

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Option : Modélisation Mathématique pour l'Aide à la Décision

NOMBRE DE BROADCAST INDEPENDANCE
DANS LES GRILLES

Présenté par
ZEMIR Mohamed

Devant le jury composé de :

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Président
I. BOUCHEMAKH	Professeur, U.S.T.H.B, Alger	Directrice de thèse
A. BERRACHEDI	Professeur, U.S.T.H.B, Alger	Examineur
M. CHELLALI	Professeur, U. de Blida	Examineur

Blida, 18 Décembre 2013

RESUME

Une fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$ est un broadcast sur le graphe non trivial connexe G si pour tout sommet $v \in V(G)$, $f(v) \leq e(v)$, où $\text{diam}(G)$ représente le diamètre de G et $e(v)$ représente l'excentricité du sommet v .

Le nombre de broadcast indépendance $\beta_b(G)$ est la valeur maximale de $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ sur tous les broadcasts f qui satisfont $d(u, v) > \max\{f(u), f(v)\}$ pour chaque paire de sommets distincts u, v de poids positifs.

Dans ce mémoire, nous déterminons cet invariant pour les grilles $G_{m,n} = P_m \square P_n$, où $2 \leq m \leq n$ et \square représente le produit cartésien. Nous donnons une réponse à un des problèmes ouverts posé par J.E. Dunbar, D.J. Erwin, T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi dans [Broadcasts in graphs, Discrete Applied Mathematics 154 (2006) 59-75].

ABSTRACT

We say that a function $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$ is a broadcast on a nontrivial connected graph G if for every vertex $v \in V(G)$, $f(v) \leq e(v)$, where $\text{diam}(G)$ denotes the diameter of G and $e(v)$ denotes the eccentricity of the vertex v .

The broadcast independence number $\beta_b(G)$ is the maximum value of $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ over all broadcasts f that satisfy $d(u, v) > \max\{f(u), f(v)\}$ for every pair of distinct vertices u, v with positive values.

In this memory, we determine this invariant for grid graphs $G_{m,n} = P_m \square P_n$, where $2 \leq m \leq n$ and \square denotes the cartesian product. We give an answer to one of the open problems raised by J.E. Dunber, D.J. Erwin, T.W. Haynes, S.M Hedetniemi and S.T. Hedetniemi in [Broadcasts in graphs, Discrete Applied Mathematics 154 (2006) 59-75].

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement, ma directrice de thèse, Mlle **BOUCHE-MAKH Isma**, Professeur à la Faculté de Mathématiques de l'U.S.T.H.B, pour ses conseils, ses remarques et ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude pour avoir ménagé son temps, son savoir et sa patience afin que ce travail arrive à son terme.

Je remercie vivement Monsieur **BLIDIA Mostafa**, Professeur à l'Université Saad Dahlab de Blida, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ma thèse.

Mes sincères remerciements aux membres de jury Monsieur **BERRACHEDI Abdelhafid**, Professeur à l'U.S.T.H.B, et Monsieur **CHELLALI Mustapha**, Professeur à l'Université Saad Dahlab de Blida, pour l'honneur qu'ils me font d'avoir acceptés de faire partie du jury.

Je remercie vivement tous mes enseignants qui m'ont aidé tout le long de mes études, et toute personne ayant contribué à la réalisation de cette thèse.

Je remercie, enfin, mes parents, mes frères, mes sœurs et ma petite famille pour leur soutien moral lors de la réalisation de ce travail.

TABLE DE MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DE MATIERES

TABLE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

NOTATIONS ET SYMBOLES

INTRODUCTION	12
1 GENERALITES SUR LES GRAPHS	15
1.1 Définitions et notations	15
1.1.1 Graphe et graphe simple	15
1.1.2 Voisinage, degré d'un sommet	16
1.1.3 Sous-graphe, sous-graphe induit	16
1.1.4 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum	17
1.1.5 Chaîne et cycle	17
1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon	17
1.2 Quelques classes de graphes	18
1.3 Quelques opérations dans les graphes	21
1.3.1 Produit cartésien	21
1.3.2 Produit tensoriel	21
1.3.3 Produit fort	22
1.4 Domination dans les graphes	22
1.4.1 Historique	22

1.4.2	Domination standard	23
1.4.3	Quelques invariants de domination	24
1.5	Complexité du problème de domination	25
2	BROADCASTS DANS LES GRAPHERS	26
2.1	Notions fondamentales sur les broadcasts	26
2.2	Résultats fondamentaux	30
2.3	Bornes inférieures du nombre de broadcast domination	34
2.4	Graphes avec un petit nombre de broadcast domination	35
2.5	Invariants de broadcast	38
2.5.1	Broadcast indépendant	38
2.5.2	Broadcast dominant indépendant	41
2.5.3	Broadcast efficace	42
2.5.4	Broadcast packing	43
2.6	Complexité algorithmique du problème de broadcast domination	46
3	NOMBRE DE BROADCAST INDEPENDANCE DES GRILLES	48
3.1	Nombre de broadcast domination du produit cartésien de deux graphes	48
3.2	Calcul de β_b pour la classe des grilles $G_{m,n}$	49
3.2.1	Calcul de $\beta_b(G_{m,n})$ pour $m = 2, 3, 4$	51
3.2.2	Calcul de $\beta_b(G_{m,n})$ pour $m \geq 5$	64
	CONCLUSION	70
	REFERENCES	71

TABLE DES FIGURES

1.1	Graphe simple	16
1.2	Le sous-graphe de G induit par $S = \{a, b, d, e\}$	17
1.3	Deux graphes isomorphes G et G'	18
1.4	Un Graphe biparti complet $K_{4,2}$	19
1.5	Arbre binaire de hauteur 2	19
1.6	Graphe de permutation : $\sigma \equiv \{4, 3, 5, 1, 2\}$	20
1.7	Graphe d'intervalles G et la famille d'intervalles \mathcal{I} tel que $G = G(\mathcal{I})$	20
1.8	$P_4 \square P_5$	21
1.9	$P_4 \times P_5$	21
1.10	$P_4 \square P_5$	22
1.11	Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$	23
2.1	Le sommet w est un f -voisin de x et le sommet x n'est pas f -voisin de w	27
2.2	Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 2$ et $\Gamma_b(G) = 3$	28
2.3	Deux broadcast dominants sur G	28
2.4	le graphe H_4	30
2.5	Le graphe G_n	36
2.6	le graphe $S(K_{1,n}), n \geq 3$	36
2.7	Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4 = rad(G)$	37
2.8	Graphe de Petersen	39
2.9	Broadcasts efficaces sur P_5	42
2.10	Un packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal	44
3.1	Les grilles	64

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Inégalités entre les invariants de broadcast.	46
-----	---	----

NOTATIONS ET SYMBOLES

V	:Ensemble des sommets.
E	:Ensemble des arêtes.
G	:Graphe non orienté.
$N_G(v)$:Voisinage ouvert de v .
$N_G[v]$:Voisinage fermé de v .
$d_G(v)$:Degré d'un sommet v .
$\Delta(G)$:Degré maximum dans G .
$\delta(G)$:Degré minimum dans G .
$\langle S \rangle$:Sous-graphe de G induit par S .
$d(u, v)$:Distance entre u et v .
$e(v)$:Exentricité de v .
$diam(G)$:Diamètre de G .
$rad(G)$:Rayon de G .
T	:Un arbre.
$G \square H$:Produit cartésien de G et H .
$G \times H$:Produit tensoriel de G et H .
$G \boxtimes H$:Produit fort de G et H .
$\gamma(G)$:Nombre de domination.
$\Gamma(G)$:Nombre de domination supérieur.
$i(G)$:Nombre de domination stable.
$\beta_0(G)$:Nombre de stabilité.
$P(G)$:Nombre de packing.
$p(G)$:Nombre de packing inférieur.
$\gamma_b(G)$:Nombre de broadcast domination.
$\Gamma_b(G)$:Nombre de broadcast domination supérieur.
$\beta_b(G)$:Nombre de broadcast indépendance.
$i_b(G)$:Nombre de broadcast indépendance inférieur.
$\gamma_{ib}(G)$:Nombre de broadcast indépendant de domination.
$\Gamma_{ib}(G)$:Nombre de broadcast indépendant de domination supérieur.
$\gamma_{eb}(G)$:Nombre de broadcast efficace.
$\Gamma_{eb}(G)$:Nombre de broadcast efficace supérieur.

$P_b(G)$:Nombre de broadcast packing.
$p_b(G)$:Nombre de broadcast packing inférieur.
$G_{m,n}$:La grille définie par $P_m \square P_n$.
$R^i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,n}\}$: la $i^{\text{ème}}$ ligne de $G_{m,n}$, $i \leq m$.
$C^j = \{v_{1,j}, \dots, v_{m,j}\}$: la $j^{\text{ème}}$ colonne de $G_{m,n}$, $j \leq n$.
$R^{i_1, i_2} = R^{i_1} \cup \dots \cup R^{i_2}$,	: les lignes comprises entre la $i_1^{\text{ème}}$ et la $i_2^{\text{ème}}$ ligne de $G_{m,n}$.
$C^{j_1, j_2} = C^{j_1} \cup \dots \cup C^{j_2}$,	: les colonnes comprises entre la $j_1^{\text{ème}}$ et la $j_2^{\text{ème}}$ colonne de $G_{m,n}$.

INTRODUCTION

La recherche opérationnelle est une discipline récente dont le but est de fournir des méthodes de résolution basées sur des concepts et outils mathématiques.

La théorie des graphes constitue un outil puissant de la recherche opérationnelle pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes concrets de la vie courante. Elle trouve son origine au 18^{ième} siècle dans l'étude du célèbre problème des ponts de Königsberg "comment parcourir une fois et une seule fois les sept ponts de la ville de Königsberg". Ce problème, résolu par Euler, représente le premier résultat formel de la théorie des graphes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, physique, la biologie, les sciences sociales, les réseaux de communication, les circuits électriques, etc...

La théorie des graphes, comme son nom l'indique, traite des problèmes assez variés qui ont tous la caractéristique de pouvoir être représentés par un schéma appelé "graphe". Un graphe est constitué d'un ensemble de points (sommets) représentant des individus, des objets etc. . . et de lignes (arêtes) reliant ces points, symbolisant le lien existant entre eux.

Un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes est la domination qui a été étudiée intensivement ces trois dernières décennies. Elle a commencé semble-t-il au 16^{me} siècle en Inde [22] comme un problème de jeux d'échec. Le principe consiste à couvrir (dominer) l'ensemble des cases d'un échiquier par un nombre minimum de reines, c'est à dire que chaque place est occupée soit par une reine, soit en un seul mouvement de celle-ci.

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets, où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination. Plusieurs types de domination sont définis sur la base de la définition précédente en imposant des propriétés

supplémentaires sur les ensembles dominants.

Le problème de la broadcast domination est une variante du problème de domination. Ce problème a été introduit en 2001 par D. J. Erwin [16] et consiste à attribuer des entiers positifs (poids) aux sommets du graphe de sorte que tout sommet de poids nul soit broadcast-dominé par un sommet de poids strictement positif, et que la somme des poids de tous les sommets soit minimum. Formellement, cela revient à définir une application f à valeurs entières sur l'ensemble des sommets telle que tout sommet du graphe se trouve au plus à une distance $f(v)$ d'au moins un sommet v avec $f(v) > 0$, et telle que la somme des poids soit minimum. Ce minimum s'appelle nombre de broadcast domination du graphe.

Une des applications de la broadcast domination est la localisation de stations radio FM dans une zone donnée, où les sites à localiser sont les sommets d'un graphe représentant la zone en question. En pratique, les transmetteurs ne sont pas identiques. Une station radio FM se distingue d'un côté par sa fréquence de transmission et d'un autre côté par la puissance apparente rayonnée (ERP). En général, il n'est pas nécessaire que tous les transmetteurs du réseau aient le même ERP. Un transmetteur avec un plus haut ERP peut couvrir une grande zone mais sa construction et son fonctionnement sont plus coûteux. Il est alors utile de minimiser la somme des ERP qui correspond à la minimisation du coût du broadcast.

L'objet principal de ce mémoire est la détermination du nombre de broadcast indépendance dans les grilles.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres :

Le premier chapitre contient quelques définitions fondamentales et des notations de base dans le domaine de la théorie des graphes qui nous sont utiles dans ce mémoire. On présente aussi un aperçu sur la domination dans les graphes.

Dans le deuxième chapitre, nous énonçons l'essentiel des résultats établis sur les invariants de broadcast.

Notre contribution se situe dans le troisième chapitre qui est consacré à la détermination des valeurs exactes du nombre de broadcast indépendance dans la classe des grilles.

Le mémoire s'achève par une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé et quelques perspectives de recherche.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES GRAPHERS

Dans ce chapitre nous introduisons les différentes notations de base de la théorie des graphes, qui nous serviront tout au long de ce mémoire. Nous exposons également un aperçu sur la domination dans les graphes et nous présentons quelques invariants de domination. Les différentes définitions et les principaux résultats employés dans ce chapitre sont inspirés des livres de références [3] et [21].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe et graphe simple

Un **graphe non orienté** et **fini** G est un couple (V, E) , où V est un ensemble d'éléments fini dénombrable et E est un sous-ensemble de paires de sommets de V , $E \subseteq \{uv, u, v \in V\}$. Un élément $v \in V$ est dit **sommet**, et un élément $e = uv \in E$ est dit **arête**. L'entier $n = |V|$ (resp. $m = |E|$) représente l'**ordre** (resp. **taille**) de G . Si $n = 1$, on dit que G est **trivial**.

Deux sommets u, v dans V sont dit **adjacents** ou **voisins** si l'arête $uv \in E$. Dans ce cas, u et v représentent les extrémités de l'arête e , et e est dite **incidente** aux sommets u et v .

Deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune. Si l'arête $e = uu \in E$ pour un sommet $u \in V$, alors e est dite **boucle**.

Un graphe G est dit **p -graphe** si le nombre d'arête uv entre deux sommets u et v est inférieur ou égal à p . Un **graphe simple** est un 1-graphe sans boucle.

Dans tout ce qui suit , nous considérons que les graphes simples et finis.

La FIG.1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{ab, bc, bd, ad, ae, ed, cd\}$.

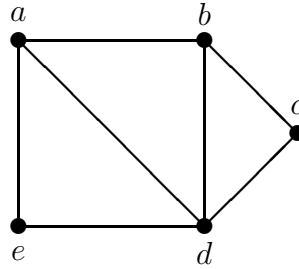


FIGURE 1.1 – Graphe simple

1.1.2 Voisinage, degré d'un sommet

Pour un sommet v de G , Le **voisinage ouvert** de v est défini par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V/uv \in E\}$ et le **voisinage fermé** de v est défini par l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. L'ensemble $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) est le **voisinage ouvert** (resp. **fermé**) du sous-ensemble $S \subseteq V$. S'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrivons $N(v)$ et $N[v]$ au lieu de $N_G(v)$ et $N_G[v]$ respectivement. De même, nous écrivons $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v . Un sommet **isolé** est un sommet de degré nul. Un sommet de degré égal à un est dit **pendant (feuille)** et un sommet adjacent à un sommet pendant est dit **support**. Nous noterons par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement le **degré maximum** et **minimum** dans G . S'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrirons $d(v)$, Δ et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

Pour le graphe illustré dans la figure FIG.1.1, on a $N(a) = \{b, e, d\}$ et $d(a) = 3$.

1.1.3 Sous-graphe, sous-graphe induit

Soient G et H deux graphes. Si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$, alors H est appelé **sous-graphe** de G et on écrit $H \subseteq G$. Si de plus, $H \neq G$, alors H est appelé un **sous-graphe propre** de G et on écrit $H \subset G$.

Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le sous-graphe de G **induit** par S , noté $\langle S \rangle$, est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S .

Pour le graphe G illustré dans la FIG. 1.1, le sous-graphe induit par $S = \{a, b, d, e\}$ est illustré dans la FIG. 1.2.

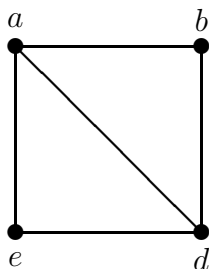


FIGURE 1.2 – Le sous-graphe de G induit par $S = \{a, b, d, e\}$

1.1.4 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Un sous ensemble S de V est dit **minimal** par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subset S$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété \mathcal{P} . Un sous ensemble S de V est dit **maximal** par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas un sous ensemble S' tel que $S \subset S'$ et le sous graphe induit par S' vérifie la propriété \mathcal{P} .

Un sous ensemble S de V est dit **minimum** ou de **taille minimale** par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété \mathcal{P} et $|S'| < |S|$. Un sous ensemble S de V est dit **maximum** ou de **taille maximale** par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas un sous ensemble $S' \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par S' vérifie la propriété \mathcal{P} et $|S'| > |S|$.

1.1.5 Chaîne et cycle

Une **chaîne** C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k telle que pour tout $1 \leq i \leq k - 1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k - 1$ représente la **longueur** de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont les **extrémités** de la chaîne C .

Une chaîne est dite **élémentaire** (resp. **simple**) si tous ses sommets (resp. arêtes) sont distincts. Une **corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne **minimale** induite par n sommets, notée par P_n , est une chaîne élémentaire sans corde.

Un **cycle** C_n est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon

La **distance** entre deux sommets u et v d'un graphe G , notée $d_G(u, v)$ (ou simplement $d(u, v)$), est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . L'**excentricité** d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $e(v) = \max\{d(v, w), w \in V\}$. Le **diamètre** de

G , noté $diam(G)$, est égal à $\max\{e(v), v \in V\}$ et le **rayon** de G , noté $rad(G)$, est égal à $\min\{e(v), v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé **centre**.

Pour le graphe G illustré dans la figure FIG.1.1, $d(a, c) = 2$, $Diam(G) = 2$ et $rad(G) = 1$. Le sommet d est un sommet centre dans la figure FIG.1.1.

1.2 Quelques classes de graphes

Un graphe simple G est dit **complet** si toute paire de sommets de G est reliée par une arête.

Un graphe est dit **connexe** si toute paire de sommets du graphe est reliée par une chaîne. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous graphe connexe maximal. Un graphe est **non connexe** s'il possède au moins deux composantes connexes.

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dits **isomorphes** s'il existe une application bijective φ de V sur V' telle que pour tous sommets $u, v \in V$, $uv \in E$ si et seulement si $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$.

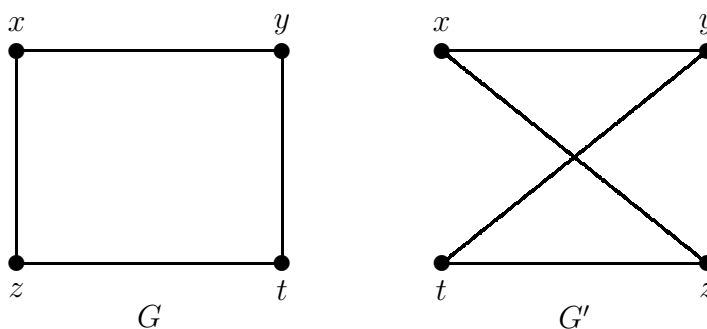
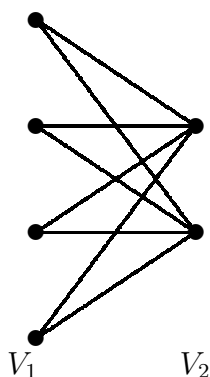


FIGURE 1.3 – Deux graphes isomorphes G et G'

Un graphe est dit **biparti** s'il est possible de partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes $\langle V_1 \rangle$ et $\langle V_2 \rangle$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si, il ne contient pas de cycle de longueur impaire. Il est dit **biparti complet** et est noté par $K_{p,q}$ si $|V_1| = p$, $|V_2| = q$, et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2 .

FIGURE 1.4 – Un Graphe biparti complet $K_{4,2}$

Un graphe est dit **triangulé** si tout cycle de longueur ≥ 4 contient une corde.
Le graphe G illustré dans la figure FIG. 1.1 est un graphe triangulé.

Un **arbre** souvent noté par T , est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de degré 1 de T sont appelés sommets **pendants** (ou **feuilles**), et les sommets adjacents aux feuilles sont appelés **supports**. Un arbre enraciné en un sommet r est un arbre pendu par ce sommet. **La profondeur** d'un sommet v est la longueur de la chaîne qui va de la racine à ce sommet. **Le niveau p** est formé des sommets de profondeur p .

La hauteur d'un arbre est la longueur du plus longue chaîne de la racine à une feuille.

Arbre binaire : Un arbre est dit binaire s'il est constitué d'un unique sommet de degré deux et si tout autre sommet est soit de degré trois, soit de degré un.

Arbre complet : Un arbre est complet si toutes ses feuilles sont sur le même niveau.

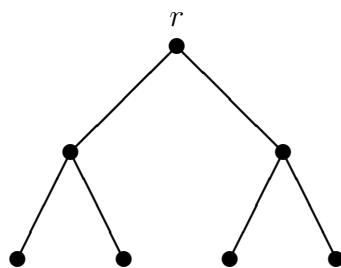


FIGURE 1.5 – Arbre binaire de hauteur 2

Graphe de permutation : Un graphe G est de **permutation** s'il existe une permutation σ des sommets telle que x est adjacent à y dans G si et seulement si $x < y$ et $\sigma(x) > \sigma(y)$.

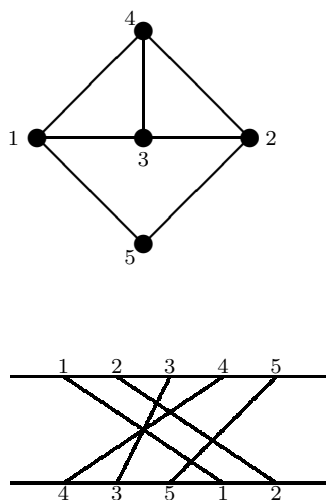


FIGURE 1.6 – Graphe de permutation : $\sigma \equiv \{4, 3, 5, 1, 2\}$

Graphe d'intervalles : Considérons une famille $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ d'intervalles. On peut former un graphe $G(\mathcal{I})$, appelé **graphe représentatif** de \mathcal{I} dont les sommets i_1, i_2, \dots, i_n représentent respectivement les intervalles I_1, I_2, \dots, I_n . Deux sommets sont adjacents si et seulement si les intervalles correspondants s'intersectent. Un graphe G est dit d'intervalles s'il existe une famille d'**intervalles** \mathcal{I} tel que $G = G(\mathcal{I})$.

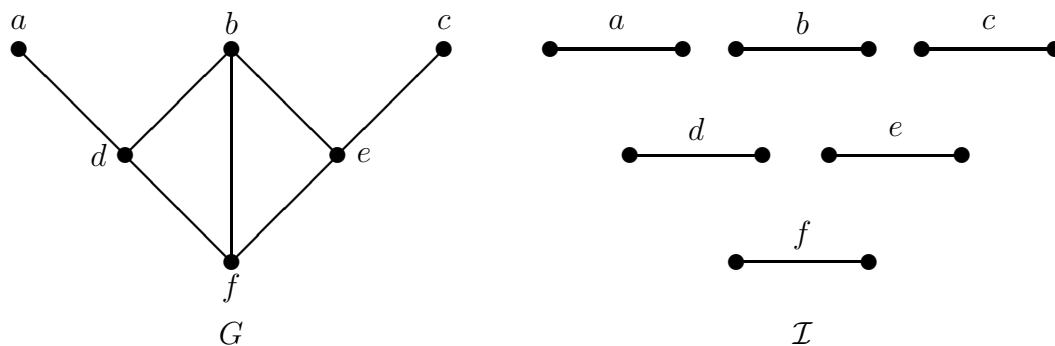


FIGURE 1.7 – Graphe d'intervalles G et la famille d'intervalles \mathcal{I} tel que $G = G(\mathcal{I})$.

1.3 Quelques opérations dans les graphes

1.3.1 Produit cartésien

Le **produit cartésien** de deux graphes G et H , noté par $G \square H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. Deux sommets (u, v) et (x, y) sont adjacents si et seulement si $u = x$ et v est adjacent à y dans H , ou $v = y$ et u est adjacent à x dans G .

Exemple 1.3.1 *Le graphe illustré dans la figure FIG.1.8 est le produit cartésien de la chaîne P_4 par la chaîne P_5 .*

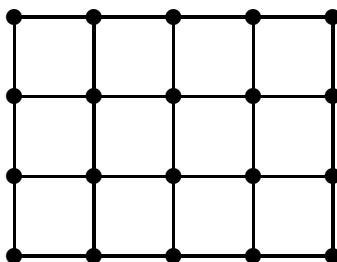


FIGURE 1.8 – $P_4 \square P_5$

1.3.2 Produit tensoriel

Le **produit tensoriel** de G et H , noté par $G \times H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. Deux sommets distincts (u, v) et (x, y) sont adjacents si et seulement si $u \in N_G(x)$ et $v \in N_H(y)$.

Exemple 1.3.2 *Le graphe illustré dans la Figure FIG. 1.9 est le produit tensoriel de P_4 par P_5 .*

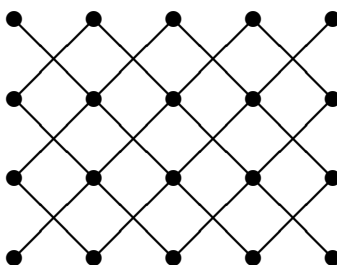


FIGURE 1.9 – $P_4 \times P_5$

1.3.3 Produit fort

Le **produit fort** de G et H , noté par $G \boxtimes H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. L'ensemble des arêtes est l'union de $E(G \square H)$ et de $E(G \times H)$, c'est à dire, $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$.

Exemple 1.3.3 *Le graphe illustré dans la Figure FIG. 1.10 est le produit fort de P_4 par P_5 .*

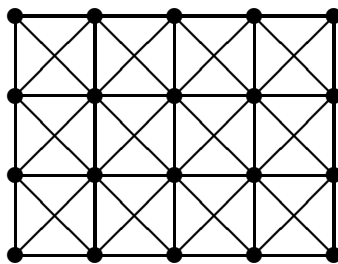


FIGURE 1.10 – $P_4 \boxtimes P_5$

1.4 Domination dans les graphes

1.4.1 Historique

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet trouve son origine en 1862 dans les jeux d'échecs quand De Jaenisch [13] étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur un échiquier $n \times n$ de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles, tout en sachant que les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases horizontalement, verticalement ou diagonalement. Pour un échiquier 8×8 , cinq est le nombre minimum de reines qui dominant toutes les cases de l'échiquier. Dans ce cas, le problème est appelé « le problème des cinq reines » qui est à l'origine de l'étude mathématique de la domination.

En 1892, Ball [1] a traité la question de De Jaenish en considérant d'autres conditions supplémentaires.

En 1964, les frères Yaglom [31] étudièrent les problèmes posés par De Jaenish et Ball. L'appellation « coefficient de stabilité externe » fut introduit par Berge [3] pour définir le nombre de domination et en 1962, Ore [26] fut le premier à employer les termes « ensemble dominant » et « nombre de domination » qu'il nota $d(G)$.

L'étude moderne de la domination a débuté après l'apparition de l'article de Cockayne et Hedetniemi [9] en 1977. Les auteurs de [9] ont été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

1.4.2 Domination standard

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ est **un dominant** de G si tout sommet de $V \setminus S$ est adjacent à au moins un sommet de S , c'est-à-dire si $N[S] = V$. Le **nombre de domination** $\gamma(G)$ et le **nombre de domination supérieur** $\Gamma(G)$ de G sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal sur G . Un ensemble dominant de G de cardinal minimum est appelé γ -**ensemble**, et un ensemble dominant minimal de G de cardinal maximum est appelé Γ -**ensemble**.

Exemple 1.4.1 *Le nombre de domination et le nombre de domination supérieur du graphe illustré dans FIG 1.11 valent respectivement $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$. L'ensemble $S = \{u, v\}$ est un γ -ensemble et l'ensemble $S' = \{w, x, y, z\}$ est un Γ -ensemble.*

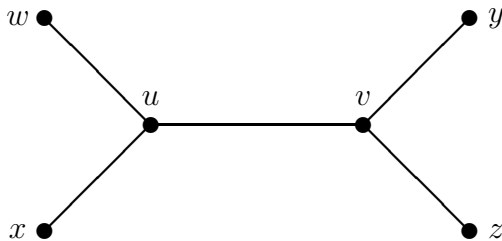


FIGURE 1.11 – Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans un graphe :

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet v de V , $|N[v] \cap S| \geq 1$.

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet v de $V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq \emptyset$.
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si $N[S] = V$.

1.4.3 Quelques invariants de domination

On dénombre actuellement près d'une centaine de types de domination et références dans le domaine. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([20], [21]).

Indépendance :

Un ensemble S de sommets est dit **stable** (ou indépendant) si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. Le **nombre de domination stable** $i(G)$ et le **nombre de stabilité** $\beta_0(G)$ sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un stable maximal dans G . Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal [2], on a :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G)$$

Packing :

Un ensemble S est un **packing** si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \leq 1$. Le **nombre de packing** $P(G)$ et le **nombre de packing inférieur** $p(G)$ sont respectivement le cardinal maximum et minimum d'un packing maximal dans G . Nous avons la chaîne d'inégalités suivante [21] :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G).$$

Efficacité :

Un ensemble dominant S est dit **efficace** si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| = 1$, c'est-à-dire que tout sommet est dominé par un unique sommet de S .

Notons qu'un ensemble dominant efficace n'existe pas toujours puisque le cycle C_5 ne possède pas d'ensemble dominant efficace.

Par ailleurs, si un graphe G possède un ensemble dominant efficace S , alors tout ensemble dominant efficace de G a le cardinal de S qui est forcément $\gamma(G)$.

1.5 Complexité du problème de domination

Dans cette section, on omettra les rappels relatifs à la théorie de la complexité algorithmique. Pour plus de détail, le lecteur peut se référer aux livres de Garey et Johnson [19], Papadimitriou [27] et Sakarovitch [29].

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n . Le problème de décision [11] associé au problème de recherche d'un ensemble dominant minimum est donné par :

Ensemble dominant

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n et un entier positif k , $k \leq n$.

Question : Existe-il un ensemble dominant de G de cardinal $\leq k$?

Par la réduction du problème "3-SAT" au problème "Ensemble dominant", David Johnson montre que le problème de l'Ensemble dominant est NP-complet.

Théorème 1.5.1 [19] *Le problème "Ensemble dominant" est NP-complet.*

Le problème "Ensemble dominant" reste NP-complet pour la classe des graphes bipartis [14] et les graphes triangulés [5]. Néanmoins, il est polynômial pour la classe des arbres avec un ordre de complexité égal à $O(n)$ [8] et pour la classe des graphes de permutations avec un ordre de complexité égal à $O(n^2)$ [18].

CHAPITRE 2

BROADCASTS DANS LES GRAPHEs

Après l'introduction générale des notions de fonction broadcast et de nombre de broadcast domination, nous introduisons quelques invariants des broadcasts et les relations qui les relient. Ensuite, nous examinons la complexité du problème de broadcast domination.

2.1 Notions fondamentales sur les broadcasts

Soit $G = (V, E)$ un graphe non trivial connexe.

Définition 2.1.1 *Soit G un graphe. On appelle **broadcast** sur G , toute fonction $f : V \rightarrow \{0, \dots, \text{diam}(G)\}$ vérifiant $f(v) \leq e(v)$ pour tout sommet v de G . Un sommet v pour lequel $f(v) > 0$ est un sommet **f -dominant** ou **sommet broadcast**, et l'ensemble **f -dominant** est $V_f^+(G) = \{v \in V : f(v) > 0\}$. S'il n'y a pas risque de confusion, on note simplement V_f^+ au lieu de $V_f^+(G)$.*

Remarque 2.1.2 *Un sommet f -dominant v f -domine chaque sommet u avec $d(u, v) \leq f(v)$, et les sommets dans $V \setminus V_f^+$ ne f -dominent aucun sommet de G . Si $u \in V_f^+$, $v \in V$ et $d(u, v) \leq f(u)$, on dit que le sommet v peut atteindre un broadcast à partir de u . L'ensemble des sommets que $v \in V$ peut atteindre est défini par $H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u, v) \leq f(u)\}$.*

Définition 2.1.3 *Un broadcast dominant sur G est un broadcast f dans lequel chaque sommet est f -dominé par un certain sommet dans V_f^+ , autrement dit, un broadcast f est un dominant si pour tout $v \in V$, $|H(v)| \geq 1$.*

Remarque 2.1.4 *S'il existe un sommet v avec $f(v) = \text{diam}(G)$, alors f est un broadcast dominant. Ainsi, il n'est pas nécessaire de considérer des broadcasts dominants avec des sommets de coût supérieur au $\text{diam}(G)$.*

Définition 2.1.5 Pour un broadcast f , un sommet u qui est f -dominé par un sommet v est un f -voisin de v . Le f -voisinage de v , noté par $N_f[v]$ est l'ensemble des f -voisins de v . Si $S \subseteq V_f^+$, alors $N_f[S] = \bigcup_{v \in S} N_f[v]$ est le f -voisinage de S . Le f -voisinage de f est $N_f[V_f^+]$

Remarque 2.1.6 u est un voisin de v si et seulement si v est un voisin de u mais, il est possible que u soit un f -voisin de v sans que v le soit pour u .

Exemple 2.1.7 Le graphe illustré dans FIG.2.1 avec $f(w) = f(y) = 0$ et $f(x) = 1$ montre que w est un f -voisin de x , mais que le sommet x n'est pas f -voisin de w .

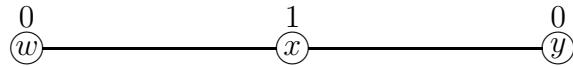


FIGURE 2.1 – Le sommet w est un f -voisin de x et le sommet x n'est pas f -voisin de w .

Définition 2.1.8 Un sommet u est un f -voisin privé de v si u est f -dominé seulement par v . Pour un sommet $v \in V_f^+$, le f -voisinage privé $pn_f[v]$ est l'ensemble des f -voisins privés de v . Si $v \in pn_f[v]$, alors on dit que v est son f -voisin privé propre. Pour $S \subseteq V_f^+$, on définit l'ensemble des f -voisins privés de S par $PN_f[S] = N_f[S] \setminus N_f[V_f^+ \setminus S]$.

Définition 2.1.9 Un broadcast f d'un certain type (domination ou autre) est dit minimal (resp. maximal) s'il n'existe pas un broadcast $g \neq f$ tel que pour tout sommet $u \in V, g(u) \leq f(u)$ (resp. $g(u) \geq f(u)$).

Définition 2.1.10 Soit f un broadcast sur un graphe G et $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le **nombre de broadcast domination** $\gamma_b(G)$ est la valeur minimum de $\sigma(f)$ sur tous les broadcasts dominants de G . Un broadcast dominant f sur G pour lequel $\sigma(f) = \gamma_b(G)$ est dit broadcast dominant minimum sur G . Le **nombre de broadcast domination supérieur** $\Gamma_b(G)$ est égal au coût maximum d'un broadcast dominant minimal sur G .

Exemple 2.1.11 Le nombre de broadcast domination et le nombre de broadcast domination supérieur du graphe illustré dans la figure FIG. 2.2 valent respectivement 2 et 3.

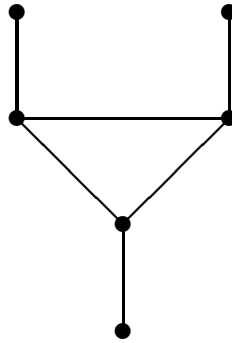


FIGURE 2.2 – Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 2$ et $\Gamma_b(G) = 3$

Exemple 2.1.12 Pour illustrer ces concepts, considérons le graphe $G = (V, E)$ illustré par la figure FIG.2.3. Les figures FIG.2.3 (b) et FIG.2.3 (c) illustrent deux broadcasts dominants f et g , où l'ensemble f -dominant est $V_f^+ = \{s, v, y\}$ et l'ensemble g -dominant est $V_g^+ = \{t, z\}$. Le sommet s f -domine s, t, u, w, x et son f -voisinage est $N_f[s] = \{s, t, u, w, x\}$, mais s ne g -domine aucun sommet. On a $|H_f(u)| = 3, |H_f(x)| = 2, |H_f(z)| = 2$ et $|H_f(r)| = 1$ pour tout sommet $r \in \{s, t, v, w, y\}$. On a $\sigma(f) = 4$ et $\sigma(g) = 3$. En fait il n'est pas difficile de voir que $\gamma_b(G) = 3$ et g est un γ_b -broadcast.

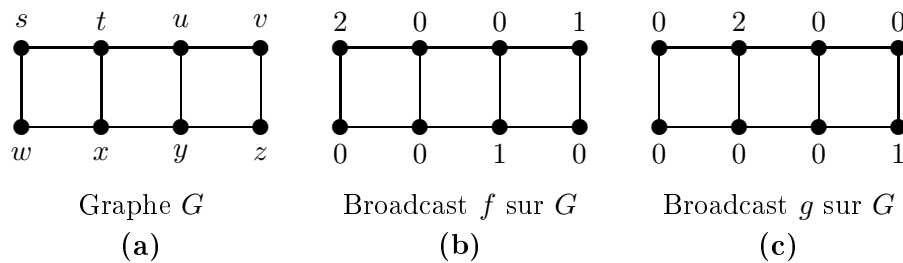


FIGURE 2.3 – Deux broadcast dominants sur G

Une caractérisation de la minimalité d'un broadcast dominant peut être formulée en termes des f -voisins privés des sommets f -dominants.

Théorème 2.1.13 [16].

Soit f un broadcast dominant sur un graphe G . Alors, f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Chaque sommet v vérifiant $f(v) \geq 2$ a un f -voisinage privé qui est à distance $f(v)$ de v .
2. Chaque sommet v vérifiant $f(v) = 1$ a un f -voisinage privé dans $N[v]$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $f_S : V \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$ définie par $f_S(v) = 1$ si $v \in S$, et $f_S(v) = 0$ sinon.

Remarque 2.1.14

1. La fonction caractéristique f_S d'un ensemble dominant minimal S dans un graphe G est un broadcast dominant minimal et donc $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$.
2. Soit $u \in V$, et soit $f_u : V \rightarrow \{0, \dots, \text{diam}(G)\}$ la fonction définie par $f_u(u) = e(u)$ et $f_u(v) = 0$, si $v \neq u$. Le broadcast f_u est un dominant minimal, puisque chaque sommet est f -dominé par u . Si u est un sommet dans le centre de G c'est à dire $e(u) = \text{rad}(G)$, alors on dira que le broadcast f_u est un broadcast **radial**, et si $e(u) = \text{diam}(G)$, alors on dira que f_u est un broadcast **diamétral**.

Proposition 2.1.15 [16].

Si f est un broadcast dominant minimal sur un graphe G et $|V_f^+| \geq 2$, alors pour chaque sommet v , $f(v) < e(v)$.

De la Remarque 2.1.14, on a le résultat suivant :

Observation 1 [15].

Pour tout grahe G

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} \leq \max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\} \leq \Gamma_b(G).$$

2.2 Résultats fondamentaux

Pour tout graphe G et tout entier k avec $1 \leq k \leq \text{rad}(G)$, le nombre de k -distance, noté $\gamma_k(G)$, est la plus petite cardinalité d'un ensemble S de G tel que tout sommet de G est à distance k d'au moins un sommet de S .

Proposition 2.2.1 [17].

Pour tout graphe G ,

$$\gamma_b(G) \leq \min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq \text{rad}(G)\}.$$

Notons que le résultat de la Proposition 2.2.1 produit une meilleure borne pour $\gamma_b(G)$ que celle de l'Observation 1 car si $k = 1$ (resp. $k = \text{rad}(G)$), on obtient $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$ (resp. $\gamma_b(G) \leq \text{rad}(G)$).

Pour tout entier positif $t \geq 3$, on appelle étoile et on note par $K_{1,t}$ l'arbre à t sommets pendants reliés à l'unique sommet de degré t . On appelle graphe subdivisé d'un graphe G le graphe $S(G)$ obtenu en insérant un sommet sur chaque arête de G . Soit $T = S(K_{1,t})$ le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,t}$ pour tout entier $t \geq 2$. Puisque aucun sommet ne domine T , alors $\gamma_b(T) \geq 2$, et puisque un broadcast radial domine T , alors $\gamma_b(T) \leq \text{rad}(T) = 2$. Ainsi, on peut atteindre l'inégalité : $\gamma_b(G) \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\}$. Par ailleurs, il est prouvé dans [17], que la différence entre $\min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ et entre $\Gamma_b(G)$ et $\max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\}$ peut être très grande. Pour un entier positif k , soit H_k le graphe obtenu en joignant un sommet pendent de $S(K_{1,2+k})$ à un sommet pendent de la chaîne P_{2k} (voir FIG.2.4).

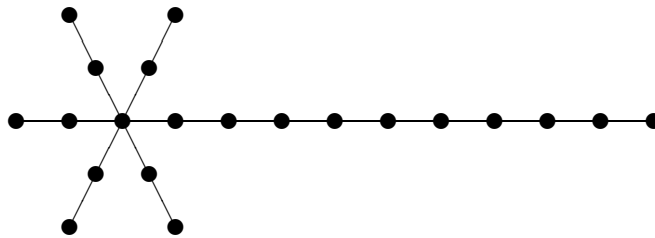


FIGURE 2.4 – le graphe H_4

Ainsi, $\Gamma(H_k) = 2k + 3$ et $\text{diam}(H_k) = 2k + 4$, donc $\max\{\Gamma(H_k), \text{diam}(H_k)\} = 2k + 4$. Soit v l'extrémité de P_{2k} qui est extrémité de H_k . Soit le broadcast $f : V(H_k) \rightarrow \{0, 1, 2k + 2\}$ défini par $f(v) = 2k + 2$, $f(x) = 1$ pour tout extrémité x de H_k distincte de v et $f(x) = 0$ pour tout autre sommet x de H_k . Alors la fonction f est un broadcast dominant minimal sur H_k de coût $3k + 3$. D'où, $\Gamma_b(H_k) \geq 3k + 3$, et on a le résultat suivant :

Observation 2 [15].

Pour tout entier positif k ,

$$\Gamma_b(H_k) - \max\{\Gamma(H_k), \text{diam}(H_k)\} \geq k - 1.$$

Par ailleurs, la différence entre $\min\{t\gamma_t(G) : 1 \leq t \leq \text{rad}(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ peut être très grande comme le prouve le Théorème ci dessous :

Théorème 2.2.2 [17].

Pour tout entier positif k ,

$$\min\{t\gamma_t(H_k) : 1 \leq t \leq \text{rad}(H_k)\} - \gamma_b(H_k) \geq \frac{2k}{15} - 1.$$

Pour une fonction f γ_b -broadcast, si l'ensemble des sommets f -broadcast est réduit à un élément, alors la valeur de ce sommet est égale à son excentricité et au rayon du graphe.

Proposition 2.2.3 [17].

Soit f un γ_b -broadcast sur un graphe G . Alors $V_f^+ = \{v\}$ si et seulement si $f(v) = e(v) = \text{rad}(G)$.

Le sous-graphe induit par le f -voisinage de tout sommet f -broadcast est d'une part radial et d'autre part vaut la valeur de ce sommet.

Proposition 2.2.4 [17].

Soit G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G . Si $v \in V_f^+$, alors

$$f(v) = \gamma_b(\langle N_f[v] \rangle) = \text{rad}(\langle N_f[v] \rangle).$$

Une des caractérisations des graphes radiaux est définie dans la Proposition ci-dessous.

Proposition 2.2.5 [17].

Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = rad(G)$ si et seulement si

$$\min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\} = rad(G).$$

En général, il n'y a aucune relation entre le nombre de broadcast domination d'un graphe et le nombre de broadcast domination de ses sous-graphes, même si le sous-graphe est induit. Plusieurs exemples de graphes G et H existent pour que $G \subseteq H$ et $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$. Voir que ce n'est toujours le cas, en effet, considérons un graphe G d'ordre $n \geq 4$ et de degré maximum au plus $n - 2$. Puisque aucun sommet de G n'est adjacent à tous les sommets du graphe G , alors $\gamma_b(G) \geq 2$. Soit H le graphe obtenu en joignant un nouveau sommet à tous les sommets de G , alors $\gamma_b(H) = 1$. Donc dans ce cas, $G \subseteq H$, bien que $\gamma_b(G) > \gamma_b(H)$.

Cependant, il y a une relation entre le nombre de broadcast domination d'un graphe et le nombre de broadcast domination d'une subdivision de ce graphe.

Théorème 2.2.6 [17].

Si H est le graphe subdivisé d'un graphe G , alors

$$\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H).$$

Soit G un graphe. Pour tout entier $k \geq 0$, on appelle graphe k -**subdivisé** du graphe G le graphe obtenu à partir de G en insérant k sommets sur chaque arête de G . Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$, on note par $S_{k,t}$ le graphe k -subdivisé du graphe t -étoile $K_{1,t}$. Le **centre** de $S_{k,t}$ est l'unique sommet c de $S_{k,t}$ d'excentricité $e(c) = rad(S_{k,t}) = k + 1$.

En 2001, D. Erwin [16] montra que le graphe k -subdivisé du graphe étoile $K_{1,t}$ est γ_b -radial pour $k \geq 0$ et $t \geq 5$ puis proposa la conjecture qui affirme que le résultat reste vrai pour $t \in \{3, 4\}$.

En 2009, R. Sahbi [28] a répondu à la conjecture de D.Erwin [16] :

Théorème 2.2.7 [16].

Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$,

$$\gamma_b(S_{k,t}) = rad(S_{k,t}) = k + 1.$$

Pour tous entiers $k \geq 1$ et $t \geq 2$, on appelle arbre t -**aire complet** de profondeur k le graphe $A_{k,t}$ défini comme suit :

- (i) $A_{1,t}$ est le graphe biparti complet $K_{1,t}$.
- (ii) Pour $k \geq 2$, $A_{k,t}$ est obtenu à partir de t copies disjointes de $A_{k-1,t}$ et d'un sommet relié par une arête à l'unique sommet de degré t de chacune des t copies de $A_{k-1,t}$.

R. Sahbi a prouvé la γ_b -radialité de tous les arbres t -aires complets :

Théorème 2.2.8 [28].

Pour tous entiers $k \geq 1$ et $t \geq 2$ on a

$$\gamma_b(A_{k,t}) = rad(A_{k,t}) = k.$$

Soit G un graphe γ_b -radial et soit H un sous graphe de G tel que $rad(H) = rad(G)$. Si H est γ_b -radial, on dit que H est un sous graphe γ_b -radial.

R. Sahbi a déterminé le sous graphe de $S_{k,3}$, $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial et minimal (au sens de la suppression d'arêtes).

Théorème 2.2.9 [28].

Soit $k \geq 3$ un entier et $S'_{k,3}$ le sous-graphe de $S_{k,3}$ à 3 sommet pendants v_1, v_2, v_3 tels que $d(c, v_1) = k + 1$, $d(c, v_2) = k$ et $d(c, v_3) = k - 1$. Alors $S'_{k,3}$ est $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial.

A la même période, Herke et Mynhardt publient un article qui caractérise les arbres radiaux [24, 25].

Soit P une chaîne diamétrale d'un arbre T , c'est à dire P est de longueur maximale. Un ensemble M des arêtes de P est un ensemble P -**partition** si les extrémités de chaque arête dans M sont de degré 2 dans T .

Théorème 2.2.10 [24, 25].

Un arbre T est radial si et seulement si T n'admet pas d'ensemble partition non vide.

Un γ_b -broadcast f est un γ_b -broadcast **très efficace** si et seulement si f est un γ_b -broadcast avec un nombre minimum de sommets broadcast. On déduit directement un résultat du Théorème 2.2.10 :

Corollaire 2.2.11 [24, 25].

1. Soit f un γ_b -broadcast très efficace d'un arbre T à s sommets broadcasts. Alors,

$$\gamma_b(T) = \text{rad}(T) - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor.$$

2. Pour un arbre T , si M est un ensemble partition de cardinal maximum m , alors,

$$\gamma_b(T) = \text{rad}(T) - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor.$$

Un arbre est dit **chenille** si le graphe obtenue en supprimant toutes les feuilles est une chaîne. Seager [30] a caractérisé les chenilles avec $\gamma_b = \gamma$. Cockayne, Herke et Mynhardt [10] ont caractérisé la classe \mathcal{T} d'arbres T vérifiant $\gamma_b(T) = \gamma(T)$.

Théorème 2.2.12 [10].

Un arbre $T \in \mathcal{T}$ si et seulement si T a un ensemble-partition maximum M tel que chaque composante T_i de $T \setminus M$ est dans \mathcal{T} .

2.3 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination

D.Erwin démontra que la même borne inférieure que celle du nombre de domination reste valable pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.3.1 [17].

Si G est un graphe non trivial, alors

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{\text{diam}(G) + 1}{3} \rceil.$$

De l'Observation 1 et du Théorème 2.3.1, on déduit directement le résultat suivant :

Théorème 2.3.2 [17].

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Une borne inférieure en terme de rayon est prouvée par Bresar et Spacapan pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.3.3 [7].

Si G est un graphe, alors

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{2rad(G)}{3} \rceil.$$

Pour tout graphe connexe G d'ordre n , $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

Théorème 2.3.4 [25].

Pour tout graphe G d'ordre n ,

$$\gamma_b(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Il existe d'autres bornes qui dépendent du rayon. Pour un γ_b -broadcast f , notons par $M = \max\{f(x) : x \in V_f^+\}$.

Lemme 2.3.5 [16].

Soit G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G . Alors

$$rad(G) \leq 2\gamma_b + |V_f^+| - M - 1.$$

Du Lemme 2.3.5, nous obtenons immédiatement le résultat suivant :

Théorème 2.3.6 [16].

Soit G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G . Alors

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{rad(G) + M + 1 - |V_f^+|}{2} \rceil.$$

2.4 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination

Une caractérisation connue des graphes G connexes de nombre de domination égal à 1 est $rad(G) = 1$. Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 1 admettent une caractérisation identique.

Proposition 2.4.1 [17].

Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 1$ si et seulement si $rad(G) = 1$.

Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 2 se caractérisent aussi en fonction du rayon.

Théorème 2.4.2 [17].

Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 2$ si et seulement si $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 2$.

Notons qu'il existe :

- (i) une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) < \text{rad}(G)$. Il suffit de considérer les graphes G_n obtenus en insérant 2 sommets sur chaque arête du multigraphe à 2 sommets reliés par n arêtes, $n \geq 1$, pour lesquels on a $\gamma_b(G_n) = \gamma(G_n) = 2$ et $\text{rad}(G_n) = 3$.

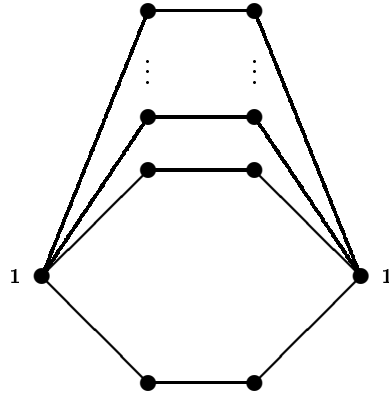


FIGURE 2.5 – Le graphe G_n

- (ii) une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \text{rad}(G) < \gamma(G)$. Il suffit de considérer les graphes $S(K_{1,n}), n \geq 3$, pour lesquels on a $\gamma_b(S(K_{1,n})) = \text{rad}(S(K_{1,n})) = 2$ et $\gamma(S(K_{1,n})) = n$.

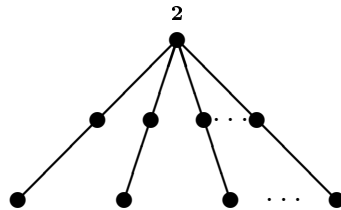


FIGURE 2.6 – le graphe $S(K_{1,n}), n \geq 3$

- (iii) une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) = \text{rad}(G)$. Il suffit de considérer les graphes multipartis complets $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}, t \geq 2, n_i \in \mathbb{N}, n_i \geq 2$ pour tout $i, 1 \leq i \leq t$, pour lesquels on a $\gamma_b(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \gamma(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = 2$ et $\text{rad}(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = 2$

De (ii), on peut affirmer qu'un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$ peut avoir un nombre de domination aussi grand que l'on voudrait, et de (i) une question légitime se pose : Que peut-on dire de la grandeur du rayon d'un graphe G lorsque $\gamma_b(G) = 2$? Une réponse est donnée par la Proposition 2.4.3

Proposition 2.4.3 [17] .

Si G est un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$, alors

1. $rad(G) = 2$, ou,
2. $rad(G) = 3$ et $\gamma(G) = 2$.

Comme conséquence du Théorème 2.4.2 on a :

Proposition 2.4.4 [17].

Si G est un graphe et $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 3$, alors $\gamma_b(G) = 3$.

En regroupant les différents résultats précédemment cités, on obtient :

Proposition 2.4.5 [16].

Soit G un graphe. Si $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.

Le résultat de la proposition 2.4.5 ne peut être étendu au cas $k = 4$. En effet, D. Erwin considéra le graphe G obtenu en joignant une extrémité de $S(K_{1,4})$ à une extrémité de P_3 . Le graphe vérifie $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4 = rad(G)$.

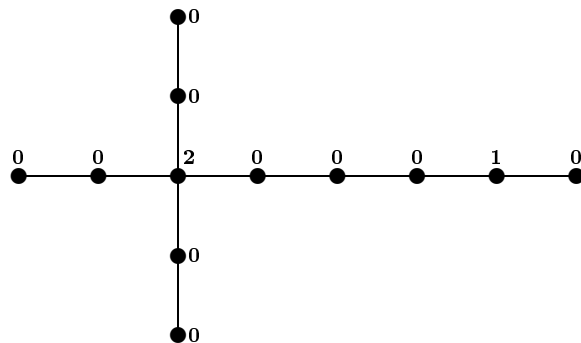


FIGURE 2.7 – Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4 = rad(G)$

2.5 Invariants de broadcast

Dunbar et al. [15] définirent d'autres paramètres liés aux broadcasts. Nous citerons dans cette partie l'essentiel des résultats à ces invariants.

2.5.1 Broadcast indépendant

Un broadcast f est dit **indépendant** si tout sommet f -dominant n'est dominé que par lui-même. En d'autres termes, si pour tout sommet $v \in V_f^+, N_f[v] \cap V_f^+ = \{v\}$, ou encore $|H(v)| = 1$ pour $v \in V_f^+$.

Le coût maximum d'un broadcast indépendant de G est appelé **nombre de broadcast indépendance** et est noté $\beta_b(G)$. Le **nombre de broadcast indépendance inférieur**, noté $i_b(G)$, est égal au coût minimum d'un broadcast indépendant maximal de G .

Comme les deux fonctions broadcast radiale et broadcast diamétrale sont des broadcast indépendants maximaux, on déduit les inégalités suivantes [15] :

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G),$$

pour tout graphe G .

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute paire de sommets u et v de M , $d(u, v) = diam(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de G . La proposition qui suit améliore la borne inférieure $diam(G)$ pour $\beta_b(G)$.

Proposition 2.5.1 [15].

Pour tout graphe G ,

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte .

Notons que la fonction caractéristique f_S d'un ensemble indépendant maximal S dans un graphe G est un broadcast indépendant, et donc $i_b(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$, mais f_S n'est pas nécessairement un broadcast indépendant maximal. En effet, considérons la chaîne $P_4 : (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Si on affecte aux sommets les poids $f(v_1) = f(v_4) = 1$ et $f(v_2) = f(v_3) = 0$, alors f est la fonction caractéristique d'un ensemble indépendant maximal. f est aussi un

broadcast indépendant et un broadcast dominant minimal. Mais cette fonction n'est pas un broadcast indépendant maximal, puisque la fonction g définie par $g(v_1) = g(v_4) = 2$ et $g(v_2) = g(v_3) = 0$ vérifie pour tout sommet u , $g(u) \geq f(u)$.

Dans ce qui suit, lorsque deux paramètres θ et η sont incomparables, nous écrirons brièvement $\theta \diamond \eta$.

Notons que ni $\gamma(G)$ ni $i(G)$ n'est comparable à $i_b(G)$. En effet, Dunbar et al. montrèrent que pour la chaîne P_6 , on a $\gamma(P_6) = i(P_6) = 2 < 3 = i_b(P_6)$, alors que pour le graphe $S(K_{1,t})$, on a $\gamma(S(K_{1,t})) = i(S(K_{1,t})) = t > 2 = i_b(S(K_{1,t}))$. Aussi, ni $p(G)$ ni $P(G)$ n'est comparable à i_b . Par exemple, le graphe de Petersen PG a $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \gamma_b(PG) = i_b(PG)$; par ailleurs si G un graphe obtenu par l'union de trois copies disjointes de P_5 en ajoutant trois arêtes pour former un triangle sur leurs centres, alors $\gamma_b(G) = i_b(G) = 3 < 5 = p(G) < P(G) = 6$.

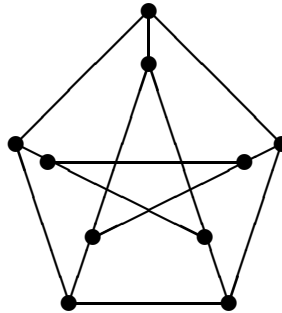


FIGURE 2.8 – Graphe de Petersen

Nous pouvons regrouper toutes ces remarques :

Pour tout graphe G ,

- (i) $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$,
- (ii) $\{\gamma(G), i(G)\} \diamond i_b(G)$,
- (iii) $\{p(G), P(G)\} \diamond \{\gamma_b(G), i_b(G)\}$.

Dans [15], les auteurs étudièrent l'extension de la chaîne d'inégalités

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G),$$

à savoir si

$$\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \leq \Gamma_b(G)$$

est satisfaite. L'inégalité du milieu provient des définitions de i_b et β_b . l'inégalité de droite n'est pas vraie en générale puisque $\beta_b(P_4) = 4 > \Gamma_b(P_4) = 3$ et $\beta_b(PG) = 4 < 5 = \Gamma_b(PG)$ où P_4 est la chaîne d'ordre 4 et PG est le graphe de Petersen (voir FIG.2.8).

Concernant l'inégalité gauche elle se déduit du Théorème :

Théorème 2.5.2 [17].

Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G . Si $V_f^+ = \{v\}$ alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Par ailleurs, si $|V_f^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) f est un broadcast dominant et
- (ii) pour tout $v \in V_f^+$, $f(v) = \min\{d(v, u) : u \in V_f^+ \setminus \{v\}\} - 1$.

Par ailleurs, β_b et Γ sont incomparables puisque $\Gamma(PG) = 5 > 4 = \beta_b(PG)$ et $\beta_b(P_4) = 4 > 2 = \Gamma(P_4)$. Tous ces résultats se résument dans le Corollaire qui suit :

Corollaire 2.5.3 [15].

Pour tout graphe G ,

- (i) $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$,
- (ii) $\beta_b(G) \diamond \Gamma_b(G)$,
- (iii) $\beta_b(G) \diamond \Gamma(G)$.

D'autres relations existent entre les nombres de broadcast d'indépendances i_b et β_b avec le nombre d'indépendance β_0 . J.Dunbar et al. ont énoncé une chaîne d'inégalités entre β_0 et les nombres de broadcast indépendance :

Proposition 2.5.4 [15] .

Pour tout graphe G ,

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G).$$

Comme $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$, de la Proposition 2.5.4, on déduit :

Corollaire 2.5.5 [15].

Pour tout graphe G , si $\gamma_b(G) = rad(G)$, alors $i_b(G) = rad(G)$.

Suite à tous ces résultats, nous obtenons le schéma de comparaisons suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma(G) & \leq & i(G) & \leq & \beta_0(G) & \leq & \Gamma(G) \\ \vee \mid & & \diamond & & \mid \wedge & & \mid \wedge \\ \gamma_b(G) & \leq & i_b(G) & \leq & \beta_b(G) & \diamond & \Gamma_b(G) \end{array}$$

2.5.2 Broadcast dominant indépendant

Un broadcast f est dit **dominant indépendant** s'il est en même temps dominant et indépendant.

Le coût maximum (resp. minimum) d'un broadcast dominant indépendant minimal de G est appelé le **nombre de broadcast indépendant de domination supérieur** (resp. **nombre de broadcast indépendant de domination**), et est noté $\Gamma_{ib}(G)$ (resp. $\gamma_{ib}(G)$). Puisque la fonction caractéristique de tout ensemble indépendant maximal est un broadcast dominant indépendant minimal, $\gamma_{ib}(G) \leq i(G)$ et $\Gamma_{ib}(G) \geq \beta_0(G)$.

Notons que si f est un broadcast dominant indépendant minimal, alors pour tout broadcast $g \neq f$ qui vérifie $g \leq f$, g est indépendant mais n'est pas forcément un broadcast dominant.

Théorème 2.5.6 [16].

Si f est un broadcast dominant non indépendant de G , alors il existe un broadcast g qui est dominant indépendant, avec $g(V) \leq f(V)$, et $V_g^+ \subset V_f^+$

Le Théorème 2.5.6 permet d'affirmer que tout graphe G a un γ_b -broadcast qui est indépendant, c'est à dire $\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G)$, et vérifie la chaîne d'inégalités :

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Concernant une borne supérieure pour le nombre de broadcast indépendant de domination supérieur, on a :

Proposition 2.5.7 [16].

Pour tout graphe G ,

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

Les paramètres $\Gamma_{ib}(G)$ et $\Gamma(G)$ sont incomparables. En effet, Dunbar et al. montrèrent que, pour le graphe de Petersen PG et la chaîne P_{10} , on a $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$ et $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = \text{diam}(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$.

2.5.3 Broadcast efficace

Un broadcast f est dit efficace si chaque sommet est f -dominé par un unique sommet broadcast, c'est à dire, pour tout sommet $v \in V$, $|H(v)| = 1$. Le coût maximum d'un broadcast efficace est appelé le **nombre de broadcast efficace supérieur** et est noté $\Gamma_{eb}(G)$. Le **nombre de broadcast efficace** $\gamma_{eb}(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast efficace. Par exemple, la figure FIG. 2.9 illustre 5 broadcasts efficaces distincts sur la chaîne P_5 , où $\gamma_{eb}(P_5) = 2$ et $\Gamma_{eb}(P_5) = 4$.

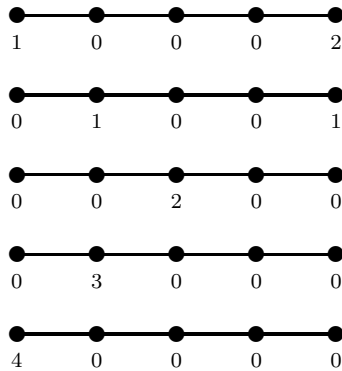


FIGURE 2.9 – Broadcasts efficaces sur P_5

Théorème 2.5.8 [15].

Tout graphe G possède un γ_b -broadcast qui est efficace.

Corollaire 2.5.9 [15].

Tout graphe G a un γ_b -broadcast pour lequel la distance entre n'importe quelle paire de sommets broadcasts u et v est supérieure à $f(u) + f(v)$.

Puisque tout broadcast dominant efficace est indépendant et dominant minimal, tout graphe G vérifie :

$$\Gamma_{eb}(G) \leq \min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{eb}(G)\}.$$

Par définition de γ_{eb} , $\gamma_b(G) \leq \gamma_{eb}(G)$, et par le Théorème 2.5.8, $\gamma_b(G) = \gamma_{eb}(G)$. Par ailleurs tout broadcast diamétral est un broadcast dominant efficace. Ainsi, tout graphe vérifié la chaîne d'inégalités :

Corollaire 2.5.10 [15].

Pour tout graphe G ,

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Notons que ni $p(G)$ ni $P(G)$ est comparable avec $\Gamma_{eb}(G)$. En effet, pour le graphe de Petersen PG , $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \Gamma_{eb}(PG)$; alors que pour l'arbre binaire complet T de hauteur six qui a 63 sommets, on a $\Gamma_{eb}(T) = 10 < 13 = p(T)$. Par ailleurs, $\gamma(PG) = 3 < 2 = \Gamma_{eb}(PG)$; et pour $n \geq 3$, $\Gamma_{eb}(P_n) = n - 1 > \Gamma(P_n)$. Ainsi tout graphe G satisfait :

Corollaire 2.5.11 [15].

Pour tout graphe G ,

$$\Gamma_{eb}(G) \diamond \{p(G), P(G), \gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G)\}.$$

2.5.4 Broadcast packing

Un broadcast f est un **broadcast packing** si chaque sommet est f -dominé par au plus un sommet broadcast, c'est à dire, pour tout sommet $v \in V$, $|H(v)| \leq 1$. Le coût maximum d'un broadcast packing de G est appelé le **nombre de broadcast packing** et est noté par $P_b(G)$. De même, le **nombre de broadcast packing inférieur**, noté par $p_b(G)$, est égal au coût minimum d'un broadcast packing maximal.

La fonction caractéristique f_S d'un packing maximal n'est pas forcément un broadcast packing maximal. Ceci peut être vu en considérant la chaîne P_5 . Soit c le centre de P_5 . Le packing $S = \{c\}$ de FIG.2.10(a) est maximal, mais f_S n'est pas un broadcast packing maximal, puisque la valeur $f_S(c) = 1$ peut être augmentée à $f_S(c) = 2$ qui représente le broadcast packing maximal (voir FIG.2.10(b)).

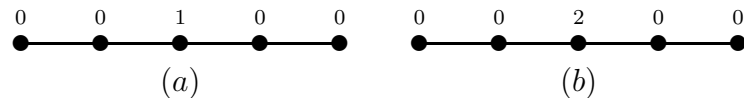


FIGURE 2.10 – Un packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal

Remarque 2.5.12 *Les invariants $p(G)$ et $p_b(G)$ sont incomparables. En effet, pour la chaîne P_5 , on a, $p(P_5) = 1 < 2 = p_b(P_5)$, alors que pour le graphe de Petersen PG , on a, $p_b(PG) = 2 > 1 = p(PG)$.*

Par ailleurs, tout broadcast radial ou diamétral est un broadcast packing et un broadcast indépendant.

La Remarque 2.5.12 se resume dans ce qui suit :

Observation 3 [15].

Pour tout graphe G ,

(i) $p_b(G) \diamond P(G)$,

(ii) $p_b(G) \diamond p(G) \leq P(G) \leq P_b(G)$, et

(iii) $p_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq P_b(G) \leq \beta_b(G)$.

Notons qu'on peut avoir un broadcast packing maximal qui n'est pas un broadcast dominant. Par exemple, considérons les valeurs 1,0,0,1,0,0 dans la chaîne P_6 .

On sait que pour tout graphe G ,

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G).$$

Dunbar et al. se posèrent naturellement la question de la conservation de cette chaîne entre les invariants de broadcast correspondants. Ils apportèrent une réponse complète à cette question par ce qui suit :

Proposition 2.5.13 [15]. *Chaque broadcast efficace est*

- (i) *un broadcast packing maximal,*
- (ii) *un broadcast dominant minimal, et*
- (iii) *un broadcast dominant indépendant minimal.*

Du Corollaire 2.5.10 et la Proposition 2.5.13, on déduit :

Corollaire 2.5.14 [15].

Pour tout graphe G ,

$$p_b(G) \leq \gamma_{eb}(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \min\{P_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}.$$

Pour le graphe de Petersen PG , on a $2 = P_b(PG) < 3 = \gamma(PG) \leq i(PG) \leq \beta_0(PG) \leq \Gamma_{ib}(PG) \leq \Gamma_b(PG) = \Gamma(PG) = 5$. D'un autre côté, pour la chaîne $P_n = i(P_n) = \lceil n/2 \rceil = \beta_0(P_n) = \Gamma(P_n) < \text{diam}(P_n) = n - 1 \leq P_b(P_n)$.

D'où, $P_b(G) \diamond \{\gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G)\}$.

Dans [15], les auteurs proposent plusieurs exemples pour montrer que ni $\Gamma_{ib}(G)$ ni $\Gamma_b(G)$ n'est comparable avec $P_b(G)$.

D'où nous avons l'observation suivante :

Observation 4 [15].

Pour tout graphe G ,

$$P_b(G) \diamond \{\gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G), \Gamma_{ib}(G), \Gamma_b(G)\}.$$

Nous donnons un tableau TAB.2.1 qui résume les relations entre tous les invariants de domination et de broadcast vues aux Chapitres 1 et 2.

	p	P	γ	i	β_0	Γ	γ_b	i_b	β_b	Γ_b	Γ_{ib}	Γ_{eb}	p_b	P_b
p	=	≤	≤	≤	≤	≤	◇	◇	≤	≤	≤	◇	◇	≤
P	≥	=	≤	≤	≤	≤	◇	◇	≤	≤	≤	◇	◇	≤
γ	≥	≥	=	≤	≤	≤	≥	◇	≤	≤	≤	◇	≥	◇
i	≥	≥	≥	=	≤	≤	≥	◇	≤	≤	≤	◇	≥	◇
β_0	≥	≥	≥	≥	=	≤	≥	≥	≤	≤	≤	◇	≥	◇
Γ	≥	≥	≥	≥	≥	=	≥	≥	◇	≤	◇	◇	≥	◇
γ_b	◇	◇	≤	≤	≤	≤	=	≤	≤	≤	≤	≤	≥	≤
i_b	◇	◇	◇	◇	≤	≤	≥	=	≤	≤	≤	≤	≥	≤
β_b	≥	≥	≥	≥	≥	◇	≥	≥	=	◇	≥	≥	≥	≥
Γ_b	≥	≥	≥	≥	≥	≥	≥	≥	◇	=	≥	≥	≥	◇
Γ_{ib}	≥	≥	≥	≥	≥	◇	≥	≥	≤	≤	=	≥	≥	◇
Γ_{eb}	◇	◇	◇	◇	◇	◇	≥	≥	≤	≤	≤	=	≥	≤
p_b	◇	◇	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	=	≤
P_b	≥	≥	◇	◇	◇	◇	≥	≥	≤	◇	◇	≥	≥	=

TABLE 2.1 – Inégalités entre les invariants de broadcast.

2.6 Complexité algorithmique du problème de broadcast domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n . Le problème de décision [11] associé au problème de recherche d'un broadcast dominant minimum est donné par :

Broadcast dominant

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n et un entier positif $k, k \leq n$.

Question : Existe-il un broadcast dominant f de G tel que $\gamma_b(G) = \min \sum_{v \in V} f(v) \leq k$?

Heggernes et Lokshtanov montrèrent que la Complexité algorithmique du problème de broadcast domination est polynomiale en $O(n^6)$ pour les graphes en général, bien que beaucoup d'algorithmes plus rapides ont été construits pour des classes particulières de graphes.

Théorème 2.6.1 [23].

Le problème de broadcast dominant optimale est polynomial, de complexité $O(n^6)$.

En 2004, Blair et al. [4] donnèrent des algorithmes pour les graphes d'intervalles, les graphes séries-parallèles et les arbres respectivement en $O(n^3)$, $O(nr^4) = O(n^5)$ et en $O(nh) = O(n^2)$ où r représente le rayon du graphe série-parallèle et h la profondeur de l'arbre.

En 2006, Dabney et al. [?] apportèrent un nouvel algorithme pour les arbres en $O(n)$.

CHAPITRE 3

NOMBRE DE BROADCAST INDEPENDANCE DES GRILLES

Dans ce chapitre, nous citons quelques résultats connus sur le nombre de broadcast domination du produit cartésien $G_1 \square G_2$ de deux graphes quelconques. Ensuite, nous établissons la valeur exacte de $\beta_b(P_m \square P_n)$, où P_m et P_n sont deux chaînes de longueur m et n respectivement, $m \leq n$.

Soient P_m et P_n deux chaînes de longueur m et n respectivement, et $G_{m,n} = P_m \square P_n$. Notons les sommets de la grille $G_{m,n}$ par $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Deux sommets $v_{i,j}$ et $v_{k,l}$ sont reliés par une arête si et seulement si $|i - k| + |j - l| = 1$. Nous ferons référence aux lignes et colonnes d'une grille par $R^i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,n}\}$ et $C^j = \{v_{1,j}, \dots, v_{m,j}\}$. Aussi, nous ferons référence aux lignes et colonnes consécutives d'une grille par $R^{i_1, i_2} = R^{i_1} \cup \dots \cup R^{i_2}$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ et $C^{j_1, j_2} = C^{j_1} \cup \dots \cup C^{j_2}$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$. Désignons par H^{j_1, j_2} le sous graphe de $G_{m,n}$ induit par les sommets de C^{j_1, j_2} . Dans la suite de ce chapitre, on supposera sans perte de généralité que $1 \leq m \leq n$.

On dit que deux sommets $u \in V(G)$ et $v \in V(G)$ sont **antipodaux** si et seulement si $d(u, v) = \text{diam}(G)$.

3.1 Nombre de broadcast domination du produit cartésien de deux graphes

Pour le nombre de broadcast domination d'un produit cartésien de deux chaînes $P_m \square P_n$, il a été déterminé par Erwin :

Théorème 3.1.1 [15, 16]. *Pour tous entiers m et n avec $2 \leq m \leq n$,*

$$\gamma_b(G_{m,n}) = \text{rad}(G_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Concernant le nombre de broadcast domination d'un produit cartésien de deux cycles $C_m \square C_n$, il a été déterminé par Bresar et Spacapan.

Théorème 3.1.2 [7].

Pour tous entiers m et n avec $2 \leq m \leq n$,

$$\gamma_b(C_m \square C_n) = \begin{cases} \text{rad}(C_m \square C_n) & \text{si } m \text{ ou } n \text{ est impair,} \\ \text{rad}(C_m \square C_n) - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où,

$$\text{rad}(C_m \square C_n) = \begin{cases} \frac{m+n}{2} & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont pairs,} \\ \frac{m+n-2}{2} & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont impairs,} \\ \frac{m+n-1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2 Calcul de β_b pour la classe des grilles $G_{m,n}$

Pour tout graphe $G = (V, E)$, la chaîne d'inégalités $i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq \beta_b(G)$ est vérifiée [15]. Du Théorème 2.5.2, cette chaîne peut être étendue en ajoutant une relation entre $\gamma_b(G)$ et $i_b(G)$, à savoir $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$.

Nous rappelons 2 résultats énoncés au Chapitre 2.

Théorème 2.5.2 [17].

Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G . Si $V^+ = \{v\}$ alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Par ailleurs, si $|V^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) f est un broadcast dominant et
- (ii) pour tout $v \in V^+$, $f(v) = \min\{d(v, u) : u \in V^+ \setminus \{v\}\} - 1$.

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute paire de sommets u et v de M , $d(u, v) = \text{diam}(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de G .

Proposition 2.5.1 [15].

Pour tout graphe G ,

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(\text{diam}(G) - 1) \geq 2(\text{diam}(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte.

Dans sa Ph.D.dissertation [16], D. Erwin a déterminé la valeur exacte de $\beta_b(P_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Il a prouvé que la borne inférieure donnée dans la Proposition 2.5.1 est atteinte.

Proposition 3.2.1 [16]. *Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\beta_b(P_n) = 2(n - 2).$$

Dans la suite, on supposera donc $m \geq 2$.

Lemme 3.2.2 [6] . *Soit f un broadcast indépendant sur G , si $\text{diam}(G) \geq 2$ et $|V^+| \leq 2$, alors*

$$f(V(G)) \leq 2(\text{diam}(G) - 1)$$

PREUVE :

Soit f un broadcast indépendant sur G . Si $|V^+| = 1$, c'est à dire V^+ contient un unique sommet broadcast x_1 , alors $f(V(G)) = f(x_1) \leq e(x_1) \leq \text{diam}(G) \leq 2(\text{diam}(G) - 1)$. Maintenant si $|V^+| = 2$ et $V^+ = \{x_1, x_2\}$, alors $f(x_1), f(x_2) \leq d(x_1, x_2) - 1$, et $f(V(G)) = f(x_1) + f(x_2) \leq 2(\text{diam}(x_1, x_2) - 1) \leq 2(\text{diam}(G) - 1)$.

□

Soit $G_{m,n}$, avec $2 \leq m \leq n$, une grille dont l'ensemble des sommets est noté par $V_{m,n}$. On note par $R(x) = i$, $1 \leq i \leq m$, la $i^{\text{ème}}$ ligne où le sommet x appartient et par $C(x) = j$, $1 \leq j \leq n$, la $j^{\text{ème}}$ colonne où le sommet x appartient. Pour un broadcast indépendant f , soit $V^+ = \{x_1, \dots, x_t\}$ où pour chaque i , $1 \leq i \leq t - 1$, $C(x_i) = k \leq C(x_{i+1}) = \ell$, $1 \leq k \leq \ell \leq n$.

Soit $R_+^i = \{v \in R^i : f(v) > 0\}$, $C_+^j = \{v \in C^j : f(v) > 0\}$, $R_+^{i_1, i_2} = R_+^{i_1} \cup \dots \cup R_+^{i_2}$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ et $C_+^{j_1, j_2} = C_+^{j_1} \cup \dots \cup C_+^{j_2}$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$.

Pour la détermination du $\beta_b(G_{m,n})$, nous utiliserons souvent la proposition suivante.

Proposition 3.2.3 [6] . *Soit f un broadcast indépendant sur $G_{m,n}$, $n \geq m+1$. Pour chaque entier k , $m \leq k \leq n - 1$,*

$$f(V_{m,n}) \leq \begin{cases} \beta_b(G_{m,k}) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v) & \text{si } |C_+^{1,k}| \geq 2, \\ \min\{d(x_1, u) : u \in C_+^{k+1,n}\} + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v) - 1 & \text{si } |C_+^{1,k}| = 1. \end{cases}$$

PREUVE :

Si $|C_+^{1,k}| \geq 2$, alors $f_{/_{H^{1,k}}}$ est un broadcast indépendant sur $H^{1,k}$. En effet, pour chaque sommet $v \in V(H^{1,k})$, $f(v) \leq \min\{d(v,u) : u \in C_+^{1,n} \setminus \{v\}\} - 1 \leq \min\{d(v,u) : u \in C_+^{1,k} \setminus \{v\}\} - 1 \leq e(v)$ dans $H^{1,k}$ et si aucun sommet broadcast ne f -domine un autre sommet broadcast dans $G_{m,n}$ alors la même propriété est préservée dans $H^{1,k}$.

Puisque $H^{1,k}$ est isomorphe à $G_{m,k}$, nous concluons que ,

$$f(V_{m,n}) = f_{/_{H^{1,k}}}(V(H^{1,k})) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v) \leq \beta_b(G_{m,k}) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v).$$

Si $|C_+^{1,k}| = 1$, alors $C_+^{1,k}$ est réduit à un sommet unique x_1 . D'où ,

$$f(V_{m,n}) = f(x_1) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v) \leq \min\{d(x_1, u) : u \in C_+^{k+1,n}\} - 1 + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v).$$

□

3.2.1 Calcul de $\beta_b(G_{m,n})$ pour $m = 2, 3, 4$

Il est facile de voir que $\text{diam}(G_{m,n}) = m + n - 2$. La borne dans la Proposition 2.5.1 n'est pas atteinte que pour les chaînes. Nous prouverons que les grilles à m lignes, où $m \leq 4$ satisfaisaient aussi cette propriété.

Proposition 3.2.4 [6] . *Si f est un β_b -broadcast de $G_{m,n}$ et $|V^+| \geq 2$, alors $C(x_1) = 1$ et $C(x_t) = n$.*

PREUVE :

Supposons le contraire, c'est à dire $C(x_1) > 1$ ou $C(x_t) < n$. Si $C(x_1) = k > 1$ et $x_1 = v_{i,k}$ pour un certain i , alors nous pouvons définir un nouveau broadcast indépendant g sur $G_{m,n}$ avec $g(v_{i,1}) = f(x_1) + k - 1$, $g(v_{i,k}) = 0$, et pour tous les autres sommets v , nous posons $g(v) = f(v)$. Le broadcast g est indépendant sur $G_{m,n}$ et a un coût $g(V_{m,n}) = f(V_{m,n}) + k - 1 > f(V_{m,n}) = \beta_b(G_{m,n})$, ce qui contredit l'optimalité de f . Par conséquent x_1 se trouve dans la première colonne et, de la même façon, x_t se trouve dans la dernière colonne de $G_{m,n}$.

□

Remarque 3.2.5 *Pour déterminer une borne supérieure de $\beta_b(G_{m,n})$, nous pouvons dorénavant, grâce à la Proposition 3.2.4, supposer dans les preuves que pour chaque broadcast indépendant maximum f avec l'ensemble des sommets broadcast $V^+ = \{x_1, \dots, x_t\}$, nous avons $1 = C(x_1) \leq \dots \leq C(x_t) = n$. Par ailleurs, le Lemme 3.2.2 combiné avec la Proposition 2.5.1 nous permet de dire que si $|V^+| = 1$, alors $\beta_b(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2$, et si $|V^+| = 2$, alors $\beta_b(G) = 2(\text{diam}(G) - 1)$ où x_1 et x_2 sont antipodaux. Aussi, nous supposons dans la suite que $|V^+| \geq 3$, dès que $\text{diam}(G_{m,n}) > 2$.*

Théorème 3.2.6 [6]. *Pour tout entier $n \geq 2$, $\beta_b(G_{2,n}) = 2(n - 1)$.*

PREUVE :

Il est facile de voir que $\beta_b(G_{2,2}) = 2$. Supposons, soit $n \geq 3$ et soit f un broadcast indépendant avec au moins trois sommets broadcasts. Les sommets x_1 et x_t de V^+ , qui se trouvent aux coins de $G_{2,n}$, f -dominent $2f(x_1) + 1$ et $2f(x_t) + 1$ sommets, mais tout autre sommet broadcast f -domine $4f(v)$ sommets. Par la définition d'une fonction broadcast indépendant, chaque sommet de la grille $G_{2,n}$ est f -dominé au plus trois fois, à l'exception des sommets broadcasts qui sont f -dominés exactement une fois. Il s'en suit, $2f(x_1) + 1 + 4(f(V_{2,n}) - f(x_1) - f(x_t)) + 2f(x_t) + 1 \leq 3(2n - t) + t$. D'où, $4f(V_{2,n}) \leq 6n - 2t - 2 + 2(f(x_1) + f(x_t))$. Puisque $t = |V^+| \geq 3$, la valeur de $f(x_1) + f(x_t)$ ne dépasse pas $n - 1$. Donc, $4f(V_{2,n}) \leq 8n - 10 < 8(n - 1)$, c'est à dire, $f(V_{2,n}) < 2(n - 1)$. Par la Proposition 2.5.1, $\beta_b(G_{2,n}) \geq 2(n - 1)$. Ainsi nous déduisons qu'un broadcast indépendant sur $G_{2,n}$, $n \geq 3$, est maximum si et seulement si $|V^+| = 2$ et les sommets d'un β_b -broadcast sont antipodaux.

□

Dans les démonstrations qui suivent, nous utilisons principalement des preuves par induction. Pour alléger la rédaction, chaque fois nous utilisons une inégalité qui résulte de l'hypothèse d'induction ou de la Proposition 3.2.3, nous ne spécifierons pas les raisons qui ont mené à cette inégalité.

Théorème 3.2.7 [6]. *Pour tout entier $n \geq 3$, $\beta_b(G_{3,n}) = 2n$.*

PREUVE :

De la Proposition 2.5.1, il suffit de prouver l'inégalité $\beta_b(G_{3,n}) \leq 2(\text{diam}(G) - 1) = 2n$. Nous procédons par induction sur n . Il est facile de voir que pour $n = 3$, $\beta_b(G_{3,3}) = 6$.

Supposons que le résultat est vrai pour toutes les grilles $G_{3,k}$, $3 \leq k < n$. Soit f un broadcast indépendant sur $G_{3,k}$ avec $|V^+| \geq 3$ et soit $\ell = f(x_t)$. Puisque $|V^+| \geq 3$, nous avons nécessairement $0 < \ell < n$. Si $\ell = n-1$, alors les seuls sommets qui ne peuvent pas entendre x_t sont au nombre de deux et ont forcément un poids égal à 1. D'où, $f(V_{3,n}) = 2 + f(v_{3,n}) = n+1 < 2n$.

Supposons maintenant que $\ell \leq n-2$. Nous considérons trois cas :

Cas 1. $x_t = v_{3,n}$ et $x_{t-1} \notin C^n$.

Si $\ell = 1$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-1}) + f(x_t) \leq 2(n-1) + 1 = 2n-1,$$

et si $2 \leq \ell \leq n-2$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-\ell+1}) + f(x_t) \leq 2(n-\ell+1) + \ell \leq 2n.$$

Cas 2. $x_t = v_{3,n}$ et $x_{t-1} \in C^n$.

Parce que les deux sommets x_{t-1} et x_t appartiennent à la même colonne, nous devons avoir $x_{t-1} = v_{1,n}$, $f(x_{t-1}) = f(x_t) = 1$ et $f(v_{2,n-1}) \leq 1$. Pour la grille 3×4 , c'est simple de voir que $f(V_{3,4}) \leq 6$. Soit maintenant $n \geq 5$.

Si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-2}) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{1,n}) + f(v_{3,n}) \leq 2(n-2) + 3 = 2n-1.$$

et si $|C_+^{1,n-2}| = 1$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq (n-1) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{1,n}) + f(v_{3,n}) \leq n+2.$$

Cas 3. $x_t = v_{2,n}$.

Si $\ell = n - 2$, alors la somme des valeurs des sommets $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{3,2}$ qui ne peuvent pas entendre le sommet broadcast $v_{2,n}$ est au plus 4, donc

$$f(V_{3,n}) \leq 4 + \ell = n + 2.$$

Si $\ell \leq n - 3$, alors $v_{2,n}$ f -domine $C^{n-\ell+1,n}$. Puisque $|C_+^{1,n-\ell}| \geq 2$, nous déduisons,

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-\ell}) + f(x_t) \leq 2(n - \ell) + \ell \leq 2n.$$

Donc dans tous les cas nous avons prouvé que $f(V_{3,n}) \leq 2n$. Il s'en suit $\beta_b(G_{3,n}) \leq 2n$.

□

Proposition 3.2.8 [6]. *Les sommets d'un β_b -broadcast de $G_{3,n}$ sont antipodaux.*

PREUVE :

D'après la Remarque 3.2.5, le résultat est vrai pour chaque β_b -broadcast de $G_{3,n}$ tel que $|V^+| = 2$, et par le Théorème 3.2.7, nous savons aussi que le coût de chaque broadcast indépendant est au plus $2n$. Donc, nous devons seulement vérifier qu'avec plus que deux sommets broadcasts, aucun broadcast indépendant n'a un coût qui atteint la borne $2(n - 1)$.

Soit f un broadcast indépendant sur $G_{3,n}$ tel que $|V^+| \geq 3$. De la preuve du Théorème 3.2.7, il suffit de voir que pour $f(v_{3,n}) = 2$ et $x_{t-1} \in C_+^{1,n-1}$, on a $f(V_{3,n}) < 2n$ prise. Nous considérons deux cas.

Cas 1. $f(v_{1,n-1}) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) \leq 2$.

Pour les petites valeurs de n , nous pouvons voir facilement que $f(V_{3,3}) \leq 4$, $f(V_{3,4}) \leq 6$ et $f(V_{3,5}) \leq 8$. Supposons maintenant que $n \geq 6$. De la Proposition 3.2.3 et le Théorème 3.2.7,

$$\begin{aligned} f(V_{3,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,n-3}} f(v) + (f(v_{1,n-1}) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2})) + f(v_{3,n}) \\ &\leq \beta_b(G_{3,n-3}) + 2 + 2 = 2n - 2 \end{aligned}$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{3,n}) = f(x_1) + (f(v_{1,n-1}) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2})) + f(v_{3,n}) \leq n + 4,$$

sinon.

Cas 2. $f(v_{1,n-1}) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) = 3$.

Ce cas implique $n \geq 5$, $f(v_{1,n-2}) = 3$ et aucun élément de V^+ ne se trouve sur C^{n-3} .

Pour $n = 5$, $f(V_{3,5}) = f(v_{3,1}) + f(v_{1,3}) + f(v_{3,5}) \leq 3 + 3 + 2 = 8$.

Pour $n = 6$, $f(V_{3,6}) = (f(v_{2,1}) + f(v_{3,1}) + f(v_{3,2})) + f(v_{1,4}) + f(v_{3,6}) \leq 4 + 3 + 2 = 9$.

Pour $n \geq 7$, nous avons de la Proposition 3.2.3 et le Théorème 3.2.7,

$$f(V_{3,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-4}} f(v) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-4}) + 3 + 2 = 2n - 3$$

si $|C_+^{1,n-4}| \geq 2$, et

$$f(V_{3,n}) = f(x_1) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{3,n}) \leq (n - 2) + 3 + 2 = n + 3,$$

sinon.

Donc, $f(V_{3,n}) < 2n$ pour tout entier $n \geq 3$.

□

Théorème 3.2.9 [6]. *Pour tout entier $n \geq 4$, $\beta_b(G_{4,n}) = 2(n + 1)$.*

PREUVE :

De la Proposition 2.5.1, il suffit de prouver que $\beta_b(G_{4,n}) \leq 2(n + 1)$. Nous utilisons encore l'induction sur n . Il est facilement de vérifier que $\beta_b(G_{4,4}) = 10$, $\beta_b(G_{4,5}) = 12$, $\beta_b(G_{4,6}) = 14$. Supposons que le résultat est vrai pour toutes les grilles $G_{4,k}$, $6 \leq k < n$ et soit f un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$ satisfaisant $|V^+| \geq 3$. Soit $\ell = f(x_t)$. Il est clair que $\ell \leq n$ sinon $|V^+| \leq 2$. Nous distinguons quatre cas.

Cas 1. $\ell \geq 4$.

Le sommet broadcast x_t f -domine $C^{n-\ell+3,n}$ et $|C_+^{1,n-\ell+2}| \geq 2$, donc

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-\ell+2}} f(v) + f(x_t) \leq \beta_b(G_{4,n-\ell+2}) + f(x_t) \leq 2(n - \ell + 3) + \ell \leq 2n + 2$$

Nous observons ici que si x_t ne se trouve pas au coin de $G_{4,n}$, la borne $2(n+1)$ peut être améliorée parce que nous aurions

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-\ell+1}} f(v) + f(x_t) \leq \beta_b(G_{4,n-\ell+1}) + f(x_t) \leq 2(n-\ell+2) + \ell \leq 2n.$$

Cas 2. $\ell = 3$.

Selon la position de x_t sur la dernière colonne de la grille $G_{m,n}$, seulement deux possibilités sont envisageables sans perte de généralité : (i) $x_t = v_{3,n}$ et (ii) $x_t = v_{4,n}$.

(i) Ce cas implique qu'il n'existe aucun sommet broadcast sur la colonne C^{n-1} . Alors $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-2}} f(v) + f(v_{3,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-2}) + f(v_{3,n}) \leq 2(n-1) + 3 = 2n + 1.$$

(ii) Ici, nous ne pouvons pas dire comme précédemment que $C_+^{n-1} = \emptyset$. Considérons en premier, le cas où $f(v_{1,n-1}) \neq 0$.

Nous avons soit $f(v_{1,n-1}) = 3$, auquel cas $v_{1,n-1}$ f -domine C^{n-2} , soit $f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) + f(v_{1,n-1}) \leq 2$. D'où,

$$\begin{aligned} f(V_{4,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,n-3}} f(v) + (f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) + f(v_{1,n-1})) + f(v_{4,n}) \\ &\leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 3 + 3 \leq 2(n-2) + 6 = 2n + 2 \end{aligned}$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$\begin{aligned} f(V_{4,n}) &= f(x_1) + (f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) + f(v_{1,n-1})) + f(v_{4,n}) \\ &\leq (n-1) + 3 + 3 = n + 5, \end{aligned}$$

sinon.

Pour le cas restant, c'est à dire $f(v_{1,n-1}) = 0$, nous procéderons comme dans (i).

Cas 3. $\ell = 2$.

Sans perte de généralité, nous pouvons examiner que trois possibilités pour la position de

x_t : (i) $x_t = v_{3,n}$ ou $x_t = v_{4,n}$ et $C(x_{t-1}) < n$, et (ii) $x_t = v_{4,n}$ et $C(x_{t-1}) = n$.

(i) Puisqu'il existe un seul sommet broadcast $v_{4,n}$ dans la colonne C^n et $|C_+^{1,n-1}| \geq 2$,

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-1}} f(v) + f(v_{3,n}) + f(v_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-1}) + 2 \leq 2n + 2$$

(ii) Le fait que $C_+^n = \{v_{1,n}, v_{4,n}\}$, nous obtenons inévitablement $f(v_{1,n-1}) = 0$ et $f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) \leq 2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(V_{4,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,n-2}} f(v) + f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{4,n}) \\ &\leq \beta_b(G_{4,n-2}) + 2 + 2 \leq 2(n-1) + 4 = 2n + 2 \end{aligned}$$

si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) = f(x_1) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{1,n}) + f(v_{4,n}) \leq (n-1) + 2 + 2 = n + 3,$$

sinon.

Cas 4. $\ell = 1$.

La somme des valeurs des sommets broadcast appartenant à C^n varie entre 1 et 4. Commentons avec le cas où la somme est au plus égale à 2. Nous avons

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-1}} f(v) + \sum_{v \in C_+^n} f(v) \leq \beta_b(G_{4,n-1}) + 2 \leq 2n + 2$$

si $|C_+^{1,n-1}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) = f(x_1) + \sum_{v \in C_+^n} f(v) \leq (n+1) + 2 = n + 3,$$

sinon.

Maintenant, si $\sum_{v \in C_+^n} f(v) \geq 3$, alors $f(v_{1,n}) = 2$, et nous revenons au cas 3(ii) pour conclure. D'où, dans les deux cas, nous avons prouvé que $f(V_{4,n}) \leq 2(n+1)$. Par conséquent, $\beta_b(G_{4,n}) \leq 2(n+1)$.

□

Proposition 3.2.10 [6]. *Les sommets broadcasts d'un β_b -broadcast de $G_{4,n}$ sont antipodaux.*

PREUVE :

Pour $n \leq 10$, un examen complet de toutes les possibilités de répartir les parts de la partition du nombre entier $2(n+1)$ sur les $4n$ sommets de la grille $G_{4,n}$, en tenant compte des conditions d'un broadcast indépendant, mène à deux choix seulement qui sont des sommets antipodaux. Supposons alors $n \geq 11$. Par la même idée de la proposition 3.2.8, nous avons besoin de vérifier le résultat que lorsqu'on a plus que deux sommets broadcasts. Soit f un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$ tel que $|V^+| \geq 3$, et soit $\ell = f(x_t)$, $0 < \ell \leq n$. De la preuve du Théorème 3.2.9, il suffit de considérer les cinq cas suivants :

Cas 1. $x_{t-1}, x_t \in C^n$ et $f(x_{t-1}) = f(x_t) = 1$.

Nous considérons deux sous cas :

Cas 1.1. $x_{t-1} = v_{1,n}$ et $x_t = v_{4,n}$.

C^{n-1} contient au plus un sommet broadcast dont la valeur ne dépasse pas 1. Donc,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-2}) + 1 + f(x_{t-1}) + f(x_t) = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) = f(x_1) + 1 + f(x_{t-1}) + f(x_t) \leq (n-2) + 3 = n + 1,$$

sinon.

Cas 1.2. $(x_{t-1}, x_t) \in \{(v_{1,n}, v_{3,n}), (v_{2,n}, v_{4,n})\}$.

Soit i le plus petit entier qui satisfait $|C_+^i| = \dots = |C_+^n| = 2$. Le cas $i = 1$ implique immédiatement que $f(V_{4,n}) = 2n$. Supposons que $i \geq 2$. Puisque la colonne est réduite à un élément $x_{t-2(n-i+1)}$ tel que $f(x_{t-2(n-i+1)}) \leq 1$, nous déduisons :

$$\text{Pour } i = 2, f(V_{4,n}) = f(x_1) + 2(n-1) \leq 1 + 2(n-1) = 2n - 1.$$

$$\text{Pour } i = 3, f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,2}} f(v) + 2(n-2) \leq 3 + 2(n-2) = 2n - 1.$$

$$\text{Pour } i = 4, f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,3}} f(v) + 2(n-3) \leq 5 + 2(n-3) = 2n - 1.$$

$$\text{Pour } i = 5, f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,4}} f(v) + 2(n-4) \leq 7 + 2(n-4) = 2n - 1.$$

Pour $i \geq 6$,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,i-2}) + 1 + 2(n-i+1) = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,i-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq f(x_1) + 1 + 2(n - i + 1) \leq (i - 1) + 1 + 2(n - i + 1) = 2n - i + 2 \leq 2n - 4,$$

sinon.

Cas 2. $f(v_{3,n}) = 2$ ou $f(v_{4,n}) = 2$ et $C(x_{t-1}) < n$.

Nous étudions chaque cas séparément .

Cas 2.1. $f(v_{3,n}) = 2$.

Soit i le plus petit entier tel que $f(x_{t-(n-i)}) = \dots = f(x_t) = 2$. Il est facile de voir que $i \geq n - 3$.

Si $i = n - 3$, alors $f(v_{3,n}) = f(v_{1,n-1}) = f(v_{4,n-2}) = f(v_{2,n-3}) = 2$ et $C_+^{n-4} = \emptyset$. D'où

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-5}) + 2(4) = 2n$$

si $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n - 3) + 2(4) = n + 5,$$

sinon.

Maintenant, si $i \geq n - 2$, alors $f(x_{t-(n-i+1)}) \leq 1$. Nous déduisons que

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,i-2}) + 1 + 2(n - i + 1) = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,i-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq i + 1 + 2(n - i + 1) = 2n - i + 3 \leq n + 5,$$

sinon.

Cas 2.2. $f(v_{4,n}) = 2$ et $C(x_{t-1}) < n$.

Si $f(v_{1,n-1}) + f(v_{2,n-1}) \leq 1$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-2}) + 1 + 2 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 1 + 2 = n + 2,$$

sinon.

Si $f(v_{1,n-1}) + f(v_{2,n-1}) \geq 2$, alors soit $f(v_{1,n-1}) = 2$, auquel cas, on revient au sous cas 2.1., avec $i \geq n-2$, ou $f(v_{1,n-1}) = 3$ (ou $f(v_{2,n-1}) = 2$), qui implique $C_+^{n-2} = \emptyset$ et par conséquent

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 3 + 2 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 3 + 2 = n + 4,$$

sinon.

Cas 3. $f(v_{4,n}) = 2$, $C(x_{t-1}) = n$ et $f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) = 2$.

Nous considérons deux sous cas :

Cas 3.1. $f(v_{1,n}) = 2$.

Les sommets broadcasts $v_{1,n}$ et $v_{4,n}$ f -dominent la colonne C_+^{n-1} . Nous avons soit $f(v_{2,n-2}) + f(v_{3,n-2}) \leq 1$, auquel cas

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 1 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 1 + 4 = n + 4,$$

sinon, ou $f(v_{2,n-2}) = 2$ (ou $f(v_{3,n-2}) = 2$) et nous pouvons continuer de la même manière que le sous cas 2.1., avec $i \geq n-5$, pour conclure.

Cas 3.2. $f(v_{2,n-1}) = f(v_{1,n}) = 1$.

Nous avons soit $f(v_{1,n-2}) + f(v_{3,n-2}) \leq 1$, cas auquel

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 1 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 5 = n + 4,$$

sinon, ou $f(v_{1,n-2}) = f(v_{3,n-2}) = 1$ et donc, nous pouvons continuer comme le sous cas 1.2. pour conclure.

Cas 4. $f(v_{4,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-1}) = 3$.

Sauf le sommet $v_{3,n-3}$ où sa valeur est au plus trois, les sommets broadcasts $v_{4,n}$ et $v_{1,n-1}$ f -dominent tous les sommets de $C^{n-3,n-2}$.

Si $f(v_{3,n-3}) \leq 1$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-4}) + 1 + 6 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-4}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n - 1) + 7 = n + 6,$$

sinon.

Si $f(v_{3,n-3}) \geq 2$, alors $C^{n-4} = \emptyset$ et

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-5}) + 3 + 6 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n - 3) + 3 + 6 = n + 6,$$

sinon.

Cas 5. $f(v_{4,n}) = 4$.

La valeur du sommet $v_{1,n-2}$ est au plus 4, et le sommet broadcast $v_{4,n}$ f -domine tous les sommets de $C^{n-1,n}$. Si $f(v_{1,n-2}) \leq 1$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 1 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n + 1) + 1 + 4 = n + 6,$$

sinon.

Si $2 \leq f(v_{1,n-2}) \leq 3$, alors $C^{n-3} = \emptyset$ et par conséquent,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-4}) + 3 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-4}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n - 2) + 5 = n + 3,$$

sinon.

Si $f(v_{1,n-2}) = 4$, alors $C_+^{n-4,n-3} = \emptyset$ et donc,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-5}) + 4 + 4 = 2n$$

si $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-2) + 4 + 4 = n+6,$$

sinon.

Ainsi, dans tous les cas, nous avons prouvé que $f(V_{4,n}) \leq 2n+1$. Comme $\beta_b(G_{4,n}) = 2(n+1)$, nous pouvons dire que β_b -broadcast a exactement deux sommets broadcasts qui sont nécessairement antipodaux.

□

Avec au moins trois sommets broadcasts, nous savons maintenant que chaque broadcast indépendant a un coût au plus $2n+1$. Pour $n=7$ et $f(V_{4,n}) = 2 \times 7 + 1 = 15$, nous avons soit $|V^+| = 2$ et les deux sommets broadcasts sont antipodaux, ou $V^+ = \{x_1, x_2, x_3\}$, où $f(x_i) = 5$ pour $x_i \in \{v_{1,4}, v_{4,1}, v_{4,7}\}$ (ou $x_i \in \{v_{4,4}, v_{1,1}, v_{1,7}\}$) et $f(x_i) = 0$, sinon.

Proposition 3.2.11 [6]. *Soit $n \neq 7$. les sommets broadcasts d'un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$ de coût $2n+1$, sont antipodaux.*

PREUVE :

Soit n un entier, $n \geq 4$. Pour $n = 4, 5, 6$, nous pouvons vérifier que le résultat est vrai par une investigation de toutes les possibilités. Soit f un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$, $n \geq 8$. Nous prouvons le résultat avec $|V^+| \geq 3$, en particulier nous montrerons qu'avec trois sommets broadcasts, f a un coût au plus égal à $2n$. Supposons le contraire, c'est à dire $f(V_{4,n}) = 2n+1$. Des preuves du Théorème 3.2.9 et de la Proposition 3.2.10, nous ferons l'étude que pour les cas suivants.

Soit $\ell = f(x_t)$, $0 < \ell \leq n$.

Cas 1. $x_{t-1}, x_t \in C^n$ et $f(x_{t-1}) = f(x_t) = 1$.

Soit i le plus petit nombre entier, $i \geq 6$, qui satisfait $|C_+^i| = \dots = |C_+^n| = 2$, $|C_+^{1,i-2}| \geq 2$ et $f(x_{t-2(n-i+1)}) = 1$. Comme $f|_{H^{1,i-2}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,i-2}$, et de la Proposition

3.2.10, on obtient $(f(v_{1,1}), f(v_{4,i-2}))$ (ou $(f(v_{4,1}), f(v_{1,i-2}))$) = $(i-1, i-1)$, qui implique $i-1 \leq 2$, une contradiction.

Cas 2. $f(v_{3,n}) = 2$ ou $f(v_{4,n}) = 2$ et $C(x_{t-1}) < n$.

Si $f(v_{3,n}) = 2, f(x_{t-(n-i+1)}) = 1, i \geq n-2$ et $|C_+^{1,i-2}| \geq 2$, où i est le plus petit nombre entier tel que $f(x_{t-(n-i)}) = \dots = f(x_t) = 2$, alors $f_{/H^{1,i-2}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,i-2}$ et $(f(v_{1,1}), f(v_{4,i-2}))$ (ou $(f(v_{4,1}), f(v_{1,i-2}))$) = $(i-1, i-1)$, qui implique $i-1 \leq 2$, une contradiction.

Si $f(v_{4,n}) = 2, f(v_{1,n-1}) = 1$ (resp. 3) et $|C_+^{1,n-2}|$ (resp. $|C_+^{1,n-3}|$) ≥ 2 , nous continuons comme précédemment en remplaçant i par n (resp. $n-1$)

Cas 3. $f(v_{4,n}) = 2, C(x_{t-1}) = n$ et $f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) = 2$.

$f(v_{1,n}) = 2, f(v_{2,n-2}) + f(v_{3,n-2}) = 1$ (resp. $f(v_{1,n}) = f(v_{2,n-1}) = 1$), $f(v_{1,n-2}) + f(v_{3,n-2}) = 1$ et $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$ mènent à $f_{/H^{1,n-3}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,n-3}$ et $(f(v_{1,1}) + f(v_{4,n-3}))$ (resp. $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-3}))$) = $(n-2, n-2)$, impliquant $n-2 \leq 2$, une contradiction.

Cas 4. $f(v_{3,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-2}) = 3$, ou $f(v_{4,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-1}) = 3$.

Si $f(v_{3,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-2}) = 3$, alors $f_{/H^{1,n-3}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,n-3}$ et $(f(v_{1,1}) + f(v_{4,n-3}))$ (ou $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-3}))$) = $(n-2, n-2)$, impliquant $n-2 \leq 3$, une contradiction.

Si $f(v_{4,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-1}) = 3$, alors deux possibilités peuvent se produire :

(i) $f(v_{3,n-3}) = 1$ et $|C_+^{1,n-4}| \geq 2$, ou (ii) $f(v_{3,n-3}) \geq 2$ et $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$.

(i) La fonction $f_{/H^{1,n-4}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,n-4}$ et $(f(v_{1,1}) + f(v_{4,n-4}))$ (ou $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-4}))$) = $(n-3, n-3)$, impliquant $n-3 \leq 2$, une contradiction.

(ii) La fonction $f_{/H^{1,n-5}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,n-5}$ et $(f(v_{1,1}) + f(v_{4,n-5}))$ (ou $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-5}))$) = $(n-4, n-4)$, impliquant $n-4 \leq 3$, encore une contradiction.

Cas 5. $f(v_{4,n}) = 4$ ou $f(v_{4,n}) = 5$.

Si $f(v_{4,n}) = 4, f(v_{1,n-2}) = 1$ et $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$ (resp. $f(v_{4,n}) = 5$), alors $f_{/H^{1,n-3}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,n-3}$ et $(f(v_{1,1}) + f(v_{4,n-3}))$ (ou $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-3}))$) = $(n-2, n-2)$, impliquant $n-2 \leq 2$, (resp. 5), une contradiction.

Si $f(v_{4,n}) = 4, f(v_{1,n-2}) = 3$ et $|C_+^{1,n-4}| \geq 2$, alors $f_{/H^{1,n-4}}$ est un β_b -broadcast sur $H^{1,n-4}$

et $(f(v_{1,1}) + f(v_{4,n-4}))$ (ou $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-4}))$) = $(n - 3, n - 3)$, impliquant $n - 3 \leq 3$, une contradiction.

D'où il n'existe pas de broadcast indépendant avec trois sommets broadcasts et de coût égal à $2n + 1$. Par conséquent, $|V^+| = 2$ et les sommets broadcasts sont nécessairement antipodaux.

□

3.2.2 Calcul de $\beta_b(G_{m,n})$ pour $m \geq 5$

Définissons les broadcasts f sur $G_{5,5}$ (voir FIG.3.1 (a)) et g sur $G_{5,6}$ (voir FIG.3.1 (b)) par

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } v \in \{v_{1,1}, v_{1,5}, v_{3,3}, v_{5,1}, v_{5,5}\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } v \in \{v_{1,6}, v_{3,4}, v_{5,2}, v_{5,6}\}, \\ 4 & \text{si } v = v_{1,1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

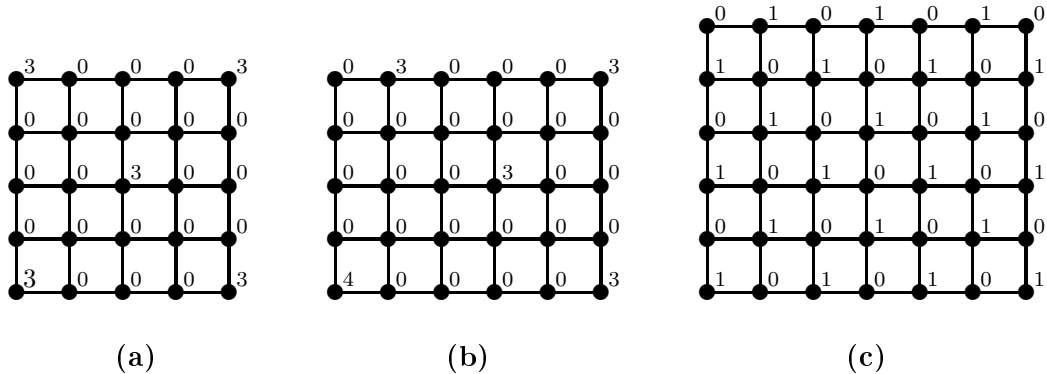


FIGURE 3.1 – Les grilles

La fonction f (resp. g) est un β_b -broadcast de $G_{5,5}$ (resp. $G_{5,6}$) de coût égal à 15 (resp. 16). Pour les autres valeurs de m et n , à savoir $5 \leq m \leq n$, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2.12 [6].

Pour tous nombres entiers m et n , $5 \leq m \leq n$, $(m, n) \neq (5, 5), (5, 6)$,

$$\beta_b(G_{m,n}) = \lceil \frac{mn}{2} \rceil.$$

PREUVE :

Soit f le broadcast sur $G_{m,n}$ défini par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $5 \leq m \leq n$ et $(m, n) \neq (5, 5), (5, 6)$ (voir $G_{6,7}$ dans FIG.3.1 (c)).

Ainsi définie f est un broadcast dominant de coût égal à $\lceil \frac{mn}{2} \rceil$, d'où $\beta_b(G_{m,n}) \geq \lceil \frac{mn}{2} \rceil$. Maintenant, nous prouvons l'inégalité dans l'autre sens. Pour cela, nous utilisons l'induction sur $k = m + n$, $m \leq n$. Le résultat peut être vérifié directement pour $(m, n) = (5, 7)$ ou $(m, n) = (6, 6)$. Supposons que le résultat est vrai pour toutes les grilles $G_{m,n}$, avec $m + n < k$, $5 \leq m \leq n$, et soit $G_{m,n}$ le graphe avec $m + n = k$. Soit f un broadcast indépendant sur $G_{m,n}$ avec au moins trois sommets broadcasts. Nous distinguons trois cas :

Cas 1. $\sum_{v \in C_+^{n-3,n}} f(v) \leq 2m$.

Nous considérons deux sous cas :

Cas 1.1. $|C_+^{1,n-4}| = 1$.

L'existence ou non des sommets broadcasts sur les deux colonnes consecutives $C^{n-3,n-2}$, nous incite à étudier les deux possibilités suivantes :

(i) $C^{n-3,n-2} = \emptyset$ et (ii) $C^{n-3,n-2} \neq \emptyset$.

(i) Ce cas implique que les deux dernières colonnes contiennent au moins deux sommets broadcasts. Alors $f|_{H^{n-1,n}}$ est un broadcast indépendant sur le sous graphe $H^{n-1,n}$ qui est isomorphe à $G_{2,m}$. Par conséquent, la valeur de ses deux colonnes est au plus $\beta_b(G_{2,m}) = 2(m-1)$. De plus, $|V^+| \geq 3$ implique que $f(x_1) \leq (\text{diam}(G_{m,n}) - 1) - 1 = m + n - 4$. Ainsi,

$$f(V_{m,n}) = f(x_1) + \sum_{v \in C_+^{n-1,n}} f(v) \leq m + n - 4 + 2(m - 1) = 3m + n - 6 \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil.$$

(ii) Ici $f(x_1)$ est égal au plus $d(x_{1,1}, x_{m,n-3}) - 1$ (ou $d(x_{m,1}, x_{1,n-3}) - 1$), car sinon chaque sommet de $C^{n-3, n-2}$ entend un broadcast de x_1 , une contradiction. Donc $f(x_1) \leq m+n-5$. A ce stade là, nous observons que si $f(x_1) = m+n-5$, alors nécessairement x_1 est un sommet de coin du la grille, c'est à dire $x_1 = v_{m,1}$, et parmi les six sommets $v_{1,n-2}, v_{1,n-1}, v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{2,n}$ et $v_{3,n}$, non dominés par x_1 , il existe au moins deux sommets broadcasts. En regardant toutes les possibilités, nous trouvons

$$f(v_{1,n-2}) + f(v_{1,n-1}) + f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{2,n}) + f(v_{3,n}) \leq 6.$$

Par conséquent,

$$f(V_{m,n}) \leq (m+n-5) + 6 = m+n+1,$$

si $f(x_1) = m+n-5$, et

$$f(V_{m,n}) \leq (m+n-6) + 2m = 3m+n-6,$$

sinon.

D'où, dans les deux cas, nous obtenons $f(V_{m,n}) \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil$.

Cas 1.2. $|C_+^{1, n-4}| \geq 2$.

Si $m \leq n-4$, alors nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} f(V_{m,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1, n-4}} f(v) + \sum_{v \in C_+^{n-3, n}} f(v) \leq \beta_b(G_{m, n-4}) + 2m \\ &\leq \lceil \frac{m(n-4)}{2} \rceil + 2m = \lceil \frac{mn}{2} \rceil. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $n-3 \leq m \leq n$. En regardant attentivement les petites valeurs de n , $n=7, 8$, nous trouvons $f(V_{m,n}) \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil$. Soit alors $n \geq 9$. Puisque $f/H^{1, n-4}$ est un broadcast indépendant sur le sous graphe $H^{1, n-4}$ et $H^{1, n-4}$ est isomorphe à $G_{n-4, m}$, nous concluons que

$$\sum_{v \in C_+^{1, n-4}} f(v) \leq \beta_b(G_{n-4, m}) \leq \lceil \frac{(n-4)m}{2} \rceil.$$

D'où,

$$f(V_{m,n}) \leq \lceil \frac{(n-4)m}{2} \rceil + 2m = \lceil \frac{mn}{2} \rceil.$$

Cas 2. $\sum_{v \in C_+^{n-3,n}} f(v) \geq 2m + 1$ et $m \neq 7$.

La fonction $f/H^{n-3,n}$ est un broadcast indépendant sur $H^{n-3,n}$. Puisque $H^{n-3,n}$ est isomorphe à $G_{4,m}$, $\sum_{v \in C_+^{n-3,n}} f(v) \in \{2m + 1, 2m + 2\}$.

Ainsi, la Proposition 3.2.10 et la Proposition 3.2.11 permettent d'affirmer que les quatres dernières colonnes contiennent seulement deux sommets broadcasts qui sont soit $v_{m,n-3}$ et $v_{1,n}$ soit $v_{1,n-3}$ et $v_{m,n}$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $C_+^{n-3,n} = \{v_{1,n}, v_{m,n-3}\}$.

Suivant la largeur de la $G_{m,n}$, nous distinguons deux sous cas :

Cas 2.1. $m \leq n - 5$.

Les éléments de $C_+^{n-3,n}$ f -dominant C^{n-4} . Alors soit $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$, auquel cas

$$\begin{aligned} f(V_{m,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,n-5}} f(v) + \sum_{v \in C_+^{n-3,n}} f(v) \leq \beta_b(G_{m,n-5}) + 2m + 2 \\ &\leq \lceil \frac{m(n-5)}{2} \rceil + 2m + 2 \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil, \end{aligned}$$

ou $|C_+^{1,n-5}| = 1$, auquel cas

$$\begin{aligned} f(V_{m,n}) &= f(x_1) + \sum_{v \in C_+^{n-3,n}} f(v) \leq (d(v_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1, 1}, v_{1,n}) - 1) + 2m + 2 \\ &= n - 4 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2m + 2 \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil. \end{aligned}$$

Cas 2.2. $n - 4 \leq m \leq n$.

Nous savons que le couple $(f(v_{1,n}), f(v_{m,n-3}))$ a seulement trois choix, qui sont $(m+1, m)$, $(m, m+1)$ ou $(m+1, m+1)$. Commençons par prouver que, les sommets broadcasts $v_{1,n}$ et $v_{m,n-3}$ f -dominant non seulement la dernière ligne R^m mais aussi $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ colonnes consécutives $C^{n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-3, n-3}$. Pour ceci, soit $v_{m,i}$ un élément de R^m . Nous avons $d(v_{m,i}, v_{m,n-3}) = n - 3 - i \leq n - 4 \leq m$. Alors $d(v_{m,i}, v_{m,n-3}) \leq f(v_{m,n-3})$ et $v_{m,i}$ entend un broadcast de $v_{m,n-3}$. Maintenant soit $v_{i,j}$

un élément quelconque de $C^{n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-3, n-3}$, nous supposons en premier que $f(v_{1,n}) = m + 1$ et $f(v_{m,n-3}) = m$.

Si $i \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, alors

$$\begin{aligned} d(v_{i,j}, v_{m,n-3}) &= d(v_{i,j}, v_{m,j}) + d(v_{m,j}, v_{m,n-3}) \\ &= (m - i) + (n - 3 - j) \leq m - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + n - 3 - (n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 3) \\ &= m = f(v_{m,n-3}) \end{aligned}$$

Si $i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$, alors

$$\begin{aligned} d(v_{i,j}, v_{1,n}) &= d(v_{i,j}, v_{1,j}) + d(v_{1,j}, v_{1,n}) = (i - 1) + (n - j) \\ &\leq (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2) + n - (n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 3) = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq m + 1 = f(v_{1,n}). \end{aligned}$$

Par conséquent $v_{i,j}$ entend un broadcast de $v_{m,n-3}$ ou $v_{1,n}$ pour chaque entier i , et pour tout j , $n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 3 \leq n - 3$.

Un argument analogue mène au même résultat quand $(f(v_{1,m}), f(v_{m,n-3})) = (m, m + 1)$ ou $(m + 1, m + 1)$. Observons d'abord que le nombre entier $n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ doit être plus grand que 4, car sinon la première colonne de la grille $G_{m,n}$ ne contiendrait aucun sommet broadcast.

Si $|C^{1, n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-4}| = 1$, alors V^+ est réduit à trois éléments et

$$f(V_{m,n}) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leq (n - 4 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor) + 2m + 2 \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil.$$

Si $|C^{1, n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-4}| \geq 2$, alors $n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \geq 6$. Nous divisons le reste de la preuve en :

(i) $n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 6$, (ii) $n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 7$, (iii) $n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 8$, (iv) $n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \geq 9$.

(i) Le fait que $v_{m,n-3}$ et $v_{1,n}$ f -dominent $C^{3, n-3} \cup R^m$ et $|C_+^{1,2}| \geq 2$, la restriction de f aux deux premières colonnes et les $m - 1$ premières lignes est un broadcast indépendant sur le sous graphe induit par ces éléments. Puisque ce sous graphe est isomorphe à $G_{2, m-1}$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} f(V_{m,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,2}} f(v) + 2m + 2 \leq \beta_b(G_{2, m-1}) + 2m + 2 \\ &= 2(m - 2) + 2m + 2 = 4m - 2 \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil. \end{aligned}$$

(ii) et (iii) De manière semblable à (i), nous avons

$$\begin{aligned} f(V_{m,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,3}} f(v) + 2m + 2 \leq \beta_b(G_{3,m-1}) + 2m + 2 \\ &= 2(m-1) + 2m + 2 = 4m \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil \end{aligned}$$

si $n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 7$, et

$$\begin{aligned} f(V_{m,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,4}} f(v) + 2m + 2 \leq \beta_b(G_{4,m-1}) + 2m + 2 \\ &= 2m + 2m + 2 = 4m + 2 \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil \end{aligned}$$

Si $n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 8$.

(iv) Puisque le sous graphe $H^{1,n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-4} - V(R^m)$ est isomorphe à $G_{n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-4,m-1}$, où $(n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 4) + (m-1) < m+n$ et $5 \leq n - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 4 \leq m-1$, nous pouvons utiliser notre hypothèse d'induction pour obtenir

$$\sum_{v \in C_+^{1,n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-4}} f(v) \leq \lceil \frac{(m-1)(n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-4)}{2} \rceil.$$

Il s'ensuit

$$f(V_{m,n}) \leq \lceil \frac{(m-1)(n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-4)}{2} \rceil + 2m + 2 \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil.$$

Cas 3. $\sum_{v \in C_+^{n-3,n}} f(v) \geq 15$ et $m = 7$.

Si $(v_{1,n}, v_{m,n-3})$ (ou $(v_{1,n-3}, v_{m,n})$) $\in \{(7, 8), (8, 8), (8, 7)\}$, alors nous continuons comme au Cas 2.

Supposons que nous ne sommes pas dans ce cas, alors, nécessairement

$(v_{n-3,n}, v_{4,n}, v_{7,n-3}) = (5, 5, 5)$ ou $(v_{1,n}, v_{4,n-3}, v_{7,n}) = (5, 5, 5)$. Ensemble, ces trois sommets broadcasts f -dominent les six dernières colonnes. Il s'ensuit

$$f(V_{7,n}) \leq \lceil \frac{7(n-6)}{2} \rceil + 15 = \lceil \frac{7n-2}{2} \rceil \leq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$$

si $|C_+^{1,n-7}| \geq 2$, et

$$f(V_{7,n}) = f(x_1) + 15 \leq (n - 2) + 15 \leq \lceil \frac{7n}{2} \rceil,$$

sinon.

□

Remarque 3.2.13 *On a $\beta_b(P_3 \square P_4) = 8 = \beta_b(P_3) \times \beta_b(P_4) = 2 \times 4$, et $\beta_b(P_4 \square P_5) = 12 < \beta_b(P_4) \times \beta_b(P_5) = 4 \times 6$. Par contre, $\beta_b(P_2 \square P_4) = 6 > \beta_b(P_2) \times \beta_b(P_4) = 1 \times 4$. D'où $\beta_b(G \square H)$ et $\beta_b(G) \times \beta_b(H)$ sont incomparables.*

CONCLUSION

Le travail qui a été réalisé dans ce mémoire concerne l'étude du nombre de broadcast indépendance β_b dans les grilles.

Nous avons déterminé les valeurs de β_b pour la classe des grilles $G_{m,n}$, $m \leq n$. Nous avons montré que $\beta_b(G_{m,n}) = 2(m + n - 3)$ si $m \in \{2, 3, 4\}$ et $\beta_b(G_{m,n}) = \lceil \frac{mn}{2} \rceil$ sinon.

En conclusion, il serait intéressant de traiter les questions suivantes qui peuvent être considérées comme une suite de notre travail :

1. Détermination de β_b pour le graphe produit cartésien de deux cycles, et d'un cycle par une chaîne.
2. Détermination de β_b pour le graphe produit tensoriel, et pour le graphe produit fort de deux chaînes.
3. Détermination de β_b pour les trois produits (cartésien, tensoriel, et fort) de deux graphes quelconques, respectivement.
4. Détermination soit des valeurs exactes soit des bornes pour β_b pour d'autres classes de graphes.
5. Etude de la complexité algorithmique de β_b .
6. Caractérisations des graphes pour lesquels :
 - (i) $\beta_b(G \square H) = \beta_b(G) \times \beta_b(H)$.
 - (ii) $\beta_b(G \square H) < \beta_b(G) \times \beta_b(H)$.
 - (iii) $\beta_b(G \square H) > \beta_b(G) \times \beta_b(H)$.

REFERENCES

- [1] W.W. Ball Rouse, *Mathematical recreation and problems of past and present times*, MacMillan, London, 1892.
- [2] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 2, Dunod, Paris, 1958.
- [3] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Paris Dunod, 1970.
- [4] J. R. S. Blair, P. Heggenes, S. Horton, and F. Manne, *Broadcast domination algorithms for interval graphs, series-parallel graphs, and trees*. Congressus Numerantium, 169 :5577, 2004.
- [5] K. S. Booth and J. H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*, SIAM J. Comput. pp, 11 :191-199, 1982.
- [6] I. Bouchemakh et M. Zemir, *On the broadcast independent number in the grid graphs*, Graphs and Combinatorics, DOI 10. 1007/s00373-012-1253-0, 2012.
- [7] B. Bresar and S. Spacapan, *Broadcast domination of products of graphs*, University of Maribor, Slovenia. March 12, 2006.
- [8] E. J. Cockayne, S. E. Goodman, and S. T. Hedetniemi, *A linear algorithm for the domination number of a tree*. Inform. Process. Lett. 4 :41-44, 1975.
- [9] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination*, Networks, 7 :247-261, 1977.
- [10] E.J. Cockayne, S. Herke, C.M. Mynhardt, *Broadcasts and domination in trees*, Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Discrete Mathematics (2009).
- [11] S. A. Cook, *The complexity of theorem proving procedures*; Proc.3rd ACM Symp. on Theory of computing, pp. 151-158, 1971.
- [12] J. Dabney, B. C. Dean, S. T. Hedetniemi, *A Linear-Time Algorithm for Broadcast Domination in a Tree*, Department of Computer Science, Clemson University, August 21, 2006.

- [13] C.F. De Jaenisch, *Trait des applications de l'analyse mathématique au jeu des Echecs*, Petrograd, 1862.
- [14] A. K. Dewdney, *Fast Turing reductions between problems in NP*, Tech. Rep. 71, Dept. of Computer Science, University of West Ontario, 1981.
- [15] J. E. Dunbar, D. J. Erwin, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Broadcasts in graphs*, Discrete Applied Mathematics, 154 :59-75, 2006.
- [16] D. J. Erwin, *Cost Domination in Graphs*, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.
- [17] D. J. Erwin, *Dominating broadcast in graphs*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 42 :89-105, 2004.
- [18] M. Farber and J. M. Keil, *Domination in permutation graphs*, J. Algorithms, pp. 6 :309-321, 1985.
- [19] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability : A Guid to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Co., 1978.
- [20] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs : Advanced Topics*, Marcel Dekker, NewYork, 1998.
- [21] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [22] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*. Discrete Mathematics 86 :3-9, 1990.
- [23] P. Heggernes and D. Lokshantov, *Optimal broadcast domination of arbitrary graphs in polynomial time*, Discrete Mathematics 306 :3267-3280, 2006.
- [24] S. Herke, *Dominating broadcasts in graphs*, Master's dissertation, University of Victoria, 2009.
- [25] S. Herke, C.M. Mynhardt, *Radial trees*, Discrete Math. 309 :5950-5962, 2009.
- [26] O. Ore, *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 38 (Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1962.
- [27] C. H. Papadimitriou, *Computational complexity*. Addison - wesly publishing company, 1994.
- [28] R. Sahbi, *Nombre de broadcast domination dans les arbres*. Mémoire de magister, US-THB. 2009.

- [29] M. Sakarovitch, *Optimisation Combinatoire*. Université scientifique et médicale, institut national polytechnique de Grenoble, ENSIMAG, 1983.
- [30] S.M. Seager, *Dominating broadcasts of caterpillars*, *Ars Combin.* 88 :307-319, 2008.
- [31] A.M. Yaglom and A.M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solution, In volume 1, Combinatorial analyse and probability theory*, San Fransisco, 1964, Holden-Day.