

UNIVERSITÉ DE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences Exactes

Département de Physique

MÉMOIRE DE MAGISTER

Spécialité: Physique Théorique

ETUDE DES PROPRIÉTÉS D'UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS
BIRATIONNELLES:
COMPLÉXITÉS ET POINTS FIXES

Par

MEDDI Mounira

Devant le jury composé de

M. BENTAIBA	Professeur, U. S. D. Blida	Président
S. HASSANI	Directeur de recherches, CRNA, Alger	Examineur
N. ZENINE	Directeur de recherches, CRNA, Alger	Examineur
S. BOUKRAA	Professeur, U. S. D. Blida	Rapporteur

Blida, Mai 2007

RÉSUMÉ

Nous étudierons dans ce travail certaines propriétés de transformations birationnelles construites à partir de matrices d'ordre quelconque $q \times q$ et ayant pour origine la mécanique statistique sur réseau. Nous donnerons une classification de ces transformations en fonction des permutations des éléments de ces matrices (essentiellement pour des matrices d'ordres 3×3 et 4×4). On verra ainsi qu'il existe plusieurs classes de transformations ayant chacune une complexité et un schéma de factorisation propre. Nous nous intéresserons ensuite aux deux classes particulières les plus simples (ayant les plus petites complexités λ): la classe des transformations intégrables de complexité $\lambda = 1$ et la classe ayant la plus petite complexité supérieure à 1 appelée Classe IV. Nous réduirons cette dernière à une transformation à deux variables et à deux paramètres. L'étude de cette dernière est ensuite faite en détails en fonctions des valeurs des paramètres à travers les propriétés de ses points fixes, l'apparition de l'intégrabilité, l'entropie topologique (réelle et complexe), les fusions et les coalescences des points fixes, la stabilité de ces points fixes, Les résultats de ce travail permettront ainsi d'éclaircir la relation existant entre la complexité d'une transformation birationnelle et les propriétés de ses points fixes.

مُلخَص

فِي هَذَا الْعَمَلِ سَنَدُرُ بَعْضَ خِصَائِصِ التَّحَوُّلَاتِ النَّاطِقَةِ الْمُرَدَّوَجَةِ انْطِلَاقًا مِنَ الْمَصْفُوفَاتِ ذَاتِ رُتْبَةٍ كَيْفِيَّةٍ $q \times q$ وَ الَّتِي مَصَدَرُهَا الْمِيكَانِيكَا الْإِحْصَائِيَّةُ. سَوْفَ نُصَنِّفُ هَذِهِ التَّحَوُّلَاتِ حَسَبَ التَّبْدِيلِ بَيْنَ عَنَاصِرِ هَذِهِ الْمَصْفُوفَاتِ (خَاصَّةً الْمَصْفُوفَاتِ ذَاتِ الرُّتْبَةِ 3×3 وَ 4×4). سَنَرَى بِأَنَّهُ تَوْجَدُ أَصْنَافٌ لِهَذِهِ التَّحَوُّلَاتِ بِحَيْثُ يَكُونُ لِكُلِّ صِنْفٍ تَعْقِيدٌ وَ طَرِيقَةٌ تَحْلِيلٍ خَاصَّةٌ. نَهْتَمُّ بَعْدَ ذَلِكَ بِصِنْفَيْنِ هَامَيْنِ ذَوِي أَقَلِّ تَعْقِيدٍ وَ هُمَا الصِّنْفُ الْخَاصُّ بِالتَّحَوُّلَاتِ التَّكَامِلِيَّةِ، وَ الصِّنْفُ الَّذِي لَهُ اصْغَرُ قِيَمَةٍ تَعْقِيدٍ (أكْبَرُ مِنَ الْوَاحِدِ) وَ الَّذِي سُمِّيَ صِنْفُ IV . سَوْفَ نُقَلِّصُ هَذَا التَّحَوُّلَ الْأَخِيرَ (صِنْفُ IV) إِلَى تَحَوُّلٍ بِمُتَغَيَّرَيْنِ وَ بَوَسِيطَيْنِ. دِرَاسَةُ هَذَا الصِّنْفِ الْأَخِيرِ سَيَكُونُ حَوْلَ الْبِقَاطِ الثَّابِتَةِ وَ خِصَائِصِهَا بِحَيْثُ أَنَّ هَذَا الْعَمَلَ يُوضِّحُ لَنَا الْعِلَاقَةَ الْمَوْجُودَةَ بَيْنَ تَعْقِيدِ تَحَوُّلِ نَاطِقِ مُرَدَّوَجٍ وَ نِقَاطِهِ الثَّابِتَةِ.

ABSTRACT

We will study in this work some properties of birational transformations constructed from matrices of any order $q \times q$ and having for origin lattice statistical mechanics. We will give a classification of these transformations according to permutations of the elements of these matrices (essentially for matrices of orders 3×3 and 4×4). One will see several classes of transformations having each a complexity and an own factorisation scheme. We will be interested then in the two simplest classes (having the smallest complexities λ): the class of integrable transformations having $\lambda = 1$ and the class having the smallest complexity greater than 1 called Class IV. We will reduce this last one to a transformation on two variables and having two parameters. The analysis of this last transformation is made then in detail according to the values of the parameters through the properties of its fixed points, the apparition of the integrability, the (real and complex) topological entropy, the fusions and the coalescences of the fixed points, the stability of these fixed points, Results of this work will permit to clarify the relation existing between the complexity of a birational transformation and the properties of its fixed points.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique Théorique et Interactions Rayonnement-Matière (LPTHIRM) du Département de Physique de la Faculté des Sciences de l'Université Saad Dahlab de Blida.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Monsieur S. Boukraa, Professeur, encadreur de cette thèse pour son accueil, son suivi, son aide, ses conseils et tous les efforts fournis pour l'élaboration de ce travail avec beaucoup de patience et de sagesse.

Je remercie vivement Monsieur M. Bentaiba, Professeur, Directeur de Laboratoire et Chef du Département de Physique, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Messieurs S. Hassani et N. Zenine, Directeurs de recherches au Centre de Recherches Nucléaires d'Alger (CRNA), ont accepté avec bienveillance d'être examinateur de ce travail.

Je tiens aussi à remercier Monsieur J.M. Maillard, Directeur de recherches au CNRS, pour une lecture détaillée de ce mémoire et pour les nombreuses améliorations apportées à ce texte.

J'adresse mes plus vifs remerciements à toute l'équipe du Laboratoire de Physique Théorique et Interactions Rayonnement-Matière (LPTHIRM) en particulier à Souad, Sanaa, Otmane.

Je dédie ce mémoire:

- à mes parents, j'aimerais les remercier d'avoir été tout le temps à mes côtés ainsi qu'à leur patience,

- à mes frères Nacer, Mohamed, M'hamed et Rabah et mes sœurs Karima et Rabea ainsi que leurs enfants surtout les charmants Amina, Fares, Ali, Hamza,

- à toute ma famille surtout à mon oncle Mouloud, sa femme et ses enfants,

- à mes amies intimes: Samira, Hadjira, Fatima, Salima, Lila. Je ne saurais bien sûr oublier de très nombreux amis.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION

9

**1 DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR RÉSEAUX AUX SYSTÈMES
DYNAMIQUES DISCRETS** **11**

1.1 Modèle de Potts chiral à 6 états 14

1.2 Le modèle de Baxter 14

1.3 Autres exemples 16

2 COMPLEXITÉS ASSOCIÉES À DES MATRICES D'ORDRE 3 **18**

2.1 Propriétés de factorisation 19

2.2 Cas général 20

2.3 Détermination des fonctions génératrices 21

2.4 Résultats 22

2.5 Remarques 26

**3 COMPLEXITÉS ASSOCIÉES À DES MATRICES D'ORDRE 4
ET D'ORDRE QUELCONQUE** **28**

3.1 Six classes d'équivalence 28

3.2 Permutations générales 36

3.3 Remarques et conclusion 43

4 ETUDE DE LA CLASSE IV **45**

4.1 Propriétés de factorisation 45

4.2 La classe IV vue comme une transformation dans un plan 46

4.3	Réurrences sur les x_n	48
4.4	Résolution de la récurrence sur x_n	50
4.5	Transformation à deux variables u et v et à deux paramètres α et ϵ	52
4.6	Préservation d'une deux-forme	53
4.7	Réductions de complexité	53
4.8	Les cas intégrables	54
4.9	Les invariants	57
4.10	La transformation pour $\epsilon = 3$	59
5	PROPRIÉTÉS DES POINTS FIXES DE LA CLASSE IV	62
5.1	Définition d'un point fixe	63
5.2	Stabilité des points fixes	64
5.3	Les cycles de points fixes	64
5.4	Étude des points fixes	66
5.5	Analyse des points fixes	71
5.6	Exemples de fusions et coalescences des cycles	74
6	COMPLEXITÉ D'ARNOLD ET ENTROPIE TOPOLOGIQUE	87
6.1	Complexité de Arnold	87
6.2	Fonction dynamique ζ et entropie topologique	90
	CONCLUSION	92
	RÉFÉRENCES	95

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Portrait de phase du modèle de Potts chiral à 6 états	14
Figure 1.2	Portrait de phase du modèle de Baxter	15
Figure 1.3	Surface abélienne	16
Figure 4.1	Le portrait de phase pour $\epsilon = 0.52$	55
Figure 4.2	Le portrait de phase pour $\epsilon = 1/4$	56
Figure 4.3	Le portrait de phase pour $\epsilon = 1/3$	56
Figure 4.4	Le portrait de phase pour $\epsilon = 1/2$	57
Figure 4.5	Portrait de phase pour $\epsilon = 3$	59
Figure 5.1	Courbes algébriques de $(p_1, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ et $p_9)$	73
Figure 5.2	Courbes algébriques des solutions réelles de p_7 et p_1 en fonction de ϵ	75
Figure 5.3	Courbe algébrique de t_7 en fonction de ϵ	76
Figure 5.4	Portrait de phase pour $\epsilon = 0.19$	77
Figure 5.5	Portrait de phase pour $\epsilon = 0.21$	77
Figure 5.6	Portrait de phase pour $\epsilon = 0.236$	78
Figure 5.7	Portrait de phase pour $\epsilon = 0.238$	79
Figure 5.8	Portrait de phase pour $\epsilon = 0.230$	80
Figure 5.9	Portrait de phase pour $\epsilon = 0.232$	80
Figure 5.10	Courbes algébriques des solutions réelles de p_8 et p_1 en fonction de ϵ	82
Figure 5.11	Courbes algébriques des solutions réelles de Q_8 et Q_1 en fonction de ϵ	84
Tableau 2.1	Complexités associées à des matrices 3×3	27
Tableau 3.1	Complexités associées à des matrices 4×4	44

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de montrer comment des systèmes dynamiques apparaissent naturellement dans le cadre de la mécanique statistique sur réseaux, permettant ainsi d'avoir une vision radicalement nouvelle de cette dernière. Il est à rappeler que les bases de la théorie des systèmes dynamiques ont été posées dès le début du siècle par H. Poincaré [1, 2]. Mais ce n'est que récemment que ces problématiques ont été redécouvertes dans d'autres domaines de la physique et des mathématiques [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Les travaux de Bellon, Maillard et Viallet [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] ont été les premiers à établir une relation claire entre ces deux notions, en montrant que "l'action du groupe de symétrie des équations de Yang-Baxter d'un modèle à vertex (ou à spins) N -dimensionnel" qui est engendré par des involutions s'identifie à "l'action de transformations birationnelles sur l'espace des variables du modèle" pouvant donc être vu comme un système dynamique discret.

Nous décrirons dans le Chapitre 1 de ce travail plus en détails ce lien sur quelques exemples simples, en particulier le modèle de Baxter [21, 22, 23]. Les notions d'intégrabilité ou de non-intégrabilité seront discutées.

Ayant compris ce lien, il est apparu tout à fait naturel de faire une étude plus exhaustive des transformations birationnelles construites à partir d'involutions indépendamment de la mécanique statistique sur réseaux. Dans les travaux de Boukreev, Maillard et Rollet [24, 25, 26, 27, 28, 29], une étude de transformations birationnelles construites à partir des matrices d'ordre $q \times q$, en utilisant l'inverse habituelle de matrices et des transpositions simples d'éléments, a permis de classer ces transformations birationnelles en plusieurs classes différentes, chacune ayant une complexité et un schéma de factorisation propre. De manière remarquable toutes les complexités trouvées sont des nombres algébriques, c'est à dire solutions de polynômes à coefficients entiers.

Les travaux de Abarenkova, Anglès d'Auriac, Boukreev, Hassani et Maillard [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39] ont permis, après avoir fait une étude numérique pour des transpositions quelconques, d'identifier une vingtaine de complexités pour des transformations impliquant des matrices d'ordre 3×3 . Nous reprenons dans le Chapitre 2 de manière plus exacte cette étude en différenciant les schémas de factorisation et montrerons que de nou-

velles complexités qui n'ont pas été identifiées par la méthode numérique utilisée dans [34] apparaissent. Une généralisation pour les matrices d'ordre 4×4 est faite dans le Chapitre 3. Encore une fois, toutes les complexités trouvées sont des nombres algébriques. Certaines propriétés de ces polynômes seront discutées.

Dans le Chapitre 4, nous étudierons plus particulièrement une classe de transformations ayant la complexité la plus petite supérieure à 1 appelé Classe IV. Cette classe apparaît pour des matrices d'ordre quelconque $q \times q$. Nous montrerons comment on peut, par exemple lorsque $q = 4$, simplifier cette transformation qui agit dans un espace projectif à 15 variables, à une transformation à seulement 2 variables très simple à étudier (graphiquement, numériquement et analytiquement). Nous montrerons comment on peut construire des quantités invariantes de ses transformations et même déduire des sous-cas de réduction de complexités par la méthode de Diller et Favre [40]. Concernant les cas intégrables, plusieurs méthodes d'étude peuvent être utilisées. Nous citerons plus particulièrement les méthodes graphiques et les méthodes basées sur l'étude systématique des orbites finies de ces transformations utilisées dans travail de Boukraa, Hassani et Maillard [41]. Les méthodes graphiques utilisent la visualisation des orbites en identifiant celles donnant des courbes algébriques: lors de la visualisation des orbites de ces transformations, on rencontre souvent des orbites chaotiques (ayant une complexité différente de un) et plus rarement celles intégrables.

Afin d'établir un lien (susceptible d'être généraliser à d'autres transformations) entre les propriétés des points fixes et l'intégrabilité (ou la non-intégrabilité) d'une transformation, les chapitres 5 et 6 seront consacré à l'étude détaillé de cette transformation de la classe IV à 2 variables (x, y) et 2 paramètres (α, ϵ) . Les propriétés de ses points fixes, l'apparition de l'intégrabilité, la complexité de Arnold, l'entropie topologique (réel et complexe), les fusions et les coalescences des points fixes, la nature des points fixes, ... y seront étudiés.

Nous donnons ensuite une conclusion sur le travail qui a été réalisé ainsi que les perspectives futures qui peuvent être développées dans le but d'une meilleure compréhension de ces modèles simples de systèmes dynamiques.

CHAPITRE 1

DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR RÉSEAUX AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

Dans le cadre de la compréhension des modèles exactement solubles en physique, il est assez naturel d'adopter un point de vue de mécanique statistique, car toutes les idées d'intégrabilité ont pris naissance et mûri dans ce domaine (en mécanique statistique ou en physique du solide) où un travail important a été réalisé et qui joue un rôle indéniable dans la compréhension de la physique de ces problèmes.

L'exemple le plus simple (et le plus connu) de modèle exactement soluble est le modèle d'Ising [42] résolu par Onsager en 1944 [43], qui joue un rôle important dans la théorie des transitions de phases et des phénomènes critiques et qui fut à la base des fondements de toutes ces idées.

Durant les trente dernières années, les développements dans les modèles exactement solubles en mécanique statistique ont rejoint les développements des modèles intégrables en théorie des champs (voir par exemple [21, 22, 23]). Cette convergence repose essentiellement sur l'existence d'un ensemble d'équations (sur les paramètres du modèle) jouant un rôle clé et fondamental dans la compréhension de l'intégrabilité des modèles, et ce, que ce soit en mécanique statistique ou en théorie des champs. Ces équations sont ce qu'on appelle les équations de Yang-Baxter (équations portant sur les matrices des poids de Boltzmann).

L'existence d'une structure locale simple appelée algèbre de Yang-Baxter (ou relation triangle-étoile en mécanique statistique) s'est avérée être le critère le plus intrinsèque et le plus puissant pour la compréhension des modèles exactement solubles. Plus généralement, l'idée directrice consiste à partir d'une structure locale (sur un réseau, par exemple, en mécanique statistique) simple, à déduire des conséquences globales importantes (équations fonctionnelles sur un objet globale comme la fonction de partition du modèle, l'aimantation, la chaleur latente, la susceptibilité, ...).

Dans cette optique, il a été possible de démontrer, à partir de la relation triangle-étoile, la commutation des matrices de transfert ligne par ligne (ou plan par plan, pour un modèle tridimensionnelle) aussi bien pour les modèles à spin que pour ceux à vertex.

Un autre critère local simple, appelé relation inverse, a été mis en évidence pour les modèles ne possédant pas à priori de structure triangle-étoile (donc à priori non exactement solubles) et permettant de mettre en évidence des équations fonctionnelles simples satisfaites par les fonctions de partition des modèles. Sous certaines conditions, ces équations peuvent même être résolues.

Dans de précédents travaux [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], ont été mises à jour des symétries non-linéaires non triviales des modèles de mécanique statistique sur réseau. Ces symétries qui se représentent en termes de transformations birationnelles dans l'espace des paramètres de ces modèles sont des symétries exactes des équations de Yang-Baxter (ou de leurs généralisations en dimensions supérieures) et de façon plus générale des symétries de l'ensemble de l'espace des paramètres que le modèle soit ou non un modèle intégrable (au sens de l'existence d'une ansatz de Bethe, de solutions des équations de Yang-Baxter ou de l'existence d'une famille de matrices de transfert qui commutent...). Dans le cas des modèles intégrables, ces symétries, représentées par des transformations birationnelles laissent invariantes les variétés algébriques qui sont automatiquement associées aux solutions des équations de Yang-Baxter.

Génériquement, ces transformations birationnelles forment un groupe infini de transformations. Dans le cas où ces variétés algébriques sont des courbes (ce qui est le cas de tous les exemples connus à l'heure actuelle...) la simple visualisation (sur un ordinateur) des orbites de ce groupe dans l'espace des paramètres permet de littéralement voir ces courbes algébriques car l'infinité des images successives d'un point d'une orbite tend à remplir de façon dense ces courbes (qui sont nécessairement rationnelles ou elliptiques). L'analyse de ces groupes de transformations birationnelles et de leurs orbites associées que ce soient par de tels procédés numériques de visualisation ou par des procédés analytiques de recherches des invariants algébriques préservés par cette infinité de transformations (calculs formels...) fournit la solution du problème dit de la Baxterisation d'une solution isolée des équations de Yang-Baxter ou de leurs avatars (équations triangle-étoile généralisées, équations tétraèdre...) [44].

Il a été montré [27, 44] que l'étude de ces groupes de symétries birationnelles fournissait un outil extraordinairement puissant pour la recherche et l'étude de modèles intégrables nouveaux notamment pour une des étapes essentielles de la résolution des modèles à savoir la paramétrisation des solutions et d'autant plus puissant et contraignant que l'on recherche des modèles intégrables en dimensions supérieures à deux.

L'étude systématique de ces groupes de symétries birationnelles a permis de montrer l'existence d'une vaste classe de modèles appelés modèles quasi-intégrables qui comme les modèles intégrables ont des variétés algébriques non-triviales (courbes elliptiques, surfaces

algébriques,...) invariantes par l'action de cette infinité de transformations birationnelles mais ne vérifient pas pour autant les équations de Yang-Baxter. Ces modèles n'en constituent pas moins autant d'exemples, si l'on ne regarde que le groupe de symétrie birationnelle opérant dans l'espace des paramètres, de systèmes dynamiques dépendant essentiellement d'un assez grand nombre de paramètres, et intégrables en tant que systèmes dynamiques (paramétrisables en termes de fonctions elliptiques...).

Ces modèles quasi-intégrables constituent donc une nouvelle classe de modèles autorisant des calculs analytiques exacts, classe intermédiaire entre les trop rares modèles intégrables et les trop génériques modèles chaotiques. L'étude des équations de Yang-Baxter a constitué une avancée notable réduisant des calculs souvent fastidieux sur des objets globaux tels que des hamiltoniens quantiques ou des matrices de transfert à l'analyse d'un système d'équations trinéaires correspondant à une relation très locale simple, mais l'on s'est vite aperçu que la recherche d'un tel système d'équations largement surdéterminé s'avérait toujours une tâche extrêmement complexe. L'étude des symétries birationnelles de ces équations constitue une nouvelle étape majeure efficace et puissante du fait de la simplicité et le caractère systématique de cette étude qui peut s'appliquer, sans aucun a priori sur l'existence éventuelle des solutions des équations de Yang-Baxter.

Ces quelques remarques nous amènent tout naturellement à considérer les groupes de transformations engendrés par l'inverse matriciel I et des permutations quelconques des coefficients d'une matrice, étant entendu qu'une permutation quelconque peut être interprétée géométriquement comme la transposition partielle de deux des " d " espaces du vertex d -dimensionnel (ou un produit de telles transpositions). Il est clair qu'une des tendances que l'on rencontre dans l'étude moderne des modèles intégrables consiste à dégager des structures algébriques universelles en essayant de s'abstraire au minimum des représentations particulières de ces algèbres. Il est aussi clair que les matrices d'un ordre donné ne doivent pas être privilégiées et nous allons essayer d'obtenir de la façon la plus systématique possible des résultats les plus universels possibles, c'est-à-dire valables pour des matrices $q \times q$ quelconques.

Toutes les considérations précédentes justifient l'étude des groupes de symétries représentées par des transformations birationnelles, engendrées par l'inverse matriciel et des permutations de coefficients de matrices $q \times q$ dans le cadre d'une approche la plus générale et la plus universelle possible.

Donnons quelques exemples construits selon cette méthode.

1.1. Modèle de Potts chiral à 6 états

Considérons l'exemple suivant qui correspond aux symétries d'un modèle de Potts chiral à 6 états [21]. Dans l'espace des deux paramètres u et v du modèle, les symétries sont engendrées par deux involutions, les transformations d'ordre deux suivantes appelées I et J . Sur u et v , elles se représentent par des transformations birationnelles:

$$J : u \rightarrow 1/u, v \rightarrow 1/v \quad (1.1)$$

$$I : u \rightarrow \frac{-u - u^2 + 2v^2}{1 + u + 2v - u^2 - 2uv - v^2}, v \rightarrow \frac{u^2 + uv - v^2 - v}{1 + u + 2v - u^2 - 2uv - v^2} \quad (1.2)$$

L'orbite d'un point (u, v) , de l'espace des paramètres, itéré par le produit IJ , remplit de manière remarquable une courbe algébrique dans cette espace. L'invariant de cette courbe étant:

$$\Delta = \frac{(2v^2 + 2uv - u^2 - 2u^3 - 2vu^2 + v^2u)(u - v^2)^2}{(u + v)^4(1 - u)(1 - v)^2} \quad (1.3)$$

Un exemple d'orbite obtenue est montré dans la Figure 1.1.

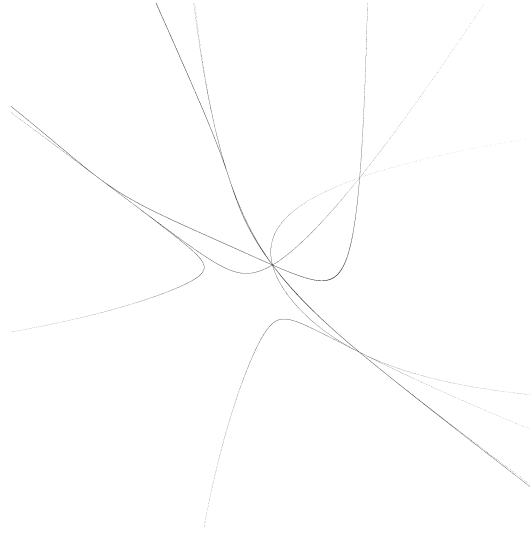


Figure 1.1 Portrait de phase du modèle de Potts chiral à 6 états

1.2. Le modèle de Baxter

Comme deuxième exemple, on considère le paradigme des modèles exactement solubles, le modèle symétrique à huit vertex de Baxter [21]. Sa matrice R des poids de Boltzmann

est la suivante:

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

On note que cette forme de matrice est préservée par les opérations I et J . L'action de I est:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \frac{a}{a^2 - d^2} & b &\rightarrow \frac{b}{b^2 - c^2} \\ c &\rightarrow \frac{-c}{b^2 - c^2} & d &\rightarrow \frac{-d}{a^2 - d^2} \end{aligned}$$

et l'action de J est:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \frac{a}{a^2 - c^2} & b &\rightarrow \frac{b}{b^2 - d^2} \\ c &\rightarrow \frac{-c}{a^2 - c^2} & d &\rightarrow \frac{-d}{b^2 - d^2} \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser une méthode visuelle qui consiste à dessiner l'orbite obtenue numériquement par l'itération d'un point initial. On introduit les variables u , v et w par $u = b/a$, $v = c/a$ et $w = d/a$. La Figure 1.2 montre un exemple d'orbite projetée dans le plan (u, v) : les itérés densifient une courbe.

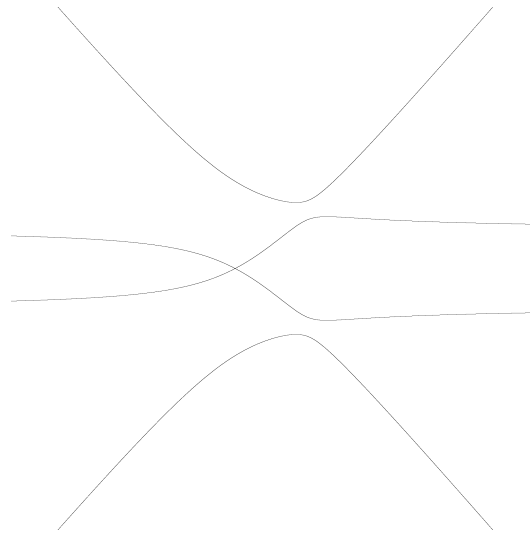


Figure 1.2 Portrait de phase du modèle de Baxter

L'étude des invariants par l'action de I et J montre que cette courbe est elliptique et est donnée par l'intersection de quadriques $\Delta_1 = \text{constante}$ et $\Delta_2 = \text{constante}$ (appelée

aussi biquadratique de Clebsch), avec Δ_1 et Δ_2 les invariants [10]:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}, \\ \Delta_2 &= \frac{ab - cd}{ab + cd}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

On peut introduire une paramétrisation elliptique de cette courbe dans l'espace $\mathbb{C}P_3$ des paramètres (u, v, w) [21]. En terme du paramètre elliptique, la tranformation IJ devient tout simplement une translation, prouvant ainsi que les itérés densifient une courbe.

1.3. Autres exemples

Une analyse similaire a été faite pour des permutations générales. Des propriétés remarquables apparaissent aussi dans ce cadre plus général [28, 27]. Pour certaines permutations, une *croissance polynomiale* des itérations a été obtenu, mais avec des orbites correspondant à *des surfaces algébiques*. La Figure 1.3 suivante montre un exemple obtenu par une permutation d'éléments d'une matrice 4×4 .

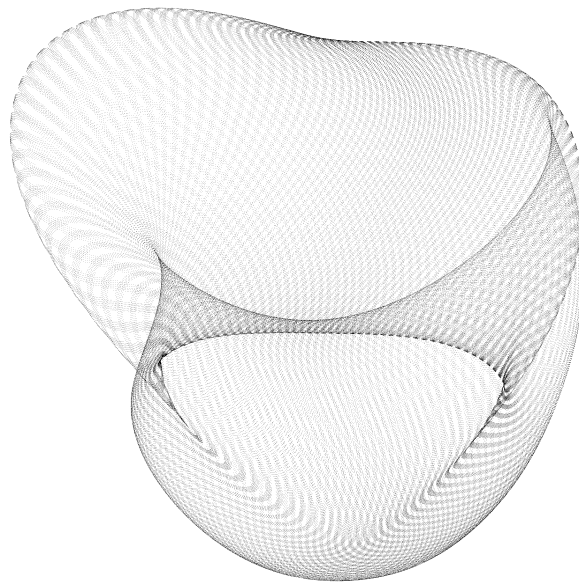


Figure 1.3 Surface abélienne

Plusieurs autres exemples de transformations birationnelles associées avec des modèles à vertex (ou à spins) peuvent être donnés [27]. Ces exemples montrent que l'inversion matricielle sur une matrice d'ordre 4×4 peut être combinée avec des permutations des éléments de cette matrice pour obtenir des transformations birationnelles. Ce "jeu mathématique" correspond à différents problèmes physiques (modèle à vertex à 3 dimensions, le modèle à seize vertex, le modèle de Potts sur un réseau triangulaire ...) suivant la permutation considérée des éléments de matrice.

Ces exemples justifient donc amplement de considérer des transformations birationnelles associées à des permutations d'éléments *représentant des symétries géométriques du réseau* (symétries du carré, du cube, du triangle ...) et de considérer le problème "universel" suivant: analyser des transformations birationnelles construites par l'inversion de matrices d'ordre $q \times q$ combinée avec des permutations arbitraires d'éléments de ces matrices. L'exemple le plus simple correspond à la permutation de *deux* éléments de ces matrices d'ordre $q \times q$ [25, 26, 29]. En particulier, on obtient avec cette méthode des exemples non-triviaux de transformations intégrables avec *un nombre arbitraire de variables* [25, 26, 28, 29, 27].

CHAPITRE 2

COMPLEXITÉS ASSOCIÉES À DES MATRICES D'ORDRE 3

Nous allons maintenant étudier par calculs formels les transformations birationnelles correspondant au groupe engendré par l'inverse matriciel et une transposition particulière des coefficients d'une matrice $q \times q$. Pour des raisons de simplicité, nous considérons tout d'abord le cas des matrices 3×3 :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

pour une transposition donnée.

Les transformations de ce groupe peuvent être représentées de plusieurs manières: soit comme des transformations birationnelles sur des variables non homogènes (quotients des variables homogènes de départ), soit comme des transformations polynomiales portant sur les variables homogènes que sont les coefficients de la matrice. Ainsi, l'inverse matriciel I peut s'écrire alternativement:

$$I : m_{ij} \longrightarrow I_{ij}(m_{11}, \dots, m_{33}) \quad (2.7)$$

ou:

$$I : \frac{m_{ij}}{m_{kl}} \longrightarrow \frac{I_{ij}(m_{11}, \dots, m_{33})}{I_{kl}(m_{11}, \dots, m_{33})} \quad (2.8)$$

(où la paire (k, l) est fixe), ou encore:

$$I : m_{ij} \longrightarrow \frac{I_{ij}(m_{11}, \dots, m_{33})}{\det(m)} \quad (2.9)$$

où I_{ij} désigne le cofacteur du coefficient m_{ij} .

Dans la suite nous désignerons par I et $K = t \cdot I$ respectivement l'inverse matriciel homogène et sa composée avec la transposition considérée, et par \widehat{I} et \widehat{K} ces mêmes transformations représentées sur les variables non homogènes. Nous allons nous intéresser dans

un premier temps à différentes propriétés (remarquables !) de factorisation des itérées successives de la transformation homogène K , ce qui nous amènera en particulier à dégager des variables privilégiées, telles que les déterminants de la matrice 3×3 (et de façon générale $q \times q$), et ses transformées successives par la transformation homogène K ou de façon équivalente la transformation inhomogène \hat{K} .

2.1. Propriétés de factorisation

L'étude systématique des transformations (birationnelles) associées à *toutes* les permutations des éléments des matrices 3×3 ($9! = 362880$ permutations au total) est très vaste. Pour simplifier cette étude, on peut réduire le nombre des permutations à considérer en utilisant des symétries (classes d'équivalence), entre les permutations.

Une étude par calculs formels des itérations successives de ces transformations birationnelles met à jour pour certaines de celles-ci des propriétés de factorisation tout à fait remarquable qui montrent une croissance polynomiale et non exponentielle de la complexité des itérations formelles successives, et ce, dans l'ensemble des variables du problème (tous les coefficients de la matrice $q \times q$). De façon plus précise, les polynômes qui se factorisent sont étroitement reliés aux déterminants des matrices ou à leur transformées par le groupe engendré par l'inverse matriciel et les permutations de coefficients.

Plus explicitement, considérons premièrement une matrice initiale 3×3 générique M_0 :

$$M_0 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Prenons comme exemple la permutation des deux éléments m_{31} et m_{32} , qu'on peut aussi représenter par la suite ordonnée de nombres $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9)$ qui montre que $m_{31} \leftrightarrow m_{32}$. Cette notation sera utiliser dans toute la suite pour représenter une permutation quelconque d'éléments de M_0 .

M_1 est la matrice déduite de M_0 par la transformation K associée à la permutation précédente.

Considérons les premières matrices successives obtenues par itération de la transformation K ainsi que leurs déterminants:

$$M_1 = K(M_0), \quad M_2 = K(M_1), \quad M_3 = K(M_2) \quad (2.11)$$

$$f_1 = \det(M_0), \quad f_2 = \det(M_1), \quad f_3 = \det(M_2) \quad (2.12)$$

Le déterminant de la matrice M_3 factorise le carré du déterminant de M_0 , c'est à dire

f_1^2 . Cela nous permet d'introduire un nouveau polynôme f_4 :

$$f_4 = \frac{\det(M_3)}{f_1^2} \quad (2.13)$$

On remarque également que f_1 est un facteur commun dans tous les éléments de la matrice $K(M_3)$, cela nous amène à définir une nouvelle matrice M_4 :

$$M_4 = \frac{K(M_3)}{f_1} \quad (2.14)$$

Remarquons que $\det(M_4)$ se factorise aussi en donnant un nouveau polynôme f_5 :

$$f_5 = \frac{\det(M_4)}{f_2^2} \quad (2.15)$$

En calculant $K(M_4)$, on voit que f_2 est un facteur commun dans tous les éléments de la matrice $K(M_4)$, ce qui nous conduit à définir une nouvelle matrice:

$$M_5 = \frac{K(M_4)}{f_2} \quad (2.16)$$

En continuant ces iterations, on obtient pour n arbitraire les deux relations de factorisations:

$$M_{n+3} = \frac{K(M_{n+2})}{f_n} \quad \text{et:} \quad f_{n+3} = \frac{\det(M_{n+2})}{f_n^2} \quad (2.17)$$

2.2. Cas général

Plus généralement, pour une transposition arbitraire, et en prenant les mêmes notations que précédemment, le schéma de factorisation général sera:

$$M_1 = K(M_0), \quad M_2 = \frac{K(M_1)}{f_2^{p_1} f_1^{p_2}}, \quad M_3 = \frac{K(M_2)}{f_3^{p_1} f_2^{p_2} f_1^{p_3}} \quad (2.18)$$

$$f_1 = \det(M_0), \quad f_2 = \frac{\det(M_1)}{f_1^{q_1}}, \quad f_3 = \frac{\det(M_2)}{f_2^{q_1} f_1^{q_2}} \quad (2.19)$$

pour n arbitraire:

$$\det M_n = \prod_{k=0}^n f_{n-k+1}^{q_k} \quad (2.20)$$

$$K(M_n) = M_{n+1} \prod_{k=0}^n f_{n-k+1}^{p_{k+1}} \quad (2.21)$$

avec $f_0 = 1$. Notons par α_n le degré du déterminant de M_n et par β_n le degré du polynôme f_n avec: $\alpha_0 = 3, \beta_0 = 0, \beta_1 = 3$.

Les fonctions génératrices $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $p(x)$, $q(x)$ des degrés α_n, β_n et des exposants p_n, q_n sont défini par:

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot x^n, \quad \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cdot x^n, \quad p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot x^n, \quad (2.22)$$

La détermination de l'ensemble de ces fonctions génératrices nous permettra de trouver tous les classes ainsi que les schémas de factorisations possibles.

2.3. Determination des fonctions génératrices

Le schéma de factorisation nous permet de trouver les expressions de $p(x)$ et $q(x)$. En peut ensuite utiliser les relations (2.20) et (2.21), pour trouver les relations suivantes qui lient les fonctions génératrices entre elles:

$$\begin{aligned} \beta(x)(1 + q(x)) &= x\alpha(x) \\ x(2x - 1)\alpha(x) + 3x &= 3p(x)\beta(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

On peut démontrer ce résultat comme suit.

$$\begin{aligned} (2.20) \quad &\Rightarrow \beta_n = \alpha_{n-1} - q_1\beta_{n-1} - q_2\beta_{n-2} - \dots - q_{n-1}\beta_1 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} q_1\beta_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} q_2\beta_{n-2} x^n \\ &\quad - \dots - \sum_{n=0}^{\infty} q_{n-1}\beta_1 x^n \\ &\Rightarrow \beta(x) = x\alpha(x) - (q_1x \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n-1} x^{n-1} + q_2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n-2} x^{n-2} + \dots) \\ &\Rightarrow \beta(x) = x\alpha(x) - (q_1x + q_2x^2 + \dots)\beta(x) \\ &\Rightarrow \beta(x)(1 + q(x)) = x\alpha(x) \\ (2.21) \quad &\Rightarrow \alpha_n = 2\alpha_{n-1} - 3(p_1\beta_n + p_2\beta_{n-1} + \dots + p_n\beta_1) \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n-1} x^n - 3(\sum_{n=0}^{\infty} p_1\beta_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_2\beta_{n-1} x^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} p_3\beta_{n-2} x^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} p_n\beta_1 x^n) \\ &\Rightarrow \alpha(x) - \alpha_0 = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n-1} x^{n-1} - 3(p_1 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n + p_2x \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots) \\ &\Rightarrow x(2x - 1)\alpha(x) + 3x = 3p(x)\beta(x) \end{aligned}$$

En général pour un ordre quelconque q de la matrice, nous avons (avec $\alpha_0 = q, \beta_0 = 0, \beta_1 = q$):

$$\begin{aligned} \beta(x)(1 + q(x)) &= x\alpha(x) \\ x((q - 1)x - 1)\alpha(x) + qx &= qp(x)\beta(x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dans l'iteration analytique d'une transformation arbitraire, les degrés des expressions polynômiales précédentes (apparaissant aux numérateurs ou aux dénominateurs) évoluent exponentiellement comme λ^n (α_n ou $\beta_n \approx \lambda^n$), où λ mesure l'évolution des calculs. Il est appelé "the growth complexity" (complexité de la croissance) ou "complexité d'Arnold" [45, 46, 34, 36].

Lorsque les fonctions génératrices $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sont rationnelles, la complexité λ sera l'inverse du pôle (de plus petit module) en x de ces fonctions génératrices, ou plus précisément l'inverse de la racine du polynôme se trouvant dans le dénominateur de $\alpha(x)$ ou de $\beta(x)$ et qu'on va appelé "le polynôme associé à cette complexité".

On appellera classe le groupe de permutations ayant la même valeur de λ , il suffit donc d'étudier une transformation correspondant à une permutation donnée pour généraliser les résultats pour les autres transformations de la même classe.

Par exemple, dans l'analyse des 362880 transformations birationnelles associées à toutes les permutations, nous avons trouvé seulement un spectre de 20 valeurs de complexité qui sont présentées ci-dessous.

2.4. Résultats

Voici les différents schémas de factorisations pour les permutations dans des matrices 3×3 (un exemple est donné pour chaque classe), obtenus en utilisant un programme Maple.

On donne les résultats comme suit: la permutation codée comme expliqué précédemment, la complexité λ , les fonctions génératrices $p(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$ et $\beta(x)$.

- 3, 6, 5, 1, 4, 7, 2, 9, 8

$$\lambda \simeq 1.946856268$$

$$p(x) = x^7, q(x) = 2x^6$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(1+2x^6)}{(x-1)(x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x+1)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(x-1)(x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x+1)}$$

- 1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 8, 9

$$\lambda \simeq 1.883203506$$

$$p(x) = x^6, q(x) = 2x^5$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(1+2x^5)}{(x-1)(x+1)(x^4-2x^3+x^2-2x+1)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(x-1)(x+1)(x^4-2x^3+x^2-2x+1)}$$

- 1, 2, 7, 4, 3, 8, 5, 6, 9

$$\lambda \simeq 1.883203506$$

$$p(x) = x^6 + x^9, q(x) = x^3 + 2x^5 + 2x^8$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(2x^5+1)}{(x-1)(x+1)(x^4-2x^3+x^2-2x+1)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(x-1)(x^2-x+1)(x^4-2x^3+x^2-2x+1)(x+1)^2}$$

- 1, 4, 7, 2, 5, 9, 6, 3, 8

$$\lambda \simeq 1.974818708$$

$$p(x) = x^8, q(x) = 2x^7$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(1+2x^7)}{(x-1)(x+1)(x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x+1)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(x-1)(x+1)(x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x+1)}$$

- 1, 5, 4, 3, 9, 6, 2, 8, 7

$$\lambda \simeq 1.857127516$$

$$p(x) = x^6 + x^8 + x^9 + x^{12}, q(x) = x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 2x^{11}$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(1+x^3+x^4+2x^5+x^6+2x^7+2x^8+2x^{11})}{(x-1)(x+1)(x^{10}-2x^9+x^8-x^7-x^5-x^3+x^2-2x+1)},$$

$$\beta(x) = -\frac{3x}{(x-1)(x+1)(x^{10}-2x^9+x^8-x^7-x^5-x^3+x^2-2x+1)}$$

- 2, 8, 5, 3, 9, 6, 4, 1, 7

$$\lambda \simeq 1.618033989$$

$$p(x) = -\frac{x^4}{(x^2+x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}, q(x) = -\frac{x(1+x+3x^2+x^4+x^5)}{(x^2+x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\alpha(x) = \frac{-3(x+1)(2x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}, \beta(x) = 3(x^2+x+1)x$$

- 1, 7, 4, 3, 9, 6, 5, 2, 8

$$\lambda \simeq 1.618033989$$

$$p(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2(x+1)^2}, q(x) = -\frac{x(x^3-x^2-2x-1)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$\alpha(x) = \frac{3(1+x^3+x)}{(x-1)(x+1)(x^2+x-1)}, \beta(x) = \frac{3x(x-1)(x+1)}{(x^2+x-1)}$$

- 1, 7, 4, 3, 9, 6, 5, 8, 2

$$\lambda \simeq 1.618033989$$

$$p(x) = -\frac{x^4}{(x-1)(x+1)}, q(x) = -\frac{x(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\alpha(x) = \frac{3(1+x^3+x)}{(x-1)(x+1)(x^2+x-1)}, \beta(x) = \frac{-3}{(x^2+x-1)x}$$

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9

$$\lambda \simeq 1.465571232$$

$$p(x) = -\frac{x^4}{(x-1)(1+x^2)}, q(x) = -\frac{x(2x^2+1)}{(x-1)(1+x^2)}$$

$$\alpha(x) = \frac{3(1+x^2+x^3)}{(x-1)(x^3+x-1)}, \beta(x) = \frac{3(1+x^2)x}{(x^3+x-1)}$$

- 7, 1, 6, 8, 2, 4, 9, 3, 5

$$\lambda \simeq 1.465571232$$

$$p(x) = \frac{(x^4+2x^6+x^8+2x^{10}+x^{12}+x^{13})}{(1-x^{12})}, q(x) = \frac{(x+x^2+2x^3+2x^4+4x^5+x^6+2x^7+2x^8+4x^9+x^{10}+2x^{11}+2x^{12})}{(1-x^{12})}$$

$$\alpha(x) = \frac{31+x^{12}+x+x^2+2x^3+2x^4+4x^5+x^6+2x^7+2x^8+4x^9+x^{10}+2x^{11}}{(x^3+x-1)(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)}, \beta(x) = -\frac{3(x^2+1)x}{(x^3+x-1)}$$

- 2, 7, 5, 3, 9, 6, 1, 8, 4

$$\lambda \simeq 1.570147312$$

$$p(x) = \frac{x^{19}+x^{18}+x^{16}+x^7+x^6+x^4}{1-x^6}, q(x) = \frac{x^{18}+2x^{17}+x^{16}+2x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+2x^6+2x^5+x^4+2x^3+x^2+x}{1-x^6}$$

$$\alpha(x) = 3 \frac{x^6+2x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1}{(x^5+x^3+x-1)(x^2-1)}, \beta(x) = -3 \frac{x(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{(x^5+x^3+x-1)(x^4+1)(x^8-x^4+1)}$$

- 1, 2, 3, 7, 8, 9, 6, 5, 4

$$\lambda \simeq 1.754877666$$

$$p(x) = x^4, q(x) = x + x^2 + 2x^3$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(1+x+x^2+2x^3)}{(x+1)(x^3-x^2+2x-1)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(x+1)(x^3-x^2+2x-1)}$$

- 1, 4, 7, 3, 9, 6, 5, 8, 2

$$\lambda \simeq 1.933184982$$

$$p(x) = \frac{x^7}{(1-x^2)}, q(x) = -\frac{x^4(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\alpha(x) = \frac{3(-x^2+1+x^6+x^5+x^4)}{(x-1)(x+1)(x^5-x^4+2x-1)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(x^5-x^4+2x-1)}$$

- 1, 5, 8, 3, 4, 9, 2, 6, 7

$$\lambda \simeq 1.948935746$$

$$p(x) = x^7, q(x) = x^5 + 2x^6$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(1+x^5+2x^6)}{(-1+2x-x^5+x^7)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(-1+2x-x^5+x^7)}$$

- 1, 7, 4, 3, 6, 9, 5, 2, 8

$$\lambda \simeq 1.866760399$$

$$p(x) = \frac{x^6}{(1-x^2)}, q(x) = -\frac{x^3(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\alpha(x) = \frac{3(1-x^2+x^5+x^4+x^3)}{(x-1)(x+1)(x^4-x^3+2x-1)}, \beta(x) = -\frac{3x}{(x^4-x^3+2x-1)}$$

- 4, 1, 8, 5, 3, 9, 6, 2, 7

$$\lambda \simeq 1.839286755$$

$$p(x) = \frac{(x^6+x^7)}{(1-x^6)}, q(x) = \frac{(x^3+x^4+2x^5+2x^6)}{(1-x^6)}$$

$$\alpha(x) = \frac{3(x^5+x^4+x^2-x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)(x^3+x^2+x-1)}, \beta(x) = -\frac{3(x^2+x+1)x}{(x^3+x^2+x-1)}$$

- 2, 7, 5, 3, 9, 4, 1, 8, 6

$$\lambda \simeq 1.839286755$$

$$p(x) = -\frac{x^6}{(-1+x^2+x^3)}q(x) = -\frac{x^3(2x^2+x+1)}{(-1+x^2+x^3)}$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(x^2+x+1)(2x^3-x^2-x+1)}{(x+1)(x^3+x^2+x-1)(x-1)^2}, \beta(x) = \frac{3x(-1+x^2+x^3)}{(x+1)(x^3+x^2+x-1)(x-1)^2}$$

- 2, 8, 5, 6, 3, 9, 7, 1, 4

$$\lambda \simeq 1.974584654$$

$$p(x) = \frac{-x^9}{(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)}, q(x) = -\frac{x^5(x+1)(2x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)}$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(1-x+2x^8+x^7)}{(x^2-x+1)(x-1)(1-x-2x^2-x^3+x^4+2x^5+x^6)}, \beta(x) = \frac{3x(1-x^2-x^3)}{(1-x)(1-x-2x^2-x^3+x^4+2x^5+x^6)}$$

- 2, 8, 5, 6, 9, 3, 4, 7, 1

$$\lambda \simeq 1.542579599$$

$$p(x) = \frac{x^{10}+x^8+x^7+x^6+x^4}{1-x^8}, q(x) = \frac{2x^3+x+x^2+x^4+2x^7+x^9+x^8+3x^5+3x^6}{1-x^8}$$

$$\alpha(x) = 3\frac{x^9+2x^7+3x^6+3x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1}{(x^8+x^7+x^3+x-1)(x^2-1)}, \beta(x) = -3\frac{x(x^2+1)(x^4+1)}{x^8+x^7+x^3+x-1}$$

- 1, 2, 3, 8, 5, 7, 6, 4, 9

$$\lambda \simeq 1.891103020$$

$$p(x) = \frac{x^6}{(1-x^6)}, q(x) = \frac{(x^4+2x^5)}{(1-x^6)}$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(-1+x^6-x^4-2x^5)}{(2x^5-2x^4+2x^3-x^2+2x-1)(x-1)(x+1)}, \beta(x) = -\frac{3x(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{(2x^5-2x^4+2x^3-x^2+2x-1)}$$

- 4, 6, 1, 5, 3, 2, 7, 9, 8

$$\lambda \simeq 1.860073051$$

$$p(x) = \frac{(x^6+x^8+x^9)}{(1-x^{10})}, q(x) = \frac{(x^3+x^4+2x^5+x^6+2x^7+2x^8)}{(1-x^{10})}$$

$$\alpha(x) = -\frac{3(-1+x^{10}-x^3-x^4-2x^5-x^6-2x^7-2x^8)}{(x-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(2x^5+x^4+x^2+x-1)}, \beta(x) = -\frac{3x(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(2x^5+x^4+x^2+x-1)}$$

On a deux nouvelles valeurs de λ par rapport à la référence [34, 36] qui sont (avec leurs schémas de factorisations):

- 1, 2, 4, 8, 5, 6, 7, 3, 9

$$\lambda \simeq 1.999266143$$

$$p(x) = x^{13}, q(x) = x^9 + 2x^{12}$$

$$\alpha = -3\frac{1+x^9+2x^{12}}{-1+2x-x^9+2x^{10}-2x^{12}+x^{13}}, \beta = -\frac{3x}{(x^{13}-1+2x-x^9+2x^{10}-2x^{12})}$$

- 4, 6, 7, 5, 9, 8, 1, 3, 2

$$\lambda \simeq 1.998524670$$

$$p(x) = x^{12}, q(x) = 2x^{11}$$

$$\alpha = -3 \frac{1+2x^{11}}{(x^{10}-2x^9+x^8-2x^7+x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x+1)(x^2-1)},$$

$$\beta = -3 \frac{x}{(x^{10}-2x^9+x^8-2x^7+x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x+1)(x^2-1)}$$

2.5. Remarques

L'analyse des résultats obtenus nous permet de faire les remarques suivantes:

- Pour une complexité donnée, il peut y avoir plusieurs schémas de factorisations possibles.

- La liste exhaustive des schémas de factorisations a été faite pour un ordre d'itération égal à 19 (les temps de calculs dépendent de l'itération). Il peut donc y avoir d'autres valeurs de complexité lorsqu'on utilise un ordre d'itération supérieur à 19.

- Une méthode numérique pour trouver ces complexités a été aussi appliquée pour ces $9! = 362880$ transformations birationnelles [34, 36]. Il a été obtenu, en plus de la valeur intégrable $\lambda = 1$, un groupe de dix sept valeurs de complexité, toutes associées à des *nombres algébriques*.

Notons que la méthode de factorisation qu'on a utilisé nous a permis de trouver deux complexités proche de $\lambda = 2$ et que la méthode numérique n'a pas identifié: $\lambda \simeq 1.9992661434$ et $\lambda \simeq 1.998524670$.

- L'analyse des polynômes de complexités obtenus, nous montre qu'on peut classifier ces complexités en trois classes différentes:

- Nombres de Pisot [47, 48]:

Un nombre de Pisot est un entier algébrique plus grand que un, solution d'un polynôme à coefficients entiers, tel que tous ses conjugués (autres solutions du même polynôme) ont des modules strictement plus petits que un (c'est à dire sont à l'intérieur du cercle unité).

- Nombres des Salem [47, 48]:

Un nombre de Salem est un entier algébrique plus grand que un, solution d'un polynôme à coefficients entiers, tel que un de ses conjugués (ou plus) a un module strictement inférieur à un, les autres sont sur le cercle unité.

λ	Polynomial	Type
2	$1 - 2x$	
1.9992661434	$1 - 2x + x^9 - 2x^{10} + 2x^{12} - x^{13}$	NP
1.998524670	$1 - 2x + x^2 - 2x^3 + x^4 - 2x^5 + x^6 - 2x^7 + x^8 - 2x^9 + x^{10}$	SALEM
1.97481871	$1 - 2x + x^2 - 2x^3 + x^4 - 2x^5 + x^6$	SALEM
1.974584654	$1 - x - 2x^2 - x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6$	NP
1.94893574	$1 - 2x + x^5 - x^7$	PISOT
1.946856268	$1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 + x^6$	SALEM
1.93318498	$1 - 2x + x^4 - x^5$	PISOT
1.891103020	$1 - 2x + x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5$	NP
1.88320350	$1 - 2x + x^2 - 2x^3 + x^4$	SALEM
1.866760399	$1 - 2x + x^3 - x^4$	PISOT
1.860073051	$1 - x - x^2 - x^4 - 2x^5$	NP
1.857127516	$1 - 2x + x^2 - x^3 - x^5 - x^7 + x^8 - 2x^9 + x^{10}$	SALEM
1.83928675	$1 - x - x^2 - x^3$	PISOT
1.75487766	$1 - 2x + x^2 - x^3$	PISOT
1.61803399	$1 - x - x^2$	PISOT
1.57014731	$1 - x - x^3 - x^5$	PISOT
1.542579599	$1 - x - x^3 - x^7 - x^8$	NP
1.46557123	$1 - x - x^3$	PISOT
1	$1 - x, 1 - x^N, \dots$	INT

Tableau 2.1: Complexités associées à des matrices 3×3 . (PISOT: nombre de Pisot, SALEM: nombre de Salem, NP: Non Pisot, INT: cas intégrable.)

- Nombres plus généraux (ni Pisot, ni Salem).

Un nombre de ce genre est un entier algébrique plus grand que un, solutions d'un polynôme à coefficients entiers, tel que tous ses conjugués ont des modules strictement différents de un.

Il est assez remarquable que beaucoup de complexités trouvées sont de type Salem ou Pisot. Les origines de cette classification sont encore à comprendre [49].

Le Tableau (2.1) donne la liste de l'ensemble des complexités calculées ainsi que les polynômes associés.

CHAPITRE 3

COMPLEXITÉS ASSOCIÉES À DES MATRICES D'ORDRE 4 ET D'ORDRE QUELCONQUE

Considérons la matrice 4×4 suivante:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Comme dans le chapitre précédent, on introduit la transformation I donnant la matrice inverse homogène:

$$I : M \longrightarrow M^{-1} \cdot \det(M) \quad (3.26)$$

La transformation inverse homogène I est une transformation polynômiale sur chacun des éléments de M , elle associe à chaque élément de M son cofacteur correspondant.

L'inverse homogène I est une *involution*, elle satisfait à $I^2 = (\det(M))^2 \cdot \mathcal{I}d$, ou $\mathcal{I}d$ est la matrice identité 4×4 .

On introduit aussi l'involution t , qui est une transposition arbitraire de deux éléments de la matrice M .

Γ_t designera le groupe discret infini, généré par les transformations involutives I et t . $K_t = t \cdot I$, élément de Γ_t sera la transformation birationnelle associé à chaque transposition t .

3.1. Six classes d'équivalence

On a à étudier plusieurs groupes de transformations associées aux $120 = C_2^{16}$ transpositions entre deux éléments des seize éléments de la matrice M .

Mais on peut voir que les 120 groupes d'éléments de Γ_t se *groupent seulement en six classes différentes*. Ceci est du à une relation d'équivalence qui existe sur ces 120 transpositions.

On construit cette relation d'équivalence en introduisant les transformations qui agissent sur les éléments de la matrice et qui commutent avec la transformation inverse homogène I .

Avec la notation $[m_{ij} - m_{kl}]$ pour une transposition qui change les deux éléments m_{ij} et m_{kl} de la matrice M (3.25), les six classes d'équivalence sont [29, 26, 25]:

- Classe I correspond à tous les 6 transpositions de la forme $[m_{ij} - m_{ji}]$ ou $[m_{ii} - m_{jj}]$
- Classe II correspond à tous les 12 transpositions de la forme $[m_{ij} - m_{kl}]$
- Classe III correspond à tous les 24 transpositions de la forme $[m_{ij} - m_{jk}]$ ou $[m_{ji} - m_{kj}]$
- Classe IV correspond à tous les 24 transpositions de la forme $[m_{ij} - m_{ik}]$ ou $[m_{ji} - m_{ki}]$
- Classe V correspond à tous les 24 transpositions de la forme $[m_{ii} - m_{jk}]$
- Classe VI correspond à tous les 24 transpositions de la forme $[m_{ii} - m_{ij}]$ ou $[m_{ii} - m_{ji}]$

Il est important de noter que cette classification en six classes a lieu aussi pour matrices $q \times q$, pour $q \geq 4$. Pour $q = 3$, on remarque que la classe II n'existe plus.

Il suffit maintenant d'étudier une seule transformation dans chaque classe et de déduire directement les résultats concernant toutes les autres transformations de la même classe.

3.1.1. Classe I

On prend comme représentant de cette classe la transformation qui correspond à la transposition t_{12-21} qui agit sur la matrice M ($q \times q$).

Après itération, on obtient les matrices successives suivantes et leurs déterminants. De manière assez remarquable, on voit que des factorisations à chaque itération peuvent se produire:

$$M_0 = M, \quad M_1 = K(M_0), \quad f_1 = \det(M_0)$$

Le déterminant de la matrice M_1 se factorise donnant un polynôme homogène f_2 :

$$f_2 = \frac{\det(M_1)}{f_1^{q-3}} \quad (3.27)$$

Egalement, f_1^{q-4} se factorise dans tous les éléments de la matrice $K(M_1)$, ce qui nous amène à introduire une matrice "réduite" M_2 :

$$M_2 = \frac{K(M_1)}{f_1^{q-4}} \quad (3.28)$$

Aussi, $\det(M_2)$ se factorise pour définir un nouveau polynôme f_3 :

$$f_3 = \frac{\det(M_2)}{f_1^3 \cdot f_2^{q-3}} \quad (3.29)$$

Calculant $K(M_2)$, on peut voir que $f_1^2 \cdot f_2^{q-4}$ se factorise dans tous les éléments de la matrice $K(M_2)$, en donnant une nouvelle matrice:

$$M_3 = \frac{K(M_2)}{f_1^2 \cdot f_2^{q-4}} \quad (3.30)$$

Aussi, son déterminant se factorise $f_1^{q-1} \cdot f_2^3 \cdot f_3^{q-3}$, donnant le polynôme homogène f_4 :

$$f_4 = \frac{\det(M_3)}{f_1^{q-1} \cdot f_2^3 \cdot f_3^{q-3}} \quad (3.31)$$

Calculant $K(M_3)$, on voit que $f_1^{q-2} \cdot f_2^2 \cdot f_3^{q-4}$ se factorise dans tous les éléments de cette matrice $K(M_3)$, ce qui nous amène à introduire une nouvelle matrice:

$$M_4 = \frac{K(M_3)}{f_1^{q-2} \cdot f_2^2 \cdot f_3^{q-4}} \quad (3.32)$$

Les propriétés de factorisation sont maintenant stabilisées et se reproduisent similairement à chaque ordre n .

De manière générale, pour $n \geq 1$ et $q \geq 4$, on a les factorisations:

$$M_{n+3} = \frac{K(M_{n+2})}{f_n^{q-2} f_{n+1}^2 f_{n+2}^{q-4}} \quad (3.33)$$

$$f_{n+3} = \frac{\det(M_{n+2})}{f_n^{q-1} f_{n+1}^3 f_{n+2}^{q-3}} \quad (3.34)$$

qui donnent les relations suivantes *indépendantes de q* :

$$\frac{K(M_{n+2})}{\det(M_{n+2})} = \frac{M_{n+3}}{f_n f_{n+1} f_{n+2} f_{n+3}} \quad (3.35)$$

A partir du schéma de factorisation précédent, nous pouvons déduire:

$$\begin{aligned} p(x) &= (q-2)x^4 + 2x^3 + (q-4)x^2 \\ q(x) &= (q-1)x^3 + 3x^2 + (q-3)x \end{aligned}$$

En utilisant les deux équations (2.24) données dans le chapitre précédent (pour q général) on obtient:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{q(1 + (q-3)x + 3x^2 + (q-1)x^3)}{(1+x)(1-x)^3} \\ \beta(x) &= \frac{qx}{(1+x)(1-x)^3} \end{aligned}$$

qui donnent aussi:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= q \left(\frac{qn^2}{2} + \frac{q}{4} - \frac{(-1)^n q}{4} + (-1)^n \right) \\ \beta_n &= \frac{q}{8} \left(2n(n+2) + 1 - (-1)^n \right), \end{aligned}$$

Les expressions α_n et β_n évoluent comme n^2 , c'est à dire, une croissance polynômiale en n .

Dans les fonctions génératrices $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ celà correspond à avoir *seulement* $x = \pm 1$ comme *singularités*.

3.1.2. Classe II

Pour $q = 4$, l'analyse des itérations de la transformation homogène K pour les transpositions de la classe II *donne exactement les mêmes factorisations* et également les mêmes fonctions génératrices $\alpha(x)$ et $\beta(x)$, que la classe I.

Pour la classe II, les factorisations des itérations correspondant à la transformation K détaillée dans la section () pour la classe I , sont très différentes, quand $q \geq 5$.

Déjà après deux itérations, on a:

$$\begin{cases} f_1 = \det(M_0) & \left\{ \begin{array}{l} f_2 = \det(M_1)/f_1^{q-3} \\ M_2 = K(M_1)/f_1^{q-4} \end{array} \right. \\ M_1 = K(M_0) & \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} f_3 = \det(M_2)/(f_1^2 \cdot f_2^{q-3}) & \left\{ \begin{array}{l} f_4 = \det(M_3)/(f_1^{q-2} \cdot f_2^2 \cdot f_3^{q-3}) \\ M_4 = K(M_3)/(f_1^{q-3} \cdot f_2 \cdot f_3^{q-4}) \end{array} \right. \\ M_3 = K(M_2)/(f_1 \cdot f_2^{q-4}) & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_5 &= \frac{\det(M_4)}{f_1^3 \cdot f_2^{q-2} \cdot f_3^2 \cdot f_4^{q-3}}, & M_5 &= \frac{K(M_4)}{f_1^2 \cdot f_2^{q-3} \cdot f_3 \cdot f_4^{q-4}}, \\ f_6 &= \frac{\det(M_5)}{f_1^{q-3} \cdot f_2^3 \cdot f_3^{q-2} \cdot f_4^2 \cdot f_5^{q-3}}, & M_6 &= \frac{K(M_5)}{f_1^{q-4} \cdot f_2^2 \cdot f_3^{q-3} \cdot f_4 \cdot f_5^{q-4}}, \\ f_7 &= \frac{\det(M_6)}{f_1^2 \cdot f_2^{q-3} \cdot f_3^3 \cdot f_4^{q-2} \cdot f_5^2 \cdot f_6^{q-3}}, & M_7 &= \frac{K(M_6)}{f_1 \cdot f_2^{q-4} \cdot f_3^2 \cdot f_4^{q-3} \cdot f_5 \cdot f_6^{q-4}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

et qui donnent les factorisations suivantes pour n arbitraire:

$$\det(M_n) = f_{n+1} \cdot (f_n^{q-3} \cdot f_{n-1}^2 \cdot f_{n-2}^{q-2} \cdot f_{n-3}^3) \cdot (f_{n-4}^{q-3} \cdot f_{n-5}^2 \cdot f_{n-6}^{q-2} \cdot f_{n-7}^3) \cdots f_1^{\delta_n} \quad (3.38)$$

où δ_n dépend de la troncation, et:

$$K(M_n) = M_{n+1} \cdot (f_n^{q-4} \cdot f_{n-1} \cdot f_{n-2}^{q-3} \cdot f_{n-3}^2) \cdot (f_{n-4}^{q-4} \cdot f_{n-5} \cdot f_{n-6}^{q-3} \cdot f_{n-7}^2) \cdots f_1^{\zeta_n} \quad (3.39)$$

ou $\zeta_n = q - 4$ pour $n = 1 \pmod{4}$, $\zeta_n = 1$ pour $n = 2 \pmod{4}$, $\zeta_n = q - 3$ pour $n = 3 \pmod{4}$ et $\zeta_n = 2$ pour $n = 0 \pmod{4}$. Pour les factorisations (3.39), on a périodiquement (avec période quatre) la séquence $[(q-4)(1)(q-3)(2)]$ pour l'exposant de f_n dans (3.39), et périodiquement (aussi avec période quatre) la séquence $[(q-3)(2)(q-2)(3)]$ pour l'exposants du f_n dans (3.38).)

Notons finalement les factorisations suivantes *indépendantes de q*:

$$\frac{K(M_n)}{\det(M_n)} = \frac{M_{n+1}}{f_1 f_2 \cdots f_n f_{n+1}} \quad (3.40)$$

A partir de ce schéma de factorisation, nous avons:

$$p(x) = \frac{(q-4)x^2 + x^3 + (q-3)x^4 + 2x^5}{1-x^4}$$

$$q(x) = \frac{(q-3)x + 2x^2 + (q-2)x^3 + 3x^4}{1-x^4}$$

En utilisant les deux équations (2.24) données dans le chapitre précédent (pour q général) on obtient:

$$\alpha(x) = \frac{q(1 + 2x^4 + xq - 3x + 2x^2 + x^3q - 2x^3)}{(1-x)(1+x)(1-2x-2x^3)}$$

$$\beta(x) = \frac{qx(1+x^2)}{1-2x-2x^3}$$

A partir de ces équations, on voit qu'on a une *évolution exponentielle* avec les exposants α_n et β_n , ils évoluent comme λ^n où $\lambda \simeq 2.359304086 \dots$ qui est la plus grande racine du polynôme $2 + 2x^2 - x^3$.

Notons aussi que pour une matrice initiale donnée M_0 , les itérations successives de M_0 sous la transformation K^2 se mettent dans un espace de matrices affine de dimension trois:

$$K^{2n}(M_0) = a_0^n \cdot M_0 + a_1^n \cdot P + a_2^n \cdot M_2 + a_3^n \cdot M_4 \quad (3.41)$$

$$K^{2n+1}(M_0) = b_0^n \cdot M_1 + b_1^n \cdot P + b_2^n \cdot M_3 + b_3^n \cdot M_5 \quad (3.42)$$

où la matrice P est la matrice fixe qui représente les transpositions de la classe II.

3.1.3. Classe III

L'analyse des itérations de la transformation homogène K pour les transpositions de la classe III *donne exactement les mêmes factorisations pour q arbitraire* et également les mêmes fonctions génératrices $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ *que pour la classe I*.

Aussi, les orbites de K^2 donne, pour $q = 4$, *courbes algébriques elliptiques* qui peuvent être vu comme intersections de quatorze quadriques ("Plücker-like quadrics") dans $\mathbb{C}P_{15}$.

Comme pour la classe I, les itérations successives pour une matrices initiale M_0 , sous la transformation K^2 , se mettent dans *un espace projectif affine de dimension cinq*:

$$K^{2n}(M_0) = a_0^n \cdot M_0 + a_1^n \cdot P + a_2^n \cdot M_2 + a_3^n \cdot M_4 + a_4^n \cdot M_6 + a_5^n \cdot M_8 \quad (3.43)$$

$$K^{2n+1}(M_0) = b_0^n \cdot M_1 + b_1^n \cdot P + b_2^n \cdot M_3 + b_3^n \cdot M_5 + b_4^n \cdot M_7 + b_5^n \cdot M_9 \quad (3.44)$$

où la matrice P est une matrice fixe représentant la transposition de la classe III considérée.

3.1.4. Classe IV

Les factorisations correspondant aux itérations de la transformation K :

$$\begin{cases} f_1 = \det(M_0) \\ M_1 = K(M_0) \end{cases} \quad \begin{cases} f_2 = \det(M_1)/f_1^{q-2} \\ M_2 = K(M_1)/f_1^{q-3} \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\begin{cases} f_3 = \det(M_2)/(f_1 \cdot f_2^{q-2}) \\ M_3 = K(M_2)/f_2^{q-3} \end{cases} \quad \begin{cases} f_4 = \det(M_3)/(f_1^{q-1} \cdot f_2 \cdot f_3^{q-2}) \\ M_4 = K(M_3)/(f_1^{q-2} \cdot f_3^{q-3}) \end{cases}$$

$$f_5 = \frac{\det(M_4)}{f_1^2 \cdot f_2^{q-1} \cdot f_3 \cdot f_4^{q-2}}, \quad M_5 = \frac{K(M_4)}{f_1 \cdot f_2^{q-2} \cdot f_4^{q-3}}, \quad (3.46)$$

$$f_6 = \frac{\det(M_5)}{f_1^{q-2} \cdot f_2^2 \cdot f_3^{q-1} \cdot f_4 \cdot f_5^{q-2}}, \quad M_6 = \frac{K(M_5)}{f_1^{q-3} \cdot f_2 \cdot f_3^{q-2} \cdot f_5^{q-3}},$$

$$f_7 = \frac{\det(M_6)}{f_1 \cdot f_2^{q-2} \cdot f_3^2 \cdot f_4^{q-1} \cdot f_5 \cdot f_6^{q-2}}, \quad M_7 = \frac{K(M_6)}{f_2^{q-3} \cdot f_3 \cdot f_4^{q-2} \cdot f_6^{q-3}}$$

qui donnent les factorisations suivantes pour n arbitraire:

$$\det(M_n) = f_{n+1} \cdot (f_n^{q-2} \cdot f_{n-1} \cdot f_{n-2}^{q-1} \cdot f_{n-3}^2) \cdot (f_{n-4}^{q-2} \cdot f_{n-5} \cdot f_{n-6}^{q-1} \cdot f_{n-7}^2) \cdots f_1^{\delta_n}$$

où δ_n dépend de la troncation, et:

$$K(M_n) = M_{n+1} \cdot (f_n^{q-3} \cdot f_{n-2}^{q-2} \cdot f_{n-3}) \cdot (f_{n-4}^{q-3} \cdot f_{n-6}^{q-2} \cdot f_{n-7}) \cdot (f_{n-8}^{q-3} \cdot f_{n-10}^{q-2} \cdot f_{n-11}) \cdots f_1^{\zeta_n}$$

où $\zeta_n = q-3$ pour $n = 1 \pmod{4}$, $\zeta_n = 0$ for $n = 2 \pmod{4}$, $\zeta_n = q-2$ pour $n = 3 \pmod{4}$ et $\zeta_n = 1$ pour $n = 0 \pmod{4}$.

On note la factorisation suivante *indépendante de q* :

$$\frac{K(M_n)}{\det(M_n)} = \frac{M_{n+1}}{f_1 f_2 \cdots f_n f_{n+1}} \quad (3.47)$$

A partir du schéma de factorisation, nous avons:

$$p(x) = \frac{(q-3)x^2 + (q-2)x^4 + x^5}{1-x^4}$$

$$q(x) = \frac{(q-2)x + x^2 + (q-1)x^3 + 2x^4}{1-x^4}$$

En utilisant les deux équations (2.24) données dans le chapitre précédent (pour q général) on obtient:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{q(1 + x^4 + xq - 2x + x^2 + x^3q - x^3)}{(1-x)(1+x)(1-x-x^3)} \\ \beta(x) &= \frac{qx(1+x^2)}{1-x-x^3}\end{aligned}$$

A partir des équations précédentes, il est clair qu'on a une *évolution exponentielle* des exposants α_n et β_n , ils évoluent comme λ^n où $\lambda \simeq 1.465571226 \dots$ est la plus grande racine du polynôme $x^3 - x^2 - 1$.

3.1.5. Classe V

Les factorisations correspondant aux itérations des transformation K pour la classe V:

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \det(M_0) \\ M_1 = K(M_0) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} f_2 = \det(M_1)/f_1^{q-3} \\ M_2 = K(M_1)/f_1^{q-4} \end{array} \right. & (3.48) \\ \left\{ \begin{array}{l} f_3 = \det(M_2)/(f_1 \cdot f_2^{q-3}) \\ M_3 = K(M_2)/(f_2^{q-4}) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} f_4 = \det(M_3)/(f_1^{q-1} \cdot f_2 \cdot f_3^{q-3}) \\ M_4 = K(M_3)/(f_1^{q-2} f_3^{q-4}) \end{array} \right.\end{aligned}$$

Les factorisations sont maintenant stabilisées, donnant pour n arbitraire:

$$\det(M_{n+2}) = f_n^{q-1} \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}^{q-3} \cdot f_{n+3} \quad (3.49)$$

$$K(M_{n+2}) = f_n^{q-2} \cdot f_{n+2}^{q-4} \cdot M_{n+3} \quad (3.50)$$

On note aussi, comme pour les classes I et III, les factorisations suivantes, *indépendantes de q* , donne:

$$\frac{K(M_{n+2})}{\det(M_{n+2})} = \frac{M_{n+3}}{f_n f_{n+1} f_{n+2} f_{n+3}} \quad (3.51)$$

A partir du schéma de factorisation, nous avons:

$$p(x) = (q-4)x^2 + (q-2)x^4$$

$$q(x) = (q-3)x + x^2 + (q-1)x^3$$

En utilisant les deux équations (2.24) données dans le chapitre précédent (pour q général), on obtient:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{q(1 + (q-3)x + x^2 + (q-1)x^3)}{(1+x)(1-3x+x^2-x^3)} \\ \beta(x) &= \frac{qx}{(1+x)(1-3x+x^2-x^3)}\end{aligned}\quad (3.52)$$

On note que les *racines du dénominateur* de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ ne sont pas sur le cercle unité. Donc nous avons *une évolution exponentielle* comme λ^n avec $\lambda \simeq 2.769292354 \dots$ Cette valeur de λ est la plus grande racine du polynôme $(1 - x + 3x^2 - x^3)$.

Sur cette exemple, on voit qu'il est possible d'avoir des factorisations impliquant des produits d'un nombre fixe des polynômes f_n , et en même temps, une évolution *exponentielle* des itérations.

Aussi, on peut étudier l'itération de \widehat{K} vu comme transformation birationnelle dans $\mathbb{C}P_{q^2-1}$. Ces orbites ressemblent à des *courbes* dans certain domaine de $\mathbb{C}P_{q^2-1}$.

3.1.6. Classe VI

Pour la classe VI, les factorisations correspondant aux itérations des transformations homogènes K sont:

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \det(M_0) \\ M_1 = K(M_0) \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2 = \det(M_1)/f_1^{q-2} \\ M_2 = K(M_1)/f_1^{q-3} \end{array} \right. & (3.53) \\ \left\{ \begin{array}{l} f_3 = \det(M_2)/(f_1 \cdot f_2^{q-2}) \\ M_3 = K(M_2)/(f_2^{q-3}) \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} f_4 = \det(M_3)/(f_1^{q-2} \cdot f_2 \cdot f_3^{q-2}) \\ M_4 = K(M_3)/(f_1 f_3)^{q-3} \end{array} \right.\end{aligned}$$

donnant pour n arbitraire les factorisations suivantes:

$$K(M_n) = M_{n+1} \cdot (f_n \cdot f_{n-2} \cdot f_{n-4} \cdot f_{n-6} \cdots f_{\xi_n})^{q-3} \quad (3.54)$$

où $\xi_n = 1$ pour n pair et $\xi_n = 2$ pour n impair.

$$\det(M_n) = f_{n+1} \cdot f_n^{q-2} \cdot f_{n-1} \cdot f_{n-2}^{q-2} \cdot f_{n-3} \cdot f_{n-4}^{q-2} \cdots f_1^{\zeta_n} \quad (3.55)$$

où $\zeta_n = 1$ pour n pair et $\zeta_n = q-2$ pour n impair. On note qu'on n'a pas de factorisation pour $q = 3$ pour $K(M_n)$.

Les équations (3.54) et (3.55) donnent la relation simple suivante *indépendante de q* (pour $q \geq 5$):

$$\frac{K(M_n)}{\det(M_n)} = \frac{M_{n+1}}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \cdot f_{n+1}} \quad (3.56)$$

On note l'existence de relations de factorisations (comme (3.55) ou (3.56)), au lieu de factorisations *avec un nombre fixe de polynômes*, pour les deux classes IV et VI, pour qui la transposition des éléments permutés appartient à la même colonne ou à la même ligne, mais aussi pour la classe II (pour $q \geq 5$), la transposition fait intervenir deux lignes et deux colonnes.

A partir du schéma de factorisation, nous avons:

$$p(x) = \frac{(q-3)x^2}{1-x^2}$$

$$q(x) = \frac{(q-2)x + x^2}{1-x^2}$$

En utilisant les deux équations (2.24) données dans le chapitre précédent (pour q général), on obtient:

$$\alpha(x) = \frac{q(1+(q-2)x)}{(1+x)(1-2x)}$$

$$\beta(x) = \frac{qx(1-x)}{1-2x} \quad (3.57)$$

Comme $z = 1/x = 2$ est seulement la racine de toutes ces fonctions génératrices qui ne sont pas sur le cercle d'unité α_n et β_n clairement *évoluent exponentiellement* comme 2^n . Par exemple, $\beta(x)$ est:

$$\beta(x) = qx \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+1} \right) \quad (3.58)$$

On peut également étudier l'itération de \widehat{K} vu comme une transformation birationnelle dans $\mathbb{C}P_{q^2-1}$. Pour $q = 4$, ces orbites ressemblent à des *courbes* dans certains domaines de $\mathbb{C}P_{15}$. En fait, ces orbites peuvent être vu comme appartenant à une sous-variété à trois dimensions qui est l'intersection de douze quadriques (Plücker-like quadrics) dans $\mathbb{C}P_{15}$ et plus généralement l'intersection d'au plus, $(q^2 - 4)$ expressions algébriques dans $\mathbb{C}P_{q^2-1}$ pour les matrices $q \times q$.

3.2. Permutations générales

Le spectre de complexités précédent est associé à des transpositions de deux éléments de la matrice. Nous avons obtenus six classes avec les polynômes de complexités suivants:

- Classe I: $1 - x$
- Classe II: $1 - 2x - 2x^3$
- Classe III: $1 - x$
- Classe IV: $1 - x - x^3$
- Classe V: $1 - 3x + x^2 - x^3$
- Classe VI: $1 - 2x$

Nous pouvons maintenant considérer des permutations plus générales, par exemple, des permutations impliquant p éléments de la matrice ($p = 3, 4, \dots$).

3.2.1. Permutations de 3 éléments: $p = 3$

Les polynômes associés aux compléxités obtenues et les schémas de factorisation sont les suivants. Ces compléxités ont été obtenues avec une itération d'ordre 13.

- 2,3,1,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16:

$$\lambda = 2$$

$$p(x) = \frac{x^2}{-x^2+1}, q(x) = \frac{x^2+2x}{-x^2+1}$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+2x}{(x+1)(2x-1)}, \beta(x) = 4 \frac{(x-1)x}{2x-1}$$

- 2,5,3,4,1,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda = 2$$

$$p(x) = 2 \frac{x^3}{-x^2+1}, q(x) = \frac{3x^2+x}{-x^2+1}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{2x^2+1+x}{(x-1)(x+1)(2x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{2x-1}$$

- 2,10,3,4,5,6,7,8,9,1,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.461604385$$

$$p(x) = x^3 + x^4 + 2x^6 + 2x^7, q(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + 4x^5 + 3x^6$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{3x^5+x^4+2x^2+1}{x^6-x^4+2x^3-2x^2+3x-1}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^6-x^4+2x^3-2x^2+3x-1)}$$

- 2,11,3,4,5,6,7,8,9,10,1,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.618033988$$

$$p(x) = \frac{x^3}{1-x^2}, q(x) = \frac{2x^2+x}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+x^2+x}{(x^2-3x+1)(x+1)}, \beta(x) = -4 \frac{x(x-1)}{x^2-3x+1}$$

- 2,12,3,4,5,6,7,8,9,10,11,1,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.678712476$$

$$p(x) = 2x^4 + 2x^5, q(x) = x + x^2 + 4x^3 + 3x^4$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{3x^3+x^2+1}{x^4-x^2+3x-1}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^4-x^2+3x-1)}$$

- 7,1,3,4,5,6,2,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.769292354$$

$$p(x) = 2x^4, q(x) = x + x^2 + 3x^3$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+x^2+3x^3}{(x+1)(x^3-x^2+3x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^3-x^2+3x-1)}$$

- 7,2,3,4,5,6,8,1,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.866890861$$

$$p(x) = x^4 + 2x^6, q(x) = x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 3x^5$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+x^2+2x^3+x^4+3x^5}{(x+1)(x^5-x^4+2x^3-x^2+3x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^5-x^4+2x^3-x^2+3x-1)}$$

- 7,2,3,4,5,6,10,8,9,1,11,12,13,14,15,16

$$\lambda = 3$$

$$p(x) = 0, q(x) = x^6$$

$$\alpha(x) = \frac{4}{1-3x}, \beta(x) = \frac{4x}{(1-3x)(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

- 1,3,4,2,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 1.618033989$$

$$p(x) = \frac{x^4+x^2}{-x^2+1}, q(x) = \frac{x^3+x^2+2x}{-x^2+1}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+x^3+2x}{(x-1)(x+1)(x^2+x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{x^2+x-1}$$

- 1,3,8,4,5,6,7,2,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.414213562$$

$$p(x) = 4 \frac{x^4}{-x^2+1}, q(x) = \frac{5x^3+2x^2+x}{-x^2+1}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{x^2+1+5x^3+x}{(x-1)(x+1)(x^2+2x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{x^2+2x-1}$$

- 1,7,3,4,5,6,9,8,2,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.965572634$$

$$p(x) = 2x^6, q(x) = 3x^5$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+3x^5}{(x-1)(x+1)(x^4-3x^3+x^2-3x+1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^4-3x^3+x^2-3x+1)}$$

- 2,7,3,4,5,6,1,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.485187000$$

$$p(x) = \frac{2x^7 - 3x^6 + 4x^4}{1-x^2}, q(x) = \frac{3x^6 - 3x^5 - x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x^2+3x^6-3x^5-x^4+5x^3+x}{(x^6-x^5+x^4-x^3-x^2+3x-1)(x+1)}$$

$$\beta(x) = 4 \frac{x(x-1)}{x^6-x^5+x^4-x^3-x^2+3x-1}$$

- 1,3,7,4,5,6,2,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.447770941$$

$$p(x) = \frac{x^8+2x^6-x^5+x^4+x^3}{1-x^2-x^6}, q(x) = \frac{x+2x^2+x^3+3x^5+x^6+x^7}{1-x^2-x^6}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+x^2+x+x^3+3x^5+x^7}{(x-1)(x+1)(x^6+x^5+x^2+2x-1)}$$

$$\beta(x) = -4 \frac{x(-1+x^2+x^6)}{(x-1)(x+1)(x^6+x^5+x^2+2x-1)}$$

- 1,3,14,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,2,15,16

$$\lambda \simeq 2.405405133$$

$$p(x) = \frac{2x^7+x^6+x^5+x^4+x^3}{1-x^6}, q(x) = \frac{x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+3x^6}{1-x^6}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+2x^6+x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5}{(2x^5+2x^3+2x-1)(x-1)(x+1)}$$

$$\beta(x) = -4 \frac{x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{2x^5+2x^3+2x-1}$$

Il existe un schéma de factorisations où l'ordre 13 pour l'itération ne suffit pas pour tirer les expressions exactes de $p(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et donc la valeur exacte de λ , pour cela on donne les expressions approximatives des polynômes et la valeur approximative de λ :

- 6,2,1,4,5,3,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \sim 2.859507590$$

$$p(x) = x^4 + 2x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + 2x^{11} + 2x^{13} + \dots$$

$$q(x) = x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 3x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + x^9 + 3x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 4x^{13} + \dots$$

$$\alpha(x) = 4 + 12x + 36x^2 + 108x^3 + 308x^4 + 892x^5 + 2548x^6 + 7292x^7 + 20852x^8 + 59628x^9 + 170516x^{10} + 487580x^{11} + 1394244x^{12} + 3986812x^{13} + \dots$$

$$\beta(x) = 4x + 8x^2 + 24x^3 + 68x^4 + 196x^5 + 560x^6 + 1600x^7 + 4576x^8 + 13084x^9 + 37416x^{10} + 106988x^{11} + 305924x^{12} + 874792x^{13} + \dots$$

3.2.2. Permutations de 4 éléments: $p = 4$

Quelques polynômes associés aux complexités obtenues avec leurs schémas de factorisation sont les suivants:

- 2,3,4,1,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda = 2$$

$$p(x) = \frac{x^2}{1-x^2}, q(x) = \frac{x^2+2x}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+2x}{(x+1)(2x-1)}, \beta(x) = 4 \frac{(x-1)x}{2x-1}$$

- 2,3,9,4,5,6,7,8,1,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.178724176$$

$$p(x) = \frac{-x^5+2x^3}{1-x^2}, q(x) = \frac{x+3x^2-x^4}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{-1-2x^2-x+x^4}{(x^4-2x^2+3x-1)(x+1)}, \beta(x) = 4 \frac{x(x-1)}{x^4-2x^2+3x-1}$$

- 2,3,10,4,5,6,7,8,9,1,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.769292354$$

$$p(x) = 2x^4, q(x) = x + x^2 + 3x^3$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+x^2+3x^3}{(x+1)(x^3-x^2+3x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^3-x^2+3x-1)}$$

- 2,3,11,4,5,6,7,8,9,10,1,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.618033988$$

$$p(x) = \frac{x^3}{1-x^2}, q(x) = \frac{2x^2+x}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{x^2+x+1}{(x^2-3x+1)(x+1)}, \beta(x) = -4 \frac{x(x-1)}{x^2-3x+1}$$

- 2,3,12,4,5,6,7,8,9,10,11,1,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.678712476$$

$$p(x) = 2x^4 + 2x^5, q(x) = x + x^2 + 4x^3 + 3x^4$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{3x^3+x^2+1}{x^4-x^2+3x-1}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^4-x^2+3x-1)}$$

- 2,5,3,4,6,1,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda = 2$$

$$p(x) = 2 \frac{x^3}{1-x^2}, q(x) = \frac{3x^2+x}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+2x^2+x}{(x-1)(x+1)(2x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{2x-1}$$

- 2,5,3,4,9,6,7,8,1,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.153721376$$

$$p(x) = \frac{x^5+2x^3}{1-x^4}, q(x) = \frac{x+3x^2+x^3+2x^4}{1-x^4}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+x^4+x+3x^2+x^3}{(x+1)(x^4-3x^3+3x^2-3x+1)}, \beta(x) = -4 \frac{x(x-1)(x^2+1)}{x^4-3x^3+3x^2-3x+1}$$

- 2,7,3,4,5,6,8,1,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.549673423$$

$$p(x) = 3x^4 + x^5 + 3x^6 + 2x^7, q(x) = x + 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 3x^6$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+2x^2+5x^3+3x^4+5x^5+3x^6}{-1+2x+x^2+x^3+x^7}, \beta(x) = -4 \frac{x}{-1+2x+x^2+x^3+x^7}$$

- 2,7,3,4,5,6,15,8,9,10,11,12,13,14,1,16

$$\lambda \simeq 2.737185908$$

$$p(x) = x^4 + 3x^5 + 2x^6, q(x) = x + x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 3x^5$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{3x^4+2x^3+x^2+1}{x^5-x^4+x^3-x^2+3x-1}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+3x-1)}$$

- 2,9,3,4,5,6,7,8,13,10,11,12,1,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.187870020$$

$$p(x) = \frac{2x^4+2x^3}{1+x-x^3-x^4-x^5}, q(x) = \frac{2x^5-2x^4+3x^2+x}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{(-1-x+x^3+x^4+x^5)(1+2x^2+2x^5-2x^4+x)}{x^4+3x^6+1-x+3x^7-3x^2-2x^{10}+6x^{11}}, \beta(x) = 4 \frac{x(x-1)(x+1)(-1-x+x^3+x^4+x^5)}{x^4+3x^6+1-x+3x^7-3x^2-2x^{10}+6x^{11}}$$

- 2,10,1,4,5,6,7,8,9,3,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.717607599$$

$$p(x) = \frac{x^5+2x^4}{1-x^3}, q(x) = \frac{x+x^2+4x^3+x^4}{1-x^3}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+3x^3+x+x^2+x^4}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-3x+1)}, \beta(x) = -4 \frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-3x+1)}$$

- 2,10,3,4,5,1,7,8,9,6,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.579534087$$

$$p(x) = \frac{-4x^5-x^4+x^3}{1-2x-2x^2+x^3+3x^5}, q(x) = \frac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x}{1-x^4}$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{(1-2x-2x^2+x^3+3x^5)(1+x^5+2x^3+2x^2+x)}{5x^9+x^8-7x^5+2x^4-7x^3-x^2+4x-1+9x^7+3x^6+9x^{11}-3x^{10}}$$

$$\beta(x) = 4 \frac{x(x-1)(x+1)(x^2+1)(1-2x-2x^2+x^3+3x^5)}{5x^9+x^8-7x^5+2x^4-7x^3-x^2+4x-1+9x^7+3x^6+9x^{11}-3x^{10}}$$

- 2,10,3,4,5,6,7,8,9,12,11,1,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.737185908$$

$$p(x) = 2x^4 + 2x^6, q(x) = x + x^2 + 3x^3 + x^4 + 3x^5$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+x^2+3x^3+x^4+3x^5}{(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+3x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+3x-1)}$$

- 2,10,3,4,5,6,7,8,9,14,11,12,13,1,15,16

$$\lambda \simeq 2.472402764$$

$$p(x) = x^3 + x^4 + 2x^6 + 2x^8, q(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + 3x^5 + x^6 + 3x^7$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+2x^2+2x^3+x^4+3x^5+x^6+3x^7}{(x+1)(x^7-x^6+x^5-x^4+2x^3-2x^2+3x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^7-x^6+x^5-x^4+2x^3-2x^2+3x-1)}$$

- 2,11,3,1,5,6,7,8,9,10,4,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.760626561$$

$$p(x) = 2 \frac{x^4}{1-x^3}, q(x) = \frac{3x^3+x^2+x}{1-x^3}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+2x^3+x^2+x}{2x^4+1-x^3-2x^2-2x}, \beta(x) = -4 \frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{2x^4+1-x^3-2x^2-2x}$$

- 2,11,3,4,5,6,1,8,9,10,7,12,13,14,15,16

$$\lambda = 3$$

$$p(x) = 0, q(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\alpha(x) = \frac{4}{1-3x}, \beta(x) = \frac{4(1-x)x}{1-3x}$$

- 2,12,3,4,5,6,7,1,9,10,11,8,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.775591142$$

$$p(x) = x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7, q(x) = x + x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 3x^6$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+x^2+3x^3+4x^4+4x^5+3x^6}{(x+1)(x^6+x^3-x^2+3x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^6+x^3-x^2+3x-1)}$$

- 6,2,4,1,5,3,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.866890861$$

$$p(x) = x^4 + 2x^6, q(x) = x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 3x^5$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+x^2+2x^3+x^4+3x^5}{(x+1)(x^5-x^4+2x^3-x^2+3x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{(x+1)(x^5-x^4+2x^3-x^2+3x-1)}$$

- 6,2,5,4,1,3,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.861147623$$

$$p(x) = \frac{x^4}{1-2x^2+x^4}, q(x) = \frac{x+x^2+x^3}{1-x^4-x^2}$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)(x^2-x-1)}{7x^4-8x^8+x^6+1-2x+5x^3-5x^2-x^5-5x^7+3x^9}$$

$$\beta(x) = -4 \frac{x(-1+x^4+x^2)(x-1)^2(x+1)^2}{7x^4-8x^8+x^6+1-2x+5x^3-5x^2-x^5-5x^7+3x^9}$$

- 1,3,8,4,5,6,7,12,9,10,11,2,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.414213562$$

$$p(x) = 4 \frac{x^4}{1-x^2}, q(x) = \frac{5x^3+2x^2+x}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+x^2+5x^3+x}{(x-1)(x+1)(x^2+2x-1)}, \beta(x) = -4 \frac{x}{x^2+2x-1}$$

- 1,3,10,4,5,6,2,8,9,7,11,12,13,14,15,16

$$\lambda \simeq 2.788973162$$

$$p(x) = \frac{2x^5+x^4}{1-x^2}, q(x) = \frac{x+x^2+2x^3+3x^4}{1-x^2}$$

$$\alpha(x) = -4 \frac{1+x+2x^3+3x^4}{(x^4-2x^3+3x-1)(x+1)}, \beta(x) = 4 \frac{x(x-1)}{x^4-2x^3+3x-1}$$

- 1,3,14,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,2,16

$$\lambda \simeq 2.359304086$$

$$p(x) = \frac{2x^5+x^4+x^3}{1-x^4}, q(x) = \frac{x+2x^2+2x^3+3x^4}{1-x^4}$$

$$\alpha(x) = 4 \frac{1+2x^4+x+2x^2+2x^3}{(2x^3+2x-1)(x-1)(x+1)}, \beta(x) = -4 \frac{x(x^2+1)}{2x^3+2x-1}$$

3.3. Remarques et conclusion

L'analyse des polynômes de complexités obtenus, dans cette section ainsi que dans la précédente, nous montre encore une fois qu'on peut classifier ces différentes complexités en trois classes différentes: des nombres de Pisot, des nombres de Salem et d'autres plus généraux (voir [47, 48]). La liste des complexités obtenus pour $p = 2, 3, 4$ est donnée dans le Tableau (3.1).

Il est assez remarquable que toutes les complexités trouvées sont de ces trois types. Les origines de cette classification sont encore à comprendre [49].

λ	Polynôme	Type
3	$-1 + 3x$	
2.965572634	$x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1$	Salem
2.866890861	$x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.861147623	$7x^4 - 8x^8 + x^6 + 1 - 2x + 5x^3 - 5x^2 - x^5 - 5x^7 + 3x^9$	N.P
2.788973162	$x^4 - 2x^3 + 3x - 1$	Pisot
2.775591142	$x^6 + x^3 - x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.769292354	$1 - 3x + x^2 - x^3$	Pisot
2.760626561	$2x^4 + 1 - x^3 - 2x^2 - 2x$	N.P
2.737185908	$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.717607599	$x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1$	Pisot
2.678712476	$x^4 - x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.618033988	$x^2 - 3x + 1$	Pisot
2.579534087	$5x^9 + x^8 - 7x^5 + 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 4x - 1 + 9x^7 + 3x^6 + 9x^{11} - 3x^{10}$	N.P
2.549673423	$-1 + 2x + x^2 + x^3 + x^7$	Pisot
2.485187000	$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.472402764	$x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.461604385	$x^6 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.447770941	$x^6 + x^5 + x^2 + 2x - 1$	Pisot
2.414213562	$x^2 + 2x - 1$	Pisot
2.405405133	$2x^5 + 2x^3 + 2x - 1$	Pisot
2.359304086	$2x^3 + 2x - 1$	Pisot
2.187870020	$x^4 + 3x^6 + 1 - x + 3x^7 - 3x^2 - 2x^{10} + 6x^{11}$	N.P
2.178724176	$x^4 - 2x^2 + 3x - 1$	Pisot
2.153721376	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$	Salem
2	$1 - 2x$	
1.618033989	$x^2 + x - 1$	Pisot
1.465571226	$1 - x - x^3$	Pisot
1	$(1+x)(1-x)^3$	Int

Tableau 3.1: Complexités associées à des matrice 4×4 .

CHAPITRE 4

ETUDE DE LA CLASSE IV

Une classe de transformations birationnelles, appelée “classe IV”, a émergé dans l’étude des complexités dans les deux précédents chapitres. Elle peut être vu comme un excellent “laboratoire” pour analyser la “frontière” entre l’intégrabilité et le chaos car c’est la classe qui a la plus faible valeur de complexité supérieure à un. Le meilleur représentant de cette classe est donné par la permutation t_{12-32} sur des matrices d’ordre $q \times q$ (avec $q = 3, 4, \dots$).

4.1. Propriétés de factorisation

Rappelons le schéma des factorisations correspondant à la transformation K de la classe IV, pour n arbitraire:

$$\begin{aligned} \det(M_n) &= f_{n+1} \cdot (f_n^{q-2} \cdot f_{n-1} \cdot f_{n-2}^{q-1} \cdot f_{n-3}^2) \cdot (f_{n-4}^{q-2} \cdot f_{n-5} \cdot f_{n-6}^{q-1} \cdot f_{n-7}^2) \cdots f_1^{\delta_n} \\ K(M_n) &= M_{n+1} \cdot (f_n^{q-3} \cdot f_{n-2}^{q-2} \cdot f_{n-3}) \cdot (f_{n-4}^{q-3} \cdot f_{n-6}^{q-2} \cdot f_{n-7}) \cdot (f_{n-8}^{q-3} \cdot f_{n-10}^{q-2} \cdot f_{n-11}) \cdots f_1^{\zeta_n} \end{aligned}$$

où δ_n et ζ_n dépendent de la troncation. Ces factorisations ont une périodicité avec période quatre. Les relations suivantes *indépendantes de l’ordre q de la matrice* sont vérifiées:

$$\widehat{K}(M_n) = \frac{K(M_n)}{\det(M_n)} = \frac{M_{n+1}}{f_1 f_2 \cdots f_n f_{n+1}} \quad (4.59)$$

De manière remarquable, les polynômes f_n , pour la classe IV, satisfont pour q arbitraire des relations exactes, comme par exemple:

$$\begin{aligned} &\frac{(f_{n+2} - f_{n-1} f_{n+1})}{(f_n - f_{n-3} f_{n-1})} \cdot \frac{f_{n-6} f_{n-10} f_{n-14} \cdots}{f_{n-4} f_{n-8} f_{n-12} \cdots} \\ &= \frac{f_n (f_{n-1} f_{n-5} f_{n-9} \cdots) - (f_{n+1} f_{n-3} f_{n-7} \cdots)}{f_{n-2} (f_{n-3} f_{n-7} f_{n-11} \cdots) - (f_{n-1} f_{n-5} f_{n-9} \cdots)} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Contrairement aux cas intégrables, on doit s’attendre à avoir non pas des récurrences mais des “pseudo-récurrences” sur les variables x_n , définies par $x_n = \det(\widehat{K}(M_n) \widehat{K}(M_{n+1}))$, comme on verra dans la suite.

4.2. La classe IV vue comme une transformation dans un plan

Considérons l'iteration de la transformation $\widehat{K} = \widehat{I} \cdot t$ dans l'espace à $(q^2 - 1)$ dimensions qui est l'espace projectif CP_{q^2-1} correspondant aux éléments des matrices d'ordre $q \times q$.

On peut, en visualisant les orbites associées à cette transformation, voir qu'elles appartiennent à des sous-variétés bidimensionnelles (*plans* dans CP_{q^2-1}) [26, 29].

Cela peut également être vu numériquement, pour n arbitraire, en établissant qu'une relation entre la matrice M_0 et ses premières itérées paires est vérifiée:

$$\widehat{K}^{2n}(M_0) = \alpha_n^{(0)} \cdot M_0 + \alpha_n^{(1)} \cdot \widehat{K}^2(M_0) + \alpha_n^{(2)} \cdot \widehat{K}^4(M_0) \quad (4.61)$$

Ceci montre que les orbites de M_0 par \widehat{K}^{2n} sont confinés dans des *plans*.

Pour la transposition t_{12-32} , on peut avoir une démonstration plus rigoureuse. On peut récursivement montrer que les iterations successives de \widehat{K}^2 sur une matrice initiale M_0 (générique), peut être écrite comme suit:

$$\widehat{K}^{2n}(M_0) = \frac{1}{x_0 x_2 \dots x_{2n-2}} \cdot (M_0 - a_n F - b_n P) \quad (4.62)$$

où P indique une matrice constante d'ordre $q \times q$ avec les éléments: $P[1, 2] = 1$, $P[3, 2] = -1$, $P[i, j] = 0$ pour $(i, j) \neq (1, 2)$ ou $(3, 2)$ et F indique une matrice d'ordre $q \times q$ quadratique dans les m_{ij} ($F[1, 1] = m_{21} m_{13} - m_{11} m_{23}$, ...) (voir l'équation (4.65)). La matrice F dépend de M_0 , mais pas de l'ordre n de l'iteration.

Autrement dit, toutes les itérées de M_0 par \widehat{K}^2 sont confinées dans un plan qui ne dépend que de la matrice initiale M_0 . Ce plan est généré par deux vecteurs, un vecteur fixe P et un autre F , qui dépend de la matrice initiale.

4.2.1. Relation au premier ordre

Pour démontrer la relation (4.62), on peut procéder par récurrence comme suit. On considère une matrice d'ordre $q \times q$ générique M_0 définie par:

$$M_0 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1q} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2q} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{q1} & m_{q2} & m_{q3} & \cdots & m_{qq} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

En appliquant l'inverse \widehat{I} et la transposition t ($\widehat{K} = t \cdot \widehat{I}$), on peut voir que:

$$t(M_0) = M_0 + \Delta_0 P, \quad \text{où} \quad \Delta_0 = \Delta(M_0) = m_{32} - m_{12}$$

avec:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant la relation précédente sur la matrice $\widehat{I}(M_0)$, on voit que:

$$\widehat{K}(M_0) = \widehat{I}(M_0) - \Delta_1 P, \quad \text{où} \quad \Delta_1 = -\Delta(\widehat{I}(M_0)) = \Delta(\widehat{K}(M_0))$$

Posons en général $\Delta_n = \Delta(\widehat{K}^n(M_0))$. Si on introduit la matrice U définie par:

$$U = M_0 \cdot \widehat{K}(M_0) = I - \Delta_1 M_0 \cdot P$$

on voit que:

$$\begin{aligned} \det(U) &= \det(M_0 \cdot \widehat{K}(M_0)) = \det(M_0) \det(\widehat{K}(M_0)) = x_0 \\ &= \det(I - \Delta_1 M_0 \cdot P) = 1 + \Delta_1(m_{23} - m_{21}) \end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de x_0 .

Le calcul de $\widehat{K}^2(M_0)$ donne:

$$K^2(M_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} + \Delta_1(m_{11}m_{23} - m_{21}m_{13}) & m_{32}x_0 + \Delta_1m_{22}(m_{31} - m_{33}) & m_{13} + \Delta_1(m_{11}m_{23} - m_{21}m_{13}) \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} + \Delta_1(m_{31}m_{23} - m_{21}m_{33}) & m_{12}x_0 + \Delta_1m_{22}(m_{11} - m_{13}) & m_{33} + \Delta_1(m_{31}m_{23} - m_{21}m_{33}) \\ m_{41} + \Delta_1(m_{41}m_{23} - m_{21}m_{43}) & m_{42}x_0 + \Delta_1m_{22}(m_{41} - m_{43}) & m_{43} + \Delta_1(m_{41}m_{23} - m_{21}m_{43}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & m_{14}x_0 + \Delta_1m_{24}(m_{11} - m_{13}) & \cdots \\ & m_{24} & \cdots \\ & m_{34}x_0 + \Delta_1m_{24}(m_{31} - m_{33}) & \cdots \\ & m_{44}x_0 + \Delta_1m_{24}(m_{41} - m_{43}) & \cdots \\ & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Ce qui montre que $\widehat{K}^2(M_0)$ peut s'écrire sous la forme:

$$\widehat{K}^2(M_0) = \frac{M_0 - a_1 F - b_1 P}{x_0} \quad \text{où:} \quad a_1 = \Delta_1 \quad \text{et:} \quad b_1 = \frac{x_0 \Delta_2 - \Delta_0}{2}$$

$$\text{avec:} \quad \Delta_2 = \Delta(\widehat{K}^2(M_0)) = \frac{\Delta_1 m_{22} (m_{33} - m_{31} + m_{11} - m_{13})}{x_0} - \Delta_0$$

La matrice F qui ne dépend que de la matrice initiale M_0 s'écrit:

$$F = \begin{pmatrix} m_{21}m_{13} - m_{11}m_{23} & ((m_{12} + m_{32})d_0 + m_{22}c_0)/2 & m_{21}m_{13} - m_{11}m_{23} & m_{14}d_0 + m_{24}(m_{13} - m_{11}) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ m_{21}m_{33} - m_{31}m_{23} & ((m_{12} + m_{32})d_0 + m_{22}c_0)/2 & m_{21}m_{33} - m_{31}m_{23} & m_{34}d_0 + m_{24}(m_{33} - m_{31}) & \cdots \\ m_{21}m_{43} - m_{41}m_{23} & m_{42}d_0 + m_{22}(m_{43} - m_{41}) & m_{21}m_{43} - m_{41}m_{23} & m_{44}d_0 + m_{24}(m_{43} - m_{41}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

avec $c_0 = (m_{13} - m_{11} + m_{33} - m_{31})$ et $d_0 = (m_{21} - m_{23})$. On voit alors d'après ce qui précède que la relation (4.62) est vérifiée pour l'ordre un.

4.2.2. Relation générale

Supposons maintenant que:

$$\widehat{K}^{2n}(M_0) = \frac{1}{x_0 x_2 x_4 \cdots x_{2n-2}} (M_0 - a_n F - b_n P)$$

est vérifiée pour un ordre n et regardons l'ordre suivant $(n + 1)$:

$$\widehat{K}^{2n+2}(M_0) = \widehat{K}^{2n}(\widehat{K}^2(M_0)) = \frac{1}{x_2 x_4 \cdots x_{2n}} (\widehat{K}^2(M_0) - a_n(\widehat{K}^2)\widehat{K}^2(F) - b_n(\widehat{K}^2)P)$$

Avec: $\widehat{K}^2(F) = F/x_0$, on a donc:

$$\widehat{K}^{2n+2}(M_0) = \frac{1}{x_0 x_2 x_4 \cdots x_{2n}} (M_0 - (\Delta_1 + a_n(\widehat{K}^2))F - (b_1 + x_0 b_n(\widehat{K}^2))P)$$

où $a_n(\widehat{K}^2)$ et $b_n(\widehat{K}^2)$ représentent les a_n et b_n associées à la matrice $\widehat{K}^2(M_0)$. Si on pose:

$$a_{n+1} = \Delta_1 + a_n(\widehat{K}^2) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_1 + b_n(\widehat{K}^2)x_0$$

on obtient alors:

$$\widehat{K}^{2n+2}(M_0) = \frac{1}{x_0 x_2 x_4 \cdots x_{2n}} (M_0 - a_{n+1}F - b_{n+1}P)$$

Donc la relation (4.62) est vérifiée. Sachant que $a_1 = \Delta_1$, on obtient donc:

$$\begin{aligned} a_n &= \Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_5 + \cdots + \Delta_{2n-1} \\ b_n &= \frac{x_0 x_2 \cdots x_{2n-2} \Delta_{2n} - \Delta_0}{2} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ces calculs permettent de considérer alors la transformation $\widehat{k} = \widehat{K}^2$ comme une transformation birationnelle de deux variables (a, b) .

4.3. Récurrences sur les x_n

On peut également représenter, et analyser la transformation \widehat{k} comme une récurrence sur les variables x_n . L'intégrabilité de \widehat{k} doit automatiquement donner une intégrabilité des récurrences sur les x_n malgré qu'un déterminant ne contient qu'une partie de "l'information" sur la matrice.

Les récurrences sur les variables x_n sont *indépendantes de q* , la plus simple s'écrit:

$$\frac{x_{n+3} - 1}{x_{n+2} x_{n+4} - 1} = \frac{x_{n+1} - 1}{x_n x_{n+2} - 1} \cdot x_n x_{n+3} \quad (4.67)$$

D'autres récurrences sur les x_n sont aussi vérifiées [25].

Une démonstration de la relation (4.67) peut être donnée de la manière suivante en remarquant que les résultats trouvés par l'application directe de \widehat{K}^2 sur une matrice quelconque M_0 peuvent être généraliser pour n'importe quelle matrice et particulièrement pour la matrice $\widehat{K}^n(M_0)$. Nous avons $\widehat{K}^{n+2}(M_0) = \widehat{K}^2(\widehat{K}^n(M_0))$.

- On définit pour la matrice M_0 , la quantité $T(M_0) = T_0 = m_{23} - m_{21}$ et en général $T_n = T(K^n(M_0))$.

L'application de \widehat{K}^2 sur M_0 nous permet d'établir les relations suivantes:

$$T_2 = \frac{T_0}{x_0} \quad \text{et:} \quad x_0 = 1 + \Delta_1 T_0$$

Par analogie l'application de \widehat{K}^2 sur la matrice $\widehat{K}^n(M_0)$ donne:

$$T_{n+2} = \frac{T_n}{x_n} \quad \text{et:} \quad x_{n+2} = 1 + \Delta_{n+3} T_{n+2} = 1 + \Delta_{n+3} \frac{T_n}{x_n} = 1 + \frac{\Delta_{n+3}}{x_n \Delta_{n+1}} (x_n - 1)$$

d'où la relation:

$$(x_{n+2} - 1) = \frac{\Delta_{n+3}}{x_n \Delta_{n+1}} (x_n - 1) \quad (4.68)$$

- De manière similaire, si on définit pour la matrice M_0 , la quantité:

$$R(M_0) = R_0 = m_{22} \cdot (m_{33} - m_{31} + m_{11} - m_{13})$$

et en général $R_n = R(K^n(M_0))$. Nous avons par l'application de \widehat{K}^2 sur M_0 :

$$R_2 = \frac{R_0}{x_0^2} \quad \text{et:} \quad \Delta_2 = \Delta_1 \frac{R_0}{x_0} - \Delta_0$$

Par analogie l'application de \widehat{K}^2 sur $(\widehat{K}^n(M_0))$ donne:

$$\begin{aligned} R_{n+2} &= \frac{R_n}{x_n^2} \\ \Delta_{n+2} &= \Delta_{n+1} \frac{R_n}{x_n} - \Delta_n = \Delta_{n+1} \frac{R_{n-2}}{x_n x_{n-2}^2} - \Delta_n = \frac{\Delta_{n+1} (\Delta_n + \Delta_{n-2})}{x_n x_{n-2} \Delta_{n-1}} - \Delta_n \end{aligned}$$

d'où la relation:

$$\frac{(\Delta_{n+2} + \Delta_n)}{\Delta_{n+1}} \cdot x_n x_{n-2} = \frac{(\Delta_n + \Delta_{n-2})}{\Delta_{n-1}} \quad (4.69)$$

- En posant $\eta_n = \Delta_{n+2}/\Delta_n$, les deux équations précédentes deviennent:

$$(x_{n+2} - 1) = \frac{(x_n - 1)}{x_n} \cdot \eta_{n+1} \quad \text{et:} \quad \frac{(\eta_{n+2} + 1)}{\eta_{n+1}} \cdot x_n x_{n+2} = \frac{(\eta_n + 1)}{\eta_n}$$

L'élimination de η_n entre ces deux équations, donne la récurrence (4.67).

4.4. Résolution de la récurrence sur x_n

On introduit une variable homogène q_n définie par : $x_n = q_{n+2}/q_n$.

On a $q_{2n} = x_0 x_2 \dots x_{2n-2} \cdot q_0$ et également $q_{2n+1} = x_1 x_3 \dots x_{2n-1} \cdot q_1$, où q_0 et q_1 sont deux quantités homogènes arbitraires.

La récurrence (4.67) sur les x_n devienne:

$$q_{n+3} q_{n+5} \cdot \frac{q_{n+6} - q_{n+2}}{(q_{n+3} - q_{n+5})} = q_{n+1} q_{n+3} \cdot \frac{q_{n+4} - q_n}{(q_{n+1} - q_{n+3})} \quad (4.70)$$

Les termes de gauche et de droite de l'équation (4.70) sont les mêmes modulo un *shift de deux*. On peut alors introduire deux constantes d'intégration λ_1 et λ_2 , et voir que l'équation (4.70) est équivalente à :

$$q_{n+4} - q_n = \lambda_n \cdot \left(\frac{1}{q_{n+1}} - \frac{1}{q_{n+3}} \right) \quad (4.71)$$

où $\lambda_{2n+1} = \lambda_1$ et $\lambda_{2n} = \lambda_2$.

Comme $\lambda_{n+2} = \lambda_n$, on peut réécrire (4.71) comme suit:

$$q_{n+4} + q_{n+2} + \frac{\lambda_{n+2}}{q_{n+3}} = q_{n+2} + q_n + \frac{\lambda_n}{q_{n+1}} \quad (4.72)$$

On voit alors que l'équation (4.72) relie ses deux membres par un shift de deux, ce qui nous conduit à introduire deux nouvelles constantes:

$$q_{n+2} + q_n + \frac{\lambda_n}{q_{n+1}} = \rho_n \quad (4.73)$$

où $\rho_{2n+1} = \rho_1$ et $\rho_{2n} = \rho_2$.

Pour continuer la résolution, on doit écrire une relation similaire à (4.70), qui s'écrit:

$$q_{n+4} + \frac{\lambda_{n+2}}{q_{n+3}} = q_n + \frac{\lambda_n}{q_{n+1}} = \left(q_{n+1} + \frac{\lambda_n}{q_n} \right) \frac{q_n}{q_{n+1}} \quad (4.74)$$

Malheureusement $\lambda_{n+2} \neq \lambda_{n+3}$ et on ne trouve pas d'autre expression covariante.

Néanmoins, on peut étudier une récurrence restreinte, correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Dans ce sous-cas, cette récurrence est *intégrable* et est intimement reliée aux récurrences et aux relations biquadratiques étudiées précédemment. L'équation (4.74) devient:

$$q_{n+4} + \frac{\lambda}{q_{n+3}} = q_n + \frac{\lambda}{q_{n+1}} = \left(q_{n+1} + \frac{\lambda}{q_n} \right) \frac{q_n}{q_{n+1}} \quad (4.75)$$

En posant $Q_n = q_n + \frac{\lambda}{q_{n-1}}$, l'équation (4.75) devient:

$$Q_{n+4} = \frac{q_n}{q_{n+1}} Q_{n+1} \quad (4.76)$$

qui peut aussi se réécrire sous la forme:

$$q_{n+1} Q_{n+4} Q_{n+3} Q_{n+2} = q_n Q_{n+3} Q_{n+2} Q_{n+1} \quad (4.77)$$

L'équation précédente permet d'introduire une nouvelle constante d'intégration μ .

Avec les variables Q_n , les équations (4.73) donnent:

$$Q_{n+2} = \rho_n - q_n \quad (4.78)$$

A partir des équations (4.77) et (4.78), on obtient:

$$\begin{aligned} \mu &= q_n \cdot Q_{n+1} \cdot Q_{n+2} \cdot Q_{n+3} \\ &= (\rho_n - q_n) (\rho_{n+1} - q_{n+1}) (q_n q_{n+1} + \lambda) \end{aligned} \quad (4.79)$$

qui donne *deux* équations biquadratiques:

$$\begin{aligned} (\rho_2 - q_{2n}) (\rho_1 - q_{2n+1}) (q_{2n} q_{2n+1} + \lambda) - \mu &= 0 \\ (\rho_2 - q_{2n+2}) (\rho_1 - q_{2n+1}) (q_{2n+2} q_{2n+1} + \lambda) - \mu &= 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Si on introduit le polynôme biquadratique $B(x, y)$:

$$B(x, y) = (xy + \lambda)(x - \rho_1)(y - \rho_2) - \mu \quad (4.81)$$

Dans le plan (q_n, q_{n+1}) , ces points successifs se mettent respectivement sur deux courbes biquadratiques qui dépendent de la parité de n , plus précisément, si n est impair $B(x, y) = 0$, et $B(y, x) = 0$ si n est pair.

Ceci montre que dans le sous-cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, que la récurrence (4.70), ou de manière équivalente (4.71), est *une récurrence intégrable*.

On notera qu'on peut aussi associer à la classe IV une transformation dans $C\mathbf{P}_2$ comme suit:

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= \rho_1 - q_n - \frac{\lambda_1}{q_{n+1}} \\ q_{n+3} &= \rho_2 - q_{n+1} - \frac{\lambda_2 q_{n+1}}{(\rho_1 - q_n) q_{n+1} - \lambda_1} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Remarquons que la transformation (4.82) dans $C\mathbf{P}_2$ est aussi birationnelle. On obtient (q_n, q_{n+1}) en termes de (q_{n+2}, q_{n+3}) par (4.82), avec le changement de variables suivant:

$$\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2, \quad \rho_1 \leftrightarrow \rho_2, \quad q_n \leftrightarrow q_{n+3}, \quad q_{n+1} \leftrightarrow q_{n+2}$$

4.5. Transformation à deux variables u et v et à deux paramètres α et ϵ

On peut introduire le changement de variables suivant:

$$u_n = \frac{q_0 q_1}{q_1 q_2 + q_0 q_1 + \delta_2} \cdot \frac{q_{2n}}{q_0}, \quad v_n = -\frac{q_0 q_1}{\delta_2} \cdot \frac{q_{2n+1}}{q_1} \cdot \frac{q_{2n}}{q_0} \quad (4.83)$$

Il a été montré dans [26, 41] que la transformation involutive $\widehat{I}t\widehat{I}$ sur les nouvelles variables (u, v) prend alors une forme simple (*indépendante de tout paramètre*):

$$\widehat{I}t\widehat{I}: \quad (u, v) \longrightarrow (u', v') = \left(\frac{u + v - uv}{v}, \frac{u + v - uv}{u} \right) \quad (4.84)$$

La transformation t est représentée comme suit:

$$t: \quad (u, v) \longrightarrow (u, 1 + \epsilon - v + \alpha u) \quad (4.85)$$

où ϵ et α sont:

$$\epsilon = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}, \quad \alpha = -\frac{(q_2(q_1 + q_3) + \lambda_1)(q_1(q_0 + q_2) + \lambda_2)}{q_1 q_2 \lambda_2} = -\frac{\rho_1 \rho_2}{\lambda_2} \quad (4.86)$$

Pour $\epsilon = 0$, on peut voir que la quantité algébrique:

$$i = \frac{(u-1)(v-1)(v-\alpha u)}{u} \quad (4.87)$$

est un invariant de $k = \widehat{I}t\widehat{I}t$.

On considère la même transformation mais avec $\epsilon \neq 0$, avec les deux variables i et v (et sans perdre aucune généralité, on peut prendre $\alpha = 0$), la transformation devient:

$$\widehat{K} = \widehat{I}t: \quad \begin{cases} i \rightarrow i(1 - \frac{\epsilon}{v})(1 - \frac{\epsilon}{v-1}) \\ v \rightarrow 1 + \frac{i}{v}(1 - \frac{\epsilon}{v-1}) \end{cases} \quad (4.88)$$

Alternativement, on peut aussi choisir à la place de (i, v) , deux autres variables (x, y) telles que:

$$x = \frac{i}{v}(1 - \frac{\epsilon}{v-1}) \quad \text{et:} \quad y = v - \epsilon \quad (4.89)$$

donc, la transformation \widehat{K} devient:

$$\widehat{K}: \quad \begin{cases} x \rightarrow \frac{y(x-\epsilon)}{(x+1)} \\ y \rightarrow x + (1 - \epsilon) \end{cases} \quad (4.90)$$

La transformation sous cette forme présente plusieurs avantages, à cause essentiellement de sa simplicité et de sa symétrie. Elle présente plusieurs possibilités de réduction de

complexité qui peuvent être étudiées par exemple par l'intermédiaire de la méthode de Diller et Favre [40].

4.6. Préservation d'une deux-forme

Il a été montré dans [36, 38, 31, 50] que la transformation birationnelle de CP_2 , $\widehat{K} = \widehat{I}t$, préserve une deux-forme méromorphe [30, 32, 33]:

$$d\mu = \frac{dx \cdot dy}{\rho(x, y)} = \frac{dx \cdot dy}{y - x + 1} \quad (4.91)$$

La préservation de cette deux-forme correspond à l'identité suivante entre le covariant $\rho(x, y) = y - x + 1$ et le Jacobien de la transformation birationnelle \widehat{K} :

$$J(x, y) = \frac{\rho(x', y')}{\rho(x, y)} = \frac{\rho(k_\epsilon(x, y))}{\rho(x, y)} \quad (4.92)$$

La préservation de cette deux-forme signifie que cette transformation birationnelle peut être transformée, par un changement de variables (non rationnel), en une transformation qui préserve les aires (voir [50]).

4.7. Réductions de complexité

La méthode de Diller-Favre [40] peut être appliquée pour déterminer les valeurs du paramètre ϵ lorsque la transformation présente une réduction de complexité.

La méthode consiste à déterminer deux ensembles de points, l'ensemble exceptionnel R et l'ensemble d'indétermination L de la transformation, et à imposer que l'itération des points de R doit tomber dans L pour avoir une réduction de complexité.

- Détermination de L :

La transformation est indéterminée lorsque $\text{numérateur}(K_x)/\text{dénominateur}(K_x)$ est de la forme $0/0$ ou $\text{numérateur}(K_y)/\text{dénominateur}(K_y)$ est de la forme $0/0$.

La solution du système d'équation $(y(x - \epsilon) = 0, x + 1 = 0)$ donne $(x, y) = (-1, 0)$, donc: $L = \{(-1, 0)\}$.

- Détermination de R

Le déterminant de la matrice Jacobienne de la transformation est donnée par:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial K_x}{\partial X} & \frac{\partial K_x}{\partial y} \\ \frac{\partial K_y}{\partial X} & \frac{\partial K_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{y}{1+x} - \frac{y(x-\epsilon)}{(1+x)^2} & \frac{x-\epsilon}{1+x} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{-x + \epsilon}{1 + x}$$

Donc $J = 0$ signifie que $R = \{x = \epsilon\}$.

- L'application du critère de Diller-Favre consiste à imposer que $K(R) \in L$.

En itérant la droite $x = \epsilon$, on a:

$$\begin{aligned} (x_0 = \epsilon, y_0 = y) &\rightarrow (x_1 = 0, y_1 = 1) \rightarrow (x_2 = -\epsilon, y_2 = 1 - \epsilon) \rightarrow \\ &\rightarrow (x_3 = -2\epsilon, y_3 = -2\epsilon + 1) \rightarrow (x_4 = -3\epsilon, y_4 = -3\epsilon + 1) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow (-m\epsilon, 1 - m\epsilon) \end{aligned}$$

donc les valeurs de ϵ qui donnent des réductions de complexités sont telles que:

$$(-m\epsilon, 1 - m\epsilon) = (-1, 0) \quad \text{ce qui donne:} \quad \epsilon = \frac{1}{m}$$

Le premier groupe de transformations à plus faible complexité correspond à $\epsilon = \frac{1}{m}$ (m entier).

Pour tenir compte de la contribution possible du point à l'infini, on va construire la transformation suivante:

$$\begin{aligned} K_x^{(inf)} &= \frac{1}{K_x(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})} = \frac{y(1+x)}{-1+\epsilon x} \\ K_y^{(inf)} &= \frac{1}{K_y(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})} = \frac{x}{-1-(1-\epsilon)x} \end{aligned}$$

Les mêmes calculs fait pour K peuvent être refait pour $K^{(inf)}$, on trouve:

$$L^{(inf)} = \left\{ \left(x = \frac{1}{\epsilon}, y = 0 \right) \right\} \quad \text{et:} \quad R^{(inf)} = \{ x = -1 \}$$

En itérant la droite $x = -1$ on obtient:

$$\begin{aligned} (x_0 = -1, y_0 = y) &\rightarrow (x_1 = 0, y_1 = \frac{-1}{\epsilon}) \rightarrow (x_2 = \frac{-1}{\epsilon}, y_2 = 0) \\ &\rightarrow (x_3 = 0, y_3 = \frac{-1}{2\epsilon - 1}) \rightarrow (x_4 = \frac{-1}{2\epsilon - 1}, y_4 = 0) \rightarrow (x_5 = 0, y_5 = \frac{-1}{3\epsilon - 2}) \\ &\rightarrow \dots \rightarrow (x_{2n-1} = \frac{-1}{n\epsilon - (n-1)}, y_{2n-1} = 0) \rightarrow (x_{2n} = \frac{-1}{n\epsilon - (n-1)}, y_{2n} = 0) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

L'application du critère de Diller-Favre consiste à imposer que $K(R^{(inf)}) \in L^{(inf)}$. Donc Le deuxième groupe de transformations qui ont une réduction de complexité sont ceux qui correspondent à $\epsilon = (m-1)/(m+1)$ avec m entier.

4.8. Les cas intégrables

Les transformations qui ont une plus faible complexité par rapport au cas générique sont celles qui appartiennent soit au premier groupe soit au deuxième groupe de valeurs de ϵ .

Pour que la transformation soit intégrable, une possibilité est que ϵ appartienne au deux groupes à la fois, c'est à dire, ϵ est de la forme $1/m$, (avec m entier) et aussi de la forme $(p-1)/(p+1)$, (avec p entier).

Les couples (m, p) qui vérifient la condition précédente sont:

- $(-1, 0)$ correspondant à $\epsilon = -1$
- $(2, 3)$ correspondant à $\epsilon = 1/2$
- $(3, 2)$ correspondant à $\epsilon = 1/3$
- $(\infty, 1)$ correspondant à $\epsilon = 0$
- $(1, \infty)$ correspondant à $\epsilon = 1$

Les figures ci-dessous montrent des orbites de la transformation pour différentes valeurs de ϵ :

- Cas non intégrable avec ϵ générique ($\epsilon = 0.52$). Dans ce cas on voit des orbites chaotiques.

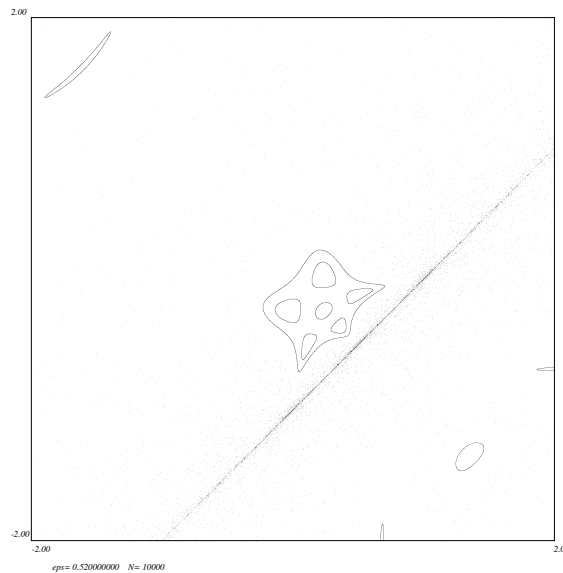


Figure 4.1 Le portrait de phase pour $\epsilon = 0.52$

- Cas non intégrable avec ϵ générique ($\epsilon = 1/4$). Dans ce cas on voit des orbites chaotiques, au voisinage des points fixes on voit aussi des courbes.

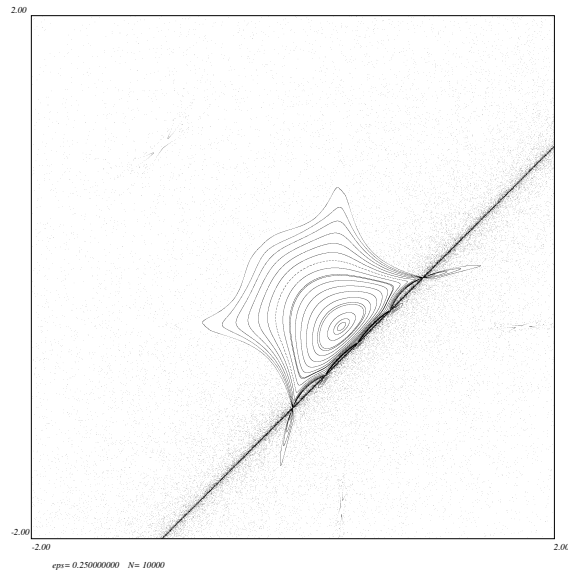


Figure 4.2 Le portrait de phase pour $\epsilon = 1/4$

- Cas intégrables pour $\epsilon = 1/2$ et $\epsilon = 1/3$. Dans ce cas on voit une feuilletage en courbes algébriques dans tout le plan.

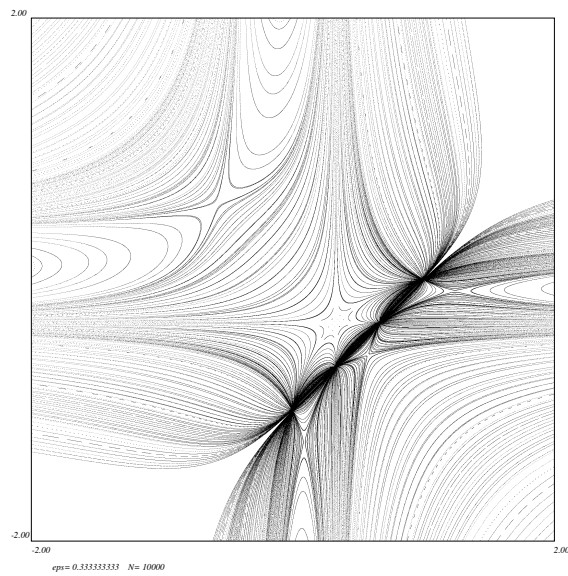


Figure 4.3 Le portrait de phase pour $\epsilon = 1/3$

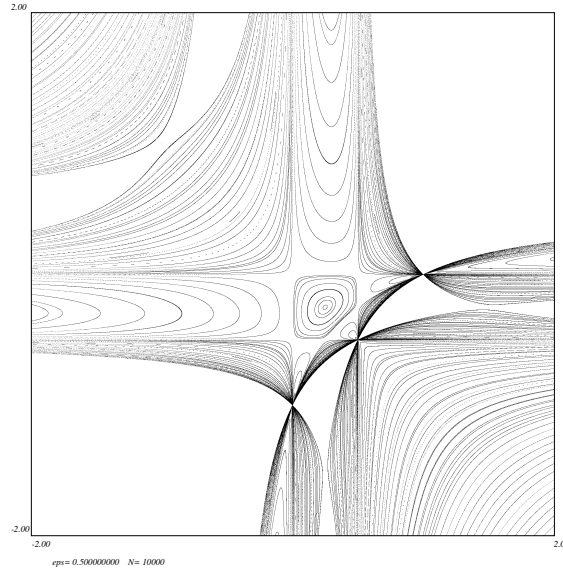


Figure 4.4 Le portrait de phase pour $\epsilon = 1/2$

4.9. Les invariants

L'intégrabilité de la transformation peut être vue graphiquement lorsque le portrait de phase est feuilletée en courbes algébriques (Figures 4.3 et 4.4), seulement ce phénomène n'apparaît que pour des valeurs de ϵ bien définies $-1, 0, 1/2, 1/3, 1$.

L'intégrabilité signifie aussi l'apparition de quantités dépendant des variables de la transformation ne changeant pas lors de l'itération. Elles sont reliées aux équations de ces courbes algébriques. Ces quantités sont appelées invariants de la transformation.

Par définition donc, un invariant $I(x, y)$ est une quantité dépendant de x et y vérifiant: $K(I(x, y)) = I(x, y)$.

4.9.1. Calcul des invariants

1- Pour déterminer les invariants, on peut utiliser la méthode des orbites finies ou méthode des GCD (grand diviseur commun) [41]. La méthode sert à calculer les plus grands diviseurs communs entre les expressions $k_x^n - x$ et $k_y^n - y$ pour $n = 1, 2, \dots$. On utilise la notation $k^n(x, y) = (k_x^n, k_y^n)$.

On continue jusqu'à l'ordre n où apparaît une expression polynômiale de x et y qu'on va appeler dans la suite $p_1(x, y)$.

2- On cherche un autre polynôme $p_0(x, y)$ dont sa transformation par la transformation redonne p_0 , ce polynôme est par exemple $y - x - 1$. On peut aussi choisir le polynôme GCD $p_2(x, y)$ qui suit le premier polynôme $p_1(x, y)$.

3- On calcule $k(p_1(x, y))$ et $k(p_0(x, y))$ et suivant les résultats, on fixe l'invariant $I(x, y)$ comme quotient invariant de ces polynômes.

4- L'expression de $I(x, y)$ n'est pas unique, toutes les combinaisons de $I(x, y)$ du type $(aI(x, y) + b)/(cI(x, y) + d)$ avec a, b, c, d entiers, sont à leur tour des invariants algébriques possibles de la transformation.

4.9.2. Application de la méthode pour $\epsilon = 1/3$

Le premier GCD non trivial n'apparaît qu'à l'ordre 6:

$$\begin{aligned} GCD(k_x - x, k_y - y) &= 1 \\ GCD(k_x^2 - x, k_y^2 - y) &= 1 \\ GCD(k_x^3 - x, k_y^3 - y) &= 1 \\ GCD(k_x^4 - x, k_y^4 - y) &= 1 \\ GCD(k_x^5 - x, k_y^5 - y) &= 1 \\ GCD(k_x^6 - x, k_y^6 - y) &= (3y - 1)(3x + 1)(3yx + x - y + 1) \end{aligned}$$

Donc: $p_1(x, y) = (3y - 1)(3x + 1)(3yx + x - y + 1)$. On voit alors que:

$$K(p_1(x, y)) = \frac{(3x + 1)(3yx + x - y + 1)(3y - 1)(3x - 1)}{3(1 + x)}$$

D'autre part,

$$K(p_0(x, y)) = \frac{(3x - 1)(x - y + 1)}{3(1 + x)}$$

on voit alors que:

$$K\left(\frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)}\right) = -\frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)}$$

Donc on va choisir pour invariant possible:

$$I(1/3)(x, y) = \left(\frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)}\right)^2 = \frac{((3y - 1)(3x + 1)(3yx + x - y + 1))^2}{(y - x - 1)^2} \quad (4.93)$$

Les invariants possibles pour les autres valeurs de ϵ intégrables sont:

$$I(1/2)(x, y) = \frac{(1 + x + 2xy)(1 - y + 2xy)(1 + x + y - 2xy)}{(1 + x - y)^2}$$

$$\begin{aligned}
I(-1)(x, y) &= \frac{1}{(1+x-y)^2} \\
I(0)(x, y) &= 2yx + 1 \\
I(1)(x, y) &= \frac{(yx)^2}{(y-x-1)^2}
\end{aligned}$$

4.10. La transformation pour $\epsilon = 3$

Le comportement de la transformation pour cette valeur de ϵ est très spécial. Au voisinage du point fixe d'ordre 1 qui est $(1, -1)$, au lieu d'obtenir un feuilletage en courbes algébriques, l'itération d'un point quelconque donne trois courbes non-algébriques qu'on va appeler $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

La figure ci-dessous montre ce phénomène. Dans la suite, on donnera une paramétrisation transcendente de ces courbes.

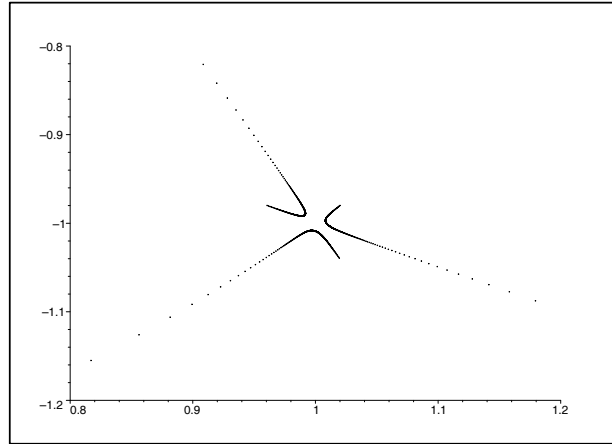


Figure 4.5 Portrait de phase de l'itération du point $(1+0.07, -1+0.07)$ 50000 fois pour $\epsilon = 3$

On remarque que chaque courbe Γ_i est globalement invariante sous la transformation $K^3(x, y)$ et que les transformations K_3 et K_3^2 envoient chacune des courbes l'une dans l'autre.

On utilisant ces remarques, on voit que:

$$K_x^3(t) = x \left(\frac{t}{1+t} \right), \quad K_y^3(t) = y \left(\frac{t}{1+t} \right)$$

avec:

$$\begin{aligned}
K_x^3 &= \frac{(yx - 2 - 3y - 2x)(3 + 15y - 8yx - 3x^2 + yx^2)}{(7 + 3y + 4x - 4yx - 3x^2 + yx^2)(1 + x)} \\
K_y^3 &= \frac{4 + 12y + x - 7yx - 3x^2 + yx^2}{1 - 3y + x + yx}
\end{aligned}$$

On prenant les expressions suivantes pour un point $(x(t), y(t))$ initial:

$$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^N a_n t^n \quad y(t) = -1 + \sum_{n=1}^N b_n t^n$$

En résolvant le système d'équations précédent ordre par ordre, on obtient pour Γ_1 la paramétrisation suivante:

$$\begin{aligned} x_1(t) = & 1 + \frac{2}{3}t + a_2 t^2 + \left(-\frac{10}{81} + 3/2 a_2^2\right) t^3 + \left(-\frac{5}{729} - 5/9 a_2 + 9/4 a_2^3\right) t^4 \\ & + \left(\frac{545}{6561} + \frac{27}{8} a_2^4 - \frac{10}{243} a_2 - 5/3 a_2^2\right) t^5 \\ & + \left(\frac{1085}{78732} + \frac{81}{16} a_2^5 + \frac{2725}{4374} a_2 - \frac{25}{162} a_2^2 - \frac{25}{6} a_2^3\right) t^6 \\ & + \left(\frac{243}{32} a_2^6 - \frac{117935}{1062882} - \frac{75}{8} a_2^4 + \frac{1085}{8748} a_2 + \frac{2725}{972} a_2^2 - \frac{25}{54} a_2^3\right) t^7 \\ & + \left(-\frac{73175}{2125764} - \frac{315}{16} a_2^5 + \frac{729}{64} a_2^7 - \frac{825545}{708588} a_2 + \frac{7595}{11664} a_2^2 + \frac{19075}{1944} a_2^3 - \frac{175}{144} a_2^4\right) t^8 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) = & -1 + \frac{2}{3}t + \left(\frac{4}{9} + a_2\right) t^2 + \left(\frac{14}{81} + 4/3 a_2 + 3/2 a_2^2\right) t^3 + \left(-\frac{31}{729} + \frac{7}{9} a_2 + 3 a_2^2 + 9/4 a_2^3\right) t^4 \\ & + \left(-\frac{631}{6561} + \frac{27}{8} a_2^4 - \frac{62}{243} a_2 + 7/3 a_2^2 + 6 a_2^3\right) t^5 \\ & + \left(\frac{409}{26244} + \frac{81}{16} a_2^5 + \frac{45}{4} a_2^4 - \frac{3155}{4374} a_2 - \frac{155}{162} a_2^2 + \frac{35}{6} a_2^3\right) t^6 \\ & + \left(\frac{81}{4} a_2^5 + \frac{243}{32} a_2^6 + \frac{128683}{1062882} + \frac{105}{8} a_2^4 + \frac{409}{2916} a_2 - \frac{3155}{972} a_2^2 - \frac{155}{54} a_2^3\right) t^7 \\ & + \left(-\frac{35363}{6377292} + \frac{441}{16} a_2^5 + \frac{729}{64} a_2^7 + \frac{567}{16} a_2^6 + \frac{900781}{708588} a_2 + \frac{2863}{3888} a_2^2 - \frac{22085}{1944} a_2^3 - \frac{1085}{144} a_2^4\right) t^8 + \dots \end{aligned}$$

où a_2 est un paramètre d'échelle non pertinent qui n'indique pas le feuilletage des courbes Γ_1 .

On peut facilement montrer que les composantes $x(t)$ et $y(t)$ vérifient les relations suivantes:

$$y\left(a_2, \frac{t}{1+st}\right) = y\left(a_2 + \frac{2}{3}s, t\right), \quad x\left(a_2, \frac{t}{1+st}\right) = x\left(a_2 + \frac{2}{3}s, t\right)$$

Pour cela et sans perdre aucune généralité, on peut choisir n'importe quelle valeur de a_2 , on prend pour simplicité $a_2 = -2/9$, les composantes de Γ_1 deviennent alors:

$$\begin{aligned} x_1(t) = & 1 + \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}t^2 - \frac{4}{81}t^3 + \frac{67}{729}t^4 + \frac{119}{6561}t^5 - \frac{7031}{78732}t^6 - \frac{9004}{531441}t^7 + \frac{498563}{3188646}t^8 + \dots \\ y_1(t) = & -1 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}t^2 - \frac{4}{81}t^3 - \frac{67}{729}t^4 + \frac{119}{6561}t^5 + \frac{7031}{78732}t^6 - \frac{9004}{531441}t^7 - \frac{498563}{3188646}t^8 + \dots \end{aligned}$$

La courbe Γ_2 est obtenu en appliquant K sur Γ_1 , Γ_3 est obtenu en appliquant K sur Γ_2 , les résultats obtenus sont:

$$\begin{aligned} x_2(t) = & 1 - \frac{4}{3}t - \frac{2}{9}t^2 + \frac{2}{81}t^3 + \frac{2}{81}t^4 - \frac{88}{6561}t^5 - \frac{319}{19683}t^6 + \frac{14119}{1062882}t^7 + \frac{141619}{6377292}t^8 + \dots \\ y_2(t) = & -1 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}t^2 - \frac{4}{81}t^3 - \frac{77}{729}t^4 - \frac{1}{6561}t^5 + \frac{889}{8748}t^6 + \frac{14891}{531441}t^7 - \frac{531923}{3188646}t^8 + \dots \\ x_3(t) = & 1 + \frac{2}{3}t - \frac{10}{81}t^3 + \frac{5}{729}t^4 + \frac{545}{6561}t^5 - \frac{1085}{78732}t^6 - \frac{117935}{1062882}t^7 + \frac{73175}{2125764}t^8 + \dots \\ y_3(t) = & -1 - \frac{4}{3}t - \frac{2}{9}t^2 + \frac{2}{81}t^3 + \frac{2}{81}t^4 - \frac{88}{6561}t^5 - \frac{319}{19683}t^6 + \frac{14119}{1062882}t^7 + \frac{141619}{6377292}t^8 + \dots \end{aligned}$$

La relation $y_1(t) = -x_1(-t)$ nous permet de trouver les relation suivantes:

$$\begin{aligned}
& -3x\left(\frac{t}{t+1}\right)x(-t)(x(t))^2 + x\left(\frac{t}{t+1}\right)x(-t)(x(t))^3 - x\left(\frac{t}{t+1}\right)x(-t)x(t) + 3x\left(\frac{t}{t+1}\right)x(-t) \\
& -11x\left(\frac{t}{t+1}\right)x(t) - x\left(\frac{t}{t+1}\right)(x(t))^2 - 7x\left(\frac{t}{t+1}\right) + 3x\left(\frac{t}{t+1}\right)(x(t))^3 + (x(-t))^2(x(t))^3 \\
& -11(x(-t))^2(x(t))^2 - 23x(-t)(x(t))^2 + 5x(-t)(x(t))^3 + 39(x(-t))^2x(t) + 11x(-t)x(t) \\
& -45(x(-t))^2 + 39x(-t) - 6 - 6x(t) + 6(x(t))^2 + 6(x(t))^3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y\left(\frac{t}{t+1}\right)y(t)y(-t) + 3y\left(\frac{t}{t+1}\right)y(t) + y\left(\frac{t}{t+1}\right)y(-t) - y\left(\frac{t}{t+1}\right) + y(t)(y(-t))^2 + 7y(t)y(-t) \\
& + 12y(t) - y(-t) + 4 - 3(y(-t))^2 = 0
\end{aligned}$$

Les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ précédentes sont les solutions de ces deux équations fonctionnelles [51].

CHAPITRE 5

PROPRIÉTÉS DES POINTS FIXES DE LA CLASSE IV

Nous allons analyser dans ce qui suit les propriétés des points fixes de la transformation particulière à deux variables et à deux paramètres ϵ et α appelée classe IV et introduite au chapitre précédent. Cette transformation est associée avec l'action d'un groupe discret non linéaire défini par une transformation birationnelle sur les paramètres d'une matrice $q \times q$, dont l'origine est l'étude des symétries du modèle à vertex en mécanique statistique.

On s'intéressera alors à l'analyse des comportements dynamiques de ces transformations birationnelles obtenues à partir de simples calculs algébriques, en l'occurrence l'inverse de la matrice $q \times q$ et la permutation de quelques éléments de cette dernière.

Ces transformations sont soit intégrables soit faiblement chaotiques. On a vu précédemment, en utilisant un changement de variables assez compliqué, que cette transformation birationnelle de $q^2 - 1$ variables (pour un q arbitraire) peut être vue comme une transformation birationnelle à seulement deux variables avec deux paramètres ϵ et α . Pour des valeurs particulières de ces paramètres, la transformation birationnelle devient intégrable. On peut mieux voir cette intégrabilité par l'analyse des cycles de la transformation dans la suite.

L'ensemble de tous les points fixes d'une transformation nous permet de trouver l'expression exacte de la fonction dynamique zéta qui est rationnelle dans notre cas.

On trouve également une égalité entre la complexité de Arnold et l'exponentielle de l'entropie topologique. La complexité de Arnold et l'entropie topologique sont des quantités qui donnent une "évaluation" du chaos de la transformation. Elles seront discutées dans le Chapitre 6.

Pour la transformation birationnelle de la classe IV qu'on considère, l'analyse de ses cycles montre qu'un ou deux membres de chaque cycle appartiennent à une courbe algébrique bien définie. L'existence de ces courbes algébriques, permet de dériver des polynômes faciles à étudier et dont les solutions donnent toute l'information sur les points fixes.

Par exemple, la trace de la matrice Jacobienne en un point fixe (ou en un cycle) est évaluée sans calculer explicitement les membres des cycles. Pour certaines valeurs de ϵ , les

cycles du même ordre ou d'un ordre différent coïncident avec un point singulier ou non singulier.

Ces fusions et coalescences causent une modification dans le nombre de points fixes. La coïncidence avec des points singuliers cause une réduction de la complexité.

5.1. Définition d'un point fixe

Soit une transformation définie par:

$$(x', y') = K(x, y) = (K_x(x, y), K_y(x, y)) \quad (5.94)$$

On appelle point fixe d'ordre N , un point (x^*, y^*) vérifiant:

$$K^N(x^*, y^*) = (x^*, y^*) \quad (5.95)$$

Les points fixes jouent un rôle très important dans les transformations, ils donnent la structure des orbites au voisinage de ces derniers.

On peut voir cela lorsque $N = 1$. Si on adopte les notations suivantes:

- $X^* = (x^*, y^*)$ point fixe (vérifiant $K(X^*) = X^*$),
 - $X = (x, y)$ point quelconque situé au voisinage du point fixe X^* ,
- et si on définit U par:

$$X = X^* + U, \quad \text{avec } U = (U_x, U_y) \text{ très petit} \quad (5.96)$$

on voit qu'au premier ordre:

$$X_{i+1} = X^* + U_{i+1} = K(X_i) = K(X^* + U_i) \simeq K(X^*) + \left(\frac{\partial K}{\partial X} \right)_{X=X^*} \cdot U_i \quad (5.97)$$

Donc par identification, on aura:

$$U_{i+1} = \left(\frac{\partial K}{\partial X} \right)_{X=X^*} \cdot U_i \quad (5.98)$$

La quantité $\frac{\partial K}{\partial x}$ est appelée la matrice Jacobienne de la transformation. C'est une matrice 2×2 . Elle s'écrit plus explicitement:

$$M = \frac{\partial K}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial K_x}{\partial x} & \frac{\partial K_x}{\partial y} \\ \frac{\partial K_y}{\partial x} & \frac{\partial K_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

L'itération de la transformation K peut être vue comme une suite de multiplication de cette matrice Jacobienne. Ses valeurs propres ω_i et ses vecteurs propres v_i peuvent servir à linéariser la transformation K autour du point fixe X^* .

5.2. Stabilité des points fixes

L'étude de la stabilité du point fixe peut se faire en calculant les valeurs propres ω de la matrice jacobienne:

$$\det(M - \omega I) = 0, \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial K_x}{\partial X} - \omega & \frac{\partial K_x}{\partial y} \\ \frac{\partial K_y}{\partial X} & \frac{\partial K_y}{\partial y} - \omega \end{array} \right] = 0 \quad (5.100)$$

ce qui nous donne:

$$\omega^2 - \omega \operatorname{tr}(M) - \det(M) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(M) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(M)^2 - 4 \det(M)}}{2}$$

avec $\det(M)_{X=X^*} = 1$, donc $\omega_1 \omega_2 = 1$.

Divers cas peuvent se présenter suivant que les valeurs propres sont réelles ou complexes. Nous pouvons ainsi distinguer trois cas:

- $-2 < \operatorname{tr}(M) < 2$: les deux valeurs propres sont complexes, dans l'approximation linéaire l'ensemble des points situés au voisinage du point fixe forment des ellipses, dans ce cas le point fixe est dit point fixe elliptique.
- $\operatorname{tr}(M) > 2$ (resp. $\operatorname{tr}(M) < -2$): les deux valeurs propres sont réelles positives (resp. négatives), dans l'approximation linéaire l'ensemble des points situés au voisinage du point fixe forment des hyperboles, dans ce cas le point fixe est dit point fixe hyperbolique.
- $\operatorname{tr}(M) = -2, +2$: dans ce cas le point fixe est dit point fixe parabolique.

5.3. Les cycles de points fixes

5.3.1. Définition d'un cycle

Un cycle d'ordre N représente l'ensemble des N points fixes d'ordre N :

$$((x, y), K(x, y), \dots, K^{N-1}(x, y))$$

avec $K^N(x, y) = (x, y)$. Un point fixe quelconque de ce cycle peut être utiliser comme représentant du cycle.

Pour la transformation K de la classe IV:

$$K : \begin{cases} x \rightarrow \frac{y(x-\epsilon)}{(x+1)} \\ y \rightarrow x + (1 - \epsilon) \end{cases} \quad (5.101)$$

L'ensemble des points du même cycle vérifient les relations suivantes:

$$\sum_{n=1}^N x_n = \frac{N(\epsilon - 1)}{2}, \quad \sum_{n=1}^N y_n = \frac{-N(\epsilon - 1)}{2}$$

Pour démontrer ces deux résultats, on peut utiliser la récurrence associée à cette transformation:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{(x_{n+1} - \epsilon)(x_n - \epsilon + 1)}{(x_{n+1} + 1)} \\ y_{n+2} &= (1 - \epsilon) + \frac{(y_n - \epsilon)(y_{n+1} - \epsilon)}{(y_{n+1} + \epsilon)} \end{aligned} \quad (5.102)$$

qui donne une relation indépendante de l'itération $y_{n+1} - x_n = 1 - \epsilon$. Cette relation montre que l'évolution de x et y est la même (l'évolution des degrés).

La relation $\sum_{n=1}^N x_n = \frac{N(\epsilon-1)}{2}$ se démontre comme suit:

A partir de la récurrence précédente, on a:

$$x_{n+2}(x_{n+1} + 1) - (x_{n+1} - \epsilon)(x_n - \epsilon + 1) = 0$$

avec: $x_N = x_0$, $x_{N+1} = x_1$, $x_{N+2} = x_2$. Ce qui donne:

$$\sum_{n=1}^N (x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+2} - x_{n+1}x_n + \epsilon x_{n+1} - x_{n+1} + \epsilon x_n - \epsilon^2 + \epsilon) = 0$$

ou encore:

$$\sum_{n=1}^N (x_{n+2}x_{n+1} - x_{n+1}x_n) + \sum_{n=1}^N (x_{n+2} - x_{n+1}) + \epsilon \sum_{n=1}^N (x_{n+1} + x_n) + \sum_{n=1}^N (\epsilon - \epsilon^2) = 0$$

qui devient en utilisant les définitions de points fixes:

$$x_{N+2}x_{N+1} - x_2x_1 + x_{N+2} - x_2 + 2\epsilon \sum_{n=1}^N x_n + \epsilon(x_{N+1} - x_1) + N\epsilon(1 - \epsilon) = 0$$

Donc:

$$\sum_{n=1}^N x_n = N\left(\frac{\epsilon - 1}{2}\right)$$

De la même façon on peut démontrer que:

$$\sum_{n=1}^N y_n = \frac{-N(\epsilon - 1)}{2}$$

5.3.2. Matrice Jacobienne d'un cycle d'ordre N

Par définition, la matrice Jacobienne d'un cycle d'ordre N est la matrice M_{cycle} d'ordre 2×2 qui sert à linéariser la transformation K^N . En utilisera les même notations que précédemment: $X^* = (x^*, y^*)$ est un point fixe d'ordre N (c'est à dire vérifiant $K^N(X^*) = X^*$) et $X = (x, y)$ est un point quelconque situé au voisinage de X^* .

On pose:

$$X = X^* + U, \quad U = (U_x, U_y) \text{ est très petit} \quad (5.103)$$

En appliquant la transformation K , on trouve:

$$\begin{aligned} K(X) &= K(X^* + U) \simeq K(X^*) + \left(\frac{\partial K}{\partial X} \right)_{X=X^*} \cdot U \\ &= K(X^*) + M(X^*) \cdot U \end{aligned} \quad (5.104)$$

En appliquant encore un fois la transformation K , on trouve:

$$\begin{aligned} K^2(X) &= K(K(X^*) + M(X^*) \cdot U) \\ &\simeq K^2(X^*) + M(K(X^*)) \cdot M(X^*) \cdot U \end{aligned}$$

En continuant jusqu'à K^N , on voit que la matrice Jacobienne d'un cycle s'obtient en multipliant successivement les matrices Jacobiennes aux N points fixes entre elles dans l'ordre suivant:

$$M_{cycle} = M(K^{N-1}(X^*)) \cdots M(K(X^*)) \cdot M(X^*) \quad (5.105)$$

5.4. Etude des points fixes

Pour la transformation K de la classe IV, l'application directe de la définition d'un point fixe d'ordre N :

$$K^N(x, y) = (x, y)$$

nous permet de trouver les expressions analytiques de ces points seulement pour les petits ordres (inférieurs à sept).

5.4.1. Analyse numérique

Calculons numériquement comme exemple les premiers points fixes (jusqu'à l'ordre 9) pour la valeur de $\epsilon = -5/1000$.

Les résultats jusqu'à l'ordre neuf sont les suivants:

- un cycle d'ordre 1: $(-.502, .502)$
- un cycle d'ordre 3: $(1.000, -1.000), (-.502, 2.005), (-2.005, .502)$
- un cycle d'ordre 4: $(-1.713, .296), (.708, -.708), (-.296, 1.713), (-.708, .708)$
- deux cycle d'ordre 5:
 - premier cycle: $(-5.215, .502), (.621, -4.210), (-1.626, 1.626), (4.210, -.621), (-.502, 5.215)$
 - deuxième cycle: $(-.765, .502), (-1.626, .239), (.621, -.621), (-.239, 1.626), (-.502, .765)$
- deux cycle d'ordre 6:
 - premier cycle: $(-1.586, .215), (.581, -.581), (-.215, 1.586), (-.426, .789, (-.578, .578), (-.789, .426)$
 - deuxième cycle: $(-.048, 20.696), (-.956, .956), (-20.696, .048), (.0514, -19.691), (-1.056, 1.056), (19.691, -.051)$
- Quatre cycles d'ordre 7:
 - premier cycle: $(-1.019, 1.019), (53.373, -.014), (-.014, 54.378), (-.502, .990), (-.990, .502), (-54.378, .014), (.014, -53.373)$
 - deuxième cycle: $(2.251, -2.251), (-1.562, 3.256), (9.013, -.557), (-.502, 10.018), (-10.018, .502), (.557, -9.013), (-3.256, 1.562)$
 - troisième cycle: $(.559, -.559), (-.202, 1.564), (-.388, .802), (-.502, .616), (-.616, .502), (-.802, .388), (-1.564, .202)$
 - Quatrième cycle: $(-.797, .797), (-3.121, .207), (.304, -2.116), (-.502, 1.309), (-1.309, .502), (2.116, -.304), (-.207, 3.121)$
- cinq cycles d'ordre 8:
 - premier cycle: $(.075, -6.691), (-.502, 1.080), (-1.080, .502), (6.691, -.075), (-.065, 7.696), (-.502, .939), (-.939, .502), (-7.696, .065)$
 - deuxième cycle: $(-2.637, 1.015), (1.632, -1.632), (-1.015, 2.637), (167.838, -.010), (-.010, 168.843), (-.994, .994), (-168.843, .010), (.010, -167.838)$
 - troisième cycle: $(-2.304, .736), (1.299, -1.299), (-.736, 2.304), (-6.407, .268), (.317, -5.402), (-1.322, 1.322), (5.402, -.317), (-.268, 6.407)$
 - Quatrième cycle: $(-1.551, .195), (.546, -.546), (-.195, 1.551), (-.366, .809), (-.462, .638), (-.542, .542), (-.638, .462), (-.809, .366)$
 - cinquième cycle: $(-.386, .994), (-.618, .618), (-.994, .386), (-65.003, .010), (.011, -63.998), (-1.016, 1.016), (63.998, -.011), (-.010, 65.003)$
- huit cycles d'ordre 9:
 - premier cycle: $(-69.470, .009), (.009, -68.465), (-1.014, 1.014), (68.465, -.009), (-.009, 69.470), (-.338, .995), (-.502, .666), (-.666, .502), (-.995, .338)$
 - deuxième cycle: $(-5.417, 1.539), (1.886, -4.412), (-2.891, 2.891), (4.412, -1.886), (-1.539, 5.417), (15.401, -.534), (-.502, 16.406), (-16.406, .502), (.534, -15.401)$
 - troisième cycle: $(.270, -1.589), (-.344, 1.275), (-.660, .660), (-1.275, .344), (1.589, -.270), (-.166, 2.594), (-.502, .838), (-.838, .502), (-2.594, .166)$
 - Quatrième cycle: $(-.814, .352), (-1.543, .190), (.538, -.538), (-.190, 1.543), (-.352, .814), (-.438, .652), (-.502, .566), (-.566, .502), (-.652, .438)$
 - cinquième cycle: $(-.030, 14.643), (-.390, .974), (-.614, .614), (-.974, .390), (-14.643, .030), (.033, -13.638), (-.502, 1.038), (-1.038, .502), (13.638, -.033)$
 - sixième cycle: $(.007, -214.941), (-2.633, 1.012), (1.628, -1.628), (-1.012, 2.633), (214.941, -.007), (-.007, 215.946), (-.502, .997), (-.997, .502), (-215.946, .007)$
 - septième cycle: $(-1.089, .926), (11.177, -.084), (-.078, 12.182), (-.964, .926), (-25.125, .040), (.042, -24.120), (-1.089, 1.047), (12.684, -.084), (-.0783, 13.689)$
 - huitième cycle: $(-1.047, 1.089), (24.120, -.042), (-.040, 25.125), (-.926, .964), (-12.182, .078), (.084, -11.177), (-.926, 1.089), (-13.689, .078), (.084, -12.684)$

L'analyse de l'ensemble de ces points fixes, pour les ordres inférieurs à huit, nous montre qu'il existe toujours un représentant au minimum de chaque cycle qui se trouve sur la droite $y = -x$ (pour N impair un représentant et pour N pair deux représentants). Ils seront appelés cycles de type P dans la suite.

A partir de l'ordre huit, apparaît une nouvelle catégorie de cycle dont au moins un représentant se trouve soit sur la droite $y = -(\epsilon - 1)/2$, soit sur la droite $x = (\epsilon - 1)/2$. Ils seront appelés cycles de type Q .

A partir de l'ordre neuf une autre catégorie de points fixes plus générale apparaît. Ils seront appelés cycles de type R .

Dans la suite, on supposera pour chaque ordre, que les cycles sont de ces trois types seulement. On construira des polynômes ($P_N(x, \epsilon)$, $Q_N(x, \epsilon)$ et $R_N(x, \epsilon)$) dont leurs solutions sont les représentants de ces cycles. Une démonstration rigoureuse de cette supposition reste à faire.

5.4.2. Les polynômes $P_N(x, \epsilon)$

Voici la liste des premiers polynômes $P_N(x, \epsilon)$ (N : indique l'ordre du cycle) dont les solutions sont les représentants des cycles d'ordre N et qui se trouvent sur la droite $y = -x$. Ces polynômes ont été trouvés par un programme Maple:

$$\begin{aligned}
P_1(x, \epsilon) &= 2x - (\epsilon - 1) \\
P_3(x, \epsilon) &= x - 1 \\
P_4(x, \epsilon) &= 2x^2 + (\epsilon - 1) \\
P_5(x, \epsilon) &= x^2 - (\epsilon - 1)x + (2\epsilon - 1) \\
P_6(x, \epsilon) &= 3x^4 - 6(\epsilon - 1)x^3 + (3\epsilon^2 - \epsilon + 2)x^2 - 2(\epsilon^2 - 4\epsilon + 1)x + (\epsilon^3 - 3\epsilon^2 + 4\epsilon - 1) \\
P_7(x, \epsilon) &= x^4 - (\epsilon + 1)x^3 + (7\epsilon - 3)x^2 - \epsilon(\epsilon + 1)x + (3\epsilon^2 - 5\epsilon + 1) \\
P_8(x, \epsilon) &= 2x^8 - 2(3\epsilon - 1)x^7 + 2(3\epsilon^2 + 7\epsilon - 4)x^6 - 2(\epsilon^3 + 20\epsilon^2 - 20\epsilon + 5)x^5 \\
&\quad + (32\epsilon^3 - 19\epsilon^2 - 16\epsilon + 7)x^4 - (8\epsilon^4 + 21\epsilon^3 - 69\epsilon^2 + 57\epsilon - 13)x^3 \\
&\quad + 2(8\epsilon^4 - 22\epsilon^3 + 14\epsilon^2 - 3\epsilon + 1)x^2 - (2\epsilon^5 - 4\epsilon^4 - 17\epsilon^3 + 35\epsilon^2 - 23\epsilon + 3)x \\
&\quad + (2\epsilon^5 - 8\epsilon^4 + 18\epsilon^3 - 17\epsilon^2 + 8\epsilon - 1) \\
P_9(x, \epsilon) &= x^6 - 3(\epsilon - 1)x^5 + (3\epsilon^2 - 2 + 6\epsilon)x^4 - (20\epsilon^2 + \epsilon^3 + 8 - 33\epsilon)x^3 + (-14\epsilon^2 - 3 + 12\epsilon^3 \\
&\quad + 12\epsilon)x^2 - (18\epsilon + 7\epsilon^3 - 2 + \epsilon^4 - 28\epsilon^2)x + (4\epsilon^4 - 13\epsilon^3 + 18\epsilon^2 - 9\epsilon + 1) \\
P_{10}(x, \epsilon) &= 5x^{16} - 10(3\epsilon - 1)x^{15} + 5(15\epsilon^2 + 11\epsilon - 8)x^{14} - 10(10\epsilon^3 + 41\epsilon^2 - 40\epsilon + 9)x^{13} \\
&\quad + (75\epsilon^4 + 915\epsilon^3 - 578\epsilon^2 - 162\epsilon + 96)x^{12} - (30\epsilon^5 + 1010\epsilon^4 + 753\epsilon^3 - 2817\epsilon^2 + 1703\epsilon - 307)x^{11} \\
&\quad + (5\epsilon^6 + 605\epsilon^5 + 2633\epsilon^4 - 5866\epsilon^3 + 3262\epsilon^2 - 436\epsilon - 17)x^{10} - (190\epsilon^6 + 2726\epsilon^5 - 4180\epsilon^4 \\
&\quad - 2003\epsilon^3 + 5891\epsilon^2 - 3071\epsilon + 471)x^9 + (25\epsilon^7 + 1368\epsilon^6 + 205\epsilon^5 - 9416\epsilon^4 + 13868\epsilon^3 - 8030\epsilon^2 \\
&\quad + 2071\epsilon - 223)x^8 - (337\epsilon^7 + 1863\epsilon^6 - 8531\epsilon^5 + 9023\epsilon^4 - 403\epsilon^3 - 4397\epsilon^2 + 2271\epsilon - 295)x^7 \\
&\quad + (33\epsilon^8 + 1008\epsilon^7 - 2775\epsilon^6 - 1719\epsilon^5 + 12210\epsilon^4 - 15558\epsilon^3 + 9106\epsilon^2 - 2582\epsilon + 275)x^6 \\
&\quad - (212\epsilon^8 + 140\epsilon^7 - 4379\epsilon^6 + 10916\epsilon^5 - 11135\epsilon^4 + 4762\epsilon^3 - 237\epsilon^2 - 286\epsilon + 31)x^5 \\
&\quad + (15\epsilon^9 + 283\epsilon^8 - 1702\epsilon^7 + 2700\epsilon^6 + 651\epsilon^5 - 6480\epsilon^4 + 8033\epsilon^3 - 4572\epsilon^2 \\
&\quad + 1222\epsilon - 112)x^4 - (51\epsilon^9 - 154\epsilon^8 - 546\epsilon^7 + 3356\epsilon^6 - 6738\epsilon^5 + 7186\epsilon^4 - 4489\epsilon^3 \\
&\quad + 1639\epsilon^2 - 340\epsilon + 31)x^3 + (2\epsilon^{10} + 31\epsilon^9 - 309\epsilon^8 + 1043\epsilon^7 - 1583\epsilon^6 + 835\epsilon^5 \\
&\quad + 576\epsilon^4 - 1127\epsilon^3 + 664\epsilon^2 - 161\epsilon + 11)x^2 \\
&\quad - (4\epsilon^{10} - 23\epsilon^9 + 22\epsilon^8 + 201\epsilon^7 - 882\epsilon^6 + 1705\epsilon^5 - 1876\epsilon^4 + 1260\epsilon^3 - 497\epsilon^2 + 101\epsilon - 7)x \\
&\quad + (-517\epsilon^5 - 237\epsilon^3 + 81\epsilon^8 + 81\epsilon^2 + 1 - 226\epsilon^7 + 430\epsilon^4 - 15\epsilon + 417\epsilon^6 - 18\epsilon^9 + 2\epsilon^{10})
\end{aligned}$$

Voici les cycles d'ordre 1 et 3 comme exemple :

$$\left(\frac{\epsilon - 1}{2}, \frac{1 - \epsilon}{2} \right)$$

et

$$(1, -1) \rightarrow \left(\frac{\epsilon - 1}{2}, 2 - \epsilon \right) \rightarrow \left(\epsilon - 2, \frac{1 - \epsilon}{2} \right)$$

Un représentant du cycle 3 est le point $(1, -1)$.

5.4.3. Les polynômes $Q_N(x, \epsilon)$

Les solutions des polynômes $Q_N(x, \epsilon)$ sont les représentants des cycles du type Q et qui se trouvent sur la droite $y = (1 - \epsilon)/2$ ou $x = (\epsilon - 1)/2$.

Voici la liste des premiers polynômes $Q_N(x, \epsilon)$:

$$\begin{aligned} Q_1(x, \epsilon) &= 2x - (\epsilon - 1) \\ Q_3(x, \epsilon) &= x - (\epsilon - 2) \\ Q_5(x, \epsilon) &= (3\epsilon - 1)x^2 - 2(2\epsilon - 1)(\epsilon - 3)x + (\epsilon^3 - 5\epsilon^2 + 10\epsilon - 4) \\ Q_7(x, \epsilon) &= (3\epsilon - 1)^2 x^4 - (3\epsilon - 1)(9\epsilon^2 - 26\epsilon + 13)x^3 + (\epsilon - 1)(29\epsilon^3 - 126\epsilon^2 + 149\epsilon - 32)x^2 \\ &\quad - (13\epsilon^5 - 89\epsilon^4 + 235\epsilon^3 - 295\epsilon^2 + 172\epsilon - 28)x + (2\epsilon^6 - 15\epsilon^5 + 56\epsilon^4 - 103\epsilon^3 + 100\epsilon^2 - 52\epsilon + 8) \\ Q_8(x, \epsilon) &= (3\epsilon - 1)x^2 - 2(2\epsilon^2 - 5\epsilon + 1)x + (\epsilon^3 - 4\epsilon^2 + 6\epsilon - 1) \\ Q_9(x, \epsilon) &= (-3 + 5\epsilon)(-1 + 3\epsilon)^3 x^6 - 2(28\epsilon^3 - 99\epsilon^2 + 98\epsilon - 31)(-1 + 3\epsilon)^2 x^5 \\ &\quad + (-1 + 3\epsilon)(250\epsilon^5 - 1538\epsilon^4 + 3391\epsilon^3 - 3427\epsilon^2 + 1539\epsilon - 223)x^4 \\ &\quad - 4(142\epsilon^7 - 3577\epsilon^2 + 3996\epsilon^5 - 1193\epsilon^6 + 920\epsilon - 86 + 6726\epsilon^3 - 6912\epsilon^4)x^3 \\ &\quad + (-3056\epsilon + 231\epsilon^8 + 12550\epsilon^2 + 268 - 25984\epsilon^3 + 31147\epsilon^4 - 22688\epsilon^5 + 9812\epsilon^6 - 2296\epsilon^7)x^2 \\ &\quad - 2(-4046\epsilon^6 + 7240\epsilon^5 + 6088\epsilon^3 + 1376\epsilon^7 + 624\epsilon + 24\epsilon^9 - 52 - 267\epsilon^8 - 2688\epsilon^2 - 8315\epsilon^4)x + \\ &\quad (16 + 287\epsilon^8 + 4\epsilon^{10} + 900\epsilon^2 + 2326\epsilon^6 - 3416\epsilon^5 - 48\epsilon^9 - 200\epsilon - 1024\epsilon^7 - 2216\epsilon^3 + 3387\epsilon^4) \end{aligned}$$

Nous remarquons que les polynômes $Q_N(x, \epsilon)$ d'ordre inférieur à huit redonnent les mêmes cycles donnés par $P_N(x, \epsilon)$ (la solution de $Q_n(x, \epsilon)$ est un élément du cycle donné par $P_N(x, \epsilon)$).

Le polynôme $Q_8(x, \epsilon)$ donne un nouveau cycle en plus des cycles donnés par $P_N(x, \epsilon)$. On peut dans ce cas donner une expression analytique en fonction de ϵ des points fixes de ce cycle:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \left(\frac{R_1 + R_2}{3\epsilon - 1}, -x_8 \right) \\ (x_2, y_2) &= \left(\frac{(\epsilon - 1)(R_3 - R_2)}{4\epsilon(\epsilon - 1) + R_2}, -x_7 \right) \\ (x_3, y_3) &= \left(\frac{\epsilon(\epsilon + 1) + R_2}{3\epsilon - 1}, -x_6 \right) \\ (x_4, y_4) &= \left(\frac{\epsilon - 1}{2}, -x_5 \right) \\ (x_5, y_5) &= \left(\frac{R_1 - R_2}{3\epsilon - 1}, -x_4 \right) \\ (x_6, y_6) &= \left(\frac{(\epsilon - 1)(R_3 + R_2)}{4\epsilon(\epsilon - 1) - R_2}, -x_3 \right) \\ (x_7, y_7) &= \left(\frac{\epsilon(\epsilon + 1) - R_2}{3\epsilon - 1}, -x_2 \right) \\ (x_8, y_8) &= (x_4, -x_1) \end{aligned}$$

avec $R_1 = 2\epsilon^2 - 5\epsilon + 1$, $R_2 = \sqrt{\epsilon(\epsilon - 1)(\epsilon^2 - 6\epsilon + 1)}$ et $R_3 = \epsilon^2 + 4\epsilon - 1$.

Un élément du cycle est obtenu en résolvant $Q_8(x, \epsilon)$ et les autres points fixes par application directe de la transformation sur le premier point.

Conclusion sur les cycles de type P et Q

Tous les cycles donnés par les polynômes $P_N(x, \epsilon)$ ou $Q_N(x, \epsilon)$ sont organisés par les trois droites $x + y = 0$, $y = (1 - \epsilon)/2$ et $x = (\epsilon - 1)/2$ comme suit:

- pour N impair:

Les polynômes $P_N(x, \epsilon)$ et $Q_N(x, \epsilon)$ sont équivalents, les cycles donnés par ces deux derniers sont les mêmes.

- pour N pair ($N < 8$):

Les polynômes $P_N(x, \epsilon)$ et $Q_N(x, \epsilon)$ sont équivalents.

- pour N pair ($N > 8$):

Les polynômes $Q_N(x, \epsilon)$ donnent de nouveaux cycles.

5.4.4. Les polynômes $R_N(x, \epsilon)$

A partir de l'ordre neuf, il apparaît une nouvelle catégorie de cycles ne pouvant être ni de type P ni de type Q . En posant $X = x + (1 - \epsilon)/2$, voici par exemple la forme du polynôme donnant tous les x associés à un cycle d'ordre 9 de type R :

$$\begin{aligned}
R_9(x) = & \epsilon^3(2\epsilon - 1)^3(3\epsilon - 1)^4 X^{18} + \epsilon^2(\epsilon - 1)C_{98}(3\epsilon - 1)^2(2\epsilon - 1)^2 X^{16} \\
& + \epsilon(2\epsilon - 1)C_{97}X^{14} + C_{96}X^{12} + C_{95}X^{10} + C_{94}X^8 + C_{93}X^6 \\
& + C_{92}(1 + \epsilon)^2 X^4 + C_{91}(3\epsilon - 1)^2(\epsilon - 1)^2(1 + \epsilon)^4 X^2 \\
& + C_{90}(3\epsilon - 1)^4(\epsilon - 1)^4(1 + \epsilon)^6
\end{aligned} \tag{5.106}$$

Les C_{9i} sont des polynôme en ϵ . Les 18 solutions x_i de ce polynôme représentent les deux cycles d'ordre 9 de type R et sont tels que si un cycle est donné par:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow (x_3, y_3) \rightarrow (x_4, y_4) \rightarrow (x_5, y_5) \rightarrow \\
(x_6, y_6) \rightarrow (x_7, y_7) \rightarrow (x_8, y_8) \rightarrow (x_9, y_9)
\end{aligned}$$

le deuxième est:

$$\begin{aligned}
(-y_1, -x_1) \rightarrow (-y_9, -x_9) \rightarrow (-y_8, -x_8) \rightarrow (-y_7, -x_7) \rightarrow (-y_6, -x_6) \rightarrow \\
(-y_5, -x_5) \rightarrow (-y_4, -x_4) \rightarrow (-y_3, -x_3) \rightarrow (-y_2, -x_2)
\end{aligned}$$

Plus de détails sur ce type de cycles sont donnés dans [52, 53].

5.5. Analyse des points fixes

On peut étudier le comportement des cycles en fonction de la valeur de ϵ . Pour cela, les graphes des polynômes $P_N(x, \epsilon)$ et $Q_N(x, \epsilon)$ sont d'une grande utilité. Sur ces graphes, l'axe horizontal représente ϵ et l'axe vertical représente l'abscisse x du point fixe d'ordre N , représentant du cycle, solution du polynôme $P_N(x, \epsilon)$ ou $Q_N(x, \epsilon)$ pour chaque valeur de ϵ . Chaque valeur de x correspond à un cycle (voir Figure 5.1).

5.5.1. Fusions et coalescences des points fixes

On appliquant Maple, les solutions du résultant $(P_N(x, \epsilon), P_M(x, \epsilon), x)$ (c'est à dire en éliminant x entre $P_N(x, \epsilon)$ et $P_M(x, \epsilon)$) nous donnent les valeurs de ϵ lors de la coïncidence entre un cycle d'ordre N et un cycle d'ordre M . Ils sont donnés par le tableau ci-dessous.

	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
P_1	3	1, -1	(1)	$-1, \frac{1}{3}$	-1, (2)	-1, (3)	-1, (4)	-1, (5)	-1, (6)
P_3		-1	-1	-1, (7)	1, -1	1, -1	-1, (8)	1, -1	1, -1
P_4			$-1, \frac{1}{2}$	$-1, \frac{1}{2}$	$-1, \frac{1}{2}$	$-1, \frac{1}{2}, (9)$	$-1, \frac{1}{2}$	$-1, \frac{1}{2}$	$-1, \frac{1}{2}$
P_5				$-1, \frac{1}{2}$	$-1, \frac{1}{2}$	$-1, 1, \frac{1}{2}$	$-1, 1, \frac{1}{2}$	$-1, 1, \frac{1}{2}, (10)$	$-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
P_6					$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
P_7						$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$	$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$	$-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$
P_8							$-1, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$	$-1, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$	$-1, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$
P_9								$-1, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$	$-1, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$
P_{10}									$-1, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$

Les chiffres dans le tableau représentent le polynômes suivants:

$$\begin{aligned}
 (1) &= \epsilon^2 - 10\epsilon + 5 \\
 (2) &= \epsilon^3 - 21\epsilon^2 + 35\epsilon - 7 \\
 (3) &= \epsilon^2 - 6\epsilon + 1 \\
 (4) &= \epsilon^3 - 33\epsilon^2 + 27\epsilon - 3 \\
 (5) &= 5\epsilon^2 - 10\epsilon + 1 \\
 (6) &= \epsilon^5 - 55\epsilon^4 + 330\epsilon^3 - 462\epsilon^2 + 165\epsilon - 11 \\
 (7) &= \epsilon^2 - 3\epsilon + 8 \\
 (8) &= \epsilon^3 - 4\epsilon^2 + 9\epsilon - 2 \\
 (9) &= 18\epsilon^3 - 29\epsilon^2 + 16\epsilon - 1 \\
 (10) &= \epsilon^8 - 26\epsilon^7 + 343\epsilon^6 - 2052\epsilon^5 + 6367\epsilon^4 - 7178\epsilon^3 + 3625\epsilon^2 - 824\epsilon + 64
 \end{aligned}$$

En analysant ce tableau, nous remarquons que les valeurs de ϵ lors de la coïncidence sont soit de la forme $1/m$, soit solutions des polynômes en ϵ notés (1) , (2) , ...

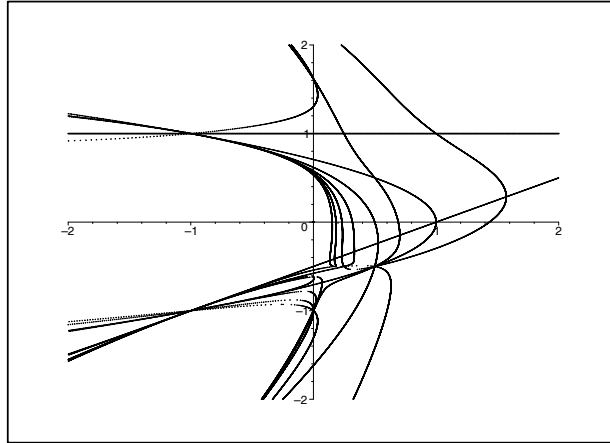
Les cas ϵ solutions des polynômes notés (1) , (2) , ... apparaissent lorsque N/M est un entier (N, M ordre des cycles).

Tous les points fixes d'ordre N coïncident avec le point fixe d'ordre 1 pour les valeurs de ϵ solutions des polynômes donnés ci-dessus, (ces polynômes sont reliés aux polynômes bien connus de Tchebyshev). Leurs solutions sont:

$$\epsilon = \frac{1 - \cos(2\pi M/N)}{1 + \cos(2\pi M/N)} \quad (5.107)$$

avec M un entier inférieur à N .

Les figures ci-dessous montre ce phénomène de fusions et de coalescences de points fixes.



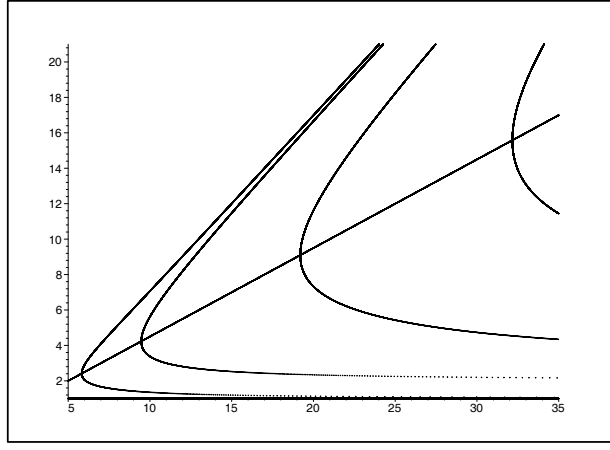


Figure 5.1 Courbes algébriques de $(p_1, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ et $p_9)$

5.5.2. Stabilité des points fixes

La stabilité d'un point fixe d'ordre N est peut être étudié en calculant la trace t de la matrice Jacobienne du cycle associé.

Les polynômes $T_N^P(t, \epsilon)$, (resp. $T_N^Q(t, \epsilon)$ et $T_N^R(t, \epsilon)$) dont la solution donne t , peuvent être construits en éliminant x entre $(tr(M) - t)$ et P_N (resp. Q_N ou R_N) ou pratiquement en calculant $\text{Resultant}((tr(M) - t), P_N, x)$ en utilisant Maple.

Les polynômes $T_N^P(t, \epsilon)$

Voici la liste des polynômes $T_N^P(t, \epsilon)$ dont la solution représente $t(\epsilon)$ des premiers points fixes solutions des polynômes P_N .

$$\begin{aligned}
T_1(t, \epsilon) &= (\epsilon + 1)t + 2(-1 + \epsilon) \\
T_3(t, \epsilon) &= -2(-1 + \epsilon)(\epsilon + 1)t + 3\epsilon^3 - 14\epsilon^2 + 27\epsilon - 4 \\
T_4(t, \epsilon) &= (2\epsilon - 1)(1 + \epsilon)^2 t - 68\epsilon^3 + 122\epsilon^2 - 64\epsilon + 2 \\
T_5(t, \epsilon) &= -4(2\epsilon - 1)(3\epsilon - 1)^2(-1 + \epsilon)^2(\epsilon + 1)^4 t^2 - 2(-1 + \epsilon)(3\epsilon - 1) \cdot \\
&\quad (\epsilon + 1)(\epsilon^8 - 33\epsilon^7 + 357\epsilon^6 - 2301\epsilon^5 + 5547\epsilon^4 - 5395\epsilon^3 + 2343\epsilon^2 - 399\epsilon + 8) t \\
&\quad + (-1596\epsilon + 16 + 29689\epsilon^2 - 966980\epsilon^7 + 1572786\epsilon^6 + 713809\epsilon^4 - 204702\epsilon^3 \\
&\quad + 297850\epsilon^8 - 1400176\epsilon^5 - 238\epsilon^{11} - 50308\epsilon^9 + 4725\epsilon^{10} + 5\epsilon^{12}) \\
T_6(t, \epsilon) &= (-1 + 4\epsilon)(2\epsilon - 1)^2(\epsilon + 1)^6 t^2 \\
&\quad - 4(2\epsilon - 1)(332\epsilon^6 - 730\epsilon^5 + 1465\epsilon^4 - 1656\epsilon^3 + 778\epsilon^2 - 150\epsilon + 9)(\epsilon + 1)^2 t \\
&\quad + (-68 + 11560\epsilon - 155100\epsilon^2 + 884608\epsilon^3 - 2684412\epsilon^4 + 4606744\epsilon^5 - 4453796\epsilon^6 \\
&\quad + 2349872\epsilon^7 - 668864\epsilon^8 + 110224\epsilon^9) \\
T_7(t, \epsilon) &= -64\epsilon^2(4\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)(5\epsilon - 1)(3\epsilon - 1)^4(\epsilon - 1)^5(\epsilon + 1)^{12} t^4 \\
&\quad - 8(656\epsilon^{15} - 37156\epsilon^{14} + 367408\epsilon^{13} - 1944672\epsilon^{12} + 5979435\epsilon^{11} - 10961543\epsilon^{10} \\
&\quad + 14068117\epsilon^9 - 13740837\epsilon^8 + 9661214\epsilon^7 - 4515338\epsilon^6 + 1351770\epsilon^5 - 254634\epsilon^4 + 29623\epsilon^3 \\
&\quad - 2075\epsilon^2 + 81\epsilon - 1)(3\epsilon - 1)^3(\epsilon - 1)^3(\epsilon + 1)^7 t^3 \\
&\quad - 4(704\epsilon^{22} - 40328\epsilon^{21} + 1364962\epsilon^{20} - 29482635\epsilon^{19} + 484516800\epsilon^{18} \\
&\quad - 4305848579\epsilon^{17} + 22678279172\epsilon^{16} - 78182396204\epsilon^{15} + 189100712528\epsilon^{14} \\
&\quad - 333122572780\epsilon^{13} + 435758433180\epsilon^{12} - 427033851370\epsilon^{11} + 313999374192\epsilon^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -172656913866\epsilon^9 + 70528635200\epsilon^8 - 21189679164\epsilon^7 + 4610016240\epsilon^6 - 708311860\epsilon^5 \\
& + 73748018\epsilon^4 - 4847139\epsilon^3 + 176336\epsilon^2 - 2699\epsilon + 12)(3\epsilon - 1)^2(\epsilon - 1)^2(\epsilon + 1)^4 t^2 \\
& - 4(\epsilon - 1)(3\epsilon - 1)(\epsilon + 1)(32\epsilon^{29} - 4952\epsilon^{28} + 339612\epsilon^{27} - 14136758\epsilon^{26} \\
& + 389128759\epsilon^{25} - 7422818295\epsilon^{24} + 99668866855\epsilon^{23} - 970752701007\epsilon^{22} \\
& + 6843044943229\epsilon^{21} - 34979510216177\epsilon^{20} + 131321341283701\epsilon^{19} \\
& - 368342792427207\epsilon^{18} + 784431235559434\epsilon^{17} - 1285355454518942\epsilon^{16} \\
& + 1637259871199366\epsilon^{15} - 1633208365813094\epsilon^{14} + 1281829342407770\epsilon^{13} \\
& - 793256399871130\epsilon^{12} + 386921733354246\epsilon^{11} - 148287257124452\epsilon^{10} \\
& + 44370533197563\epsilon^9 - 10257040157283\epsilon^8 + 1802211215907\epsilon^7 - 234787789083\epsilon^6 \\
& + 21831589433\epsilon^5 - 1364061453\epsilon^4 + 51835673\epsilon^3 - 1015887\epsilon^2 + 8852\epsilon - 24)t \\
& + (-64 - 180914902\epsilon^3 + 32944\epsilon - 55033202 + 52345324393174\epsilon^7 - 4895592247878\epsilon^6 \\
& - 14568777576\epsilon^4 + 393195175\epsilon^3 - 416490340549712\epsilon^8 + 326559210883\epsilon^5 \\
& - 658197379886524394\epsilon^{14} + 366355989524106\epsilon^{25} - 2654401206178784\epsilon^{24} \\
& + 14280540836956558\epsilon^{23} - 41288\epsilon^{32} + 45604853229540397\epsilon^{11} \\
& - 1184443222829390736\epsilon^{18} + 796160840504939505\epsilon^{19} - 37373814996996\epsilon^{26} \\
& + 2814862200027\epsilon^{27} + 1048262528984704240\epsilon^{15} + 6305614647\epsilon^{29} \\
& - 1352317081299407432\epsilon^{16} - 424754544188835816\epsilon^{20} + 2538117224757562\epsilon^9 \\
& - 12086152110919892\epsilon^{10} + 1410357273272466060\epsilon^{17} + 177899414750530933\epsilon^{21} \\
& - 137687892344611520\epsilon^{12} + 334786067420726769\epsilon^{13} + 224\epsilon^{33} - 156116496880\epsilon^{28} \\
& + 3504908\epsilon^{31} - 57711876009518394\epsilon^{22})
\end{aligned}$$

Les polynômes $T_N^Q(t, \epsilon)$

De manière similaire, voici la liste des premiers polynômes qui donnent la trace de la matrice Jacobienne des points fixes solutions des polynômes Q_N (construits de la même façon que précédemment).

$$\begin{aligned}
T_1(t, \epsilon) &= (\epsilon + 1)t + 2(-1 + \epsilon) \\
T_3(t, \epsilon) &= -2(-1 + \epsilon)(\epsilon + 1)t + 3\epsilon^3 - 14\epsilon^2 + 27\epsilon - 4 \\
T_5(t, \epsilon) &= -4(2\epsilon - 1)(-1 + 3\epsilon)^2(-1 + \epsilon)^2(1 + \epsilon)^4 t^2 - 2(-1 + \epsilon)(-1 + 3\epsilon)(1 + \epsilon) \\
& (\epsilon^8 - 33\epsilon^7 + 357\epsilon^6 - 2301\epsilon^5 + 5547\epsilon^4 - 5395\epsilon^3 + 2343\epsilon^2 - 399\epsilon + 8)t \\
& + 16 - 1596\epsilon + 29689\epsilon^2 - 204702\epsilon^3 - 1400176\epsilon^5 \\
& + 713809\epsilon^4 + 1572786\epsilon^6 - 50308\epsilon^9 - 966980\epsilon^7 + 297850\epsilon^8 - 238\epsilon^{11} + 5\epsilon^{12} + 4725\epsilon^{10} \\
T_8(t, \epsilon) &= -(5\epsilon - 1)(3\epsilon - 1)^2(\epsilon + 1)^4 t \\
& + (64\epsilon^9 - 1568\epsilon^8 + 141178\epsilon^5 + 14938\epsilon^7 - 66662\epsilon^6 + 846\epsilon + 43934\epsilon^3 \\
& - 115414\epsilon^4 - 8578\epsilon^2 - 34)
\end{aligned}$$

5.6. Exemples de fusions et coalescences des cycles

On étudie dans cette section comme exemples, la stabilité des cycles d'ordre sept et huit. Cette étude permettra de mieux comprendre l'évolution des cycles en fonction du paramètre ϵ de la transformation.

5.6.1. Exemple 1: Cycles d'ordre sept

Les figures suivantes montrent les intersections des courbes algébriques de p_7 et p_1 ainsi que la trace de la matrice Jacobienne de K_7 en fonction de ϵ . Un membre de chaque cycle est donné par p_7 , (il existe au maximum quatre cycles réels).

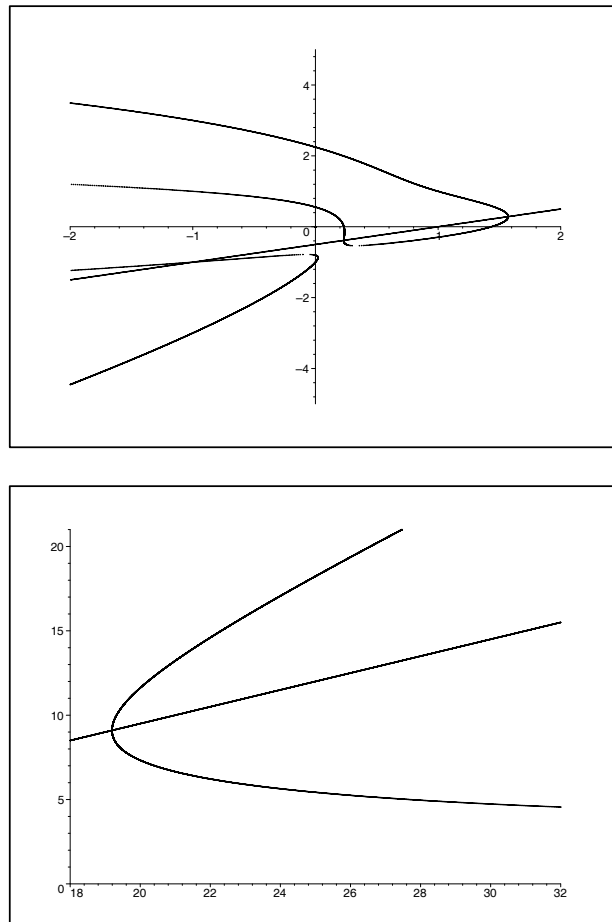


Figure 5.2 Courbes algébriques des solutions réelles de p_7 et p_1 en fonction de ϵ

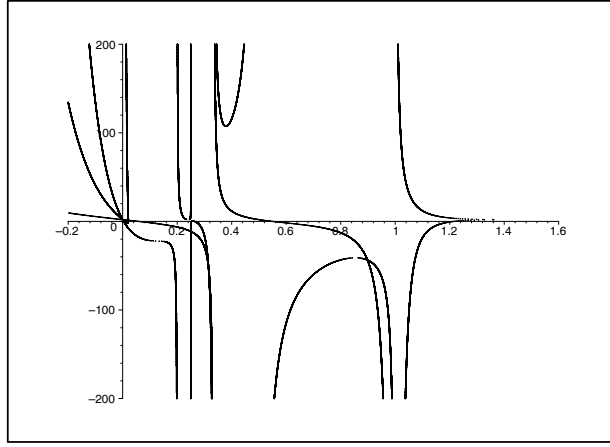


Figure 5.3 Courbe algébrique de t_7 , la trace de la matrice Jacobienne de K_7 , en fonction de ϵ

A partir du Tableau de la section (5.5.1), on voit que les intersections entre K_1 et K_7 s'effectuent pour les valeurs de ϵ suivantes: $\epsilon = .2319141135$, $\epsilon = 1.572416528$ et $\epsilon = 19.19566936$ (les solutions du polynôme (2)).

Les coïncidences entre les cycles de K_7 sont déterminés par les solutions du Résultant:

$$\begin{aligned} \text{Résultant} \left(p_7, \frac{dp_7}{dx}, x \right) \\ = (\epsilon^3 - \epsilon^2 + 35\epsilon - 7)(4\epsilon^6 - 157\epsilon^5 + 2491\epsilon^4 - 3890\epsilon^3 + 2282\epsilon^2 - 385\epsilon + 7) \end{aligned}$$

et qui sont: $\epsilon = .02061295332$, $\epsilon = .2319141135$, $\epsilon = .2376348142$, $\epsilon = 1.572416528$ et $\epsilon = 19.19566936$.

Analyse des fusions et coalescences

- Pour $\epsilon = .02061295332$

Avant l'intersection avec p_1 , il existe quatre cycles réels.

A l'intersection, deux cycles d'ordre 7 coïncident et deviennent paraboliques ($t_7 = 2$), les deux cycles disparaissent du plan réel.

Après l'intersection, il reste deux cycles réels d'ordre sept.

Les figures ci-dessous des portraits de phase autour de cette valeur de ϵ :



Figure 5.4 Portrait de phase pour $\epsilon = 0.19$

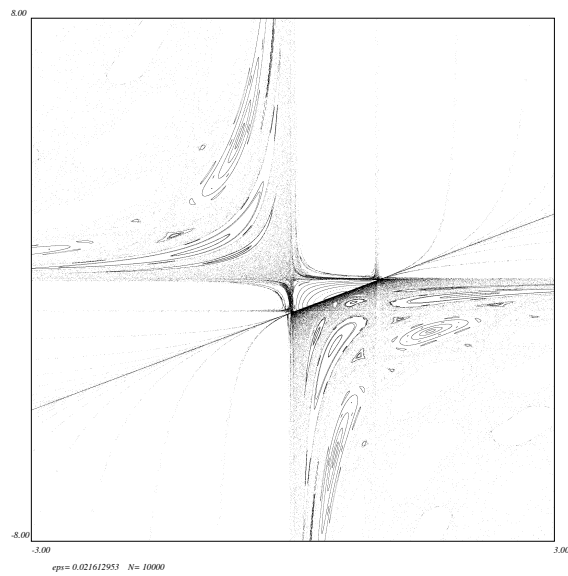


Figure 5.5 Portrait de phase pour $\epsilon = 0.21$

- Pour $\epsilon = .2376348142$

Avant l'intersection, il existe quatre cycles réels.

A l'intersection, deux cycles d'ordre 7 coïncident, les deux cycles disparaissent du plan réel.

Après intersection, il reste deux cycles réels hyperboliques.

Les figures ci-dessous des portraits de phase autour de cette valeur de ϵ :

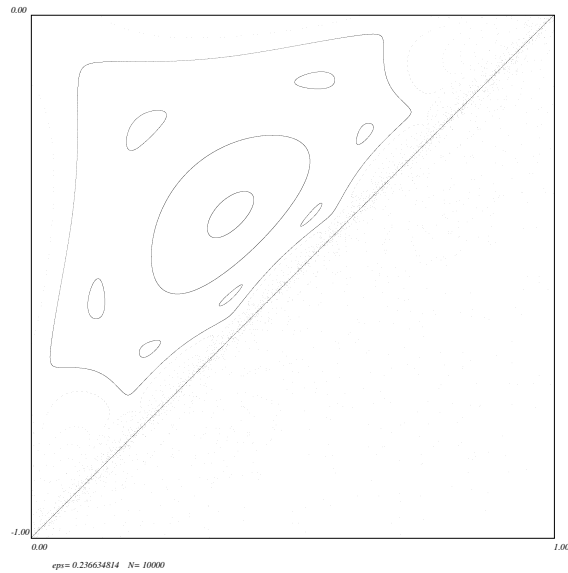


Figure 5.6 Portrait de phase pour $\epsilon = 0.236$



Figure 5.7 Portrait de phase pour $\epsilon = 0.238$

- pour $\epsilon = .2319141135$

Avant l'intersection, il existe deux cycles réels.

A l'intersection, deux cycles d'ordre 7 coïncident avec le cycle d'ordre 1 (elliptique , $t_1 = 1.246979603$).

Après intersection, il existe quatre cycles réels.

Les figures ci-dessous des portraits de phase autour de cette valeur de ϵ :

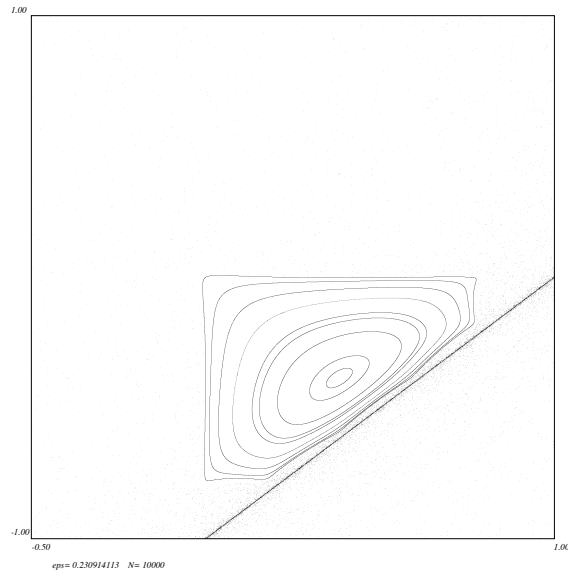


Figure 5.8 Portrait de phase pour $\epsilon = 0.230$

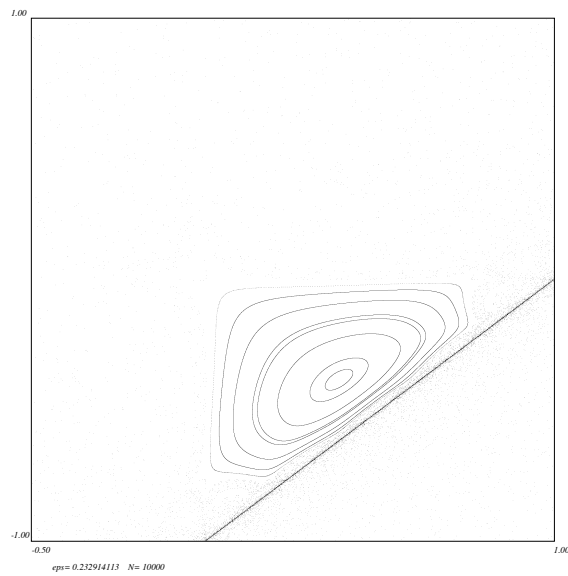


Figure 5.9 Portrait de phase pour $\epsilon = 0.232$

- Pour $\epsilon = 1.572416528$

Avant l'intersection, il existe deux cycles réels

A l'intersection, deux cycles d'ordre 7 coïncident avec le cycle d'ordre 1 (elliptique, $t_1 = -.4450418676$).

Après intersection, il n'existe aucun cycle réel d'ordre sept jusqu'au $\epsilon = 19.19566936$.

- Pour $\epsilon = 19.19566936$

Avant l'intersection, il n'existe aucun cycle réel d'ordre 7

A l'intersection, deux cycles d'ordre 7 un elliptique ($t = 1.997488183$) et l'autre hyperbolique ($t = 2.002511811$) coïncident avec le cycle d'ordre 1 (elliptique, $t_1 = -1.801937736$) qui devient parabolique.

Après intersection, il existe deux cycles réels.

Conclusion

Le nombre de cycles réels dépend de ϵ comme suit:

Nombre de cycles	0	2	4
Intervalle de ϵ	$[1.57, 19.196]$	$[0.021, 0.232]$ $[0.238, 1.57]$ $[19.196, \infty[$	$] - \infty, 0.021]$ $[0.232, 0.238]$

5.6.2. Exemple 2: Cycles d'ordre huit

Pour K^8 , il existe deux types de cycles (type P et type Q). On a donc deux genres d'intersections: les intersection entre cycles P , les intersection entre cycles Q .

Les intersections entre cycles P et Q provoquent des fusions et coalescences des cycles à partir de l'ordre 10 .

1-Les fusions et coalescences entre cycles P

On donne premièrement les figures qui montrent les intersections de p_8 et p_1 .

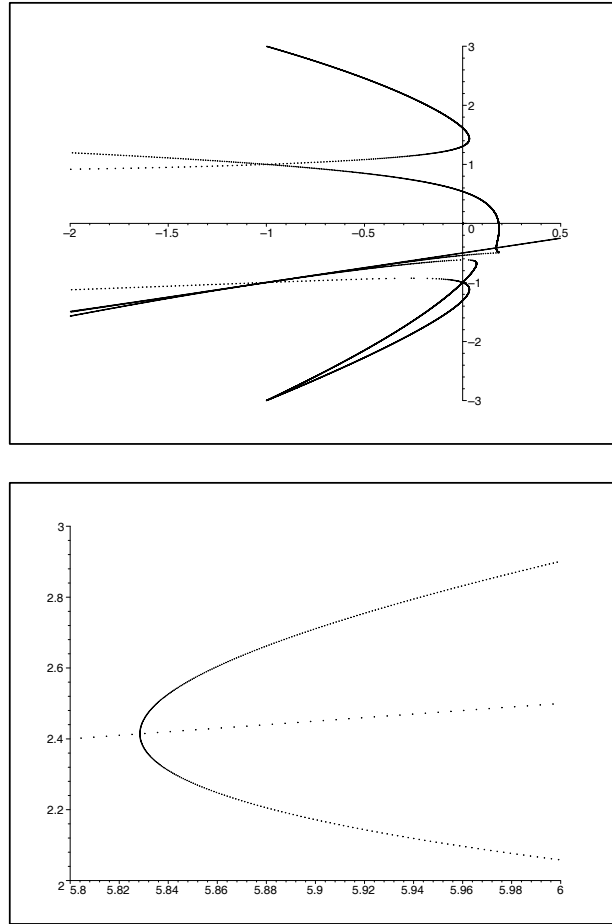


Figure 5.10 Courbes algébriques des solutions réelles de p_8 et p_1 en fonction de ϵ

La figure 5.10 donne les cycles de K_8 en fonction de ϵ (deux membres de chaque cycle sont donnés par p_8). Les intersections s'effectuent entre K_1 et K_8 et entre K_4 et K_8 .

Les intersections entre K_1 et K_8 s'effectuent dans les valeurs de ϵ suivantes: $\epsilon = .1715728753$ et $\epsilon = 5.828427125$, (solutions du polynôme (3)).

L'intersection entre K_8 et K_4 s'effectue dans la valeur: $\epsilon = .07130845235$ (solution du polynôme (9)).

Les intersections entre les cycles de K^8 sont déterminés par la solution du Résultant:

$$\begin{aligned} \text{Résultant} \left(p_8, \frac{dp_8}{dx}, x \right) &= -4096 \epsilon^2 (2 \epsilon - 1)^2 (\epsilon + 1)^{12} \\ &(-1 + 16 \epsilon - 29 \epsilon^2 + 18 \epsilon^3) (\epsilon^2 - 6 \epsilon + 1) (-1 + \epsilon)^2 (4 \epsilon - 1)^2 \\ &(8 \epsilon^9 - 105 \epsilon^8 + 862 \epsilon^7 - 3109 \epsilon^6 + 6816 \epsilon^5 - 12837 \epsilon^4 + 9558 \epsilon^3 - 3171 \epsilon^2 + 388 \epsilon - 10)^2 \end{aligned}$$

Les solutions en ϵ sont: $\epsilon = -1$, $\epsilon = 0$, $\epsilon = .03456789546$, $\epsilon = .07130845235$, $\epsilon = .1715728753$, $\epsilon = .1859912257$, $\epsilon = 1/4$, $\epsilon = 1/2$, $\epsilon = 1$, $\epsilon = 3.278877390$, $\epsilon = 5.828427125$

Analyse de quelques intersections

- Pour $\epsilon = .03456789546$

Avant l'intersection, il existe quatre cycles réels.

A l'intersection, deux cycles d'ordre 8 coïncident et deviennent paraboliques ($t = 2$), les deux cycles disparaissent du plan réel.

Après l'intersection, il reste deux cycles hyperboliques réels.

- Pour $\epsilon = .07130845235$

Avant l'intersection, il existe deux cycles réels.

A l'intersection, les deux cycles d'ordre 8 coïncident avec le cycle d'ordre 4.

Après l'intersection, il reste un cycle réel.

- Pour $\epsilon = .1715728753$

Avant l'intersection, il existe un cycle réel.

A l'intersection, le cycle d'ordre 8 coïncide avec le cycle d'ordre 1.

Après l'intersection, il existe deux cycles réels.

- Pour $\epsilon = .1859912257$

Avant l'intersection, il existe deux cycles réels.

A l'intersection, les deux cycles d'ordre 8 coïncident.

Après l'intersection, il n'existe plus aucun cycle réel jusqu'à $\epsilon = 5.828427125$.

- Pour $\epsilon = 3.278877390$

Il n'existe aucun cycle réel jusqu'à $\epsilon = 5.828427125$.

- Pour $\epsilon = 5.828427125$

Avant l'intersection, il n'existe aucun cycle réel.

A l'intersection, deux cycles d'ordre 8 coïncident, il existe un cycle réel.

Après l'intersection, il reste un cycle réel.

Conclusion

Pour les cycles du type P , le nombre de cycles réels dépend de ϵ comme suit:

Nombre de cycles	0	1	2	4
Intervalle ϵ	$[0.186, 5.83]$	$[0.071, 0.171]$ $[5.83, \infty]$	$[0.035, 0.071]$ $[0.171, 0.186]$	$[-\infty, 0.035]$

2- Fusions et coalescences de type Q

Les figures suivantes donnent les cycles de K_8 de type Q en fonction de ϵ .

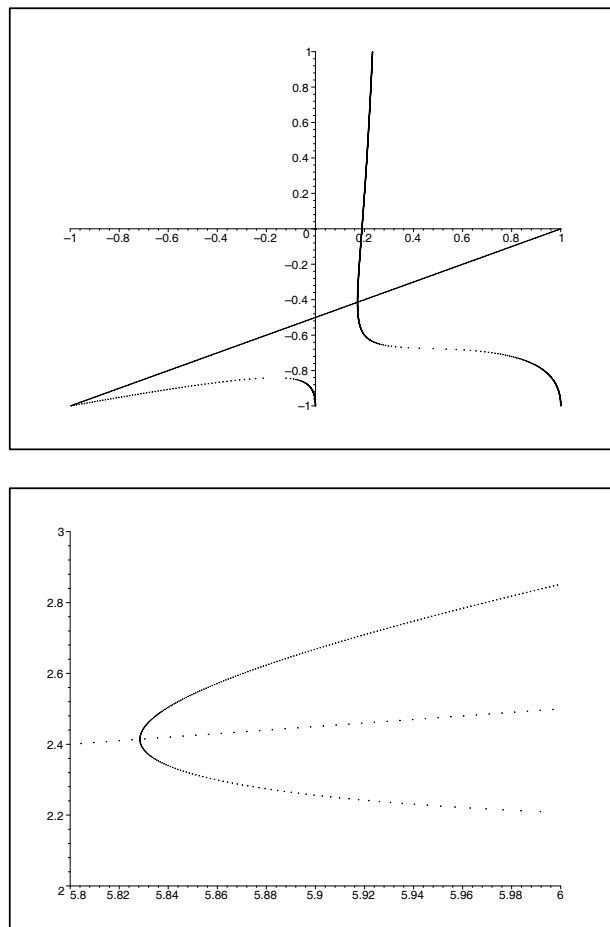


Figure 5.11 Courbes algébriques des solutions réelles de Q_8 et Q_1 en fonction de ϵ

Les intersections des points fixes

On utilisant Maple, les solutions du résultant (Q_8, Q_M, x) (en éliminant x entre Q_8 et Q_M) sont les valeurs de ϵ de l'intersection entre le cycle d'ordre 8 et le cycle d'ordre M . Ils sont donnés par le tableau ci-dessous.

	Q_1	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
Q_8	-1 .1715728753 5.828427125	-1,1	-1,1	-1 ,1 , 1/3	1/3	-1,0,1/5,1/3,1

- Pour $\epsilon = .1715728753$

Juste avant l'intersection il n'existe aucun cycle réel.

Mais quand $\epsilon = .1715728753$, il existe un cycle réel elliptique ($t = 1.999999905$).

Après cette valeur de ϵ , il reste un cycle réel parabolique ($t = 2$).

- Pour $\epsilon = 1$

Avant $\epsilon = 1$, il existe un cycle réel.

Après cette valeur de ϵ , il n'existe plus aucun cycle réel.

- Pour $\epsilon = 5.828427125$

Juste avant l'intersection il n'existe aucun cycle réel.

Quand $\epsilon = 5.828427125$, il n'existe aucun cycle réel.

Après cette valeur de epsilon il existe un seul cycle réel.

L'existence du cycle Q dépend de ϵ comme suit:

Nombre de cycles	0	1
Intervalle de ϵ	$[0, .1715728753[$ $[1, 5.828427125]$	$].1715728753, 1[$ $]5.828427125, \infty[$

5.6.3. Nombre de cycles de K^N , $N \leq 9$

Dans le tableau ci-dessous où on a représenté le nombre des cycles de type P jusqu'à l'ordre 9 en fonction de ϵ :

Nb cycle P_n	0	1	2	4	6
K^1	0	$] - \infty, \infty[$	0	0	0
K^3	0	$] - \infty, \infty[$	0	0	0
K^4	0	$] - \infty, 1]$	0	0	0
K^5	$[5 - 2\sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5}]$	0	$] - \infty, 5 - 2\sqrt{5}] \cup [5 + 2\sqrt{5}, +\infty[$	0	0
K^6	0	0	$] - \infty, 1/3]$	0	0
K^9	$[0.70, 32.16]$	0	$[0.63, 0.70] \cup [32.16, \infty[$	$[0.006, 0.13] \cup [0.15, 0.63]$	$] - \infty, 0.006] \cup [0.13, 0.15]$

CHAPITRE 6

COMPLEXITÉ D'ARNOLD ET ENTROPIE TOPOLOGIQUE

La complexité de Arnold mesure l'évolution des degrés des itérations. Cette dernière dépend des paramètres α et ϵ dans le cas de la transformation de la classe IV [45, 46, 34, 36]. Dans la suite, on va faire l'étude de cette complexité en fonction de ces derniers.

6.1. Complexité de Arnold

6.1.1. ϵ générique et α arbitraire

On connaît de ce qui précède la correspondance qui existe entre la transformation $K_{\epsilon,\alpha}(x, y)$ et la transformation $K_q^2(M_0)$ (q est l'ordre de la matrice M_0) (voir [26]).

Il en résulte de cela que la complexité de la transformation $K_{\epsilon,\alpha}(x, y)$, pour ϵ et α génériques, est celle de la transformation $K_q^2(M_0)$:

$$\lambda_{\epsilon,\alpha} \simeq 1.46557^2 \simeq 2.14789$$

6.1.2. $\alpha = 0$

En imposant $\alpha = 0$ dans $K_{\epsilon,\alpha}(x, y)$, cela induit une réduction de complexité par rapport au cas générique $\alpha \neq 0$.

Dans ce cas, la complexité ne dépend plus que de ϵ . On définit la fonction génératrice des degrés par:

$$G(\epsilon, t) = \sum_{N=0}^{\infty} d_n(\epsilon) t^n$$

où $d_n(\epsilon)$ indique le degré de l'une des deux composantes de $K_{\epsilon,\alpha}^n(x, y)$.

On appellera complexité de Arnold, la valeur λ mesurant la croissance de cette série ou de manière équivalente l'inverse du plus petit pôle en t de $G(\epsilon, t)$. Elle varie en fonction de ϵ .

Dans le cas de ϵ générique, on a :

$$G(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + 21t^6 + 34t^7 + 55t^8 + 89t^9 + \dots = \frac{1+t}{1-t-t^2}$$

avec $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.618$. Dans ce cas, les degrés évoluent exponentiellement comme suit: $d_n \sim \lambda^n$.

6.1.3. $\epsilon = 1/m$ avec ($m > 3$)

On prend comme exemple $\epsilon = 1/4$, $\epsilon = 1/5$ et $\epsilon = 1/7$.

- $\epsilon = 1/4$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + 20t^6 + 31t^7 + 48t^8 + 74t^9 + 114t^{10} \\ &+ 175t^{11} + 269t^{12} + \dots = \frac{1+t}{1-t-t^2-t^6} \end{aligned}$$

Les degrés évoluent exponentiellement comme suit: $d_n \sim \lambda^n$ où $\lambda \sim 1.53415$.

- $\epsilon = 1/5$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + 21t^6 + 33t^7 + 52t^8 + 82t^9 + 129t^{10} \\ &+ 203t^{11} + 319t^{12} + \dots = \frac{1+t}{1-t-t^2-t^7} \end{aligned}$$

Les degrés évoluent exponentiellement comme suit: $d_n \sim \lambda^n$ où $\lambda \sim 1.57014$.

- $\epsilon = 1/7$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + 21t^6 + 34t^7 + 55t^8 + 88t^9 + 141t^{10} \\ &+ 226t^{11} + 362t^{12} + \dots = \frac{1+t}{1-t-t^2-t^9} \end{aligned}$$

Les degrés évoluent exponentiellement comme suit: $d_n \sim \lambda^n$ où $\lambda \sim 1.60134$.

En général, pour $\epsilon = 1/m$ (en éliminant les cas intégrables),

$$G(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2-t^{m+2}}$$

avec $\lambda < 1.618$.

6.1.4. $\epsilon = (m - 1)/(m + 3)$ ($m > 6$, m impair)

on prend comme exemple ($\epsilon = 3/5, (m = 7)$) et ($\epsilon = 2/3, m = 9$).

- $\epsilon = 3/5, (m = 7)$

$$G(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + 21t^6 + 34t^7 + 55t^8 + 88t^9 + 141t^{10} \\ + 226t^{11} + 362t^{12} + \dots = \frac{1+t}{1-t-t^2-t^9}$$

Les degrés évoluent exponentiellement comme suit: $d_n \sim \lambda^n$ où $\lambda \sim 1.60134$.

- $\epsilon = 2/3, (m = 9)$

$$G(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + 21t^6 + 34t^7 + 55t^8 + 89t^9 + 144t^{10} \\ + 232t^{11} + 374t^{12} + \dots = \frac{1+t}{1-t-t^2-t^{11}}$$

Les degrés évoluent exponentiellement comme suit: $d_n \sim \lambda^n$ où $\lambda \sim 1.61193$.

En général, pour $\epsilon = (m - 1)/(m + 3)$,

$$G(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2-t^{m+2}}$$

avec $\lambda < 1.618$.

6.1.5. Les cas intégrables

On finira par les cas intégrables, pour voir que la croissance est polynômiale.

- $\epsilon = 1/2$

$$G(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 7t^4 + 10t^5 + 14t^6 + 18t^7 + 23t^8 + 28t^9 + 34t^{10} \\ + 41t^{11} + 48t^{12} + 56t^{13} + 64t^{14} + 73t^{15} + \dots = \frac{1+t^3+t^6}{(t^4+t^3+t^2+t+1)(1-t)^3}$$

Ce qui donne $\lambda = 1$ et $d_n = 4n - 10$.

- $\epsilon = 1/3$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 11t^5 + 15t^6 + 20t^7 + 25t^8 + 31t^9 + 38t^{10} \\ &+ 45t^{11} + 53t^{12} + 62t^{13} + 71t^{14} + \dots = \frac{1+t^4}{(t^2+t+1)(1-t)^3} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\lambda = 1$ et $d_n = \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{3}n + 1$.

- $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 6t^5 + 7t^6 + 8t^7 + 9t^8 + 10t^9 + 11t^{10} \\ &+ 12t^{11} + 13t^{12} + 14t^{13} + 15t^{14} + \dots = \frac{1}{(1-t)^2} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\lambda = 1$ et $d_n = n + 1$.

- $\epsilon = 1$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 6t^5 + 7t^6 + 8t^7 + 9t^8 + 10t^9 + 11t^{10} \\ &+ 12t^{11} + 13t^{12} + 14t^{13} + 15t^{14} + \dots = \frac{1}{(1-t)^2} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\lambda = 1$ et $d_n = n + 1$.

- $\epsilon = -1$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + t^{10} \\ &+ t^{11} + t^{12} + t^{13} + t^{14} + \dots = \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\lambda = 1$ et $d_n = 1$.

6.2. Fonction dynamique ζ et entropie topologique

La fonction dynamique $\zeta(t)$ sert à déterminer l'évolution du nombre de points fixes d'ordre N en fonction de ce dernier, elle est définie par:

$$\zeta(t) = \exp \left(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\#\text{fix}(K^N) \cdot t^N}{N} \right)$$

avec: $\#\text{fix}(K^N)$ représentant le nombre de points fixes d'ordre N .

On peut aussi la déduire à partir de la fonction génératrice suivante:

$$H(t) = \sum_N \#\text{fix}(K^N)t^N \quad \text{comme suit:} \quad \zeta(t) = \exp \int \frac{H(t)}{t} dt$$

Le nombre totale des points fixes évolue exponentiellement comme suit:

$$\#\text{fix}(K^N) \sim h^N$$

avec:

$$\log(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(\#\text{fix}(K^N))}{N}$$

$\log(h)$ représente l'entropie topologique de la fonction dynamique ζ avec h égal l'inverse du plus petit pôle de $\zeta(t)$.

Remarquons aussi l'identification, dans le cas de certaines transformations bidimensionnelles, de l'entropie topologique h et de la complexité de λ . Ceci a été étudié en détails dans les références [30, 31, 32, 33, 34, 35, 38].

CONCLUSION

Nous avons montré dans ce travail que l'étude des transformations birationnelles construites à partir de la composition d'involutions simples (en l'occurrence ici l'inverse d'une matrice et la permutation d'éléments d'une matrice) pouvait mener à des transformations très intéressantes à étudier. Ces transformations sont utilisées comme outils dans l'étude des modèles de physique statistique et des systèmes dynamiques discrets.

Nous avons donné dans les Chapitres 2 et 3, une classification des complexités obtenues pour les différentes permutations d'éléments d'une matrice 3×3 et 4×4 . Ces permutations pouvant impliquer 2, 3 ou 4 éléments de la matrice. Il a été montré que le spectre des valeurs des complexités obtenues est fini, et les nombres obtenus sont des nombres algébriques très simples et universels (pouvant apparaître dans d'autres transformations).

On s'est ensuite intéressé dans les Chapitres 4, 5 et 6 aux deux classes particulières les plus simples (ayant les plus petites complexités): la classe des transformations intégrables de complexité $\lambda = 1$ et la classe ayant la plus petite complexité supérieure à 1 appelée Classe IV. Cette dernière a été réduite à une transformation à deux variables et à deux paramètres. Son étude a été faite en détails en fonctions des valeurs des paramètres à travers les propriétés de ses points fixes, l'apparition de l'intégrabilité, l'entropie topologique (réelle et complexe), les fusions et les coalescences des points fixes, la stabilité de ces points fixes, etc.

Plus explicitement, on a montré qu'il existe des courbes algébriques, bien définies dans l'espace des variables, qui caractérisent tous les cycles. L'existence de ces courbes est d'un grand secours dans l'analyse et la compréhension de la structure des points fixes de la transformation, puisqu'elles laissent dériver des polynômes dont les racines donnent un (ou deux) membre de chaque cycle. L'utilisation de ces polynômes permet de trouver la trace de la matrice Jacobienne de chaque cycle. Ainsi, la nature des cycles, si elliptique, hyperbolique ou parabolique est déterminée en fonction du paramètre libre ϵ .

Les points fixes peuvent coïncider et on observe deux genres d'intersections. Pour le premier genre, l'intersection se produit aux points singuliers dans le plan (x, y) , c'est à dire la transformation est singulière. Pour le deuxième genre d'intersection, seulement un nombre fini de cycles coïncident. Le plus long devient parabolique et disparaît du plan réel.

On a observé que cette disparition se produit entre deux cycles du même ordre ou entre ces deux cycles et un court. Dans les deux cas, les cycles longs deviennent complexes tandis que le cycle court demeure réel et est elliptique. La matrice Jacobienne du cycle plus long égale à l'identité. La transformation est intégrable quand, au delà d'un certain ordre N , tous les cycles sont paraboliques.

La grande force de notre approche est qu'elle fournit une classe extrêmement large d'exemples pour effectuer de véritables découvertes de concepts et structures par l'ordinateur: l'étude des transformations birationnelles est un exemple remarquable de mathématiques expérimentales, plus spécifiquement centrées sur les systèmes dynamiques discrets mais aboutissant à la fin, à relier des domaines algébriques des mathématiques (comme la géométrie algébrique, ...) avec des domaines plus analytiques ou différentiels voire probabilistes.

Les perspectives et le champ d'exploration de ces ensembles de transformations birationnelles sont pratiquement illimités. Tout d'abord (voir [54]) on peut chercher à engendrer un très grand nombre de transformations birationnelles sur la base de la généralisation du théorème de Noether qui dit que toute transformation birationnelle dans CP_2 peut se décomposer en un produit de transformations d'Hadamard et de collinéations. Les généralisations de ce théorème montre, avec force, que les transformations birationnelles que l'on peut engendrer dans des espaces projectifs à plus de variables $CP_n, (n \geq 3)$ constituent un ensemble "gigantesque" qui a à peine été éffleuré.

Si l'on oublie la contrainte d'être birationnel pour n'être que simplement rationnel, la perte de réversibilité ouvre des horizons encore plus vaste (trop probablement), que nous pouvons parfaitement analyser avec les méthodes et idées développées dans ce mémoire. L'impact que cette perte de réversibilité sur la complexité des systèmes dynamiques correspondant est, à lui seul, un sujet d'étude presque illimité. Du point de vue conceptuel, le hiatus très dérangeant (pour le physicien et même pour le mathématicien) existant entre la description algébrique-topologique et la description probabiliste des systèmes dynamiques (ou pour reprendre le langage des mathématiciens, entre la catégorie topologique et la catégorie probabiliste) reste un très sérieux et fondamental problème pour les physiciens mathématiciens s'intéressant aux systèmes dynamiques. Le type d'approche développée ici basée sur l'étude concrète et effective d'exemples non-triviaux (de complexité algébriques non entières) a d'ores et déjà permis de lever certaines des subtilités liées à cette problématique et même permis l'émergence de concepts puissant (en particulier le concept de post-critical set) permettant de faire un lien entre ces deux approches conceptuellement si éloignées (voir [50]).

Rappelant que nos transformations birationnelles émergent, à leur origine, d'une reflec-

tion approfondie sur les symétries discrètes non-triviales (Yang-Baxter intégrabilité et au-delà) des modèles de mécanique statistique sur réseau, le problème du “retour” de l’analyse des transformations birationnelles vers la mécanique statistique sur réseau, la théorie des champs, la physique des particules, se pose tout naturellement. A cet égard il est important de noter ce fait trop peu connu, que les diagrammes de Dynkin omniprésents en physique théorique, théorie des champs, physique des particules, n’ont pas pour origine l’étude des groupes de Lie, mais l’étude faite par Duval (et reprise par Duval-Coxeter) des transformations birationnelles sur des surfaces de del Pezzo) en langage moderne CP_2 éclaté huit fois (voir [55]). Nous sommes au cœur de l’apparition du groupe de Lie E_8 , qui passionne tant en physique théorique, théorie des champs, physique des particules, théorie des cordes, etc.

Enfin, signalons que les problématiques posées dans ce mémoire ont aussi intéressé de nombreux mathématiciens. La transformation birationnelle de la classe IV a été reprise et étudiée par Bedford, Diller, ... dans diverses publications [56, 40, 57, 58, 59, 60, 61, 62].

RÉFÉRENCES

1. H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892.
2. H. Poincaré. *Œuvres. Tomes I-XI*. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
3. M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* 50 (1976) 69.
4. K.T. Alligood, T.D. Sauer, and J.A. Yorke. *Chaos An introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag., New-York, 1997.
5. P. Collet and J.P. Eckmann. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Birkhäuser, Boston, 1980.
6. P. Cvitanović. *Universality in Chaos*. Adam Hilger, Bristol and New-York, 1989.
7. R.L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Addison Wesley Publishing Company, 1992. Studies in non-linearity.
8. M.C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Spinger Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, 1991. Interdisciplinary Applied Mathematics.
9. E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press., 1993.
10. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Integrable Coxeter Groups. *Physics Letters*, A 159: 221–232, 1991.
11. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Higher dimensional mappings. *Physics Letters*, A 159: 233–244, 1991.
12. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Infinite Discrete Symmetry Group for the Yang-Baxter Equations: Spin models. *Physics Letters*, A 157: 343–353, 1991.
13. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Infinite Discrete Symmetry Group for the Yang-Baxter Equations: Vertex Models. *Phys. Lett. B*, 260: 87–100, 1991.

14. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Mappings In Higher Dimensions. Preprint PAR-LPTHE-91-31.
15. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Dynamical systems from quantum integrability . In J.-M.Maillard, editor, *Yang-Baxter equations in Paris*, pages 95–124. World Scientific, 1993.
16. C.-M. Viallet. Lecture Notes in Physics. Vol 436, Springer Verlag, 1994.
17. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Rational Mappings, Arborescent Iterations, and the Symmetries of Integrability. *Physical Review Letters*, 67: 1373–1376, 1991.
18. M.P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Quasi integrability of the sixteen-vertex model. *Phys. Lett. B*, 281: 315–319, 1992.
19. M.P. Bellon. Algebraic entropy of birational maps with invariant curves. *Lett. Math. Phys.* 50(1999), 79-90. *arXiv: chao-dyn/9912012*.
20. M.P. Bellon and C.-M. Viallet. Algebraic entropy. *Comm. Math. Phys.* 204 (1999), 425-437.
21. R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. London Acad. Press, 1981.
22. P.W. Kasteleyn. Exactly Solvable Lattice Models. In *Proc. of the 1974 Wageningen Summer School: Fundamental problems in statistical mechanics III*, Amsterdam, 1974. North-Holland.
23. E.H. Lieb and F.Y. Wu. Phase Transitions and Critical Phenomena, volume 1, pages 331–490, New York, 1972. Academic Press.
24. S. Boukraa, J.-M. Maillard, and G. Rollet. From integrability to weak chaos. *Physica A* 205, 458-469 (1994).
25. S. Boukraa, J.-M. Maillard, and G. Rollet. Determinantal identities on integrable mappings. *Int. J. Mod. Phys.*, B8: 2157–2201, 1994.
26. S. Boukraa, J.-M. Maillard, and G. Rollet. Integrable mappings and polynomial growth. *Physica A*, 209: 162–222, 1994.
27. S. Boukraa and J.-M. Maillard. Factorization properties of birational mappings. *Physica A*, 220: 403–470, 1995.

28. S. Boukraa, J.-M. Maillard, and G. Rollet. Discrete Symmetry Groups of Vertex Models in Statistical Mechanics. *J.Stat.Phys.*, 78: 1195–1251, 1995.
29. S. Boukraa, J.-M. Maillard, and G. Rollet. Almost integrable mappings. *Int. J. Mod. Phys.*, B8: 137–174, 1994.
30. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Real Arnold complexity versus real topological entropy for a one-parameter-dependent two-dimensional birational transformation. *Physica A* 281 (2000) 151-172, North Holland.
31. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. *Statistical Mechanics on the Eve of the 21st century World Scientific (1999), L.T.Wille and M.Batchelor Editors.*
32. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, and J.-M. Maillard. Real topological entropy versus metric entropy for birational measure-preserving transformations. *Physica D* 144 (2000) 387-433, North Holland.
33. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Real Arnold complexity versus real topological entropy for birational transformations. *Journal of Physics A Math. Gen.* 33 (2000) 1465-1501 <http://xxx.lanl.gov:chao-dyn/9906010>.
34. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, and J.-M. Maillard. Growth-complexity spectrum of some discrete dynamical systems. *Physica D* 130 (1999) 27-42.
35. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Topological entropy and Arnold complexity for two-dimensional mappings. *Physics Letters A* 262 (1999) 44-49 <http://xxx.lanl.gov:chao-dyn/9806026>.
36. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Rational dynamical zeta functions for birational transformations. *Physica A* 264 (1999) 264-293 <http://xxx.lanl.gov:chao-dyn/9807014>.
37. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d’Auriac, S. Boukraa, and J.-M. Maillard. Elliptic curves from finite order recursions or non-involutive permutations for discrete dynamical systems and lattice statistical mechanics. *The European Physical Journal, B5, 647-661 (1998).*

38. J.-Ch. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. "Advances in Quantum Field Theory, Statistical Mechanics and Dynamical Systems", World Scientific (2000).
39. N. Abarenkova. Etude de systèmes intégrables ou de complexités faibles, en physique du solide et systèmes dynamiques discrets. *Thèse de Doctorat, Université de Grenoble Avril 1999*.
40. J. Diller and Ch. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.* **123**(2001) 1135-1169.
41. S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. New integrable cases of a Cremona transformation: a finite order orbit analysis. *Physica A* **240**, 586-621 (1997).
42. E. Ising. *Z. Physik* **31**, 253 (1925).
43. L. Onsager. *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
44. S. Boukraa and J.-M. Maillard. Let's Baxterise. *Journal of Statistical Physics* **102**, N 3/4 (2001) 641-700 [http://xxx.lanl.gov: hep-th/0003212](http://xxx.lanl.gov:hep-th/0003212).
45. V.I. Arnold. Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 21: 1-10, 1990.
46. V. Arnold. *Developments in Mathematics: The Moscow School*. Chapman & Hall, 1989. Problems on singularities and dynamical systems, Edited by V. Arnold and M. Monastyrsky, Chap. 7 p261-274.
47. M.J. Bertin et al. *Pisot and Salem numbers*. Birkhauser-Verlag, 1992.
48. D.W. Boyd. On beta expansions for Pisot numbers. *Mathematics of Computation* **65** 214 (1996), pp. 841-860.
49. N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Birational mappings and Pisot-Salem numbers complexities. *In preparation*.
50. M. Bouamra, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Post-critical set and non-existence of preserved meromorphic 2-forms. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005) 7957-7988. <http://arxiv.org/abs/non-lin/0505024>.
51. J.-Ch. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, and J.-M. Maillard. Functional relations in lattice statistical mechanics, enumerative combinatorics and discrete dynamical systems. *Annals of Combinatorics* **3** (1999) 131-158.

52. S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Product of involutions and fixed points. *Algerian Review of Nuclear Sciences Vol 2, N 1 (1998) 1-16.*
53. S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Properties of fixed-points of a two-dimensional birational transformation. *Algerian Review of Nuclear Sciences 3 (1999) Vol 1, 1-16.*
54. S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Noetherian mappings. *Physica D, 185 (2003), no. 1, 3-44.*
55. A. Gabriellov. A. H. Durfee: Fifteen characterisations of rational double points and simple critical points. *Enseign. Math. 25, (1979) 131-163.* <http://www.math.purdue.edu/~agabriel/dynkin.pdf>.
56. E. Bedford and K. Kim. On the degree growth of birational mappings in higher dimension. *J. Geom. Anal. 14 (2004) 567-596 arXiv math.DS/0406621 30 June 2004.*
57. E. Bedford. On the dynamics of birational mappings of the plane. *J. Korean Math. Soc. 40 (2003) , 373-390.*
58. J. Diller, D. Jackson, and A. Sommese. Invariant curves for birational surface maps. *ArXiv math.AG/0505014 1 May 2005.*
59. D. Jackson. Invariant curves for birational maps. *PhD thesis, University of Notre Dame 2005.*
60. E. Bedford and J. Diller. Dynamics of a family of plane birational maps: Maximal entropy. *J. Geom. Analysis, March 2005 arXiv.org: math/0505062.*
61. E. Bedford and J. Diller. Energy and invariant measure for birational surface maps. *Duke Math. J. 2005*
62. E. Bedford and J. Diller. Real and complex dynamics of a family of birational maps of the plane: the golden mean subshift. *arXiv.org: math/0306276 , Amer. J. Math. 127 (2005) 595-646.*