

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences**  
Département de Mathématiques

**MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Recherche opérationnelle

**RELATIONS ET RAPPORTS ENTRE QUELQUES PARAMETRES DE  
DOMINATION DANS LES GRAPHS**

Par

**Dalila RABER**

Devant le jury composé de :

M. BLIDIA  
A. DERBALA  
I. BOUCHEMAKH  
M. MIHOUBI

Professeur, U. de Blida  
Maître de conférences A, U. de Blida  
Professeur, USTHB, Alger  
Maître de conférences A, USTHB

Président  
Promoteur  
Examinatrice  
Examineur

Blida, mai 2012

## RESUME

Dans un graphe simple  $G = (V, E)$ , un sous ensemble  $S \subseteq V$  est un dominant de  $G$  si tout sommet de  $V-S$  est adjacent à au moins un sommet de  $S$ . La cardinalité minimum d'un ensemble dominant de  $G$  est notée  $\gamma(G)$ . Si des conditions supplémentaires sont imposées à l'ensemble dominant, on obtient de nouveaux types de domination. Dans l'exemple où on impose que tout sommet de  $S$  possède au moins un voisin dans  $S$ , la domination totale peut être définie. La cardinalité minimum de  $S$  est  $\gamma_t(G)$ . Notre travail consistait à établir dans les arbres des relations et des rapports entre quelques paramètres de domination. On a établi des bornes et des rapports des paramètres  $\Gamma_t, \gamma_t, \gamma_{pr}, \beta, \beta_2, \Gamma, \gamma, \gamma_{x2}, \gamma_2, i, i_2$ . Des bornes supérieures pour les rapports associés à la domination totale  $\Gamma_t$  et d'autres, à savoir  $\beta_2, \gamma, i, \gamma_t, i_2, \gamma_2$  sont déterminées. Une borne supérieure et une autre inférieure améliorées à celle établis auparavant pour  $\gamma_t / \beta$  et  $\beta$  respectivement sont fournies. Un encadrement pour  $\beta_2$  est réalisé et des bornes supérieures pour  $\gamma_{pr} / \beta, \gamma_{pr} / \beta_2, \gamma_{pr} / \gamma_{x2}$  sont établis. Une comparaison entre  $\gamma_{x2}, \gamma_2, i, \beta_2$  et  $i_2$  est faite.

## ABSTRACT

In a simple graph  $G = (V, E)$ , a subset  $S \subseteq V$  is a dominant of  $G$  if every vertex of  $V-S$  has at least neighbour in  $S$ . The minimum cardinality of a dominating set of  $G$  is denoted  $\gamma(G)$ . When extra conditions on the dominating set are imposed, new types of domination can be get. In the case where we impose that every vertex of  $S$  has at least a neighbor in  $S$ , the total domination is defined. The minimum cardinality of  $S$  is  $\gamma_t(G)$ . Our work consists to establish relations and bounds of ratios between some parameters of domination n particular graph as trees. Bounds on ratios of parameters  $\Gamma_t, \gamma_t, \gamma_{pr}, \beta, \beta_2, \Gamma, \gamma, \gamma_{x2}, \gamma_2, i, i_2$  are established. Upper bounds for ratios associate to the total domination  $\Gamma_t$  and others, as  $\beta_2, \gamma, i, \gamma_t, i_2, \gamma_2$  have been determined. An improved upper and lower bounds than that established before for  $\gamma_t / \beta$  and  $\beta$  respectively have been provided. An investigation has been carried out for  $\beta_2$  and upper bounds for  $\gamma_{pr} / \beta, \gamma_{pr} / \beta_2, \gamma_{pr} / \gamma_{x2}$  is stated. A comparison between  $\gamma_{x2}, \gamma_2, i, \beta_2$  and  $i_2$  has made.

## ملخص

في بيان بسيط  $G = (V, E)$  ، المجموعة الجزئية  $V \subseteq S$  مسيطرة في  $G$  إذا كان كل رأس من  $S-V$  يملك جاراً علي الأقل في  $S$  يرمز للأصلي الأدنى لمجموعة مسيطر  $\gamma(G)$  . تعرف وسائط جديدة للسيطرة بفرض شروط إضافية علي المجموعة المسيطرة. في المثال الذي نفرض أن كل رأس من  $S$  يملك جاراً علي الأقل في  $S$ ، نحصل علي السيطرة الكلية. الأصلي الأدنى لـ  $S$  هو  $\gamma_i(G)$  . عملنا يتعلّق بإيجاد علاقات وحدود لنسب بعض الوسائط المسيطرة في الأشجار. أعطينا حدود لنسب وسائط السيطرة  $\beta, \gamma_2, \gamma_{pr}, \Gamma, \beta_2, \Gamma, \gamma, \gamma_i, \gamma_{x2}, i, i_2$  . كذا حدود عليا لنسب مرتبطة بالسيطرة الكلية وأخري، مثل  $\beta_2, i, \gamma, \gamma_i, i_2, \gamma_2$  . حد أعلى وآخر أدني محسن عن الذي أعطي من قبل من أجل  $\beta / \gamma_i$  و  $\beta$  علي التوالي. حققنا حسرا لي  $\beta_2$  وحدود عليا لـ  $\beta / \gamma_{pr}, \gamma_{pr} / \beta_2, \gamma_{pr} / \gamma_{x2}$  . أنجزنا مقارنة بين  $\beta_2, i, \gamma_2, \gamma_{x2}$  و  $i_2$  .

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord, notre vénéré Allah,  
Le tout puissant, à qui nous devons le tout.

Je tiens à exprimer mes gratitudes et mes vifs et sincères remerciements envers mon promoteur Monsieur Ali Derbala pour ses précieux conseils et ses judicieuses suggestions.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Blidia pour avoir accepté d'être président de jury.

Je remercie également les professeurs Bouchmemakh et Mihoubi, professeurs à l'USTHB , pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être membres de ce jury .

Je tiens à remercier Monsieur Tami, chef de département de Mathématiques de l'université Saad Dahlab de Blida , les professeurs Bezina et Chellali pour leurs encouragements.

Je ne saurais oublier de remercier mes chers parents, qui étaient toujours à mes cotés et m'ont tant aidé et soutenu. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude et ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent également à mon mari Monsieur Nacef , de m'avoir aidé pour la réalisation de ce mémoire, à mes deux enfants Riadh et Amina, à ma sœur Khalida et mon frère Farouk pour leurs encouragements.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance à l'ensemble des professeurs qui ont contribué à ma formation.

Je remercie tous mes camarades et compagnons de recherche du département de mathématiques pour leur éternelle bonne humeur et leur sympathie.

# TABLE DES MATIERES

RÉSUMÉ	
REMERCIEMENTS	
TABLE DES MATIERES	
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES	
LEXIQUE	9
INTRODUCTION	11
1. NOTION DE DOMINATION DANS UN GRAPHE	
1.1 Introduction	14
1.2 Quelques paramètres structurels d'un graphe	15
1.3 Définitions de domination dans les graphes	16
1.4 Quelques types de domination	16
1.4.1 L'indépendant	16
1.4.2 L'irrédundant	17
1.4.3 La domination totale	18
1.4.4 La domination double	20
1.4.5 La domination couplée	20
1.4.6 La domination multiple	21
1.5 Problèmes étudiés	21
2. RAPPORTS EXISTANT ENTRE QUELQUES PARAMÈTRES DE DOMINATION	
2.1 Les bornes supérieure pour les paramètres $\gamma$ , $ir$ , $i$	22
2.2 Comparaisons entre $\gamma$ , $\gamma_t$ , $\gamma_{pr}$	24
2.2.1 Les rapports $\gamma/\gamma_t$ , $\gamma/pr$ , $\gamma_t/\gamma_{pr}$	24
2.2.2 Les rapports $\gamma_t/\gamma$ , $\gamma_{pr}/\gamma$ , $\gamma_{pr}/\gamma_t$	25
2.3 Le rapport $\gamma/\gamma_{x2}$	26
2.4 Les rapports $\gamma_{pr}/\gamma_{x2}$ , $\gamma_t/\gamma_{x2}$	27

2.5 Les rapports $\gamma_{x2}/\gamma$ , $\gamma_{x2}/\gamma_t$ , $\gamma_{x2}/\gamma_{pr}$ , $\gamma_{x2}/\beta$	29
2.6 Les rapports $\beta/\gamma$ , $\beta/\gamma_t$ , $\beta/\gamma_{pr}$	31
2.7 Le rapport $\beta/\gamma_{x2}$	32
2.8 Les rapports $\gamma/\beta$ , $\gamma_t/\beta$ , $\gamma_{pr}/\beta$	33
2.9 Comparaisons entre $\beta$ , $\gamma_2$ , $\beta$ et $\gamma_t$	34
2.9.1 Les rapports $\beta/\gamma_2$ et $\gamma_2/\beta$	34
2.9.2 Une inégalité entre $\gamma_2$ et $\beta_2$	36
2.10 Comparaisons entre $ir(G)$ et $\gamma(G)$	37
3. QUELQUES RAPPORTS DE PARAMÈTRES DE DOMINATION DANS LES ARBRES	
3.1 Définitions et résultats préliminaires	42
3.2 Nouveaux rapports	46
3.2.1 Rapports non bornés supérieurement	46
3.2.2 Les rapports $\Gamma_t/\beta_2$ , $\Gamma_t/\beta$	47
3.2.3 Le rapport $\gamma_t/\beta$	51
3.2.4 Les rapports $\beta_2/\gamma_{x2}$ , $\Gamma/\gamma_{x2}$	54
3.3 Bornes supérieures sur $\gamma_{pr}$	57
3.4 Comparaisons entre $\gamma_{x2}$ , $\gamma_2$ , $i$ , $\beta_2$ et $i_2$	60
3.5 Synthèse sur les rapports de domination	62
CONCLUSION	64
ANNEXE	
A : Rappel des notions des graphes	65
B : Liste des symboles	74
REFERENCES	75

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1.1	Les reines dans un échiquier	14
Figure 1.2	Un arbre $T$	17
Figure 1.3	Illustration d'irrédondance dans les graphes	18
Figure 1.4	Un hypercube représente un problème d'informatique	19
Figure 2.1	La famille des graphes $\mathcal{A}$ .	23
Figure 2.2	Une famille des graphes tel que $\gamma(G)=2n/5$	23
Figure 2.3	Le graphe $L_k$ et le graphe $B_k$	25
Figure 2.4	La famille des graphes $H$	27
Figure 2.5	Le graphe $J_5$	28
Figure 2.6	Le graphe $M_{k,p}$ et le graphe $R_k$	29
Figure 2.7	Les graphes $Q_k, S_k, T_k, W_k, Z_k$	30
Figure 2.8	Un graphe $G$ tel que $\beta(G)-\gamma_{x2}(G)=k-2 \rightarrow \infty$ si $k \rightarrow \infty$	32
Figure 2.9	Un graphe sans griffe tel que: $\gamma_{pr}(G)=\gamma_t(G)=2\gamma(G)$	33
Figure 2.10	Un arbre $T$ de la famille $\mathcal{H}$	35
Figure 2.11	Un unicycle graphe $G$ tel que: $3ir(G)=2\gamma(G)$	38
Figure 2.12	Le bloc graphe $G$ tel que: $3ir(G)=2\gamma(G)$ .	38
Figure 2.13	Les graphe $G_1, G_2, G_3$	39
Figure 2.14	Le graphe $G_3$ .	41
Figure 3.1	Le graphe $\mathcal{F}_p$	46
Figure 3.2	Le graphe $G_p$	46
Figure 3.3	Un arbre tel que : $\gamma_t(T_k)-\gamma(T_k)=k$	47
Figure 3.4	La 2-couronne d'une chaîne $P_{2k}$	54
Figure 3.5	Un arbre de la classe $\mathcal{H}_p$	57

Figure 3.6	Un arbre $T_k$	59
Figure 3.7	Un arbre $T_k$	60
Figure 3.8	Une chenille	61
Figure A.1	Représentation graphique d'un (8,9)-graphe $G$	65
Figure A.2	Un graphe $G$ et un sous graphe de $G$	66
Figure A.3	Un cycle d'ordre 5 et une chaîne de longueur 3	67
Figure A.4	Illustration d'un point d'articulation	68
Figure A.5	Illustration d'un isthme	68
Figure A.6	Représentation d'un graphe $G$ et son complémentaire $\overline{G}$	69
Figure A.7	Représentation d'un 3-régulier (cubique) et 4-régulier	69
Figure A.8	Le graphe complet $K_5$	69
Figure A.9	Illustration des arbres	70
Figure A.10	Quelques arbres particuliers	71
Figure A.11	Illustration du concept des cactus graphes	71
Figure A.12	Illustration de la couronne de la chaîne $P_4$	72
Figure A.13	Le graphe biparti complet $K_{3,3}$	72
Figure A.14	Un graphe sans griffe	73
Figure A.15	Illustration du concept des blocs graphes	73
Tableau 2.1	Bornes inférieure et supérieure pour $\delta$ et $\gamma$	24
Tableau 3.1	Partie 1 : Rapports entre quelques paramètres	62
Tableau 3.2	Partie 2 : Rapports entre quelques paramètres	63

## LEXIQUE

**Arête :** Une *arête* relie deux sommets dans un graphe. On appelle ces deux sommets les extrémités de l'arête .

**Sommet :** Un *sommet* est un noeud du graphe. C'est l'extrémité d'une arête.

**Adjacent :** Deux sommets d'un graphe  $G$  sont dits *adjacents* s'il existe une arête de  $G$  joignant ces deux sommets.

**Boucle :** Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues.

**Chaîne :** Une *chaîne* dans un graphe est une suite de sommets reliés par des arêtes. la longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes utilisées.

**Cardinalité :** Le nombre des éléments dans un ensemble est appelé *cardinalité*.

**Clique :** Une *clique* est un sous-graphe complet d'un graphe  $G$ . L'ordre de la plus grande clique de  $G$  est noté  $\omega(G)$ .

**Cycle :** Un *cycle* est une chaîne d'ordre  $n \geq 3$ , dont les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, Un graphe qui consiste en un seul cycle d'ordre  $n$  est appelé un unicycle et noté  $C_n$ .

**Acyclique :** Un graphe  $G$  est dit *acyclique* s'il ne contient pas de cycle.

**Corde :** Une *corde* d'un cycle élémentaire est une arête qui relie deux sommets non consécutifs de ce cycle.

**Couronne :** Une *couronne* d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de  $G$  un nouveau sommet.

**Sommet pendant :** Un sommet est dit *pendant* si la cardinalité de son voisinage ouvert est égal à 1. Aussi appelé *feuille* si le graphe est un arbre.

**Sommet fils :** Dans un arbre, les sommets adjacents à un sommet donné du niveau supérieur sont appelés  *fils*  de ce sommet. Les *descendants* d'un sont les sommets qui sont le fils, ou le fils du fils, etc., d'un sommet donné.

**Ensemble d'arêtes :** L'ensemble  $E(G)$  comporte toutes les arêtes de graphe  $G$  est appelé l'*ensemble d'arêtes* de graphe.

**Ensemble indépendant :** Un sous ensemble des sommets  $S$  d'un graphe  $G$  est appelé *indépendant* si les sommets de  $S$  ne sont pas adjacents deux à deux.

**Ensemble indépendant maximal :** Un ensemble indépendant  $S$  des sommets dans un graphe  $G$  est appelé *ensemble indépendant maximal* s'il n'est sous ensemble propre d'aucun autre ensemble indépendant de  $G$ .

**Ensemble dominant minimal :** Un ensemble dominant  $S$  d'un graphe  $G$  est appelé un *ensemble dominant minimal* s'il ne contient pas de sous ensemble propre qui soit un ensemble dominant de  $G$ .

**Graphe partiel :** Un graphe  $H$  est appelé graphe partiel d'un graphe  $G$  si  $V(H) = V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Sous graphe partiel :** Un graphe  $H$  est appelé *sous graphe* d'un graphe  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Sous graphe induit :** Un sous graphe induit est un sous-ensemble de sommets avec toutes les arêtes du graphe reliant les sommets de ce sous-ensemble.

**Racine :** Sommet distingué d'un arbre .

**Saturé :** Un sommet appartenant à une arête d'un couplage est dit *saturé*.

**Réduit :** Si une arête  $e$ , est enlevée d'un graphe  $G$ , le graphe résultant, noté  $G'_e$  est appelé le *graphe réduit*.

**Voisinage ouvert :** Le *voisinage ouvert* d'un sommet  $v$  dans un graphe  $G$  est l'ensemble de tous les sommets adjacents à  $v$  dans  $G$ , il est noté  $N_G(v)$ .

Le voisinage ouvert d'un ensemble  $S$  dans  $G$  est défini par  $N_G(S) = \cup_{v \in S} \{N_G(v)\}$ .

**Voisinage fermé :** Le *voisinage fermé* d'un sommet  $v$  dans un graphe  $G$  est l'ensemble de tous les sommets adjacents à  $v$  dans  $G$  et contenant  $v$ , il est noté  $N_G[v]$ .

Le voisinage fermé d'un ensemble  $S$  dans  $G$  est défini par  $N_G[S] = \cup_{v \in S} \{N_G[v]\}$ .

**Degré :** Le *degré* d'un sommet  $v$  dans un graphe  $G$  est la cardinalité de voisinage ouvert de  $v$  dans  $G$ , il est noté  $d_G(v)$ .

**Incident :** Un sommet  $v$  et une arête  $e$  d'un graphe  $G$  sont dits incidents, si  $v$  est une extrémité de  $e$  dans  $G$ .

**Ordre :** La cardinalité de l'ensemble des sommets  $V(G)$  du graphe  $G$  est appelé l'*ordre* de  $G$ .

## INTRODUCTION

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle. Elle constitue un outil pour schématiser les modèles de liens et relations entre les objets. L'étude des graphes a commencé depuis le 18<sup>ième</sup> siècle par un problème de curiosité mathématique lorsque Euler a posé le célèbre problème du pont de Königsberg . Elle est devenue un instrument efficace pour résoudre de nombreux problèmes discrets que posent de nombreuses théories et contribue à résoudre de nombreux problèmes concrets de la vie courante

Elle s'est développée depuis la deuxième moitié du 19<sup>ème</sup> siècle grâce aux travaux d'Hamilton, Heawood, Kempe, Kirchoff, Petersen, Tait, etc. Elle a connu un essor depuis les années 30 donné par König, Hall, Kuratowski, Whitney, Erdö, Tutte, Edmonds, Berge, Lovász, Seymour, etc. Elle présente des liens évidents avec l'algèbre, la topologie, et des domaines de la combinatoire.

Elle regroupe des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un graphe, constitué par un ensemble de sommets qui peut représenter des individus, des objets, des situations etc, et qui sont reliés par des arcs ou arêtes symbolisant les relations existantes entre eux.

Des exemples peuvent être cités tels : les notions de flots et connectivité (exemple de fiabilité d'un réseau), couplage (exemple d'affectation), parcours eulérien (où un voyageur emprunte chaque arête du graphe appelé problème du postier chinois), parcours hamiltonien (qui passe par chaque sommet du graphe. Il est appelé problème du voyageur de commerce), coloration, ensemble stable, ensemble absorbant. Certains de ces problèmes (flot maximum, couplage maximum, parcours eulérien) peuvent être résolus efficacement mais la plupart sont classés difficiles .

Un des concepts intéressants de la théorie des graphe est celui de la domination.

Un sous ensemble de sommets  $D \subseteq V(G)$  de  $G$  est dit dominant si tout sommet  $v \in V(G) \setminus D$  est adjacent à au moins un sommet  $u \in D$ .

Un dominant est ainsi un sous ensemble de sommets qui absorbe tous les autres sommets.

Un ensemble dominant  $D$  est dit dominant minimal si aucun sous ensemble propre de  $D$  n'est dominant.

Le nombre de domination inférieur d'un graphe  $G$ , appelé aussi nombre de domination et est noté  $\gamma(G)$ , est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant minimal de  $G$ .

La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée nombre de domination supérieur, et est notée par  $\Gamma(G)$ .

Les problèmes des jeux d'échecs constituent un exemple de domination.

Berge (1958) a initié cette théorie de domination qui a connu un développement dès 1977 par les travaux de Cockayne et Hedetniemi [1]

Ses applications sont nombreuses et variées tels dans les réseaux de communication, de micro-processeurs, les problèmes de localisation, etc.

Plusieurs types de domination peuvent être définis en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants. Si un dominant doit être respectivement un stable, tout sommet du graphe soit dominé aux moins deux fois et que les sommets du dominant lui même soient couplés alors on définit respectivement la domination stable, la domination double et la domination couplée. Les plus petits cardinaux de ces ensembles dominants sont appelés respectivement les nombres de domination stable, domination double et domination couplée.

Ces paramètres sont en général difficiles à déterminer exactement. Nous recherchons à établir des inégalités entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité.

Des travaux sont effectués sur ces paramètres, des travaux étudiés auparavant par Blidia et al. etc.

En 2006, Blidia et al. [2] ont établi des relations et rapports concernant quelques paramètres de domination dans les graphes sans griffes.

Dans le cadre de ce mémoire de magistère, il ma demandé de s'inspirer de cet article ci-dessus et de chercher ou généraliser d'autres résultats concernant les rapports et les

relations entre quelques paramètres de domination dans les graphes quelconques.

Trois chapitres fondamentaux sont développés.

Le premier chapitre contient des définitions et des notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire, et un aperçu général sur la domination, l'indépendance et l'irrédondance, ainsi que quelques paramètres de domination dans les graphes

Dans le chapitre deux, nous donnons un bref aperçu des principaux résultats de la littérature sur les bornes et rapports entre les paramètres de domination.

Dans le chapitre trois, les différents résultats obtenus en collaboration avec Chellali, Favaron et Haynes [3] sont exposés.

Ils concernent les rapports entre les paramètres de domination dans les arbres. Des résultats préliminaires et quelques définitions sont données. Dans le second et le troisième paragraphe on établit des bornes supérieures pour les rapports  $\Gamma_t/\beta_2$ ,  $\Gamma_t/\gamma$ ,  $\Gamma_t/i$  et une amélioration pour le rapport  $\gamma_t/\beta$ . Dans le quatrième paragraphe, nous fournissons des bornes supérieures pour  $\beta_2/\gamma_{x_2}$  et des bornes supérieures sur  $\gamma_{pr}$ . Une comparaison entre  $\gamma_{x_2}$ ,  $\gamma_2$ ,  $i$ ,  $\beta_2$  et  $i_2$  est aussi faite. On termine ce chapitre par une synthèse sur quelques rapports de domination dans les arbres.

La thèse s'achève par une conclusion et les perspectives futures de recherche dans ce domaine.

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans un journal scientifique [3].

## CHAPITRE 1

### NOTIONS DE DOMINATION DANS UN GRAPHE

#### 1.1 Introduction

Le concept de domination dans les graphes trouve son origine dans le jeu d'échec, introduit par D. JAENICH [4]. Le principe de domination est de couvrir ou dominer l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu.

La figure ci-dessous montre un échiquier standard  $8 \times 8$  sur lequel est placée une reine ( $R$ ). D'après les règles du jeu d'échecs, une reine peut se déplacer ou dominer à n'importe quelle case horizontalement, verticalement ou diagonalement marquée par une croix ( $X$ ).

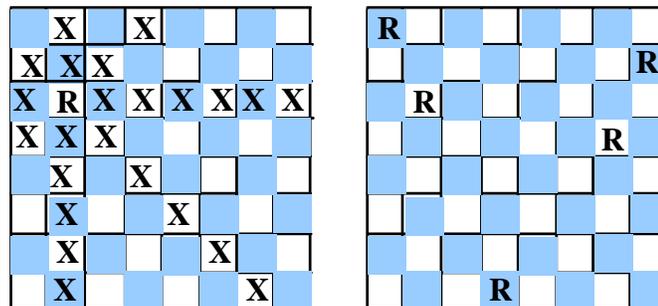


FIGURE 1.1: Les reines dans un échiquier

En 1850, les mathématiciens européens ont considéré le problème de la détermination du nombre minimum de reines qui peuvent être placées sur l'échiquier de telle sorte que toutes les cases de ce dernier soient dominées par une reine.

La FIGURE 1.1 montre un ensemble de 5 reines qui attaquent ou dominent toutes les cases de l'échiquier. 5 constitue le nombre minimum de reines pour dominer les cases d'un échiquier  $8 \times 8$ .

Dans un échiquier de taille  $n$ , ou échiquier  $n \times n$ , ce nombre de domination reste indéterminé [5].

En 1958, Berge [6] a formulé la domination dans les graphes orientés et appelée le nombre de domination *coefficient de stabilité externe*.

L'appellation actuelle du *nombre de domination* est due à Ore [7] qui utilisa la notion  $\gamma(G)$  pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté.

Pour les notions de base de la théorie des graphes voir Annexe A.

## 1.2 Quelques paramètres structurels d'un graphe

Un sous-ensemble  $A$  de  $V$  est *minimal* ( respectivement *maximal* ) par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas de sous-ensemble  $B \subseteq A$  (respectivement  $A \subseteq B$ ) tel que  $G[B]$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

Le cardinal d'un ensemble  $A$  noté  $|A|$  représente le nombre d'éléments de  $A$ .

Un sous-ensemble  $A \subseteq V$  est *minimum* ou de *taille minimale* (respectivement *maximum* ou de *taille maximale* ) par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq V$  tel que  $G[B]$  vérifie  $\mathcal{P}$  et  $|A| > |B|$  (respectivement  $|B| > |A|$ ).

Un sous-ensemble  $S \subseteq V$  est dit *stable* de  $G$  si les sommets de  $S$  sont non adjacents deux à deux.

Le cardinal minimum (respectivement maximum ) d'un stable maximal de  $G$  noté  $i(G)$  (respectivement  $\beta(G)$ ) est appelé le nombre de domination stable (respectivement le nombre de stabilité).

Un *couplage* dans un graphe  $G$  est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux.

On note par  $\beta_1(G)$  la taille maximale d'un couplage dans  $G$  et  $i_1(G)$  la taille minimale d'un couplage maximal.

UN couplage  $E$  est dit parfait dans  $G$  si tout sommet de  $V$  est incident à une arête de  $E$ . Dans le cas d'un couplage parfait,  $\beta_1(G)$  vaut  $\frac{n}{2}$ .

### 1.3 Définitions de domination dans les graphes

Un sous ensemble de sommets  $D \subseteq V(G)$  de  $G$  est dit ensemble *dominant* si tout sommet  $v \in V(G) \setminus D$  est adjacent à au moins un sommet  $u \in D$ .

Un dominant est un sous ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Un ensemble  $D$  est dit "*dominant minimal*" si aucun sous ensemble propre de  $D$  n'est un ensemble dominant.

Le *nombre de domination inférieur* (souvent appelé nombre de domination) noté  $\gamma(G)$ , d'un graphe  $G$  est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant minimal de  $G$ .

Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé  $\gamma(G)$ -ensembles.

Un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $\gamma(G)$ -ensembles.

Pour la chaîne  $P_4 = v_1v_2v_3v_4$ , on a  $\gamma(G) = 2$ .

$D_1 = \{v_1, v_3\}$ ,  $D_2 = \{v_2, v_3\}$ ,  $D_3 = \{v_1, v_4\}$  et  $D_4 = \{v_2, v_4\}$  sont des  $\gamma(G)$ -ensembles.

La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée *nombre de domination supérieur*, noté  $\Gamma(G)$ .

Un ensemble dominant dans un graphe peut être défini de plusieurs façons équivalentes chacune d'elle donne un aspect différent pour le concept de domination.

Une caractérisation est qu'un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant dans un graphe  $G$  si et seulement si :

- (i) Pour tout sommet  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap D| \geq 1$ .
- (ii) Pour tout sommet  $v \in V - D$ ,  $N(v) \cap D \neq \emptyset$ .
- (iii)  $N[D] = V$ .

L'introduction des conditions supplémentaires sur les sommets d'un dominant, a donné naissance à de nouveaux paramètres de domination.

### 1.4 Quelques types de domination

#### 1.4.1 L'indépendant

La notion de stabilité ou d'indépendance a été liée en premier aux ensembles dominants par le fait qu'un indépendant est maximal si et seulement si il est dominant minimal.

La cardinalité maximum des ensembles indépendants maximaux  $S$  est appelée *nombre d'indépendance* (ou *nombre de stabilité*) de  $G$  et est notée par  $\beta(G)$ .

La cardinalité minimum d'un tel ensemble  $D$  est appelée *le nombre de domination indépendante*, noté par  $i(G)$ .

L'arbre donné ci-dessous a trois ensembles indépendants maximaux :  $\{1, 2, 3, 6, 7\}$ ,  $\{1, 2, 3, 5\}$  et  $\{4, 6, 7\}$ . Alors,  $i(T) = 3$  et  $\beta(T) = 5$ .

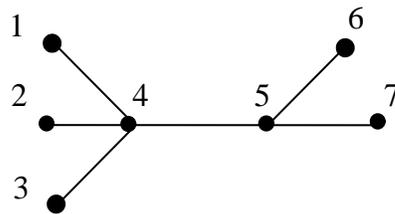


FIGURE 1.2: Un arbre  $T$

Une caractéristique de la domination est que tout ensemble indépendant maximal est un dominant minimal.

Une triple inégalité est obtenue  $\gamma \leq i \leq \beta \leq \Gamma$ .

### 1.4.2 L'irrédondant

Un sous ensemble  $D \subseteq V(G)$  est dit *irrédondant* si tout sommet  $x \in D$  domine au moins un sommet de  $G$  qui n'est dominé par aucun autre sommet de  $D$ .

Tout sommet de  $D$  est isolé ou possède au moins un voisin privé dans  $V - D$ . On dit que  $x$  est un sommet privé de  $y$  si sans seul voisin est  $x$ .

Cette notion a été définie par Cockayne et al [8].

Cockayne et al [9] ont montré qu'un dominant est minimal si et seulement si il est un irrédondant.

La cardinalité minimum (respectivement maximum) d'un irrédondant maximal noté  $ir(G)$  (respectivement  $IR(G)$ ) est le nombre d'irrédondance (respectivement nombre d'irrédondance supérieur).

Le graphe  $H$  de la figure ci-dessous est un exemple de Slater pour lequel  $ir(H) < \gamma(H)$ .

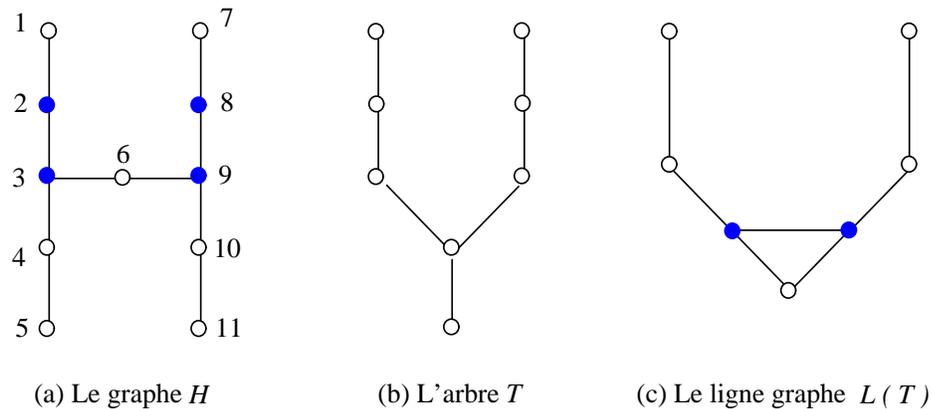


FIGURE 1.3 : Illustration d'irrédondance dans les graphes

L'ensemble irrédondant maximal de cardinalité minimum (*ir*-ensemble) pour  $H$  est l'ensemble  $I = \{2, 3, 8, 9\}$ . La valeur de son

$ir(H)$  est de 4. Par contre, l'ensemble dominant maximal de cardinalité minimum ( $\gamma$ -ensemble) pour l'arbre  $H$  est l'ensemble  $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  de  $\gamma(H) = 5$ .

Un graphe  $G$  est donné par Allan et al [10], où  $ir(G) < \gamma(G)$ . Il est illustré dans la FIGURE 1.3. Ce graphe est "le graphe de ligne  $L(T)$ " de l'arbre  $T$ , il est obtenu en associant un sommet à chaque arête de  $T$  et en reliant deux sommets dans  $L(T)$  si et seulement si les arêtes correspondantes dans  $T$  ont une extrémité en commun. L'irrédondant  $ir(L(T)) = 2$  alors que nombre de domination  $\gamma(L(T)) = 3$ .

Des notions de stabilité et d'irrédondance, un stable maximal est un dominant minimal qui est irrédondant maximal.

On retrouve la célèbre suite d'inégalités de Cockayne et al.[8] qui relie les six paramètres de domination pour tout graphe  $G$  :

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

### 1.4.3 La domination totale

Un sous-ensemble  $D$  de  $V$  est dit "*dominant total*" de  $G$  si tout sommet de  $V$  possède un voisin dans  $D$ .

Supposons que  $D$  est un dominant et le sous graphe induit par  $D$  ne contient pas des sommets isolés, alors le voisinage ouvert de  $D$  est l'ensemble  $V(D) = V$ .

La taille minimum d'un ensemble dominant total de  $G$  est appelé *nombre de domination total*, noté par  $\gamma_t(G)$ .

Pour le graphe  $T$  de la FIGURE 1.2, l'ensemble  $D = \{5, 4\}$  est un dominant total minimum tel que  $\gamma_t(T) = 2$ .

La notion de la domination totale trouve des applications même dans un système d'exploitation informatique

Considérons un réseau de micro-ordinateurs dans lequel un groupe de serveurs ayant la possibilité de communiquer directement avec n'importe quel micro-ordinateur non esclave. Tout serveur doit être relié à au moins un autre serveur dans lequel la même information est dupliquée.

Le plus petit groupe possible de serveurs en liaison est appelé ensemble dominant total minimum.

Il est représenté par un graphe où un sommet représente un micro-ordinateur et une arête représente une communication directe si elle existe entre deux micro-ordinateurs.

Un réseau de 16 micro-ordinateurs avec un groupe de serveurs dominant total :

$D = \{0111, 1001, 0110, 1000\}$  de taille 4 est reproduit ci-dessous.

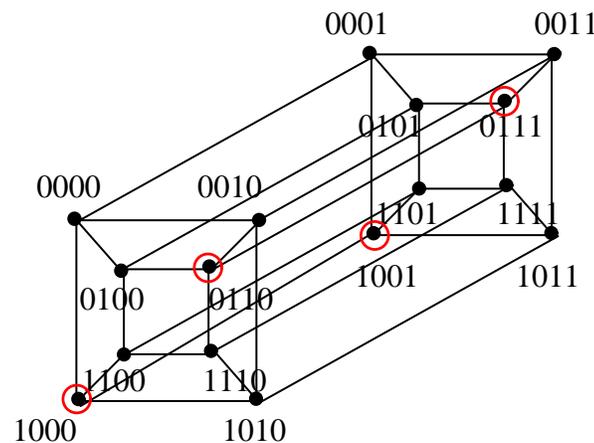


FIGURE 1.4 : Un hypercube représente un problème d'informatique

#### 1.4.4 La domination double

Un sous-ensemble  $D$  de  $V$  est un "*dominant double*" de  $G$  si tout sommet de  $V - D$  est dominé par au moins deux autres sommets de  $D$ . et tout sommet  $v \in D$  possède au moins un voisin dans  $D$ .

$\gamma_{\times 2}(G)$ , le nombre de domination double est la taille minimum d'un ensemble dominant double de  $G$ .

Dans le graphe  $H$  de la FIGURE 1.3(a),  $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 8, 7\}$  est un ensemble dominant double minimum de  $\gamma_{\times 2}(H) = 8$ .

Cette notion domination double a été introduite par Harary et Haynes [11].

Considérons le problème d'affectation des gardiens dans une prison.

On peut le modéliser par un graphe où un sommet représente un prisonnier et une arête représente une crime ou une peine commune entre deux prisonnier.

Un gardien affecté sur un sommet  $v$  peut garder tous les sommets de son voisinage fermé  $N[v]$ . Dans ce cas, un ensemble dominant double  $D$  représente un ensemble de gardiens avec la propriété que tout prisonnier (un sommet de  $V - D$ ) est surveillé par au moins deux gardiens, et chaque gardien (un sommet de  $D$ ) est proche d'un autre gardien de telle sorte qu'ils s'assurent mutuellement aide et assistance en cas de besoin.

#### 1.4.5 La domination couplée

Un sous-ensemble  $D$  de  $V$  est un "*dominant couplé*" de  $G$  si  $D$  est un dominant de  $G$  et le sous-graphe induit par  $D$  admet au moins un couplage parfait.

Le nombre de domination couplée, noté  $\gamma_{pr}(G)$  est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de  $G$ .

Dans le graphe  $T$  de la FIGURE1.2, l'ensemble  $D = \{4, 5\}$  est un ensemble dominant couplé minimum avec  $E = \{(5, 4)\}$  comme couplage parfait et donc  $\gamma_{pr}(G) = 2$ .

Dans l'exemple ci-dessus. Si l'on veut que les gardiens soient affectés par couples, c'est à dire que chaque gardien doit avoir un partenaire. Dans ce cas l'ensemble des gardiens cherché n'est autre qu'un ensemble dominant couplé minimum.

### 1.4.6 La domination multiple

Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit "*dominant multiple*" ou  $k$ -dominant de  $G$  si tout sommet de  $V - D$  possède au moins  $k$  voisins dans  $D$ . La taille minimum d'un ensemble dominant multiple de  $G$ , noté par  $\gamma_k(G)$ , est appelée *le nombre de domination multiple* (ou *nombre de  $k$ -domination*). Dans le graphe  $H$  de la FIGURE 1.3(a) l'ensemble  $\{1, 7, 3, 9, 5, 11\}$  est un 2-dominant minimum, et donc  $\gamma_2(H) = 6$ .

La  $k$ -domination a été introduite par Fink et Jacobson dans [12].

## 1.5 Problèmes étudiés

La domination est une notion très étudiée de la théorie des graphes par la grande variété de ces problème ouverts. Les thèmes les plus étudiés actuellement sont ceux de:

- 1- Déterminer des bornes en fonction de  $n$ ,  $\Delta$  ou  $\delta$  pour ces paramètres de domination, dans le cas où l'on ne connaît pas leur valeur exacte.
- 2- Etablir des relations entre ces paramètres de domination.
- 3- Caractériser les graphes pour lesquels, on a l'égalité entre deux de ces paramètres de domination, par une description ou construction.
- 4- Pour certaines classes de graphes, par exemple les arbres, les graphes bipartis, les graphes triangulés etc..., élaborer des algorithmes polynomiaux de recherche de ces paramètres de domination, car leur détermination est un problème NP-complet.
- 5- Pour un paramètre de domination quelconque  $\mu(G)$ , déterminer des relations de type Nordhaus-Gaddum pour le produit et la somme, qui consiste à déterminer deux fonctions  $f_1(n, \Delta, \delta)$  et  $f_2(n, \Delta, \delta)$  telles que :

$$\mu(G) + \mu(\overline{G}) \leq f_1(n, \Delta, \delta) \text{ et } \mu(G)\mu(\overline{G}) \leq f_2(n, \Delta, \delta).$$

## CHAPITRE 2

# RAPPORTS EXISTANT ENTRE QUELQUES PARAMÈTRES DE DOMINATION

Les problèmes de réseaux de communication, de localisation d'émetteur peuvent être modélisés par des graphes. Ils concernent la détermination et le calcul de paramètres de domination pour des graphes particuliers.

Ces problèmes sont souvent classés NP-complets.

Nous ne considérons que l'aspect théorique de ces problèmes. Comme les paramètres de domination sont difficiles à déterminer exactement, nous recherchons des inégalités entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité.

Ce chapitre rappelle les résultats établis sur les rapports entre des paramètres de domination dans les graphes et quelques classes des graphes connues (sans griffe, cactus, bloc, arbre ...). Les résultats exposés sont énoncés sans démonstration mais nous indiquons leurs référence.

### 2.1 Les bornes supérieure pour les paramètres $\gamma$ , $ir$ et $i$

Nous rappelons que les paramètres  $\gamma$ ,  $ir$  et  $i$  représentent respectivement le nombre de domination inférieure, le nombre d'irrédondance et le nombre de stabilité inférieure.

Les deux premières bornes établies pour  $\gamma(G)$  sont celles de Berge [6] et d'Ore [7].

**Théorème 2.1** (Berge [6]). *Pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma(G) \leq n - \Delta$ .*

Ce résultat inégalitaire a été étendue au cas des paramètres  $ir$  et  $i$  par Domke et al. [13].

**Théorème 2.2** (Domke et al. [13]). *Pour tout graphe  $G$ ,  $\Psi(G) \leq n - \Delta$ , où :  $\Psi = \gamma$ ,  $ir$  et  $i$ .*

Si un graphe a la particularité d'être sans sommets isolés, la valeur  $n/2$  constituera une nouvelle borne.

**Théorème 2.3** (Ore [7]). *Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés alors  $\gamma(G) \leq n/2$ .*

Payan et Xuong [7] et Fink et al. [14] ont caractérisé les graphes atteignant la borne supérieure de Ore.

**Théorème 2.4** (Payan et al. [7] et Fink et al. [14]). *Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés d'ordre  $n$  pair. Alors  $\gamma(G) = n/2$  si et seulement si toutes les composantes connexes de  $G$  sont des cycles  $C_4$  ou bien des couronnes  $H \circ K_1$  où  $H$  est un graphe connexe quelconque.*

Dans le cas où un graphe n'est pas de ceux représentés ci-dessous, nous avons une quatrième borne.

**Théorème 2.5** (McCuaig et Shepherd [15]). *Si  $G$  est un graphe connexe avec  $\delta \geq 2$  et  $G \notin \mathcal{A}$ , alors  $\gamma(G) \leq 2n/5$ .*

$\mathcal{A}$  est la famille des sept graphes indiqués par :

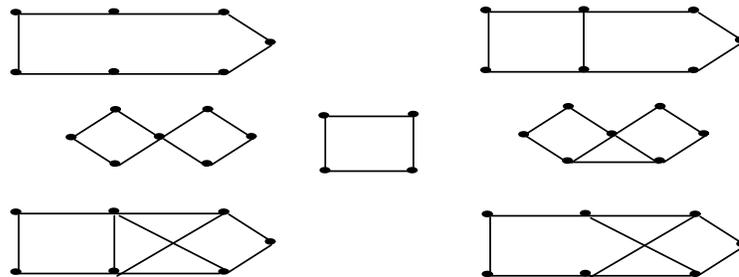


FIGURE 2.1: La famille des graphes  $\mathcal{A}$

Cette borne de  $2n/5$  est atteinte pour la famille des graphes représentée par :

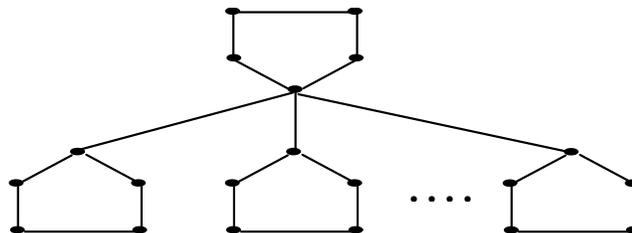


FIGURE 2.2 : Famille de graphes à  $\gamma(G) = 2n/5$ .

**Théorème 2.6** (Reed [16]). *Si  $G$  est un graphe connexe avec  $\delta \geq 3$ , alors  $\gamma(G) \leq 3n/8$ .*

On résume ces bornes dans le tableau suivant:

La borne inférieure pour $\delta$	La borne supérieure pour $\gamma$
0	$n$
1	$n/2$
2( $G$ connexe $\notin A$ )	$2n/5$
3 ( $G$ connexe )	$3n/8$

Tableau 2.1: Bornes inférieure et supérieure pour  $\delta$  et  $\gamma$

Par un exemple, la première ligne du tableau signifie que pour tout graphe tel que  $\delta \geq 0$ ,  $\gamma \leq n$ .

## 2.2 Comparaisons entre $\gamma$ , $\gamma_t$ et $\gamma_{pr}$

Nous rappelons que  $\gamma$ ,  $\gamma_t$  et  $\gamma_{pr}$  représentent respectivement le nombre de domination inférieure, le nombre de domination total et le nombre de domination couplé.

### 2.2.1 Les rapports $\gamma/\gamma_t$ , $\gamma/\gamma_{pr}$ et $\gamma_t/\gamma_{pr}$

Pour tout graphe sans sommets isolés,  $\delta \geq 1$ , il est établi que  $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G)$ .

Trois rapports de paramètres sont majorés par 1, à savoir  $\gamma/\gamma_t \leq 1$ ,  $\gamma/\gamma_{pr} \leq 1$  et  $\gamma_t/\gamma_{pr} \leq 1$ .

Pour les graphes sans griffe, sans  $K_{1,3}$ , la borne 1 est atteinte.

La couronne  $G = K_{2k} \circ K_1$  obtenue par l'attachement d'un sommet pendant à chaque sommet de la clique  $K_{2k}$  constitue un exemple où  $\gamma(G) = \gamma_t(G) = \gamma_{pr}(G) = 2k$ .

Dans la classe des graphes sans cycle, pour les rapports  $\gamma/\gamma_t$ ,  $\gamma/\gamma_{pr}$ ,  $\gamma_t/\gamma_{pr}$  la borne 1 est atteinte.

Dans l'étoile subdivisée  $S_{p,q}$ ,  $\gamma(S_{p,q}) = \gamma_t(S_{p,q}) = \gamma_{pr}(S_{p,q}) = 2$ .

Ayant déterminé les bornes supérieures de ces trois rapports, les rapports inverses ne nous fournissent que des bornes inférieures. Or, il est d'intérêt d'obtenir leurs bornes supérieures.

### 2.2.2 Les rapports $\gamma_t/\gamma$ , $\gamma_{pr}/\gamma$ et $\gamma_{pr}/\gamma_t$

Récemment, Haynes et Slater [17] ont établi la double inégalité suivante.

**Théorème 2.7** (Haynes et Slater [17]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G) \leq 2\gamma(G).$$

D'où pour tout graphe, les deux rapports  $\gamma_t/\gamma$  et  $\gamma_{pr}/\gamma$  sont majorés par 2.

Le graphe sans griffe  $B_k$  est formé par une clique  $K_k$  de sommets  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  par l'attachement de  $k$  triangles  $a_i b_i c_i$  et  $k$  arêtes  $a_i b_i$  pour  $1 \leq i \leq k$

- Le graphe donné ci-dessous montre que cette borne est atteinte pour les graphes sans griffe où  $\gamma(B_k) = k$  et  $\gamma_t(B_k) = \gamma_{pr}(B_k) = 2k$ .

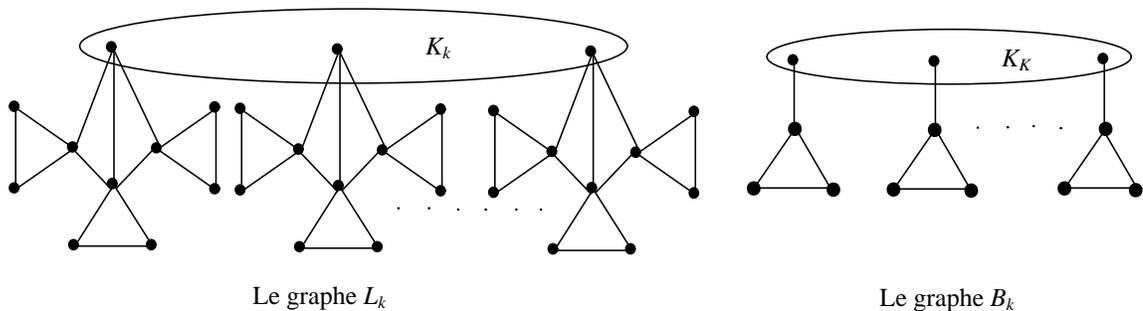


FIGURE 2.3: Le graphe  $L_k$  et le graphe  $B_k$ .

Une seconde relation entre  $\gamma_t$  et  $\gamma_{pr}$  est établie par ces mêmes auteurs.

**Théorème 2.8** (Haynes et Slater [17]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{pr}(G) \leq 2\gamma_t(G) - 2.$$

Une inégalité s'obtient facilement, soit  $\gamma_{pr}(G) \leq 2(\gamma_t(G) - 1) < 2\gamma_t(G)$ .

D'où le corollaire suivant.

**Corollaire 2.9** (Haynes et Slater [17]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{pr}(G)/\gamma_t(G) < 2.$$

Pour l'étoile subdivisée  $SS_p$ , obtenue à partir d'une étoile  $K_{1,p}$  par la subdivision de chaque arête par exactement un sommet, on a  $\gamma_t(SS_p) = p + 1$  et  $\gamma_{pr}(SS_p) = 2p$ .

Ce qu'il montre que la borne 2 de  $\gamma_{pr}/\gamma_t$  est asymptotiquement atteinte.

L'étoile subdivisée  $SS_p$  contient des griffes. Brigham et al. [18] ont proposé une borne supérieure pour le rapport  $\gamma_{pr}(G)/\gamma_t(G)$  dans les graphes sans griffe.

**Théorème 2.10** (Brigham et Dutton [18]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{pr}(G)/\gamma_t(G) \leq \frac{4}{3}.$$

Considérons l'exemple suivant pour vérifier que la borne  $\frac{4}{3}$  est atteinte.

Le graphe  $L_k$  de la FIGURE 2.3 est obtenu par l'attachement à chaque sommet  $a$  de la clique  $K_k$  une copie pendante d'un graphe  $G$  d'ensemble de sommet  $\{a\} \cup_{1 \leq i \leq 3} \{b_i, c_i, d_i\}$  où  $\{a, b_1, b_2, b_3\}$  induit une clique et  $\{b_i, c_i, d_i\}$  est un triangle pour  $1 \leq i \leq 3$ .

Il est établi que  $\gamma_t(L_k) = 3k$ , et  $\gamma_{pr}(L_k) = 4k$ .

### 2.3 Le rapport $\gamma/\gamma_{\times 2}$

Favaron et al. [19] ont montré que pour tout graphe avec  $\delta \geq 1$ ,  $\gamma(G) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ . Harary et al. [11] ont remarqué que  $\gamma(G) \leq \gamma_{\times 2}(G) - 1$  et d'où  $\gamma(G) < \gamma_{\times 2}(G)$ .

Le graphe  $J_k$  de la figure 2.5 montre que la borne 1 est asymptotiquement atteinte.

**Théorème 2.11** (Favaron et al.[19]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma(G)/\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{3}{4}.$$

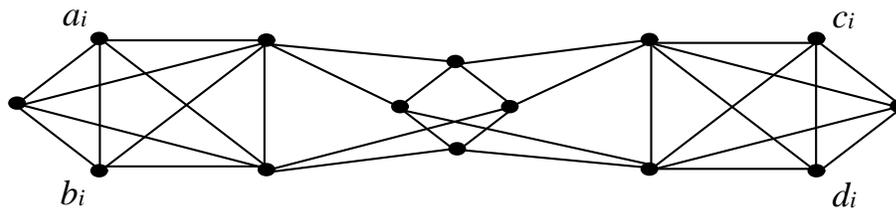
Cette inégalité est vérifiée pour la classe des blocs graphes sans griffes pour lesquels tout bloc est sans griffe.

L'exemple suivant montre que la borne est atteinte pour les graphes sans griffe.

Exemple : Soit  $H_k$  un graphe sans griffe. Il représente  $k$  copies du graphe  $H$ , par l'addition des arêtes  $c_i a_{i+1}$  et  $d_i b_{i+1}$ , pour  $1 \leq i \leq k - 1$ .

D'où  $\gamma(H_k) = 3k$ ,  $\gamma_t(H_k) = \gamma_{pr}(H_k) = \gamma_{\times 2}(H_k) = 4k$ .

Un exemple de graphe  $H$  est indiqué par la figure ci-dessous :

FIGURE 2.4 : La famille des graphes  $H$ 

Blidia et al. [20] ont déterminé une borne supérieure pour le nombre de domination double  $\gamma_{x2}$  en fonction des paramètres  $n$ ,  $l$ ,  $s$  et ont explicité une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité dans la classe des graphes sans cycles

**Théorème 2.12** (Blidia et al. [20]). *Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$  avec  $l$  sommets pendent et  $s$  sommets support, alors  $\gamma_{x2}(T) \leq (2n + l + s)/3$ .*

Une seconde borne supérieure pour les rapports  $i/\gamma_{x2}$  et  $\gamma/\gamma_{x2}$  est établie par ces mêmes auteurs par les inégalités exprimées dans l'énoncé ci-dessous.

**Théorème 2.13** (Blidia et al.[20]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$2\gamma(T) \leq 2i(T) \leq \gamma_{x2}(T).$$

L'exemple d'un arbre tel que la borne  $\frac{1}{2}$  est atteinte pour le rapport  $\gamma/\gamma_{x2}$ , est l'étoile subdivisée  $SS_p$  où  $\gamma(SS_p) = p$  et  $\gamma_{x2}(SS_p) = 2p$ .

## 2.4 Les rapports $\gamma_{pr}/\gamma_{x2}$ , $\gamma_t/\gamma_{x2}$

Blidia et al [2] ont lié des relations entre les paramètres  $\gamma_{pr}$  et  $\gamma_{x2}$ .

**Théorème 2.14** (Blidia et al.[2]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{pr}(G) \leq \max \{2\gamma_{x2}(G) - 4, 2\}.$$

On peut obtenir que :

**Corollaire 2.15** (Blidia et al.[2]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{pr}(G)/\gamma_{\times 2}(G) < 2.$$

- Le graphe  $J_k$  donné dans l'exemple ci-dessous, est un graphe extrémal pour le Théorème 2.14 où  $\gamma_{pr}(J_k) = 2k - 2$  et  $\gamma_{\times 2}(J_k) = k + 1$ , ils montrent que la borne 2 de  $\gamma_{pr}/\gamma_{\times 2}$  est asymptotiquement atteinte pour un graphe quelconque.

Pour  $k \geq 4$ ,  $J_k$  est construit d'une étoile  $K_{1,k}$  de centre  $a$  et des sommets pendants  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , par l'addition de  $2k$  nouveaux sommets  $x_{ij}$  et des arêtes  $v_i x_{ij}, v_j x_{ij}$  pour  $1 \leq i < j \leq k$ . L'ensemble  $\{a, v_1, v_2, \dots, v_k\}$  est un ensemble dominant minimum et il est total,  $\gamma(J_k) = \gamma_t(J_k) = k$ . On remarque que,  $\gamma_{\times 2}(J_k) \geq k + 1$  et l'ensemble  $\{a, v_1, v_2, \dots, v_k\}$  est un dominant double de  $J_k$ , donc  $\gamma_{\times 2}(J_k) = k + 1$  et  $\gamma_{pr}(J_k) = 2k - 2$ .

Pour le graphe  $J_5$  de la figure suivante,  $\gamma(J_5) = \gamma_t(J_5) = 5$ ,  $\gamma_{\times 2}(J_5) = 6$  et  $\gamma_{pr}(J_5) = 8$ .

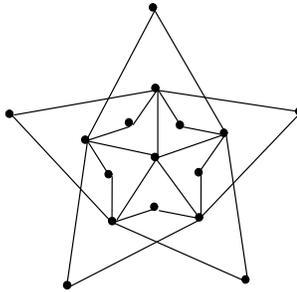


FIGURE 2.5: Le graphes  $J_5$

Le théorème suivant donne une borne supérieure pour le rapport  $\gamma_{pr}/\gamma_{\times 2}$  dans la classe des graphes sans griffe.

**Théorème 2.16** (Blidia et al.[21]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{pr}(G)/\gamma_{\times 2}(G) \leq 1.$$

Par conséquent, on a le corollaire suivant:

**Corollaire 2.17** (Blidia et al. [2]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_t(G)/\gamma_{\times 2}(G) \leq 1.$$

- Le graphe  $H_k$  de la FIGURE 2.4 montre que la borne 1 pour le rapport  $\gamma_t/\gamma_{\times 2}$  est atteinte tel que :  $\gamma_{pr}(H_k) = \gamma_t(H_k) = \gamma_{\times 2}(H_k)$ .

En 2003, Haynes et al. [22] ont montré que le rapport  $\gamma_t/\gamma_2$  est borné par 1 pour les arbres.

**Théorème 2.18** (Haynes et al.[22]). *Pour tout arbre  $T$  non trivial,  $\gamma_t(T)/\gamma_2(T) \leq 1$ .*

L'étoile subdivisée  $SS_p$  tel que  $\gamma_t(SS_p) = \gamma_2(SS_p) = p + 1$ , vérifie que la borne de ce Théorème est atteinte.

En 2006, Blidia et al. [21] ont montré que le rapport  $\gamma_{pr}/\gamma_{\times 2}$  est borné par 1 dans les arbres.

**Théorème 2.19** (Blidia et al.[21]). *Pour tout arbre non trivial  $T$ ,  $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ .*

La borne 1 pour le rapport  $\gamma_{pr}/\gamma_{\times 2}$  est atteinte. Pour l'étoile subdivisée  $SS_p$ , on a  $\gamma_{pr}(SS_p) = \gamma_{\times 2}(SS_p) = 2p$ .

## 2.5 Les rapports $\gamma_{\times 2}/\gamma, \gamma_{\times 2}/\gamma_t, \gamma_{\times 2}/\gamma_{pr}, \gamma_{\times 2}/\beta$

Généralement les quatre rapports  $\gamma_{\times 2}/\gamma, \gamma_{\times 2}/\gamma_t, \gamma_{\times 2}/\gamma_{pr}$  peuvent être aussi large que l'on veut.

- Le graphe  $M_{k,p}$  donné ci-dessous, est obtenu par l'attachement de  $p$  arêtes pendantes à chaque sommet de la clique  $K_{2k}$ . Il est établi que :  $\gamma_{\times 2}(M_{k,p}) = 2k(p + 1)$ ,  $\gamma_2(M_{k,p}) = 2kp$  et  $\gamma(M_{k,p}) = \gamma_t(M_{k,p}) = \gamma_{pr}(M_{k,p}) = 2k$ ,  $\beta(M_{k,p}) = 2kp$ .

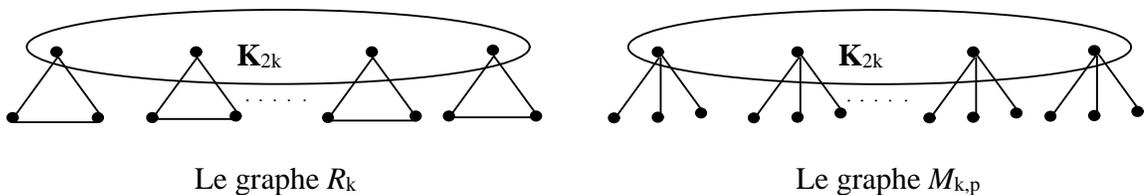


FIGURE 2.6 : Le graphe  $M_{k,p}$  et le graphe  $R_k$ .

**Théorème 2.20** (Blidia et al. [2]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq i(G) + \beta(G).$$

Une conséquence de ce Théorème devient un résultat intéressant pour le rapport  $\gamma_{\times 2}/\beta$ .

**Corollaire 2.21** (Blidia et al.[2]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors  $\gamma_{\times 2}(G)/\beta(G) \leq 2$ .*

Une autre conséquence intéressante du Théorème 2.20 s'enonce.

**Corollaire 2.22** (Blidia et al.[2]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ ,  $\gamma_2(G) \leq i(G) + \beta(G)$ .*

Le graphe "sans griffe"  $Z_k$  est obtenu à partir d'un cycle  $C_{2k} = a_1b_1a_2b_2\dots a_kb_k$ , et par l'addition de sommets  $c_i$ , sommets adjacents à  $a_i$  et  $b_i$  pour  $1 \leq i \leq k$ . Il est établi que :  $i(Z_k) = \gamma(Z_k) = \beta(Z_k) = k$  et  $\gamma_2(Z_k) = \gamma_{\times 2}(Z_k) = 2k$ ,  $\beta_2(Z_k) = 2k$ . [2].

- Du graphe ( $Z_k$ ) de la figure ci-dessous, on montre que les bornes du Théorème 2.20 et du Corollaire 2.22 sont atteintes pour les graphes sans griffe.

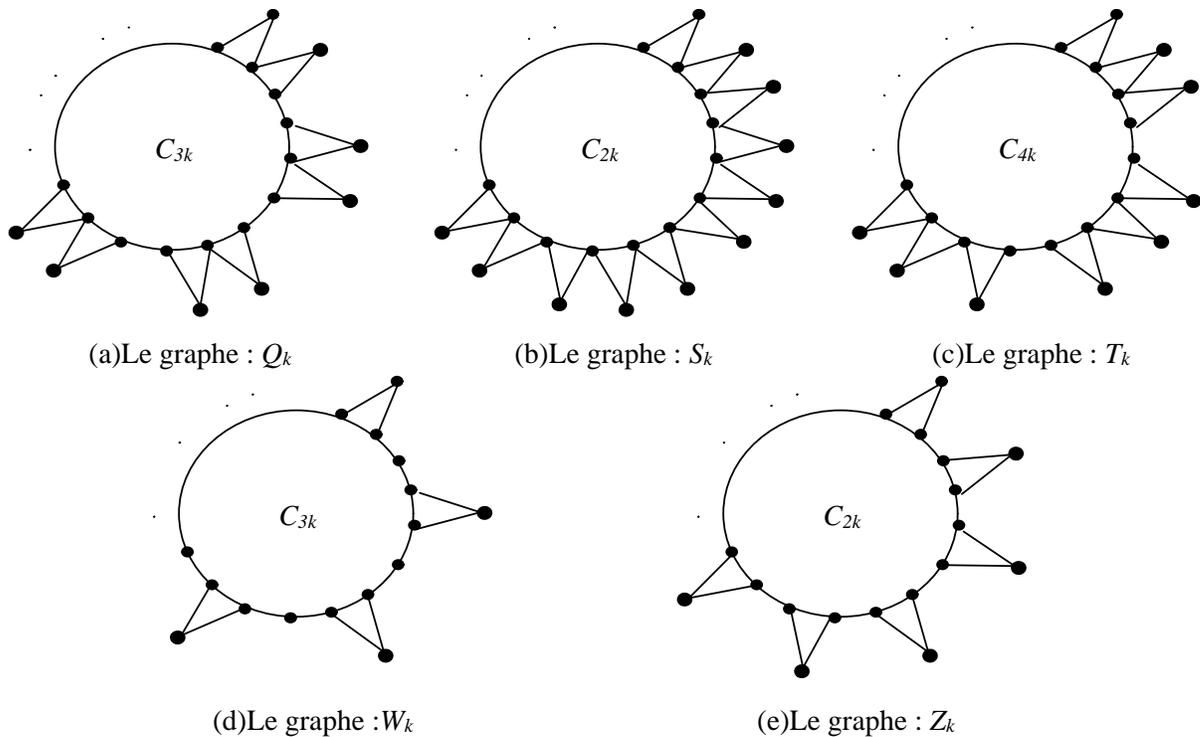


FIGURE 2.7 : Les graphes  $Q_k, S_k, T_k, W_k, Z_k$ .

Pour les graphes sans griffe on sait que  $i(G) = \gamma(G)$ . De plus, Summer [23] a montré que pour tout graphe on a  $\beta(G) \leq 2\gamma(G)$ .

D'où le résultat suivant:

**Corollaire 2.23** (Blidia et al. [2]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ ,  $\gamma_{\times 2}(G)/\gamma(G) \leq 3$ .*

- Du graphe  $(Q_k)$  de la FIGURE 2.7, on montre que cette borne est atteinte pour les graphes sans griffe, tel que  $\gamma(G) = k$ ,  $\gamma_{\times 2}(G) = 3k$ .

Blida et al. [2] ont établi deux relations entre les paramètres  $\gamma_{\times 2}$ ,  $\gamma_{pr}$ ,  $\gamma_t$ .

**Théorème 2.24** (Blidia et al.[2]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_{\times 2}(G)/\gamma_{pr}(G) \leq \gamma_{\times 2}(G)/\gamma_t(G) \leq 2.$$

- Le graphe  $(R_k)$  de la FIGURE 2.6, montre que la borne 2 est atteinte pour les deux rapports  $\gamma_{\times 2}/\gamma_{pr}$ ,  $\gamma_{\times 2}/\gamma_t$ , tel que :  $\gamma_{pr}(R_k) = \gamma_t(R_k) = 2k$  et  $\gamma_{\times 2}(R_k) = 4k$ .

Pour les arbres les trois rapports  $\gamma_{\times 2}/\gamma$ ,  $\gamma_{\times 2}/\gamma_t$ ,  $\gamma_{\times 2}/\gamma_{pr}$  peuvent être aussi large que l'on veut, on peut voir ça dans l'étoile  $(S_{1,p})$  tel que :  $\gamma(S_{1,p}) = 1$ ,  $\gamma_{\times 2}(S_{1,p}) = p + 1$ ,  $\gamma_{pr}(S_{1,p}) = \gamma_t(S_{1,p}) = 2$ .

## 2.6 Les rapports $\beta/\gamma$ , $\beta/\gamma_t$ , $\beta/\gamma_{pr}$

Les trois rapports  $\beta/\gamma$ ,  $\beta/\gamma_t$ ,  $\beta/\gamma_{pr}$  peuvent être aussi large que l'on veut, on peut pas avoir des bornes supérieures pour ces rapports.

Pour l'étoile  $S_{1,p}$  on a  $\gamma(S_{1,p}) = 1$ ,  $\gamma_t(S_{1,p}) = \gamma_{pr}(S_{1,p}) = 2$  et  $\beta(S_{1,p}) = p$ .

Dans les graphes sans griffe, Summer [23] a trouvé une relation entre les deux paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  :

**Théorème 2.25** (Summer[23]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\beta(G)/\gamma(G) \leq 2.$$

Le graphe  $S_k$  de la FIGURE 2.7 montre que la borne est atteinte, tel que :  $\gamma(S_k) = k$ ,  $\beta(S_k) = 2k$ .

Un autre résultat concernant les deux rapports  $\beta/\gamma_t$  et  $\beta/\gamma_{pr}$  s'avère intéressant pour les graphes sans griffe est donné par le Théorème suivant :

**Théorème 2.26** (Blidia et al.[2]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\beta(G)/\gamma_{pr}(G) \leq \beta(G)/\gamma_t(G) \leq \frac{3}{2}.$$

Le graphe sans griffe  $T_k$  de la FIGURE 2.7 montre que la borne  $\frac{3}{2}$  est atteinte pour les deux rapports  $\beta/\gamma$  et  $\beta/\gamma_t$ , tel que:  $\beta(T_k) = 3k$  et  $\gamma_{pr}(T_k) = \gamma_t(T_k) = 2k$ .

## 2.7 Le rapport $\beta/\gamma_{\times 2}$

Généralement, on dispose pas d'une valeur supérieure du rapport  $\beta/\gamma_{\times 2}$ . Le graphe  $G$  de la figure suivante, formé par  $k$  triangles  $a_i bc$  ont la même arête  $bc$ , tel que  $\beta(G) = k$ ,  $\gamma_{\times 2}(G) = 2$ .

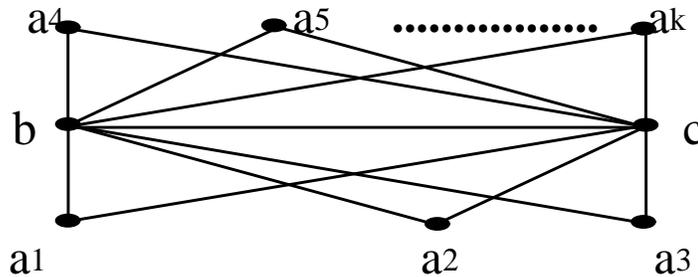


FIGURE 2.8 : Un graphe  $G$  tel que  $\beta(G) - \gamma_{\times 2}(G) = k - 2 \rightarrow \infty$

Blidia et al. [2] ont montré que la borne supérieure de  $\beta/\gamma_{\times 2}$  existe pour la classe des graphe sans griffe.

**Théorème 2.27** (Blidia et al.[2]). *Si  $G$  est un graphe sans griffe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\beta(G)/\gamma_{\times 2}(G) \leq \beta(G)/\gamma_2(G) \leq 1.$$

Un exemple d'un graphe sans griffe où la borne 1 est atteinte pour les deux rapports  $\beta/\gamma_{\times 2}$  et  $\beta/\gamma_2$  est le graphe  $(W_k)$  de la FIGURE 2.7 tel que :  $\gamma_2(W_k) = \gamma_{\times 2}(W_k) = 2k$  et  $\beta(W_k) = 2k$ .

## 2.8 Les rapports $\gamma/\beta$ , $\gamma_t/\beta$ , $\gamma_{pr}/\beta$

Haynes et Slater [17] ont trouvé une relation entre  $\gamma_{pr}$  et  $\gamma$  présentée dans le théorème suivant:

**Théorème 2.28** (Haynes et al.[17]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_t(G)/\gamma(G) \leq 2 \text{ et } \gamma_{pr}(G)/\gamma(G) \leq 2.$$

Ces deux rapports sont atteints pour les arbres. On peut voir ça pour la chaîne  $P_6$ ,  $\gamma(P_6) = 2$ ,  $\gamma_{pr}(P_6) = \gamma_t(P_6) = 4$ , et même pour les graphes sans griffe. Le graphe sans griffe  $G$  donné ci-dessous tel que :  $\gamma_{pr}(G) = \gamma_t(G) = 2$ ,  $\gamma(G) = 1$ .

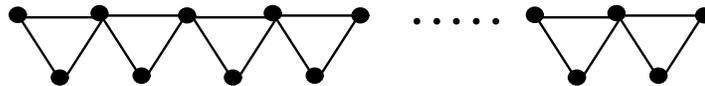


FIGURE 2.9 : Un graphe sans griffe tel que:

$$\gamma_{pr}(G) = \gamma_t(G) = 2\gamma(G)$$

En 1962, Ore a observé que pour tout graphe  $G$ ,  $\beta(G) \geq \gamma(G)$ . Deux inégalités sont établies.

**Corollaire 2.29** (Blidia et al. [2]). *Si  $G$  est un graphe avec  $\delta \geq 1$ , alors*

$$\gamma_t(G)/\beta(G) \leq 2 \text{ et } \gamma_{pr}(G)/\beta(G) \leq 2.$$

- Du cycle  $C_3$ , on montre que la borne 2 pour les deux rapports  $\gamma_t/\beta$ ,  $\gamma_{pr}/\beta$  est atteinte pour les graphes sans griffe, où :  $\gamma_t(C_3) = \gamma_{pr}(C_3) = 2$  et  $\beta(C_3) = 1$ .

Pour les arbres, des résultats sur ces deux rapports seront établis dans le chapitre 3.

- Du graphe  $Z_k$  de la FIGURE 2.7, on montre que la borne 1 de  $\gamma/\beta$  est atteinte pour les graphes sans griffe.

## 2.9 Comparaisons entre $\beta$ , $\gamma_2$ , $\beta_2$ et $\gamma_t$

On commence par donné les relations existe entre  $\beta$  et  $\gamma_2$ .

### 2.9.1 Les rapports $\beta/\gamma_2$ et $\gamma_2/\beta$

Fink et al. [12] ont établi une borne inférieure de  $\gamma_2$  pour les arbres :

**Théorème 2.30** (Fink et al.[12]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $\gamma_2(T) \geq \frac{n+1}{2}$ , avec égalité si et seulement si  $T$  est l'arbre subdivisée d'un arbre  $T'$ .*

Dans la même classe des graphes de type "arbre", Blidia et al. [24] ont fournit une borne supérieure qui encadra davantage  $\gamma_2$ .

Ces mêmes auteurs ont donné une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité.

Pour cela, ils ont défini la classe  $\mathcal{G}$  des arbres comme suivant :

Soit  $T$  l'arbre obtenu à partir d'une séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_k$  où  $T_1$  est une chaîne  $P_2$ .

Si  $k \geq 2$ , l'arbre  $T_{i+1}$ ,  $i \leq k$ , est obtenu récursivement à partir d'un arbre  $T_i$  par une des opérations suivantes:

- Opération 1 : Ajouter une étoile  $K_{1,p}$ ,  $p \geq 2$ , de centre  $x$ , le sommet a relier par une arête à un sommet pendant  $y$  de  $T_i$ .
- Opération 2 : Ajouter une chaîne  $P_2$ , une de ses extrémités est liée par une arête à un sommet pendant  $y$  de  $T_i$ , et lier  $k$  nouveaux sommets à  $y$ ,  $k \geq 0$ .

L'arbre final  $T_k$  ainssi obtenu est l'arbre  $T$ .

Ces notions sont récapitulées dans cet énoncé.

**Théorème 2.31** (Blidia et al.[24] ). *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$  avec  $l$  sommets pendants, alors  $\gamma_2(T) \leq (n+l)/2$ , avec égalité si et seulement si,  $T \in \mathcal{G}$ .*

Dans les arbres, Favaron [25] a déterminé une borne inférieure pour le paramètre  $\beta$  :

**Théorème 2.32** (Favaron[25]). *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$  avec  $l$  sommet pendant, alors  $\beta(T) \geq (n+l)/3$ , avec égalité si et seulement si,  $T$  est bien couvert.*

Un graphe est "bien couvert" si  $\beta(G) = i(G)$ , La couronne d'un arbre est bien couverte.

**Théorème 2.33** (Blidia et al.[26]). *Si  $G$  est un bloc graphe, alors  $\beta(G) \leq \gamma_2(G)$ .*

Par les mêmes auteurs on a le résultat pour les graphes contenant au plus un cycle :

**Théorème 2.34** (Blidia et al.[26]). *Si  $G$  est un graphe contenant au plus un cycle, alors  $\beta(G) \leq \gamma_2(G)$ .*

**Corollaire 2.35** (Blidia et al.[24]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $\gamma_2(T) \geq \beta(T)$ .*

Pour l'étoile  $K_{1,p}$ , sachant que :  $\gamma_2(K_{1,p}) = \beta(K_{1,p}) = p$ , la borne 1 du rapport  $\beta/\gamma_2$  est atteinte.

Pour les arbres, Blidia et al. [24] ont établi que  $\frac{3}{2}$  est la borne supérieure du rapport  $\gamma_2/\beta$ .

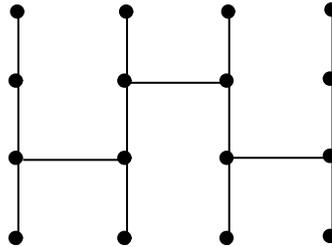


FIGURE 2.10 : Un arbre  $T$  tel que  $\gamma_2/\beta = \frac{3}{2}$

Fujisawa et al. [27] ont donné une caractérisation pour les graphes bipartis où cette borne est atteinte

**Théorème 2.36** (Fujisawa et al. [27]). *Si  $G$  est graphe biparti connexe d'ordre au moins 3, alors  $\gamma_2(G) \leq \frac{3}{2}\beta(G)$  avec égalité si et seulement si  $G$  est la 2-couronne d'un graphe biparti connexe où  $G$  est un couronne d'un cycle  $C_4$ .*

Par les mêmes auteurs on a le résultat pour les arbres.

**Théorème 2.37** (Fujisawa et al. [27]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $\gamma_2(T) \leq \frac{3}{2}\beta(T)$  avec égalité si et seulement si  $T$  est un 2-couronne d'un arbre.*

Haynes et al. [22] ont établi une inégalité entre les deux paramètres  $\gamma_t$  et  $\gamma_2$ .

**Théorème 2.38** (Haynes et al. [22]). *Pour tout arbre  $T$  non trivial,  $\gamma_t(T) \leq \gamma_2(T)$ .*

Pour la classe des graphes triangulés, un résultat concernant le rapport  $\gamma_t/\gamma_2$  sera présenté dans le chapitre ultérieur.

### 2.9.2 Une inégalité entre $\gamma_2$ et $\beta_2$

La définition d'un ensemble  $k$ -indépendant est indispensable pour établir des bornes.

**Définition 2.39.** *Etant donné l'entier  $k$ ,  $k \geq 1$ , un sous ensemble  $D \subseteq V(G)$  est un  $k$ -indépendant si tout sommet de  $D$  a au plus  $k - 1$  voisins dans  $D$ .*

*Une caractérisation de tels sous ensembles est que  $\Delta(D) \leq k - 1$ .*

*Tout sous-ensemble d'un  $k$ -indépendant est un  $k$ -indépendant.*

*Un  $k$ -indépendant de  $G$  est maximal si pour tout sommet  $x$  dans  $V(G) \setminus D$ ,  $D \cup \{x\}$  n'est pas un  $k$ -indépendant.*

*Les ordres minimum et maximum d'un  $k$ -indépendant maximal de  $G$  sont notés  $i_k(G)$  et  $\beta_k(G)$ . Le nombre de la  $k$ -indépendance est  $\beta_k$ .*

Pour toute classe de graphes, Fink et al.[12] prouvent que les paramètres  $\gamma_2$ ,  $\beta_2$  sont comparables et que  $\gamma_2 \leq \beta_2$ .

**Théorème 2.40** (Fink et al.[12]). *Pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma_2(G) \leq \beta_2(G)$ .*

Une généralisation de ce résultat est établit par Favaron et al.[28].

**Théorème 2.41** (Favaron et al.[28]). *Pour tout graphe  $G$  et pour tout entier  $k$  positif,  $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$ .*

Pour les graphes contenant au plus un cycle, une inégalité relie les paramètres  $i_2$ ,  $i$  et  $\gamma$  est établi par Blidia et al.[29].

**Théorème 2.42** (Blidia et al.[29]). *Si  $G$  est un graphe contient au plus un cycle, alors  $i_2(G) \leq \gamma(G) + i(G)$ .*

## 2.10 Comparaisons entre $ir$ et $\gamma$

Pour tout graphe  $G$ , on a  $ir(G) \leq \gamma(G)$  [30]. Dans [10] et [31], les auteurs ont obtenu un même résultat qui s'énonce comme :

**Théorème 2.43** (Allan et Laskar[10] et Bollobas et Cockayne[31]). *Pour tout graphe  $G$ ,*  

$$\gamma(G)/2 < ir(G) \leq \gamma(G) \leq 2ir(G) - 1.$$

Dans la suite, Allan et Laskar [32] prouvent que pour les graphes connexes le rapport  $\gamma_t/ir$  est majoré par 2.

**Corollaire 2.44** (Allan et Laskar[32]). *Pour tout graphe connexe  $G$ ,*  $\gamma_t(G) \leq 2ir(G)$ .

Damaschke [33] a établi une nouvelle relation reliant les deux paramètres  $\gamma$  et  $ir$  dans les arbres. Elle est donné par l'énoncé suivant :

**Théorème 2.45** (Damaschke[33]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $\gamma(T)/ir(T) < \frac{3}{2}$ .*

Volkman [34] a déterminé une borne supérieure de rapport  $\gamma/ir$  pour les graphes connexes contenant au plus 2 cycles et les bloc graphes,

**Théorème 2.46** (Volkman [34]). *Soit  $G$  est un graphe connexe tel que  $\mu(G)$  est le nombre de cycles qui existent dans  $G$ :*

- (i) *Si  $1 \leq \mu(G) \leq 2$ , alors  $\gamma(G)/ir(G) \leq \frac{3}{2}$ .*
- (ii) *Si  $G$  est un bloc graphe, alors  $\gamma(G)/ir(G) \leq \frac{3}{2}$ .*

Deux exemples où la borne  $\frac{3}{2}$  est atteinte sont fournies :

- De la figure ci-dessous, dans un unicycle graphe  $G$ , il est montré que  $3ir(G) = 2\gamma(G)$ .

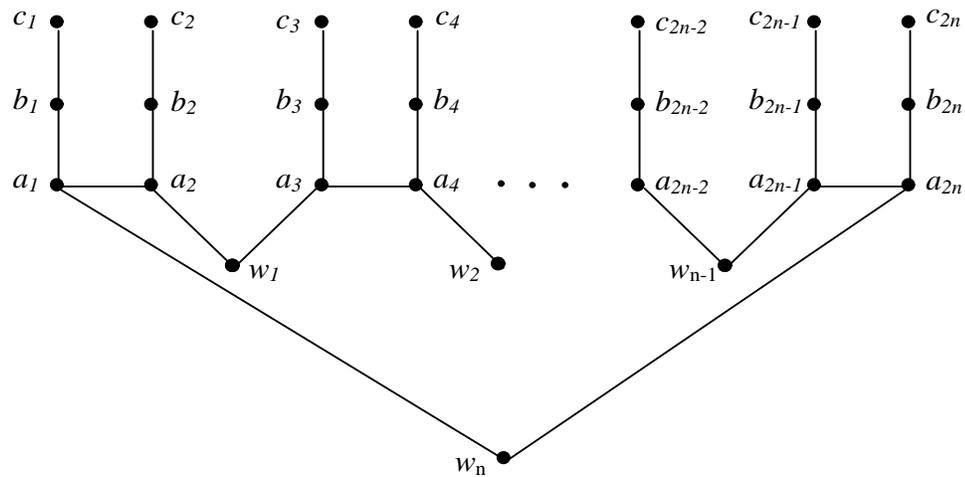


FIGURE 2.11: Un unicyclic graph  $G$  tel que:  $3ir(G) = 2\gamma(G)$ .

Une justification de cette égalité est donné. Tout ensemble irrédondant maximal de  $G$  contient au moins un sommet de l'ensemble  $\{a_i, b_i, c_i\}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2n$ .

D'où  $ir(G) \geq 2n$ .

Comme  $I = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}\}$  est un irrédondant maximale de  $G$  on a  $ir(G) = 2n$ .

D'autre part,  $D = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2n}, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$  est un  $\gamma$ -ensemble de  $G$ . D'où  $\gamma(G) = 3n$ , l'égalité  $3ir(G) = 2\gamma(G)$  est ainsi obtenue.

- Du bloc graphe  $G$  donné ci-dessous on montre que l'estimation (ii) dans le Théorème 2.46 est satisfait.

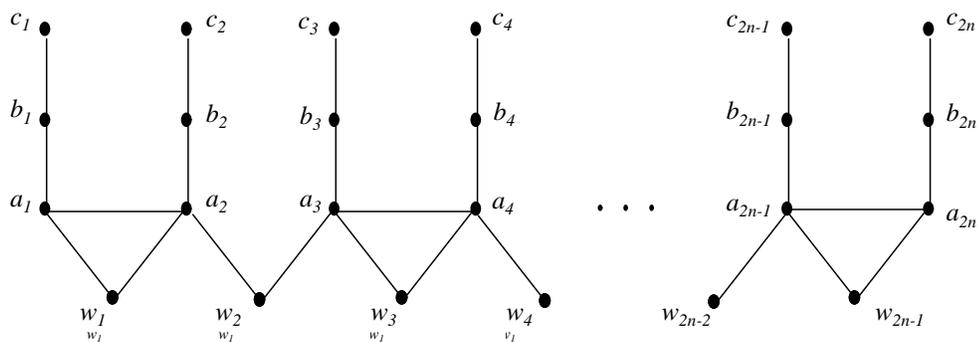


FIGURE 2.12 : Le bloc graphe  $G$  tel que:  $3ir(G) = 2\gamma(G)$ .

$\{b_1, b_2, \dots, b_{2n}, a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}\}$  est un  $\gamma$ -ensemble pour  $G$  et l'ensemble  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$  est un  $ir$ -ensemble pour ce graphe, par conséquent  $3ir(G) = 2\gamma(G)$ , où  $(\gamma(G) = 3n$  et  $ir(G) = 2n)$ .

Dans le cas général, un exemple d'un graphe donné ci-dessous, montre que pour  $\mu(G) \geq 3$ , l'estimation (i) de Théorème précédant n'est pas valide.

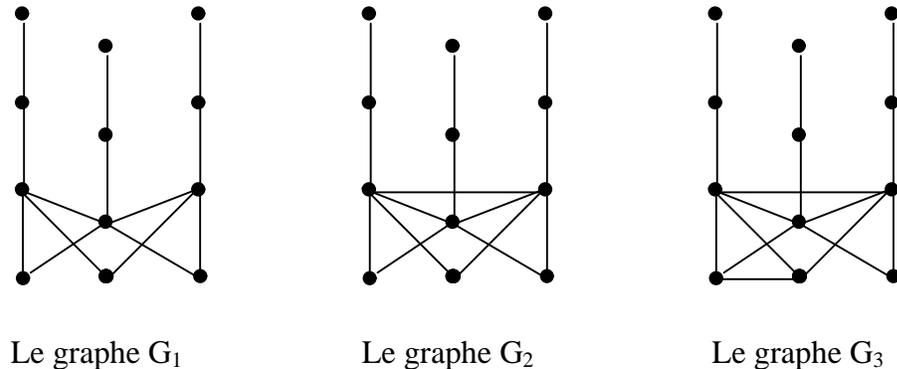


FIGURE 2.13: Les graphe  $G_1, G_2, G_3$

Il est établi que  $\mu(G_1) = 3$ ,  $\mu(G_2) = 4$ ,  $\mu(G_3) = 5$ , aussi que :

$\gamma(G_1) = \gamma(G_2) = \gamma(G_3) = 5$  et  $ir(G_1) = ir(G_2) = ir(G_3) = 3$ .

Par la suite, l'inégalité  $2\gamma(G) \leq 3ir(G)$  n'est pas vraie pour  $3 \leq \mu \leq 5$ .

Volkman [34] a remarqué qu'il existe des exemples de graphes bipartis et de graphes triangulés où l'inégalité  $\gamma(G) \leq 2ir(G) - 1$  est satisfaite.

Il a aussi montré que pour un cactus graphe, la borne  $\frac{2}{3}$  pour le rapport  $ir(G)/\gamma(G)$  n'est pas valide. Il existe un cactus graphe où la borne pour ce rapport égale à  $\frac{7}{11}$ .

Volkman a posé la conjecture suivante :

**Conjecture 2.47** (Volkman [34]). *Si  $G$  est un cactus graphe, alors  $\frac{ir(G)}{\gamma(G)} > \frac{5}{8}$ .*

En 1998, Zverovich [35] a affirmé la conjecture en établissant un résultat préliminaire :

**Théorème 2.48** (Zverovich [35]). *Si  $G$  est un bloc cactus graphe avec  $\pi(G)$  le nombre de cycle de longueur 2 modulo 4 dans  $G$ , alors  $\frac{ir(G)}{\gamma(G)} \geq \frac{5\pi(G) + 4}{8\pi(G) + 6}$ .*

Le corollaire constitue une preuve de la conjecture. Il est établi que tout cactus graphe est un bloc cactus graphe :

**Corollaire 2.49** (Zverovich [35]). *Si  $G$  est un bloc cactus graphe, alors  $\frac{ir(G)}{\gamma(G)} > \frac{5}{8}$ .*

- L'exemple suivant montre que les bornes du Théorème 2.48 et le Corollaire 2.49 sont atteintes.

Ajoutant les arêtes  $\{e_i a_{i+1} : 1 \leq i \leq k-1\}$ ,  $\{c_i x_i : 1 \leq i \leq k\}$  et  $\{x_0 a_1, e_k x_{k+1}\}$  aux cycles de longueur 6  $C^i = a_i b_i c_i d_i e_i f_i a_i$ , pour  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  et aux cycles de longueur 3,  $T^i = x_i y_i z_i$ , pour  $i = 0, 1, 2, \dots, k+1$ .

Posons  $I = \{a_i, c_i, e_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{x_i, y_i : 0 \leq i \leq k+1\}$ .

Pour chaque sommet  $u \in I$ , ajoutons les chaînes  $P_u = uu'u''$  et notons  $G_k$  le graphe ainsi obtenu.

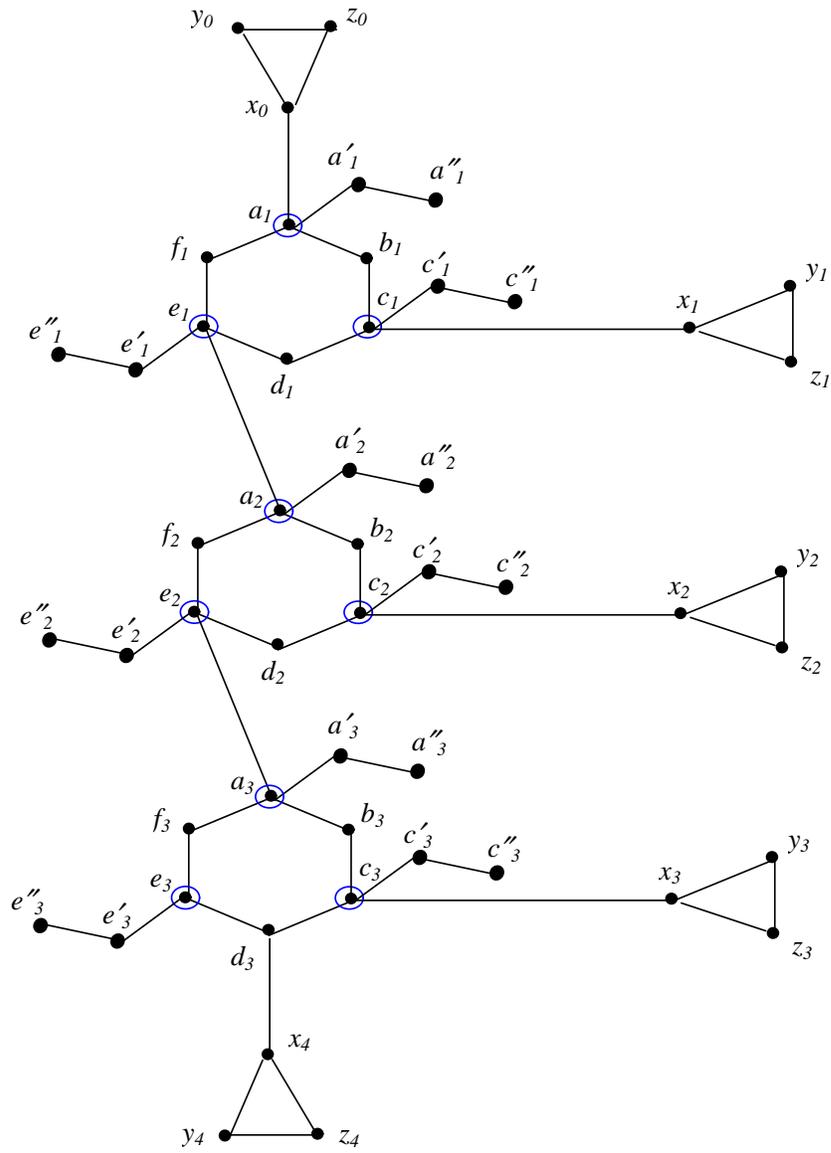
Il est un bloc-cactus et un cactus graphe. Tout ensemble irrédondant maximal de  $G_k$  contient au moins un sommet de l'ensemble  $\{u, u', u'' : u \in I\}$ .

D'où,  $ir(G_k) \geq |I| = 5k + 4$ .

Sachant que  $I$  est un ensemble irrédondant maximal de  $G_k$ ,  $ir(G_k) = 5k + 4$ . L'ensemble  $\{u' : u' \in P_u, u \in I\} \cup \{a_i, c_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{x_i : 0 \leq i \leq k+1\}$  est un dominant minimum de  $G_k$ , d'où  $\gamma(G_k) = 8k + 6$ .

On en déduit que  $ir(G_k)/\gamma(G_k) = (5k + 4)/(8k + 6)$  et que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (5k + 4)/(8k + 6) = \frac{5}{8}$ . ([35]).

Dans le graphe  $G_3$  ci-dessous,  $ir(G_3) = 19$  et  $\gamma(G_3) = 30$ .

FIGURE.2.14.: Le graphe  $G_3$ .

## CHAPITRE 3

# QUELQUES RAPPORTS DE PARAMÈTRES DE DOMINATION DANS LES ARBRES

Dans les graphes, il existe au moins cent types de domination et un nombre très élevé de publications, de l'ordre de deux mille références.

A eux seuls, les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [36], [37] en fournissent une bibliographie riche de neuf cents cinquantes références. Un numéro spécial de la revue *Discrete Mathematics* [38] est dédié à ce champ d'investigation de la domination.

On exposera dans ce chapitre quelques résultats obtenus. Ils concernent des rapports entre les paramètres  $\Gamma_t, \gamma_t, \gamma_{pr}, \beta, \beta_2, \Gamma, \gamma, \gamma_2, i, i_2$  dans les arbres.

Nos résultats concernent des améliorations de bornes.

### 3.1 Définitions et résultats préliminaires:

Haynes et al. [22] ont introduit le nouveau paramètre de domination, le "*H-formant ensemble*" d'un graphe  $G$ .

**Définition 3.1.** *Soient  $H$  et  $G$  deux graphes.*

*On dit qu'un ensemble  $S \subseteq V(G)$  est un  $H$ -formant de  $G$ , si pour tout sommet  $v \in V(G) - S$ , il existe un sous ensemble  $R \subseteq S$ , où  $|R| = |V(H)| - 1$  tel que le sous graphe induit par  $R \cup \{v\}$  contient  $H$  comme sous graphe.*

*La cardinalité minimum d'un ensemble  $H$ -formant de  $G$  est le nombre  $H$ -formant noté par  $\gamma_{\{H\}}(G)$ .*

Le nombre  $H$ -formant de  $G$  est une généralisation de nombre de domination  $\gamma(G)$ , car  $\gamma(G) = \gamma_{\{P_2\}}(G)$ .

Favaron et al. [39] ont introduit le *p-étoile formant ensemble* d'un graphe  $G$ .

**Définition 3.2.** *Un ensemble  $D \subseteq V(G)$  est un ensemble  $p$ -étoile-formant d'un graphe  $G$ , si tout sommet  $u$  dans  $V - D$  ayant au plus  $p - 1$  voisins dans  $D$ ,  $N(u) \cap D \neq \emptyset$ , et au moins un sommet de  $N(u) \cap D$  a au moins  $p - 1$  voisins dans  $D$ . D'où tout sommet  $u$  de  $V - D$  est contenu dans un  $p$ -étoile  $K_{1,p}$  d'un sous graphe induit par  $D \cup \{u\}$ . La cardinalité minimum d'un ensemble  $p$ -étoile-formant de  $G$  est le nombre  $p$ -étoile-formant noté par  $sf_p(G)$ , et La cardinalité maximum d'un ensemble  $p$ -étoile-formant minimal de  $G$  est le nombre  $p$ -étoile-formant supérieure noté par  $sF_p(G)$ .*

**Proposition 3.3** (Chellali et al.[3]). *Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés. Alors :*

- (a)  $\gamma(G) \leq sf_2(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G)$ .
- (b)  $\gamma(G) \leq sf_2(G) \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ .
- (c)  $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G)$ .
- (d)  $\gamma_t(G) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ .

On remarque que l'inégalité (a) est atteinte pour la couronne de  $P_{2k}$  ( $k \geq 1$ ), où  $\gamma(G) = sf_2(G) = \gamma_t(G) = \gamma_{pr}(G) = 2k$ , et l'inégalité (b) est atteinte pour la 2-couronne où  $\gamma_2 = sf_2$  et pour (c) elle est atteinte pour les couronnes.

Dans les paragraphes suivants, d'autres inégalités sont améliorée.

Dans les arbres, Cockayne et al. [40] ont montré que les paramètres  $\beta(T)$  et  $\Gamma(T)$  sont égaux. Par conséquent, on peut considérer les rapports seulement entre le nombre d'indépendance  $\beta$ .et les autres paramètres.

Chellali et al. [39] ont établi un encadrement pour  $i_k$ .

**Théorème 3.4** (Chellali et al.[39]). *Pour tout graphe  $G$  et tout entier positif  $k$ ,*

$$sf_k(G) \leq i_k(G) \leq \beta_k(G).$$

Dans les graphes triangulé, l'égalité est établie entre  $sf_2$  et  $\gamma_t$ .

**Théorème 3.5** (Chellali et al.[39]). *Pour tout graphe triangulé  $G$  sans sommets isolés,*

$$sf_2(G) = \gamma_t(G).$$

Un corollaire des Théorèmes 3.4 et 3.5 s'énonce.

**Corollaire 3.6** (Chellali et al.[3]). *Pour tout graphe triangulé  $G$  sans sommets isolé,  $\gamma_t(G) \leq i_2(G) \leq \beta_2(G)$ .*

*Preuve.* Pour ce type de graphes,  $sf_2(G) = \gamma_t(G)$ , ainsi pour tout graphe  $G$  et tout entier positif  $k$ ,  $sf_k(G) \leq i_k(G) \leq \beta_k(G)$  [39] et  $\gamma_2(G) \leq \beta_2(G)$ .

D'où  $\gamma_t(G) \leq i_2(G) \leq \beta_2(G)$ . □

Dans les arbres, Haynes et al.[22] ont établi que  $\gamma_t(T) \leq \gamma_2(T)$ . Pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma_2(G)$ –ensemble est un  $sf_2(G)$ –ensemble.

D'où l'énoncé du corollaire du Théorème 3.5.

**Corollaire 3.7** (Chellali et al. [3]). *Pour tout graphe triangulé  $G$  sans sommet isolé,  $\gamma_t(G) \leq \gamma_2(G)$ .*

Une autre conséquence du Corollaire 2.35 et du Théorème 2.37 cités dans [24], une relation lie les deux paramètres  $\beta$  et  $\gamma_{\times 2}$ .

**Corollaire 3.8** (Chellali et al. [3]). *Pour tout arbre non trivial  $T$ ,  $\beta(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ .*

*Preuve.* Comme pour tout arbre  $T$  on a  $\beta(T) \leq \gamma_2(T)$  [24], et  $\gamma_2(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ ,  $\beta(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ .

Cette borne est atteinte pour la chaîne  $P_6$ . □

Une conséquence immédiate du Théorème 2.20 introduit par Blidia et al. [2] fait que les deux paramètres  $\beta$  et  $\gamma_{\times 2}$  sont donnés par le résultat suivant :

**Corollaire 3.9** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$\gamma_{\times 2}(T)/\beta(T) \leq 2.$$

*L'égalité est atteinte si et seulement si  $T$  est une 1–couronne pour tout arbre.*

*Preuve.* D'après le Théorème 2.20, on a pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma_{\times 2}(G) \leq i(G) + \beta(G)$  et comme  $i(G) \leq \beta(G)$ , alors  $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\beta(G)$ .

En particulier, cette dernière inégalité reste encore vraie pour les arbres. La borne deux est atteinte, si et seulement si tout sommet de l'arbre  $T$  soit un sommet pendant ou bien un sommet support d'un seul sommet pendant, dans ce cas l'arbre  $T$  doit être un 1–couronne d'un arbre. □

Pour les graphes contenant au plus un cycle, Blidia et al. [29] ont montré que :  
 $i_2(G) \leq \gamma(G) + i(G)$ .

Pour les arbres on en déduit une inégalité entre  $i_2$  et  $i$ .

**Corollaire 3.10** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $i_2(G) \leq 2i(T)$ .*

La borne 2 du rapport  $i_2/i$  est atteinte pour les étoiles.

Par la suite, des remarques s'imposent.

**Proposition 3.11** (Chellali et al. [3]). *Tout ensemble dominant total d'un graphe  $G$  contient tous les sommets supports, s'ils en existent.*

Preuve. Soit  $S$  un  $\gamma_t$ -ensemble de  $G$ . Supposons qu'il existe un sommet support  $x$  qui n'appartient pas à  $S$ , d'où les sommets pendants adjacents à  $x$  sont dans  $S$  et sont isolés dans  $S$ . Contradiction avec  $S$  un  $\gamma_t$ -ensemble de  $G$ .  $\square$

**Proposition 3.12** (Chellali et al. [3]). *Tout ensemble dominant double d'un graphe  $G$  contient tout les sommets pendant et les sommets supports.*

Preuve. Soit  $S$  un  $\gamma_{x_2}$ -ensemble de  $G$ . Supposons qu'il existe un sommet support  $x$  qui n'appartient pas à  $S$ , d'où les sommets pendants adjacents à  $x$  sont dans  $S$ .

Il y a une contradiction avec la définition d'un  $\gamma_{x_2}$ -ensemble de  $G$ .

De même s'il existe un sommet pendant  $y$  qui n'appartient pas à  $S$  et le sommet support de  $y$  est dans  $S$ , alors  $y$  est dominé une fois par  $S$ .

Ce qui contre dit la définition d'un  $\gamma_{x_2}$ -ensemble de  $G$ .  $\square$

**Définition 3.13.** *La somme cartésienne de deux graphes  $G$  et  $H$ , notée  $G \square H$ , est le graphe défini par:*

$$V(G \square H) = \{(u, v) : u \in V(G) \text{ et } v \in V(H)\}$$

$$E(G \square H) = \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) : (u_1 = u_2 \text{ et } (v_1, v_2) \in E(H)) \text{ ou } (v_1 = v_2 \text{ et } (u_1, u_2) \in E(G))\}$$

## 3.2 Nouveaux rapports

### 3.2.1 Rapports non bornés supérieurement

Ci-dessous, deux exemples de graphes sont fournis où la borne supérieure n'existe pas pour plusieurs rapports de domination.

**Exemple 1:** Cas de la classe  $\mathcal{F}_p$ .

Elle est formée par l'attachement de  $p$  nouveaux sommets ( $p \geq 1$ ) à chaque sommets de la chaîne  $P_3$ .

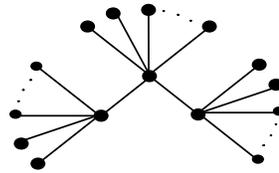


FIGURE.3.1 : Le graphe  $\mathcal{F}_p$

Si  $G \in \mathcal{F}_p$ , alors  $i_2 = 2 + p$ ,  $\gamma = sf_2 = \gamma_t = \Gamma_t = 3$ , et  $\gamma_{pr} = 4$ , quand  $p$  augmente indéfiniment, par exemple  $\frac{p+2}{4}$  augmente indéfiniment. D'où, les rapports  $i_2/\gamma$ ,  $i_2/sf_2$ ,  $i_2/\gamma_t$ ,  $i_2/\gamma_{pr}$ ,  $i_2/\Gamma_t$  n'ont pas de borne supérieure.

**Exemple 2 :** Cas de la classe  $\mathcal{G}_p$ .

Soit la chaîne  $P_3 = uvw$ . l'attachement de  $p$  nouveaux sommets ( $p \geq 2$ ) aux deux premiers sommets  $u$ ,  $v$  et un sommet pour  $w$  formera la classe  $\mathcal{G}_p$ .

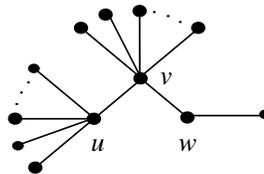


FIGURE.3.2 : Le graphe  $\mathcal{G}_p$

Si  $G \in \mathcal{G}_p$ , alors  $\gamma_2 = 2p + 2$  et  $i_2 = 3$ . D'où pour les arbres le rapport  $\gamma_2/i_2$  n'a pas de borne supérieure.

### 3.2.2 Les rapports $\Gamma_t/\beta_2$ , $\Gamma_t/\gamma$

Soit  $T_k$  ( $k \geq 1$ ) un arbre formé de  $k$  copies de  $P_3$  de centre  $c_i$ , relier les sommets centre  $c_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) consécutivement, soit le sommet  $c_i$  est lié à  $c_{i+1}$  ( $i = 1 \dots k - 1$ )

Cet arbre est représenté ci-dessous.

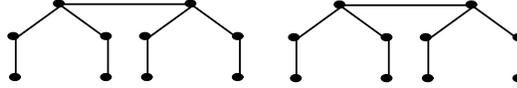


FIGURE.3.3 : Un arbre tel que  $\gamma_t(T_k) - \gamma(T_k) = k$

Il est établi que:  $\gamma_t(T_k) = 3k$  et  $\gamma(T_k) = 2k$ . La différence  $\gamma_t(T_k) - \gamma(T_k) = k$  peut être aussi grande que l'on veut.

Le résultat ultérieur montre que le rapport  $\Gamma_t/\gamma$  est borné supérieurement par deux.

**Théorème 3.14** (Chellali et al. [3]). *Soit  $T$  un arbre non trivial. Alors*

- (a)  $\Gamma_t(T) \leq \beta_2(T)$ .
- (b)  $\Gamma_t(T) \leq 2\gamma(T)$ .

Sans perte de généralité et pour ne pas dupliquer les preuves du (a) et (b) qui sont de même forme, nous reproduisons une preuve globale.

Preuve. On procède par induction sur l'ordre de l'arbre  $T$ . Si l'arbre  $T$  est de diamètre 1, 2 ou 3 alors les résultats sont vrais.

Supposons que pour tout arbre  $T'$  d'ordre  $n'$ ,  $n' < n$  les résultats sont satisfaits, soit  $\Gamma_t(T') \leq \beta_2(T')$  et  $\Gamma_t(T') \leq 2\gamma(T')$ .

Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$  et de  $\text{diam}(T) \geq 4$ , si  $x$  est un sommet support fort de l'arbre  $T$ , considérons  $T' = T - x'$  tel que  $x'$  est un sommet pendant dans  $L_x$ . Alors  $\Gamma_t(T') = \Gamma_t(T)$ ,  $\gamma(T') = \gamma(T)$ , et  $\beta(T') = \beta(T)$ .

Par induction sur  $T'$ , on obtient les résultats énoncés sur l'arbre  $T$ .

Supposons que l'arbre  $T$  n'a pas de sommet support fort.

Enracinons l'arbre  $T$  à partir un sommet  $r$  d'excentricité maximum, soient  $u'$  un sommet pendant de degré au moins 2 a distance maximum de  $r$ ,  $u, v, w$  sont respectivement les parents de  $u', u, v$ .

**Cas 1.** Soit  $v$  un sommet tel que son degré  $\deg(v) \geq 3$  a au moins un sommet fils  $b$ ,  $b \neq u$ , un sommet support.

L'arbre  $T' = T - \{u', u\}$ . Alors, tout  $\Gamma_t(T)$ -ensemble  $S$  contient le sommet  $v$  et tous les voisins des sommets supports ou tous ses descendants. Dans ce dernier cas,  $v$  n'est pas un sommet support. Dans tous les cas,  $S \cap T'$  est un ensemble dominant total de  $T'$  et  $\Gamma_t(T') \geq \Gamma_t(T) - 2$ . De même, sachant qu'il existe un  $\gamma(T)$ -ensemble  $D$  contenant les sommets  $u$  et  $b$ ,  $D - \{u\}$  est un ensemble dominant de  $T'$ , d'où  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$ .

D'autre part, il existe un  $\beta_2(T')$ -ensemble contenant le sommet  $b$  et ses sommets pendants. Un tel ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de  $T$  en lui ajoutant les sommets  $u'$  et  $u$  de l'arbre  $T$ , d'où  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2$ . Par induction sur  $T' = T - \{u', u\}$ , on obtient que  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2 \geq \Gamma_t(T') + 2 \geq \Gamma_t(T)$ , et que  $\Gamma_t(T) \leq \Gamma_t(T') + 2 \leq 2\gamma(T') + 2 \leq 2\gamma(T)$ .

**Cas 2.** Comme  $u$  est le premier fils de  $v$  de degré trois  $\deg(v) = 3$ ,  $v'$  son deuxième sommet fils qui est un sommet pendant.

Alors, tout ensemble dominant total minimal contient  $u$  et  $v$ . De plus il existe un  $\gamma(T)$ -ensemble  $D$  qui contient à la fois  $u$  et  $v$ .

Si  $S$  est un  $\Gamma_t(T)$ -ensemble qui contient le sommet  $w$ , soit  $T' = T - \{u', v\}$ . Alors  $S - \{u\}$  (respectivement,  $D - \{u\}$ ) est un dominant total minimal (respectivement, un ensemble dominant) de  $T'$  et  $\Gamma_t(T') \geq \Gamma_t(T) - 1$  et  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$ .

De plus tout  $\beta_2(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de  $T$  en lui ajoutant le sommet  $u'$  de l'arbre  $T$ . D'où  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 1$ . Par induction, on obtient les résultats.

Supposons que  $w$  n'appartient pas à un  $\Gamma_t(T)$ -ensemble et considérons  $S$  comme un  $\Gamma_t(T)$ -ensemble.

Si  $w$  n'est pas un voisin privé de  $v$  dans  $S$ , considérons  $T' = T - T_v$ . L'ensemble  $S - \{u, v\}$  est un dominant total minimal de  $T'$  et  $\{w\} \cup (D - \{u, v\})$  est un ensemble dominant de  $T'$ . Il s'ensuit que  $\Gamma_t(T') \geq \Gamma_t(T) - 2$  et  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$ .

D'autre part, tout  $\beta_2(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de  $T$  en lui ajoutant  $\{u', u, v'\}$ , d'où  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 3$ . Les deux résultats sont obtenus par induction sur  $T'$ .

Supposons maintenant que  $w$  est un voisin privé de  $v$  dans  $S$ . Si  $d(w) \geq 3$ , il existe une chaîne pendante  $wxx'x''$  avec  $x \neq v$  et  $\{x', x''\} \subseteq S$ .

En remplaçant  $S$  par  $\Gamma_t(T)$ -ensemble  $S' = (S \setminus \{x''\}) \cup \{x\}$ , on se retrouve dans le cas précédent puisque  $w$  n'est pas un voisin privé de  $v$  dans  $S'$ . D'où on peut supposer que  $d(w) = 2$ .

Soit l'arbre  $T' = T - T_w$ . S'il est réduite à un sommet, et  $T$  est obtenu en attachant une arête pendante au centre de la chaîne  $P_5$ . Ensuite  $\beta_2(T) = 5 > 3 = \Gamma_t(T)$ , et  $\gamma(T) = 6 > \Gamma_t(T)$ . Ainsi, on suppose que  $T'$  est un arbre non trivial. De même que précédemment, on peut voir que  $\Gamma_t(T') \geq \Gamma_t(T) - 2$ ,  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 2$  et  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 3$ . Par induction sur  $T'$  on obtient  $\Gamma_t(T) \leq \beta_2(T)$  et  $\Gamma_t(T) \leq 2\gamma(T)$ .

**Cas 3.** soit  $v$  un sommet de degré deux,  $d(v) = 2$ .

Par le choix de  $u'$ , tous les descendants de  $w$  ont un degré 2 ou 1. Soit  $S$  un  $\Gamma_t(T)$ -ensemble et  $D$  un  $\gamma(T)$ -ensemble .

(a) : Si  $S$  contient  $u'$ ,  $u$  et  $v \notin S$ . Soit  $T' = T - \{u', u, v\}$ .

Alors  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2$ ,  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$ . Comme  $S \cap T'$  est un ensemble dominant total minimal de  $T'$ ,  $\Gamma_t(T') \geq \Gamma_t(T) - 2$ .

(b) : Si  $S$  contient  $u, v$  et ne contient pas  $w$ .

Si  $w$  n'est pas un voisin privé de  $v$ , considérons  $T' = T - \{u', u, v\}$ . Il est établi que  $\Gamma_t(T') \geq \Gamma_t(T) - 2$ ,  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2$  et  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$ .

Si  $w$  est un voisin privé de  $v$ , d'après le cas 2, on peut supposer que  $d(w) = 2$ . Considérons  $T' = T - T_w$ .

S'il est un arbre trivial, alors  $T = P_5$  et  $\Gamma_t(P_5) = \beta_2(P_5) = 2\gamma(P_5) = 4$ . Si non, s'il est un arbre non trivial, alors  $\Gamma_t(T') \geq \Gamma_t(T) - 2$ ,  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2$  et  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$ . Par induction sur  $T'$  dans chacun de ces cas, on obtient  $\Gamma_t(T) \leq \beta_2(T)$ , et  $\Gamma_t(T) \leq 2\gamma(T)$ .

(C) : Si  $S$  contient  $u, v, w$ .

Si  $w$  a au moins deux voisins dans  $S$ , alors  $S' = \{u'\} \cup (S - \{v\})$  est un  $\Gamma_t(T)$ -ensemble déjà étudiait dans le cas (a). Considérons  $v$  l'unique voisin de  $w$  dans  $S$ .

Si  $d(w) \geq 3$ , alors il existe une chaîne pendante  $wa$  ou  $wabc$  attachée à  $w$ . Dans le premier cas,  $(S \setminus \{v\}) \cup \{a, u'\}$  est un ensemble dominant total minimal de taille supérieure à celle de  $S$ , d'où la contradiction. Dans le second cas, si  $S$  contient  $b, c$  et ne contient pas  $a$ , et on se retrouvera dans le cas (a).

Supposons que  $d(w) = 2$ . Par la minimalité de  $S$ , le père  $z$  de  $w$  dans l'arbre  $T$  est un voisin privé de  $w$  dans  $S$ . D'où si  $d(z) \geq 3$ , alors il existe une autre chaîne pendante  $zabc$  avec  $S \cap \{a, b, c\} = \{b, c\}$  (cas (a)) ou une chaîne pendante  $zabcd$  avec  $S \cap \{a, b, c, d\} = \{b, c\}$  (cas (b)). Un autre cas rencontre que  $d(z) = 2$ . Si  $T = P_6$ , alors  $\Gamma_t(P_6) = \beta_2(P_6) = 2\gamma(P_6) = 4$ . S'il est un arbre d'ordre  $n$ ,  $n \geq 7$ , considérons l'arbre  $T' = T - T_z$ ,  $\Gamma(T') \geq \Gamma(T) - 3$  et  $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 2$ .

De même tout  $\beta_2(T')$ -ensemble peut être étendue à un 2-indépendant de  $T$  en lui ajoutant  $ut, u, w$ , l'inégalité  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 3$  en découlera.

Par induction sur l'ordre de  $T'$  on obtient les résultats souhaités.  $\square$

Les deux bornes de ce Théorème sont atteintes pour l'étoile subdivisée  $SS_p$ ,  $p \geq 2$ , et la 2-couronne d'un arbre.

Les propriétés du Théorème 3.14 ne sont pas vraies pour tous les graphes connexes. Dans l'exemple de prisme  $G = K_p \square K_2$ , avec  $p > 4$ ,  $\Gamma_t(G) = p$  et  $\beta_2(G) = 4 = 2\gamma(G)$ .

Deux corollaires du Théorème précédent s'énoncent :

**Corollaire 3.15** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$\Gamma_t(T) \leq 2i(T).$$

**Corollaire 3.16** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$\gamma_t(T) \leq 2\gamma(T) \leq 2i(T).$$

Les bornes des Corollaires précédent sont aussi atteintes pour la 2-couronne d'un arbre.

Une conséquence des Théorèmes 2.13 et 3.14 (b) nous fournisse un résultat intéressant dans les arbres. Elle est donnée par le corollaire suivant.

**Corollaire 3.17** (Chellali et al.[3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $\Gamma_t(T) \leq \gamma_2(T)$ .*

Cette borne est atteinte pour les étoiles subdivisées  $SS_p$  pour  $p \geq 2$ .

Pour le rapport  $\Gamma_t/\beta$ , un résultat intéressant s'obtient :

**Corollaire 3.18** (Chellali et al.[3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$\Gamma_t(T) \leq 2\beta(T) - 1.$$

La borne 2 pour le rapport  $\Gamma_t(T)/\beta(T)$  est asymptotiquement atteinte .

Preuve. Par le Théorème 3.14,  $\Gamma_t(T) \leq 2\gamma(T) \leq 2\beta(T)$ . Si  $\Gamma_t(T) = 2\beta(T)$ , alors  $\gamma(T) = \beta(T)$ .

Comme l'égalité est aussi obtenue,  $T$  est une 1-couronne, d'où la contradiction, et  $\Gamma_t(T) \leq 2\beta(T) - 1$ .

La borne 2 est asymptotiquement atteinte pour l'étoile subdivisée  $SS_p$ ,  $p \geq 2$ , où  $\Gamma_t(T) = 2p$  et  $\beta(T) = p + 1$ .  $\square$

Dans le corollaire suivant de Théorème 3.14, probablement les bornes ne sont pas atteintes.

**Corollaire 3.19** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$\Gamma_t(T) \leq 2\gamma_t(T), \Gamma_t(T) \leq 2\gamma_{pr}(T) \text{ et } \Gamma_t(T) \leq 2i_2(T).$$

### 3.2.3 Le rapport $\gamma_t/\beta$

Le nombre de domination total et le nombre d'indépendance sont incomparables dans les arbres.

Si l'arbre  $T$  est une étoile d'ordre au moins 4, alors  $\gamma_t(T) = 2$ ,  $\beta(T) = n - 1$  et donc  $\gamma_t(T) < \beta(T)$ .

Pour la chaîne  $P_6$ , on a  $\gamma_t(T) = 4$ ,  $\beta(T) = 3$ , et donc  $\gamma_t(T) > \beta(T)$ .

De la combinaison de Théorèmes 2.18, 2.37 et de Corollaire 2.35 s'ensuit que si  $T$  est un arbre d'ordre au moins trois alors  $\gamma_t(T)/\beta(T) \leq \frac{3}{2}$ .

Le résultat ultérieur améliore ce rapport à la valeur  $\frac{4}{3}$ .

**Théorème 3.20** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre d'ordre au moins trois, alors*

$$3\gamma_t(T) \leq 4\beta(T).$$

Preuve. On procède par induction sur l'ordre de l'arbre  $T$ . Si  $\text{diam}(T) = 2$ , alors  $T$  est une étoile  $K_{1,p}$  ( $p \geq 2$ ) où  $\gamma_t(T) = 2$  et  $\beta(T) = n - 1$ , d'où le résultat est vérifié.

Si  $diam(T) = 3$ , alors  $T$  est une double étoile  $S_{p,q}$  où  $\gamma_t(T) = 2$  et  $\beta(T) = p + q$ . Encore une fois, le résultat rest valable.

Supposons que pour tout arbre  $T'$  d'ordre  $n'$  avec  $n > n' \geq 3$ , on a  $3\gamma_t(T') \leq 4\beta(T')$ .

Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$ . Si  $x$  est un des sommets support de  $T$  adjacent à deux ou plusieurs sommets pendants, considérons l'arbre  $T'$  obtenu à partir de  $T$  en lui otant un sommet pendant adjacent à  $x$ . Il est établi que  $\gamma_t(T) = \gamma_t(T')$  et que  $\beta(T) = \beta(T') - 1$ . Par induction sur  $T'$ , on obtient le résultat.

Par la suite, supposons que tout sommet support de  $T$  est adjacent à exactement un sommet pendant, et que  $T$  contient deux sommets supports adjacents  $x$  et  $y$ . Soient  $T_1, T_2$  les arbres contenant  $x$  et  $y$  respectivement en enlevant l'arête  $xy$  de l'arbre  $T$ .

Si  $T_1$  est d'ordre deux, et comme  $diam(T) \geq 4$ , alors  $T_2$  est d'ordre au moins trois.

Comme  $y$  est un sommet support de  $T_2$ , tout  $\gamma_t(T_2)$ -ensemble peut être étendu à un ensemble dominant total de  $T$  en lui ajoutant le sommet  $x$ . D'où  $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T_2) + 1$ .

De même tout  $\beta(T_2)$ -ensemble peut être étendu à un ensemble indépendant de  $T$  en lui ajoutant le voisin de  $x$  dans  $T_1$ , d'où  $\beta(T) \geq \beta(T_2) + 1$ .

Par induction sur  $T_2$ , on obtient que  $4(\beta(T) - 1) \geq 4\beta(T_2) \geq 3\gamma_t(T_2) \geq 3(\gamma_t(T) - 1)$ , d'où découle que  $4\beta(T) \geq 3\gamma_t(T) + 1$ .

Si chacun de  $T_1$  et  $T_2$  d'ordre au moins trois, alors  $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T_2) + \gamma_t(T_1)$ . Soit  $S_1$  un  $\beta(T_1)$ -ensemble (respectivement  $S_2$  un  $\beta(T_2)$ -ensemble) qui contient tous les sommets pendants,  $S_1 \cup S_2$  est un ensemble indépendant de  $T$  et  $\beta(T) \geq \beta(T_1) + \beta(T_2)$ . Par induction sur  $T_1$  et  $T_2$ , on obtient le résultat escompté.

Supposons qu'il n'existe pas deux sommets supports adjacents dans  $T$ .

Enracinons l'arbre  $T$  vers un sommet  $r$  d'excentricité maximum et de  $diam(T) \geq 4$ . Soient  $v$  un sommet support à distance maximum de  $r$  et  $u$  est le sommet père de  $v$  dans l'arbre enraciné,  $v'$  le sommet voisin pendant de  $v$ . Alors  $u$  n'est pas un sommet support. Deux cas sont à considérer.

**Cas 1.**  $u$  admet respectivement  $b$  et  $v$  comme sommet fils et fils support.

Considérons l'arbre  $T' = T - \{v, v'\}$ , alors  $T'$  est d'ordre au moins trois. De plus, comme il existe  $D'$  un  $\gamma_t(T')$ -ensemble qui contient les sommets  $v$  et  $u$ , l'ensemble  $D' \cup \{v\}$  est un dominant total de  $T$ , alors  $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + 1$ . D'autre part  $\beta(T') = \beta(T) - 1$ .

Par induction sur  $T'$ , on obtient que  $3(\gamma_t(T) - 1) \leq 3\gamma_t(T') \leq 4\beta(T') = 4(\beta(T) - 1)$ , qui implique que  $3\gamma_t(T) \leq 4\beta(T)$ .

**Cas 2.**  $d(u) = 2$ .

Comme  $diam(T) \geq 4$ , soit  $w$  le sommet père de  $u$  dans l'arbre enraciné. D'après les cas précédents, supposons que tous les descendants de  $w$  sont de degré au plus deux.

Supposons que  $w$  est un sommet support ou il existe une chaîne  $P_3 = xyz$  attachée à  $w$  par  $x$ . Soit  $T' = T - T_u$ , il est d'ordre au moins trois, sinon  $T = P_5$  et le résultat sera vrai. l'inégalité  $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + 2$  est obtenue.

De plus, soit  $S'$  un  $\beta(T')$ -ensemble contenant tous les sommets pendants de  $T'$ . Sans perte de généralité on a  $w \notin S'$  (sinon  $w$  pourrait être remplacé par  $x$ ). Il en résulte que  $S' \cup \{u, v\}$  est un ensemble indépendant de  $T$ , et donc  $\beta(T) \geq \beta(T') + 2$ . Par induction sur  $T'$ , on a  $3(\gamma_t(T) - 2) \leq 3\gamma_t(T') \leq 4\beta(T') \leq 4(\beta(T) - 2)$ . D'où  $3\gamma_t(T) \leq 4\beta(T)$ .

Supposons que toute chaîne de  $w$  a ses descendants feuilles (en particulier seulement la chaîne contenant  $u$  et  $v$ ) soit un  $P_2$ . L'arbre  $T_w$  est obtenu à partir d'une étoile  $K_{1,p}$  avec  $p \geq 2$  où exactement une arête est subdivisée en deux fois et les autres sont subdivisées une seule fois.

Considérons  $T' = T - T_w$ . Comme  $w$  n'est pas un sommet support et si  $T'$  est d'ordre 2, alors  $\gamma_t(T) = p + 3$ ,  $\beta(T) = p + 2$ , et donc le résultat est valable.

Si l'arbre  $T'$  est d'ordre au moins trois, alors  $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + p + 2$  et

$\beta(T) \geq \beta(T') + p + 1$ . Par induction sur l'arbre  $T'$ , on obtient l'inégalités :

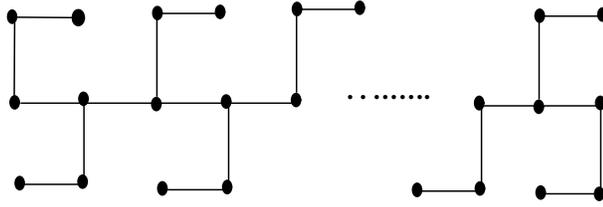
$3(\gamma_t(T) - p - 2) \leq 3\gamma_t(T') \leq 4\beta(T') \leq 4(\beta(T) - p - 1)$ . D'où  $3\gamma_t(T) \leq 4\beta(T)$  pour  $p \geq 2$ .

Supposons que  $d(w) = 2$ . Posons  $T' = T - T_w$ . Supposons que  $T'$  est d'ordre au moins trois sinon le résultat est valable pour  $T = P_5$  ou  $T = P_6$ , alors  $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + 2$  et  $\beta(T) \geq \beta(T') + 2$ .

Par induction sur  $T'$ , on a  $3(\gamma_t(T) - 2) \leq 3\gamma_t(T') \leq 4\beta(T') \leq 4(\beta(T) - 2)$ .

D'où  $3\gamma_t(T) \leq 4\beta(T)$ . □

Cette borne est atteinte, dans le cas de la 2-couronne d'une chaîne  $P_{2k}$ , noté  $T_k$ ,  $\gamma_t(T_k) = 4k$ , et  $\beta(T_k) = 3k$ .

FIGURE.3.4: La 2-couronne d'une chane  $P_{2k}$ .

Le rapport du Théorème 3.20 n'est pas valable pour le nombre de domination couplée et le nombre d'indépendance. Pour l'étoile subdivisée  $SS_q$  avec  $q \geq 3$  on a  $\gamma_{pr}(SS_q) = 2q$  et  $\beta(SS_q) = q + 1$ .

Favaron [41] a montré que pour tout arbre  $T$  avec  $n$  sommets et  $l$  sommets pendants, il est vérifié que  $\beta(T) \geq (n + l)/3$ .

Dans la même classe de graphes, Haynes et al. [42] ont établi que  $\gamma_t(T) \geq (n + 2 - l)/2$ .

Par le Théorème 3.20 et la borne inférieure de  $\gamma_t(T)$ , on a le corollaire suivant qui donne une borne inférieure pour  $\beta(T)$ , avec une amélioration de l'un des résultats de Favaron pour les arbres d'ordre  $n \geq 17l - 18$ .

**Corollaire 3.21** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre d'ordre au moins trois, alors*

$$\beta(T) \geq (3n - 3l + 6)/8.$$

### 3.2.4 Les rapports $\beta_2/\gamma_{\times 2}, \Gamma/\gamma_{\times 2}$

Par la suite une remarque s'impose :

**Proposition 3.22.** *Soit  $T$  un arbre obtenu en attachant une étoile subdivisée d'ordre  $2k+1$  ( $k \geq 2$ ) par son sommet centre à un sommet quelconque d'un arbre non trivial  $T'$  Alors :*

a)  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k.$

b)  $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2k.$

Preuve. Soient  $T_u$  l'étoile subdivisée d'ordre  $2k + 1$  et de centre  $u$  et  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.

(a)  $D$  contient tous les sommets descendants de  $u$ , en particulier,  $u$  est dominé de façon double par ses fils. Soit  $z$  le père de  $u$ . Si  $u \in D$  et  $z \in D$  alors on peut remplacer  $u$  dans  $D$  par  $z$  dans  $T'$ . Si  $u \in D$  et  $z \notin D$  alors on peut remplacer  $u$  dans  $D$  par  $z$ .

Sans perte de généralité on suppose que  $u \notin D$ . Dans ce cas  $D \cap V(T')$  est un dominant double de  $T'$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |D| - 2|S(T_u)|$ ,  $|S(T_u)| = 2k$ ; et  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2k$ .

Comme tout  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble double dominant de  $T$  en lui ajoutant l'ensemble des sommets pendants et supports de  $T_u$  alors on aura l'inégalité  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . On en déduit que  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ .

(b) Soit  $I$  un  $\beta_2(T)$ -ensemble, il contient tout les sommets descendants de  $u$ , en particulier,  $u$  est dominé par ses fils. Dans ce cas,  $u$  ne doit pas appartenir à  $I$ , sinon  $I$  ne sera pas maximal.  $V(T') \cap I$  est un  $\beta_2(T')$ -ensemble, d'où  $\beta_2(T') \leq \beta_2(T) - 2k$ .

Comme tout  $\beta_2(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de  $T$  en lui ajoutant l'ensemble des sommets pendants et supports de  $T_u$  alors on aura :  $\beta_2(T) \leq \beta_2(T') + 2k$ . D'où  $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2k$ .  $\square$

**Théorème 3.23** (Chellali et al. [3]). *Pour tout arbre  $T$  non trivial,*

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \beta_2(T) \geq \Gamma_t(T).$$

Preuve. Le Théorème 3.14 montre que  $\beta_2(T) \geq \Gamma(T)$ . Alors pour montrer l'inégalité  $\gamma_{\times 2}(T) \geq \beta_2(T)$ , on procède par induction sur l'ordre  $n$  de l'arbre  $T$ . S'il est de diamètre 1 ou 2 alors  $\gamma_{\times 2}(T) = n$  et  $\beta_2(T) \in \{n, n - 1\}$ .

Si  $T$  est de diamètre 3, alors  $T$  est nécessairement l'étoile double  $S_{p,q}$  où  $\gamma_{\times 2}(S_{p,q}) = n$  et  $\beta_2(S_{p,q}) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } \min\{p, q\} = 1 \\ n - 2 & \text{sinon} \end{cases}$ . Donc le résultat rest vrai.

Supposons que tout arbre  $T'$  d'ordre  $n'$ ,  $2 \leq n' < n$  satisfait  $\gamma_{\times 2}(T') \geq \beta_2(T')$ , et qu'il existe un sommet support  $y$  adjacent à au moins deux sommets pendants dans  $T$ . Un tel arbre  $T'$  peut être obtenu de  $T$  en lui supprimant un sommet pendant adjacent à  $y$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$  et  $\beta_2(T') \geq \beta_2(T) - 1$ .

Par induction sur l'ordre de  $T'$  on obtient que  $\gamma_{\times 2}(T') \geq \beta_2(T')$ , d'où découle que  $\gamma_{\times 2}(T) \geq \beta_2(T)$ .

On peut supposer que tout sommet support est adjacent à exactement un sommet pendant.

Enracinons l'arbre  $T$  vers un sommet  $r$  d'excentricité maximum  $diam(T) \geq 4$ . Soit  $v$  un sommet support à distance  $diam(T) - 1$  de  $r$  et soient  $u$  le père de  $v$  et  $z$  le père de  $u$ . On notera par  $v'$  le sommet pendant de  $v$ . Trois cas sont à considérer :

**Cas 1.**  $deg(u) \geq 3$  et  $u$  est un sommet support.

$T' = T - \{v, v'\}$  est un arbre non trivial où  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$  et  $\beta_2(T') \geq \beta_2(T) - 2$ .

Par hypothèse d'induction sur  $T'$ , on aura le résultat  $\gamma_{\times 2}(T) \geq \beta_2(T)$ .

**Cas 2.**  $deg(u) \geq 3$  et tout fils de  $u$  est un sommet support.

Comme  $T$  est de diamètre au moins 4,  $T' = T - T_u$  est un arbre non trivial. D'après la Proposition 3.22,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + |V(T_u)| - 1$  et  $\beta_2(T') \geq \beta_2(T) - |V(T_u)| + 1$ .

Par induction sur l'ordre de  $T'$ , on a  $\gamma_{\times 2}(T') \geq \beta_2(T')$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T) \geq \beta_2(T)$ .

**Cas 3.**  $deg(u) = 2$ .

Considérons l'arbre  $T'$  obtenu à partir de l'arbre  $T$  en lui supprimant les sommets  $u$ ,  $v$  et  $v'$ . Il est non trivial car  $diam(T) \geq 4$ . Dans ce cas on a,  $\beta_2(T') = \beta_2(T) - 2$  et  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2$ .

Par induction sur de  $T'$ , on obtient  $\gamma_{\times 2}(T') \geq \beta_2(T')$ , d'où découle que  $\gamma_{\times 2}(T) \geq \beta_2(T)$ .  $\square$

les bornes pour les deux rapports  $\beta_2/\gamma_{\times 2}$  et  $\Gamma/\gamma_{\times 2}$  sont atteintes pour l'étoile subdivisée  $SS_p$ ,  $p \geq 2$ .

Une conséquence immédiate du Théorème 3.23 [3], s'obtient.

**Corollaire 3.24** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$ , alors*

$$i_2(T) \leq \gamma_{\times 2}(T) - 1.$$

Preuve. Pour tout arbre  $T$  non trivial,  $\gamma_{\times 2}(T) \geq i_2(T)$ . S'il est d'ordre  $n = 2$ , on a :  $\gamma_{\times 2}(T) = i_2(T)$ . Si  $n \geq 3$  et supposons que  $\gamma_{\times 2}(T) = i_2(T)$ . Alors  $\beta_2(T) = i_2(T)$  et l'arbre  $T$  est bien un 2-couvert. D'après Favaron et al.[43], il est une 2-couronne d'un arbre  $T'$ . D'autre part,  $\beta_2(T) = i_2(T) = 2|V(T')|$  et  $\gamma_{\times 2}(T) > 2|V(T')|$ . D'où la contradiction avec l'hypothèse.  $\square$

Cette borne est atteinte pour  $T = P_5$ .

Dans les arbres, on montrera ultérieurement que le nombre 2-indépendant est borné supérieurement par le nombre de domination couplé.

### 3.3 Bornes supérieures sur $\gamma_{pr}$

Rappelons que tout graphe  $G$  sans sommets isolés satisfait l'inégalité :

$\gamma_{pr}(G) \leq 2\gamma_t(G) - 2 \leq 2\Gamma_t(G) - 2$  (voir [44] ). De plus, pour les graphes triangulés sans sommets isolés, on a  $\gamma_{pr} \leq 2\gamma_t - 2 \leq 2\gamma_2 - 2$  et  $\gamma_{pr} \leq 2\gamma_t - 2 \leq 2i_2 - 2$ .

On en déduit que pour les arbres, tous les rapports  $\gamma_{pr}/\Gamma_t$ ,  $\gamma_{pr}/\gamma_t$ ,  $\gamma_{pr}/\gamma_2$  et  $\gamma_{pr}/i_2$  sont strictement inférieure à 2.

La borne 2 est asymptotiquement atteinte pour tout arbre de classe  $\mathcal{H}_p$  obtenue à partir d'une étoile  $K_{1,p}$ ,  $p \geq 2$  en subdivisant une fois  $p - 1$  arêtes. Ce graphe est représenté ci-dessous.

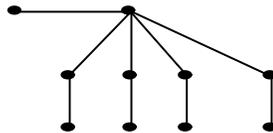


FIGURE.3.5: Un arbre de la classe  $\mathcal{H}_p$

Il est établi que  $\gamma = i = \beta = \gamma_t = \Gamma_t = i_2 = p$ ,  $\gamma_2 = p + 1$ ,  $\gamma_{pr} = 2p - 2$ .

Tout graphe sans sommets isolés satisfait que  $\gamma_{pr} \leq 2\gamma \leq 2i \leq 2\beta$ , ([44]).

La borne 2 sur les rapports  $\gamma_{pr}/\gamma$  et  $\gamma_{pr}/i$  est atteinte pour l'étoile  $K_{1,p}$ .

Dans les arbres d'ordre au moins trois, une inégalité entre  $\gamma_{pr}$  et  $\beta$  s'obtient.

**Proposition 3.25** (Chellali et al. [3]). *Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 3$ ,*

$$\gamma_{pr}(T) \leq 2\beta(T) - 2,$$

Cette borne est atteinte pour les graphes de la classe  $\mathcal{H}_p$ .

Preuve. Supposons que  $\gamma_{pr}(T) = 2\beta(T)$ . Comme  $\gamma_{pr} \leq 2i \leq 2\beta$  alors  $i(T) = \beta(T)$ .  $T$  est un arbre bien couvert et est une 1-couronne d'un arbre  $T'$  d'ordre  $n/2$ .

L'arbre  $T'$  est non trivial car  $T$  est d'ordre  $n$ ,  $n \geq 3$ , notons par  $v(T')$  la taille d'un couplage maximum de  $T'$ .

Il est établi que  $\gamma_{pr}(T) \leq 2v(T') + 2(n(T') - 2v(T')) = 2\beta(T) - 2v(T') \leq 2\beta(T) - 2$ . D'où la contradiction avec l'hypothèse.

On en déduit que pour les arbres d'ordre au moins trois, le rapport  $\gamma_{pr}/\beta$  est strictement inférieure à 2.

De même, cette borne est asymptotiquement atteinte pour les arbres de la classe  $\mathcal{H}_p$ .  $\square$

**Théorème 3.26** (Chellali et al. [3]). *Pour tout arbre  $T$  non trivial,  $\gamma_{pr}(T)/\beta_2(T) \leq 1$ .*

Preuve. On procède par induction sur l'ordre  $n$  de l'arbre  $T$ .

Si le  $diam(T) \in \{1, 2, 3\}$ , l'inégalité est vérifiée. Pour  $T = P_2$  on a  $\beta_2(P_2) = \gamma_{pr}(P_2)$  et s'il est une étoile  $K_{1,p}$  ( $p \geq 2$ ) alors  $\beta_2(K_{1,p}) = p \geq \gamma_{pr}(K_{1,p}) = 2$ . Encore si l'arbre  $T$  est une étoile double  $S_{p,q}$  alors  $p + q + 1 \geq \beta_2(K_{1,p}) \geq p + q \geq \gamma_{pr}(K_{1,p}) = 2$ . Le résultat est vrai.

Supposons que le résultat est vrai pour tout arbre  $T'$  d'ordre  $n'$ ,  $2 \leq n' < n$ .

S'il existe un sommet support adjacent à au moins deux sommets pendants, alors considérons l'arbre  $T'$  obtenu en lui supprimant l'un de ses sommets pendants. Il est établi que  $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{pr}(T)$  et  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T')$ .

Par induction sur  $T'$  on obtient que  $\beta_2(T') \geq \gamma_{pr}(T')$ . D'où  $\beta_2(T) \geq \gamma_{pr}(T)$ .

Supposons que tout sommet support est adjacent à exactement un sommet pendent.

Enracinons l'arbre  $T$  vers un sommet  $r$  d'excentricité maximum  $diam(T) \geq 4$ . Soient  $v$  un sommet support à distance  $diam(T) - 1$  de  $r$  et  $u$  et  $z$  sont respectivement les pères de  $v$  et  $u$ . Notons par  $v'$  le sommet pendent de  $v$ . Trois cas sont à considérer.

**Cas 1.**  $u$  possède  $b$  comme un sommet fils support différent de  $v$ .

Formons  $T' = T - \{v, v'\}$ . Comme tout dominant couplé de  $T'$  peut être étendu à un dominant couplé de  $T$  en lui ajoutant et en couplant les sommets  $v$  et  $v'$ , l'inégalité  $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2$  est vraie.

D'autre part, si  $S$  est un ensemble 2-independant maximum de  $T'$ , alors  $S$  contient

tous les descendants de  $u$  et il ne contient pas  $u$ , sinon on peut construire un ensemble 2–independant de  $T'$  meilleur en cardinal que  $S$  et contenant les descendants de  $u$ .

D'où  $S \cup \{v, v'\}$  est un ensemble 2–independant de  $T$  et  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2$ .

Par induction sur  $T'$ , on obtient  $\beta_2(T) \geq \gamma_{pr}(T)$ .

**Cas 2.**  $u$  est un sommet support.

Comme tout sommet support est adjacent à un seul sommet pendant, alors  $\deg(u) = 3$ , donc  $T_u$  est une chaîne  $P_4$ .

Posons  $T' = T - T_u$ . Il est un arbre non trivial car  $\text{diam}(T) \geq 4$ . Comme tout  $\gamma_{pr}(T')$ –ensemble peut être élargi à un dominant couplé de  $T$  en lui ajoutant et en couplant les sommets  $v$  et  $u$ , alors  $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2$ .

De plus, tout  $\beta_2(T')$ –ensemble peut être élargi à un 2–indépendant de  $T$  en lui ajoutant  $v, v'$  et le sommet pendant adjacent à  $u$ , d'où  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 3$ .

Par induction sur  $T'$ , on obtient que :  $\beta_2(T) \geq \gamma_{pr}(T) + 1$ .

**Cas 3.**  $\deg(u) = 2$ .

$T' = T - \{u, v, v'\}$  est un arbre non trivial car  $\text{diam}(T) \geq 4$ . Il est établi l'inégalités  $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2$  et  $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2$ .

Par induction sur  $T'$ , on obtient le résultat désiré. Ceci achève la démonstration.  $\square$

D'après les Théorèmes 3.23 et 3.26 on obtient le corollaire suivant qui est un résultat déjà obtenu par Blidia et al. [21]

**Corollaire 3.27** (Blidia et al. [21]). *Pour tout arbre  $T$  non trivial,  $\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma_{pr}(T)$ .*

Nous énonçons deux propositions.

**Proposition 3.28.** *Pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe un arbre  $T_k$  tel que  $\gamma_{\times 2}(T_k) = \beta_2(T_k)$  et la différence  $\beta_2(T_k) - \gamma_{pr}(T_k) > 0$ .*

Il est représenté ci-dessous.

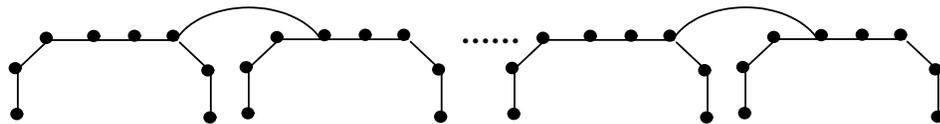


FIGURE 3.6: l'arbre  $T_k$

**Proposition 3.29.** *pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe un arbre  $T_k$  tel que  $\beta_2(T_k) = \gamma_{pr}(T_k)$  et la différence  $\gamma_{\times 2}(T_k) - \beta_2(T_k) > 0$ .*

Il est représenté ci-dessous.

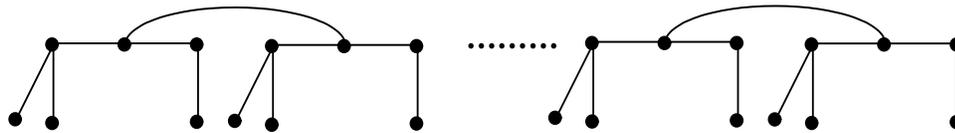


FIGURE 3.7: l'arbre  $T_k$

### 3.4 Comparaisons entre $\gamma_{\times 2}$ , $\gamma_2$ , $i$ , $\beta_2$ et $i_2$

**Proposition 3.30** (Chellali et al. [3]). *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$ . Alors*

- (a) *Si  $n \geq 4$ , l'inégalité entre  $\gamma_{\times 2}$  et  $\gamma_2$  est  $\gamma_{\times 2}(T) \leq 2\gamma_2(T) - 2$ .*
- (b) *Si  $n \geq 2$ , une double inégalité est que  $\gamma(T) \leq i(T) \leq \gamma_2(T) - 1$ .*

Preuve.  $\gamma_{\times 2}(T) = n$  si et seulement si chaque sommet est un sommet pendant ou un support.

Si  $\gamma_{\times 2}(T) = n$ , alors  $\gamma_{\times 2}(T) = 2(n+1)/2 - 1 \leq 2\gamma_2(T) - 1$ .

Si l'égalité est atteinte,  $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma_2(T) - 1$  alors  $\gamma_2(T) = (n+1)/2$ , et d'après le Théorème 2.30  $T$  est la subdivision d'un arbre  $T'$ . D'où la Contradiction avec l'hypothèse.

Il en résulte que  $\gamma_{\times 2}(T) \leq n - 1$  et donc  $\gamma_{\times 2}(T) \leq 2\gamma_2(T) - 2$ .

De même, comme tout arbre non trivial satisfait  $\gamma(T) \leq i(T) \leq n/2$ , on en déduit que  $\gamma(T) \leq i(T) \leq \gamma_2(T) - 1$ . □

Toutes les bornes sont atteintes pour l'étoile subdivisée  $SS_p$ ,  $p \geq 2$ .

Par le Théorème 3.23 et la Proposition 3.30 (a) et comme  $\Gamma_t(T) \leq \beta_2(T) \leq 2\gamma_2(T) - 2$  est vraie pour  $n \in \{2, 3\}$ , on a l'énoncé suivant :

**Corollaire 3.31** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$\Gamma_t(T) \leq \beta_2(T) \leq 2\gamma_2(T) - 2.$$

Ces bornes sont atteinte pour l'étoile subdivisée  $SS_p$ ,  $p \geq 2$ .

**Proposition 3.32** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors*

$$i_2(T)/\gamma_2(T) < \frac{3}{2}.$$

Preuve. Blidia et al. [45] ont montré que tout arbre  $T$  non trivial avec  $s$  "sommets support" satisfait  $i_2(T) \leq (n + s)/2$ .

Comme  $s \leq n/2$ , alors  $i_2(T) \leq (n + s)/2 \leq 3n/4 = \frac{3}{2}(n/2) < \frac{3}{2}(n + 1) \leq \frac{3}{2}\gamma_2(T)$ .  $\square$

Ces même auteurs ont aussi établi une nouvelle borne supérieure pour le rapport  $\gamma_{\times 2}/\beta_2$ .

**Proposition 3.33** (Chellali et al. [3]). *Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$ , alors*

$$\gamma_{\times 2}(T) \leq \frac{3}{2}\beta_2(T).$$

Cette borne est atteinte.

Preuve. Blidia et al. [45] ont montré que tout arbre  $T$  satisfait  $\beta_2(T) \geq 2n/3$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T) \leq n = \frac{3}{2}(2n/3) \leq \frac{3}{2}\beta_2(T)$ .  $\square$

Dans les arbres, la borne  $\frac{3}{2}$  du rapport  $\gamma_{\times 2}/\beta_2$  est atteinte, où chaque sommet non pendent est adjacent à exactement deux sommets pendent.

Une borne supérieure du rapport  $i/\beta_2$  s'obtient.

**Proposition 3.34.** *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $i(T)/\beta_2(T) \leq \frac{3}{4}$*

Cette borne est atteinte.

Preuve. Blidia et al. [45] ont montré que tout arbre  $T$  satisfait  $\beta_2(T) \geq 2n/3$ . De plus, pour tout arbre  $T$  on a  $i(T) \leq \frac{n}{2}$ . Alors  $\beta_2(T) \geq \frac{4n}{6} \geq \frac{4}{3}i(T)$ , d'où  $i(T)/\beta_2(T) \leq \frac{3}{4}$ .  $\square$

Comme  $i \geq \gamma$ , alors le rapport  $\gamma/\beta_2 \leq \frac{3}{4}$ .

La borne  $\frac{3}{4}$  est atteinte pour le rapport  $i/\beta_2$ .

- De la chenille représentée ci-de sous, on vérifie que la borne  $\frac{3}{4}$  est atteinte pour le rapport  $i/\beta_2$ .

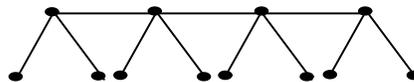


FIGURE 3.8 : Une chenille

### 3.5 Synthèse sur les rapports de domination

Pour simplifier la recherche bibliographique sur les bornes supérieures du rapport entre les paramètres de domination dans les arbres, nous les représentons sous la forme du tableau récapitulatif ci-dessous.

$\frac{a}{b}$	$\gamma$	$i$	$\beta = \Gamma$	$\gamma_t$	$\Gamma_t$
$\gamma$	—	$\infty (S_{p,p})$	$\infty (K_{1,p})$	2 (Cor. 3.16)	2 (Th. 3.14 (b))
$i$	$1(SS_p)$	—	$\infty (S_{p,p})$	2 (Cor. 3.16)	2 (Cor. 3.15)
$\beta = \Gamma$	1(une couronne)	1(une couronne)	—	$\frac{4}{3}$ (Th. 3.20)	$< 2$ (Cor. 3.18)
$\gamma_t$	1(une couronne)	$\infty (S_{p,p})$	$\infty (S_{p,p})$	—	$< 2$ (Cor. 3.19)
$\Gamma_t$	1 ( $K_{1,p}$ )	$\infty (S_{p,p})$	$\infty (S_{p,p})$	1 ( $S_{p,p}$ )	—
$\gamma_{pr}$	1( $S_{p,p}$ )	$\infty(S_{p,p})$	$\infty(S_{p,p})$	1( $S_{p,p}$ )	$< 2$ (Cor. 3.19)
$\gamma_2$	$< 1$ (prop. 3.30 (b))	$< 1$ (prop. 3.30 (b))	1 ( $SS_p$ ) (Cor. 2.35)	1 ( $SS_p$ ) (Th.2.18)	$< 2$ Cor. 3.31
$\gamma_{\times 2}$	$\frac{1}{2}$ (Th. 2.13)	$\frac{1}{2}$ (Th. 2.13)	1 (Cor. 3.8)	1	1 Cor. 3.17
$i_2$	1( $S_{p,p}$ )	$\infty(S_{p,p})$	$\infty(K_{1,p})$	1 (Cor. 3.7)	$< 2$ Cor. 3.19
$\beta_2$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1( $S_{p,p}$ ) $p \geq 2$	1 (Cor. 3.7)	1 (Th. 3.14 (a))

Tableau 3.1. Partie 1 : Rapports entre quelques paramètres

$\frac{a}{b}$	$\gamma_{pr}$	$\gamma_2$	$\gamma_{\times 2}$	$i_2$	$\beta_2$
$\gamma$	2 ([44] ( $K_{1,p}$ ))	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (\mathcal{F}_p)$	$\infty (K_{1,p})$
$i$	2 ([44] ( $K_{1,p}$ ))	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (K_{1,p})$	2	$\infty (K_{1,p})$
$\beta = \Gamma$	$< 2$ (Prop. 3.25)	$\frac{3}{2}$	2	2	$< 2$ [45]
$\gamma_t$	$< 2$ ([44], $\mathcal{H}_p$ )	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (\mathcal{F}_p)$	$\infty (K_{1,p})$
$\Gamma_t$	$< 2(\mathcal{H}_p)$	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (\mathcal{F}_p)$	$\infty (K_{1,p})$
$\gamma_{pr}$	—	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (K_{1,p})$	$\infty (\mathcal{F}_p)$	$\infty (K_{1,p})$
$\gamma_2$	$< 2 (\mathcal{H}_p)$	—	$< 2$ (Prop. 3.30)	$< \frac{3}{2}$ (Prop. 3.32)	$< 2$ (Cor. 3.31)
$\gamma_{\times 2}$	1 ( $SS_p$ ) $p \geq 2$ (Th. 2.19)	1	—	$< 1$ (Cor. 3.24)	1 (Th. 3.23)
$i_2$	$< 2 (\mathcal{H}_p)$	$\infty (\mathcal{G}_p)$	$\infty (K_{1,p})$	—	$\infty$
$\beta_2$	1 (Th. 3.26)	1	$\frac{3}{2}$ (Prop. 3.33)	1(2-couronne)	—

Tableau 3.2. Partie 2 : Rapports entre quelques paramètres

## CONCLUSION

Un sous ensemble de sommet  $D \subset V(G)$  est dit dominant si tout sommet  $v \in V(G) - D$  est adjacent à au moins un sommet  $u \in D$ . Le nombre de domination est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant minimal. Plusieurs paramètres de domination peuvent être définis en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à la notion de domination et la détermination des relations entre ces paramètres dans les arbres.

En l'absence de valeurs exactes de ces paramètres dans les graphes, on est amené souvent à déterminer des bornes inférieures et supérieures qui les encadrent le mieux possible. Pour quelques paramètres, ces bornes sont atteintes.

On a déterminé des bornes supérieures pour les rapports  $\Gamma_t/\beta_2$ ,  $\Gamma_t/\gamma$  et  $\Gamma_t/i$ , et on a établi une amélioration de la borne supérieure de  $\gamma_t/\beta$  de  $\frac{3}{2}$  à  $\frac{4}{3}$  pour les arbres.

Pour le nombre 2-indépendant  $\beta_2$  et le nombre de domination couplé  $\gamma_{pr}$ , des bornes supérieures sont aussi déterminées.

Dans les arbres, une comparaison entre les paramètres  $\gamma_{x_2}$ ,  $\gamma_2$ ,  $i$ ,  $\beta_2$  et  $i_2$  est effectuée.

Notre contribution a ouvert des perspectives de recherche comme la caractérisation de classes particulières de graphes extrémaux, on citera :

- Caractérisation des arbres pour lesquels  $\beta_2 = \gamma_{x_2}$ .
- Caractérisation des arbres pour lesquels  $\beta_2 = \gamma_{pr}$ .
- Caractérisation des arbres pour lesquels  $3\gamma_t = 4\beta$ .
- Caractérisation des arbres pour lesquels  $\Gamma_t = \beta_2$ .
- Caractérisation des arbres pour lesquels  $\Gamma_t = 2\gamma$ .
- Caractérisation des chenilles pour lesquels  $2\gamma_{x_2} = 3\beta_2$ .

## ANNEXE A

# Rappel des notions des graphes

Des définitions et des notations usuelles indispensables dans la théorie des graphes ([46], [47]) sont données en détail par la suite.

### Graphe et sous-graphe

Un graphe  $G = (V, E)$  est défini par un ensemble fini de sommets  $V(G)$ , et un ensemble d'arêtes  $E(G)$  formé de couples d'éléments de  $V(G)$ . Le nombre  $n = |V(G)|$  de sommets dans un graphe est appelé *ordre* de  $G$ , et le nombre d'arêtes  $m = |E(G)|$  dans  $G$  est appelé la *taille* de  $G$ .

Un graphe *trivial* est à un sommet et sans arêtes. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules éventuellement indexées:  $v, u, x, y, a, a_1, \dots$ etc.

Si  $e = (uv)$  est une arête du graphe, alors on dit que  $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $e$  et qu'ils sont *adjacents* or que  $e$  est *incidente* à  $u$  et à  $v$ .

Dans un plan, les sommets d'un graphe sont représentés d'habitude par des points et ses arêtes par des segments reliant deux points.

Un graphe *simple* est un graphe sans boucle et tel que tout couple de sommets est relié par au plus une arête.

Dans tout ce qui suit les graphes considérés sont simples et finis. La représentation graphique  $G$  d'ordre 8 et de taille 9 donnée par la figure ci-dessous représente un graphe simple dont l'ensemble des sommets est  $V(G)$  est  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  et l'ensemble d'arêtes est  $\{v_1v_3, v_2v_3, v_4v_5, v_4v_3, v_5v_3, v_4v_7, v_5v_7, v_7v_8, v_6v_7\}$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_3$  sont adjacents dans  $G$ , alors que  $v_2$  et  $v_1$  ne le sont pas.

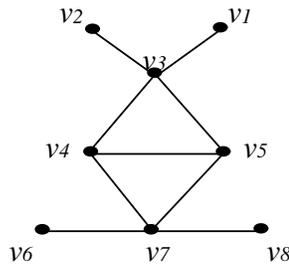


FIGURE A.1. Représentation graphique d'un graphe  $G$  avec  $n = 8, m = 9$



isolé puisque  $\deg(g) = 0$ , le sommet  $f$  est pendant puisque  $\deg(f) = 1$ ,  $c$  est un support,  $\Delta(G) = 3$  et  $\delta(G) = 0$ .

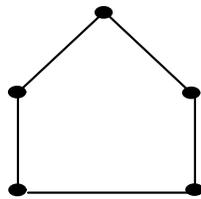
### Chaînes et cycle

Une chaîne induite  $P_k$  d'un graphe  $G = (V, E)$  de longueur  $k$  est une suite de sommets distincts  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$  tels que pour chaque  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $v_i v_{i+1}$  soit une arête de  $G$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés les extrémités de la chaîne et les sommets  $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$  sont appelés sommets intermédiaires de la chaîne.

Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*.

Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*.

On appelle *cycle* d'ordre  $k$  dans un graphe  $G$  une chaîne simple  $C_k$  de longueur  $k$  dont les extrémités initiale et finale sont confondues.



(a) Le cycle  $C_5$



(b) La chaîne  $P_3$

FIGURE A.3. Exemples de cycle d'ordre 5 et une chaîne de longueur 3

Un graphe triangulé est un graphe dont tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 admet une corde.

### Distance et diamètre

La *distance* entre deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G$  est le nombre d'arêtes d'une plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ , notée  $d(u, v)$ . Cette chaîne est appelée chaîne *géodésique*.

Le *diamètre* d'un graphe  $G$ , noté  $Diam(G)$  est la longueur de sa plus longue chaîne.

$$Diam(G) = \max_{u, v \in V} (d(u, v)).$$

Dans le graphe  $G$  de la figure A.2 (a), la distance entre les deux sommets  $f$  et  $b$  est égale à 2, et la longueur de la plus longue chaîne de ce graphe égale à 3, d'où  $Diam(G) = 3$ .

### Connexité dans les graphes

Un graphe  $G$  est dit *connexe*, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets  $u, v \in V(G)$ , Un graphe qui n'est pas connexe est dit *non connexe*. Le sous-graphe  $H$  du

graphe  $G$  est appelé *composante connexe* de  $G$ , si  $H$  est un sous-graphe maximal connexe du graphe  $G$ . Un graphe disconnexe se décompose en composantes connexes.

Un *point d'articulation* d'un graphe  $G$  est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes. Comme montre dans la figure ci-dessous.

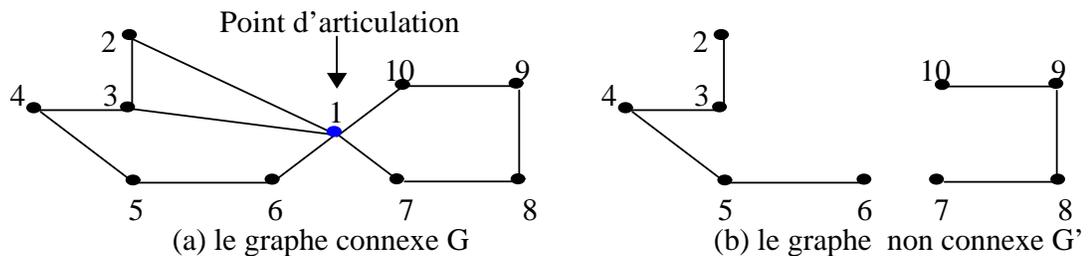


FIGURE A.4. Illustration d'un point d'articulation dans un graphe

Un *isthme* est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes. Un exemple est ci-dessous.

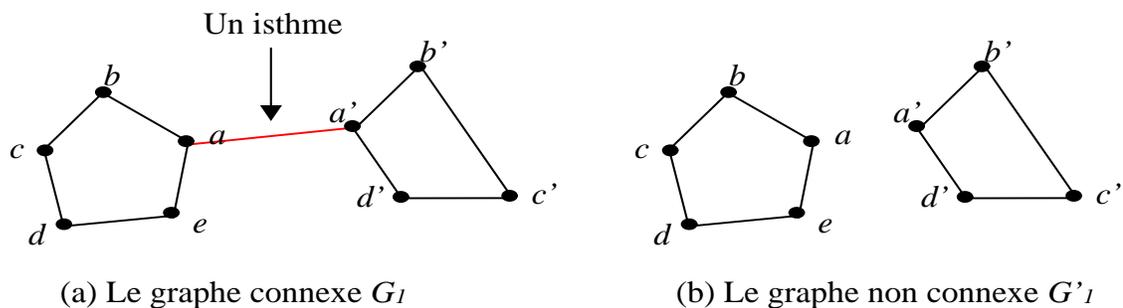


FIGURE A.5. Illustration d'un isthme dans un graphe

### Graphes particuliers

Neuf graphes particuliers peuvent être définis.

#### a. Graphe complémentaire d'un graphe

Le *graphe complémentaire* de  $G = (V, E)$ , noté  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ , est un graphe pour lequel  $V(\bar{G}) = V(G)$  et l'arête  $uv \in E(\bar{G})$  si et seulement si  $uv \notin E(G)$ . Un graphe  $G$  et son complémentaire  $\bar{G}$  sont représentés dans la figure suivante.

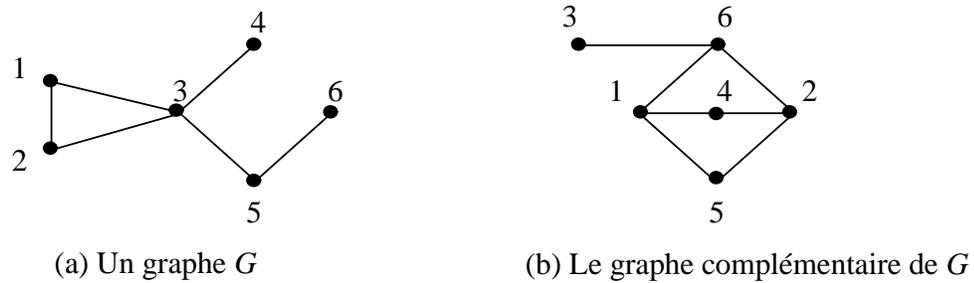


FIGURE A.6. Représentation d'un graphe  $G$  et son complémentaire  $\overline{G}$ .

### b. Graphe $r$ -régulier

Un graphe  $G$  est dit  $r$ -régulier si chaque sommet de  $G$  est de degré  $r$ . Des exemples de graphes 3-régulier (cubique) et 4-régulier sont illustrés dans la figure suivante.

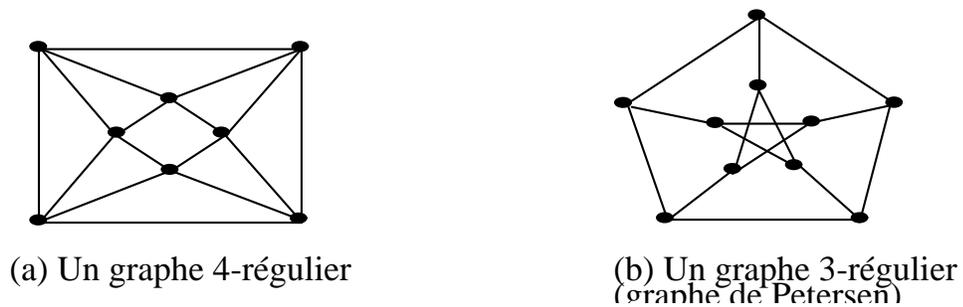


FIGURE A.7. Représentation d'un 4-régulier et d'un 3-régulier.

### c. Graphe complet

Un graphe complet d'ordre  $n$ , noté  $K_n$ , est simple dans lequel tous les sommets sont de degré  $n - 1$ .  $K_n$  est  $(n - 1)$ -régulier, ainsi deux sommets quelconques de  $K_n$  sont adjacents. L'exemple de  $K_5$  est donné ci-dessous.

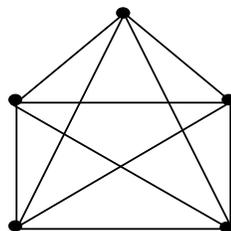


FIGURE A.8. Le graphe complet  $K_5$ .

#### d. Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycles ou acyclique.

Dans un arbre  $T$ , tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé support et tout sommet adjacent à  $r$  sommets pendants est appelé  $r$ -support. Un arbre comporte exactement  $(n - 1)$  arêtes. Un exemple d'un arbre d'ordre 13 est représenté dans la figure A.9(a) où le sommet  $v_2$  est un support et  $v_{11}$  est un "2-support".

Une chenille est un arbre non trivial  $T_c$  dont l'élimination de tous les sommets pendants produit une chaîne  $P_k = v_1, v_2, \dots, v_k$  appelé le squelette de la chenille. Donc chaque sommet de  $T_c$  est ou bien sur la chaîne ou bien adjacent à un sommet de la chaîne  $P_k$ , le code d'une chenille  $T_c$  est  $C(T_c) = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ , où  $c_i$  est le nombre de sommets pendants adjacents à un sommet  $v_i$ ,  $c_1 \neq 0$  et  $c_k \neq 0$ , aussi par convention  $c_1 \geq c_k$ . Un exemple d'une chenille  $C(4, 0, 1, 2)$  d'ordre 11 est représenté dans la figure A.9(b).

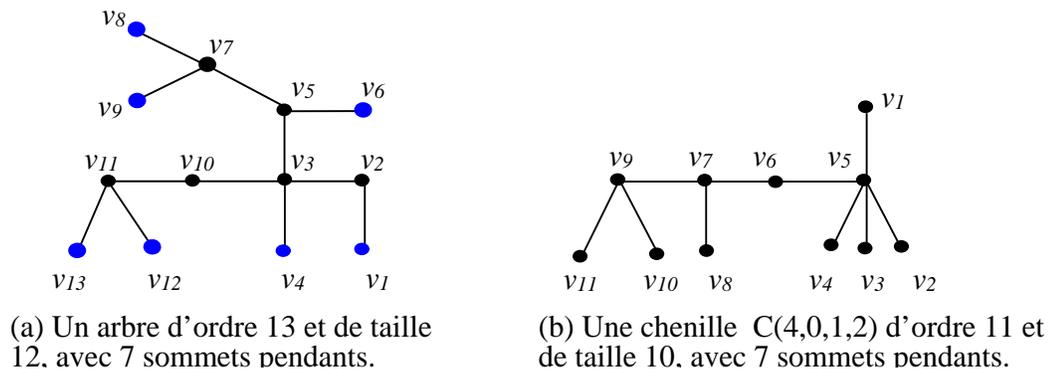


FIGURE A.9. Illustration des arbres.

Une étoile  $K_{1,p}$  est un arbre obtenu en attachant  $p$  sommets pendants à un sommet isolé.

Une double étoile  $S_{p,q}$  est l'arbre obtenu en attachant  $p$  sommets pendants à une extrémité d'une chaîne  $P_2$  et  $q$  sommets pendants à l'autre extrémité.

Une étoile subdivisée  $SS_p$  est l'arbre obtenu à partir d'une étoile  $K_{1,p}$  par la subdivision de chaque arête par exactement un sommet.

Une double étoile subdivisée  $S_{p,q}^*$  est l'arbre obtenu à partir d'une étoile double en subdivisant l'arête reliant les deux sommets supports par un sommet.

Tous ces graphes sont représentés dans ci-dessous.

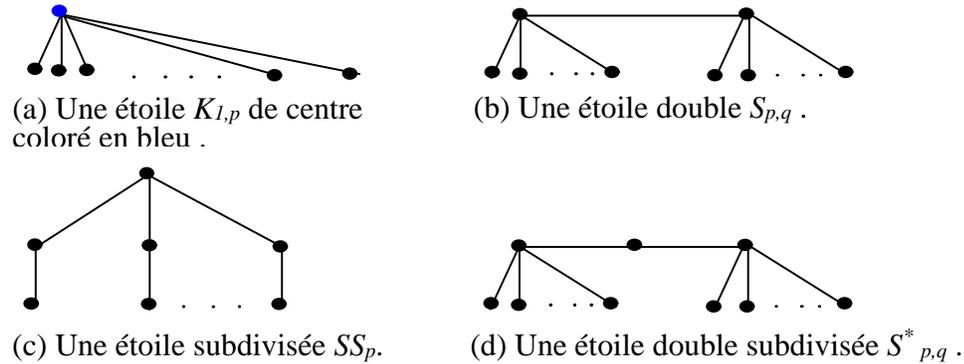


FIGURE A.10. Quelques arbres particuliers.

### e. Graphe Cactus

Un *cactus graph*  $G$  est un graphe dont toute arête appartient à au plus un cycle.

Un graphe contenant un seul cycle est appelé un unicycle graphe.

Le graphe donné ci-dessous est un graphe cactus dont les différents cycles sont :

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  ,  $\{v_3, v_5, v_6\}$  ,  $\{v_3, v_{11}, v_{10}, v_9\}$  ,  $\{v_3, v_7, v_8\}$ .

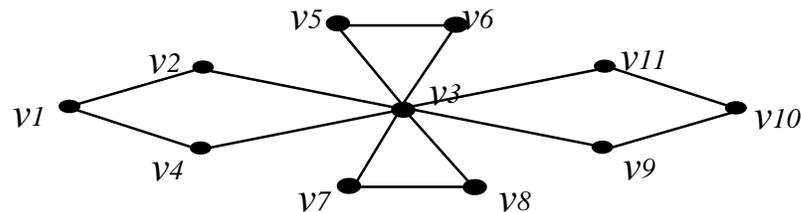


FIGURE A.11. Illustration du concept des cactus graphes

### f. Couronne d'un graphe

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  avec l'ensemble de sommets  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  et soit  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  un ensemble de sommets disjoints de  $V$ . La *couronne* de  $G$  notée par  $H = GoK_1$ , peut être définie comme un graphe avec l'ensemble de sommets  $V \cup S$  et l'ensemble d'arêtes  $E(G) \cup \{v_i u_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ .

Tout simplement, c'est le graphe obtenu en dupliquant tous les sommets de  $G$  et en reliant tout sommet de  $G$  à son sommet dupliqué par une arête. L'ordre de couronne  $H$  est égal à  $2n$ .

Comme un exemple, le graphe  $P_4 \circ K_1$  est donné ci-dessous.

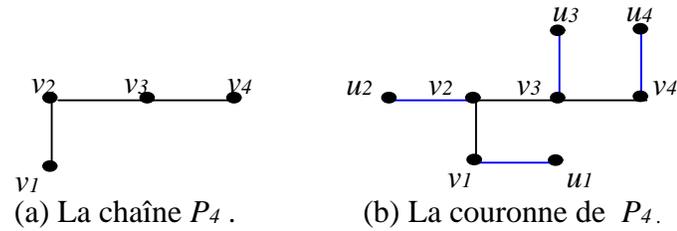


FIGURE A.12. La chane  $P_4$  et sa couronne

### g. Un graphe multiparti

Un graphe  $G = (V, E)$  est  $k$ -*parti* s'il existe une partition de l'ensemble de sommets  $V$  en  $k$  sous ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_k$  telle que chacun des  $V_i$  soit un stable.

Pour  $k = 2$ , le graphe  $G$  est appelé *biparti*.

Si un sommet appartenant à un ensemble  $V_i$  de la partition d'un " $k$ -parti" est adjacent à tout sommet des autres ensembles  $\{V_j : j \neq i\}$  pour tout sommet dans  $G$ , alors le graphe  $G$  est appelé " $k$ -parti complet".

Un graphe  $k$ -*parti* avec  $|V_i| = p_i, i = 1, 2, \dots, q$ , est noté par  $K_{p_1, p_2, \dots, p_q}$ .

Si  $p_1 = p_2 = \dots = p_q = p$ , alors le graphe  $G$  est appelé  $k$ -*parti* complet noté par  $K_{q \times p}$ . Le graphe  $K_{3,3}$  est montré dans ci-dessous.

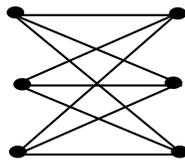


FIGURE A.13. Le graphe biparti complet  $K_{3,3}$ .

### h. Le graphe H-libre

Un graphe  $G$  est dit  $H$ -*libre*, s'il ne contient pas  $H$  comme un sous-graphe induit. La classe des graphes bipartis est caractérisée par l'exclusion des cycles impairs. Parmi la liste des graphes exclus on trouve le  $K_{1,3}$  appelé aussi la griffe. Le graphe donné ci-dessous représente un graphe sans griffe.

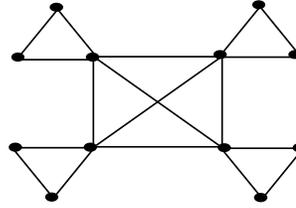


FIGURE A.14. Un graphe sans griffe.

### i. Blocs graphes

*Un bloc* dans un graphe  $G$  est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'articulation.

*Un bloc final* dans un graphe  $G$  est un sous graphe connexe maximal qui admet un seul sommet d'articulation.

*Un bloc graphe*  $G$  est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si  $G$  ne possède pas de sommet d'articulation alors  $G$  est lui même un bloc.

L'intersection de deux blocs graphes contient au plus un sommet.

Dans un bloc graphe, un sommet est dit sommet d'articulation si et seulement si il est l'intersection de deux ou plusieurs blocs. Une illustration du concept des blocs graphes est donné ci-dessous.

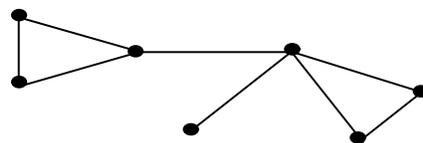
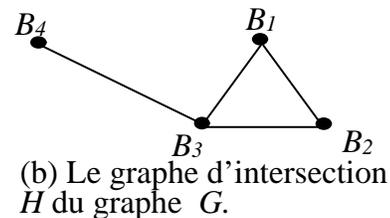
(a) Un graphe  $G$ .(b) Le graphe d'intersection  $H$  du graphe  $G$ .

FIGURE A.15. Illustration du concept des blocs graphes.

## ANNEXE B

### LISTE DES SYMBOLES

$\beta(G)$	Le nombre d'indépendance
$d_G(v)$	Le degré du sommet $v$ dans le graphe $G$ .
$G$	Le graphe $G = (V, E)$ , avec $V$ l'ensemble des sommets et $E$ l'ensemble des arêtes.
$\Delta(G)$	Le degré maximum dans le graphe $G$ .
$\delta(G)$	Le degré minimum dans le graphe $G$ .
$V(G)$	L'ensemble des sommets du graphe $G$ .
$E(G)$	L'ensemble des arêtes du graphe $G$ .
$N_G(v)$	Le voisinage ouvert du sommet $v$ dans le graphe $G$ .
$N_G[v]$	Le voisinage fermé du sommet $v$ dans le graphe $G$ .
$N_G(S)$	Le voisinage ouvert d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dans le graphe $G$ .
$N_G[S]$	Le voisinage fermé d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dans le graphe $G$ .
$\overline{G}$	Le graphe complémentaire du graphe $G$ .
$\Gamma(G)$	Le nombre de domination supérieur.
$\gamma$	Le nombre de domination inférieur .
$P_n$	Une chaîne d'ordre $n$ .
$C_n$	Un cycle d'ordre $n$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] E. J. Cockayne et S.T. Hedetniemi, "Towards a theory of domination in graphs". *Networks*, 7 (1977), 247 – 261.
- [2] M.Blidia ,M.Chellali , O.Favaron, "Ratios of some domination parameters in graphs and claw-free graphs". 2006 in : *Graph Theory Trends in mathematics* Birhauser. Basel. (2006), 62 – 72.
- [3] M. Chellali, O. Favaron, T. W.Haynes , D. Raber, "Ratios of some domination parameters in trees". *Discrete Math* 308 (2008), 3879 – 3887.
- [4] De Jaenisch C.F., "Applications de l'analyse mathématique au jeu d'échecs ", Petrograd, (1962).
- [5] G.H.Fricke, S.M.Hedetniemi, A .A.McRae,C.K.Wallis, M.S.Jacobson , H.W.Martin et W.D.Weakley, "Combinatorial problems on chessboards": A brief survey, dans *Graph theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of graphs*, vol.1, Y.Alavi and A.Schwenk, Eds, Wiley, (1995), 507 – 528.
- [6] C. Berge, "Theory of graphs and its applications". Methuen, London, (1985, 1962).
- [7] O.Ore, *Theory of graphs*. Amer.Soc. Colloq. Pub 38, Providence , R.I.(1962).
- [8] E.J.Cockayne ,S .T. Hedetniemi and D.J. Miller, "Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs", *Canad.Math. Bull.* 21(1978), 461 – 468.
- [9] J.Puech, "Paramètres de domination dans les graphes", Thèse de doctorat Université Paris sud Orsay 1997.
- [10] R. B. Allan and R. C.Laskar. "On domination and independent domination numbers of a graph". *Discrete Maths*, 23 : (1978), 73 – 76

- [11] F.Harary and T.W.Haynes, "Double domination in graphs", *Ars Combinatoria* 55(2000), 201 – 213
- [12] J.F. Fink and M.S. Jacobson, " $n$ -domination in graphs". In *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*. Y. Alavi and A.J. Schwenk, editors Wiley, New York, (1985), 283 – 300...
- [13] G.S.Domke, J. E.Dunbar and L. R. Markus, "Gallai-type theorems and domination parameters". *Discret Math* 167/168(1997), 237 – 248.
- [14] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L.F.Kinch and J. Roberts, "On graphs having domination number half their order". *Peiod. Math. Hungar* 16(1985), 287 – 293.
- [15] W. McCuaig and B. Shepherd, "Domination in graphs whith minimum degree two. *J.Graph Theory*, 13 : (1989), 749 – 762.
- [16] B. Reed. "Paths, Stars, and the number three". Submitted, (1996).
- [17] T.W.Haynes, and P.J .Slater, "Paired domination in graphes",*Networks* 32(3)(1998), 199 – 206.
- [18] R.D.Dutton and R.C.Brigham, "Domination in clow -free graphs",*Congr Numer.* 132(1998), 69 – 75.
- [19] O.Favaron , M.A.Henning , J.Puech and D.Rautenbach,"On domination and annihilation in graphs with clow- free blocks", *Discrete Math.* 231(1 – 3)(2001),143 – 151
- [20] M. Blidia, M. Chellali, T. W. Haynes, and M.A. Henning, "Independent and double domination in trees". *Utilitas Math.* 70(2006), 159 – 173.
- [21] M. Blidia, M. Chellali, and T.W. Haynes, "Characterizations of trees with equal paired and double domination numbers". *Discrete Math.* 306/16(2006), 1840 – 1845.
- [22] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, M.A. Henning and P. J. Slater, "H-forming sets in graphs". *Discrete Math.* 262 (2003),159 – 169
- [23] D.P. Sumner, "Critical concepts in domination", *Discrete Math.* 86(1990), 33 – 36.

- [24] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron, "Independence and domination in trees". Rapport LRI no 1383, Université Paris-Sud, 2004..
- [25] O. Favaron, "A bound on the independent domination number of a tree", *Internat. J. Graph Theory* 1(1)(1992), 19 – 27.
- [26] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron, "Independence and 2–domination in trees", *Austral. J. Combin.* 33(2005), 317 – 327.
- [27] J. Fujisawa, A Hansberg, T Kubo, A Saito, M Sugita, L Volkmann, " Independence and 2–domination in bipartite graphs", *Austral. J. Combin* 40(2008)265 – 268.
- [28] O. Favaron, "On a conjecture of Fink and Jacobson concerning  $k$ -domination and  $k$ -dependence". *J. Combin. Theory Ser. B* 39(1985), 101 – 102.
- [29] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah, "On  $k$ -independence in graphs with emphasis on trees". *Discrete Math.* 307(2007), 2209 – 2216.
- [30] E.J.Cockayne , S .T Hedetniemi, "Independence graphs", in: *Proc.5th Southeast Conf .on comb. Graph Theory and Comp. (Utiltas Math;Winnipeg,1974)*,471 – 491.
- [31] B. Bollobás and E. J. Cockayne. "Graph theoretic paramaters concerning domination, independence and irredundance". *J. Graph Theory.* 3 : (1979), 241 – 250.
- [32] R.B.Allan and R.C.Laskar and S.M.Hedetniemi."A note on total domination". *Discrete Maths*, 49 : (1984), 7 – 13
- [33] P.Damaschke, "Irredundance number versus domination number", *Discrete Math*, 89(1991), 101 – 104
- [34] Lutz.Volkmann, "The ratio of the irredundance and domination number of a graph", *Discrete Math* 178 (1998), 221 – 228. 96,..
- [35] V.E Zverovich, "The ratio of the irredundance and the domination number for block-cactus graphs". *Journal of graph theory* (1998), 139 – 149.

- [36] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, "Fundamentals of domination in Graphs". Marcel Dekker New york 1998.
- [37] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, "Domination in graphs". Advanced Topics, Marcel Dekker New york 1998.
- [38] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, "Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of parameters". *Discrete mathematics*, 86 (1990), 257 – 47
- [39] M. Chellali and O. Favaron, "On  $k$ -star-forming sets in graphs". *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 68(2009)205 – 214..
- [40] E. J. Cockayne, O. Favaron, C. Payan, and A. G. Thomason, "Contributions to the theory of domination, independence, and irredundance in graphs". *Discrete Math.* 33(1981), 249 – 258.
- [41] O. Favaron, "A bound on the independent domination number of a tree", *Internat. J. Graph Theory* 1(1)(1992), 19 – 27.
- [42] M. Chellali and T.W. Haynes, "A note on the total domination number of a tree". *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 58(2006), 189 – 193.
- [43] O. Favaron and B.L. Hartnell, "On well- $k$ -covered graphs", *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 6 (1989), 199 – 205.
- [44] T.W. Haynes and P.J. Slater, "Paired-domination in graphs", *Networks* 32 (3) (1998), 199 – 206.
- [45] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah, "Maximal  $k$ -independent sets in graphs". *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 28(1)(2008), 151 – 163.
- [46] C. Berge. "Graphes et hypergraphes", Edition Dunod, 1970.
- [47] J.A.Bondy,U.S.R.Murty, "Graph theory with application", The Macmillan Press LTD, 1976.