

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Ecole Doctorale en Recherche Opérationnelle

MEMOIRE DE MAGISTER

Option : Recherche Opérationnelle
(Modélisation Mathématique pour l'aide à la décision)

SUR LES ALLIANCES DANS LES GRAPHS

Par

BOUZEFRANE MOHAMED

Devant le jury composé de :

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Président
M. CHELLALI	Professeur Habilité en Mathématiques, U. de Blida	Promoteur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB, Alger	Examineur

Blida, 24 Juin 2010

RESUME

L'objet principal de ce mémoire est l'étude des alliances globales dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes E . Un sous-ensemble S de V est un dominant de G si tout sommet de $V-S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Un ensemble dominant S est une alliance offensive globale (aog) si pour tout sommet v dans $V-S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V-S)|$. S est une alliance défensive globale (adg) si pour tout sommet v dans S , $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V-S)|$. Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G et le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ est le cardinal minimum d'une (aog) de G . Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ est le cardinal minimum d'une (adg) de G .

Dans ce mémoire, on exposera en premier lieu notre contribution à l'étude des alliances globales dans les arbres. On montre que tout arbre T d'ordre au moins trois avec ℓ sommets de degré 1 et s sommets supports satisfait $\gamma_o(T) \geq (n - \ell + s + 1) / 3$. Par ailleurs on caractérise les arbres extrémaux atteignant cette borne inférieure, ainsi qu'une caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de domination et le nombre d'alliance offensive globale sont égaux.

Dans un second lieu, nous montrons que pour tout arbre T , $\gamma_o(T) \leq 2 \gamma(T) - 1$ et nous caractérisons les arbres extrémaux atteignant cette borne. En outre, nous déterminons une borne inférieure sur γ_o pour les unicycles. D'autre part on donne une relation entre $\gamma_o(T)$ et $\gamma_a(T)$ pour tout arbre non trivial T en montrant que, $\gamma_o(T) \leq (3/2) \gamma_a(T) - 1$.

En dernier lieu, on donne deux bornes sur le nombre d'alliance puissante globale dans les arbres défini comme étant le cardinal minimum d'un ensemble à la fois aog et adg.

ملخص

إن الهدف الرئيسي لهذا البحث هو دراسة التحالفات الكلية في البيانات.

ليكن $G=(V,E)$ بيانًا بسيطًا، بمجموعة رؤوس V ومجموعة أضلاع E ، نقول عن مجموعة جزئية S من المجموعة V أنها مسيطرة للبيان G إذا كان كل رأس v من $V-S$ مجاور لرأس على الأقل من S .
نقول عن مجموعة مسيطرة S أنها تحالف كلي هجومي (aog) G إذا كان كل رأس v من $V-S$ $|N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap (V-S)|$. و نقول عن S أنها تحالف كلي دفاعي (adg) ، إذا كان كل رأس v من S $|N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap (V-S)|$. و نقول عن S أنها تحالف كلي قوي إذا كانت دفاعية و هجومية في نفس الوقت. عدد السيطرة للبيان G والذي نرمز له بـ $\gamma(G)$ هو الأصغر لمجموعة مسيطرة للبيان G و عدد التحالف الكلي الهجومي $\gamma_o(G)$ هو الأصغر لـ (aog) G . و عدد التحالف الكلي الدفاعي $\gamma_a(G)$ هو الأصغر لـ (adg) G . و عدد التحالف الكلي القوي والذي نرمز له بـ $\gamma_{ap}(G)$ هو الأصغر لـ G .

في هذا البحث أولاً نعرض بعض النتائج المحصل عليها من دراسة التحالفات الكلية للأشجار ، بحيث نبين انه من اجل كل شجرة T ذات رتبة على الأقل ثلاثة ذات l ورقة و s رأس قاعدة تحقق $\gamma_o(T) \geq (n-l+s+1) / 3$ ، كذلك نعطي خاصية البيانات التي تبلغ هذا الحد، و نقدم أيضا خاصية الأشجار التي من اجلها $\gamma_o(T)$ و $\gamma(T)$ متساويان.

ثانيا نبرهن انه من اجل كل شجرة T ، $\gamma_o(T) = 2 \gamma(T) - 1$ ، و نعطي أيضا خاصية الأشجار التي تبلغ ه ذا الحد، و علاوة على ذلك نعطي حد أدنى للبيانات وحيدة الدورة. و من جانب آخر نعطي علاقة بين $\gamma_o(T)$ و $\gamma_a(T)$ من اجل كل شجرة T و هي

$$\gamma_o(T) \leq 3/2 \gamma_a(T) - 1$$

و أخيرا نعطي حدين احدهما أدنى و الآخر أعلى لعدد التحالف الكلي القوي لصنف الأشجار.

ABSTRACT

The goal of this thesis is the study of global alliances in graphs. Let $G = (V, E)$ be a simple graph, with vertex set V and edge set E . A subset $S \subseteq V$ is a dominating set of G if every vertex of $V-S$ is adjacent to some vertex of S . A dominating set S is called a global offensive alliance (goa) of G if every vertex v in $V-S$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V-S)|$. S is a global defensive alliance (gda) of G if every vertex v in S $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V-S)|$. The domination number $\gamma(G)$ is the minimum cardinality of a dominating set of G , the global offensive alliance number $\gamma_o(G)$ is the minimum cardinality of (aog) of G . The global defensive alliance number $\gamma_a(G)$ is the minimum cardinality of (adg) of G .

First, we present our contribution on the study of global alliances in trees. We show that every tree T of order at least three with ℓ leaves and S support satisfies, $\gamma_o(T) \geq (n - \ell + s + 1)/3$. Furthermore we characterize extremal trees attaining this lower bound and we also give a characterization of trees for which the domination number and the global offensive alliance are equal is given.

After, we show that every tree T , $\gamma_o(T) \leq 2\gamma(T) - 1$ and we characterize external trees attaining this bound. Moreover we determine a lower bound on γ_o for unicycles. On the other hand we give a relationship between $\gamma_o(T)$ and $\gamma_a(T)$ for any nontrivial tree T by showing that, $\gamma_o(T) \leq 3/2\gamma_a(T) - 1$.

Finally we give two bounds of the global powerful alliances defined as the minimum cardinality of a set that is both a goa and gda.

REMERCIEMENTS

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **Mustapha CHELLALI**, Professeur Habilité en Mathématiques à l'université Saad Dahleb de Blida qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience, pour l'aide compétent qu'il m'a apporté. Je le remercie également pour ses précieux conseils, ses encouragements et sa disponibilité.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Monsieur **Mostapha BLIDIA**, Professeur à l'université Saad Dahleb de Blida, qui me fait l'honneur d'accepter d'être le président du jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier également les professeurs **Abdelhafid BERRACHEDI** et **Isma BOUCHEMAKH** de l'U.S.T.H.B, qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail, et qui m'ont permis de l'enrichir grâce à leurs précieuses remarques.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui m'ont aidé par leur soutien et leurs encouragements et qui m'ont permis d'accomplir mon travail à son terme.

Enfin je remercie tous les membres de ma famille pour leur soutien et leur encouragement, je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION	09
1. GENERALITE SUR LES GRAPHERS	11
1.1 Définitions et notations	11
1.1.1 Définition d'un graphe	11
1.1.2 Voisinages	11
1.1.3 Degré d'un sommet	12
1.2 Graphes particuliers	13
1.2.1 Graphe partiel et sous graphe	13
1.2.2 Graphe complémentaire d'un graphe	14
1.2.3 Bloc graphe	15
1.2.4 Arbres, cactus et couronne d'un graphe	16
1.2.5 Subdivision d'un graphe	17
1.3 Aperçu sur la domination dans les graphes	18
1.3.1 Quelques types de domination	19
2. LES ALLIANCES DANS LES GRAPHERS	22
2.1 Introduction	22
2.2 Types d'alliances	22
2.2.1 Alliances défensives	23
2.2.2 Alliances offensives	25
2.2.3 Alliances puissantes	26
2.3 Borne sur $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$, $\gamma_o(G)$, $\gamma_{\hat{o}}(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$	27
2.3.1 Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$	27
2.3.2 Bornes supérieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$	28
2.3.3 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$	29
2.3.4 Bornes sur γ_{ap} et a_p	30
2.4 Relations entre γ_a , $\gamma_{\hat{a}}$, γ_o , $\gamma_{\hat{o}}$, β_0 , γ_2 et i	31
2.4.1 Relations entre γ_a , $\gamma_{\hat{a}}$ et β_0 dans les arbres	31
2.4.2 Relations entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$	32
2.4.3 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$	33
2.4.4 Relations entre γ_o , $\gamma_{\hat{o}}$, β_0 , i , et γ_2 dans les arbres	33
2.4.5 Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$	36
2.5 Généralisation des alliances	36
2.5.1 k-alliances	36
2.5.2 Bornes supérieures sur γ_o^k	37
2.5.3 Bornes inférieures sur γ_o^k	38
2.5.4 Bornes sur γ_a	38

2.5.5 Partition alliance	39
3. LES ALLIANCES GLOBALES DANS LES ARBRES	40
3.1 Introduction	40
3.2 Borne inférieure	40
3.3 Arbres T tels que $\gamma_o(T) = \gamma(T)$	43
3.4 Arbres T tels que $\gamma_o(T) = 2\gamma(T)-1$	47
3.5 Bornes inférieures sur γ_o pour les unicycles	49
3.6 Relations entre le nombre d'alliance offensive globale et le nombre d'alliance défensive globale dans les arbres	52
3.7 Bornes sur le nombre d'alliance puissante globale	55
3.7.1 Le nombre d'alliance puissante globale	55
3.7.2 Borne supérieure	55
3.7.3 Borne inférieure	58
CONCLUSION	61
REFERENCES	62

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1.1	Un graphe simple $G = (V, E)$	10
Figure 1.2	Une chaîne P_5 et un cycle C_5	11
Figure 1.3	Un graphe G Sous graphe induit Un graphe partiel de G	12
Figure 1.4	Un graphe G et son complémentaire \bar{G}	12
Figure 1.5	Une clique K_6	13
Figure 1.6	Un graphe biparti complet $K_{2,3}$	13
Figure 1.7	Un bloc graphe	14
Figure 1.8	Une forêt à 4 composantes connexes	14
Figure 1.9	Arbre T d'ordre $n = 16$, $ L(T) = 9$ et $ S(T) = 4$	14
Figure 1.10	Une étoile Une étoile double Une chenille	15
Figure 1.11	Un graphe cactus	15
Figure 1.12	Couronne de C_4	15
Figure 1.13	Une étoile subdivisée	16
Figure 1.14	Echiquier 8×8 avec 5 reines	17
Figure 2.1	Un arbre T avec $a(T) = 1$ et un arbre T' avec $a(T') = 2$	23
Figure 2.2	Un $K_{1,3}$ avec $\gamma_a = 2$ et $\gamma_{\hat{a}} = 3$	24
Figure 2.3	Un arbre T avec $o(T) = 2$ et un graphe G avec $\hat{o}(G) = 3$	25
Figure 2.4	Un arbre T avec $\gamma_o(T) = 3$ et $\gamma_{\hat{o}}(T) = 7$	26
Figure 2.5	Un arbre T avec un $\gamma_{ap}(T) = 6$	27
Figure 2.6	Graphe G avec $\gamma_o^2(G)$ -ensemble, et arbre T avec $\gamma_a^2(T)$ -ensemble	37
Figure 3.1	Un arbre T tel que $\gamma_o(T) = (n - \ell + s + 1)/3$	41

Figure 3.2	Un arbre T de \mathcal{F}	44
Figure 3.3	Un arbre T dans \mathcal{F} tel que $\gamma_o(T) = 2\gamma(T)-1$	49
Figure 3.4	Un arbre T tel que $\gamma_o(G) = (n-\ell(G)+s(G))/3$	51
Figure 3.5	Une étoile $S_{1,p}$ telle que $\gamma_a(S_{1,p}) > \gamma_o(S_{1,p})$	52
Figure 3.6	Un arbre T tel que $\gamma_a(T) > \gamma_o(T)$	52
Figure 3.7	Un arbre T_k avec $\gamma_o(T_k) = 3/2\gamma_a(T_k)-1$	55
Figure 3.8	Un graphe G où $\gamma_o(G) = 4$, $\gamma_a(G) = 6$ et $\gamma_{ap}(G) = 7$	55
Figure 3.9	Un arbre T tel que $\gamma_{ap}(T) = (4n-\ell+s)/6$	57
Figure 3.10	Un arbre T avec $\gamma_{ap}(T) = 4 = (3n-2\ell-s+2) / 5$	60

INTRODUCTION

La recherche opérationnelle est un ensemble de techniques récentes, datant tout au plus de la deuxième guerre mondiale, ces techniques sont basées sur des concepts et outils mathématiques.

La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, les processus aléatoires, l'optimisation dans les réseaux, la théorie des jeux, les files d'attente, etc... sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle. Elle constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles, des liens et relations entre les objets. On considère généralement que le problème des ponts de Königsberg, résolu par Euler, est le premier résultat formel de la théorie des graphes "comment parcourir une fois et une seule fois les sept ponts de la ville de Königsberg".

La théorie des graphes est devenue très utile comme modèle mathématique. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma. Ce schéma est appelé graphe.

Un graphe est une structure très simple puisqu'il est constitué d'un ensemble de sommets et d'une famille de liens (orientés ou non), appelés arêtes ou arcs, entre certains couples de sommets. Un graphe non orienté peut-être utilisé pour modéliser des relations de conflits entre individus ou objet. Un graphe orienté représente typiquement un réseau de communication, ou encore des relations de domination non-réciproque entre personnes, etc.

Parmi les problèmes les plus connus en théorie des graphes sont les problèmes de domination dans les graphes. De nombreuses recherches, au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie.

La technique de domination est devenue donc un outil pour la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions.

Nous étudions dans ce mémoire la notion des alliances dans les graphes. Les alliances dans les graphes ont été présentées la première fois par Kristiansen, Hedetniemi, et Hedetniemi dans [14] et [15]. Dans ce mémoire, trois chapitres fondamentaux sont développés. Nous nous intéressons principalement à la notion des alliances globales dans les graphes.

Dans le chapitre un, nous présentons les définitions et les notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre en question.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons le thème étudié et nous donnons un état de l'art sur les alliances dans les graphes, en rappelant les principaux résultats existants.

Notre contribution se situe dans le troisième chapitre. Nous présentons une borne inférieure sur le nombre d'alliance offensive globale dans les arbres, et nous caractérisons les arbres extrémaux atteignant cette borne inférieure ainsi qu'une caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de domination et le nombre d'alliance offensive globale sont égaux. Nous montrons aussi que pour tout arbre T , $\gamma_o(T) \leq 2\gamma(T) - 1$ et nous caractérisons les arbres extrémaux atteignant cette borne. D'autre part on donne une relation entre $\gamma_o(T)$ et $\gamma_a(T)$ pour tout arbre nontrivial T en montrant que $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$. Nous déterminons une borne inférieure sur γ_o pour les unicycle. Nous établissons aussi deux bornes sur le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} pour les arbres.

Il est à noter que l'ensemble de ces résultats ont fait l'objet d'une publication, une soumission à publication et ont été exposés au colloque COSI'09 (Annaba).

Enfin on termine par une conclusion générale sur nos travaux réalisés, et comme perspective, nous proposons quelques questions pour les recherches futures.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHERS

Nous donnons dans la première partie de ce chapitre les définitions de base et les notations usuelles de la théorie des graphes. Dans la seconde partie une brève présentation sur la domination dans les graphes sera donnée.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Berge [1], et de Haynes, Hedetniemi et Slater [2].

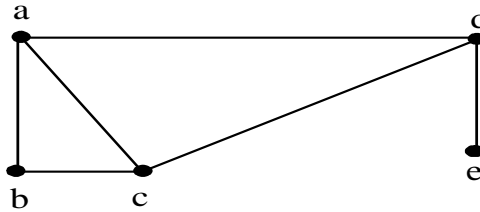
1.1 Définitions et notations

1.1.1 Définition d'un graphe:

Un **graphe** G est la donnée d'un couple $(V(G), E(G))$ où $V(G)$ est un ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et $E(G)$ est l'ensemble des paires de sommets appelées **arêtes**. Le cardinal de $V(G)$, appelé **ordre** de G , est noté n et le cardinal de $E(G)$ est noté m . Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules: u, v, x, y, a, b , etc. Les arêtes sont notées uv, xy, ab , etc. Deux sommets u et v sont **adjacents** ou **voisins** s'ils sont reliés par une arête. Deux arêtes distinctes sont dites **adjacentes** si elles ont au moins une extrémité commune. Une arête e sera dite **incidente** à un sommet v si v est une extrémité de e .

Un graphe **simple** est un graphe dont tout couple de sommets sont reliés par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes. Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

Pour l'exemple de la Figure 1.1 on a un graphe $G = (V(G), E(G))$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ et $E(G) = \{ab, bc, ca, cd, ad, de\}$

Figure 1.1: Un graphe simple $G = (V, E)$

1.1.2 Voisinages

Pour un sommet v de G , le **voisinage ouvert** de v est $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, et le **voisinage fermé** de v est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le **voisinage ouvert** de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ et le **voisinage fermé** de S est $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[v]$. Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe G , les voisinages ouverts et fermés d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ à la place de $N_G(v)$ et $N_G[v]$, respectivement. De même pour $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

Pour le graphe G de la Figure 1.1, le voisinage ouvert du sommet d est $N(d) = \{a, c, e\}$ et son voisinage fermé est $N[d] = \{a, c, d, e\}$. Soit S un ensemble. Le **voisinage privé** d'un sommet $v \in S$ par rapport à S est l'ensemble noté $pn[v, S]$ des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas de voisins dans S autre que v , i-e: $pn[v, S] = \{u \in V(G) : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

1.1.3 Degré d'un sommet

Le **degré** d'un sommet $v \in V(G)$, noté $d_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit sommet **isolé** et un sommet de degré un est dit **sommet pendant ou bien feuille**. On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G . Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet **support** et l'ensemble des sommets supports de G sera noté par $S(G)$. On note par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le **degré minimum** et **maximum** dans G , respectivement.

1.2 Graphes particuliers

Une **chaîne** C dans un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k telle que pour tout $1 \leq i \leq k - 1, e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k - 1$ représente la **longueur** de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont appelés **extrémités** de la chaîne C . Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite **élémentaire**. Une **corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne **minimale** induite par n sommets, notée par P_n , est une chaîne élémentaire sans corde. P_5

On appelle **cycle** dans un graphe G une chaîne dont les extrémités sont confondues.

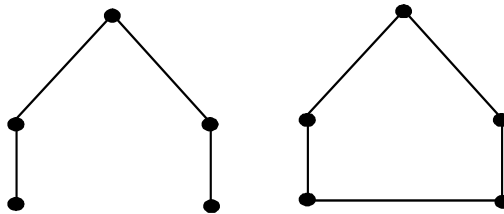


Figure 1.2: Une chaîne P_5 et un cycle C_5

Soit u et v deux sommets d'un graphe G . On appelle **distance** entre u et v , notée $d_G(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . L'**excentricité** d'un sommet v dans G est $exc(v) = \max\{d_G(v, w) : w \in V(G)\}$ et le **diamètre** de G , noté $diam(G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V(G)\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé un **centre**.

1.2.1 Graphe partiel et sous graphe

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Le graphe H est dit un *graphe partiel* de G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Pour un sous ensemble de sommets non vide $A \subseteq V(G)$, le sous graphe $H = (A, E_A)$ induit par A dans G , noté par $\langle A \rangle_G$ ou $G[A]$, est un graphe avec l'ensemble de sommets A et l'ensemble des arêtes $E_A = \{uv \in E(G) : u, v \in A\}$. La Figure 1.3 illustre ces deux définitions

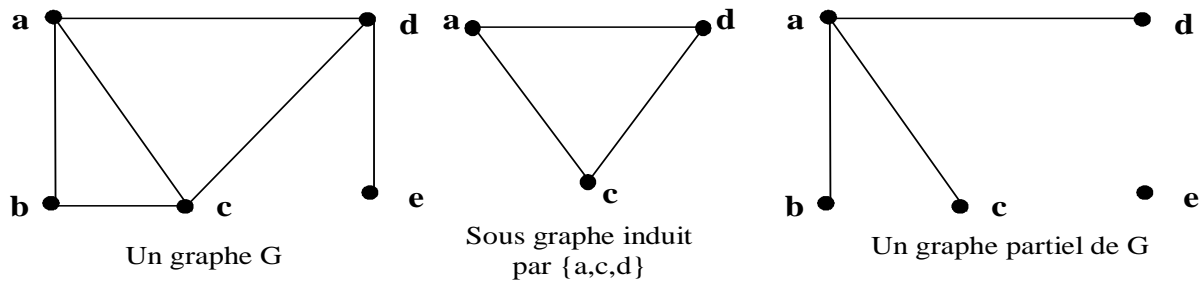


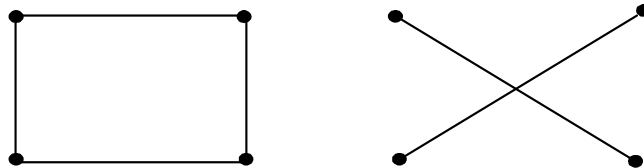
Figure 1.3

Pour les sous-ensembles A et B de $V(G)$ on note par $m(A, B)$ le nombre des arêtes entre A et B , et par $m(A)$ le nombre des arêtes du sous graphe $G[A]$.

On dit qu'un graphe G est **connexe** si pour toute paire de sommets distincts v et u de $V(G)$, il existe une chaîne joignant v et u . Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe. Une **composante connexe** d'un graphe est un **sous-graphe** connexe maximal.

1.2.2 Graphe complémentaire d'un graphe

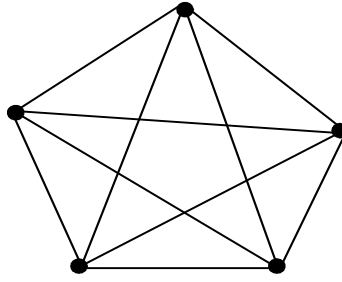
Le graphe complémentaire de G , noté \overline{G} est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête $uv \in E(\overline{G})$ si et seulement si $uv \notin E(G)$. Voir la Figure 1.4 qui illustre un graphe G et son complémentaire \overline{G} .

Figure 1.4: Un graphe G et son complémentaire \overline{G}

Un graphe **complet** d'ordre n , noté K_n est un graphe dont tous les sommets sont adjacents. Voir un exemple de K_5 dans la Figure 1.5.

Une **clique** dans un graphe $G = (V(G), E(G))$, est un sous graphe complet.

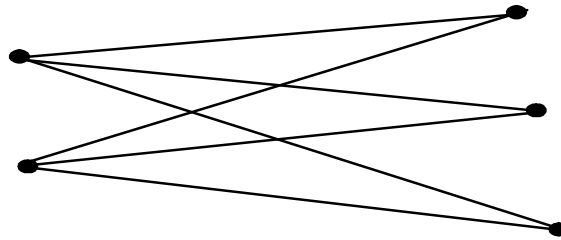
Un **stable** d'ordre p noté par S_p dans un graphe $G = (V(G), E(G))$, appelé aussi, **ensemble indépendant**, est un sous ensemble de $V(G)$ de p sommets deux à deux non adjacents.

Figure 1.5: Une clique K_5

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **k – parti**, pour $k \geq 2$ entier, s’il existe une partition de $V(G)$ en k sous-ensembles V_1, V_2, \dots, V_k tels que chacun des $G[V_i]$ est un stable.

Si $k = 2$ le graphe G est dit **biparti**. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impair.

On appelle graphe **biparti complet**, un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2$, $uv \in E(G)$. Dans ce cas si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe **biparti complet** est noté $K_{p,q}$. Un exemple du graphe $K_{2,3}$ est illustré dans la Figure 1.6

Figure 1.6: Un graphe biparti complet $K_{2,3}$

Un graphe G est dit **d -régulier** si chaque sommet de G a un degré d .

1.2.3 Bloc graphe

Un sommet x d’un graphe G est l’articulation si sa suppression augmente le nombre de composante.connexe.

Un **bloc** dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d’articulation.

Un **bloc graphe** G est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si G ne possède pas de sommet d’articulation alors G est lui même un bloc. L’intersection de deux blocs contient au plus un sommet, la Figure 1.7, représente un graphe G à 4 blocs.

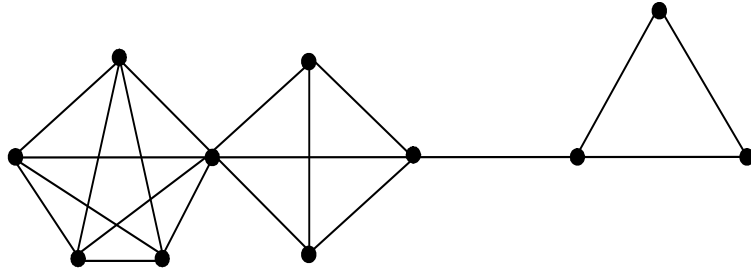


Figure 1.7: Un bloc graphe

1.2.4 Arbres, cactus et couronne d'un graphe

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycles ou acyclique. Une **forêt** est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

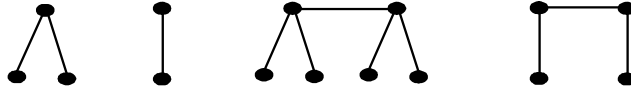
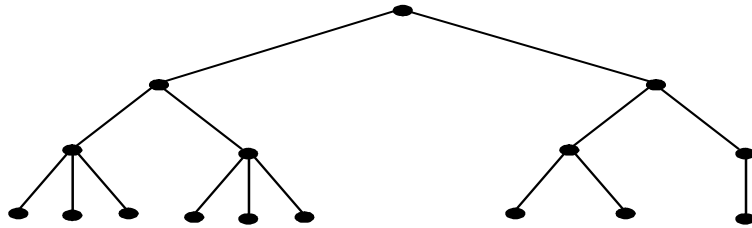


Figure 1.8 : Une forêt à 4 composantes connexes

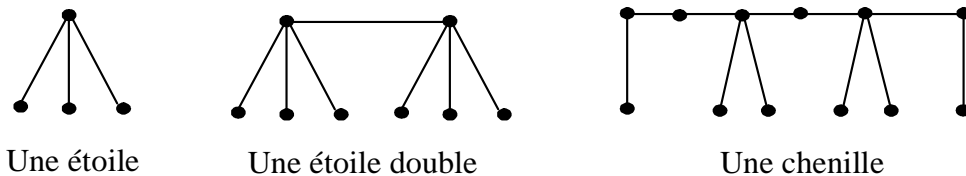
Un exemple d'un arbre T est représenté dans la Figure 1.9.

Figure 1.9: Arbre T d'ordre $n = 16$, $|L(T)| = 9$ et $|S(T)| = 4$

On appelle **étoile**, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n + 1$ sommets ayant n feuilles.

Une **double étoile** notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres.

Un arbre est dit **chenille** si le graphe obtenue en supprimant toutes les feuilles est une chaîne.



Une étoile

Une étoile double

Une chenille

Figure 1.10

Un **graphe cactus** G est un graphe où toute arête appartient à au plus un cycle. Un cactus ayant un seul cycle est dit **unicycle**

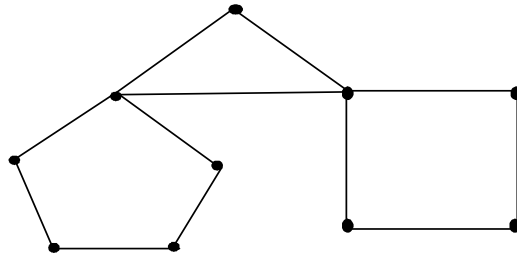
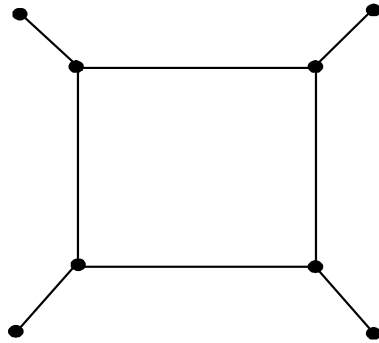


Figure 1.11

La **couronne** de G noté GoK_1 , est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Donc il est évident que l'ordre de GoK_1 est égal à $2|V(G)|$. Une k -couronne d'un graphe G est le graphe d'ordre $(k + 1)|V(G)|$ obtenu à partir de G en attachant à chaque sommet de G une chaîne de longueur k de sorte que les chaînes soient disjointes. Pour le cycle C_4 , sa couronne est représentée par le graphe de la Figure 1.12.

Figure 1.12: Couronne de C_4

1.2.5 Subdivision d'un graphe

Une **subdivision** $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et les deux arêtes uw et wv .

Voir exemple de la Figure 1.13.

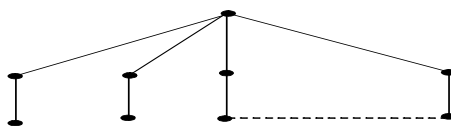


Figure 1.13: Une étoile subdivisée

1.3 Aperçu sur La domination dans les graphes

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. On dit qu'un sous-ensemble A de $V(G)$ est **minimal** (resp. **maximal**) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp., $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} .

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de $V(G)$ est **minimum** ou de *taille minimale* (resp. **maximum** ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} et $|A| > |B|$ (resp., $|B| > |A|$).

Donnons maintenant la définition des ensembles dominants dans les graphes. Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Un sous ensemble S de $V(G)$ est un **dominant** si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Le cardinal minimum d'un **ensemble dominant** de G est appelé **nombre de domination** et il est noté par $\gamma(G)$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V(G)$, $|N[v] \cap S| \geq 1$.

Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V(G)$, $N[v] \cap S \neq \emptyset$.

Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si $N[S] = V(G)$.

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec, le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{ème} siècle en Inde voir [6]. En 1862 Dejaenish [7] posa le problème suivant: Déterminer le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum de reines est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent.

En 1958, Claude Berge [1] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe. L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [35] en 1962 qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A

l'exception de quelques résultats, la domination n'a connu sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [29] en 1977. Depuis l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination.

On dénombre actuellement quelques 100 types de domination et plus de 2000 références dans le domaine. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [31] et [32]. On notera aussi un numéro de la revue *Discrete Mathematics* [30] qui est entièrement consacré à la domination.

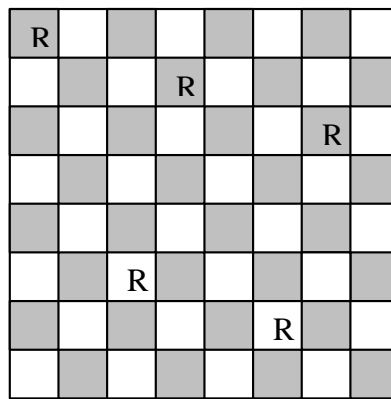


Figure 1.14 : Echiquier 8×8 avec 5 reines

1.3.1 Quelques types de domination

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. On définit le nombre de domination inférieur $\gamma(G : P)$ conditionné comme étant la taille minimum d'un ensemble dominant $S \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par S satisfait la propriété P .

Remarque: $\gamma(G) \leq \gamma(G : P)$ pour toute propriété P définie précédemment.

De nombreux paramètres de domination sont obtenus en combinant la domination avec une propriété ou une condition supplémentaire dans les graphes. Ainsi d'autres paramètres peuvent être définis en imposant une ou plusieurs conditions à l'ensemble dominant, par exemple imposer la condition que le sous graphe induit par l'ensemble dominant:

1. $\langle D \rangle$ soit connexe, produit la *domination connexe*.
2. $\langle D \rangle$ soit sans sommets isolés, produit la *domination totale*.

3. $\langle D \rangle$ soit une clique produit la *domination clique*.
4. $\langle D \rangle$ soit sans arêtes produit la *domination stable*.
5. $\langle D \rangle$ soit cycle produit la *domination cycle*.
6. $\langle D \rangle$ soit couplage parfait produit la *domination couplé*.

On peut de même imposer des conditions extérieures, sur la façon de dominer, par exemple dominer au moins k fois chaque sommet extérieur, produit la k -domination.

Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un *dominant double* est un dominant sans sommet isolé qui domine au moins deux fois tout sommet extérieur.

- *La domination multiple*: Un sous ensemble S de V est dit dominant multiple (ou k -dominant) de G si tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans D . Le *nombre de domination multiple* (ou *nombre de k -domination*), noté par $\gamma_k(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant multiple de G . La k -domination a été introduite par Fink et Jacobson dans [28].

- *La domination connexe*: Un sous ensemble S de $V(G)$ est dit *dominant connexe* de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S est connexe. Le nombre de domination connexe noté par $\gamma_c(G)$ est la taille minimum d'un *ensemble dominant connexe* de G .

- *La domination stable*: Un sous ensemble S de $V(G)$ est dit dominant stable de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête. Le cardinal minimum (resp.maximum) d'un stable maximal de G noté $i(G)$ (resp. $\beta_0(G)$) est appelé le nombre de domination stable (resp.le nombre de stabilité) de G .

- *La domination totale*.Un sous ensemble S de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans S i.e, $N(S) = V$. Le nombre de domination total noté $\gamma_t(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G .

La domination totale a été introduite par Cockayne, Dawes, et Hedetniemi dans [27].

Les applications de la domination sont large, a titre exemple le problème d'une localisation des radars pour contrôler une région donnée.

Dans ce mémoire nous ne considérons que l'aspect théorique de ces problèmes. Puisque ces paramètres de domination sont difficiles à déterminer, nous recherchons des inégalités

entre certains d'entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité. La recherche de liaisons entre les paramètres de domination est aussi envisageable.

CHAPITRE 2

LES ALLIANCES DANS LES GRAPHERS

2.1 Introduction

Le mot **alliance** signifie un lien ou un rapport entre des individus, des familles, des états ou des parties.

Dans le monde réel, les alliances sont trouvées dans beaucoup de variétés, chacune a des propriétés différentes, par exemple:

- alliances entre des nations pour l'appui mutuel dans la guerre (*pour attaquer un ennemi commun ou pour se défendre contre un agresseur*), dans l'économie, ou pour d'autres intérêts communs.

- alliances entre différentes parties politiques.
- alliances entre des personnes qui s'unissent par l'amitié ou par des obligations.
- alliances entre des compagnies pour des intérêts économiques communs.

Inspirés par les alliances entre les nations en guerre, les alliances dans les graphes ont été présentées la première fois par Kristiansen, Hedetniemi, et Hedetniemi dans [14] et [15]. Les nations sont représentées par des *sommets* et les *arêtes* correspondent aux relations possibles (d'amitié ou d'hostilité) entre les nations.

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents types d'alliances et leurs variantes avec les paramètres associés.

2.2 Types d'alliances

Considérons un graphe simple $G = (V(G), E(G))$.

2.2.1 Alliances défensives

Définition 2.1. Un ensemble non vide de sommets S est dit une alliance défensive si et seulement si pour chaque sommet $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$. Si l'inégalité est stricte alors, l'alliance défensive est dite forte.

Utilisons les problèmes de la sécurité nationale pour illustrer ces concepts. On peut penser à un sommet dans une alliance S pouvant défendre lui-même et ses voisins contre des attaques possibles par des sommets de $V - S$. Puisque chaque sommet dans une alliance défensive S a au moins autant de sommets de son voisinage fermé dans S que dans $V - S$, par la force des nombres, nous dirons que chaque sommet dans S peut être défendu contre une attaque possible par des sommets de $V - S$.

Définition 2.2. Le nombre d'alliance défensive $a(G)$ (respectivement le nombre d'alliance défensive forte $\hat{a}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive (respectivement d'une alliance défensive forte).

La figure suivante représente un arbre T avec $a(T) = 1$ et un arbre T' avec $\hat{a}(T') = 2$

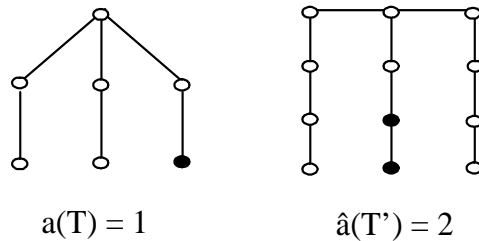


Figure 2.1

Il est à signaler que tout graphe G admet une alliance défensive car $V(G)$ est un tel ensemble.

Définition 2.3. Une alliance défensive S est dite globale si S est un ensemble dominant.

Définition 2.4. Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale (respectivement, d'une alliance défensive globale forte).

Donnons une illustration, par le graphe G de la Figure 2.2. L'ensemble $S = \{a, b\}$ est une alliance défensive globale du graphe G , d'où $\gamma_a(K_{1,3}) = 2$, et $S = \{a, b, c\}$ est une alliance défensive globale forte de G , d'où $\gamma_{\hat{a}}(G) = 3$.

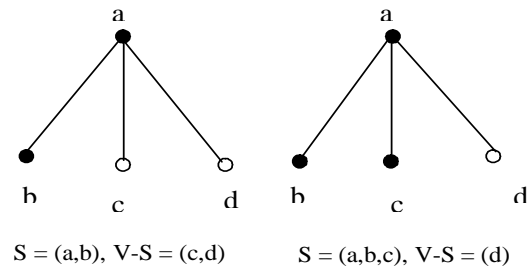


Figure 2.2

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats relatifs aux paramètres $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Observation 2.5 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Pour tout graphe G , d'ordre n ,*

- (i) $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_a(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$
- (ii) $1 \leq a(G) \leq \gamma_a(G) \leq n$;
- (iii) $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$.

Les mêmes auteurs [8] ont donné les valeurs exactes de γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ pour quelques classes de graphes.

Proposition 2.6 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Pour un graphe complet K_n*

- (i) $\gamma_a(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,
- (ii) $\gamma_{\hat{a}}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Proposition 2.7 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$*

- (i) $\gamma_a(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$,
- (ii) $\gamma_a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ si $r, s \geq 2$,
- (iii) $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$.

Haynes et al. [8] ont présenté aussi des résultats liant les nombres d'alliances globales aux nombre de domination totale $\gamma_t(G)$ défini comme étant le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G dont le sous-graphe induit est sans sommets isolés.

1. Pour un cycle C_n , $n \geq 3$, $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n)$
2. Pour $n \geq 3$, $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.
3. Pour $n \geq 2$, $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n)$ à moins que $n \equiv 2 \pmod{4}$, dans ce cas $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n) - 1$.
4. Pour $r, s \geq 1$, $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor (r-1)/2 \rfloor + \lfloor (s-1)/2 \rfloor + 2$.
5. Pour $r, s \geq 1$, $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) = \lfloor r/2 \rfloor + \lfloor s/2 \rfloor + 2$.

2.2.2 Alliances offensives

Pour un sous ensemble $S \subseteq V$, notons par $\partial S = N(S) - S$.

Définition 2.8. *Un ensemble non vide de sommets $S \subseteq V$ est dit une alliance offensive si et seulement si pour chaque $v \in \partial S$, $|N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$. Ici, nous dirons que chaque sommet de ∂S est vulnérable à une attaque possible par des sommets de S (par la force des nombres). Aussi si l'inégalité est stricte, alors S est une alliance offensive forte.*

Définition 2.9. *Une alliance offensive S est dite globale (aog) si S est un dominant.*

Définition 2.10. *Le nombre d'alliance offensive $o(G)$ (respectivement le nombre d'alliance offensive forte $\hat{o}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive (respectivement d'une alliance offensive forte) de G .*

La figure suivante représente un arbre $T = S_{2,2}$ avec $o(T) = 2$, et un graphe G avec $\hat{o}(G) = 3$

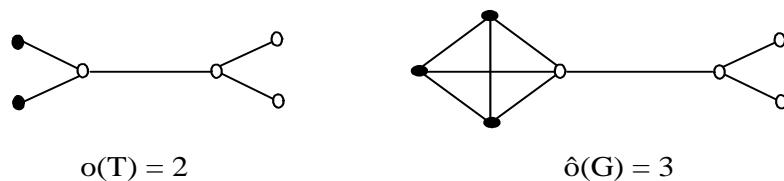


Figure 2.3

Il est à signaler que tout graphe G admet une alliance offensive puisque $V(G)$ est un tel ensemble.

Définition 2.11. *Le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_\delta(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive globale (respectivement, d'une alliance offensive globale forte) de G .*

La figure suivante nous montre un arbre T tel que $\gamma_o(T) = 3$ et $\gamma_\delta(T) = 7$

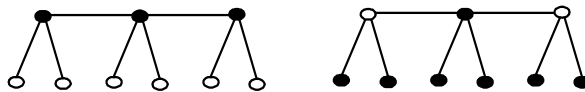


Figure 2.4

Il est clair que pour tout graphe G , $\gamma_o(G) \geq \gamma(G)$. Beaucoup de recherches ont été faites sur ce concept, on présentera par la suite quelques propriétés et résultats existants.

2.2.3 Alliances puissantes

Définition 2.12. *Une alliance est dite puissante si elle est à la fois défensive et offensive. Ce concept peut être exprimé par la seule condition que pour chaque sommet $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$.*

Puisque une alliance puissante S est défensive, il peut défendre tout sommet S contre une attaque possible par les sommets de ∂S , et puisque il est offensive, il peut effectivement attaquer tous les sommets dans ∂S . En outre, une alliance puissante peut également défendre tout sommet de ∂S contre une attaque par des sommets dans $N[\partial S] - N[S]$.

Définition 2.13. *Une alliance puissante globale de G est une alliance puissante qui domine G .*

Définition 2.14. *Le nombre d'alliance puissante a_p (respectivement, d'alliance puissante globale γ_{ap}) est le cardinal minimum d'une alliance puissante (respectivement, d'une alliance puissante globale).*

La figure suivante représente un arbre T avec un $\gamma_{ap}(T) = 6$.

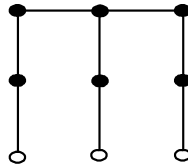


Figure 2.5

Voici quelques valeurs exactes de $a_p(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$ dans des familles de graphes spécifiques [19].

1. Pour toute chaîne P_n avec $n \geq 2$, $a_p(P_n) = \gamma_{ap}(P_n) = \lfloor 2n/3 \rfloor$, et
2. Pour tout cycle C_n , $a_p(C_n) = \gamma_{ap}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$
3. Pour le graphe complet K_n , $a_p(K_n) = \gamma_{ap}(K_n) = \lceil n/2 \rceil$
4. Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$, $1 \leq r \leq s$,

$$a_p(K_{r,s}) = \gamma_{ap}(K_{r,s}) = \min \{r + \lfloor s/2 \rfloor, \lceil (r+1)/2 \rceil + \lceil (s+1)/2 \rceil\}$$

2.3 Bornes sur $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$, $\gamma_o(G)$, $\gamma_{\hat{o}}(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$

Dans ce qui suit, on présentera quelques propriétés et principaux résultats existants sur les paramètres d'alliances définis auparavant.

2.3.1 Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Dans [8], Haynes et al. ont donné des bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ en fonction de l'ordre n et le degré maximum Δ .

Théorème 2.15 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Si G est un graphe d'ordre n , alors*

- (i) $\gamma_a(G) \geq (\sqrt{4n+1} - 1)/2$.
- (ii) $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \sqrt{n}$.

Théorème 2.16 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Si T est un arbre d'ordre n , alors*

- (i) $\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{4}$,
- (ii) $\gamma_{\hat{a}}(T) \geq \frac{n+2}{3}$,

Théorème 2.17 (Rodriguez et Sigaretta [12] 2005). *Soit G un graphe simple d'ordre n et de degré maximum Δ . Alors $\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{2n}{\Delta+3} \rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \lceil \frac{n}{\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1} \rceil$*

2.3.2 Bornes supérieures sur $\gamma_a(T)$ et $\gamma_{\hat{a}}(T)$

La proposition suivante établie par Haynes et al dans [8]. donne une borne supérieure sur γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ pour tout graphe G .

Proposition 2.18 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Pour tout graphe G sans sommets isolés et de degré minimum δ ,*

- (i) $\gamma_a(G) \leq n - \lceil \delta/2 \rceil$,
- (ii) $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq n - \lceil \delta/2 \rceil$,

Le corollaire suivant se découle immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 2.19 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Pour tout graphe G , $\gamma_a(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K}_n$.*

Les deux résultats suivants établis par Haynes et al. [8] donnent une borne supérieure pour la classe des arbres sur γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ avec une caractérisation des arbres extrémaux pour chaque borne.

Soit \mathcal{F}_1 la famille des arbres T contenant $T = P_5$, $T = K_{1,4}$ où bien T est obtenu à partir de $tK_{1,4}$ (l'union disjoint de t copies de $K_{1,4}$) en ajoutant $t - 1$ arêtes entre les feuilles de ces copies de telle sorte que le centre de chaque $K_{1,4}$ est adjacent à exactement trois feuilles de T .

Théorème 2.20 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$, alors $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}_1$.*

Les mêmes auteurs ont introduit une famille \mathcal{F}_2 d'arbres T obtenus à partir de l'union disjoint $tK_{1,3}$ de $t \geq 1$ copies de $K_{1,3}$ en ajoutant $t - 1$ arêtes entre les feuilles de ces copies

de $K_{1,3}$ de telle sorte que le centre de chaque $K_{1,3}$ est adjacent à au moins une feuille dans T .

Théorème 2.21 (Haynes, Hedetniemi et Henning [8] 2003). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3n}{4}$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}_2$.*

2.3.3 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$

Le résultat suivant établi par Chellali [2], donne une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe biparti.

Théorème 2.22 (Chellali [2]). *Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_o(G) \leq (n - \ell(G) + s(G))/2$.*

A noter qu'une caractérisation constructive des arbres extrémaux vérifiant $\gamma_o(T) = (n - \ell(T) + s(T))/2$ a été faite par Chellali dans le même article.

Sigaretta et Rodriguez donne une borne supérieure et une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe G en fonction de l'ordre n , le degré minimum δ et maximum Δ ,

Théorème 2.23 (Rodriguez et Sigaretta [23] 2006). *Pour tout graphe G d'ordre n , et de degré minimum δ et maximum Δ ,*

$$\frac{2n}{3} \geq \gamma_o(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\Delta+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair;} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\Delta+\delta} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons qu'un graphe G est dit d -régulier si tous ses sommets sont de degré d .

Théorème 2.24 (Rodriguez et Sigaretta [23] 2006). *Pour tout graphe régulier G d'ordre n et de degré δ impair, $\frac{n(\delta+1)}{3\delta+1} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Dans le cas des graphes cubiques (3- régulier) on a: $\frac{2n}{5} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.

Dans [10], Blidia, Chellali et Volkmann ont montré que tout graphe biparti G sans sommets isolés satisfait $\gamma_2(G) \leq (n + \ell(G))/2$. Du fait que pour tout $\gamma_{\hat{o}}(G)$ -ensemble S , tout sommet $v \in V - S$ possède au moins deux voisins dans S , alors S est un 2-dominant de G . D'ou $\gamma_2(G) \leq \gamma_{\hat{o}}(G)$ pour tout graphe G . La précédente borne supérieure sur γ_2

établie dans [10] par Blidia, Chellali et Volkmann a été améliorée pour γ_δ par Chellali dans [12] en montrant que:

Théorème 2.25 (Chellali [2]). *Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_\delta(G) \leq (n + \ell(G))/2$.*

A noter aussi qu'une caractérisation constructive des arbres extrémaux atteignant la borne du Théorème 2.25 à été donnée par Chellali dans le même article.

Dans [23]. Rodriguez et Sigaretta ont donné une borne supérieure et une borne inférieure sur γ_δ pour les graphes cubiques ainsi qu'une caractérisation des graphes extrémaux.

Théorème 2.26 (Rodriguez et Sigaretta [23] 2006). *Soit G un graphe cubique d'ordre n .*

1. $\frac{n}{2} \leq \gamma_\delta(G) \leq \frac{3n}{4}$
2. $\gamma_\delta(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est un graphe biparti.
3. $\gamma_\delta(G) = \frac{3n}{4}$ si et seulement si G est isomorphe au graphe complet K_4

2.3.4 Bornes sur γ_{ap} et a_p

Dans leur article introductif Brigham et al. [19], ont donné une borne supérieure sur l'alliance puissante a_p pour les arbres.

Théorème 2.27 (Brigham et al. [19] 2009). *Si T est un arbre d'ordre n différent d'une chaîne P_n , alors $a_p(T) \leq \lfloor n + 3/2 \rfloor$; cette borne est atteinte.*

Les mêmes auteurs ont montré aussi les deux résultats suivants

Proposition 2.28 (Brigham et al. [19] 2009). *Pour tout graphe G d'ordre n ,*

$$n \leq \left(\frac{\Delta + \delta + 2}{\delta + 1} \right) \gamma_{ap}(G).$$

Corollaire 2.29 (Brigham et al. [19] 2009). *Si G est un graphe régulier d'ordre n , alors $n \leq 2\gamma_{ap}(G)$.*

2.4 Relations entre γ_a , $\gamma_{\hat{a}}$, γ_o , $\gamma_{\hat{o}}$, β_0 , γ_2 et i

2.4.1 Relations entre γ_a , $\gamma_{\hat{a}}$ et β_0 dans les arbres

En général, le nombre d'alliance défensive globale peut être beaucoup plus grand que le nombre de l'indépendance. Par exemple, pour le graphe complet K_n , $\beta_0(K_n) = 1 \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \gamma_a(K_n)$. Chellali et Haynes dans [9], ont montré que le nombre d'alliance défensive globale pour les arbres est borné supérieurement par le nombre de l'indépendance.

Théorème 2.30 (Chellali et Haynes [9] 2006). *Pour tout arbre T , $\gamma_a(T) \leq \beta_0(T)$. Et cette borne est atteinte.*

Puisque $\beta_0(T) \leq \binom{n+\ell-1}{2}$ pour tout arbre non trivial T avec ℓ feuilles [10], le corollaire suivant est une amélioration du Théorème 2.25 pour $\ell \leq n/5$.

Corollaire 2.31 (Chellali et Haynes [9] 2006). *Pour tout arbre T avec ℓ feuilles, $\gamma_a(T) \leq \binom{n+\ell-1}{2}$.*

Les mêmes auteurs dans [9] ont montré que $\gamma_a(T)$ et $i(T)$ sont incomparables. Par exemple, pour une étoile T d'ordre $n \geq 3$, $1 = i(T) < \lceil n/2 \rceil = \gamma_a(T)$. D'autre part, pour la chenille T_{6k} avec $6k$ sommets supports, où chaque support est adjacent à exactement deux feuilles, on a $\gamma_a(T_k) = 6k$ tandis que $i(T_k) = 9k$.

Par les exemples précédents, $\gamma_{\hat{a}}(T)$ et $i(T)$ sont aussi incomparables, ainsi que $\gamma_{\hat{a}}(T)$ et $\beta_0(T)$ sont incomparables. Par exemple pour une étoile $K_{1,p}$ ($p \geq 4$), $\beta_0(T) = p > \lceil p/2 \rceil + 1 = \gamma_{\hat{a}}(T)$, et si T est un 2-couronne de la chaîne P_{2k} , alors $\gamma_{\hat{a}}(T) = 4k > 3k = \beta_0(T)$.

Chellali et Haynes [9], ont établi deux bornes supérieures sur le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}$ pour la classe des arbres en fonction de β_0 et $(\beta_0$ et $s(T))$ respectivement.

Théorème 2.32 (Chellali et Haynes [9] 2006). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec s sommets supports, alors*

- (a) $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3\beta_0(T)-1}{2}$,
- (b) $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \beta_0(T) + s - 1$, et ces bornes sont atteintes.

Pour l'étoile G d'ordre n , $i(G) = 1$, $\gamma_a(G) = \lceil n/2 \rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Par conséquent aucune limite générale du type $\gamma_a(G) \leq f(i(G))$ ou $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq g(i(G))$ peut être satisfaite pour tout graphe, même dans la classe des arbres.

2.4.2 Relations entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$

Avant d'énoncer les résultats ci-dessous on donne la définition suivante:

Définition 2.33. *un graphe G est équilibré s'il est biparti et si chaque ensemble de la bipartition est de même taille.*

Les graphes bipartis complet $K_{p,q}$ pour lesquels $p = q$, sont appelés graphes équilibrés

Dans [11] Favaron a étudié l'existence d'une fonction f telle que $i(G) \leq f(\gamma_a(G))$ pour un graphe général, graphe biparti ou bien un arbre. Elle a défini les familles des graphes suivantes.

1. \mathcal{F}_1 est la famille des graphes obtenus d'une clique $S \sim K_k$ par la fixation de $k = d_s(u) + 1$ feuilles a chaque sommet u de la clique S .
2. \mathcal{F}_2 est la famille des graphes bipartis obtenus à partir d'un graphe biparti complet équilibré $S \sim K_k$ par la fixation de $k + 1 = d_{s(u)} + 1$ feuilles à chaque sommet u de S .
3. \mathcal{F}_3 est la famille des arbres obtenus à partir d'un arbre S par la fixation de l'ensemble L_u de $d_{s(u)} + 1$ feuilles a chaque sommet u de S .

Le théorème suivant de Favaron [11] nous donne une relation entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$ sous forme $i(G) \leq f(\gamma_a(G))$, avec une caractérisation des graphes extrémaux.

Théorème 2.34 (Favaron [11] 2008).

1. Tout graphe G satisfait $i(G) \leq \gamma_a^2(G) - \gamma_a(G) + 1$, avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_1$.
2. Tout graphe biparti G satisfait $i(G) \leq \gamma_a^2(G)/4 + \gamma_a(G)$, avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_2$.

3. Tout arbre G satisfait $i(G) \leq 2\gamma_a(G) - 1$, avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_3$.

2.4.3 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$

Puisque $\gamma_a \leq \gamma_{\hat{a}}$ pour tout graphe, Favaron dans [11], a donné des bornes du type $i(G) \leq g(\gamma_{\hat{a}}(G))$ pour un graphe général, biparti ou un arbre. Elle a défini des familles des graphes suivantes.

1. \mathcal{F}_4 est la famille des graphes obtenus d'une clique $S \sim K_k$ par la fixation de $k - 1 = d_s(u)$ feuilles a chaque sommet u de la clique S .
2. \mathcal{F}_5 est la famille des graphes bipartit obtenu à partir d'un graphe biparti complet équilibré $S \sim K_{k,k}$ par la fixation de $k = d_s(u)$ feuilles à chaque sommet u de S .
3. \mathbf{s} est la famille des arbres S telque pour tout ensemble d'indépendance maximale J de S , le nombre des composantes des fôrets $S - J$ est au plus $S/2$. \mathcal{F}_6 est la familles des arbres obtenus par un arbre S de \mathbf{s} par la fixation de l'ensemble $L(u)$ de $d_s(u)$ feuilles a chaque sommet u de S .

Le théorème suivant de Favaron [11] donne une relation entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$ sous forme $i(G) \leq f(\gamma_{\hat{a}}(G))$. avec une caractérisation des graphes extrémaux.

Théorème 2.35 (Favaron [11] 2008).

1. Tout graphe G satisfait $i(G) \leq \gamma_{\hat{a}}^2(G) - 2\gamma_{\hat{a}}(G) - 2$, avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_4$.
2. Tout graphe biparti G sans sommets isolés satisfait $i(G) \leq \gamma_{\hat{a}}^2(G)/4 + \gamma_{\hat{a}}(G)/2$, avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_5$.
3. Tout arbre G d'ordre $n \geq 2$ satisfait $i(G) \leq 3\gamma_{\hat{a}}(G)/2 - 1$, avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_6$.

2.4.4 Relations entre γ_o , γ_δ , β_0 , i et γ_2 dans les arbres

Le théorème suivant de Favaron [11], donne une relation entre γ_o et i dans les arbres

Théorème 2.36 (Favaron [11] 2008). *Pour tout arbre T , $\gamma_o(T) \leq 2i(T) - 1$ et cette borne est atteinte.*

Le résultat qui suit établi par Favaron [11], est une borne sur γ_δ en fonction de i pour la classe des arbres.

Théorème 2.37 (Favaron [11] 2008). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_\delta(T) \geq i(T) + 1$ et cette borne est atteinte.*

En 2007 Volkmann [21] a donné une relation sur γ_2 en fonction de γ pour la classe des arbres.

Théorème 2.38 (Volkmann [21] 2007). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_2(T) \geq \gamma(T) + 1$ avec égalité si et seulement si T est une étoile subdivisée, une couronne d'une étoile ou une double étoile subdivisée.*

Le théorème suivant établi par Hansberg et al. [20], nous donne une caractérisation pour tout les arbres T ayant $\gamma_2(T) = i(T) + 1$.

Théorème 2.39 (Hansberg et Volkmann [20]). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_2(T) \geq i(T) + 1$ avec égalité atteinte si et seulement si $\gamma_2(T) \geq \gamma(T) + 1$ ou $T = (S_{2,2})$.*

Puisque pour tout graphe G $\gamma_\delta(G) \geq \gamma_2(G)$. Chellali et al. [18] ont utilisé le théorème 2.38 et ont montré ce qui suit:

Théorème 2.40 (Chellali, Haynes et Volkmann [17] 2009). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_\delta(T) \geq \gamma(T) + 1$ avec égalité si et seulement si T est une étoile subdivisée, T est une couronne d'une étoile ou bien T est une double étoile subdivisée.*

Les mêmes auteurs [17], ont donné une borne inférieure pour Le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_\delta(G)$ pour tout graphe en fonction de $\gamma_o(G)$, ℓ et s .

Théorème 2.41 (Chellali, Haynes et Volkmann [17] 2009). *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, avec s sommet supports et ℓ feuilles, $\gamma_{\delta}(G) \geq \gamma_o(G) + \ell - s$.*

On note que pour tout graphe G les feuilles de G sont dans tout $\gamma_{\delta}(G)$ ensemble. Avant d'énoncer la chaîne d'inégalités établie par Chellali et al. on donne l'observation suivante justifiée par le fait que $V - D$ est une aog pour tout stable D .

Observation 2.42 (Chellali et Haynes [9] 2006). *Si G est un graphe sans sommets isolés. Alors $\beta_0(G) + \gamma_o(G) \leq n$.*

En utilisant l'inégalité triviale suivante: $\gamma(G) \leq \gamma_o(G) \leq \gamma_{\delta}(G)$ on a alors

Corollaire 2.43. *pour tout arbre T , on a $\gamma(T) \leq \gamma_o(T) \leq \beta_0(T) \leq \gamma_2(T) \leq \gamma_{\delta}(T)$.*

Le résultat suivant est un recent résultat de Chellali et al. qui est une relation entre le nombre d'alliance offensive globale forte γ_{δ} et le nombre d'alliance offensive globale γ_o pour les arbres.

Théorème 2.44 (Chellali, Haynes et Volkmann [17] 2009). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_{\delta}(T) \geq \gamma_o(T) + 1$, avec égalité si et seulement si une des propriétés suivantes est vérifiée.*

(i) T un arbre subdivisé.

(ii) T est obtenu à partir des arbres T_1 et T_2 qui est obtenue à partir d'arbres T_1 et T_2 qui sont des subdivisions des arbres T'_1 et T'_2 , respectivement, en ajoutant une arête entre un sommet u_1 de T'_1 et u_2 de T'_2 , où au moins l'un de u_1 et u_2 est une feuille ou isolé de $T_1 \cup T_2$.

Le résultat suivant est dû à Blidia et al.

Théorème 2.45 (Blidia, Chellali et Favaron [10] 2005). *Soit T un arbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) $\gamma_2(T) = \beta_0(T)$,

b) $T = K_1$ ou $T \in \mathcal{F}$,

c) T a un $\gamma_2(T)$ —ensemble et aussi est un $\beta_o(T)$ —ensemble.

Il est à noter qu'en utilisant le Théorème 2.44, Chellali et al. [17], ont donné une caractérisation descriptive des arbres satisfaisant $\gamma_{\delta}(T) = \beta_0(T)$.

2.4.5 Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$

La proposition suivante donne une relation entre le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ et le nombre de domination $\gamma(G)$

Proposition 2.46 (Brigham et al. [19] 2009). *Pour tout graphe G , $\gamma(G) + \lfloor \delta(G)/2 \rfloor \leq \gamma_{ap}(G)$.*

Brigham et al. [19] ont caractérisé les graphes tels que $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ par le théorème suivant:

Théorème 2.47 (Brigham et al. [19] 2009). *Un graphe G vérifie $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ si et seulement si $N[v]$ contient au moins $\lceil |N[v]|/2 \rceil$ sommets supports pour tout sommet $v \in V(G)$.*

Les mêmes auteurs ont caractérisé aussi les arbres tels que $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$.

Théorème 2.48 (Brigham et al. [19] 2009). *Un arbre T a $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$ si et seulement si T est une double étoile $S_{2,2}$ ou bien T peut être obtenu d'une étoile $K_{1,t}$ en subdivisant au plus $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ de leurs arêtes exactement une seule fois.*

2.5 Généralisation des alliances

2.5.1 k-alliances

Les concepts des alliances défensives et offensives ont été généralisés aux *k-alliances offensives* et *défensives* respectivement, où la force d'une alliance est liée à la valeur du paramètre k . Avant de présenter quelques résultats existants sur ces concepts donnons les définitions suivantes

Définition 2.49. *Soit $k \geq 1$ un entier. Un ensemble non vide S de sommets d'un graphe G est appelé une *k-alliance offensive globale* si $|N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k$ pour tout*

$v \in V(G) - S$. Le nombre k -alliance offensive globale de G , noté $\gamma_o^k(G)$, est le cardinal minimum d'une k -alliance offensive globale de G .

Définition 2.50. Un ensemble non vide $S \subseteq V$ est une k -alliance défensive globale si pour tout $v \in S$, $|N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k$. Le nombre k -alliance défensive globale de G , noté $\gamma_a^k(G)$, est le cardinal minimum d'une k -alliance défensive globale de G .

Dans [24] Fernau, Rodriguez et Sigarreta ont montré que le problème de la recherche du nombre d'alliance k -offensive (défensive) globale est NP -Complet. On donne par la suite quelques résultats établies sur γ_o^k et γ_a^k .

La figure suivante représente un graphe G avec $\gamma_o^2(G)$ -ensemble, et un arbre T avec $\gamma_a^2(T)$ -ensemble.

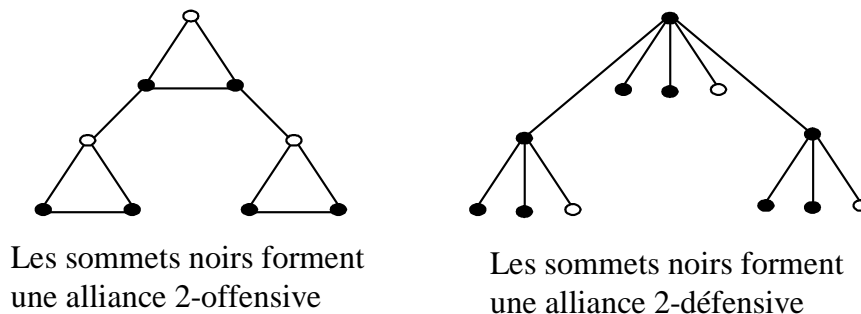


Figure 2.6

2.5.2 Bornes supérieure sur γ_o^k

Chellali et Volkmann ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour les graphes bipartis.

Soit $L_k(G) = \{x \in V(G) : d_G(x) \leq k - 1\}$.

Théorème 2.51 (Chellali et Volkmann [17] 2008). Soit $k \geq 1$, un entier. Si G est un graphe bipartit alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{n(G) + |L_k(G)|}{2}$.

Une caractérisation constructive des arbres atteignant la borne du Théorème 2.51. a été faite par les mêmes auteurs.

Théorème 2.52 (Chellali et Volkmann [17] 2008). Soit $k \geq 2$ un entier. Un arbre T satisfait $\gamma_o^k(T) = (n(T) + |L_k(T)|) / 2$ si et seulement si ou bien $\Delta(T) \leq k - 2$ ou $T \in \mathcal{F}_k$. ou \mathcal{F}_k est obtenu d'une manière constructive.

Par ailleurs dans [18] Chellali et al. ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour tout graphe.

Théorème 2.53 (Chellali et al. [18] 2009). *Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k$ alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k+1}{k+2}n$.*

Dans le cas ou $\delta \geq k + 2$, on obtient la borne suivante qui améliore la borne du Théorème précédent.

Théorème 2.54 (Chellali et al. [18] 2009). *Soit $k \geq 2$ un entier, et soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k + 2$. Alors $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.*

2.5.3 Bornes inférieure sur γ_o^k

Deux bornes inférieures ont été données par Chellali et al. dans [18] sur le nombre k -alliance offensive globale γ_o^k pour tout graphe G d'ordre n de degré minimum δ et de degré maximum Δ .

Théorème 2.55 (Chellali et al. [18] 2009). *Soit k un entier positif. Si G est un graphe d'ordre n , de degré minimum δ et de degré maximum Δ , alors $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k)}{2\Delta+\delta+k}$.*

Théorème 2.56 (Chellali et al. [18] 2009). *Soit $k \geq 1$ est un entier et soit G est un graphe d'ordre n , et de degré minimum δ et maximum Δ . Si δ est pair et k est impair ou δ est impair et k est pair alors, $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k+1)}{2\Delta+\delta+k+1}$.*

2.5.4 Bornes sur γ_a^k

Théorème 2.57 (Rodriguez et Sigaretta [26] 2006). *Pour tout graphe G , $\frac{\sqrt{4n+k^2+k}}{2} \leq \gamma_a^k(G) \leq n - \lfloor \frac{d_n-k}{2} \rfloor$.*

Les mêmes auteurs ont généralisé la borne du Théorème précédent

Théorème 2.58 (Rodriguez et Sigaretta [26] 2006). *pour tout graphe G ,*

$$\gamma_a^k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\lfloor \frac{d_1-k}{2} \rfloor + 1} \right\rceil.$$

où d_1 est le degré maximum, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.

Rodriguez et al. ont donnés d'autres résultats pour les graphes cubiques et planaires sur ce paramètre, pour plus de détaille (Voir [26]).

2.5.5 Partition alliance

Le nombre de partition en alliance a été défini dans [14] comme suit:

Définition 2.59. *Le nombre de partition en alliance d'un graphe G noté ψ_a est le nombre maximum d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance. De même le nombre de partition en alliance globale ψ_g est le nombre maximal d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance globale, c'est à dire chaque ensemble est une alliance et un ensemble dominant.*

Dans ce qui suit on donne quelques résultats existants sur le nombre de partition en alliance globale ψ_g . Le théorème suivant établi par Eroh et Gera dans [22], donne une borne sur ψ_g pour tout graphe connexe en fonction de degré minimum δ .

Théorème 2.60 (Eroh et Gera [22] 2007). *Soit G un graphe connexe de degré minimum δ . Alors $1 \leq \psi_g(G) \leq 1 + \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$. Et cette borne est atteinte.*

Comme conséquence immédiate, ils obtiennent le corollaire suivant.

Corollaire 2.61 (Eroh et Gera [22] 2007). *Soit G un arbre d'ordre $n \geq 3$. Alors $1 \leq \psi_g(G) \leq 2$.*

Il existe plusieurs résultats sur ce concept. Pour plus de détail sur cette notion, voir [13], [33] et [34].

CHAPITRE 3

LES ALLIANCES GLOBALES DANS LES ARBRES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on exposera notre contribution à l'étude des alliances globales dans les arbres. On montre que tout arbre T d'ordre au moins trois avec ℓ feuilles et s sommets supports satisfait $\gamma_o(T) \geq (n - \ell + s + 1)/3$. Par ailleurs on caractérise les arbres extrémaux atteignant cette borne inférieure ainsi qu'une caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de domination et le nombre d'alliance offensive globale sont égaux. Nous montrons aussi que pour tout arbre T , $\gamma_o(T) \leq 2\gamma(T) - 1$ et nous caractérisons les arbres extrémaux atteignant cette borne. Ainsi nous donnons une borne inférieure sur γ_o pour les unicycles. D'autre part on donne une relation entre $\gamma_o(T)$ et $\gamma_a(T)$ pour tout arbre nontrivial T en montrant que $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$. On donnera des exemples d'arbres T pour montrer que la différence entre $(2\gamma(T) - 1)$ et $(\frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1)$ peut être très large même si $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$ ou bien $\gamma_o(T) = \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$. Nous établissons aussi deux bornes, une inférieure et l'autre supérieure sur le nombre d'alliance puissante globale dans la classe des arbres. Il est à signaler qu'une partie de ces résultats ont fait l'objet d'une publication et une communication à COSI'09 (voir [3]). Une autre partie de ces résultats a été soumise récemment pour publication [4].

3.2 Borne inférieure

On commence par donner quelques observations.

Observation 3.1. *Si G est un graphe connexe d'ordre au moins trois, alors il existe un $\gamma_o(G)$ -ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Observation 3.2. Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' en attachant l'étoile $K_{1,t}$ de centre x par une arête xz à un sommet support z de T' . Alors $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$.

Preuve. Par l'Observation 3.1, il y'a un $\gamma_o(T)$ -ensemble. D qui contient tous les sommets supports, d'ou $x, z \in D$. Donc $D - \{x\}$ est une aog de T' et $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - 1$. Puisque tout $\gamma_o(T')$ -ensemble peut être étendu en une aog de T en ajoutant le sommet x , alors $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 1$. Ce qui nous donne $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$. D'autre part si D' est un $\gamma(T')$ -ensemble, alors $D' \cup \{x\}$ est un ensemble dominant de T , ce qui implique que $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. L'égalité est atteinte par le fait que x, z appartiennent à un $\gamma(T)$ -ensemble et un tel ensemble sans le sommet x est un dominant de T' . \square

Soit \mathcal{F} la famille des arbres d'ordre aux moins trois qui peuvent être obtenus de r étoiles disjointes en ajoutant premièrement $r - 1$ arêtes incidentes seulement aux centres des étoiles, le graphe ainsi obtenu est connexe, ensuite en subdivisant chaque nouvelle arête exactement une seule fois. l'arbre de la Figure 3.1 est un exemple d'un arbre de \mathcal{F} .

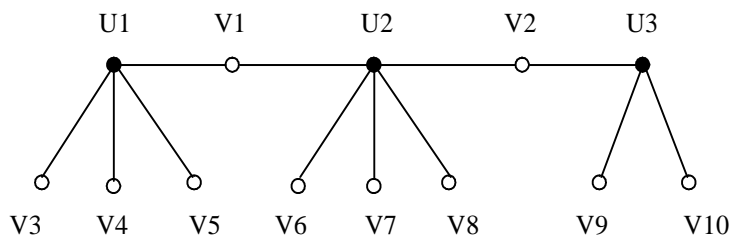


Figure 3.1

Théorème 3.3 (Bouzefrane et Chellali [3]). Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec ℓ feuilles et s sommets supports. Alors $\gamma_o(T) \geq (n - \ell + s + 1)/3$ avec l'égalité atteinte si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{F}$. Alors T contient $|S(T)| - 1$ sommets de degré deux et le reste des sommets sont des feuilles et des supports. Il s'ensuit que $n = \ell + 2s - 1$ et donc $s = (n - \ell + s + 1)/3$. Maintenant il est clair que chaque $\gamma_o(T)$ -ensemble contient au moins $|S(T)|$ sommets et donc $\gamma_o(T) \geq |S(T)|$. L'égalité est obtenu par le fait que $S(T)$ constitue une alliance offensive globale de T , ce qui implique que $\gamma_o(T) = |S(T)| = (n - \ell + s + 1)/3$.

Pour montrer que si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_o(T) \geq (n - \ell + s + 1)/3$ avec égalité seulement si $T \in \mathcal{F}$, on utilise une induction sur l'ordre n . Si le $\text{diam}(T) = 2$, alors T est une étoile, avec $\gamma_o(T) = 1 = (n - \ell + s + 1)/3$ et donc $T \in \mathcal{F}$. Si le $\text{diam}(T) = 3$, alors $\gamma_o(T) = 2 > (n - \ell + s + 1)/3$. On suppose maintenant que tout arbre T' d'ordre $3 \leq n' < n$ avec ℓ' feuilles et s' sommets supports satisfait $\gamma_o(T') \geq (n' - \ell' + s' + 1)/3$ avec l'égalité atteinte si et seulement si $T' \in \mathcal{F}$. Soit T un arbre d'ordre n et de diamètre au moins quatre, ayant ℓ feuilles et s sommets supports.

Nous enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit u un sommet support à distance maximum de r , v le père de u , et w le père de v dans l'arbre enraciné. Notons que $\deg_T(w) \geq 2$, car $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit D un $\gamma_o(T)$ -ensemble ne contenant aucune feuille. Notons par T_x le sous arbre induit par le sommet x et ses descendants dans l'arbre enraciné T . Nous distinguons entre trois cas.

Cas 1. v est un sommet support. Soit $T' = T - L_u \cup \{u\}$. Alors $n' = n - 1 - |L_u| \geq 3$, $\ell' = \ell - |L_u|$ et $s' = s - 1$. Par l'Observation 3.2, $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$ et par induction sur T' , on obtient $\gamma_o(T) > (n - \ell + s + 1)/3$.

Cas 2. v n'est pas un sommet support mais $\deg_T(v) \geq 3$. Ainsi tout fils de v est un sommet support. Soit k le nombre de fils de v et B l'ensemble des feuilles dans T_v . On suppose d'abord que $\deg_T(w) \geq 3$ et soit $T' = T - T_v$. Alors $n' = n - |B| - k - 1 \geq 3$, $\ell' = \ell - |B|$ et $s' = s - k$. Puisque D contient tous les fils de v et ne contient pas v (sinon remplacer v par w), $D \cap V(T')$ est une aog de T' . Il s'ensuit que $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - k$ et par induction sur T' on a

$$\gamma_o(T) \geq (n' - \ell' + s' + 1)/3 + k \geq (n - \ell + s + 1 + k - 1)/3.$$

Donc $\gamma_o(T) > (n - \ell + s + 1)/3$ puisque $k \geq 2$.

Maintenant on suppose que $\deg_T(w) = 2$ et soit $T' = T - (T_v - \{v\})$. Alors $n' = n - |B| - k \geq 3$, $\ell' = \ell - |B| + 1$ et $s' = s - k + 1$. Il est clair que D contient tous les fils de v et ne contient pas v (sinon remplacer v par w) et donc D doit contenir w . Ainsi $D \cap V(T')$ est une aog de T' et donc $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - k$. Par induction sur T' on a

$$\gamma_o(T) \geq (n' - \ell' + s' + 1)/3 + k \geq (n - \ell + s + 1 + k)/3$$

et donc $\gamma_o(T) > (n - \ell + s + 1)/3$.

Cas 3. $\deg_T(v) = 2$. Alors $u, w \in D$ et $v \notin D$. Supposons que $\deg_T(w) = 2$ ou $\deg_T(w) \geq 3$ et w n'est pas un sommet support. Soit $T' = T - (L_u \cup \{u\})$. Alors $D \cap V(T')$ est une aog de T' et donc $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - 1$. En utilisant l'induction sur T' et puisque $n' = n - 1 - |L_u| \geq 3$, $\ell' = \ell - |L_u| + 1$ et $s' = s$, on obtient

$$\gamma_o(T) \geq (n' - \ell' + s' + 1)/3 + 1 > (n - \ell + s + 1)/3.$$

On suppose enfin que $\deg_T(w) \geq 3$ et w est un sommet support. Soit $T' = T - (L_u \cup \{u, v\})$. Alors $D \cap V(T')$ est une aog de T' , $n' = n - 2 - |L_u| \geq 3$, $\ell' = \ell - |L_u|$ et $s' = s - 1$. D'où par induction sur T' , on a

$$\gamma_o(T) \geq \gamma_o(T') + 1 \geq (n' - \ell' + s' + 1)/3 + 1 \geq (n - \ell + s + 1)/3.$$

De plus si $\gamma_o(T) = (n - \ell + s + 1)/3$, alors on a l'égalité le long de cette chaîne d'inégalités. En particulier $\gamma_o(T') = (n' - \ell' + s' + 1)/3$. Ainsi par l'hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{F}$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{F}$. \square

3.3 Arbres T avec $\gamma_o(T) = \gamma(T)$

Observation 3.4. Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' en attachant une étoile subdivisée SS_k , $k \geq 2$, de centre x par une arête xy à un sommet y de T' . Alors

- a) $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - k$, avec l'égalité atteinte si y appartient à un $\gamma_o(T')$ -ensemble ou bien une majorité stricte de son voisinage fermé appartient à un $\gamma_o(T')$ -ensemble.
- b) $\gamma(T) = \gamma(T') + k$.

Preuve. **(a)** Par l'Observation 3.1, Il y a un $\gamma_o(T)$ -ensemble S qui contient tous les sommets supports de l'étoile subdivisée ajoutée. Aussi nous pouvons supposer que $x \notin S$ (sinon le remplacer par y). Ainsi $S \cap V(T')$ est une aog de T' et donc $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - k$. Maintenant si y appartient à un $\gamma_o(T')$ -ensemble ou la majorité stricte de son voisinage appartient à un $\gamma_o(T')$ -ensemble, alors de tels ensembles peuvent être étendus à une aog de T en ajoutant l'ensemble des sommets supports de SS_k . Il s'ensuit que $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + k$ et l'égalité sera donc atteinte.

(b) est facile à montrer. \square

Afin de caractériser les arbres pour lesquels les nombres de domination et d'alliance offensive globale sont égaux; nous définissons la famille \mathcal{F} de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) d'arbres, où $T_1 = P_2$, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des quatre opérations définies ci-dessous. Considérons l'un des sommets de T_1 un support et l'autre une feuille.

- **Opération \mathcal{O}_1** : Attacher un nouveau sommet en le joignant à un sommet support quelconque de T_i .
- **Opération \mathcal{O}_2** : Attacher une chaîne $P_2 = xy$ en joignant x à un sommet support z quelconque de T_i .
- **Opération \mathcal{O}_3** : Attacher une étoile subdivisée SS_k , $k \geq 2$, de centre u en joignant u à un sommet v de T_i avec la condition que si v n'appartient pas à un $\gamma_o(T_i)$ -ensemble D , alors la majorité stricte des sommets de $N_{T_i}[v]$ sont dans D .
- **Opération \mathcal{O}_4** : Attacher une chaîne $P_3 = xyz$ en joignant x à un sommet quelconque de T_i appartenant à un $\gamma_o(T_i)$ -ensemble.

l'arbre de la Figure 3.2 est un exemple d'arbre T de \mathcal{F} .

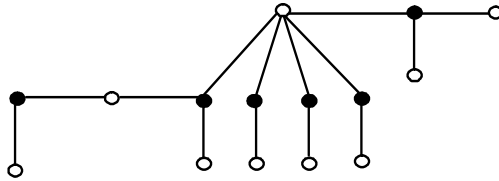


Figure 3.2 : Un arbre T de \mathcal{F}

Lemme 3.5. *Si $T \in \mathcal{F}$, alors $\gamma_o(T) = \gamma(T)$.*

Preuve. On utilise une induction sur le nombre d'opérations k exécutées pour construire l'arbre T . La propriété est vraie pour $T_1 = P_2$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de \mathcal{F} construits par $k-1 \geq 0$ opérations. Soit $T = T_k$ avec $k \geq 2$, $T' = T_{k-1}$, et soit D un $\gamma_o(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille de T . Nous examinons les cas suivants:

Il est clair que si T est obtenu à partir de T' par l'Opération O_1 , alors $\gamma_o(T') = \gamma_o(T)$, $\gamma(T') = \gamma(T)$ et donc $\gamma_o(T) = \gamma(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération O_2 , alors par l'Observation 3.2, $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. En Utilisant l'induction sur T' on trouve que $\gamma_o(T) = \gamma(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' par l'Opération O_3 , alors par l'Observation 3.4, $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + k$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + k$. Par induction sur T' , on a $\gamma_o(T) = \gamma(T)$.

Finalement on suppose que T est obtenu à partir de T' par l'Opération O_4 . Soit $w \in V(T')$ le voisin de x . Alors $y \in D$ et $x \notin D$ (sinon le remplacer par w). Ainsi $D \cap V(T')$ est une aog de T' et on a $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - 1$. Maintenant puisque w appartient à un $\gamma_o(T')$ -ensemble, un tel ensemble peut être étendu à une aog de T en ajoutant y . Donc $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 1$ et l'égalité est obtenue. Aussi on peut voir facilement dans ce cas que $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. Maintenant par induction sur T' , nous obtenons le résultat désiré. \square

Voici maintenant une caractérisation des arbres T telque $\gamma(T) = \gamma_o(T)$.

Théorème 3.6 (Bouzefrane et Chellali [3]). *Soit T un arbre. Alors $\gamma_o(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T = K_1$ ou bien $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Il est clair que si $T = K_1$, alors $\gamma_o(T) = \gamma(T)$. Si $T \in \mathcal{F}$, alors par le Lemme 3.5, $\gamma_o(T) = \gamma(T)$. Maintenant pour montrer la condition nécessaire on utilise une induction sur l'ordre n de T . Il est évident que $\gamma_o(K_1) = \gamma(K_1)$ et donc on suppose que $n \geq 2$. Si $n = 2$, alors $T = P_2$ et T appartient à \mathcal{F} . Si $n = 3$, alors $T = P_3$ qui appartient à \mathcal{F} puisque il est obtenu à partir de P_2 en utilisant l'Opération O_1 . Supposons que tout arbre T' d'ordre n' tel que $2 \leq n' < n$, satisfaisant $\gamma_o(T') = \gamma(T')$ est dans \mathcal{F} .

Soit T un arbre d'ordre n tel que $\gamma_o(T) = \gamma(T)$. Si T est une étoile $K_{1,t}$, alors $\gamma_o(T) = \gamma(T)$ et $T \in \mathcal{F}$ parcequ'elle est obtenue à partir de P_2 en utilisant l'Opération O_1 . Si T est une étoile double, alors $\gamma_o(T) = \gamma(T)$ et $T \in \mathcal{F}$ car elle est obtenue à partir de P_2 en utilisant l'Opération O_2 et O_1 . Ainsi on peut supposer que T est de diamètre au moins quatre.

Si un sommet support de T , disons x , est adjacent à deux feuilles ou plus, alors soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant une feuille adjacente à x . Alors $\gamma_o(T') = \gamma_o(T)$,

$\gamma(T') = \gamma(T)$ et donc $\gamma_o(T') = \gamma(T')$. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{F}$. Donc $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu par T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_1 . Pour la suite on peut supposer que tout sommet support de T est adjacent à exactement une feuille.

Nous enracinons maintenant T à un sommet r d'excentricité maximum, $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit v un sommet support à distance maximum de r , u le père de v , et w le père de u dans l'arbre enraciné. Soit v' l'unique feuille adjacente à v . Notons que $\deg_T(w) \geq 2$, car $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit D un $\gamma_o(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille. Nous distinguons entre trois cas.

Cas 1. u est un sommet support. Soit $T' = T - \{v, v'\}$. Alors par l'Observation 3.2, $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. Ainsi $\gamma_o(T') = \gamma(T')$ et par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{F}$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{F}$ et T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_2 .

Cas 2. u n'est pas un sommet support, mais a au moins un fils en plus de v comme support. Ainsi T_u est une étoile subdivisée. Soit $T' = T - T_v$. Alors par l'Observation 3.4, $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - k$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + k$, où k est le nombre de fils de v . Supposons maintenant que $\gamma_o(T') < \gamma_o(T) - k$, alors

$$\gamma_o(T') < \gamma_o(T) - k = \gamma(T) - k = (\gamma(T') + k) - k = \gamma(T')$$

et donc $\gamma_o(T') < \gamma(T')$, constitue une contradiction. D'où $\gamma_o(T') = \gamma_o(T) - k$ et $D' = D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble. Il s'ensuit que $\gamma_o(T') = \gamma(T')$. Notons que si $w \notin D'$, alors puisque D est un $\gamma_o(T)$ -ensemble, $|N_{T'}[w] \cap D'| > |N_{T'}[w] - D'|$. Appliquons l'hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{F}$, et donc $T \in \mathcal{F}$ parcequ'il est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_3 .

Cas 3. u est de degré deux. Soit $T' = T - \{v', v, u\}$. On peut voir que $\gamma(T') = \gamma(T) - 1$. Aussi $v \in D$, $u \notin D$ (sinon le remplacer par w), et donc $w \in D$. Par conséquent $D \cap V(T')$ est une *aog* de T' et $\gamma_o(T') < \gamma_o(T) - 1$. Maintenant si $\gamma_o(T') < \gamma_o(T) - 1$, alors

$$\gamma_o(T') < \gamma_o(T) - 1 = \gamma(T) - 1 = (\gamma(T') + 1) - 1 = \gamma(T')$$

et ainsi $\gamma_o(T') < \gamma(T')$, une contradiction. Donc $\gamma_o(T') = \gamma_o(T) - 1$ et $D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble qui contient w . Il s'ensuit que $\gamma_o(T') = \gamma(T')$ et par l'hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{F}$. Par conséquent $T \in \mathcal{F}$ et il est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_4 . \square

3.4 Arbres T tels que $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$

Dans [25] Lemanska à présenté dans la classe des arbres une borne inférieure sur le nombre de domination en fonction des nombres de sommets et de feuilles.

Théorème 3.7 (Lemanska [25] 2004). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma(T) \geq (n - \ell(T) + 2)/3$.*

Chellali dans [2] a établi une borne supérieure sur le nombre d'alliance offensive globale pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ avec ℓ feuilles et s sommets supports.

Théorème 3.8 (Chellali [2]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_o(T) \leq n - \ell(T) + s(T)/2$.*

En utilisant les Théorèmes 3.7 et 3.8, on obtient une borne supérieure sur le nombre d'alliance offensive globale dans les arbres.

Théorème 3.9 (Bouzeffrane et Chellali [4]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma(T) + (s(T) - 2)/2$.*

Preuve. D'après le Théorème 3.8, on a:

$$\gamma_o(T) \leq (n - \ell(T) + s(T))/2 = (n - \ell(T) + 2 - 2 + s(T))/2 = \frac{3}{2}((n - \ell(T) + 2)/3 + (s(T) - 2)/2)$$

Ainsi par le Théorème 3.7, on a $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma(T) + (s - 2)/2$. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 3.9, qui peut être étendu aux arbres d'ordre 1 et 2.

Corollaire 3.10 (Bouzeffrane et Chellali [4]). *Pour toute arbre T d'ordre n , $\gamma_o(T) \leq 2\gamma(T) - 1$.*

Preuve. Il est clair que le resultat est vrai si $n = 1, 2$. Supposons que $n \geq 3$. Puisque il existe un dominant contenant tout support, alors $\gamma(T) \geq s$, et par le Théorème 3.9,

$$\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma(T) + (\gamma(T) - 2)/2$$

d'ou $\gamma_o(T) \leq 2\gamma(T) - 1$. □

Puisque tout arbre T vérifie $\gamma(T) \leq i(T)$ on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.11 (Favaron [11] 2008). *Pour tout arbre T $\gamma_o(T) \leq 2i(T) - 1$.*

Dans ce qui suit on présente une caractérisation des arbres satisfaisant $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$.

Pour cela soit \mathcal{F} la famille des arbres d'ordre au moins trois qui peuvent être obtenus par t ($t \geq 1$) étoiles disjointes en ajoutant premièrement $t - 1$ arêtes incidentes seulement aux centres des étoiles, le graphe ainsi obtenu est connexe, ensuite en subdivisant chaque nouvelle arête exactement deux fois.

Théorème 3.12 (Bouzeffrane et Chellali [4]). *Si T est un arbre alors $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$ si et seulement si $T \in \{P_1, P_2\}$ ou bien $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Soit T un arbre d'ordre n tel que $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$. Si $\gamma_o(T) = 1$ alors $T = P_1$ ou P_2 ou T est une étoile d'ordre au moins trois qui appartient à \mathcal{F} . Donc on suppose que $\gamma_o(T) \geq 2$. Alors $n \geq 4$, et par le théorème 3.9, $2\gamma(T) - 1 = \gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma(T) + (s(T) - 2)/2$ ce qui implique que $s \geq \gamma(T) \geq s$ et donc $\gamma(T) = s$. Puisque tout arbre d'ordre au moins trois, il ya un $\gamma(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille, donc $S(T)$ est un $\gamma(T)$ -ensemble, qui est $N[S(T)] = V(T)$. On suppose que T a au moins deux supports. Soit u, v deux sommets supports de T . Si u et v sont adjacents. Soit T' le graphe obtenu de T en supprimant l'arête uv , et notons par T_u, T_v les arbres contenant u et v respectivement. Il est facile de voir que $\gamma(T_u) + \gamma(T_v) = \gamma(T)$. Soit D_u un $\gamma_o(T_u)$ -ensemble et D_v un $\gamma_o(T_v)$ -ensemble. Alors $D_u \cup D_v$ est une alliance offensive globale de T d'où, $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T_u) + \gamma_o(T_v)$. Par le corollaire 3.10, on obtient

$$\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T_u) + \gamma_o(T_v) \leq 2\gamma(T_u) - 1 + 2\gamma(T_v) - 1 \leq 2(\gamma(T_u) + \gamma(T_v)) - 2 < 2\gamma(T) - 1$$

, contradiction. Donc u et v ne sont pas adjacents. Supposons que x est un sommet adjacent à u et v . Soit T' le graphe obtenu de T en supprimant l'arête ux . Alors on peut voir que $\gamma(T_u) + \gamma(T_v) = \gamma(T)$ et que $D_u \cup D_v$ est une alliance offensive globale de T . D'où $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T_u) + \gamma_o(T_v)$. Par le Corollaire 3.10, on obtient aussi $\gamma_o(T) \leq 2\gamma(T) - 2$, et donc contradiction. Par conséquent tout sommet de $V - S(T)$ est adjacent à exactement

un seul support. Soit Q l'ensemble des sommets de degrés au moins deux dans $V - S(T)$. Donc $G[Q]$ est une forêt sans sommets isolés de taille $|Q|$. Soit D un $\gamma_o(Q)$ -ensemble. Alors par le théorème 3.8, $\gamma_o(Q) = |D| \leq \frac{|Q|}{2}$. D'un autre côté $D \cup S(T)$ est une alliance offensive globale de T , d'où

$$2\gamma(T) - 1 = \gamma_o(T) \leq |D \cup S(T)| \leq \frac{|Q|}{2} + s$$

Aussi sachant que $|E(T)| = |E(G(Q))| + |Q| + \ell$ et que $|E(T)| = |Q| + s + \ell - 1$, on en déduit que $|E(G(Q))| = s - 1$. D'où $|Q| = 2(s - 1)$. Maintenant

$$2\gamma(T) - 1 = \gamma_o(T) \leq \frac{|Q|}{2} + s \leq 2s - 1 = 2\gamma(T) - 1$$

Ainsi l'égalité est atteinte le long de cette chaîne d'inégalités, en particulier $|Q| = 2(s - 1)$ ce qui implique que $G[Q]$ est une forêt où chaque composante connexe est un P_2 d'où $x \in Q$, $d(x) = 2$ et donc $T \in \mathcal{F}$.

Inversement, si $T \in \{P_1, P_2\}$, alors $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$. Si $T \in \mathcal{F}$, alors $\gamma(T) = |S(T)|$, et l'ensemble de tous les sommets supports plus un sommet incidente avec chaque nouvelle arête forme une aog minimum de T de taille $2|S(T)| - 1 = 2\gamma(T) - 1$. \square

La Figure suivante nous donne un arbre T tel que $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$.

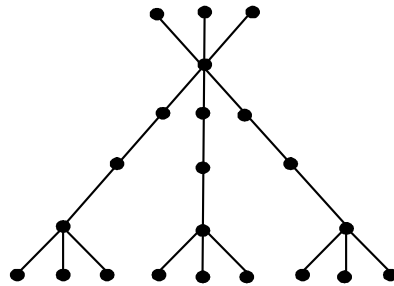


Figure 3.3: Un arbre T dans \mathcal{F}

3.5 Borne inférieure sur γ_o pour les unicycles

Le Théorème suivant établit une borne inférieure sur γ_o pour tout unicycle G , en fonction de ses sommets supports et ses feuilles ainsi que son ordre.

Théorème 3.13 (Bouzeffrane et Chellali [4]). *Si $G = (V(G), E(G))$ est un unicycle connexe d'ordre n ayant $\ell(G)$ feuilles et $s(G)$ sommet support alors, $\gamma_o(G) \geq (n - \ell(G) + s(G))/3$.*

Preuve. Soit G un unicycle de cycle C . Il est clair que $n \geq 3$. On utilise une induction sur l'ordre n . Le résultat peut être vérifié facilement pour $n = 3$ ou 4 . On suppose que tout unicycle d'ordre n' ayant ℓ' feuilles et s' sommets support satisfait, $\gamma_o(G') \geq (n' - \ell' + s')/3$. Soit G un unicycle d'ordre n et D un $\gamma_o(G)$ -ensemble contenant tous les sommets supports. Si G est un cycle C_n , alors $\gamma_o(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil > \frac{n}{3}$, d'où le résultat est vrai. Donc on suppose que G n'est pas un cycle en d'autres termes G contient au moins un sommet support. Soient x, y deux sommets consécutifs sur C et soit z l'autre voisin de y sur C . Examinons les cas suivants:

Cas 1. $x \in D$ et $y \notin D$

Cas 1.1. $C = C_3$.

Si $D \cap C = 2$ alors $z \in D$. Si $d(x) = d(z) = 2$, alors remplacer z par y dans D et supprimer l'arête yz . Maintenant supposons sans perte de généralité que $d(x) \geq 3$ et supprimons alors l'arête xz . Pour les deux situations précédentes, notons par G' le graphe obtenu. Alors G' est un arbre d'ordre $n' = n$, ayant ℓ' feuilles avec $\ell' \leq \ell + 1$, et s' supports avec $s' \geq s$. Puisque D reste une *aog* de G' on a, $|D| = \gamma_o(G) \geq \gamma_o(G')$. Par le Théorème 3.3, on obtient

$$\gamma_o(G) \geq \frac{n' - \ell' + s' + 1}{3} \geq \frac{n - \ell + s}{3}$$

Cas 1.2. $|V(C)| \geq 4$. Si $d(y) = 2$, alors $z \in D$, sinon D n'est pas une *aog*. Supprimons y et identifions x et z en un seul sommet, noté \overline{xz} . Alors G' est un unicycle d'ordre $n' = n - 2$, $\ell' = \ell$, $s' \geq s - 1$. D'autre part $(D - \{x, z\}) \cup \{\overline{xz}\}$ est une *aog* de G' . En utilisant l'induction sur G' on aura

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G') + 1 \geq \frac{n' - \ell' + s' + 1}{3} + 1 \geq \frac{n - 2 - \ell + s - 1}{3} + 1$$

et donc $\gamma_o(G) \geq \frac{n - \ell + s}{3}$.

Maintenant supposons que $d(y) \geq 3$. Alors y n'est pas un support sinon par le choix de D , $y \in D$. Soit w un voisin de y tel que $w \notin D$. Si un tel sommet n'existe pas, alors $N(y) \subset D$ et dans ce cas supprimons l'arête xy . Dans ce cas G' est un arbre d'ordre $n' = n$ avec $\ell' \leq \ell + 1$, $s' \geq s$. Par le Théorème 3.3,

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G') \geq \frac{n' - \ell' + s' + 1}{3} \geq \frac{n - \ell + s}{3}$$

Donc on peut supposer que w existe. Dans ce cas supprimer l'arête yw et n'ontons G' le graphe résultant. Si $w = z$ alors D reste une *aog* de G' qui est un arbre d'ordre $n' = n$ avec $\ell' \leq \ell + 1$, $s' \geq s$. En utilisant le Théorème 3.3 sur G' on obtient le résultat désiré. Supposons maintenant que $w \neq z$. Donc $z \in D$. Le graphe G' est composé de deux composantes connexes, l'une est un unicycle G'' et l'autre un arbre T' contenant w . A noter que T' est d'ordre $n' \geq 3$ car sinon y est un support (si $n' = 1$ ou bien w est un support, si $n' = 2$) et ces deux cas sont exclus par le choix de D . D'autre part on a $D \cap V(G'')$ et $D \cap V(T')$ sont deux alliances offensives globales de G'' et T' , respectivement, d'où on a

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G') = \gamma_o(G'') + \gamma_o(T')$$

A noter aussi que puisque $d(y) \geq 3$ et T' est un arbre d'ordre $n' \geq 3$, alors $\ell'' + \ell' \leq \ell + 1$ et $s'' + s' \geq s$. Maintenant en utilisant l'induction sur G'' et le Théorème 3.3 sur T' on obtient $\gamma_o(G) \geq \frac{n-\ell+s}{3}$.

Cas 2. $x, y \in D$. Si $d(x) = 2$, alors on peut remplacer x dans D par son second voisin sur C . Dans ce cas on obtient un nouveau $\gamma_o(G)$ -ensemble D' tel que $x \notin D'$, $y \in D'$ or ce cas à été déjà considéré (voir Cas1). Donc $d(x) \geq 3$ et par similarité $d(y) \geq 3$. Soit G' le graphe obtenu en supprimant l'arête xy . Alors G' est un arbre d'ordre $n' = n$ avec $\ell' = \ell$, $s' = s$. En utilisant le fait G' est un arbre et que D est une *aog* de G' alors le résultat découle facilement par le Théorème 3.3.

Cas 3. $x \notin D, y \notin D$. Alors forcément au moins l'un de x ou y est de degré ≥ 3 , sinon D n'est pas une *aog*. Supposons que $d(x) \geq 3$ et supprimons l'arête xy . On obtient un arbre G' , d'ordre $n' = n$ avec $\ell' \leq \ell + 1$, $s' \geq s$. Le reste de la preuve est similaire à celui utilisé précédemment. Ceci termine la preuve. \square

La Figure suivante montre que l'égalité est atteinte dans la borne du Théorème 3.13.

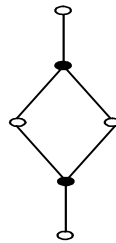


Figure 3.4

3.6 Relation entre le nombre d'alliance offensive globale et le nombre d'alliance défensive globale

Notons d'abord que les différences $\gamma_o - \gamma_a$, $\gamma_a - \gamma_o$ peuvent être larges même dans le cas des arbres. Pour voir, considérons l'étoile $S_{1,p}$. Il est clair que $\gamma_a(S_{1,p}) = 1 + \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ et $\gamma_o(S_{1,p}) = 1$, d'où $\gamma_a(S_{1,p}) > \gamma_o(S_{1,p})$.

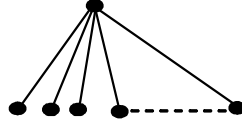


Figure 3.5

D'autre part, la figure suivante est un exemple d'arbre T tel que $\gamma_o(T) = 5 > \gamma_a(T) = 4$.

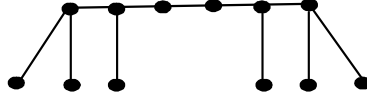


Figure 3.6

A notre connaissance aucune relation de la forme $\gamma_o(G) \leq f(\gamma_a(G))$ n'a été établie jusqu'à présent entre le nombre d'alliance offensive globale et le nombre d'alliance défensive globale. Nous montrons dans ce qui suit que γ_o est majoré par $\frac{3}{2}\gamma_a - 1$ pour tout arbre d'ordre $n \geq 3$.

Observation 3.14. *Si T est une double étoile $S_{p,q}$, alors $\gamma_o(T) = 2$ et $\gamma_a(T) = 2 + \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor$.*

Le Théorème suivant donne une relation entre le nombre d'alliance offensive globale et le nombre d'alliance défensive globale dans les arbres.

Théorème 3.15 (Bouzeffrane et Chellali [4]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$.*

Preuve. On utilise une induction sur l'ordre n de T . Si $\text{diam}(T) = 2$, alors T est une étoile $S_{1,p}$ où $\gamma_o(T) = 1$, $\gamma_a(T) = 1 + \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ et donc $\gamma_o(T) < \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$. Si $\text{diam}(T) = 3$,

alors T est une double étoile $S_{p,q}$ et par l'Observation 3.14, le résultat est vrai. Supposons que tout arbre T' d'ordre n' avec $3 \leq n' < n$ satisfait $\gamma_o(T') \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T') - 1$. Soit T un arbre d'ordre n et de diamètre au moins 4. Nous enracinons maintenant T vers un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit u un sommet support à distance maximum de r , v le père de u , w le père de v et z le père de w dans l'arbre enraciné. Soit S un $\gamma_a(T)$ -ensemble contenant le nombre minimum feuilles. Puisque tout fils de v est un support ou feuille, alors $v \in S$ et S contient $\left\lfloor \frac{|L_u|-1}{2} \right\rfloor$ feuilles de L_u . On distingue les cas suivants:

Cas 1. $|N[v] \cap S| > |N[v] \cap (V \setminus S)|$, c-à-d la majorité stricte de $N[v]$ est dans S .

Soit $T' = T - T_u$. Puisque $\text{diam}(T) \geq 4$, T' est d'ordre au moins trois. Par conséquent $S \cap V(T')$ est une adg de T' . D'où $\gamma_a(T') \leq \gamma_a(T) - 1 - \left\lfloor \frac{|L_u|-1}{2} \right\rfloor$. Aussi $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 1$ car tout $\gamma_o(T')$ -ensemble peut être étendu à une aog de T en ajoutant u . Par induction sur T' , on obtient

$$\gamma_o(T) - 1 \leq \gamma_o(T') \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T') - 1 \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{|L_u|-1}{2} \right\rfloor$$

et donc $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$.

Cas 2. Si $|N[v] \cap S| = |N[v] \cap (V \setminus S)|$. Il s'ensuit que v est un support. On distingue les deux sous cas suivants:

Cas 2.1. v est un support fort. Alors soit v' une feuille de v qui n'appartient pas à S . Soit $T' = T - \{u, v'\} \cup L_u$. Il est clair que $S \cap V(T')$ est une adg de T' , d'où $\gamma_a(T') \leq \gamma_a(T) - 1 - \left\lfloor \frac{|L_u|-1}{2} \right\rfloor$. Aussi $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 1$, car tout $\gamma_o(T')$ -ensemble peut être étendu en une aog de T en ajoutant u . Par induction sur T' , on obtient $\gamma_o(T) < \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$.

Cas 2.2. $|L_v| = 1$. Alors, les faits $v \in S$ et $|N[v] \cap S| = |N[v] \cap (V(T) - S)|$ impliquent que $\deg_T(v) = 3$ et $w \notin S$. Soit v' l'unique feuille adjacent à v . On suppose premièrement que le $\deg_T(w) \geq 3$. Si w est dominé par au moins deux sommets de S , alors soit $T' = T - T_v$. Il est clair que $S \cap V(T')$ est une adg de T' et donc $\gamma_a(T') \leq \gamma_a(T) - \left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor - 1$. Aussi si D est un $\gamma_o(T')$ -ensemble de T' . Alors $D \cup \{u, v\}$ est une aog de T , ce qui implique que $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 2$. Par induction sur T' on obtient

$$\gamma_o(T) - 2 \leq \gamma_o(T') \leq 3/2\gamma_a(T') - 1 \leq 3/2(\gamma_a(T) - \left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor - 1) - 1$$

et donc $\gamma_o(T) < 3/2\gamma_a(T) - 1$. Donc on suppose que v est l'unique voisin de w dans S . D'où w n'est pas un sommet support. On suppose que a est une feuille dans T_w

de distance trois par rapport à w avec $a \notin L_u$ et $a-b-c-w$ est l'unique chaîne de a à w . Alors selon le cas précédent et par notre choix de S les sommets b et c jouent le même rôle que u et v respectivement, et donc b, c appartiennent à S , qui contredit le fait que $N(w) \cap S = \{v\}$. Ainsi chaque feuille dans $T_w - T_v$ est à distance deux de w . En outre, toutes ces feuilles sont dans S , puisque $N(w) \cap S = \{v\}$. Il s'ensuit que tous les fils de w sauf v sont des sommets supports de degré deux. Soit $T' = T - T_w$, $Q \cup \{v\}$ est l'ensemble des fils de w et $L(Q)$ est l'ensemble des feuilles adjacentes à Q . Notons que $|Q| = |L(Q)|$. Puisque T est enracinée à une feuille r d'excentricité maximum, T' est non trivial. Si $|V(T')| = 2$, alors on peut voir que $\gamma_o(T) = 3 + |Q|$, $\gamma_a(T) \geq 3 + |L(Q)|$ et le résultat est vrai. D'où on suppose que $|V(T')| \geq 3$. Alors $S \cap V(T')$ est une adg de T' et donc $\gamma_a(T') \leq \gamma_a(T) - \left\lceil \frac{|L_u|}{2} \right\rceil - 1 - |L(Q)|$. D'autre part si D est un $\gamma_o(T')$ -ensemble de T' , alors $D \cup Q \cup \{u, v\}$ est une aog de T , ce qui implique que $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 2 + |Q|$. Par induction sur T' on obtient

$$\gamma_o(T) - 2 - |Q| \leq \gamma_o(T') \leq 3/2\gamma_a(T') - 1 \leq 3/2(\gamma_a(T) - \left\lceil \frac{|L_u|}{2} \right\rceil - 1 - |L(Q)|) - 1$$

Et donc $\gamma_o(T) < 3/2\gamma_a(T) - 1$.

Enfin supposons que $\deg_T(w) = 2$. Soit $T' = T - T_w$. Si T' est d'ordre un, alors $r \in S$ et $\{w\} \cup S - \{r\}$ est un $\gamma_a(T)$ -ensemble avec moins de feuilles que S , une contradiction. D'où $|V(T')| \geq 2$. Si $|V(T')| = 2$, alors r est un sommet support, et il est clair que $\gamma_o(T) = 3$, $\gamma_a(T) \geq 3$. Il s'ensuit que $\gamma_o(T) < 3/2\gamma_a(T) - 1$. Donc on suppose que $|V(T')| \geq 3$. Alors $S \cap V(T')$ est une adg de T' et donc $\gamma_a(T') \leq \gamma_a(T) - \left\lceil \frac{|L_u|}{2} \right\rceil - 1$. Si D est un $\gamma_o(T')$ -ensemble de T' , alors $D \cup \{u, v, w\}$ est une aog de T , ce qui implique que $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 3$. Par induction sur T' on obtient

$$\gamma_o(T) - 3 \leq \gamma_o(T') \leq 3/2\gamma_a(T') - 1 \leq 3/2(\gamma_a(T) - \left\lceil \frac{|L_u|}{2} \right\rceil - 1) - 1$$

et donc $\gamma_o(T) \leq 3/2\gamma_a(T) - 1$. Ceci termine la preuve du théorème. \square

On note que la différence entre $(\frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1)$ et $(2\gamma(T) - 1)$ peut être arbitrairement large même si $\gamma_o(T) = 2\gamma(T) - 1$. En considérons l'étoile $(S_{1,p})$.

Dans la figure ci-dessous, l'arbre T_k est formé à partir de $k \geq 1$ copies des chaînes P_4 en joignant chaque support de la chaîne P_4 au support de la chaîne P_4 suivante, puis

on subdivise chaque nouvelle arête exactement deux fois. On obtient $\gamma_o(T_k) = 3k - 1$, $\gamma_a(T_k) = 2k$ et $\gamma(T_k) = 2k$. avec $\gamma_o(T_k) = \frac{3}{2}\gamma_a(T_k) - 1$. Par conséquent $(2\gamma(T_k) - 1) - (\frac{3}{2}\gamma_a(T_k) - 1) = k$, et cela veut dire que la différence est très large.

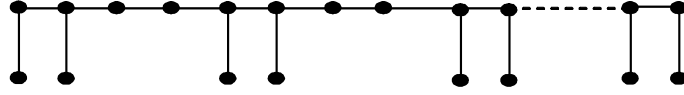


Figure 3.7 : Un arbre T_k avec $\gamma_o(T_k) = \frac{3}{2}\gamma_a(T_k) - 1$

Dans ce qui suit nous exposerons deux bornes obtenues sur le nombre d'alliance puissante globale dans les arbres.

3.7 Bornes sur le nombre d'alliance puissante globale

3.7.1 Le nombre d'alliance puissante globale

Rappelons la définition d'une alliance puissante globale. Une alliance globale d'un graphe G est dite puissante si elle est à la fois défensive et offensive. Le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} est le cardinal minimum d'une alliance puissante globale de G .

L'exemple de la Figure 3.8 représente un graphe G , où $S_1 = \{a, b, e, f\}$ est un $\gamma_o(G)$ -ensemble, $S_2 = \{c, e, g, d, f, k\}$ est un $\gamma_a(G)$ -ensemble et $S_3 = \{b, c, d, e, f, k, g\}$ est un $\gamma_{ap}(G)$ -ensemble.

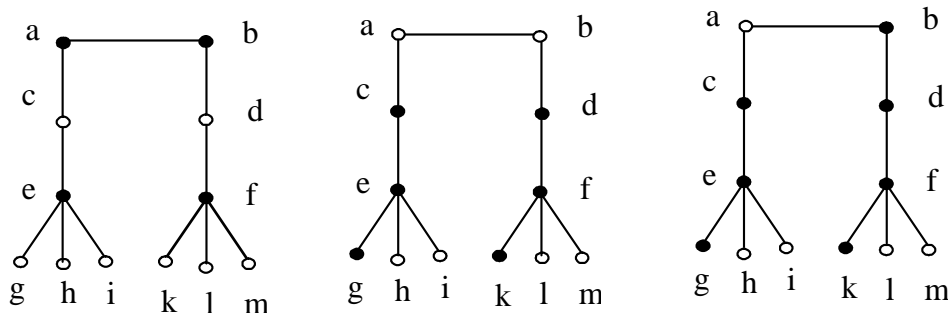


Figure 3.8: Un graphe G , où $\gamma_o(G) = 4$, $\gamma_a(G) = 6$ et $\gamma_{ap}(G) = 7$.

3.7.2 Borne supérieure

On commence par quelques observations:

Observation 3.16. *Si T est une étoile $S_{1,p}$, alors $\gamma_{ap}(S_{1,p}) = \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$.*

Observation 3.17. *Si T est une double étoile $S_{p,q}$ alors $\gamma_{ap}(S_{p,q}) = \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor$.*

Par le théorème suivant on donne une borne supérieure sur le nombre d'alliance puissante globale pour la la classe des arbres.

Théorème 3.18 (Bouzefrane et Chellali [5]). *Soit $T \neq S_{1,p}$ un arbre d'ordre $n \geq 4$ avec ℓ feuilles et s sommets supports. Alors $\gamma_{ap}(T) \leq (4n - \ell + s)/6$ et cette borne est atteinte.*

Preuve. Nous utilisons l'induction sur l'ordre n de T . Si $n \in \{4, 5\}$, alors $T = P_4$ ou P_5 ou $S_{1,2}$ et dans ce cas $\gamma_{ap}(T) < (4n - \ell + s)/6$. On suppose maintenant que chaque arbre T' d'ordre n' avec $4 \leq n' < n$, ayant ℓ' feuilles et s' sommets supports satisfait $\gamma_{ap}(T') \leq (4n' - \ell' + s')/6$. Soit T un arbre d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets supports. Si $\text{diam}(T) = 3$ alors $T = S_{p,q}$ et d'après l'Observation 3.17,

$$\gamma_{ap}(S_{p,q}) = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor \leq \frac{4(p+q+2) - (p+q) + 2}{6} < (4n - \ell + s)/6$$

Donc on peut supposer que T a un diamètre au moins égale à 4. Nous enracinons maintenant T vers un sommet r d'excentricité maximum. Il est clair que r est une feuille. Soit u un sommet support à distance $\text{diam}(T) - 1$ de r , v le père de u , et w le père de v dans l'arbre enraciné et soit S un $\gamma_{ap}(T)$ -ensemble. Considérons les deux cas suivants

Cas 1. $\deg_T(v) \geq 3$. Alors chaque fils de v est ou bien une feuille ou bien un sommet support. Soit $T' = T - L_u \cup \{u\}$. Alors $n' = n - 1 - |L_u|$, $\ell' = \ell - |L_u|$ et $s' = s - 1$. Donc il existe un $\gamma_{ap}(T')$ -ensemble S' contenant v . Un tel ensemble peut être étendu à une apg en ajoutons u et $\lfloor \frac{|L_u|-1}{2} \rfloor$ fils de u . D'où $\gamma_{ap}(T) \leq \gamma_{ap}(T') + 1 + \lfloor \frac{|L_u|-1}{2} \rfloor$. Il est clair que T' est différente d'une étoile. Et donc par induction sur T' , on obtient

$$\gamma_{ap}(T) \leq (4n - \ell + s)/6 + (-3|L_u| + 1)/6 + \left\lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \right\rfloor$$

Dans les deux cas ($|L_u|$ pair ou impair) on trouve que $\gamma_{ap}(T) < (4n - \ell + s)/6$.

Cas 2. $\deg_T(v) = 2$. Soit $T' = T - T_v$ et S' une apg de T' . Si T' est une double étoile $S_{1,p}$ alors son centre sera forcément un fils de r , disons z . Dans ce cas T sera

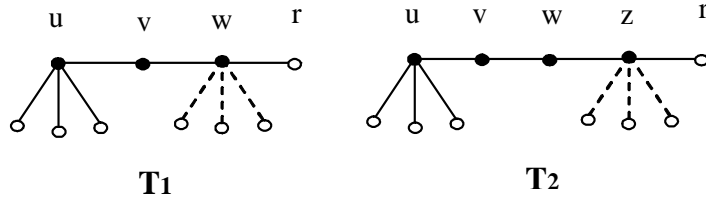
isomorphe à T_1 (si $z = w$) ou bien T_2 (si $z \neq w$), voir Figure ci-dessous. Si $T = T_1$ alors $n = |L_u| + p + 3 = l + 3$, $s = 2$ et ainsi

$$\gamma_{ap}(T) = 3 + \left\lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p - 1}{2} \right\rfloor < \frac{4(|L_u| + p + 3) - (|L_u| + p - 1) + 2}{6}$$

Maintenant si $T = T_2$, alors $n = |L_u| + p + 3 = l + 4$, $s = 2$ et ainsi

$$\gamma_{ap}(T) = 3 + \left\lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p - 1}{2} \right\rfloor < \frac{4(|L_u| + p + 3) - (|L_u| + p - 1) + 2}{6}$$

Dans les deux cas le résultat est vrai. Donc on peut supposer que $T' \neq S_{1,p}$.



Si $\deg_T(w) = 2$. Alors $n' = n - |L_u|$, $\ell' = \ell - |L_u| + 1$ et $s' \leq s$. Ajoutons u et v et $\lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \rfloor$ fils de u à S' on obtient une *apg* de T' . Il s'ensuit que $\gamma_{ap}(T) \leq \gamma_{ap}(T') + 2 + \lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \rfloor$. Par induction sur T' on a, $\gamma_{ap}(T) \leq (4n' - \ell' + s')/6 + 2 + \lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \rfloor$. Donc

$$\gamma_{ap}(T) \leq (4n - \ell + s)/6 + (-3|L_u| - 9)/6 + \left\lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \right\rfloor + 2$$

Pour les deux cas ($|L_u|$ pair ou impair) $\gamma_{ap}(T) \leq (4n - \ell + s)/6$. Maintenant si $\deg_T(w) \geq 3$, alors $n' = n - |L_u| - 2$, $\ell' = \ell - |L_u|$ et $s' = s - 1$. Ajoutons u et v et $\lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \rfloor$ fils de u à S' on obtient une *apg* de T . Il s'ensuit que

$$\gamma_{ap}(T) \leq (4n - \ell + s)/6 + (-3|L_u| - 9)/6 + \left\lfloor \frac{|L_u| - 1}{2} \right\rfloor + 2 \leq (4n - \ell + s)/6$$

Ceci termine la preuve. □

La Figure 3.9 nous donne un arbre T tel que $\gamma_{ap}(T) = (4n - \ell + s)/6$.

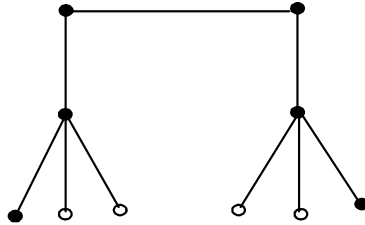


Figure 3.9

Dans la partie suivante on donne une borne inférieure du nombre d'alliance puissante globale pour tous les arbres T d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets supports.

3.7.3 Borne inférieure

Théorème 3.19 (Bouzefrane et Chellali [5]). *Soit T un arbre d'ordre n ayant ℓ feuilles et s sommets supports. Alors, $\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5$ et cette borne est atteinte.*

Preuve. Nous utilisons l'induction sur l'ordre n de T . Il est facile de vérifier que si $n \in \{2, 3\}$, alors $\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5$. Soit $n \geq 4$ et on suppose que tout arbre T d'ordre $n' < n$ satisfait $\gamma_{ap}(T') \geq (3n' - 2\ell' - s' + 2)/5$. Si T est une étoile alors par l'Observation 3.16,

$$\gamma_{ap}(T) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5 = (n + 3)/5$$

Donc on suppose $\text{diam}(T) \geq 3$. Nous enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum. Soit u un sommet support à distance maximum de r , v le père de u , et w le père de v dans l'arbre enraciné. Si $\deg_T(w) = 1$ alors T est une double étoile $S_{|L_u|, |L_v|}$ et le résultat est vrai. Donc on suppose que $\deg_T(w) \geq 2$. Soit S un $\gamma_{ap}(T)$ -ensemble qui contient le plus petit nombre de feuilles. On considère les cas suivants:

Cas 1. $|L_u| = k \geq 3$. Puisque chaque fils de v est ou bien une feuille ou bien un sommet support, alors par notre choix de S , il s'ensuit que $u, v \in S$ et S contient aussi $\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$ feuilles de L_u . Soit u' une feuille de L_u qui n'est pas dans S et soit $T' = T - (L_u - \{u'\})$. Alors $S \cap V(T')$ est une *apg* de T' et Donc $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$. Par induction sur T' et puisque $n' = n - k + 1$, $\ell' = \ell - k + 1$ et $s' = s$. On obtient,

$$\gamma_{ap}(T) \geq (3n' - 2\ell' - s' + 2)/5 + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1$$

Dans les deux cas (k pair ou impair) $\gamma_{ap}(T) > (3n - 2\ell - s + 2)/5$.

Cas 2. $1 \leq k \leq 2$. Alors $u, v \in S$ et $L_u \cap S = \emptyset$.

Cas 2.1 $\deg_T(v) \geq 3$. Si v un sommet support avec $|L_v| = p \geq 2$ ou bien v possède au moins un fils $b \neq u$ qui est un sommet support. Soit $T' = T - T_u$, alors $S - \{u\}$ est une *apg* de T' . Donc $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 1$. Par induction sur T' et puisque $n' = n - k - 1$, $\ell' = \ell - k$ et $s' = s - 1$. on obtient $\gamma_{ap}(T) > (3n - 2\ell - s + 2)/5$. Maintenant Si $p = 1$ c-à-d $\deg_T(v) = 3$. Si $w \in S$. Alors soit $T' = T - T_v$. D'où $S - \{u, v\}$ est une *apg* de T' . Donc $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 2$. Avec $n' = n - k - 3$, $\ell' \leq \ell - k - 1$, $s' = s - 2$. Par induction

sur T' , on obtient

$$\gamma_{ap}(T) \geq (3n' - 2\ell' - s' + 2)/5 + 2 = (3n - 2\ell - s + 2)/5 + (-k + 5)/5$$

et donc $\gamma_{ap}(T) > (3n - 2\ell - s + 2)/5$. Maintenant si $w \notin S$, ceci implique que w n'est pas un sommet support. Si $|N(w) \cap S| > |N(w) \cap (V \setminus S)|$. Posons $T' = T - T_v$, alors $n' = n - k - 3$, $\ell' \leq \ell - k$, $s' \leq s - 1$. Aussi $S \cap V(T')$ est une *apg* de T' . D'où $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 2$. et par induction sur T' , on obtient $\gamma_{ap}(T) > (3n - 2\ell - s + 2)/5$. Si $|N(w) \cap S| = |N(w) \cap (V \setminus S)|$, alors ceci implique que w n'est pas un sommet support et que $\deg_T(w) = 3$. Notons dans ce cas que tout fils de w est dans S et son parent z n'est pas dans S , alors il existe un sommet support à distance deux de w dans l'arbre T_w différent de u . Soit b, b' fils de w et b dans T_w respectivement. Notons que si b est un support alors $|L_b| = 1$ sinon une feuille de L_b est dans S on peut la changer donc par w . Aussi $1 \leq |L_{b'}| \leq 2$ analogiquement à $|L_u|$. Puisque $z \notin S$ alors $\deg_T(z) \geq 3$ (sinon S n'est pas offensive). Soit $T' = T - T_w$. Alors $n' = n - |V(T_w)| = n - (|L_u| - |L_b| - |L_{b'}| - 6)$, $\ell' = \ell - (|L_u| - |L_b| - |L_{b'}| - 1)$, $s' \leq s - 3$, et $S \cap V(T')$ est une *apg* de T' . Donc $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 4 \geq (3n' - 2\ell' - s' + 2)/5 + 4$. Par induction sur T' , on obtient

$$\gamma_{ap}(T) \geq (3(n - (|L_u| - |L_b| - |L_{b'}| - 6)) - 2(\ell - (|L_u| - |L_b| - |L_{b'}| - 1)) - s + 25)/5$$

et donc $\gamma_{ap}(T) > (3n - 2\ell - s + 2)/5$.

Cas 2.2 $\deg_T(v) = 2$. Si $|N(w) \cap S| > |N(w) \cap (V \setminus S)|$, alors $\deg_T(w) \geq 3$. Soit $T' = T - T_v$. D'où $n' = n - k - 2$, $\ell' = \ell - k$, $s' = s - 1$. Alors $S \cap V(T')$ est une *apg* de T' . Donc $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 2$. Par induction sur T' , on obtient

$$\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5 + (-k + 5)/5$$

et donc $\gamma_{ap}(T) > (3n - 2\ell - s + 2)/5$. Maintenant si $|N(w) \cap S| = |N(w) \cap (V \setminus S)|$, alors ou bien w est un sommet support fort et dans ce cas posons $T' = T - (T_v \cup \{w'\})$ où w' une feuille de w qui n'appartient pas à S . Alors $S \cap V(T')$ est une *apg* de T' . Donc $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 2$. Par induction sur T' , et le fait que $n' = n - 3 - k$, $\ell' = \ell - k - 1$, $s' = s - 1$, on obtient

$$\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5 + (-k + 4)/5$$

et donc $\gamma_{ap}(T) > (3n - 2\ell - s + 2)/5$, ou bien w n'est pas un sommet support et dans ce cas $w \notin S$ et $\deg_T(w) = 3$ car tout fils de w est dans S . Soit x, x' , fils de w et x dans T_w respectivement. Notons que $\deg_T(x) = 2$ (analogiquement à v et vu les cas déjà traités). Soit $T' = T - T_w$, T' est d'ordre $n' \geq 3$. Alors $S \cap V(T')$ est une *apg* de T' . Donc $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 4$, et puisque $n' = n - 5 - |L_u| - |L_{x'}|$, $\ell' = \ell - |L_u| - |L_{x'}| + 1$, $s' \leq s - 1$. Par induction sur T' on obtient

$$\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5 + (-|L_u| - |L_{x'}| + 4)/5$$

et puisque $1 \leq |L_{x'}| \leq 2$ (analogiquement à u). Alors $\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5$. Ceci termine la preuve. \square

La figure suivante nous montre un arbre T avec $\gamma_{ap}(T) = 4 = (3n - 2\ell - s + 2)/5$.

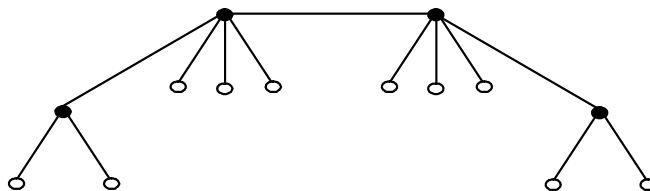


Figure 3.10

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des alliances dans les graphes. D'abord, nous avons établi une borne inférieure sur le nombre d'alliance offensive globale pour les arbres, et caractérisé les arbres extrémaux atteignant cette borne inférieure. De plus nous avons caractérisé les arbres pour lesquels le nombre de domination et le nombre d'alliance offensive globale sont égaux.

Dans un second lieu, nous montrons pour la classe des arbres que le nombre d'alliance offensive globale est inférieure où égale deux fois le nombre de domination moins un. On caractérise aussi les arbres extrémaux atteignant cette borne. Ainsi nous donnons une borne inférieure sur γ_o pour les unicycles. D'autre part on donne une relation entre $\gamma_o(T)$ et $\gamma_a(T)$ pour tout arbre non trivial T en montrant que $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$.

Enfin, nous avons établi une borne supérieure et une borne inférieure sur le nombre d'alliance puissante globale pour la classe des arbres

Par ailleurs, nous avons reçu, tout au long de ce mémoire, des problèmes non encore résolus. Nous proposons ces questions pour des recherches futures;

1. Caractérisation des autres classes de graphes tels que $\gamma_o(G) = \gamma(G)$.
2. Caractérisation des arbres tels que $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$.
3. Caractérisation des graphes tels que $\gamma_a(G) = \gamma(G)$.
4. Caractérisation des unicycles tels que $\gamma_o(G) = (n - \ell(G) + s(G))/3$.
5. Caractérisation des arbres tels que $\gamma_{ap}(T) = (4n - \ell + s)/6$.
6. Caractérisation des arbres tels que $\gamma_{ap}(T) = (3n - 2\ell - s + 2)/5$.
7. Caractérisation des graphes tels que $\gamma_{\delta}(G) = \gamma_2(G)$
8. Etendre les bornes obtenues à d'autres classes de graphes.
9. Trouver une relation entre $\gamma_{\delta}(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (*North Holland, Amsterdam, 1973*).
- [2] M. Chellali, Offensive alliances in bipartite graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput. Accepté*
- [3] M. Bouzefrane et M. Chellali, On the global Offensive alliance number of trees. *Opuscula Mathematica*, 29 (2009) 223-228.
- [4] M. Bouzefrane et M. Chellali, A note on global alliances in trees. *Soumis à publication, novembre 2009*.
- [5] M. Bouzefrane et M. Chellali, On the global powerful alliance number of trees. *En préparation*.
- [6] S. T. Hedetniemi et R. C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 3–9.
- [7] C. F. De Jaennish, "Application de l'analyse mathématique au jeu d'échecs", *Petrograd*, 1962.
- [8] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et M. A. Henning, Global defensive alliances in graphs. *The Electronic. J. Combin* 10 (2003) R47.
- [9] M. Chellali et T. W. Haynes, Global alliances and independence in trees. *Discuss. Math. Graph Theory* 27 (2007), 19 – 27.
- [10] M. Blidia, M. Chellali et O. Favaron, Independence and 2–domination in trees. *Austral. J. Combin.* 33 (2005) 317 – 327.
- [11] Odile Favaron. Global alliances and independent domination in some classes of graphs. *The Electronic. Journal of Combinatorics* 15 (1) R123 2008.
- [12] J. A. Rodriguez et J. M. Sigarreta, Spectral study of alliances in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 27 (1) (2007) 143- 157.

- [13] H. S. Khurram, Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering. *Phd thesis, School of Computer Science, University of Central Florida, Orlando*, 2001.
- [14] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi et S. T. Hedetniemi, Alliances in graphs. *The Journal of Combinatorial Mathematics et Combinatorial Computing*, 48 (2004), 157 – 177.
- [15] P. Kristiansen, S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi. *Introduction to alliances in graphs, IBID*, pp. 308 – 312, 2002.
- [16] J. M. Sigarreta et J.A. Rodríguez, On the global offensive alliance number of a graph. *Discrete Applied Mathematics* 157 (2) (2009) 219- 226.
- [17] M. Chellali, T. W. Haynes et L. Volkmann, Global offensive alliance numbers in graphs. with emphasis on trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 45 (2009) 87-96.
- [18] M. Chellali, T. W. Haynes, B. Randerath et L. Volkmann, Bounds on the global offensive k -alliance number in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 29 (2009) 597 – 613.
- [19] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, et S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs. *Discrete Math., Vol. 309, Issue 8 (2009)*, pp. 2140-2147.
- [20] A. Hansberg et L. Volkmann, On 2-domination and independence domination numbers of graphs. *Ars Combin., Accepté*.
- [21] L. Volkmann, Some remarks on lower bounds on the p -domination number in trees. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 61 (2007), 159 – 167.
- [22] Linda Eroh et Ralucca Gera, Global alliance partition in trees, *J. Combin. Math. Combin Comput.* 66 (2008), 161-169
- [23] J. A. Rodriguez-Velazquez, J. M. Sigarreta, offensive alliances in cubic graphs. *International mathematical forum* 1 (36) (2006) 1773-1782.
- [24] H. Fernau, J.A. Rodriguez et J.M. Sigarreta, offensive r -alliance in graphs, *Discrete Appl. Math.* 157 (2009) 177 – 182.

- [25] M. Lemanska, Lower bound on the domination number of a tree. *Discuss. Math. Graph Theory* 24(2) (2004) 165 – 169.
- [26] J. A. Rodríguez-Velázquez et J. M. Sigarreta, Global defensive k -alliances in graphs. *Disc Applied Math* 157 (2009) 211-218.
- [27] E. J. Cockayne, R. M. Dawes et S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. *Networks*, 10 (1980) 211 – 219.77
- [28] J. F. Fink et M. S. Jacobson, n -domination in graphs in Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. *Y. Alavi and A.J. Schwenk (eds)*, (1985) (Kalamazoo, MI 1984) Wiley.
- [29] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. *Networks*, 7 (1977) 247 – 261.
- [30] S. T. Hedetniemi et R. C. Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of parameters. *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 257 – 477.
- [31] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Fundamentals of domination in Graphs. *Marcel Dekker New York*, 1998.
- [32] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Domination in Graphs. Advanced Topics. *Marcel Dekker New York* 1998.
- [33] T. W. Haynes et J. A. Lachniet, The alliance partition number of grid graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 4 (1) (2007) 51-59.
- [34] L. Eroh et R. Gera, Alliance partition number in graphs. *Soumis à publication Janvier* 2007.
- [35] O. Ore, Theory of graphs, *Amer. Math soc. Colloq. Publ.* 38 (1962).