

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**

Département de Mécanique

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

En Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

MODELISATION 2-D D'UNE INTERACTION DE RANGE DE  
JETS DISCRETS AVEC UN ECOULEMENT TRANSVERSAL  
COMPRESSIBLE SUR UNE AUBE DE TURBINE A GAZ

Par

**Mohamed Tayeb BETATACHE**

Devant le jury composé de :

N. AIT MESSAOUDENE	Professeur, U. de Blida	Président
R. DIZENE	Maître de conférences, USTHB	Rapporteur
S. BENMANSOUR	Professeur, USTHB	Examineur
Y. BENKHEDDA	Maître de conférences, U. de Blida	Examineur
B. BOUMEDENE	Chargé de cours, U. de Blida	Examineur

Blida, 2006

## RESUME

On étudie numériquement l'interaction d'une rangée de jets discrets de paroi avec un écoulement transversal compressible uniforme ( $M=0.72$ ), pour des taux massiques d'injection faibles ( $Ra < 1$ ), en vue des applications au refroidissement par jets des aubages de turboréacteurs. Cette rangée de jets est assimilée à une injection à travers une fente établie sur toute la largeur du profil d'aube, qui a été choisie de type NACA. L'écoulement turbulent est régi par les équations bidimensionnelles, elliptiques de NAVIER STOKES. Une formulation vitesse-pression avec un maillage décalé pour les vitesses, utilisant la méthode des volumes finis, est adoptée pour la modélisation numérique. Le modèle de fermeture choisi, de type 2-D, est celui aux tensions de REYNOLDS. Des résultats ont été présentés essentiellement pour un profil d'aube test obtenus avec le modèle RSM et comparés à ceux obtenus à l'aide du modèle k- $\epsilon$ . L'effet de courbure a été essentiellement mis en évidence à l'aide de comparaisons avec différentes allures des parois, que se soit plaque plane ou différents types de NACA.

## ABSTRACT

We are undertaking a numerical study of the interaction of a discreet jet row in a wall with a transversal compressible flow steady flow ( $M=0.72$ ), for low rate injections ( $Ra < 1$ ), aiming at an application to turbojet blades. This jet row is assimilated to an injection into a crack running all along a NACA type blade profile. The turbulent flow is governed by the bi-dimensional elliptic equations of NAVIER STOKES. A velocity - pressure formulation, involving a velocity shifting grid based on the finite method was adopted for numerical modelling. The second moment closure model selected is the Reynolds stresses model. The results obtained for a profile of a sample-blade with the RSM model have been presented and compared with those obtained with the k- $\epsilon$  model. The curvature effect has been clearly underlined thanks to the comparison with different kinds of walls, plate glides or NACA airfoils.

## الملخص

نقوم بدراسة رقمية لتفاعل ضخ مع سيلان رئيسي ضغوط ( $m=0,72$ ) و بنسبة كتليه ضعيفة بهدف تطبيقات لتبريد عن طريق الضخ على شفرة تربينه. صف الضخ هذا ممثل بثقب على كل عرض الشفرة ، و التي اختيرت من صنف ناكا. السيلان المضطرب مستدل عن طريق معادلات ثنائية الأبعاد و أهليلجي لنافي-ستوكس. صياغة السرعة و الضغط مع نسيج زانح بالنسبة للسرعة ، تستعمل طريقة الأحجام المتناهية ، أخذت للنمذجة الرقمية. النموذج الرقمي المختار هو لتوترات رينولدس من الدرجة الثانية. النتائج المحصل عليها كانت خصوصا لشفرة مع النموذج RSM مقارنة مع النتائج المحصل عليها مع النموذج  $k-\epsilon$  . تقوس التحديد قدم تفصيليا عن طريق مقارنات مع الحد المسطح و مع مختلف التحديدات من نوع ناكا.

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens tout d'abord à remercier vivement Monsieur Rabah DIZENE d'avoir assuré la direction scientifique de cette étude et de m'avoir prodigué de nombreux encouragements durant toute la période de la mise en forme de ce manuscrit. J'ai énormément bénéficié de ses conseils, de sa justesse d'analyse et de ses qualités humaines.

Que tous les membres du jury puissent trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je remercie également Djamel CHERARED pour ses encouragements et son aide pour la mise en forme de ce manuscrit.

Enfin, j'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la faisabilité de ce travail.

# TABLE DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	

## INTRODUCTION GENERALE

### CHAPITRE 1 : ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1- Introduction	04
1.2- Description du refroidissement par film	04
1.2.1- Description générale de la physique de l'interaction jet – écoulement transversal	07
1.2.2- Paramètres d'interaction	09
1.2.2.1- Identification des paramètres	09
1.2.2.2- Influence de certains paramètres	10
1.2.2.3- Aspect thermique des interactions jet - écoulement principal	20
1.2.2.4- Choix du rapport d'injection	22
1.2.2.5- Interaction au voisinage de l'orifice	24
1.2.2.6- Caractéristiques (les zones de paroi, de mélange et de région aval du jet)	25
1.2.2.7-Modélisation numérique de l'interaction jet - écoulement transversal	26
1.2.3- Synthèse bibliographique	31

### CHAPITRE 2 : FORMULATION MATHEMATIQUE

2.1-Equations générales	33
2.2-Equation régissant les écoulement compressibles en régime turbulent	36
2.2.1-Introduction	36
2.2.2-Echelles caractéristiques de la turbulence	37
2.2.3- Approche statistique de la turbulence par moyenne pondérée	38
2-3 Les équations exactes de transport des contraintes de Reynolds	41
2.4-Equation de l'énergie cinétique de turbulence K	42
2.5-Equation du taux de dissipation $\varepsilon$	43
2.6 Introduction à la modélisation de la turbulence	43
2.6.1-Concept de viscosité turbulente	44
2.6.2-Modèles à zéro équations de transport	45
2.6.3-Modèles à une équation de transport	47
2.6.4-Modèles à deux équations de transport	48
2.6.5-Le modèle K- $\varepsilon$	48
2.6.6-Le modèle K- $\omega^2$	51
2.6.7-Le modèle K- $\tau$	52
2.6.8-Le modèle $v^2$ - $f$	52
2.6.9-Le modèle K- $\varepsilon$ à faible nombre de REYNOLDS	53

2.6.10-Modèles des tensions de REYNOLDS	53
2.6.11-Modèle aux tensions de Reynolds (RSM)	54
2.6.12-Modèle aux tensions de Reynolds (RSM) à faible nombre de Reynolds :	56
2.6.13-Modèle aux contraintes algébriques de REYNOLDS (ARSM / ASM)	57
2.6.14-Modèle aux contraintes algébriques de REYNOLDS (EARSM / EASM)	57
2.6.15-Les modèles multi - échelles (MSM)	58
2.6.16-Le modélisation avec effet de courbure	59

## **CHAPITRE 3 : RESOLUTION NUMERIQUE**

3.1- Introduction	61
3.2- Choix de la méthode numérique	61
3.3- Maillage	62
3.3.1- Méthodes multi-blocs	63
3.3.2- Partitionnement du domaine	63
3.4- Discrétisation	65
3.4.1- Considérations géométriques	70
3.4.2- Terme source	70
3.4.3- Critère de convergence et facteur de sous relaxation :	72
3.4.4- Solution des équations algébriques	73
3.5- Equation du champ de pression	75
3.6- Conditions aux limites	79
3.6.1- L'entrée de l'écoulement principal où frontière lointaine	80
3.6.2- Entrée du jet discret	81
3.6.3- Frontière libre	82
3.6.4- Conditions aux limites pour les contraintes de Reynolds	85

## **CHAPITRE 4 : RESULTATS ET DISCUSSIONS**

4.1- Introduction	86
4.2- Présentation et discussions des résultats	88
4.2.1- Evolution des propriétés de l'écoulement selon le modèle RSM sur NACA0012	88
4.2.1.1- Effet du maillage sur les résultats	88
4.2.1.2- Vitesses moyennes réduites	88
4.2.1.3- Les tensions de Reynolds	90
4.2.1.4- Evolution de l'énergie cinétique et de la dissipation turbulentes	91
4.2.1.5- Distribution de la température	91
4.2.1.6- Les lignes iso-vitesses et iso-températures	92
4.2.1.7- Les vecteurs vitesses	92
4.2.2- Comparaison avec l'expérience des modèles RSM et k- $\epsilon$ , d'un écoulement avec jet à travers une plaque plane	93
4.2.3- Effet d'écoulement de jets à travers une plaque plane	93
4.2.4- Effet de la courbure sur l'écoulement en présence d'injection	95
4.2.5- Effet de l'écoulement de jets sur un profil d'aube NACA0012	98
4.2.6- Comparaison des résultats sur paroi du NACA0012 entre les fermetures k- $\epsilon$ et RSM	99
4.2.7- Influence de la courbure de différents NACA sur les résultats du modèle RSM	100

<b>CONCLUSION GENERALE</b>	156
ANNEXE	
Appendice A : NOMENCLATURE	158
Appendice B	159
Appendice C	166
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	174

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

<u>Tableau 2.1</u> : Définition des variables et de leurs coefficients de diffusion et sources	50
<u>Tableau 2.2</u> : Constantes empiriques liées aux modèle K- $\epsilon$ standard.	51
<u>Tableau 3.1</u> : expression des diffusivités turbulentes et termes sources pour un système de coordonnées cartésiens	71
<u>Tableau 3.2</u> : La fonction A (   P   ) pour les différents schémas	71
<u>Tableau 3.3</u> : Coefficients de sous-relaxation	72
<u>Figure 1.1</u> : Différentes techniques d'écoulement des aubes et des vannes.	05
<u>Figure 1.2</u> : Programme des refroidissements d'aubes des dernières années	05
<u>Figure 1.3</u> : Différentes méthodes d'injections.	06
<u>Figure 1.4</u> : Circuit de refroidissement typique d'une aube (d'après HAN et al. 1986).	06
<u>Figure 1.5</u> : Schémas d'écoulements, entrée de la Vanne Guide (Copyright Rolls-Royce pls).	06
<u>Figure 1.6</u> : Emplacements optimaux pour les jets refroidissants, d'après (Mechanical Engineering Department, University of Pittsburgh) Champs d'écoulement d'un jet turbulent dans un écoulement transversal.	07
<u>Figure 1.7</u> : Champs d'écoulement d'un jet turbulent dans un écoulement transversal	08
<u>Figure 1.8</u> : Découpage des trois zones du champ d'interaction entre le jet et l'écoulement transversal.	08
<u>Figure 1.9</u> : Système vortex d'un jet à travers un écoulement transversal ( d'après Fric & Roshko, 1993).	08
<u>Figure 1.10</u> : Lignes de courants.	08
<u>Figure 1.11</u> : Trajectoires des particules issues d'un évent.	12
<u>Figure 1.12</u> : Schéma d'arrangements multiples de jets à travers une aube d'un premier étage d'une turbine.(Taylor 1980).	13
<u>Figure 1.13</u> : Contours d'iso-vitesses et d'iso-températures pour un jet avec $J=15.3$ et $\Delta T=320^{\circ}F$ .	17
<u>Figure 1.14</u> : Stabilité des écoulement rotatifs et courbés.	20
<u>Figure 1.15</u> : Aspect de décollement et de création des tourbillons dues à la courbature de la paroi.	20
<u>Figure 1.16</u> : Détail du taux de transfert de chaleur autour d'une aube.	22
<u>Figure 1.17</u> : Vue pariétale de la configuration d'un jet.	26
<u>Figure 1.18</u> : Géométrie du modèle de l'aube utilisé par HASLINGER et HENNECKE.	29
<u>Figure 2.1</u> : Modèle K- $\epsilon$ à deux échelles.	58
<u>Figure 3.1</u> : Schéma de maillage du domaine d'étude et localisation des variables (cas k- $\epsilon$ ).	65
<u>Figure 3.2</u> : décalage des volumes de contrôle.	65
<u>Figure 3.3</u> : volume de contrôle.	66
<u>Figure 3.4</u> : volume de contrôle et notations de l'équation de mouvement U.	69
<u>Figure 3.5</u> : volume de contrôle et notations de l'équation de mouvement V.	69
<u>Figure 3.6</u> : Frontières limites de calcul.	79



<u>Figure 3.7</u> : volume de contrôle près de la paroi.	83
<u>Figure 4.1</u> : Représentation du maillage du profil d'aube de type NACA001 dans le domaine d'étude (48000 mailles)	102
<u>Figure 4.2</u> : Indépendance de la solution du type de maillage	
a. comparaison de $\bar{u}/Ue$ du modèle RSM sur paroi de profil NACA0012	103
b. comparaison de $k/Ue^2$ du modèle RSM sur paroi de profil NACA0012	104
<u>Figure 4.3</u> : Evolution de la vitesse moyenne sur la paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.	
a. composante longitudinale	105
b. composante verticale	106
<u>Figure 4.4</u> : Evolution des tensions turbulentes normales sur paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.	
a. tensions turbulentes normales longitudinales $\bar{u}^2$	107
b. tensions turbulentes normales verticales $\bar{v}^2$	108
c. tensions turbulentes croisées $\bar{u}v$	109
<u>Figure 4.5</u> : Evolution de l'énergie cinétique de turbulence sur paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.	110
<u>Figure 4.6</u> : Evolution du taux de dissipation de l'énergie de turbulence sur paroi de profil NACA0012, selon le modèle RSM.	111
<u>Figure 4.7</u> : Evolution de la température moyenne sur paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.	112
<u>Figure 4.8</u> : Lignes iso-valeurs autour du profil NACA0012	
a. lignes iso vitesses	113
b. lignes isothermes	113
c. vecteurs vitesse	114
<u>Figure 4.9</u> : Comparaison sur plaque plane des modèles k-ε et RSM avec l'expérience.	
a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne	115
b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne	116
c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales	117
d. Profils des tensions turbulentes normales verticales	118
<u>Figure 4.10</u> : Comparaison des résultats RSM avec jet et RSM sans jet sur plaque plane	
a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne	119
b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne	120
c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales	121
d. Profils des tensions turbulentes normales verticales	122
e. Profils des tensions turbulentes de cisaillement	123
f. Profils de l'énergie cinétique turbulente	124
g. Profils de la dissipation turbulente	125
h. Profils de la température moyenne adimensionnelle	126
<u>Figure 4.11</u> : Comparaison des résultats RSM sur plaque et RSM sur NACA0012	
a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne	127
b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne	128
c. Profils des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse	129
d. Profils des fluctuations de la composante verticale de la vitesse	130
e. Profils des tensions visqueuses.	132
f. Profils de l'énergie cinétique turbulente	132

g. Profils de la dissipation turbulente	133
h. Profils de la température moyenne adimensionnelle	134
<u>Figure 4.12</u> : Comparaison des résultats RSM avec jet et RSM sans jet sur NACA0012	
a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne	135
b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne	136
c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales	137
d. Profils des tensions turbulentes normales verticales	138
e. Profils des tensions turbulentes de cisaillement	139
f. Profils de l'énergie cinétique turbulente	140
g. Profils de la dissipation turbulente	141
h. Profils de la température moyenne adimensionnelle	142
<u>Figure 4.13</u> : Comparaison des fermetures k- $\epsilon$ et RSM sur NACA0012	
a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne	143
b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne	144
c. Profils de l'énergie cinétique de turbulence	145
d. Profils de la dissipation turbulente	146
e. Profils de la température moyenne adimensionnelle	147
<u>Figure 4.14</u> : Effet de courbure par le modèle RSM sur les résultats	
a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne	148
b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne	149
c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales	150
d. Profils des tensions turbulentes normales verticales	151
e. Profils des tensions visqueuses.	152
f. Profils de l'énergie cinétique turbulente	153
g. Profils de la dissipation turbulente	154
h. Profils de la température moyenne adimensionnelle	155
<u>Figure C.1</u> : Différentes Transformation à partir d'un système de coordonnées généralisé dans un système de maillage orthogonal	
	166

## INTRODUCTION

L'écoulement résultant de l'arrivée d'un jet circulaire au sein de la couche limite d'un écoulement transversal se rencontre dans de nombreux cas pratiques comme la dispersion de polluant, les mélangeurs des réacteurs ou le refroidissement des parois. Ce dernier cas est très utilisé dans le refroidissement par film des aubes de turbine et constitue donc un mécanisme très employé pour augmenter les performances des turbines à gaz. Le fluide de refroidissement, froid par rapport aux gaz chauds issus de la chambre de combustion, est prélevé dans le compresseur pour être introduit dans la turbine. La priorité affichée par le constructeur est en général d'assurer une durée de vie suffisante des turbines, ce qui implique une bonne protection thermique des parois. Cependant la complexité des phénomènes physiques observés à proximité des zones d'injection et d'imperfection des méthodes de prédiction ont conduit à plusieurs configurations d'injection. Il en résulte une pénalisation du compresseur qui fournit le fluide de refroidissement.

La physique des phénomènes engendrés par l'interaction des deux écoulements est très complexe. Fortement accéléré et dévié par les aubes, la structure de l'écoulement dans le canal inter aubes est fortement tridimensionnelle, à cause du développement de nombreuses structures tourbillonnaires. Dans les problèmes de refroidissement des aubes, il y a nécessité de déterminer les paramètres de performances à savoir la température adiabatique de la paroi et le coefficient d'échange thermique afin de pouvoir évaluer le flux de chaleur local dans la surface. Ce type de problèmes est généralement appelé problème aux trois températures où l'interaction des deux écoulements impose le comportement de la température de surface. Ainsi, le degré de mélange entre les deux courants résulte dans une nouvelle température qui est celle de la surface de la paroi. Elle constitue le paramètre moteur du transfert de chaleur au travers la paroi. Par conséquent, cette nécessité de connaître ces trois paramètres n'est pas limitée seulement au voisinage des orifices de l'injection mais dans toute la région avale. Tous ces mécanismes de transfert de chaleur au niveau de la surface de paroi sont influencés par les mécanismes liés aux aspects cinématique et dynamique des phénomènes d'injection au dessus de la paroi.

La détermination des flux de chaleur aux parois nécessite donc une grande précision de la part du calcul du champ cinématique.

Entre ces calculs tridimensionnels et l'utilisation de relations analytiques permettant de prédire le flux de chaleur en présence d'injections multiples, il existe des modèles bidimensionnels adaptés au traitement de rangées de jets et basés, plus ou moins explicitement sur certaines hypothèses. On peut citer comme modèle 2-D, le modèle de couche limite basé sur un calcul intégral, de l'écoulement transversal et sur la prise en compte d'informations liés aux jets. Il existe aussi le modèle d'injection - dispersion qui relie, à l'aide d'une équation de transport, le flux de chaleur et la quantité de mouvement. Des modèles de turbulence de type  $k-\epsilon$  ont été employés et ont permis d'obtenir des résultats améliorés par rapport à l'utilisation d'une longueur de mélange par exemple. Cependant, la majorité des problèmes ayant utilisé ce modèle ont porté sur des applications sur plaques planes, mais pas dans le cadre d'un écoulement général en turbine. Il convient aussi de rappeler que ce modèle prédit difficilement les écoulements présentant de fortes contraintes normales, tels les effets de courbure.

L'objectif essentiel de ce travail est la prédiction des phénomènes cinématiques qui influencent le comportement des flux de chaleur aux parois, dans le cadre d'un écoulement sur une aube de turbine. Ce travail constitue la suite de celui qui a vu une modélisation bidimensionnelle d'un écoulement transversal en présence d'injection sur plaque plane en utilisant le modèle  $k-\epsilon$ . Compte tenu de la forte influence de l'aspect cinématique du problème sur l'aspect thermique, il nous a semblé essentiel d'opter pour un modèle type tensions de Reynolds afin d'évaluer les effets de courbure sur l'interaction.

Des résultats seront présentés essentiellement pour un profil d'aube test qui est le profil NACA0012 obtenus avec le modèle RSM et comparés à ceux obtenus à l'aide du modèle  $k-\epsilon$ .

La structure générale de ce mémoire se présente de la façon suivante :

Une revue bibliographique regroupant les résultats les plus importants pour des interactions 2-D et 3-D fait l'objet du chapitre I. Dans ce chapitre, on insiste plus

particulièrement sur le caractère numérique des études 2-D et 3-D et les modèles de turbulence utilisés capables de prédire les fortes contraintes normales. Une conclusion regroupera les principaux résultats.

Le chapitre II est consacré à la formulation mathématique du problème. Après la présentations des équations en régime turbulent compressible, nous parlerons de l'approche statistique de la turbulence et nous passerons en revue les différents modèles de Reynolds ainsi que les principaux modèles à deux équations.

Dans le chapitre III, on effectue la modélisation numérique de l'interaction bidimensionnelle compressible. On présentera le schémas numérique et les conditions aux limites. Les calculs sont effectués à l'aide du solveur Fluent, dont la présentation ne date pas d'aujourd'hui.

Les résultats et discussions, sont présentés dans le chapitre IV. On présentera les principaux résultats obtenus pour un écoulement à travers une aube de type NACA0012, traversé par un jet par le biais du modèle RSM. Une comparaison d'un écoulement à travers une plaque plane avec jet obtenu par les modèle RSM et  $k-\varepsilon$  est faite avec l'expérience. De même, d'autres comparaisons sont faites pour un écoulement à travers une plaque ou un profil NACA0012, traversé ou non par un jet et obtenus par le modèle RSM, sont présentés. D'autre part, une comparaison entre les résultats obtenus par les modèles RSM et  $k-\varepsilon$ , sur une aube NACA0012, traversé par un jet, ainsi qu'une comparaison d'écoulement à travers différents types d'aubes NACA symétriques et obtenus par le modèles RSM, traversé toujours par un jet, sont présentés.

Finalement, une conclusions générale, ainsi que les perspectives à venir, clôturent le présent mémoire.

# CHAPITRE 1

## ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1- Introduction :

L'augmentation des performances des turbines ou turboréacteurs, entraîne une augmentation des niveaux de température de fonctionnement, d'où nécessite le refroidissement des aubes. Le refroidissement par interaction de jets discrets à travers un écoulement transversal, a été largement présentée dans la littérature.

Dans ce chapitre, une analyse bibliographique a été faite, afin de mieux cerner le problème et avoir une meilleure vue des travaux précédents. En premier lieu, on donne une petite aperçue sur les différents types de refroidissement existant, puis on exposera l'aspect aérodynamique du jet dans l'écoulement principal. Les principaux paramètres influençant l'interaction entre jets et écoulement transversal, dont l'effet de courbure, sont présentés. On citera aussi, l'aspect thermique de cette interaction, le problème du choix de la définition du taux d'injection, de son rôle majeur au voisinage de l'orifice ainsi que dans le sillage du jet, y serons cités.

A la fin, différents modèles numériques qui ont été utilisés pour étudier les interactions des jets avec les écoulements transversaux, y sont exposés.

### 1.2- Description du refroidissement par film :

Différentes techniques de refroidissement des aubes de turbines à gaz sont utilisées, on en cite le refroidissement par convection forcée, par impact d'un jet froid (impinging jet), par transpiration à travers une paroi poreuse et par film crée après l'interaction de jets discrets dans un écoulement transversal. La physique du développement de cette dernière, avec jet normal ou oblique à un écoulement transversal, est présentée ici.

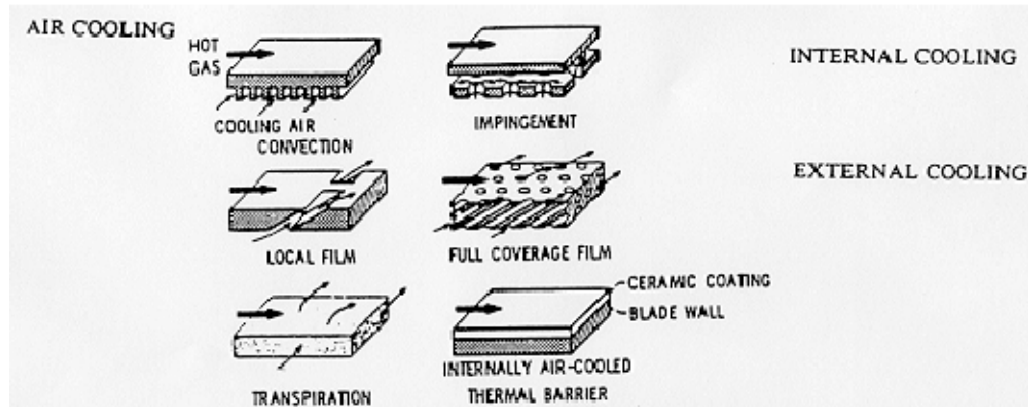


Figure 1.1: Différentes techniques d'écoulement des aubes et des vannes [1]

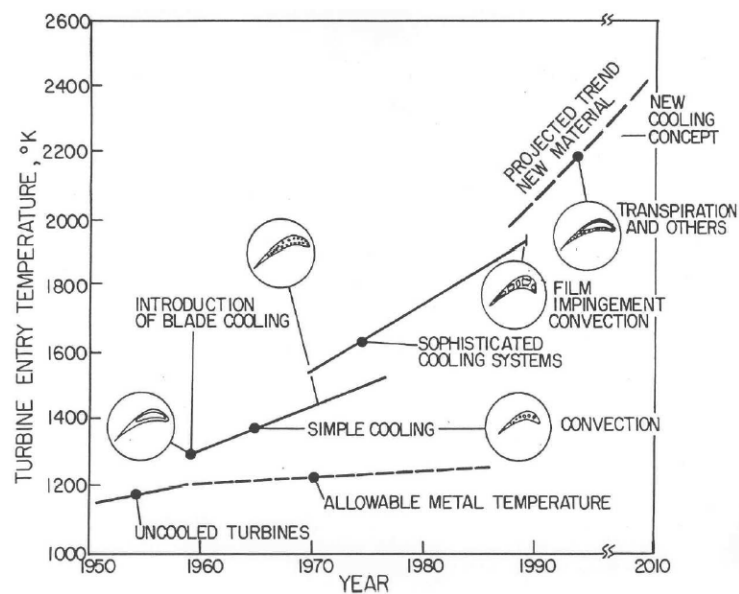


Figure 1.2: Programme des refroidissements d'aubes des dernières années. [1]

LAKSHMINARAYANA [1], a proposé dans sa thèse les programmes actuels de refroidissement des aubes ainsi que les différentes techniques de refroidissement, présentés respectivement dans les figure 1.1 et 1.2. BERNHARD [2], a rapporté différents types de jets utilisés comme l'indique la figure 1.3. On note que GLASS et al. [3], ont utilisé un refroidissement par transpiration.

Les trous discrets et les trajectoires des différents jets à travers une aube de turbine ont été rapportés de façon plus explicite par BREDBERG [4] comme le montre la Figure 1.5 si-dessous. Aussi, le schéma d'un circuit de refroidissement d'une aube, présenté par HAN [83], est montré dans la Figure 1.4.

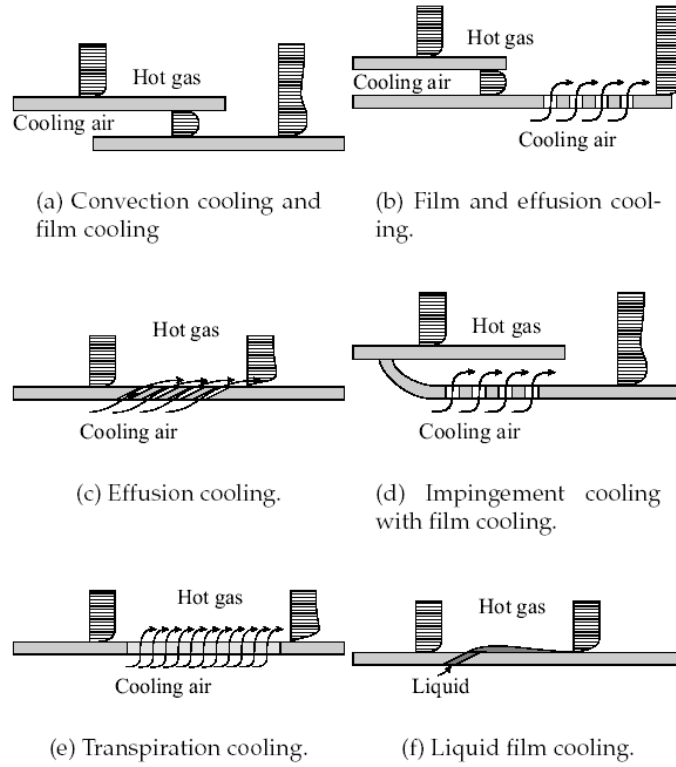


Figure 1.3: Différentes méthodes d'injections [2]

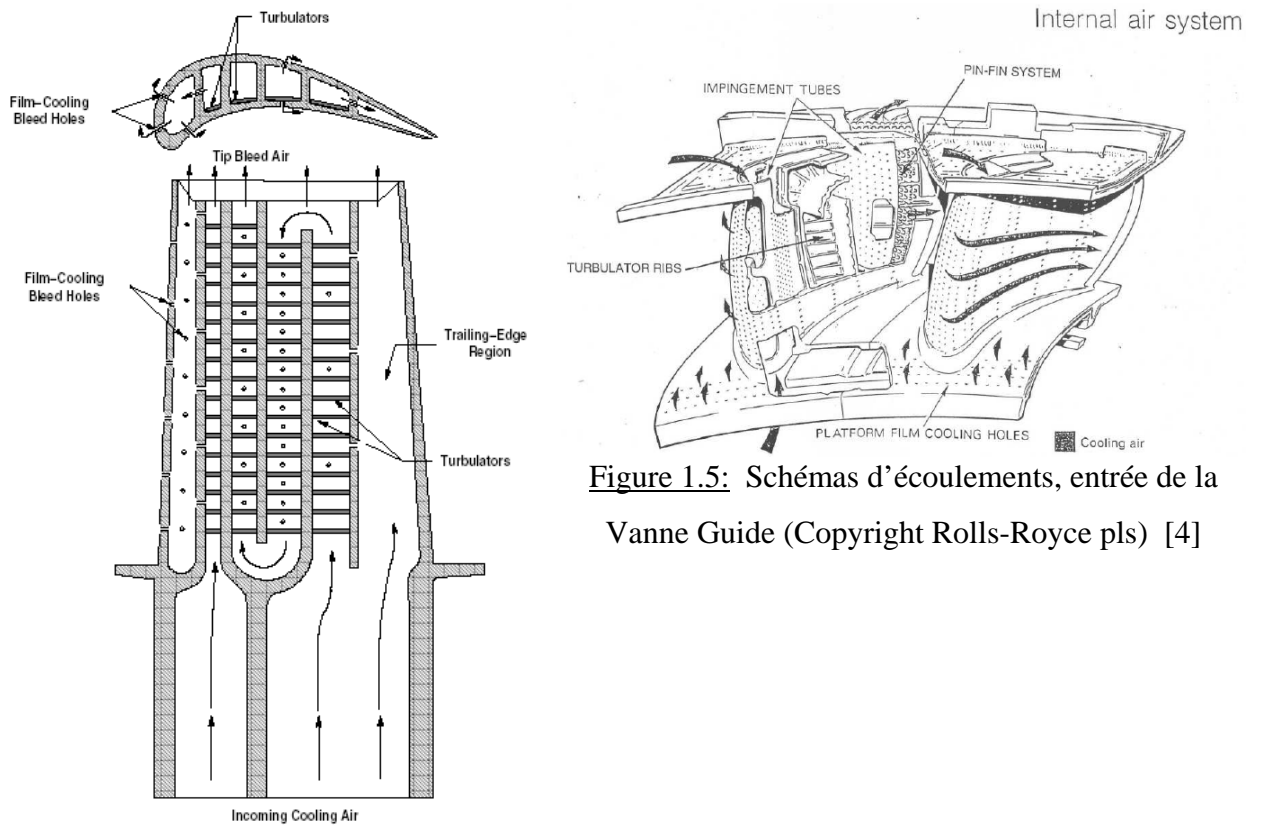


Figure 1.5: Schémas d'écoulements, entrée de la Vanne Guide (Copyright Rolls-Royce pls) [4]

Figure 1.4 : Circuit de refroidissement typique d'une aube (d'après HAN et al. 1986) [83]



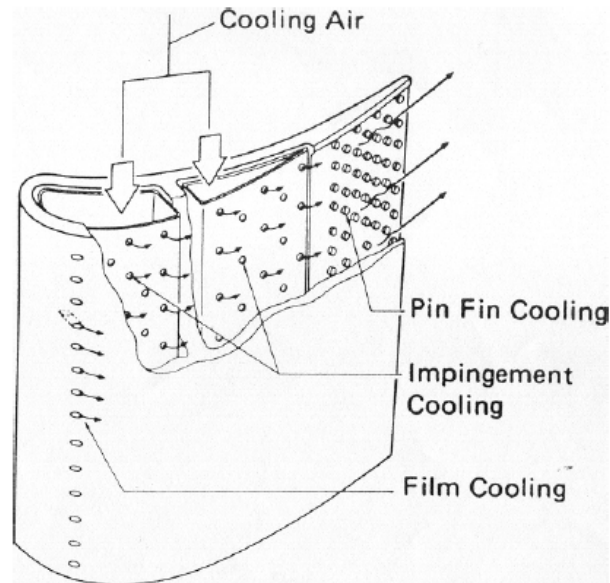


Figure 1.6 : Emplacements optimaux pour les jets refroidissant, d'après (Mechanical Engineering Department, University of Pittsburgh)

### 1.2.1- Description générale de la physique de l'interaction jet – écoulement transversal :

Beaucoup d'études théoriques, expérimentales et numériques, ont été faites, ces dernières décennies, sur le phénomène d'interaction entre un écoulement transversal et des jets discrets. On en trouve des descriptions plus ou moins détaillées dans la littérature.

La figure 1.8, montre une description schématique de l'interaction d'un jet injecté à partir d'une paroi dans un écoulement transversal, où une surpression à l'amont de l'orifice et une dépression à l'aval de celui-ci, ont été constatés. La figure 1.6 montre une décomposition en zones, de l'interaction entre jet et écoulement transversal. Cette décomposition a été faite en trois zones, remarque faite par DUCHÊNE [5], et ONVANI et al. [6] :

- Une première zone dite « à potentiel », qui se trouve à proximité immédiate de l'orifice et qui est caractérisée par l'existence d'un noyau, au sein duquel la pression d'arrêt reste quasiment constante, avec une création d'une vitesse importante, sur la périphérie, sous forme de tourbillons contrarotatifs.

- Une zone intermédiaire, où il y a un mélange et une interaction forte entre le jet et l'écoulement transversal. Des structures tourbillonnaires contrarotatives se forment, s'adaptent à l'écoulement extérieur puis s'atténuent au loin, où le jet s'aligne avec

l'écoulement principal. Alors qu'une région d'écoulement de retour, se fait remarquer. Elle est limitée par deux points selle (points singuliers).

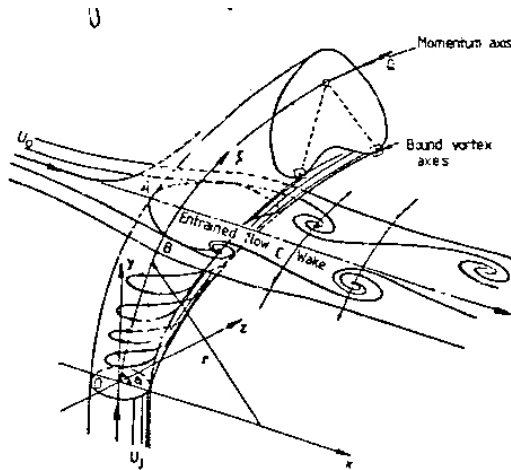


Figure 1.7: Champs d'écoulement d'un jet turbulent dans un écoulement transversal [7], [8].

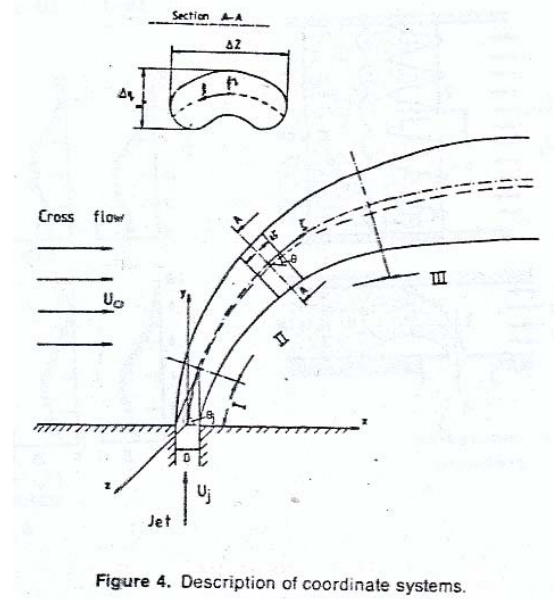


Figure 4. Description of coordinate systems.

Figure 1.8 : Découpage des trois zones du champ d'interaction entre le jet et l'écoulement transversal.[7 ] et [8 ]

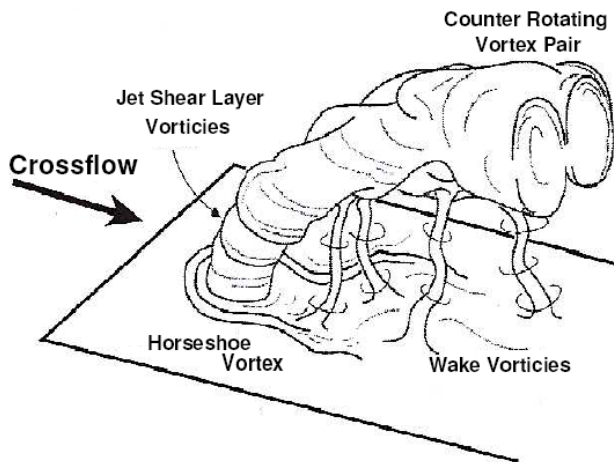


Figure 1.9 : Système vortex d'un jet à travers un écoulement transversal (d'après FRIC & ROSHKO, 1993) [9], [10]

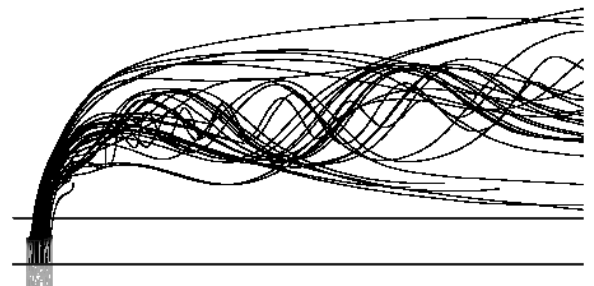


Figure 1.10 : Lignes de courants [ 10 ]

- Une dernière et troisième zone, est éloignée de l'orifice, où la vitesse moyenne du jet s'égalise avec celle de l'écoulement principal. Les phénomènes sont bidimensionnels et les gradients de pression sont négligeables.

### 1.2.2- Paramètres d'interaction :

#### 1.2.2.1- Identification des paramètres :

L'étude du champ d'interaction d'un jet discret à travers un écoulement transversal est très complexe à cause des différents paramètres qui peuvent l'influencer. Dans la littérature, il a été indiqué que la complexité du phénomène, est due principalement aux aspects suivants :

- La nature des deux écoulements en ce qui concerne la température, la vitesse, la masse volumique, le nombre de REYNOLDS et le taux de turbulence, si écoulement turbulent.

- L'interaction jet – écoulement principal influe sur la turbulence de l'écoulement aval, de façon directe, ainsi que : le taux d'injection, l'épaisseur de la couche limite de la paroi juste à l'amont de l'orifice et de la présence éventuelle d'un gradient de pression longitudinal.

- La configuration géométrique de l'aube (effet de courbure), ainsi que : la géométrie des orifices s'y trouvant, l'angle d'injection de ceux-ci et leur distribution sur la surface de l'aube (nombre de rangées et distance entre trous).

Cela montre le nombre important de configuration qui peut être combiné, et la complexité du problème. Pour avoir une meilleure vue sur le phénomène d'interaction entre jets discrets et écoulement transversal, une évaluation des paramètres prépondérants dans l'interaction, ainsi que la présentation de leur influence, en utilisant les résultats disponibles, sont nécessaires.

### 1.2.2.2- Influence de certains paramètres :

Lorsque comme ici, un phénomène physique est régi, par un nombre important et couplé de paramètres, il est difficile d'en isoler complètement leurs effets. L'analyse des résultats publiés, apporte néanmoins des informations intéressantes, qui permettent de mettre en évidence l'influence de certains d'entre eux.

La détermination de l'influence exacte, des paramètres régissant un phénomène physique sur celui-ci, ainsi que leur isolement les uns des autres reste difficile. Cela est dû au nombre important et couplés des différents paramètres. La littérature, nous fournit des informations permettant de mettre en évidence l'influence de certains paramètres.

#### a- Influence du taux d'injection :

##### - Cas d'un jet unique perpendiculaire :

Pour un grand rapport d'injection, une forte interaction entre le jet normal et l'écoulement transversal se fait, d'où formation de deux tourbillons contrarotatifs, d'après ERIKSEN [11], pour un cas 2D. Cela a été confirmé après par PATANKAR et al. [12], puis par CLAUS [13] pour un cas 3D. Plus tard, beaucoup d'auteurs, comme le rapporte la littérature, confirment l'existence de cette paire de tourbillons contrarotatifs et montrent que cette structure domine le champ d'écoulement très loin en aval de l'injection. Cette structure de tourbillons contrarotatifs est inexistante dans le cas d'un taux d'injection faible, où l'on constate que le jet se courbe rapidement et se développe près de la paroi. Ces constatations ont aussi été faites par MAURICE, LEOEUF et KULISA[14], AZZI[15], KASZETA[16], ROTH et al.[17] et [18], GRAHAM et BREMHORST[19], et aussi SYKES, LEWELLEN et PARKER[20].

##### - Cas des jets obliques :

ERIKSEN [11], montre que pour un jet unique avec un angle d'injection de  $35^\circ$ , pour une plage de taux d'injection allant de 0.1 à 2, la pénétration et l'épanouissement des jets

dans les deux directions, verticale et transversale, sont moins importantes que ceux d'un jet sortant perpendiculairement. Pour  $M < 1$ , l'effet de la couche limite varie avec le nombre de REYNOLDS et l'épaisseur de la couche limite, au point d'injection. Il a constaté, qu'il y avait une petite différence de l'effet de la couche limite entre les cas d'une et plusieurs rangées de trous inclinés. Cet effet est plus important au environs de  $M=0.5$ , où la pénétration du jet dans l'écoulement principal est importante.

BERGELES, GOSMAN et LAUNDER [21], ont confronté les résultats expérimentaux obtenus par d'ERIKSEN avec la simulation numérique. TYAGI et al. [22], ont effectué une comparaison entre deux jets, l'un oblique ( $30^\circ$ ) et l'autre perpendiculaire à l'écoulement principal, leur a permis d'observer un meilleur mélange et une plus grande pénétration du jet dans l'écoulement transversal pour le cas perpendiculaire, alors que pour le cas du jet oblique, il avait plus tendance à être déformé et à s'écouler au dessus de la paroi. D'autre part, TYAGI et al. [23], [24], [25], ont étudié l'effet du taux d'injection en utilisant des trous obliques de forme carré, ils ont utilisé des taux de 0,5 ; 1 et 2. Il ont constaté l'influence du taux de jets sur l'interaction jet-écoulement transversal.

FOUGERES et BOUSGARBIES [26], ont étudié une rangée de jets inclinés à  $45^\circ$  avec une vitesse d'écoulement principal de 30 m/s avec des taux d'injection de 2/3 et 5/3. Ils ont trouvé une configuration, semblable à celle observée dans un sillage lointain d'un jet cylindrique, débouchant normalement dans un écoulement transversal. L'existence de deux tourbillons, signalés dans le cas de jets obliques, est confirmée.

BERNHARD [2], a étudié plusieurs rangées de jets obliques avec différents angles d'injection et a trouvé que cela n'avait pas une influence majeure sur le champ des températures. Par contre il a trouvé que le taux d'injection avait avoir un grand effet sur la diffusion du film de refroidissement.

AZZI et al. [15], [27] et [28], en simulèrent l'interaction de l'écoulement principal avec des jets inclinés composés (3D). LAKEHAL et al. [29] et [30], ont simulé trois rapports d'injections différents (0,5 ; 0,85 ; 1,2 ) avec un modèle K- $\epsilon$  (Standard et à bas nombre de Reynolds) et d'autre part ont confirmé les effets du rapport d'injection et de

l'angle d'injection sur le champs d'écoulements. THEODORIDIS et al. [96], ont confronté des résultats obtenus par le modèle K- $\epsilon$  avec l'expérience pour différents taux d'injection (0 ; 0,7 ; 1,1) sur une aube de type AGTB. Ils en ont conclu, que le taux d'injection influe directement sur l'estimation des résultats due à la forte anisotropie causée par la convexité de la surface de l'aube.

D'autres études numériques effectuées, entre autre, par ROTH et al. [17] et [18], KASZETA[16], BURD et SIMON [31], BARTHET et BARIO [32], JANSSON et DAVIDSON [62], ont confirmé l'influence du taux d'injection sur la trajectoire du jet. La figure 1.5, présente les trajectoires de particules émises à partir de jets à 45° et 90°, effectuées par DUCHÊNE [5].

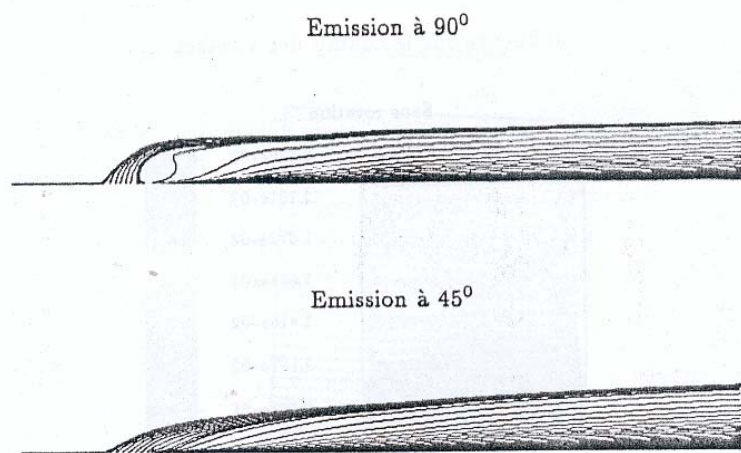


Figure 1.11: Trajectoires des particules issues d'un événement, [5]

DIZENE et al. [33], ont effectué une étude expérimentale de l'influence du taux d'injection d'une rangée de jets entrant dans un écoulement transsonique ( $M=0,72$ ). Le champ des vitesses est obtenu à l'aide des mesures par velocimètre laser à effet Doppler de pression totale et de température pour trois valeurs de  $R$  (0,24, 0,37 et 0,50) a permis de montrer l'existence d'une efficacité de refroidissement optimale au voisinage et en aval des orifices d'injection pour une valeur de  $R$  voisine de 0,37. Le taux d'injection plus élevé entraîne un décollement des jets de la paroi accompagné d'une réduction de l'effet de film des jets. Un taux d'injection plus faible induit un mélange trop important avec la couche limite de l'écoulement amont et diminue aussi l'effet de film produit par les jets.

ALTORAIRI [34], a confronté les résultats de plusieurs configurations de jets, obliques et normal. Il, en a conclu, que les jets à travers des orifices obliques rafraîchissaient mieux la plaque que pour le cas perpendiculaire, et permettaient le développement d'un film protecteur sur la plaque.

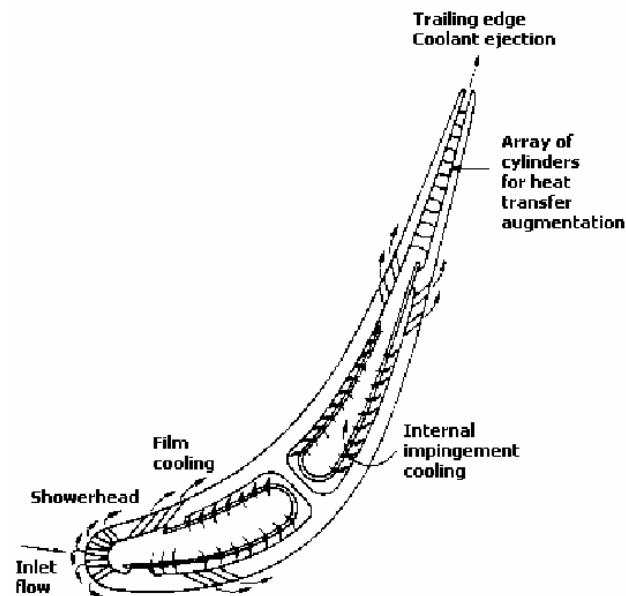


Figure 1.12 : Schéma d'arrangements multiples de jets à travers une aube d'un premier étage d'une turbine.(Taylor 1980) [35]

b- Effet de l'épaisseur de la couche limite :

YOSHIDA [36], a effectué une étude sur l'interaction d'une couche limite laminaire, puis turbulente et un jet laminaire, puis complètement turbulent. Un taux de 0.5 et un angle d'injection de  $35^\circ$  y ont été utilisés.

La couche limite vaut  $0.5D$  lorsqu'elle est laminaire et  $1.1D$  quand elle est turbulente. Le maximum d'intensité turbulente est détecté aux frontières du jet, dans tous les cas de figures, alors que, l'interaction n'est maximale, que pour le cas de jet laminaire. Le mélange aux frontières du jet, la pénétration de l'écoulement principal et les niveaux de turbulence sous le jet, sont plus grands lorsque la couche limite est turbulente. Une augmentation de l'épaisseur de la couche limite, induit une diminution de l'interaction, ainsi que l'efficacité de refroidissement de la ligne centrale.

Ces résultats confirment l'importance de la couche limite de paroi, sur l'interaction entre jet et écoulement transversal, pour les faibles taux d'injections.

#### c- Effet du nombre de REYNOLDS du jet :

Les différentes études rapportées par la littérature, montrent que le nombre de REYNOLDS influe peu sur la trajectoire du jet, ainsi que sur l'efficacité du refroidissement par film. Ces conclusions, ont été réaffirmées récemment par REISS et BÖLCS [37], où ils ont effectué des tests sur des aubes de turbines avec une rangée de jets obliques à 40° et un taux d'injection variant entre 0.3 et 1.5. Pour un même taux d'injection, une même géométrie de trous et mêmes conditions d'écoulement et sur un même modèle géométrique, ils ont conclu que l'interaction entre le jet et l'écoulement transversal ainsi que le transfert thermique par jet sont faiblement influencés par le changement du nombre de REYNOLDS et le nombre de MACH.

BERNHARD [2], confirme de son côté la faible influence du nombre de Reynolds sur le champ des températures.

GAO [35], a utilisé différentes dispositions de rangées de jets pour éventuellement y étudier l'effet sur le mélange. Il a remarqué l'effet d'un nombre de Reynolds élevé qui a pesait sur la configuration de l'interaction jet-écoulement transversal, pour différents types de rangements de trous.

#### d- Influence du rapport des masses volumiques :

AZZI [15], rapporte que le rapport des masses volumiques influe directement sur le taux de quantité de mouvement, d'où une responsabilité directe sur la trajectoire du jet, sur son décollement ou son attachement à la paroi. Pour un même taux d'injection, un jet plus dense a un faible taux de quantité de mouvement, donc sa pénétration est plus faible et son efficacité de refroidissement est meilleur. Le contraire (jet moins dense), donne une pénétration importante, d'où formation de tourbillons contrarotatifs et une mauvaise efficacité de refroidissement.



e- Influence du gradient de pression :

MAITEH et JURBRAN [38], rapportent que la présence d'un gradient de pression favorable, donne une tendance à augmenter la dissipation du jet dans l'écoulement principal, ce qui a pour résultat la réduction de l'effet du film de refroidissement sur la surface. La présence d'un gradient de pression défavorable, même à taux d'injection élevé tend à dissiper le jet dans l'écoulement transversal, plus qu'il le soit pour un même taux d'injection pour un gradient nul ou favorable.

f- Effet de l'intensité de la turbulence de l'écoulement principal :

KADOTANI et GOLDSTEIN [39], montrent une légère modification du champ de vitesse pour les faibles niveaux de turbulence ( $\sim 0,1D$ ). Aussi, lorsque l'échelle de turbulence augmente, l'épaisseur de la couche limite augmente aussi, ce qui laisse créer une difficulté pour leur découplage d'une épaisseur supérieure à  $0,33D$  et un taux de turbulence au delà de 8%.

HARTNETT [40] a montré de son côté, que l'efficacité du transfert thermique diminue légèrement avec l'augmentation de l'intensité de la turbulence. D'autre part, MAYHEW et BAUGHN [41], confirment par leurs études expérimentales, les résultats obtenus par les auteurs sus cités. Ils ont varié différents paramètres pour une rangée de jets de cristaux liquides thermochromiques à travers un écoulement d'air transversal passant sur une plaque plane. Les taux de turbulences de l'écoulement transversal était de 0,1 et 10% , des rapports d'injection de 0,5 et 1,5 et les cas de coefficient de transfert thermique pris en considération, aussi bien que le cas adiabatique.

DROST, BÖLCS et HOFFS [42], ont étudié l'effet de l'intensité de turbulence de l'écoulement transversal, utilisé des cristaux liquides pour leurs expériences pour deux taux de turbulences différents correspondants à deux nombres de Mach différents. Ils ont observé que la turbulence de l'écoulement transversal réduit l'efficacité à des rapports d'injections bas et modérés, alors qu'elle l'augmente pour un fort taux d'injection à cause d'une meilleure dissipation des jets détachés dans la couche limite.

TYAGI et al. [43], [25], ont remarqué une grande influence de l'intensité de la turbulence du jet au voisinage de l'orifice. Aussi, d'autre part, près du champs de l'orifice, ils ont constatés des valeurs considérablement grandes, des fluctuations des vitesses  $u'u'$  et  $v'v'$  et des contraintes de turbulences avec les longueurs de mélange de l'écoulement transversal dans la région  $1 < x/D < 3$ .

g- Effet de l'écart de température :

Le comportement des jets chauds dépend non seulement des vitesses du jet et de l'écoulement transversal, mais aussi de l'écart de température entre eux, car la masse volumique dépend directement de la température, d'où une différence du rapport de masse volumique.

KAMOTANI et GREBER [44], ont constaté que dans un plan transversal au jet, la diffusion de la température est un peu plus étendue que la diffusion de quantité de mouvement pour un faible rapport de quantité de mouvement ( $J = 15,3$  et  $\Delta T = 320^\circ F$ ). Lorsque le jet est introduit dans un écoulement transversal, la température devient presque axisymétrique, ce qui est différent pour le cas du champ de vitesse. Pour un rapport de quantité de mouvement assez élevé ( $J = 59,6$ ), l'effet des tourbillons est grand et la distribution de pression statique est semblable à celle de la température, comme l'indique les observations faites à partir du grand nombre d'expériences effectuées par les deux auteurs suscités.

L'écart entre les trajectoires représentées par des maximums de vitesse et de température, augmente d'une part avec le rapport de quantité de mouvement  $J$  et d'autre part, avec l'écart de température, lorsque la valeur du rapport des masses volumiques augmente et  $J$  est fixé.

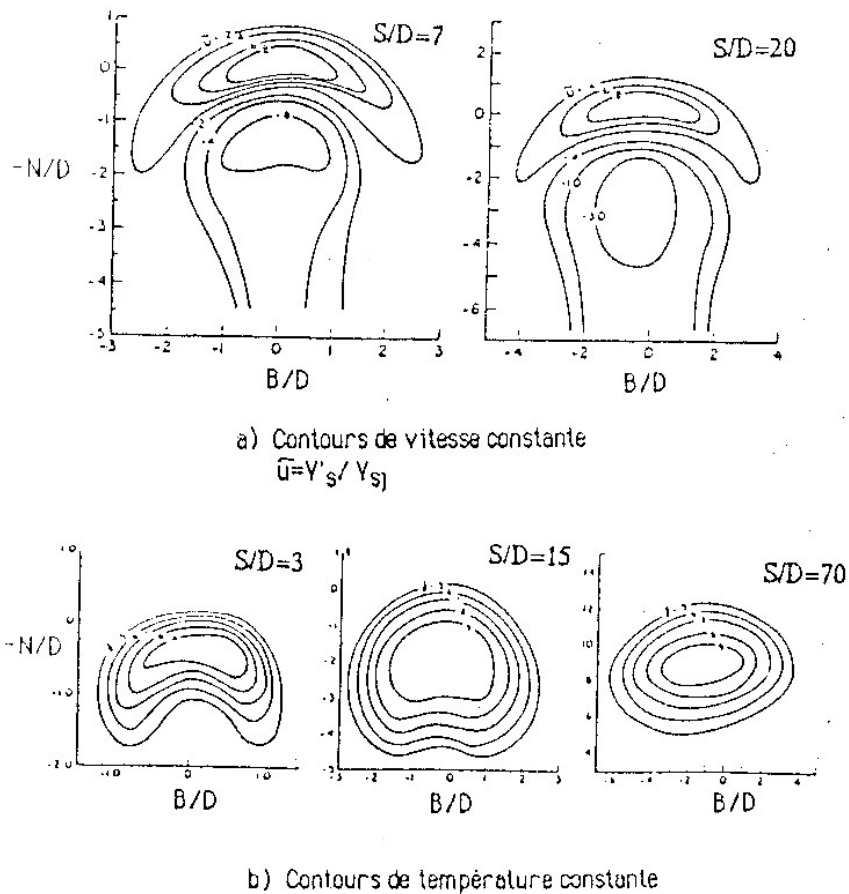


Figure 1.13 : Contours d'iso-vitesses et d'iso-températures pour un jet avec  $J=15.3$  et  $\Delta T=320^\circ F$  [44].

BERNHARD [2], a constaté de sa part que la distribution de la température semblait augmenter linéairement avec le rapport de température à faible taux d'injection.

#### h- Influence des paramètres géométriques de l'injection (shaped hole) :

Le comportement de jets à travers un écoulement transversal, sortant d'une ou de plusieurs rangées, a été longuement étudié, aussi bien expérimentalement que numériquement, pour le cas des trous de géométrie cylindriques. Toutefois, d'autres géométries de trous ont été étudiées.

BURD et SIMON [31], ont étudié expérimentalement, l'influence des rapports de la longueur du trou et de l'épaisseur de la plaque, sur le diamètre du trou et sur la

configuration du jet à travers un écoulement principal sur une plaque plane. Ils ont conclu que l'épaisseur de la plaque plane ainsi que la longueur du trou n'avaient pas un grand effet sur la configuration du jet, pour un même diamètre.

D'autre part, BARTHLET et BARIO [32], ont testé une nouvelle configuration de trous, qui est légèrement conique (divergent) à l'aval. Cette nouvelle configuration a influé sur la trajectoire du jet par rapport à une configuration normale, à cause de la diminution de la vitesse du jet au niveau de la conicité du jet d'où diminution du taux d'injection.

BUNKER [45], a étudié deux différentes géométries de trous oblique avec une profondeur de trous  $S/D$  de 3 et de diamètres extérieurs respectifs de 1,13 et 1,5 et a remarqué une amélioration de 50 à 75% de l'efficacité dans la région  $x/D < 40$  pour la deuxième configuration par rapport à la première.

TYAGI [23], [25], a utilisé trois types de trous carré, utilisés précédemment par HAVEN. Il a constaté l'effet de la géométrie sur le sillage du jet, il favorise parfois l'expansion sous forme de fer à cheval sur les vortex contrarotatifs cylindriques et parfois, le contraire.

KIM et KIM [46], ont étudié cinq formes différentes de trous et en ont constaté que cela influe sur l'importance de l'influence du taux d'injection.

#### i- Influence de l'effet de courbure de la paroi (curvature effect) :

L'effet de courbure a suscité l'intérêt de beaucoup d'auteurs et cela depuis la moitié des années 70. CHIESTEL[47] rapporte que l'effet de courbure présente des analogies avec les effets des forces de gravité et qu'il pouvait être décrit par le biais d'un nombre de courbure, appelé nombre de RICHARDSON.

DAVIDSON et al. [48], [49], [50], [51] et [52], ont étudié l'effet de courbure sur des écoulements transversaux sans présence de jets. L'influence de la courbure sur le jet est automatique, puisqu'elle influe sur l'écoulement transversal, qui lui influe sur le jet. DAVIDSON et al. ont étudié la séparation des écoulements à travers les surfaces courbées. L'effet de courbure se fait remarquer au niveau des trajectoires d'écoulement, il a un effet significatif sur la turbulence. Le rapport de l'épaisseur de la courbure  $\delta$  avec son rayon  $R$  est un paramètre qui quantifie les effets de courbures dans la turbulence, en y rajoutant des termes aux équations de celle-ci.

PERZON [53], rapporte que la courbure de l'écoulement affecte la turbulence et que cette courbure est mesurée à l'aide d'un rayon de courbure  $R_c$ .

LARSSON [54], rapporte que le coefficient de transfert thermique est réduit de 15 à 20% pour une surface convexe par rapport à une même surface non courbée pour les régions turbulentes.

BELDBERG [55] rapporte que la couche limite sur une paroi convexe correspondait à une situation stable, où l'énergie de turbulence a tendance à diminuer. Alors que, sur une paroi concave, l'effet est déstabilisant et l'énergie de turbulence tend à augmenter. Cela a aussi été rapporté par CHIESTEL et DAVIDSON et al. dans leurs documents.

GEHRER, WOISETSCHLÄGER et JERICHA [56], rapportent de leur cote que les écoulements autour des surfaces courbées sont généralement associés au nom de « Coanda-effect ». Leur étude sur un jet à travers un écoulement transversal passant par une surface courbée (aube de turbine), montre que les couches limites avaient tendance à se courber au niveau des surfaces. D'autre part, RUMSEY et al. [57], [58] ont étudié l'effet de courbure sur différentes configurations à écoulements externe et interne et décrivent aussi le paramètre  $\delta/R$  comme étant indicateur du degré de courbure. En général, pour  $\delta/R < 0,01$ , on a une courbure légère de la paroi, alors que pour  $0,1 < \delta/R < 1$ , cela représente une courbure modérée à forte.

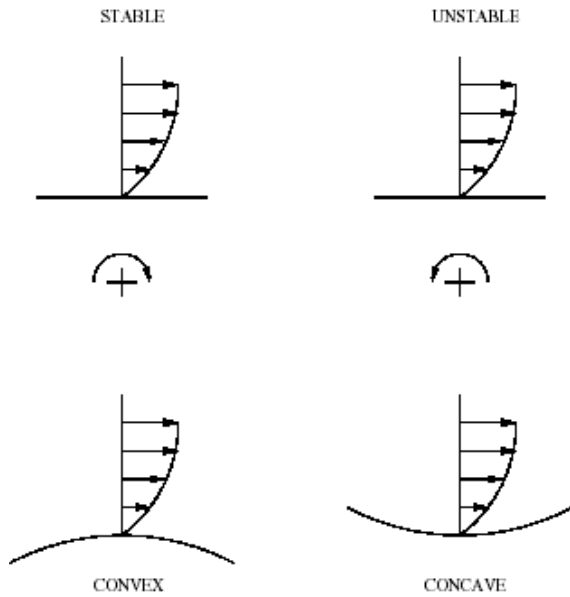


Figure 1.14 : Stabilité des écoulement rotatifs et courbés. [55]

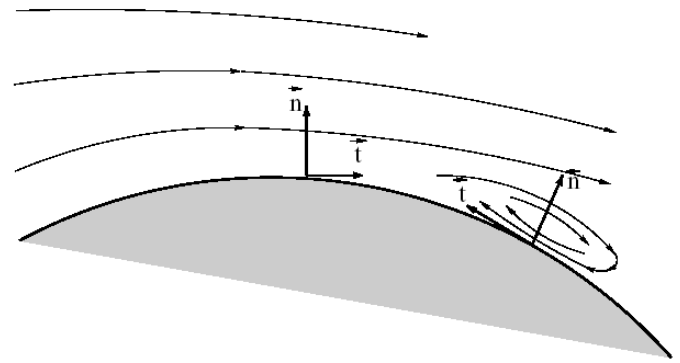


Figure 1.15 : Aspect de décollement et de création des tourbillons dues à la courbure de la paroi. [53]

WAGNER et al. [59] ont utilisé des cristaux liquides pour leur expérience, ce qui a été largement utilisé pendant ces dernières années, pour étudier l'effet de courbure sur le mélange jet-écoulement transversal. Ils ont trouvé qu'il y avait une influence significative sur le transfert thermique dans certains cas.

### 1.2.2.3- Aspect thermique des interactions jet - écoulement principal :

Plusieurs paramètres affectent et influent sur le transfert thermique et l'efficacité de refroidissement, comme il a été rapporté par la littérature ci-dessus. Les taux d'injections, l'épaisseur de la couche limite, le rapport de masses volumiques des deux écoulements, l'intensité de la turbulence de l'écoulement extérieur, l'écart de la température ainsi que la courbure de la paroi, influent considérablement sur le transfert thermique et le coefficient d'échange.

FOUGERES et al. [26], déduisent à partir de leurs expériences, que pour le cas d'un jet chaud à travers un écoulement transversal, les profils de températures maximum, mesurés en aval de l'orifice d'injection, présentent un effet positif de transfert thermique entre le jet et la paroi et que l'on pouvait le constater jusqu'à dix diamètres de trous en aval de l'orifice. Par contre, la présence de profils de température minimale, en aval de l'orifice,

donne un effet négatif sur le transfert thermique et le coefficient d'échange. Cela est expliqué par le fait de la déviation de l'air de l'écoulement principal par des tourbillons, ce qui le pousse à se glisser au dessous du jet et de laisser une couche mince, de cet air, se former sur la paroi.

DIZENE [60] a effectué des travaux expérimentaux sur l'influence de certains paramètres sur le transfert thermique en écoulement extérieur et compressible. Il montre que lorsque le nombre de REYNOLDS est fixe et que le nombre de MACH est assez élevé ( $\sim 0,8$ ), certaines différences sont observées sur le champ d'interaction par rapport à ceux obtenus pour le cas d'un bas nombre de MACH.

REISS et BÖLCS [37], comme indique dans la section « 1.2.2.2 » partie « c », réaffirment à travers leurs études expérimentales, ce qui a été trouvé précédemment dans la littérature. Ils ont conclu que la combinaison des effets des nombres de REYNOLDS et de MACH, pour une même expérience avec les mêmes conditions, affecte un peu le transfert thermique et le coefficient d'échange. Aussi, pour un grand nombre de MACH, avec un nombre de REYNOLDS variant, bas ou élevé, le coefficient d'échange ne dépend que de la géométrie du nombre de rangées de jets ainsi que du taux d'injection. Toutefois, il est intéressant de mentionner que le coefficient d'échange ainsi que le transfert thermique sont légèrement différents que ceux obtenus par un bas nombre de MACH. Cela confirme ce qui a été constaté par DIZENE [60] auparavant. Cette influence du rapport d'injection a aussi été mise en évidence par les travaux de DIZENE [60], puis par CHERRARED [61], [84].

La figure 1.16, établie par LAKSHMINARAYANA [1], montre le détail du taux de transfert thermique nécessaire pour le refroidissement d'une aube de turbine.

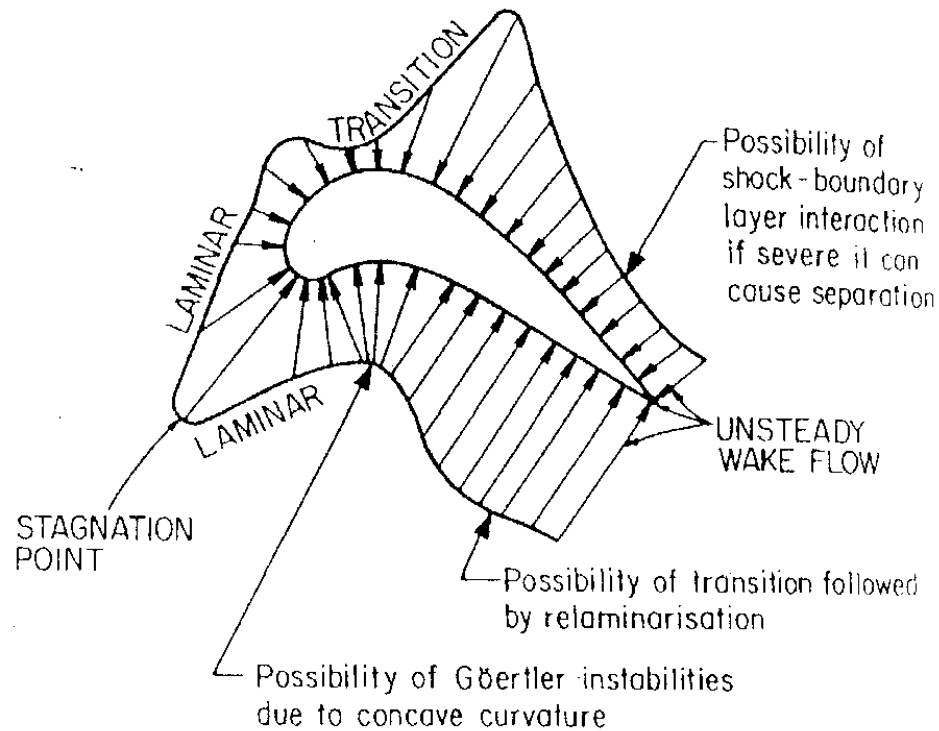


Figure 1-1 : Détails du taux de transfert de chaleur autour d'une aube de turbine.  
(Adapté de Daniels et Schultz, 1982, par Lakshminarayana, 1996)

Figure 1.16 : Détail du taux de transfert de chaleur autour d'une aube. [1]

#### 1.2.2.4- Choix du rapport d'injection :

L'analyse bibliographique a montré donc que le rapport d'injection est un paramètre important, affectant l'allure de l'interaction entre le jet et l'écoulement transversal, ainsi que pour le transfert thermique et le coefficient d'échange. Toutefois peu d'auteurs ont expliqué les causes de leurs choix ainsi que leurs objectifs.

Le taux d'injection est généralement définie comme étant le rapport du débit massique du jet sur celui de l'écoulement principal :

$$Ra = \frac{\rho_j \cdot U_j}{\rho_e \cdot U_e}$$

avec :

$U_j$  et  $U_e$  : respectivement les vitesses du jet et de l'écoulement principal.

$\rho_j$  et  $\rho_e$  : respectivement les masses volumiques du jet et de l'écoulement principal.

Pour le cas de jets obliques bidimensionnel, la vitesse du jet possède deux composantes :



$$U = U_j \cos \alpha \quad \text{et} \quad V = U_j \sin \alpha$$

avec :

$\alpha$  : angle du jet.

Certains auteurs lient le taux d'injection avec le rapport des quantités de mouvement des deux écoulements :  $J = \rho_j \cdot U_j^2 / \rho_e \cdot U_e^2$ , afin d'étudier l'impact de l'injection et son processus de pénétration.

La littérature a montré que pour les forts taux d'injection, où le débit massique du jet est plus important que celui de l'écoulement principal, on utilise le rapport  $J$  comme moyen d'étude. Alors que, pour les faibles rapports d'injection, c'est le rapport  $Ra$  qui est pris en considération comme paramètre d'étude. La différence entre les deux paramètres est attribuée au rapport des masses volumiques et par transitivité à la différence de température entre les deux écoulements, au nombre de MACH ou à la nature de ces deux écoulements.

Il est toutefois suggéré, dans la littérature, pour le cas de refroidissement à l'aide d'injection bidimensionnelle, avoir un faible taux d'injection, pour faciliter la création de la couche limite. Ainsi, on a un meilleur refroidissement, un meilleur coefficient de transfert thermique et on évite la création des tourbillons, qui ont un effet négatif sur le refroidissement.

MAURICE, LEBOEUF et KULISA [14], pour une rangée de jets normaux, ont montré que le taux d'injection de  $2/3$  a donné des résultats satisfaisants, comparativement à ceux avec un taux d'injection  $5/3$ , qui a fait apparaître un pic de tension de REYNOLDS, à la paroi, dans la zone de l'injection, ce qui est négatif pour le transfert thermique.

De leur part REISS et BÖLCS [37], pour des rapports d'injection allant de  $0.3$  à  $1.5$  et un angle d'inclinaison de  $40^\circ$ , ont conclu que le taux d'injection  $0,3$  a donné de meilleurs résultats pour un nombre de REYNOLDS de  $10^6$ .

De leur côté JANSSON et DAVIDSON [62] rapportent de la littérature, que le maximum d'efficacité d'écoulement par film au voisinage de l'orifice s'obtient pour un rapport d'injection de  $0,5$ .

KIM et BENSON [63], ont rapporté qu'à partir d'un taux d'injection de 0,6, y' avait formation de tourbillons contrarotatifs.

Dans cette étude, on choisit la définition liée au débit massique à cause du faible taux d'injection dans notre étude compressible.

#### 1.2.2.5- Interaction au voisinage de l'orifice :

Lorsque le rapport des vitesses d'injection par rapport à l'écoulement extérieur est faible, les jets sont rabattus vers la paroi juste après la sortie des orifices. L'effet de vitesse mesurée à la sortie du jet pour des rapports d'injection de 0.1 et 0.24, présentent une dissymétrie, une importante décélération du côté amont et une forte accélération du côté aval de l'orifice, selon BERGELES, GUSMAN et LAUDER [64]. Ils montrent que les  $\frac{3}{4}$  du débit d'injection passent dans la moitié aval de l'orifice à une vitesse égale à trois fois celle moyenne du jet.

DUCHÊNE [5], confirme l'existence de cette vorticité importante sur la périphérie sous forme de tourbillons organisés.

FOUGERES et al. [26] rapportent aussi que le mouvement entrant du fluide s'accompagne avec une déviation de l'écoulement vers la paroi plane.

ROTH, FEARN et THAKUR [18] affirment d'après des mesures et des observations effectuées, que la région de séparation de l'écoulement aux abords de l'orifice sont dominées par des tourbillons.

KIM et BENSON [63] affirment de leur côte que pour des tests avec différents angles d'injection 0 , 30 , 60 , 80  et 90 , que les tourbillons contrarotatifs commençaient à se créer à partir de 60 .

KAMOTANI et GREBER [44] affirment que pour des forts taux d'injection, le jet présente un profil de vitesse uniforme. Aussi, ils remarquent l'existence d'un cône potentiel peu influencé par l'écoulement principal.

#### 1.2.2.6- Caractéristiques (les zones de paroi, de mélange et de région aval du jet :

La nature particulière du jet, par rapport à l'écoulement transversal équivalent peut former des mouvements de zones tourbillonnaires dans le jet lui même.

HUANG [65], rapporte que le jet à la sortie qui présente un cône à potentiel, laisse des gradients maximaux de vitesses situés à sa frontière externe. Ces gradients étant du type  $\partial V_s / \partial n$  et  $\partial V_s / \partial b$ , où on peut y associer une vorticité  $\Omega$ , qui est présentée comme un anneau tourbillonnaire au niveau de l'orifice. Sous l'effet de la déflexion du jet dans le plan (s,n), deux structures tourbillonnaires contrarotatives ( $\Omega_{s1}$ ,  $\Omega_{n2}$ ) apparaissent. Au niveau de la zone, où la déflexion du jet est réalisée, l'intensité des tourbillons passe par un maximum, pour aller se décroître plus loin.

Les visualisations des ligues de courant pariétales pour un taux d'injection égale à 0.24, faites par BERGELES, GUSMAN et LAUDER [64], mettent en évidence ces tourbillons qui s'étirent vers l'aval.

MAURICE, LEOEUF et KULISA [14] rapportent qu'un jet introduit dans un écoulement avait un comportement très complexe étant dominé par de nombreuses structures tourbillonnaires. Pour la zone située à l'orifice de l'injection, il existe deux tourbillons contrarotatifs, nommés  $\Omega_1$ , et qui confèrent un jet classique en « haricots ». Pour des nombres de REYNOLDS assez faibles, la périphérie du jet est influencée par enroulements toriques  $\Omega_2$ , rencontres également dans le cas des jets libres, mais déformés ici par l'écoulement transversal. Un jet débouchant au niveau d'une paroi sur laquelle se développe un écoulement visqueux du type d'une couche limite, est influencée par des structures tourbillonnaires supplémentaires. Une paire de tourbillons en fer à cheval  $\Omega_3$ , induits par le ralentissement de la couche limite transversale sous l'influence du jet, s'enroule autour de celui-ci. Ces deux tourbillons  $\Omega_3$ , tournent en sens opposé par rapport

aux tourbillons  $\Omega_1$ . La face avale du jet est de son côté, siège d'enroulements tourbillonnaires  $\Omega_4$ , liés à l'existence de zones d'accumulation de fluide entre les points de selle  $S_1$ , et  $S_2$ , alimentés en grande partie par la couche limite transversale. Il est très possible que les mouvements tourbillonnaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_4$  soient conjointement responsables de la structure du jet à une distance donnée à l'aval de l'orifice d'injection. Les sources de tourbillons  $\Omega_5$ , sont liés aux interactions entre les gradients de pressions et de masses volumiques, alors que  $\Omega_1$  et  $\Omega_4$  ne sont que des réorientations de la vitesse dans le jet ou la couche limite amont. CHARBONNIER [69] a proposé la figure (1.17), qui est assez récapitulative.

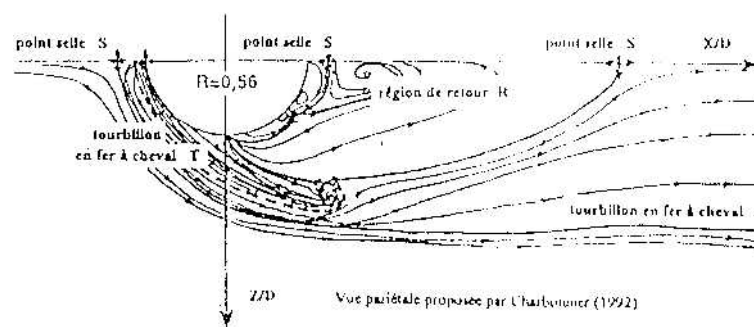


Figure 1.17 : Vue pariétale de la configuration d'un jet. [69]

#### 1.2.2.7-Modélisation numérique de l'interaction jet - écoulement transversal :

Le champ d'interactions entre une ou plusieurs rangées de jets et un écoulement transversal, ne cesse de susciter l'attention des auteurs depuis le début des années 60. La résolution des équations de NAVIER-STOCKES, fut l'une des premières méthodes d'approche utilisée, comme le rapporte la littérature. BERGELES, GOSMAN et LAUDER [21], ont utilisé des équations de NAVIER STOCKES sous forme de moyenne statistique et n'ont obtenu des résultats satisfaisants que pour le cas de nombre réduits de jets. ROTH [18], a utilisé un code de calcul basé sur un outil de flux partiellement fondu pour des équations de NAVIER STOCKES pour une couche mince dans un cas tridimensionnel. La ligne centrale du jet fut estimée, alors pour les tourbillons contrarotatifs, cela l'est moins, à cause du maillage peu raffiné. FOUGERES et HEIDER [70] ont utilisés un code de calcul se basant aussi sur les équations de NAVIER STOCKES tridimensionnels complétées avec un modèle de turbulence basé sur la longueur du mélange « mixing-

length » de MICHEL, pour le cas de deux rangées de jets, avec la méthode des volumes finis. Ils ont obtenu des résultats satisfaisants.

GEHRER, WOISETSCHLÄGER et JERICHA [56], ont utilisé de leur côté les équations bidimensionnelles de NAVIER STOCKES pour l'estimation des jets sortants d'une surface courbée et entrant dans un écoulement principal.

KIM et BENSON [63], ont utilisé un modèle de turbulence à échelles de temps multiples, pour l'évaluation d'un jet sortant d'un trou cylindrique et traversant un écoulement transversal. Les résultats obtenus, confrontés à ceux obtenus expérimentalement, ont donné des résultats satisfaisants. Ils indiquent que ce modèle peut résoudre l'influence du déséquilibre dû à la turbulence, ainsi que les cascades de l'énergie cinétique de turbulence, ce qui est rarement le cas des modèles de turbulence à échelle de temps unique.

CHIU et al. [17] ont utilisé deux modèles, pour définir l'interaction entre jet et écoulement principal. Le modèle à zéro équation de BALDWIN-LOMAX et celui à une équation de BALDWIN-BARTH. La comparaison avec les résultats expérimentaux, a donné une faible différence entre eux, sauf pour les petites régions immédiates à l'orifice du jet.

PATANKAR et al. [12] et MAURICE et al. [14], ont utilisé de leur côté un modèle de turbulence à deux équations  $k$ - $\epsilon$ , pour calculer le champ de turbulence dans une couche limite en présence d'injections discrète à la paroi. Ce modèle de turbulence à bas nombre de REYNOLDS a donné des résultats satisfaisants, en général, comparativement à l'expérience.

DEMUREN [7] et [8], a de son côté utilisé des modèles  $k$ - $\epsilon$  et celui des contraintes de REYNOLDS RSM, pour évaluer l'effet du modèle dans le calcul d'un jet à travers un écoulement transversal. Il fait remarquer que dans le modèle RSM, le concept de viscosité tourbillonnaire n'est pas évoqué et que les équations différentielles partielles sont résolues

à partir des équations de contraintes de REYNOLDS. Le modèle RSM a donné de meilleurs résultats que ceux de  $k-\varepsilon$ , comparé aux expériences. DEMUREN [7] et [8], a effectué une synthèse bibliographique riche et rare dans le domaine de modélisation d'interaction jet – écoulement principal.

JANSSON et DAVIDSON [62], ont confronté les résultats obtenus par les modèles de turbulence RSTM à bas nombre de REYNOLDS de SHIMA avec le modèle  $k-\varepsilon$  et les résultats expérimentaux. Ils ont trouvé que les résultats obtenus avec le modèle RSTM sont meilleurs que ceux avec  $k-\varepsilon$ . Cela est dû probablement à la sensibilité du modèle RSTM aux trajectoires courbées et à la turbulence anisotropie.

MEDIC et DURBIN [66] et [67], ont de leur côté confronté les résultats obtenus par les modèles à deux équations  $k-\omega$ ,  $k-\varepsilon$  et  $f-v^2$ . Ils ont trouvé que les résultats trouvés avec les modèles de turbulences  $k-\varepsilon$  utilisant un lien avec échelle turbulente de temps  $T$  et  $f-v^2$  ont donné de meilleurs résultats.

KULISA, LEBOEUF et PERRIN [68], ont utilisé une méthode intégrale basée sur les principes de conservation de masse, de conservation de quantité de mouvement et de conservation d'énergie. Les résultats obtenus, à partir du modèle de turbulence de CEBCI-SMITH, ont été confrontés avec ceux-ci. La satisfaisabilité des résultats ainsi que la stabilité du modèle, ont été vérifiées. La modélisation numérique de cette méthode a été effectuée, plus tard, sur la base des travaux de HUANG [65], de Maurice et al. [14] et de KULISA et al. [68], pour la construction du code ECL. Ce code a fait l'objet de validation de ces résultats pour le refroidissement par film, par FOUGERES et al. [26]. Ils rapportent que ce code de calcul utilise deux modèles de turbulence. Celui de CEBCI-SMITH, qui nécessite la spécification des abscisses du début et du film de transition, et le modèle de Mac DONALD-FISH, à une équation de transport intégrale de l'énergie cinétique turbulente, qui inclue une évaluation de la zone de transition laminaire - turbulente. Ce code donne la possibilité pour la couche limite d'interagir avec la répartition du nombre de MACH à la paroi. Cette interaction est forte pour les cas de décollements, elle est réalisée par une méthode de petites perturbations (injection à la paroi), lors de balayages amont - aval sur

le champ. Cela permet l'introduction d'un aspect elliptique aux équations de la couche limite, qui sont habituellement de type parabolique.

THAKUR et al. [71], ont utilisé un modèle à bas nombre de Reynolds. HEIDMANN et al. [72], ont effectué une simulation aux grand échelles (LES) en séparant le tourbillon de refroidissement du film et en ont constaté une moindre diffusion par rapport à l'expérience. D'un autre coté [73], ils ont utilisé de leur coté un modèle de Spalart-Allamaras pour simuler un tourbillon détaché (DES), deux améliorations ont été constatées, l'une c'est l'indépendance des résultats aux maillage et la non nécessité de la symétrie pour les configurations étudiées.

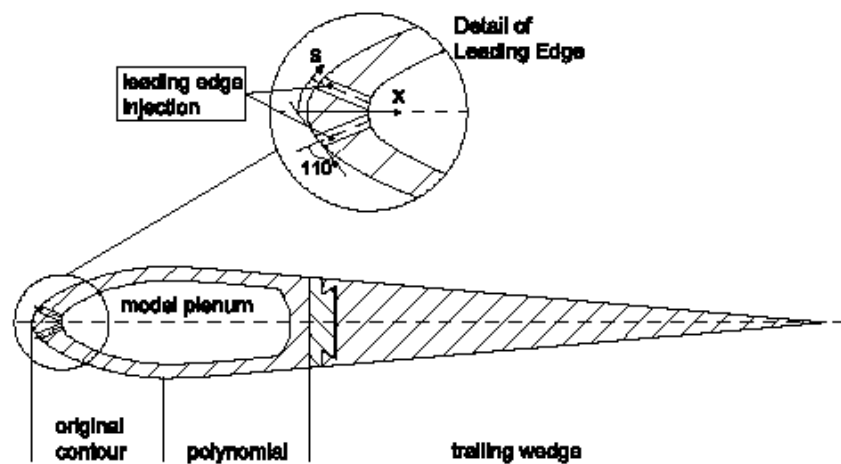


Figure 1.18 : Géométrie du modèle de l'aube utilisé par HASLINGER et HENNECKE [74], [75]

LAKEHAL et al. [74], [75], ont confronté les résultats de plusieurs modèles de K- $\epsilon$  pour un jet à travers une aube utilisée auparavant par HASLINGER et HENNECKE, et pour y contribuer à l'établissement d'un code puissant. Ils ont confronté deux autres types de K- $\epsilon$  (standard et à bas nombre de Reynolds) pour le cas d'un jet à travers une plaque plane [29].

GARG et al. [76], [77], [78], ont utilisé le modèle K- $\omega$  de WILCOX, et lui ont donné d'assez bons résultats confrontés à l'expérience pour un jet à travers une aube de turbine. SCHLÜTER et SCHÖNFELD [79], ont de leur coté utilisé une simulation aux

grandes échelles (LES) pour y remédier au problème. PRIÈRE [10] a effectué aussi une simulation aux grandes échelles (LES) pour des jets turbulents et a obtenu des résultats satisfaisants pour un nombre de Reynolds élevé, mais reste dépendant d'un choix de maillage non structuré pour permettre son raffinement.

TYAGI et al. [43], a obtenu des résultats satisfaisants pour une simulation en (LES) avec un jet vertical à travers un écoulement transversal ayant une intensité de turbulence de 15%. Aussi, TYAGI [89], a confronté d'un autre côté les résultats obtenus par des méthodes de simulations directs (DNS), avec ceux aux grandes échelles (LES) et ceux avec des équations de N-S avec moyenne de Reynolds (RANS). D'autre part [81], il a effectué d'autres simulations avec le modèle RSTM pour des jets à trous carrés qu'il a confronté avec l'expérience qui ont donnés des résultats assez pauvres en ce qui concerne les contraintes de Reynolds au voisinage de l'orifice.

JONES [82], a utilisé un nouveau modèle  $\overline{v^2}f-k\varepsilon$  et l'a confronté avec l'expérience et les modèles  $\overline{v^2}f-k\omega$  de DURBIN,  $k-\omega$  de WILCOX et  $k-\varepsilon$  à bas nombre de Reynolds. Il en a conclu que le nouveau modèle  $\overline{v^2}f-k\varepsilon$ , ainsi que le modèle  $\overline{v^2}f-k\omega$  ont donné de meilleurs approches aux résultats expérimentaux.

De son côté, DUCHÊNE [1], a utilise le code MATHILDA, basé sur le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$ , pour la résolution du problème de refroidissement des aubes de turboréacteurs par film. Il trouve que ce code est bien adapte pour l'étude du refroidissement par film et que les résultats relatifs à la turbulence et à l'épanouissement d'un jet issu d'une plaque plane dans un écoulement transversal sont satisfaisants. Néanmoins, il nécessite un maillage raffine dans certains endroits, ce qui est coûteux en temps de calcul.

D'autres codes de calculs, qui sont commerciaux, existent et peuvent aussi, résoudre les problèmes d'interaction entre jets discrets et écoulements transversaux. C'est le cas du code PHOENIX, utilisé et validé par GRAHAM et BREMHORST [19], pour le refroidissement par film, le code FAST3D, utilise par AZZI [15] dans son étude et enfin le code FLUENT.



### 1.2.3- Synthèse bibliographique :

L'analyse bibliographique faite précédemment, nous a permis de savoir que les études tant expérimentales que numériques à fort taux d'injection, sont nombreuses. Aussi, les études qui se sont intéressées sur la géométrie de l'interaction du jet avec l'écoulement transversal, donnent des descriptions détaillées sur les structures tourbillonnaires.

Cependant, leur évolution ainsi que leur interactions ont été peu étudiées. Parmi les paramètres d'interaction les plus influents qui sont retenus, on en cite, le taux d'injection, qui influe directement sur la trajectoire du jet et qui permet la formation des structures tourbillonnaires, qui sont néfastes au transfert thermique, et se créent facilement à partir d'un taux de 0.5. d'autre part, l'influence du nombre de MACH, la différence de température entre les deux écoulements, le taux de turbulence de l'écoulement principal, la courbure de la paroi ainsi que le rapports des masses volumique, sont tous aussi importants les uns, que les autres. Ce dernier paramètre, est d'une façon, lié avec le taux d'injection et/ou le gradient de température. Un nombre de MACH maximal de 0.5 du jet, peut nous éviter la création des tourbillons et laisser le jet se courber sous l'effet de l'écoulement transversal et se dévier vers la paroi en y créant un film protecteur. Le taux de turbulence et une courbure de la paroi, forts, ne sont pas recommandés.

En ce qui concerne les modélisations numériques, les structures tourbillonnaires, n'ont presque pas été pris en compte, vue la difficulté de les cerner et de les mettre en évidence.

La courbure de la paroi, bien qu'elle soit un paramètre très réaliste (aubes, ailettes) et influe de façon non négligeable sur les écoulements, n'a pas suscité l'intérêt, ni fait l'objet d'études des auteurs, à grande échelle, que ces dernières années.

L'objectif à atteindre dans ce travail, peut être résumé comme suit :

- Explication des mécanismes de transfert des quantités de mouvement dans le cas d'une surface courbée.
- Faire la lumière sur l'influence de la courbure de la paroi sur l'interaction et valider les résultats avec ceux expérimentés et/ou avec d'autres modèles, si possible.

## CHAPITRE 2 FORMULATION MATHÉMATIQUE

L'étude de l'interaction des jets discrets entrant avec un écoulement transversal compressible, nécessite une formulation mathématique des équations qui gouvernent ce phénomène physique.

L'écoulement transversal à étudier est un écoulement de couche limite turbulente compressible, régi par des équations bidimensionnelles de NAVIER STOKES et de nature elliptique. Les équations gouvernant le phénomène d'interaction entre les deux écoulements, sont donc de type différentielles aux dérivées partielles de type elliptiques. Elles sont non linéaires et non couplées. Pour des cas simples, les solutions analytiques peuvent y être envisager, mais pour des cas plus réalistes, seules les solutions expérimentales et numériques le sont.

Pour cette étude, l'approximation des contraintes de REYNOLDS a été faite par le modèle RSM.

### 2.1-Equations générales :

Les équations du problème ont été tirées des principes fondamentaux de la mécanique des fluides et du transfert thermique. Leur comportement est en général gouverné par les équations de continuité, de NAVIER STOKES et de l'énergie. ils sont présentés sous leur forme tensorielle, comme suit [85] :

#### - Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot U_j) = 0 \quad (2.1)$$

#### - Equations de NAVIER-STOCKES :

$$\frac{\partial (\rho \cdot U_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot U_j \cdot U_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) + F_{ext} \quad (2.2)$$

- Equation d'énergie :

$$\frac{\partial(\rho.T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho.U_j.T) = \frac{\partial}{\partial x_j} (J_{Ti}) + S_T \quad (2.3)$$

où :

$F_{ext}$  : Forces extérieures de volume.

$\tau_{ij}$  : tenseur des contraintes

$\delta_{ij}$  : nombres de KRONECKER

$J_{Ti}$  : flux diffusif

$S_T$  : taux net de production de T et de son destruction

Dans notre cas, le fluide d'étude est NEWTONNIEN. Le flux diffusif  $J_{Ti}$  et le tenseur des contraintes  $\tau_{ij}$ , sont respectivement liés avec le gradient de température T et le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}$ .

$$J_{Tj} = \frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \quad (2.5)$$

$$S_T = \frac{U_j}{C_p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{q}{C_p} + \frac{\varphi}{C_p} \quad (2.6)$$

$$\text{où : } \varphi = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

avec :

q : source de génération de chaleur interne

$\varphi$  : fonction de dissipation

$\mu$  : viscosité du fluide

Pr : nombre de PRANDTL

$$(Pr = C_p \cdot \mu / \lambda)$$

$\lambda$  : coefficient de conductivité thermique.

Pour adapter les équations à notre problème, on a posé les hypothèses suivantes :

1- régime d'écoulement stationnaire

$$(\partial/\partial t = 0)$$

2- fluide compressible

$$(\partial\rho/\partial x_j \neq 0)$$

- 3- forces de volumes négligeables  $(F_{ext} = 0)$
- 4- écoulement bidimensionnel et elliptique  $(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} = 0)$
- 5- les propriétés thermophysiques du fluides, sont supposées constante ( $\sim$  gaz parfait)
- 6- génération de chaleur nulle  $(q = 0)$

Cependant, il est reporté par TAINÉ et PETIT [86], que pour des températures de l'air comprises entre 250 et 1200 K, la chaleur spécifique  $C_p$  et le coefficient de conductivité thermique  $\lambda$ , dépendaient faiblement de la température. La connaissance des quantités du flux diffusif  $J_{T_i}$  et du tenseur des contraintes, ne nous permet pas désormais la fermeture des équations de conservations à cause de l'aspect compressible du problème. Une équation supplémentaire est nécessaire. Cette équation est l'équation des gaz en équilibre thermodynamique.

$$P = \rho.R.T \quad (2.8)$$

avec :

$R$  : constante des gaz parfaits.

Le remplacement des équations (2.4) à (2.7) dans les équations (2.1) à (2.3) et le respect des six hypothèses sus cités, le système d'équations formé des équations de (2.1) à (2.3), devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho.U_i) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho.U_i.U_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho.U_j.T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{U_j}{C_p} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\tau_{ij}}{C_p} \cdot \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \quad (2.11)$$

Le système d'équations est formé de l'équation de continuité (2.9), de deux équations de NAVIER STOKES en  $x_i$  et  $x_j$  (2.10), d'une équation d'énergie (2.11) et d'une

équation d'état des gaz parfaits (2.8); qui est ainsi constitué de cinq équation pour cinq inconnues :  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $U_i$ ,  $U_j$  ; Cela assure la fermeture du système d'équations.

## 2.2-Equation régissant les écoulement compressibles en régime turbulent :

### 2.2.1-Introduction :

La plupart des écoulements d'intérêt technologiques sont turbulents, d'où l'importance de comprendre les mécanismes fondamentaux de ces écoulements. La turbulence est une propriété de l'écoulement et non de la nature du fluide lui-même. Les écoulements turbulents sont instables et contiennent des fluctuations, sont aléatoires dans l'espace et dans le temps, ont un effet diffusif très fort et sont fortement rotationnels. Les trajectoires de l'écoulement du fluide ont un caractère imprévisible. Les petites perturbations apparaissent pour des écoulements laminaires à basse viscosité et à des nombres de REYNOLDS ou de RAYLEIGH élevés. Toutefois, la stationnarité de l'écoulement laminaire ne peut pas être infiniment maintenue même à bas nombre de REYNOLDS. Une cascade de tourbillons à échelles, de plus en plus petites est créée à partir d'un processus non linéaire de termes d'inertie des équations de mouvement. La présence de fort gradients de vitesse instantanées rend la turbulence très dissipative. Cela rend les taux de déformations instantanés important et l'énergie cinétique turbulente en chaleur très forte.

L'idée de la turbulence et des petites perturbations a vu le jour par BOUSSINESQ en 1877, avant que REYNOLDS en 1899 y introduit des contraintes fictives, appelées contraintes de turbulence. La littérature rapporte des caractères communs des écoulements turbulents [87], présentés comme suit :

- Etablissement du régime turbulent à partir d'une instabilité du régime laminaire à un nombre de REYNOLDS élevé (quelques milliers).
- Le champ d'écoulement turbulent peut être décomposé en un spectre d'échelles, ayant chacune son rôle.
- Les équations de NAVIER STOKES sont valables.
- La dissipativité de la turbulence.
- Présence de structures organisées (tourbillons contrarotatifs).

### 2.2.2-Echelles caractéristiques de la turbulence :

La turbulence se caractérise par la présence d'un spectre de tourbillons de vitesses et de fréquences de fluctuations différentes où l'écoulement moyen est caractérisé par une vitesse  $U$  et une échelle typique  $L$ . Le temps associé est  $T=L/U$  pour des échelles typiques et par  $\tau = l/u$  pour des échelles plus grandes.

Le mécanisme de transfert d'énergie est efficace lorsque les temps caractéristiques de l'écoulement moyen de fluctuation coïncide :

$$\tau = \frac{l}{u} \sim T = \frac{L}{U} \quad (2.12)$$

Des tourbillons plus petits ont une échelle  $l_k$ , la micro-échelle ou échelle de KOLMOGOROV et une vitesse  $v_k$ . Le temps caractéristique de fluctuation est donné par :

$$\tau_k = \frac{l_k}{u_k} \quad (2.13)$$

L'énergie de l'énergie est dissipée aux niveaux des petites structures par l'action des contraintes visqueuses, ce qui laisse déduire l'échelle à partir de l'ordre d'épaisseur de la couche visqueuse comme suit:

$$l_k = (v\tau_k)^{1/2} \quad (2.14)$$

En introduisant l'équation (2.13) dans cette dernière équation, on déduit:

$$\frac{v_k l_k}{v} = 1 \quad (2.15)$$

Donc le nombre de REYNOLDS des tourbillons de KOLMOGOROV est de l'ordre de l'unité.

Les deux types de tourbillons qui sont définis ci dessus, les macro et les micro-échelles, représentent les deux extrémités du spectre tourbillonnaire s qui engendre le phénomène des cascades de KOLMOGOROV. Le transfert d'énergie cinétique  $u^2$  s'effectue des grandes structures vers les plus petites en un temps  $\tau$  et défini par :

$$\varepsilon = \frac{u^2}{\tau} = \frac{u^3}{l} \quad (2.16)$$

Cette énergie est préservée jusqu'au petites structures et donne:

$$\varepsilon = \frac{u^3}{l} = \frac{u_k^3}{l_k} \quad (2.17)$$

Cette énergie représente en fait le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence et qui peut être exprimée par la fonction de dissipation visqueuse :

$$\varepsilon \approx \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \approx \nu \frac{u_k^2}{l_k^2} \quad (2.18)$$

Cette dernière équation avec les équations (2.16) et (2.17), nous donnent :

$$\nu \frac{u_k^2}{l_k^2} \approx \frac{u_k^3}{l_k} \quad (2.19)$$

Ce qui nous permet de retrouver le nombre de REYNOLDS pour une vitesse  $u_k$ .

Ce nombre de REYNOLDS avec l'équation (2.17), nous permet d'établir des relations pour les échelles de longueur et de vitesses pour les tourbillons de KOLMOGOROV :

$$l_k = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \quad \text{et} \quad u_k = (\varepsilon \nu)^{1/4} \quad (2.20)$$

### 2.2.3- Approche statistique de la turbulence par moyenne pondérée :

Dans le cas d'écoulements en régime turbulent, les variations temporelles s'expriment en de rapides variations, dont la valeur moyenne de la fluctuation est donnée par l'approche statistique faite par FAVRE [88]. La vitesse moyenne est définie par :

$$\tilde{U}_i = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{U}_i}{\bar{\rho}} \quad (2.21)$$

avec :

" $\bar{\quad}$ " : désigne la valeur moyenne statistique conventionnelle, où en particulier  $\bar{\rho}$  est la valeur moyenne de  $\rho$ .

$$\bar{\rho} = \frac{1}{T} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} \rho \cdot dt \right) \quad (2.22)$$

Les masses volumiques instantanées et les vitesses instantanées sont décomposées en des valeurs moyennes et en fluctuations :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2.23)$$

$$U_i = \tilde{U}_i + u_i' \quad (2.24)$$



Quelques propriétés des variables aléatoires sont présentés comme suit [87] :

D'après les définitions (2.21) à (2.22), on a les propriété démontrables suivantes des variables aléatoires :

$$\overline{\rho'} = 0 \quad (2.25)$$

$$\overline{\rho u'_i} = 0 \quad (2.26)$$

$$\overline{u'_i} = -\frac{\overline{\rho' u'_i}}{\overline{\rho}} \quad (2.27)$$

$\rho u_i$  peut être décomposé comme :

$$\rho U_i = \overline{\rho} \tilde{U}_i + \rho' \tilde{U}_i + \rho u'_i \quad (2.28)$$

La moyenne de l'équation (2.28) nous donne :

$$\overline{\rho U_i} = \overline{\rho} \tilde{U}_i + \overline{\rho u'_i} \quad (2.29)$$

D'après (2.24), déduit (2.26) et on a:

$$0 = \overline{\rho u'_i} = \overline{\rho} \overline{u'_i} + \overline{\rho' u'_i} \quad (2.30)$$

ce qui nous donne l'équation (2.27).

Pour la température T, on défini la même moyenne pondérée par la masse, et on obtient :

$$\overline{p'} = 0 \quad (2.31)$$

$$\overline{\rho T'} = 0 \quad (2.32)$$

$$\overline{T'} = -\frac{\overline{\rho' T'}}{\overline{\rho}} \quad (2.33)$$

Les équations (2.31) à (2.33) sont respectivement de même nature que les équations de (2.25) à (2.27).

COUSTEIX [89], rapporte que  $\tilde{U}_i$  et  $\tilde{T}$  sont sensiblement égaux respectivement à  $\overline{U}_i$  et  $\overline{T}$ , jusqu'à un nombre élevé de MACH ( $\sim 4$ ).

On porte les équations (2.25) à (2.27) et (2.31) à (2.32) dans les équations (2.9) à (2.11), ainsi que les remarques de COUSTEIX [89], dans ces dernières équations, comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \cdot u_j}) = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \cdot u_i \cdot u_j}) = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{-\rho u'_i u'_j}) \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \cdot u_j \cdot T}) = \frac{\overline{u_j}}{C_p} \cdot \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{\rho u_j' T'} \right) + \frac{\overline{\tau_{ij}}}{C_p} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.36)$$

avec :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \cdot u_j}) \quad : \text{terme du transport moyen de la masse}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \cdot u_i \cdot u_j}) \quad : 1^{\text{er}} \text{ terme de convection}$$

$$-\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad : \text{terme du gradient de pression moyenne}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{ij}}) \quad : \text{terme des contraintes moléculaires moyennes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{\rho u_i' u_j'} \right) : \text{terme de transport moyen de la turbulence par diffusion}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \cdot u_j \cdot T}) \quad : 2^{\text{nd}} \text{ terme de convection}$$

$$\frac{\overline{u_j}}{C_p} \cdot \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} \quad : \text{terme de puissance développée par effet du gradient de pression moyen}$$

dans le mouvement moyen pondéré

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right) : \text{terme de la diffusion de la température}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{\rho u_j' T'} \right) : \text{terme de la diffusion turbulente de la température}$$

$$\frac{\overline{\tau_{ij}}}{C_p} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad : \text{terme de la production de chaleur par dissipation}$$

L'emploi des moyennes pondérées par des équations moyenne, a permis de donner une forme assez simple. L'équation de continuité reste inchangée alors que celles de quantités de mouvement et d'énergie ont des formes analogue à celles d'habitudes avec de légers changements avec l'apparition des termes  $-\overline{\rho u_i' u_j'}$  et  $-\overline{\rho u_j' T'}$ .

De la même manière, l'équation d'état  $P = \rho RT$  devient après l'introduction des moyenne pondérées comme suit:

$$\bar{P} = \bar{\rho} \cdot R \cdot \bar{T} \quad (2.37)$$

### 2-3 Les équations exactes de transport des contraintes de Reynolds :

La dérivation des équations de REYNOLDS pour les écoulements compressibles est semblable à celles des écoulements incompressibles. Les détails de la dérivation sont longs et existent largement dans la littérature [47], [55], [90]. Ici, on donne juste les étapes les plus importantes ainsi que les équations complètes.

Les équations (2.34) à (2.36) font introduire par rapport aux équations (2.9) à (2.11) des termes inconnus déviés de l'effet de turbulence, à savoir, les contraintes de REYNOLDS  $(-\overline{\rho u'_i u'_j})$  et  $(\overline{\rho u'_j \cdot T})$ .

Le système formé des équations de (2.34) à (2.37) est formé de cinq équations (dont 2.35 est un double équation) et de sept inconnues. La fermeture de ce système oblige l'ajout de deux autres équations.

La soustraction de l'équation (2.35) à (2.10) nous donne :

$$\bar{\rho} \tilde{U}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\bar{\rho} u'_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u'_i u'_j} - \bar{\rho} u'_i u'_j) - \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right] \quad (2.38)$$

En multipliant cette dernière équation pour  $u'_i$  par  $u'_k$ , puis en multipliant une équation identique pour  $u'_k$  par  $u'_i$  et enfin en ajoutant membre à membre et en prenant la moyenne des équations résultantes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \tilde{U}_j u'_i u'_k})}_{\text{I}} = \underbrace{\frac{\partial \overline{\rho u'_j u'_i u'_k}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_k p' \delta_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i p' \delta_{jk}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\mu \tilde{S}_{ij} u'_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\mu \tilde{S}_{jk} u'_i}}{\partial x_j}}_{\text{II}} - \underbrace{\overline{\rho u'_j u'_i} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{III}} \\ & \quad - \underbrace{\tilde{u}'_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \tilde{u}'_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}_{\text{IV}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p}' u'_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{p}' u'_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} S'_{ij} u'_k + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} S'_{kj} u'_i}_{\text{VI}} \quad (2.39) \end{aligned}$$

$$\text{avec : } S = \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \quad (2.40)$$

La signification physique des termes de l'équation ci-dessus est semblable à celles dans un cas incompressible, où le premier terme (II) représente les effets de diffusions complexe introduisant différentes contributions. Ce terme peut être désigné par :  $\frac{\partial}{\partial x_j} D_{jik}$

$$\text{Avec : } D_{jik} = \left\{ \overline{\rho u'_j u'_i u'_k} + \overline{u'_k p' \delta_{ij}} + \overline{u'_i p' \delta_{jk}} - \overline{\mu \tilde{S}_{ij} u'_k} - \overline{\mu \tilde{S}_{jk} u'_i} \right\} \quad (2.41)$$

Les termes (III) désignés par  $P_{ik}$  et  $P_{ki}$ , représentent la production par écoulement moyen, alors que les termes (IV) désignés par  $\theta_{ik}$  et  $\theta_{ki}$ , incluent les effets de fluctuation de la vitesse sur la pression moyenne. Les termes (V) désignés par  $W_{ik}$  et  $W_{ki}$ , prennent en considération les interactions entre la pression et les fluctuations de la vitesse. Finalement les termes (VI) désignés par  $\bar{\rho} \varepsilon_{ik}$  et  $\bar{\rho} \varepsilon_{ki}$ , représentent la dissipation par viscosité, Sachant que :

$$\bar{\rho} \varepsilon_{ik} = -\overline{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} S'_{ij} u'_k} \neq \overline{\mu S'_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \quad (2.42)$$

L'équation (2.39) simplifiée devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j \overline{u'_i u'_k}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} D_{jik} + P_{ik} + P_{ki} + \theta_{ik} + \theta_{ki} + W_{ik} + W_{ki} - \bar{\rho} \varepsilon_{ik} - \bar{\rho} \varepsilon_{ki} \quad (2.43)$$

#### 2.4-Equation de l'énergie cinétique de turbulence K :

Une équation de l'énergie cinétique turbulente K, peut être dérivée à partir de l'équation (2.39).

L'énergie cinétique de turbulence K est définie comme étant :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} \overline{u'_i{}^2} \quad (2.44)$$

L'équation de transport relatif est obtenue après la dérivation de l'équation 2.38 et en la divisant par 2.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j K) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{\rho u'_j u'_i u'_i} + \overline{u'_i p' \delta_{ij}} - \overline{\mu \tilde{S}_{ij} u'_i} \right) + \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} - \overline{\mu S'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (2.45)$$

La contraction de cette dernière équation nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j K) = -\frac{\partial}{\partial x_j} D_j + P + \theta + W - \bar{\rho} \varepsilon \quad (2.46)$$

où  $D_j$ ,  $P$ ,  $\theta$ ,  $W$  et  $\bar{\rho} \varepsilon$  représentent respectivement les termes de diffusion, de production, d'interaction vitesse moyenne – pression, d'interaction des fluctuations vitesse – pression et de dissipation.

Cette équation ressemble à celle qu'on obtient pour les cas d'écoulements incompressibles, sauf l'apparition de quelques nouveaux termes et aussi une légère différence pour la définition de l'équation du taux de dissipation  $\varepsilon$ , pour le cas compressible par rapport à celui incompressible.

### 2.5-Equation du taux de dissipation $\varepsilon$ :

L'obtention de l'équation du taux de dissipation  $\varepsilon$  pour les écoulements compressibles est beaucoup plus difficile que pour les cas d'écoulements incompressibles. L'équation de transport de  $\varepsilon$  prend la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j \varepsilon) = F \quad (2.47)$$

Où  $F$  représente plusieurs termes complémentaires, qui peuvent arrivés jusqu'à plus d'une vingtaine.

Le problème d'approximation de ces termes complémentaires de l'équation du taux de dissipation reste un problème complexe qui est encore ouvert. Néanmoins, il pourra généralement être formulé comme donné par CHIESTEL [47] pour le cas à masse volumique variable :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j \varepsilon) = -c_{\varepsilon 1} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{K} \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j \varepsilon) + c_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{K} \mathbf{1}_{kl} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) - c_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{K} - c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{K} \bar{u}'_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \quad (2.48)$$

### 2.6 Introduction à la modélisation de la turbulence :

L'intérêt de la modélisation apparaît lors de l'application d'un traitement statistique aux équations de NAVIER STOCKES, d'où l'apparition de nouveaux termes variants qui sont les intensité turbulentes  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$  et le flux turbulent apparent  $-\overline{\rho u'_j T'}$  obtenus à partir des caractéristiques de l'écoulement moyen. Cela nécessite l'ajouts d'équations

modélisées qui avec l'équation de NAVIERS STOCKES moyennées, représenterons un système fermé.

Il existe une grande variété des modèles de turbulence, les modèles les plus simples utilisent des relations purement algébriques pour présenter les contraintes de turbulences. Ces modèles s'appuient sur le concept de la viscosité de turbulence. Dans le modèles à 1 équation de transport, la détermination des contraintes de turbulence s'effectue généralement à partir d'une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente. Pour les modèles à 2 équations, comme K- $\epsilon$  et K- $\omega$ , on fait intervenir deux équations pour la détermination des contraintes de turbulences dont une n'est que celle utilisée dans les modèles à 1 équation de transport (équation de K). Il existe des modèles qui sont du second ordre de fermeture, appelés modèles aux tensions de REYNOLDS.

### 2.6.1-Concept de viscosité turbulente :

Cette notion est basée sur les plus anciennes hypothèses faites sur la modélisation de la turbulence, qui ont été effectués par BOUSSINESQ en 1877. Ces hypothèses ont permis l'expression des contraintes de REYNOLDS en fonction du taux moyen de déformation.

La viscosité turbulente, dépend de la turbulence en tout point du domaine de l'écoulement, donc elle n'est pas une propriété du fluide mais de la turbulence de l'écoulement. Elle varie sensiblement d'un point à un autre et d'un écoulement à un autre pour un même fluide.

$$-\rho \overline{u'_j u'_i} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho K \delta_{ij} \quad (2.49)$$

avec :  $K = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  énergie cinétique de turbulence et  $\overline{U}_i$  et  $\overline{U}_j$  les composantes moyennes des vitesses.

Les tensions de REYNOLDS sont déterminées à partir de l'évaluation de la quantité exprimée par l'équation sus écrite. Une classification de ce type de modèles peut être classé selon le nombre d'équations de transport qu'on y ajoute.

### 2.6.2-Modèles à zéro équations de transport :

#### a- Modèles algébriques de PRANDTL ou à viscosité turbulente constante :

Ces modèles sont basés sur les hypothèses de BOUSSINESQ en utilisant une viscosité turbulente  $\mu_t$  constante. Ces modèles sont exprimés pour une couche de cisaillement mince par :

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right) \quad (2.50)$$

Pour des écoulements libres PRANDTL a proposé le modèle suivant :

$$\mu_t = \rho C \delta (\overline{U}_{\max} - \overline{U}_{\min}) \quad (2.51)$$

où  $\delta$  : épaisseur de la couche limite

$\overline{U}_{\max}, \overline{U}_{\min}$  : Vitesses maximale et minimale dans la section considérée.

$\nu_t = \mu_t / \rho$  est supposé uniforme à travers chaque section de passage.

$\delta, \overline{U}_{\max}, \overline{U}_{\min}$  étant fonction de la distance longitudinale.

La constante C dépend du type d'écoulement, où elle est égale à 0 ;01 pour une couche de mélange, égale à 0 .014 pour un jet plan et égale à 0.026 pour une zone de sillage plan.

#### b- Modèle de longueur de mélange :

PRANDTL a proposé en 1925 les hypothèses de la longueur de mélange, basées sur le gradient de vitesse locale pour modéliser la viscosité cinématique turbulente :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right| \quad (2.52)$$

où  $l_m$  est la longueur de mélange avec laquelle il a été posé à partir des résultats expérimentaux une relation linéaire la liant avec les corps solide :  $l_m = \chi \cdot y$

où  $y$  : est la distance à la paroi

$\chi$  : est la constante de VON KARMANN

Pour la turbulence libre (jets et sillages), on utilise en général :  $l_m = \chi \cdot D$

Avec D étant la longueur du jet ou du sillage et la constante  $\chi$  ayant une valeur aux alentours de 0.42 .

La distribution de  $l_m$  est spécifiée algébriquement d'une manière plus généralisée et  $\mu_t$  peut être obtenue par la formulation :

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

Pour des écoulements en couche limite, PATANKAR et SPALDING ont proposé en 1970 la distribution suivante :

$$l_m = \begin{cases} Ky & \text{pour } y \leq \left( \frac{\lambda}{K} \right) \delta \\ \lambda \delta & \text{pour } y > \left( \frac{\lambda}{K} \right) \delta \end{cases} \quad (2.54)$$

où  $K=0.435$  et  $\lambda=0.09$  
$$\left( \delta = \frac{\mu U_\infty}{\tau_0} = \frac{U_\infty}{(\partial U / \partial u)_0} \right)$$

Pour des écoulements internes établis, NIKURADSE a proposé la formulation suivante :

$$l_m = R \left[ 0.14 - 0.08 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^4 \right] \quad (2.55)$$

avec  $R$  étant le rayon de la conduite et  $y$  la distance à la paroi.

Pour des conduites en sections quelconques, BOLEEV a suggéré en 1962 la formulation suivante :

$$\frac{1}{l_m} = 1.25 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\theta \quad (2.56)$$

Pour les régimes près de la paroi où la turbulence est amortie,  $\mu_t$  tend vers  $\mu$  et la longueur de mélange est alors donnée par la formule de VAN DRIEST :

$$l_m = Ky \left[ 1 - \rho \left( \frac{-y^+}{A} \right) \right] \quad (2.57)$$

où :  $A=26$  et  $y^+ = y(\tau_w \sigma)^{1/2}$  avec  $\tau_w$  étant la contrainte à la paroi pour une sous couche laminaire.

Pour un écoulement confiné, ce modèle reste un bon estimateur pour la couche limite, alors que pour des écoulements compressibles, la formule de longueur de mélange n'est obtenue qu'à partir des résultats expérimentaux. Aussi, ce modèle étant limité à des écoulements simples, il ne peut pas être utilisé pour les écoulements avec recirculations.



Dans le but d'améliorer les approches et de dépasser ces limitations, beaucoup de modèles furent développés par la suite pour décrire la turbulence, avec l'introduction d'une ou plusieurs équations de transport, représentant des quantités turbulentes.

### 2.6.3-Modèles à une équation de transport :

L'introduction d'une échelle pour les fluctuations des vitesses en l'énergie cinétique de turbulence donne une équation supplémentaire, ce qui donne un caractère plus général de la modélisation :

$$K = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{u'^2}) \quad (2.58)$$

La viscosité turbulente est donnée par :

$$\mu_t = \rho C_\mu \sqrt{K} L \quad (2.59)$$

L'énergie cinétique qui apparaît dans cette dernière formulation va être déterminée à partir de l'équation de transport, mais, le problème de la détermination de la longueur de mélange caractéristique L reste posé.

La dissipation étant supposée dépendante de K et de L, est donnée par l'expression suivante :

$$\varepsilon = \frac{C_D K^{3/2}}{L}$$

où  $C_D$  est une constante égale à 0.09

La formule de la longueur de mélange de la viscosité turbulente est donc :

$$\mu_t = C_D^{-1/2} \rho L^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (2.60)$$

et la longueur de mélange est donc :  $l_m = L / C_D^{1/4}$

La difficulté de ce type de modèles réside, comme dans les cas des modèles à zéro équations, dans la dissipation de L. L'échelle de la longueur L ne peut donc pas être déterminée pour des écoulements complexes et même pour les écoulements simples, des constantes empiriques doivent être établies spécifiquement à chaque écoulement.

#### 2.6.4-Modèles à deux équations de transport :

L'utilisation d'une seule équation de transport ne permet pas la détermination de l'échelle caractéristique  $L$ . Pour lever cette difficulté, une nouvelle équation a été ajoutée afin de déterminer cette échelle, d'où on utilise des équations différentielles de transport pour  $K$  et  $Z$  avec  $Z$  pouvant être  $(KL)$ ,  $(K^{1/2}/L)$ ,  $(K/L^2)$ ,  $(K^{3/2}/L=\varepsilon)$  et bien d'autres. Ces modèles sont du type  $(K-K^mL^n)$ . Le modèle  $K-\varepsilon$  reste celui qui a été le plus utilisé à l'heure actuelle, alors que des modèles assez récent comme  $K-\omega$  ou  $K-\tau$  commencent à être connus.

Le concept de la viscosité turbulente  $\mu_t$  est celui utilisé ici, par analogie avec les tensions visqueuses moléculaires. Les intensités turbulentes reliés aux taux de déformation moyen par :

$$-\overline{\rho u'_j u'_i} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left[ \left( \overline{\rho K} + \mu_t \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} \right) \right] \delta_{ij} \quad (2.61)$$

Par analogie à la diffusivité moléculaire, le concept de diffusivité turbulente définit une grandeur  $\Gamma_\phi$  qui relie le flux thermique avec la moyenne de la température  $\overline{T}$  par :

$$-\overline{\rho u'_j T'} = \Gamma_{\phi,t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.62)$$

avec  $\Gamma_{\phi,t}$  viscosité turbulente.

#### 2.6.5-Le modèle K-ε :

Dans ce modèle, c'est l'équation de transport de la dissipation  $\varepsilon$  qu'on ajoute à celle de l'énergie cinétique de turbulence  $K$  pour la modélisation du problème. La longueur de mélange et ainsi obtenue par :

$$l = \frac{K^{3/2}}{\varepsilon}$$

Ainsi, la viscosité cinématique turbulente dans ce modèle K- $\varepsilon$  dit standard qui est utilisée pour un nombre de REYNOLDS élevé, est donnée par :

$$v_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (2.63)$$

où K et  $\varepsilon$  sont déterminés à partir de la résolution des deux équations de transports et  $C_\mu$  ( $C_\mu = C_D$ ) étant une constante numérique ( $C_\mu = 0.09$ ). L'équation d'évolution exacte de K après spécification est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j K) = - \frac{\partial}{\partial x_j} D_j + P + \theta + W - \bar{\rho} \varepsilon \quad (2.64)$$

Le terme de diffusion turbulent est modélisé par une hypothèse de diffusion en gradient.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad (2.65)$$

L'effet de dilatation de pression est négligé, on a :  $\theta + W = 0$

D'où l'équation d'évolution exacte de  $\varepsilon$ , comme proposée par JONES et LAUNDER s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j \varepsilon) = F \quad (2.66)$$

Les grandeurs K et  $\varepsilon$  sont obtenus après résolution des équations différentielles de transport y attribués, sous leurs formes compressibles consécutives, comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{K,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{K,t}} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + G - \bar{\rho} \varepsilon \quad (2.67)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{I}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{II}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{III}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{IV}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{K} G - C_2 \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (2.68)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{V}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{VI}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{VII}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{VIII}}$$

avec :

(I) : terme de transport de K par convection

(II) : terme de transport de K par diffusion

(III) : travail des forces de contraintes

(IV) : terme de dissipation de K par frottement moléculaire

(V) : terme de transport de  $\varepsilon$  par convection

(VI) : terme de transport de  $\varepsilon$  par diffusion

(VII) : terme de production de  $\varepsilon$

(VIII) : La dissipation de  $\varepsilon$

$\sigma_K, \sigma_\varepsilon$  : sont respectivement les nombres de PRANDTL turbulent de K et de  $\varepsilon$ , où  $\sigma_K=1.0$  et  $\sigma_\varepsilon=1.3$

$C_1, C_2$  : sont des constantes empiriques où  $C_1=1.44$  et  $C_2=1.92$

Donc le système de coordonnées cartésiennes, une formulation générale de l'ensemble des équations régissant le problème, est donné par :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{U}\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\tilde{V}\phi)}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\phi,\text{eff}}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_{\phi,\text{eff}}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}_{\text{II}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{III}} \quad (2.69)$$

avec : I : terme de convection

II : terme de diffusion

III : terme source

De cette formulation, on peut revenir aux équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et de K et  $\varepsilon$  régissant le problème, comme indiqué à travers le tableau 2.1 suivant :

**Tableau 2.1 :** Définition des variables et de leurs coefficients de diffusion et sources

Equation	Variable $\phi$	Diffusivité $\Gamma\phi$	Source $S\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité. Mouvement / ox	$\tilde{U}$	$\mu_{\text{eff}}$	$S\tilde{u} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial x}$
Quantité. Mouvement / oy	$\tilde{V}$	$\mu_{\text{eff}}$	$S\tilde{v} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial y}$
Energie cinétique de turbulence K	K	$\Gamma_{K,\text{eff}}$	$G - \bar{\rho}\varepsilon$
Taux de dissipation	$\varepsilon$	$\Gamma_{\varepsilon,\text{eff}}$	$C_1\frac{\varepsilon}{K}G - C_2\bar{\rho}\frac{\varepsilon^2}{K}$
Température	$\tilde{T}$	$\Gamma_{T,\text{eff}}$	$\frac{\tilde{U}}{C_p}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \frac{\tilde{V}}{C_p}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \frac{\phi}{C_p}$

Avec :

$$S\tilde{u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{\text{eff}}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{\text{eff}}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{\text{eff}}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{V}}{\partial y}\right)\right) + \bar{\rho}K \quad (2.70)$$

$$S^{\tilde{v}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) + \bar{\rho} K \right) \quad (2.71)$$

$$G = \mu_t \left[ 2 \left( \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) \left( \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) + \bar{\rho} K \right) \quad (2.72)$$

$$\varphi = \mu \left[ 2 \left( \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) \left( \mu \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) \right) \quad (2.73)$$

et aussi :  $\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t$  et  $\Gamma_{\phi, \text{eff}} = \frac{\mu}{\sigma_{\phi, l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\phi, t}}$  (2.74)

Les constantes empiriques sont données dans le tableau suivant :

Tableau 2.2 : Constantes empiriques liées aux modèle K-ε standard.

Constantes	$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_{K, l}$	$\sigma_{K, t}$	$\sigma_{\epsilon, l}$	$\sigma_{\epsilon, t}$	$\sigma_{T, l}$	$\sigma_{T, t}$
Valeurs	0.09	1.44	1.92	1.0	1.0	1.0	$\frac{K^2}{((C_1 - C_2) \cdot C_\mu)^{1/2}}$	0.72	0.9

Le modèle K-ε a été suffisamment testé et validé aussi bien avec des résultats expérimentaux que théoriques. Plusieurs autres formes du modèle K-ε furent développées pour des approches bien spécifiques., on en cite celui d'ABID et al. ( pour les bas nombres de REYNOLDS) et celui de CHEN et PATEL ( pour les nombres de REYNOLDS élevés).

#### 2.6.6-Le modèle K-ω<sup>2</sup> :

Le modèle K-ω standard, introduit par SAFMAN en 1970 puis WILCOX en 1988, fait intervenir la fréquence caractéristique du champs turbulent pour déterminer la longueur de mélange l, ω est aussi appelée dissipation spécifique et est proportionnelles à ε/K où ε=βωK . La viscosité turbulente est donnée dans ce modèle par :

$$\mu_t = \gamma K / \omega \quad (2.75)$$

avec :  $\beta=0.09$        $C_1=5/9$        $C_2=3/40$        $\sigma_K^\omega=2.0$        $\sigma_\omega=2.0$

D'après DAVIDSON [30], ce modèle est utilisé pour prédire les effets transitoires et les cas de recirculation.

#### 2.6.7-Le modèle K- $\tau$ :

Ce modèle assez récent, a été proposé par SPEZIALE et al. Il fait intervenir une équation de transport d'échelle de temps  $\tau$  où  $\tau=K/\varepsilon$ .

Les constantes  $C_\mu$ ,  $C_1$  et  $C_2$  utilisés dans ce modèle sont les mêmes que ceux utilisés dans le modèle K- $\varepsilon$ .

D'autre part, on a :  $\sigma_{\tau_1}=\sigma_{\tau_2}=1.36$

#### 2.6.8-Le modèle $v^2$ -f :

Ce modèle donné une première fois par DURBIN (1991), et présenté plus tard par SVENINGSSON [92], a rapporté que Presque tout les modèles de turbulences  $v^2$ -f sont basés sur le modèle k- $\varepsilon$  (non bas nombre de Reynolds) et k et  $\varepsilon$  sont utilisé pour utiliser l'échelle de temps de turbulence. Ce modèle diffère e ceux à deux équations dans sa modélisation à la paroi par des composantes des contraintes de Reynolds, appelés  $\overline{v^2}$  et utilisé comme scalaire de vitesse turbulente  $V=(\overline{v^2})^{1/2}$ , c'est à dire, différent de  $k^{1/2}$  usuellement utilisée. Cela engendre la résolution d'une équation supplémentaire de transport pour les contraintes normales à la paroi.  $v^2$ -f nécessite la résolution des équations k- $\varepsilon$  standards ensembles, avec  $\overline{v^2}$  additionnelles et f. cela augmentera le temps de calcul d'environ 30% et le système d'équations à résoudre de sept à neuf.

Plus tard, un autre type de modèle  $v^2$ -f a été développé par JONES [82], qui est basé sur le modèle de turbulence k- $\omega$ , de WILCOX, comme présenté précédemment, par les relations (2.75) et celle entre  $\omega$  et  $\varepsilon$  du modèle k- $\varepsilon$ . L'avantage du modèle k- $\omega$  par rapport à celui k- $\varepsilon$ , c'est qu'il est solvable partout dans le champs de l'écoulement, à cause de l'inexistence des singularités des contraintes qu'on rencontre de  $\varepsilon$ , dans  $\omega$ . Cela influe directement sur ce dernier le modèle  $v^2$ -f par rapport au premier.

### 2.6.9-Le modèle K-ε à faible nombre de REYNOLDS :

Pour des régions près de la paroi, où  $\mu_t$  tend vers  $\mu$ , un traitement par la loi pariétale à la paroi est nécessaire. Pour un choix différent à celui ci, l'ajoute de termes supplémentaires est nécessaire dans les équations de K et  $\varepsilon$  où certaines fonctions deviennent fonction du nombre de REYNOLDS local :

$$R_t = \frac{\rho K^2}{\mu_t \varepsilon} \quad (2.76)$$

$$\mu_t = \frac{\rho C_\mu K^2}{\varepsilon} \quad (2.77)$$

avec :

$$\text{pour K : } S_{\text{extra}} = -2\mu \left( \frac{\partial K^{1/2}}{\partial x_j} \right)^2 \quad (2.78)$$

$$\text{pour } \varepsilon : S_{\text{extra}} = 2 \left( \frac{\mu \cdot \mu_t}{\rho} \right) \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \quad (2.79)$$

$$\text{où : } C_\mu = 0.09 \exp\left(\frac{-3.4}{(1+0.02R_t)^2}\right) \quad \text{et} \quad C_2 = 1.92 \left(1 - 0.2222 \exp\left(\frac{-R_t^2}{36}\right)\right)$$

Plusieurs modèles de K-ε à faibles nombres de REYNOLDS on été développés, on en cite celui de CHIEN, utilisé généralement en turbomachines, celui de LAUNDER-SHARMA, qui peut prédire la transition by-pass et celui de NAGARO-TAGAWA pour le transfert thermique.

D'autres modifications peuvent être faites si on tient compte d'autres paramètres tels que les forces de poussée, l'effet de rotation, l'effet de courbure, ... etc.

### 2.6.10-Modèles des tensions de REYNOLDS :

Dans ces modèles, l'équation de transport est dérivée du tenseur de REYNOLDS  $\overline{\rho u_i u_j}$ . Une équation de transport doit être ajoutée pour la détermination de la longueur de mélange de la turbulence. Il est fréquent qu'une équation dissipative soit utilisée. Dans ces modèles aux tenseurs de REYNOLDS, les hypothèses de BOUSSINESQ ne sont pas utilisés, toutefois une équation aux dérivées partielles est dérivée à partir des équations de NAVIERS STOCKES et est déterminée de la même manière que celle utilisée pour

déterminer l'équation de K . Ces modèles sont capables de capter plusieurs effets locaux, puisqu'ils tiennent compte les aspects de la convection et de la diffusion de chaque composante des tenseurs de REYNOLDS. Mais, ils présentent actuellement quelques instabilités numériques, selon la modélisation de la zone proche de la paroi solide. Ils restent encombrants, surtout pour les cas 3D et sont malheureusement lourds pour les configurations complexes.

#### 2.6.11-Modèle aux tensions de Reynolds (RSM) :

Dans ce modèle, il y a été introduit des équations de transport pour la détermination de chaque composante des six (6) contraintes de REYNOLDS, aussi ce modèle ne fait pas appel à la viscosité turbulente par ses calculs, ce qui le rend le plus correct physiquement. L'énergie cinétique de turbulence apparaît dans les équations, d'où le besoin de calculer  $\varepsilon$ . Ce nombre important d'équations (7 équations de transport, dont 6 pour les contraintes de REYNOLDS et une pour  $\varepsilon$ ), entraîne un grand nombre de calculs, ce qui rend le système assez lourd et demande des moyens de calculs et un temps important, donc un grand inconvénient.

Dans les modèles aux contraintes de Reynolds, ce n'est les hypothèses de Boussinesq qui sont pris en compte, mais plutôt, les équations différentielles des contraintes de Reynolds dérivés des équations de N-S. cela est établis de la même façon que pour l'équations de l'énergie cinétique de turbulence k.

Les équations exactes de transport des contraintes de Reynolds,  $\overline{\rho u_i u_j'}$ , peuvent êtres écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_k \overline{u_i u_j'}) = & -\frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{\rho u_i u_j' u_k'} + p(\delta_{kj} \overline{u_i'} + \delta_{ik} \overline{u_j'})] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j'}) \right] - \rho \left( \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \\ & + p \left( \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_i} \right) - 2\mu \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_k} - 2\rho \Omega \rho (\overline{u_j' u_m'} \varepsilon_{ikm} + \overline{u_i' u_m'} \varepsilon_{jkm}) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Cela peut être écrit de façon plus simplifiée :

$$C_{ij} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} + \varepsilon_{ij} + F_{ij} \quad (2.81)$$

avec :



$C_{ij} = -\frac{\partial}{\partial X_k} (\rho U_k \overline{u'_i u'_j})$  : terme de convection de  $\overline{u'_i u'_j}$

$D_{ij} = D_{ij}^T + D_{ij}^L$  : terme de diffusion turbulente et moléculaire de  $\overline{u'_i u'_j}$

$D_{ij}^T = -\frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \rho \overline{u'_i u'_j u'_k} + p (\delta_{kj} \overline{u'_i} + \delta_{ik} \overline{u'_j}) \right]$  : terme modélisé de diffusion turbulente de  $\overline{u'_i u'_j}$

$D_{ij}^L = -\frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial X_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right]$  : terme exacte de diffusion moléculaire de  $\overline{u'_i u'_j}$

$P_{ij} = -\rho \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right)$  : terme exacte de production de  $\overline{u'_i u'_j}$

$\phi_{ij} = p \left( \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial X_i} \right)$  : terme modélisé de forces de pression, qui fait prévaloir l'isotropie de la turbulence.

$\varepsilon_{ij} = -2\mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial X_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial X_k}$  : terme modélisé de dissipation

$F_{ij} = -2\rho \Omega \rho \left( \overline{u'_j u'_m} \varepsilon_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} \varepsilon_{jkm} \right)$  : terme exacte de production par système de rotation.

De l'équation précédente, on a des termes inconnus, entre autre, la triple corrélation  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ , la diffusion de  $(p \delta_{kj} \overline{u'_i} - p \delta_{ki} \overline{u'_j})$ , la force de pression  $\phi_{ij}$  et le tenseur de dissipation  $\varepsilon_{ij}$ .

A partir de l'équation de N-S, on peut dériver les équations de transport pour ces quantités inconnues, mais cela peut engendrer d'autres termes inconnus dans le système d'équations (problème de fermeture), pour y remédier à cela, des modèles ont été établis.

- Le terme  $D_{ij}^T$  est modélisé par la généralisation du gradient de diffusion du modèle de DALY et HARLOW [50],[91],

$$D_{ij}^T = C_s \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \rho \frac{\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial X_l} \right] \quad (2.82)$$

Cependant, cette équation peut engendrer des instabilités numériques. Une simplification de celle ci, à utiliser un scalaire de turbulence de diffusion donne :

$$D_{ij}^T = \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial X_k} \right] \quad (2.83)$$

La viscosité turbulente  $\mu_t$ , est calculé par la suite. LIEN et LESCHZINER [50],[91], ont déterminé la valeur de  $\sigma_k = 0.82$  en appliquant une généralisation du modèle de gradient

de diffusion à l'équation (2.82) dans le cas d'un écoulement homogène aux parois. Cette valeur est différente pour le cas du modèle k-ε standard et est égale à 1.

- Terme de forces de pression :

Le terme de forces de pression  $\phi_{ij}$  dans l'équation (1) est modélisé en prenant compte des hypothèses de GIBSON et LAUNDER [50][91]. L'approche classique pour modéliser  $\phi_{ij}$  utilise la décomposition suivante :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij}^w \quad (2.84)$$

Avec :  $\phi_{ij,1}$  est la « force de pression lente », connue aussi par le terme de « retour de l'isotropie »,  $\phi_{ij,2}$  est appelée la « force de pression rapide » et  $\phi_{ij}^w$  est le terme de « reflet de la paroi ».

La force de pression lente  $\phi_{ij,1}$ , est modélisée par :

$$\phi_{ij,1} = -C_1 \rho \frac{\epsilon}{k} \left[ \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \text{ avec } C_1 = 1.8 \quad (2.85)$$

La force de pression rapide  $\phi_{ij,2}$ , est modélisée par :

$$\phi_{ij,2} = -C_2 \left[ (P_{ij} + F_{ij} - C_{ij}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (P - C) \right] \quad (2.86)$$

$$\text{avec : } P = P_{kk} \quad C = \frac{1}{2} C_{kk} \quad C_2 = 0.60$$

le terme de reflet de la paroi  $\phi_{ij}^w$ , est responsable de la distribution du terme de contrainte normale près de la paroi. Il tend à imprégner la contrainte perpendiculaire à la paroi avec celle parallèle à elle. Ce terme est modélisé comme suit :

$$\phi_{ij}^w = C_1' \frac{\epsilon}{k} \left( \overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_i u_k n_j n_k} - \frac{3}{2} \overline{u_j u_k n_i n_k} \right) \frac{k^{3/2}}{C_{led}} + C_2' \left( \phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_j n_k - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_i n_k \right) \frac{k^{3/2}}{C_{led}} \quad (2.87)$$

avec :  $C_1' = 0.5$ ,  $C_2' = 0.3$ ,  $n_k$  est la composante  $x_k$  de l'unité normale de la paroi,  $d$  est la distance normale de la paroi et  $C_1 = C_{\mu}^{3/4} / \kappa$ , où  $C_{\mu} = 0.09$  et  $\kappa = 0.41$

#### 2.6.12-Modèle aux tensions de Reynolds (RSM) à faible nombre de Reynolds :

Modifications des forces de pressions pour un modèle à bas nombre de Reynolds. L'application du modèle RSM pour les écoulements proches de la paroi utilise une approche dans et à l'extérieure de la couche limite, ce qui nécessite des modifications.

Elles ont été effectuées dans les constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_1'$  et  $C_2'$  comme des fonctions de contraintes de Reynolds invariantes et un nombre de turbulence de Reynolds, d'après suggestions faites par LAUNDER et SHIMA [ 91 ] :

$$C_1 = 1 + 2.58A\sqrt{A_2} \left\{ 1 - \exp[-(0.0067Re_t)]^2 \right\} \quad C_2 = 0.75\sqrt{A}$$

$$C_1' = -\frac{2}{3}C_1 + 1.67 \quad C_2' = \max \left[ \frac{\frac{2}{3}C_2 - \frac{1}{6}}{C_2}, 0 \right]$$

Avec le nombre de Reynolds turbulent défini par  $Re_t = \rho k^2 / (\mu \epsilon)$ . Le paramètre A et les constantes du tenseur  $A_2$  et  $A_3$ , sont défini par :

$$A = \left[ 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3) \right] \quad A_2 = a_{ik}a_{ki} \quad A_3 = a_{ik}a_{kj}a_{ji}$$

$a_{ij}$  est la partie anisotrope du tenseur des contraintes de Reynolds, défini par :

$$a_{ij} = \left( \frac{-\overline{\rho u_i' u_j'} - \frac{2}{3}k\rho\delta_{ij}}{\rho k} \right)$$

#### 2.6.13-Modèle aux contraintes algébriques de REYNOLDS (ARSM / ASM) :

Le grand nombre de nouvelles équations de transport, l'effort et le temps de calcul important ont stimulé à l'amélioration du modèle précédent. Ce modèle, qui est celui des contraintes algébriques de REYNOLDS a été développé par RODI [50] à partir du modèle RSM, où les six équations (pour le cas 2D) de transport des contraintes de REYNOLDS ont été remplacées par de simples relations algébriques. Ces relations assument le terme de transport des tensions de REYNOLDS et sont proportionnels aux termes de transport de l'équation de K. Ce modèle reste avantageux par rapport au précédent par le fait qu'il ne plus les inconvénients d'une modélisation par viscosité turbulente isotrope et possède un nombre d'équations identiques aux modèles à 2 équations de transport.

#### 2.6.14-Modèle aux contraintes algébriques de REYNOLDS (EARSM / EASM) :

Les relations implicites des contraintes de REYNOLDS précédentes ont été trouvées encombrantes aussi bien du côté numérique que celui des calculs depuis l'inexistence des termes diffusifs. La base de ce modèle a été établie à partir de la même

base que celle du modèle ASM, établis par RODI . Le transport des contraintes de REYNOLDS est presque égal aux transports normalisés de l'énergie cinétique turbulente. Toutefois, dans le modèle explicite du modèle ASM, les tensions de REYNOLDS sont explicitement relatifs aux champs moyens d'écoulement, ce qui rend le modèle plus robuste et réduit énormément le degré de complexité de calcul.

#### 2.6.15-Les modèles multi - échelles (MSM) :

Presque tous les modèles classiques de turbulence utilisent une échelle unique de temps ou bien une échelle unique de longueur pour décrire un champs turbulent. La turbulence étant caractérisée par un spectre étendu de fluctuations et les interactions turbulente sont associées aux différentes parties de ce spectre, ce qui constitue une voie d'approche des modèles à échelles multiples pour prendre en compte cette réalité physique dans le contexte des fermetures en un point. L'origine de ce concept est un modèle différentiel établi par SCHIESTEL [47], en utilisant deux échelles de longueur indépendamment obtenus par deux équations de transport distinctes. Les fermetures en deux points permettent de leur côté de pénétrer d façon plus fine les mécanismes d'interaction turbulente.

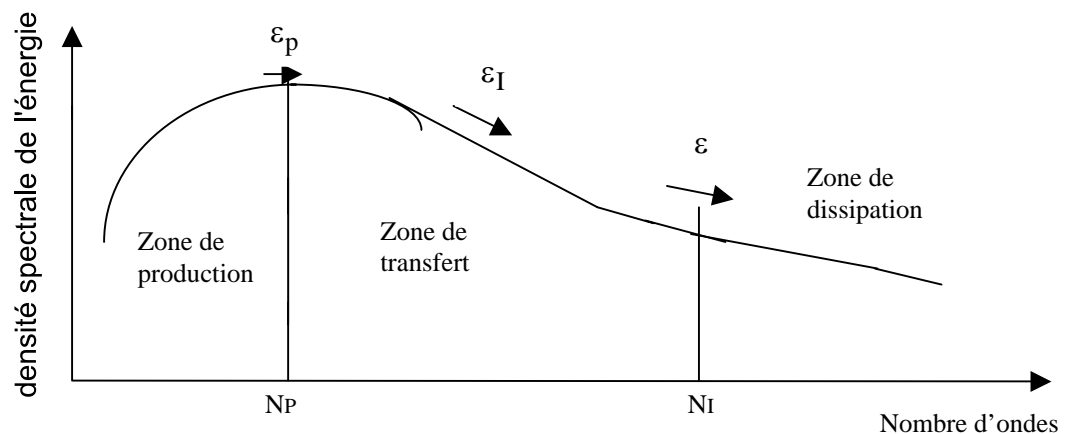


Figure 2.1 : Modèle K-ε à deux échelles

Les intervalles de nombre d'ondes ont été définis de tels manière que leur déviation accompagnent l'évolution du spectre moyen d'énergie dimensionnellement. Les hypothèses de fermeture peuvent être introduites dans ce cadre pour construire les différentes échelles de longueur ou de temps caractéristique. Ainsi, les différents mécanisme, comme le retour à l'isotropie, la dissipation, la diffusion turbulente, ou la

viscosité de la turbulence peuvent être décrits en utilisant différentes échelles caractéristiques.

Les fermetures en deux points permettent de pénétrer de façon plus fine les mécanismes d'interaction turbulente. Ce niveau de description est nécessaire pour analyser les écoulements hors équilibre dans lesquels l'hypothèse d'une adaptation instantanée des structures turbulentes au champ moyen qui les crée n'est plus valable.

#### 2.6.16-Le modélisation avec effet de courbure :

L'effet de courbure présente des analogies avec l'effet de gravité ce qui le laisse être décrit par le biais du nombre de RICHARDSON. Pour des modèles du deuxième ordre, ce nombre peut être décrit comme étant de flux ou de gradient et qui sont décrit consécutivement comme suit [47] :

$$R_f = \frac{2S}{1+S} = \frac{2U_i/R}{\partial U_i/\partial x_j + U_i/R} \quad (2.88)$$

$$R_i = 2S(1+S) = 2 \frac{U_i}{R^2} \frac{\partial(U_i R)/\partial x_j}{(\partial U_i/\partial x_j)^2} \quad (2.89)$$

avec  $S = \frac{U_i/R}{\partial U_i/\partial x_j}$  est un paramètre de courbure et R le rayon de courbure. Pour un nombre S

faible, les deux nombres de RICHARDSON sont équivalents.

Pour une couche limite sur une paroi convexe, on a une situation stable et l'énergie turbulente tend à diminuer (un nombre de RICHARDSON de gradient  $R_i > 0$ ), alors que pour une couche limite sur une paroi concave, la courbure est déstabilisée et l'énergie turbulente tend à augmenter (on a  $R_i < 0$ ).

De son côté BRADSHAW a proposé en 1973 pour un modèle à une équation, pour tenir compte de l'effet de courbure, de modifier l'échelle de dissipation intervenant dans :  $\varepsilon = K^{3/2}/L$  par  $L = L_0(1 - \alpha S)$  (avec :  $\alpha = 9$  sur paroi concave et  $\alpha = 14$  sur paroi convexe et S faible).

Pour le modèle K- $\varepsilon$ , LAUNDER a modifié la constante  $C_2$  en la multipliant par :

$$1 - 0.25 \frac{k^2 U}{\varepsilon^2 r^2} \frac{\partial(U_r)}{\partial r} = 1 - \frac{1}{8} \frac{k^2}{\varepsilon^2} R_i \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \quad (2.90)$$

Cette expression s'obtient en remplaçant l'échelle de temps  $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^{-1}$  par  $\frac{K}{\varepsilon}$  dans l'expression (2.89).

PERZON met en évidence l'effet de courbure sur l'écoulement turbulent dans les modèles.

La courbure étant mesurée par un rayon de courbure :

$$\frac{1}{R_c} = \frac{d^2x_j/d^2x_i}{\left(1+(d^2x_j/d^2x_i)^2\right)^{3/2}} \Big|_{\psi=Cst}$$

Pour  $dx_j/dx_i \Big|_{\psi=Cst} = U_j/U_i$ , cette équation devient :

$$\frac{1}{R_c} = \frac{U_i U_j \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) + U_i^2 \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - U_j^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_i}}{(U_i^2 + U_j^2)^{3/2}}$$

De son côté DAVIDSON [50], a fait intervenir l'effet de courbure en effectuant une modification dans le terme de production dans l'équation de transport de l'énergie cinétique. Ce terme s'écrit pour le modèle K-ε:

$$P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)^2 \text{ au lieu de } P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho K \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i}$$

et pour le modèle RSM, le terme de production est écrit comme étant :

$$P_1 = -2 \rho \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$P_2 = -\rho \overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \rho \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$P_3 = -2 \rho \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x}$$

Le modèle RSM, donne une meilleur évaluation de l'écoulement avec effet de courbure. Cependant le modèle K-ε, selon DAVIDSON, n'est pas très sensible à la courbure des trajectoires des écoulements, comme les tensions de rotations sont multiplié par le même coefficient,  $\mu_t$ , pour les cas convexe et concave.

## **CHAPITRE 3**

### **RESOLUTION NUMERIQUE**

#### 3.1- Introduction :

La résolution de notre étude nécessite la résolution d'un système d'équations mathématiques aux dérivées partielles de type elliptique. La nature des équations de transport gouvernant l'écoulement du fluide ainsi que celles du transfert thermique nécessite une approche par une méthode numérique. La non-linéarité des ces équations et la complexité du problème rend l'obtention d'une solution de façon analytique quasi - impossible.

#### 3.2- Choix de la méthode numérique :

La résolution de ce système d'équations peut se faire par plusieurs méthodes numériques. Des systèmes d'équations algébriques peuvent être obtenus à partir des systèmes d'équations aux dérivées partielles par plusieurs méthodes. Les plus utilisés sont :

- Méthode des éléments finis (MEF) : Cette méthode consiste à rechercher une fonction d'interpolation pour approcher la solution des points du maillage.
- Méthode des différences finies (MDF) : Elle se base sur l'approximation des dérivées d'une fonction par ses valeurs approchées aux nœuds du maillage.
- Méthode des volumes finis (MVF) : C'est une méthode semi-intégrale qui procède par intégration des équations locales sur un ensemble discret de volumes de contrôle englobant les points de calculs. Cela conduit à des équations discrètes exprimant la conservation exacte de toutes les quantités transportables, de qui donne une adaptabilité au problème physique et par la simplicité de la linéarisation de ces termes. Cela engendre une efficacité et stabilité du calcul ainsi qu'une convergence à la solution.

Notre choix c'est porté sur la dernière méthode citée, méthode des volumes finis, pour les considérations passées, ainsi à cause de son utilisation généralisée pour les différents problèmes physiques.

### 3.3- Maillage :

Le domaine d'étude est divisé en grilles longitudinales et transversales. Les variables indépendantes : la pression  $P$ , la température  $T$ , l'énergie cinétique turbulente  $K$  et le taux de dissipation  $\varepsilon$ , sont stockés dans les nœuds formés par l'intersection des mailles, alors que les composantes du vecteur vitesse  $U$  et  $V$ , sont stockés dans les interfaces se trouvant entre deux nœuds adjacents. Pour chaque nœud du maillage, trois différents volumes de contrôle lui sont associés. Un premier, centré, ou volume de contrôle principal, où sont stockées les variables  $P$ ,  $T$ ,  $K$  et  $\varepsilon$ . Les deux autres volumes de contrôles, l'un à droite de la face Ouest de la maille, est associé à la composante  $V$  du vecteur vitesse, et l'autre au dessus de la face Sud, est à lui associé à la composante  $U$  du vecteur vitesse. Ce léger décalage entre les trois volumes de contrôles cités ci-dessus permet d'assurer une bonne estimation et une meilleur évaluation des flux de convection et du gradient de pression.

Pour capter les changements rapides aux niveaux des parois solides et de l'orifice d'injection, un raffinement du maillage est nécessaire, ce qui influe directement sur la disposition et la distribution des volumes de contrôle à établir. Pour notre cas, le maillage à établir peut aussi bien être à maillage régulier ou irrégulier et aussi en monobloc ou multi-blocs.

En cherchant dans la littérature, on trouve qu' Azzi [15] a montrer par la conduite d'un cas test (Lid driven case) que l'adoption d'un maillage non uniforme aboutit à des résultats moins précis que ceux obtenus par le biais d'un maillage uniforme. Aussi, Azzi [15] a pu maîtriser dans ces calculs la complexité géométrique par l'adoption d'une technique basée sur une génération de maillage en multi-blocs. Il en a conclu que cette technique est parfaitement adaptée aux domaines de calculs formant des jonctions tridimensionnelles et permet un gain d'espace mémoire important. Des zones de connectivité communes aux parties adjacentes permettent de transmettre l'information entre les différents blocs. C'est donc un maillage régulier en multi-blocs qui a été choisi pour approcher notre problème.



### 3.3.1- Méthodes multi-blocs :

Le développement d'un maillage pour le cas d'un domaine complexe, comme c'est le cas pour un profil d'aube de turbine ou d'une ailette, de type NACA par exemple, peut être effectué aisément par une méthode multi-blocs et contourner une difficulté importante si on opte pour une méthode conventionnelle. Ainsi, le domaine d'étude complexe est décomposé en sous domaines plus simples dont chacun possède un maillage structuré. Plusieurs implémentations de la méthode multi-blocs sont possibles, en fonction des contraintes requises entre les blocs :

- avec recouvrement : si aucune attention n'est portée aux interfaces entre les blocs, chaque bloc peut être maillé séparément pour chaque composante du domaine. Le maillage résultant est donc un système de sous maillages se recouvrant partiellement. L'inconvénient principal de cette technique est dans le transfert de l'information entre maillages voisins ainsi que la précision de l'interpolation qui peut affecter la stabilité de la méthode.
- Par carreaux : une contrainte supplémentaire peut être ajoutée dans cette méthode par rapport à celle précédemment citée réside au fait que les lignes du maillage peuvent être discontinues. D'un autre côté, on a une procédure d'interpolation plus simple que celle dans le cas de la méthode avec recouvrement.
- Composite : où il est imposé une continuité des lignes du maillage de part et d'autre de leurs frontières. Elle nécessite une numérotation globale des sommets du maillage. Le résultat numérique résultant y est amélioré.

### 3.3.2- Partitionnement du domaine :

Le Partitionnement du domaine est souvent réalisé par l'utilisateur, d'où selon ce sens, toute méthode multi-bloc peut être vue comme une méthode semi-automatique, due principalement à la difficulté d'automatiser le processus.

Deux étapes peuvent être prises pour le partitionnement du domaine :

➤ L'aspect géométrique :

cette étape doit permettre une approche précise du domaine par les blocs, qui doivent être aussi proches que possible d'une forme convexe afin de garantir plus tard le processus de maillage local. Un choix pertinent du nombre de blocs tout comme un choix judicieux de paramètres de subdivisions possibles permettent d'obtenir une bonne approximation de la géométrie. Dans les régions ayant une courbure forte, plusieurs blocs ou une discrétisations fine est une solution pour bien capter la géométrie.

Conformité et consistance : En pratique, un paramètre de subdivision est associé aux arêtes des blocs, mais certaines arêtes peuvent être connectées, ce qui en suit une réduction du nombre de paramètres possibles.

➤ Aspects pratiques :

Après définition des blocs, celle des arêtes, des coins et des faces formant les constituant des premiers, est nécessaires.

- Etape 1 : Définition des coins : Cette étape consiste à numéroter globalement les coins des différents blocs de façon à ne pas avoir une numérotation locale, mais globale qui pourra être utilisée par la suite.

- Etape 2 : Définition et maillage des arêtes : Les arêtes sont définies à partir de leurs extrémités (les coins) et d'un paramètres de subdivision ( $n$ ). Alors, selon les possibilités de maillage, chaque arête est découpée en  $n+1$  segments ( $n$  points intermédiaire y sont créés). Pour la numérotation de ces points, on doit comme précédemment, trouver un système globale pour les sommets introduits.

- Etape 3 : Définition et maillage des faces : Les faces sont décrites par leurs arêtes. Selon le type de la face et en fonction des différents paramètres de subdivision, la face est maillée par exemple via une méthode algébrique ou une méthode équivalente construisant un maillage structuré. Comme précédemment, une numérotation globale des sommets créés doit être établie.

- Etape 4 : Définition et maillage des blocs : Les blocs sont décrits via leur faces d'où la possibilité de l'application d'un processus local du maillage. La numérotation des sommets internes peut être faite séquentiellement en partant du premier indice disponible, c'est à dire, le numéro du dernier sommet de la dernière face plus 1.

- Etape 5 : Construction du maillage global : Cette étape devient automatique puisque les différents sommets ont été numérotés de façon globale lors des étapes précédentes.

Tous les coins, toutes les arêtes et toutes les faces sont donc traités avant le passage au maillage des différents blocs. Les relations entre coins, arêtes et blocs doivent être proprement établies.

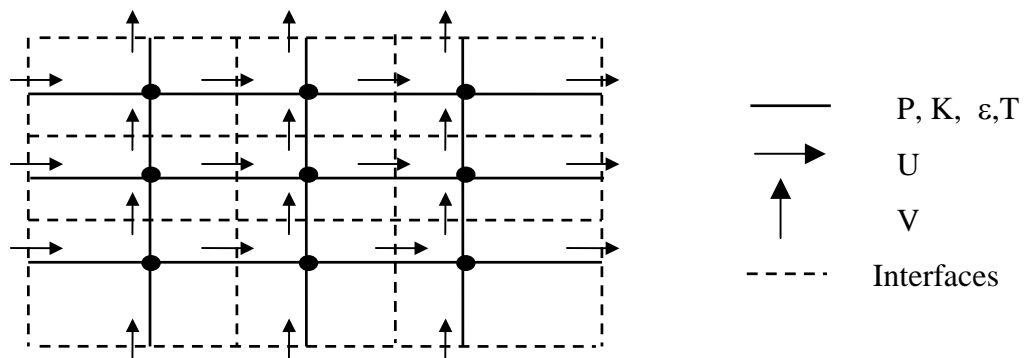


Figure 3.1 : Schéma de maillage du domaine d'étude et localisation des variables (cas k- $\epsilon$ ).

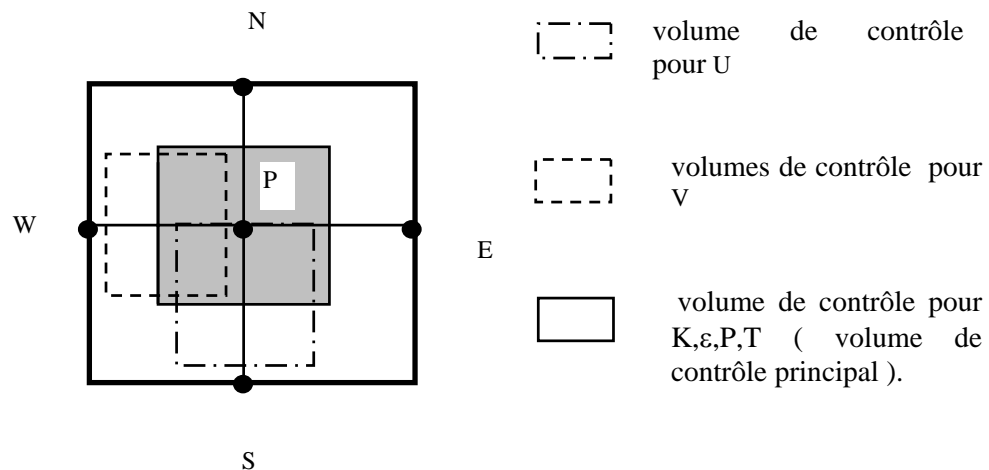


Figure 3.2 : décalage des volumes de contrôle

### 3.4- Discrétisation :

La transformation des équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques, ou la discrétisation, permet d'intégrer les équations différentielles régissant

notre problème, par morceaux sur un élément de volume. Cette intégration s'effectue après avoir rassemblé les différents termes des parties intégrées, en prenant compte bien sûr, d'un certain nombre d'hypothèses.

La discrétisation des équations aux dérivées partielles est mieux expliquée dans le cas de celle de l'équation gouvernant la variable générale  $\Phi$  qui peut remplacer toutes les caractéristiques de l'écoulement. En terme de coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ , ceci peut être exprimé comme :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U \Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S_{\Phi} \quad (3.1)$$

Dans cette équation, la valeur  $\Phi$  représente la variable ou la quantité transportée,  $\Gamma_{\Phi}$  le coefficient diffusif et  $S_{\Phi}$  le terme source.

En posant :

$$J_x = \rho U \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad J_y = \rho V \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.2)$$

L'équation (3.1) s'écrira alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_{\Phi} \quad (3.3)$$

$J$  étant le flux total qui traverse les frontières d'un volume de contrôle. En intégrant l'équation (3.3) sur le volume de contrôle considéré (figure 3.3) on aura :

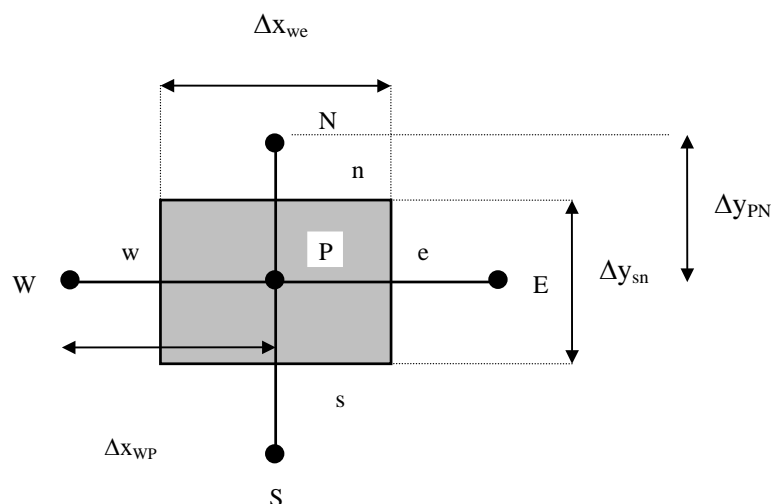


Figure 3.3 : volume de contrôle

$$\int_{w_s}^e \int_{s_s}^n \frac{\partial}{\partial x} (J_x) dx dy + \int_{w_s}^e \int_{s_s}^n \frac{\partial}{\partial y} (J_y) dx dy = \int_{w_s}^e \int_{s_s}^n S_\Phi dx dy \quad (3.4)$$

Cela donnera :

$$(J_x)_e A_e - (J_x)_w A_w + (J_y)_n A_n - (J_y)_s A_s = \bar{S} \Delta V \quad (3.5)$$

qui peut aussi être écrite comme suit :

$$J_e A_e - J_w A_w + J_n A_n - J_s A_s = \bar{S} \Delta V \quad (3.6)$$

avec :

$J_e, J_w, J_n, J_s$  : représentent les flux totaux sur les faces des volumes de contrôle

$S$  : terme source à travers le volume de contrôle

$\Delta V$  : le volume

$A_e, A_w, A_n, A_s$  : sont les aires de chaque face du volume de contrôle.

Donc :  $\bar{S} = S_\Phi \Delta x \Delta y$

$$\begin{aligned} J_e &= (\rho U \Phi)_e - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e & J_w &= (\rho U \Phi)_w - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \\ J_n &= (\rho V \Phi)_n - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n & J_s &= (\rho V \Phi)_s - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s \end{aligned}$$

En effectuant les étapes de calcul établies par PATANKAR [93], et aussi rappelées par MALALASEKERA [94], l'équation (3.6) deviendra :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (3.7)$$

avec :

$$a_E = D_e A (P_e) + [-F_e, 0] \quad (3.8)$$

$$a_W = D_w A (P_w) + [F_w, 0] \quad (3.9)$$

$$a_N = D_n A (P_n) + [-F_n, 0] \quad (3.10)$$

$$a_S = D_s A (P_s) + [F_s, 0] \quad (3.11)$$

$$b = S_C \Delta V \quad (3.12)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta V \quad (3.13)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{\Phi_e}}{\delta x_e} A_e \quad F_e = (\rho U)_e A_e \quad P_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{\Phi_w}}{\delta x_w} A_w \quad F_w = (\rho U)_w A_w \quad P_w = \frac{F_w}{D_w}$$

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{\Gamma_{\phi_n}}{\delta x_n} A_n & F_n &= (\rho V)_n A_n & P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\
D_s &= \frac{\Gamma_{\phi_s}}{\delta x_s} A_s & F_s &= (\rho V)_s A_s & P_s &= \frac{F_s}{D_s}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
A_e &= \Delta y_{sn} & A_w &= \Delta y_{sn} & A_n &= \Delta x_{we} & A_s &= \Delta x_{we} \\
\delta x_e &= \Delta x_{PE} & \delta x_w &= \Delta x_{WP} & \delta y_n &= \Delta y_{PN} & \delta y_s &= \Delta y_{SP}
\end{aligned}$$

$F_e$  ,  $F_w$  ,  $F_n$  et  $F_s$  sont les débits massiques respectivement à travers les faces Est, Ouest, Nord et Sud du volume de contrôle.

Les termes  $P_e$  ,  $P_w$  ,  $P_n$  et  $P_s$  représentent le rapport de transfert par convection au transfert par diffusion.

L'expression du coefficient  $a_p$  est donnée par l'équation ( 3.13 ), résulte de la supposition que les débits de masse  $F_e$  ,  $F_w$  ,  $F_n$  et  $F_s$  satisfont l'équation de continuité pour le volume de contrôle.

L'équation ( 3.7 ) peut s'écrire donc sous une forme généralisée comme suit :

$$a_p \Phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + b \quad (3.14)$$

L'indice nb indique les nœuds voisins de P, et la sommation est faite à travers tous les nœuds voisins. ( nb = e, w, n, s )

Les volumes de contrôle des composantes du vecteur vitesse, U et V, étant différent du volume de contrôle principal de  $\Phi$ , ce qui préconise des indications spécifiques. Cela a été bien indiqué dans les figures 3.4 et 3.5 représentant respectivement les volumes de contrôle de U et de V. Lors de la discrétisation de l'équation du mouvement pour U, il n'est remarqué aucun changement survenant de l'approximation sur les volumes aux faces w et e et les dérivées sur ces faces représentent respectivement la convection et la diffusion. Toutefois, sur les faces s et n les flux de masse et la diffusivité sont évalués autrement. Par exemple, la détermination du flux de masse  $F_n$  à travers la face Nord n par le biais d'une moyenne arithmétique entre  $v_{nw}$  et  $v_{ne}$  . Ainsi les propriétés du fluide et les coefficients d'échange à cette interface sont évalués à partir d'interpolations bi - linéaire utilisant les nœuds w, nnw, nne et e.

Il est noté alors, que le principal terme source dans l'équation du mouvement pour U est le terme du gradient de pression.

$$S_{UI} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.15)$$

La discrétisation de ce terme donne :  $S_{UI} \Delta x \Delta y = (P_w - P_e) \Delta y$

Aucune approximation, n'est effectuée pour l'obtention des pression sur les faces w et e.

Pour la composante de la vitesse V, il a été considéré des conditions similaires en ce qui concerne l'équation du mouvement.

A partir des changements effectués ci-dessus, les équations discrétisées peuvent être écrites comme suit :

$$a_P^U U_P = a_E^U U_E + a_W^U U_W + a_N^U U_N + a_S^U U_S + (P_w - P_e) \Delta y + S^U \text{vol}^U \quad (3.16)$$

$$a_P^V V_P = a_E^V V_E + a_W^V V_W + a_N^V V_N + a_S^V V_S + (P_s - P_n) \Delta y + S^V \text{vol}^V \quad (3.17)$$

Avec des coefficient a égaux à ceux utilisés précédemment dans l'équation ( 3.7 ), et des termes  $F_i$  et  $D_i$  évaluées et approximées selon le volume de contrôle de chacun.

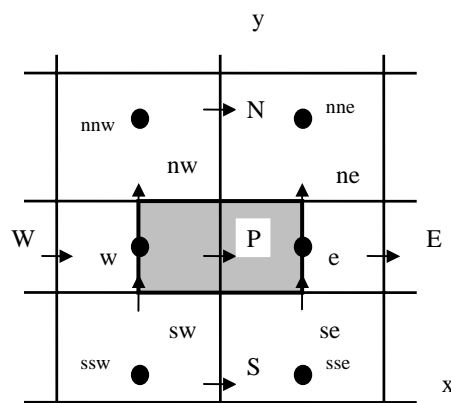


Figure 3.4 : volume de contrôle et notations de l'équation de mouvement U.

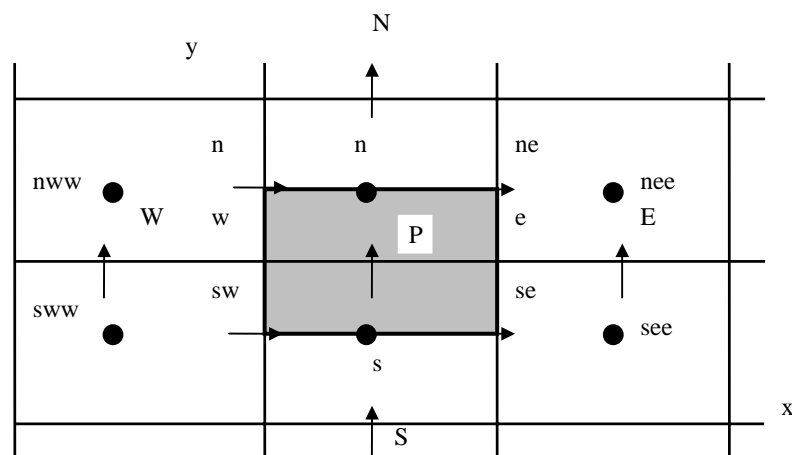


Figure 3.5 : volume de contrôle et notations de l'équation de mouvement V.

### 3.4.1- Considérations géométriques :

La variation de la masse volumique et de la viscosité tourbillonnaire et en raison de la discrétisation de nos équations, nécessiterais leur évaluation au niveau des interfaces. Pour cela, une moyenne pondérée est utilisée pour prendre en compte la distance séparant une interface des nœuds situés dans son voisinage. Cela est donné comme :

$$\rho_e = f_e \rho_E + (1 - f_e) \rho_P$$

$$\rho_w = f_w \rho_P + (1 - f_w) \rho_W$$

$$\rho_n = f_n \rho_N + (1 - f_n) \rho_P$$

$$\rho_s = f_s \rho_P + (1 - f_s) \rho_S$$

$$\text{avec : } f_e = \frac{\delta x_{Pe}}{\Delta x_{PE}} \quad f_w = \frac{\delta x_{Ww}}{\Delta x_{WP}} \quad f_n = \frac{\delta y_{Nn}}{\Delta y_{PN}} \quad f_s = \frac{\delta y_{Ps}}{\Delta y_{SP}}$$

de même :

$$\mu_{\text{eff}}|_e = f_e \mu_{\text{eff}E} + (1 - f_e) \mu_{\text{eff}P}$$

$$\mu_{\text{eff}}|_w = f_w \mu_{\text{eff}P} + (1 - f_w) \mu_{\text{eff}W}$$

$$\mu_{\text{eff}}|_n = f_n \mu_{\text{eff}N} + (1 - f_n) \mu_{\text{eff}P}$$

$$\mu_{\text{eff}}|_s = f_s \mu_{\text{eff}P} + (1 - f_s) \mu_{\text{eff}S}$$

### 3.4.2- Terme source :

Pour résoudre les équations algébriques adoptée précédemment, le terme source doit être linéarisé afin d'obtenir une amélioration de la convergence. Pour cela, la méthode qui est recommandée, est celle de la tangente, on obtient donc :

$$\bar{S} = S_C + S_P \Phi_P \quad (3.18)$$

Le terme  $S_P$ , représente le coefficient de  $\Phi_P$ , alors que le terme  $S_C$ , représente à lui, la partie constante de  $\bar{S}$ . Les valeurs de  $S_C$  et de  $S_P$  ( $S_P < 0$ ) pour les différentes équations sont résumés dans le tableau ci-dessous.



**Tableau 3.1 :** expression des diffusivités turbulentes et termes sources pour un système de coordonnées cartésiennes

Paramètres Equations de :	$\Phi$	$\Gamma$	$S_C$	$S_P$
Continuité	1	0	0	0
quantité de mouvement / X	U	$\mu_{\text{eff}}$	$S^U - \frac{\partial P}{\partial x}$	0
quantité de mouvement / Y	V	$\mu_{\text{eff}}$	$S^V - \frac{\partial P}{\partial y}$	0
l'énergie cinétique turbulente K	K	$\frac{\mu}{\sigma_{K,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{K,t}}$	G	$-\frac{C_u \rho^2 K}{\mu_t}$
taux de dissipation $\varepsilon$	$\varepsilon$	$\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}}$	$\frac{C_1 C_u G \rho K}{\mu_t}$	$-\frac{C_2 C_u \rho^2 K}{\mu_t}$
l'équation d'énergie T	T	$\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}$	$\frac{U}{C_p} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{V}{C_p} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\varphi}{C_p}$	0

➤ Schémas utilisés :

Dans les coefficients de l'équation discrétisée, on remarque, l'apparition du terme de  $A(|P|)$ . La valeur que peut prendre ce terme est primordiale et déterminante pour la suite de la résolution. C'est pourquoi, une valeur de ce terme doit être donnée afin de le schéma utilisé pour l'évaluation de  $\Phi$  à l'interface, comme indiqué dans le tableau ci-après :

**Tableau 3.2 :** La fonction  $A(|P|)$  pour les différents schémas

Schéma	Formulation de $A( P )$
Central différence	$1 - 0.5  P $
Upwind	1
Hybrid	$[0, 1 - 0.5  P ]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1  P )^5]$
Exponentiel (exact)	$ P  / (\text{Exp}( P ) - 1)$

PATANKAR [93] recommande le schéma « Power Law », qui s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte et il est largement utilisé dans la littérature, donc le plus approprié des schémas proposés.

### 3.4.3- Critère de convergence et facteur de sous relaxation :

Le critère de convergence de la résolution itérative est basé sur les résidus absolus normalisés des équations algébriques à résoudre. Ils sont définis comme :

$$\text{Resor}\Phi = \sum \left| \sum a_{nb} \Phi_{nb} + S_C - a_P \Phi_P \right| / F_{in\Phi} \quad (3.19)$$

La variable généralisée  $\Phi$  peut être U, V, K,  $\varepsilon$  ou T. La somme des résidus normalisés en valeur absolue de l'équation pour  $\Phi$ , nommée Resor  $\Phi$ , est la somme des associée à tous les volumes de contrôles du domaine.

$$\text{Resorm} = \sum |m_{ij}| / \min \quad (3.20)$$

avec :

Resorm : est la somme des résidus de masse normalisés en valeur absolue.

$F_{in\Phi}$  est le flux total à l'entrée associé à la variable  $\Phi$ , pour les équations du mouvement et min est le débit massique total à l'entrée. La convergence est obtenue quand les résidus se réduisent à une valeur inférieure à celle prescrite SORMAX. Dans le code de calcul, la valeur de SORMAX adoptée est de 0.5%.

La sous relaxation est une bonne méthode pour atténuer ou minimiser les oscillations durant la résolution, d'une itération à une autre. Elle peut être exprimée, pour une variable générale  $\Phi$ , par :

$$\Phi_p = \Phi_p^0 + \alpha_{\Phi_p} (\Phi_p^1 - \Phi_p^0) \quad (3.21)$$

où :  $\Phi_p^0$  : est la valeur obtenue de l'itération précédente.

$\Phi_p^1$  : est la valeur obtenue de la résolution en cours.

$\alpha_{\Phi_p}$  : est la constante de sous relaxation.

Les coefficients de sous relaxation utilisés dans notre étude sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 3. 3 : Coefficients de sous-relaxation

$\alpha_U$	$\alpha_V$	$\alpha_K$	$\alpha_\varepsilon$	$\alpha_T$	$\alpha_P$	$\alpha_\rho$	$\alpha_{\mu\text{eff}}$
0.5	0.5	0.5	0.5	1	0.3	0.3	0.5

### 3.4.4- Solution des équations algébriques :

Il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques, on en cite les méthodes directes, tels que la méthode de GAUSS-JORDAN et les méthodes itératives, tels que la méthode de GAUSS-SEIDEL).

Suite au procédé itératif de l'algorithme SIMPLE adopté, une méthode de résolution itérative, dite ligne par ligne a été choisie. Cette méthode, procède par propagation de l'information pris aux limites du domaine, sur toute l'étendue du champ de calcul. Elle emploie pour la solution du système d'équations l'algorithme de calcul de Thomas dit aussi TDMA (tri Diagonal Matrix Algorithm), qui est une procédure de résolution des systèmes d'équations à matrices tri diagonales.

➤ Développement de la méthode :

On suppose que les valeurs de  $\Phi$  pour les lignes  $(i+1)$ ,  $(i-1)$  sont connues, donc nous sommes en présence d'uniquement trois inconnues dans chaque équation.

$$\begin{aligned} (A_{i,j} + Sp_{i,j})\Phi_{i,j} - A_{i,j-1}\Phi_{i,j-1} - A_{i,j+1}\Phi_{i,j+1} &= A_{i+1,j}\Phi_{i+1,j} + A_{i-1,j}\Phi_{i-1,j} + Sc & (3.22) \\ 1 \leq i \leq n & & 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

avec :

$$A_{i,j-1} = b(j)$$

$$A_{i,j+1} = a(j)$$

$$A_{i+1,j}\Phi_{i+1,j} + A_{i-1,j}\Phi_{i-1,j} + Sc = c(j)$$

$$A_{i,j} + Sp_{i,j} = d(j)$$

L'équation (3.22) devient alors :

$$-b(j)\Phi_{j-1} + d(j)\Phi_j - a(j)\Phi_{j+1} = c(j) \quad (3.23)$$

Ce système, peut aussi être représenté sous forme matricielle comme suit:

$$\{A\} \Phi = c \quad (3.24)$$

avec :

$$\{A\} = \begin{bmatrix} d(2) & -a(2) & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -b(3) & d(3) & -a(3) & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -b(4) & d(4) & -a(4) & 0 & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & -b(n) & d(n) \end{bmatrix}$$

La matrice  $\{A\}$  est tridiagonale et a  $((3n-1)-2)$  termes intérieurs. L'algorithme de THOMAS ou TDMA se résume à la réduction de la matrice tridiagonale  $\{A\}$  en une matrice bidiagonale dont les termes de la diagonale principale sont égaux à l'unité.

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 & & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Avec :

$$\gamma_2 = \frac{a(2)}{d(2)}$$

$$\gamma_j = \frac{a(j)}{d(j) - b(j) \cdot \gamma_{j-1}}$$

$$\beta_2 = \frac{c(2) + b(2) \cdot \Phi_1}{d(2)}$$

$$\beta_j = \frac{c(j) + b(j) \cdot \beta_{j-1}}{d(j) - b(j) \cdot \gamma_{j-1}}$$

La résolution est comme suit :

$\Phi_1$  : est donné au condition aux limites

$$\Phi_n = \beta_n$$

$$j = n-1, 2, -1$$

$$\Phi_j = \beta_j + \gamma_j \cdot \Phi_{j+1}$$

Après la résolution de la colonne  $i$ , on passe à la résolution des colonnes  $(i-1)$ ,  $(i+1)$ , jusqu'à la frontière du domaine. Une fois que tout le domaine est balayé, cette opération est répétée en plusieurs itérations jusqu'à ce que les champs des  $\Phi$  converge vers une valeur stable et ne change plus au cours de l'itération.

### 3.5- Equation du champ de pression :

La résolution des équations mouvement correspondantes à la vitesse, pour un champ de pression connu ou donné, nous permettent la détermination des composantes du vecteur vitesse. Cependant, en plus du fait que le champ de pression est inconnu, il n'y a pas d'équations le gouvernant et l'équation de continuité a comme condition pour satisfaire la compatibilité entre les composantes de la vitesse, un champ de pression correct..

Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été développées. L'acronyme SIMPLE ( Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations ) établis par PATANKAR et SPALDING en 1972 est la première méthode à être développée, suivi par SIMPLER (SIMPLE Revised ) par PATANKAR en 1980, SIMPLEC (SIMPLE Consistent) par Van DOORMAL & RAITBY en 1984 et PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators ) par ISSA en 1986 [94].

Ces méthodes sont toutes été basées sur une combinaison des équations de quantité de mouvement et celle de continuité pour l'obtention d'une équation pour corriger la pression. Dans notre présent travail, l'algorithme SIMPLE de PATANKAR [93] est celui qui a été adopté et modifié pour obtenir la solution de notre problème d'écoulement compressible.

Dans l'algorithme de SIMPLE, on commence d'abord par faire une initialisation de la pression, ce qui est en général fait arbitrairement. Dans notre cas, on a trouver judicieux, d'initialiser notre densité égale à celle de l'écoulement d'entrée. On prend par convention, l'indice \* pour les valeurs choisies de pression et de densité et l'indice ' pour les valeurs corrigées, on a donc :

$$P = P^* + P' \quad ( 3.26 )$$

$$\rho = \rho^* + \rho'$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^* + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{P}} \right)_T \mathbf{P}' \\
&= \rho^* + \mathbf{Q} \mathbf{P}' \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^* + \mathbf{U}' \tag{3.28}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^* + \mathbf{V}' \tag{3.29}$$

Avec les champs de vitesse  $\mathbf{U}^*$  et  $\mathbf{V}^*$ , obtenus de l'itération précédente.

$$\mathbf{a}_P^U \mathbf{U}_P^* = \sum \mathbf{a}_{nb}^U \mathbf{U}_{nb}^* + \mathbf{A}^U (\mathbf{P}_w^* - \mathbf{P}_e^*) + \mathbf{S}^U \text{vol} \tag{3.30}$$

$$\mathbf{a}_P^V \mathbf{V}_P^* = \sum \mathbf{a}_{nb}^V \mathbf{V}_{nb}^* + \mathbf{A}^V (\mathbf{P}_s^* - \mathbf{P}_n^*) + \mathbf{S}^V \text{vol} \tag{3.31}$$

avec  $\mathbf{A}^U$  et  $\mathbf{A}^V$  représentent les aires.

La distribution corrigée de  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{a}_P^U \mathbf{U}_P = \sum \mathbf{a}_{nb}^U \mathbf{u}_{nb} + \mathbf{A}^U (\mathbf{P}_w - \mathbf{P}_e) + \mathbf{S}^U \text{vol} \tag{3.32}$$

$$\mathbf{a}_P^V \mathbf{V}_P = \sum \mathbf{a}_{nb}^V \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{A}^V (\mathbf{P}_s - \mathbf{P}_n) + \mathbf{S}^V \text{vol} \tag{3.33}$$

En sous tractant les équations ( 3.32 ) et ( 3.33 ) respectivement de ( 3.30 ) et ( 3.31 ), on obtient :

$$\mathbf{a}_P^U \mathbf{U}_P' = \sum \mathbf{a}_{nb}^U \mathbf{U}_{nb}' + \mathbf{A}^U (\mathbf{P}_w' - \mathbf{P}_e') \tag{3.34}$$

$$\mathbf{a}_P^V \mathbf{V}_P' = \sum \mathbf{a}_{nb}^V \mathbf{V}_{nb}' + \mathbf{A}^V (\mathbf{P}_s' - \mathbf{P}_n') \tag{3.35}$$

$$\left| \sum \mathbf{a}_{nb}^U \mathbf{U}_{nb}' \right| \ll \mathbf{A}^U (\mathbf{P}_w' - \mathbf{P}_e') \tag{3.36}$$

$$\left| \sum \mathbf{a}_{nb}^V \mathbf{V}_{nb}' \right| \ll \mathbf{A}^V (\mathbf{P}_s' - \mathbf{P}_n') \tag{3.37}$$

Ainsi, on peut tirer les corrections des vitesses  $\mathbf{U}_P'$  et  $\mathbf{V}_P'$  comme suit :

$$\mathbf{U}_P' = \frac{\mathbf{A}^U}{\mathbf{a}_P^U} (\mathbf{P}_w' - \mathbf{P}_e') = \mathbf{D}^U (\mathbf{P}_w' - \mathbf{P}_e') \tag{3.38}$$

$$\mathbf{V}_P' = \frac{\mathbf{A}^V}{\mathbf{a}_P^V} (\mathbf{P}_s' - \mathbf{P}_n') = \mathbf{D}^V (\mathbf{P}_s' - \mathbf{P}_n') \tag{3.39}$$

L'équation de continuité discrétisée est identique à ( 3.1 ) excepté pour  $\Phi = 1$  et  $\Gamma_\Phi = \mathbf{S}_\Phi = 0$ . Pour le volume de contrôle ( figure 3.2 ), l'équation de continuité discrétisée pour le volume s'écrit :

$$(\rho \mathbf{a} \mathbf{U})_e - (\rho \mathbf{a} \mathbf{U})_w + (\rho \mathbf{a} \mathbf{V})_n - (\rho \mathbf{a} \mathbf{V})_s = 0 \tag{3.40}$$

Cette dernière équation, nous permettra de tirer l'équation de correction de pression. L'équation résultante à travers les différentes faces de volume de contrôle exprimée en terme des propriétés choisies et corrigées est :

$$\begin{aligned} & \left[ (\rho' + \rho^*) (U' + U^*) a \right]_e - \left[ (\rho' + \rho^*) (U' + U^*) a \right]_e \\ & + \left[ (\rho' + \rho^*) (V' + V^*) a \right]_n - \left[ (\rho' + \rho^*) (V' + V^*) a \right]_s = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'introduction des relations ( 3.38 ) et ( 3.39 ) dans celle ci dessus et en faisant l'analogie avec les faces du volume de contrôle de continuité ( figure 3.2 ) ( c'est à dire s, n et w, e), nous donne :

$$\begin{aligned} & a_e \left[ \rho_e^* D_e^U (P'_P - P'_E) + Q_e P'_E U_e^* \right] - a_w \left[ \rho_w^* D_w^U (P'_W - P'_P) + Q_w P'_W U_w^* \right] \\ & + a_n \left[ \rho_n^* D_n^V (P'_P - P'_N) + Q_n P'_N V_n^* \right] - a_s \left[ \rho_s^* D_s^V (P'_S - P'_P) + Q_s P'_S V_s^* \right] = m^+ \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec : Q : représentent  $\frac{1}{RT}$  comme dans la relation ( 3.27 ).

m : représente le résidu de masse à travers chaque volume de contrôle.

$$m = a_w \rho_w^* U_w^* - a_w \rho_e^* U_e^* + a_s \rho_s^* V_s^* - a_n \rho_n^* V_n^* \quad (3.43)$$

Il est supposé que  $\rho u'$ ,  $\rho v'$  peuvent être négligés. Cela ne peut être d'aucune conséquence sur la solution finale, mais peut uniquement légèrement influencer sur les caractéristiques de la convergence.

Le nombre de Mach à travers les faces, est définit par :

$$M_{an} = \frac{Q_n V_n^*}{\rho_n^* D_n^V}$$

$$M_{as} = \frac{Q_s V_s^*}{\rho_s^* D_s^V}$$

$$M_{ae} = \frac{Q_e U_e^*}{\rho_e^* D_e^U}$$

$$M_{aw} = \frac{Q_w U_w^*}{\rho_w^* D_w^U}$$

L'équation ( 3.41 ) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} & R_e \left[ \frac{(P'_P - P'_E)}{M_{ae}} + P'_E \right] - R_w \left[ \frac{(P'_W - P'_P)}{M_{aw}} + P'_W \right] \\ & + R_n \left[ \frac{(P'_P - P'_N)}{M_{an}} + P'_N \right] - R_s \left[ \frac{(P'_S - P'_P)}{M_{as}} + P'_S \right] = m \end{aligned} \quad (3.44)$$

où R représentent U a Q et V a Q.

L'interpolation des corrections de pression se trouvant aux faces du volume de contrôle à ceux des nœuds est nécessaire à cette phase du calcul, par le biais de la moyenne pondérée, comme indiqué ci-dessous.

$$P'_e = P'_p + f_e (P'_E - P'_p)$$

$$P'_w = P'_w + f_w (P'_p - P'_w)$$

$$P'_n = P'_p + f_n (P'_N - P'_p)$$

$$P'_s = P'_s + f_s (P'_p - P'_s)$$

En prenant les considérations les équations d'au dessus et en les introduisant dans l'équation (3.44), celle ci devient :

$$\begin{aligned} R_e [(1 - \alpha_e) P'_p + \alpha_e P'_E] - R_w [(1 - \alpha_w) P'_w + \alpha_w P'_p] \\ + R_n [(1 - \alpha_n) P'_p + \alpha_n P'_N] - R_s [(1 - \alpha_s) P'_s + \alpha_s P'_p] = m \end{aligned} \quad (3.45)$$

Où :

$$\alpha = f - \frac{1}{M_a}$$

L'équation ( 3.45 ) peut être écrite ou exprimée sous forme indicielle , par :

$$a_p P'_p = \sum a_{nb} P'_{nb} + m \quad (3.46)$$

avec :

$$a_N = -\alpha_n R_n$$

$$a_S = R_s (1 - \alpha_s)$$

$$a_W = R_w (1 - \alpha_w)$$

$$a_E = -\alpha_e R_e$$

$$a_p = R_e (1 - \alpha_e) - R_w \alpha_w + R_n (1 - \alpha_n) - R_s \alpha_s$$

L'absence des termes  $\left| \sum a_{nb}^U U'_{nb} \right|$  et  $\left| \sum a_{nb}^V V'_{nb} \right|$  dans la procédure de calcul itérative n'influe pas sur la solution finale, puisque quand le le terme source m devient nul, les pressions de correction  $P'$  deviennent nulles, d'où on obtient une satisfaction de l'équation de la continuité par les solutions obtenues.

La procédure de résolution de l'équation ( 3.46 ) avec les équations du mouvement déjà développées, est celle de l'algorithme SIMPLE. Le champs de correction de pression est obtenu après la résolution des équations ci-dessus pour tout le volume de contrôle, ce



qui permet la correction de la vitesse avec objectif de satisfaire l'équation de continuité. Cependant, quand le champs de pression corrigé  $P = P' + P^*$  est utilisé pour résoudre l'équation du mouvement, cela engendre des résidus numériques  $m$ , ce qui nécessite que la résolution des équations du mouvement et de correction de pression soit répétée jusqu'à atténuation ou annulation de ce résidu  $m$ .

### 3.6- Conditions aux limites :

La nature elliptique de nos équations aux dérivées partielles requière des conditions aux limites au niveau de toutes les frontières. Il a été donc considérés de façon particulière dans notre présent travail, trois types de conditions aux limites, comme est indiqué dans la figure ci-dessous (figure 3.6). Ces trois types sont :

- l'entrée du jet
- écoulement loin de l'aube
- les parois rigides de l'aube

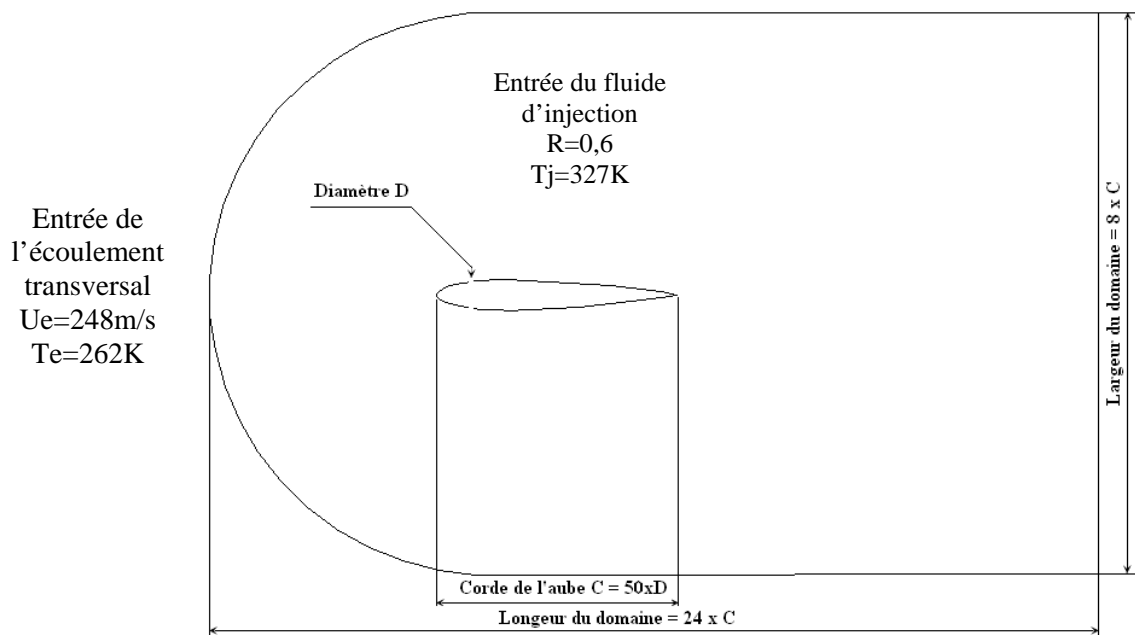


Figure 3.6 : Frontières limites de calcul

Où on a :  $D$  : Largeur de la fente  
 $\alpha$  : Angle de pénétration du jet

$$D = 0.005 \text{ mm}$$

$$C = 0.25 \text{ m}$$

### 3.6.1- L'entrée de l'écoulement principal où frontière lointaine :

Les différentes variables  $U$ ,  $V$ ,  $K$ ,  $\varepsilon$  et  $T$  qui caractérisent les différentes propriétés du fluide doivent être connues tout le long de cette frontière. Ces variables peuvent être soit déterminées à partir de données expérimentales, ou à défaut à partir de la connaissance des différents paramètres de l'écoulement tel que la vitesse moyenne à l'entrée ou le débit massique. Dans notre étude, on a deux types d'entrées de fluide, une entres de l'écoulement principal ou transversal et une autre, plus petite, celle d'un jet discret traversant le premier écoulement cité.

Dans cette limites, les conditions de la frontière sont données pour le cas d'une entrée plane d'un fluide, pour une zone située à l'intérieur des couches limites dynamique ou thermique, comme suit :

$$U = U_e \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad V = 0.$$

$$K = C_u^{-0.5} l_m \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad \varepsilon = \frac{K^{3/2}}{C_u^{-3/4} l_m}$$

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^{1/5}$$

Ici, on a  $T_e$  la température d'entrée de l'écoulement principal, la vitesse d'entrée de l'écoulement principal étant  $U_e$ , les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique et la distance à partir de la parois respectivement  $\delta$ ,  $\delta_t$  et  $y$ .

La longueur de mélange prise étant inconnue, elle est donnée par :

$$l_m = \min (\chi y, 0.09 \delta)$$

avec :  $\chi$  : constante de VON KARMAN ( $\chi = 0.41$ ).

Pour les écoulements externes, ou dans les zones situés à l'extérieur des couches limites, les conditions aux limites sont établis comme suit :

$$U = U_e$$

$$V = 0.$$

$$K = 1.5U_e'^{2'}$$

$$\varepsilon = \frac{K^{3/2}}{C^{-3/4} 0.09 * \delta}$$

$$T = T_e$$

$$T_e = 262 \text{ K}$$

$$\text{et } U_e = 248 \text{ m/s}$$

La température d'entrée  $T_e$  est de 262°K, la vitesse  $U_e$  de 248 m/s, finalement l'énergie cinétique de turbulence  $K$  est déterminé à partir du rapport  $\frac{\sqrt{u'^2}}{U_e}$  qui vaut 0.02.

A partir de l'application d'un équilibre énergétique local, on peut y dériver la relation de  $K$ . Celle ci est souvent utilisée dans le cas de couche limite. De sont coté, le taux de dissipation

$\varepsilon$  est obtenue à partir d'une expression employé dans le cas d'une couche limite et cela après fixation préalable de la longueur de mélange, comme l'indique la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{K^{3/2}}{l_s}$$

Où :  $l_s$  est directement liée à  $l_m$  à travers la relation suivante :  $l_s = C_u^{-3/4} l_m \approx 6l_m$

A la sortie, suffisamment à l'aval, l'écoulement peut être considéré comme développé complètement. Ainsi, le gradient de toutes les grandeurs physiques dans la direction de l'écoulement est nulle. Pour un gradient nulle de la composante de la vitesse  $U$  ( $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ ), cela implique que l'autre composante  $V$  soit nulle ( $V=0$ ) et une pression uniforme le long de cette frontière. Donc la condition au limite pour l'équation de correction de pression est :  $P' = 0$

Même en l'absence d'exactitude avec cette méthode, elle reste néanmoins raisonnable, parce qu'elle n'a qu'un effet local dû au fait que la région soit de nature parabolique.

### 3.6.2- Entrée du jet discret :

Dans le cas d'un jet discret traversant un écoulement principal, on considère que cet écoulement est pleinement développé par ces conditions bien sure. La vitesse du jet est par

hypothèse uniforme et est tirée par rapport au rapport d'injection entre celle ci et celle de l'écoulement transversal, comme indiqué ci après :

$$Ra = \frac{\rho_{\text{jet}} U_{\text{jet}}}{\rho_e Ue} \Rightarrow U_{\text{jet}} = \frac{\rho_e Ue Ra}{\rho_{\text{jet}}}$$

avec :  $\rho_e$  et  $\rho_{\text{jet}}$  respectivement densité de l'écoulement externe et celle du jet.

L'angle  $\alpha$  de pénétration de ce jet dans l'écoulement transversal a été fixé à  $45^\circ$ , ce qui rend les deux composantes de la vitesse données par :

$$U = U_{\text{jet}} \cdot \cos(\alpha)$$

$$V = U_{\text{jet}} \cdot \sin(\alpha)$$

Pour  $K$  et  $\varepsilon$ , on a :

$$K = 0.005 Ue^2$$

$$\varepsilon = \frac{K^{3/2}}{0.3D/2}$$

avec une température du jet  $T_{\text{jet}}$  fixée à  $327^\circ \text{K}$ .

### 3.6.3- Frontière libre :

Le long de cette frontière, le fluide entre dans le domaine d'étude sans aucune indication sauf pour la pression qui doit être connue. Avec  $P$  connue, la vitesse perpendiculaire à la frontière peut être calculée à partir des équations de la quantité de mouvement

#### ➤ Les parois rigides :

Les parois rigides ne présentent pas de problèmes particulier pour les calculs dans le cas des écoulements en régime laminaire. Pour ce cas, des conditions de non glissements ( $U=0$ ) et d'imperméabilité ( $V=0$ ) sont suffisantes. Par contre, pour le cas des régimes d'écoulements turbulents, l'interaction de la turbulence et la viscosité provoque la constitution d'une structure complexe près de la paroi.

Pour le cas des écoulements turbulents à grand nombre de REYNOLDS, comme c'est le cas pour notre étude qui utilise un modèle de turbulence  $K - \varepsilon$  à nombre de

REYNOLDS élevé ; les effets de la viscosité sont atténués ; cela pose une inadaptation du modèle au voisinage de la paroi. D'un autre coté, les transports convectif et diffusif deviennent négligeables, ce qui rend que c'est les conditions aux limites qui déterminent la configuration de l'écoulement. En ce qui concerne l'énergie cinétique de turbulence  $K$ , on a un certain équilibre local (production / dissipation ) relatif qui s'établit.

Une modélisation du modèle  $k-\varepsilon$  par fonction paroi des régions avoisinant les paroi solide permet de résoudre les problèmes d'adaptation du modèle.

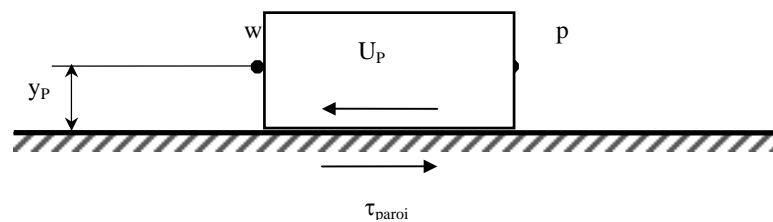


Figure 3.7 : volume de contrôle près de la paroi.

L'hypothèse que la contrainte de cisaillement conserve une valeur constante (égale au frottement à la paroi  $\tau_p$  comme le présente la figure (3.7) dans une mince couche de fluide en contact avec la paroi a été suffisamment vérifiée [95] et est communément appelée région de paroi. Cela permet l'établissement de la "loi logarithmique de la paroi", qui est donnée comme suit :

$$U^+ = \frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{\chi} \text{Ln}(E y^+) \quad (3.47)$$

$$\text{Avec :} \quad y^+ = \frac{\rho U y_p}{\mu} \quad \text{et} \quad U = (\tau_w / \rho)^{1/2}$$

On a le nombre de REYNOLDS  $y^+$ , la vitesse de frottement  $U$ , les constantes empiriques de l'état de rugosité de la paroi  $E$  et de VON KARMAN  $\chi$  respectivement égales à 9.0 et 0.41. Cet équilibre local permet la simplification de l'équation de transport de  $K$ , donnée comme suit :

$$\tau \frac{\partial U}{\partial y} = \rho \varepsilon \quad (3.48)$$

$$\text{Cela donne :} \quad \tau_p^2 = \rho^2 C_u K^2$$

$$\text{Qui peut être aussi écrit comme :} \quad \tau_p = \rho C_u^{1/2} K$$

Aussi, l'hypothèse que la constante de la contrainte de cisaillement donne ce qui suit :

$$\tau_w = \rho C_u^{1/2} K$$

La combinaison de cette équation avec l'équation (3.47) donne :

$$\tau_w = \frac{U_p}{y_p} \frac{\chi \mu y^+}{\text{Ln}(E y^+)} \quad (3.49)$$

La modification du terme source pour permettre de prendre en compte la contrainte de cisaillement, sachant que le transport convectif – diffusif est négligeable devant celui ci ( ndlr : le terme source), permet d'obtenir une évaluation de l'énergie cinétique de turbulence  $K$  près de la paroi, donnée comme suit :

$$G = \iint_v \mu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dv = \tau_w \frac{U_p}{y_p} \text{vol} \quad (3.50)$$

avec :

Vol : le volume du «volume de contrôle » relatif au nœud près de la paroi.

Le taux de dissipation  $\varepsilon$  est intégrée sur le volume de contrôle de la même manière que  $K$ , de telle façon que :

$$\iint_v \varepsilon dv = C_u^{3/4} K_p^{3/2} U^+ \frac{\text{vol}}{y_p} \quad (3.51)$$

où on a :

$$U^+ = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ \leq 11.63 \\ \frac{1}{\chi} \text{Ln}(E y^+) & \text{si } y^+ > 11.63 \end{cases}$$

La relation qui relie le taux de dissipation à l'échelle de longueur est donnée par :

$$\varepsilon = K^{3/2} / l_s \quad (3.52)$$

Celle ci nous permet d'obtenir le taux de dissipation.

A la paroi, la température  $T_w$  est prise constante, par contre dans la région très près de la paroi, cela nécessite un traitement similaire à celui effectué pour le champ dynamique. Le flux de chaleur à la paroi, est donné comme suit [95] :

$$q_w = \frac{\rho C_p C_\mu K_p^{1/2}}{T^+} (T_w - T_p) \quad (3.53)$$

avec :

$$T^+ = \begin{cases} \text{Pr} \cdot y^+ & \text{si } y^+ \leq 11.63 \\ \text{Pr}_t (U^+ + P) & \text{si } y^+ > 11.63 \end{cases}$$

où :

$Pr_t$  : le nombre de PRANDTL turbulent.

$P$  : le facteur de résistance de la sous couche visqueuse.

Ce dernier est donné par :

$$P = \frac{\pi/4}{\sin(\pi/4)} \cdot \left(\frac{A}{\chi}\right)^{0.5} \cdot \left(\frac{Pr}{Pr_t} - 1\right) \cdot \left(\frac{Pr_t}{Pr}\right)^{0.25} \quad (3.54)$$

où :  $A = 26$

### 3.6.4- Conditions aux limites pour les contraintes de Reynolds :

Le code FLUENT, étant celui utilisé, il nécessite pour la résolution, les valeurs des contraintes  $\overline{u_i' u_j'}$ , ainsi que le taux de dissipation  $\varepsilon$ . Ces quantités sont dérivées de l'intensité de la turbulence et de la longueur caractéristique. Au parois, les valeurs des contraintes de Reynolds sont calculés à partir des fonctions aux parois. Les conditions aux limites explicites des parois des contraintes de Reynolds sont effectuée en utilisant des corrections selon des hypothèses d'équilibres. L'utilisation d'un système de coordonnées locales, où  $\tau$  représente la coordonnée tangentielle,  $\eta$  la normale et  $\lambda$  celle binormale, les contraintes de Reynolds aux parois sont calculés à partir de :

$$\frac{\overline{u_{\tau\tau}'^2}}{k} = 1.098 \quad \frac{\overline{u_{\eta\eta}'^2}}{k} = 0.247 \quad \frac{\overline{u_{\lambda\lambda}'^2}}{k} = 0.655 \quad \frac{\overline{u_{\tau\eta}' u_{\eta\tau}'}}{k} = 0.255$$

les contraintes de Reynolds, sont spécifiées explicitement dans les termes des contraintes aux paroi dans  $k$ , comme suit :

$$\frac{\overline{u_{\tau\tau}'^2}}{u_{\tau}^2} = 5.1 \quad \frac{\overline{u_{\eta\eta}'^2}}{u_{\tau}^2} = 1.0 \quad \frac{\overline{u_{\lambda\lambda}'^2}}{u_{\tau}^2} = 2.3 \quad \frac{\overline{u_{\tau\eta}' u_{\eta\tau}'}}{u_{\tau}^2} = 1.0$$

Où  $u_{\tau}$  est la vitesse de frottements définie par  $u_{\tau} = \sqrt{\tau/\rho}$ , où  $\tau_w$  est la contrainte au paroi.

## **CHAPITRE IV**

### **RESULTATS ET DISCUSSIONS**

#### 4.1- Introduction :

Les résultats de ce présent travail concernent l'observation du comportement de l'interaction entre un écoulement transversal compressible un jet oblique simulant dans un plan, une fente d'injections sur paroi d'aubes de turbine à gaz. Le calcul de ces écoulements relève de la résolution des équations de Navier-Stokes et décrit dans tous ses détails l'évolution du champ de vitesse et de température sous l'effet de la courbure de la paroi. L'adjonction du modèle de turbulence RSM réalise notre contribution aux nombreuses études précédentes et apporte des informations très précieuses pour la compréhension des phénomènes fondamentaux.

Les mécanismes de l'interaction entre les deux écoulements, sont traduits par une étude complète des caractéristiques du champ d'écoulement moyen et turbulent. Les résultats du champ des vitesses moyennes et fluctuantes sont présentés et discutés pour un jet unique et oblique ( $Ra=0,6$ ) suivant une inclinaison de  $45^\circ$ , par rapport à l'écoulement transversal, à travers une aube 2D de profil NACA0012.

Le choix des valeurs du rapport d'injection, angle d'inclinaison, géométrie du trou d'injection et des conditions d'écoulements, est dicté par les travaux précédents qui ont été sujet à la comparaison, cas de jet à travers une plaque plane.

La structure de la présentation des résultats commence par la discussion de l'influence du maillage sur les résultats obtenus. A cet effet, on présente l'évolution de la composante longitudinale de la vitesse moyenne et l'énergie cinétique de turbulence pour deux maillages différents et non uniformes.

La nature de l'étude bidimensionnelle du présent travail est justifiée par le fait que les résultats de l'investigation expérimentale menée par DIZENE [60], montrent que les



fluctuations d'une des trois composantes de la vitesse avait des variations autour d'une moyenne nulle. De ce fait, on présente, juste après l'influence du maillage, les caractéristiques de l'écoulement pour décrire l'interaction créée. Ces caractéristiques sont représentés successivement par l'évolution des champs de vitesse moyen et turbulent, du champ de température, des champs de propriétés de turbulence  $k$  et  $\varepsilon$  ainsi qu'une carte d'iso valeurs, obtenus par le modèle RSM d'un écoulement sur une paroi d'aube de profil NACA0012.

Par ailleurs et dans le but d'évaluer la capacité des modèles de turbulence  $k$ - $\varepsilon$  et RSM à prédire les phénomènes qui influencent l'évolution de structures tourbillonnaires par convection et par diffusion, on présente la comparaison des résultats de calcul sur plaque plane, confrontés à ceux obtenus par expérience. Ainsi, les champs moyen et turbulent de la vitesse issus des résultats de calculs numériques sont comparés avec ceux de l'expérience [60].

Pour permettre d'apprécier l'influence de la courbure de paroi sur les caractéristiques de l'écoulement, l'influence de la courbure de paroi sur les caractéristiques de l'écoulement et les performances de l'interaction, on présente ensuite la comparaison des résultats issus du calcul sur la paroi de profil NACA0012 avec ceux issus du calcul sur plaque plane, à l'aide d'un même modèle qui est le modèle RSM.

Dans le but aussi d'apprécier les capacités des deux modèles dans la prédiction des phénomènes complexes tels que les zones de recirculation ou les écoulements tourbillonnaires qui impliquent la courbure des lignes de courant et la rotation. On présente la comparaison des résultats de calcul à l'aide des modèles RSM et  $k$ - $\varepsilon$ , obtenus sur paroi du profil NACA0012. En fait, le modèle  $k$ - $\varepsilon$  capte faiblement la taille et l'intensité des zones tourbillonnaires et n'a plus de sensibilité dans les cas de vortex libres ou forcés. Enfin, on termine la description générale et l'analyse des résultats par l'effet du rayon de courbure sur les propriétés de l'écoulement, à l'aide d'une comparaison de calcul sur paroi de plusieurs profils type NACA.

## 4.2- Présentation et discussions des résultats :

### 4.2.1- Evolution des propriétés de l'écoulement selon le modèle RSM sur NACA0012 :

L'analyse de cet écoulement est faite à partir des profils des vitesses moyennes, des intensités de turbulence, de la production et de la dissipation de l'énergie turbulente issues de l'interaction.

#### 4.2.1.1- Effet du maillage sur les résultats :

Nous avons utilisé (02) maillages de types C différents non uniformes : 28800 et 48000 mailles (Figure 4.1). Une comparaison a été effectuée entre différents résultats obtenus par ces deux maillages, afin d'établir l'indépendance de la solution. Les figures 4.2a et 4.2b représentent respectivement les profils des vitesses réduites et l'énergie cinétique turbulente réduite en différentes positions, montrent une quasi superposition entre les résultats obtenus par le maillage 1 (28800 mailles) et le maillage 2 (48000 mailles). Cette solution est donnée à 2% près entre les deux maillages.

#### 4.2.1.2- Vitesses moyennes réduites :

On représente dans les figures 4.3a et 4.3b, les vitesses moyennes réduites de la vitesse, respectivement suivant  $x$  ( $U/U_e$ ) et suivant  $y$  ( $V/U_e$ ). Les différents profils sont effectués suivant une évolution axiale allant de  $X/D=-1$  à  $X/D=20$ . Les profils montrent clairement la perturbation de la couche limite sous l'effet de l'injection visible jusqu'à  $2D$  en hauteur et moins de  $20D$  longitudinalement.

L'examen de ces profils montre un léger ralentissement de l'écoulement à  $X/D=-1$  suite à l'effet de blocage du jet. La vitesse est perturbée par l'injection très près de la paroi à  $X/D=0$ . A  $X/D=0.5$ , la présence de la composante horizontale du jet accroît la vitesse au niveau de la paroi en formant un pic ( $U/U_e \approx 1.25$ ), puis diminue rapidement,

puis légèrement en allant vers le haut, jusqu'à ( $U/U_e \approx 1.05$ ) vers une hauteur de  $Y/D=3$ . Le pic de la composante horizontale de la vitesse grandit, puis s'élargit et s'aplatit en allant de  $X/D=1$  à  $6D$ , avec une vitesse maximale qui diminue ( $U/U_e \approx 1.6$  à  $X/D=1$  jusqu'à  $U/U_e \approx 1.4$  à  $X/D=6$ ), où le maximum de la vitesse longitudinale provoquée par l'arrivée de fluide de l'écoulement principal se manifeste à partir de l'abscisse  $X/D=1$  et  $X/D=2$ . Au niveau de la paroi on remarque un détachement du profil vitesse établi, qui se forme non loin de la paroi, de  $X/D=6$  à  $20$ , en se relevant et s'éloignant jusqu'à une hauteur approximative de  $Y/D \approx 1.5$ , dû probablement à la dépression créée par le profil de l'aube, ce qui augmentera l'épaisseur de la couche limite jusqu'à rupture après la fin de l'aube.

L'examen des profils de vitesse verticale représentés dans la figure 4.5, montre une composante verticale qui apparaît à cause de la nature convexe de la paroi du profil NACA, ( $V/U_e \approx 0.2$ ) à  $X/D=-1$  à  $4D$  de la paroi. Cette composante est perturbée à  $X/D=-0.5$ , puis augmente d'une façon remarquable à  $X/D=0$ , atteignant de grandes vitesses à la paroi ( $V/U_e \approx 0.55$ ) et diminue à inférieure à  $0.5$  à  $X/D=0.5$ , jusqu'à disparition du pic à la paroi vers  $X/D=1$  et atténuation complète du pic à  $2D$ . Cela va en s'annulant à la paroi et en diminuant en haut, jusqu'à  $X/D=6$  et presque s'annuler à  $X/D=10$ . En ce dernier point, une valeur négative de la vitesse est observée au niveau de la paroi, synonyme d'une introduction vers l'arrière de fluide venant de l'écoulement principal, puis un profil de vitesse carrément négatif à  $X/D=20$  avec ( $V/U_e \approx -0.05$ ) avec une valeur presque nulle à la paroi, due probablement à des tourbillons générés par la partie avale de la paroi convexe et aussi par l'interaction des deux écoulements.

Finalement, l'analyse des deux composantes de la vitesse, montre donc une décélération de l'écoulement en amont du jet et une accélération sur la face supérieure traduisant la conservation du débit d'écoulement dans le plan médian ; Aussi, une diminution de la composante  $U$  et une augmentation de la composante  $V$  de la vitesse, en amont du jet, sont dues à la convexité. La pénétration de l'injection reste cependant faible et son influence est confinée dans la couche limite car la présence du jet ne dépasse pas la hauteur de  $Y/D=1.5$  au dessus de la paroi.

#### 4.2.1.3- Les tensions de Reynolds :

Les corrélations  $u'v'$  et les tensions normales sont importantes dans ce type de problème, puisqu'il s'agit d'une injection dans une couche limite turbulente, car ils participent aux mécanismes d'échange d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement turbulent.

Les figures 4.4a et 4.4b présentent les deux tensions normales adimensionnées par la vitesse extérieure, respectivement suivant  $x$  et suivant  $y$ . On remarque que les intensités turbulentes sont maximales là où les profils des valeurs moyennes présentent les plus forts gradients (région frontière entre le jet et la couche limite). Ils présentent des valeurs maximales comprises entre 4 et 15% pour  $\sqrt{u'^2}/U_e$  et entre 3 et 9% pour  $\sqrt{v'^2}/U_e$ .

Le niveau de turbulence est réduit de  $X/D=-1$  à  $0$ , à cause de la diminution de la pente (positive) de la paroi courbée, puis, la couche de cisaillement  $\sqrt{u'^2}/U_e$  augmente à partir du jet pour atteindre des valeurs maximales loin du jet à  $X/D=10$  pour s'élargir et diminuer plus loin, due probablement au double effet du jet et de la pente négative de la paroi, synonyme de la présence de gradient de pression adverse dans cette région. En ce qui concerne les tensions  $\sqrt{v'^2}/U_e$ , on remarque des valeurs importantes au niveau de la paroi, à l'amont du jet, pour augmenter à l'amont à  $X/D=2$  puis de façon plus importante jusqu'à  $X/D=20$  et même au de là, due probablement au jet et à la dépression causée par la pente négative de la paroi convexe.

L'évolutions des tensions de cisaillement  $u'v'/U_e^2$  est représentée sur la figure 4.4c. En amont et à  $X/D=-1$ , le taux de turbulence près de la paroi est relativement faible ( $<|-0.1|$ ). Une forte augmentation de la tension de cisaillement est observée à partir de  $X/D=1$  et va en augmentant jusqu'à sa valeur réduite atteint  $-0.7$ . Les valeurs négatives montrent que l'échange d'énergie s'effectue de l'intérieur de la couche limite vers l'extérieur. Cela la rend aussi bien perturbée par l'effet de dépression à l'amont de la paroi convexe et du jet. Les valeurs des tensions de cisaillement, restent nulles au dessus de  $Y/D=0.5$  et cette hauteur augmente jusqu'à  $Y/D=1$  à  $X/D=20$ , due à l'épaississement de la perturbation à la

paroi. Par ailleurs, on voit bien que cet échange commence à s'intensifier à partir de la position  $X/D=4$ , comme le montrent les profils

#### 4.2.1.4- Evolution de l'énergie cinétique et de la dissipation turbulentes :

Les distributions de la production et de la dissipation de l'énergie turbulente sont montrées respectivement sur les figures 4.5 et 4.6. On observe des valeurs maximales de la production et de la dissipation aux mêmes endroits que celles observées pour les intensités turbulentes. Ceci montre que l'énergie cinétique produite avant est complètement dissipée aux environs de la zone où elle est produite et diffuse faiblement vers l'écoulement sain. L'énergie cinétique de turbulence augmente de façon considérable à partir  $X/D=2$ , jusqu'à atteindre des valeurs maximales vers  $X/D=10$ . Ces résultats confirment les premières constatations observées sur les profils des composantes de vitesse moyenne. La dissipation, augmente au niveau du jet à  $X/D=1$  et s'accroît jusqu'à atteindre son maximum à  $X/D=4$ , pour diminuer après.

La région d'agitation est limitée au voisinage aval immédiat de l'injection, c'est à dire jusqu'à  $X/D=2$  à 4. La proximité de la paroi des échanges turbulents sont bénéfiques du fait de l'objectif à atteindre. Cependant le maintien de l'énergie cinétique de turbulence au delà de la région du jet et la dissipation rapide de la diffusion turbulente maintient que le mélange est entraîné par la dépression causée par la partie avale de la paroi convexe, ce qui permet la formation et le développement d'un film protecteur.

#### 4.2.1.5- Distribution de la température :

Les distributions de la température sont représentées sur la figure 4.7. On observe un réchauffement au niveau de la paroi d'environ 30%, à l'amont du trou ( $X/D=-1$ ), du à la convexité de la paroi qui agit comme un obstacle. Ce réchauffement est augmenté à partir de  $X/D=-0,5$  pour atteindre 100% dans la région allant de  $X/D=0$  à 6, puis, diminue de  $X/D=10$  à 20 de 95 à 80%. Cela montre qu'un film protecteur a été développé et que le jet a été dévié pour épouser la paroi et maintenir sa température jusqu'à près de  $X/D=10$ . Cette allure ne peut pas exister en cas de refroidissement puisque l'écart de température entre

celle produite par le jet et celle produite par l'effet de courbure (réchauffement de la partie convexe amont), ne vont pas s'additionner, mais se soustraire.

#### 4.2.1.6- Les lignes iso-vitesses et iso-températures :

Les figures 4.8a et 4.8b représentent respectivement, les iso-températures et les iso-vitesses dans le plan (X ,Y), nous permettent de récapituler les observations tirées du calcul du champ de l'écoulement moyen et de donner un aperçu global de l'écoulement et de la température. L'analyse iso-vitesse (figure 4.8b), montre un ralentissement des vitesses jusqu'à annulation au bord d'attaque de l'aube, puis, un deuxième ralentissement à l'aval de l'orifice d'injection. Par contre, juste à l'aval de l'orifice, une région de survitesse est observée, au dessus du jet. Le développement d'un film sur la paroi est observé à l'aval du jet jusqu'à à  $X/D \approx 20$ , endroit où on observe le début du décollement et la formation d'un sillage qui va bien au delà de l'aube pour aller bien loin en aval.

Dans la figure 4.8 a, la présence du fluide chaud est due à l'amont de l'orifice de l'injection à la surpression dans la partie amont de la paroi convexe, et à l'aval de l'orifice d'injection, principalement au jet, ce qui permet une diffusion jusqu'à loin de l'aube.

Notons enfin, que l'effet de surpression crée par le jet est fortement senti par les deux courbes (iso-vitesses et iso-températures). Des surpressions en amont et dépressions en aval, dues à la convexité de la paroi, provoquent un entraînement d'aspiration en amont et expiration en aval.

#### 4.2.1.7- Les vecteurs vitesses :

Une représentation du vecteur vitesse de plusieurs parties du profil, est faite dans la figure 4.8c Cette présentation peut donner un aperçu sur les éventuelles zones de recirculation. La première figure d'en haut, représente la région de l'orifice d'injection et de l'interaction du jet avec l'écoulement principal qui est observée, où on remarque région de mélange assez réduite à l'aval de l'orifice. La figure d'en bas, représente quand à elle, une grande partie de l'aube et fait ressortir un décollement loin à aval de l'orifice.

#### 4.2.2- Comparaison avec l'expérience des modèles RSM et k-ε, d'un écoulement avec jet à travers une plaque plane :

Les figures 4.9a et 4.9b, montrent respectivement une comparaison entre un écoulement traversé par un jet sur une plaque plane avec les modèles RSM, k-ε et l'expérience, pour les valeurs respectives de vitesses réduites et de tensions normales réduites.

On remarque dans la figure 4.9a, qui représente les vitesses réduites  $U/U_e$ , que les deux modèles donnent une approche assez acceptable aux résultats donnés par l'expérience surtout à l'amont de l'orifice et au niveau de celui-ci. Toutefois le modèle k-ε donne une meilleure approche loin de la paroi et de la région du jet.

La composante verticale de la vitesse est représentée dans la figure 4.9b. Des deux modèles utilisés, le modèle RSM apprécie mieux la composante verticale de la vitesse que le k-ε, à l'amont et au dessus du jet. Les deux modèles donnent des appréciations identiques à partir de  $X/D=4$ .

Les tensions normales longitudinale et verticale sont représentées respectivement par les figures 4.9c et 4.9d. Pour les tensions normales longitudinales, c'est le modèle k-ε qui se rapproche le plus de l'expérience. Alors que pour les tensions normales verticales, c'est le modèle RSM qui donne une meilleure appréciation des résultats.

#### 4.2.3- Effet d'écoulement de jets à travers une plaque plane :

Les figures 4.10a à 4.10h, montrent respectivement une comparaison entre un écoulement traversé par un jet et un autre sans jet à travers une plaque plane pour les vitesses, les tensions,  $K/U_e^2$ ,  $\varepsilon.D/U_e^3$  et  $\theta=(T-T_j)/(T_e-T_j)$ .

Pour la composante longitudinale de la vitesse, présentée dans la figure 4.10a, on remarque à  $Y/D=5$ , que la vitesse avec jet est légèrement diminuée de 3% par rapport à

celle sans jet pour  $X/D=-1$  et va en augmentant le long de la plaque jusqu'à avoir une légère survitesse de 7% à  $X/D=4$  pour diminuer jusqu'à une survitesse de 2% à  $X/D=20$ . Au niveau de la paroi, la vitesse est atténuée par le jet de 50% à l'amont du jet. Au niveau du jet, la vitesse est atténuée à  $Y/D=0.7$  de 25% avec une légère survitesse à la paroi à  $Y/D=0.03$  de 12% environ. Cette survitesse va en augmentant jusqu'à 30% à  $X/D=2$  puis en diminuant jusqu'à disparition à  $X/D=10$ , tout en s'éloignant le long de la paroi, de celle-ci, et atteindre  $Y/D=1$  à une position de  $X/D=6$ . Très proche de la paroi, à  $Y/D=0.06$ , la vitesse diminue de moitié, par rapport à un cas comportant une absence de jet, entre  $X/D=1$  et 4 et va en diminuant tout en s'écartant légèrement de la paroi, ce qui laisse apparaître un décollement à peine visible.

La composante verticale présentée dans la figure 4.10b, donne des valeurs négligeables pour le cas sans jet par rapport à celui avec jet.

Les tensions normales de Reynolds, longitudinale et verticale sont présentées respectivement dans les figures 4.10c et 4.10d. Les fluctuations de la tension normale longitudinale laissent apparaître une augmentation du simple au double des tensions à cause du jet à l'amont de l'orifice. Au niveau de ce dernier, le jet est traduit par une diminution de 60 à 65% au niveau de la paroi et d'un dédoublement entre  $Y/D=1$  et 2, des tensions normales longitudinales. Une zone de surtension apparaît à  $Y/D=1$  et va en augmentant jusqu'à atteindre une valeur maximale de 8 fois une tension sans jet à  $X/D=6$ , puis diminue jusqu'à atteindre 3 fois à  $X/D=20$ . Pour les tensions normales, les effets de surtension sont aussi remarqués très près de la paroi au niveau de l'orifice et à son aval.

Les tensions tangentielles sont représentées dans la figure 4.10e. Elles laissent apparaître des sous tensions pour les mêmes régions où des surtensions normales longitudinales ont été observées.

L'énergie cinétique turbulente, présentée dans la figure 4.10f, montre un schéma identique à celui des tensions normales longitudinales, avec des majorations maximales allant jusqu'à 8 fois près de la paroi à  $X/D=4$  et de plus que 3 fois à  $X/D=20$ .



L'énergie de dissipation turbulente, présentée dans la figure 4.10g, est plus grande et de façon significative à la paroi, au niveau de l'orifice et à son aval, pour le cas d'écoulement avec jet.

La température réduite est présentée dans la figure 4.10h. Elle est augmentée du simple au double à la paroi à l'amont du jet, pour augmenter jusqu'à 9 fois à  $X/D=2$  et 6 fois à  $X/D=20$ , maintenue à travers une plage épaisse d'environ un diamètre  $D$ .

#### 4.2.4- Effet de la courbure sur l'écoulement en présence d'injection :

Les figures 4.11a à 4.11h, montrent respectivement une comparaison entre un écoulement traversé par un jet à travers une plaque et un autre à travers une aube de type NACA0012 pour les vitesses, les tensions,  $K/Ue^2$ ,  $\varepsilon.D/Ue^3$  et  $\theta=(T-T_j)/(T_e-T_j)$ .

La discussion des résultats portera sur l'influence de la courbure de la paroi sur les propriétés de l'interaction entre l'écoulement principal et le jet par rapport à la plaque plane.

La comparaison des profils des composantes longitudinale et verticale de la vitesse moyenne est montrée respectivement sur les figures 4.11a et 4.11b, toujours aux mêmes positions effectuées par les mesures, c'est à dire le long de l'axe  $Y/D=0$  et aux stations  $X/D=-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 4, 6, 10$  et  $20$ . l'observation la plus frappante est l'influence très remarquée de la courbure de paroi traduite par des écarts considérables des résultats très près de la paroi où la trace de ces différences reste jusqu'à l'écoulement extérieur ( $Y/D=5$ ). En effet, on note des différences allant de 40-80% près de la paroi, à 10-40% dans l'écoulement extérieur pour la comparaison de  $u$ . On remarque que l'effet du jet apparaît tardivement sur une paroi courbée à  $X=0.5D$ , alors qu'il apparaît à  $X=-0.5D$  pour la plaque plane, du à la courbure de la paroi qui pousse le jet à épouser sa forme dès sa sortie de l'orifice, où une survitesse près et au dessus de la paroi est remarquée sur le profil de  $u$  où l'on note une valeur qui va jusqu'à  $1.6 Ue$  à  $X/D=1$ , calculés sur la paroi NACA0012. Les positions de ces survitesses sont situées sur les points  $X=0.5D$  jusqu'à  $X=10D$ , correspondant à 20-60 % sur l'extrados.

Par ailleurs, pour les résultats concernant  $v$ , laissent apparaître une augmentation de la vitesse du simple au triple à l'amont de l'orifice d'injection, due à la courbure. Cette augmentation de la vitesse est absente très près de la paroi ( $Y/D < 0.5$ ), mais reste significative à l'extérieur ( $Y/D > 1$ ) à la position  $X=0$  sur le jet et qui se reproduit de façon plus ou moins comparables aux positions  $X/D=0.5$  et  $X/D=1$ . On constate des vitesses verticales avec des valeurs négatives très près de la paroi à partir de la position  $X/D=1$  pour un écoulement sur une plaque plane, alors que pour celui sur le profil NACA0012, il n'apparaît qu'à partir de la position  $X/D=10$ . C'est à la position  $X/D=20$ , on constate une valeur négative de la vitesse verticale pour un écoulement sur NACA0012, que ce soit très près ou loin de la paroi, ce qui laisse supposer qu'elles sont dues aux tourbillons contrarotatifs rencontrés dans la littérature, alors que les valeurs de la vitesse verticale rencontrées uniquement très près de la paroi présentent des zones de recirculation.

Les tensions normales des composantes longitudinale et verticale de la vitesse moyenne sont représentées en termes adimensionnels  $\sqrt{u^2}/U_e$  et  $\sqrt{v^2}/U_e$  sur les figures 4.11c et 4.11d. Les résultats obtenus correspondent aux observations déjà faites sur les quantités moyennes. En effet on note des valeurs d'intensité de turbulence maximales de l'ordre de 10% à 16% et de 4% à 8% respectivement dans les directions longitudinales et verticales et ce, aux régions situées entre  $X=1D$  et  $X=10D$ . Ce qui correspond à 18% de corde sur le profil NACA0012. Les tensions normales longitudinales montrent un effet significatif de la courbure surtout à l'aval du jet où ça peut atteindre une augmentation de 15 fois par rapport à celle sur un plaque plane à  $X/Y=20$ .

On présente sur la figure 4.11e la distribution des profils des tensions visqueuses en valeur sont rapportées à la vitesse moyenne extérieure locale. Contrairement aux vitesses moyennes et aux tensions normales, les tensions visqueuses sont plus marquées par le modèle RSM sur la plaque plane que sur le NACA0012. Elles sont quasi négligeables pour le cas courbé, à l'amont du jet, mais commencent à apparaître pour égaler le cas sur une plaque plane à  $X/D=10$  et présentent une différence significative proche de la paroi à  $X/D=20$ . une explication plausible de ce comportement peut être l'évolution de la couche limite sur les deux parois.

Les figures 4.11f et 4.11g montrent l'évolution de l'énergie cinétique de turbulence adimensionnée et son taux de dissipation le long du profil. Aucune différence frappante n'est observée entre les profils de la dissipation sur la plaque plane et sur le NACA0012. Dans les deux cas le maximum est localisé au niveau de la paroi. En revanche, des différences frappantes sont remarquées sur les profils de l'énergie cinétique. Un écart considérable est observé au dessus des deux parois dans la zone allant de  $Y/D=0$  à  $Y/D=3$  et ce tout le long de la paroi. L'énergie cinétique de turbulence, est négligeable près de la paroi pour les zones situées à l'amont et au dessus du jet, sauf très près de la paroi. A partir de  $X/D=1$ , un développement de l'énergie cinétique de turbulence se fait sentir très près de la paroi. Cela est plus remarqué à l'aval du jet à partir de  $X/D=10$ , où l'énergie cinétique pour le cas de paroi courbée devient plus significative que celle de plaque plane. Alors que pour l'énergie de dissipation turbulente, sa présence est remarquée seulement au niveau des parois. La courbure ne lui permet pas de se développer juste à l'aval du jet mais laisse un développement plus visible par rapport à celui d'une plaque plane à partir de  $X/D=4$ . Les profils de plaque plane ressemblent à ceux présentés dans la littérature pour une couche limite libre. Les pics des valeurs sont observés sur les profils de la paroi NACA0012 sur la surface de la paroi : région où l'on a noté les gradients de vitesse élevés. Ces pics s'accroissent loin en l'aval du jet qu'on peut expliquer par de fortes diffusions et convections de la turbulence dans cette région du panache du jet.

La distribution des profils de température moyenne est montrée sur la figure 4.9h. On constate des gradients très élevés de température juste au dessus de la paroi du NACA0012 et qui se développent de façon significative à l'aval du jet. L'aval de la zone du jet démontre, un gradient de température plus grand pour la paroi courbée par rapport à celui développé à travers une plaque plane. La courbure de l'aube permet le développement d'un film plus épais d'environ  $1 D$ , alors que pour cas de la plaque plane, l'épaisseur moyenne est d'environ  $0.5 D$ , avec une atténuation plus rapide par rapport à celui du profil NACA0012. Il est aussi remarqué que pour l'écoulement à travers une plaque plane, un gradient négatif est observé loin de la paroi à l'aval du jet dans la zone s'étalant entre  $X/D=0.5$  et  $X/D=20$ .

#### 4.2.5- Effet d'un écoulement de jets sur un profil d'aube NACA0012 :

Les figures 4.12a à 4.12h, montrent respectivement une comparaison entre un écoulement traversé par un jet à travers une aube de type NACA0012 et un autre sans jet pour les vitesses, les tensions,  $K/Ue^2$ ,  $\varepsilon.D/Ue^3$  et  $\theta=(T-T_j)/(T_e-T_j)$ .

La composante longitudinale de la vitesse présentée par la figure 4.12a, montre une atténuation de la vitesse par le jet de 40% puis de 60% puis de 36% respectivement à  $X/D=-1$ ,  $-0.5$  et  $0$ , soit à l'amont et au dessus du jet. Une survitesse du jet est remarquée juste à l'aval du jet et va en augmentant pour atteindre une survitesse maximale de 22% à  $X/D=1$  et de diminuer graduellement jusqu'à atténuation de l'effet de survitesse à  $X/D=10$ , due à la courbure de la paroi. A partir de cette position un épaissement de la couche limite apparaît comme résultat direct du couple jet / effet de courbure.

La composante verticale de la vitesse, présentée dans la figure 4.12b, montre une survitesse à partir de l'amont du jet, qui s'amplifie jusqu'à 3 fois à partir de celui à  $X/D=0.5$  et va en significatives.

Les tensions normale longitudinale et verticale sont représentées respectivement dans les figures 4.12c et 4.12d. Elles sont amplifiées par l'effet du jet au niveau de la paroi, surtout à l'aval de la sortie de celui ci à  $X/D=10$  et  $20$ . Alors que, la tension de cisaillement, représentée par la figure 4.12e, est quand à elle diminuée dans les mêmes zones où les tensions normales sont amplifiées, pour atteindre des valeur maximales loin à l'aval du jet.

L'énergie cinétique de turbulence, ainsi que l'énergie de dissipation de turbulence, présentées respectivement dans les figures 4.12f et 4.12g, subissent la majoration causée par l'effet du jet, mais de façon moindre, sauf un peu à  $X=10$  et  $20$ , à l'aval du jet.

La température est présentée dans la figure 4.12h. L'effet du jet est visible dans le champ des températures, où une sur chauffe est observée à l'amont et au dessus du jet, alors qu'elle n'est observée à l'aval du jet, qu'au niveau de la paroi. A partir du jet on

atteint une surchauffe maximale de trois fois et demis à  $X/D=1$  et va en diminuant jusqu'à 3 fois à  $X/D=20$  avec une épaisseur de la zone de surchauffe qui s'épaissit et atteint environ une épaisseur d'un diamètre à  $X/D=20$ .

#### 4.2.6- Comparaison des résultats sur paroi du NACA0012 entre les fermetures k- $\epsilon$ et RSM :

Dans cette partie du travail, on va examiner l'évolution comparative des grandeurs caractéristiques de l'interaction, qui sont les composantes de la vitesse moyenne, l'énergie cinétique de turbulence et sa dissipation, ainsi que la température, obtenues à l'aide des deux modèles de turbulence k- $\epsilon$  et RSM. Ces évolutions sont présentées respectivement sur les profils, des figures 4.13a, 4.13b, 4.13c, 4.13d et 4.13e, aux mêmes positions que précédemment. On observe dans l'ensemble une assez bonne concordance des résultats obtenus par les deux modèles, sauf pour la comparaison de l'énergie cinétique et de la dissipation turbulente. L'influence de la courbure sur le champ dynamique est bien reproduite sur les profils de la vitesse moyenne (figures 4.13a et 4.13b), par les deux modèles. Cependant, la présence du jet reste, dans les deux cas limite à la position longitudinale  $X/D=2$ . Les pics observés sur la composante longitudinale de la vitesse représentée par des valeurs de survitesse allant jusqu'à un facteur de 1.4, renseignent sur le processus de mélange très lent, du jet avec l'écoulement transversal, causé par une lente dissipation (figure 4.13d).

Les profils de l'énergie cinétique de turbulence sont montrés sur la figure 4.13c. La première observation, qualitative montre la tendance des modèles RSM et k- $\epsilon$  respectivement à sous évaluer et à sur évaluer le mécanisme de l'interaction. En effet, des écarts considérables sont remarqués sur les profils comparés jusqu'à la position  $X/D=20$  en aval, surtout au dessus de la paroi autour de  $Y/D=1$ . il est très difficile maintenant de se prononcer sur la précision des résultats de chaque modèle mais, si on se base sur certains résultats de la littérature, on s'aperçoit que le modèle k- $\epsilon$  reste insensible à la présence de la courbure de la paroi dans la prédiction de l'écoulement de proche paroi.

#### 4.2.7- Influence de la courbure de différents NACA sur les résultats du modèle RSM :

Au vu de la tendance générale des résultats de comparaison entre les deux fermetures,  $k-\epsilon$  et RSM en faveur du deuxième modèle, il nous a semblé intéressant d'évaluer l'effet de courbure sur les résultats obtenus. Tous les phénomènes observés à l'aide du modèle RSM et discutés sont reproduits pour tous les profils testés, à savoir les profils NACA0003, NACA0006, NACA0009, NACA0012, NACA0015 et enfin NACA0018. le résultat le plus intéressant ici est celui de l'évolution du phénomène en fonction de la courbure.

Les vitesses moyennes réduites  $U/U_e$  et  $V/U_e$ , sont représentées respectivement dans les figures 4.14a et 4.14b. On remarque pour  $U/U_e$ , que plus on a un profil courbé, plus il a une survitesse. Cette différence est maximale entre  $X/D=6$  et 10, soit dans la région à l'aval loin de l'orifice. On remarque à  $X/D=20$ , que plus le profil est courbé, moins est l'accélération à la paroi et plus loin de la paroi, du à des régions de décollement différents. Pour les vitesses réduites  $V/U_e$ , la survitesse est proportionnelle à la courbure entre  $X/D=-1$  et 1, mais on commence après à avoir des comportements différents. A  $X/D=20$ , on remarque, que les survitesses deviennent inversement proportionnelles à la courbure, dues à l'effet de la courbure sur le décollement pour des courbures inférieures à celle du NACA0015.

Les tensions normales réduites présentées par les figures 4.14c et 4.14d respectivement pour  $u'u'/U_e^2$  et  $v'v'/U_e^2$ , montrent une légère influence du degré de courbure au voisinage de l'orifice, mais cette influence grandit de  $X/D=2$  à 20. Les tensions de cisaillements réduites  $u'v'/U_e^2 \times 100$ , représentées par la figure 4.14e, sont légèrement influées par degré de courbure au niveau du jet et juste à l'aval, contrairement ailleurs.

L'énergie cinétique de turbulence et l'énergie de dissipation de turbulence sont représentées respectivement dans les figures 4.14f et 4.14g. Elles montrent respectivement, aussi, l'influence du degré de courbure pour l'énergie de turbulence réduite et la dissipation réduite. Pour  $K/U_e^2$ , on remarque une légère influence à l'amont de l'orifice

due au degré de courbure. Au niveau et juste à l'aval de l'orifice,  $X/D=0$  à 1, on ne remarque pas de changements dus à la courbure, c'est une zone où les caractéristiques du jet dominant par rapport à l'effet de courbure, mais à partir de  $X/D=2$  et jusqu'à  $X/D=20$  et même au delà, on remarque une différence grandissante entre les profils, tout en allant loin vers l'aval de l'orifice, due au degré de courbure, même constatation pour la dissipation dans cette dernière zone.

La figure 4.14h, représente la température réduite. L'effet du degré de courbure sur le profil des températures  $y$  est remarqué. On remarque, aussi, que plus le degré de courbure augmente, plus la diffusion de la température est grande, ce qui engendre une proportionnalité entre ces deux paramètres.

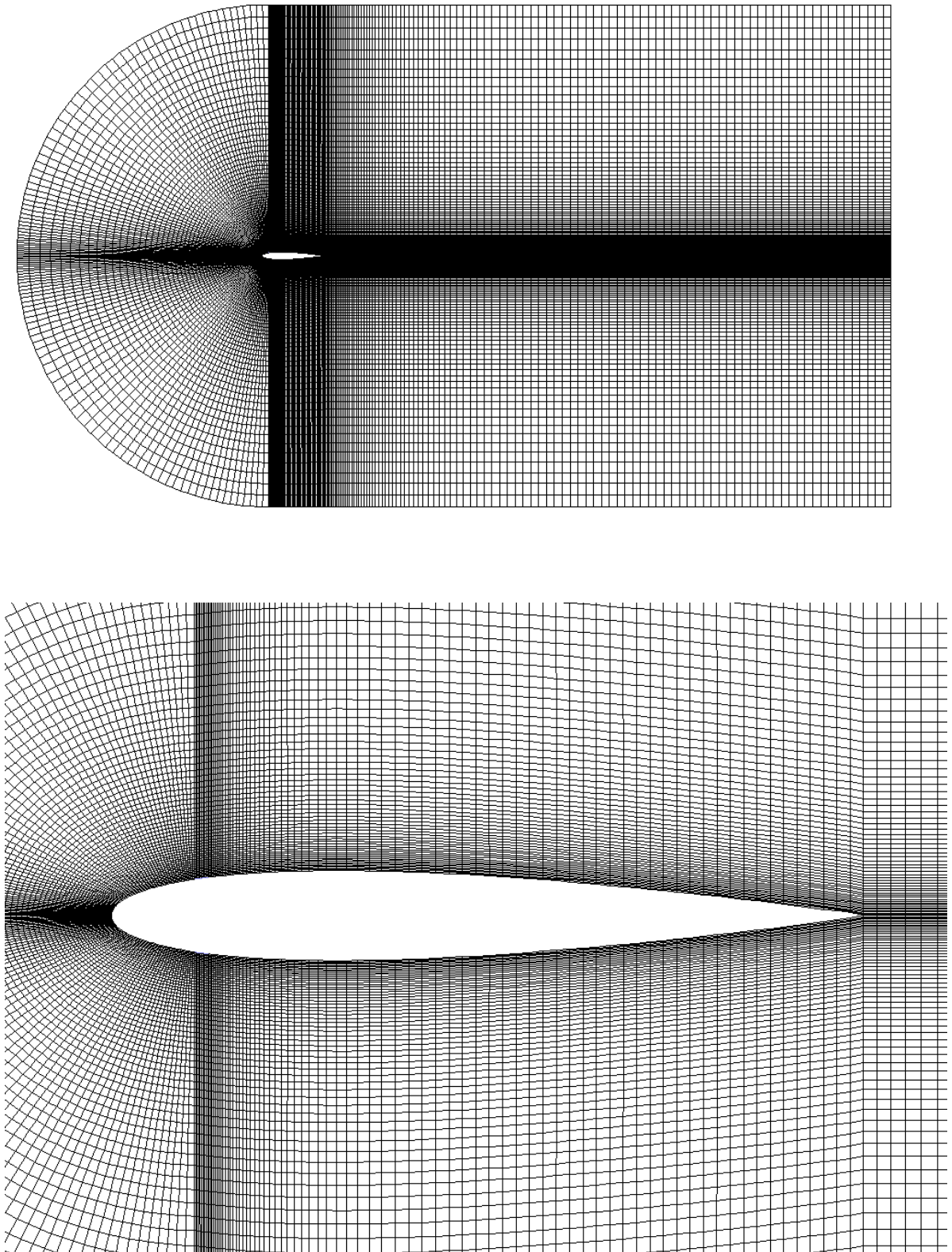


Figure 4.1 : Représentation du maillage du profil d'aube de type NACA001 dans le domaine d'étude (48000 mailles)



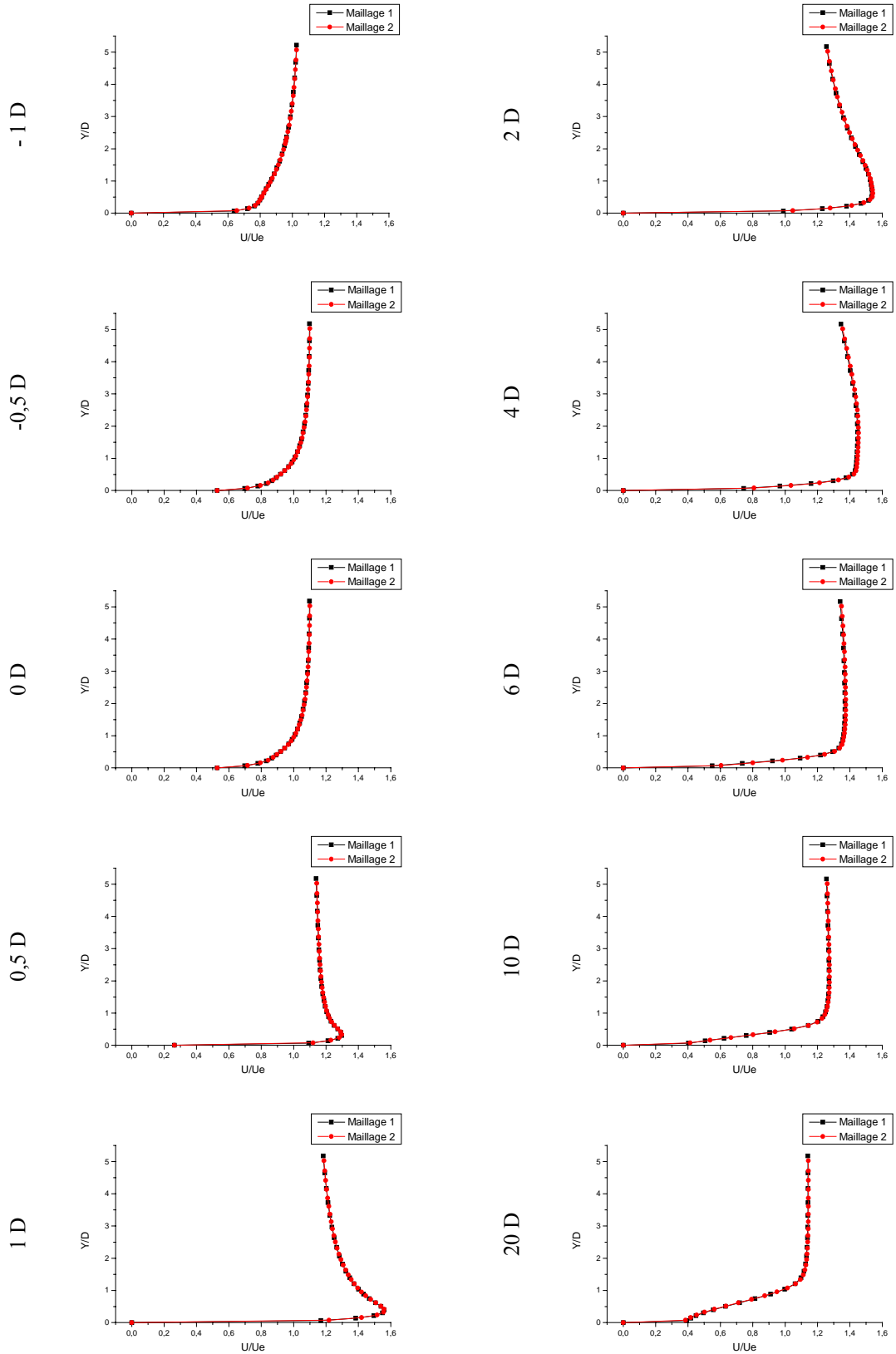


Figure 4.2 : Indépendance de la solution du type de maillage

a. comparaison de  $\bar{u}/U_e$  du modèle RSM sur paroi de profil NACA0012

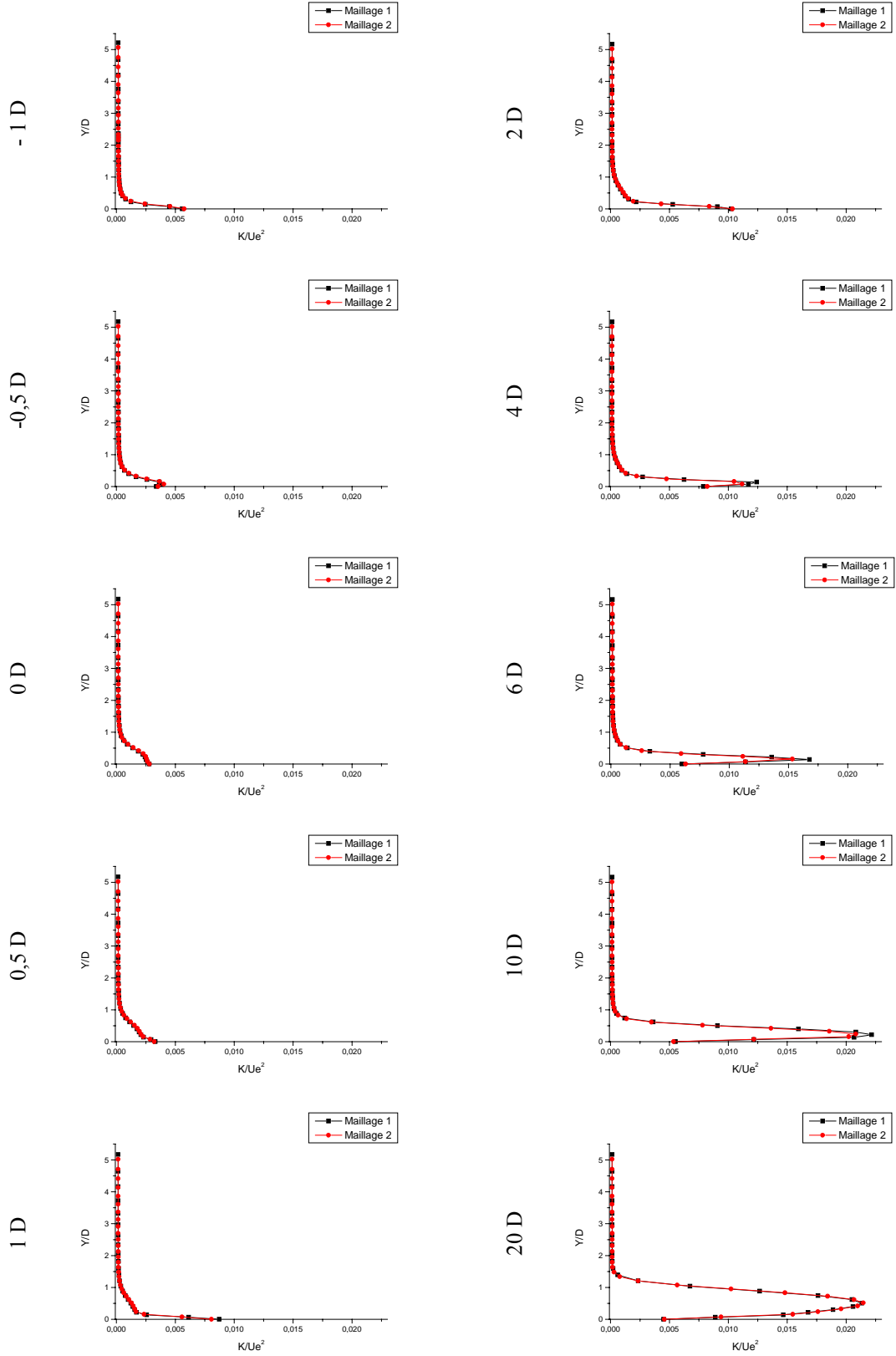


Figure 4.2 : Suite et fin

b. comparaison de  $k/Us^2$  du modèle RSM sur paroi de profil NACA0012

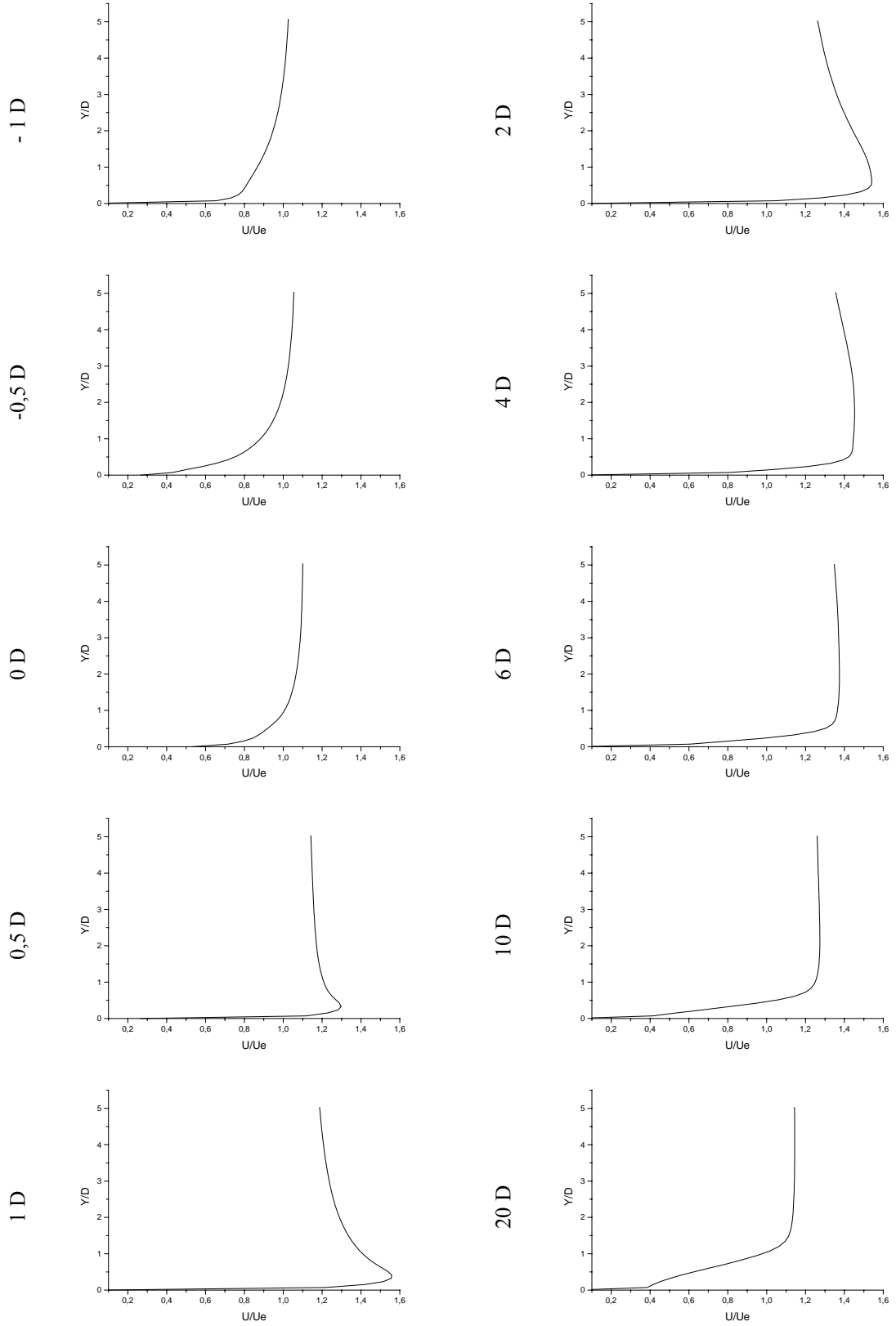


Figure 4.3 : Evolution de la vitesse moyenne sur la paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.

a. composante longitudinale

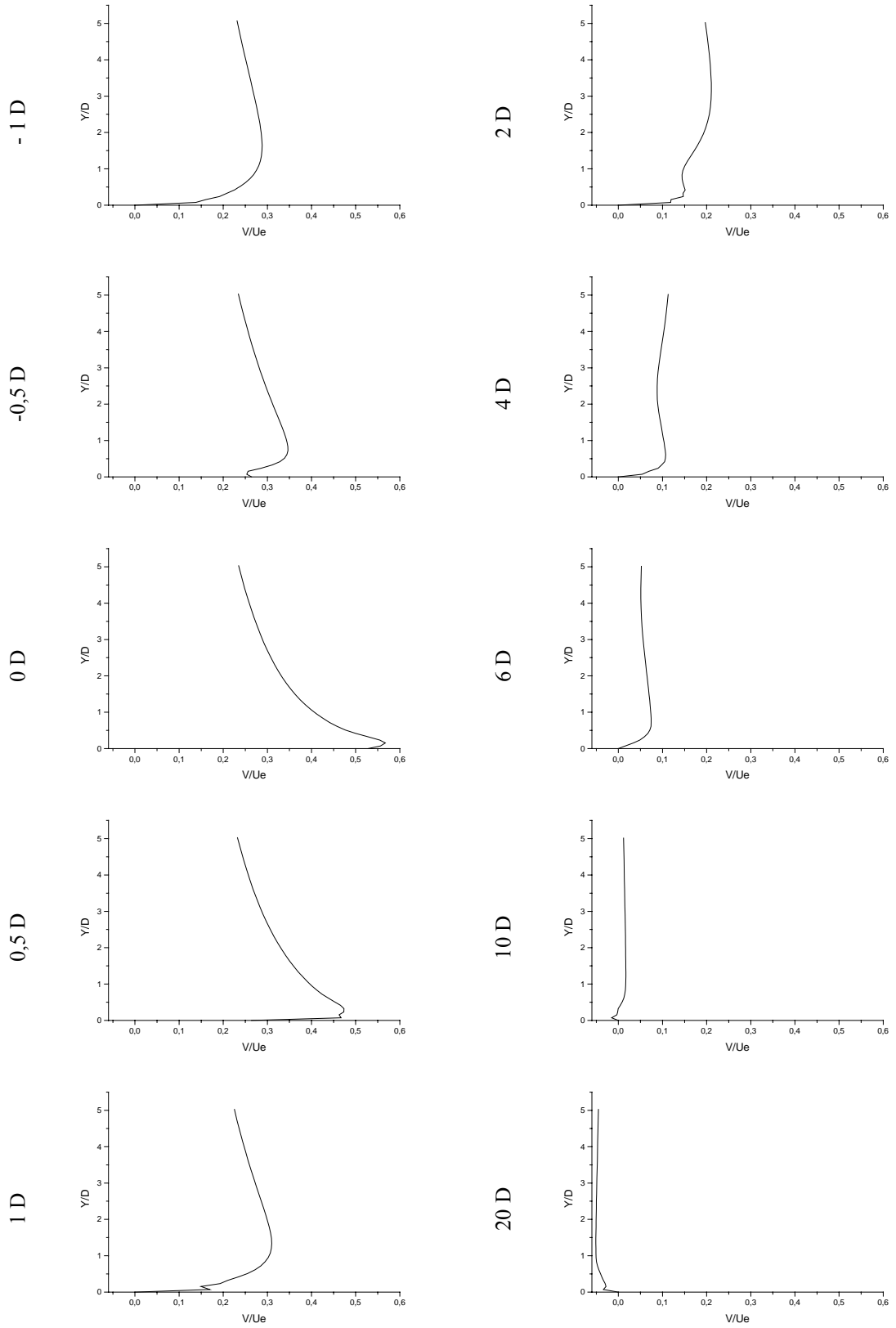
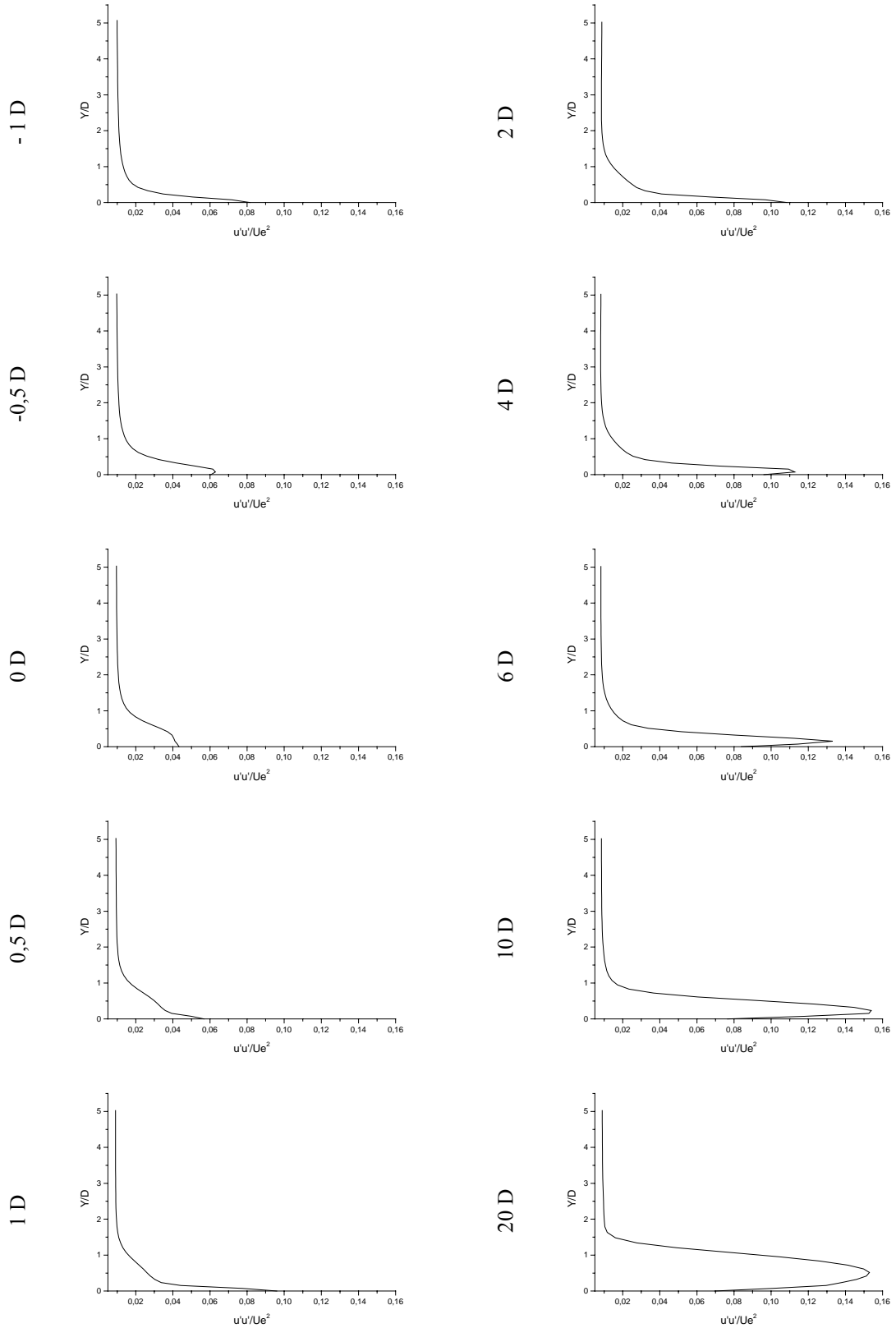


Figure 4.3 : Suite et fin

b. composante verticale



**Figure 4.4 :** Evolution des tensions turbulentes normales sur paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.

a. tensions turbulentes normales longitudinales  $\overline{u'^2}$

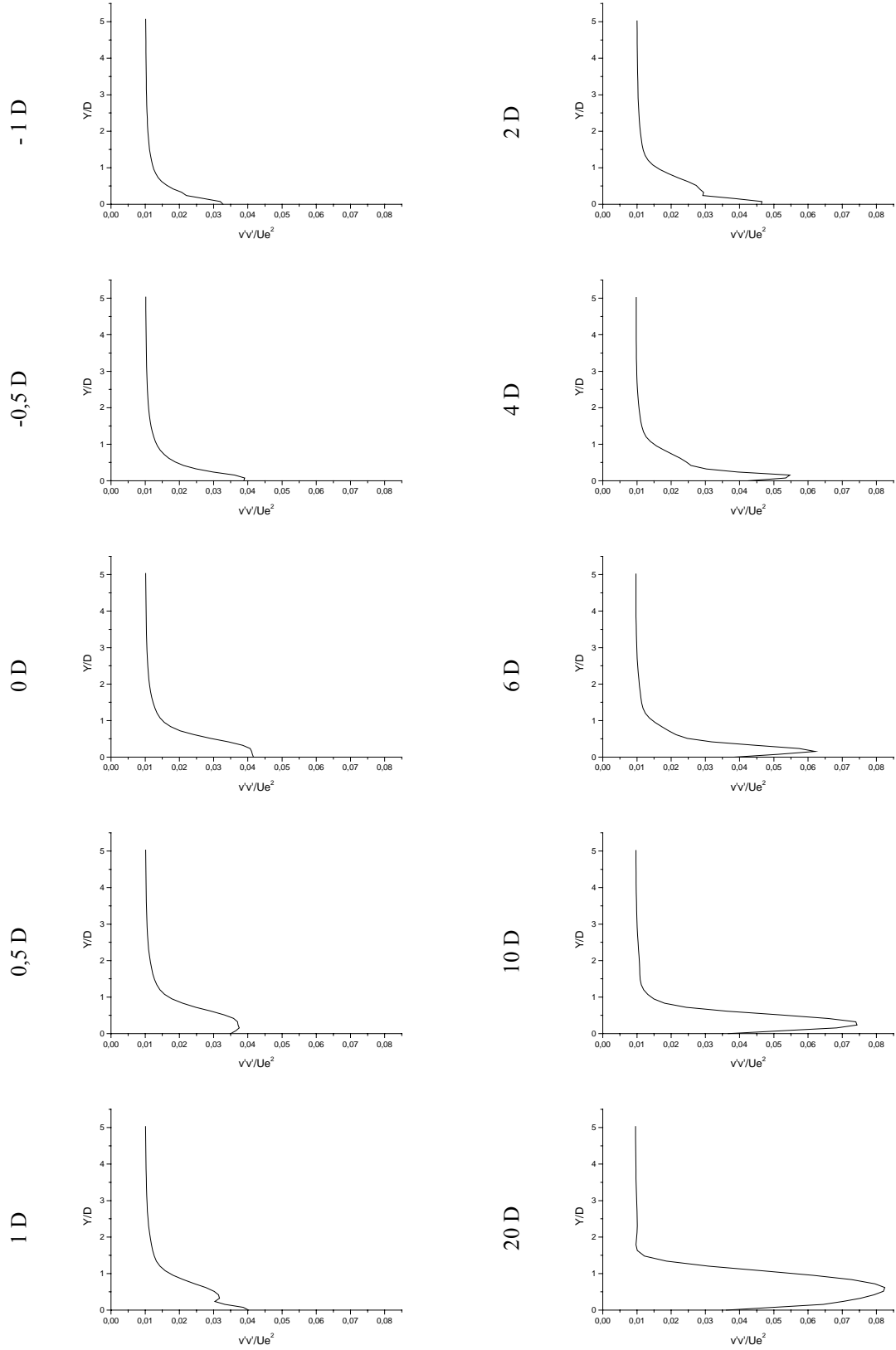


Figure 4.4 : Suite

b. tensions turbulentes normales verticales  $v'^2$

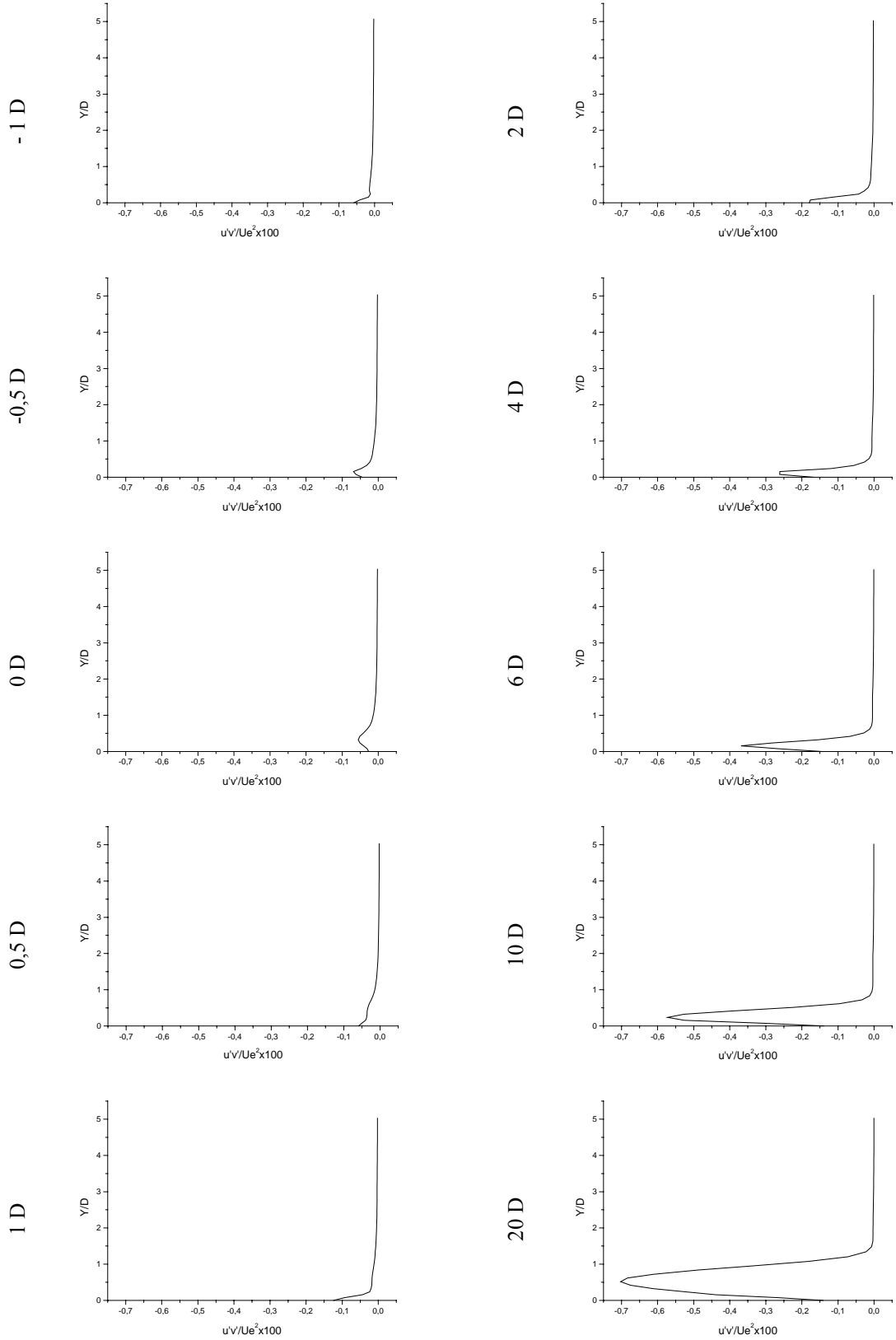


Figure 4.4 : Suite et fin

c. tensions turbulentes croisées  $\overline{u'v'}$

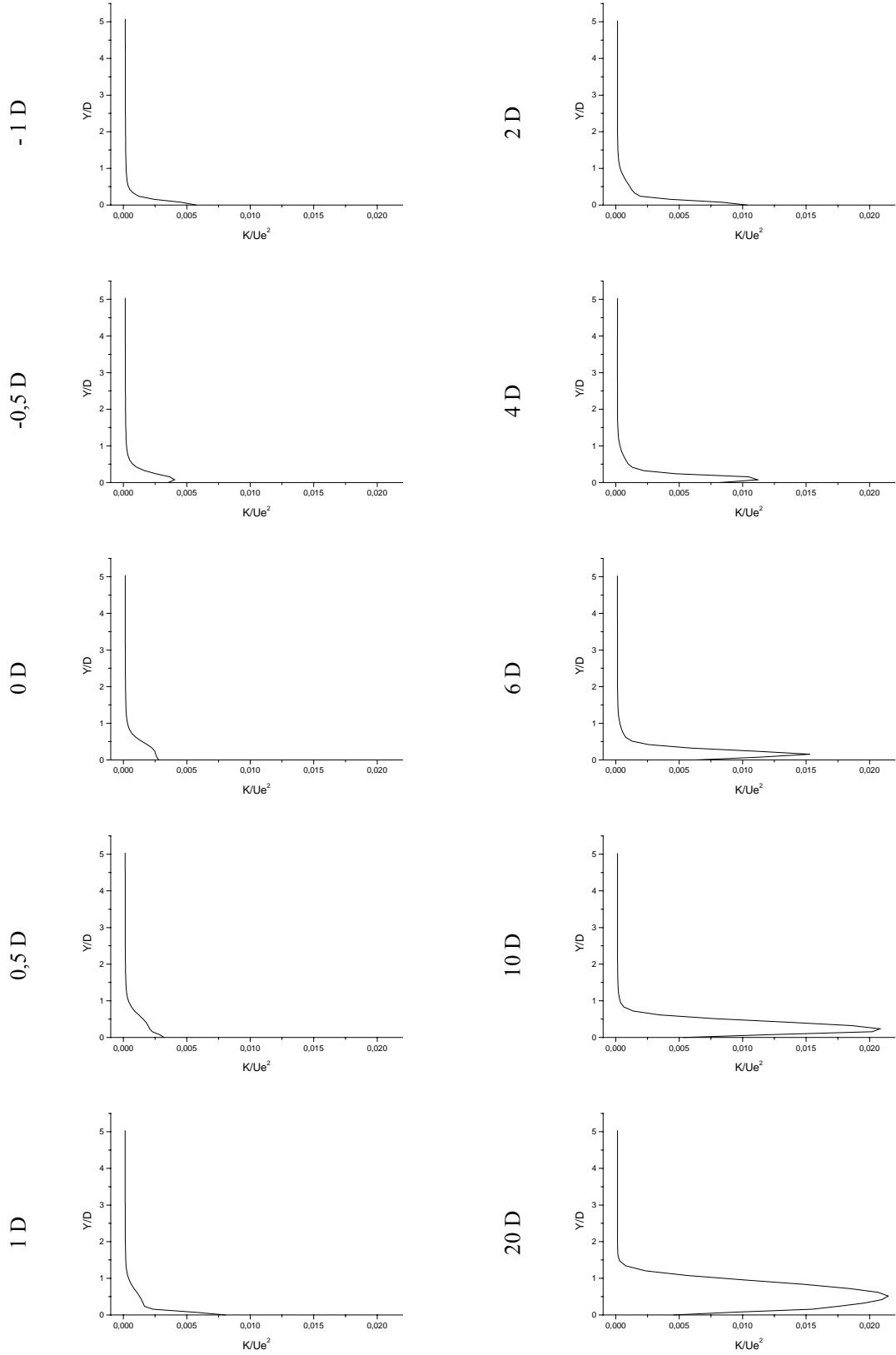


Figure 4.5 : Evolution de l'énergie cinétique de turbulence sur paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.



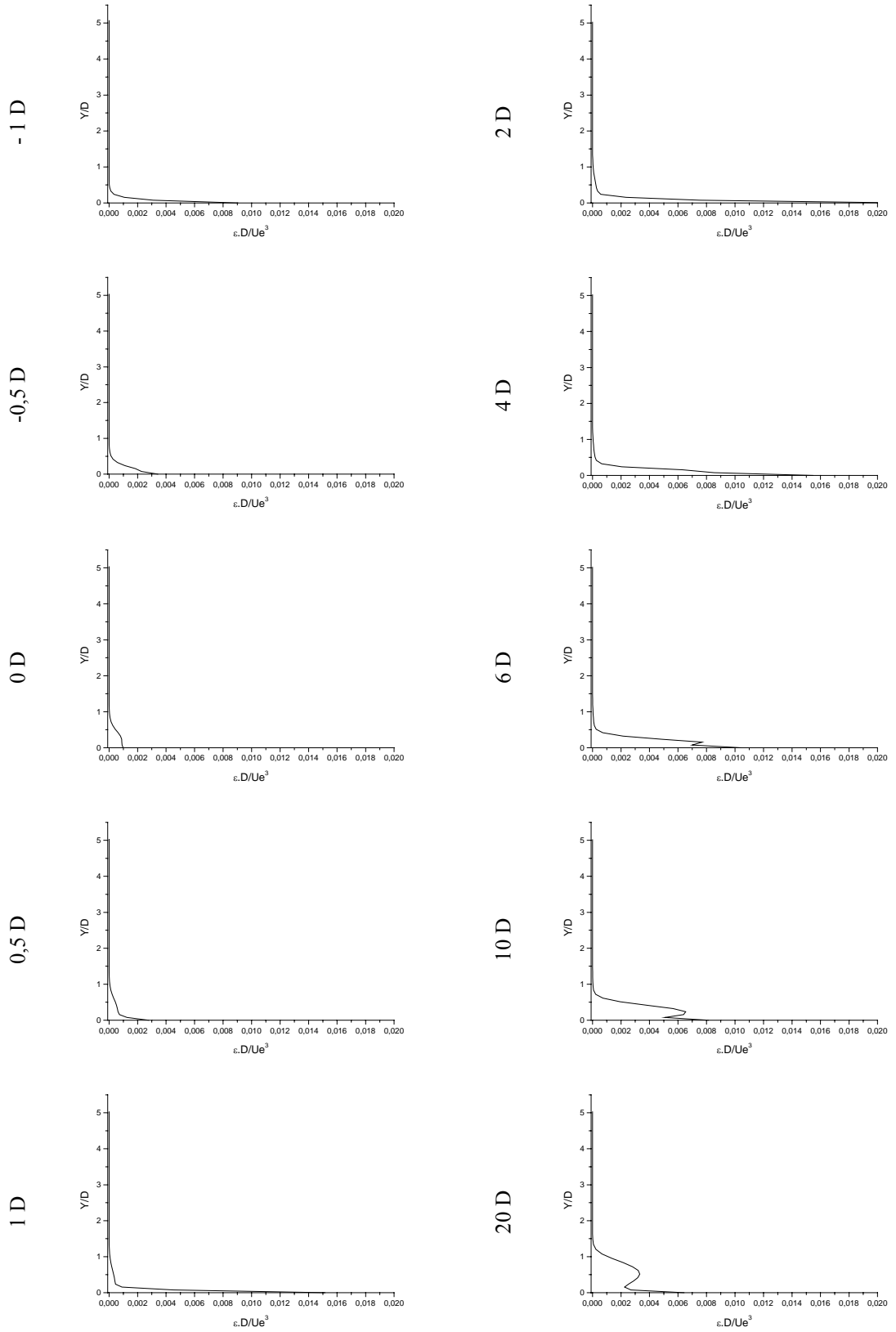


Figure 4.6 : Evolution du taux de dissipation de l'énergie de turbulence sur paroi de profil NACA0012, selon le modèle RSM.

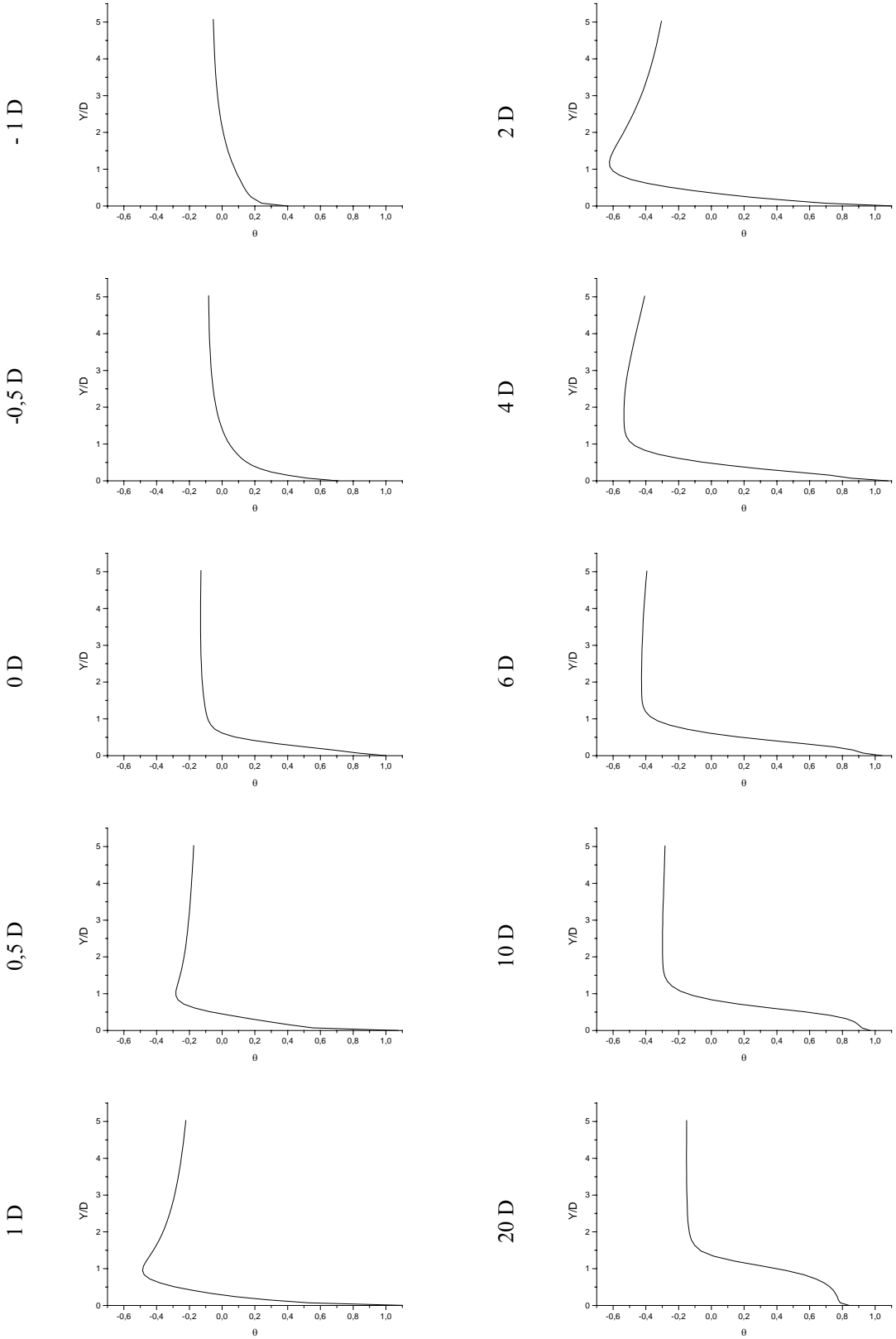
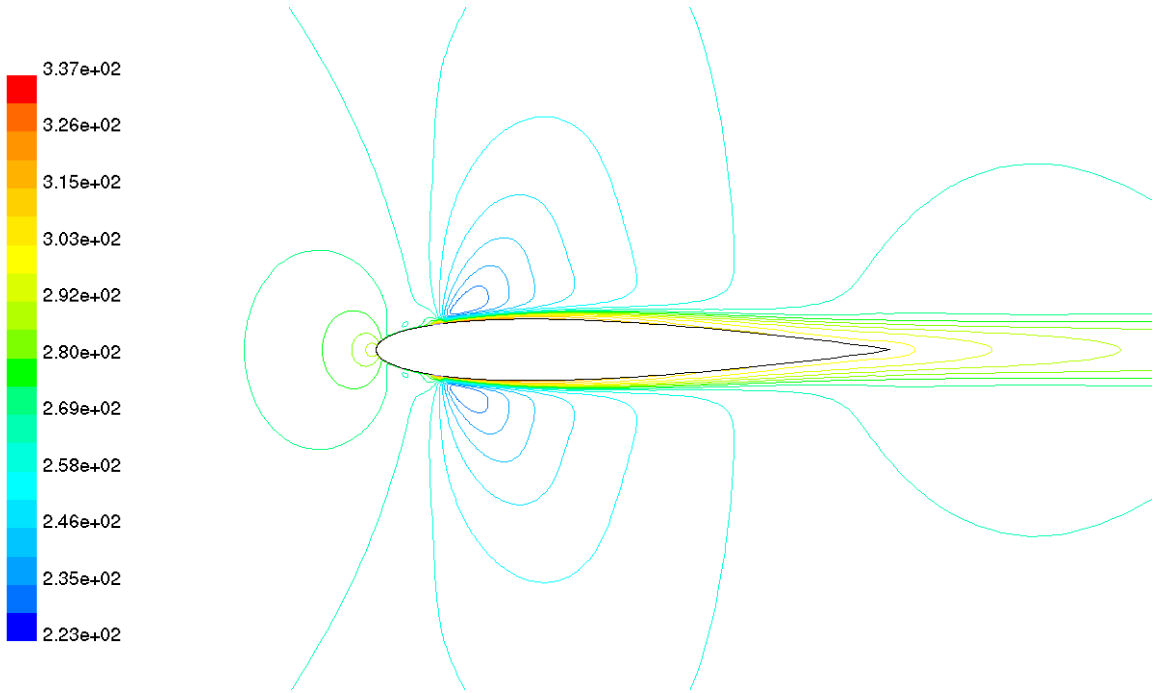
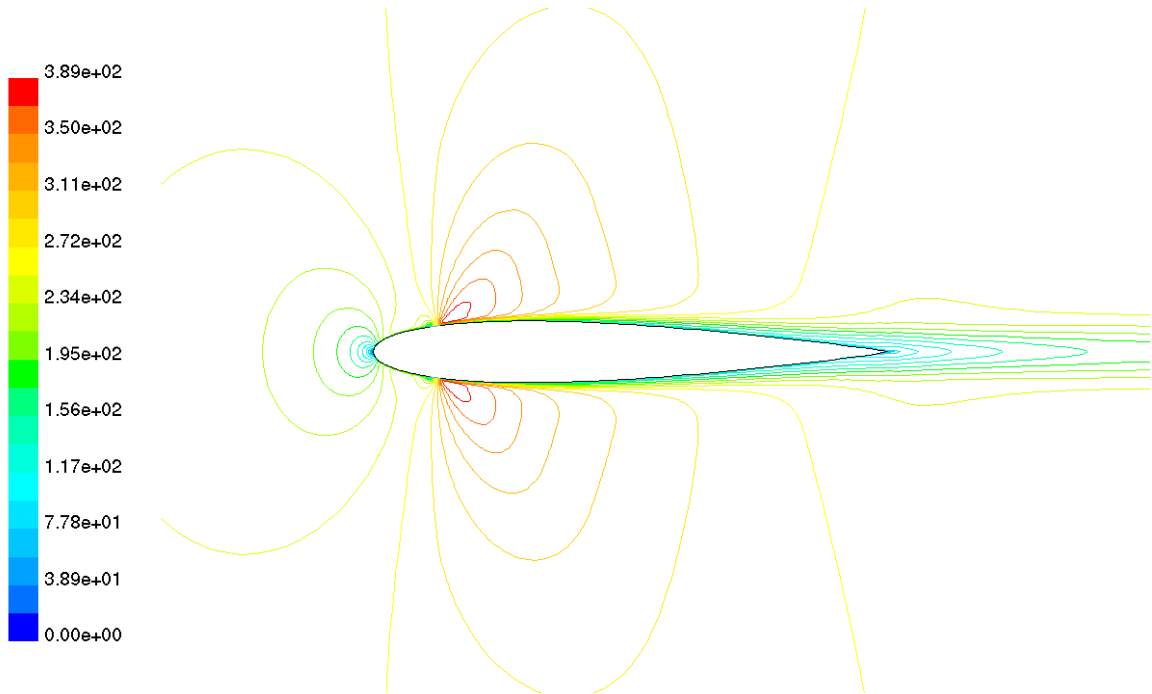


Figure 4.7 : Evolution de la température moyenne sur paroi du profil NACA0012, selon le modèle RSM.



a. lignes iso vitesses



b. lignes isothermes

Figure 4.8 : Lignes iso-valeurs autour du profil NACA0012

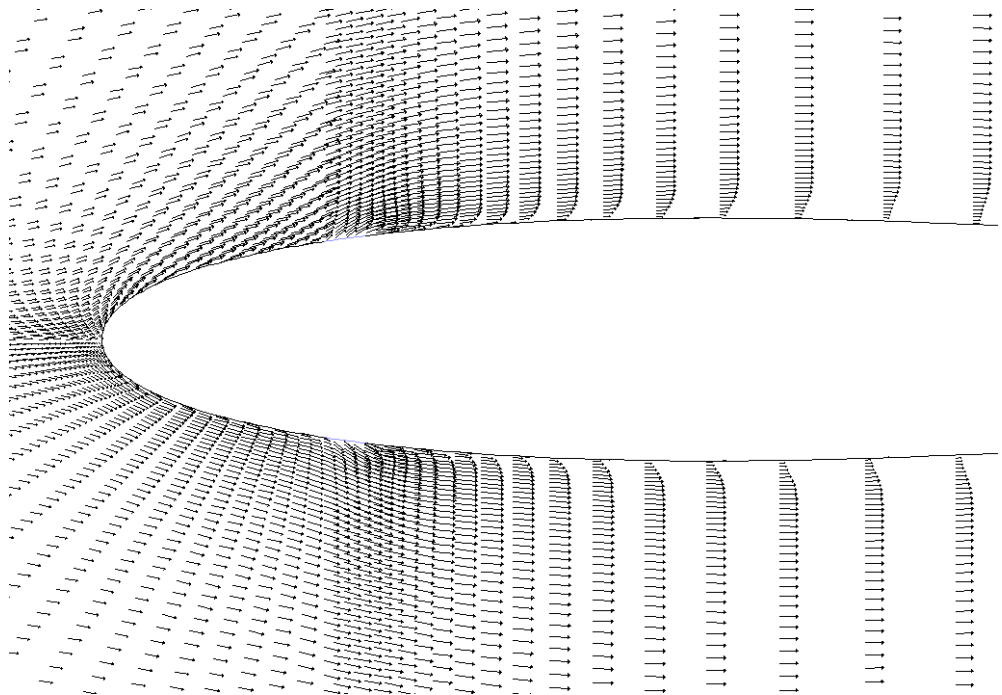
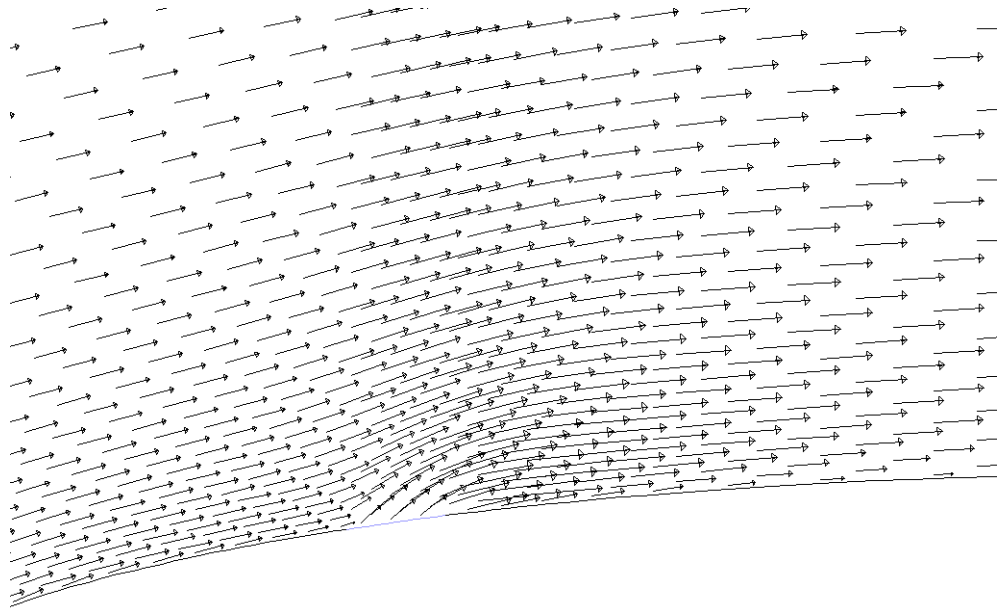


Figure 4.8 : Suite et fin

c. vecteurs vitesse

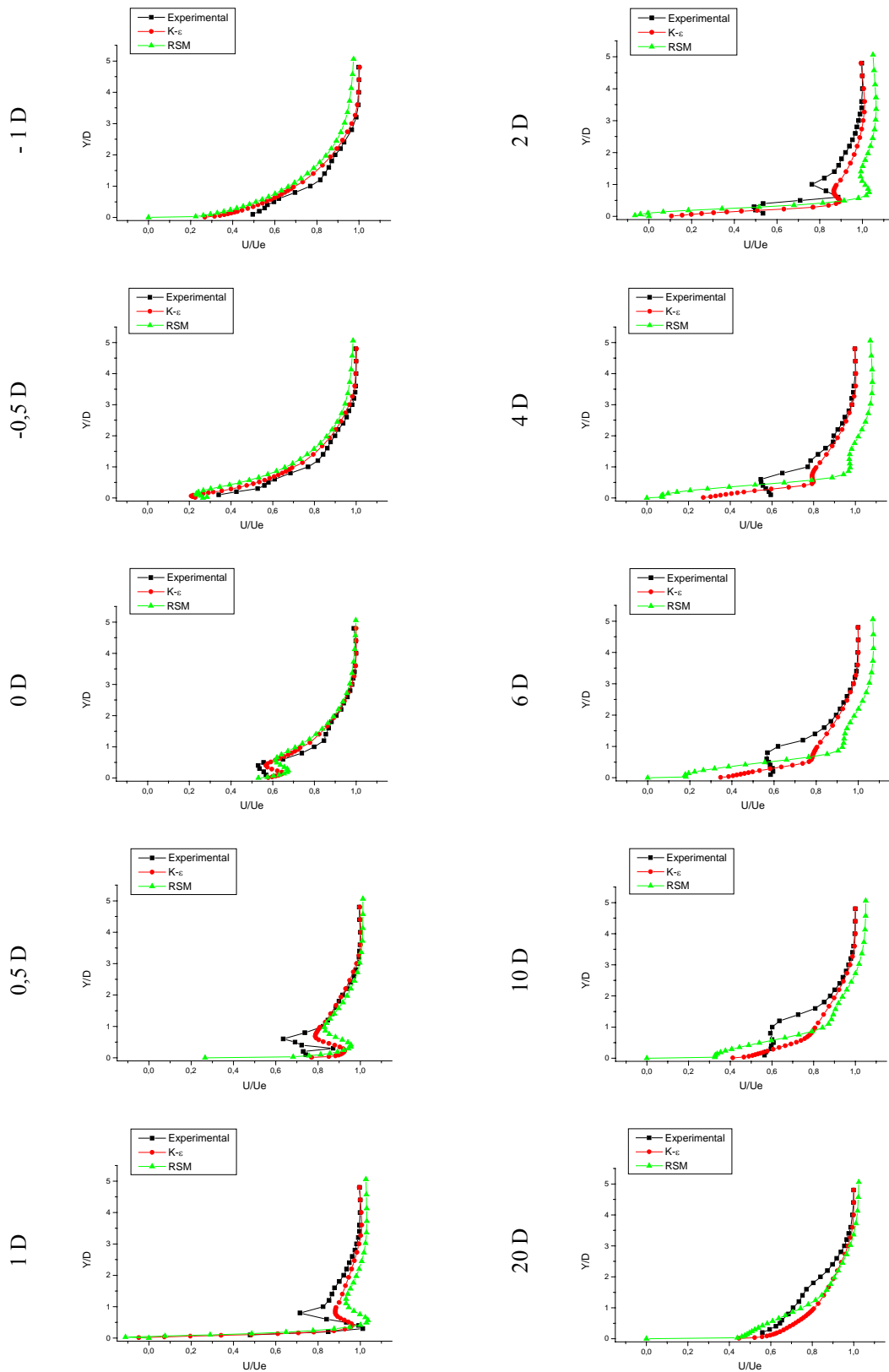


Figure 4.9 : Comparaison sur plaque plane des modèles  $k-\epsilon$  et RSM avec l'expérience.

a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne

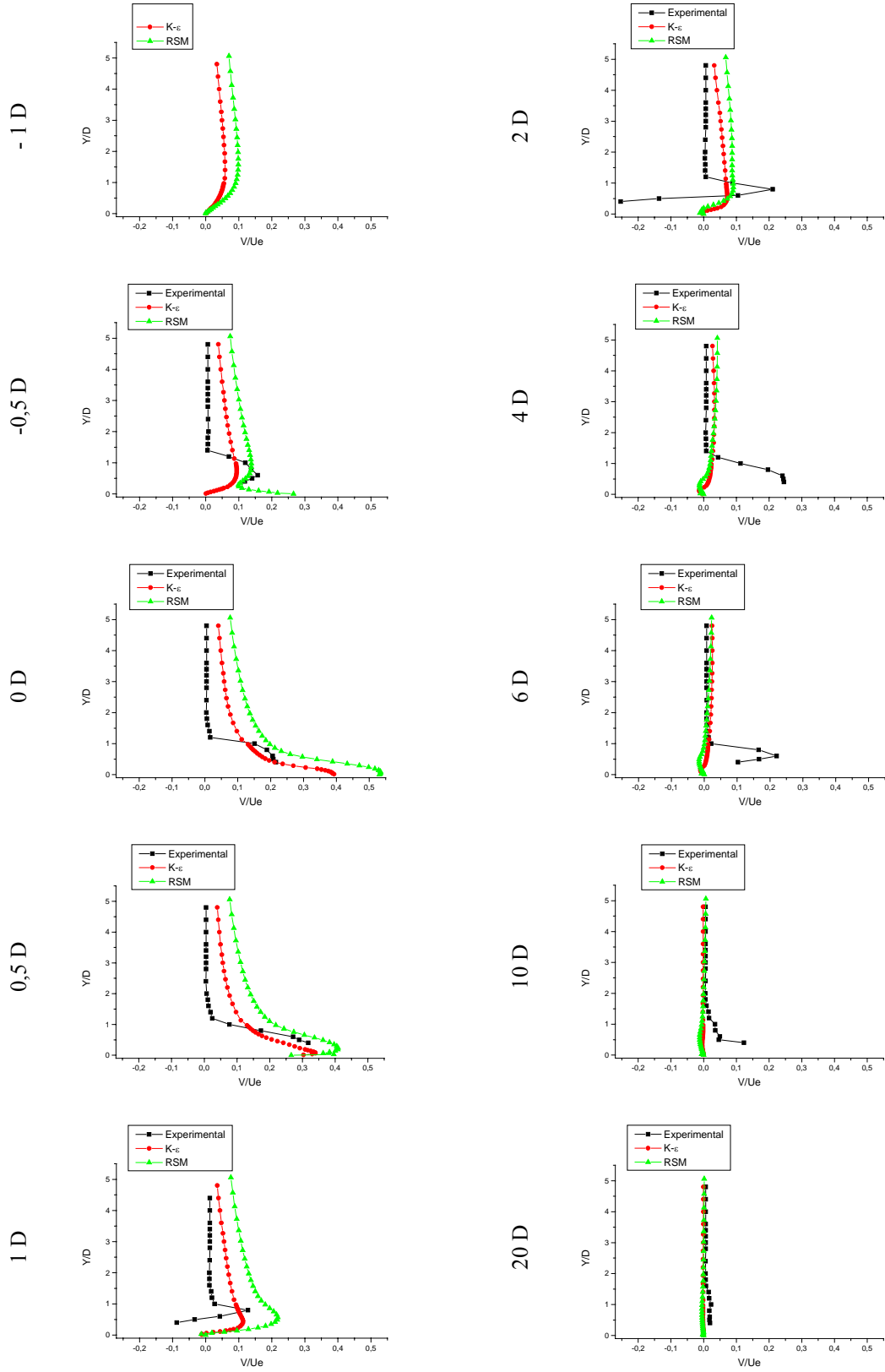


Figure 4.9 : Suite

b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne

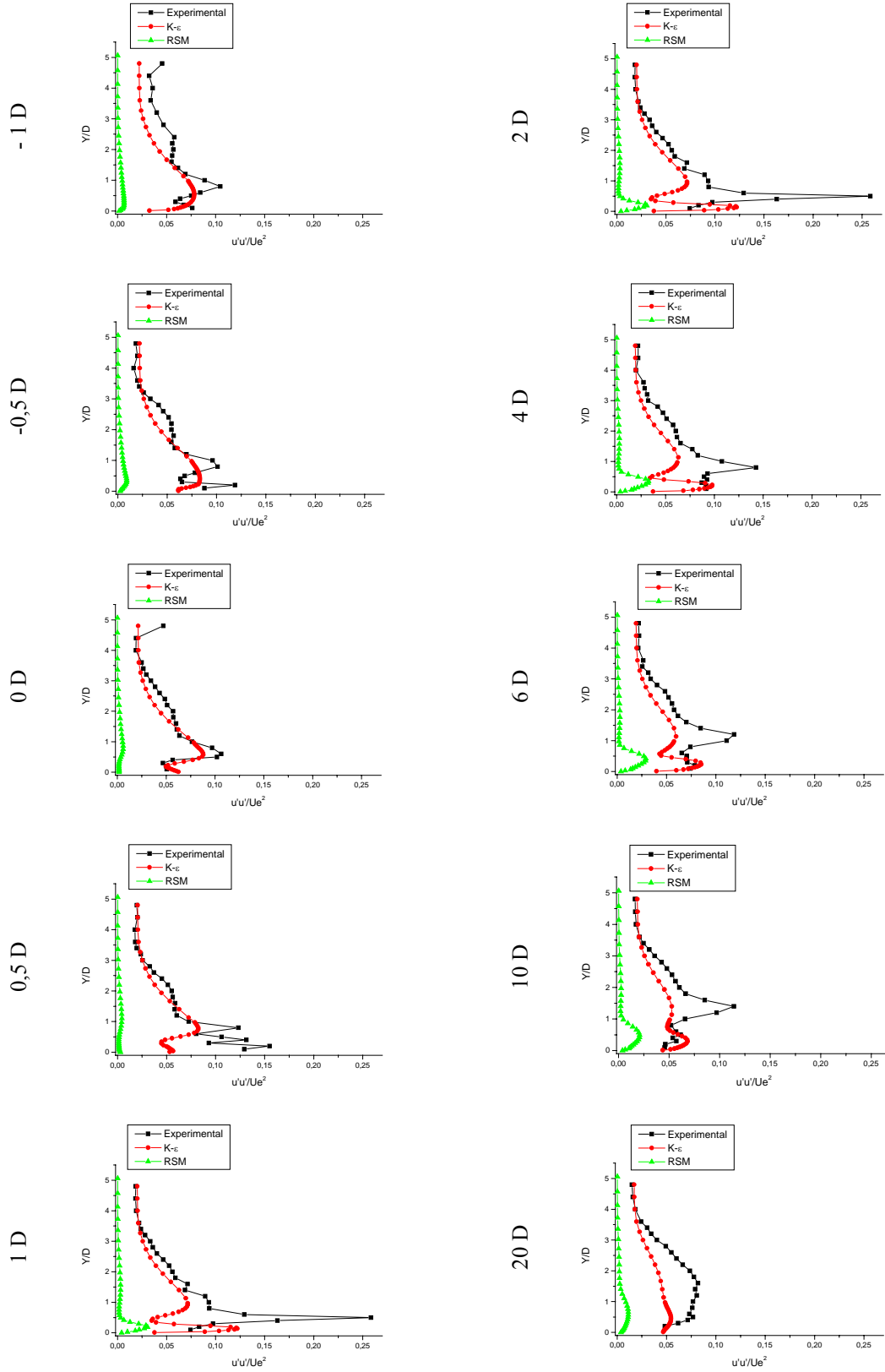


Figure 4.9 : Suite

c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales

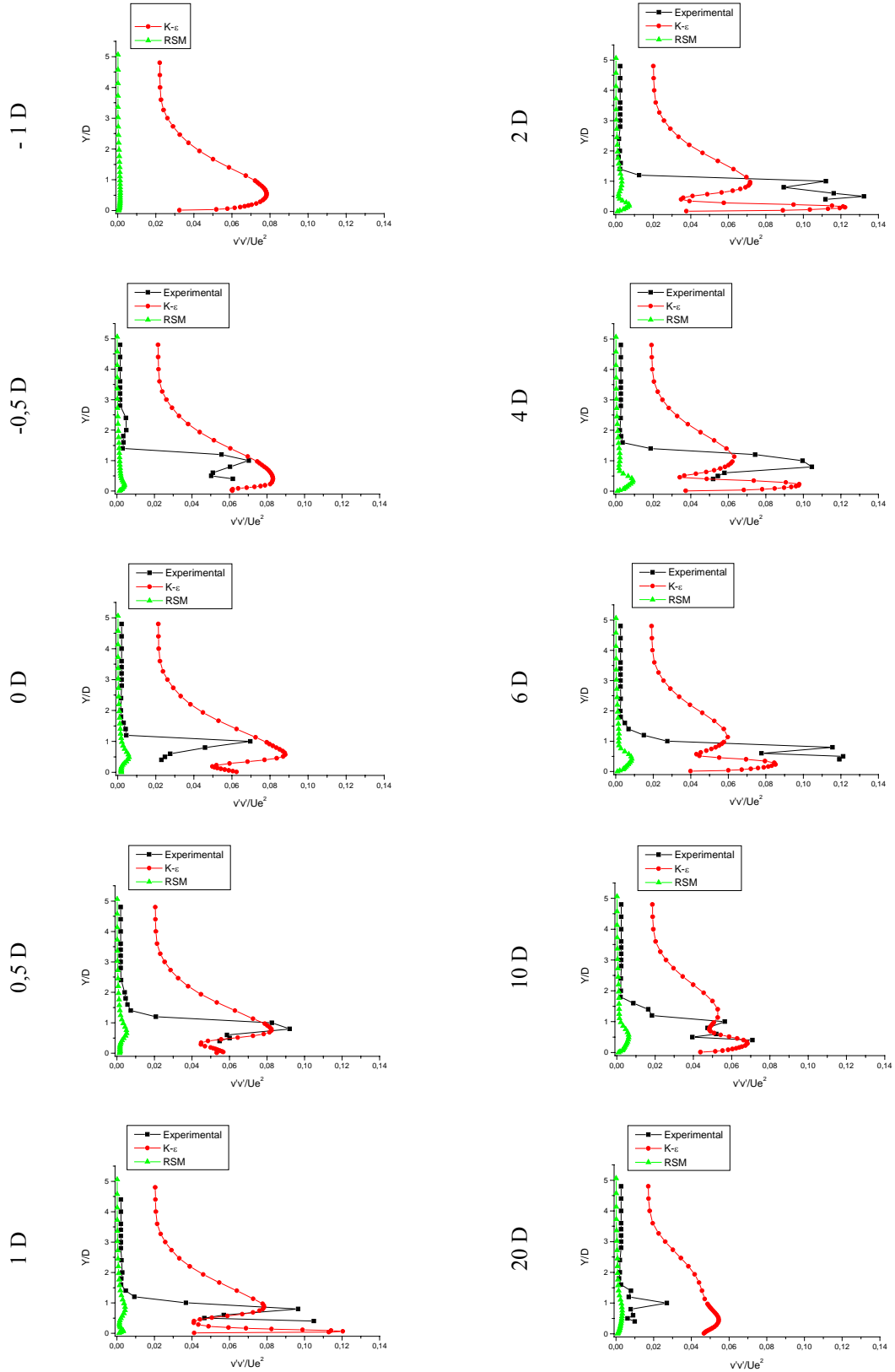


Figure 4.9 : Suite et fin

d. Profils des tensions turbulentes normales verticales



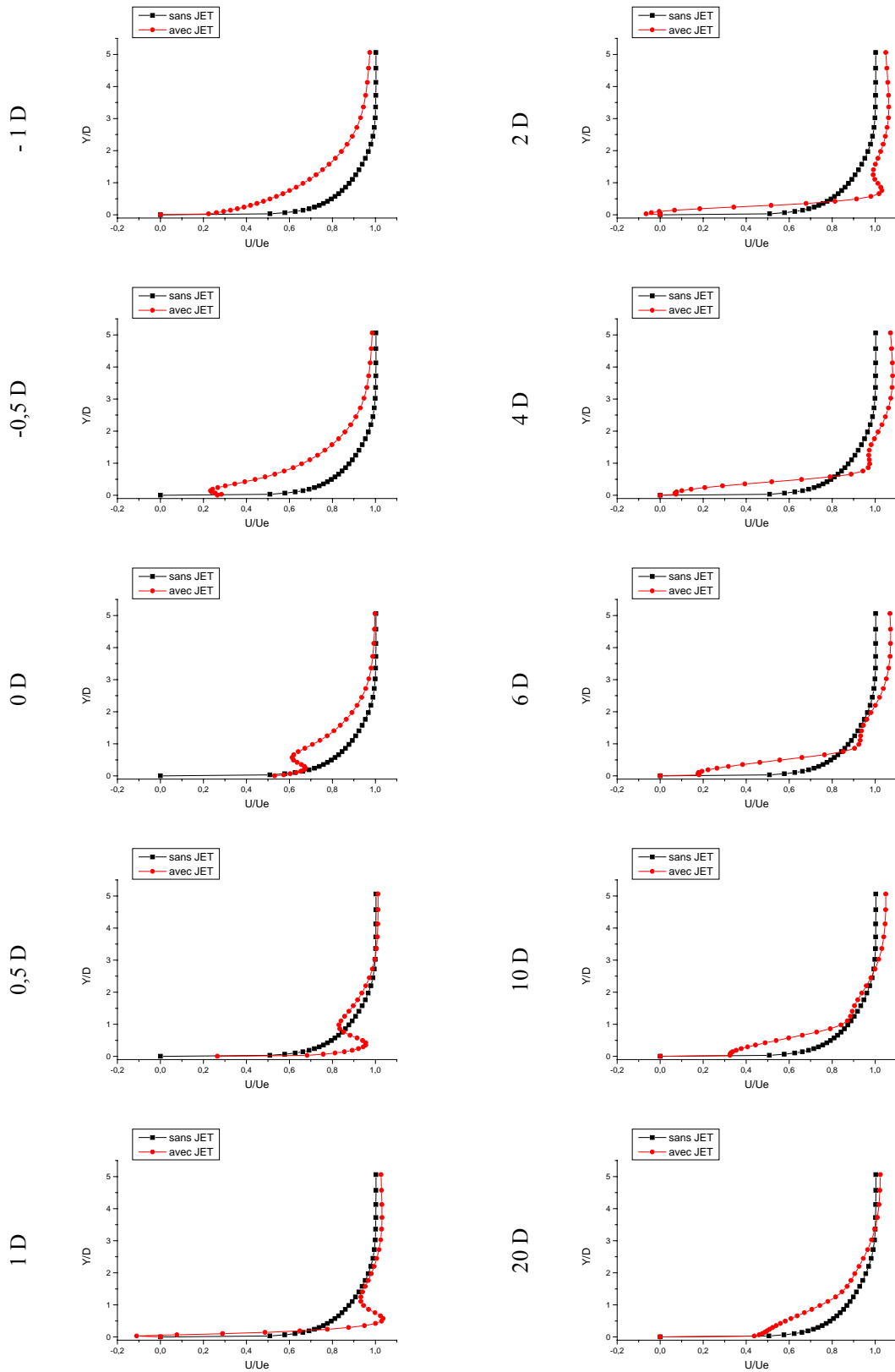


Figure 4.10 : Comparaison des résultats RSM avec jet et RSM sans jet sur plaque plane

a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne

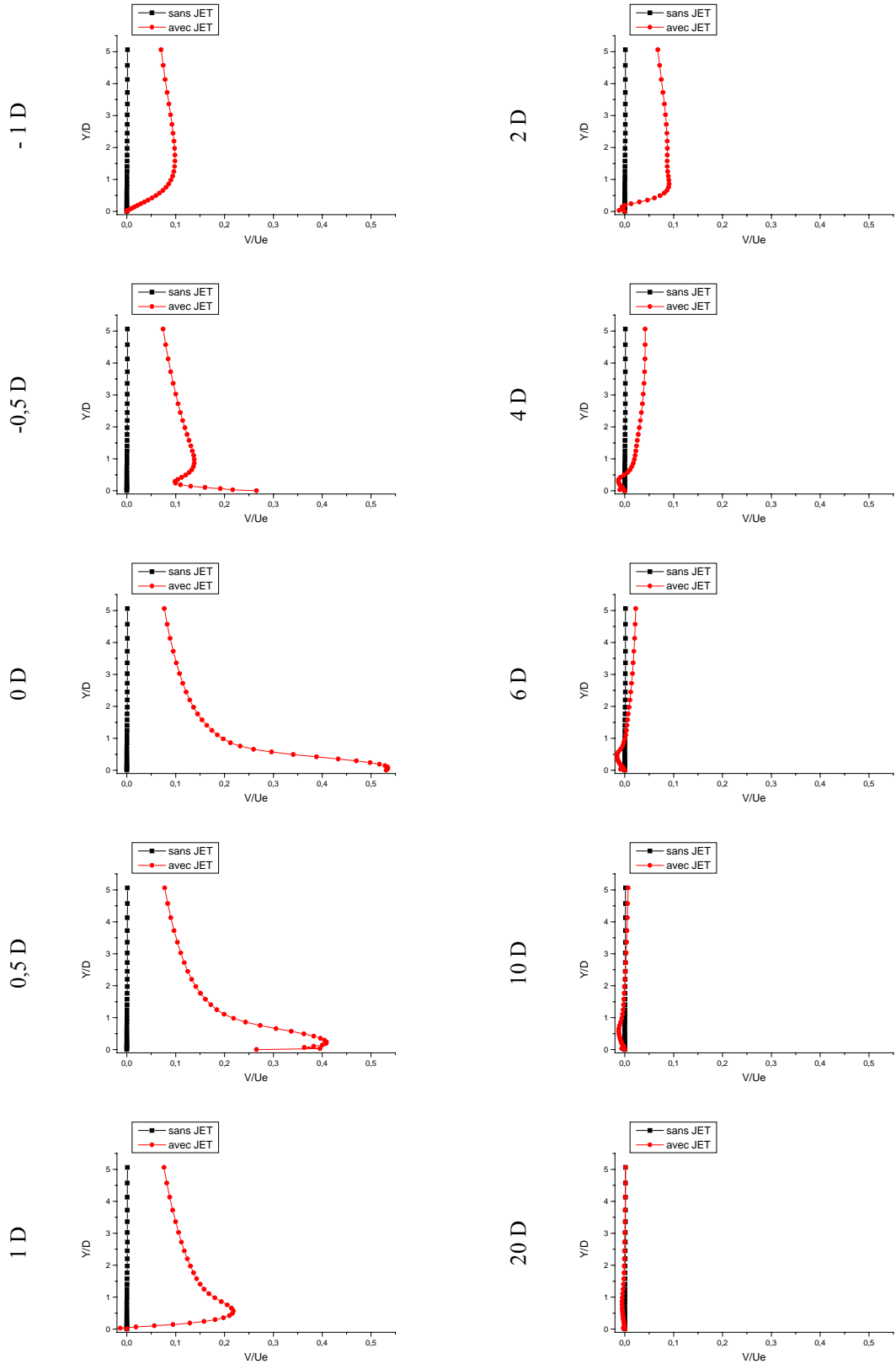


Figure 4.10 : Suite

b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne

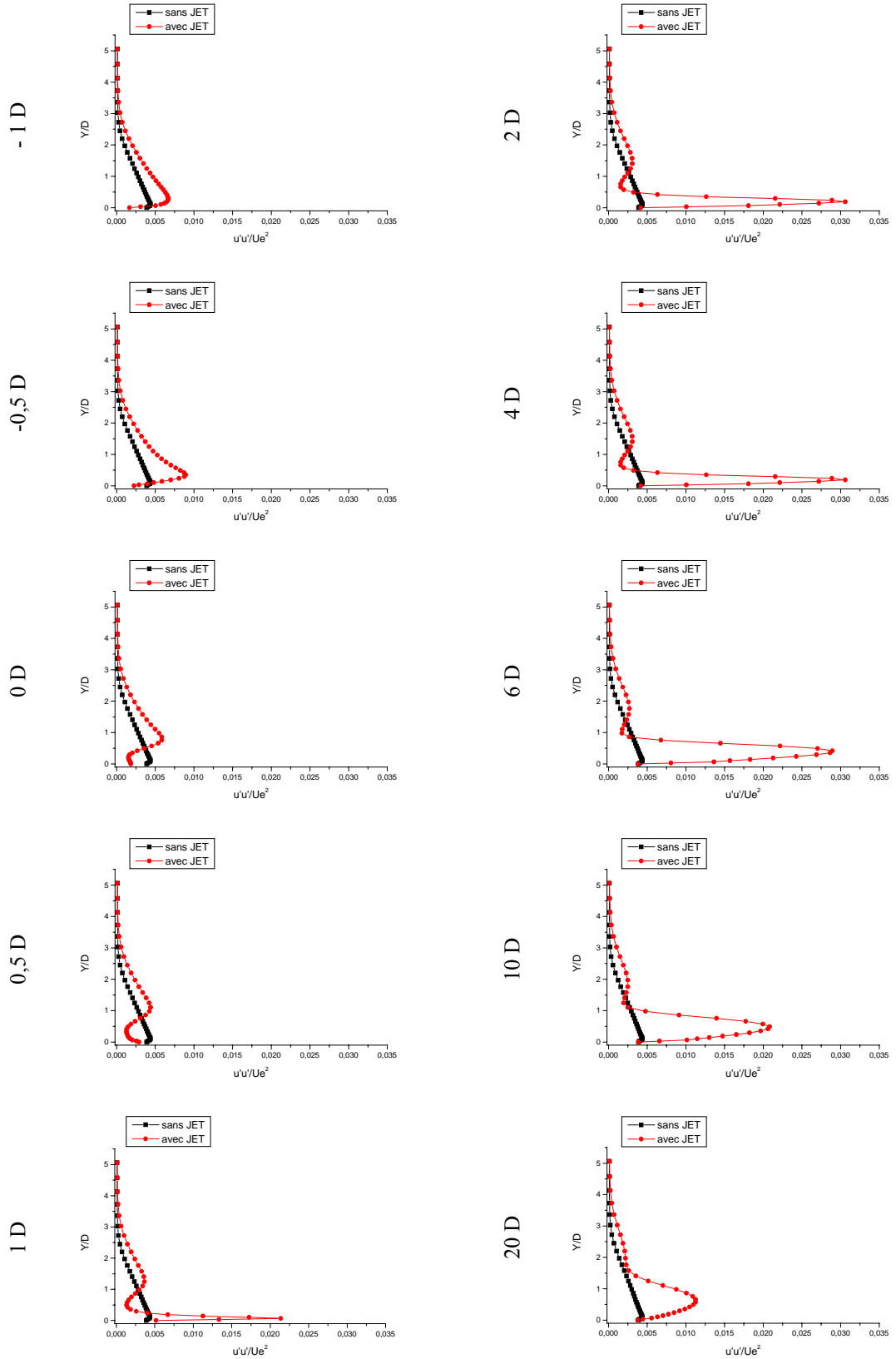


Figure 4.10 : Suite

c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales

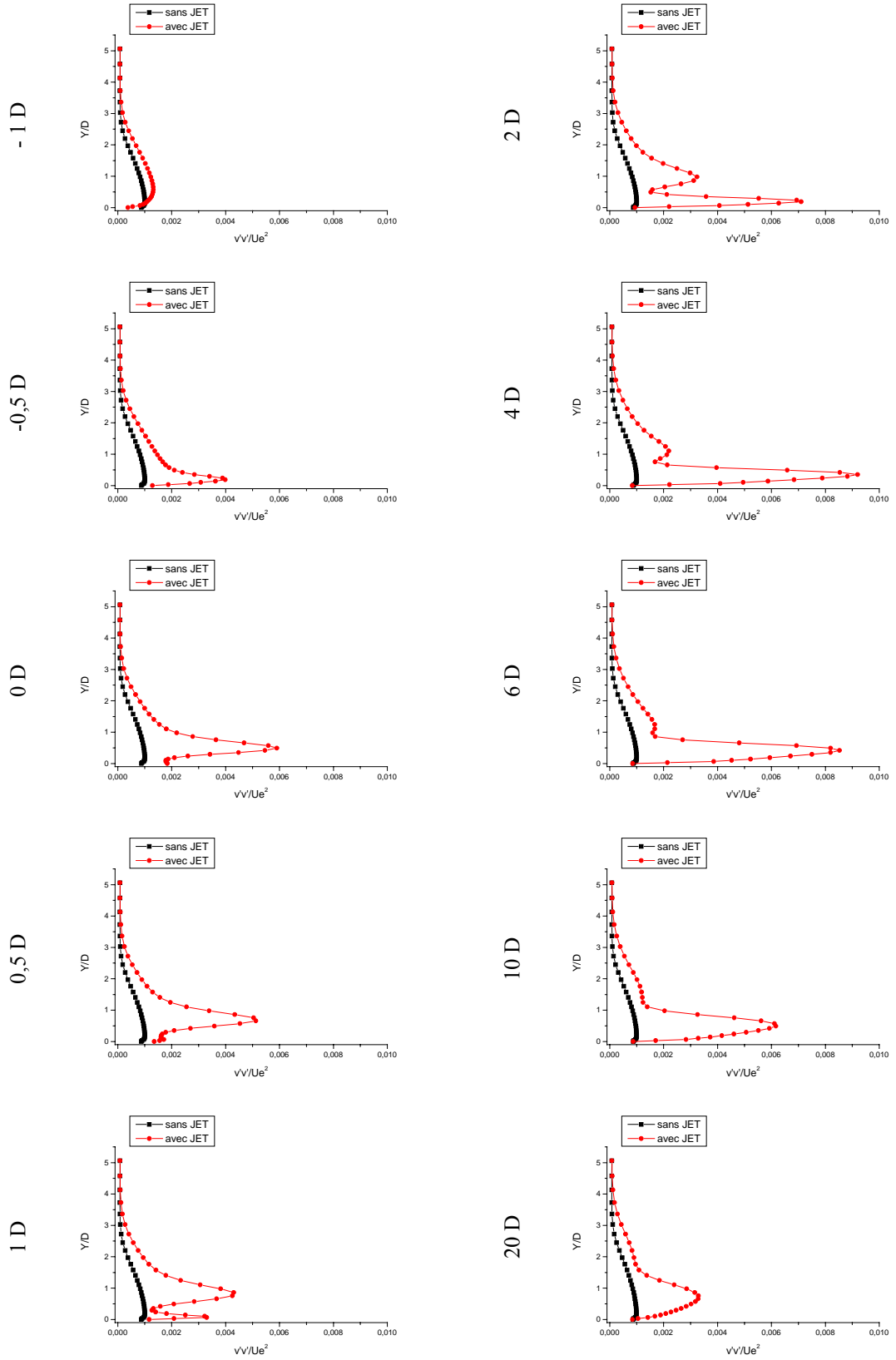


Figure 4.10 : Suite

d. Profils des tensions turbulentes normales verticales

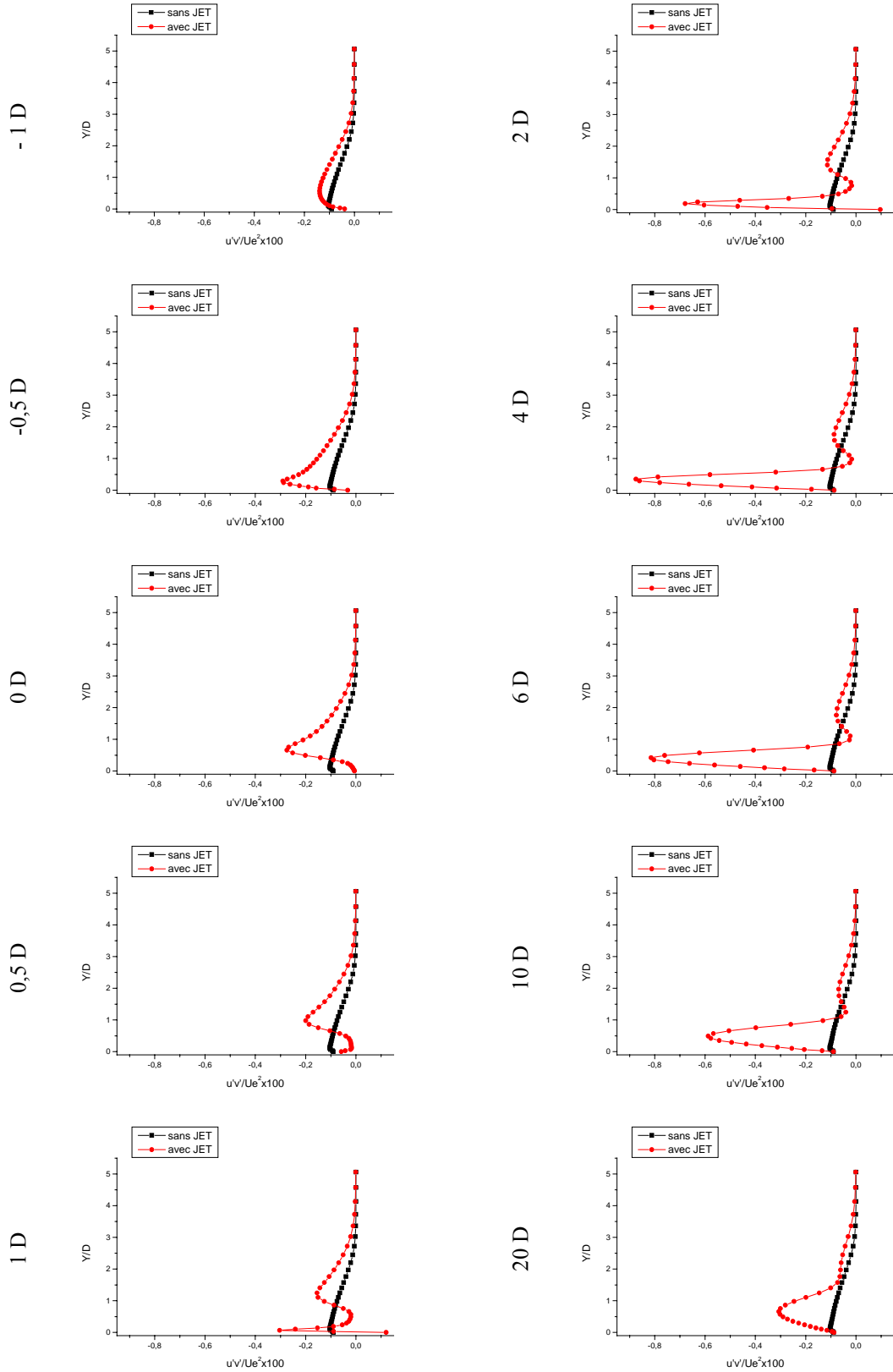


Figure 4.10 : Suite

e. Profils des tensions turbulentes de cisailment

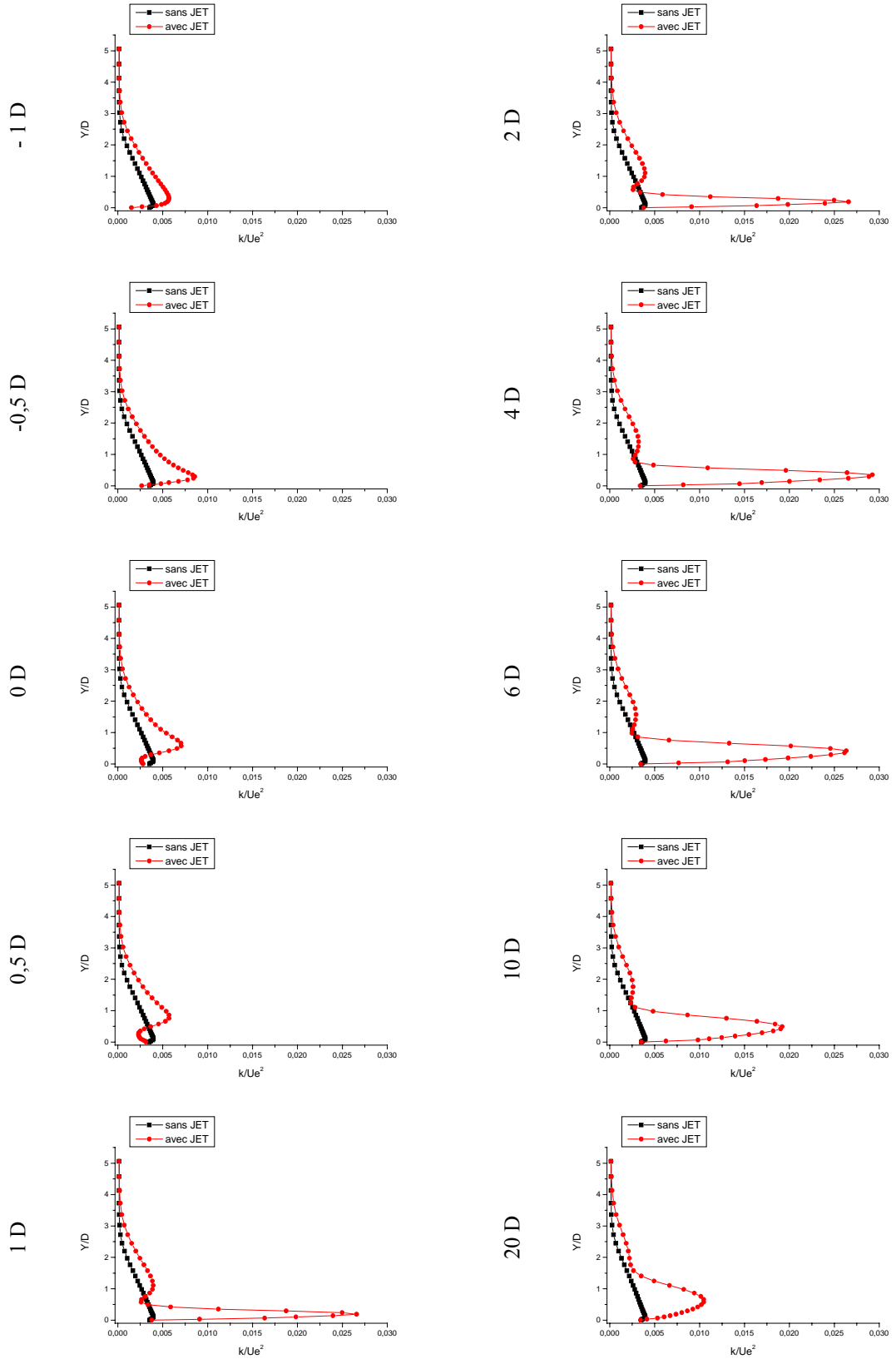


Figure 4.10 : Suite

f. Profils de l'énergie cinétique turbulente

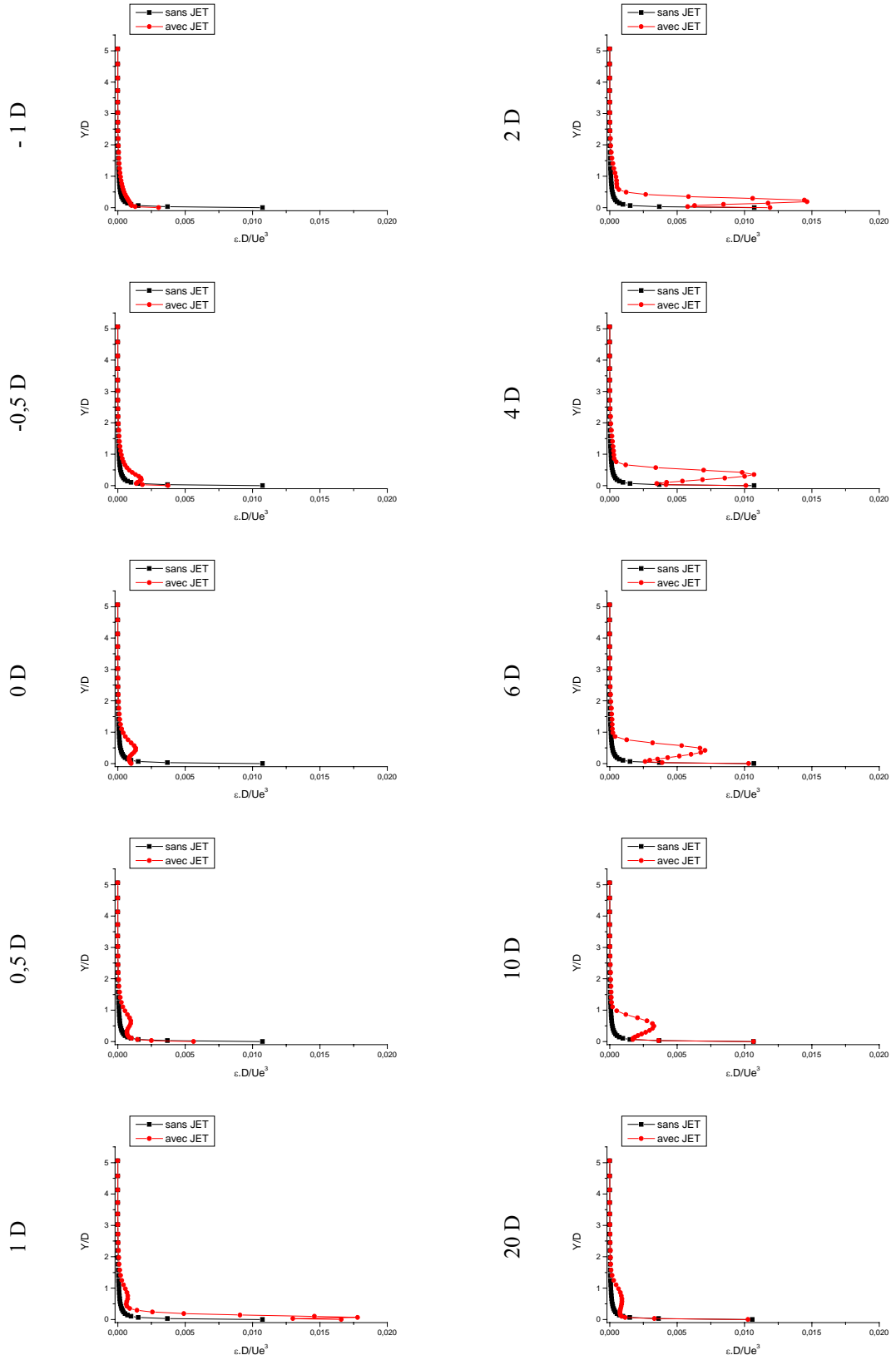


Figure 4.10 : Suite

g. Profils de la dissipation turbulente

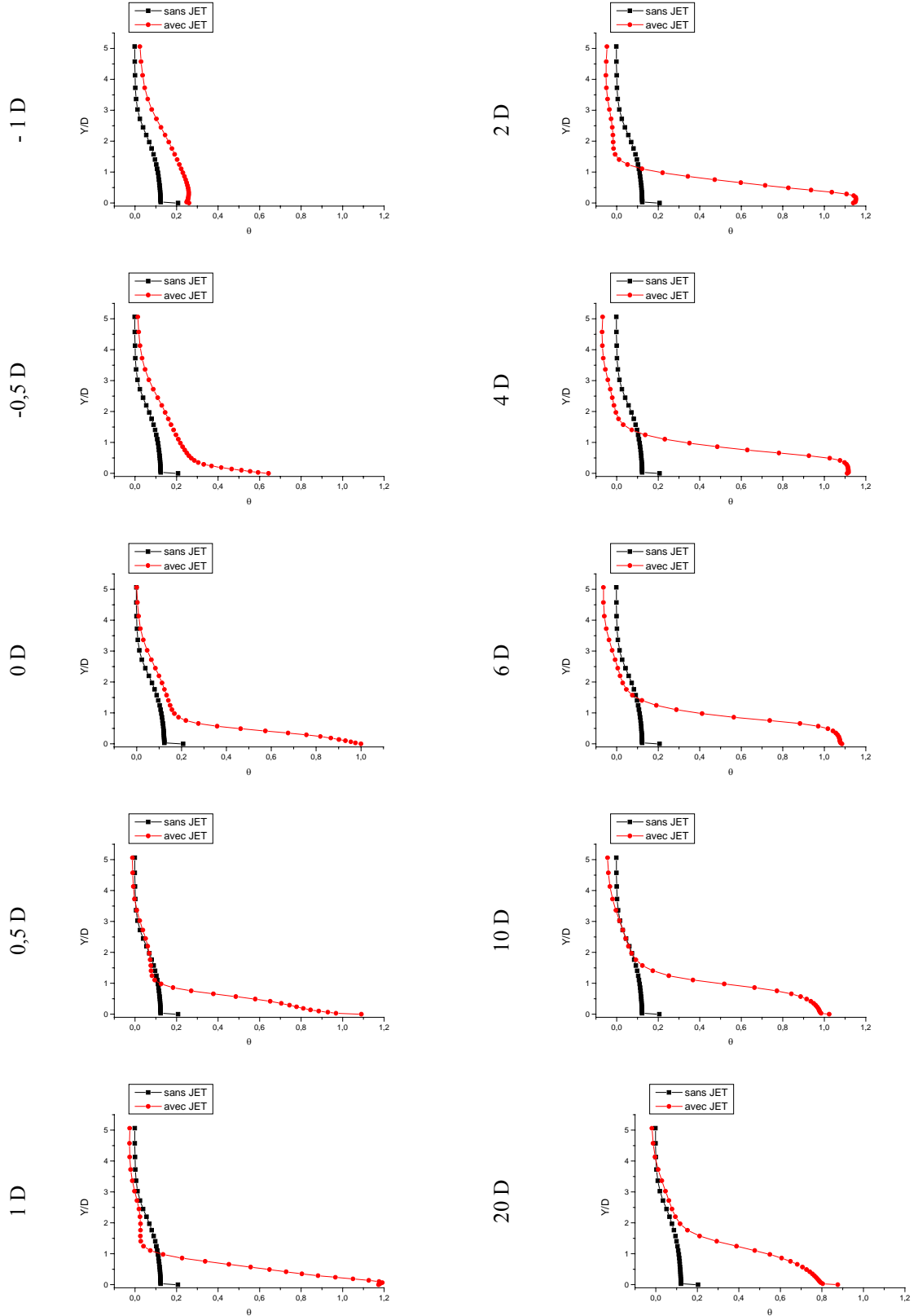


Figure 4.10 : Suite et fin

h. Profils de la température moyenne adimensionnelle



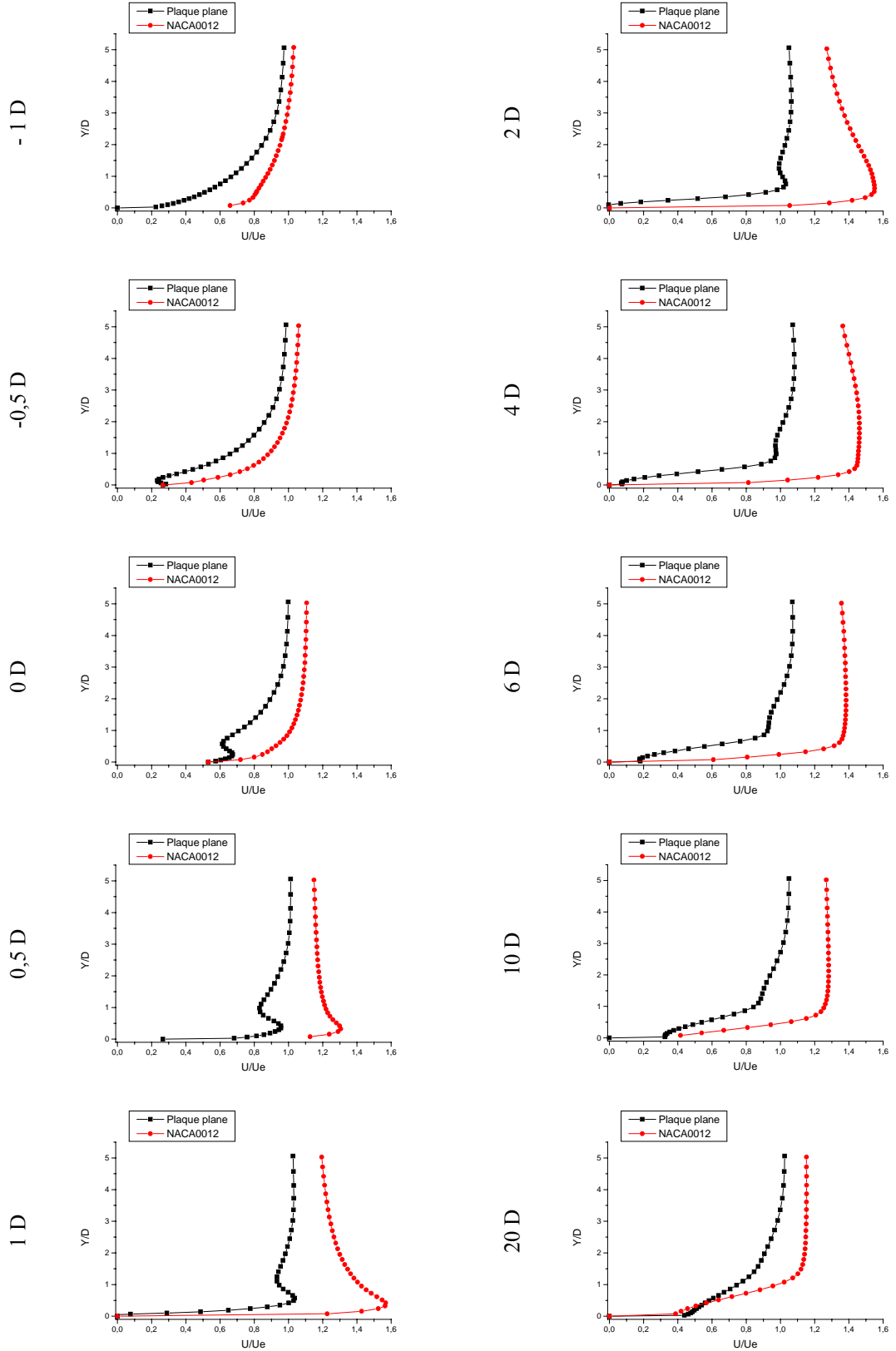


Figure 4.11 : Comparaison des résultats RSM sur plaque et RSM sur NACA0012

a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne

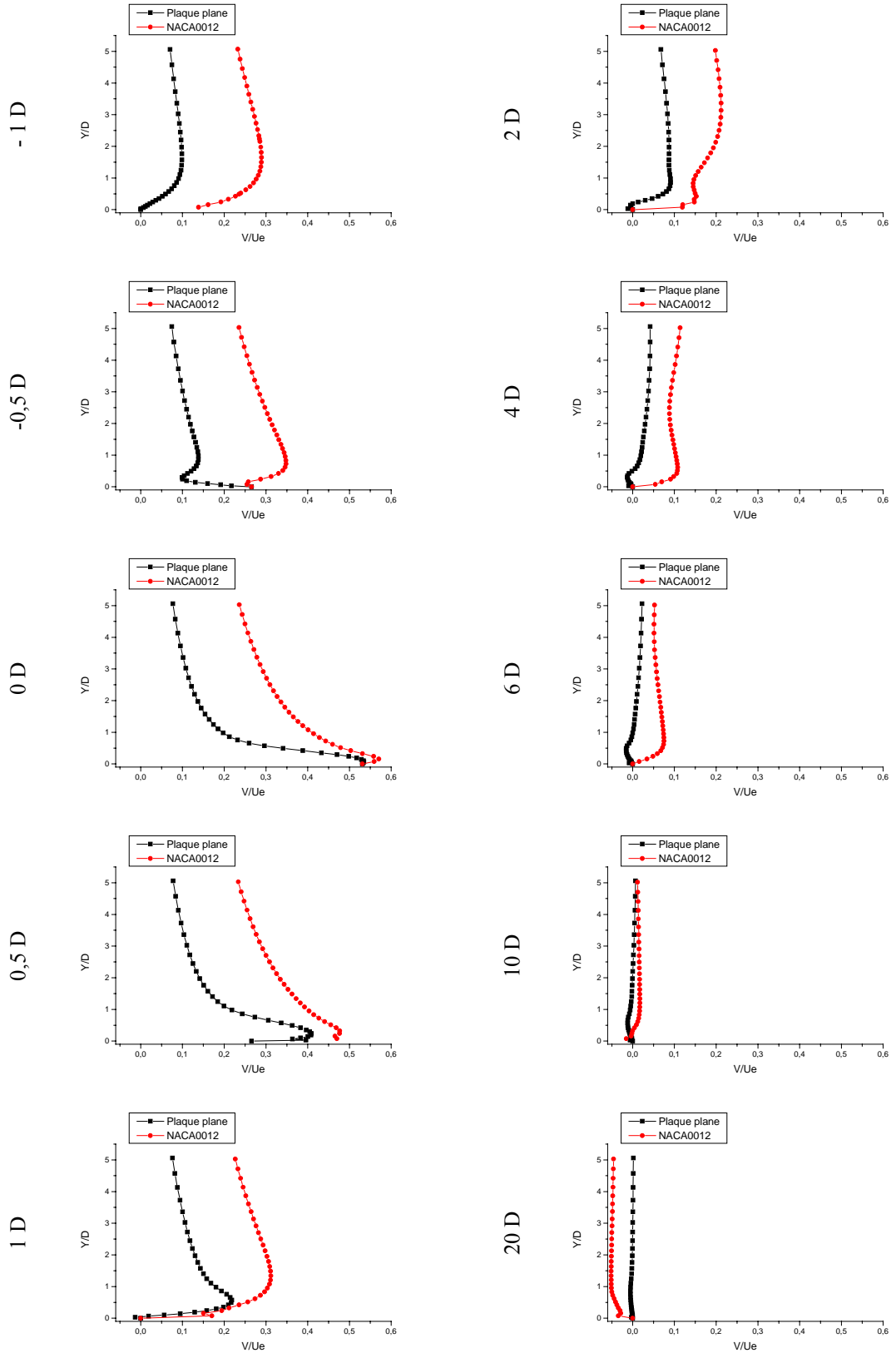


Figure 4.11 : Suite

b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne

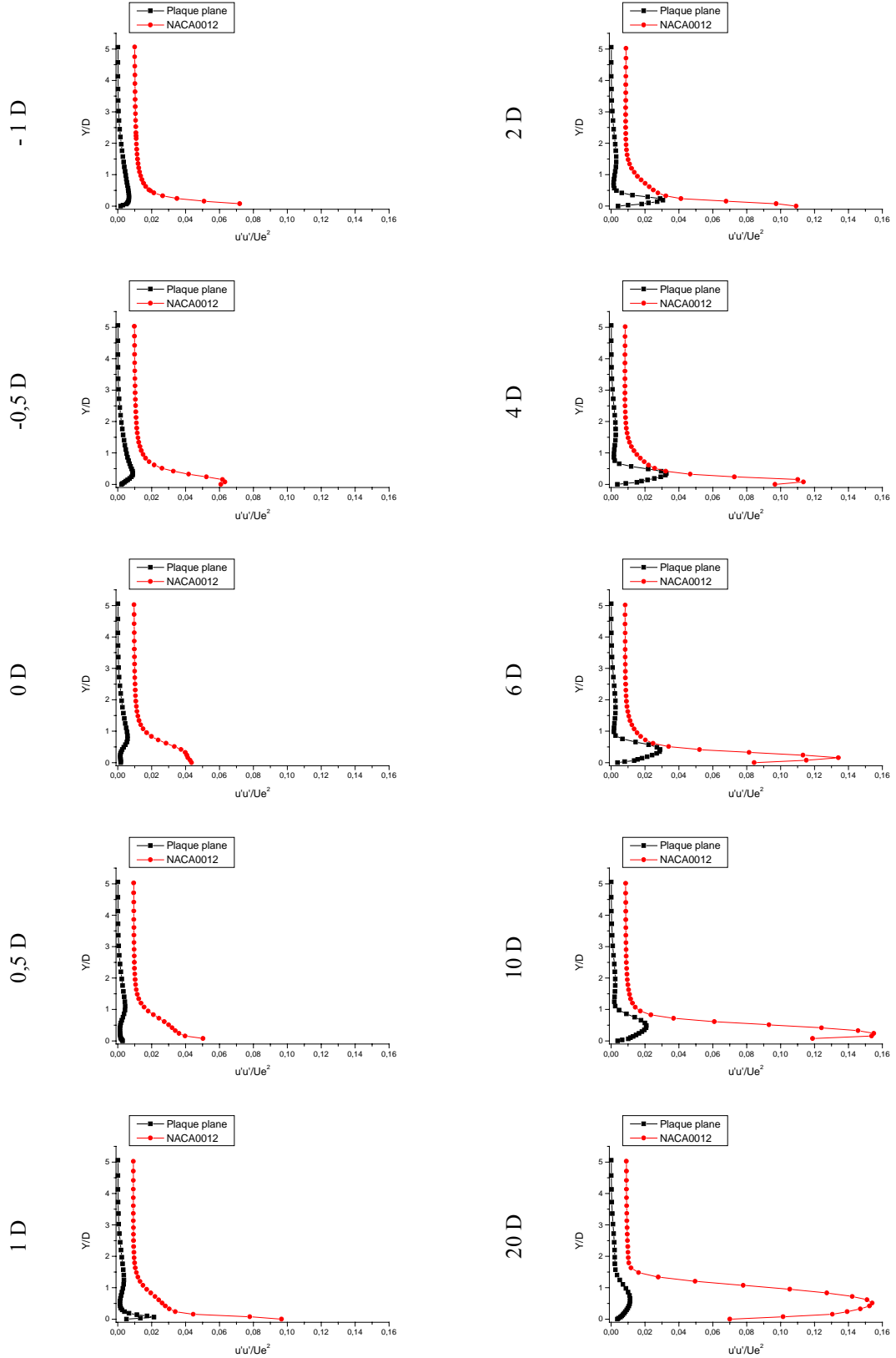


Figure 4.11 : Suite

c. Profils des fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse

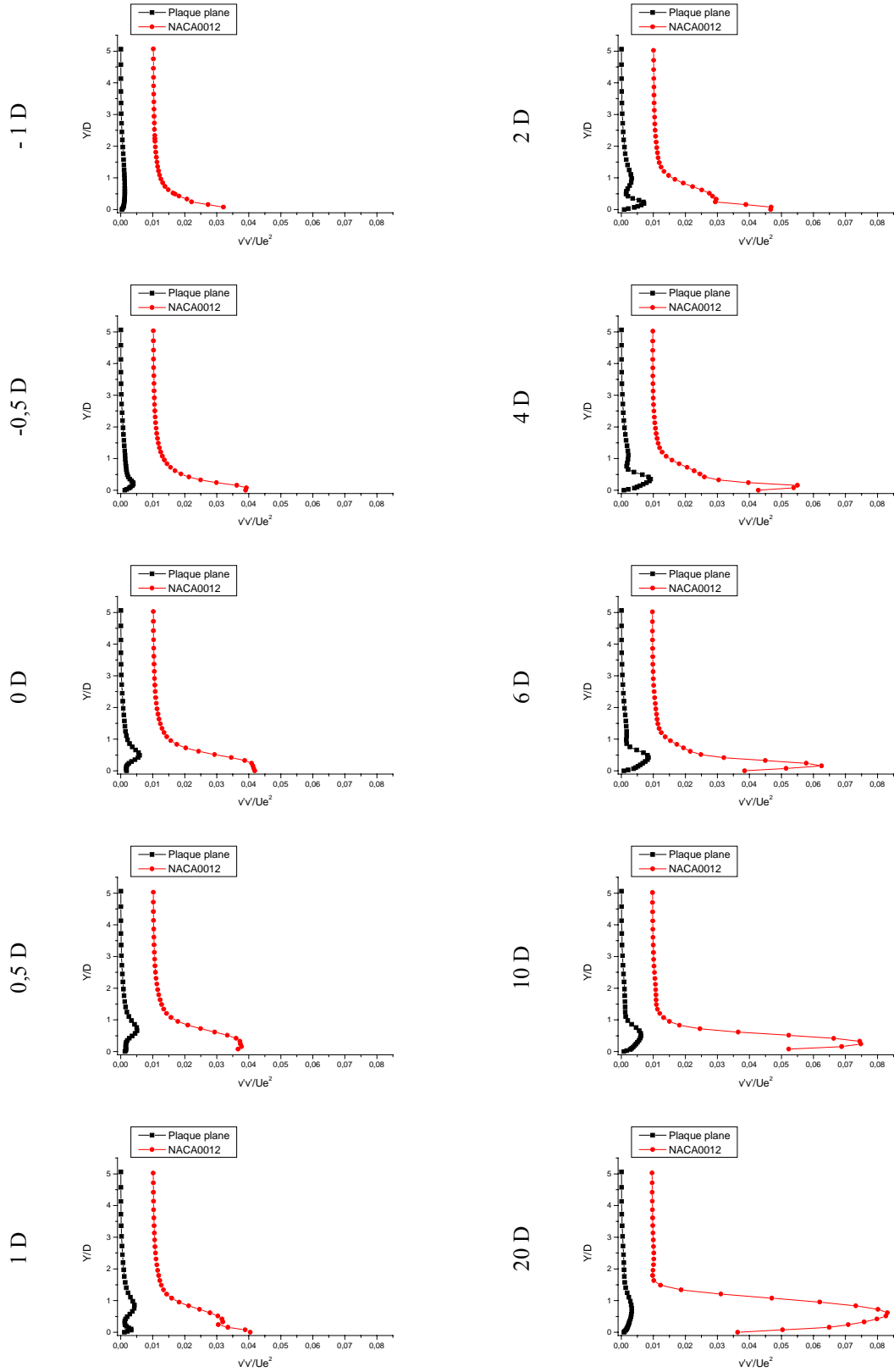


Figure 4.11 : Suite

d. Profils des fluctuations de la composante verticale de la vitesse

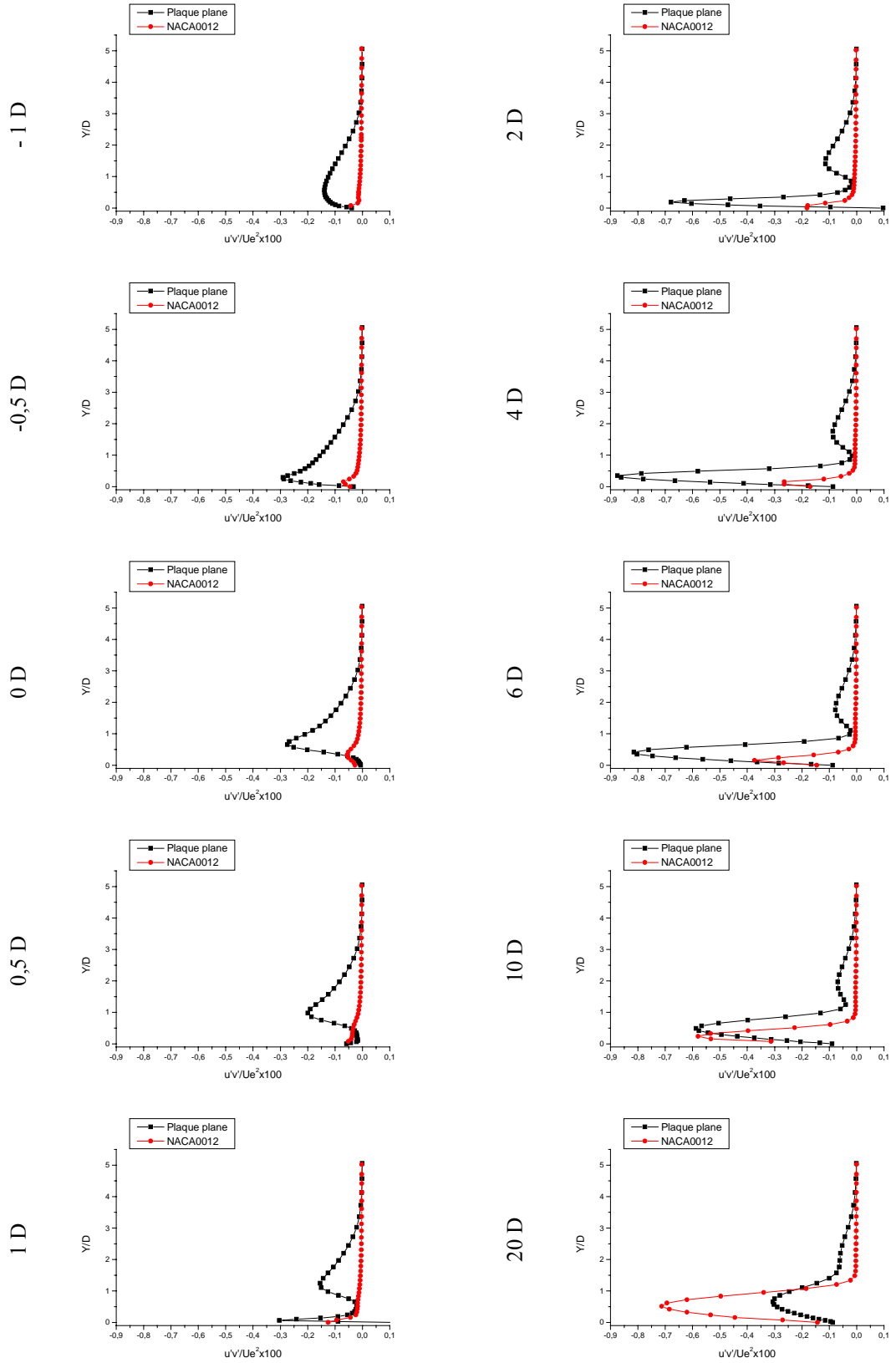


Figure 4.11 : Suite  
e. Profils des tensions visqueuses.

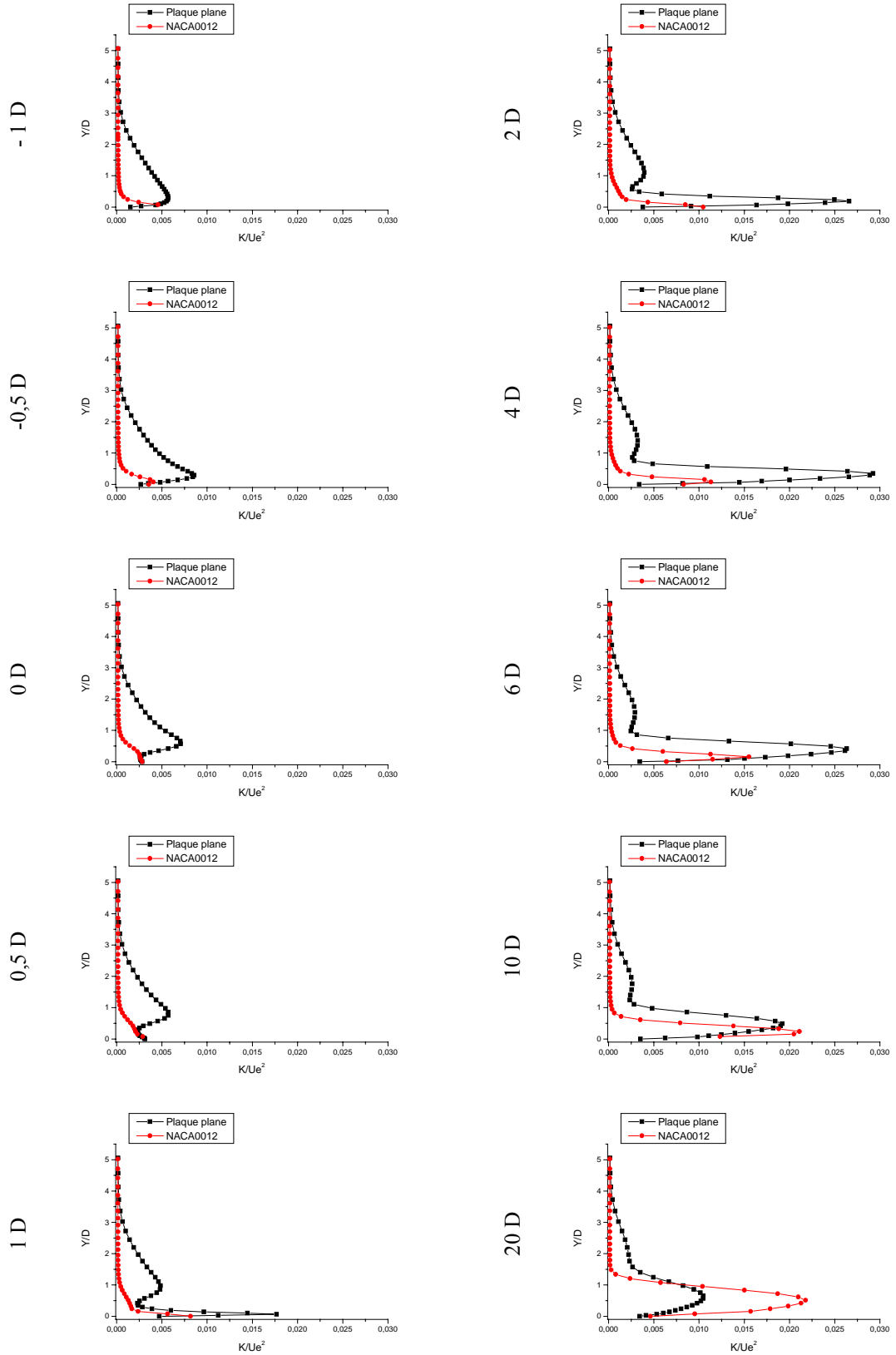


Figure 4.11 : Suite

f. Profils de l'énergie cinétique turbulente

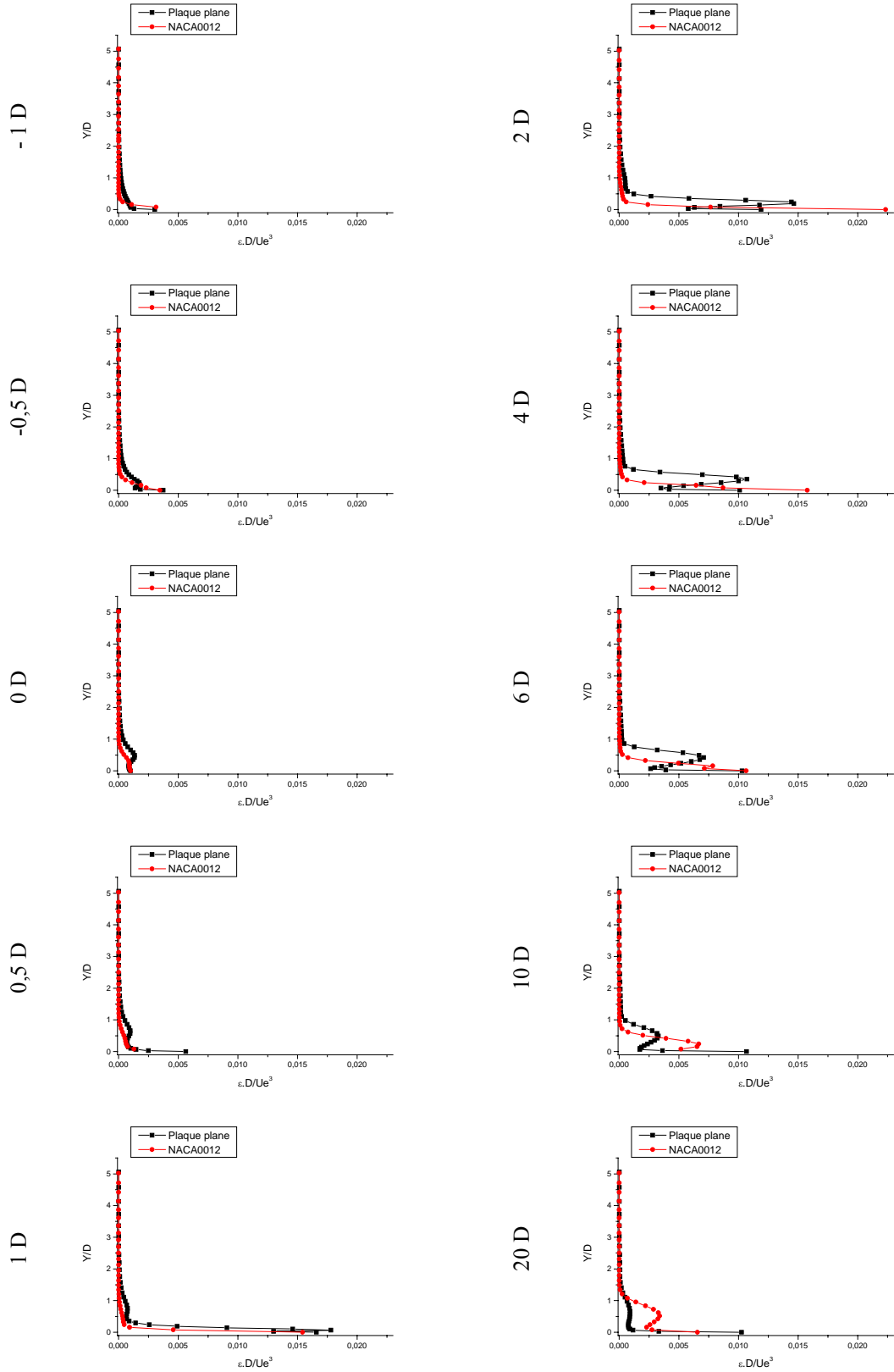


Figure 4.11 : Suite

g. Profils de la dissipation turbulente

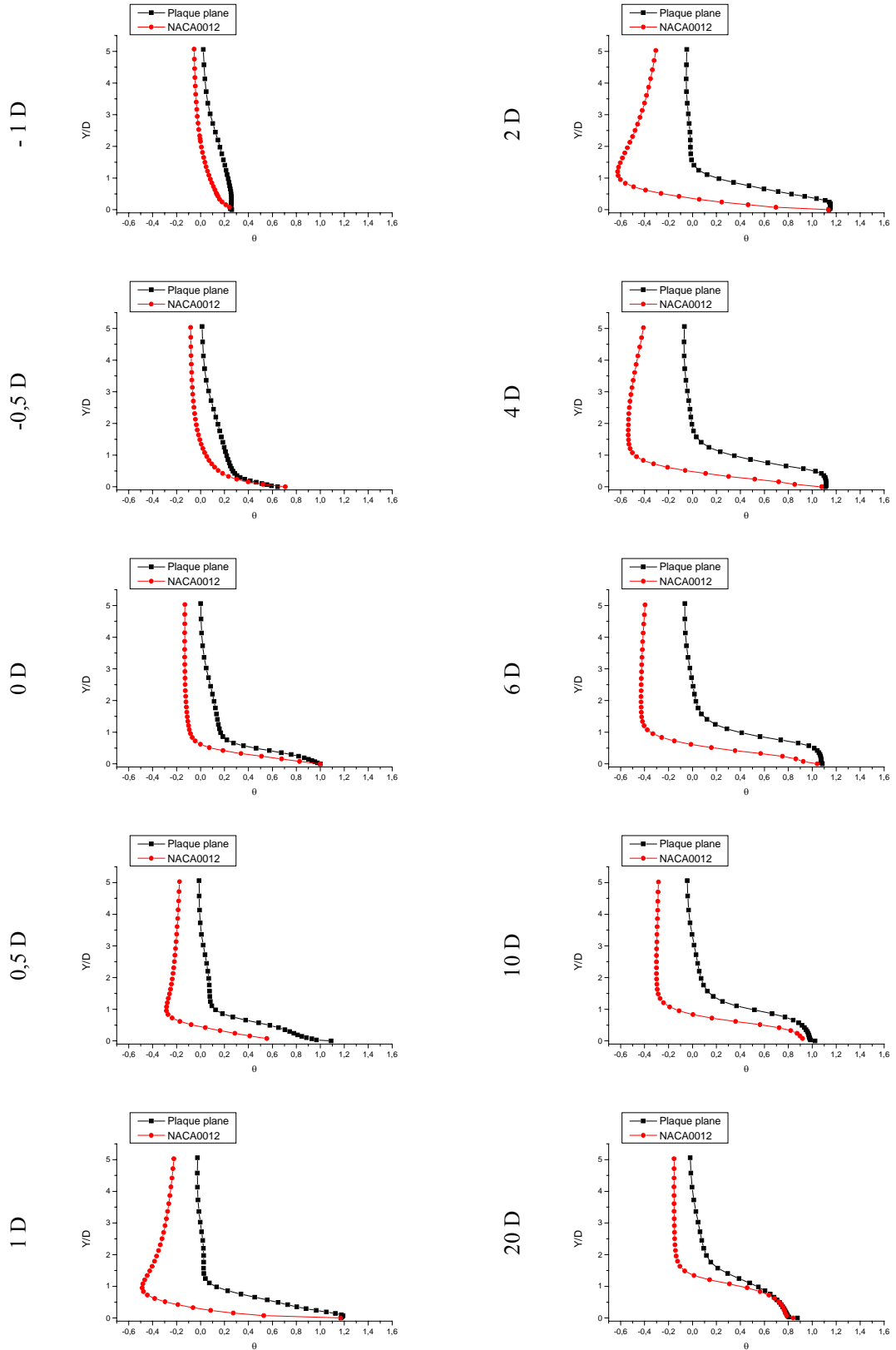


Figure 4.11 : Suite et fin

h. Profils de la température moyenne adimensionnelle



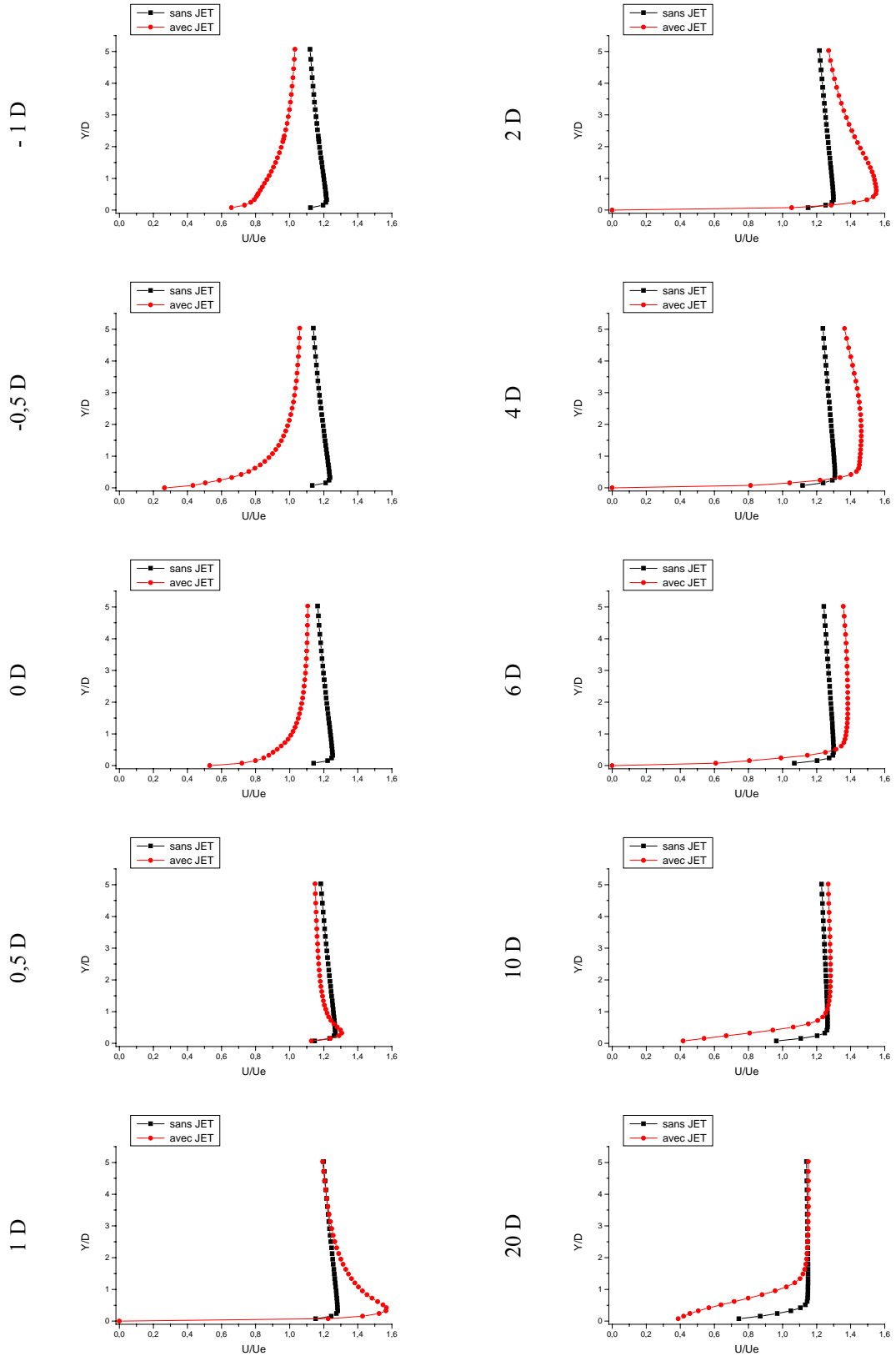


Figure 4.12 : Comparaison des résultats RSM avec jet et RSM sans jet sur NACA0012

a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne

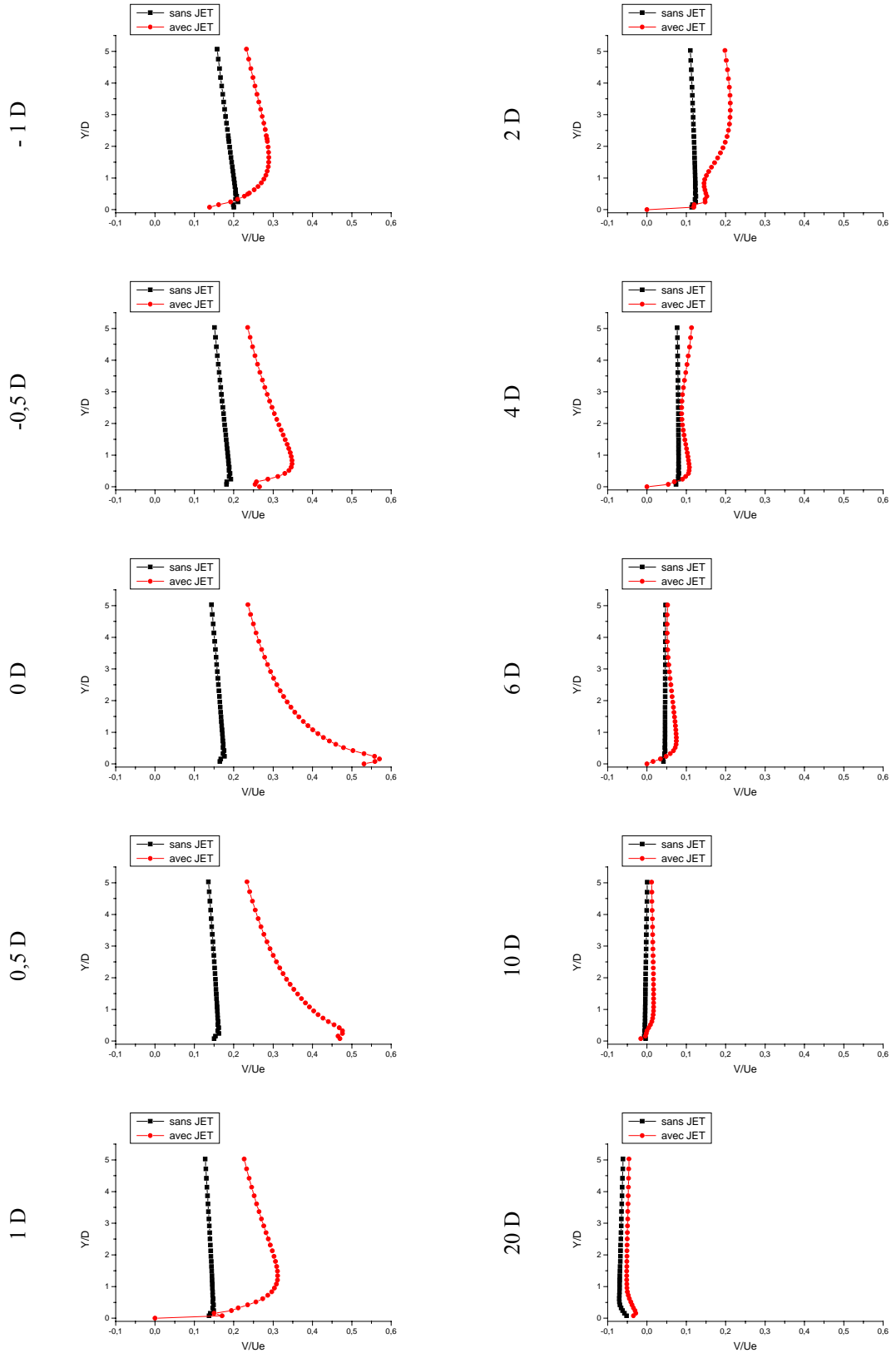


Figure 4.12 : Suite

b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne

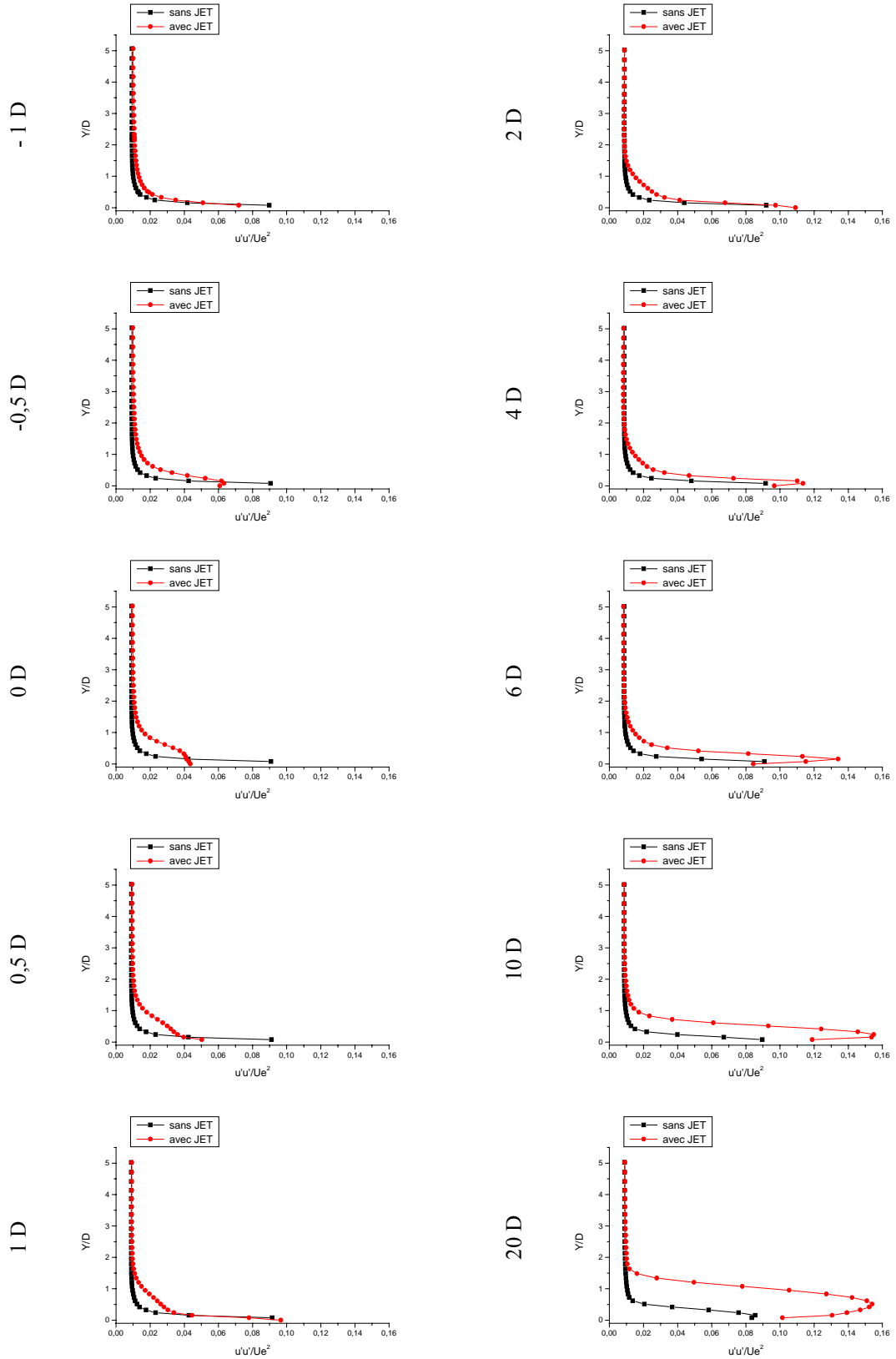


Figure 4.12 : Suite

c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales

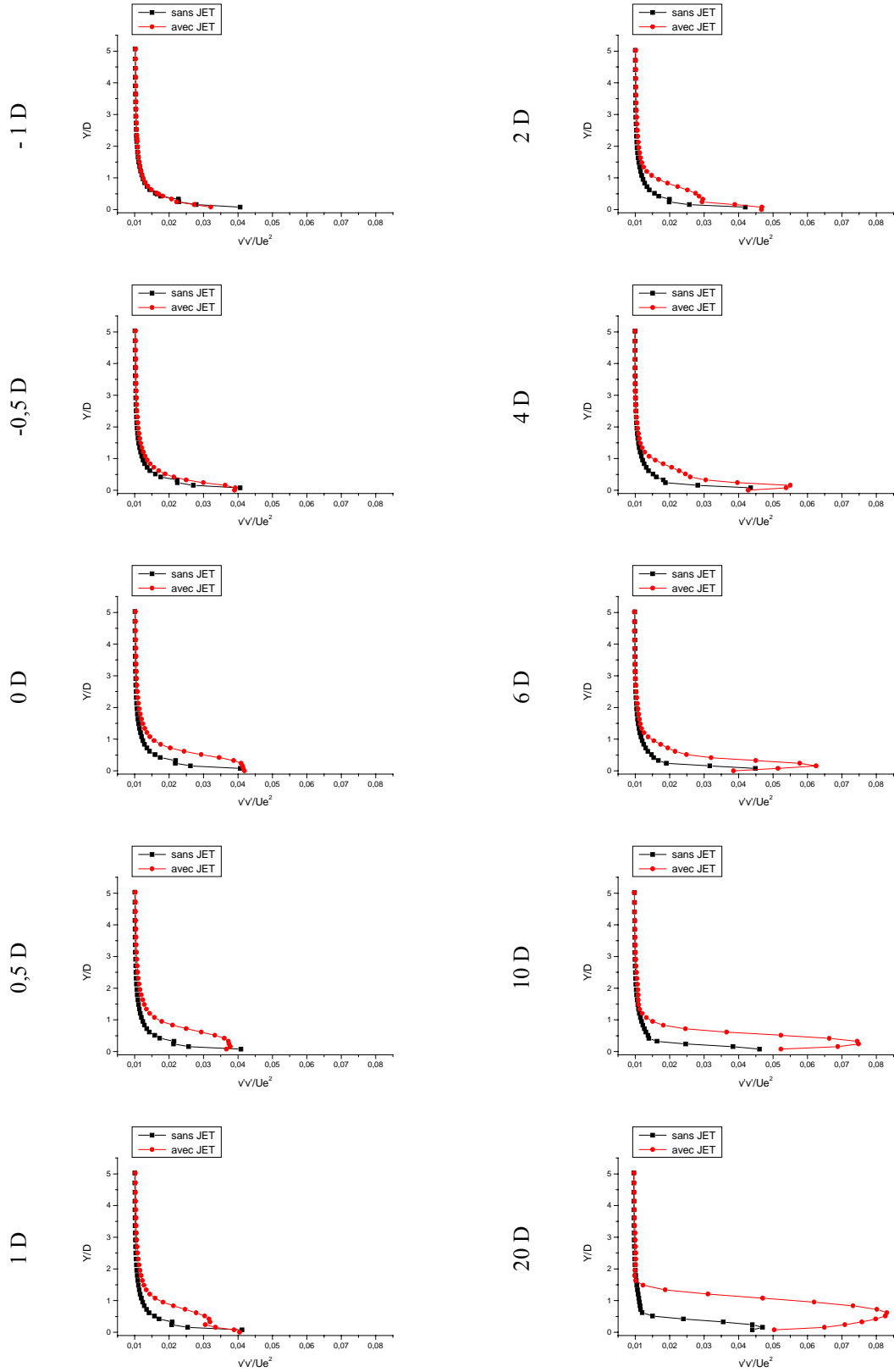


Figure 4.12 : Suite

d. Profils des tensions turbulentes normales verticales

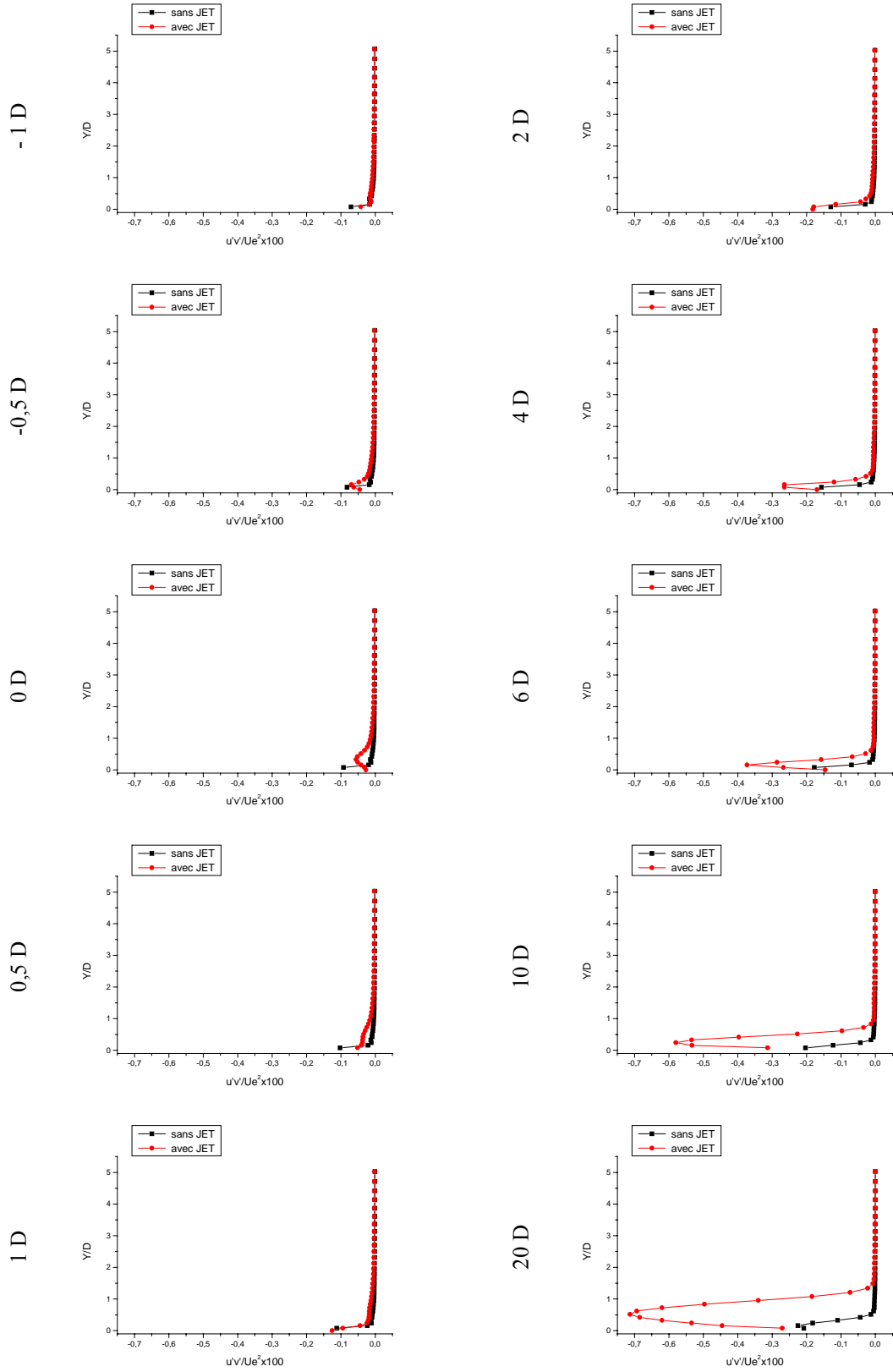


Figure 4.12 : Suite

e. Profils des tensions turbulentes de cisaillement

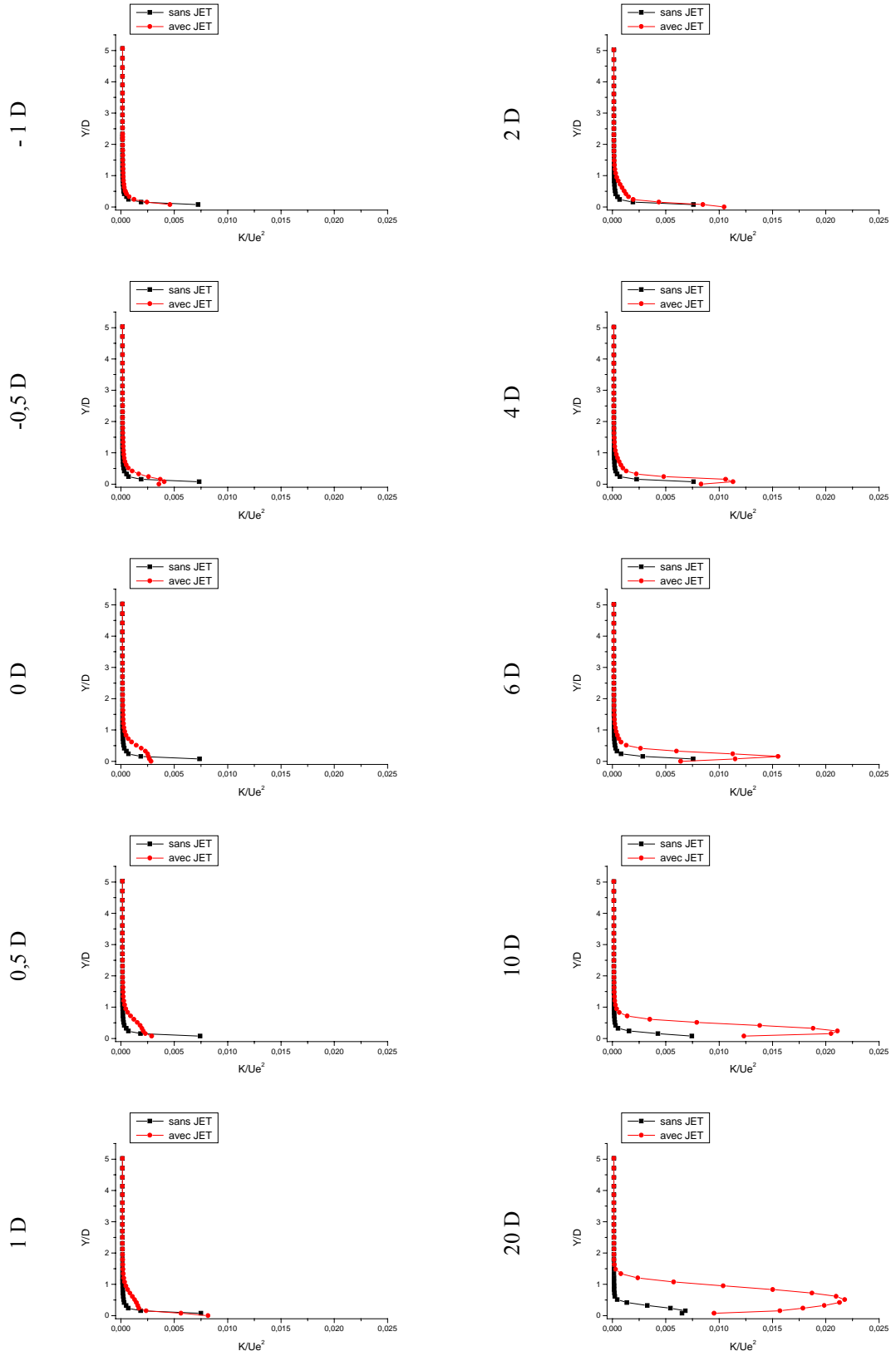


Figure 4.12 : Suite

f. Profils de l'énergie cinétique turbulente

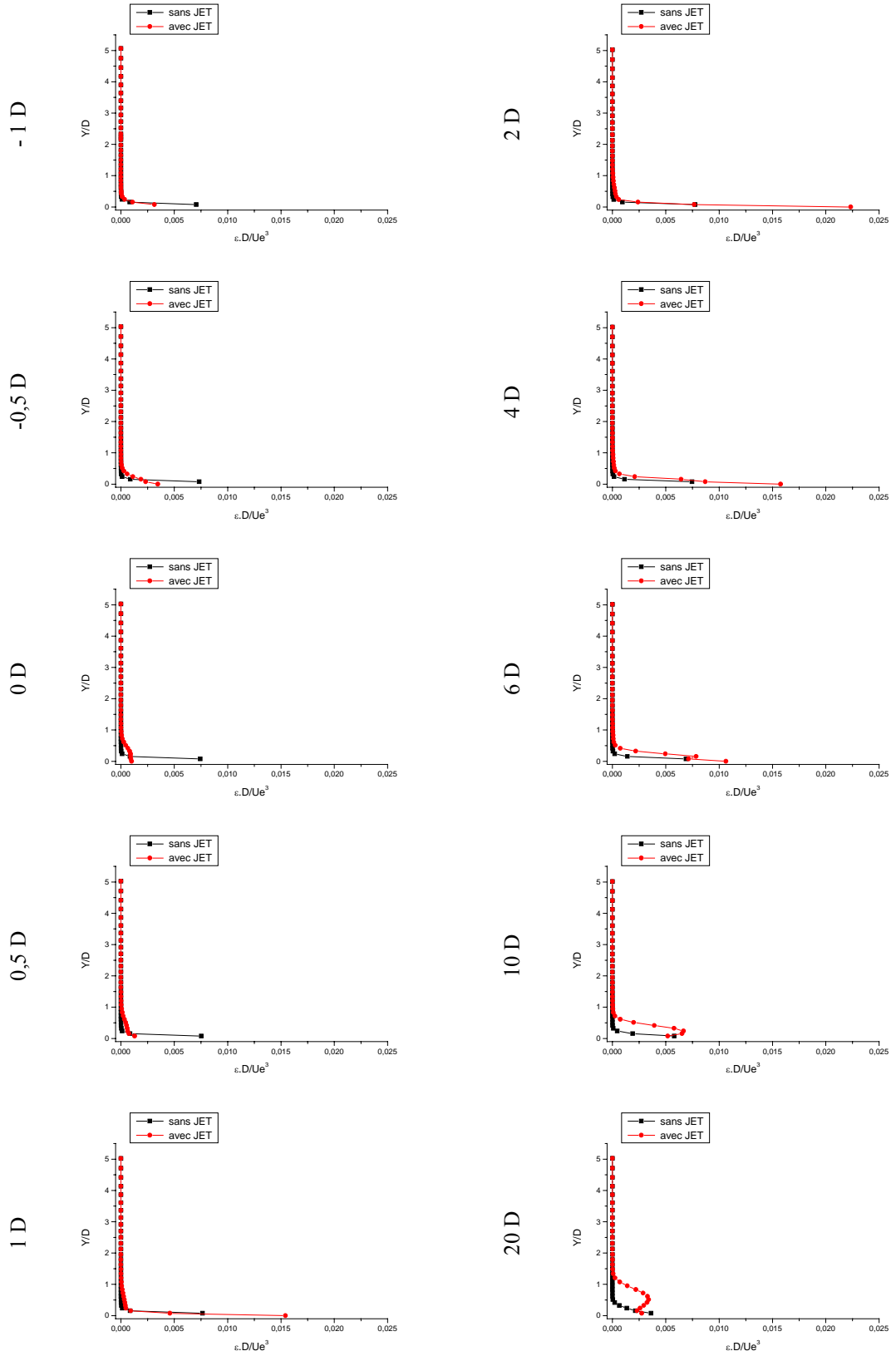


Figure 4.12 : Suite

g. Profils de la dissipation turbulente

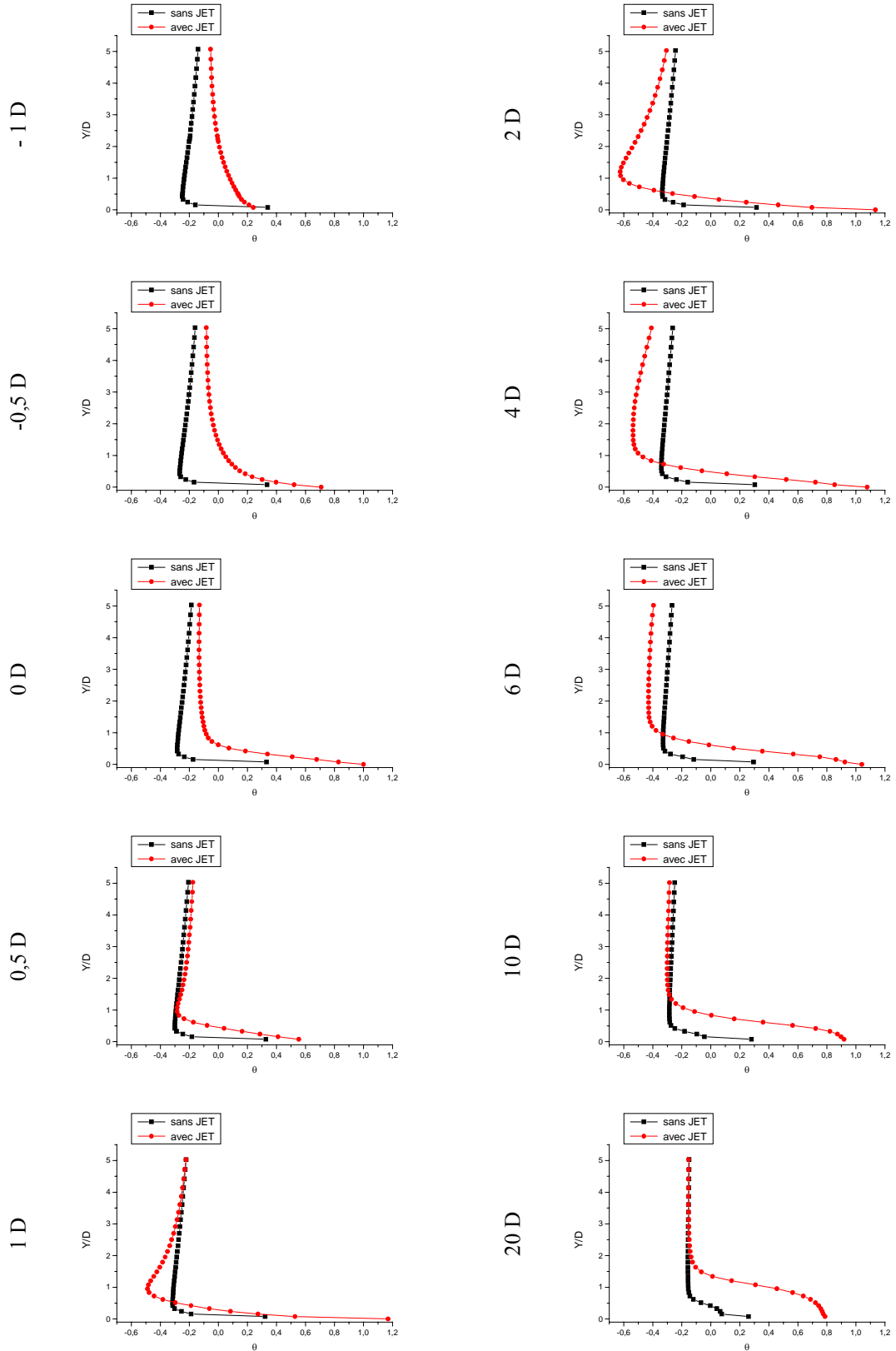


Figure 4.12 : Suite et fin

h. Profils de la température moyenne adimensionnelle



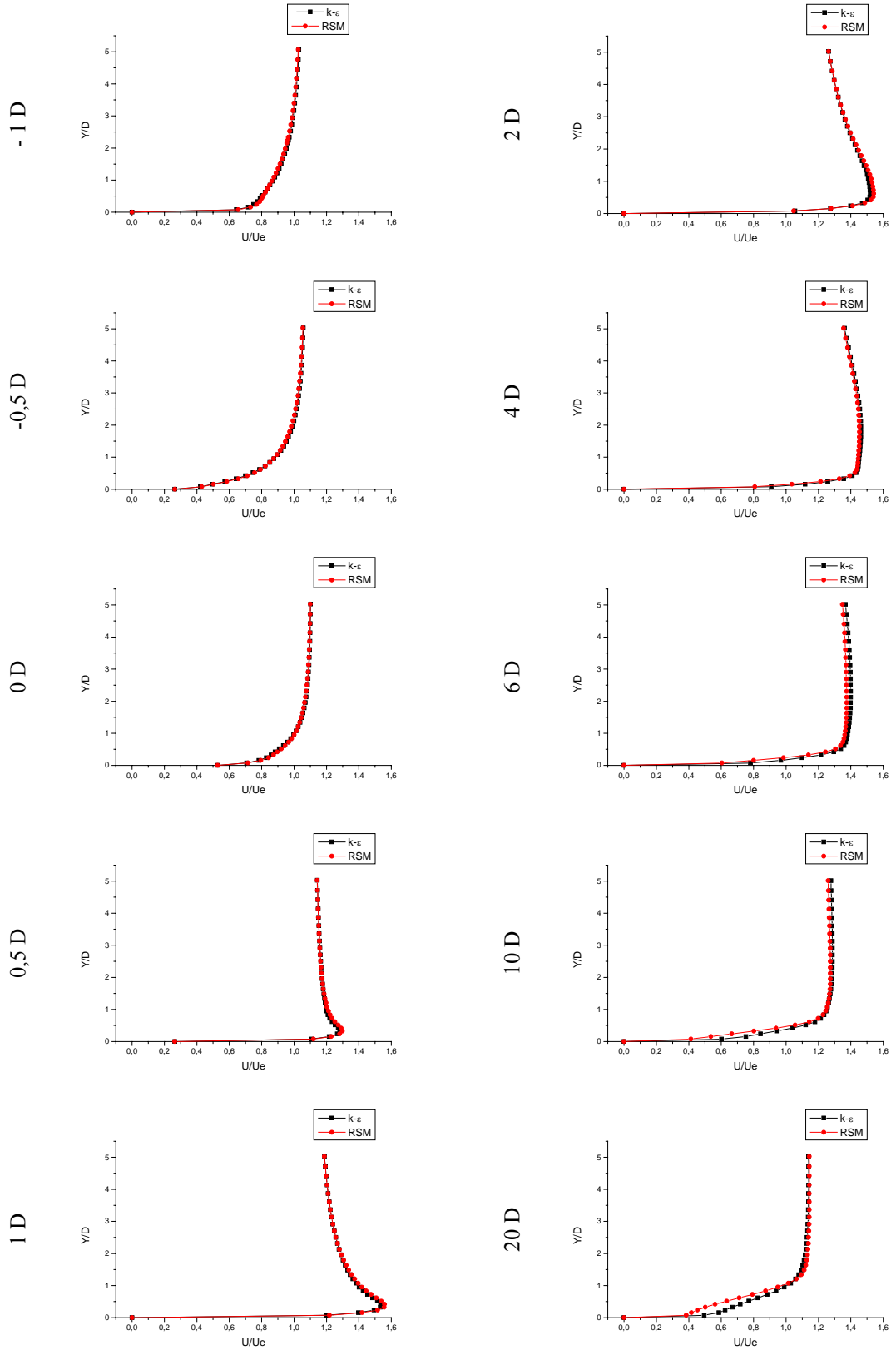


Figure 4.13 : Comparaison des fermetures k-ε et RSM sur NACA0012

a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne

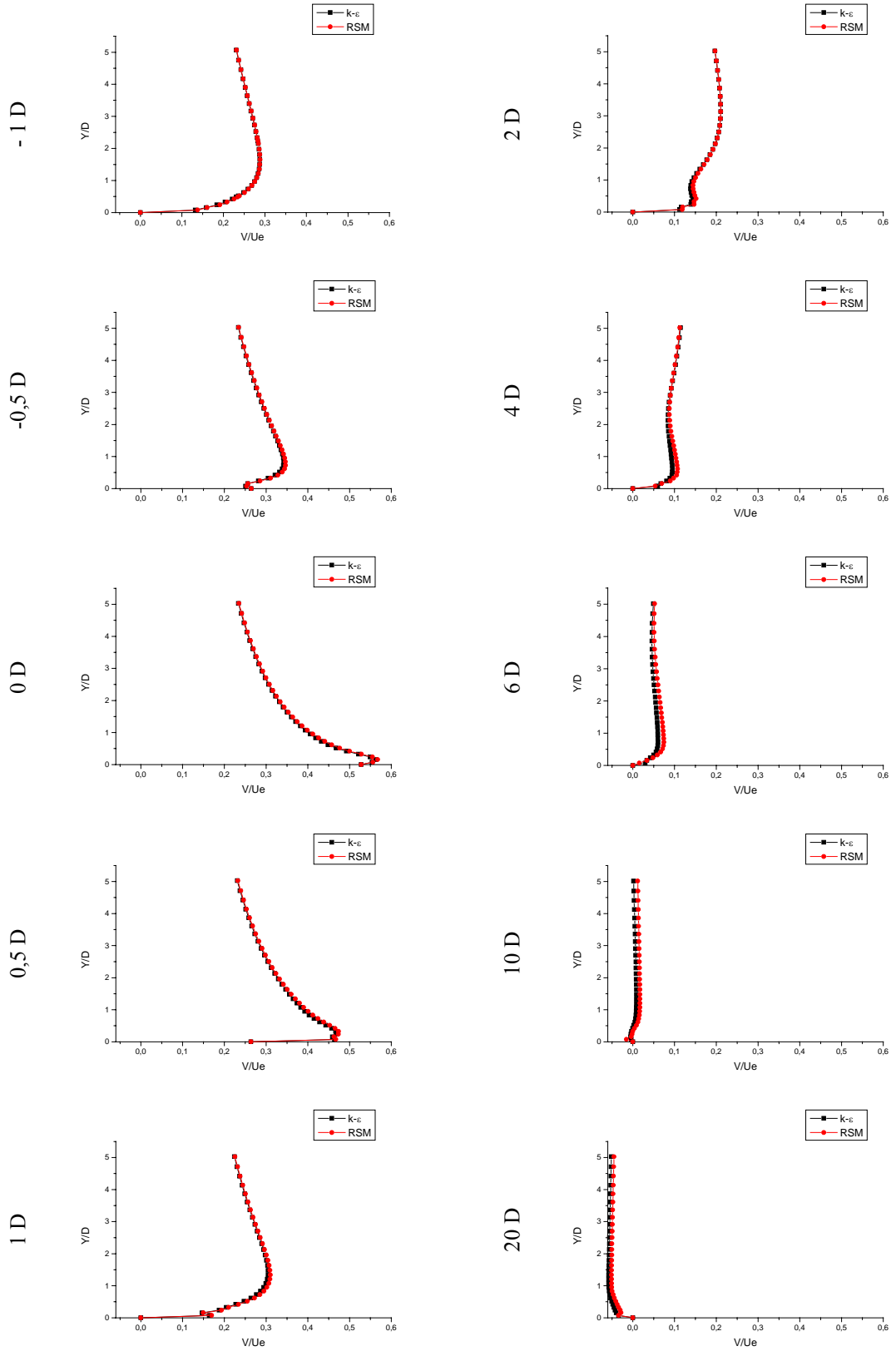


Figure 4.13 : Suite

b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne

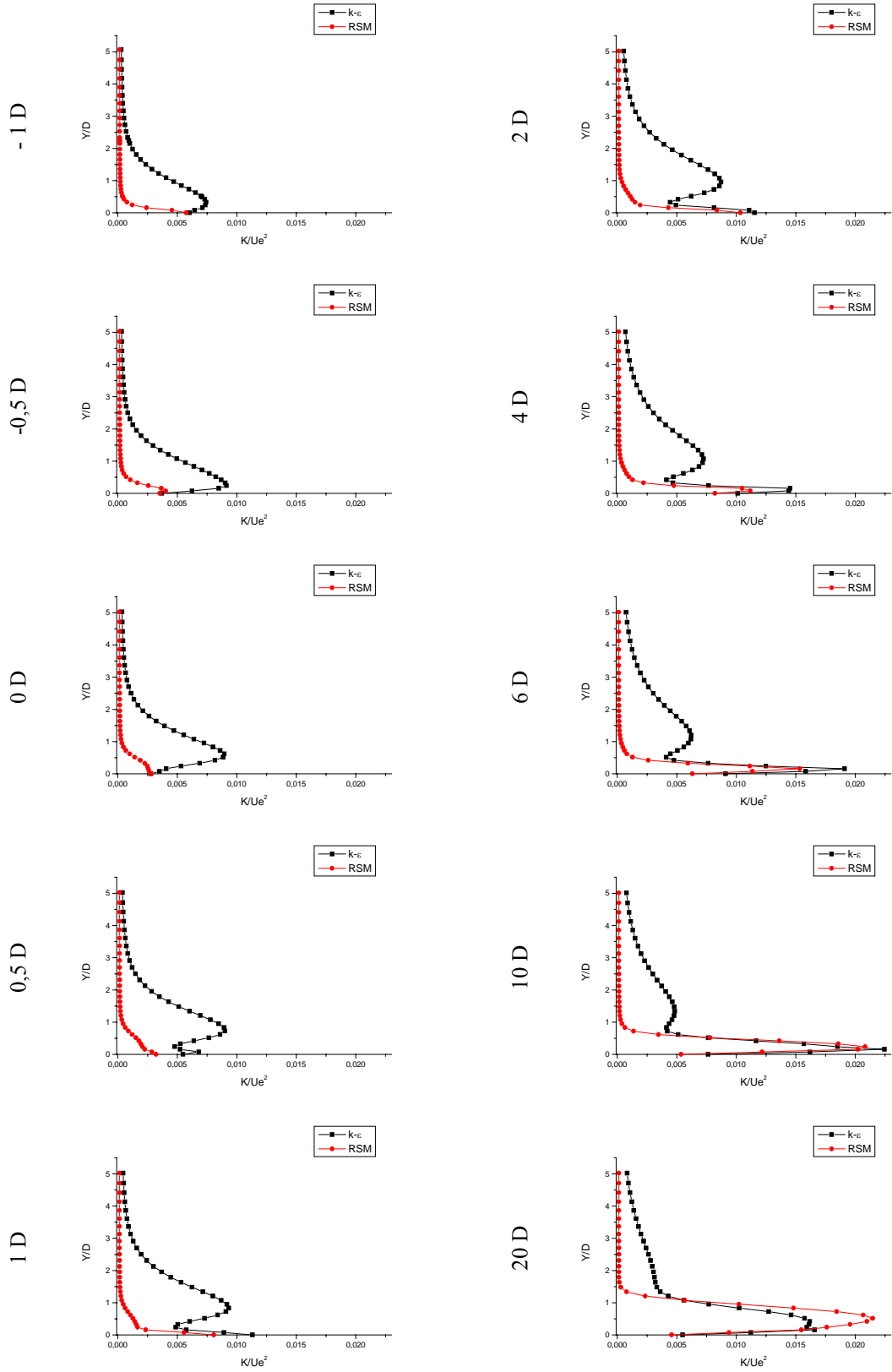


Figure 4.13 : Suite

c. Profils de l'énergie cinétique de turbulence

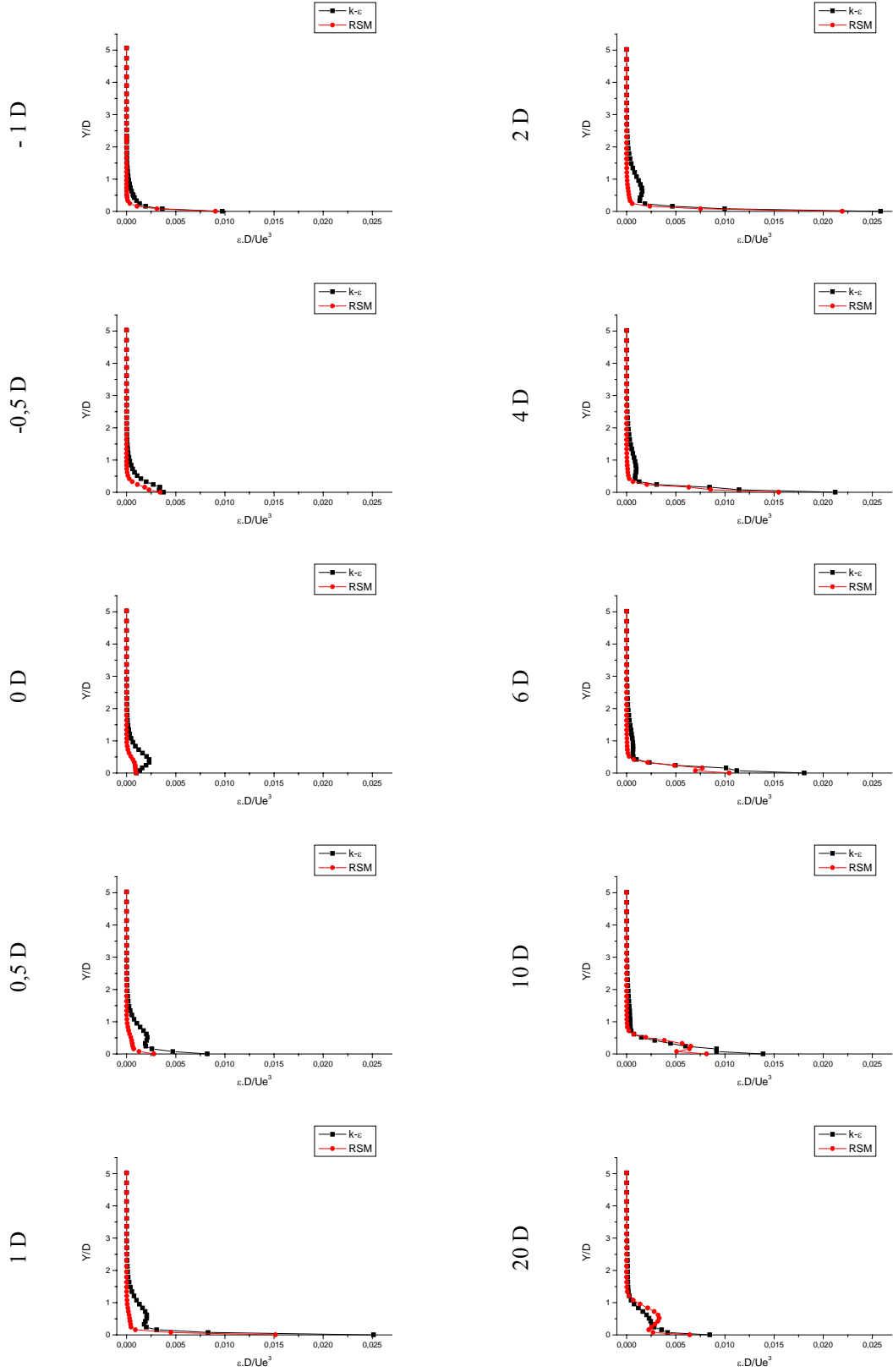


Figure 4.13 : Suite

d. Profils de la dissipation turbulente

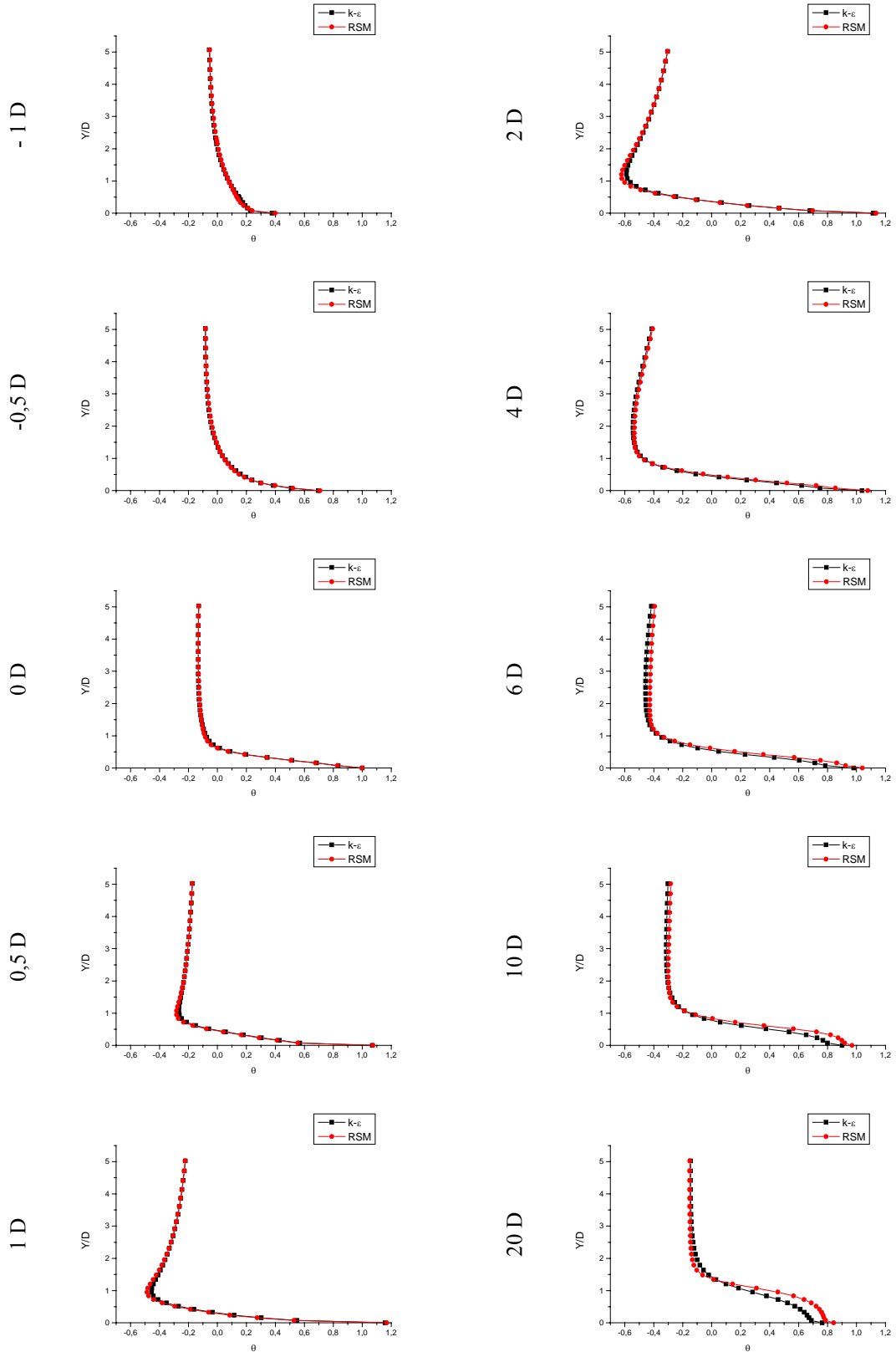


Figure 4.13 : Suite et fin

e. Profils de la température moyenne adimensionnelle

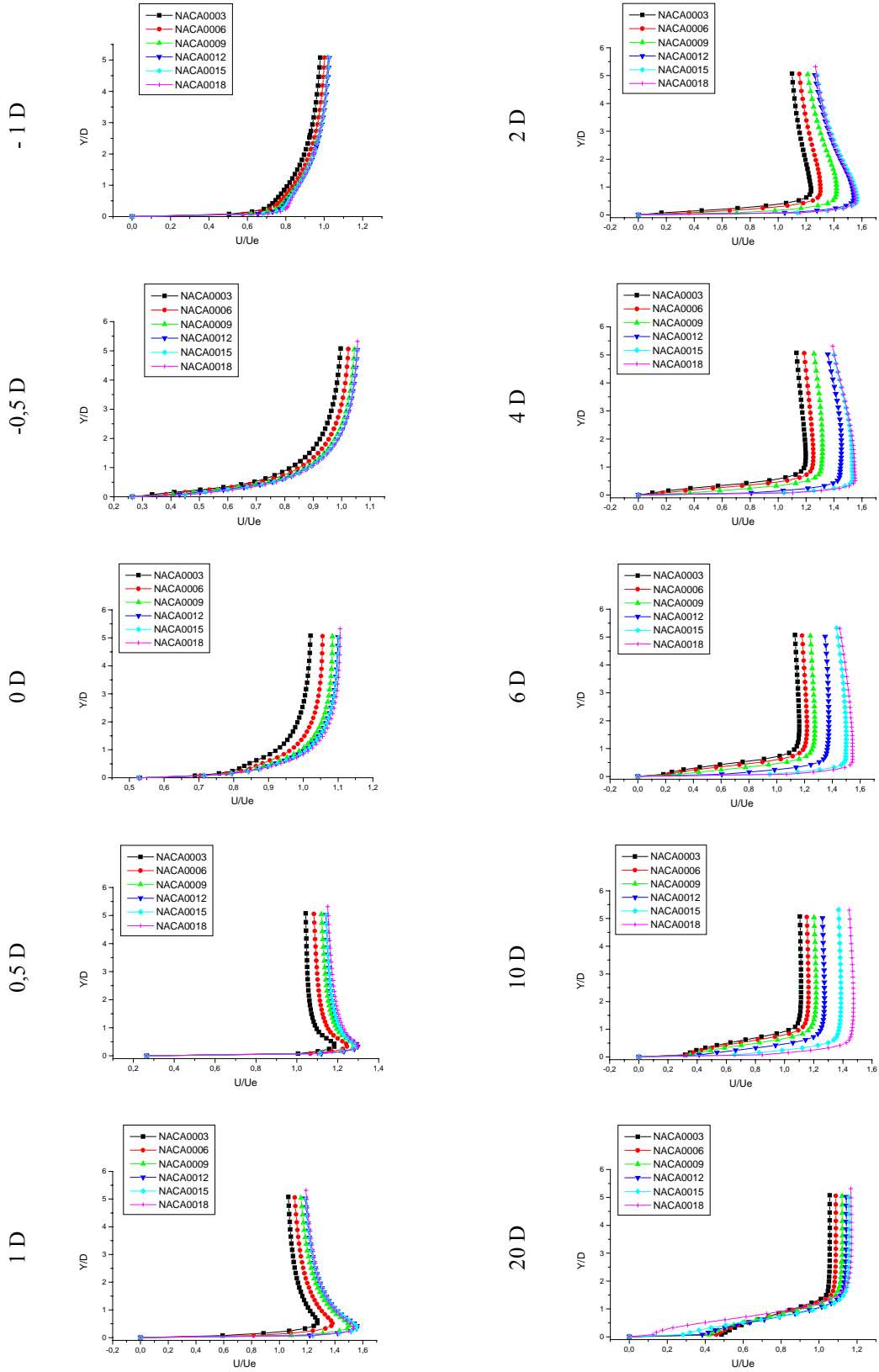


Figure 4.14 : Effet de courbure par le modèle RSM sur les résultats  
 a. Profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne

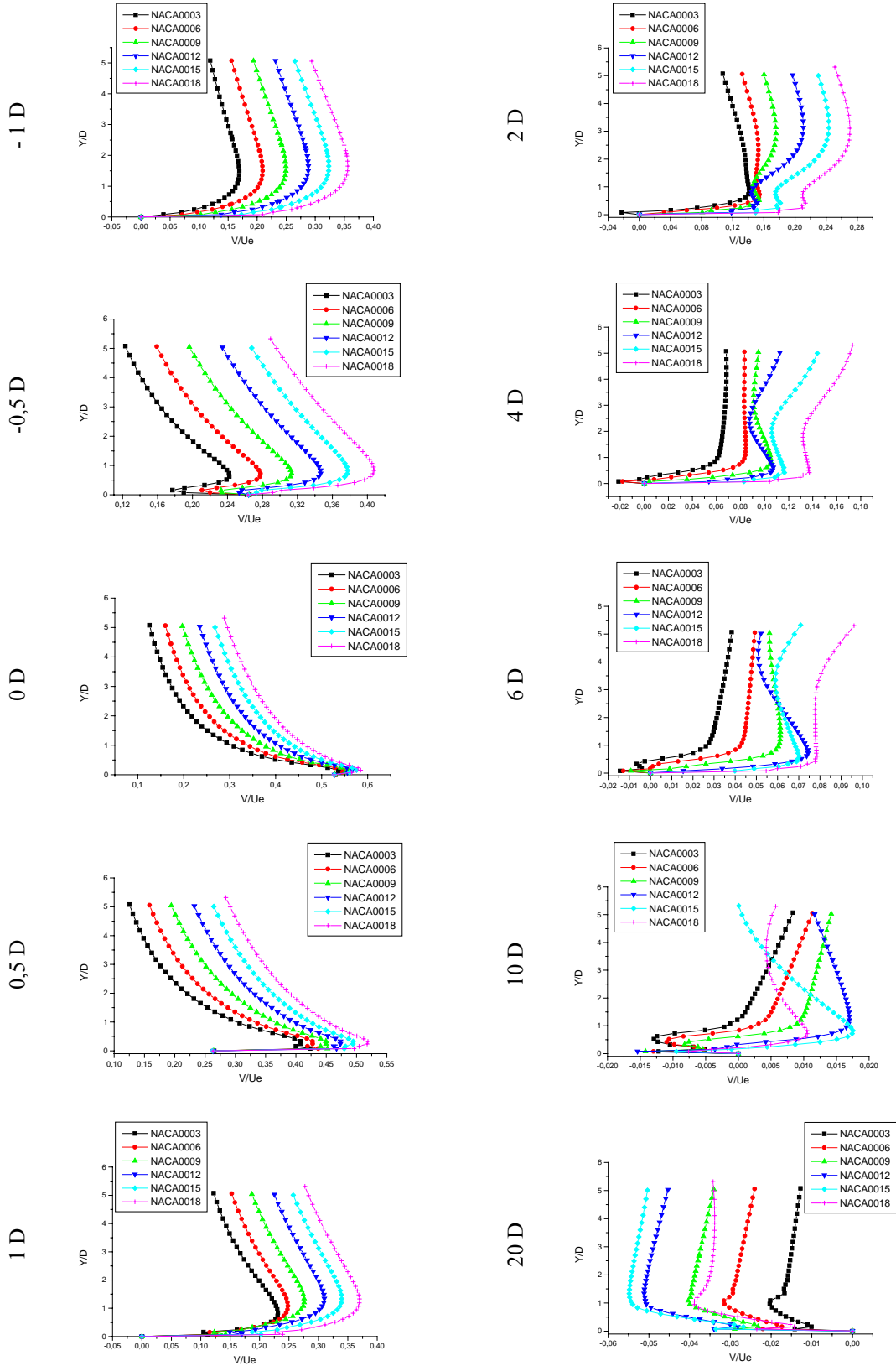


Figure 4.14 : Suite

b. Profils de la composante verticale de la vitesse moyenne

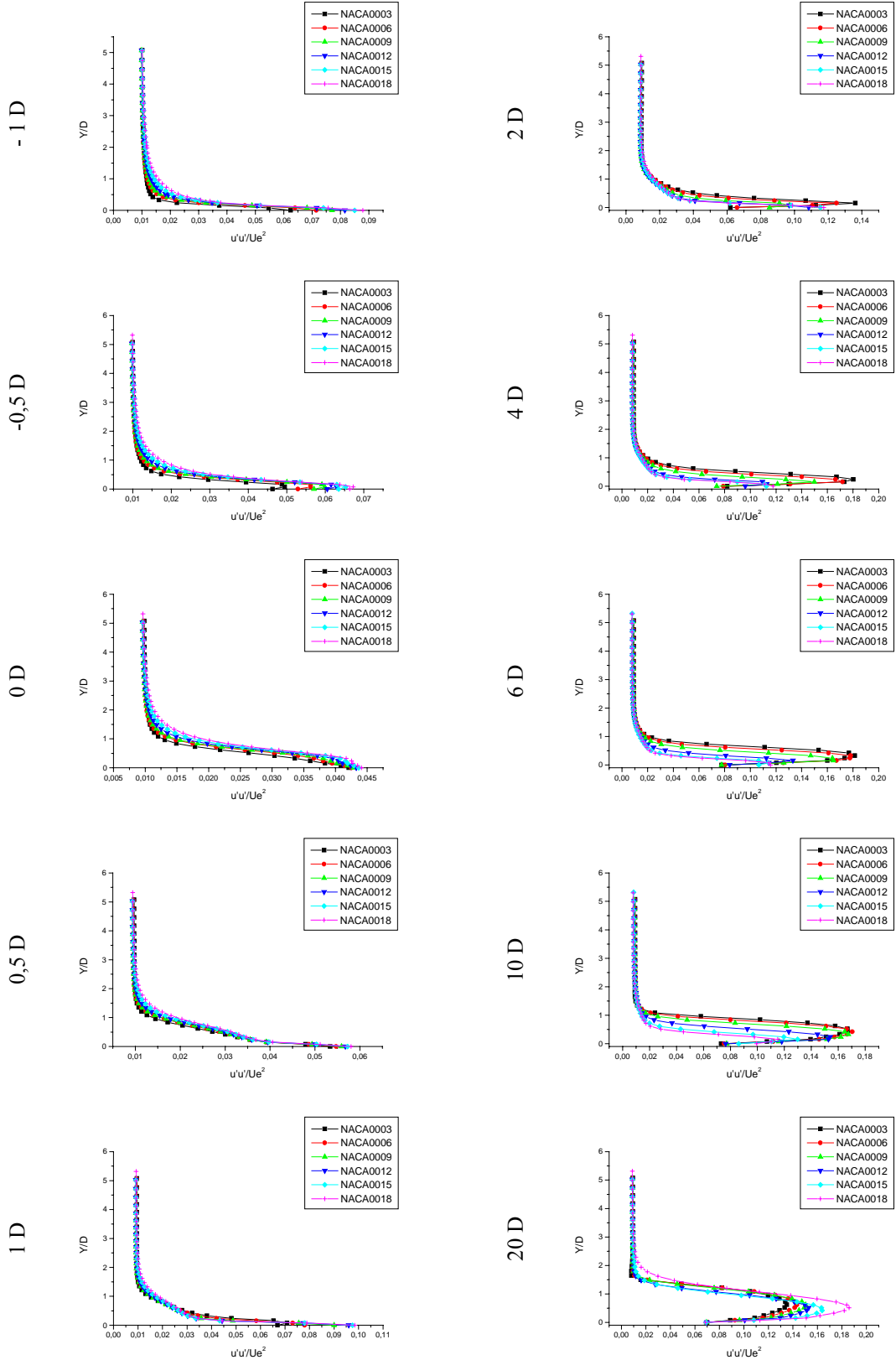


Figure 4.14 : Suite

c. Profils des tensions turbulentes normales longitudinales



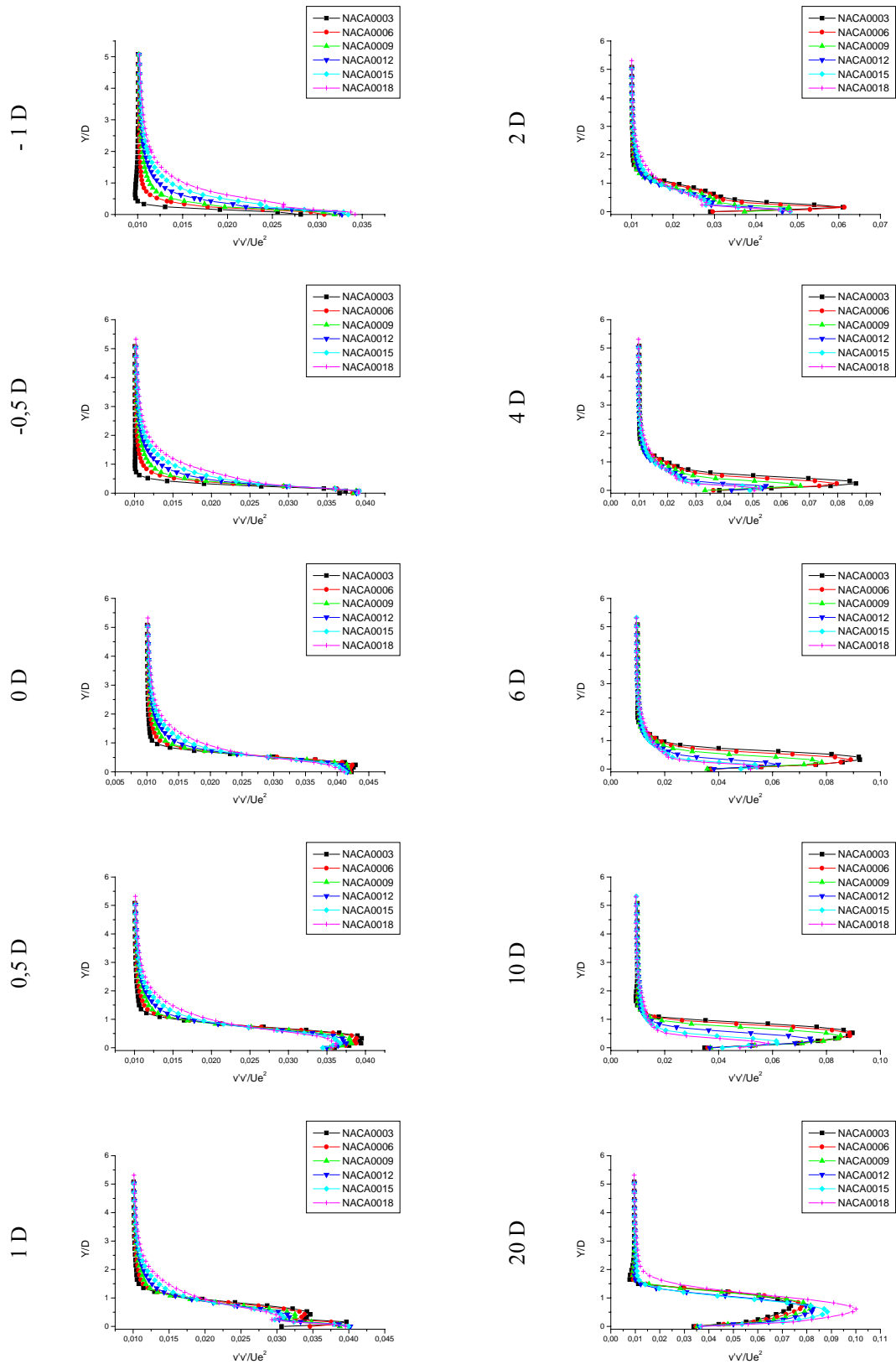


Figure 4.14 : Suite

d. Profils des tensions turbulentes normales verticales

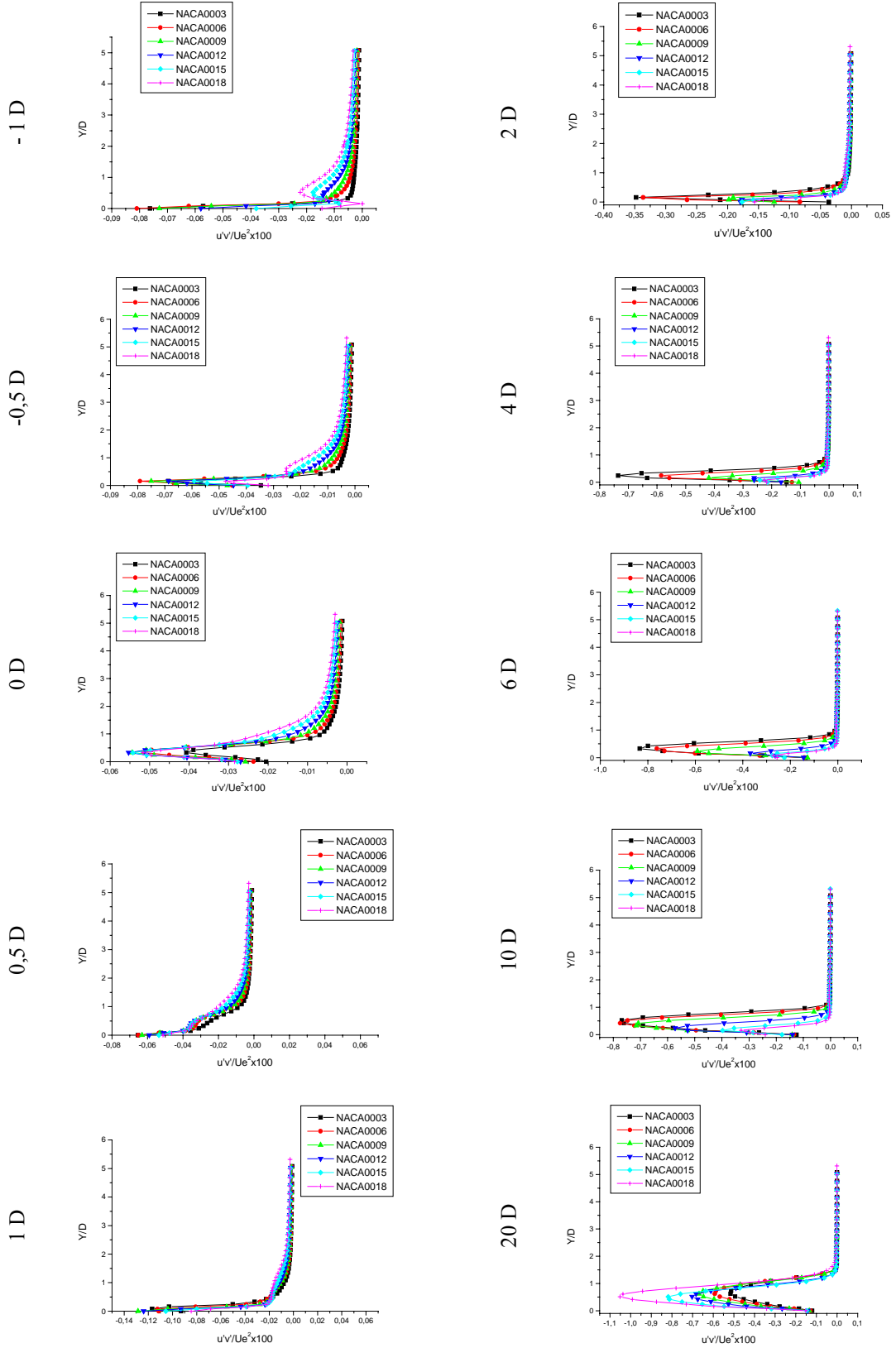


Figure 4.14 : Suite  
e. Profils des tensions visqueuses.

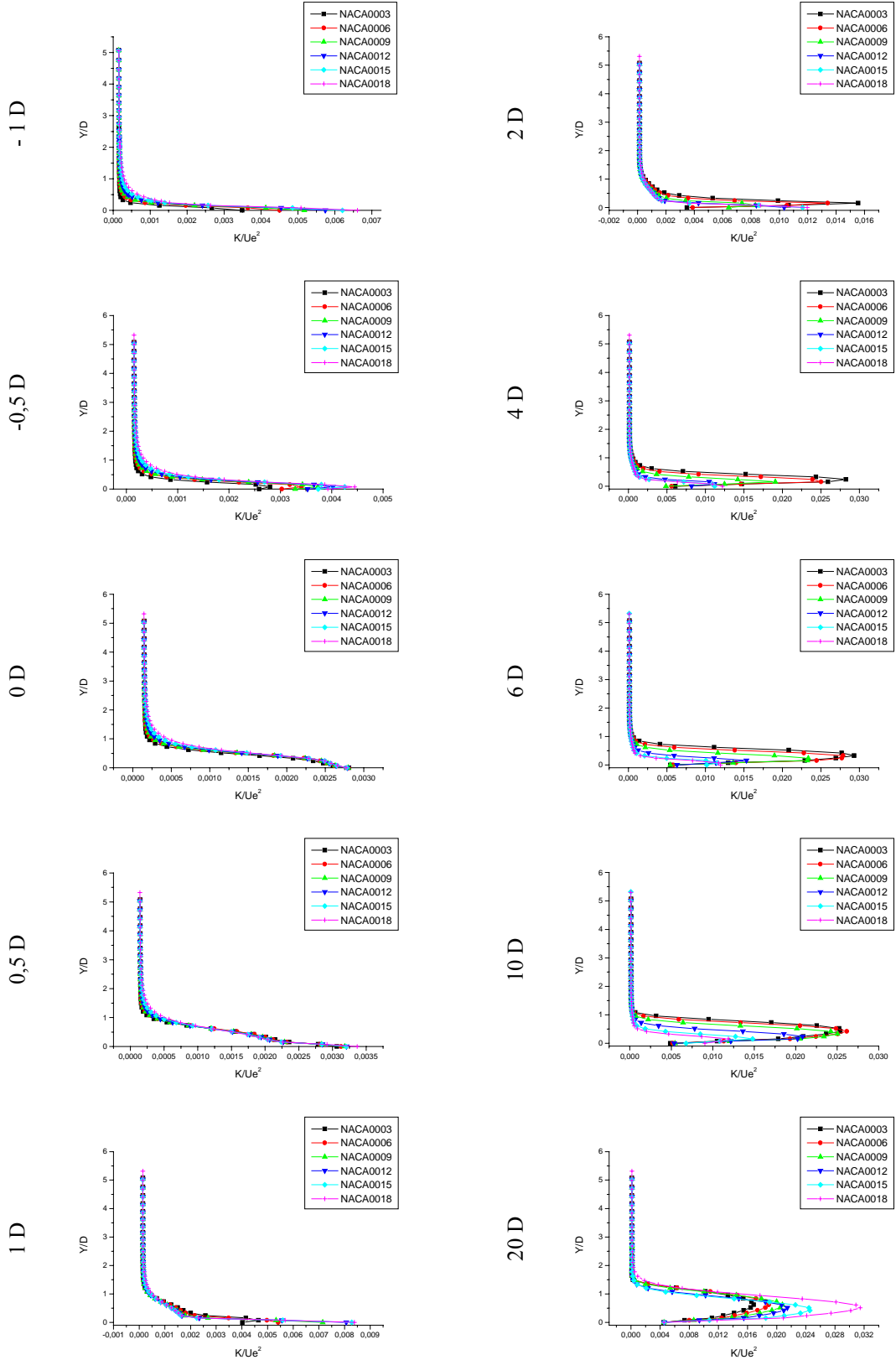


Figure 4.14 : Suite

f. Profils de l'énergie cinétique turbulente

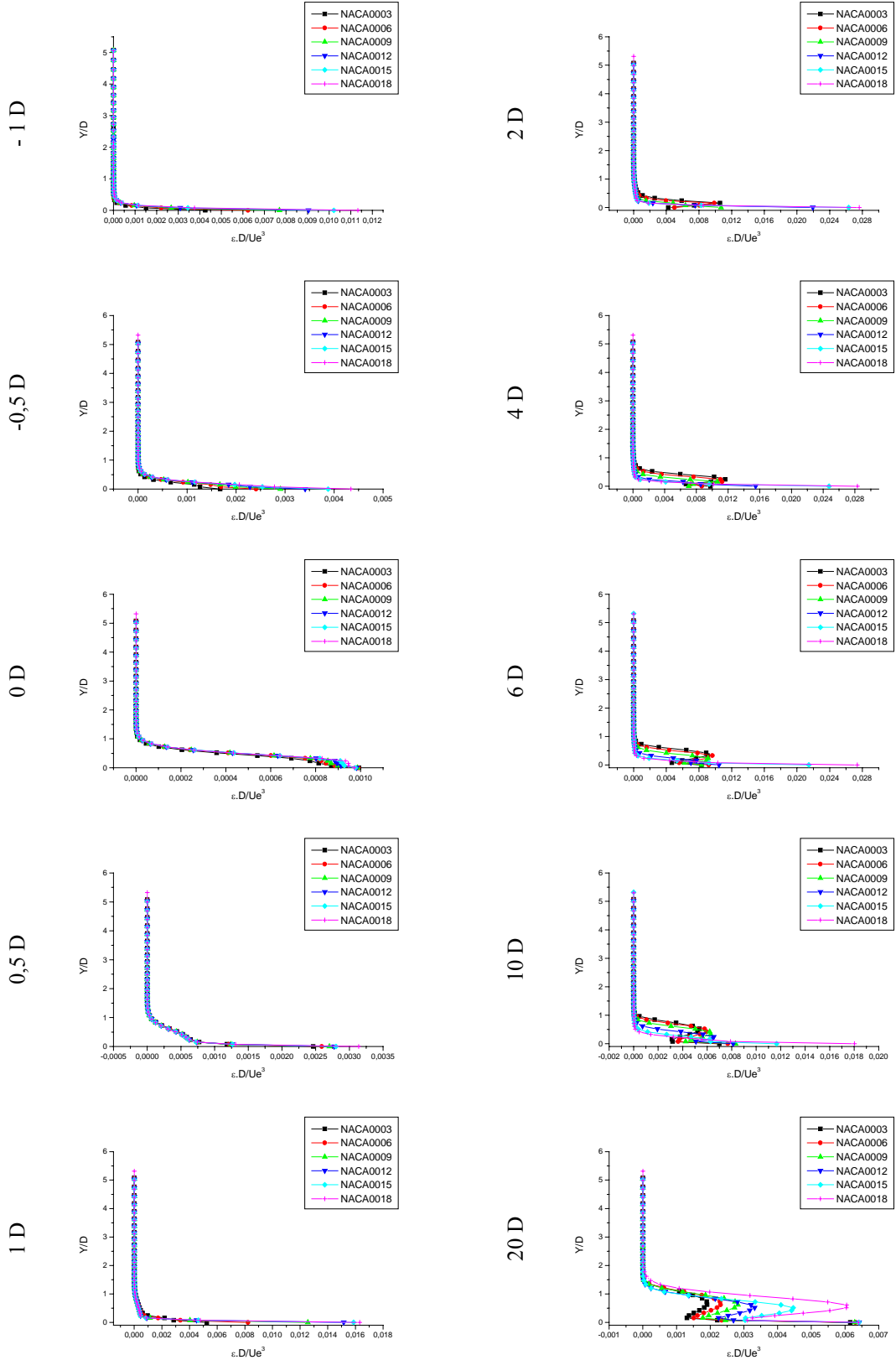


Figure 4.14 : Suite

g. Profils de la dissipation turbulente

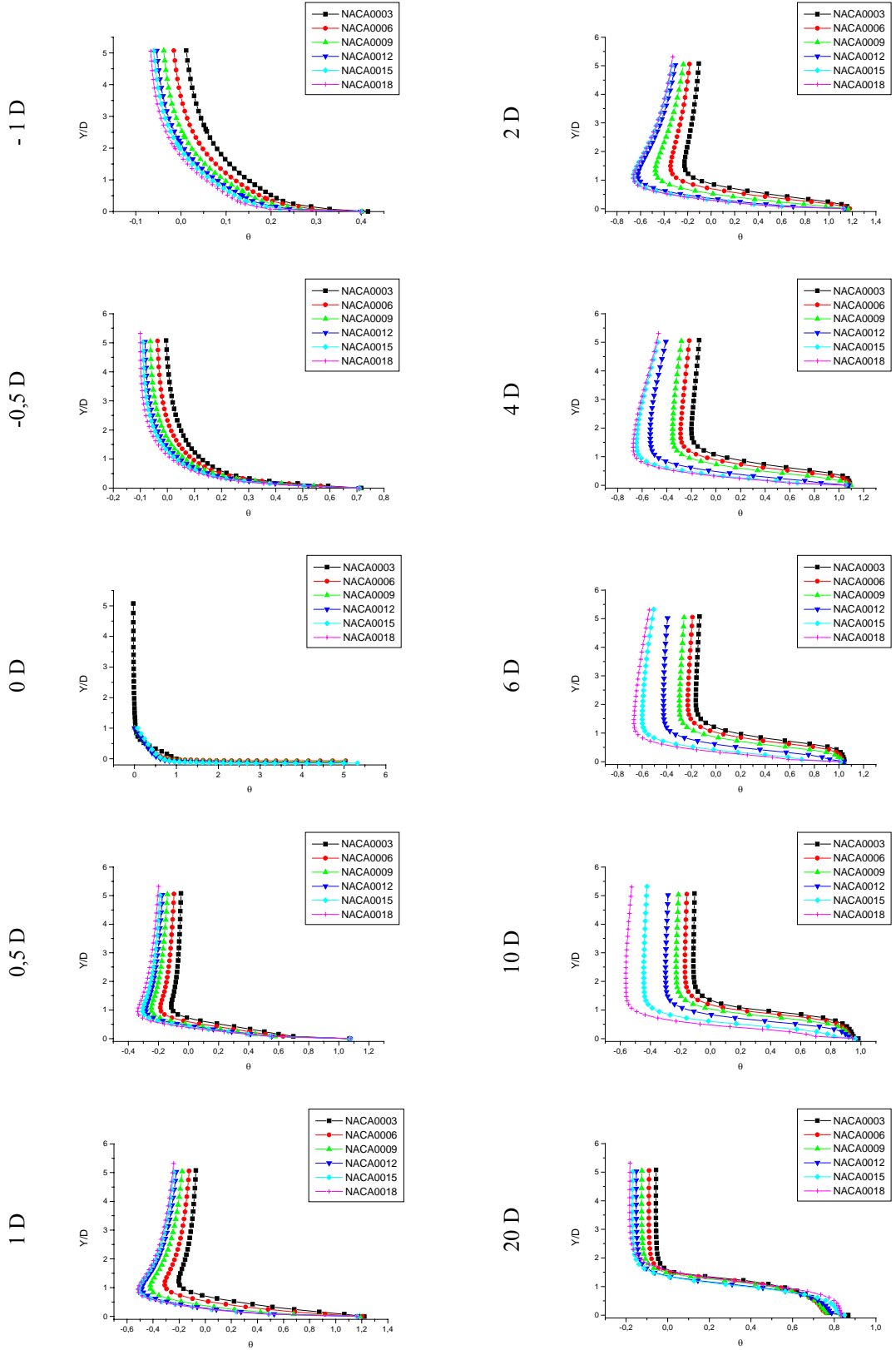


Figure 4.14 : Suite et fin

h. Profils de la température moyenne adimensionnelle

## CONCLUSION

Une étude de l'effet de courbure sur l'interaction jet-écoulement principal, a été effectuée sur un profil d'aile de type NACA0012 avec le modèle RSM, et comparée avec le k- $\epsilon$ . Une comparaison entre le modèle RSM pour le profil d'aile et pour une plaque plane en k- $\epsilon$  d'un côté et l'expérience de l'autre, ont été faites. D'autre part, différents profils d'aubes symétriques types NACA ont été testés avec le modèle RSM pour compléter notre étude.

Dans le but de bien cerner les effets de courbure sur le comportement des mécanismes observés sur plaque plane, on a effectué de nombreux tests numériques de comparaison entre les modèles k- $\epsilon$  et RSM d'une part et entre profil NACA et plaque plane d'autre part.

Les résultats essentiels à mettre en évidence par cette prédiction, déduisent des comparaisons citées et des différents résultats obtenus. Leurs analyse nous permet de faire les conclusions suivantes :

► La formation d'un film due à la déviation du jet par la force de l'écoulement principal et à la courbure de la paroi, malgré la courte distance du mélange entre le jet et l'écoulement principal

► Un décollement est observé loin de l'orifice du jet ( $X/D \sim 20$ ) dû à la dépression provoquée par la partie de pente négative de la paroi convexe du profil de l'aube, ce qui provoque la formation d'un sillage jusqu'à derrière l'aube et de tourbillons.

► Une surpression due à l'effet du bord d'attaque de l'aube à l'amont de l'orifice du jet, puis une décélération juste à l'amont du jet puis une accélération plus importante à l'aval de l'orifice.

► Au niveau de la paroi, le modèle k- $\epsilon$  donne des valeurs de la production de la turbulence plus grande que pour le RSM, cela est dû soit à la surestimation du k- $\epsilon$ , soit à la sous-estimation du RSM en cette zone, que seules des données expérimentales pour un profil NACA0012 peuvent prouver.

► Les champs des vitesses et des températures sont presque identiques pour les modèles RSM et  $k-\varepsilon$  sur une aube.

► Le profil des vitesses et températures sont proportionnels aux degrés de courbure en passant d'un profil NACA axisymétrique à un autre. Il est remarqué néanmoins, que pour la composante verticale, de la vitesse, après qu'elle soit proportionnelle aux degré de courbure à l'amont du décollement, puis devient inversement proportionnelle au degré de courbure dans la zone de décollement et du sillage produit.

► La zone où un décollement est observé, est différente d'un profil à un autre et dépend de la position de l'orifice d'injection et à la dépression créée par la pente négative à l'arrière de l'aube.

On en déduit, l'importance de l'effet de la courbure sur l'interaction jet-écoulement transversal et sur la formation du film protecteur autour de l'aube, ce qui confirme ce qui a été trouvé dans la littérature et présenté dans le chapitre 1.

Des recommandations et perspectives pour poursuivre ce travail, peuvent être présentées comme suit :

► Effectuer des études avec d'autres modèles (le SST par exemple) et comparer avec l'expérience et les modèles présentés.

► Etudier l'effet de la position de l'orifice d'injection dans différentes positions entre le bord d'attaque et le pic de la paroi convexe.

► Tenir compte de l'effet de dominance de l'effet de courbure quand on l'associe à d'autres paramètres géométriques comme l'inclinaison du jet et voir si la différence entre la pente de la paroi à l'orifice et l'angle d'injection peuvent être considérés comme paramètre combiné influent ou non (étude de la dépendance ou de l'indépendance de l'angle oblique et de la courbure)

► Etudier l'effet de la courbure sur plusieurs rangées de jets en 2-D et en 3-D.

## APPENDICE A

### NOMENCLATURE

#### NOTATIONS

D	Largeur de la fente
G	Terme de production
$\lambda$	Conductivité thermique
K	Energie cinétique turbulente
M	Nombre de Mach
P	Pression
q	Flux de chaleur
Ra	Rapport d'injection
T	Température
U	Composante longitudinale de la vitesse
V	Composante verticale de la vitesse
$u'$	Fluctuation de U
$v'$	Fluctuation de V
$C_1, C_2, C_\mu$	Constantes dans le modèle k- $\epsilon$
Lm	Longueur de mélange
Pr	Nombre de PRANDTL
Pr <sub>t</sub>	Nombre de PRANDTL turbulent

#### LETTRES GREQUES

$\alpha$	Angle d'inclinaison du jet
$\delta$	Epaisseur de la couche limite dynamique
$\delta_t$	Epaisseur de la couche limite turbulente
$\epsilon$	Dissipation turbulente
$\chi$	Constante de VON KARMAN
$\theta$	Température statique réduite
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	Nombres de SCHMIDT
$\phi$	Propriété transportée
$\Gamma\phi$	Coefficient de diffusion
$\rho$	Masse volumique
$\mu$	Viscosité dynamique
$\tau$	Tenseur des contraintes

#### INDICES

e	Relatif à l'écoulement extérieur
p	Relatif à la zone très près de la paroi
w	Relatif à la paroi
i	Référé à l'axe x
j	Référé à l'axe y
t	Relative aux propriétés turbulentes
-	Moyenne statistique
~	Moyenne de FAVRE



## APPENDICE B

### B.1-Les équations du champs turbulent :

Les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement, d'énergie de l'énergie turbulente K et du taux de dissipation  $\varepsilon$  exprimées en coordonnées cartésiennes pour un écoulement bidimensionnel, stationnaire et compressibles s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \tilde{V}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho \tilde{U} \tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \tilde{U} \tilde{V}) = & \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right) \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{eff}} \left( \nabla \tilde{U} \right) + \rho K \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \tilde{U} \tilde{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \tilde{V} \tilde{V}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \left( \nabla \tilde{U} \right) + \rho K \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \tilde{U} \tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \tilde{V} \tilde{T}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right) + \frac{\tilde{U}}{\text{Cp}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\tilde{V}}{\text{Cp}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} + \frac{G}{\text{Cp}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \tilde{U} K) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \tilde{V} K) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right) + G - \frac{C_{\mu} \rho^2 K^2}{\mu_{\text{eff}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \tilde{U} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \tilde{V} \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{C_1 C_{\mu} G \rho K}{\mu_{\text{eff}}} - \frac{C_2 \rho \varepsilon^2}{K}$$

avec :

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t$$

$$\mu_t = \frac{C_{\mu} \rho K^2}{\varepsilon}$$

$$G = \mu_{\text{eff}} \left( 2 \left[ \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{2}{3} \left( \mu_{\text{eff}} \left( \nabla \tilde{U} \right) + \rho K \right)$$

$$\nabla \tilde{U} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}$$

## B.2- Les différentes équations des modèles de turbulence :

### B.2.1- Écoulement incompressible :

Les équations de NAVIER-STOKES (écoulement laminaire)

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{P}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.1})$$

sont la conséquence directe du théorème de quantité de mouvement.

Les équations de REYNOLDS (obtenues par moyenne de (B.1) après avoir introduit la décomposition de REYNOLDS) :

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{P}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (\text{B.2})$$

En introduisant les corrélations doubles  $\overline{u'_i u'_j}$  qui traduisent l'influence du champ turbulent sur le champ moyen. Elles sont interprétées comme des tensions apparentes qui forment le tenseur de REYNOLDS. Ce tenseur est symétrique et sa trace est égale au double de l'énergie cinétique de la turbulence.

L'équation de la vitesse fluctuante est obtenue par différence de ((B.1)-(B.2)) :

$$\bar{U}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -u'_j \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{P}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (\text{B.3})$$

Le traitement statistique permet d'obtenir les équations d'évolution des divers moments :

- Equation de corrélations doubles :  $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$  (ou tensions de REYNOLDS)

obtenues par  $\overline{u'_i \times \text{Eq de } u'_j} + \overline{u'_j \times \text{Eq de } u'_i}$  :

$$\underbrace{\bar{U}_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m}}_{\text{convection}} = \underbrace{-R_{im} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_m} - R_{jm} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_m}}_{\text{production}} - \underbrace{\frac{P}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{redistribution}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_m} \left( \overline{u'_i u'_j u'_m} - (u'_i \delta_{jm} + u'_j \delta_{im}) \frac{P'}{\rho} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right)}_{\text{diffusion}} - \underbrace{-2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m}}_{\text{dissipation}} \quad (\text{B.4})$$

Le terme de corrélation pression – déformation s’annule par contraction et réalise donc une redistribution d’énergie sur les composantes du tenseur de REYNOLDS.

- Equation de l’énergie cinétique de la turbulence :  $K = \frac{1}{2} R_{ii}$

$$\bar{U}_m \frac{\partial K}{\partial X_m} = -R_{jm} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_m} - \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \overline{u'_m u'_j u'_j} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \overline{u'_m p'} \right) - \nu \frac{\partial u'_j}{\partial X_m} \frac{\partial u'_j}{\partial X_m} + \nu \frac{\partial^2 K}{\partial X_m \partial X_m} \quad (\text{B.5})$$

Cette équation exprime que la variation de l’énergie cinétique de la turbulence est due aux effets des termes du second membre : production d’énergie par action des vitesses moyennes sur la turbulence sous l’action des fluctuations de vitesse et de pression ; dissipation visqueuse et enfin diffusion visqueuse.

- Equation du taux de dissipation de l’énergie cinétique turbulente :  $\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial X_j} \frac{\partial u'_i}{\partial X_j}$

(obtenue par  $2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial X_j}$  (Eq de  $u'_i$ ))

$$\begin{aligned} \bar{U}_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_m} = & \left[ -2\nu \frac{\partial u'_j}{\partial X_m} \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial X_k} \right] + \left[ -2\nu \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \frac{\partial u'_j}{\partial X_m} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_m} \right] - 2\nu \left( \overline{u'_m \frac{\partial u'_j}{\partial X_k}} \right) \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial X_m \partial X_k} - 2\nu \frac{\partial u'_j}{\partial X_m} \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \frac{\partial u'_m}{\partial X_k} \\ & - \nu \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \overline{u'_m \left( \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \right)^2} \right) - 2\nu \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \frac{\partial^2 p'}{\partial X_k \partial X_j} + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_m \partial X_m} - 2\nu \left( \frac{\partial}{\partial X_m} \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

L’équation du taux de dissipation de l’énergie turbulente est plus délicate à interpréter et à modéliser. Elle est utilisée pour calculer l’échelle de longueur caractéristique de la turbulence.

- Modèle K- $\varepsilon$  standard

La seule simplification introduite par l’hypothèse des grands nombres de REYNOLDS dans (B.5) concerne le terme de diffusion moléculaire qui peut être négligé. Les deux derniers de diffusion restants sont modélisés par une hypothèse de diffusion de gradient.

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \left( \overline{u'_m \frac{u'_j u'_j}{2}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_m} (u'_m p') = - \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial X_m} \right)$$

Un calcul d'ordre de grandeur des termes de (B.6) montre que l'hypothèse des grands nombres de REYNOLDS permet de négliger les premiers, second, troisième et sixième termes du membre de droite, ainsi que le terme de diffusion moléculaire (septième terme). Le terme de diffusion (cinquième terme) est modélisé comme pour l'équation sur K par l'hypothèse de diffusion en gradient

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \left( \overline{v u'_m \left( \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \right)^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_m} \right)$$

Les quatrième et dernier termes sont les termes de production – destruction. Ces deux termes sont modélisés ensemble et la modélisation utilisée dans le modèle K-ε dans le cadre de leur modèles aux tensions de REYNOLDS :

$$-2v \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial X_m} \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \frac{\partial u'_m}{\partial X_k}} - 2v^2 \overline{\left( \frac{\partial}{\partial X_m} \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} \right)^2} = -C_1 \frac{\varepsilon}{K} G - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K}$$

En remplaçant les tensions de REYNOLDS par leur expression du taux de déformation moyen dans le terme de production G, les équations de transport sur K et ε s'écrivent finalement :

$$\begin{aligned} \overline{U}_m \frac{\partial K}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial X_m} \right) + \frac{C_\mu}{2} \frac{K^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_m} + \frac{\partial \overline{U}_m}{\partial X_j} \right) - \varepsilon \\ \overline{U}_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_m} \right) + C_1 \frac{C_\mu}{2} K \left( \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_m} + \frac{\partial \overline{U}_m}{\partial X_j} \right) - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \end{aligned} \quad (B.7)$$

- Modèle K-ε à faible nombre de REYNOLDS

Le modèle K-ε à grand nombre de REYNOLDS utilisant l'approche standard (K-ε - fonction de paroi) n'est en principe plus correcte pour les écoulements à géométrie complexe. En effet, pour de tels écoulements, il est généralement impossible que tous les points de la frontière du maillage se situent en zone turbulente (l'épaisseur de la région de paroi est fonction de la vitesse et peut donc varier le long de la même paroi), le modèle K-ε standard étant alors utilisé dans les régions où il n'est plus valable.

La première modification à apporter au modèle K-ε standard, peut étendre sa plage de validité aux nombres de REYNOLDS faibles est de réintégrer les termes de diffusion

moléculaire (qui ne demandent aucune modélisation) dans les équations. L'équation sur  $K$  ne nécessite pas d'autres réajustements, l'élimination du terme de diffusion moléculaire étant la seule simplification introduite par hypothèse des grands de REYNOLDS.

Le principe de base de l'extension de la validité de l'équation sur  $\varepsilon$  aux nombres de REYNOLDS faibles est le même. Une dépendance des constantes de cette équation ( $C_1$  et  $C_2$ ), par rapport au nombre de REYNOLDS local est introduite au moyen de deux fonctions de pondération  $f_1$  et  $f_2$ . Le nombre de REYNOLDS local peut être introduit par le nombre de REYNOLDS de la turbulence.

$$R_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \quad (\text{B.8})$$

ou par un nombre de REYNOLDS dans lequel l'influence de la paroi est plus explicite ( $y$  distance désignant la distance à la paroi)

$$R_y = \frac{\sqrt{K} y}{\nu} \quad (\text{B.9})$$

Dans tout les modèles, un traitement similaire à la constante  $C_\mu$  intervenant dans l'expression  $\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$  de la viscosité turbulente qui devient :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (\text{B.10})$$

avec cette expression de la viscosité turbulente, la forme généralisée (aux nombres de REYNOLDS faibles) des équations sur  $K$  et  $\varepsilon$  que nous retiendrons est donc :

$$\begin{aligned} \bar{U}_m \frac{\partial K}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial X_m} \right) + \frac{C_\mu f_\mu}{2} \frac{K^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_m} + \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial X_j} \right) - \varepsilon \\ \bar{U}_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_m} \right) + C_{1f} f_\mu \frac{C_\mu}{2} K \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_m} + \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial X_j} \right) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Les différentes expressions des fonctions de pondération proposées pour  $f_1$  et  $f_2$  conduisent aux formes générales suivantes ( $A_{\varepsilon 1}$ ,  $A_{\varepsilon 2}$ ,  $B_{\varepsilon 2}$ , étant des constantes numériques) :

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + \left( \frac{A_{\varepsilon 1}}{f_\mu} \right)^3 \\ f_2 &= 1 - A_{\varepsilon 2} \exp \left[ - (B_{\varepsilon 2} R_t)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Pour la fonction  $f_\mu$ , les expressions sont beaucoup plus variées, pour cela aucune forme générale n'est proposée.

- Modèle K-ε multi-échelles

Les modélisations du type énergie-flux multi-échelles pratiques à mettre en évidence ont été introduites à fin de présenter de façon simplifiée l'aspect spectral de la turbulence. Il s'agit d'un découpage du spectre moyen en 3 zones (voir figure 2.2 chapitre 2).

Les énergies cinétiques partielles et les flux spectraux sont déterminés à partir des équations de transport suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{U}_m \frac{\partial K_p}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K_p}{\partial X_m} \right) + \frac{G}{\rho} - \varepsilon_p \\ \bar{U}_m \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial X_m} \right) + \frac{1}{K_p \rho} (C_{p1} G^2 + C_{p2} G \varepsilon_p - C_{p3} \varepsilon_p^2) \end{aligned} \quad (B.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_m \frac{\partial K_t}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K_t}{\partial X_m} \right) + \varepsilon_p - \varepsilon_t \\ \bar{U}_m \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial X_m} &= \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial X_m} \right) + \frac{1}{K_t} (C_{t1} \varepsilon_p^2 + C_{t2} \varepsilon_p \varepsilon_t - C_{t3} \varepsilon_t^2) \end{aligned} \quad (B.14)$$

où  $C_{p1}$ ,  $C_{p2}$ ,  $C_{t1}$ ,  $C_{t2}$  sont des fonctions du paramètre du spectre  $\xi$  définie par  $\xi = \frac{K_p}{K_t}$  en sachant que  $K = K_p + K_t$

$K_p$  : Energie cinétique partielle dans la zone de production

$K_t$  : Energie cinétique partielle dans la zone de dissipation

$\varepsilon_p$  : Flux dans la zone de production

$\varepsilon_t$  : Flux dans la zone de dissipation

### B.2.2- Ecoulement compressible :

- Equation aux tensions de REYNOLDS :  $R_{ij} = \rho \cdot \tau_{ij}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_m} (\rho \tilde{U}_m \tau_{ij}) &= \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{U}_m}{\partial X_m} - \overline{\rho u'_j u'_m} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial X_m} - \overline{\rho u'_i u'_m} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial X_m} - \frac{\partial}{\partial X_m} (\overline{\rho u'_i u'_j u'_m}) - \frac{\partial}{\partial X_j} (\overline{u'_i p'}) - \frac{\partial}{\partial X_i} (\overline{u'_j p'}) \\ &+ p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial X_i} \right) + \frac{\partial}{\partial X_m} (\overline{\mu S_{im} u'_j} + \overline{\mu S_{jm} u'_i}) - \left( \overline{\mu S_{i1}} \frac{\partial u'_j}{\partial X_m} \right) - \left( \overline{\mu S_{j1}} \frac{\partial u'_i}{\partial X_m} \right) - \overline{u'_i} \frac{\partial}{\partial X_j} (\overline{p}) - \overline{u'_j} \frac{\partial}{\partial X_i} (\overline{p}) \\ S_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial U_m}{\partial X_m} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Les termes soulignés sont nouveaux par rapport aux équations usuelles en situation incompressible.

- Modèle K-ε standard

- 1<sup>er</sup> modèle :

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(\rho \tilde{U}_m K) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_m} \right) + G - \frac{\rho^2 C_\mu K}{\mu_{\text{eff}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(\rho \tilde{U}_m \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \frac{C_1 C_\mu G \rho K}{\mu_{\text{eff}}} - \frac{C_2 \rho \varepsilon^2}{K} + C_3 \rho \varepsilon (\nabla \cdot \tilde{U})$$

avec  $C_3 = -0.333$

- 2<sup>ème</sup> modèle :

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(\rho \tilde{U}_m K) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_m} \right) + G - \frac{\rho^2 C_\mu K}{\mu_{\text{eff}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(\rho \tilde{U}_m \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \frac{C_1 C_\mu G \rho K}{\mu_{\text{eff}}} - \frac{C_2 \rho \varepsilon^2}{K} + \rho \varepsilon (\nabla \cdot \tilde{U})$$

Les termes soulignés sont des termes représentant la compressibilité.

Dans toutes les équations du champs turbulent  $\rho$  représente  $\bar{\rho}$ .

## APPENDICE C

Les formules en volumes finis développées dans le chapitre 3, sont applicables uniquement aux coordonnées cartésiennes orthogonales.

Si les mailles sont orientées de façon arbitraire en géométries 2-D et 3-D, alors il est nécessaire de transformer ce domaine physique arbitraire en un domaine numérique du système de coordonnées cartésiennes orthogonales pour que les équations en volumes finis peuvent être écrites dans les directions orthogonales. De telles transformations sont possibles tant que le maillage est structuré.

### C.1- Coordonnées généralisées :

Il est supposé que la relation entre les coordonnées généralisées et les coordonnées physiques soit unique et exprimée par :

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{et} \quad \eta = \eta(x, y) \quad (\text{C.1})$$

Par conséquent :  $x = x(\xi, \eta)$  et  $y = y(\xi, \eta)$

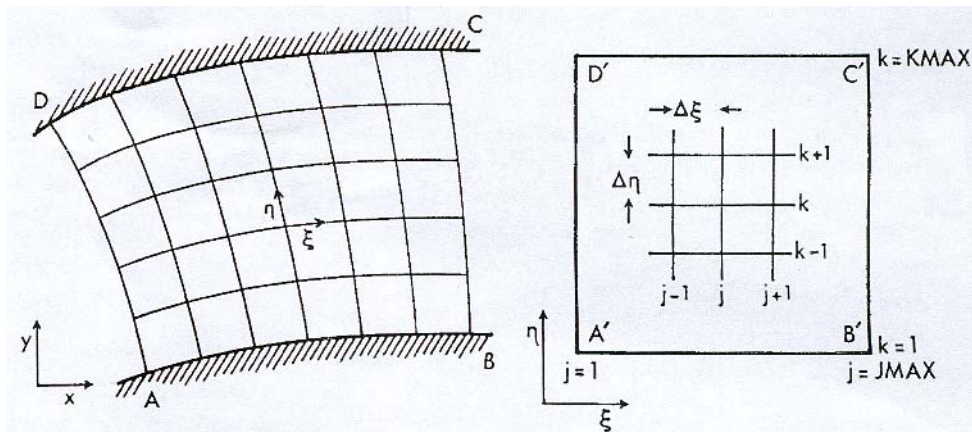


Figure C.1: Différentes Transformation à partir d'un système de coordonnées généralisé dans un système de maillage orthogonal [97]

La relation entre les deux types de coordonnées est établie, une fois le maillage pour le système physique est effectué.

La relation  $\xi = \xi(x, y)$  donnée, les équations régissant le mouvement peuvent être transformées en équations correspondantes contenant des dérivées partielles en respectant  $\xi$  et  $\eta$ .



La dérivée première des composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  en tenant compte des orientations  $x$  et  $y$ , devient [98]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

où la matrice de transformation, dite Jacobien  $\underline{J}$  est donnée par :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

En principe, si la relation  $\xi = \xi(x, y, z)$  est connue,  $\underline{J}$  peut être évalué directement. En pratique, cette relation n'est pas habituellement donnée de façon explicite, il est donc recommandé de travailler avec l'inverse du Jacobien  $\underline{J}^{-1}$  donné par :

$$\underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Les éléments de  $\underline{J}^{-1}$  peuvent être rapportés à ceux de  $\underline{J}$  par simplement :

$$\underline{J}^{-1} = \frac{\text{Transposé du cofacteur } (\underline{J}^{-1})}{|\underline{J}^{-1}|} \quad (\text{C.5})$$

Le déterminant de l'inverse du Jacobien  $|\underline{J}^{-1}|$  en notant que :

$$|\underline{J}^{-1}| = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \quad (\text{C.6})$$

avec :  $x_{\xi} \equiv \partial x / \partial \xi$ , etc.

En utilisant (C.5) et (C.6), les éléments de  $\underline{J}$  dans (C.3) peuvent être exprimés par :

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{y_{\eta}}{|\underline{J}^{-1}|} & \xi_y &= \frac{-x_{\eta}}{|\underline{J}^{-1}|} \\ \eta_x &= \frac{-y_{\xi}}{|\underline{J}^{-1}|} & \eta_y &= \frac{x_{\xi}}{|\underline{J}^{-1}|} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

où  $|\underline{J}^{-1}|$  est donné par (C.6).

Une fois le maillage, dans le domaine physique, est construit, la forme discrétisée des éléments (ex.  $x_{\xi}$ ), de l'inverse du Jacobien seront évalués. Les équations (C.7) sont alors utilisés pour l'évaluation des éléments (ex.  $\xi_x$ ) de la matrice du Jacobien (C.3). Cela facilite la discrétisation des équations générales du mouvement avec les coordonnées généralisées à partir d'une structure compacte, exprimée avec des termes en  $\xi_x$  plutôt qu'en  $x_{\xi}$ .

Nous commençons avec des dérivatives spatiales de toute variables relativement à  $\xi$  et  $\eta$  comme :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{C.8})$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Ainsi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Les secondes dérivées partielles de (C.10) sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \\ &+ \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \\ &- \frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{d|J|}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \\ &+ \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \\ &- \frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{d|J|}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{|J|^2} \left[ -\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \\ &+ \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \\ &- \frac{1}{|J|^3} \left[ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d|J|}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d|J|}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Où :

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \quad (C.14)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \quad (C.15)$$

## C.2- Transformations des équations gouvernant le mouvement :

### C.2.1- Equation de continuité :

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho u}) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho u}) - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho v}) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho v}) = 0 \quad (C.16)$$

### C.2.2- Equations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u v}) = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho u' v'}) \quad (C.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho v u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v v}) = \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho u' v'}) \quad (C.18)$$

- 1<sup>ère</sup> équation de Navier Stokes (C.17):

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u u}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho u u}) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho u u}) \right)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u v}) = \frac{1}{|J|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho u v}) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho u v}) \right)$$

$$\bullet -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -\frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} + \tau_{xy}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \mu \frac{\partial^2 \left( \frac{4}{3}u + v \right)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \left( u - \frac{2}{3}v \right)}{\partial x \partial y}$$

On pose :  $u^* = \frac{4}{3}u + v$  et  $u^{**} = u - \frac{2}{3}v$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} + \tau_{xy}) = \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{|J|^2} \left[ - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u^{**}}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 u^{**}}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u^{**}}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) \frac{\partial u^{**}}{\partial \eta} \right] \\
& + \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \right) \frac{\partial u^{**}}{\partial \xi} \right] \\
& - \frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right] \\
& - \frac{1}{|J|^3} \left[ - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial u^{**}}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial u^{**}}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial u^{**}}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial u^{**}}{\partial \eta} \right] \\
& \bullet \frac{\partial}{\partial x} \left( -\overline{\rho u \cdot v} \right) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\overline{\rho u \cdot v} \right) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\overline{\rho u \cdot v} \right) \right)
\end{aligned}$$

- 2<sup>ème</sup> équation de Navier Stokes (C.18):

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{\rho v u} \right) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \overline{\rho v u} \right) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \overline{\rho v u} \right) \right) \\
& \bullet \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{\rho v v} \right) = \frac{1}{|J|} \left( - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \overline{\rho v v} \right) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \overline{\rho v v} \right) \right) \\
& \bullet \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left( - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yy}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \mu \frac{\partial^2 \left( -\frac{2}{3}u + v \right)}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 \left( u + \frac{4}{3}v \right)}{\partial y^2}$$

On pose :  $v^* = \frac{4}{3}v + u$  et  $v^{**} = v - \frac{2}{3}u$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yy}) = \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial v^*}{\partial \xi} \right] \\
& + \frac{1}{|J|^2} \left[ - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 v^{**}}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 v^{**}}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 v^{**}}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) \frac{\partial v^{**}}{\partial \eta} \right] \\
& + \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \right) \frac{\partial v^{**}}{\partial \xi} \right] \\
& - \frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial v^*}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{|J|^3} \left[ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial v^{**}}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial v^{**}}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial v^{**}}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial v^{**}}{\partial \eta} \right]$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho u \cdot v}) = \frac{1}{|J|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (-\overline{\rho u \cdot v}) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (-\overline{\rho u \cdot v}) \right)$$

Equation d'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u \cdot T}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v \cdot T}) &= \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho u \cdot T}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho v \cdot T}) \\ &+ \frac{\overline{\tau_{xx}}}{Cp} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\overline{\tau_{xy}}}{Cp} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\overline{\tau_{yx}}}{Cp} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\overline{\tau_{yy}}}{Cp} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (C.19)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u \cdot T}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v \cdot T}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho u \cdot T}) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho u \cdot T}) \right) + \frac{1}{|J|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho v \cdot T}) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho v \cdot T}) \right)$$

$$\bullet \frac{\bar{u}}{Cp} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{Cp} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{\bar{u}}{Cp|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \right) + \frac{\bar{v}}{Cp|J|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \right)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \frac{\mu}{Pr|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2} \right]$$

$$+ \frac{\mu}{Pr|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right]$$

$$+ \frac{\mu}{Pr|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right]$$

$$- \frac{\mu}{Pr} \frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right]$$

$$+ \frac{\mu}{Pr|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} \right]$$

$$- \frac{\mu}{Pr} \frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right]$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho u \cdot T}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho v \cdot T}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (-\overline{\rho u \cdot T}) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (-\overline{\rho u \cdot T}) \right)$$

$$+ \frac{1}{|J|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (-\overline{\rho v \cdot T}) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (-\overline{\rho v \cdot T}) \right)$$

- $\overline{\frac{\tau_{xx} \cdot \partial \mathbf{u}}{\text{Cp} \cdot \partial x}} = \frac{2}{3} \frac{\mu}{|\mathbf{J}|^2 \cdot \text{Cp}} \left( 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$
- $\overline{\frac{\tau_{yx} \cdot \partial \mathbf{u}}{\text{Cp} \cdot \partial y}} = \frac{\mu}{|\mathbf{J}|^2 \cdot \text{Cp}} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$
- $\overline{\frac{\tau_{yx} \cdot \partial \mathbf{v}}{\text{Cp} \cdot \partial x}} = \frac{\mu}{|\mathbf{J}|^2 \cdot \text{Cp}} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)$
- $\overline{\frac{\tau_{yy} \cdot \partial \mathbf{v}}{\text{Cp} \cdot \partial y}} = \frac{2}{3} \frac{\mu}{|\mathbf{J}|^2 \cdot \text{Cp}} \left( -2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)$

Equation d'état

$$\overline{P} = \overline{\rho} \cdot \overline{R} \cdot \overline{T} \quad (\text{C.20})$$

Equation de conservation de K :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u K}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v K}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{K,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{K,t}} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{K,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{K,t}} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu_t \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \overline{\rho} \varepsilon \quad (\text{C.21})$$

- $\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u K}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v K}) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho u K}) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho u K}) \right) + \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{\rho v K}) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{\rho v K}) \right)$
- $\frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{K,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{K,t}} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right) = \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 K}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial K}{\partial \xi} \right]$ 

$$+ \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial K}{\partial \eta} \right]$$

$$- \frac{1}{|\mathbf{J}|^3} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \xi} \frac{\partial K}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \xi} \frac{\partial K}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \eta} \frac{\partial K}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \eta} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right]$$
- $\frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{K,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{K,t}} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right) = \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 K}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial K}{\partial \xi} \right]$ 

$$+ \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial K}{\partial \eta} \right]$$

$$-\frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial K}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial K}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial K}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right]$$

$$\bullet \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\mu}{|J|^2} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\mu}{|J|^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2$$

Equation de conservation de  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v} \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon,1}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon,1}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{K} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + C_1 \frac{\varepsilon}{K} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - C_2 \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (C.22)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v} \varepsilon) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon) \right) + \frac{1}{|J|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\rho} \tilde{v} \varepsilon) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\rho} \tilde{v} \varepsilon) \right)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon,1}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) = \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right]$$

$$+ \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right]$$

$$-\frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right]$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon,1}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta \partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right]$$

$$+ \frac{1}{|J|^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right]$$

$$-\frac{1}{|J|^3} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right]$$

$$\bullet C_1 \frac{\varepsilon}{K} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + C_1 \frac{\varepsilon}{K} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = C_1 \frac{\varepsilon}{K} \frac{\mu}{|J|^2} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + C_1 \frac{\varepsilon}{K} \frac{\mu}{|J|^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2$$

## REFERENCES

1. B. LAKSHMINARAYANA. "Fluid dynamics and heat transfer of Turbomachinery". John Wiley & Sons Inc, 1996.
2. K. M. BERNHARD GUSTAFSSON. "Experimental Studies of Effusion Cooling ". Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden 2001
3. David E. GLASS, Arthur D. DILLEY et H. Neale KELLY. "Numerical Analysis of Convection / Transpiration Cooling". NASA/TM-1999-209828 ; National Aeronautics and Space Administration ; Langley Research Center ; Hampton, Virginia 23681-2199 ; December 1999  
*<http://techreports.larc.nasa.gov/ltrs/PDF/1999/tm/NASA-99-tm209828.pdf>*
4. JONAS BREDBERG. "Turbulence Modelling for Internal Cooling of Gas-Turbine Blades". Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2002
5. Christophe DUCHÊNE. "Application des calculs NAVIERS-STOCKS à l'aérodynamique des turbines des turboréacteurs d'aviation refroidies par film". 30<sup>ème</sup> Colloque d'aérodynamique appliquée - Ecole Centrale de Nantes, 25-27 Octobre 1993
6. A. ONVANI, C. OLLIVIER, F. BARIO & F. LEBOEUF. "Etude expérimentale et théorique d'un jet tridimensionnel introduit dans l'écoulement secondaire d'une grille distributrice de turbine". AGARD Conference proceedings N°390, Heat transfert and cooling in gas turbines, 1984
7. A.O. DEMUREN. "Modeling turbulent jet in cross flow". Chap 17, encyclopédie de la MDF, pp431-465
8. A.O.DEMUREN. "Modeling jets in cross flow". NASA Contractor Report 194965, ICASE Report N°94-71, Contract NAS1-19480, August 1994
9. J. U. Schlüter and T. Schönfeld. "LES of Jets in Cross Flow and its Application to a Gas Turbine Burner". Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2002.  
*<http://www.stanford.edu/~schluter/PDF/LES-JICF-FTC.pdf>*
10. Céline PRIÈRE. "Simulation aux grandes échelles de jets turbulents dans un canal rectangulaire". DESS de Propulsion Terrestre et Aéronautique, Université Pierre et Marie Curie, Septembre 2001
11. V. L. ERIKSEN. "Film cooling effectiveness and heat transfert with injection through holes". PhD, University of Minnesota, 55455, USA & NLRC, Eveland, Ohio, 8/1971
12. S.V. PATANKAR, D.K. BASU, S.A.ALPAY. "Prediction of the three-dimentional



- velocity field of a deflected turbulent jet". Transactions of the ASME, December 1977, pp758-762
13. R.W. CLAUS. "Analytical calculation of a single jet in cross-flow and comparison with experiment". NASA LEWIS Research Center, CLEVELAND, OH, AIAA 21<sup>st</sup> Aerospace sciences meeting, pp 1-9, january 10-13, 1983, RENO, NEVADA
  14. J.M. MAURICE, F. LEBOEUF, P. KULISA. "Modélisation d'un écoulement turbulent en présence de jets pariétaux discrets de refroidissement". Heat Transfer and Cooling in gas Turbine, AGRAD Conference Proceeding 527, Fev 1993.
  15. AZZI Abbes. "Investigation numérique du refroidissement par film appliqué aux aubes des turbines à gaz ". Thèse de Doctorat d'état, USTO, Octobre 2001
  16. Richard W. KASZETA. "Measurements in Film Cooling Flows with Lateral Injection". a Thesis of Master of Science, University of MINNESOTA, January 1998
  17. Stephen H. CHIU, Karlin R. ROTH, Richard J. MARGASON & Jin TSO. "A Numerical investigation of a subsonic jet in a crossflow"
  18. Karlin R. ROTH, Richard L. FEARN & Siddharth S. THAKUR. "Evaluation of NAVIER-STOCKES prediction of jet in a crossflow". Journal of Aircraft, vol 29 N°2, March-April 1992
  19. L.J.W. GRAHAM & K. BREMHORST. "Application of the K- $\epsilon$  turbulence model to the simulation of a fully pulsed free air jet". Transactions of the ASME, vol 115, March 1993, pp 70-74
  20. R.I. SYKES, W.S. LEWELLEN & S.F. PARKER. "On the vorticity dynamics of a turbulent jet in a crossflow". JFM (1986) , vol 168 pp 393-413
  21. G. BERGELES, A.D. GOSMAN & B.E. LAUNDER. "The prediction of three-dimensional discrete-hole cooling processes. Part2: Turbulence flow"Journal of heat transfert, vol 103 pp141-145, February 1981
  22. Mayank TYAGI and Sumanta ACHARYA. "LARGE EDDY SIMULATIONS OF JETS IN CROSSFLOW: EFFECT OF JET INCLINATION ANGLE". Mechanical Engineering Department, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803  
<http://me.lsu.edu/~tyagi/paper5.pdf>
  23. Mayank TYAGI and Sumanta ACHARYA. "LARGE EDDY SIMULATIONS OF RECTANGULAR JETS IN CROSSFLOW: EFFECT OF HOLE ASPECT RATIO". Mechanical Engineering Department, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803  
<http://me.lsu.edu/~tyagi/paper1.pdf>
  24. Mayank TYAGI and Sumanta ACHARYA. "LARGE EDDY SIMULATIONS OF JETS IN CROSSFLOW: I EFFECT OF FREESTREAM TURBULENCE INTENSITY". Mechanical Engineering Department, Louisiana State University,

Baton Rouge, LA 70803

<http://me.lsu.edu/~tyagi/paper2.pdf>

25. M. TYAGI. "Large Eddy Simulations of Complex Turbulent Flows". Thesis of Doctor of Philosophy (Ph.D.), Department of Mechanical Engineering, Louisiana state university, June 2002.
26. J.M. FOUGERES, J.L BOUSGARBIES, E. DORIGNAC, E. FOUCAULT. "Refroidissement par film des aubes de turbines: Modélisation et validation expérimentale". note interne, ONERA CERT-DERMES Toulouse.
27. A. AZZI, D. LAKEHAL. "Perspectives in Modelling Film Cooling of Turbine Blades by Transcending Conventional Two-Equation Turbulence Models". in Institute of Energy Technology of ETH Zurich  
<http://www.lkt.mavt.ethz.ch/~lakehal/PAPERS/jt-imece.pdf>
28. A. AZZI, D. LAKEHAL. "Perspectives in Modelling Film Cooling of Turbine Blades by Transcending Conventional Two-Equation Turbulence Models". Proceedings of IMECE'01, 2001 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 11-16, 2001, New York, NY, USA
29. D. LAKEHAL, G.S. THEODORIDIS et W. RODI. "Computation of film cooling of a flat plate by lateral injection from a row of holes". International Journal of Heat and Fluid Flow 19 (1998) 418-430
30. D. LAKEHAL, G.S. THEODORIDIS et W. RODI. "Three-dimensional flow and heat transfer calculations of film cooling at the leading edge of a symmetrical turbine blade model". International Journal of Fluid Flow, 22, 2001, PP 113-122
31. Steven W. BURD & Terrence W. SIMON. "The influence of coolant supply geometry on film coolant exit flow and surface adiabatic effectiveness". Heat Transfer Laboratory, University of Minnesota, Minneapolis, USA, 1997
32. Sylvain BARTHET & François BARIO. "Experimental investigation of film cooling flow induced by shaped holes on turbine blade". LMFA, Ecole Centrale de LYON, France
33. R. DIZENE, E. DORIGNAC, J.M. CHARBONNIER et R. LEBLANC. "Étude expérimentale d'une interaction de jets obliques avec un écoulement transversal compressible. II. Effets du taux d'injection sur les transferts thermiques en surface". International Journal of Thermal Sciences, Volume 39, Issue 5, May 2000, Pages 571-581
34. Mohammed ALTORAIRI. "Film Cooling from Cylindrical Holes in Transverse Slots". Master of Science (M.S.), Department of Mechanical Engineering, Louisiana state university, April 2001.
35. Lujia GAO. "Effect of Jet Hole Arrays Arrangement on Impingement Heat Transfer". Master of Science in Mechanical Engineering (M.S.M.E.), Department of Mechanical Engineering, Louisiana state university, March 2003.

36. T. YOSHIDA. "Film cooling effect of jets issued from a row of holes into a laminar boundary layer". Thesis, University of Minnesota, 1977.
37. Hans REISS & Albin BÖLCS. "The influence of the boundary layer state and Reynolds number on film cooling and heat transfer on a cooled nozzle guide vane". 45<sup>th</sup> ASME, 8-11 May 2000, Munich, Germany
38. B.Y. MAITEH, B.A. JUBRAN. "Effects of pressure gradient on film cooling effectiveness from two rows of simple and compound angle holes in combination". Energy Conversion and Management 45 (2004), pp1457–1469.
39. K. KADOTANI & R.J. GOLDSTEIN. "On the nature of jets entering a turbulent flow -Part A: jet-mainstream interaction". ASME, Journal of Engineering for Power, vol. 101, pp 459-465, 1979.
40. J.P. HARTNETT "Mass transfer Cooling, Handbook of Heat Transfer Applications ". edited by W.M. ROHSENON, J.P. HARTNETT & E.N. GANIC, Eds Mc GrawHill, NY, 1985.
41. J. E. MAYHEW & J. W. BAUGHN. "The effects of freestream turbulence on film cooling". University of California, Davis.
42. U. DROST, A. BÖLCS et A. HOFFS. "Utilization of the Transient Liquid Crystal Technique for Film Cooling Effectiveness and Heat Transfer Investigations on a Flat Plate and a Turbine Airfoil ". In ABB, Baden, Switzerland and the "Nationaler Energie-Forschungs Fonds", (NEFF), Switzerland.  
[http://ttwww.epfl.ch/publications/pdf/drost\\_bolcs\\_hoffs\\_igti026\\_1997.pdf](http://ttwww.epfl.ch/publications/pdf/drost_bolcs_hoffs_igti026_1997.pdf)
43. Mayank TYAGI and Sumanta ACHARYA. "Large Eddy Simulations of Jets in Crossflow :: II Effect of freestream turbulence length scales". Mechanical Engineering Department, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803.  
<http://me.lsu.edu/~tyagi/paper3.pdf>
44. Y. KAMOTANI & I. GREBER. "Experiments of turbulent jet in a cross flow". AIAA journal, vol. 10, pp 1425-1429, November 1972.
45. R.S. BUNKER. "Film Cooling Effectiveness Due to Discrete Holes Within Transverse Surface Slots". GE Research & Development Center, in Technical Information Series, 2001CRD204, ,January 2002  
<http://www.crd.ge.com/cooltechnologies/pdf/2001crd204.pdf>
46. Youn J. KIM , S.-M. KIM. "Influence of shaped injection holes on turbine blade leading edge film cooling". International Journal of Heat and Mass Transfer, n° 47, 2004, pp 245–256
47. Roland CHIESTEL. " Modélisation et simulation des écoulements turbulents". ed. HERMES, Paris, 1993
48. Sven PERZON, L. DAVIDSON & M. RAMNEFORS. "Reynolds stress modelling of

- flow separation over curved surfaces". in "Advanced in turbulence VI", pp 77-78, eds S. GAVRILAKIS et al., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996
49. Sven PERZON, Lars DAVIDSON & Mats RAMNEFORS. "REYNOLDS Stress Modeling of flow separation on curved surfaces - A status report". Department of thermo and fluid dynamics, Chalmers University of technology, Göteborg, Sweden, April 1995.
  50. Lars DAVIDSON. "An introduction to turbulence models". Department Thermo and fluid dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, October 2001  
<http://www.tfd.chalmers.se/~lada>
  51. Simon DAHLSTRÖM & Lars DAVIDSON. "Large eddy simulation of the flow around an aerospace A-aerofoil". ECCOMAS 2000, Barcelona, Spain, 11-14 September 2000.
  52. Sven PERZON, Lars DAVIDSON & Mats RAMNEFORS. "Reynolds stress modelling of complex flows over curved surfaces". in "Flow modelling and turbulence measurements VI", pp 407-414, eds C. J. CHEN, C. SHIH, J. LINEAU and R. J. KING, edition A.A. Balkema, Rotterdam, 1996
  53. Sven PERZON. "Reynolds stress modelling of flow separation on curved surfaces" Thesis of the degree of licentiate engineering, Department of thermo and fluid dynamics, Chalmers University of technology, Göteborg, Sweden, May 1999
  54. Jonas LARSSON. "Numerical simulation of turbulent flow for turbine blade heat transfer applications". Doctoral Thesis of the degree of Doctor of philosophy, Department of thermo and fluid dynamics, Chalmers University of technology, Göteborg, Sweden, 1998
  55. Jonas BREDBERG. "Prediction of flow and heat transfer inside turbine blades using EARSM, K- $\epsilon$  and K- $\omega$  turbulence models". Thesis of the degree of licentiate engineering, Department of thermo and fluid dynamics, Chalmers University of technology, Göteborg, Sweden, June 1999
  56. Gehrler A. WOISETSCHLÄGER & J. JERICHA H. "Blade film cooling by underexpanded transonic jets layers". . ASME (97-GT-246), 1997.
  57. Christopher L. RUMSEY, Thomas B. GATSKI & Joseph A. MORRISON. "Turbulence models predictions of extra-strain rate effects in strongly-curved flows ". 37<sup>th</sup> ASME, AIAA (99-0157), 1999.
  58. Christopher L. RUMSEY & Thomas B. GATSKI. "Isolating curvature effects in computing wall-bounded turbulent flows". AIAA (2001-0725), 2001.
  59. G. WAGNER, M. KOTULLA, P. OTT, B. WEIGAND et J. von WOLFERSDORF. "The transient liquid crystal technique : Influence of surface curvature and finite wall thickness". Proceedings of ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air, June 14–17, 2004, Vienna, Austria, GT2004-53553.

60. R. DIZENE. "Etude d'interactions de jets avec un écoulement transversal compressible en vue des applications au refroidissement de parois". Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, Octobre 1993.
61. D. CHERRARED, R. DIZENE et M. BENZEGHIBA. "MODELISATION BIDIMENSIONNELLE DE L'INTERACTION JETS-ÉCOULEMENT PRINCIPAL COMPRESSIBLE". 14e Congrès Français de Mécanique Toulouse 99 Ref / 655
62. L. S. JANSSON & L. DAVIDSON. "Numerical study of effusion cooling in a double-row discrete-hole configuration using a low-Re Reynolds stress transport model". in "Engineering turbulence modelling and experiments III", eds W. RODI and G. BERGELES, Elsevier Science B.V., 1996
63. S.W. KIM & T.J. BENSON. "The fluid Flow of jets in cross flow - A Numerical Study". AIAA Journal, vol 31 N°5, May 1993
64. G. BERGELES, A.D. GOSMAN & B.E.LAUNDER. "The near field character for jets entering a crossflow". ASME, Journal of Heat Transfer, August 1976.
65. Guang-Ping HUANG. "Modélisation et calculs des jets tridimensionnels en présence d'un écoulement transversal". Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de LYON, 1989
66. G. MEDIC & P. A. DURBIN. "Toward improved film cooling prediction". Stanford University
67. G. MEDIC & P. A. DURBIN. "Toward improved prediction of heat transfer on turbine blades". Stanford University
68. P. KULISA, F. LEBOEUF, G. PERRIN. "Computation of wall boundary layer with discrete jets injection". Laboratoire de MDF et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 1991.
69. J.M. CHARBONNIER. "Analyse et modélisation de l'interaction d'un jet perpendiculaire de paroi avec un écoulement principal". Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, Mai 1992.
70. "3D NAVIER-STOCKES of heat transfer with film cooling"  
J.M. FOUGERES, R. HEIDER
71. Siddharth THAKUR, Jeffrey WRIGHT et Wei SHYY. "A Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer NAVIER-STOKES Solver - Theory & Applications". VERSION 4.5.2, SEPTEMBER, 2002, Siddharth THAKUR & Jeffrey WRIGHT, Streamline  
<http://aemes.mae.ufl.edu/~cfdweb/cgi-bin/PDF/>
72. S. KAPADIA, S. ROY et J. HEIDMANN. "Detached Eddy Simulation Of Turbine Blade Cooling". AIAA-2003-3632, 36th Thermophysics Conference, 23-26 June 2003, Orlando, Florida

73. Subrata ROY, Sagar KAPADIA et James D. HEIDMANN. "Film Cooling Analysis Using DES Turbulence Model". Proceedings of ASME Turbo Expo 2003, Power for Land, Sea, and Air, June 16–19, 2003, Atlanta, Georgia, USA, GT-2003-38140
74. A. AZZI & D. LAKEHAL. "Perspectives in Modeling Film Cooling of Turbine Blades by Transcending Conventional Two-Equation Turbulence Models". Journal of Turbomachinery JULY 2002, Vol. 124 472-484
75. Djamel LAKEHAL. "Near-Wall Modeling of Turbulent Convective Heat Transport in Film Cooling of Turbine Blades With the Aid of Direct Numerical Simulation Data". Journal of Turbomachinery JULY 2002, Vol. 124 485-498
76. Vijay K. GARG, David L. RIGBY. "Heat Transfer on a Film-Cooled Blade - Effect of Hole Physics". Turbo Expo 1998, ASME, Stockholm, Sweden, June 2–5, 1998
77. Vijay K. GARG. "Heat Transfer on a Film-Cooled Rotating Blade". NASA/CR—1999-209301, July 1999, Prepared for the Turbo Expo '99, ASME, Indianapolis, Indiana, June 7–10, 1999
78. Vijay K. GARG. "Modeling Film-Coolant Flow Characteristics at the Exit of Shower-Head Holes". 2000 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, ASME, Orlando, Florida, November 5–10, 2000
79. J. U. SCHLÜTER and T. SCHÖNFELD. "LES of Jets in Cross Flow and its Application to a Gas Turbine Burner". CERFACS, 42, Av. Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse Cedex 1, 2002 Kluwer Academic Publishers. Netherlands.  
<http://www.stanford.edu/~schluter/PDF/LES-JICF-FTC.pdf>
80. S. ACHARYA, M. TYAGI, A. HODA, F. MULDOON. " From RANS to DNS: Application to Film Cooling ". Mechanical Engineering Department, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA  
<http://me.lsu.edu/~tyagi/paper4.pdf>
81. Asif HODA, Sumanta ACHARYA and Mayank TYAGI. "REYNOLDS STRESS TRANSPORT MODEL PREDICTIONS AND LARGE EDDY SIMULATIONS FOR FILM COOLING FLOWS". Mechanical Engineering Department, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803  
<http://me.lsu.edu/~tyagi/paper6.pdf>
82. Raymond Michael JONES. "Advanced Turbulence Modeling for Industrial Flows". Thesis of Doctor of Philosophy (Ph.D.), Department of Mechanical Engineering, Louisiana state university, January 2003
83. Harald ROCLAWSKI, Jamey D. JACOB, Tiangliang YANG & James M. McDONOUGH. "Experimental and Computational Investigation of Flow in gas Turbine Blade Cooling Passages". Mechanical Engineering Dep, University of Kentucky, 31st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, June 11-14, 2002/Anaheim, CA - AIAA 2002–2925
84. Djamel CHERRARED. "Modélisation bidimensionnelle de l'interaction jets de

- refroidissement - Ecoulement principal compressible". Thèse de Magistère, USTHB, Décembre 1998
85. B. MOHAMMADI & O. PIRONNEAU. "Analysis of the K-Epsilon turbulence model". John Wiley & Sons et ed. Masson, Paris, 1994.
  86. J. TAINE & J.P. PETIT "Transferts Thermiques". Ed Dunod, 1989.
  87. J. BOUSSINESQ. "Essai sur la théorie des eaux courantes". Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, Paris, 23, 1-680, 1877.
  88. A. FAVRE. "La turbulence en mécanique des fluides". Ed Gauthiers Villards, 1976.
  89. J. COUSTEIX. "Turbulence et couche limite". Ed Cepardues, 1989.
  90. "Contribution à la modélisation et la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable"  
D. VANDROMME, Thesis, University of Tille, 1983.
  91. "FLUENT 5 User's Guide". FLUENT Europe Inc, 1998
  92. Andreas SVENINGSSON. "Analysis of the Performance of Different  $v^2$ - f Turbulence Models in a Stator Vane Passage Flow". Licence of Mechanics, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2003
  93. S.V. PATANKAR. "Numerical heat transfert in fluid flow". Ed. Mc Graw Hill, 1980.
  94. H.K. VERSTEEG & W. MALALASEKERA. "An introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method". ed Longman Group Ltd, Malaysia, 1995
  95. B.E.LAUNDER & D.B.SPALDING. "The numerical computation of turbulent flow". Computer Methods in Applied Mechanics and Energy, pp 269-289, vol. 3, 1974.
  96. G.S. THEODORIDIS , D. LAKEHAL and W. RODI. "Three-Dimensional Calculations of the Flow Field around a Turbine Blade with Film Cooling Injection near the Leading Edge". Flow, Turbulence and Combustion 66: 57–83, 2001.
  97. C.A.J. FLETCHER. " Computational Techniques for Fluid Dynamics 2 – Specific Techniques for Different Flow Categories ". Ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
  98. T.J. CHUNG. " Computational Fluid Dynamics ". Ed Cambridge University Press, 2002.