation des stratégies élémentaires

Ces graphiques illustrent les différentes possibilités offertes par les options simples : l'achat d'une option d'achat peut être considérée comme une assurance contre la baisse du titre lorsque l'on spéculé à la hausse, l'achat d'une option de vente comme

une assurance contre la hausse du titre, lorsque l'on spéculé à la baisse. Les ventes d'options sont beaucoup plus risquées, car si elles procurent un gain certain immédiat, elles peuvent conduire aussi à des pertes futures très importantes si les cours évoluent de façon inverse à ce que le vendeur d'option a anticipé. Remarquons aussi, que par rapport à l'achat des titres de base, une opération sur options peut être plus intéressante, dans la mesure où la mise de fonds est moindre et peut être plus intéressante, dans la mesure où la mise de fonds est moindre et peut offrir une rentabilité plus forte : Les options possèdent un effet de levier très important.

1.11 Les composantes qui influent sur la prime des options

La dynamique des marchés influe à divers niveaux sur la prime des options. Comprendre cette dynamique est essentiel afin d'évaluer l'impact d'une variation de certaines composantes sur la valeur des options, cette valeur dépend de paramètres exogènes et de paramètres endogènes [7].

1.11.1 les paramètres exogènes

La valeur d'une option dépend du prix de l'actif support sous-jacent, du prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque, de l'échéance et de la volatilité du prix de l'action.

Il y a trois paramètres exogènes qui dépendent du sous-jacent (le cours de l'action sous-jacent, la volatilité, les dividendes), le quatrième déterminant exogène, le taux d'intérêt, qui est lié au marché et ne dépend pas du sous-jacent [7].

Le cours de l'action sous-jacent 1.1. L'option varie en fonction du cours de l'action, si le cours baisse le Call baisse et le Put monte et si le cours monte, c'est l'inverse qui se produit.

La volatilité 1.2. La volatilité est représentée par l'écart type annualisé des rendements, déterminés à partir des variations relatives des prix de l'actif support de l'option à savoir le sous- jacent.

L'acheteur d'une option est un spéculateur à la hausse (option d'achat) ou à la baisse (option de vente du titre support. Il est disposé à payer une prime d'autant plus élevée que l'amplitude des fluctuations du cours de l'action est importante, et donc que son option a des chances de finir en dedans. En fait, plus la volatilité est forte, plus la probabilité, que le cours de l'action soit supérieur ou inférieur au prix d'exercice de l'option, est élevée.

Ainsi, la valeur de l'option (d'achat ou de vente) est une fonction croissante de la volatilité du sous – jacent celle- ci peut être estimée soit à partir des rendements des actions sur période précédant la date d'émission des options, soit à partir des prix des options observés sur le marché. Ces deux méthodes d'estimation sont connues respectivement par volatilité historique et volatilité implicite.

La volatilité historique 1.3. La volatilité historique est souvent calculée comme l'écart type des variations de cours sur une période de temps passée, qui mesure la dispersion de ces variations de cours autour de la moyenne.

La volatilité implicite 1.4. La volatilité implicite est calculée à partir du cours des options.

La volatilité historique porte donc sur le passé, alors que la volatilité implicite porte sur l'avenir.

Les dividendes 1.5. Comme le cours d'une action diminue généralement d'un montant égal au dividende, la valeur de l'option d'achat de cette action sera nécessairement moindre, inversement, la valeur de vente augmentent.

Le taux d'intérêt 1.6. Dans la mesure où l'achat d'une option d'achat nécessite un investissement initial inférieur à celui de l'achat ferme du sous-jacent, le détenteur d'une option d'achat peut placer les capitaux provisoirement épargnés au taux d'intérêt sans risque pendant toute la durée du contrat d'option. Ainsi, plus le taux d'intérêt sans risque est élevé, plus l'avantage de l'achat d'une action par le biais de l'option sur l'achat ferme de cette même action est important, et par conséquent plus la valeur de l'option est élevée.

Du point de vue mathématique, un taux d'intérêt élevé implique une valeur plus faible du prix d'exercice actualisé et par conséquent une valeur de l'option d'achat représentée par la différence $S_t - E(e^{-r(T-t)})$ plus élevée. Ce raisonnement n'est pas vérifié pour l'option de vente.

L'achat d'une option de vente, en comparaison avec la vente ferme des actions entraîne, outre le décaissement de la prime, un retard dans l'encaissement du montant de la vente des actions qui n'intervient qu'au moment de l'exercice de l'option. La valeur de l'option de vente représentée par $E(e^{-r(T-t)}) - S_t$ est donc d'autant plus faible que le taux d'intérêt sans risque est élevée.

1.11.2 Les paramètres endogènes

Les paramètres endogènes sont : la durée de vie de l'option et son prix d'exercice.

La durée de vie de l'option 1.7. Le pari sur l'évaluation du cours de l'action, fait par l'acheteur d'une option (à la hausse ou à la baisse), a d'autant plus de chances d'être gagné que l'échéance est lointaine. En effet, l'éloignement de l'échéance augmente les possibilités de variation du cours de l'action et donc la probabilité d'exercice de l'option.

Il est important de signaler que la relation entre l'échéance et le prix de l'option n'est pas linéaire. A mesure que le temps passe, l'option perd sa valeur temps. A

l'échéance, cette dernière s'annule puisque l'option vaut sa valeur intrinsèque ou zéro.

Les options peuvent être classées en fonction de leurs échéances, en options à court terme et en option à long terme. Les premières ont des échéances qui sont très rarement supérieures à 6 mois à l'inverse des dernières et, plus particulièrement, des garanties dont l'échéance peut atteindre 18 mois, 2 ans, voire 5 ans.

Le prix d'exercice de l'option 1.8. Une option d'achat a une probabilité d'autant plus forte de finir en dedans et donc d'être exercée que son prix d'exercice est faible. Sa valeur est alors une fonction décroissante de son prix d'exercice. A l'inverse, la probabilité d'exercer une option de vente est autant plus importante que son prix d'exercice est élevé. La valeur de l'option de vente est, par conséquent, une fonction croissante de son prix d'exercice.

Les deux paramètres inobservables pour le calcul de la valeur de l'option sont la volatilité et le taux d'intérêt. La volatilité est un paramètre déterminant dans le calcul de la valeur d'une option. C'est un paramètre stochastique contrairement, à l'hypothèse de Black & Scholes [3] concernant la constance de ces paramètres. Les principaux estimateurs de ces paramètres sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

CHAPITRE 2

SIMULATION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE NORMALE

2.1 Génération de nombres aléatoires de loi uniforme

La génération de nombres aléatoires reposant principalement sur la génération de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et identiquement distribuées. Les techniques de générations actuellement implémentées dans les langages de programmations (rnd, rand, random) sont d'ailleurs restreintes à ce problème. Elles sont généralement issues des méthodes du générateur congruentiel.

Nous retenons pour principe de base qu'une méthode de génération de nombres de loi uniforme doit :

- Générer des nombres de loi uniforme statistiquement indépendant.
- Etre reproductible.

Nous allons utiliser des séquences aléatoires, pour estimer les valeurs d'un actif financier (sous-jacent), il va falloir générer les variables Z_1 et Z_2 indépendantes, suivant des lois uniformes sur l'intervalle $[0,1]$. D'un premier temps, une relation transformant deux variables aléatoires indépendantes U_1 et U_2 , uniformes sur l'intervalle $[0,1]$, en deux variables aléatoires Z_1 et Z_3 indépendantes de loi normales, centrées, réduites et indépendantes. Dans un second temps, on peut déduire Z_2 , à partir de Z_1 et Z_3 , sachant qu'elle est normale centrée, réduite de coefficient de corrélation avec Z_1 constant qu'on note ρ . Soit

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_3 \rightarrow N(0,1) \text{ et } \rho(Z_1, Z_2) = \rho$$

La génération des variables aléatoires $N(0,1)$ indépendantes se fait à partir de variables aléatoires indépendantes de $U[0,1]$.

Soient :

$$\begin{aligned} U_1 &\rightarrow U[0,1] \\ U_2 &\rightarrow U[0,1] \end{aligned} \quad \text{avec } U_1, U_2 \text{ sont Indépendantes telles que}$$

$$\rho(U_1, U_2) = 0$$

2.2 .La loi Normale

La loi normale [14] joue un rôle fondamental en probabilité et en statistique mathématique. en statistique elle apparaît comme loi limite de caractéristiques liées à un échantillon de grande taille. Le théorème central limite montre que, dans certaines conditions, la somme, et donc la moyenne, de variables indépendantes et de même loi suivent asymptotiquement une loi normale. Si X Suit une loi normale $N(m, \sigma)$ alors sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

Le changement de variable aléatoire $u = \frac{X-m}{\sigma}$ permet d'écrire :

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$$

Avec :

u : variable aléatoire $N(0, 1)$.

Cette fonction de densité $f(u)$ est une fonction paire, qui décroît rapidement vers l'infini.

Comme le montre le tableau suivant :

u	1	1.96	2	2.5758	3	4	$+\infty$
$f(u)$	0.6826	0.95	0.9544	0.99	0.9973	0.999994	1

La fonction de densité $f(u)$ est représentée par la figure suivante

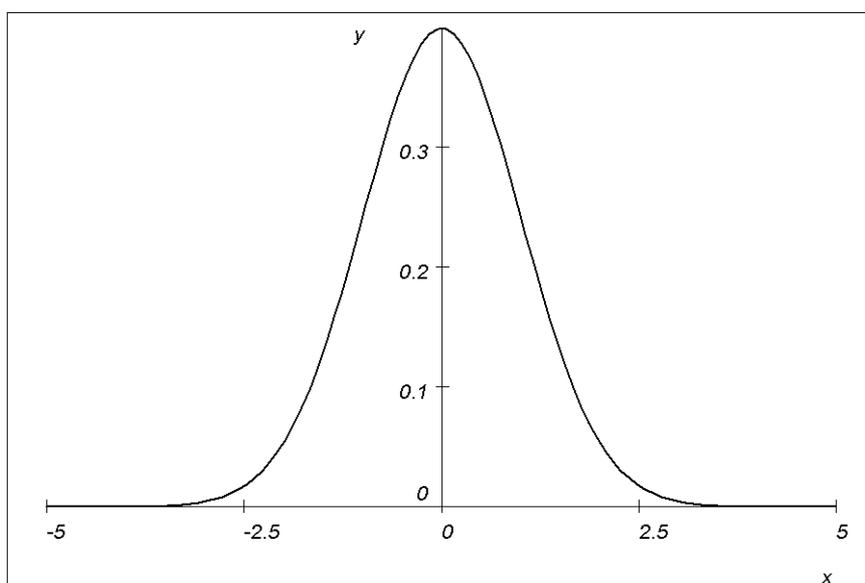


Figure 2.1 : Représentation de fonction de densité $f(u)$ de la loi normale

2.3 La loi log – normale [14]

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log- normale si son logarithme népérien suit une loi normale :

$$\ln(X) \rightarrow N(m, \sigma)$$

sa densité est donc :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

2.4 La génération des variables aléatoires normalement distribuées

On peut générer les variables aléatoires de $N(0,1)$ de plusieurs façons. Soient on utilise deux techniques [15], peuvent être utilisées : l'inversion de la fonction de répartition de la loi normale, ou bien un changement de variables adéquat qui transforme deux variables aléatoires uniformes et indépendantes, en deux variables aléatoires de $N(0,1)$.

2.4.1 Méthode de la somme

Soit $X_i, i \in \{1, \dots, 12\}$, douze tirages d'une variable aléatoire de loi uniforme $U[0,1]$. Considérons alors la variable aléatoire:

$$y = \left(\sum_{i=1}^{12} x_i \right) - 6$$

Cette dernière suit approximativement la loi $N(0,1)$.

Algorithme 2.1.

Début

- 1 - poser $X := -6$;
 - 2 - pour $i := 1$ à 12 faire
 - $X := X + \text{Random}$;
- Fin pour ;

Fin.

Si (R_n) désigne la suite des appels de *Random* (suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$), on a :

$$\frac{R_1 + \dots + R_n - n/2}{\sqrt{n} \sqrt{\frac{1}{12}}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

Cette méthode est plus simple à mettre en œuvre. Toute fois elle est assez peu efficace par rapport aux autres méthodes présentées (Box Muller, Sibuya, Marsaglia). De plus elle est assez coûteuse en temps de calcul. Ainsi, sa convergence vers la loi $N(0,1)$ est numériquement relativement lente.

2.4.2 Méthode de Box - Muller

La méthode de Box – Muller, est une meilleure alternative facile à mettre en œuvre.

Soient deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de loi uniforme dans l'intervalle $[0,1]$.

Le changement de variable suivant :

$$x_1 = e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)}$$

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y_2}{y_1}$$

Admet pour Jacobien

$$|J| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_2^2}$$

Le Jacobien est donc un produit de densités de lois normales, ou encore d'une loi normale bivariee de corrélation nulle. Les variables aléatoires

$$y_1 = \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2)$$

$$y_2 = \sqrt{-2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2)$$

Suivent bien la loi $N(0,1)$

Algorithme de Box Muller 2.2. Fréquemment proposé dans les manuels, et basé sur la méthode polaire.

$$R = \text{Sqrt}(-2 * \log(\text{Random})),$$

$$\theta = 2 \pi * \text{Random},$$

$$U = R * \cos \theta,$$

$$V = R * \sin \theta,$$

2.4.3 La méthode du rejet polaire de Marsaglia et Bray

Proposition 2.3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, de loi uniforme sur le disque unité $D = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$.

Soit (R, θ) le couple de coordonnées polaires correspondant :

$$X = R \cos \theta; \quad Y = R \sin \theta .$$

On pose :

$$R' = \sqrt{-4 \log R}$$

Alors

$$U = R' \cos \theta \text{ et } V = R' \sin \theta$$

Sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi $N(0, 1)$

Algorithme polaire 2.4.

1 - Répéter

$$X = 2 * \text{Random} - 1$$

$$Y = 2 * \text{Random} - 1$$

$$S = X * X + Y * Y$$

Jusqu'à $(S < 1)$

((X, Y) de loi uniforme sur le disque unité)

2 - $Z = \text{Sqrt}(-2 * \log(S) | S)$

(changement de norme)

$$U = Z * X ;$$

$$V = Z * Y ;$$

Cet algorithme engendre donc les variables aléatoires deux par deux. Ce n'est pas un inconvénient dans la mesure où un grand nombre de simulations sont nécessaires et où les résultats U et V pourront être utilisés successivement.

2.4.4 Méthode de Sibuya

Algorithme 2.5.

Début

- 1 - Générer U_1 , réalisation d'une v.a uniforme sur $[0, 1]$;
- 2 - Générer U_2 , réalisation d'une v.a uniforme sur $[0, 1]$;
- $a_1 = 2u_1 - 1$; $a_2 = 2u_2 - 1$; $b = (a_1)^2 + (a_2)^2$;
- 3 - Si $b > 1$ aller en (1), sinon aller en (5) ;
- 4 - $x_1 = a_1 \sqrt{\frac{-2 \ln(b)}{b}}$ $x_2 = \frac{a_2}{a_1}$;

Fin.

x_1 et x_2 sont deux réalisations indépendantes d'une v.a normale centrée réduite

2.5 Quelques résultats commentés

Afin de bien voir les caractéristiques de chacun des méthodes. Voici quelques temps d'exécution observée, pour une boucle de différentes tailles de M en secondes.

Tableau 2 .1: Résultat obtenu par la méthode de Box – Muller

Nombre De Variables M	L'erreur de la Moyenne	L'erreur de l'écart Type	Le temps D'exécution
50	0.108886	0.017817	00 S
150	0.085070	0.031616	00 S
200	0.029306	0.025744	00 S
2000	0.018386	0.007327	05 S
6000	0.009628	0.006895	13 S
11000	0.003935	0.003408	17 S
30000	0.003469	0.003226	22 S
50000	0.001721	0.000737	28 S

Tableau 2 .2 : Résultat obtenu par la méthode de Marsaglia.

Nombre de Variables M	L'erreur de la Moyenne	L'erreur de l'écart Type	Le temps d'exécution
50	0.112721	0.105793	00 S
150	0.075526	0.038710	00 S
200	0.042186	0.019744	00 S
2000	0.017993	0.012188	00 S
6000	0.009674	0.003023	00 S
11000	0.003384	0.002500	01 S
30000	0.001754	0.001203	07 S
50000	0.000304	0.001384	24 S

Tableau 2. 3 : Résultat obtenu par la méthode de Sibuya

Nombre de Variables M	L'erreur de la Moyenne	L'erreur de l'écart Type	Le temps d'exécution
50	0.122261	0.047931	00 S
150	0.103264	0.062166	00 S
200	0.087101	0.023886	00 S
2000	0.032555	0.012233	01 S
6000	0.086040	0.002493	0 3 S
11000	0.008015	0.000968	08 S
30000	0.003603	0.000688	17 S
50000	0.002457	0.000168	28 S

En simulation, la situation typique est celle où on exécute un très grand nombre de fois une boucle, en calculant à chaque passage des réalisations de variables aléatoires indépendantes. D'après la loi des grands nombres le résultat recherché est une espérance, que l'on estime par la moyenne empirique des variables simulées, donc l'idée concrète qui est donnée par les trois tableaux, pour M est assez grand, est que les variables aléatoires indépendantes suivent approximativement la loi normale centrée réduite.

2.6 Méthode de l'inversion de la loi normale

Nous présentons dans ce paragraphe les deux principales techniques de l'inversion de la fonction de répartition de la loi normale [15]. Nous notons F^{-1} , la fonction permettant d'inverser la fonction de répartition. De la sorte, si x est une v.a uniformément distribué à valeur dans l'intervalle $[0,1]$, la variable aléatoire $y = F^{-1}(x)$ normalement distribuée.

2.6.1 Première inversion (approximative) de la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite

Lorsque seule la valeur de $F(x)$ est connue, il est possible d'obtenir une approximation de la valeur de x à l'aide de la technique suivante.

$$\text{Soit, } y = \begin{cases} \sqrt{-2\ln[F(x)]} & \text{si } 0 < F(x) \leq 0.5 \\ \sqrt{-2\ln[1-F(x)]} & \text{si } 0.5 < F(x) < 1 \end{cases}$$

Et

$$\begin{array}{lll} c_0 = 2.515517 & c_1 = 0.802853 & c_2 = 0.010328 \\ d_1 = 1.432788 & d_2 = 0.189269 & d_3 = 0.00108 \end{array}$$

Et

$$Z = y - \frac{c_0 + c_1 y + c_2 y^2}{1 + d_1 y + d_2 y^2 + d_3 y^3}$$

Alors x est obtenu par :

$$x = \begin{cases} -Z & \text{si } 0 < F(x) \leq 0.5 \\ Z & \text{si } 0.5 < F(x) < 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

2.6.2 L'inversion de Moro de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

A peine plus longue à mettre en œuvre que la formule précédente (2.1), la technique de Moro s'avère être d'une très grande précision. L'approximation est faite en fonction de la valeur de $F(x)$.

Soit $y = F(x) - 0.5$.

Si $|y| \leq 0.42$ alors, l'approximation faite est :

$$x = y \frac{\sum_{i=0}^3 a_i y^{2i}}{\sum_{j=0}^4 b_j y^{2j}} \quad (2.2)$$

Si en revanche $|y| > 0.42$ alors, l'approximation est faite à l'aide du polynôme de Tchebychev :

$$x = \varepsilon \left[\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right] - \varepsilon \frac{c_0}{2}$$

Où ε est le signe de y et

$$t = k_1 \left[2 \ln \left(-\ln \left(\frac{1}{2} - |y| \right) \right) - k_2 \right] \quad \text{où } |y| < \frac{1}{2}$$

Le tableau suivant donne les valeurs des coefficients a_i, b_i, c_i et k_i

i	a_i	b_i	c_i	k_i
0	2.50662823884	1	7.71088707054878	0.4179886424926
1	-18.615006252	-8.4735109309	2.777201353368516	4.2454686881376
2	41.3911977352	23.0833674374	0.361496412926100	/
3	41.3911977353	-21.062241018	0.03734182334345	/
4	-25.441060496	3.13082909833	$2.8297143036 \cdot 10^{-3}$	/
5	/	/	$0.16257169179 \cdot 10^{-3}$	/
6	/	/	$8.0173304740 \cdot 10^{-6}$	/
7	/	/	$0.3840919865 \cdot 10^{-6}$	/
8	/	/	$0.0129707170 \cdot 10^{-6}$	/

Enfin, la fonction $f(t) = \left[\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right] - \frac{c_0}{2}$ peut être approchée comme suit:

Soit d_{10} et d_9 deux réels nuls [15]

Soient d_i , les réels déterminées par : $d_i = 2td_{i+1} - d_{i+2} + c_j$ pour $i = 8, 7, \dots, 1$

Alors, $f(t) = td_1 - d_2 + c_0 / 2$.

Ces deux dernières techniques permettent de ne se concentrer que sur la génération d'une loi uniforme à valeurs dans l'intervalle $]0,1[$. L'inversion des valeurs par l'une de ces méthodes permet de retrouver une distribution normale.

Nous avons établi dans ce chapitre les différentes méthodes de simulation de la loi normale centrée réduite, qui est à la base de la simulation de Monte- Carlo et Quasi Monte- Carlo, ainsi que les méthodes de randomisation de Quasi Monte-Carlo totale et partielle, décrites respectivement dans les chapitres 4, 5 et 6.

CHAPITRE 3

CALCUL STOCHASTIQUE ET EVALUATION DES OPTIONS D'ACHATS EUROPEENNES

3.1 Introduction

La modélisation privilégiée des cours d'actifs financiers passe ainsi naturellement par, les processus stochastiques pour lesquels on dispose aujourd'hui d'une théorie à la fois riche et forte développée. Ayant accepté ces prémisses, une question surgit immédiatement : quel type de processus retenir? et plus précisément, les cours boursiers sont –ils des réalisations de processus, continus, Markoviens, Gaussiens ? Il n'existe pas de réponse immédiate à cette interrogation. Un processus continu ne rendra pas compte de décrochements.

Un processus Markovien, qui est sans mémoire, implique que la connaissance du passé influe en rien sur les trajectoires à venir. Un processus Gaussien ne tient pas compte des queues de distributions épaisses, souvent constatées en pratique.

Dans ce sens, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'ensemble des notions de probabilité et de processus utilisées tout au long de ce mémoire, en commençant par des rappels sur la théorie de probabilité et de processus stochastique tout en introduisant la relation entre les outils probabilistes et les évaluations des options d'achat européennes, nous faisons une présentation de l'équation différentielle stochastique, le mouvement Brownien géométrique, raisonnement risque neutre et modèle de Black et Scholes, qui seront un préliminaire pour entamer les notions du MMC, MQMC, MQMCRT, MQMCRP.

3.2 Notions sur les calculs des probabilités

Nous allons définir des notions sur le calcul de probabilité et de processus stochastique. Pour plus de détails le lecteur peut se référer aux ouvrages [17], [18], [19].

3.2.1 Tribu

Définition 3.1. Une tribu F (σ -algèbre) sur un ensemble non vide Ω est une famille de parties de Ω , contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable. Une tribu contient donc l'espace Ω . Et un espace mesurable est un espace muni d'une tribu qu'on note (Ω, F) .

3.2.2 Mesurabilité

Définition 3.2. Soit (Ω, F) et (E, \mathcal{E}) deux espaces mesurables. Une application f de Ω dans E est dite (F, \mathcal{E}) mesurable si $f^{-1}(A) \in F, \forall A \in \mathcal{E}$ où $f^{-1}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{w \in \Omega / f(w) \in A\}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus employées, on dit simplement que f est mesurable.

- Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est borélienne si elle est $(B_{\mathbb{R}}, B_{\mathbb{R}})$ mesurable, soit $f^{-1}(A) \in B_{\mathbb{R}}, \forall A \in B_{\mathbb{R}}$. Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles A de \mathbb{R} .

Définition 3.3. Soit (Ω, F) un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X est une application mesurable de (Ω, F) dans \mathbb{R} i.e $X^{-1}(A) \in F, \forall A \in B_{\mathbb{R}}$.

3.2.3 Probabilité

Définition 3.4. Une probabilité sur (Ω, F) est une application P de F dans $[0, 1]$ telle que

1 - $P(\Omega) = 1.$

2 - $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ pour des A_n appartenant à F deux à deux disjoints.

3.2.4 Ensembles négligeables

- Un ensemble est dit négligeable s'il est de probabilité nulle.
- Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

3.2.5 Loi de probabilité

Définition 3.5. Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, F, P) . La loi de X est la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}; B_{\mathbb{R}})$ définie par $P_X(A) = \{w: X(w) \in A\} = P(X \in A), \forall A \in B_{\mathbb{R}}.$

- On définit aussi la fonction de répartition de la variable X . Comme étant la fonction croissante définie sur \mathbb{R} par $F(x) = P(X \leq x).$

- La densité $f(x)$ d'une variable aléatoire est la dérivée de la fonction de répartition (si cette dérivée existe). On peut alors écrire $P(X \in A) = \int_A f(x) dx.$

3.2.6 Loi conditionnelle

Définition 3.5. Soit (X, Y) deux variables aléatoires réelles. La loi conditionnelle de X sachant Y est la famille de lois sur \mathbb{R} notée $\mu(y, dx)$ indexées par y (qui décrit l'ensemble des valeurs prises par Y) telle que :

$$E[\Phi(x/Y = y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \mu(y, dx)$$

pour toute fonction Φ borélienne bornée. La propriété s'étend aux fonctions Φ intégrables par rapport à μ . Lorsque l'on connaît cette loi conditionnelle, les calculs

d'espérance et de variance conditionnelle se réduisent à des calculs d'espérance et de variance. En effet $E[X/Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu(y, dx)$ est, pour tout y , l'espérance d'une v.a. de loi $\mu(y, dx)$.

Si le couple (X, Y) a une densité $f(x, y)$, on peut montrer que :

$$\mu(y, dx) = \frac{f(x, y) dx}{\int_{\mathbb{R}} f(u, y) du}$$

3.2.7 Convergence de v.a.

On suppose que (Ω, F, P) est fixé. Toutes les variables aléatoires sont ainsi définies sur cet espace.

On distingue plusieurs types de convergence:

3.2.8 Convergence presque sûre

Une suite de variables aléatoires X_n converge presque sûre (p.s), vers X si pour presque tout w ,

$$X_n(w) \rightarrow X(w) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad \text{On note } X_n \xrightarrow{p.s} X$$

3.2.9 Convergence quadratique

On note $\|X\|_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\int_{\Omega} X^2 dP} = \sqrt{E(X^2)}$. On identifie deux v.a. égales p.s. ainsi on définit la norme $\|\cdot\|$ sur l'espace des v.a. de carré intégrable. On dit que $X \in L^2(\Omega)$ si $\|X\|_2 < \infty$. Soit $X_n \in L^2(\Omega)$ et $X \in L^2(\Omega)$. La suite de variables aléatoires (X_n) converge en moyenne quadratique vers X :

$$(\|X_n - X\|_2)^2 = E(X_n - X)^2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

3.2.10 Convergence en probabilité

Une suite de variables aléatoires X_n converge en probabilité vers X si $\forall \theta > 0 P(|X_n - X| \geq \theta) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ on note $X_n \xrightarrow{P} X$.

- La convergence p.s. implique la convergence en probabilité.
- La convergence en probabilité implique qu'une sous-suite converge p.s.
- La convergence quadratique implique la convergence en probabilité.

3.2.11 Convergence en loi

Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers X si $E(\Phi(X_n)) \rightarrow E(\Phi(X))$ quand $n \rightarrow \infty$ pour toute fonction Φ continue bornée. On note $X_n \xrightarrow{L} X$.

- La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

3.2.12 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X est par définition la quantité $\int_{\Omega} X dP$ que l'on note $E(X)$, ou $E_p(X)$ si l'on désire préciser quelle est la probabilité utilisée sur Ω . Cette quantité peut ne pas exister. Pour calculer cette intégrale, on passe dans « l'espace image » et on obtient, par définition de la loi de probabilité $\int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$. Il existe des variables aléatoires qui n'ont pas d'espérance, c'est-à-dire pour lesquelles l'intégrale $\int_{\Omega} X dP$ n'a pas de sens. On dit que X est intégrable si $|X|$ a une espérance finie.

3.2.13 Espérance conditionnelle

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$.

On la note $E(X/Y)$. Et caractérisée par :

- $E(X/Y)$ c'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable
- $\int_A E(X/Y)dP = \int_A XdP \quad \forall A \in \sigma(Y)$.

3.3 Processus stochastiques

3.3.1 Filtration

On s'intéresse à des phénomènes dépendant du temps. Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu F_t , c'est l'information à la date t .

Définition 3.6. Une filtration est une famille croissante de sous tribus de F , c'est-à-dire $F_t \subset F_s$ pour tout $t \leq s$.

On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans F_0 . On parle d'hypothèses usuelles si :

- Les ensembles négligeables sont contenus dans F_0
- La filtration est continue à droite au sens où $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$.
- Une filtration G est dite plus grosse que F si $F_t \subset G_t, \forall t$.

3.3.2 Processus

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $X = (X_t, t \in [0,1])$ définies sur le même espace de probabilité.

Définition 3.7. Un processus stochastique $X = (X_t, t > 0)$ est dit adapté (par rapport à une filtration F_t) si X_t est F_t mesurable pour tout t .

On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \rightarrow X_t(w)$ sont continues pour presque tout w .

À un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle F_t^x , c'est à dire la famille croissante de tribus $F_t^x = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.

On utilise souvent des processus dit prévisibles. La définition précise est la suivante: soit (Ω, F, P) . Un espace muni d'une filtration (F_t) . On appelle tribu des prévisibles la tribu sur $(0, \infty) \times \Omega$ engendrée par les rectangles de la forme :
 $]s, t] \times A, 0 \leq s \leq t, A \in F_s$

Un processus est prévisible si et seulement si l'application $(t, w) \rightarrow X_t(w)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles.

3.3.3 Processus Croissant

Un processus $A = (A_t, t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \rightarrow A_t$ est une fonction croissante, c'est-à-dire $A_t(w) \leq A_s(w), \forall t \leq s, p.s.$

3.3.4 Processus Gaussiens

Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, 1 \leq i \leq n, \forall a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ est une v.a.r. Gaussienne:

Un processus Gaussien est caractérisé par son espérance et sa variance. Un espace Gaussien est un sous-espace (vectoriel fermé) de $L^2(\Omega)$ formé de v.a.r. gaussiennes centrées. L'espace gaussien engendré par un processus Gaussien est le sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a.r. centrées $(X_t - E(X_t), t \geq 0)$, c'est-à-dire le sous-espace formé par les combinaisons linéaires de ces variables centrées et leurs limites en moyenne quadratique.

3.3.5 Processus de Markov

Le processus de Markov [19] est un type particulier de processus stochastique où seulement la valeur présente de la variable en question est déterminante pour sa valeur future. L'historique de la variable et la manière, dont le présent a émergé du passé, n'ont aucun effet sur la valeur future de la variable. La propriété de Markov pour le prix d'un actif financier va de paire avec l'efficacité du marché sous sa forme faible. Cette forme d'efficacité peut s'énoncer suit : "le cours actuel d'un titre contient toute l'information disponible sur le titre".

L'espérance de la variable aléatoire, conditionnée par les événements passés, dépend, uniquement, de la valeur précédente X_{t-1} . C'est un processus sans mémoire du passé.

Ceci peut être formalisé comme suit : si l'instant présent est t ,

- L'événement $A = \{X_s, s > t\}$ représente le futur du processus X_t
- L'événement $B = \{X_s, s < t\}$ représente le passé du processus X_t

Le processus X_t est dit Markovien, si et seulement si :

$$P(A / X_t, B) = P(A / X_t) \quad \forall t \geq 0$$

Connaissant le présent, le passé et le futur du processus sont indépendants. Ainsi, la connaissance du passé d'un processus Markovien ne fournit aucune information sur son évaluation à venir, en dehors de celle contenue dans la valeur présente qui seule détermine la distribution future des cours, en l'absence de nouvelle information.

3.4 Martingale

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous tribus F_t croissante (telle que $F_s \subset F_t, \forall s \leq t$

Définition 3.8. Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration (F_t) si

- X_t est F_t -mesurable et intégrable pour tout t .
- $E(X_t / F_s) = X_s, \forall s \leq t$.

Propriété 3.9. [17]

- Si X est une martingale $E(X_t) = E(X_0), \forall t > 0$.
- Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale: $X_t = E(X_T / F_t)$.

3.5 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien [19] avec un drift est un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1 - Chaque variation $(X_{t+s} - X_s)$ du processus $\{X_t, t \geq 0\}$, entre les instant s et $s+t$, suit la loi normale de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$ où μ et σ sont des paramètres constants.
- 2 - Pour les instants $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$, les variations $(X_{t_2} - X_{t_1}), (X_{t_3} - X_{t_2}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi normale.
- 3 - Pour $X_0 = 0$, $\{X_t, t \geq 0\}$ est continue par rapport au temps.
- 4 - La variation $(X_{t+s} - X_s)$ est indépendante de l'historique du processus X_t , puisque la connaissance de $X_\tau (\tau < s)$ n'a aucun effet sur la distribution de probabilité de $(X_{t+s} - X_s)$. c'est précisément le caractère Markovien du mouvement Brownien.

5 - Dans le cas où $\mu=0$, le mouvement Brownien est appelé mouvement Brownien standard, dont la distribution de probabilité continue est :

$$P(Z_t < z / Z_{t_0} = z_0) = P(Z_t - Z_{t_0} < z - z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{z-z_0} e^{-\frac{u^2}{2(t-t_0)}} du$$

Le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ peut s'écrire en fonction de $\{Z_t, t \geq 0\}$ sous la forme :

$$dX_t = \mu dt + \sigma dZ_t \quad (3.1)$$

Ainsi,

- dZ_t est une variable aléatoire suivant une loi normale.
- L'espérance mathématique de dZ_t est $E(dZ_t) = 0$
- La variance de dZ_t est $V(dZ_t) = dt$
- Les valeurs de dZ_t , relatives à des intervalles de temps courts dt , quelconques, sont indépendantes.

Le drift réel μ et la volatilité σ sont deux paramètres qu'on peut estimer à partir de l'historique du prix de l'actif qui suit le processus X_t .

Le processus dZ_t peut s'écrire sous la forme : $dZ_t = U\sqrt{dt}$ où U est une variable aléatoire de une loi normale centrée réduite. La variable aléatoire U^2 suit donc, une loi du Khi – deux de degré 1 ($U^2 \rightarrow \chi^2(1)$), tel que son espérance mathématique est $E(U^2) = 1$, et sa variance est $V(U^2) = 2$.

Comme, le carré du processus dZ_t est : $dZ_t^2 = U^2 dt$, on déduit de ce qui précède que l'espérance du processus dZ_t^2 est $E(dZ_t^2) = E(U^2)dt = dt$, alors que sa variance est $V(dZ_t^2) = V(U^2)dt^2 = 2dt^2$.

On peut, donc, affirmer que, quand dt tend vers 0, à l'ordre dt le processus dZ_t^2 devient équivalent à dt , soit : $dZ_t^2 \approx dt$.

3.5.1 Propriétés de Martingale

Définition 3.10. soit $(F_t, t \geq 0)$ une filtration, c'est à dire une suite croissante de tribus et $(M_t, t \geq 0)$ un processus stochastique à valeur dans \mathbb{R}^2 le processus (M_t) est une (F_t) martingale si :

- 1 - M_t est F_t mesurable pour tout $t \geq 0$.
- 2 - $E(|M_t|) < +\infty$ pour tout $t \geq 0$.
- 3 - Pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty$, $E(M_t / F_s) = M_s$.

Le processus suivant montre que le Brownien est une martingale pour sa filtration naturelle.

Proposition 3.11. [20] Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard réel et pour tout $t \geq 0$ notons $F_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ on a alors les résultats suivants.

- 1 - $(W_t, t \geq 0)$ est une (F_t) martingale.
- 2 - $(W_t^2 - t, t \geq 0)$ est une (F_t) martingale.
- 3 - Pour tout $\lambda > 0$, $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right), t \geq 0 \right)$ est une (F_t) martingale.

3.5.2 Simulation d'un Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien $(W_t, t \geq 0)$ est un processus à accroissements indépendant, stationnaire, et Gaussien. Il existe de très nombreuses caractérisations du mouvement Brownien, nous en signalons une :

Proposition 3.12 . [20]

- Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus continu, à accroissements indépendants stationnaires. Alors il existe des constantes r et σ telles que pour tout $t \geq 0$, $X_t - X_0 = rt + \sigma W_t$ où $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien.

Un processus gaussien centré continu $\{X_t, t \geq 0\}$ tel que $Cov(X_s, X_t) = s \wedge t$ est un mouvement Brownien. (pour la preuve de proposition 3.11, 3.12 le lecteur peut se référer au [20]).

Nous allons donner une méthode de simulation des trajectoires d'un mouvement Brownien $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ où $T > 0$ est fixé. Dans l'algorithme suivant, on désignera par RandG la simulation d'une variable aléatoire $N(0, 1)$ et chaque appel à RandG fournit une réalisation d'une nouvelle variable aléatoire gaussienne réduite indépendante des précédentes.

Cette méthode est directement inspirée de la définition. On choisit un entier $n \geq 1$ et un pas de discrétisation $h = \frac{T}{n}$. Son algorithme est alors :

- 1 - Ecart = $Sqrt(T/n)$;
- 2 - $W[0] = 0$;
- 3 - pour $i=1$ à n Faire ;
- 4 - $W[i] = W[i-1] + \text{écart} * \text{RandG}$;

Cette algorithme fournit les valeurs d'une réalisation du processus aux points de la grille de discrétisation $iT/n, 0 \leq i \leq n$, c'est-à-dire $W[i] = W_{\frac{iT}{n}}$. En interpolant linéairement entre les points $\left(\frac{iT}{n}, W[i]\right)$, on obtient une approximation de la trajectoire de W entre les instants 0 et T grâce à la continuité p.s. des trajectoires de W .

Voici un exemple de trois trajectoires obtenues pour $T = 1$ et $n = 6000$.

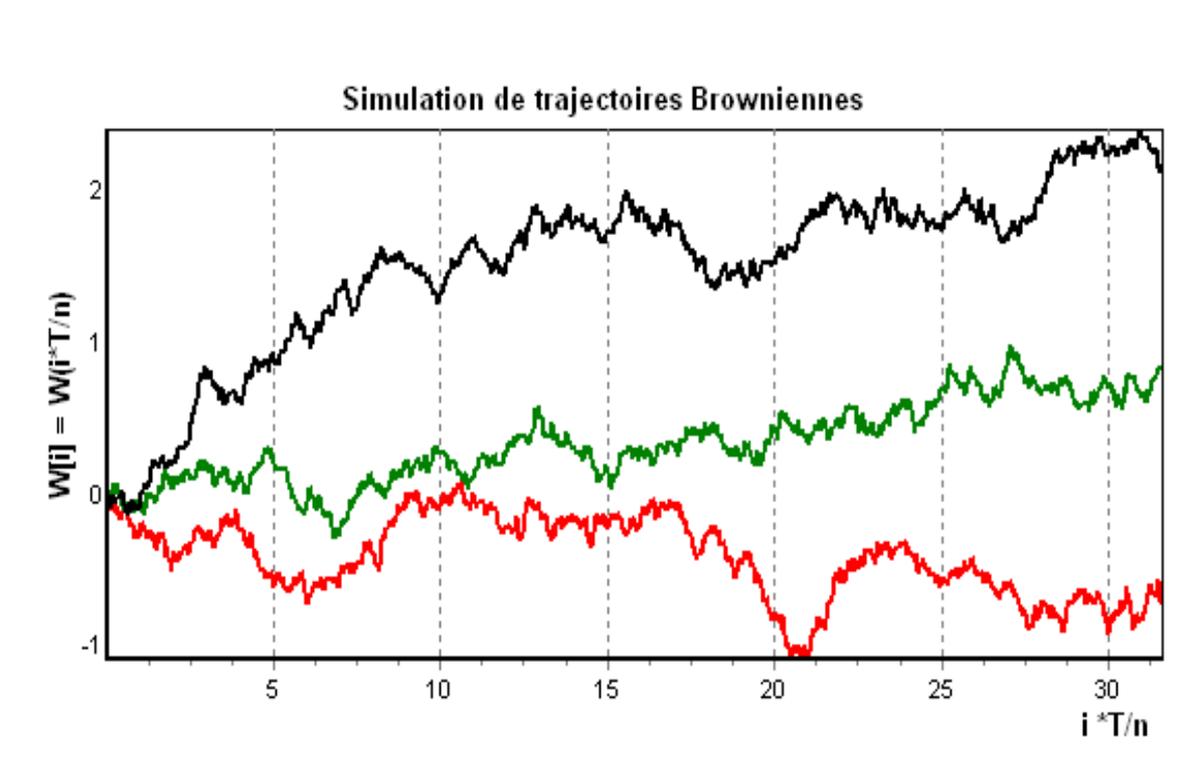


Figure 3.1 : Simulation de trajectoires Browniennes.

3.5.3 Lemme d' Itô pour un Mouvement Brownien

Le prix d'une option est fonction du prix du sous-jacent et du temps. La connaissance de la fonction de 2 variables suivant des processus stochastique est, à cet effet, très importante pour l'évaluation des options. Le lemme d'Itô (1951) [19] est la base du calcul stochastique. Supposons que X est une variable stochastique suivant le processus d'Itô défini par :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \quad (3.2)$$

avec dz suivant un processus de Wiener – Levy et a et b sont des fonctions de x et du temps t . Ce processus peut s'écrire, également, sous la forme :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)\sqrt{dt}U \quad (3.3)$$

Où U est une variable aléatoire normale centrée réduite.

Considérons le développement en série de Taylor de la fonction $(x,t) \rightarrow G(x,t)$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 \quad (3.4)$$

A l'ordre dt , on a :

$$dx^2 = \left(a(x,t) dt + b(x,t) \sqrt{dt} U \right)^2 \approx b^2 dt U^2 \quad (3.5)$$

avec $U^2 \rightarrow \chi^2(1)$ on a, donc, $E(U^2) = 1$ et $V(U^2) = 2$ d'où l'on a $E(dx^2) \approx b^2 dt$ et $V(dx^2) \approx 2b^4 dt^2$.

A l'ordre dt , on peut considérer que $V(dx^2) \approx 0$ et que dx^2 se comporte comme une constante tel que : $dx^2 = b^2 dt$. Par ailleurs, le produit de dX par dt est donné par l'équation suivante :

$$dx dt = \left(a(x,t) dt + b(x,t) \sqrt{dt} U \right) dt = a dt^2 + b dt^{\frac{3}{2}} \quad (3.6)$$

On peut donc, considérer qu'à l'ordre dt ce produit est nul : $dx dt \approx 0$. Par conséquent, la différentielle de la fonction G peut donc s'écrire sous la forme :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \quad (3.7)$$

Soit, en remplaçant dx par son expression, dans l'équation (3.7), on obtient l'expression (3.8) de la différentielle d'une fonction G du temps t et d'une variable d'état x :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (3.8)$$

Cette équation est, l'application du Lemme d'Itô à une fonction du temps.

3.6 Equations différentielles stochastiques et Mouvement Brownien

Une équation différentielle stochastique (*EDS*) est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire, qui se présente à différents types. Dans la résolution de cette équation, quelques difficultés surgissent quand on cherche à définir l'intégrale d'un élément différentiel dX obéissant à une *EDS*, c'est-à-dire à définir une intégrale stochastique d'Itô. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions nécessaires sur les coefficients, l'équation différentielle stochastique a une solution unique, pour l'évaluation d'un prix d'une option.

Etant donné un mouvement Brownien standard (W_t) , un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Posons alors la question : existe-t-il un processus (X_t) qui vérifié :

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t \text{ et } X_0 = x_0? \quad (3.9)$$

La réponse nécessite la définition (3.13) ainsi que le théorème (3.15) suivant :

Définition 3.13. [18] Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite (globalement) lipchitzienne s'il existe $K \geq 0$ tel que $|f(y) - f(x)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.14. [18]

- Si f est lipchitzienne, alors f est uniformément continue (et donc continue) sur \mathbb{R} .
- Si f est continûment dérivable et f' est bornée, alors f est lipchitzienne. En effet :

$$|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y f'(z)dz \leq \sup_{z \in \mathbb{R}} |f'(z)| \cdot |y - x|.$$

Théorème 3.15. [18] Soit $(W_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien standard converge presque sûre à une filtration $(F_t, t \in \mathbb{R}_+)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions lipchitziennes. Alors il existe un unique processus $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ continu et adapté à $(F_t, t \in \mathbb{R}^+)$ tel que

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s) ds + \int_0^t g(X_s) dW_s \quad P.s \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$$

De plus, $E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s^2\right) < \infty$ pour tout $T > 0$.

- On appelle $f(X_t)$ le terme de dérivé de l'équation et $g(X_t)$ son terme de diffusion.

3.6.1 Simulation d'une équation différentielle Stochastique

Il existe de nombreuses méthodes, certaines très sophistiquées, pour simuler la solution d'une équation différentielle stochastique. Nous présentons ici la méthode d'Euler [20] dont le principe est le suivant :

Considérons une équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Où

- $\mu(t, x)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d ,
- $\sigma(t, x)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d ,
- $\{W_t, t \geq 0\}$ désigne le Mouvement Brownien standard dans \mathbb{R}^d .

Sans perte de généralité, on peut supposer que $d' \leq d$. Par définition, une solution de l'équation (3.7) sur l'intervalle $[0, T]$ est un processus stochastique $\{X(t); t \in [0, T]\}$ à trajectoire continue, vérifiant pour tout $t \in [0, T]$, la relation.

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW_s \quad (3.11)$$

Où la seconde intégrale est une intégrale stochastique au sens d'Itô. De plus, le processus $\{X(t); t \in [0, T]\}$ doit être adapté au sens où sa valeur à l'instant t est connue exactement si la trajectoire du mouvement brownien entre 0 et t est connue : dans l'évolution de $X(t)$, le hasard ne provient que de mouvement brownien.

On fixe un pas de discrétisation en temps $\Delta t > 0$. On peut alors construire un processus à temps discret $(S_N)_{N \geq 0}$ approchant la solution de l'équation différentielle stochastique à l'instant $N \Delta t$ où $N \geq 0$, en posant :

$$\begin{cases} S_0 = x \\ S_{N+1} - S_N = \mu(S_N) \Delta t + \sigma(S_N) (W_{(N+1)\Delta t} - W_{N\Delta t}) \end{cases} \quad (3.12)$$

Si $X_t^N = S_{(t/\Delta t)}$, $(X_t^N)_{N \geq 0}$ approxime $(X_t)_{t \geq 0}$ au sens suivant :

Théorème 3.16. [20] pour tout $T > 0$ $(\sup |X_t^N - X_t|) \leq C_t \Delta t$, C_t étant une constante dépendant uniquement de T . La loi de la famille $(W_{(N+1)\Delta t} - W_{N\Delta t})$ est identique à celle d'une famille de gaussiennes indépendantes centrées et de variance Δt . Par une suite de simulation, on remplace $(W_{(N+1)\Delta t} - W_{N\Delta t})$ par $g_N \sqrt{\Delta t}$, où $(g_N)_{N \geq 0}$ est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes.

La suite approximante $(S'_N)_{N \geq 0}$ est dans ce cas donnée par :

$$\begin{cases} S'_0 = x \\ S'_{N+1} = S'_N + \mu(S'_N)\Delta t + \sigma(S'_N)g_N\sqrt{\Delta t} \end{cases} \quad (3.13)$$

Où μ est l'espérance mathématique du rendement instantané de l'action, et σ est l'écart type du rendement instantané de l'action. Il est, en outre, estimé de manière identique par tous les investisseurs (appelée volatilité).

3.7 Estimation de la volatilité du rendement du cours d'une action

3.7.1 Estimation de volatilité implicite

La volatilité des rendements, utilisée dans les formules d'évaluation du cours d'un actif sous jacent [19], mesure la vitesse des variations et se révèle être un indicateur de risque. Il existe plusieurs modèles de volatilités parmi lesquels ceux des volatilités historiques et les volatilités implicites. Pour les volatilités historiques, ils dépendent de la durée sur laquelle elles sont mesurées (le plus souvent 20 jours, 30 jours, 100 jours et 200 jours), tandis que pour les volatilités implicites ils dépendent du prix de marché de l'option, de ses caractéristiques et du modèle utilisé.

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode de Newton Raphson [21], pour évaluer la volatilité implicite.

La formule de Black et Scholes pour les options vanilles sont des bijections entre le prix et la volatilité. Il est possible d'utiliser les méthodes numériques pour extraire la volatilité implicite en connaissant le prix de l'option à l'instant t qui est comprise entre $\max(S_t - K e^{-r(T-t)}, 0)$ et S_t . Parmi les deux principales méthodes pour résoudre ce problème : la méthode dichotomie et celle de Newton Raphson, cette dernière est la plus rapide en temps d'exécution, toute fois nécessite une volatilité dérivable.

La mise en œuvre de cette approche nécessite le calcul du vega, c'est à dire. La dérivée du prix de l'option de l'équation (3.14) suivante par rapport à la volatilité.

Nous notons C_t le prix de l'option, S_t le prix de l'action, K le prix de l'exercice, $\tau = T - t$ la durée vie résiduelle, r le taux d'intérêt sans risque, $N(d_i)$ la loi Normale cumulée de d_i pour $i = 1, 2$,

Où :

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\ln(S_t / K) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

On calcul la dérivée de la formule de Black & Scholes suivante (3.14) par rapport à σ :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \quad (3.14)$$

On obtient

$$v_c = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = \frac{S_t \sqrt{\tau} e^{-d_1^2 / 2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.15)$$

Algorithme de Newton -Raphson 3.17. La méthode de Newton- Raphson [21] utilise la tangente de la fonction pour résoudre le problème du type $f(x) = 0$.

On commence par fixer une valeur σ_0 . On note $BS(\sigma)$ le prix d'option calculé à partir de la formule de Black- Scholes.

On a :

$$BS(\sigma) \approx BS(\sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial BS(\sigma)}{\partial \sigma}(\sigma_0)$$

$$BS(\sigma) \approx BS(\sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) v(\sigma_0)$$

On égalise cette expression au prix de l'option C_t observé sur le marché. On aboutit à une meilleure approximation notée σ_1 de la volatilité implicite.

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_0 + \frac{C_t - BS(\sigma_0)}{v(\sigma_0)} \\ \sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C_t - BS(\sigma_n)}{v(\sigma_n)} \end{cases} \quad (3.16)$$

On suppose que la suite ainsi définie converge. Il suffit donc d'implémenter l'algorithme, afin d'obtenir une valeur de σ .

3.7.2 Estimation de la volatilité historique

Pour estimer la volatilité historique du prix d'une option, on doit observer le prix de l'action en question dans des intervalles de temps fixe, on définit alors :

n : Nombre d'observations.

S_i : Le prix de l'action à la fin de $i^{\text{ième}}$ intervalle.

et soit $\mu_i = \log\left(1 + \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}\right) = \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$ pour $i = 1 \dots n$.

S'agissant de l'estimateur $\hat{\sigma}$ de la variance d'une distribution à partir d'un échantillon

comprenant n observations de rentabilité, on a $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu_i - \hat{\mu})^2}$

Où $\hat{\mu}$ est la moyenne des μ_i donc $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$, si on l'on admet qu'il y a environ

250 jours de bourse par an, il vient :

$$\sigma_{an}^2 = 12\sigma_{mois}^2 = 250\sigma_{jour}^2$$

3.8 Mouvement Brownien géométrique

Soit le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ suivant un mouvement Brownien avec drift $\mu \geq 0$ et une variance constante égale à σ^2 . Le processus stochastique, défini par $\{Y_t = e^{X_t}, t \geq 0\}$, est appelé mouvement Brownien géométrique. Ce processus

$\{Y_t, t \geq 0\}$ est donc toujours positif. On dit qu'il suit, à chaque instant t , une loi Log normale dont les paramètres dépendent du temps t , l'espérance et la variance de ce processus peuvent être déduites de celles de la loi Log – normale,

$$\text{On a :} \quad E(Y_t / Y_0 = y_0) = y_0 e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)} \quad \text{et}$$

$$V(Y_t / Y_0 = y_0) = y_0^2 e^{(2\mu + \sigma^2 t)} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

$$\text{La fonction densité de } Y_t \text{ est } g(y) = \frac{1}{y \sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2 t}}, \quad y > 0$$

Ainsi, pour les instants $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables $(Y_{t_2} / Y_{t_1}), (Y_{t_3} / Y_{t_2}), \dots, (Y_{t_n} / Y_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi log- normale.

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu dt + \sigma dZ_t \quad (3.17)$$

3.9 Raisonement risque neutre

Si on considère que le prix du sous-jacent et la valeur de l'option suivent des mouvements Browniens géométriques, tel que :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \rho_s dt + \sigma dZ \\ \frac{dC_t}{C_t} = \rho_c dt + \sigma_c dZ \end{cases} \quad (3.18)$$

Le drift du prix de l'option, ainsi que sa volatilité peuvent être déterminés, à partir du lemme d'Itô (citée dans la section 3.5.1).

La valeur de l'option est indépendante du comportement de l'investisseur face au risque, puisque celle-ci ne figure pas dans l'équation d'évaluation. Aucun des paramètres relatifs à l'attitude de l'investisseur, vis-à-vis du risque, ne figure dans

l'équation d'évaluation. Ainsi, pour simplifier l'évaluation des options, celle-ci se fera dans un monde risque- neutre, où la rentabilité espérée de l'option et celle du sous-jacent est égale au taux d'intérêt sans risque. Autrement dit égaux au taux d'intérêt sans risque.

Si on suppose que ce taux est constant, le raisonnement risque neutre peut s'écrire :

$$\begin{cases} E\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = e^{r(T-t)} \\ E\left(\frac{C_T}{C_t}\right) = e^{r(T-t)} \end{cases} \quad (3.19)$$

Comme $C_T = \text{Max}(S_T - K, 0)$,

On a $C_t = e^{-r(T-t)} E(\text{Max}(S_T - K, 0))$ (3.20)

L'opérateur espérance est relatif à une distribution de probabilité correspondante à la neutralité du risque. Celle- ci est log- normale avec un drift égal au taux d'intérêt sans risque.

Si $f(S_T, S_t)$ désigne la fonction densité de probabilité de transition du prix du sous- jacent sachant le prix du sous- jacent S_t à l'instant t , l'équation (3.17) s'écrit :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} \text{Max}(S_T - K, 0) f(S_T, S_t) dS_T \quad (3.21)$$

En faisant abstraction à la neutralité du risque, la dernière formule nécessitera l'estimation des taux de rentabilité espérés ρ_s et ρ_c , respectivement, du sous-jacent et de l'option.

Ceci nous amène à la formule proposée par Samuelson :

$$C_t = e^{-\rho_c(T-t)} \int_0^{+\infty} \text{Max}(S_T - K, 0) f(S_T, S_t, \rho_s) dS_T \quad (3.22)$$

Où

- $f(S_T, S_t, \rho_s)$ est la fonction densité de transition du prix du sous-jacent correspondante au ρ_s
- Le prix de l'option est actualisé au taux ρ_c .

Les valeurs espérées du sous-jacent et de l'option sont données par les équations :

$$\begin{cases} E_S \left(\frac{S_T}{S_t} / S_t \right) = e^{\rho_s(T-t)} \\ E_C \left(\frac{C_T}{C_t} / S_t \right) = e^{\rho_c(T-t)} \end{cases} \quad (3.23)$$

Où E_S et E_C sont les espérances en considérant les drifts respectivement ρ_s et ρ_c . Ces paramètres ne sont pas faciles à estimer.

Le raisonnement risque neutre est basé sur l'égalité du prix du risque du marché du sous-jacent et de l'option : $\frac{\rho_s - r}{\sigma_s} = \frac{\rho_c - r}{\sigma_c} = \lambda$. Puisque : $\rho_s = \rho_c = r$, ceci implique que le prix du marché du risque est considéré comme nul : $\lambda = 0$, en considérant cette égalité et la distribution de probabilité correspondante aux taux d'intérêt sans risque r ,

on peut écrire que :

$$E\left(e^{-r(T-t)} S_T / S_t\right) = S_t$$

Ceci veut dire que la quantité $e^{-r(T-t)} S_T$ est une martingale qui a, donc, un drift égal à zéro. Cette propriété implique que la connivence de l'historique des cours ne permet

pas de prévoir leurs évaluations dans l'avenir. Une martingale apparaît comme un processus pour lequel l'anticipation rationnelle coïncide avec l'anticipation naïve.

3.10 Formule de Black & Scholes par le raisonnement risque neutre

La formule de Black & Scholes peut apparaître énigmatique au premier abord son interprétation est facilitée par le recours à un argument de neutralité par rapport au risque découvert par Cox et Ross (1976) [13].

Cette argument part de la constatation suivante : le drift réel μ n'apparaît nulle part, ni dans l'équation différentielle ni dans la formule. Or ce paramètre n'est autre que la rentabilité espérée, qui à l'équilibre, dépend des anticipations des investisseurs et de leurs préférences. Dans une telle économie, tous les actifs doivent offrir, par définition, la même rentabilité, celle du taux sans risque. Donc, le titre aura, dans cette économie, neutre au risque, une rentabilité espérée μ , égale à r , et sa valeur à échéance S_T suivra toujours une loi Log normale.

Pour calculer la valeur de l'option C_t , à un instant t , il suffit, de calculer l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance $E(C_T)$. Or, à l'échéance, on a :

$C_T = \text{Max}(S_T - K, 0)$ qui peut s'écrire:

- Si $S_T \leq K$ alors $C_T = 0$.
- Si $S_T > K$ alors $C_T = S_T - K$.

Le procédure d'évaluation en risque neutre, découle uniquement, de la condition d'absence de stratégies d'arbitrage non gagnantes, dans ce cas la formule de Black et Scholes est donnée par :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau_1} N(d_2) \quad (3.24)$$

(Le lecture peut se référé aux ouvrages [3] et [20] pour plus de détaille sur la formule de Black & Scholes).

CHAPITRE 4

SIMULATION MONTE-CARLO

4.1 Introduction

On désigne par le vocable générique de “Méthode de Monté – Carlo ” [22] toute méthode numérique utilisant le tirage de nombres aléatoires. Elle est très utilisée dans de nombreux domaines, en particulier en physique nucléaire, en physique statistique et en statistique. Par ailleurs, elle connaît des variantes en modélisation stochastique financière et en optimisation. Dans ce contexte et pour évaluer le prix d'une option européenne, il existe une formule explicite, dans le cadre du modèle Binomial et celui de Black et Scholes. Lorsque l'on s'intéresse à des modèles plus complexes ou que l'on veut calculer des prix d'options américaines, on ne connaît pas de formule explicite. On a, dans ce cas, le plus souvent recours à des méthodes numériques comme « la simulation ».

Nous allons décrire, dans ce chapitre, une méthode de simulation de certains modèles financiers, cette méthode permet de calculer le prix d'une option pour peu que l'on sache l'exprimer sous forme de l'espérance d'une variable aléatoire que l'on sait simuler. Dans ce cas, la technique de simulation Monte– Carlo sert alors d'écrire rapidement un algorithme pour évaluer cette option.

4.2 Description de la méthode de Monte-Carlo

L'utilisation de la méthode de Monte Carlo [22] nécessite la mise, sous forme d'une espérance de la quantité que l'on cherche à calculer. C'est souvent simple, comme pour le cas du calcul d'intégrale, mais cela peut être plus compliqué, lorsque il s'agit de résoudre une équation parabolique, elliptique ou même un système linéaire.

A l'issue de cette étape, il reste à calculer une quantité de la forme $E(X)$, où X est une variable aléatoire. Pour estimer l'espérance $E(X)$, il convient de savoir simuler une variable aléatoire selon la loi de X . Mathématiquement, toutes les variables aléatoires indépendantes $(X_i, i \geq 1)$ suivent la loi de X .

Informatiquement, on ramène la simulation d'une loi arbitraire à celle d'une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Ce genre de suite aléatoire est souvent fourni dans les langages de programmation : Random, ran, gran..., alors il reste qu'à approximer $E(X)$ par :

$$E(X) \approx \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

On donne par la suite un exemple d'application de la méthode Monte- Carlo, au cas du calcul d'une intégrale, en détaillant, les deux étapes citées précédemment à savoir la : mise sous forme d'espérance et la simulation de la variable aléatoire.

Exemple 3.1. Soit à calculer une intégrale de la forme :

$$I = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d .$$

On pose, $X = f(U_1, \dots, U_d)$ où les U_1, \dots, U_d sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On a :

$$E(X) = E(f(U_1, \dots, U_d)) = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d$$

Par définition de la loi du n génération (U_1, \dots, U_d) . On vient de réaliser la première étape (mise sous forme d'espérance).

Pour la simulation, supposons que $(U_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (obtenue par des appels

successifs à une fonction *random*) et posons $X_1 = f(U_1, \dots, U_d)$, $X_2 = f(U_{d+1}, \dots, U_{2d})$, etc. Alors, la suite $(X_i, i \geq 1)$ est une suite dont toutes les variables aléatoires indépendantes suivent la loi de X et une bonne approximation de I est donnée par

$$\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

4.3 Méthode de Monte- Carlo appliquée en finance

Le principe de la méthode dite Monte-Carlo, appliquée aux problèmes financiers, consiste essentiellement à la simulation des valeurs possibles d'un mouvement Brownien à une date future. Les caractéristiques de cette simulation permettent, à l'aide de la loi des grands nombres et le théorème central limite, d'estimer la valeur moyenne du prix de l'actif à maturité en utilisant un échantillon de variables aléatoires de la loi normale centrée réduite.

La valeur de l'option peut être déterminée par la simulation de Monte- Carlo, dans la mesure, où la valeur de l'option est égale à la valeur actualisée de l'espérance des valeurs de l'option à l'échéance, pour une option européenne alors on peut écrire:

$$C_t = e^{-r(T-t)} E(C_T) \quad (4.1)$$

Ainsi, pour estimer la valeur de C_t , il faut estimer les valeurs de $E(C_T)$. Puisque, le meilleur estimateur de l'espérance est la moyenne empirique, il faut faire M simulations, qui permettent de calculer à chaque fois la valeur de l'option à l'échéance, soit C_T^m la simulation numéro m ($1 \leq m \leq M$). Au bout des M simulations,

$E(C_T)$ sera estimée par la moyenne arithmétique : $\bar{C}_T = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_T^m$

Comme la valeur d'une option européenne, à l'échéance, est égale à sa valeur intrinsèque

$$C_T = \text{Max}(S_T - K, 0) \quad (4.2)$$

Il suffit alors de calculer pour chaque simulation numéro m , la valeur du sous-jacent à l'échéance S_T^m . Ce calcul se fait, en divisant la durée de vie résiduelle de l'option $(T-t)$, en N intervalles du temps, égaux, ayant une durée $\Delta t = \frac{T-t}{N}$ où $N \geq 1$, puis en calculant la valeur de la volatilité et du sous-jacent à la fin de chaque intervalle de temps. Ce dernier calcul se fera en se basant sur les EDS de la valeur du sous-jacent.

Dans ce contexte, nous envisagerons le cas de l'évaluation d'une option d'achat européenne lorsque, pendant toute la durée de vie de l'option, le porteur de l'action sous-jacente ne doit recevoir aucun dividende.

Donc il s'agit de simuler la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (4.3)$$

l'inconnue est le processus X_t . σ représente la volatilité et dW_t est un mouvement Brownien.

Deux procédures de résolution de l'équation (4.3) sont à distinguer. La première consiste à utiliser la forme analytique, la solution est de la forme suivante :

$$X_t = x \exp\left(rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right) \quad (4.4)$$

En simulant le mouvement Brownien par $\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N g_i$.

On obtient :

$$S_t = x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) N * \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N g_i \right) \quad (4.5)$$

On approche toujours X_t par $X_t^N = S_{[t|\Delta t]}$. (comme nous avons déjà vu dans la section 3.6.1).

En général, cette forme analytique (4.5) n'est pas aussi simple et dans ce cas on est obligé de recourir à une approximation de X_t qui correspond à une discrétisation en temps de l'équation (4.3). Cette discrétisation représente la méthode d'Euler aléatoire, qui correspond à la deuxième procédure.

On pose :

$$\begin{cases} S_{N+1} = S_N (1 + r\Delta t + \sigma g_N \sqrt{\Delta t}) \\ S_N = x \end{cases} \quad (4.6)$$

On simule X_t par $X_t^N = S_{[t|\Delta t]}$.

Le prix d'un call est égal à l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale, sous la probabilité risque neutre :

$$C_t = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - K, 0)] \quad (4.7)$$

Cette formule permet de calculer le prix d'une option en simulant un grand nombre de fois la trajectoire des prix de support S_t , le prix du call étant la valeur moyenne actualisée du prix du call obtenu pour chaque trajectoire est alors :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{T,i} - K, 0) \quad (4.8)$$

Où $S_{T,i}$: sont des copies de la variable aléatoire S_T .

Cette simulation convergera vers la solution de l'équation (4.3). L'algorithme suivant permet de calculer le prix de *call* européen avec une simulation de Monte- Carlo.

4.4 Les algorithmes de simulation Monte- Carlo

Les paramètres du modèle :

S_t : le prix de l'action.

C_t : le prix de l'option d'achat.

K : le prix d'exercice ou le prix de levée.

r : le taux d'intérêt sans risque.

T : la date d'exercice (date d'échéance) de l'option.

M : le nombre de simulation.

N : le nombre de discrétisation.

$\Delta t = T / N$: pas de discrétisation.

L'algorithme 4.2: par la forme explicite [19].

1 - Générer un nombre aléatoire $g \rightarrow N(0,1)$, $g = RandG(0,1)$;

2 - Répéter l'étape (1), N fois ;

3 - Calculer $S_T = S \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N g_i\right)$;

4 - Calculer $C = Max(S_T - K, 0)$;

5 - Répéter les étapes (1 à 4), M fois ;

6 - Calculer $\bar{C} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C[i]$;

7 - Le prix de l'option : $C = \bar{C} e^{-rT}$

Cet algorithme convient pour les modèles qui ne dépendent pas la trajectoire des prix du sous jacent.

L'algorithme 4.3 : Par la discrétisation d'Euler [19].

- 1 - $S[0] = S$;
- 2 - Générer un nombre aléatoire $g \rightarrow N(0,1)$, $g = \text{RandG}(0,1)$;
- 3 - $S[i] = S[i-1] * (1 + r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} g)$;
- 4 - répéter les étapes 2 et 3, M fois ;
- 5 - Calculer $C_i = \text{Max}(S_i[M] - K, 0)$;
- 6 - Répéter les étapes 1 à 5, M fois ;
- 7 - Calculer $\bar{C}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C_i[i]$;
- 8 - Le prix de l'option $C_t := \bar{C} e^{-rT}$;

Cet algorithme prend en considération les modèles dépendant de la trajectoire de l'actif sous jacent.

4.5 Convergence et limites de la méthode

4.5.1 La loi forte des grands nombres

Théorème 4.4. [15] Soit (X_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi qu'une variable aléatoire X . On suppose que $E(|X|) < +\infty$. Alors

pour presque tout ω :

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n).$$

Ce théorème impose une limite théorique à la méthode de Monte- Carlo : on ne peut l'utiliser que pour des variables aléatoires intégrables.

4.5.2 Théorème central limite

Théorème 4.5. [15], Soit (X_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 finies. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu).$$

Alors la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale $N(0, 1)$, c'est-à-dire :

$$\forall a, b \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P[a < Z_n < b] = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Dans le théorème central limite, μ est la valeur à estimer. Les n valeurs X_1, \dots, X_n constituent un échantillon de mesures aléatoires indépendantes d'espérance μ . La quantité $(X_1 + \dots + X_n)/n$ est la moyenne empirique de l'échantillon, qui d'après la loi des grands nombres doit converger vers l'espérance μ . Le théorème central limite donne la précision de cette approximation.

Le théorème central limite est utilisé pour des valeurs finies de n . L'idée concrète est, si n est assez grand, la variable centrée réduite Z_n associée à la somme de n variables indépendantes suit approximativement la loi $N(0, 1)$. Si on réalise suffisamment de simulations de Z_n et que l'on trace un histogramme des valeurs obtenues, celui-ci ne sera pas très loin de la courbe $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Pas plus loin en tout cas que si on avait simulé des variables aléatoires de loi $N(0, 1)$. Si Z suit la loi $N(0, 1)$, alors $Y = \sigma Z + \mu$ suit la loi $N(\mu, \sigma)$. On peut aussi dire que pour n assez grand une somme de n variables aléatoires indépendantes suit approximativement une loi normale, dont l'espérance et la variance sont respectivement la somme des espérances et la somme des variances des variables que l'on ajoute. Le problème est de savoir à partir de quelle valeur de n (assez grande), on peut avoir la précision désirée. L'approximation est d'autant meilleure que la loi des X_n est plus symétrique.

4.5.3 Construction d'intervalle de confiance

L'idée de l'estimation par intervalle de confiance est de définir, autour de la moyenne empirique, un intervalle aléatoire (dépendant des n expériences) qui contienne μ avec une forte probabilité. C'est l'amplitude de cet intervalle qui mesure la précision de l'estimation.

Théorème 4.6. [15], Soit (X_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ et variance σ^2 finies. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} - \overline{X}_n^2.$$

Soit α un réel > 0 (petit). Soit z_α le réel > 0 tel que :

$$\int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - \alpha.$$

Posons

$$T_1 = \overline{X}_n - \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \quad T_1' = \overline{X}_n - \frac{z_\alpha \sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}$$

$$T_2 = \overline{X}_n + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \quad T_2' = \overline{X}_n + \frac{z_\alpha \sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\mu \in [T_1, T_2]] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[\mu \in [T_1', T_2']] = 1 - \alpha$$

On dit que les intervalles aléatoires $[T_1, T_2]$ et $[T_1', T_2']$ sont des intervalles de confiance pour μ , de niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$.

4.5.4 Construction d'intervalle de confiance cas de Monté- Carlo

Le nombre M de simulations accomplies dépend de la précision souhaitée. La valeur de chaque option, calculée à la fin de chaque simulation, constitue un tirage d'une variable aléatoire normale. M simulations constituent, donc, M tirages indépendants de la variable aléatoire C_t qui est le prix de l'option. Soit un échantillon de M variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (C_1, C_2, \dots, C_M) , qui sont, les prix de l'option calculés à la fin de chaque simulation. On désigne par μ la moyenne empirique du prix de l'option et par s son écart-type empirique. Les M variables (C_1, C_2, \dots, C_M) sont indépendantes et identiquement distribuées de la variable parente C_t et, donc, elles ont la même moyenne et le même écart-type. La valeur de l'option, calculée par la simulation de Monte Carlo, est : $\bar{C}_t = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_m$ qui suit une loi normale de moyenne $E(\bar{C}_t) = \mu$, de variance $V(\bar{C}_t) = \frac{s^2}{M}$ et, donc, un écart type $\sigma(\bar{C}_t) = \frac{s}{\sqrt{M}}$.

Avec un risque α , notons $f_{1-\alpha}$ le fractile d'ordre $(1-\alpha)$ de la loi normale centrée réduite, on peut écrire : $\mu - f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}} \leq \bar{C}_t \leq \mu + f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}}$.

Ainsi, quand M tend vers l'infini, \bar{C}_t converge vers la moyenne μ de la valeur de l'option qu'on cherche à estimer. La précision de ce calcul est $f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}}$.

Il y'a un compromis à faire entre la précision et le temps de calcul [19]. En effet, l'efficacité de l'estimateur est : $Eff(\bar{C}_t) = \frac{1}{V(C_t) * t C_t} = \frac{M}{s^2 * t C_t}$ avec $t C_t$ est le temps de convergence de l'algorithme.

4.5 Test de l'algorithme de simulation de Monte- Carlo en référence au modèle Black & Scholes

En testant l'algorithme de simulation sur le modèle de Black & Scholes, c'est à dire en considérant la drift risque- neutre et on vérifie, empiriquement, la convergence de l'algorithme vers le modèle de Black & Scholes.

Dans cette étude numérique on utilise la méthode de Monte- Carlo pour évaluer une option d'achat européenne. Le prix de l'option d'achat peut être représenté par :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{T,i} - K, 0) \quad (4.9)$$

On considère, pour cette simulation une option où les valeurs des paramètres sont fixées comme suit :

- 1 - $S_0 = 100$ le prix d'actif initial.
- 2 - $\sigma = 25\%$ la volatilité.
- 3 - $r = 5\%$ le taux d'intérêt sans risque.
- 4 - $K = 100$ le prix d'exercice.
- 5 - $T = 1$ an la date d'échéance de l'option.

Notons que la valeur du marché de l'option C_t est égale à celle donnée par la formule de Black & Scholes ($C_{BS} = 12.3359$), puisqu'on considère, ici, la volatilité implicite. Ensuite on prend le nombre de simulations M égale au nombre de discrétisations N , dans toutes les applications numériques.

La série de la valeur de l'option, générée par la simulation de Monte- Carlo, ainsi que celle relative au modèle de Black & Scholes, sont représentées dans la figure 4.1:

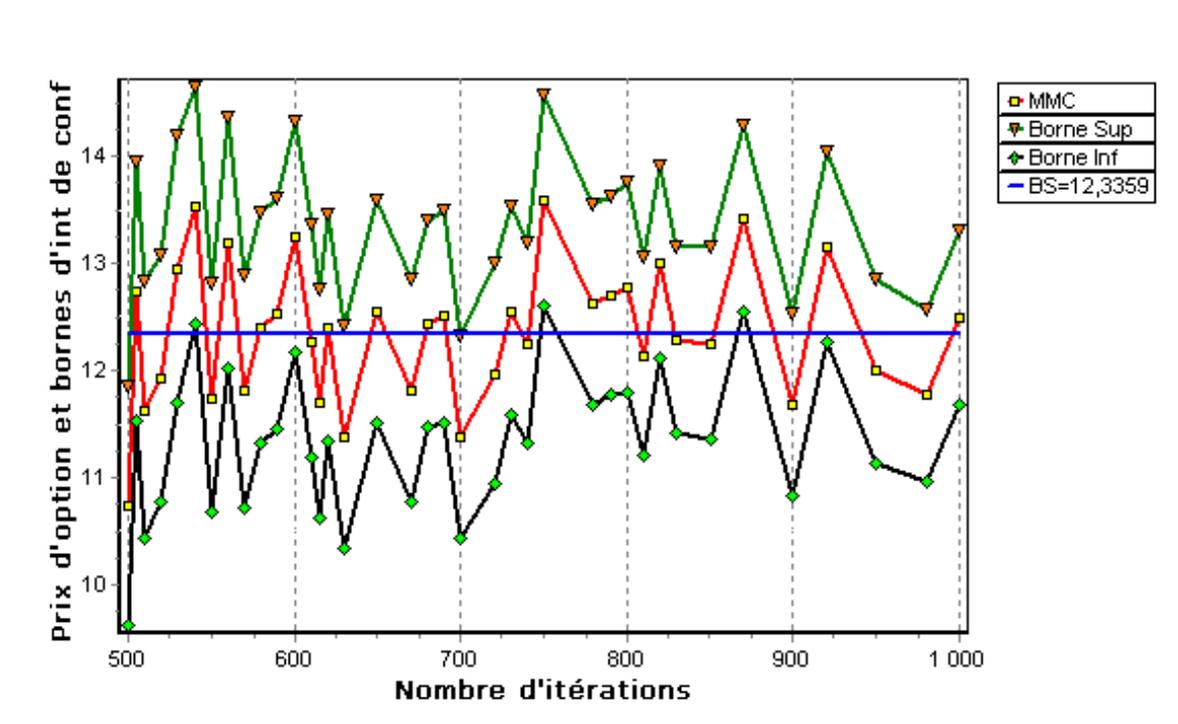


Figure 4.1 : Convergence de l'algorithme de la simulation Monte- Carlo vers la formule de Black & Scholes.

En faisant une simulation sur le nombre de simulation de Monte- Carlo M , en prenant comme référence le modèle de Black & Scholes, on obtient les résultats, en terme de précision et de temps de convergence illustrés dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 : Convergence de la méthode Monte- Carlo.

La taille de l'échantillon M	Valeur d'option d'achat	Ecart absolu avec le BS	Temps d'exécution en seconde	Intervalle de confiance
50	13.79232	1.456335	00	[13.6384 , 13.94620]
100	13.03732	0.70134	00	[12.9242 , 13.14970]
160	12.85786	0.521881	00	[12.77564 , 12.9400]
600	12.11080	0.22517	1	[12.06657 , 12.1550]
1200	12.2287	0.10718	4	[12.1994 , 12.25813]
5000	12.12854	0.20744	48	[12.1138 , 12.14324]
10000	12.42109	0.085102	139	[12.4104 , 12.43162]

A la lumière de ces résultats, on remarque que lorsque le nombre de simulations est plus élevé, alors l'écart en valeur absolue, est plus faible, pour un temps de convergence donné.

A titre d'exemple, pour $M = 5000$, on consomme 48 s pour avoir une précision de 0.20744 au niveau de confiance 95% alors que $M = 10000$, consomme 139 s pour atteindre une précision de 0.085102 au niveau de confiance 95%.

On reprend toujours le même exemple, on remarque que, les amplitudes au intervalle de confiance, diminuent (la précision augmente) avec l'augmentation du nombre de la simulation de Monte Carlo, comme le montre le graphique suivant. Cette précision donne l'efficacité à la valeur de prix d'option estimée par MMC.

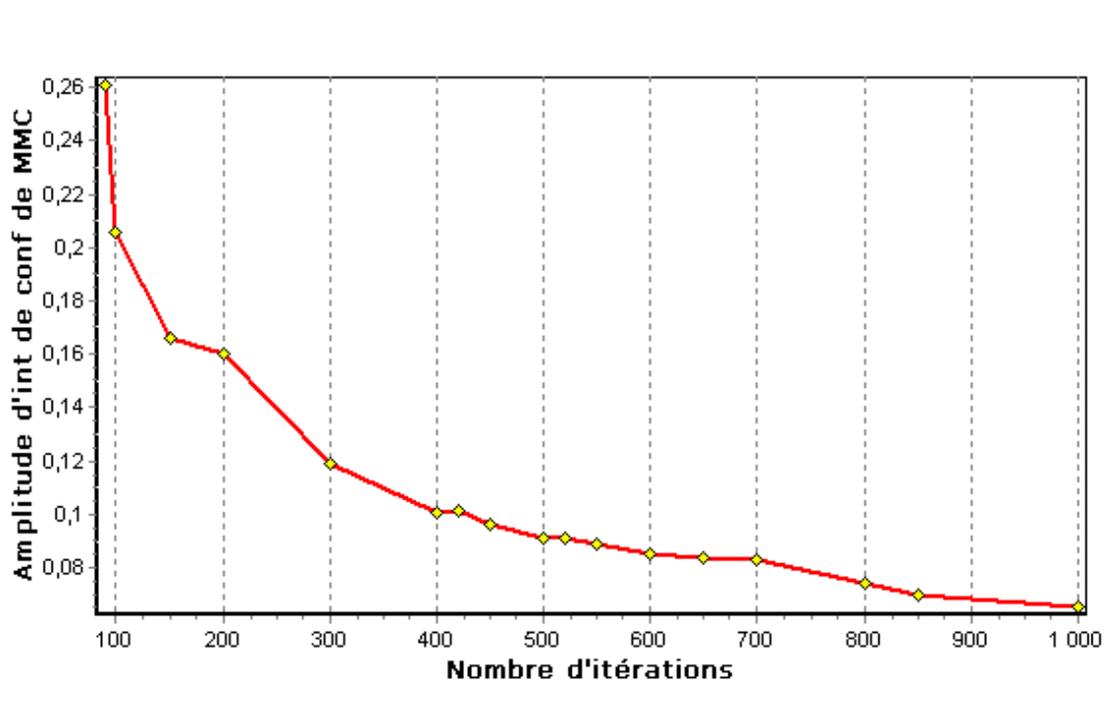


Figure 4.2 : Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC en fonction du nombre de simulations.

Dans la figure 4.3, les oscillations de la courbe de l'erreur d'estimation diminuent en fonction d'augmentation du nombre de simulation, ce qui explique la convergence de MMC vers la valeur théorique de Black et Scholes.



Figure 4.3 : Ecart avec le Modèle de Black & Scholes.

4.7 Accélération de la convergence de MMC

Il existe plusieurs techniques d'améliorer l'efficacité de la simulation de Monte Carlo, qui pour un temps de calcul donné permettent de réduire la variance et, donc, améliorer la précision. On peut citer, à cet effet, les techniques des variables antithétiques (MMCA), fondant sur l'idée que l'ordinateur, génère toujours un biais dans le même sens, en générant les valeurs de la loi uniforme. Cette technique consiste, donc, à faire les calculs de la valeur de l'option C_t^+ pour les valeurs générées de la loi normale centrée réduite (Z_i), les calculs de C_t^- pour les valeurs ($-Z_i$). En considérant la valeur de C_t , comme moyenne de C_t^+ et C_t^- , on divise la variance par 2, pour un temps de calcul donné.

Les variables aléatoires dites antithétiques (opposées) dont la corrélation est de -1, c'est-à-dire pour chaque scénario du prix de l'action, on aura les deux équations suivantes :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t}}$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t - \sigma Z \sqrt{\Delta t}}$$

La même variable aléatoire Z est d'abord introduite avec un signe positif pour calculer S_t , puis avec un signe négatif. Il en résulte une corrélation de (-1) entre les deux mouvements Browniens, ce qui accélère, pour un nombre d'itérations donné, la convergence vers le vrai prix de l'option :

En faisant une simulation sur le nombre de discrétisation N et le nombre de simulation de Monte Carlo avec et sans variables antithétiques pour un taille de échantillon de taille M , avec comme référence le modèle de Black & Scholes, on obtient les résultats illustrés dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 : Convergence de la méthode Monte- Carlo avec et sans variables antithétiques.

Simulation Monte- Carlo sans variables antithétiques				Simulation Monte -Carlo avec variables antithétiques		
La taille de l'échantillo M	Ecart absol avec le BS	Temps d'exécuti En seconde	Intervalle De Confiance	Ecart absolu avec le BS	Temps d'exécu En second	Intervalle De Confiance
100	0.701	00	[13.638, 13.946]	0.5136	00	[11.758, 11.885]
600	0.225	01	[12.066, 12.155]	0.2984	03	[12.022, 12.052]
1000	0.107	03	[12.199, 12.258]	0.2611	07	[12.063, 12.085]
5000	0.155	48	[12.476, 12.506]	0.0474	100	[12.379, 12.387]
10000	0.051	139	[12.410, 12.431]	0.0051	360	[12.326, 12.335]
20000	0.018	600	[12.310, 12.324]	0.0008	1380	[12.332, 12.334]
30000	0.010	852	[12.324, 12.327]	0.0004	1620	[12.333, 12.335]

On remarque au lecteur du tableau 4.2 que la simulation de Monte- Carlo avec des variables antithétiques converge mieux vers la valeur théorique, si elle est comparée par Monté- Carlo sans variables antithétiques, malheureusement que le temps d'exécution de l'algorithme augmente en fonction d'augmentation du nombre de simulations.

La figure 4.3 montre comment le prix du call européen converge vers sa valeur en fonction du nombre d'itérations : l'un avec variables antithétiques (MMC avec v.ant) et l'autre, sans variables antithétiques (MMC sans v.ant). La figure révèle que les fluctuations du prix de l'option relativement à son prix théorique sont beaucoup plus faibles lorsque on recourt à des variables antithétiques.

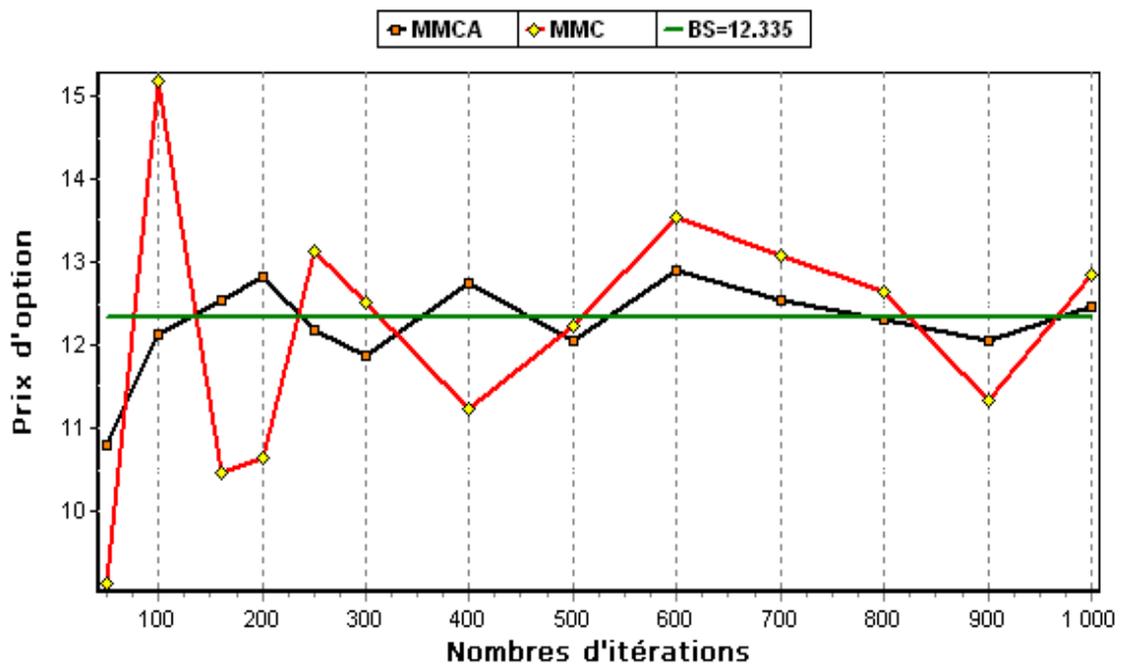


Figure 4.3 : Convergence du prix de l'option en fonction du nombre d'itérations avec et sans variables antithétiques.

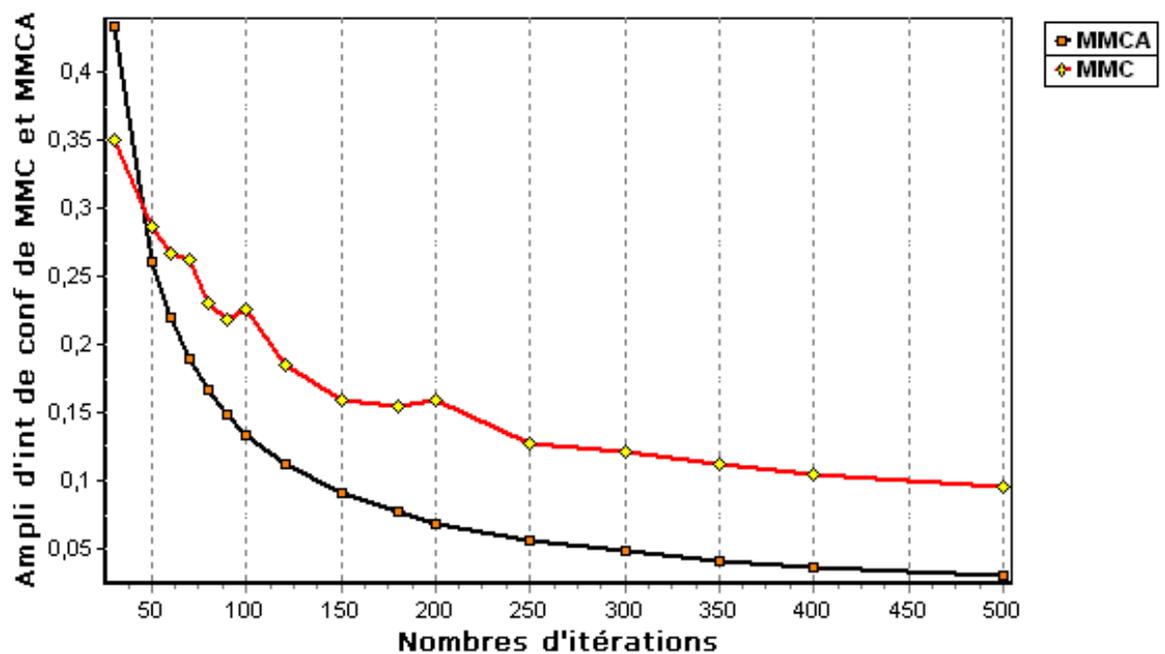


Figure 4.4 : Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC et MMCA en fonction de nombre de simulations

Dans la figure (4.3) la précision de MMCA est meilleure que MMC.

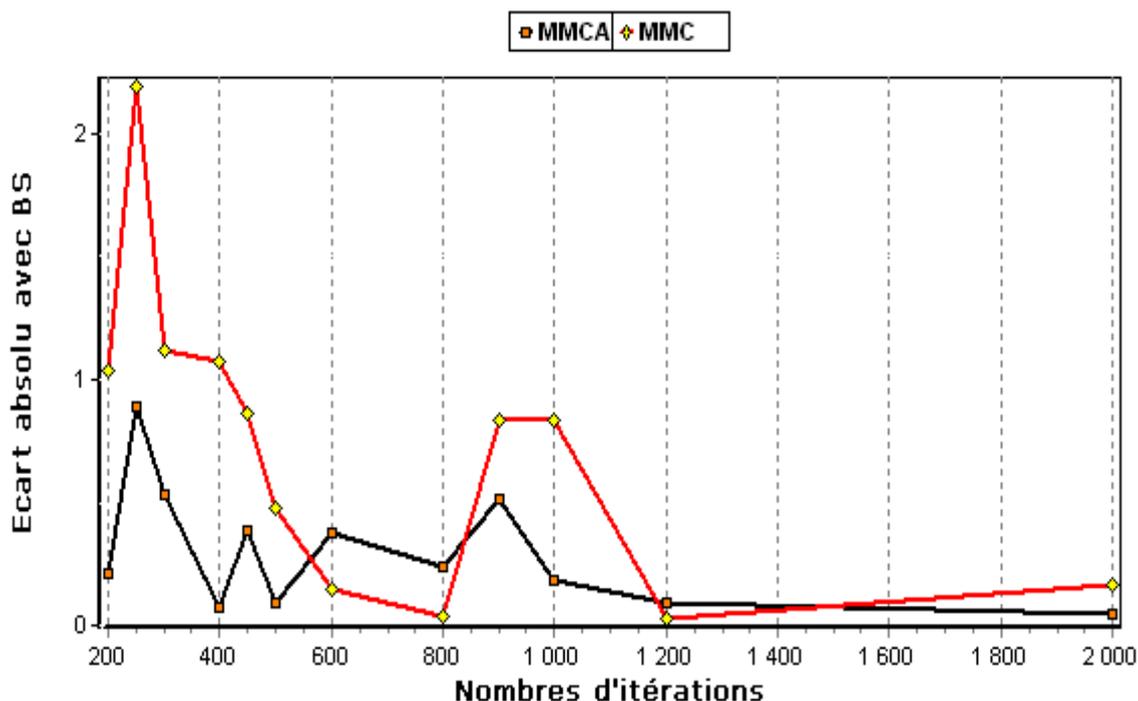


Figure 4.5 : Ecart absolu de MMC et MMCA avec le modèle de Black & Scholes.

La figure 4.5 montre que les valeurs du call générées par la MMCA sont mieux centrées sur le prix théorique de l'option.

La méthode de Monte- Carlo avec variables antithétiques permet de réduire la variance, et, donc, améliorer la précision, malheureusement, la réduction de la variance s'accompagne en général d'une augmentation du temps d'exécution de l'algorithme.

La simulation de type quasi Monte- Carlo [23] est un analogue déterministe des techniques de Monte- Carlo où les suites pseudo aléatoires sont remplacées par des suites à discrétion faible se répartissant plus rapidement uniformément sur le domaine d'étude, permettant ainsi un meilleur échantillonnage. Cette technique fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 5

METHODES QUASI MONTE – CARLO

5.1 Introduction

Dans le but d'améliorer la vitesse de convergence des estimés de Monte-Carlo, certains auteurs [23, 24, 25] proposent d'utiliser les méthodes quasi-Monte-Carlo pour tarifier les options sur actifs sous-jacents. Ces méthodes sont supposées être plus efficaces et produisent des estimés beaucoup moins oscillants que ceux obtenus par les simulations standards de Monte-Carlo. En effet, pour améliorer la précision des estimés, l'approche quasi Monte-Carlo (MQMC), utilise une suite de nombres quasi aléatoires choisie judicieusement. Ces séquences sont utilisées de façon à générer des échantillons représentatifs des distributions de probabilités que nous tentons de simuler.

Ainsi, plusieurs auteurs [23, 24, 25] proposent, l'utilisation de la méthode quasi Monte-Carlo en appliquant des séquences à discrédance faible, pour évaluer les options sur actifs sous jacents. Il s'agit de remplacer l'intégrale définie sur le domaine \mathbb{R}^s par une nouvelle intégrale, basée sur une séquence à discrédance faible, définie sur le domaine $[0, 1]^s$, où s représente le nombre d'actifs sous jacents. La motivation pour l'utilisation de la méthode quasi Monte-Carlo, est d'augmenter le ratio de convergence des simulations classiques de Monte Carlo qui est de l'ordre $1/\sqrt{N}$. L'erreur d'intégration de la méthode quasi Monte-Carlo est proportionnelle à la discrédance, qui mesure la non uniformité de la séquence utilisée.

Les résultats de différents travaux [23, 24, 25], montrent que la méthode quasi Monte-Carlo converge beaucoup plus rapidement que les simulations conventionnelles de Monte-Carlo. Toutefois, cette différence dans la vitesse de

convergence diminue lorsque le nombre d'actifs augmente. La séquence de Van Der Corput [20] est une séquence à discrédance faible, facile à implémenter.

Dans l'optique, d'appliquer les techniques d'accélération de convergence, nous présentons la méthode des suites à discrédance faible [26].

5.2 Suites à discrédance faible

Nous avons utilisé les générateurs de nombres pseudo aléatoire qui calculent les intégrales par la méthode Monté- Carlo. Une autre façon de procédé consiste à renoncer au caractère « aléatoire » des tirages et de tirer des points de façon « plus ordonnée ». On parle alors des suites à discrédance faible.

La définition suivante formalise la notion de suite équirépartie pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in [0, 1]^s$ et $b = (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^s$ on note $a \leq b$ si $a_i \leq b_i$ pour tout $i = 1, \dots, s$ et $[a, b] = \{x \in [0, 1]^s : a \leq x \leq b\}$, on note enfin 0 (respectivement. 1) le vecteur de IR^s dont toutes les composantes sont nulles (respectivement. égales à 1).

Définition 5.1. Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie dans $[0, 1]^s$ si pour tout $a = (a_1, \dots, a_s) \in [0, 1]^s$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum 1_{\{x_k \in [0, a]\}} = \prod_{i=1}^s (a_i) = \Pi(a).$$

La discrédance de la suite $(x_n, n \geq 1)$ est

$$D_n^*(x) = \sup_{a \in [0, 1]^s} \left| \frac{1}{n} \sum 1_{\{x_k \in [0, a]\}} - \Pi(a) \right|.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, $F_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{x_k \in [0, a]\}}$ est la fonction de répartition de la

probabilité empirique $\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_n}$ calculée au point a .

Afin de montrer que la discr ance d'une suite  quidistribu e converge vers 0, nous établissons le lemme suivant qui donne des conditions suffisantes pour qu'une suite F_n de fonction de répartition converge uniformément vers Π .

Lemme 5.2. [20] Soit $(\mu_n, n \geq 1)$ une suite de probabilité sur la tribu des boréliens de $[0,1]^s$ et $(F_n, n \geq 1)$ la suite des fonctions de répartition des μ_n telle que : $F_n \rightarrow \Pi$ dans $L^1 \in ([0,1]^s, \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Alors la suite F_n converge uniformément vers Π .

Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]^s$ et $(F_n, n \geq 1)$ la suite des fonctions de répartition empiriques associée définie par :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(U_i), \quad \forall t \in [0,1]^s$$

Le théorème central limite montre que pour tout $t \in [0,1]^s$, $\sqrt{n}[F_n(t) - \Pi(t)]$ converge en loi vers une gaussienne $N(0, \Pi(t) - \Pi(t)^2)$. De plus le théorème central limite vectoriel montre que pour tout $(t_1, \dots, t_s) \in [0,1]^s$, le vecteur $(\sqrt{n}[F_n(t_i) - \Pi(t_i)])_{i=1, \dots, s}$ converge en loi vers une gaussienne $N(0, \Pi(t) - \Pi(t)^2)$. Pour $s = 1$, la covariance du processus gaussien centré Z est $E(Z_m, Z_t) = m \wedge t - mt$ pour tout $m, t \in [0,1]$, c'est-à-dire la covariance du pont Brownien $W_t - tW_1$ où $(W_t, t \geq 0)$ désigne un Brownien standard.

Le théorème suivant montre que la suite (F_n) des fonctions de répartition empiriques de la loi uniforme converge vers Π : cette version du théorème de Kolmogorov- Smirnov est due à Doob- Donsker [27].

Théorème 5.3. [20] Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]^s$ et $(F_n, n \geq 1)$ la suite des fonctions de répartition empiriques associée. On note

$$D_\infty^*(n) = \sup\{F_n(t) - \Pi(t) : t \in [0,1]^s\}$$

1) Si $s = 1$ et si $(W_t, t \in [0,1])$ désigne un mouvement Brownien standard réel.

$$\sqrt{n} D_\infty^*(n) = \sup\{F_n(t) - \Pi(t) : t \in [0,1]^s\} \text{ en loi.}$$

De plus, pour tout $\lambda > 0$:

$$P\left(\sup_{t \in [0,1]} |W_t - tW_1| \leq \lambda\right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2}$$

2) Si $m > 1$. il existe un processus gaussien centré réel $(Z_t, t \in [0,1]^s)$ à trajectoires continues de covariance :

$$E(Z_m, Z_t) = \Pi(m \wedge t) - \Pi(m)\Pi(t) \quad m, t \in [0,1]^s$$

et la suite $\sqrt{n} D_\infty^*(n)$ converge vers $\sup\{Z_t : t \in [0,1]^s\}$.

Le théorème suivant donne la vitesse de convergence « maximale » de $D_\infty^*(n)$ vers 0, cette loi du logarithme itéré est due à Chung et Kiefer [20].

Théorème 5.4. [20] Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]^s$, alors presque sûrement :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{\ln(\ln(n))}} D_\infty^*(n) = 1.$$

L'intérêt de la discrédance d'une suite pour des problèmes d'approximation d'intégrale réside dans le résultat suivant pour les fonctions à variation finie (qui sont

intégrables au sens de Riemann). Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in [0,1]^s$, notons $\bar{x} = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_s)$ le symétrique de x par rapport au centre de l'hyper cube $[0,1]^s$ et pour toute fonction $f : [0,1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ notons $\bar{f}(x) = f(\bar{x})$.

Définition 5.5. Une fonction $f : [0,1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation finie s'il existe une mesure à variation finie μ sur l'ensemble des boréliens de $[0,1]^s$, dont le support est contenu dans $[0,1]^s \setminus \{0\}$, telle que pour tout $x \in [0,1]^s$

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(0) + \mu([0, x]).$$

Cette mesure μ est unique et la variation de f , notée $V(f)$ est à la variation totale $\|\mu\|$ de μ . Le théorème suivant de *Koksma* et *Halawka* [20] relie l'approximation de l'intégrale de f le long d'une suite (X_n) à la discrétion de la suite.

Théorème 5.6. [20] Soit $f : [0,1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation finie et $x = (x_n, n \geq 1)$ une suite équirépartie sur $[0,1]^s$. Alors pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| \leq V(f) D_n^*(x)$$

Ceci entraîne immédiatement :

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| \leq D_n^*(x) \|\bar{\mu}\| = D_n^*(x) \|\mu\|$$

Il est donc important de disposer de suites de discrétion aussi petite que possible.

(La preuve de ces théorèmes est donnée dans [20]).

Définition 5.7. On dit qu'une suite $(x_n, n \geq 1)$ à valeurs dans $[0,1]^s$ est à discrétion faible si la discrétion $D_\infty^*(n)$ d'une suite aléatoire $(U_n, n \geq 1)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]^s$.

On peut prouver que la discrédance $D_{\infty}^*(n)$ d'une suite quelconque vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n D_n^*(x)}{\ln(n)^{\frac{s}{2}}} \geq C_s$$

Où $C_s > 0$ est une constante ne dépendant que de la dimension s . Les meilleures discrédances connues sont asymptotiquement $O\left(\frac{\ln(n)^s}{n}\right)$ et cette discrédance est optimale. Nous indiquons quelques exemples de suites à discrédance faible, les plus courantes sont les suites de Van Der Corput.

L'étude de l'équirépartition des séquences remonte au début du vingtième siècle, avec les travaux de Weyl sur l'équirépartition dans l'intervalle unité. Une autre contribution majeure apportée à cette théorie est la conjecture énoncée en 1935 par van der Corput.

Conjecture 5.8. [28] si $\{x_1, x_2, \dots\}$ est une suite de nombres réels dans l'intervalle $[0,1]$, alors, pour tout entier k , il existe un entier n et deux intervalles de même taille, tels que le nombre d'éléments de la séquence $\{x_1, x_2, \dots\}$ contenus dans ces deux intervalles diffère d'au moins k .

Cette conjecture exprime l'idée qu'aucune suite ne peut être arbitrairement bien distribuée ou, de manière équivalente, qu'une certaine irrégularité est nécessairement présente dans toute séquence de nombres réels. Elle a été démontrée pour la première fois en 1945 par van Aardenne–Ehrenfest.

5.2.1 Suite de Van Der Corput

Soit b un entier strictement supérieur à 1. Pour tout nombre entier positif n on note a_0, \dots, a_r les coefficients de la décomposition de n en base b . $n = a_0 + a_1 b + \dots + a_r b^r$. $a_r > b$, $0 \leq a_i < b$ pour $i=0, \dots, r$. Ainsi on définit la suite de

Van der Corput en base b par $\phi_b(n) = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_r}{b^{r+1}}$. La dispersion des points de cette suite sur l'hyper cube unité en base $b=2$, illustrer par la figure 5.1 suivante :

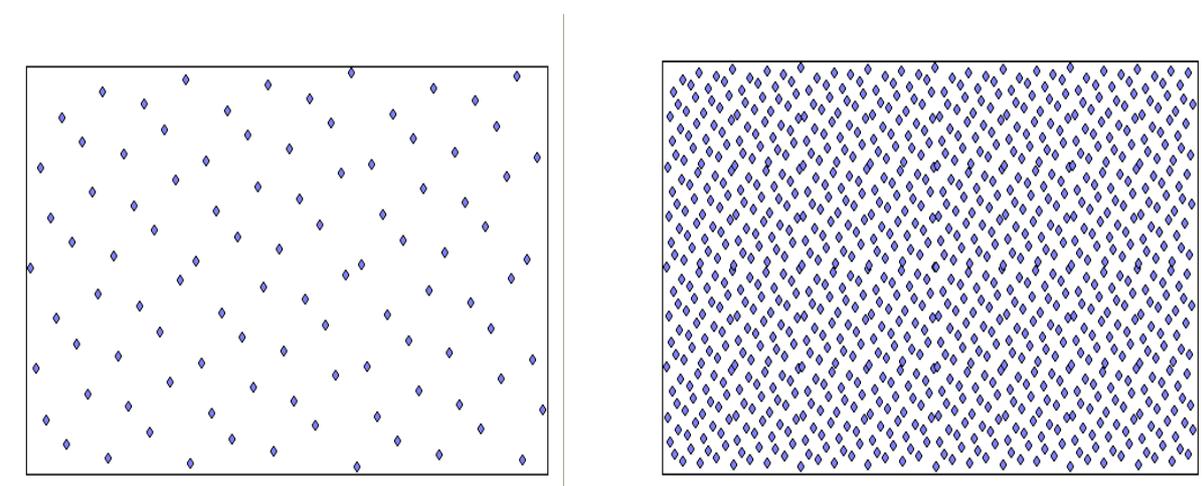


Figure. 5.1 : La dispersion de 100 et 1000 points de la suite de van der Corput sur l'hyper cube unité en base 2.

5.2.2 Algorithme de construction d'une suite de Van Der Corput

- 1 - $X[0] = 0$; et b : un nombre premier naturel représente la base ;
- 2 - Posons $m = i$, $f = 0$, $ib = 1/b$;
- 3 - Tant que $m > 0$ Calculer :

$$m_1 = \text{int}(m / b).$$

$$e = m - m_1 * b.$$

$$f = f + ib * e$$

- 4 - Calculer : $ib = ib / b$,

- 5 - Posons : $m = m_1$,

5.2.3 Exemple numérique sur les suites de Van Der Corput

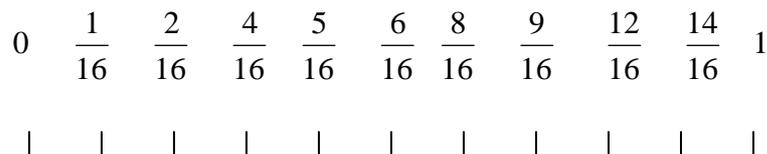
Soit la suite $(n)_{n \geq 1}$. Chaque terme de n peut être exprimé dans la base b par :

$$\phi_b(n) = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_r}{b^{r+1}} \quad (5.1)$$

Pour $(n)_{n=3,\dots,12} = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ dans la base $b=2$ on a les valeurs de la suite à discrédance faible suivantes :

$$\left(\frac{8}{16}, \frac{4}{16}, \frac{12}{16}, \frac{2}{16}, \frac{10}{16}, \frac{6}{16}, \frac{14}{16}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16} \right)$$

Envisageons la dispersion de cette suite sur l'intervalle $[0,1]$ comme suit :



5.2.4 Les (t, s) -suites et les (t, m, s) -réseaux

Définition 5.9. un (t, m, s) -réseau [28] en base b est un ensemble de b^m points dans le cube unité $[0,1]^s$, pour lequel la discrédance est nulle pour une certaine famille d'intervalles de $[0,1]^s$. Une (t, s) -suite en base b est une suite dont certains segments de longueur b^m (avec $m \geq t$) sont des (t, m, s) -réseaux en base b .

Ces concepts ont été introduits de manière générale par Niederreiter. D'un point de vue pratique, la notion de réseau est importante, car elle fournit des garanties d'équirépartition pour un nombre fini de points. Il est clair que, pour m, s , et b fixés, plus la valeur t est petite, plus les propriétés d'un (t, m, s) -réseau en base b sont meilleures. Les suites de van der Corput en base b sont des $(0,1)$ -suites en base b .

Définition 5.10. Un intervalle E dans une base b défini sur l'hyper cube unité $[0,1]^s$ est dit élémentaire [6] si :

$$E = \prod_{j=1}^s \left[\frac{a_j}{b^{d_j}}, \frac{a_j + 1}{b^{d_j}} \right) \quad (5.2)$$

Avec $d_j \geq 0, 0 \leq a_j < b^{d_j}$ et a_j, d_j sont des nombres entiers.

La division d'un intervalle élémentaire E définie sur un hyper cube unité $[0,1]^s$ en sous

intervalles identiques des longueurs $1/b^{d_j}$ ayant de volume $b^{-\sum_{j=1}^s d_j}$.

Définition 5.11. Une suite $X_n \in [0,1]^s$ est dite réseau (t, s) dans la base "b" si pour chaque $k \geq 0$ et $m > t$, la suite $X_{kb^m}, \dots, X_{(k+1)b^m}$ est écrite sous la forme (t, m, s) dans la base b . Une autre définition de cette suite présentée par Owen (1997a) est définie comme suit :

Définition 5.12. Soient (s, m, t, b, λ) des nombres entiers avec $s \geq 1, m \geq 0$, $0 \leq t \leq m, b \geq 2$ et $1 \leq \lambda < b$. Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de λb^m points est écrite sous la forme d'un réseau (λ, t, m, s) dans la base b si chaque intervalle élémentaire dans la base b du volume b^{t-m} contient λb^t points.

Dans cette définition, il est facile de voir que le réseau (t, m, s) dans la base b est un réseau $(1, t, m, s)$ dans la base b . En outre si $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite (t, s) dans la base b alors $x_{kb^{m+1}+1}, \dots, x_{kb^{m+1}+\lambda b^m}$, est un réseau (λ, t, m, s) dans la base b pour les nombres entiers $k > 0$ et $1 \leq \lambda < b$.

5.2.5 L'uniformité d'une suite à discrédance faible

En 1967 Sobol [29] décrit le réseau (t, m, s) et la suite (t, s) dans la base 2. Faure en 1982 [30] a fourni une construction de réseau $(0, m, s)$, et la suite $(0, s)$ dans une base principale supérieur ou égal à s . Niederreiter en 1987 [31] généralise la construction de la suite de Sobol aux bases arbitraires.

Pour envisager l'uniformité d'une suite $(0, s)$ dans la base b , on utilise la construction de Faure [30] et pour la simplicité, nous considérons la suite $(0, 2)$ de sorte que les points puissent être tracés sur un graphe, et par conséquent la distribution des points dans $[0,1]^2$ par définition $X_{kb^{m+1}}, \dots, X_{(k+1)b^m}$. Pour chaque $k \geq 0$ et $m > t$ on définit le réseau $(0, m, 2)$ dans la base 2. Plus spécifiquement, nous considérons $k = 8$ et $m=3$. Le réseau résulte est donc $(0, 3, 2)$ dans la base 2 avec $2^3=8$ éléments. La théorie de ces réseaux indique que chaque intervalle élémentaire

dans la base 2 (ou rectangle dans ce cas) avec le secteur 2^{-3} contient seulement un point.

Les rectangles sont de la forme :

$$\left[\frac{a_1}{2^{d_1}}, \frac{(a_1+1)}{2^{d_1}} \right) \times \left[\frac{a_2}{2^{d_2}}, \frac{(a_2+1)}{2^{d_2}} \right) \quad (5.3)$$

Avec a_i, b_i sont des nombres entiers tels que $d_i \geq 0$, et $0 \leq a_{ii} < 2^{d_i}$ pour $i = 1, 2$.

Une autre contrainte d_1, d_2 peut être écrite comme suit :

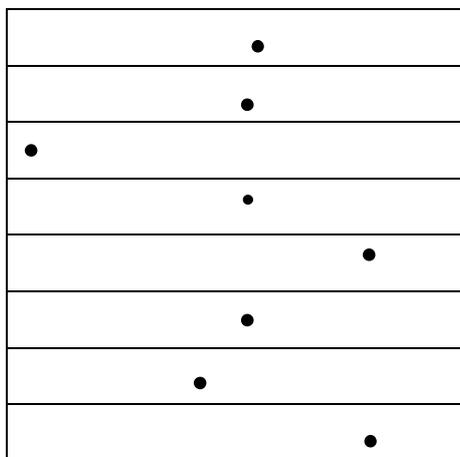
$$2^{-(d_1+d_2)} = 2^{-3} \quad (5.4)$$

pour les nombres entiers $d_1, d_2 \geq 0$. Ceci implique

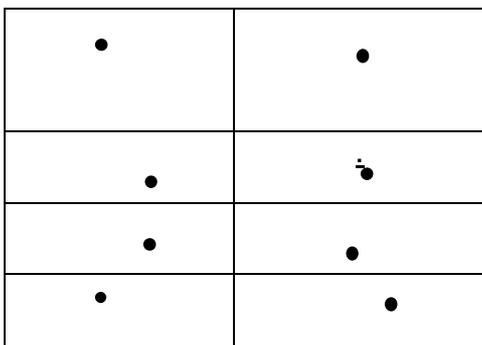
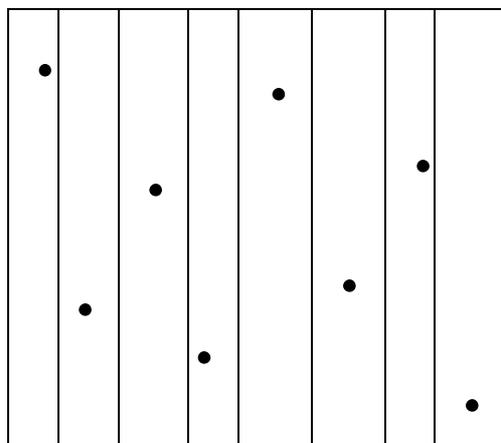
$$d_1 + d_2 = 3 \quad (5.5)$$

Car d_1, d_2 sont des nombres entiers, l'équation (5.5) rapporte 4 ensembles des solutions, à savoir (0, 3), (3, 0), (1, 2) et (2, 1), où l'axe horizontale se rapporte d_1 et l'axe verticale se rapporte d_2 . Il est clair qu'en général, il n'y a pas une seule manière de caractériser les intervalles élémentaires dans la figure 5.2 suivante de la base b , on démontre les 4 représentations possibles des intervalles élémentaires dans la base 2, correspondent aux 4 ensembles des solutions de (d_1, d_2) . Dans la figure 5.2, la partie horizontale et verticale représente respectivement, la première et la deuxième dimension de ces points. Une propriété remarquable est de construire un intervalle élémentaire tel qu'il contient exactement un point :

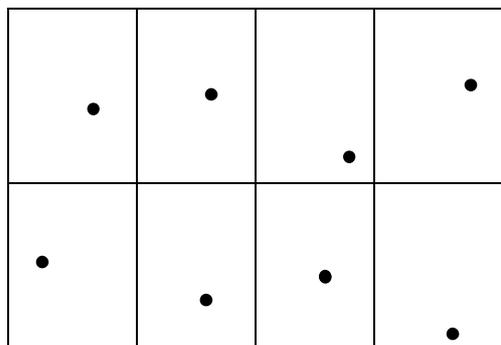
$$d_1 = 0, d_2 = 3$$



$$d_1 = 3, d_2 = 0$$



$$d_1 = 1, d_2 = 2$$



$$d_1 = 2, d_2 = 1$$

Figure 5.2 : Caractérisation des quatre intervalles élémentaires pour 8 points.

Par un phénomène semblable où la dimension de la suite est plus grande de $s > 2$ ou $s > 3$ il n'est pas possible de tracer les points dans $[0,1]^s$, on examine la projection orthogonale bidimensionnelle des points à discrédance faible .

Si une suite est uniformément dispersée dans $[0,1]^s$ alors toutes les projections orthogonales bidimensionnelles devraient également être uniformément dispersée.

5.3 Méthode de quasi Monte Carlo appliqué en finance

L'idée fondamentale d'utiliser les suites à discrédance faible dans l'intégration numérique a été introduite durant les années précédentes. Plusieurs études qui ont été réalisées dans les applications de finance. Birge [32] a constaté que ces suites donnent des résultats très précis dans l'évaluation des prix d'option.

La valeur d'une option européenne C_T , à la date d'échéance T , est égale à sa valeur intrinsèque, à cet instant, on peut écrire :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \max[S_T - K, 0] \phi(z) dz \quad (5.6)$$

Où

$$S_T = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} \quad (5.7)$$

z : La variable aléatoire normale centrée réduite et $\phi(z)$ sa fonction de distribution.

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Si on pose :
$$h(z) = e^{-r(T-t)} \text{Max}(S(z) - K, 0) \quad (5.8)$$

Dans le cas d'un raisonnement risque neutre où le taux d'intérêt r est constant, la valeur de l'option C_{it} à l'instant courant t , est donnée par, l'équation :

$$C_t = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z) \phi(z) dz \quad (5.9)$$

Soit la suite $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite de Van der Corput. Effectuant le changement de variable $x = \phi(z)$, on obtient $z = \phi^{-1}(x)$.

Où $z = \phi^{-1}(x)$: la fonction inverse de la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite, cette fonction s'obtient par l'une des deux techniques d'inversion de la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite, citée dans la section (2.5.2).

A titre d'exemple, soit $(n)_{n \geq 3}$ une suite de Van der Corput dans la base $b = 2$ est donnée par :

$$\left(\frac{8}{16}, \frac{4}{16}, \frac{12}{16}, \frac{2}{16}, \frac{10}{16}, \frac{6}{16}, \frac{14}{16}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16} \right)$$

Si on utilise l'inversion de Moro de la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite, les valeurs correspondantes de z sont :

$$(-2.5115, 0.00119, -0.6650, 0.6749, -1.1186, 0.3191, -0.3153, 1.1509, -1.4606, 0.1580, -0.4832)$$

Alors le prix de l'option est écrit par l'intégrale de :

$$C_t = \int_0^1 h[\phi^{-1}(x)] dx \quad (5.10)$$

Posons $h[\phi^{-1}(x)] = f(x)$, l'intégrale devient à $C_t = \int_0^1 f(x) dx$. La gamme de l'intégrale est transformée à l'intervalle $[0, 1]$.

L'algorithme suivant permet de calculer le prix de call européen avec une suite déterministe.

On utilise la relation suivante : $C_t = \int_0^1 f(x) dx$.

5.4 L'algorithme de quasi Monte- Carlo

Les paramètres du modèle :

S_t : le prix de l'action.

C_t : le prix de l'option de vente.

K : le prix d'exercice ou le prix de levée.

r : le taux d'intérêt sans risque.

T : la date d'exercice (date d'échéance) de l'option.

$V_{thé} = C_{BS}$: prix d'option donné par la formule de Black & Scholes.

M : le nombre de simulations.

$\phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}$: suite de Van Der Corput en base b .

$z = \phi^{-1}(x)$: fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite.

L'algorithme 5.4.

- 1 - $S_0 = S$;
- 2 - Calculer $\phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}$;
- 3 - Calculer $z = \phi^{-1}(x)$ où $z \rightarrow N(0,1)$;
- 4 - Calculer $S_T = S * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}\right)$;
- 5 - Calculer $C_t = \text{Max}(S_T - K, 0)$;
- 6 - Calculer $\bar{C}_t = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C[i]$;
- 7 - Le prix de l'option : $C_t = \bar{C} e^{-rT}$;

5.5 Etude comparative avec les méthodes de MMC , MMCA en référence au modèle Black & Scholes

Pour évaluer l'intégrale $C_t = \int_0^1 f(x)dx$, il suffit de prendre une suite à discrétance faible dans la base $b=2$ et les paramètres numériques de l'exemple précédent dans la section (4. 6).

La série de la valeur de l'option, générée par la simulation de quasi Monte-Carlo, ainsi que celle relative au modèle de Black & Scholes et la simulation Monte-Carlo avec et sans variables antithétiques, sont représentées dans la figure 5.3.

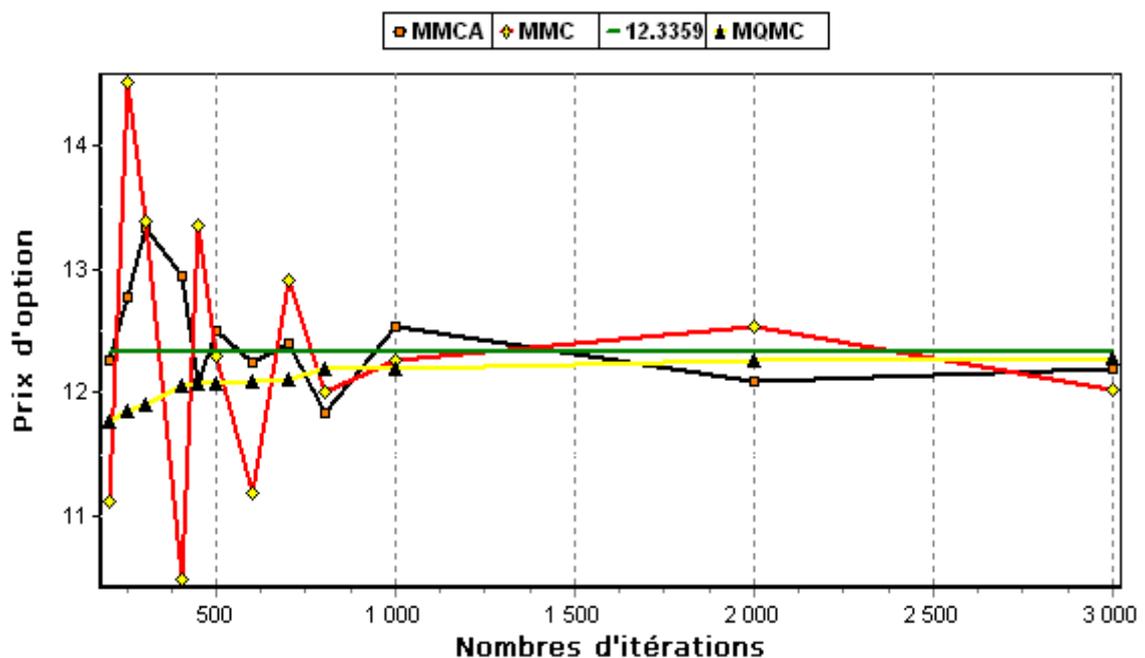


Figure 5.3 : Convergences respectives de la MMC avec et sans variables Antithétique et de la MQMC.

En faisant une simulation sur le nombre de simulation de quasi Monte- Carlo M avec comme référence le modèle de Black & Scholes, on obtient les résultats, en un temps de convergence illustrés dans le tableau 5.1 :

Tableau 5.1 : Convergence de la méthode quasi Monte- Carlo.

La taille de l'échantillon M	Valeur d'option d'achat	Ecart absolu avec le BS	Temps d'exécution en seconde
200	12.1374	0.11682	00.00.00
600	12.2292	0.10674	00.00.01
1000	12.2786	0.05737	00.00.02
1600	12.3115	0.02439	00.00.04
2000	12.3131	0.02297	00.00.05
6000	12.3272	0.00833	00.00.18
7000	12.3389	0.00291	00.00.19

Les résultats illustrés dans le tableau 5.1, montre que la méthode quasi Monte- Carlo converge beaucoup plus rapidement que les simulations conventionnelles de Monte-Carlo.

A titre d'exemple, pour $M = 7000$ on consomme 19s de temps pour avoir une évaluation d'un prix de call 12.3389, car la valeur exacte calculée par la formule de Black -Scholes est dans ce cas égale à 12.33598, la différence est seulement 0.00291 et l'accord est tout à fait bon. En utilisant l'approche standard de Monte-Carlo pour calculer la même intégrale, on a besoin de 12000 points pour une valeur 12.323575, pour assurer un intervalle de confiance $[12.29140, 12.35574]$ à 95%.

La figure 5.4, montre comment l'écart entre le prix du call estimé par MQMC et la valeur théorique est faible, pour un petit nombre d'itérations.

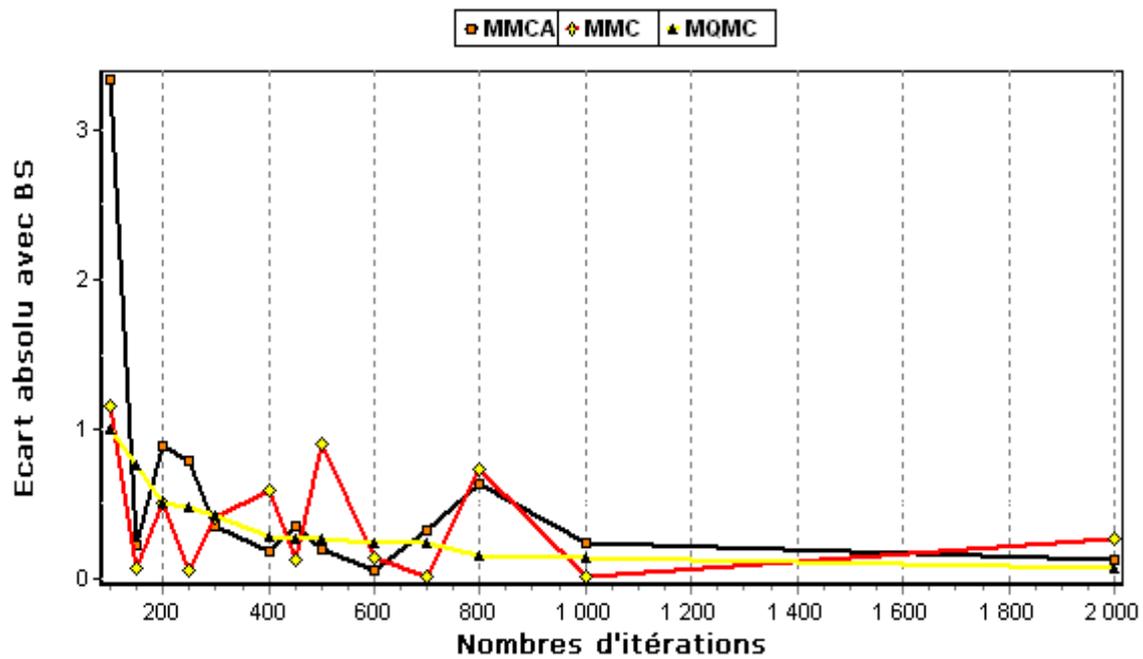


Figure 5.4 : Ecart absolu de MMC, MMCA et MQMC avec le modèle de Black & Scholes

La méthode quasi Monte- Carlo qui fait appel aux nombres pseudo aléatoire, et qui donne le même résultat pour un nombre d'itérations données. Nous avons constaté que les nombres pseudo aléatoires comportent des forces et des faiblesses. La force est de couvrir rapidement la surface d'intégration. La faiblesse est l'absence d'un moyen pour estimer l'erreur.

CHAPITRE 6

RANDOMISATION DE LA METHODE QUASI MONTE - CARLO

6.1 INTRODUCTION

Bien que théoriquement la méthode de quasi Monte-Carlo représente deux inconvénients principaux, d'abord son domaine d'application représente quelque fois des corrélations entre les points de la suite à discrétance faible, en second lieu l'évaluation des erreurs possibles dans la théorie est insurmontable, dans la pratique MMC fournit facilement un intervalle statistique de confiance.

Pour remédier à ce problème, on étudie dans ce chapitre deux techniques de randomisations, la randomisation totale, proposée par Owen [4], et la randomisation partielle proposée par Ken & Boyel [6].

Dans le but d'améliorer la méthode de quasi Monte-Carlo, la technique de randomisation de la MQMC permet d'avoir les deux bonnes propriétés des deux méthodes MMC et MQMC : Convergence rapide conduisant à un intervalle de confiance. Nous nous intéressons à la technique proposée par Owen [4], connue sous le nom "méthode de randomisation totale" (méthodes hybrides de MQMC). Faure [5] fournit une permutation optimale pour une interprétation unidimensionnelle d'une suite à discrétance faible. Aussi Ken & Boyle [6], ont introduit une modification récente de la technique de randomisation totale. Cette méthode s'appuie sur la randomisation partielle, avec une limite probabiliste sur l'erreur de la méthode de MQMC. Elle est basée sur la randomisation des points en conservant la propriété de discrétance, elle donne une simplification à la technique de randomisation totale, notamment, pour les problèmes de grandes dimensions.

6.2 Techniques de randomisation totale

La randomisation consiste à donner l'aspect aléatoire aux suites déterministes :
 Considérons la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi que la décomposition en base b de $n : n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^j$
 ce qui permet de calculer le n ième élément de la suite de Van Der Corput par :

$$\phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j} \quad (6.1)$$

La version randomisée de $(\phi_b(n))$ est donc donnée par la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j} = \frac{\pi(a_1)}{b} + \frac{\pi_{a_1}(a_2)}{b^2} + \dots + \frac{\pi_{a_1 \dots a_k}(a_k)}{b^k} + \dots \quad (6.2)$$

où π est la fonction de permutation aléatoire des nombres $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Ces permutations sont mutuellement indépendantes. Les $b!$ permutations sont donc uniformément distribuées. Le premier nombre x_1 dans la base b de la suite randomisée $(x_n)_{n \geq 1}$ est obtenu par la permutation a_1 en utilisant la fonction de permutation π choisie aléatoirement. Le deuxième nombre x_2 est obtenu par la permutation de a_2 en utilisant la fonction de permutation appropriée qui dépend de a_1 . En général, la fonction de permutation appliquée du $k^{\text{ème}}$ nombre a_k dépend des premières $k-1$ valeurs de a_k . Chaque point de la suite randomisée $(x_n)_{n \geq 1}$ est uniformément distribué sur $[0, 1)$. Ceci implique que l'échantillon $(1/N) \sum_{n=1}^N f(x_n)$ constitue un estimateur sans biais de $\int f(x) dx$.

6.2.3 Exemple numérique sur les suites randomisées

Soit la suite des nombres $(n)_{3, \dots, 12} = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$. Pour $b = 2$, on a les valeurs de la suite des nombres suivantes :

$$(11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100).$$

La version randomisée de $\phi_b(n)$ est donnée par la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$x_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j * 2^{-j} = \frac{\pi(a_1)}{2} + \frac{\pi_{a_1}(a_2)}{2^2} + \dots + \frac{\pi_{a_1 \dots a_k}(a_k)}{2^k} + \dots$$

Les valeurs de la suite randomisée sont :

$$(0.5, 0.25, 0.75, 0.125, 0.625, 0.875, 0.0625, 0.375, 0.3125, 0.1875)$$

Proposition 6.4. [32]

- Si la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ écrite sous la forme (t, m, s) dans la base b , alors $(x_n)_{n \geq 1}$ est écrite sous la forme (t, m, s) dans la base b avec une probabilité 1.
- Si la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ écrite sous la forme (t, s) dans la base b , alors $(x_n)_{n \geq 1}$ est écrite sous la forme (t, s) dans la base b avec une probabilité 1.

Proposition 6.5. [32]

- Toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$, écrite sous forme d'un réseau (t, m, s) ou (t, s) dans la base b vérifie la relation (6.2) dans E_q est dite une suite randomisée.
- Chaque élément de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ a une distribution uniforme sur $[0,1]^s$ c'est-à-dire, pour toute mesure de Lebesgue $\mathfrak{S} \subseteq [0,1]^s$, $P(X_n \in \mathfrak{S}) = \lambda_s(\mathfrak{S})$, la dimension s est une mesure de Lebesgue.

Corollaire 6.6. [32] si la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est écrite sous la forme (λ, t, m, s) dans la base b , alors $(x_n)_{n \geq 1}$ écrite sous la forme (λ, t, m, s) dans la base b a une probabilité 1.

Théorème 6.7 [32] (d'Owen 1997a) Soit f une fonction au carrée intégrable, la variance de l'estimation d'une suite randomisée $(0, m, s)$ est inférieure à la variance de Monte Carlo par $e = 2.718$, tandis que la variance d'une suite randomisée $(\lambda, 0, m, s)$ inférieure à la variance de Monte Carlo par $1 + e = 3.718$.

(la preuve du corollaire et du théorème d'Owen est donnée dans [32]).

6.3 Evaluation d'une option européenne par la technique de randomisation totale de MQMC

L'idée de randomiser des suites à discrédance faible est réintroduite dans l'aspect aléatoire des points déterministes. L'objectif est de combiner certaines des meilleures propriétés des deux méthodes. Monte-Carlo standard a l'avantage de fournir une limite probabiliste d'erreur exprimée par l'intervalle de confiance et un critère faible d'arrêt. D'autre part la méthode classique de quasi- Monte-Carlo n'a pas un critère bien établi d'arrêt. Dans ce contexte on établit la technique de randomisation totale. Cette technique préserve la propriété de l'uniformité des suites à discrédance faible. Les expériences numériques indiquent que les permutations donnent des réponses plus précises que les suites originales. Ce procédé rapporte des séries des suites aléatoires, dans le cas d'une option européenne. Le prix du *call* étant la valeur moyenne actualisée obtenue par :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{T,i} - K, 0)$$

L'algorithme suivant permet de calculer le prix du *call* européen avec la technique de randomisation totale.

6.3.1 Algorithme de randomisation totale de MQMC

Les paramètres de modèle :

S_t : le prix de l'action.

C_t : le prix de l'option de vente.

K : le prix d'exercice ou le prix de levée.

r : le taux d'intérêt sans risque.

T : la date d'exercice (date d'échéance) de l'option.

M : le nombre de simulations.

$V.th = C_{BS}$ = prix d'option donné par la formule de Black & Scholes.

$\phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}$: suite de Van Der Corput en base b .

$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j}$: suite de Van Der Corput randomisée en base b .

$z = \phi^{-1}(x)$: fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite.

L'algorithme 6.8 :

- 1 - $S[0] = S$;
- 2 - Calculer $\phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}$ (où b un nombre naturel premier représente la base) ;
- 3 - Calculer $x_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j} = \frac{\pi(a_1)}{b} + \frac{\pi_{a_1}(a_2)}{b^2} + \dots + \frac{\pi_{a_1 \dots a_k}(a_k)}{b^k} + \dots$;
- 4 - Calculer $z = \phi^{-1}(x)$ où $z \rightarrow N(0,1)$;
- 5 - $S_T = S * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + (\sigma * z * \sqrt{T-t})\right)$;
- 6 - Calculer $C_T = \text{Max}(S_T - K, 0)$;
- 7 - Calculer $\bar{C}_T = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M C[j]$;
- 8 - Le prix de l'option : $C_T = \bar{C} e^{-rT}$.

6.4 Etude statistique de la convergence et limite de la méthode

6.4.1 Estimation de la variance et intervalle de confiance

L'avantage fondamental de la randomisation classique d'une suite est d'obtenir une limite statistique de l'erreur des estimations. Une façon d'estimer σ_f^2 est consisté à randomisée M fois indépendantes la suite $(n)_{n \geq 1}$ en utilisant les M ensembles des fonctions de permutation indépendantes, de sorte que les M évaluations de la valeur fondamentale peut être utilisée pour estimer σ_f^2 .

Soit \hat{f}_j le résultat d'estimation de la $j^{\text{ième}}$ ensemble de la fonction de permutation, alors l'estimation de σ_f^2 est donnée par :

$$\hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left(\hat{f}_j - \bar{f} \right)^2 \quad (6.3)$$

Où
$$\bar{f} = \sum_{j=1}^M \hat{f}_j / M .$$

Tandis que l'estimation de $\sigma_{\bar{f}}^2$ est donnée par :

$$\hat{\sigma}_{\bar{f}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_f^2}{M} = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{j=1}^M \left(\hat{f}_j - \bar{f} \right)^2 \quad (6.4)$$

En utilisant la valeur de $\hat{\sigma}_{\bar{f}}^2$, pour construire un intervalle approximatif de confiance.

6.5 Etude comparative avec la méthode de MMC, MMCA et MQMCRT en référence au modèle de Black & Scholes

Pour illustrer les développements précédents, nous allons évaluer le prix d'un *call* européen en recourant à la randomisation totale de la méthode quasi Monte-Carlo. On prend une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ randomisée, dans la base $b=2$, et les paramètres numériques de l'exemple précédent de la section (4.6).

La série de la valeur de l'option, générée par la méthode de randomisation totale de quasi Monte-Carlo, ainsi que celle relative au modèle de Black & Scholes, et la simulation Monte Carlo avec et sans variables antithétiques, est représentée dans la figure 6.1 :

On remarque à cette figure 6.1 que la méthode de randomisation totale de quasi Monte-Carlo converge mieux vers la valeur théorique du call, que les méthodes MMC et MMCA.

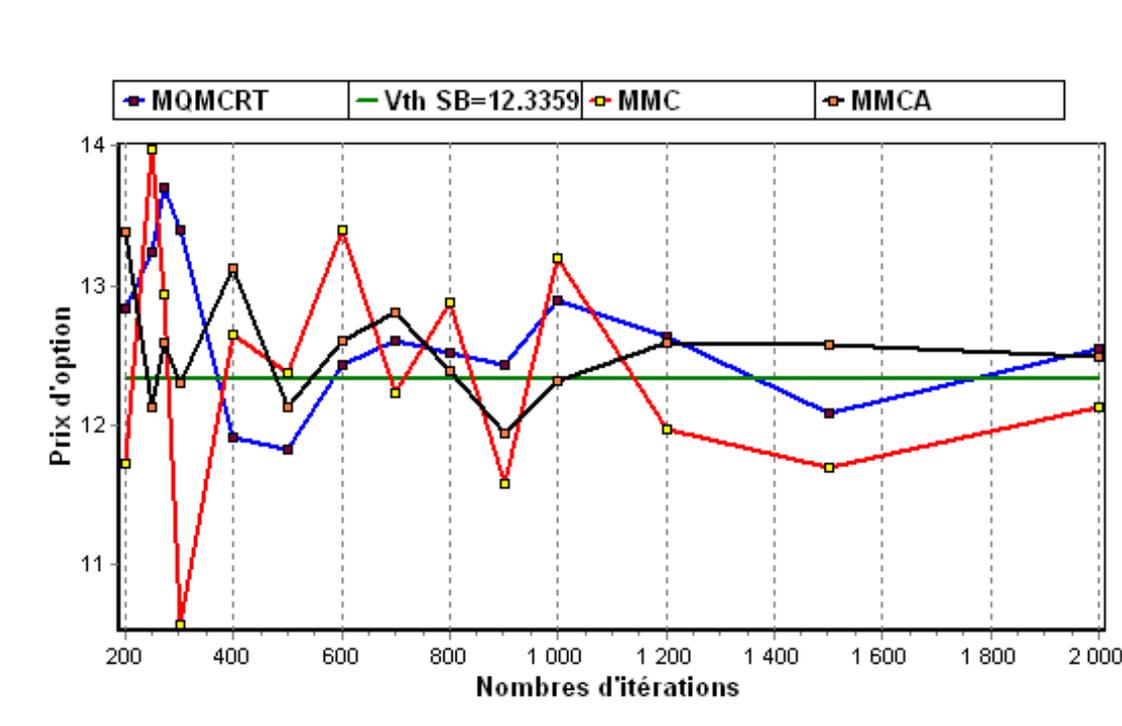


Figure 6.1 : Convergence de l'algorithme de randomisation totale de quasi Monte-Carlo vers la formule de Black & Scholes, comparée par MMC avec et sans variables antithétiques.

En faisant une simulation sur le nombre d'itérations M de la randomisation totale de quasi Monte-Carlo, avec comme référence le modèle de Black & Scholes, et on comparant avec la simulation de Monte-Carlo avec et sans variables antithétiques, on obtient les résultats, en terme de précision et de temps de convergence illustrés dans le tableau 6.1 dans la page suivante :

Si on compare les résultats du tableau 6.1, on constate que le prix du *call* obtenu par la technique de randomisation totale de quasi Monte-Carlo est proche au prix théorique pour un petit temps d'exécution. Pour le même temps le tableau révèle que l'erreur dans le cas de MMC n'est pas négligeable et dans le cas MMCA l'erreur est faible mais on consomme un temps plus grand.

A titre d'exemple pour $M = 5000$, on consomme 20 s de temps par l'approche MQMCRT pour avoir une précision de 0.012, de même nombre de simulations $M = 5000$ pour MMC et MMCA on consomme respectivement 48 s et 100 s de temps pour avoir une précision 0.207 et 0.047.

Tableau 6.1 : Etude comparative de la convergence de la randomisation totale de quasi Monte-Carlo et Monte-Carlo, en référence
modèle Black & Scholes

Simulation de Monte-Carlo sans variables antithétiques					Simulation Monte-Carlo avec variables antithétiques				Randomisation totale de Quasi Monte-Carlo			
La taille de l'échantillon M	Valeur d'option d'achat	Ecart absolu avec le BS	Temps d'exécution en second	Intervalle de confiance	Valeur d'option d'achat	Ecart absolu avec le BS	Temps d'exécution en second	Intervalle de confiance	Valeur d'option d'achat	Ecart absolu avec le BS	Temps d'exécution en second	Intervalle de confiance
50	13.792	1.456	00	[13.638, 13.946]	13.0609	0.72493	00	[12.940, 13.181]	12.870	0.53401	00	[12.778, 12.9613]
100	13.037	0.701	00	[13.924, 13.149]	11.5264	0.80951	00	[11.464, 11.588]	12.739	0.40334	00	[12.679, 12.7986]
160	12.857	0.521	00	[12.775, 12.940]	12.7716	0.43570	00	[12.729, 12.814]	12.711	0.37538	00	[12.660, 12.7620]
600	12.110	0.225	01	[12.066, 12.155]	12.1928	0.14310	03	[12.177, 12.208]	12.483	0.14760	03	[12.456, 12.5103]
1200	12.228	0.107	04	[12.199, 12.258]	12.4386	0.10269	09	[12.428, 12.448]	12.301	0.03482	06	[12.282, 12.3197]
5000	12.128	0.207	48	[12.113, 12.143]	12.3834	0.04741	100	[12.379, 12.387]	12.323	0.01200	20	[12.314, 12.3331]
10000	12.421	0.085	139	[12.410, 12.431]	12.3308	0.00512	360	[12.326, 12,335]	12.333	0.00227	53	[12.331, 12.3367]

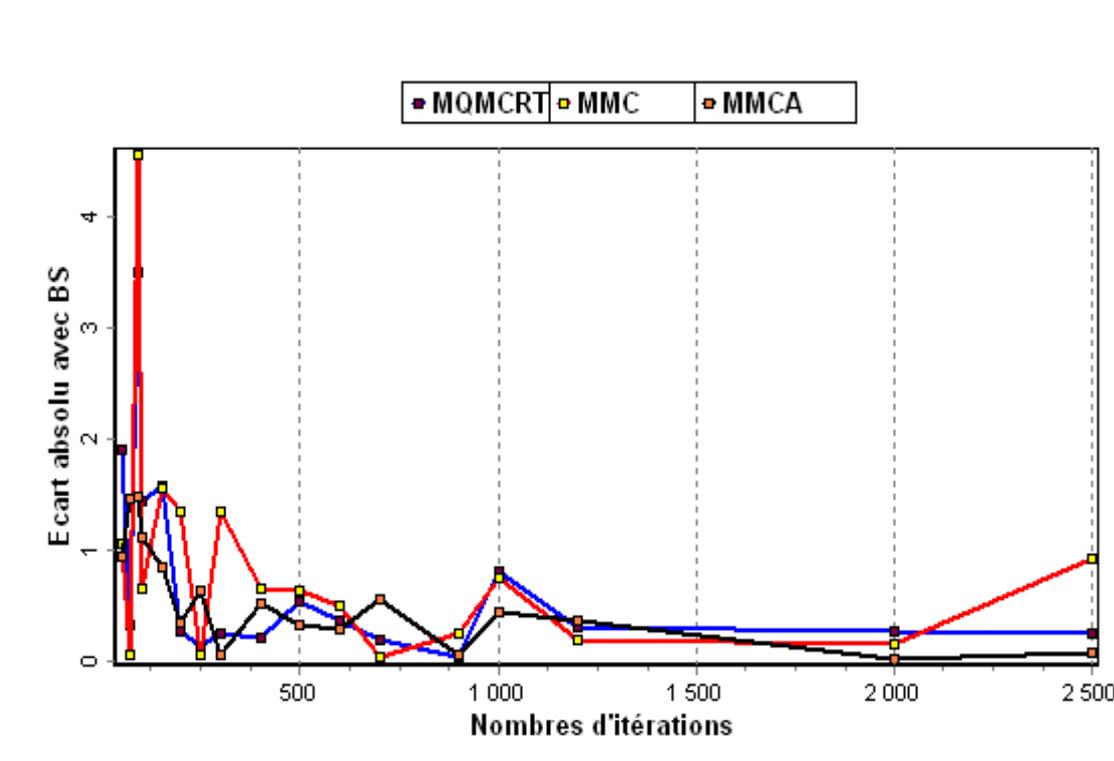


Figure 6.2 : Erreur de simulation MMC , MMCA, MQMCRT.

On peut le constater à la figure 6.2 que la courbe de MQMCRT est proche de zéro pour un petit nombre de simulations, si elle est comparée par l'erreur de MMC.

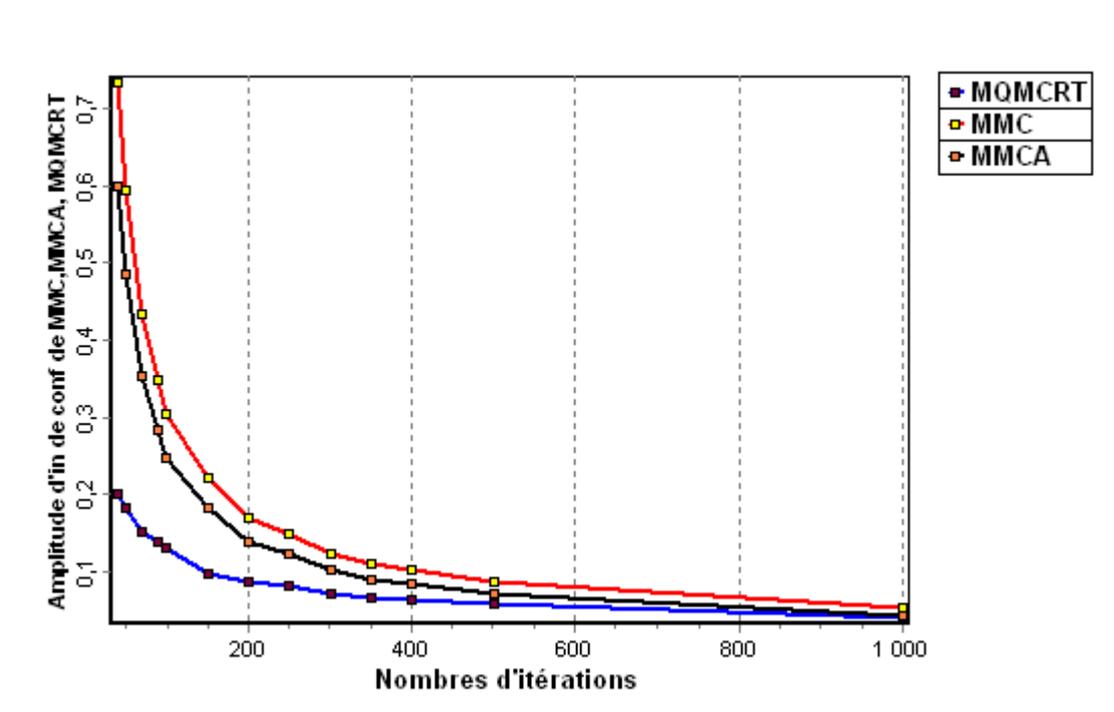


Figure 6.3: Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC, MMCA et MQMCRT.

La figure 6.3 montre, que la technique de randomisation de MQMCRT est plus précise, par rapport à MMC et MMCA. On peut noter encore que MMCA à meilleure précision que MMC

6.6 Randomisation partielle de la MQMC

Nous allons décrire dans cette section, la technique qui est a été proposée par Ken & Boyle [6]. Cette notion est insérée dans la théorie de la randomisation de MQMC, dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds, elle donne une simplifiée de la randomisation totale.

Au premier niveau dans la randomisation totale, nous avons besoin seulement d'une fonction particulière π de permutation pour permuter le premier nombre dans la base b , au deuxième niveau de randomisation, il y a b choix possibles des fonctions de permutation $\{\pi_{a_1=0}, \pi_{a_1=1}, \dots, \pi_{a_1=b-1}\}$, selon la valeur de a_1 . En général, il y a b^{k-1} choix possibles des fonctions de permutation, au $k^{\text{ième}}$ niveau de randomisation.

La fonction appropriée qui permute le $k^{\text{ième}}$ nombre a_k est déterminée par les $(k-1)$ valeurs $\{a_j, j = 1, \dots, k-1\}$. Cette propriété particulière des fonctions de randomisation implique le potentiel de deux difficultés dans l'implémentation de l'algorithme. Le premier problème est que l'expansion du $(x)_{n \in \mathbb{N}^*}$ doit être tronquée à un certain k^* . Un choix, déterminé par Owen [4], il consiste à prendre k^* assez grand de sorte que b^{-k^*} soit petit comparaison à l'erreur commise en tronquant l'expansion. Un choix alternatif doit prendre $k^* = m$ si la plupart des b^m points ne seront jamais utilisés.

La deuxième issue pratique est le problème de stockage de mémoire. Supposons que l'expansion de $(n)_{n \geq 1}$ est tronquée k^* , on indique que la randomisation de la suite à s dimensions exige $(1 + b + b^2 + \dots + b^{k^*-1}) = (b^{k^*} - 1)/(b - 1)$ fonctions de permutation indépendantes (voir section 6.2). Pour b est grand et k^* est grand, l'algorithme fondamental prend une grande capacité de mémoire et par conséquent l'espace mémoire est insuffisant. La méthode de la randomisation partielle qui a été

proposée par *Ken & Boyle* [6] représente une modification récente de la randomisation de *Owen* qui peut être expliquée par :

on suppose que les k premiers chiffres $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ sont randomisés par la technique *d'Owen*. Au niveau $k+1$, on utilise, le même ensemble de permutation $\pi_{a_1} \dots \pi_{a_k}$ avec les nombres $\{a_j, k \leq j \leq k^*\}$. Dans ce cas l'algorithme *d'Owen* est conforme aux techniques de randomisation jusqu'au niveau k ce qui donne $\pi_{a_1 \dots a_{k-1}} = \pi_{a_1 \dots a_k} = \pi_{a_{k^*} \dots a_k}$. Dans le cas insignifiant où $k = 0$, aucune randomisation n'est exécutée, Notons que la randomisation proposée converge vers la technique *d'Owen* avec k en particulier pour $k = k^*$. Le cas où $0 < k < k^*$ se réfère à la randomisation partielle qui est facile à implémenter et à exécuter. La randomisation partielle utilise $(b^k - 1)/(b - 1)$ permutations. Le nombre des fonctions de permutation exigé est nettement réduit quand k est petit relativement à k^* . Cet avantage augmente avec la dimension du problème (i.e. le nombre d'actifs).

6.6.1 Etude comparative entre MQMCRP et les techniques MMC, MMCA et MQMCRT avec le Modèle de Black & Scholes

Nous allons comparer dans cette section quelques résultats trouvés, de la technique de randomisation partielle de quasi Monte-Carlo. La série de la valeur de l'option, générée par la simulation de MQMCRP, avec comme référence le modèle de Black & Scholes, en comparant avec Monte Carlo avec et sans variables antithétiques et la randomisation totale de quasi Monte Carlo est présentée dans la figure 6.4:

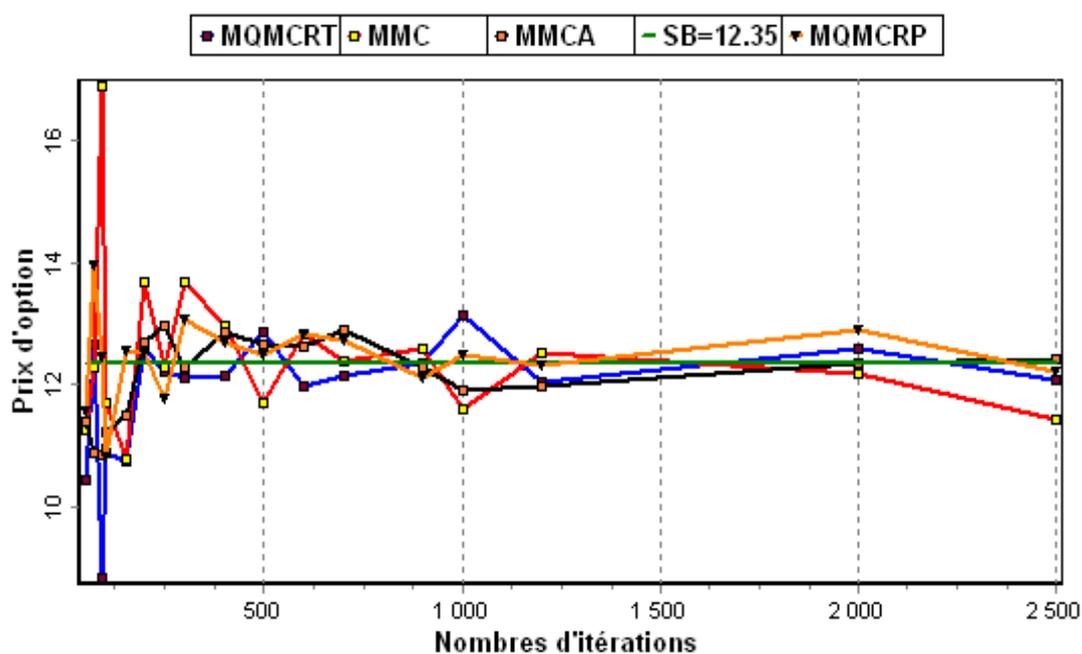


Figure 6.4 : Convergence de la méthode de randomisation partielle de MQMC, vers le Modèle de Black & Scholes, par apport aux autres méthodes.

En faisant une simulation sur le nombre de simulation de MQMCRP M , en prenant comme référence le modèle de Black & Scholes, et on comparant avec la simulation de Monte-Carlo avec et sans variables antithétiques ainsi MQMC et MQMCRT, on obtient les résultats, en terme de temps de convergence illustrés dans le tableau 6.2 :

Tableau 6.2 : Etude de la convergence de la randomisation partielle de quasi Monte-Carlo et la MQMCRT et MMC et MMCA en référence au modèle de Black & Scholes.

La taille de l'échantillon M	Simulation de Monte Carlo sans variables antithétiques	Simulation de Monte Carlo avec des variables antithétiques	Simulation de Quasi Monte Carlo	La randomisation totale de Quasi Monte Carlo	La randomisation partielle de Quasi Monte Carlo
100	13.2345	13.4872	12.3132	12.4201	12.8561
500	11.3257	12.1824	12.3372	12.3581	12.4082
1000	12.4738	12.4413	12.3378	12.3418	12.3594
10000	12.3244	12.3216	12.3349	12.3362	12.3395

Nous constatons que MQMC converge beaucoup plus vite que les simulations conventionnelles de MMC. A titre d'exemple, pour $M=500$ le prix de call est 12.3372, la différence avec la formule de Black & Scholes est seulement 0,00114 et l'accord est tout à fait bon. L'approche standard de Monte-Carlo pour calculer la même intégrale, nécessite un échantillon de taille $M = 10000$ points pour une valeur 12.324475. Notons aussi que le prix du *call* obtenu par la technique de randomisation de quasi Monte-Carlo est proche au prix théorique pour un petit nombre de simulation. Pour le même nombre d'itérations le tableau révèle que les fluctuations du prix de l'option obtenu par MMC, relativement à son prix théorique ou de randomisation totale de quasi Monte-Carlo, sont beaucoup plus faibles. On note que, pour les problèmes financiers unidimensionnels, la technique de randomisation partielle ne présente aucun avantage par rapport à la randomisation totale.

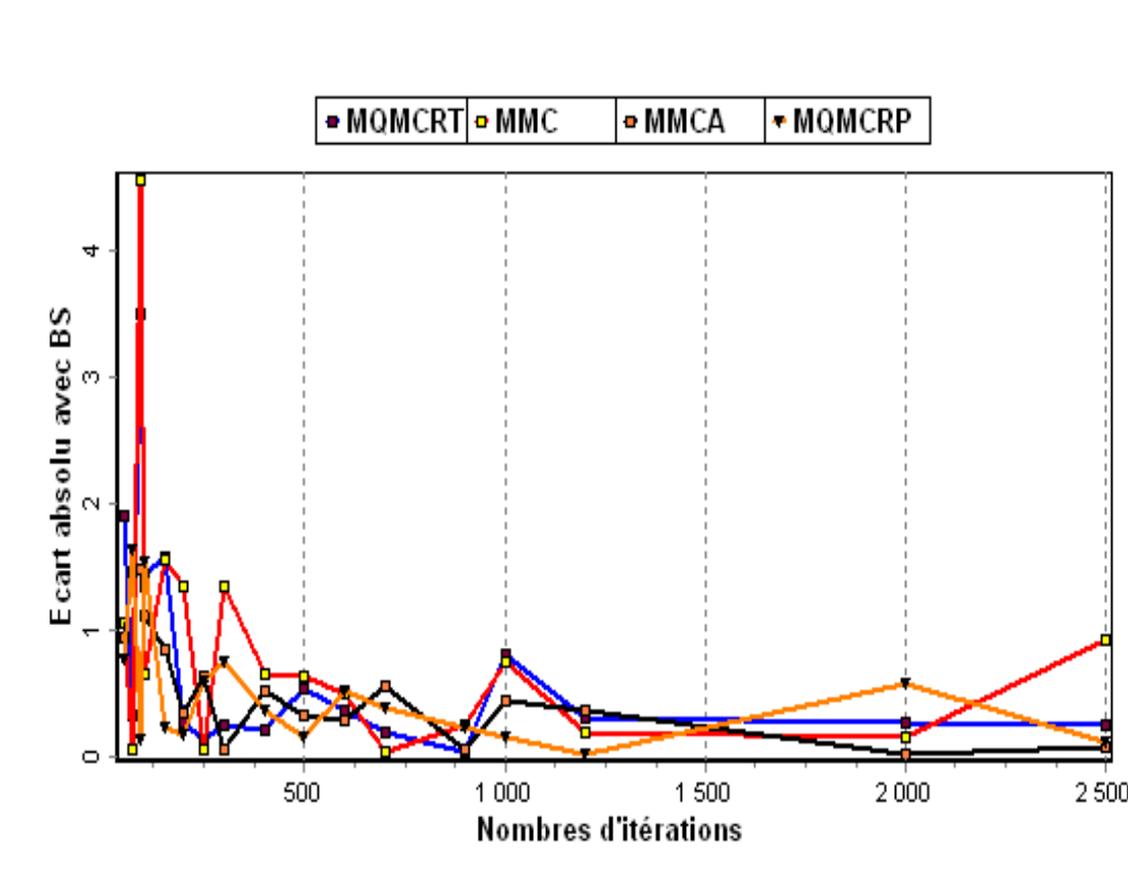


Figure 6.5 : Ecart absolu avec Black & Scholes de MMC, MMCA, MQMCRT, MQMCRP

La figure 6.5 relate l'erreur de chaque méthode de simulation, la remarque qu'on peut constater, que la randomisation totale à moine d'erreur par apport aux autres approches.

technique de randomisation totale de sorte qu'elle puisse être appliqué avec efficacité à des problèmes de grandes dimensions.

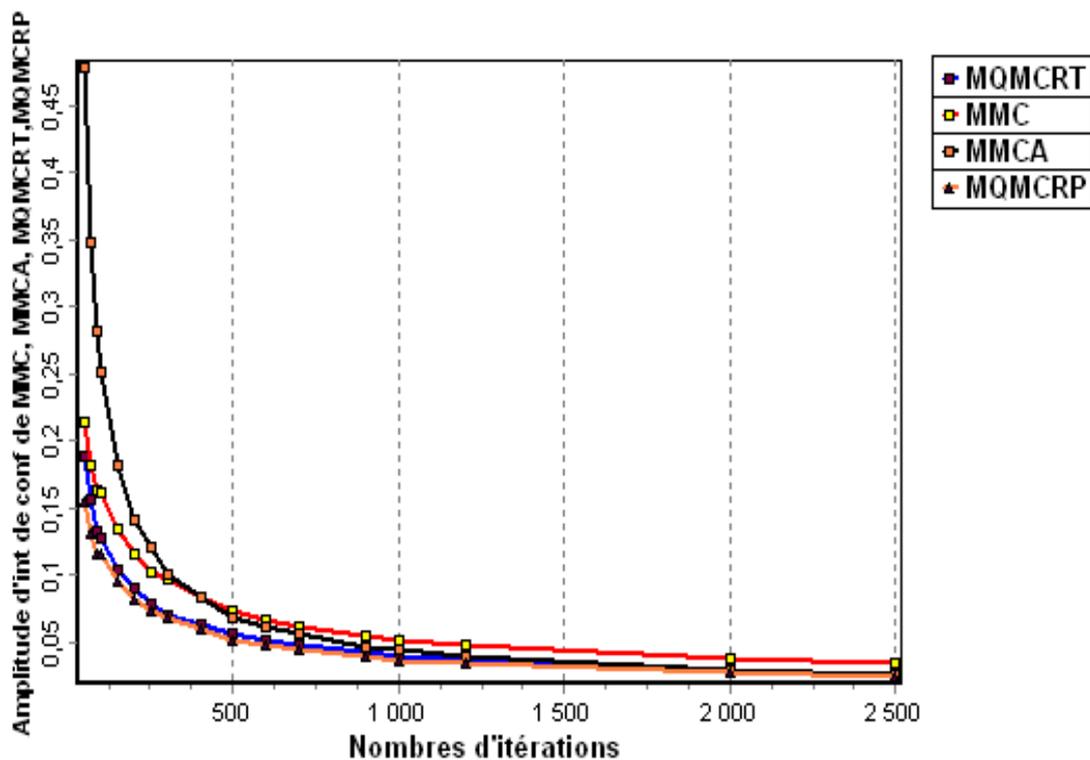


Figure 6.6 : Amplitude d'intervalle de confiance de Méthodes MMC, MMCA, MQMCRT
MQMCRP.

La figure 6.6 montre comment la randomisation partielle donne la meilleure précision par rapport aux autres méthodes.

CONCLUSION

Le fil conducteur des travaux présentés dans ce mémoire repose sur l'utilisation de l'échantillonnage aléatoire et déterministe. Nous sommes plus particulièrement intéressé aux méthodes de simulation de type Monte-Carlo, toutes les méthodes proposées peuvent être plus ou moins appropriées pour l'évaluation des options. Chacune des techniques à ses avantages et ses inconvénients. La méthode de simulation Monte Carlo comporte un avantage certain puisque elle est en mesure d'intégrer facilement les diverses dimensions d'un problème. Cependant, sa vitesse de convergence est plus lente. Nous avons montré comment cette méthode peut être améliorée en recourant à la méthode des variables antithétiques, et la simulation de type quasi-Monte Carlo qui est un analogue déterministe des techniques de Monte Carlo, où les suites pseudo aléatoires sont remplacées par des suites à discrétion faible se répartissant plus rapidement uniformément sur le domaine d'étude, permettant ainsi un meilleur « échantillonnage ». Bien que cette approche souffre de quelques inconvénients, certaines techniques ont été examinées de manière à remédier ces inconvénients. Ces nouvelles méthodes combinent les meilleures propriétés des deux méthodes standards, méthode Monte Carlo et les méthodes classiques de MQMC. Nous avons constaté que la modification du procédé de perturbation proposé par Owen améliore le taux de convergence par rapport à l'approche classique de MQMC. D'une manière importante d'une série d'études empiriques, nous avons observé que les suites de randomisation totale ont donné comme conséquence une légère diminution des efficacités des suites. Cette perte dans l'efficacité est justifiée par l'économie des conditions de stockage de mémoire et des essais statistiques, qui ont été effectués pour valider la génération des intervalles de confiance.

La disponibilité des intervalles de confiance est utile parce qu'elle fournit une méthode scientifique pour déterminer la précision du procédé d'évaluation et fournir de ce fait des critères pratiques d'arrêt. Par conséquent, il est possible de modifier la

APPENDICE
LISTE DES SYMBOLLES ET DES ABBERVIATIONS

MMC	: méthode Monte Carlo
MQMC	: méthodes Quasi Monte Carlo
MQMCRT	: méthode de randomisation totale de quasi Monte Carlo
MQMCRP	: méthode de randomisation partielle de quasi Monte Carlo
i.i.d	: indépendante, identiquement distribuée
$N(0, 1)$: la loi normale centrée et réduite
F_X	: fonction de répartition de la variable aléatoire X
$f(x)$: fonction densité
$E(X)$: espérance de X
$V(X)$: variance de X
$X_n \xrightarrow{P.S} X$: convergence presque sûre
$X_n \xrightarrow{p} X$: convergence en probabilité
$X_n \xrightarrow{L} X$: Convergence en loi
EDS	: équation différentielle stochastique
BS	: modèle de Black & Scholes.

REFERENCES

- [1] Bachelier, L. , "Théorie de la spéculation" paris Gauthier villas (1900).
- [2] Samuelson. , Indust, Mgnt. Rev 6 (2) 13 – 139.
- [3] Black, F. , Scholes, M. , "The pricing of options and corporate Liabilities. Journal of political (1973).
- [4] Owen, A.B. and D.A. Tavella "Scrambled Nets for Value at Risk Calculations" International Association of Financial Engineers First Annual Computational Finance conference stanford University: (1996).
- [5] Ken, S. T. , Phelim P. Boyle. , " Applications of randomized low discrepancy sequences to complex securities, Journal of Economic Dynamics & Control 1747 1782 (2000).
- [6] Faure, H. , "Good permutation, for extreme discrepancy". Journal of Number Theory 42, 47-56. (1992).
- [7] Quittard pinon, F., " Marchés des Capitaux et Théorie Financière" édition Economica (2003).
- [8] Dana, R. , Jeanblanc, M. , " Marchés Financiers en temps continu, valorisation et equilibre" deuxième édition, Economica (1998).
- [9] Bjorkt. , " Arbitrage theory en continuous Time" Oxford University Press (1998).
- [10] Fama, E. , "Efficient Capital markets a review of theory and empirical work" Journal of finance Vol 25 (1970).
- [11] Bertrand, J. , Bruno, S. , " Gestion de portefeuille et des Risques " Troisième édition, dunod, Paris (1997).
- [12] Cox, J. , Ross, S. A. , " An intertemporal general equilibrium model of asset prices econometrica (1985).
- [13] Cox, J. , Ross, S. A. , " The valuation of options for alternative stochastic processes" Journal of financial Economics (1976).
- [14] Saporta, G. , "Probabilités Analyse des Données et Statistique" Editions Technip (1990)

- [15] Ycart, B. , "Méthode de Monte Carlo" Université Denis diderot (2000).
- [16] Merton. , " option pricing when underlying stock returns are discontinuous" journal of financial Economics (1976).
- [17] Nualart, D. , Schoutens. W. , "stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes with applications in finance", Edition Economics, (2002).
- [18] Revuz, D. , Yor, M. , "Continuous martingales and Brownian motion", Springer Verlag, (1999).
- [19] Yacin, . J. , " Evaluations des options et gestion des risqué financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique" Thèse de doctorat, Université Paris 1 Panthéon- Sorbonne Le 20 février (2006).
- [20] Annie, . M. , " Méthode de Monte Carlo" Laboratoire de probabilités et aléatoires, Universités Paris 6 et paris 7. (200).
- [21] Lapeyre, B. , Pardoux, E. , Sentis, R. , "Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion, Mathématiques et Applications 29, Springer Verlag (1998).
- [22] Jackel, , P. , " Monte Carlo Methods in Finance" edition John Wily & Sons, ltd (2002).
- [23] Joy, C. , Boyle, P.P. , Tan, K. S. , " Quasi – Monte Carlo Methods in numerical finance. Management Science" 42 (6), 926 – 938 (1996).
- [24] Morkoff, W, J. , Cafflich, R. E. , "Quasi Monte Carlo integration. Journal of Computational Physics" 122 (2), 218-230 (1995).
- [25] Ninomiya, S. , Tezuka, S. , "Toward read- time pricing of complex financial derivatives. Applied Mathematical Finance 3, 1-20. (1996).
- [26] Doob, J. L. , "Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Springer Ve- Rlag" (1984).
- [27] Abraham, . S. L.,. " Contribution à la planification de mouvements en robotique, approches probabilistes et approches déterministes" Thèse Doctorat, Université Montpellier le 15 juillet (2003).
- [28] Sobol', I.M. "The Distribution of Points in a Cube and the Approximate Evaluation of Integrals," U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. ,7, 4, 86-112. (1967).
- [29] Niederreiter H.: "Point Sets and Sequences with Small Discrepancy", Monatsh. , Math. 104, 273-337. (1987).

- [30] Faure, H. "Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension 8):" *Acta Arithmetica*, XLI 337-351. (1982).
- [31] Birge J. R. , "Quasi-Monte Carlo Approaches to Option Pricing," Technical Report 94-19 : Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109 (1994).
- [32] Owen, .A.B. , "Randomly permuted (t, m: s)-Nets and (t, s)-sequences" in Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, (H. Niederreiter and P.J.-S. Shiue,Eds.), *Lecture Notes in Statistics*, 106: 299-317, Springer-Verlag, New York. (1995)
- [33] Owen, A.B. , "scrambled nets for value at risk calculations".*Annals of Statistics* 25 (4) 1541-1562 (1997b).