

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE BLIDA 1**

**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales**

**Département Construction**



**MEMOIRE**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme du Master en Aéronautique

Option : Structures Aéronautiques

THEME :

**Analyse du flottement supersonique d'une plaque  
FGM basée sur la théorie de déformation du premier  
ordre.**

❖ *Présenté par :*

✓ **Hicham BEZZOU & Khaled OUARI**

❖ *Encadré par :*

✓ **Dr Amale MAHI (MC Université Blida 1)**

## Résumé

Les matériaux à gradient fonctionnel sont de nouveaux matériaux qui s'inscrivent dans la gamme des matériaux composites. Ils ont vu le jour dans les années 1984-1985. Ils présentent une variation continue des propriétés thermomécaniques selon une fonction donnée suivant une ou plusieurs directions. Ils sont généralement constitués de métal et de céramique alliant ainsi les bonnes propriétés de chacun des deux constituants. L'un des principaux avantages que présentent ces matériaux est la possibilité de réduire les contraintes résiduelles et les contraintes thermiques, ce qui permet d'augmenter la résistance et la ténacité des structures ou des éléments structuraux constitués par cette nouvelle gamme de matériaux composites. Ces caractéristiques ont trouvé leur application dans les éléments de structures aéronautiques et spatiales qui sont sujets à des environnements de fonctionnements thermiques et mécaniques sévères. Le but recherché dans cette étude est tout d'abord, se familiariser et comprendre la nature et les caractéristiques des matériaux FGM puis déterminer leurs propriétés en fonction des coordonnées du point considéré et de la fonction de distribution choisie. La modélisation de ces matériaux est faite grâce à la théorie 2D du premier ordre pour décrire le champ des déplacements et des rotations applicable aux plaques minces et moyennement épaisses. En se servant des énergies cinétique et potentielle, ainsi que des travaux des forces aérodynamiques quasi-statiques en régime supersonique, le principe de Hamilton est utilisé pour établir les équations de mouvement d'une plaque FGM sur appuis simples plongée dans un écoulement stationnaire supersonique. Ces dernières sont par la suite résolues par les méthodes analytiques de Navier et de Bubnov-Galerkin pour déterminer le comportement du système. La comparaison des résultats obtenus avec ceux qui sont publiés est faite pour démontrer la validité du code de calcul élaboré. Les résultats représentant les fréquences naturelles, pressions aérodynamiques critiques et fréquence critique de flottement sont commentés et des graphes appropriés sont tracés pour montrer l'influence des paramètres considérés dans cette étude.

## ملخص

تقع المواد ذات التدرج الوظيفي ضمن مجموعة من المواد المركبة الجديدة. ولدت في سنوات 1984-1985. تظهر هذه المواد تغيرا مستمرا في الخصائص الميكانيكية الحرارية وفقا لوظيفة معينة في اتجاه واحد أو أكثر. فهي تتكون عادة من المعدن والسيراميك وبذلك يجمع بين الخصائص الجيدة من كلا العنصرين. واحدة من المزايا الرئيسية لهذه المواد هو إمكانية خفض الضغوط المتبقية والضغوط الحرارية، مما يزيد من قوة وصلابة الهياكل أو العناصر الهيكلية التي تشكلها هذه المجموعة الجديدة من المواد المركبة. وقد وجدت هذه الميزات تطبيقها في عناصر الهياكل الفضائية التي تخضع لبيئات حرارية وميكانيكية شديدة. والهدف من هذه الدراسة هو أولا، تعريف وفهم طبيعة وخصائص المواد ذات التدرج الوظيفي وتحديد خصائصها وفقا لإحداثيات النقطة المعتبرة ودالة التوزيع المحددة. يتم إجراء نمذجة هذه المواد من خلال نظرية 2-D من الدرجة الاولى لوصف مجال التحرك والتشريد التي تنطبق على لوحات رقيقة ومعتدلة السماكة. باستخدام الطاقة الحركية والكامنة، وكذلك عمل القوات الهوائية الشبه ثابتة في النظام الخارق للصوت، ويستخدم مبدأ Hamilton لإنشاء معادلات الحركة للوحة ذات المواد التدرج الوظيفي التي دعمت ببساطة ومغمورة في تدفق هوائي مستمر خارق لسرعة الصوت. يتم حل هذه المعادلات في وقت لاحق عن طريق الأساليب التحليلية Navier و Bubnov-Galerkin لتحديد الترددات الطبيعية للنظام و كذلك تردد الاهتزازات. مقارنة النتائج مع تلك التي نشرت في هذا الصدد لإثبات صحة رمز الحساب المطور. وستمثل نتائج الترددات الطبيعية، والضغوط الهوائية الحرجة وتردد الرفرفة الحرج ويتم رسمها في منحنيات بيانية مناسبة والنقاش عليها لإظهار تأثير المعلمات المعتبرة في هذه الدراسة.

## Summary

Functionally graded materials are new materials that fall within the range of composite materials. They were born in the years 1984-1985. They exhibit a continuous variation of the thermomechanical properties according to a given law in one or more directions. They commonly consist of metal and ceramic and combines the good properties of both components. One of the main advantages of these materials is the possibility of reducing residual stresses and thermal stresses, which increases the strength and toughness of structures or structural elements formed by this new range of composite materials. These features have found their application in the elements of aeronautical and aerospace structures that are subject to a severe thermal and mechanical environments. The aim in this study is first, to familiarize and understand the nature and characteristics of FGM and determine their properties according to the coordinates of the point considered and the selected distribution law. The modeling of these materials is made through the first shear deformations plate theory, which is a 2-D theory, to describe the field of displacements and rotations applicable to thin and moderately thick plates. By using the kinetic and potential energy, as well as the work done by the quasi-static aerodynamic forces in supersonic regime, Hamilton's principle is used to establish the equations of motion of a simply supported FGM plate immersed in a supersonic steady flow. These are subsequently resolved by the analytical methods Navier and Bubnov-Galerkin to determine the behavior of the system. The results are compared with those published in order to demonstrate the validity of the developed computational algorithm. The results representing the natural frequencies, critical aerodynamic pressures and critical flutter frequency are discussed and appropriate graphs are drawn to show the influence of the parameters considered in this study.

# Remerciements

Nous adressons nos vifs remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui nous ont permis d'évoluer dans la réflexion et l'élaboration de ce travail.

Plus particulièrement, nous tenons à remercier :

- ❖ Dr. Amale MAHI, promotrice de ce mémoire, MC à l'Institut d'Aéronautique et Etudes Spatiales, pour nous avoir accordé sa confiance pour la réalisation de ce projet, pour ses précieux conseils, et sa disponibilité, et pour nous avoir guidés tout au long de cette étude.
- ❖ Tous les membres de jury de notre mémoire.
- ❖ Nos professeurs, et responsables de l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de BLIDA, pour leurs précieuses connaissances.

Je souhaite personnellement remercier mon binôme et ami Khaled, avec lequel j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler, sans qui rien n'aurait été pareil. Nous avons formé une belle équipe, je te remercie donc pour tout ce que tu m'as apporté au cours de ces cinq années partagées. J'aimerais remercier ma famille pour leur soutien, je ne serai jamais en mesure de rembourser vos actes innombrables de gentillesse et d'amour, ni de vos sacrifices personnels. Enfin, j'adresse mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet : les responsables et les enseignants de l'Institut, ainsi qu'à mes chers amis.

*Hicham*

Je remercie tout particulièrement Hicham, mon partenaire de mémoire, mon binôme et mon ami. Cette année fut riche en émotions et je tiens à te remercier pour ton soutien et ce lien tout particulier qui s'est créé entre nous. Je remercie aussi ma famille, mes parents et mes frères et sœurs pour leurs précieux appuis et leurs conseils tous le long de mon cursus, sans leur soutien et leur amour rien n'aurait été possible. Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux enseignants de cet institut pour leurs efforts à nous guider à travers ces années. Et enfin, je remercie tous mes amis sans exception.

*Khaled*

## Table des matières

RESUME.

REMERCIEMENT.

TABLE DES MATIERES.

LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS.

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX.

INTRODUCTION GENERALE.....	1
Chapitre 1: RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	3
1.1 Analyses des plaques: .....	3
1.2 Plaques en matériau à gradient fonctionnel : .....	4
1.3 Interaction fluide-structure:.....	5
1.4 Flottement des plaques FGM: .....	7
Chapitre 2 : GENERALITES.....	8
2.1 Généralités sur l'aéroélasticité: .....	8
2.1.1 Historique : .....	8
2.1.2 Essais en vol : .....	10
2.1.3 Systèmes d'excitation : .....	12
2.1.4 Instrumentation : .....	13
2.1.5 Analyse de données :.....	13
2.2 Généralités sur les FGM : .....	14
2.2.1 Description des FGM: .....	14
2.2.2 Classification : .....	16
2.2.3 Caractéristiques, comportement, et Performances :.....	16
2.2.4 Conceptions des plaques FGM: .....	18
2.2.5 Comportement mécanique :.....	18
2.2.5.1 Elasticité : .....	18

## TABLE DES MATIERES

---

2.2.5.2 Déformation plastique et rupture: .....	19
2.2.5.3 Usure : .....	21
2.2.6 Comportement thermomécanique : .....	22
2.2.7 Applications : .....	22
Chapitre 3: THEORIE DES PLAQUES.....	25
3.1 Introduction: .....	25
3.2 Modélisation des plaques FGM.....	26
3.2.1 Les propriétés matérielles des P-FGM.....	27
3.2.2 Les propriétés des E-FGM.....	29
3.2.3 Les Propriétés des S-FGM.....	30
3.3 La théorie de l'Elasticité.....	31
3.3.1 Les équations d'équilibre.....	32
3.3.2 Les relations déformations-déplacements.....	33
3.3.3 Les lois de comportement.....	33
3.4 Comportement des plaques: .....	35
3.5 La théorie classique des plaques minces : .....	39
3.5.1 Hypothèses.....	39
3.5.2 Champs des déformations et des déplacements.....	40
3.6 Les équations d'équilibre : .....	45
3.7 La théorie du premier ordre des plaques moyennement épaisses : .....	46
3.7.1 Détermination des champs de déformations et de contraintes.....	48
3.7.1.1 Champ de déformations : .....	48
3.7.1.2 Champ de contraintes : .....	49
3.7.2 Détermination des efforts et moments appliqués à la plaque FGM.....	50
3.8 Conclusion: .....	52
Chapitre 4: ENERGIE TOTALE DU SYSTEME ET EQUATIONS DE MOUVEMENT....	53
4.1 Introduction.....	53
4.2 Équations du mouvement de la plaque.....	53
4.3 Energie cinétique.....	54
4.4 Energie de déformation.....	54
4.5 Expression du travail des efforts extérieurs.....	56

## TABLE DES MATIERES

---

4.6 Reformulation des équations pour une plaque FGM.....	57
4.6.1 Caractéristiques de la plaque.....	57
4.6.2 Equation de l'énergie cinétique.....	57
4.6.3 Equation de l'énergie de déformation.....	60
4.6.4 Equation du travail due aux forces aérodynamiques.....	63
4.7 Application du principe de Hamilton.....	64
4.7.1 Variation de l'énergie cinétique	
$\delta T(\gamma)$ .....	64
4.7.2 Variation de l'énergie de déformation $\delta U(\gamma)$ .....	67
4.7.3 Le travail des forces de pressions.....	68
4.7.4 Mise en équation.....	68
4.8 Conclusion.....	73
CHAPITRE 5 : RESULTATS ET DISCUSSION.....	74
5.1 Introduction.....	74
5.2 Résolution des équations du mouvement.....	76
5.2.1 Système libre conservatif.....	76
5.2.2 Système aéroélastique.....	78
5.3 Discussion sur les fréquences naturelles.....	79
5.4 Discussion sur le flottement des plaques FGM.....	86
5.5	
Conclusion.....	95
CONCLUSION GENERALE.....	97
REFERENCES.....	99
ANNEXE .....	102



## Liste des figures

Figure.....	Page
Figure 2.1: Classification des matériaux à gradient fonctionnel.....	17
Figure 2.2: Distribution de contraintes dans une liaison pur de nickel-aluminium (ligne discontinue) et une liaison faite d'un FGM (ligne continue).....	19
Figure 2.3: Les différents domaines d'application des FGM.....	24
Figure 3.1: Les deux types de représentation des structures en matériaux FGM.....	27
Figure 3.2: La fraction volumique à travers l'épaisseur.....	28
Figure 3.3: Variation du module d'Young suivant la fonction exponentielle.....	31
Figure 3.4: Loi de variation des propriétés des S-FGM.....	32
Figure 3.5: Composante du tenseur de contraintes.....	33
Figure 3.6: Déformations de la section normale par rapport au plan moyen.....	40
Figure 3.7: Cinématique des déformations.....	43
Figure 3.8: Equilibre d'un élément de plaque.....	48
Figure 3.9: Cinétique des déformations d'après la théorie de Reissner-Mindlin.....	49
Figure 3.10: Convention de signe des moments appliqués sur une plaque (+).....	53
Figure 5.1: Représentation d'une plaque FGM.....	75
Figure 5.2: Influence du rapport a/h sur les fréquences naturelles de la plaque FGM.....	83
Figure 5.3: Variation des 3 premières fréquences naturelles d'une plaque en Al-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> en fonction de la fraction volumique.....	83
Figure 5.4: Représentation de la fréquence naturelle du premier mode en fonction de la fraction volumique pour une plaque rectangulaire en Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -SUS304, a/h=20.....	85
Figure 5.5: Influence du rapport d'allongement (a/b) sur les fréquences naturelles d'une plaque FGM.....	85

Figure 5.6: Coalescence des fréquences de deux modes et pression critique.....	87
Figure 5.7: Influence de l'indice de fraction volumique sur la pression aérodynamique critique.....	89
Figure 5.8: Comportement des fréquences après le flottement.....	90
Figure 5.9: Perturbations des fréquences de vibration avant d'atteindre la fréquence critique de flottement.....	90
Figure 5.10: Influence du rapport d'allongement (a/b) sur les fréquences critiques de flottement.....	92
Figure 5.11: Influence du rapport d'allongement (a/b) sur les pressions critiques de flottement.....	93
Figure 5.12: Influence de la longueur de la plaque sur les pressions critiques de flottement. ....	94
Figure 5.13: Influence du rapport d'épaisseur sur les fréquences critiques de flottement.....	95
Figure 5.14: Organigramme du programme de calcul (Maple).....	96

## Liste des Tableaux

Tableau.....	<b>page</b>
Tableau 5.1: Propriétés thermomécaniques de différents matériaux constituant la plaque en FGM.....	<b>80</b>
Tableau 5.2: Les 3 premières Fréquences naturelles d'une plaque en Al-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> pour différents rapport (a/b) et (a/h) et pour différentes compositions.....	<b>82</b>
Tableau 5.3: Fréquences naturelles obtenues pour une plaque en Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -SUS304 avec un rapport (a/h=20) et pour différents rapports (a/b) et différents indices de fraction volumique.....	<b>84</b>
Tableau 5.4: Fréquences de flottement et pressions critiques correspondantes pour différents indices de fraction volumique (plaque FGM Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -SUS304, a/b=1, a/h=20).....	<b>88</b>
Tableau 5.5: Pressions aérodynamiques Critiques adimensionnelles pour différents indices de fraction volumique (plaque FGM Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -SUS304, a/b=1, a/h=20).....	<b>88</b>
Tableau 5.6: Variation des Fréquences adimensionnelles des trois premiers modes de vibration pour différents rapports d'allongement (plaque FGM Al-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , a/b=1-2-4, a/h=100).....	<b>91</b>
Tableau 5.7: Fréquences et pressions critiques de flottement pour des plaques ayant différents rapports d'allongement (a/b) et pour différents indices de fraction volumique.....	<b>92</b>
Tableau 5.8: Pressions critiques de flottement pour des plaques FGM de différentes longueurs (a) et différentes compositions.....	<b>93</b>
Tableau 5.9: Fréquences et pressions critiques pour différents rapports d'épaisseur.....	<b>94</b>

## LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

$A_{ij}$	: Matrice de rigidité en membrane.
$\bar{A}$	: Matrice de force aérodynamique.
$B_{ij}$	: Matrice de couplage membrane-flexion-torsion.
$C_{ij}$	: Matrice de rigidité en flexion.
$E$	: Module de Young.
$G$ et $\lambda_l$	: Coefficients de lamé.
$h$	: Epaisseur du matériau suivant l'axe $z$ .
$K_{ij}$	: Matrice de rigidité.
$M_{ij}$	: Matrice de masse.
$M_\infty$	: Nombre de Mach.
$M_x, M_y$	: Moments de flexion.
$M_{xy}$	: Moment de torsion.
$N_x, N_y$	: Résultantes des efforts normaux suivant $x$ et $y$ respectivement.
$N_{xy}$	: Résultante de cisaillement transverse.
$P_T$	: Propriétés totales du matériau.
$P_f$	: Propriétés du matériau pour une couche.
$P_t$	: Propriété volumique de Céramique (top).
$P_b$	: Propriété volumique de Métallique (bottom).

$P_i$	: Coefficient de température propre au matériau $i = 1,3$ .
$p_{int}$	: Pression intérieure.
$p_{ext}$	: Pression extérieure.
$q(x, y, t)$	: Chargements transversaux de la plaque.
$Q_{ij}$	: Matrice de rigidité réduite.
$Q_x, Q_y$	: Résultantes des efforts de cisaillement dans le plan (xy).
$T$	: Energie cinétique.
$u, v$ et $w$	: Déplacements suivant $x, y$ et $z$ respectivement.
$U_d$	: Energie de déformation.
$U_a$	: Vitesse de l'air.
$V_m$	: Fraction volumique du matériau.
$W_e$	: Charge extérieure.
$W_d$	: Densité d'énergie de déformation pour un solide élastique linéaire.
$W_s$	: Densité d'énergie de déformation pour une surface unitaire.
$\nu$	: Coefficient de Poisson.
$\kappa$	: Conductivité thermique.
$\rho_a$	: Densité de l'air.
$\sigma_{ii}$ ou $\sigma_i$	: Contraintes normales.
$\varepsilon_{ii}$ ou $\varepsilon_i$	: Déformations normales.
$\varepsilon_p$	: Déformations en membrane.

$\varepsilon_b$	: Déformations en flexion.
$\tau_{ij}$	: Contraintes en cisaillement.
$\alpha$	: Coefficient de dilatation thermique.
$\theta_x$	: Angle de rotation suivant l'axe x.
$\theta_y$	: Angle de rotation suivant l'axe y.
$\theta$	: Angle de l'écoulement.
$\lambda_{cr}$	: Pression aérodynamique critique.
$\Delta p$	: Pression aérodynamique sur la base de premier ordre.
$\gamma_{ij}$	: Déformations en cisaillement.
$\delta_{ij}$	: Matrice d'identité $i = j = x, y, z$ et $x_i = x, y, z$ .
FSDPT	: Théorie de déformation des plaques de premier ordre.
FGM	: Matériaux à gradient fonctionnel.
P-FGM	: Matériaux à gradient fonctionnel en puissance.
E-FGM	: Matériaux à gradient fonctionnel en exponentiel.
S-FGM	: Matériaux à gradient fonctionnel en sigmoïde.
2D, 3D	: Bidimensionnel et tridimensionnel respectivement.

# INTRODUCTION GENERALE

## INTRODUCTION GENERALE

L'industrie moderne de la mécanique de construction, de l'automobile, du génie civil et plus spécialement de l'aéronautique et de l'aérospatial, est à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels telles que la légèreté et la rigidité. Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites, les matériaux composites sont venus y apporter quelques solutions. Cependant, les matériaux composites classiques, généralement constitués de couches, ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces, où les propriétés matérielles subissent un changement soudain qui provoque de fortes concentrations de contraintes, ce qui entraîne généralement le décollement ou la rupture aux interfaces.

Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel (FGM : **F**unctionally **G**raded **M**aterials) pour lesquels des propriétés matérielles, tel que le module de Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux composites stratifiés. Donc les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux dont la microstructure et la composition varient graduellement ou continument avec la position, ils sont conçus pour une performance ou une fonction spécifique. Ils ne sont pas techniquement une classe séparée de matériaux, mais ils font partie de la famille des matériaux composites et représentent plutôt une approche de l'ingénierie pour modifier la structure et l'arrangement chimique des matériaux. Cette approche est plus bénéfique lorsqu'elle répond parfaitement aux exigences conçues dans le cahier des charges, comme la nécessité d'une dureté élevée et une ténacité élevée dans les enduits de résistance à l'usure. Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées au comportement vibratoire de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

Le phénomène du flottement résulte d'une interaction indésirable entre des forces aérodynamiques, élastiques et inertielles qui s'exercent sur la structure, interaction qui produit des oscillations auto-excitées lorsqu'elle est exposée à un écoulement d'air le long de sa surface, pouvant entraîner un phénomène d'instabilité de la structure [1]. Le flottement est reconnu comme un problème d'aéroélasticité dont l'évolution a été étroitement liée au développement de l'ingénierie aéronautique et aérospatiale. Spécialement, lorsqu'il s'agit de la conception des avions modernes et des navettes spatiales. Il existe plusieurs types de flottement, par exemple, la divergence qui est aussi appelée flottement à fréquence nulle, le flottement de décrochage qui se produit lorsqu'il y a décollement de la couche limite, en particulier à un grand angle d'incidence, et le flottement des modes couplés qui se produit lorsque les fréquences de vibrations de deux ou plusieurs modes convergent vers une même valeur provoquant ainsi l'instabilité de la structure, ce type de flottement est le plus fréquent sur les structures d'avions [2]. L'effet de la pression aérodynamique appliquée sur la structure conduit à la coalescence de la fréquence entre certains modes de vibration de la plaque. Avant le passage du transsonique au supersonique et du supersonique à l'ypersonique, l'amélioration de la vitesse de vol devient un but ultime pour la conception des structures aérospatiales [3].

Le but de cette présente étude est de faire l'analyse du flottement des plaques FGM basées sur la théorie de déformation du premier ordre et plongées dans un écoulement d'air supersonique. Une telle formulation modale est destinée à être un outil efficace de conception pratique pour les panneaux de véhicules supersoniques afin d'obtenir un coût (en terme de temps de calcul) réduit, sans perdre de précision et assez simple pour l'application sans avoir recours à des manipulations mathématiques sophistiquées et aussi de prendre en compte autant que possible les considérations de la conception réelle.

Cette étude inclut cinq chapitres. Chaque chapitre contient une introduction et une conclusion. La « Recherche bibliographique » est incluse dans le 1<sup>er</sup> chapitre. Suivi d'un 2<sup>ème</sup> chapitre « Généralités » qui inclut deux parties, l'aéroélasticité et les matériaux FGM en seconde partie. Le 3<sup>ème</sup> chapitre est dédié à la « Théorie des plaques ». « L'énergie totale et les équations de mouvement » sont introduites dans le 4<sup>ème</sup> chapitre. « Les résultats et discussions » sont présentés dans le 5<sup>ème</sup> et dernier chapitre. Le mémoire se termine enfin par une conclusion générale dans laquelle une synthèse du travail réalisé sera présentée.



# Chapitre 1: RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

---

## 1.1 Analyses des plaques:

Une plaque peut être définie comme un élément structural plan qui supporte des chargements, et qui a une dimension (typiquement l'épaisseur) plus petite en comparant avec les autres dimensions. Des exemples Typiques sur les applications pratiques des plaques sont les étages d'un immeuble, les pontages, électrodéposition des coques de bateaux et plusieurs autres constructions, comme on peut aussi dans certains cas considérer une structure complexe comme une plaque (ailes d'avions). Les éléments plaques peuvent être longs, enjambant des dizaines de mètres dans les ponts et les immeubles, ou très petits lorsqu'ils sont incorporés comme des diaphragmes dans les valves à réduction de pression. Cependant, ces éléments sont classés en fonction du rapport : épaisseur/longueur, et ces différentes classes sont : les plaques minces, les plaques moyennement épaisses et les plaques épaisses.

L'analyse des vibrations des structures a vu le jour lorsque Galilée (1564-1642) a résolu, par des moyens géométriques, la dépendance de la fréquence propre d'un pendule simple à la longueur du pendule. Il mit en place un procédé expérimental permettant l'observation, du comportement vibratoire des cordes et des plaques mais n'a jamais pu établir le moindre traitement analytique. Il fût suivi par d'autres chercheurs tels que Mersenne (1588-1648), Sauveur (1635-1716), Hooke (1635-1703), Newton (1642-1727), Taylor (1685-1731), Bernoulli (1700-1783), Euler (1707-1783), d'Alembert (1717-1783), Fourier (1768-1830) et bien d'autre, qui ont tous apporté des contributions de plus au moins une grande importance dans le domaine de l'analyse des vibrations. Aujourd'hui, il est impensable de procéder à l'étude d'une structure sans étudier son comportement vibratoire.

Dans le cadre de l'analyse du comportement mécanique des plaques, [J.N.Reddy, 4] a analysé par différentes méthodes le comportement des plaques et des coques composites en utilisant différentes théories des plaques, comme il a introduit dans son étude le comportement des plaques FGM. [R.D. Mindlin, 5] a présenté un aspect

mathématique des vibrations des plaques dans le contexte de la théorie 3-D et les différentes théories bidimensionnelles. [P. G. Lowe, 6] a exposé les différentes lois qui régissent le comportement des plaques y compris dans le domaine plastique, comme il a aussi explicité le rôle de la géométrie dans une telle analyse. Et plus récemment (2014) [K. Bhaskar et T. Vardan, 7] décrivent le comportement statique et dynamique des plaques de différentes natures en utilisant la théorie classique.

### **1.2 Plaques en matériau à gradient fonctionnel :**

La liaison directe des métaux et des céramiques peut engendrer des discontinuités dans la distribution des contraintes mécaniques, ainsi que la naissance des contraintes thermiques dans les applications pratiques à hautes températures, ces deux sont principalement causées par la discontinuité dans les propriétés de ce type de liaison. Les conséquences de telles discontinuités est la formation des fissures et le délaminage entre les couches qui composent les matériaux (ex : stratifiés composites). Le concept d'une liaison graduée pour le cas d'une association métal/céramique fut proposé pour la première fois par Kawasaki et Watanabe (1984), dans laquelle la contrainte thermique et la discontinuité des contraintes mécaniques ont été effectivement éliminées. Une telle gradation dans la composition offre à la fois une meilleure résistance à la température, une rigidité considérable et une ténacité suffisante pour réduire la propagation des fissures. Ce concept eut donné le nom de « *Functionally Graded Material* » (Matériau à Gradient Fonctionnel), et a été originalement conçu pour le fuselage des navettes spatiales et des avions atteignant des nombres de Mach entre 5 et 25 et subissant un échauffement thermique sévère causé par l'écoulement d'air autour la structure.

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

Dans le cadre de l'analyse statique et dynamique des plaques conçues en matériaux à gradient fonctionnel, plusieurs chercheurs ont publié des articles et des livres et ont exposé les différentes théories régissant les plaques en commençant par la théorie classique (CPT) jusqu'aux théories d'ordres élevées, ainsi que les méthodes utilisées pour résoudre les équations. [Hui-Shen Shen, 8] modélisa et analysa le comportement non-linéaire des

plaques et des coques en FGM. [Kiyochi Ichikawa 9] a présenté ces nouveaux matériaux et leurs emplacements dans le 21<sup>ème</sup> siècle.

[Shyang-Ho Chi et Yen-Ling Chung, 10] ont analysé le comportement mécanique d'une plaque FGM sous un chargement transversal et ceci pour différentes lois de variation de la fraction volumique, l'étude est basée sur la théorie classique des plaques et ils ont eu recours à la méthode de Navier pour résoudre les équations de mouvements et ont vérifié les résultats par la méthode des éléments finis. [A.Hadi, A.Rastgoo, A.Daneshmehr, and F.Ehsani, 11] ont étudié la flexion d'une plaque rectangulaire constituée par un FGM en utilisant la théorie de l'élasticité 3-D, ils ont résolu les équations de mouvement obtenues par une analyse statique en considérant le type de plaque, la variation de la fraction volumique suit une loi exponentielle, et les résultats montre l'effet de l'utilisation d'un matériau à gradient de propriétés sur le comportement mécanique de cette plaque. [J. N. Reddy, 12] a présenté une formulation théorique, et a utilisé la méthode de Navier afin de résoudre et d'analyser le comportement mécanique d'une plaque FGM et valide ses résultats par un modèle d'éléments finis basé sur la théorie des déformations du troisième ordre. [Huu-Tai Thai et Dong-Ho Choi, 13] ont analysé la flexion, le flambage et les vibrations libres d'une plaque sandwich à gradient fonctionnel sur une fondation élastique sous différentes conditions aux limites, ils ont établi les équations de mouvement en utilisant la théorie des déformations d'ordre élevé, et ont procédé par la méthode « Closed-Form » pour résoudre ces équations.

### **1.3 Interaction fluide-structure:**

Dans la réalité, les structures solides sont sujettes à des chargements variables dans le temps, et parmi ces forces on peut citer les explosions ou les forces impulsives, les forces aérodynamiques, les forces d'inerties durant une accélération ou une décélération, les perturbations sismiques... Dans toutes ces applications, les structures doivent être conçues de telle sorte qu'elles puissent résister, c'est-à-dire que la possibilité de résonance ou de flottement est minimisée et que les contraintes dynamiques sont en dessous des contraintes admissibles du matériau. Pour cela, une analyse dynamique doit être accomplie, que ça soit pour l'identification des fréquences de résonance (fréquences naturelles), fréquences de flottement ou pour déterminer les déplacements et les contraintes dynamiques.

Les Structures qui sont en contacts avec les écoulements fluides, qu'ils soient naturels ou fait par l'homme, sont inévitablement sujettes aux forces et aux vibrations causées par ces écoulements : en partant des panneaux de signalisations jusqu'aux véhicules de transport. Sous certaines conditions les vibrations peuvent être auto-excitées, et en l'attribue souvent comme instabilité. Ces instabilités et, plus spécifiquement, les conditions sous lesquelles elles surgissent sont d'une grande importance pour les concepteurs et les conducteurs de tels systèmes à cause du potentiel signifiant qu'ils ont pour causer les dommages en court termes. Ces problèmes qui s'étendent des destructions à court terme de la structure aux problèmes inacceptables de fatigue à long terme.

Les phénomènes de l'aéroélasticité et de la dynamique des structures peuvent être le résultat de déformations et d'instabilités statiques et dynamiques très dangereuses, ainsi, ils ont de très importantes conséquences pratiques dans les domaines technologiques. Spécialement lorsqu'il s'agit de la conception des avions modernes et des navettes spatiales, ces deux qui se caractérisent par l'exigence d'une grande légèreté de la structure, les solutions de plusieurs problèmes de dynamique des structures et de l'aéroélasticité sont des conditions basiques pour l'obtention d'un système structural optimal, fiable et opérationnel capable d'achever ces fonctions.

L'aéroélasticité fut centrée dans le passé sur les applications aéronautiques et aérospatiales, mais depuis quelques années, elle s'est immiscée dans d'autres domaines de l'ingénierie, ses applications sont en accroissement dans le génie civil, ex. l'écoulement de l'air autour des ponts et des gratte-ciels ; dans le génie mécanique, ex. les écoulements autour des ailettes des turbomachines et les fluides s'écoulant dans les conduites flexibles ; dans le nucléaire, ex. les flux autour des éléments et de combustible et des vannes des échangeurs de chaleur. En gros, les problèmes de l'aéroélasticité peuvent être classés dans la catégorie de la réponse et de la stabilité dynamique. L'aéroélasticité des plaques et des coques est un sujet qui a fait l'objet d'une intense étude au cours des années précédentes, ces études qui se classent à partir d'investigations convenables pour résoudre des problèmes de conception vers des recherches menées et dirigées dans l'objectif de comprendre les bases fondamentales du phénomène physique. La défaillance des structures d'une variété d'avions à hautes performances fut l'une des conséquences engendrées par les mouvements aéroélastiques.

#### 1.4 Flottement des plaques FGM:

L'analyse du flottement supersonique des plaques conçues par des matériaux à gradient fonctionnel est présentée par [T. Prakash, M. Ganapathi, 14], et ceci en utilisant la procédure par éléments finis, les formulations sont basées sur la théorie des déformations du premier ordre et les propriétés du matériau varient suivant une loi de puissance (P-FGM). La force aérodynamique est évaluée en considérant l'approximation du premier ordre du nombre de Mach élevé. [H. Haddadpour, H.M. Navazi, F. Shadmehri, 15] ont étudié le comportement aéroélastique non linéaire d'une plaque en FGM submergée dans un écoulement supersonique, la fraction volumique varie linéairement suivant une loi de puissance, l'établissement des équations de mouvements a été faite en partant du principe variationnel d'Hamilton et la résolution est faite après avoir découplé les équations par la méthode de Galerkin par une intégration numérique.

Normalement, la pression aérodynamique doit être considérée comme la somme de deux composantes, une composante qui correspond aux fluctuations de pression dans la plaque en l'absence de tous mouvements de la plaque (qui est due par exemple aux perturbations causées par la couche limite turbulente), et l'autre correspond au mouvement de la plaque. La superposition de ces deux composantes pour former la pression aérodynamique totale, implique que le mouvement de la plaque et la portion de la pression aérodynamique conséquente sont suffisamment petites de telle sorte que les fluctuations de pression turbulente ne sont pas modifiées.

La méthode de résolution des équations du mouvement est d'une importance capitale dans l'analyse du flottement des plaques FGM, car l'inclusion de la pression aérodynamique rend la tâche plus encombrante et impossible pour certaines méthodes. Plusieurs auteurs publièrent des ouvrages et articles liés à l'étude du flottement des plaques, et résolurent leurs problèmes par la méthode de Galerkin. [V. V. Vedenev 16] analysa le flottement supersonique d'une plaque en utilisant la théorie aérodynamique exacte. [Harry. G. Shaeffer and Walter L. Heard, 17] inspectèrent l'effet des contraintes non-uniformes sur le flottement supersonique d'une plaque dans un environnement thermique en utilisant l'approximation bidimensionnelle statique des forces aérodynamiques en conjonction avec la théorie classique des plaques.

## Chapitre 2 : GENERALITES

---

### 2.1 Généralités sur l'aéroélasticité:

#### 2.1.1 Historique :

Dès l'aube de l'aviation, les pionniers de la conception aéronautique ont eu à se soucier des problèmes d'aéroélasticité. Ainsi, il est rapporté que les essais de Samuel Langley pour faire voler son avion en 1903 ont échoué à cause d'un phénomène d'aéroélasticité aujourd'hui connu sous le nom de « divergence statique ». Plus de cent ans après, le traitement des problèmes d'aéroélasticité est toujours un sujet important dans l'industrie aéronautique. En effet, pour réduire leur masse et améliorer leurs performances, les structures des avions sont de plus en plus légères et par conséquent de plus en plus souples. Cette souplesse croissante rend les phénomènes d'aéroélasticité de plus en plus significatifs [18]. En effet, l'aéroélasticité étudie l'effet des charges aérodynamiques sur les structures flexibles, en tenant compte de la dépendance des charges aérodynamiques avec la déformation de la structure [19]. La première observation de flottement peut être retracée au milieu des années 1940 où les roquettes allemandes V-2 ont rencontré des problèmes de flottement qui ont abouti à secouer les parois en métal lorsque les roquettes ont volé à une vitesse supersonique. Les défaillances structurelles dues au flottement ont été largement prises en compte dans les avions, les navettes spatiales, les missiles, les roquettes et les ponts à cause de la vitesse élevée d'écoulement d'air. Les premières recherches sur le flottement ont été faites essentiellement pour comprendre ce phénomène en explorant les mécanismes qui le déclenchent et les manières pour y remédier. La première étude concrète de ce phénomène est réalisée par Lanchester durant la première guerre mondiale [20]. Lanchester a montré que les oscillations de l'avion ne sont pas dues à la résonance des sources vibratoires mais qu'elles sont auto-excitées et a proposé comme solution l'augmentation de la rigidité torsionnelle de la gouverne de profondeur en ajoutant un tube de transmission. Quelques années auparavant, des travaux théoriques ont été focalisés sur le développement des premiers critères de stabilité des structures aéronautiques et les dérivées aérodynamiques qui sont utilisés jusqu'à nos jours.

La construction même du terme « *aéroélasticité* » laisse entendre que les solides en jeux sont déformables, avec des déplacements modérés par rapport à une position initiale.

Ainsi l'aéroélasticité exclut habituellement les problèmes tels que la mécanique de vol qui s'intéresse à la trajectoire du corps (le plus souvent rigides) soumis à des efforts aérodynamiques [18]. La sécurité des transports et la fiabilité des appareils sont des préoccupations majeures pour les constructeurs aéronautiques. L'enjeu est de prévenir toutes les situations accidentelles qui risquent de survenir au cours d'un vol. L'un des phénomènes dangereux à fort potentiel destructif est le flottement aéroélastique plus connu sous le nom de flottement. Historiquement, le flottement est reconnu comme la cause directe de plusieurs catastrophes aériennes. Le phénomène du flottement résulte d'une interaction indésirable entre des forces aérodynamiques, élastiques et inertielles qui s'exercent sur l'avion [21], interaction qui produit des oscillations auto-excitées pouvant entraîner un phénomène de résonance et l'instabilité de la structure. La certification de tout nouvel avion exige des normes de sécurité très strictes contre ce phénomène qui doit être pris en compte dès la phase de conception.

Le flottement est désormais reconnu comme un problème d'aéroélasticité dont l'évolution a été étroitement liée au développement de l'ingénierie aéronautique et aérospatial, et a permis de mieux comprendre ce phénomène d'instabilité. Une des adaptations les plus intéressantes de l'aéroélasticité à la problématique du flottement est à attribuer à Frazer et Duncan [22], qui ont initié ce qu'on appelle l'approche britannique. Il s'agit de définir les degrés-de-liberté de la structure comme un mouvement d'oscillation rendant ainsi la modélisation dynamique plus simple sous forme d'équations différentielles ordinaires au lieu d'équations aux dérivées partielles. Cette modélisation est fondée sur des hypothèses d'aérodynamique quasi-stationnaire qui négligent la variation de la pression à la surface de l'avion en fonction des fréquences de vibration et l'effet tourbillonnaire du sillage. Se basant sur la théorie du profil aérodynamique (airfoil theory) initiée par Prandtl, Birnbaum a développé une première solution numérique en exprimant les termes aérodynamiques instationnaires sous forme d'équations intégrales. Cette solution a été améliorée par Von Karman et Burgers [23] surtout au niveau de la convergence, donnant une assise considérable à la simulation numérique du flottement. L'approche américaine dans l'analyse du flottement est apparue en 1935 avec Theodorsen [24], basée sur la théorie de circulation de l'écoulement potentiel. Ses travaux ont permis de développer l'expression du décalage entre le mouvement de la surface porteuse avec les forces et les moments qu'elle génère sous forme de combinaison de fonctions de Bessel, appelées fonctions de Theodorsen. Ce décalage est important pour savoir si la structure est

susceptible d'extraire de l'énergie à partir de l'écoulement de façon à causer l'instabilité (énergie non-conservative). Expérimentalement, Duncan a illustré clairement le concept d'extraction d'énergie aérodynamique par la structure avec son fameux "moteur de flottement", un banc d'essai d'une aile suspendue à un système rotatif [25].

L'accroissement de la vitesse des avions a soulevé beaucoup de difficultés à comprendre l'effet de la compressibilité de l'air sur le mouvement vibratoire. Prandtl a développé une théorie qui propose une solution appropriée pour les régimes subsonique et supersonique [26]. Des études plus poussées ont été faites pour chercher à adapter cette théorie à la structure de l'aile (à envergure finie). Grâce à cette théorie, des expressions explicites ont pu être extraites et des méthodes numériques discrètes appropriées à l'analyse de flottement ont été développées. Pour valider et compléter les modèles aéroélastiques, des mesures expérimentales des charges aérodynamiques sur la structure sont nécessaires. Le développement des ordinateurs numériques a fait émerger la modélisation mathématique par éléments finis et a rendu possible l'application d'approches analytiques jugées trop complexes numériquement.

### **2.1.2 Essais en vol :**

Les essais en vol ont longtemps été qualifiés par l'industrie aéronautique de hasardeux et dangereux tellement ce phénomène était destructeur et imprévisible. Il a fallu plus d'un siècle de recherches multidisciplinaires pour avoir une théorie solide [20], qui a permis de mieux maîtriser ce phénomène de flottement et de rendre la procédure des essais en vol plus sûre, quoiqu'elle reste toujours très coûteuse. Donc, avant de s'intéresser aux techniques récentes et avancées, on se propose d'abord de retracer succinctement les principaux travaux analytiques pionniers qui ont rendu possible la simulation et la prédiction du flottement.

Bien que de plus en plus précise, la modélisation aéroélastique ne peut encore pas remplacer les essais expérimentaux pour la définition d'un domaine de vol stable d'un nouvel avion. Outre les essais de vibration au sol et les essais en soufflerie, la phase de validation la plus importante est constituée par les essais en vol qui assurent une surveillance du flottement en conditions réelles. Les essais en vol consistent à parcourir



une série de vitesses croissantes en exerçant des excitations artificielles sur la structure de l'avion. À chaque vitesse, des mesures de vibrations sont enregistrées et traitées par télémétrie au sol pour analyser le comportement modal de la structure et évaluer sa stabilité. Cette analyse permet de juger, si oui ou non, on peut accélérer à une vitesse supérieure en toute sécurité sans risque de flottement. Ce processus est répété pour différents altitudes et nombres de Mach, en tenant compte de plusieurs conditions de vol (turbulence, température, etc.) et détermine à chaque fois la vitesse du flottement correspondant à la limite de stabilité. Le domaine de vol d'un engin volant est ainsi déduit en déterminant les vitesses stables pour chaque altitude et nombre de Mach. La réussite des essais en vol est étroitement liée à la fiabilité de la prédiction du flottement. Les erreurs de prédiction peuvent entraîner soit un risque d'instabilité de la structure si le flottement est sous-estimé, soit une enveloppe de vol conservatrice si le flottement est sur-estimé. La procédure des essais en vol demeure très coûteuse en temps et en moyens. Malgré le développement des techniques d'instrumentation et d'analyse, le nombre d'heures de vol nécessaires à cette procédure reste jusqu'à présent très élevé et n'a pas sensiblement diminué depuis un demi-siècle [27] à cause des incertitudes dans les résultats de détermination du flottement. L'amélioration des essais en vol continue donc d'être une thématique de recherche ouverte qui suscite de grands investissements des constructeurs aéronautiques et aérospatiaux dans le but de diminuer leur coût et accroître la sécurité des vols.

Les premiers essais en vol ont été initiés par Von Schlippe en 1936, qui a remplacé la pratique de faire voler l'avion jusqu'à sa vitesse maximale par une approche consistant à exciter la structure pour différentes vitesses et mesurer la réponse forcée en amplitude des vibrations pour estimer la limite de stabilité. Cette technique a été largement adoptée par les constructeurs et améliorée avec le développement des systèmes d'excitations qui ont permis d'augmenter le rapport signal sur bruit des mesures [28]. Les moyens d'instrumentation ont également évolué surtout avec l'apparition de la télémétrie qui permet de traiter les mesures en temps réel depuis une station terrienne. L'apparition des ordinateurs a contribué à la mise en place de méthodes d'analyse de signaux plus complexes basées sur un calcul rapide de la transformée de Fourier (FFT) pour estimer les fréquences et les amortissements. Depuis, le suivi du flottement a consisté à évaluer l'amortissement en fonction de la vitesse pour extrapoler la vitesse critique correspondant à un amortissement nul.

En résumé, on distingue trois étapes essentielles dans la procédure des essais en vol pour le contrôle du flottement :

- Excitation de la structure en vol,
- Mesure des réponses en vibration,
- Analyse vibratoire des mesures pour évaluer la stabilité de la structure.

### 2.1.3 Systèmes d'excitation :

L'excitation de la structure doit être réalisée dans l'objectif d'apporter l'énergie nécessaire à l'excitation de tous les modes de vibration susceptibles d'affecter la stabilité. Le système d'excitation est ainsi conçu pour exercer sur la structure une force d'entrée dans une bande fréquentielle adéquate pour que les sorties mesurées révèlent la dynamique d'intérêt [29]. Les systèmes d'excitation couramment utilisés sont :

– L'excitation de gouverne (control surface). On retrouve principalement deux formes d'excitations. La première est basée sur les pulsations qui s'exercent successivement sur une courte durée pour parcourir une bande fréquentielle assez large mais avec un niveau d'excitation faible. Et aussi Les signaux oscillants avec une fréquence variable balayant une certaine bande (sinus balayé, multi-sinus...). L'excitation de la gouverne se fait généralement par le système de commande de vol électrique (Fly-By-Wire system) sous forme d'impulsions.

– Les vannes aérodynamiques. Ce sont des petites voilures montées au saumon des ailes, ailerons et stabilisateurs et qui oscillent avec une certaine amplitude pour faire varier la force aérodynamique. Elles ont un bon potentiel d'excitation en basse fréquence et peuvent être synchronisées pour exciter les modes symétriques et antisymétriques. Néanmoins, elles ont l'inconvénient d'ajouter de la masse à l'avion, ce qui peut modifier ses propriétés modales. De plus la force qu'elles produisent dépend de la pression dynamique (ou du carré de la vitesse).

– La turbulence. C'est une excitation naturelle résultant d'une variation aléatoire du vent en vitesse et direction. Il s'agit d'une zone fréquemment traversée par l'avion durant le vol et qui permet en plus d'exciter toute sa surface sans besoin de hardware. Par contre, l'excitation est souvent de faible intensité et limitée en durée, ce qui rend l'analyse modale des signaux difficile.

#### **2.1.4 Instrumentation :**

La chaîne d'instrumentation qui assure l'acquisition des réponses du système en cours de vol comporte :

– Les capteurs : on utilise généralement les accéléromètres pour la mesure des vibrations et, à moindre degré, les jauges de contraintes (plus utilisées pour les ponts). Actuellement, on emploie surtout la technologie des accéléromètres piézo-électriques miniatures, sans fils et robustes à tout type d'environnement (notamment les variations de température).

– Télémétrie : Jusqu'à 1950, les données du vol étaient enregistrées dans l'avion et traitées à la fin de l'essai. Avec l'apparition de la télémétrie, ces données peuvent être transmises en ligne jusqu'à la station terrienne, puis traitées pour donner les instructions nécessaires au pilote. La transmission a évolué d'une modulation en fréquence (analogique) à la technique de modulation d'impulsion codée, de capacité et de qualité meilleures.

#### **2.1.5 Analyse de données :**

On distingue deux générations de techniques d'analyse de données mesurées pour l'évaluation de la stabilité. Le traitement se faisait d'abord par des méthodes basiques d'estimation d'amortissement à faible complexité comme l'application de la technique du décrétement aléatoire (random decrement technique) sur une réponse transitoire du système [29]. L'analyse spectrale a été également utilisée pour estimer les fréquences des modes et l'amplitude des signaux filtrés sur ces fréquences. Avec la grande puissance de calcul des ordinateurs, des algorithmes d'identification modale plus sophistiqués et performants sont utilisés en ligne pour l'estimation des fréquences et amortissements modaux.

## 2.2 Généralités sur les FGM :

### 2.2.1 Description des FGM:

Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice dans laquelle sont enrobées des particules ou des fibres qu'on appelle « renfort ». Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids et bien d'autre sont améliorées. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches, ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et de contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de forte concentration de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délamination dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température. Ce problème a éveillé le souci de porter une nouvelle solution dans un nouveau matériau qui a vu le jour au milieu des années 80 et qu'on appelle conventionnellement matériaux à gradient fonctionnel ou matériaux à gradient de propriétés [30].

Les matériaux à gradient fonctionnel (**F**unctionally **G**raded **M**aterials) sont des matériaux qui comprennent une gradation spatiale dans la structure et/ou la composition, c'est-à-dire que la microstructure et la composition varient graduellement ou continûment avec la position, ils sont conçus pour une performance ou une fonction spécifique [31]. Les FGM ne sont pas techniquement une class séparée de matériaux, mais ils font partie de la famille des matériaux composites et représentent plutôt une approche de l'ingénierie pour modifier la structure et/ou l'arrangement chimique des matériaux ou des éléments. Tandis que le terme *matériaux à gradient fonctionnel (appelés aussi matériaux à gradient de propriétés)* a seulement existé depuis le milieu des années 80, leurs concepts furent utilisés dans l'ingénierie relativement depuis très longtemps. Par exemple, le concept de durcissement de la surface de l'acier par carburation a été compris depuis 60 ans et fut utilisé pour plusieurs centaine d'années. Autres exemples, au début de 1912 les

technologistes de scellement du métal/verre développent des structures graduées pour minimiser les contraintes résiduelles thermiques causées par la différence du coefficient de dilatation thermique. Un troisième exemple existe dans les bandes à vides graduées des semi-conducteurs pour l'utilisation des jonctions hétérogènes des transistors bipolaires, introduites en 1957. Finalement, les structures graduées furent introduites dans les structures composites dans les années 70. En dépit des lignes directrices bien établies de cette dernière, jusqu'à récemment il n'existait pas de vue unifiée pour les structures graduées. En focalisant les efforts de recherche et de développement dans les aspects génériques des FGM, davantage de progrès peuvent être fait pour comprendre quelles structures sont désirables pour des applications spécifiques [31].

Aux environs de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit, d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement céramique vers une face totalement métallique. En 1987 le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Le but ultime était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette spatiale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction de l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a du craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métalliques et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les module de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériaux à gradient fonctionnel [30].

### **2.2.2 Classification :**

Peut-être que les matériaux à gradient fonctionnel sont mieux classifiés selon leurs fabrication, comme le montre la Fig 2.1, qui sépare les FGM en ceux qui sont fabriqués par des processus constructives et ceux fabriqués par des processus par transfert. En bref, les processus constructifs se reposent sur l'emplacement des phases dans la structure par les procédures de l'ingénieur. Le processus par transfert s'appuie sur un bon chronométrage et une bonne conception des réactions où des procédures durant la fabrication du matériau. Plusieurs revêtements protecteurs (ex. revêtement thermique) se retrouvent dans la première catégorie. La carburation du métal fait partis de la dernière catégorie [32]. Naturellement, une approche de fabrication dans laquelle la gradation du matériau est obtenue par le processus par transfert, doit être plus simple et généralement plus désirable que les méthodes constructives.

### **2.2.3 Caractéristiques, comportement, et Performances :**

C'est inapproprié d'attribuer une propriété unique pour un matériau à gradient fonctionnel tant que les propriétés varient à travers le matériau. Au lieu de ça, l'approche requise est de superposer les diverses propriétés des matériaux constituants dans les FGM pour prédire un type spécifique de comportement. Ainsi, l'utilisation des FGM s'appuie sur le contrôle de la variation spatiale des propriétés physiques des composants de telle sorte qu'elles atteignent les performances désirées. Le défi est de concevoir des modèles qui prédisent les caractéristiques, le comportement, et les performances du matériau gradué comme une fonction des propriétés des constituants et de l'architecture graduée [9]. De nos jours, il n'existe qu'une poignée de telles modèles spécifiques.

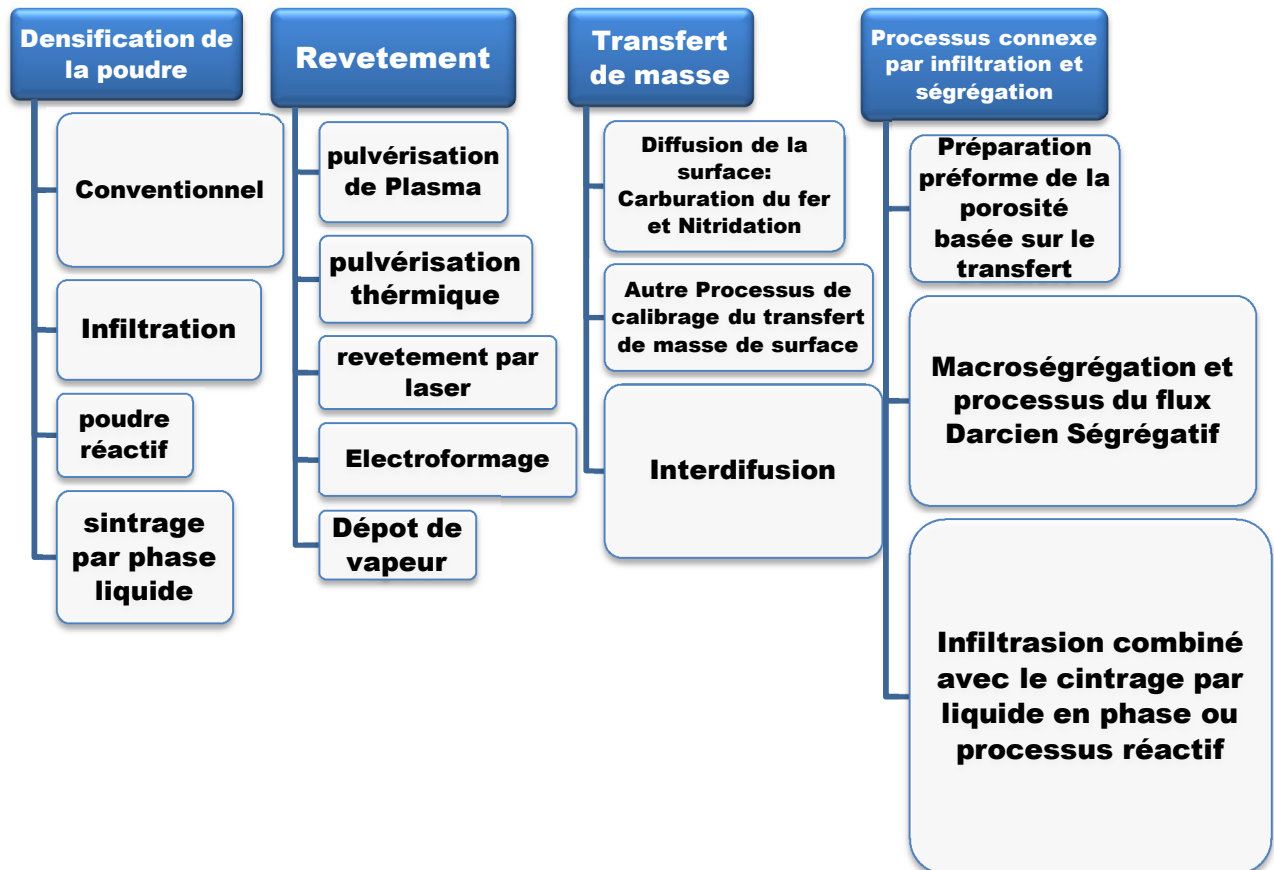


Figure 2.1: classification des matériaux à gradient fonctionnel [31].

### **2.2.4 Conceptions des plaques FGM:**

Dans la plupart des cas, les investigateurs considèrent le FGM comme étant un matériau composé particulier pour lequel la fraction volumique varie sans interruption suivant l'épaisseur. Quelques études considèrent également le FGM comme étant un composé renforcé par un tissu dans lequel l'orientation des fibres varie à travers l'épaisseur. Les FGM sont un type de matériaux composites classés par leurs microstructures variables dans l'espace; conçues pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes [8]. Ces distributions de propriétés se retrouvent dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules, qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure.

On utilise souvent la théorie des stratifiés pour les applications des plaques FGM. De même la prise en compte de l'effet de cisaillement exige une bonne description des champs de contrainte et de déformation. Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque simplement appuyée), mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque [4].

### **2.2.5 Comportement mécanique :**

#### **2.2.5.1 Elasticité :**

Si les propriétés des constituants d'un matériau FGM sont connues, la réponse élastique globale d'un composant en matériau à gradient fonctionnel peut être prédite, soit par des moyens analytiques dans les cas simple ou par des méthodes numériques. Lorsque la gradation est accomplie par empilement discret, alors, une prévision de la réponse élastique est habituellement un problème de mécanique relativement simple. Si chaque couche est considérée comme un composite isotrope, alors le module d'élasticité de cette couche ne devra pas dépendre du fait qu'elle est entourée par d'autres couches. Les quelques cas rapportés où le module d'élasticité d'une couche en matériau à gradient fonctionnel sont différents de ceux d'un matériau de même composition traité séparément sont dus aux légères variations du traitement qui résulte probablement des différences



microstructurales. Pour les couches discrètes dont les dispositions microstructurales sont plus petites que l'épaisseur de la couche, la théorie classique des poutres et des plaques de la mécanique continue s'appliquent. Par exemple, pour prédire la flexion d'une poutre hétérogène, une poutre homogène de section équivalente doit être construite, et les méthodes standards de la mécanique doivent être appliquées. Les matériaux FGM sont fréquemment sujets à des contraintes thermiques, et, dans ce cas, un système d'équations linéaires qui contient les déformations thermiques et la cambrure plane doit être développé et résolu pour prédire la réponse élastique. La solution pour la distribution des contraintes thermiques résiduelles dans la Fig. 2.2 est résolue en utilisant ce type de théorie classique [9]. Quand la gradation est continue, la prédiction de la réponse élastique peut être plus délicate, et les procédures numériques telles que les éléments finis sont probablement les approches les plus efficaces.

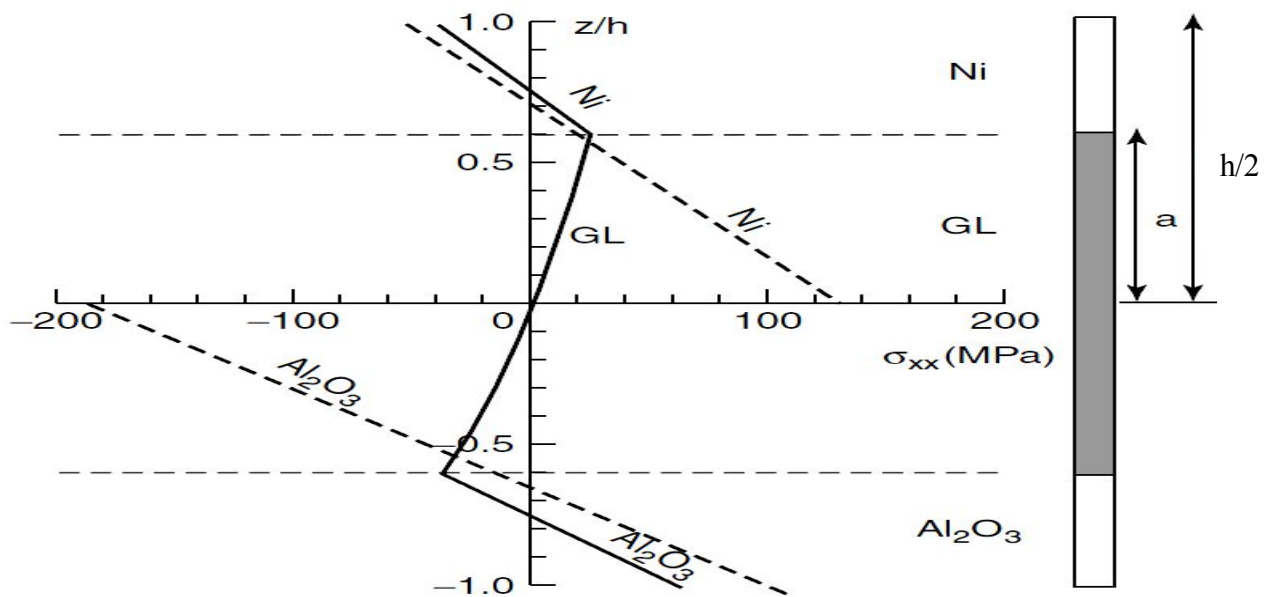


Figure 2.2 : distribution de contraintes dans une liaison pur de nickel-aluminium (ligne discontinue) et une liaison faite d'un FGM (ligne continue) [31].

### 2.2.5.2 Déformation plastique et rupture:

Les concepts de la mécanique de la rupture peuvent être appliqués aux matériaux FGM d'une manière similaire à celle des matériaux à composition unique, bien qu'il puisse y avoir quelques déviations. L'approche en mécanique de rupture linéaire élastique du

facteur d'intensité de contraintes peut être appliquée aux matériaux FGM si les constantes élastiques sont continues et dérivables. Cependant, pour un matériau conçu par des couches dans laquelle une fissure se propage entre les couches, la mécanique de la rupture d'interface doit être invoquée. Les deux différences majeures entre une fissure se propageant dans un matériau gradué perpendiculairement à la direction du gradient et une fissure se propageant dans un matériau homogène est le taux de cisaillement à la pointe de la fissure et le niveau précis du facteur d'intensité de contraintes. Pour une géométrie et un chargement donnés, la fissure dans un matériau FGM subit plus de contrainte de cisaillement et possède une faible force d'entraînement de propagation qu'une même fissure dans un matériau homogène ou une interface bi-matériaux. Le résultat final est que les matériaux à gradient fonctionnel sont légèrement plus résistants aux propagations de fissure qu'un matériau homogène, toutes autrement à l'exception des propriétés élastiques étant les mêmes. La grandeur de la différence entre les forces d'entraînement de propagation dépend des géométries spécifiques, des propriétés du matériau et le type du gradient, mais, en général, est en fait toute à fait petite. De nos jours, peu d'information sont connues sur la propagation de la fissure perpendiculairement à la direction du gradient lorsque le domaine plastique est relativement large, bien que l'effet de la différence élastique soit plus important que l'effet la différence dans le domaine plastique [36].

Des études par simulation numérique ont montré que lorsque la fissure se propage dans un matériau à gradient fonctionnel et linéairement élastique parallèlement à la direction du gradient d'un matériau plus dure à un autre moins dure, la force d'entraînement pour que la propagation continue (c.-à-d. le FIC du mode I) accroît typiquement. En d'autres termes, si la ténacité est la même partout, les matériaux FGM « sembleront » moins résistants aux fissures qu'un matériau homogène ayant une même ténacité. Quand la plasticité est considérée, il a été montré que lorsque la fissure grandit dans un matériau ayant une limite élastique élevée, la force d'entraînement de la fissure décroît. Tant que les forces d'entraînement doivent être comparées avec les critères de rupture pour prédire la propagation de la fissure, il est nécessaire de superposer les effets élastiques et plastiques et comparer les forces d'entraînement résultantes avec les valeurs de la résistance à la rupture. Des études mécaniques plus récentes sur un matériau FGM en céramique/métal dans lequel un arrêt de la fissure se produit ont montré que la résistance à la rupture augmente pendant la propagation de la fissure vers le métal. Dans ce cas, la

résistance à la rupture augmente parce que les forces qui ont arrêté la fissure réduisent les forces d'entraînement de la pointe de la fissure. Ainsi, les propriétés élastiques, plastiques et de rupture dictent ensemble quand les forces d'entraînement de la fissure dépassent la résistance à la rupture du matériau FGM [36]. Cet effet complexe des conditions, de la géométrie et de la distribution des propriétés matérielles rend difficile l'obtention d'un ensemble d'orientations générales pour la conception.

### 2.2.5.3 Usure :

L'usure d'un matériau est un processus complexe qui peut avoir lieu par une variété de mécanismes qui dépendent de plusieurs propriétés tel que la ténacité et la ductilité, aussi bien que les conditions environnementales. Plusieurs applications (par exemple, les outils de coupe et les prothèses) utilisent le concept de l'usure pour concevoir un composant qui présente une surface dure et un intérieur tenace. Tant que pour la plupart des matériaux il y'a une corrélation inverse entre la ductilité et la ténacité, un gradient produit habituellement la structure optimale. Une approche compositionnellement évaluée a été appliquée au moins à trois systèmes différents de matériaux : Co-WC, TiC-NiMo, et diamant-SiC. Ces matériaux ont montrés une plus grande résistance comparée aux outils de composition unique. Dans le cas du TiC-NiMo, des composites optimal gradués ont été fabriqués dans lesquels la composition est arrangée de 95% du poids du TiC à la surface jusqu'à 86% du poids à la surface de transition à l'acier. Dans le cas du diamant-SiC, une couche graduée entre le morceau de diamant et la jambe en SiC est formée par une approche de réaction d'agglomération-poudre métallurgique [9,36].

Le gradient du module d'élasticité est censé modifier la résistance du matériau à l'usure. Alors qu'il est difficile de séparer les effets spécifiques du gradient du module d'élasticité de l'usure, les études effectuées sur le modèle en aluminium et en verre suggèrent que la résistance à l'usure est améliorée lorsque la surface est plus dure que l'intérieur [36].

### **2.2.6 Comportement thermomécanique :**

Le comportement thermomécanique dans les matériaux gradués se rapporte à la déformation non-uniforme durant le chauffage ou le refroidissement induit par les coefficients de dilatation thermique différentiels. Plusieurs descriptions thermomécaniques des matériaux gradués sont uniquement applicables sur les petites déformations dans le contexte de la théorie classique de la mécanique continue des poutres et des plaques. Heureusement, ces descriptions ne sont pas uniquement plus simples que les modèles de déformations larges, mais aussi, applicables sur une gamme d'application plus large, puisque dans beaucoup d'applications, les grandes déformations ne sont pas acceptables. D'autre part, ils n'incluent pas les effets dynamiques, les gradients thermiques, les contraintes de détente dues à la plasticité et les effets singuliers aux bords. Des programmes informatiques simples d'utilisation ont été développés pour prévoir ce genre de déformations [9]. Après qu'un composant ait été exposé à une variation de température, les déformations et les contraintes résiduelles résultantes (Fig. 2.2) sont uniquement déterminées par la géométrie et les propriétés constitutives du matériau.

La présence des déformations plastiques modifie la distribution des contraintes du cas élastique. Le critère des contraintes de Von Mises est fréquemment le plus utilisé pour la description de la plasticité dans les matériaux gradués. L'un des défis dans l'obtention des prédictions exactes est de spécifier ce critère comme une fonction de la position dans la structure graduée. A cause du changement microstructural le long de la gradation compositionnelle, l'effort efficace des contraintes plastiques peut changer (ex. le degré de contrainte autour d'une phase plastique est une fonction de la composition) [9]. Les modèles actuels ne considèrent pas ces variations des microstructural.

### **2.2.6 Applications :**

Un large nombre d'application requière une protection des composants des températures élevées ou d'un environnement corrosif. Ceci inclus les véhicules aérospatiaux, pour la protection du revêtement pour la rentrée à l'atmosphère terrestre et les composants du moteur tel que les ailettes de turbine et les tuyères pour les processus

industriels du verre et du métal fondus, les composants des réacteurs nucléaires et tous outils de coupe subissant des conditions d'environnement dures [9].

Les revêtements de barrières thermiques sont fréquemment utilisés dans les ailettes des turbines de moteurs pour les protéger contre les gazes corrosifs à haute température. Une large variété de compositions, de microstructures et de morphologies de revêtements sont possibles, bien que tout changement de conception des ailettes de turbine existantes n'est pas trivial du point de vue des ingénieurs concepteurs [36]. Les exigences de performances des revêtements sont en elles même multifonctionnelles à travers l'épaisseur, et il est donc logique d'essayer d'utiliser les matériaux à gradient fonctionnel.

Les composites en carbure de silicium-carbone (SiC-C) et en carbone-carbone (C-C) sont largement utilisés comme des boucliers protecteurs dans les véhicules spatiaux et aussi dans les composants de chambre de combustion. Il a été montré que l'utilisation d'une couche intercalaire graduée en SiC-C entre un composant en C-C et un enduit en SiC améliore la durée de vie du nez d'un véhicule spatiale exposé à une température de 1900°C dans une atmosphère oxygénée à un Mach 3. Des enduits gradués d'une base en  $\text{MoSi}_2$  ont été utilisés pour protéger des composants contre la corrosion dans les environnements de verre fondu, et des améliorations basées sur les matériaux à gradient fonctionnel ont été suggérées [9].

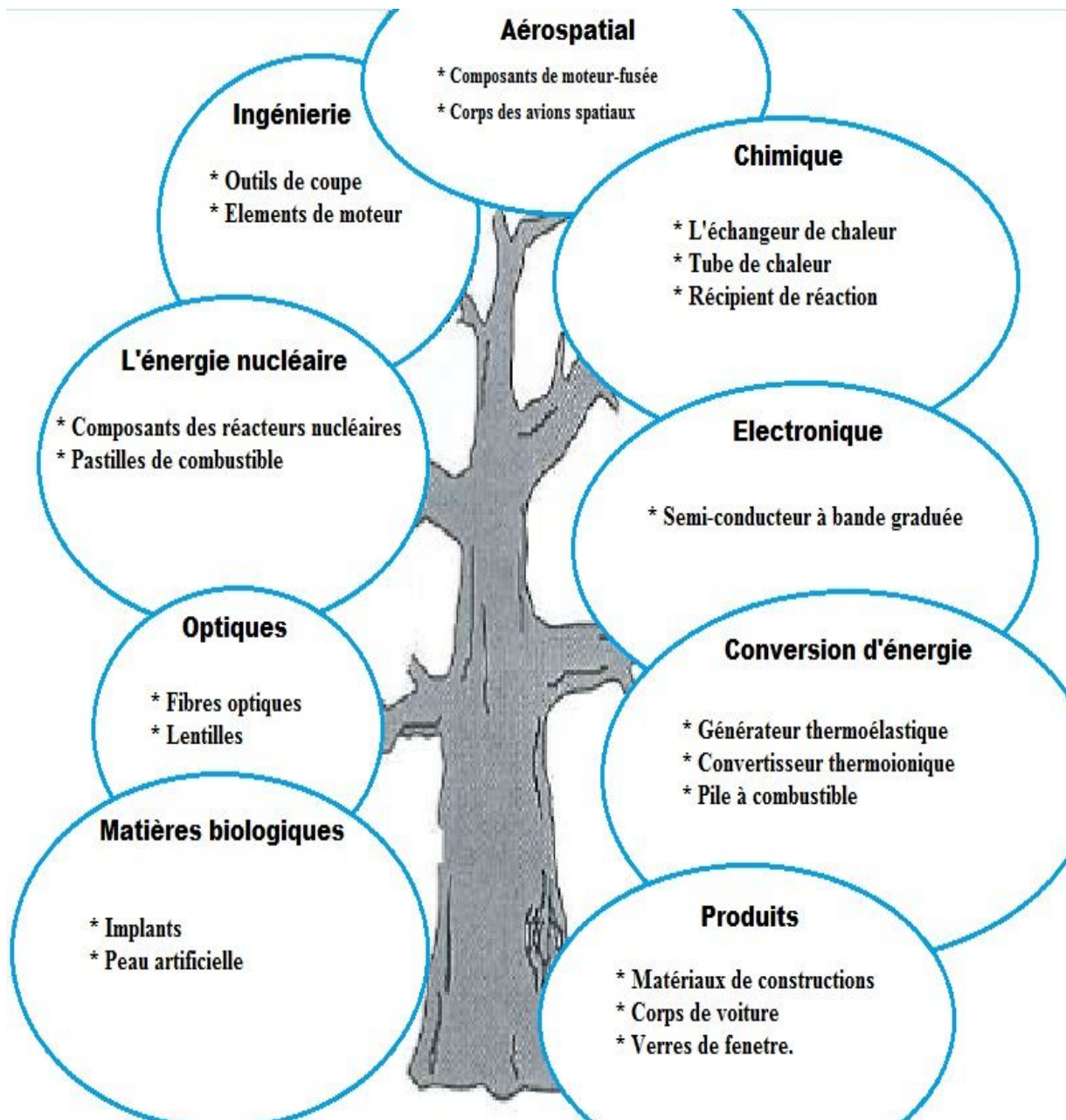


Figure 2.3 : les différents domaines d'application des FGM.

## Chapitre 3: THEORIE DES PLAQUES

---

### 3.1 Introduction:

Les structures en plaques sont souvent rencontrées dans plusieurs domaines de l'ingénierie : revêtements des ailes, ailerons des missiles dans l'aérospatiale, les planchers et les murs des bâtiments en génie civile, les panneaux de carrosserie automobile en génie mécanique, les plates-formes des bateaux et les plates-formes pétrolières en génie maritimes [7]. Il est alors important de connaître le comportement statique et dynamique de telles structures et ceci dans les différentes conditions relatives à l'utilisation et l'environnement y compris les conditions extrêmes, et en déduire ainsi les états limites que peuvent atteindre ces structures (résonance, rupture, fatigue), dans le but ultime d'atteindre la sécurité, la sûreté et le confort maximum pour un coût et une utilisation moins chère. D'autre part, les matériaux qui constituent ces plaques sont de plus en plus performants, par conséquent, les exigences se sont évoluées du même rythme. L'arrivée des matériaux composites ayant des taux élevés de rigidité/poids et de résistance/poids a marqué un grand essor dans l'industrie aérospatiale et dans les autres applications de l'ingénierie [8]. Cependant, les singularités qui surviennent entre les interfaces des deux matériaux constituants, spécialement dans les conditions à très hautes températures conduisent à l'atténuation de ces performances, ce qui cause la fissuration et le décollement [10,39]. Ainsi le concept des matériaux à gradient fonctionnel qui présente une variation continue de la microstructure qui les distinguent de la famille des composites traditionnels, fut introduit, pour y remédier aux exigences de telles conditions et donc éliminer les singularités et les défaillances qui en découlent, d'ailleurs, des études ont montré que les contraintes résiduelles thermiques peuvent être considérablement réduites, en utilisant le concept des FGM [12]. L'application principale des matériaux à gradient fonctionnel a été dans les environnements à très hautes températures, incluant les chocs thermiques qui résultent d'une variation très rapide de la température, mais ceci n'est pas l'application unique de ce type de matériaux car ils peuvent très bien servir dans d'autres applications [42].

### 3.2 Modélisation des plaques FGM:

La plupart des ouvrages consacrés à l'étude des FGM présentent généralement deux types de distribution pour modéliser ce type de matériaux, la première est une représentation discrète de la variation des propriétés de celui-ci dans la direction du gradient (Fig. 3.1 (a)), il s'agit d'un empilement de couches quasi-homogènes constituées d'au moins deux matériaux dont la fraction volumique de chacun des deux varie en fonction de l'autre, et ceux d'une couche à l'autre. L'autre représentation est une variation continue de la fraction volumique des deux matériaux constituants, elle est définie par une fonction dépendant de l'espace (typiquement l'épaisseur) et de la température [8]. Il existe plusieurs fonctions qui décrivent le gradient de distribution des deux matériaux constituants, les fonctions de puissances (P-FGM) et les fonctions exponentielles (E-FGM) sont les plus fréquemment utilisées par les chercheurs, Cependant, ces deux types de loi présentent une concentration de contraintes dans l'une des interfaces de la structure là où la variation de la distribution est très rapide. Par conséquent, Chang et Chi (2001) proposent une fonction sigmoïde (S-FGM) pour décrire la distribution des propriétés du matériau, cette fonction se décompose en deux fonctions de puissance chacune définit sur le mi-intervalle de l'épaisseur [10].

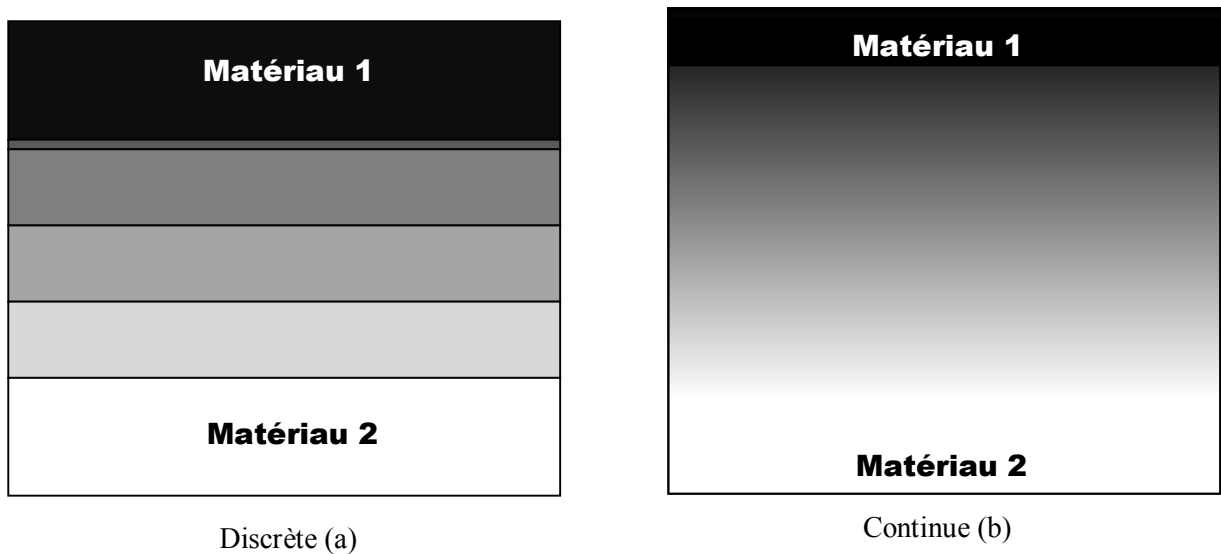


Figure 3.1: Les deux types de représentation des structures en matériaux FGM.



### 3.2.1 Les propriétés matérielles des P-FGM :

La fraction volumique est supposée obéir à la fonction de puissance suivante [14] :

$$V_m = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N \quad (3.1)$$

$h$  étant l'épaisseur de la structure, et  $N$  ( $0 \leq N \leq \infty$ ) est l'exposant de la fraction volumique, qui décrit la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur.

La valeur de  $N$  peut être variée pour donner une infinité de distribution de composition, la Fig. 3.2 présente ces distributions pour différentes valeurs de l'exposant de la fraction volumique ' $N$ '.

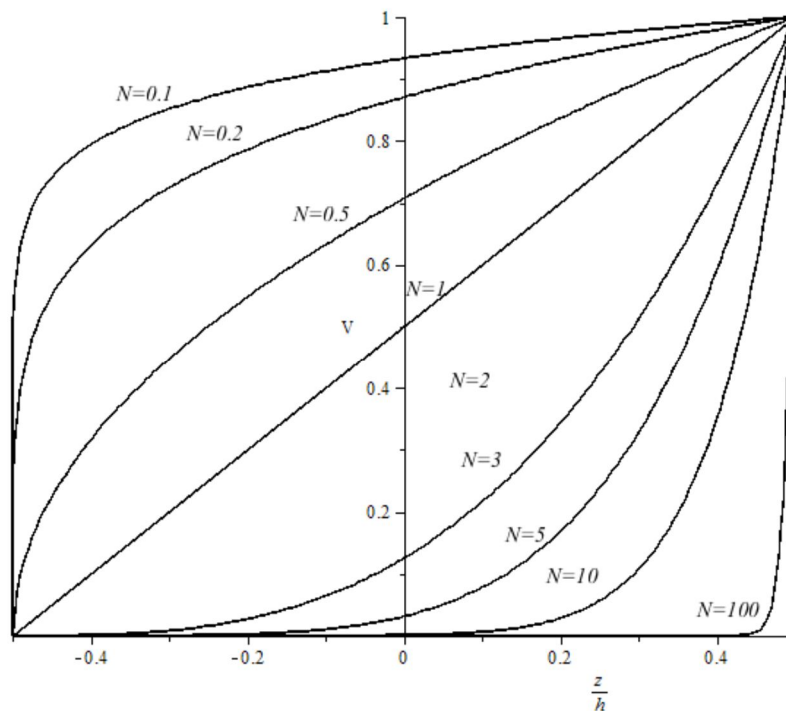


Figure 3.2: La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur.

Afin de modéliser le plus précisément les propriétés d'un FGM, ces propriétés dépendent de la position et de la température. Ceci est atteint en utilisant une simple règle de mélange des matériaux composants (modèle de Voigt). Les propriétés du matériau  $P_f$  d'une couche en FGM, comme le module de Young  $E_f$ , ou le coefficient de dilatation thermique  $\alpha_f$  peuvent être exprimées ainsi [44] :

$$P_T = \sum_i P_i V_i \quad (3.2)$$

$P_i$  et  $V_i$  sont respectivement la propriété et la fraction volumique du matériau constituant  $i$  et :

$$\sum_i V_i = 1 \quad (3.3)$$

Les matériaux à gradient fonctionnel se constituent généralement de deux matériaux, ce qui fait que les propriétés du matériau à gradient fonctionnel dépendent uniquement des propriétés de ses deux constituants, donc les équations (3.2) et (3.3) peuvent être exprimé comme suit [14] :

$$P_T = P_t V_t + P_b V_b \quad (a)$$

$$V_t + V_b = 1 \quad (b)$$

(3.4)

Les matériaux à gradient fonctionnel sont principalement utilisés dans les environnements à très hautes températures, là où les propriétés mécaniques sont sensiblement liées à la température, donc dans la quête à des résultats plus exactes du comportement mécanique, il est important de considérer l'effet de la température dans les propriétés du FGM. L'expression non linéaire (Touloukian 1967) qui décrit les propriétés du matériau en fonction de la température est [8]:

$$P_i = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3)$$

(3.5)

Avec :  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  et  $P_3$  sont des coefficients de température propre au matériau constituant.

Ainsi, Il est possible de définir les différentes propriétés mécaniques (module d'Young  $E(z, T)$ , coefficient de Poisson  $\nu(z, T)$ , conductivité thermique  $\kappa(z, T)$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha(z, T)$ ) d'un matériau à gradient fonctionnel par les expressions suivantes [20]:

$$E_m(z, T) = [E_t(T) - E_b(T)] \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + E_b(T) \quad (a)$$

$$\nu_m(z, T) = [\nu_t(T) - \nu_b(T)] \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + \nu_b(T) \quad (b)$$

$$\kappa_m(z, T) = [\kappa_t(T) - \kappa_b(T)] \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + \kappa_b(T) \quad (c)$$

$$\alpha_m(z, T) = [\alpha_t(T) - \alpha_b(T)] \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + \alpha_b(T) \quad (d)$$

(3.6)

### 3.2.2 Les propriétés des E-FGM :

Plusieurs chercheurs ont utilisé la loi exponentielle pour modéliser et étudier le comportement des plaques à gradient fonctionnel et parmi eux Delale et Erdogan, 1983.

La fraction volumique est supposée obéir à la loi exponentielle suivante [10]:

$$V_m = P_b e^{B\left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (3.7)$$

Avec  $B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{P_t}{P_b} \right)$  et  $P_t, P_b$  sont respectivement les propriétés des matériaux régnant sur la face supérieure et la face inférieure de la plaque.

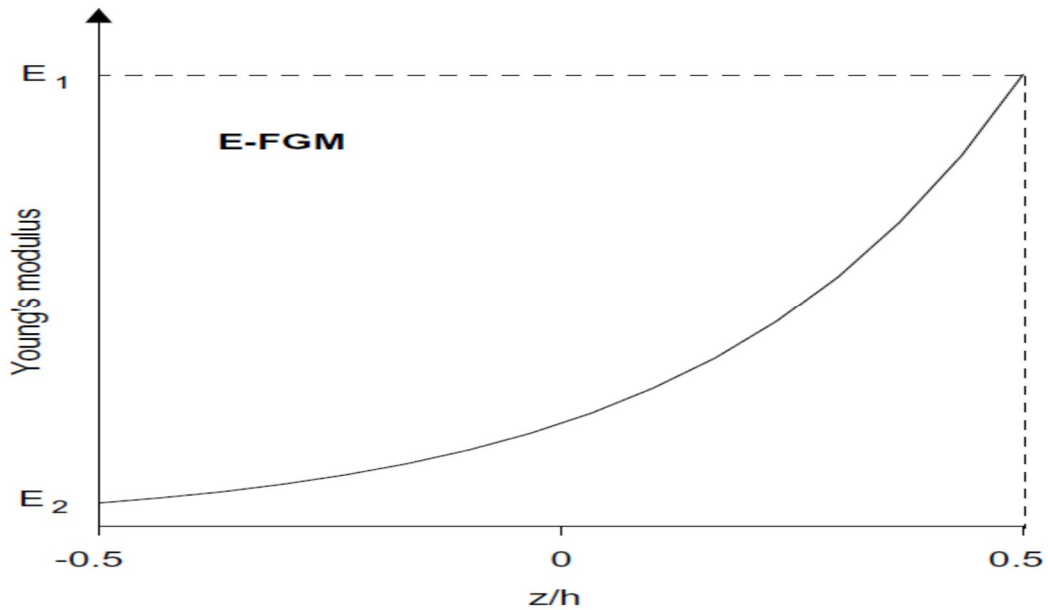


Figure 3.3: Variation du module d'Young suivant la fonction exponentielle.

### 3.2.3 Les Propriétés des S-FGM :

L'utilisation des FGM suivant une loi de puissance pour la distribution de leur fraction volumique engendre une concentration de contraintes au niveau des interfaces qui présentent une variation très rapides des propriétés (Lee et Erdogan, 1995; Bao et Wang, 1995). Par conséquent, Chung et Chi (2001) définirent la fraction volumique en utilisant deux fonctions de puissance pour assurer une distribution de contraintes régulière près des interfaces. Les deux fonctions de puissance sont définies par (Fig. 3.4) [10] :

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^N \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (a)$$

$$V_m(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^N \quad \text{pour} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (b)$$

(3.8)

Donc une quelconque propriété de matériau à gradient fonctionnel peut être exprimée en utilisant la règle des mélanges comme suit [10]:

$$P_m = P_t V_m(z) + [1 - V_m(z)]P_b \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (a)$$

$$P_m = P_t V_m(z) + [1 - V_m(z)]P_b \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (b)$$

(3.9)

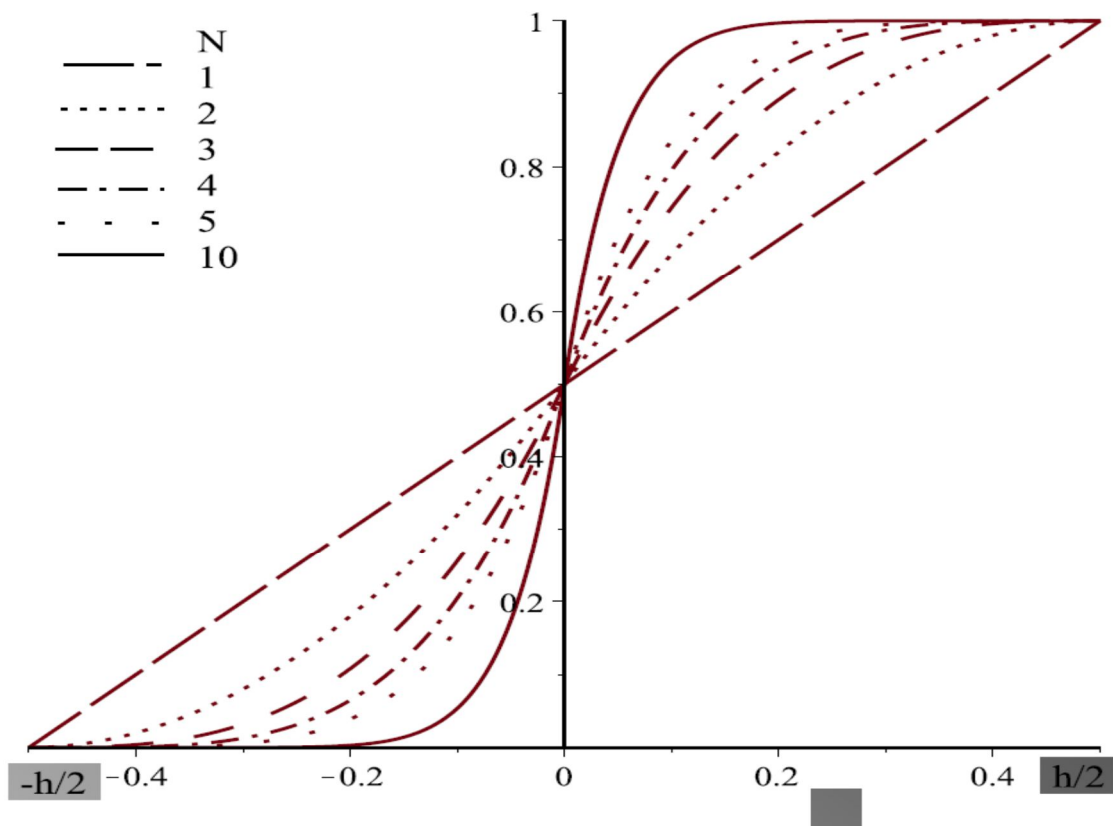


Figure 3.4: Loi de variation des propriétés des S-FGM

### 3.3 La théorie de l'Elasticité :

La théorie de l'élasticité est basée sur l'utilisation des concepts de l'équilibre, de continuité et des équations constitutives des matériaux pour analyser une structure, c'est-à-dire obtenir les champs des déplacements, des déformations et des contraintes en tous points de celle-ci [7]. Cette théorie est résumée dans un ensemble d'équations mathématiques qui englobent les équations d'équilibres, les relations déformations-déplacements et la loi contraintes-déformation (connue sous le nom de : loi de Hook). Les

relations et les équations qui vont suivre sont définies dans un repère cartésien orthonormé de coordonnées  $x, y, z$ , les équations sont en termes des variables de champ, c'est-à-dire les trois déplacements  $u, v$  et  $w$  suivant  $x, y$  et  $z$  respectivement, les neuf composantes du tenseur de contraintes et les neuf composantes du tenseur de déformations. Les contraintes et les déformations normales sont respectivement  $\sigma_{ii}$  ou  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_{ii}$  ou  $\varepsilon_i$  et les contraintes et les déformations en cisaillement sont respectivement  $\tau_{ij}, \gamma_{ij}$ . Donc un problème élastique général est régi par l'ensemble des équations suivantes :

### 3.3.1 Les équations d'équilibre :

La figure suivante (3.5) représente les neuf composantes du tenseur de contraintes dans un élément infinitésimal de dimensions  $dx, dy, dz$ .

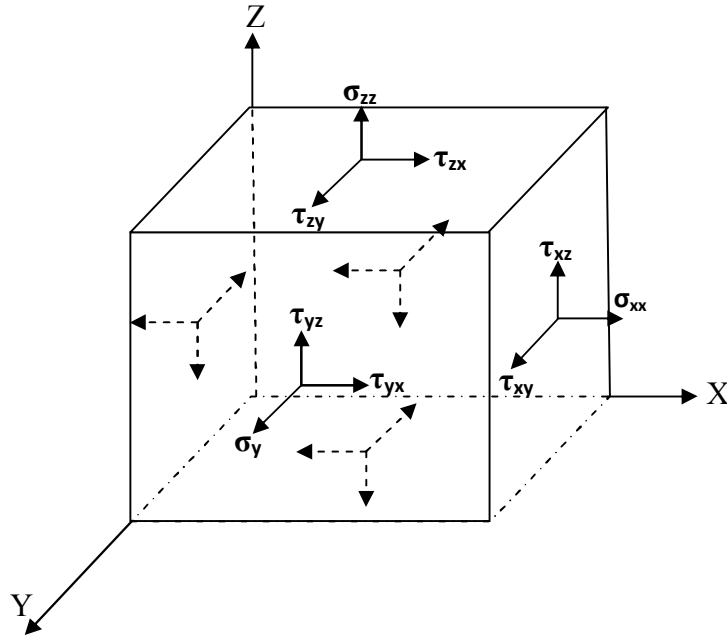


Figure 3.5: Composantes du tenseur de contraintes.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (c)$$

$$(3.10)$$

L'expression (3.10) représente les équations de mouvement de Navier sans forces volumiques ( $\rho \cdot C_i$ ),  $u, v, w$  sont les déplacements et  $\sigma_{ij}$  sont des forces de surfaces [35].

Sous forme tensoriel (compacte) :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

### 3.3.2 Les relations déformations-déplacements :

La déformation est la variation relative de la longueur d'un solide lorsque ce dernier est soumis à une action extérieure. Le tenseur des déformations, sous l'hypothèse des petites perturbations qui est la partie symétrique du gradient du champ de déplacement exprimée par [35]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & (a) \quad \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & (d) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & (b) \quad \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & (e) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & (c) \quad \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & (f) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Cette dernière est sous forme tensoriel (compacte) : Avec :  $U_i = U_j = u, v, w$  et  $x_i = x_j = x, y, z$

$$(3.13)$$

### 3.3.3 Les lois de comportement :

Les matériaux ayant un comportement élastique suivent une loi bien précise introduite par Hook (d'où son nom : loi de Hook) qui décrit la relation linéaire entre les contraintes et les déformations qui règnent dans un corps élastique subissant un effort. La forme générale de la loi de Hook est représentée par l'équation (3.14), où la matrice  $[D]$  est la matrice de rigidité, une matrice pleine de l'ordre  $(6 \times 6)$ , les composantes de cette matrice ne sont généralement pas constantes et dépendent de la position dans la structure et

également du temps et de la température. Pour un matériau isotrope, homogène et linéairement élastique, les propriétés sont les mêmes en tous points de la structure, et ceci réduit le nombre de composantes de cette matrice et se forment de deux constantes qui représentent les propriétés du matériau (Module d'Young et le coefficient de Poisson) [44].

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.14)$$

La symétrie, l'homogénéité et l'isotropie sont des caractéristiques du matériau et de sa géométrie et permettent de réduire le nombre de composantes de la matrice de rigidité, et on peut distinguer différents types de matériaux selon celles-ci, par exemple : les matériaux monocliniques, orthotropiques et isotropique [30]. Dans le cas d'un matériau à gradient fonctionnel dont les propriétés varient selon la direction des coordonnées  $z$ , là où la matrice de rigidité est définie par deux paramètres essentiels qui sont le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ , la loi de comportement qui décrit les contraintes en fonction des déformations s'écrit sous la forme suivante [35] :

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda_l \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (3.15)$$

Avec :  $G$  et  $\lambda_l$  sont les coefficients de Lamé et  $\delta_{ij}$  est la matrice identité avec:

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (a) , \quad \lambda_l(z) = \frac{\nu(z)E(z)}{(1 + \nu(z))(1 - 2\nu(z))} \quad (b) \quad (3.16)$$

Les matériaux à gradient fonctionnel sont caractérisés par une distribution tridimensionnelle non linéaire des phases et des propriétés correspondantes, ils sont distingués des matériaux isotropes classiques par un gradient de composition, une distribution de phase et des propriétés relatives [8]. Les matériaux à gradient fonctionnel sont généralement construits à partir de deux phases de matériaux ayant différentes propriétés. Une description détaillée sur la microstructure des FGM n'est pas toujours disponible, excepter peut être pour les informations sur la distribution de la fraction volumique. Etant donné que la fraction volumique de chaque phase change graduellement



dans la direction du gradient, les propriétés des FGM changent le long de cette direction (typiquement l'épaisseur).

Dans la résolution des problèmes élastiques il est possible de procéder par différentes approches, il est question de déterminer les déplacements en premier lieu dans l'approche en déplacement, en suite les déformations et les contraintes. Comme il est possible de passer par l'approche en contraintes ou l'approche mixte, mais ces dernières nécessitent une condition supplémentaire afin d'assurer la nature continue de la structure, il s'agit de la condition de compatibilité qui s'écrit comme suite [35] :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2}$$

Avec :  $i, j = x, y, z$

(3.17)

### 3.4 Comportement des plaques:

Le comportement des plaques dépend grandement de son épaisseur comparativement aux autres dimensions. On distingue alors trois types de plaques [46]:

- Les plaques minces à petits déplacements : si la déflexion  $w$  de la plaque est très petite comparé à son épaisseur, une théorie approximative très satisfaisante des déplacements de la plaque par des forces latérales peut être développée en posant les hypothèses suivantes :

1. Il n'y a pas de déformation du plan moyen de la plaque, ce plan reste neutre après les déformations.
2. Les surfaces initialement normales au plan moyen de la plaque restent normales à ce plan pendant les déformations.
3. Les contraintes normales à la direction transversale de la plaque peuvent être négligées.

En utilisant ces hypothèses, toutes les composantes des contraintes peuvent être exprimées en fonction de la déflexion  $w$  de la plaque, qui est fonction des deux coordonnées du plan de la plaque. Cette fonction doit satisfaire à l'équation différentielle partielle linéaire régissant le mouvement de la plaque, qui en plus des conditions aux limites, définit complètement  $w$ . Ainsi, la solution de cette équation donne toutes les informations nécessaires pour calculer les contraintes en tout point de la plaque.

La deuxième hypothèse est équivalente à l'élimination de l'effet des contraintes de cisaillement dans la déflexion de la plaque. Cette hypothèse est généralement satisfaisante, mais dans certains cas (par ex : dans le cas des trous dans les plaques) l'effet du cisaillement devient important et quelques corrections dans la théorie des plaques minces doivent être introduites.

Si, en plus des forces latérales, des forces extérieures s'exercent sur le plan moyen de la plaque, la première hypothèse ne tient plus, et il est nécessaire de prendre en considération l'effet de ces contraintes sur les déflexions de la plaque. Ceci peut être introduit par des termes supplémentaires dans l'équation différentielle mentionnée auparavant.

- Les plaques minces à grands déplacements: la première hypothèse est complètement satisfaite uniquement si la plaque est pliée en une surface développable. Dans d'autres cas la déflexion d'une plaque est accompagnée par des déformations du plan moyen, mais les calculs ont montré que les contraintes correspondantes dans le plan moyen sont négligeables si les déflexions de la plaque sont petites par rapport à l'épaisseur. Si les déflexions ne sont pas petites, ces contraintes supplémentaires doivent être prises en considération en dérivant l'équation différentielle de la plaque. Dans ce cas on obtient des équations non linéaires et la solution du problème devient beaucoup plus compliquée. Dans le cas des grandes déformations, on doit aussi distinguer entre les extrémités fixes et les extrémités libres de mouvoir dans le plan de la plaque, qui peut avoir un maintien considérable sur la magnitude des déflexions et des contraintes de la plaque [46]. A cause de la courbure du plan moyen déformé de la plaque, les contraintes en tensions supplémentaires, qui sont prédominantes, agissent à l'opposé des forces latérales données ; ainsi, les forces appliquées sont maintenant transmises en partie par la rigidité en flexion et en autre partie par l'action de membrane de la plaque. Par conséquent, les plaques très minces ayant une résistance négligeable se comportent comme des membranes, excepter

peut être pour le cas des bords étroits où la déflexion peut surgir à cause des conditions aux limites imposées à la plaque.

- Les plaques épaisses : la théorie simplifiée des plaques minces, devient invalide dans le cas des plaques d'épaisseurs considérables, spécialement dans le cas des forces hautement concentrées. Dans des cas pareils, la théorie des plaques épaisses doit être appliquée. L'analyse des contraintes devient par conséquent, plus compliquée. En utilisant cette analyse, les corrections nécessaires de la théorie des plaques minces en des points d'application de chargement concentré peuvent être introduites.

En outre, la théorie classique des plaques est une simplification du problème en trois dimensions en un autre en deux dimensions, celles du plan de la plaque. Pour cela, il est donc nécessaire d'avancer des hypothèses dans le but d'éliminer l'effet de la dimension enlevée, il s'agit de supprimer la coordonnée de l'épaisseur des équations finales, en d'autres termes, si les déplacements, les déformations ainsi que les contraintes peuvent être déterminées en tous points du plan de référence, il est alors possible, en vertu des hypothèses de la théorie, de déterminer ces quantités en tous points de la structure tridimensionnelle [33].

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme élément des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. En 1888, Love avait utilisé les hypothèses de Gustav Kirchhoff, qui sont elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces qui est également appelée théorie classique ou théorie de Love-Kirchhoff. La théorie des plaques semi-épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories [30] : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Love-Kirchhoff), théorie des plaques semi-épaisses qui est appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner, cette dernière est généralement appliquée

pour les cas de déformations du premier ordre. La théorie d'ordre supérieur est applicable aux plaques épaisses (Reddy).

Ces théories, sauf celle de l'élasticité tridimensionnelle, sont basées sur le principe qui suppose une fonction décrivant les déplacements de la section normale à travers l'épaisseur de la plaque. Par exemple, la théorie du premier ordre suppose que la normale au plan moyen se déplace linéairement par rapport à sa position initiale. La figure (3.6) montre les différents cas de déplacements de la section normale. Cependant, la différence entre ces théories ne se résume pas à la fonction qui décrit les déplacements, mais aussi, les autres hypothèses qui les décrivent.

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de forme  $f(z)$ . Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Whitney, 1973 ; Nelson, 1974 ; Lo, 1977 ; Touratier, 1991; Reddy...).

Ces théories sont développées sur une base d'hypothèses plus réalistes que celles d'ordre inférieur et qui sont :

- Les déplacements sont petits, comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas forcément planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en générale pas négligeable.

De nouvelles formulations et théories d'ordre supérieur ont vu le jour ces dernières années. Suite à des travaux remarquables de Carrera, ce dernier a proposé une formulation compacte et unifiée des théories qui ne sont pas pratiques vu le nombre d'ordre supérieur introduits dans la formulation.

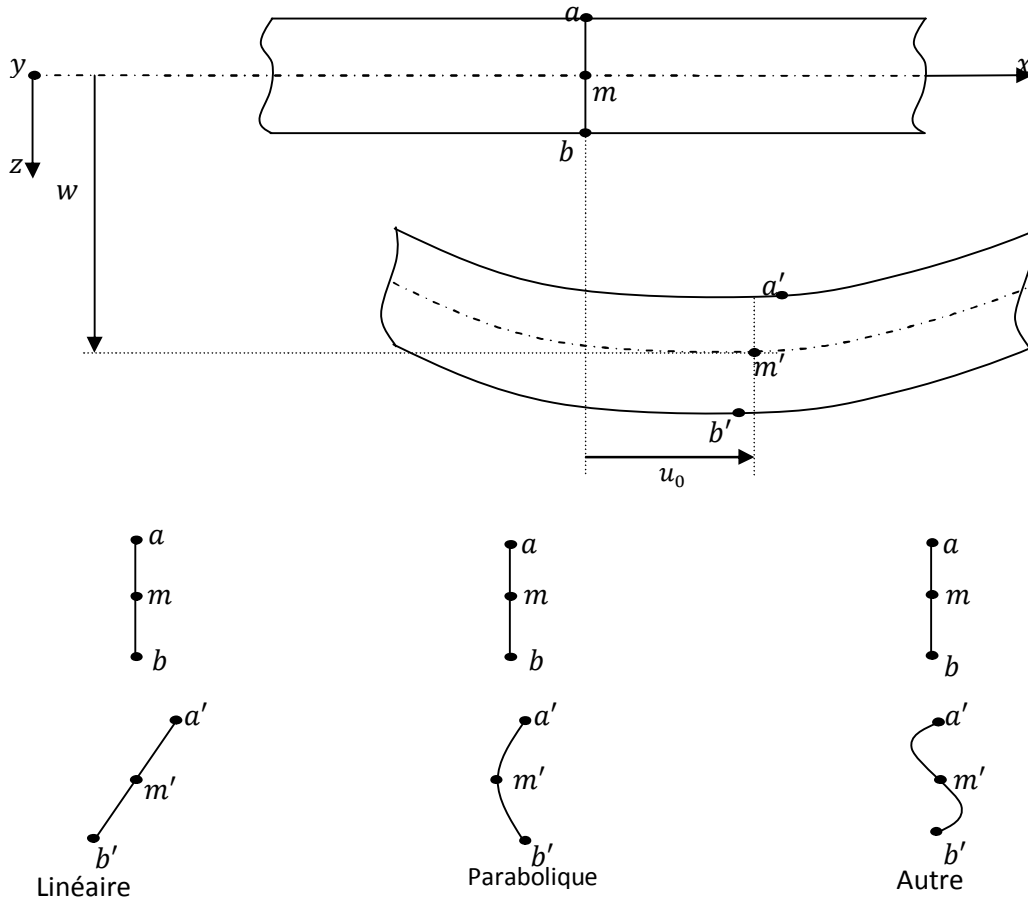


Figure 3.6: Déformations de la section normale par rapport au plan moyen

### 3.5 La théorie classique des plaques minces :

#### 3.5.1 Hypothèses :

Pour ce qui est des plaques il est très convenable de départager les différentes composantes des tenseurs de contraintes et des déformations en celles qui correspondent à la flexion  $(\sigma_x, \varepsilon_x)$  et  $(\sigma_y, \varepsilon_y)$ , celles qui correspondent aux cisaillements transversaux  $(\tau_{xz}, \gamma_{xz})$  et  $(\tau_{yz}, \gamma_{yz})$  et finalement celles qui correspondent aux contractions/étirements de l'épaisseur  $(\sigma_z, \varepsilon_z)$ . L'évaluation de ces entités pour des taux différents

d'épaisseur/longueur va permettre d'extraire les hypothèses de bases qui régissent la théorie classique des plaques [6].

Il s'agit donc d'étudier la contribution de chacune de ces entités dans l'équation de l'énergie potentielle de la structure concernée, car du point de vue théorique, une approximation bidimensionnelle d'un problème tridimensionnelle ne peut être apprécié que si elle aboutit à une estimation raisonnable de cette énergie.

L'équation de l'énergie potentielle s'écrit, pour le cas général d'un problème élastique, comme suit [7]:

$$U_p = \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \quad (3.18)$$

A partir des résultats obtenus de l'analyse de cette énergie, il est clair que certaines entités peuvent être négligées, et ceci conduit à une étude plus simple et très satisfaisante particulièrement pour ce qui est des résultats. Ainsi, dans le cas d'une plaque mince il est possible de négliger les quantités suivantes  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_z, \sigma_z$ , cette issue est le début du fondement des hypothèses de bases qui régissent la théorie classique des plaques.

### 3.5.2 Champs des déformations et des déplacements:

En utilisant les relations déplacement-déformations décrites auparavant et en tenant compte de ce qui avancé pour les déformations, avec:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (a)$$

$$\gamma_{yz} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad (b)$$

$$\gamma_{xz} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (c)$$

(3.19)

L'expression (3.19) montre que la déflexion  $w$  est indépendante de  $z$ , En intégrant les équations par rapport à  $z$  on obtient le champ des déplacements [34]:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (b)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (c)$$

(3.20)

Ces équations sont à l'origine de calculs et de déductions géométriques. Il est possible de démontrer physiquement ces relations grâce à une interprétation des déformations et des déplacements que subit une plaque mince quelconque.

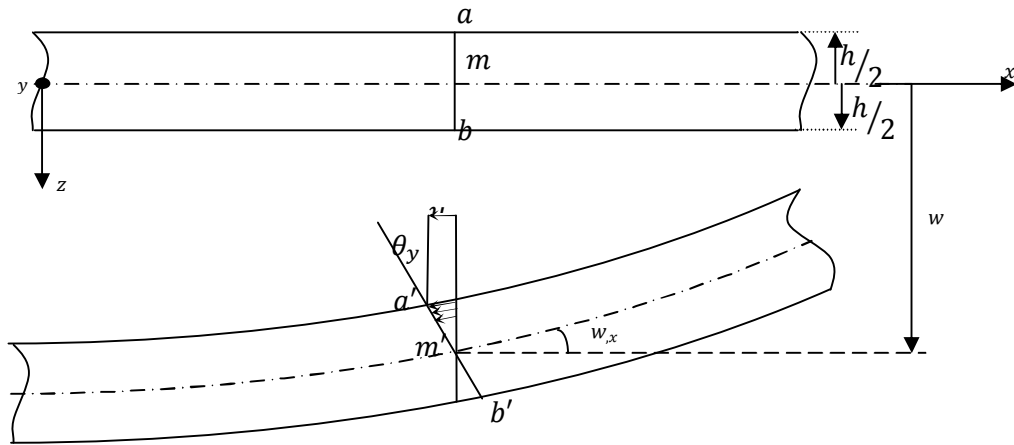


Figure 3.7: Cinématique des déformations.

A partir de la figure (3.7) et en utilisant les relations purement géométriques, nous nous intéressons à la normale ( $amb$ ) au plan moyen, lorsque le point  $m$  se déplace verticalement à la position  $m'$  à cause du déplacement  $w$  de la plaque, le plan moyen fait une rotation d'un angle  $w_x$  autour de l'axe  $y$  et la normale fait une rotation de  $\theta_y$  et occupe ainsi la position ( $a'm'b'$ ) :

L'angle de déformation  $\theta_y$  du point  $a$  par rapport à l'axe des  $y$  est :

$$\sin \theta_y = \frac{u_a}{h/2}$$

(3.21)

Etant donné que les angles de déformations sont très petits ( $\ll 10$ ) il est possible d'écrire  $\sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta$  Alors :

$$\theta_y = \frac{u_a}{h/2}$$

Nous avons aussi :

$$u_a = \left(\frac{h}{2}\right)w_{,x}$$

Donc :

$$\theta_y = \frac{u_a}{h/2} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)w_x}{h/2} = w_{,x}$$

(3.22)

De la même manière il est possible de déterminer l'angle de rotation  $\theta_x$  de la normale au plan moyen autour de l'axe des  $x$  et on obtient ainsi :

$$\theta_x = w_{,y}$$

(3.23)

Dès lors, cette démonstration montre que les normales au plan moyen restent perpendiculaires au plan moyen après déformation [4], il est aussi possible de conclure ainsi à partir du fait que les cisaillements transversaux  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  sont négligés, et ceci, en le combinant avec le fait que les déformations transversales normales sont supposés être nulles, mène à l'une des hypothèses de la théorie classique des plaques connues sous le nom [7]: *''hypothèse de Kirchhoff-Poisson''* :

*« Les normales au plan moyen de la plaque indéformée ne subissent pas de changement de longueur et restent normales au plan moyen déformé »*

L'autre hypothèse qui régit la théorie classique des plaques provient du fait que les contraintes normales transversales  $\sigma_z$  sont négligées, et en introduisant celle-ci dans la loi de comportement d'un matériau isotrope on obtient alors les modifications suivantes :

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda_l(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0 \quad (a)$$



$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda_l(z)}{\lambda_l(z) + 2G(z)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{\nu(z)}{(1 - \nu(z))}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (b)$$

(3.24)

En substituant ces résultats dans les autres équations, nous obtenons :

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{(1 - \nu(z)^2)}(\varepsilon_x + \nu(z)\varepsilon_y) \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{(1 - \nu(z)^2)}(\varepsilon_y + \nu(z)\varepsilon_x) \quad (b)$$

(3.25)

La relation entre le cisaillement et le glissement dans le plan est donnée par :

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

(3.26)

Cette loi de contraintes-déformations, obtenue par l'élimination de  $\varepsilon_z$  de la loi de comportement tridimensionnelle par le fait que  $\sigma_{zz} = 0$ , est connue comme étant :

*« La loi de comportement réduites des contraintes planes ».*

Et dans le cas d'un problème de contraintes planes qui correspond au champ de déplacement des expressions (3.20), les relations déformations-déplacements s'écrivent sous la forme suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \quad (a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \quad (b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (c)$$

(3.27)

Nous pouvons écrire :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \quad (a)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \quad (b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (c)$$

(3.28)

Les quantités  $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}$  sont les courbures en flexion dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement, et la quantité  $2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  est la distorsion de la plaque.

La loi de comportement réduite qui correspond à ces déformations est [34]:

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{(1 - \nu(z)^2)} \left\{ \varepsilon_x^0 + \nu(z)\varepsilon_y^0 - z \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right] \right\} \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{(1 - \nu(z)^2)} \left\{ \varepsilon_y^0 + \nu(z)\varepsilon_x^0 - z \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right] \right\} \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{(1 + \nu(z))} \left[ \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (c)$$

(3.29)

Dans ce qui est précédemment avancé, l'hypothèse d'une déformation normale transversale nulle n'est pas appliquée, c'est-à-dire  $\varepsilon_z \neq 0$ , ce qui est le cas d'un problème d'élasticité générale, et si une analyse est faite sur la loi de comportement d'un tel problème (tridimensionnel), il est clair qu'il n'est pas possible que les contraintes et les déformations normales dans la même direction soient simultanément nulles ( $\sigma_{zz} = \varepsilon_{zz} = 0$ ). Cependant, ceci est le fondement des hypothèses de la théorie classiques des plaques, donc l'hypothèse d'une déformation  $\varepsilon_{zz}$  nulle et celle d'une contrainte  $\sigma_{zz}$  nulle, sont mutuellement contradictoires. Par contre, si l'hypothèse d'une déformation  $\varepsilon_{zz}$  nulle n'est

pas considérée, le déplacement  $w$  dépendra de  $z$ , et le champ des déplacements de l'expression (3.20) n'est plus valable.

Or, dans le but d'obtenir une formulation simple de la théorie des plaques minces il est nécessaire de prendre cette hypothèse en considération. L'hypothèse supplémentaire est contradictoire d'une contrainte normale  $\sigma_{zz}$  nulle, qui résulte de la loi de comportement réduite des contraintes planes, et qui est utilisée uniquement pour une plus grande exactitude.

Une autre violation de la loi de comportement a lieu dans la théorie classique des plaques, qui est en rapport avec la relation entre les composantes de glissement  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  et les composantes de cisaillement  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ . Une utilisation directe des lois de comportement conduit à des contraintes de cisaillements  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  nulles, ce qui est non acceptable pour la raison que ces contraintes sont requises pour contrebalancer les chargements transversaux appliqués. Ainsi, il est important de considérer l'existence des contraintes de cisaillements non nulles.

Ainsi, cette discussion conduit à l'instauration d'une autre hypothèse auprès de l'hypothèse de Kirchhoff-Poisson et qui énonce [7] :

*« La loi de comportement réduite des contraintes planes obtenue par l'élimination des contraintes normales transversales est jugée bonne. Par ailleurs, tandis que les déformations de glissement transversales sont considérées nulles, les contraintes de cisaillement existent dans le but d'assurer l'équilibre de la structure ».*

### 3.6 Les équations d'équilibre :

Dans un problème d'élasticité, une plaque subissant des chargements transversaux quelconques d'intensité  $q(x, y, t)$  doit pouvoir supporter ces chargements, autrement dit, la plaque réagit d'une telle manière qu'elle puisse créer l'équilibre dans chacun de ses éléments. La figure (3.8) montre le cas général d'un élément d'une plaque en équilibre.

Les équations d'équilibre de la théorie classique des plaques obtenues par le bilan des forces  $Q$  et des moments  $M$  d'un élément de dimensions  $dx, dy$  sont :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (c)$$

(3.30)

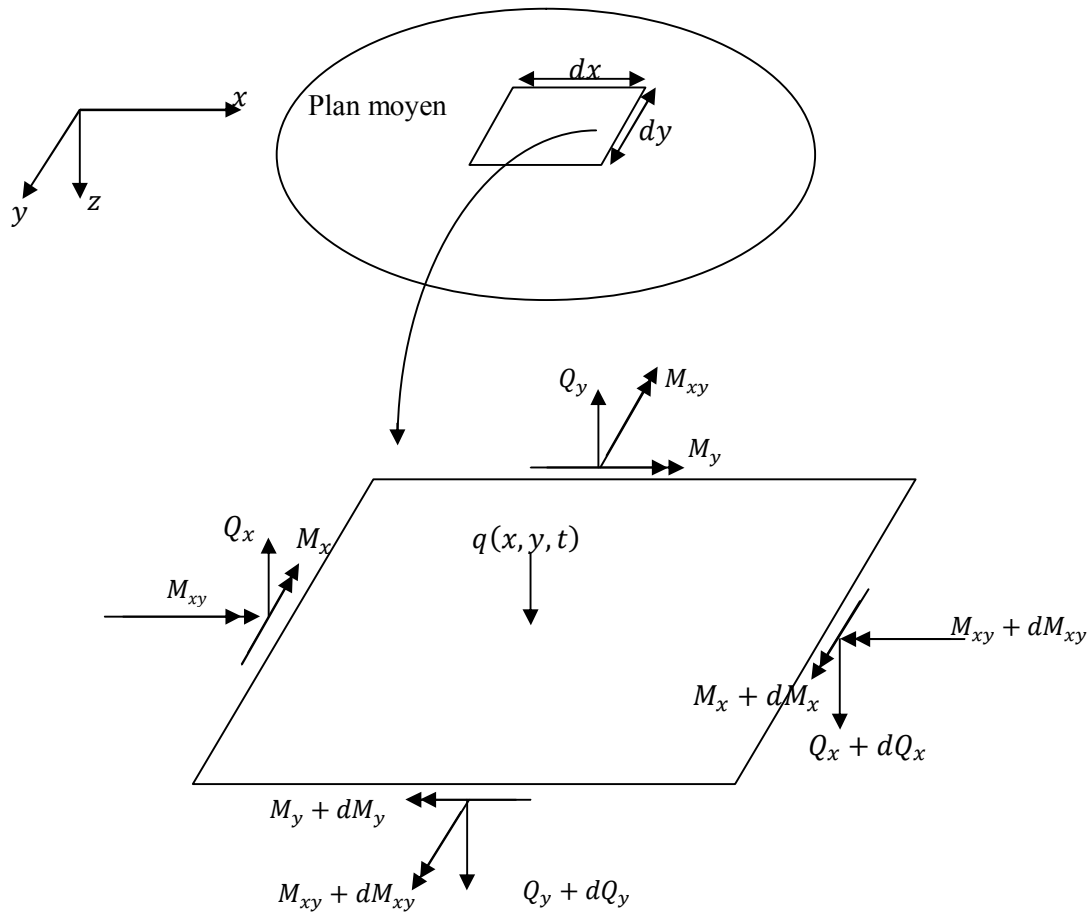


Figure 3.8 : Equilibre d'un élément de plaque.

### 3.7 La théorie du premier ordre des plaques moyennement épaisses :

La théorie des déformations du premier ordre des plaques moyennement épaisses (FSDT) décrite par Mindlin est une forme développée de la théorie classique de Kirchhoff,

les deux théories représentent le même champ de déplacements linéaire en fonction de l'épaisseur, en plus, les deux théories nécessitent l'introduction d'un facteur de correction pour rectifier les déformations en cisaillement. Cependant, la différence réside dans les hypothèses de base. La théorie de Mindlin prend en considération les déformations en cisaillement transversal qui sont responsables des rotations autour des axes du plan, ce qui n'est pas le cas de la théorie de Kirchhoff. Par conséquent la théorie de Mindlin peut être utilisée pour les plaques moyennement épaisses et non pas celle de Kirchhoff. L'expression des déplacements suit une fonction linéaire qui dépend de l'épaisseur et s'exprime par les relations suivantes [5] :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \quad (a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \quad (b)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (c)$$

(3.31)

Les déplacements  $u_0, v_0, w_0$  représentent les déplacements du plan moyen de la plaque et  $\theta_x, \theta_y$  sont les rotations de la normale au plan moyen par rapport aux axes  $x, y$  respectivement,  $u, v, w$  représentent les déplacements tout point de la plaque à un instant  $t$ .

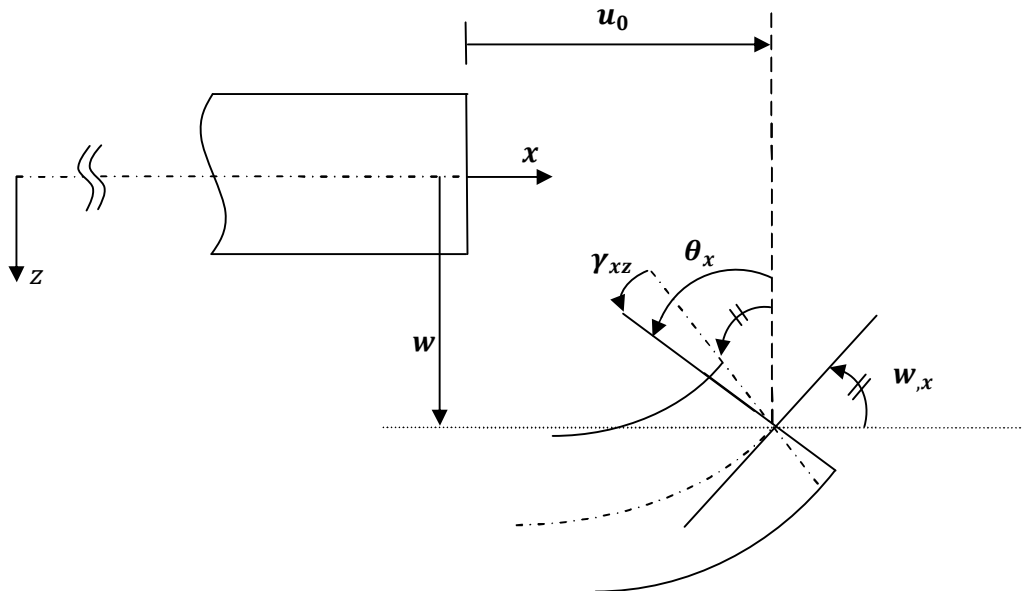


Figure 3.9: Cinétique des déformations d'après la théorie de Reissner-Mindlin.

### 3.7.1 Détermination des champs de déformations et de contraintes:

#### 3.7.1.1 Champ de déformations :

En se référant à la définition des déformations en termes de déplacements dans un milieu élastique, nous obtiendrons les expressions des déformations qui correspondent à la théorie du premier ordre de Mindlin suivantes [5]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z \theta_{x,x} \quad (a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z \theta_{y,y} \quad (b)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (c)$$

(3.32)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left[ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right] \quad (a)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z [\theta_{x,y} + \theta_{y,x}] \quad (b)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = w_{,x} + \theta_x \quad (c)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = w_{,y} + \theta_y \quad (d)$$

(3.33)

L'écriture des déformations sous forme condensée donne :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z \varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

(3.34)

Avec :  $\{\varepsilon_p\}$  les déformations en membrane,  $\{\varepsilon_b\}$  les déformations en flexion,  $\{\varepsilon_s\}$  les déformations en cisaillement.

$$\{\varepsilon_p\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_b\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

### 3.7.1.2 Champ de contraintes :

Dans le cas des matériaux à gradient fonctionnel qui présentent une distribution de la fraction volumique le long de l'épaisseur, et par conséquent une variation des propriétés à travers cette dimension, et en prenant en compte l'hypothèse d'une contrainte normale transversale nulle, la loi du comportement définit précédemment peut s'écrire comme suit :

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{(1-\nu(z)^2)} (\varepsilon_x + \nu(z)\varepsilon_y) \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{(1-\nu(z)^2)} (\varepsilon_y + \nu(z)\varepsilon_x) \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \gamma_{xy} \quad (c)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \gamma_{xz} \quad (d)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \gamma_{yz} \quad (e)$$

(3.36)

En substituant les déformations obtenues par la théorie du premier ordre dans ces équations :

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{(1-\nu(z)^2)} (\varepsilon_x^0 + \nu(z)\varepsilon_y^0 + z[\nu(z)\theta_{y,y} + \theta_{x,x}]) \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{(1-\nu(z)^2)} (\varepsilon_y^0 + \nu(z)\varepsilon_x^0 + z[\theta_{y,y} + \nu(z)\theta_{x,x}]) \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} (\gamma_{xy}^0 + z[\theta_{x,y} + \theta_{y,x}]) \quad (c)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} (w_{,x} + \theta_x) \quad (d)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} (w_{,y} + \theta_y) \quad (e)$$

(3.37)

La forme matricielle de la loi du comportement pour un matériau à gradient fonctionnel (FGM) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

(3.38)

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{(1-\nu(z)^2)}, \quad Q_{12} = \frac{E(z)\nu(z)}{(1-\nu(z)^2)}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

(3.39)

### 3.7.2 Détermination des efforts et moments appliqués à la plaque FGM :

Dans le cas général d'une plaque mince où moyennement épaisse, les efforts et moments qui s'appliquent sur celle-ci sont représentés dans la figure (3.10) et qui correspondent à trois efforts dans le plan de la plaque  $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ , deux efforts tranchants  $\{Q_x, Q_y\}$  et trois moments  $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ .

La convention de signe pour les efforts et les moments qui s'appliquent sur une plaque est indiquée dans la figure (3.10), où les quantités positives sont montrées.



Les quantités  $M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}$  sont fonction des coordonnées du plan  $x, y$  uniquement, et ils renvoient au plan moyen de la plaque. En plus, en tous points de la plaque le moment  $M_{xy}$  s'applique simultanément autour des axes  $x, y$  **en raison du principe du cisaillement complémentaire**. Les contraintes résultantes en membrane  $\{N\}$  et les contraintes résultantes en flexion  $\{M\}$  prennent la forme des équations (3.40) et elles peuvent être exprimées en fonction des déformations de la théorie du premier ordre

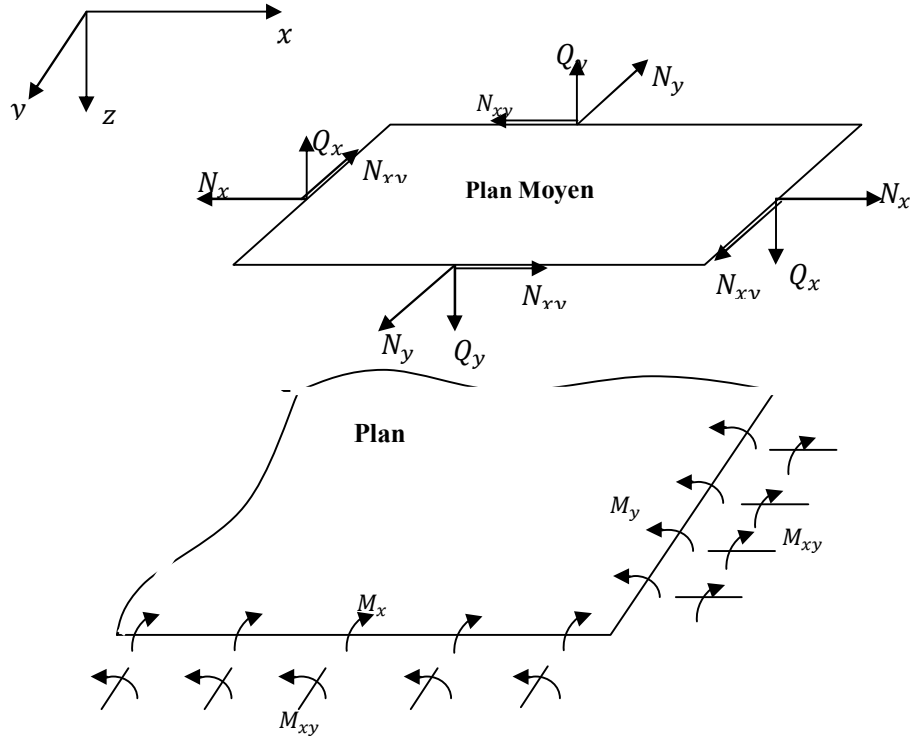


Figure 3.10: Convention de signe des moments appliqués sur une plaque (+)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z dz \quad (b)$$

(3.40)

La relation entre ces résultantes et les déformations en membrane  $\{\varepsilon_p\}$  et les déformations en flexion  $\{\varepsilon_b\}$  peut être exprimée ainsi :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

(3.41)

Avec :

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz, & A_{12} = A_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz, & A_{33} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz \\ B_{11} = B_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \cdot z dz, & B_{12} = B_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} \cdot z dz, & B_{33} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} \cdot z dz \\ C_{11} = C_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \cdot z^2 dz, & C_{12} = C_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} \cdot z^2 dz, & C_{33} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} \cdot z^2 dz \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.8 Conclusion:

Dans ce chapitre, la modélisation d'une plaque FGM de différentes propriétés a été faite avec des présentations graphiques de chaque modèle, nous avons donc constaté qu'il existe plusieurs fonctions qui décrivent le gradient de distribution des deux matériaux constituants ou plus. Suite à cela, nous avons présenté la théorie de l'élasticité avec les équations d'équilibre, les lois de comportement ont été présentées, ensuite, le comportement des plaques avec des hypothèses appropriées pour chaque type, nous avons aussi présenté la théorie classique des plaques minces, et la théorie du premier ordre des plaques moyennement épaisses. À la fin de ce chapitre, nous avons déterminé les champs de déformations et de contraintes, ainsi que les efforts et les moments en fondant sur le modèle des plaques correspondant à la théorie du premier ordre de Mindlin que nous allons utiliser dans le chapitre suivant pour les équations du mouvement.

## Chapitre 4 : Energie totale du système et équations de mouvement

---

### 4.1 Introduction :

Le présent chapitre a pour objectif d'établir les équations de mouvement de notre système, en se basant sur l'étude théorique faite au chapitre précédent. En fait, les mouvements de la plaque sont étudiés selon les hypothèses de Mindlin-Reissner. Celles-ci permettent la prise en compte de l'inertie de rotation et de la déformation de cisaillement. Elles sont adaptées à l'étude des vibrations à haute fréquence et permettent de décrire le mouvement des plaques minces et moyennement épaisses dans l'écoulement supersonique.

### 4.2 Équations du mouvement de la plaque :

Pour établir les équations de la dynamique de la plaque, nous appliquons le principe variationnel d'Hamilton qui est un principe général pouvant être appliqué aux problèmes de mécanique des solides déformables [46]. Pour un déplacement virtuel  $\delta U$ , il s'écrit:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta W_i + \delta W_e) dt = 0 \quad (4.1)$$

Avec les conditions :

$$\delta U(t_1) = \delta U(t_2) = 0 \quad (4.2)$$

Dans cette expression,  $\delta$  représente l'opérateur de variation,  $\delta T$ ,  $\delta W_i$  et  $\delta W_e$  représentent respectivement, la variation d'énergie cinétique, la variation d'énergie de déformation et la variation du travail des efforts extérieurs s'exerçant sur la plaque. Ce principe est généralement utilisé pour déterminer l'ensemble des équations de mouvement et les conditions aux limites pour un état de contrainte et de déformation donné. Pour cela, il est bien nécessaire de déterminer la variation de chaque terme de l'énergie.

### 4.3 Energie cinétique :

L'énergie cinétique est définie par [46]:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV \quad (4.3)$$

En respectant les hypothèses cinématiques de Mindlin-Reissner, l'énergie cinétique de la plaque s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dz dA = \frac{1}{2} \int_A \left[ \rho h \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho I \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA \quad (4.4)$$

La variation de l'énergie cinétique, pour un déplacement virtuel  $\delta U$ , s'écrit :

$$\delta T = \int_A \left[ \rho h \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \rho I \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right) + \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] dA \quad (4.5)$$

Après intégration par parties, en identifiant les termes à zéro, on obtient, pour un déplacement virtuel  $\delta U$ , la variation d'énergie cinétique suivante :

$$\delta T = \int_A \left[ -\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i - \rho I \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} \delta \theta_i - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dA \quad (4.6)$$

### 4.4 Energie de déformation :

A partir de la théorie classique de l'élasticité, la densité d'énergie de déformation pour un solide élastique linéaire et isotrope est définie par [37]:

$$W_d = \frac{1}{2} \sigma_{kl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \sigma_{iz} \varepsilon_{iz} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) \quad (4.7)$$

Soit, en considérant les hypothèses retenues :

$$W_d = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} n_{ij} - z \sigma_{ij} m_{ij} + \sigma_{iz} q_i) \quad (4.8)$$

On définit alors la densité d'énergie de déformation pour une surface unitaire :

$$W_s = \int W_d dz = \frac{1}{2} (N_{ij} n_{ij} + M_{ij} m_{ij} + Q_i q_i) \quad (4.9)$$

La variation de l'énergie de déformation pour une surface élémentaire s'écrit :

$$\delta W_s = \frac{\partial W_s}{\partial n_{ij}} \delta n_{ij} + \frac{\partial W_s}{\partial m_{ij}} \delta m_{ij} + \frac{\partial W_s}{\partial q_i} \delta q_i \quad (4.10)$$

Par ailleurs, les efforts et les moments de flexion peuvent être définis à partir de l'énergie de déformation par :

$$N_{ij} = \frac{\partial W_s}{\partial n_{ij}} \quad (4.11)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial W_s}{\partial m_{ij}} \quad (4.12)$$

$$Q_i = \frac{\partial W_s}{\partial q_i} \quad (4.13)$$

Par identification, la variation de l'énergie de déformation pour une surface élémentaire s'écrit :

$$\delta W_s = N_{ij} \delta n_{ij} + M_{ij} \delta m_{ij} + Q_i \delta q_i \quad (4.14)$$

En fonction des déplacements,  $\delta W_s$  s'exprime par :

$$\delta W_s = N_{ij} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + M_{ij} \delta \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right) - Q_i \delta \theta_i + S_i \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \quad (4.15)$$

Avec :

$$S_i = N_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} + Q_i \quad (4.16)$$

La variation de l'énergie de déformation pour la plaque entière est :

$$\delta W_i = \int_A \delta W_s dA = \int_A \left[ N_{ij} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + M_{ij} \delta \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right) - Q_i \delta \theta_i + S_i \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \right] dA \quad (4.17)$$

#### 4.5 Expression du travail des efforts extérieurs:

Le travail effectué par les charges extérieures non conservatrices appliquées sur la plaque s'exprime par [38] :

$$W_e = \int_A (\mathbf{p}_{int} - \mathbf{p}_{ext}) \mathbf{w} dA \quad (4.18)$$

Dans l'expression (4.18), la pression  $p_{int}$  correspond à la pression qu'exerce l'air sur la plaque à l'interface. Le terme  $p_{ext}$  représente la pression provenant d'un chargement extérieur qui s'exerce sur la face de la plaque qui n'est pas en contact avec l'air.

La variation du travail des forces extérieures, pour un déplacement virtuel  $\delta W_e$ , s'écrit :

$$\delta W_e = \int_A (\mathbf{p}_{int} - \mathbf{p}_{ext}) \delta \mathbf{w} dA = \int_A \Delta \mathbf{p} \delta \mathbf{w} dA \quad (4.19)$$

## 4.6 Reformulation des équations pour une plaque FGM:

### 4.6.1 Caractéristiques de la plaque :

Soit une plaque faite avec un mélange de céramique et de métal. Nous définissons un repère de coordonnées  $x, y$  le long des directions longitudinale et transversale de l'avion, et  $z$  le long de l'épaisseur de la plaque. Le matériau sur la surface supérieure ( $z = h / 2$ ) de la plaque est 100 % céramique et celui sur la surface inférieure ( $z = - h / 2$ ) est 100 % métal. Le module de Young  $E$  et le coefficient du Poisson  $\nu$  du FGM sont évalués en utilisant la règle des mélanges suivante [13]. :

$$E = E_c V_c + E_m V_m \quad (\text{a})$$

$$\nu = \nu_c V_c + \nu_m V_m \quad (\text{b})$$

(4.20)

$V_i$  ( $i = c, m$ ) est la fraction de volume du matériau  $i$ . Les indices  $c$  et  $m$  se rapportent à des phases en céramique et en métal, respectivement. La fraction volumique des phases en céramique et en métal tel que  $V_c + V_m = 1$ .  $V_c$  est exprimée comme suit:

$$V_c(z) = \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^N$$

(4.21)

### 4.6.2 Equation de l'énergie cinétique :

L'équation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée en termes des variables de champ :

$$\boldsymbol{\gamma} = (u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y)$$

(4.22)

L'énergie cinétique s'écrit [46]:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \{\dot{\boldsymbol{U}}\}^T \{\dot{\boldsymbol{U}}\} dV$$

(4.23)

Et donc :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \{ \dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} dV \quad (4.24)$$

D'après la théorie des déformations du premier ordre de Mindlin (chapitre 3), et après avoir dérivé l'expression (3.31) par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{u}(x, y, z, t) = \dot{u}_0(x, y, t) + z\dot{\theta}_x(x, y, t) \quad (a)$$

$$\dot{v}(x, y, z, t) = \dot{v}_0(x, y, t) + z\dot{\theta}_y(x, y, t) \quad (b)$$

$$\dot{w}(x, y, z, t) = \dot{w}(x, y, t) \quad (c)$$

(4.25)

En introduisant ces relations dans l'équation (4.24) nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \{ \dot{u}_0 + z\dot{\theta}_x \quad \dot{v}_0 + z\dot{\theta}_y \quad \dot{w} \} \begin{Bmatrix} \dot{u}_0 + z\dot{\theta}_x \\ \dot{u}_0 + z\dot{\theta}_x \\ \dot{w} \end{Bmatrix} dV \quad (4.26)$$

Et donc :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) [(\dot{u}_0 + z\dot{\theta}_x)(\dot{u}_0 + z\dot{\theta}_x) + (\dot{v}_0 + z\dot{\theta}_y)(\dot{v}_0 + z\dot{\theta}_y) + \dot{w}^2] dV \quad (4.27)$$

En isolant chaque terme nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[ (\dot{u}_0)^2 + z^2(\dot{\theta}_x)^2 + (2z\dot{u}_0\dot{\theta}_x) + (\dot{v}_0)^2 + z^2(\dot{\theta}_y)^2 + (2z\dot{v}_0\dot{\theta}_y) + \dot{w}^2 \right] dV \quad (4.28)$$



En intégrant cette dernière par rapport à  $z$  sachant que  $w$  est indépendant de  $z$  et  $dV = dAdz$ , nous aurons :

$$T = \frac{1}{2} \int_A \left[ I_0 (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}^2) + I_1 (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_x^2) + I_2 (\dot{u}_0 \dot{\theta}_x + \dot{v}_0 \dot{\theta}_y) \right] dA \quad (4.29)$$

Avec :

$$I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz, \quad \text{et} \quad I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z^2 dz \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z dz \quad (4.30)$$

$\rho(z)$  est la masse volumique qui varie à travers l'épaisseur de la plaque.

Si nous appliquons le principe des travaux virtuels à l'expression (4.24), nous aurons alors :

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left\{ \begin{matrix} u_0 + z\dot{\theta}_x & v_0 + z\dot{\theta}_y & \dot{w} \end{matrix} \right\} \delta \left\{ \begin{matrix} u_0 + z\dot{\theta}_x \\ u_0 + z\dot{\theta}_x \\ \dot{w} \end{matrix} \right\} dV \quad (4.31)$$

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[ (\dot{u}_0 + z\dot{\theta}_x) \delta(\dot{u}_0 + z\dot{\theta}_x) + (\dot{v}_0 + z\dot{\theta}_y) \delta(\dot{v}_0 + z\dot{\theta}_y) + \dot{w} \delta \dot{w} \right] dV$$

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[ \begin{matrix} \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w} \delta \dot{w} + z^2 \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + z^2 \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y + z \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + z \dot{\theta}_x \delta \dot{u}_0 \\ + z \dot{v}_0 \delta \dot{\theta}_y + z \dot{\theta}_y \delta \dot{v}_0 \end{matrix} \right] dV \quad (4.32)$$

Et la variation de l'énergie cinétique, pour un déplacement virtuel s'écrit :

$$\delta T(\gamma) = \int_A \left\{ \begin{matrix} I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + I_1 (\dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y) \\ + I_2 (\dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_x \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_y \delta \dot{v}_0) \end{matrix} \right\} dA \quad (4.33)$$

### 4.6.3 Equation de l'énergie de déformation :

L'énergie de déformation s'écrit [46] :

$$U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V ([Q]\{\varepsilon\})^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [Q]^T \{\varepsilon\} dV \quad (4.34)$$

Nous avons :

$$[Q]^T = [Q] \quad \text{et} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z\varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

Et donc :

$$U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_V \left[ \{\varepsilon_p + z\varepsilon_b\}^T [Q]^T \{\varepsilon_p + z\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_s\}^T [Q]^T \{\varepsilon_s\} \right] dV \quad (4.35)$$

En développant, nous obtenons:

$$U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_V \left[ \{\varepsilon_p\}^T [Q] \{\varepsilon_p\} + \{\varepsilon_b\}^T z^2 [Q] \{\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_b\}^T z [Q] \{\varepsilon_p\} + \{\varepsilon_p\}^T z [Q] \{\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_s\}^T [Q]^T \{\varepsilon_s\} \right] dV \quad (4.36)$$

Or :

$$U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \{\varepsilon_p\}^T [Q] \{\varepsilon_p\} + \{\varepsilon_b\}^T z^2 [Q] \{\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_b\}^T z [Q] \{\varepsilon_p\} + \{\varepsilon_p\}^T z [Q] \{\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_s\}^T [Q]^T \{\varepsilon_s\} \right] dz dA \quad (4.37)$$

En intégrant suivant z, nous obtenons la relation précédente:

$$U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A [\{\varepsilon_p\}^T [A] \{\varepsilon_p\} + \{\varepsilon_b\}^T [C] \{\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_b\}^T [B] \{\varepsilon_p\} + \{\varepsilon_p\}^T [B] \{\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_s\}^T [D] \{\varepsilon_s\}] dA \quad (4.38)$$

D'où [A], [B], [C], [D], sont des matrices de rigidités, et d'après les expressions (3.39), (3.42), nous avons :

$$D_{11} = D_{22} = A_{33} \text{ et } D_{12} = D_{21} = 0$$

L'équation de l'énergie de déformation s'écrit comme suit :

$$U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A \left[ \begin{matrix} \{\varepsilon_x^0 & \varepsilon_y^0 & \gamma_{xy}^0\} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \right. \\ + \{\theta_{x,x} & \theta_{y,y} & \theta_{x,y} + \theta_{y,x}\} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{pmatrix} \\ + \{\theta_{x,x} & \theta_{y,y} & \theta_{x,y} + \theta_{y,x}\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \\ + \{\varepsilon_x^0 & \varepsilon_y^0 & \gamma_{xy}^0\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{pmatrix} \\ \left. + \{w_{,x} + \theta_x & w_{,y} + \theta_y\} \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{pmatrix} \right] dA \quad (4.39)$$

L'énergie de déformation en fonction des efforts et moments qui s'appliquent est :

$$\begin{aligned}
 U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A & \left[ \left\{ \varepsilon_x^0 \ \varepsilon_y^0 \ \gamma_{xy}^0 \right\} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \right. \\
 & + \left. \left\{ \theta_{x,x} \ \theta_{y,y} \ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \right\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \\
 & + \left\{ \varepsilon_x^0 \ \varepsilon_y^0 \ \gamma_{xy}^0 \right\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \\
 & + \left\{ \theta_{x,x} \ \theta_{y,y} \ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \right\} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{pmatrix} \\
 & \cdot \left\{ w_{,x} + \theta_x \ w_{,y} + \theta_y \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{pmatrix} dA
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A \left[ \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{pmatrix} \right] dA \tag{4.41}$$

En développant cette équation nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A & \left[ N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + M_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + M_{xy} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. Q_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) + Q_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \right] dA
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

#### 4.6.4 Equation du travail due aux forces aérodynamiques :

D'après les formules (4.18), (4.19), le travail effectué par les forces aérodynamique peut s'écrire :

$$W_a(\gamma) = \int_A (\mathbf{p}_{int} - \mathbf{p}_{ext}) \cdot \mathbf{w} \, dA = \int_A \Delta p \, \mathbf{w} \, dA \quad (4.43)$$

Et la variation du travail due aux forces Aérodynamiques pour un déplacement virtuel s'écrit :

$$\delta W_a(\gamma) = \int_A \Delta p \, \delta \mathbf{w} \, dA \quad (4.44)$$

$\Delta p$  représente dans notre cas la pression aérodynamique. C'est la pression aérodynamique basée sur « la théorie du Piston » théorie linéaire du 1<sup>er</sup> ordre applicable à un écoulement supersonique. Elle est donnée par [40] :

$$\Delta p = \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta + \left( \frac{1}{U_a} \right) \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (4.45)$$

Où  $\rho_a$ ,  $U_a$ ,  $M_\infty$  et  $\theta$  sont respectivement la densité de l'écoulement libre, vitesse de l'écoulement, nombre de Mach et l'angle de l'écoulement. Lorsque le nombre de Mach est entre  $\sqrt{2}$  et 2, l'expression de  $\Delta p$  se réduit à (écoulement supersonique stationnaire) [40] :

$$\Delta p = \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \right] \quad (4.46)$$

#### 4.7 Application du principe d'Hamilton :

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T(\gamma) - \delta U_d(\gamma) + \delta W_a(\gamma)] dt = 0 \quad (4.47)$$

L'application du principe d'Hamilton permet de trouver l'ensemble des équations de mouvement et les conditions aux limites. Pour l'appliquer, il est nécessaire de déterminer la variation de chaque terme de l'énergie.

##### 4.7.1 Variation de l'énergie cinétique $\delta T(\gamma)$ :

D'après la formule (4.33), nous pouvons développer l'énergie cinétique pour avoir :

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta T dt = & \frac{1}{2} \int_A \left[ I_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta u_0 \right) + I_0 \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \delta v_0 \right) + I_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) + I_1 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \delta \theta_x \right) + I_1 \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \delta \theta_y \right) + \right. \\ & \left. I_2 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \delta u_0 \right) + I_2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta \theta_x \right) + I_2 \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \delta v_0 \right) + I_2 \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \delta \theta_y \right) \right]_0^t dA + \frac{1}{2} \int_0^t \int_A \left[ -I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 - \right. \\ & \left. I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x - I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y - I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta \theta_x - I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta u_0 - \right. \\ & \left. I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta v_0 - I_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta \theta_y \right] dA dt \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta T dt = & \frac{1}{2} \int_0^t \int_A \left[ - \left( I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta u_0 - \left( I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta v_0 - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - \right. \\ & \left. \left( I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x - \left( I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y \right] dA dt \end{aligned} \quad (4.49)$$

Les termes devant chaque déplacement virtuel sont :

$$\delta u_0: - \left( I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \quad (a)$$

$$\delta v_0: - \left( I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \quad (b)$$

$$\delta w: - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (c)$$

$$\delta \theta_x: - \left( I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) \quad (d)$$

$$\delta \theta_y: - \left( I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) \quad (e)$$

(4.50)

Pour simplifier l'énergie cinétique, nous négligeons les termes de couplage traction-flexion (termes avec  $I_2$ ) pour avoir [14] :

$$T = \frac{1}{2} \int_A \left[ I_0 (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}^2) + I_1 (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_x^2) \right] dA$$

Donc :

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) [u_0 \delta u_0 + v_0 \delta v_0 + w \delta w + z^2 \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + z^2 \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y] dV$$

D'où :

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_A \left[ I_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta \frac{\partial u_0}{\partial t} + I_0 \frac{\partial v_0}{\partial t} \delta \frac{\partial v_0}{\partial t} + I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + I_1 \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial t} + I_1 \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right] dA$$

(4.51)

En développant, nous aurons :

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta T dt = \frac{1}{2} \int_0^t \int_A & \left[ I_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta u_0 \right) - I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 + I_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \delta v_0 \right) - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 + \right. \\ & I_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + I_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \delta \theta_x \right) - I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x + I_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \delta \theta_y \right) - \\ & \left. I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y \right] dA dt \end{aligned}$$

(4.52)

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \delta T dt = & \frac{1}{2} \int_A \left[ I_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta u_0 \right) + I_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \delta v_0 \right) + I_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) + I_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \delta \theta_x \right) + \right. \\
 & \left. I_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \delta \theta_y \right) \right]_0^t dA + \frac{1}{2} \int_0^t \int_A \left[ -I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x - \right. \\
 & \left. I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y \right] dA dt
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Le principe des énergies requiert que les termes entre crochets sont identiquement nuls.

L'expression précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \delta T dt = \\
 \frac{1}{2} \int_0^t \int_A \left[ -I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x - I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y \right] dA dt
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Les termes qui correspondent à chaque déplacement virtuel sont :

$$\delta u_0: -I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{a}$$

$$\delta v_0: -I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \tag{b}$$

$$\delta w: -I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{c}$$

$$\delta \theta_x: -I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \tag{d}$$

$$\delta \theta_y: -I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \tag{e}$$

(4.55)



#### 4.7.2 Variation de l'énergie de déformation $\delta U(\gamma)$ :

D'après les équations (4.38), l'énergie de déformation peut s'écrire :

$$U(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A \{ \varepsilon_p^T A \varepsilon_p + \varepsilon_b^T B \varepsilon_p + \varepsilon_p^T B \varepsilon_b + \varepsilon_b^T C \varepsilon_b + \varepsilon_s^T D \varepsilon_s \} dA \quad (4.56)$$

Et la variation de l'énergie de déformation, pour un déplacement virtuel, s'écrit :

$$\delta U(\gamma) = \int_A \{ \varepsilon_p A \delta \varepsilon_p + \varepsilon_p B \delta \varepsilon_p + \varepsilon_b B \delta \varepsilon_p + \varepsilon_b C \delta \varepsilon_b + \varepsilon_s D \delta \varepsilon_s \} dA \quad (4.57)$$

A partir de l'expression (4.42), nous aurons :

$$\delta U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + N_y \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + N_{xy} \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + M_x \delta \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + M_y \delta \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + M_{xy} \delta \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + Q_x \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) + Q_y \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \right] dA \quad (4.58)$$

Avec les règles de dérivation suivantes :

$$(f^2)' = 2f\delta f \quad \text{et} \quad (fg)' = f\delta g + g\delta f$$

Et la propriété de commutation des opérateurs de dérivation et de variation, c'est-à-dire :

$$\delta \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta f)$$

Donc :

$$\delta U_d(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^b [N_x \delta u_0 + N_{xy} \delta v_0 + M_x \delta \theta_x + M_{xy} \delta \theta_y + Q_x \delta w]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a [N_y \delta v_0 + N_{xy} \delta u_0 + M_y \delta \theta_y + M_{xy} \delta \theta_x + Q_y \delta w]_{y=0}^{y=b} dx + \int_A \left[ - \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 - \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v_0 - \left( Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta \theta_x - \left( Q_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta \theta_y - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \delta w \right] dA \quad (4.59)$$

Donc les termes associés à chaque déplacement virtuel sont :

$$\begin{aligned}\delta u_0 &: - \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \\ \delta v_0 &: - \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \\ \delta \theta_x &: - \left( Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \\ \delta \theta_y &: - \left( Q_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \\ \delta w &: - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.60}$$

### 4.7.3 Le travail des forces de pressions :

Si nous considérons un écoulement supersonique parallèle à l'axe x ( $\theta=0$ ), l'expression (4.46) se traduit à :

$$\Delta p = \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x}\tag{4.61}$$

En procédant par la méthode des travaux virtuels, nous aurons :

$$\int_0^t \delta W dt = \int_0^t \int_A \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dA dt\tag{4.62}$$

### 4.7.4 Mise en équation:

En réunissant l'ensemble des contributions des termes de chaque variation d'énergie, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) - \left( I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (a)$$

$$\left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right) - \left(I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (b)$$

$$\left(Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) - \left(I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (c)$$

$$\left(Q_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right) - \left(I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (d)$$

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) + \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (e)$$

(4.63)

Les résultantes des efforts et moments sont :

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (a)$$

$$N_y = A_{21} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{21} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (b)$$

$$N_{xy} = A_{33} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + B_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \quad (c)$$

$$M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + C_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (d)$$

$$M_y = B_{21} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + C_{21} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (e)$$

$$M_{xy} = B_{33} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + C_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \quad (f)$$

$$Q_x = D_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right) \quad (g)$$

$$Q_y = D_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right) \quad (h)$$

(4.64)

En dérivant ces équations nous obtenons :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y \partial x} \quad (a)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} = A_{21} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{21} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \quad (b)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) \quad (c)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) \quad (d)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + C_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} \quad (e)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = B_{21} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + C_{21} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \quad (f)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = B_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + C_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) \quad (g)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = B_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + C_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) \quad (h)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (i)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (j)$$

(4.65)

Et donc :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y \partial x} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) - \left( I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (a)$$

$$\left( A_{21} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{21} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) \right) - \left( I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (b)$$

$$\left( D_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) + B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + C_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + B_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + C_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) \right) - \left( I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (c)$$

$$\left( D_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + B_{21} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + C_{21} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + C_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) \right) - \left( I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (d)$$

$$\left( D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right) + \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (e)$$

(4.66)

En supposant un mouvement harmonique de la plaque, nous posons :

$$u_0(x, y, t) = U_0(x, y) \cdot e^{j\omega t} \quad (a)$$

$$v_0(x, y, t) = V_0(x, y) \cdot e^{j\omega t} \quad (b)$$

$$w(x, y, t) = W_0(x, y) \cdot e^{j\omega t} \quad (c)$$

$$\theta_x(x, y, t) = \Theta_x(x, y) \cdot e^{j\omega t} \quad (d)$$

$$\theta_y(x, y, t) = \Theta_y(x, y) \cdot e^{j\omega t} \quad (e)$$

(4.67)

En négligeant les termes du couplage, le système final aux cinq équations de mouvement devient :

$$A_{11} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y \partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y \partial x} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + (I_0 \omega^2 U_0) = 0 \quad (a)$$

$$A_{21} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + B_{21} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} \right) + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + (I_0 \omega^2 V_0) = 0 \quad (b)$$

$$D_{11} \left( \frac{\partial W_0}{\partial x} + \theta_x \right) + B_{11} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y \partial x} + C_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + B_{33} \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} \right) + C_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + (I_1 \omega^2 \theta_x) = 0 \quad (c)$$

$$D_{22} \left( \frac{\partial W_0}{\partial y} + \theta_y \right) + B_{21} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + C_{21} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{33} \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} \right) + C_{33} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + (I_1 \omega^2 \theta_y) = 0 \quad (d)$$

$$D_{11} \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W_0}{\partial x} + I_0 \omega^2 W_0 = 0 \quad (e)$$

(4.68)

#### 4.8 Conclusion :

Ces cinq dernières expressions représentent les équations différentielles du mouvement d'une plaque FGM en théorie du premier ordre et soumise à une vibration dans un écoulement supersonique stationnaire à incidence nulle.

La résolution de ce système d'équations nous conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$[(K + \lambda \bar{A}) - \omega^2 M] = 0 \quad (4.69)$$

Où K est la matrice de rigidité, M est la matrice de masse,  $\bar{A}$  est la matrice de force aérodynamique,  $\lambda = \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$  est la pression dynamique et  $\omega$  est la fréquence naturelle.

Lorsque  $\lambda = 0$ , la valeur propre  $\omega$  est réelle et positive, puisque la matrice de rigidité et la matrice de masse sont symétrique et définies positives. Etant donné que la matrice aérodynamique  $\bar{A}$  est non symétrique, les valeurs propres  $\omega$  attendues seront complexes pour  $\lambda > 0$ . Comme  $\lambda$  augmente de façon monotone à partir de zéro, deux de ces valeurs propres s'approchent l'une de l'autre et coïncide pour  $\omega = \omega_{cr}$  et  $\lambda = \lambda_{cr}$ . Dans cette étude,  $\lambda_{cr}$  est considérée comme la première valeur pour laquelle se produit la première coalescence. Pour  $\lambda > \lambda_{cr}$ , des valeurs propres complexes sont attendues, dans ce cas,  $\omega = \omega_{cr} \pm i \omega_i$ .

Dans le chapitre suivant, nous allons résoudre ces équations différentielles couplées pour le cas d'une plaque FGM sur appuis-simples par la méthode analytique de « Navier », en déterminant les fréquences naturelles. Et par la suite, nous utiliserons la méthode analytique de « Bubnov-Galérkin », qui va nous permettre d'intégrer les forces aérodynamiques dans les équations du mouvement, afin de déterminer les pressions dynamiques et fréquences critiques de flottement.

## Chapitre 5 : Résultats et discussion

---

### 5.1 Introduction:

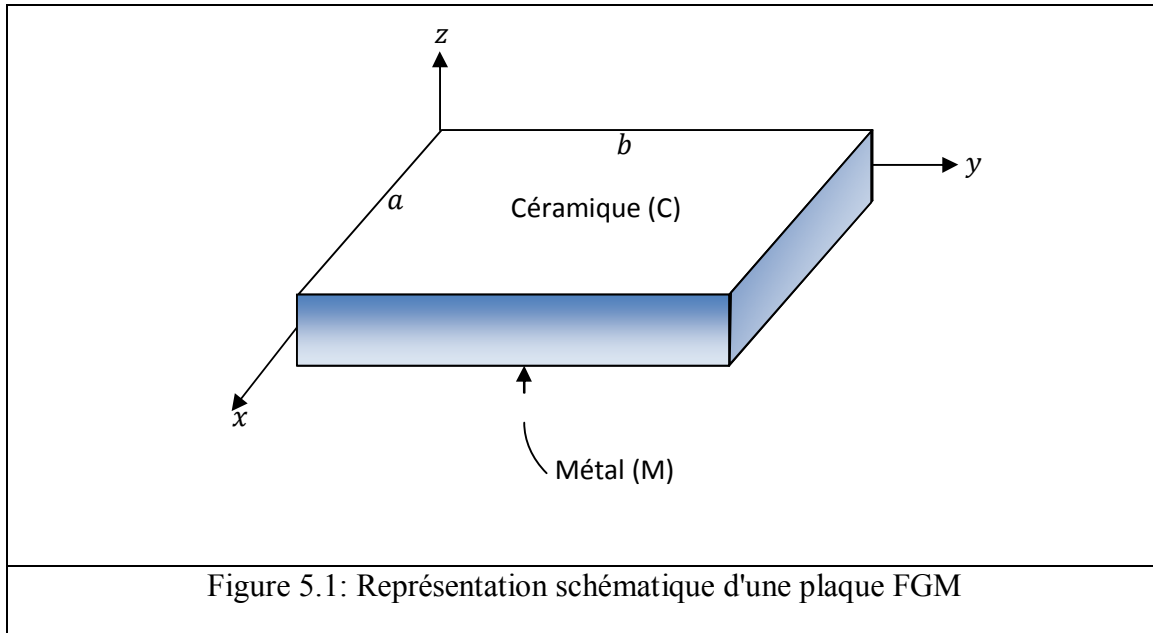
Dans ce dernier chapitre, nous allons présenter les méthodes utilisées pour la résolution du système d'équations de mouvement et l'ensemble des résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul que nous avons élaboré. Nous présentons tout d'abord les étapes des méthodes analytiques de résolution des équations du mouvement, et par la suite, nous allons résoudre les équations différentielles couplées pour le cas d'une plaque FGM sollicitée sur appuis-simples, en déterminant les fréquences naturelles, pressions aérodynamiques critiques et fréquences critiques de flottement. Nous comparons les résultats obtenus avec ceux des articles publiés. Enfin, nous traçons les graphes appropriés pour montrer l'influence des paramètres considérés sur la pression dynamique et les fréquences de vibration et de flottement.

Nous allons à présent résoudre en premier lieu, les équations de mouvement régissant le mouvement d'une plaque FGM sur appuis simples de dimensions  $a$ ,  $b$  et  $h$ . Ces équations reposent sur la théorie de déformation du premier ordre (FSDPT) de Reissner-Mindlin [5], sans forces extérieures. En deuxième lieu, le système d'équations couplées avec la pression aérodynamique bidimensionnelle stationnaire approximée grâce à la « Piston theory » du 1<sup>er</sup> ordre [1] [14]. Il faut noter qu'il est nécessaire de bien choisir la méthode de résolution pour déterminer les fréquences naturelles, pression dynamique et fréquence de flottement.

Le choix entre une méthode purement analytique ou purement numérique ou mixte (numérique-analytique) dépend du type du problème, de sa complexité, de sa géométrie, des conditions aux limites ainsi que la précision exigée des résultats. Pour ce qui est du premier cas c'est-à-dire la résolution du système libre conservatif, nous avons eu recours à la méthode analytique de Navier [41], cependant, dans le deuxième cas, le problème devient plus complexe et la méthode de Navier n'est plus applicable en raison de la pression aérodynamique qui rend le système couplé. Dans ce cas, nous avons utilisé la



méthode de **Bubnov-Galerkin** (MBG) [3] [17] mais en gardant toujours la solution proposée par Navier pour les déplacements de notre plaque FGM (Voir Annexe).



Le comportement des plaques à gradient fonctionnel vis-à-vis les vibrations dépend grandement de la variation des propriétés de celle-ci à travers l'épaisseur ( $-h/2$  à  $+h/2$ ). En variant l'indice de la fraction volumique ( $N$ ), nous pouvons passer d'un matériau C (purement céramique,  $N = 0$ ) à un matériau M (purement métallique,  $N \rightarrow \infty$ ), en passant par un mélange de ces deux matériaux en fixant  $N$  ( $0 < N < \infty$ ). Il est à noter l'indice de fraction volumique n'est pas le seul facteur influant sur le comportement en vibration des plaques à gradient fonctionnel.

Les propriétés mécaniques dépendent aussi de la fraction volumique, ce qui laisse dire que cette variation de propriétés joue un rôle très important dans le comportement en vibration, et à cause de la variation de ses propriétés, contrairement aux plaques purement isotropes, les plaques à gradient fonctionnel présentent un couplage entre les rotations et les résultantes en membrane. Cette caractéristique peut être retrouvée dans le cas de composites stratifiés. De plus, la géométrie de la plaque est d'une grande importance dans le calcul des fréquences et des modes de vibrations. L'allongement ( $a/b$ ) et le rapport longueur/épaisseur ( $a/h$ ) sont des facteurs déterminants.

Dans l'étude du flottement des plaques à gradient fonctionnel, nous avons considéré une approximation bidimensionnelle statique de la pression aérodynamique [28].

C'est une simplification de la théorie du piston du 1<sup>er</sup> ordre. Celle-ci donne des résultats très satisfaisants pour un nombre de mach compris entre  $\sqrt{2}$  et 2, comparativement à la théorie aérodynamique exacte. L'influence de cette pression  $\lambda = \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_a^{-1}}}$  sur les vibrations de la plaque peut être déterminée grâce à la variation qui survient dans les fréquences  $\omega$  de vibrations, et ceci en faisant augmentant cette pression (en faisant varier la vitesse de l'écoulement  $U_a^2$ ) jusqu'à atteindre une pression critique  $\lambda_{cr}$  ( $U_{a_{cr}}^2$ ) qui correspond au flottement de la plaque. En atteignant cette valeur critique, nous observons alors la coalescence de deux fréquences ou plus. Au-delà de cette valeur critique ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ), il y a apparition d'un amortissement aérodynamique  $g = \omega_I / \sqrt{\omega_R}$  car les valeurs propres deviennent complexes ( $\omega_{cr} = \omega_R \pm i\omega_I$ ). Grâce à cette analyse, nous pouvons étudier l'influence des différents paramètres sur le comportement en flottement de la plaque.

En développant ces étapes sous forme algorithmique, nous avons pu élaborer un programme de calcul en se servant du logiciel Maple. Cet outil est un système de calcul symbolique et numérique très puissant permettant de résoudre aisément une variété impressionnante de problèmes mathématiques et physiques.

## 5.2 Résolution des équations de mouvement :

### 5.2.1 Système libre conservatif :

#### ➔ Méthode de Navier :

Pour ce qui est du système libre conservatif représenté par une plaque en vibration libre, la résolution est faite par la méthode de Navier pour les conditions aux limites sur appuis simples suivantes:

$$u_0 = N_y = w = M_y = P_y = \theta_x = 0 \quad \text{pour } y = 0, b$$

$$v_0 = N_x = w = M_x = P_x = \theta_y = 0 \quad \text{pour } x = 0, a$$

(5.1)

Navier a proposé une solution en double série trigonométriques pour chaque degré de liberté de la plaque. Le développement en double séries de Fourier valable pour les conditions aux limites citées plus haut est:

$$u_0(x, y, t) = \sum_n \sum_m U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{J\omega t} \quad (a)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_n \sum_m V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{J\omega t} \quad (b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_n \sum_m W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{J\omega t} \quad (c)$$

$$\theta_x(x, y, t) = \sum_n \sum_m T_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{J\omega t} \quad (d)$$

$$\theta_y(x, y, t) = \sum_n \sum_m S_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{J\omega t} \quad (e)$$

Avec  $J^2 = -1$ .

(5.2)

Une fois que ces solutions sont introduites dans les équations différentielles du mouvement (Voir Annexe), nous obtenons le système aux valeurs propres suivant :

$$([K] - \omega^2[M])\{q\} = \{0\}$$

(5.3)

Avec :  $[K]$  et  $[M]$  sont respectivement les matrices rigidité et masse.  $\{q\}$  est le vecteur propre associé donné par :

$$\{q\} = \{U_{mn} \quad V_{mn} \quad W_{mn} \quad T_{mn} \quad S_{mn}\}^T$$

(5.4)

### 5.2.2 Système aéroélastique :

Pour le système aéroélastique, la résolution a été faite grâce à la méthode de Bubnov-Galerkin (MBG).

#### ➔ Méthode de Bubnov-Galerkin (MBG) :

Pour une équation différentielle ayant la forme suivante :

$$L(u) = 0 \tag{5.5}$$

Avec  $L$  : opérateur différentielle et  $u$  est la variable dépendante.

Nous supposons une solution sous la forme suivante :

$$u(x, y) = \sum_i \sum_j c_{ij} X_i(x) Y_j(y) \tag{5.6}$$

Les  $X_i(x)Y_j(y)$  pour  $i, j = 1, 2, \dots, N$  sont des fonctions d'approximation linéairement indépendantes et qui satisfont les conditions aux limites imposées, tout en étant continue dans le domaine d'intégration. Dans notre cas, nous considérons les fonctions trigonométriques identiques à ceux de Navier.

Les paramètres  $c_{ij}$  sont déterminés en imposant que le résidu  $R$  de l'expression suivante soit nul:

$$R = L \left( \sum_i \sum_j c_{ij} X_i(x) Y_j(y) \right) = 0$$

(5.7)

Et qu'il soit orthogonal à un ensemble de fonctions  $\psi_k \varphi_l$  linéairement indépendantes, c'est-à-dire :

$$\int_S \psi_k \varphi_l R(c_{ij}, X_i, Y_j) dx dy = 0$$

(5.8)

La méthode de Galerkin suppose que cet ensemble de fonctions linéairement indépendantes ne sont autres que les fonctions  $X_k(x)Y_l(y)$  avec  $k, l = 1, 2, \dots, N$ .

En appliquant cette procédure (Voir Annexe) pour les équations de mouvement déterminées précédemment, nous obtenons alors le système général aux valeurs propres suivant:

$$([\tilde{K}] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\}$$

Où :

$$[\tilde{K}] = [K] + \lambda [A]$$

(5.9)

Avec  $[A]$  et  $\lambda$  sont respectivement la matrice des coefficients d'influence aérodynamique et la pression aérodynamique.

### 5.3 Discussion sur les fréquences naturelles :

Nous considérons deux plaques FGM, l'une conçue en aluminium- alumine (Al- $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) et l'autre en Nitrure de Silicium et en acier inoxydable ( $\text{Si}_3\text{N}_4$  –SUS304) pour différents rapports d'allongement ( $a/b$ ) et différents rapports ( $a/h$ ). Le calcul sera fait pour différentes compositions de ces matériaux. Le tableau 5.1 suivant présente les différentes propriétés thermomécaniques de chaque matériau.

Matériau	Masse volumique ( $\rho$ ) (Kg/m <sup>3</sup> )	Module d'Young (E) (GPa)	Coefficient de Poisson ( $\nu$ )	Conductivité thermique ( $\kappa$ ) (W/mK)	Coefficient de dilatation thermique ( $\alpha$ ) (m/K)
Al (M)	2700	70	0.3	204	23.10 <sup>-6</sup>
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (C)	3800	380	0.26	10.40	7.203 10 <sup>-6</sup>
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> (C)	2370	322.271	0.24	9.19	7.474 10 <sup>-6</sup>
SUS304(M)	8166	207.788	0.32	12.04	15.231 10 <sup>-6</sup>

Tableau 5.1: Propriétés thermomécaniques de différents matériaux constituant la plaque FGM.

Dans cette présente analyse, nous allons examiner les différents paramètres qui peuvent influencer sur le comportement en vibration des plaques minces et moyennement épaisses. Cependant, l'efficacité du programme de calcul est un facteur primordial dans la recherche de résultats précis. Pour démontrer cette efficacité, nous avons procédé à des comparaisons avec des résultats d'autres articles de référence [43]. Le tableau 5.2 montre que l'erreur relative maximale a atteint 6.462% (erreur moyenne = 3.174%) comparé aux résultats de la référence [43]. Plusieurs facteurs peuvent expliquer cette différence. Parmi ces facteurs, l'utilisation d'une théorie de déformation différente, la plaque est épaisse, l'utilisation d'un facteur de correction dans la théorie du premier ordre ainsi que la méthode de résolution numérique implémentée dans le programme de calcul.

Cependant, les résultats obtenus dans tableau 5.3 présentent une erreur maximale (4.664%) moins importante (erreur moyenne = 0.783%) par rapport aux résultats publiés dans la référence [14]. La raison est que nous avons utilisé la même théorie (FSDPT) que celle de l'article [14]. Toutefois, la méthode de résolution numérique n'est pas la même, c'est ce qui explique cette différence entre les résultats. Il est à souligner qu'un autre paramètre important qui explique la différence des résultats est que nous avons négligé l'inertie de couplage  $I_2$ . C'est pourquoi les résultats des tableaux 5.2 et 5.3 s'éloignent de ceux des références citées lorsque les plaques ne sont plus isotropes ( $N \neq 0$  et  $N \neq \infty$ ).

Le Tableau 5.2 présente les trois fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des trois premiers modes de plaques de géométries différentes ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 2$  et  $10$ ) sur appuis

simples. Ces plaques sont constituées d'un mélange d'aluminium (métal) et d'alumine ( $Al_2O_3$  = céramique) (voir aussi Fig. 5.2). Le calcul a été fait pour différents indices de fraction volumique en passant d'un matériau purement céramique ( $N = 0$ ) à un matériau purement métallique ( $N \rightarrow \infty$ ). Une diminution des fréquences naturelles est constatée. Celle-ci est due à la réduction du volume de la céramique (alumine) dans la composition de la plaque et à l'augmentation du pourcentage du métal. Par conséquent, la rigidité en flexion diminue et la plaque nécessite une énergie moins importante pour vibrer. Nous constatons que la géométrie peut aussi modifier le comportement de la plaque FGM. Un rapport d'allongement ( $a/b$ ) plus élevé amène la plaque à vibrer avec des fréquences plus basses. Un autre facteur qui a un rôle important est le rapport  $a/h$  (voir Fig. 5.1). Lorsque le rapport  $a/h$  augmente (plaque plus épaisse), la fréquence fondamentale diminue quel que soit l'indice de la fraction volumique.

Le Tableau 5.3 présente les 5 premières fréquences naturelles d'une plaque FGM faite de Nitrure de Silicium (Céramique) et de l'acier inoxydable (métal) pour différents indices de fraction volumique, différents rapports d'allongement  $a/b$  (1, 2 et 5) et pour un rapport d'épaisseur constant ( $a/h = 20$ ). Ce tableau montre l'effet de la fraction volumique sur les fréquences de vibration. Nous constatons les mêmes variations que pour la plaque précédente. Cependant, pour des indices de fractions volumique inférieurs à un, le taux de diminution des fréquences est beaucoup plus important (Fig. 5.4). Ceci montre l'effet important de la composition des matériaux lorsque deux paramètres rentrent en jeu en même temps : le module de Young et la masse volumique.

Le pourcentage volumique du métal étant plus important que celui de la céramique et puisque le module de Young de la céramique est supérieur à celui du métal, la plaque devient rapidement moins rigide. Etant donné que la masse volumique du métal est bien supérieure à celle de la céramique, introduire plus de métal accentue la diminution des fréquences naturelles car l'inertie globale de la plaque augmente assez rapidement pour notre cas.

Il est à souligner que lorsque la plaque est homogène (100 % céramique ou 100% métal), le couplage entre les résultantes en membrane et les résultantes en moment n'existe plus d'où la matrice de couplage  $[B]$  est identiquement nulle.

La fréquence adimensionnelle pour le tableau 5.2 est:  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_c h / D_c}$

N	Modes	a/h=2			a/h=10		
		Présente	Ref [43]	Err (%)	Présente	Ref [43]	Err (%)
0	1	12.7857	12.7857	0.000%	19.1478	19.1479	0.001%
	2	18.2104			38.6218		
	3	21.5492			47.4516		
1	1	10.0536	10.2153	1.583%	14.9494	15.5912	4.116%
	2	15.149			29.7145		
	3	16.2012			36.4332		
2	1	9.0615	9.2855	2.412%	13.7538	14.7039	6.462%
	2	13.6868			27.0316		
	3	14.2419			33.0372		
4	1	8.392	8.2384	-1.864%	13.0896	13.9107	5.903%
	2	12.2395			25.6823		
	3	13.0732			31.3522		
10	1	7.7886	7.3671	-5.721%	12.3368	12.6613	2.563%
	2	10.7794			24.4641		
	3	12.3243			29.8913		
$\infty$	1	6.5077	6.5077	0	9.746	9.746	0.000%
	2	9.2688			19.658		
	3	10.9683			24.1522		

Tableau 5.2: Les 3 premières Fréquences naturelles d'une plaque en Al-Al2O3 pour différents rapport (a/b) et (a/h) et pour différentes compositions.



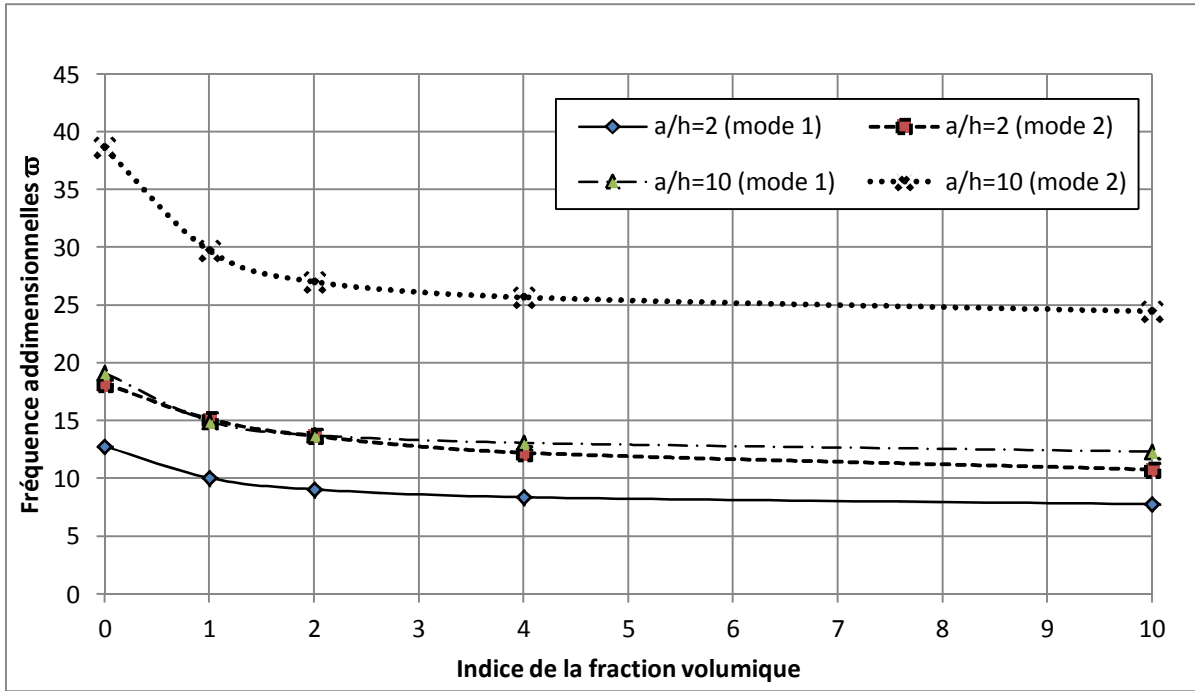


Figure 5.2: Influence du rapport  $a/h$  sur les fréquences naturelles de la plaque en FGM.

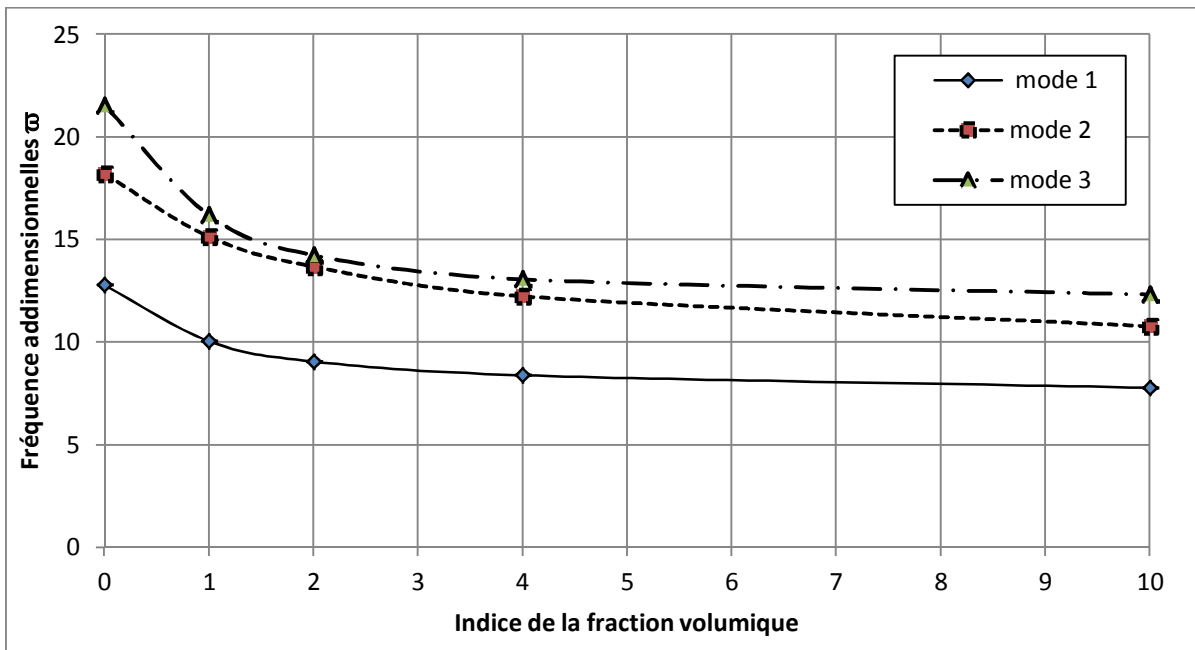


Figure 5.3: Variation des 3 premières fréquences naturelles d'une plaque en Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> en fonction de la fraction volumique.

La fréquence adimensionnelle utilisée dans le reste des tableaux est:  
 $\bar{\omega}^2 = \omega^2 a^4 (\rho_m h / D_m)$

a/b	N	Mode 1			Mode 2		
		Présente	Ref [14]	Err (%)	Présente	Ref [14]	Err (%)
1	0	2050.44	2048.3	-0.104%	13056.8	12546	-4.071%
	0.5	974.02	976.16	0.219%	6079.55	5952.5	-2.134%
	1	749.72	753.16	0.457%	4602.82	4576.6	-0.573%
	2.5	572.74	575.5	0.480%	3543.43	3494.1	-1.412%
	5	499.65	500.9	0.250%	3069.65	3050.2	-0.638%
2	0	13056.8	12475	-4.664%	31387	31290	-0.310%
	0.5	6079.55	5948.8	-2.198%	14879.6	14869	-0.072%
	1	4602.82	4591.7	-0.242%	11436.8	11446	0.081%
	2.5	3543.43	3507.5	-1.024%	8731.38	8736.7	0.061%
	5	3069.65	3050.9	-0.615%	7624.9	7616.3	-0.113%
5	0	288396	287530	-0.301%	351991	351520	-0.134%
	0.5	168230	168000	-0.137%	224957	224240	-0.320%
	1	130506	129820	-0.528%	173369	172790	-0.335%
	2.5	99031	98892	-0.141%	132619	131550	-0.813%
	5	85926.5	85758	-0.196%	115443	114340	-0.965%

Tableau 5.3: Fréquences naturelles obtenues pour une plaque en Si3N4-SUS304 avec un rapport (a/h=20) et pour différents rapports (a/b) et différents indices de fraction volumique.

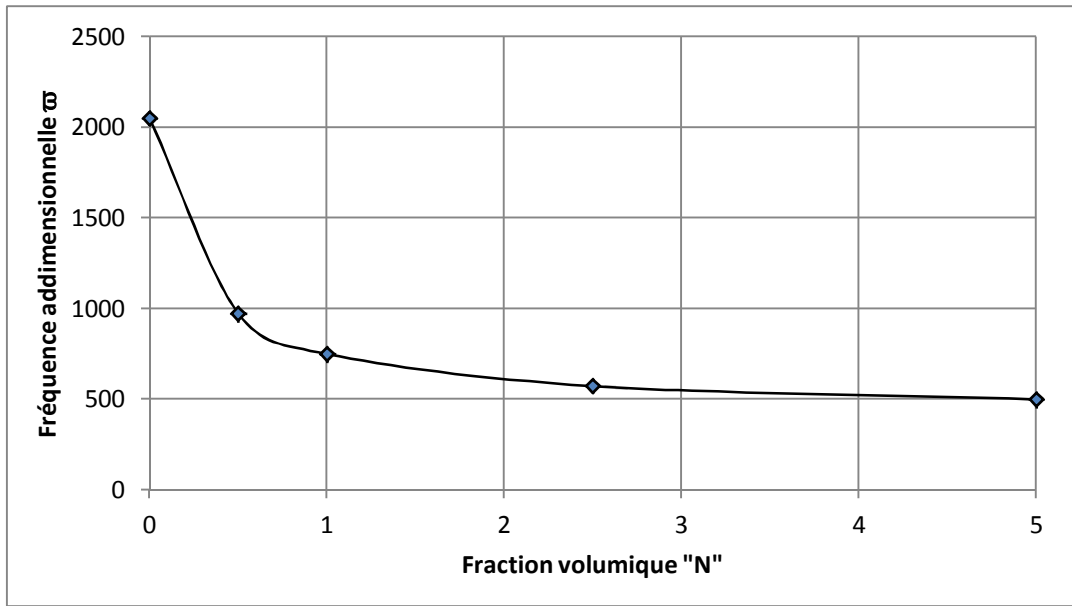


Figure 5.4: Représentation de la fréquence naturelle du premier mode en fonction de la fraction volumique pour une plaque rectangulaire en  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -SUS304,  $a/h=20$

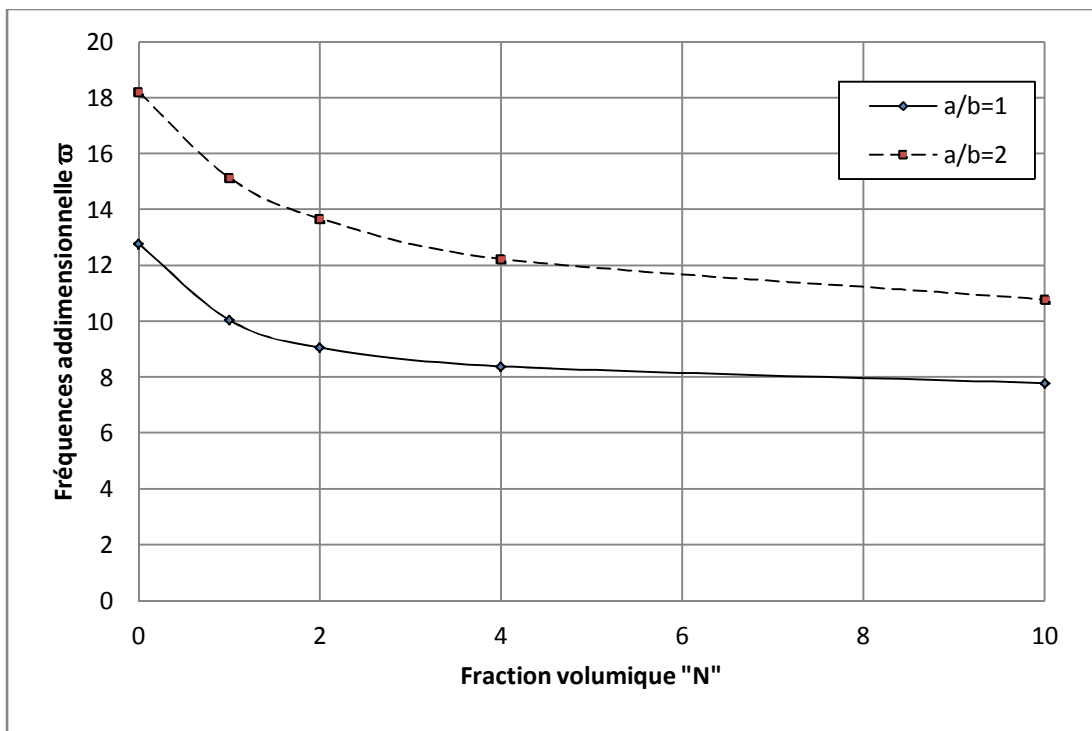


Figure 5.5: Influence du rapport d'allongement ( $a/b$ ) sur les fréquences naturelles d'une plaque FGM.

#### **5.4 Discussion sur le flottement des plaques FGM :**

Lorsque la plaque est soumise à des forces ou à des pressions externes, elle réagit par une réponse conformément au mouvement que lui font subir ces forces externes et à sa souplesse. Lorsque ces forces atteignent une certaine amplitude, la plaque est contrainte à répondre par un mouvement qui met sa résistance en péril.

Le paramètre à considérer dans l'analyse du flottement dépend du problème étudié. Pour le cas d'une aile d'avion, il est, par exemple, plus approprié de considérer la vitesse de vol. Pour notre problème, il n'y a pas intérêt pratique de faire l'analyse en terme de vitesse, mais plutôt en terme de pression aérodynamique s'exerçant sur le panneau. Ce choix est aussi motivé par la nécessité de faire des comparaisons avec une référence déjà publiée [14] pour démontrer la validité du code élaboré.

Le champ de pression qui nous intéresse est normalement de même nature que la déflexion de la plaque. Cependant, la plaque se comportera comme un filtre mécanique et répondra en premier lieu aux fréquences du champ de pression externe proches des fréquences naturelles de la structure. En plus, lorsque la pression aérodynamique dépasse une certaine valeur critique, la réponse de la plaque devient hautement désordonnée en plus de l'accroissement de l'amplitude [1].

En outre, la raison pour laquelle de nombreuses études sont faites pour l'analyse du phénomène de flottement est la prédiction, puis la prévention contre celui-ci en désignant des limites (en terme de vitesses, de pressions, de matériaux, etc.) à ne pas dépasser. Or, l'analyse simple des fréquences ne permet pas d'exploiter les limites maximales. En plus des fréquences, l'amortissement aérodynamique est un facteur déterminant pour ce phénomène, car la coalescence des fréquences de deux modes différents ne signifie pas la ruine totale de la structure si l'amortissement aérodynamique existe et est important.

Les résultats suivants donnent un aperçu sur ce phénomène et sur l'utilisation d'une nouvelle classe de matériaux composites, ainsi que les différents paramètres pouvant modifier leur comportement.

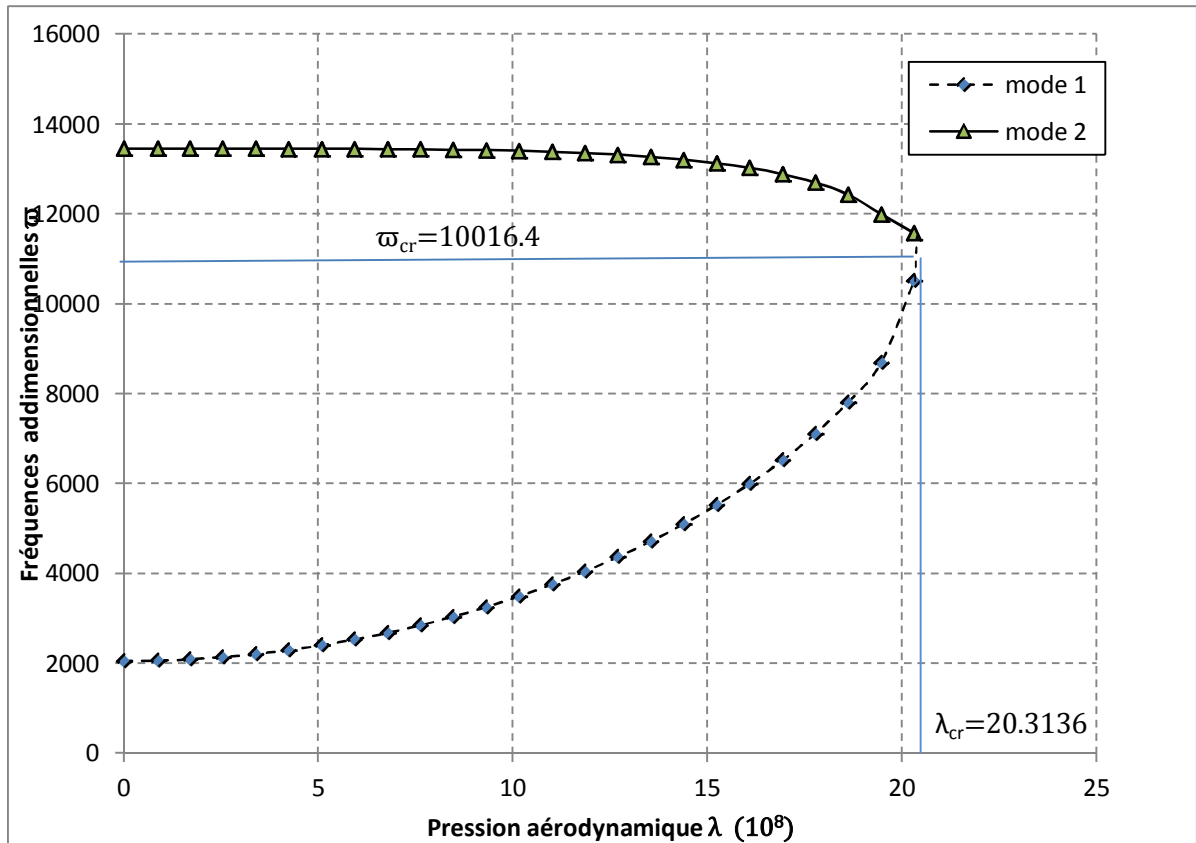


Figure 5.6: Coalescence des fréquences de deux modes et pression critique.

La figure 5.6 présente la variation des fréquences  $\bar{\omega}^2$  des deux modes (1 et 2) de vibration d'une plaque FGM constituée d'un mélange de Nitrure de Silicium (céramique) et de l'acier inoxydable (métal) en fonction de la pression aérodynamique  $\lambda$ . La fréquence et la pression aérodynamiques critiques sont également mises en évidence.

Les tableaux 5.4 et 5.5 montrent les différentes fréquences critiques de flottement  $\bar{\omega}_{cr}^2$  pour différents indices de fractions volumique  $N$ , ainsi que les pressions aérodynamiques critiques correspondantes  $\lambda_{cr}$ . Il est évident que l'augmentation de l'indice de fraction volumique  $N$  conduit à la réduction de la fréquence critique de flottement ainsi que la pression aérodynamique critique (Fig. 5.7). L'indice de fraction volumique  $N$  exprime la variation des propriétés à travers l'épaisseur. Lorsque  $N$  augmente, le pourcentage volumique du métal augmente aussi, ce qui signifie que la rigidité de la plaque diminue car le métal est moins rigide que la céramique, et de ce fait, les fréquences critiques sont plus faibles. De plus, la pression aérodynamique représente le travail fourni à la structure. Pour des fréquences plus basses, la structure nécessite un travail moins important pour vibrer et c'est ce qui explique les résultats obtenus dans les tableaux 5.4 et 5.5.

N	Fréquence de flottement $\varpi_{cr}$			Pression aérodynamique critique $\lambda_{cr}$ ( $10^8$ Pa)
	Présente	Réf [24]	Erreur relative	Présente
<b>0</b>	10016.43	9661.35	0.036	20.3136
<b>0.5</b>	4720.0042	4575.07	0.031	17.4604
<b>1</b>	3557.7301	3515.57	0.012	16.2900
<b>2.5</b>	2702.6998	2685.94	0.006	15.3540
<b>5</b>	2357.2327	2348.72	0.003	14.9293

Tableau 5.4 : Fréquences de flottement et pressions critiques correspondantes pour différents indices de fraction volumique (plaque FGM  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -SUS304,  $a/b=1$ ,  $a/h=20$ ).

N	$\lambda_{cr}$ ( $10^8$ Pa)	$\lambda_{cr}$ (adimensionnelle)		Erreur relative %
		Présente	Réf [14]	
<b>0</b>	20.3136	775.78	775.78	0.000
<b>0.5</b>	17.4604	666.8158	666.01	0.121
<b>1</b>	16.2900	622.118	625.78	0.585
<b>2.5</b>	15.3540	586.372	590.23	0.654
<b>5</b>	14.9293	570.1526	571.48	0.232

Tableau 5.5: Pressions aérodynamiques Critiques adimensionnelles pour différents indices de fraction volumique (plaque FGM  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -SUS304,  $a/b=1$ ,  $a/h=20$ ).

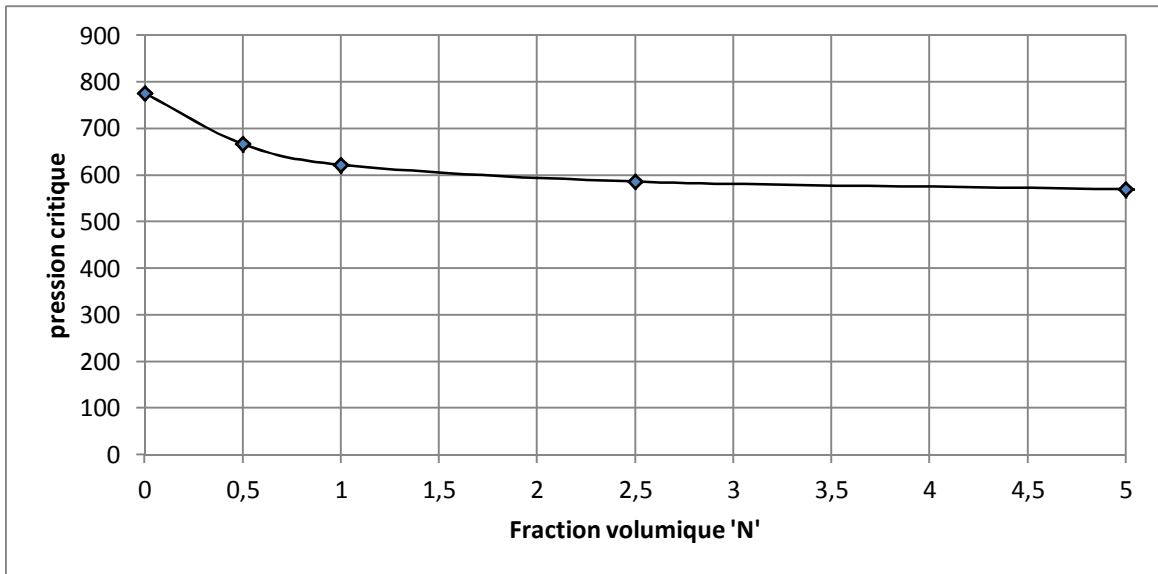


Figure 5.7 : Influence de l'indice de fraction volumique sur la pression aérodynamique critique.

Il est très difficile de détecter le point exact où les fréquences de deux modes différents se croisent (point de flottement) car celui-ci est très sensible, et une fois que ce point est dépassé même légèrement, le mouvement de la structure diverge et atteint des fréquences très élevées comme le montre la figure 5.8. Ce qui ne permet pas de distinguer le point de coalescence. Donc pour remédier à ce problème, nous avons eu recours à deux méthodes différentes. La première est de s'approcher le plus possible de ce point en changeant à chaque fois la pression aérodynamique, ce qui est très coûteux en temps de calcul. L'autre méthode repose sur l'interpolation par polynômes (Fig. 5.9) pour obtenir le point de coalescence. Cette interpolation nous a permis de voir de plus près le comportement des fréquences lorsqu'elles approchent du point de flottement. Il s'agit d'une perturbation qui commence légèrement et qui atteint une magnitude très élevée au point de flottement. Par contre, lorsque nous considérons l'amortissement aérodynamique ( $g = \omega_I / \sqrt{\omega_R}$ ), la structure n'est pas immédiatement perturbée. Les deux fréquences fusionnent et continuent de varier jusqu'à ce que l'amortissement aérodynamique s'annule.

Le point où le flottement prend naissance et qui est mesuré expérimentalement est beaucoup plus une question de définition qu'un point que nous pouvons déterminer avec une grande précision. Typiquement, le début du flottement peut être spécifié autour de 10% en termes de pression aérodynamique.

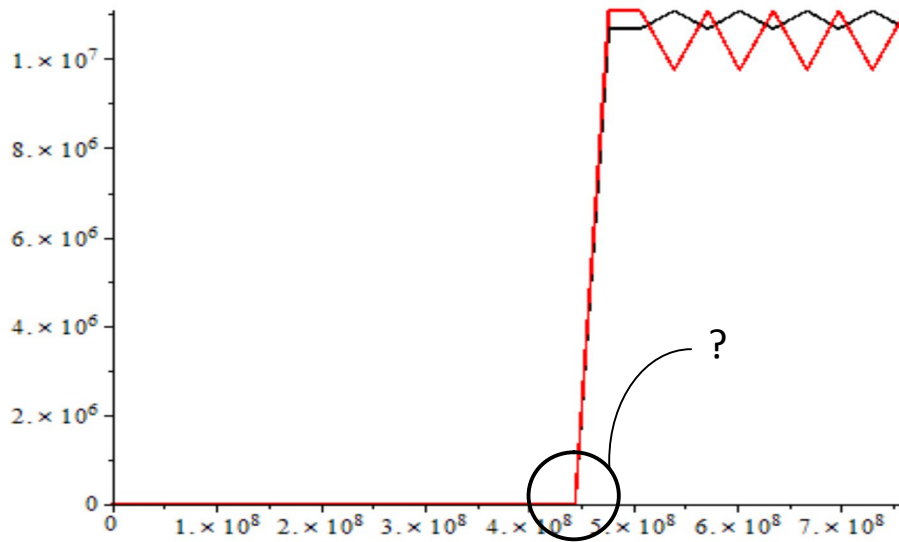


Figure 5.8: Comportement des fréquences après le flottement

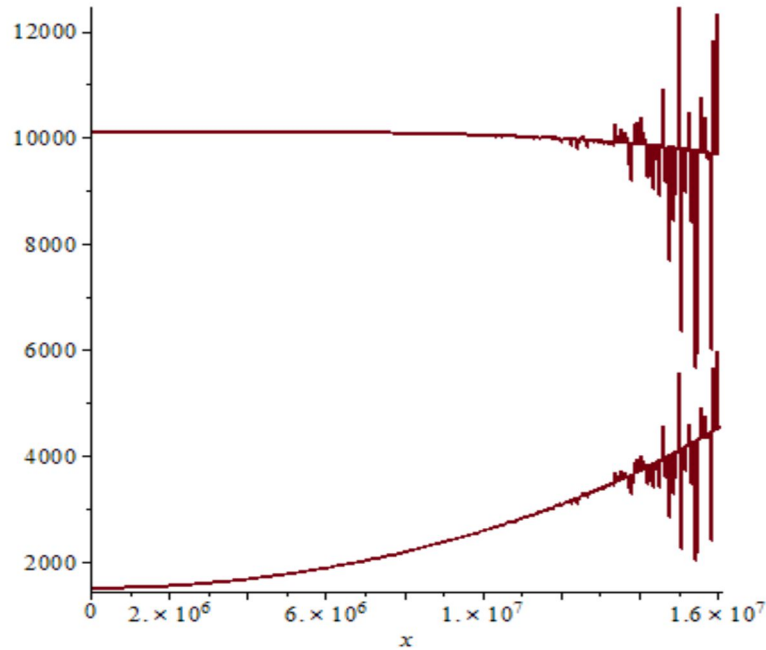


Figure 5.9: Perturbations des fréquences de vibration avant d'atteindre la fréquence critique de flottement.

Le tableau 5.6 montre l'effet du rapport d'allongement ( $a/b$ ) sur les fréquences adimensionnelles pour différents indices de fraction volumique  $N$ . Nous constatons que l'augmentation de ce rapport cause la croissance des fréquences adimensionnelles des 3 modes.



N	mode	a/b		
		1	2	4
<b>Céramique</b>	1	1503,043	6459,043	49838,818
	2	6459,043	24003,059	1,03E+05
	3	10115,942	49838,81	2,06E+05
<b>0,1</b>	1	1392,7099	5980,8321	46141,91
	2	5980,8321	22218,465	95305,591
	3	9363,6844	46141,91	1,91E+05
<b>0,2</b>	1	1299,6131	5571,0594	42960,792
	2	5571,0594	20677,031	88696,336
	3	8713,957	42960,761	1,78E+05
<b>0,5</b>	1	1097,3221	4661,9265	35863,79
	2	4661,9265	17221,081	73874,459
	3	7257,3521	35863,8	1,48E+05
<b>1</b>	1	914,4889	3820,8641	29258,226
	2	3820,8641	13987,176	60000,084
	3	5894,4923	29258,213	1,20E+05
<b>2,5</b>	1	749,554	3069,6603	23369,815
	2	3069,6603	11111,654	47654,767
	3	4682,9782	23369,807	95416,357
<b>5</b>	1	692,323	2858,9157	21813,076
	2	2858,9157	10396,284	44576,85
	3	4381,865	21813,071	89229,82
<b>Metal</b>	1	389,3893	1673,3266	12911,61
	2	1673,3266	6218,4085	26672,567
	3	2620,7098	12911,61	53400,184

Tableau 5.6 : Variation des fréquences adimensionnelles des trois premiers modes de vibration pour différents rapports d'allongement (plaque FGM Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, a/b=1, et 4; a/h=100).

Toutefois, ces fréquences sont très sensibles à l'égard ce rapport et prennent plus d'ampleur à chaque accroissement. Lorsque l'indice de fraction volumique augmente, la flexibilité de la plaque augmente, cela se traduit par un accroissement des fréquences de vibration.

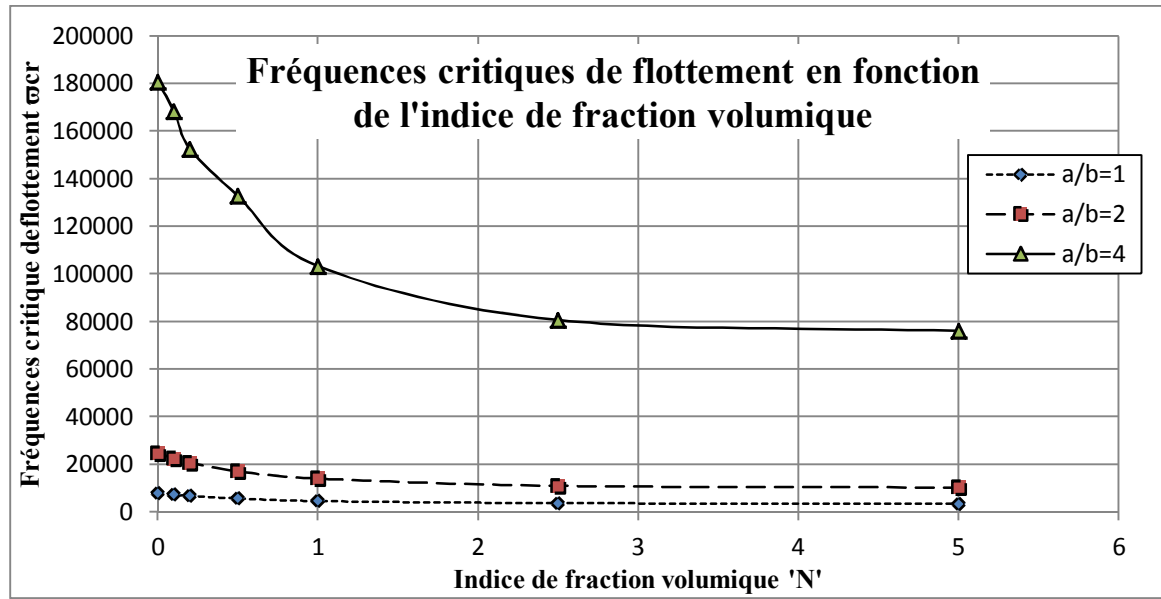


Figure 5.10: Influence du rapport d'allongement ( $a/b$ ) sur les fréquences critiques de flottement.

La figure 5.10 montre l'effet du rapport d'allongement ( $a/b$ ) sur les fréquences critiques de flottement. Il est clair qu'elles sont de plus en plus élevées à chaque augmentation apportée au rapport d'allongement. Le tableau 5.7 représente les pressions aérodynamiques critiques de flottement ainsi que les fréquences critiques. Il montre que les fréquences ainsi que les pressions critiques de flottement décroissent avec l'accroissement de l'indice de la fraction volumique  $N$  car la rigidité de la céramique est supérieure à celle du métal. Dans le même tableau, nous avons également examiné l'effet du rapport d'allongement sur les fréquences et les pressions critiques de flottement.

N	a/b=1		a/b=2		a/b=4	
	$\bar{\omega}_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$\bar{\omega}_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$\bar{\omega}_{cr}$	$\lambda_{cr}$
<b>Céramique</b>	8035,577	1,99E+07	24530,819	4,98E+07	180680,51	8,14E+07
<b>0,1</b>	7333,372	1,77E+07	22529,58	4,67E+07	168343,635	7,32E+07
<b>0,2</b>	6850,242	1,62E+07	20745,412	4,08E+07	152533,892	6,60E+07
<b>0,5</b>	5694,375	1,26E+07	17075,316	3,22E+07	132825,382	5,21E+07
<b>1</b>	4615,475	9,70E+06	14061,378	2,45E+07	103271,637	3,96E+07
<b>2,5</b>	3758,731	7,12E+06	11036,487	1,79E+07	80663,871	2,98E+07
<b>5</b>	3484,682	6,40E+06	10287,729	1,61E+07	76072,494	2,67E+07
<b>Métal</b>	2120,797	3,66E+06	6353,878	9,21E+06	47566	1,49E+07

Tableau 5.7: Fréquences et pressions critiques de flottement pour des plaques ayant différents rapports d'allongement (a/b) et pour différents indices de fraction volumique.

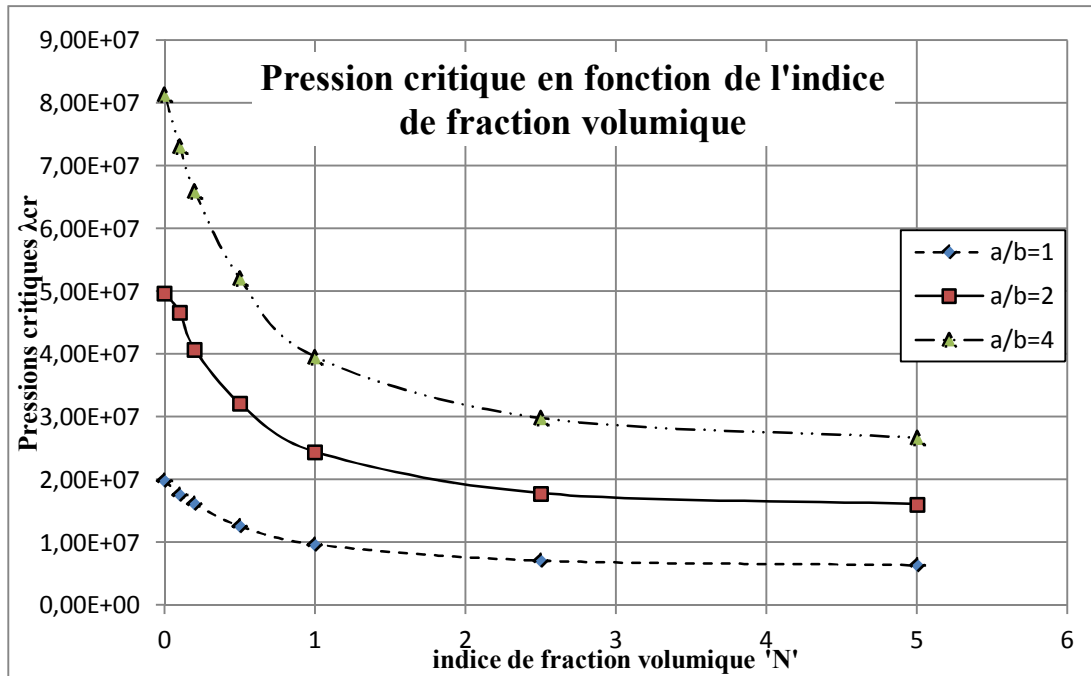


Figure 5.11 : Influence du rapport d'allongement (a/b) sur les pressions critiques de flottement.

Nous allons à présent examiner l'influence que peut avoir la longueur d'une plaque en FGM (Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) rectangulaire (a/b=2) ayant un rapport d'épaisseur (a/h=100). Le tableau 5.8 montre que l'accroissement de ce rapport ne fait que réduire la pression aérodynamique critique, ce qui est tout à fait logique vue la signification mathématique de la pression. On peut aussi voir que la relation entre la pression critique de flottement et la longueur de la plaque FGM est inversement proportionnelle quel que soit l'indice de la fraction volumique.

	Céramique	0,1	0,2	0,5	1	2,5	5	Métal
N	$\lambda_{cr}$ (Pa)							
a=1	4,98E+07	4,67E+07	4,08E+07	3,22E+07	2,45E+07	1,79E+07	1,61E+07	9,21E+06
a=2	2,48E+07	2,25E+07	2,05E+07	1,61E+07	1,22E+07	9,02E+06	8,05E+06	4,59E+06

Tableau 5.8: Pressions critiques de flottement pour des plaques FGM de différentes longueurs (a) et différentes compositions.

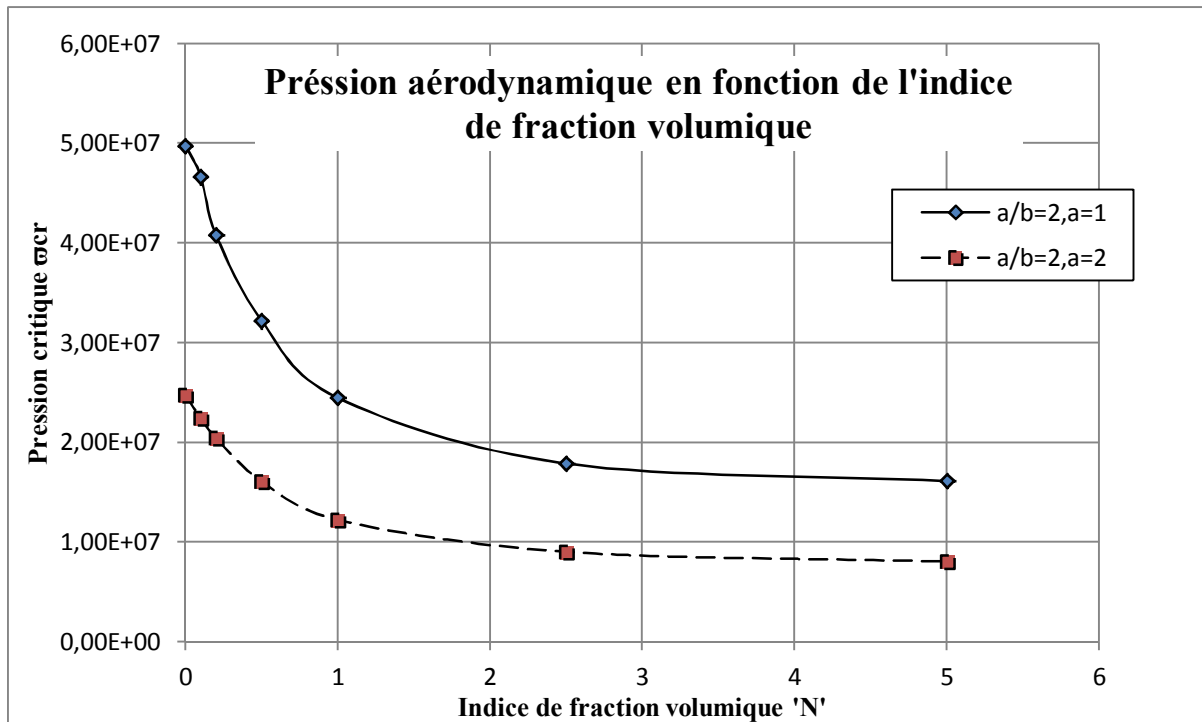


Figure 5.12 : Influence de la longueur de la plaque sur les pressions critiques de flottement.

Dans le tableau 5.9, nous inspectons l'effet du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur les fréquences et les pressions critiques de flottement. Ce rapport n'a pas beaucoup d'influence sur les fréquences critiques de flottement contrairement aux pressions critiques de flottement qui diminuent avec l'accroissement de ce rapport. Les deux valeurs prises pour ce rapport sont les limites des plaques moyennement épaisses.

N	a/h=20		a/h=100	
	$\bar{\omega}_{cr}$	$\lambda_{cr} (Pa)$	$\bar{\omega}_{cr}$	$\lambda_{cr} (Pa)$
<b>Céramique</b>	8335,851	2,36E+09	8035,577	1,99E+07
<b>0,1</b>	7619,21	2,18E+09	7333,372	1,77E+07
<b>0,2</b>	7111,292	1,96E+09	6850,242	1,62E+07
<b>0,5</b>	5479,478	1,57E+09	5694,375	1,26E+07
<b>1</b>	4809,93	1,18E+09	4615,475	9,70E+06
<b>2,5</b>	3886,662	8,46E+08	3758,731	7,12E+06
<b>5</b>	3598,971	7,60E+08	3484,682	6,40E+06
<b>Métal</b>	2140,003	4,41E+08	2120,797	3,66E+06

Tableau 5.9: Fréquences et pressions critiques pour différents rapports d'épaisseur.

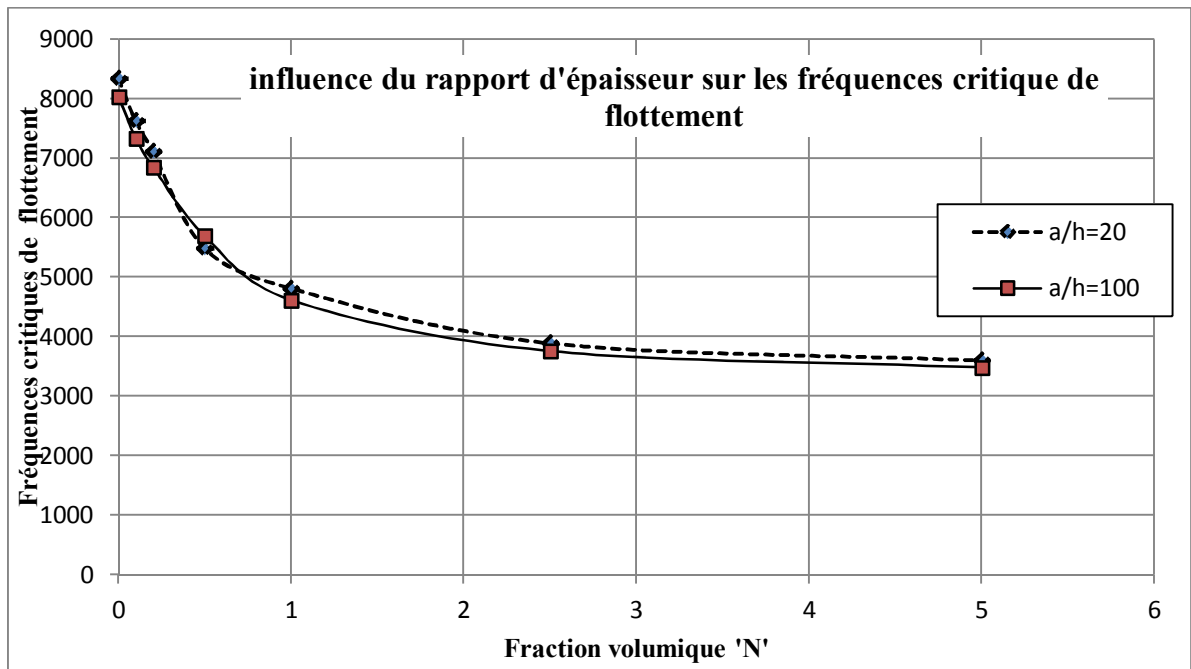


Figure 5.13 : Influence du rapport d'épaisseur sur les fréquences critiques de flottement.

### 5.5 Conclusion :

Les résultats obtenus grâce aux programmes de calcul sont satisfaisants, ils ont été comparés avec des résultats publiés Réf. [14], [43]. Les équations du mouvement sont établies par le principe variationnel d'Hamilton en considérant la théorie des déformations du premier ordre et la force aérodynamique quasi-statique bidimensionnelle en régime supersonique et sont résolus par la méthode de Navier et Bubnov-Galerkin. Nous avons vu le comportement libre et aéroélastique des plaques en FGM sur appuis-simples. Nous avons pu tirer quelques observations sur l'influence de quelques paramètres sur le comportement de ces plaques :

- L'augmentation du rapport d'allongement cause l'augmentation des fréquences naturelles et de la pression aérodynamique critique.
- L'accroissement de l'indice de fraction volumique cause la diminution des fréquences naturelles, de la pression aérodynamique critique ainsi que les fréquences critiques de flottement.

## CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, l'analyse du flottement supersonique d'une plaque en matériau à gradient fonctionnel (FGM) a été étudiée en se basant sur la théorie de déformation du premier ordre. Les effets de cisaillement transversal et de l'inertie de rotation ont été pris en compte. Les propriétés des matériaux sont supposées être indépendantes de la température, et varient continuellement à travers l'épaisseur selon la loi de puissance de la fraction volumique des constituants. En se servant des énergies cinétique et potentielle, ainsi que des travaux des forces aérodynamiques quasi-statiques en régime supersonique, le principe variationnel d'Hamilton a été utilisé pour établir les équations du mouvement d'une plaque FGM simplement appuyée. La force aérodynamique considérée est une approximation bidimensionnelle du premier ordre pour un nombre de Mach élevé. Ces équations du mouvement ont été résolues par les méthodes de Navier et Bubnov-Galerkin afin de déterminer les fréquences naturelles du système, ainsi que les pressions aérodynamiques critiques, et fréquences critiques de flottement.

Des comparaisons ont été faites avec des résultats publiés afin de montrer la validité du code de calcul que nous avons élaboré. Une étude paramétrique, en fonction du type de matériau utilisé, de l'indice de la fraction volumique, du rapport d'allongement, et du rapport d'épaisseur a été menée, ainsi nous avons pu tirer certaines conclusions :

- ✚ L'indice de la fraction volumique, le rapport d'allongement et le rapport d'épaisseur (les paramètres géométriques) influent sur les comportements libre et aéroélastique des plaques en FGM, notamment les fréquences naturelles, les fréquences critiques de flottement et les pressions critiques de flottement.
- ✚ Les deux types de matériaux à gradient fonctionnel traités dans ce travail montrent une grande influence de la variation de l'indice de la fraction volumique sur les paramètres des fréquences. Cette variation implique un changement des

concentrations de métal et de céramique dans la constitution de la plaque d'où une variation de la rigidité globale de celle-ci.

- ✚ Le code de calcul a été élaboré l'aide des systèmes de calcul « Maple-Matlab », et mis en exécution pour différents rapports géométriques, différents matériaux, et différents indices de la fraction volumique, ceci grâce à un travail analytique-numérique performant, puissant et moins coûteux au sens du temps de calcul. Les résultats établis et les comparaisons faites nous ont fait constater que le code de calcul élaboré est fiable et efficace, ce qui lui permet d'être très général et de pouvoir analyser le comportement dynamique de plusieurs types de plaques FGM basées sur la théorie de déformation du premier ordre.
- ✚ Notre étude nous a fait comprendre comment analyser le comportement dynamique des plaques, et notamment les plaques en FGM. Nous avons aussi compris comment prédire le début du flottement en constatant sur des graphes appropriés l'influence des paramètres géométriques (le rapport de l'allongement, et le rapport de l'épaisseur), et de l'indice de la fraction volumique sur celui-ci. Finalement, nous avons pu percevoir le comportement critique de la structure après le début du phénomène de flottement.

Pour des travaux futurs, il est envisageable de poursuivre ce travail en analysant le flottement des plaques en matériaux à gradient fonctionnel placées dans des environnements thermiques sévères, étant donné que ces nouveaux matériaux composites, généralement constitués de métal et de céramique, ont été principalement créés pour pallier aux problèmes engendrés par des élévations importantes de la température.

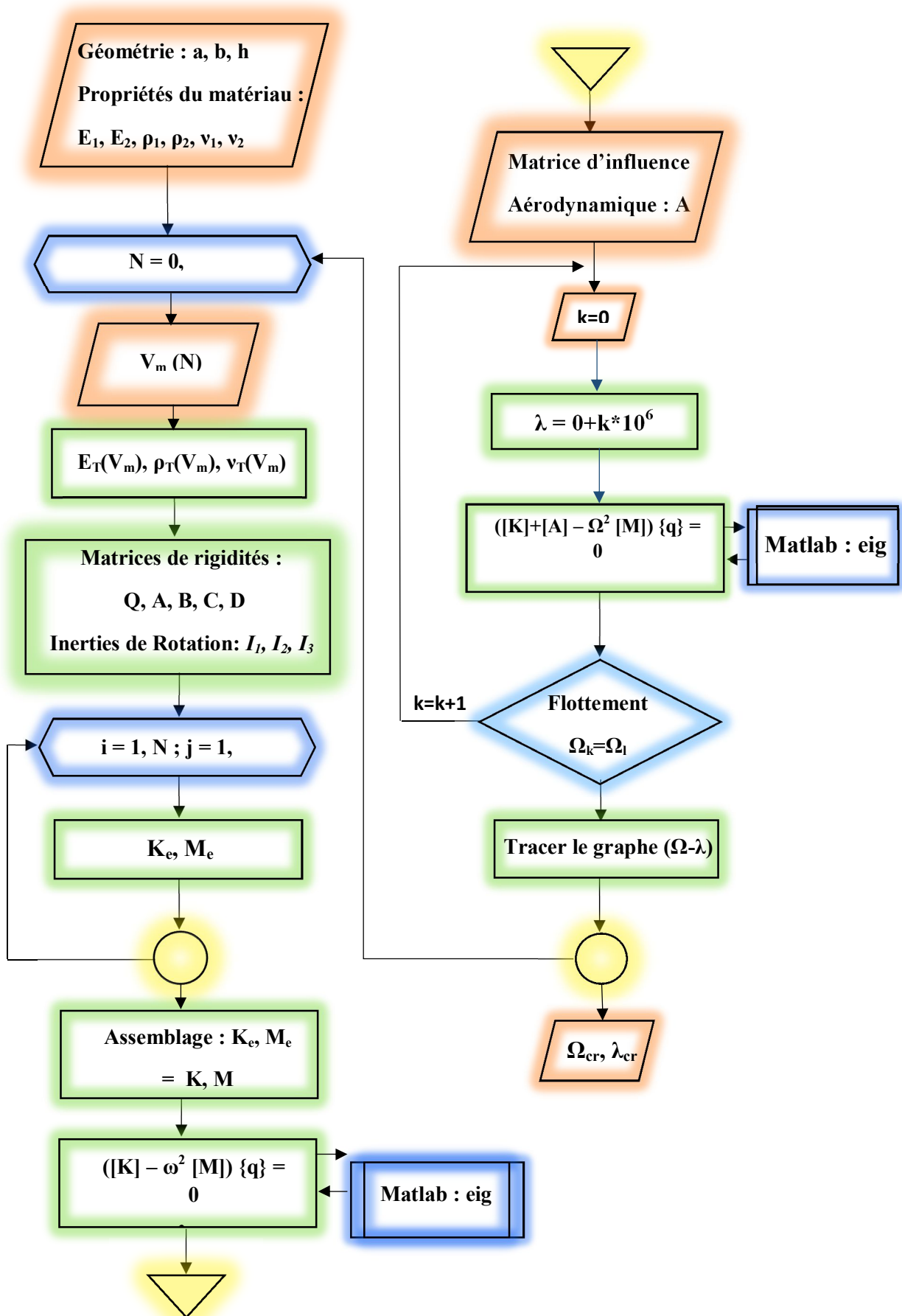


Figure 5.14: Organigramme du programme de calcul (Maple)



---

## REFERENCES

- [1] **E.H. Dowell.** « Aeroelasticity of plates and shells ». Leyden Netherland, (1975).
- [2] **A. MAHI.** « Cours aéroélasticité ». IAES, Université BLIDA 1, (2014).
- [3] **John Mills Hedgepeth.** « FLUTTER OF RECTANGULAR SIMPLY SUPPORTED PANELS AT HIGH SUPERSONIC SPEEDS ». Virginia Polytechnic Institute, (1957).
- [4] **J.N. Reddy.** « Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and analysis ». 2<sup>nd</sup> Edition, Florida, U.S.A, (2004).
- [5] **R D Mindlin.** « An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates ». Columbia University, USA. (2006).
- [6] **P. G. Lowe.** « Basic Principles of Plate Theory », University of Auckland New Zealand, (1982).
- [7] **K. Bhaskar and T.K. Varadan.** « PLATES Theories and Applications », department of Aerospace Engineering Indian Institute of Technology, Madras Chennai-600 036, India, (2014).
- [8] **Hui. ShenShen.** « Functionally Graded Materials Nonlinear, Analysis of plates and shells ». Boca Raton, USA, (2009).
- [9] **K. Ichikawa.** « Functionally Graded Materials in the 21<sup>st</sup> century ». Japan, (2001).
- [10] **Shyang-Ho Chi, Yen-Ling Chung.** « Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load ». University of Science and Technology, Taiwan, (2005).
- [11] **A. Hadi, A. Rastgoo, A. R. Daneshmehr, F. Ehsani,** Indian Journal of Materials Science Volume 2013, Article ID 206239.
- [12] **J. N. Reddy,** « Analysis of functionally graded plates ». Int. J. Numer. Meth. Engng. 47, 663-684 (2000).
- [13] **Huu-Tai Thai.** « Closed-form solutions for functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation under various boundary conditions ». Hanyang University, Korea, (2013).
- [14] **T. Prakash, M. Ganapathi.** « Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat, panels including thermal effects ». Elsevier Journal, Composite Structures 72 (2006) 10–18.

- [15] **H. Haddadpour**. « Nonlinear oscillations of a fluttering functionally graded plate ». Sharif University of Technology, Iran, (2006).
- [16] **V. V. Vedeneev**. « Numerical Investigation of Supersonic Plate Flutter Using the Exact Aerodynamic Theory ». (2008).
- [17] **Harry G. Schaeffer and Walter L. Heard**. « SUPERSONIC FLUTTER OF A THERMALLY STRESSED FLAT PANEL WITH UNIFORM EDGE LOADS ». (1965).
- [18] **Florian BLANC**. « Méthodes numériques pour l'aéroélasticité des surfaces de contrôle des avions ». Université de Toulouse, (2009).
- [19] **R. RAMZI** « COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DES COQUES SOUMISES À UN ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE ». UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL, (2012).
- [20] **I.E. Garrick and W.H. Reed**. « Historical development of aircraft flutter ». Journal of Aircraft, 587-65, (1981).
- [21] **M.W. Kehoe**. « A historical overview of flight flutter testing ». NASA TM 4720, (1995).
- [22] **R.A. Frazer and W.J. Duncan**. « The flutter of airplane wings ». British Aeronautical Research Council (ARC), (1928).
- [23] **T. von Karman and J.M. Burgers**. « General aerodynamic theory. Perfect fluids. Aerodynamic Theory ». (1935).
- [24] **T. Theodorsen**. « General theory of aerodynamics instability and the mechanism of flutter ». NACA TR 496, (1935).
- [25] **W.J. Duncan**. « The fundamentals of flutter ». Reports and Memoranda, British Aeronautical Research Council (ARC), (1951).
- [26] **L. Prandtl**. « Wing theory in a compressible medium ». Technical University of Munich, (1936).
- [27] **A. Abbasi and J.E. Cooper**. « Current status and challenges for flight flutter testing ». ISMA, (2006).
- [28] **L.A. Tolve**. « History of flight flutter testing. In Proceedings of the 1958 Flight Flutter Testing Symposium ». NASA SP-358, (1958).
- [29] **Dewey. H. Hodges and G. Alvin. Pierce**. « Introduction to structural dynamics and aeroelasticity ». Cambridge University, (2002).

- [30] **A. MAHI**. « ANALYSE ET ETUDE DES PLAQUES COMPOSITES FGM EN VIBRATIONS LIBRES ». Thèse de doctorat, Département Mécanique, Université de Blida 1, (2012).
- [31] **James K. Wessel**. « HANDBOOK OF ADVANCED MATERIALS ». Wiley Interscience Publication, USA. (2004).
- [32] **I. Shiota and Y. Miamoto**, « Functionally Graded Materials ». Japan, FGM research programs, (1997).
- [33] **Ankit Saharan**. « Characterization of functionally graded materials through fractal geometry ». University of Illinois at Urbana-Champaign, (2010).
- [34] **J.M. Berthelot**. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». Paris. (1992).
- [35] **I. Badreddine**. « Cours Mécanique des Milieux Continus ». IAES, Uni. BLIDA 1, (2013).
- [36] **G. H. Paulino**, « Fracture of Functionally Graded Materials », Engineering Fracture Mechanics Volume 69, (2002).
- [37] **Reismann H.** « Elastic plates – Theory and application ». Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons, (1988).
- [38] **Dixon and Birman and Librescu**. « SUPERSONIC FLUTTER OF SHEAR DEFORMABLE LAMINATED COMPOSITE FLAT PANELS ». Journal of Sound and Vibration. (1990) 139(2) 265-275.
- [39] **Iolanda Del Prete and Antonio Bilotta, Emidio Nigro**, « Performances at high temperature of RC bridge decks strengthened with EBR-FRP ». ELSEVIER Journal, composite, Part B 68 (2015) 27-37.
- [40] **S Natarajan**. « Supersonic flutter analysis of thin cracked functionally graded material plates ». Institute of Mechanics and Advanced Materials, University India, (2012).
- [41] **ATTIA Amina et YEGHNEM Redha**, « Etude de la flexion des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie à ordre élevé ». Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbes, (2012).
- [42] **A. M. Zenkour**. « Bending Analysis of Functionally Graded Plates in the Context of Different Theories of Thermoelasticity ». Indian Journal of Materials Science, Article ID 962351, Volume (2009).
- [43] **Ait Atmane H, Tounsi A et Adda Bedia E.A**, Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbes, (2011).
- [44] **A. Benkhedda**. « Cours Structures Composites ». IAES, Uni. BLIDA 1, (2014).

[45] **J.N Reddy.** « Energy principles and variational methods in applied mechanics ». John Wiley & Sons. Inc., (2002).

[46] **S. P. Timoshenko** and **S. Woinowsky-Krieger.** « Theory of plates and shells ». 2<sup>nd</sup> Edition, Stanford University, (1959).

# Annexe

Les étapes à suivre pour résoudre les équations du mouvement par les méthodes de Navier et de Bubnov-Galerkin sont les suivantes :

En remplaçant les solutions de Navier suivantes :

$$u_0(x, y) = \sum_n \sum_m U_{mn} c_m s_n e^{J\omega t}$$

$$v_0(x, y) = \sum_n \sum_m V_{mn} s_m c_n e^{J\omega t}$$

$$w_0(x, y) = \sum_n \sum_m W_{mn} s_m s_n e^{J\omega t}$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_n \sum_m T_{mn} c_m s_n e^{J\omega t}$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_n \sum_m S_{mn} s_m c_n e^{J\omega t}$$

Avec :

$$c_m = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right), c_n = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), s_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), s_n = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

dans les équations du mouvements :

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n \left( A_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 U_{mn} + A_{12} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} V_{mn} + B_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 T_{mn} + B_{12} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} S_{mn} \right. \\ \left. + A_{33} \left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 U_{mn} + \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} V_{mn}\right) + B_{33} \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 T_{mn} + \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} S_{mn}\right) \right. \\ \left. - (I_0 \omega^2 U_{mn} + I_1 \omega^2 T_{mn}) \right) c_m s_n = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_m \sum_n \left( A_{21} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} U_{mn} + A_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + B_{21} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} + B_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right. \\ \left. + A_{33} \left( \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) + B_{33} \left( \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \right. \\ \left. - (I_0 \omega^2 V_{mn} + I_1 \omega^2 S_{mn}) \right) s_m c_n = 0$$

$$\sum_m \sum_n \left( D_{11} \left( \frac{m\pi}{a} W_{mn} + T_{mn} \right) + B_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 U_{mn} + B_{12} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} V_{mn} + C_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 T_{mn} \right. \\ \left. + C_{12} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} S_{mn} + B_{33} \left( \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 U_{mn} + \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} V_{mn} \right) \right. \\ \left. + C_{33} \left( \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 T_{mn} + \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} S_{mn} \right) - (I_2 \omega^2 T_{mn} + I_1 \omega^2 U_{mn}) \right) c_m s_n = 0$$

$$\sum_m \sum_n \left( D_{22} \left( \frac{n\pi}{b} W_{mn} + S_{mn} \right) + B_{21} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} U_{mn} + B_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 V_{mn} + C_{21} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} T_{mn} \right. \\ \left. + C_{22} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 S_{mn} + B_{33} \left( \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 V_{mn} \right) \right. \\ \left. + C_{33} \left( \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} T_{mn} + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 S_{mn} \right) - (I_2 \omega^2 S_{mn} + I_1 \omega^2 V_{mn}) \right) s_m c_n = 0$$

$$\sum_m \sum_n \left( D_{11} \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 W_{mn} + \frac{m\pi}{a} T_{mn} \right) + D_{22} \left( \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 W_{mn} + \frac{n\pi}{a} S_{mn} \right) - I_0 \omega^2 W_{mn} \right) s_m s_n \\ + \sum_m \sum_n \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{m\pi}{a} W_{mn} c_m s_n = 0$$

La méthode de Navier s'applique lorsqu'il n'y a pas de pression aérodynamique, le système est résolu pour chaque paire  $m, n$  et on résous  $(m \times n)$  systèmes de cinq équations à cinq inconnus, nous obtenons en final  $(5 \times m \times n)$  modes de vibration.

En appliquant la méthode de Bobnov-Galerkin, c'est-à-dire, en intégrant ces équations dans toute la surface de la plaque, on obtient pour la dernière équation :

$$\int_0^a \int_0^b \sum_m \sum_n \left( \left( D_{11} \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 W_{mn} + \frac{m\pi}{a} T_{mn} \right) + D_{22} \left( \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 W_{mn} + \frac{n\pi}{b} S_{mn} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - I_0 \omega^2 W_{mn} \right) s_m s_n \right) s_k s_l dx dy \\ + \int_0^a \int_0^b \left( \sum_m \sum_n \frac{\rho_a U_a^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{m\pi}{a} W_{mn} c_m s_n \right) s_k s_l dx dy = 0$$

Pour la première intégrale, nous avons par la définition de la propriété d'orthogonalité des fonctions d'approximation:

$$\begin{aligned} &= 0 \quad \text{si } k \neq m \quad \text{ou } l \neq n \\ &\neq 0 \quad \text{si } k = m \quad \text{et } l = n \end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, nous avons :

$$\begin{aligned} &\neq 0 \quad \text{si } k = \text{paire } m = \text{impaire } \text{ et } l = n \\ &\neq 0 \quad \text{si } k = \text{impaire } \text{ et } m = \text{paire } \text{ et } l = n \\ &= 0 \quad \text{autres propositions} \end{aligned}$$

On obtient alors les matrices de masse et de rigidité élémentaires suivante :

$$\begin{aligned} K_e^{mn}[1,1] &= \frac{1}{4} \left( A_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + A_{33} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) & K_e^{mn}[3,3] &= \frac{1}{4} \left( D_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \\ K_e^{mn}[1,2] &= \frac{1}{4} (A_{12} + A_{33}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} & K_e^{mn}[3,4] &= \frac{1}{4} D_{11} \frac{m\pi}{a} \\ K_e^{mn}[1,4] &= \frac{1}{4} \left( B_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + B_{33} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) & K_e^{mn}[3,5] &= \frac{1}{4} D_{22} \frac{n\pi}{b} \\ K_e^{mn}[1,5] &= \frac{1}{4} (B_{12} + B_{33}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} & K_e^{mn}[4,4] &= \frac{1}{4} \left( D_{11} + C_{22} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \\ & & & \left. + C_{33} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \\ K_e^{mn}[2,2] &= \frac{1}{4} \left( A_{22} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + A_{33} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) & K_e^{mn}[4,5] &= \frac{1}{4} (C_{12} + C_{33}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} \\ K_e^{mn}[2,5] &= \frac{1}{4} \left( B_{22} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + B_{33} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) & K_e^{mn}[4,4] &= \frac{1}{4} \left( D_{22} + C_{22} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \\ & & & \left. + C_{33} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \\ K_e^{mn}[2,4] &= \frac{1}{4} (B_{12} + B_{33}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} & M_e^{mn}[4,4] &= M_e^{mn}[5,5] = \frac{1}{4} I_2 \\ M_e^{mn}[1,1] &= M_e^{mn}[2,2] = M_e^{mn}[3,3] & M_e^{mn}[1,4] &= M_e^{mn}[2,5] = \frac{1}{4} I_1 \\ &= \frac{1}{4} I_0 \end{aligned}$$

La matrice des coefficients aérodynamique est plus compliquée, elle est d'ordre  $(5 \times m \times n)^2$ , et elle est antisymétrique.