

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des sciences de l'ingénieur

Département de Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Construction Mécanique

CONTRIBUTION AUX REMEDES DES ERREURS STATIQUES ET DYNAMIQUES D'UN ROBOT MANIPULATEUR

Par

REZALA Aicha

Devant le jury composé de :

M. OUALI	Professeur, U.S.D. de Blida	Président
H. ZAHLOUL	Maître de conférences, U.H.B. de Chlef	Examineur
A. BELAIDI	Maître de conférences, U.M.B. de Boumerdès	Examineur
A. ALLALI	Maître de conférences, U.S.D. de Blida	Rapporteur
A. BRAHIMI	Maître de conférences, U.S.D. de Blida	Co-Rapporteur

Blida, Février 2009

DEDICACES

C'est avec une grande joie que je dédie ce modeste travail à la mémoire de mon père et ma mère qui reposent en paix.

A ceux qui m'ont fait grandir, soutenue et aimée,

A ceux qui sans leur contribution, apport, aide, présence, je n'aurais pas été ce que je suis,

A toi, seule ma mère, qui s'est sacrifiée, j'espère que ton âme est au paradis,

A mes sœurs, qui n'ont cessé de m'aimer et de m'encourager durant toutes mes études,

A chaque membre de ma très chère famille,

A mes petits neveux à qui je souhaite une bonne réussite dans leur vie,

A toutes mes amies et amis que j'aime beaucoup,

A tous les enseignants de l'institut de mécanique,

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce mémoire, je leur dis merci.

Aicha

REMERCIEMENTS

Au terme de ce mémoire, je tiens à remercier en premier lieu DIEU le miséricordieux qui m'a donné la force et le courage pour achever ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Messieurs le Rapporteur A. ALLALI et le Co-Rapporteur A. BRAHIMI pour leurs orientations et conseils fructueux, pour m'avoir guidé attentivement et avec compétence et pour l'intérêt qu'ils ont manifesté tout au long de mon mémoire.

Que le professeur Monsieur M. OUALI, président du jury trouve ici ma profonde gratitude d'avoir accepté de présider ce jury.

Que Messieurs H. ZAHLOUL de l'université HASSIBA BEN BOUALI de CHLEF et A. BELAIDI de l'université M'HAMED BOUGARA de BOUMERDES, soient vraiment remerciés pour avoir accepté de juger ce travail malgré sa lourde tâche.

Mon passage au niveau des structures extérieures BCL, laboratoire vibro-acoustique et d'automatisation et robotisation de BOUMERDES, m'ont été d'une grande efficacité et à ce propos, je tiens à exprimés ma gratitude pour les responsables qui m'ont facilité l'accès et porte leur intérêt à mon travail.

RESUME

La modélisation des erreurs de robots industriels est traitée dans ce mémoire. La première partie concerne certaines notions générales sur les robots manipulateurs, les différents types d'erreurs et leur influence sur la situation du préhenseur, la modélisation et la simulation d'un robot à travers un exemple concret. Quand à la deuxième partie, un programme en Matlab et en Visuel-Lisp a été élaboré afin de déterminer les paramètres géométriques et cinématiques des robots et enfin, nous avons proposé des solutions pour permettre de résoudre les problèmes de détermination des erreurs statiques et dynamiques de robots industriels qui s'établissent entre le robot réel et son modèle idéal.

Mots clés : robot manipulateur, erreurs statiques, erreurs dynamiques, modélisation, solutions.

ABSTRACT

Modeling errors of industrial robots is being dealt with in this study. The first part concerns some general ideas about robots manipulators, the different types of errors and their influence on the situation of the gripper, modeling and simulation of a robot through a concrete example. When the second part of a program Visual-Lisp and Matlab has been developed to determine the geometry and kinematic robots and finally, we have proposed solutions to solve the problems in determining errors static and dynamic industrial robots established between the robot and its real ideal model.

Keywords : robot manipulator, static errors, dynamic errors, modeling solutions

ملخص

يتطرق هذا البحث إلى دراسة أخطاء النمذجة من الروبوتات الصناعية, يعتمد الجزء الأول منه على بعض الأفكار العامة عن الروبوتات, أنواع مختلفة من الأخطاء وتأثيرها على الوضع من القابض ، النمذجة والمحاكاة للروبوت من خلال مثال حقيقي . أما الجزء الثاني فيتعلق بدراسة برنامج Matlab و Visul-Lisp لتحديد الثوابت الهندسية و الحركية للروبوتات وأخيرا اقترحنا حلول لحل مشاكل تحديد الأخطاء السكونية والديناميكية للروبوتات الصناعية المنشأة بين الروبوت الحقيقي والنموذج المثالي.

كلمات مفتاحية : الروبوت المعالج، الأخطاء السكونية، الأخطاء الديناميكية، التمثيل, الحلول.

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Robot à chaîne ouverte simple.....	12
Figure 1.2 : Robot à chaîne arborescente.....	13
Figure 1.3 : Robot à chaîne fermée.....	13
Figure 1.4 : Schéma d'une articulation rotoïde.....	14
Figure 1.5 : Schéma d'une articulation prismatique.....	15
Figure 1.6 : Architecture des porteurs.....	16
Figure 1.7 : Schéma d'un manipulateur à chaîne ouverte simple.....	18
Figure 1.8 : Repérage de Denavit-Hartenberg.....	18
Figure 1.9 : Bilan des efforts au niveau articulaire.....	31
Figure 2.1 : Organigramme de classification des erreurs de robots.....	36
Figure 2. 2 : Variation de la position de l'organe terminal.....	41
Figure 2. 3 : L'influence de la rotation du repère R_j sur la position du repère terminal....	42
Figure 2. 4 : Exactitude et répétabilité de pose.....	45
Figure 2.5 : Schéma cinématique des erreurs premières d'un robot manipulateur.....	51
Figure 2.6 : L'influence des erreurs premières sur l'erreur de positionnement globale ΔX	54
Figure 2.7 : L'influence des jeux des couples cinématiques sur la précision de positionnement.....	55
Figure 2. 8 : Le contact ponctuel (sphère-plan).....	58
Figure 2.9 : Exemples d'usure entre deux surfaces différentes.....	60
Figure 2.10 : Action d'une particule abrasive par déformation et coupe.....	61
Figure 2.11 : Formation de bourrelets latéraux.....	61
Figure 2.12 : Etapes successives de l'usure en petits débattements sous l'action d'un mouvement vibratoire de faible amplitude, symbolisé par les flèches croisées.....	64
Figure 3.1 : Schéma cinématique d'un robot manipulateur à cinq degrés de liberté.....	67

Figure 3.2 : Schéma cinématique d'un robot travaillant dans le système de coordonnées cylindrique.....	88
Figure 3.3 : Erreurs provenant de jeux prévus lors de la conception.....	93
Figure 3.4 : Coordonnées articulaires optimisées du 1 ^{er} actionneur.....	98
Figure 3.5 : Coordonnées articulaires optimisées du 2 ^{ème} actionneur.....	98
Figure 3.6 : Coordonnées articulaires optimisées du 3 ^{ème} actionneur.....	99
Figure 3.7 : Coordonnées articulaires optimisées du 4 ^{ème} actionneur.....	99
Figure 3.8 : Coordonnées articulaires optimisées du 5 ^{ème} actionneur.....	100
Figure 3.9 : Vitesses articulaires optimisées du 1 ^{er} actionneur.....	101
Figure 3.10 : Vitesses articulaires optimisées du 2 ^{ème} actionneur.....	101
Figure 3.11 : Vitesses articulaires optimisées du 3 ^{ème} actionneur.....	102
Figure 3.12 : Vitesses articulaires optimisées du 4 ^{ème} actionneur.....	102
Figure 3.13 : Vitesses articulaires optimisées du 5 ^{ème} actionneur.....	103
Figure 3.14 : Accélérations articulaires optimisées du 1 ^{er} actionneur.....	104
Figure 3.15 : Accélérations articulaires optimisées du 2 ^{ème} actionneur.....	104
Figure 3.16 : Accélérations articulaires optimisées du 3 ^{ème} actionneur.....	105
Figure 3.17 : Accélérations articulaires optimisées du 4 ^{ème} actionneur.....	105
Figure 3.18 : Accélérations articulaires optimisées du 5 ^{ème} actionneur.....	106
Figure 3.19 : Système mécanique articulé RRR.....	106
Figure 3.20 : Positions.....	108
Figure 3.21 : Vitesses.....	108
Figure 3.22 : Accélérations.....	109
Figure 4.1 : Phénomène de rotation libre (système d'engrenage).....	111
Figure 4.2 : Modèle d'erreurs dus aux jeux de rotation libre.....	112
Figure 4.3 : Modèle d'erreurs dus aux jeux d'articulation.....	113
Figure 4.4 : Caisse utilisée pour la boro-carbo-nitruration.....	116
Figure 4.5 : Four à moufle électrique.....	116
Figure 4.6 : Les pièces traitées.....	117
Figure 4.7 : Microstructure de l'acier XC38.....	118
Figure 4.8 : Microstructure de l'acier 23MCD5.....	118
Figure 4.9 : Microstructure de l'acier X30WCrV53.....	119
Figure 4.10 : Microstructure de l'acier X210CrW12.....	119
Figure 4.11 : Profil de microdureté de l'acier XC38.....	120
Figure 4.12 : Profil de microdureté de l'acier 23MCD5.....	120

Figure 4.10 : Profil de microdureté de l'acier X30WCrV53.....	121
Figure 4.11 : Profil de microdureté de l'acier X210Cr12.....	121
Tableau 3.1 : Paramètres géométriques du robot.....	67
Tableau 3.2 : Position des points (voir la simulation).....	77
Tableau 3.3 : Paramètres de Denavit-Hartenberg.....	107
Tableau 4.1 : Acier ordinaire travaillé à froid (XC38).....	115
Tableau 4.2 : Acier faiblement allié travaillé à froid (23MCD5).....	115
Tableau 4.3 : Acier fortement allié travaillé à chaud [X30WCrV53 (Z32WCV5)].....	115
Tableau 4.4 : Acier fortement allié travaillé à froid [X210Cr12 (Z200C12)].....	115
Tableau 4.5 : Epaisseur de la couche borocarbonitruré.....	118

TABLE DES MATIERES

RESUME

DEDICACES

REMERCIEMENTS

LISTE DES ILLUSTRATION, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION.....	01
1. GENERALITES.....	10
1.1 Introduction.....	10
1.2 Définition d'un robot industriel.....	10
1.3 Classification des robots.....	10
1.3.1 Manipulateur manuel.....	11
1.3.2 Robot à séquence de travail fixe.....	11
1.3.3 Robot à séquence de travail évolutive.....	11
1.3.4 Robot copieur.....	11
1.3.5 Robot à commande numérique.....	11
1.3.6 Robot intelligent.....	11
1.4 Structure d'un robot.....	12
1.5 Utilisation des robots.....	12
1.6 Description des robots.....	12
1.6.1 Structure à chaînes ouvertes simples.....	12
1.6.2 Structure à chaînes arborescentes.....	13
1.6.3 Structure avec fermeture de chaîne.....	13
1.6.4 Articulation (ou joint).....	14
1.6.5 Espace articulaire (ou espace de configuration).....	15
1.6.6 Espace de travail (ou espace opérationnel).....	15
1.6.7 Redondance.....	16
1.6.8 Configurations singulières.....	17

1.6.9 Repérage de Denavit-Hartenberg (D-H).....	17
1.6.9.1 Règles et conventions.....	17
1.6.9.2 Description des robots à chaînes ouvertes simples.....	18
1.7 Modélisation des bras manipulateurs.....	20
1.7.1 Modélisation géométrique.....	21
1.7.1.1 Le modèle géométrique direct (MGD).....	21
1.7.1.2 Le modèle géométrique inverse (MGI).....	21
1.7.2 Modélisation cinématique.....	22
1.7.2.1 Le modèle différentiel direct (MDD).....	22
1.7.2.2 Le modèle différentiel inverse (MDI).....	22
1.7.3 Modélisation dynamique.....	23
1.7.3.1 Formalisme de LAGRANGE.....	25
1.7.3.2 Formalisme de NEWTON-EULER.....	29
1.8 Planification des mouvements.....	32
1.8.1 Introduction sur la planification.....	32
1.8.2 Définitions.....	32
1.8.2.1 Trajectoires libres.....	32
1.8.2.2 Trajectoires imposées.....	32
1.8.3 Les contraintes.....	32
1.8.3.1 Les contraintes sur les débattements.....	33
1.8.3.2 Contraintes cinématiques.....	33
1.8.3.3 Contraintes sur les couples moteurs.....	33
1.8.3.4 Contraintes dues aux obstacles dans l'espace opérationnel.....	33
1.9 Conclusion.....	34
2. ERREURS DE ROBOTS INDUSTRIELS.....	35
2.1 Introduction.....	35
2.2 Classification des erreurs de robots.....	35
2.2.1 Erreurs systématiques.....	35
2.2.1.1 Erreurs de commande.....	35
2.2.1.2 Erreurs géométriques.....	36
2.2.1.3 Erreurs dues aux efforts extérieurs.....	36
2.2.2 Erreurs aléatoires.....	36
2.2.2.1 Erreurs dues aux jeux.....	36

2.2.2.2 Erreurs physiques.....	36
2.3 Analyse sommaire sur les erreurs.....	37
2.4 Modélisation des erreurs.....	37
2.4.1 Modèle des erreurs systématiques.....	37
2.4.1.1 Erreurs de commande.....	37
2.4.1.2 Erreurs géométriques.....	38
2.4.1.3 Erreurs dues aux efforts.....	40
2.4.2 Modèle des erreurs aléatoires.....	43
2.4.2.1 Erreurs dues aux incertitudes des variables articulaires.....	43
2.4.2.2 Erreurs de précision.....	44
2.4.2.2.1 Exactitude de pose.....	45
2.4.2.2.2 Répétabilité de pose.....	46
2.4.2.2.3 Temps de stabilisation et dépassement de pose.....	47
2.5 Identification des paramètres du modèle des erreurs.....	47
2.5.1 Méthode des moindres carrées pour un modèle linéaire.....	48
2.6 Identification des paramètres dynamiques.....	49
2.7 Déformations et précision des manipulateurs.....	49
2.7.1 Emploi en mode restitution.....	49
2.7.2 Emploi en mode programmé.....	50
2.8 Evaluation des erreurs de positionnement ou de poursuite de trajectoire d'un manipulateur.....	50
2.9 Evaluation des erreurs accidentelles d'un robot manipulateur.....	51
2.9.1 Erreurs premières des systèmes mécaniques.....	51
2.9.2 Influence des jeux des couples cinématiques.....	55
2.10 Les causes structurales dans les mécanismes.....	57
2.10.1 Frottement dans les mécanismes.....	57
2.10.1.1 Introduction.....	57
2.10.1.2 Action de contact sans frottement.....	58
2.10.1.3 Action de contact avec frottement.....	59
2.10.2 Usure.....	60
2.10.2.1 Usure abrasive.....	60
2.10.2.1.1 Description et modèle.....	60
2.10.2.1.2 Paramètre de l'usure abrasive.....	62
2.10.2.1.3 Usure abrasive et ingénierie des surfaces.....	62

2.10.2.2 Usure adhésive.....	63
2.10.3 La durée de vie.....	64
2.11 Conclusion.....	65
3. MODELISATION DES ROBOTS.....	66
3.1 Introduction.....	66
3.2 Paramétrisation du robot.....	66
3.3 Modèle géométrique direct (MGD).....	68
3.3.1 Calcul des matrices de passages élémentaires.....	68
3.4 Modèle géométrique inverse (MGI).....	70
3.4.1 Algorithme de résolution du problème inverse par la méthode d'approximation successive.....	70
3.4.2 Application numérique.....	72
3.5 Modèle différentiel.....	78
3.5.1 Introduction.....	78
3.5.2 Calcul du modèle différentiel $dX= J(\theta) d\theta$	78
3.5.3 Calcul du modèle différentiel $dX= J(\alpha) d\alpha$	79
3.5.4 Calcul du modèle différentiel $dX= J(d) d(d)$	81
3.5.5 Vitesses et Accélérations généralisées.....	82
3.5.5.1 Les vitesses et les accélérations généralisées.....	83
3.5.5.2 Les vitesses et les accélérations des points des chaînons.....	83
3.5.5.3 Application.....	85
3.6 Modèle dynamique.....	88
3.6.1 Introduction.....	88
3.6.2 Description de la structure.....	88
3.6.3 Les vecteurs principaux des forces d'inerties.....	89
3.6.4 Les moments principaux des forces d'inerties par rapport à leur centre de masse.....	89
3.6.5 Le vecteur principal de la force d'inertie de l'objet pris par la pince du robot.....	90
3.6.6 Le moment principal des forces d'inerties de l'objet par rapport au centre de la masse.....	90
3.6.7 Les réactions d'un robot manipulateur.....	90
3.7 Modèle des erreurs.....	93

3.7.1	Modèle des erreurs aléatoires.....	95
3.7.1.1	Erreurs dues aux variables articulaires.....	95
3.7.1.2	Les variances de la situation du préhenseur.....	96
3.7.1.3	Les covariances de la situation du préhenseur.....	97
3.8	Simulation sur le logiciel Matlab et Visual-Lisp.....	97
3.8.1	Les vecteurs positions.....	97
3.8.1.1	Actionneur n°1.....	98
3.8.1.2	Actionneur n°2.....	98
3.8.1.3	Actionneur n°3.....	99
3.8.1.4	Actionneur n°4.....	99
3.8.1.5	Actionneur n°5.....	100
3.8.2	Les vecteurs vitesses.....	100
3.8.2.1	Actionneur n°1.....	101
3.8.2.2	Actionneur n°2.....	101
3.8.2.3	Actionneur n°3.....	102
3.8.2.4	Actionneur n°4.....	102
3.8.2.5	Actionneur n°5.....	103
3.8.3	Les vecteurs accélérations.....	103
3.8.3.1	Actionneur n°1.....	104
3.8.3.2	Actionneur n°2.....	104
3.8.3.3	Actionneur n°3.....	105
3.8.3.4	Actionneur n°4.....	105
3.8.3.5	Actionneur n°5.....	106
3.9	Application sur un robot PUMA RRR.....	106
3.10	Conclusion.....	109
4.	PROPOSITION DES SOLUTIONS POUR LES ERREURS.....	110
4.1	Introduction.....	110
4.2	Proposition d'une solution pour les erreurs accidentelles.....	111
4.2.1	Erreurs de rotation libre.....	111
4.2.2	Erreurs des jeux d'articulations.....	113
4.3	Amélioration des structures des robots industriels.....	114
4.3.1	Présentation des matériaux.....	115
4.3.2	Résultats et discussion.....	117

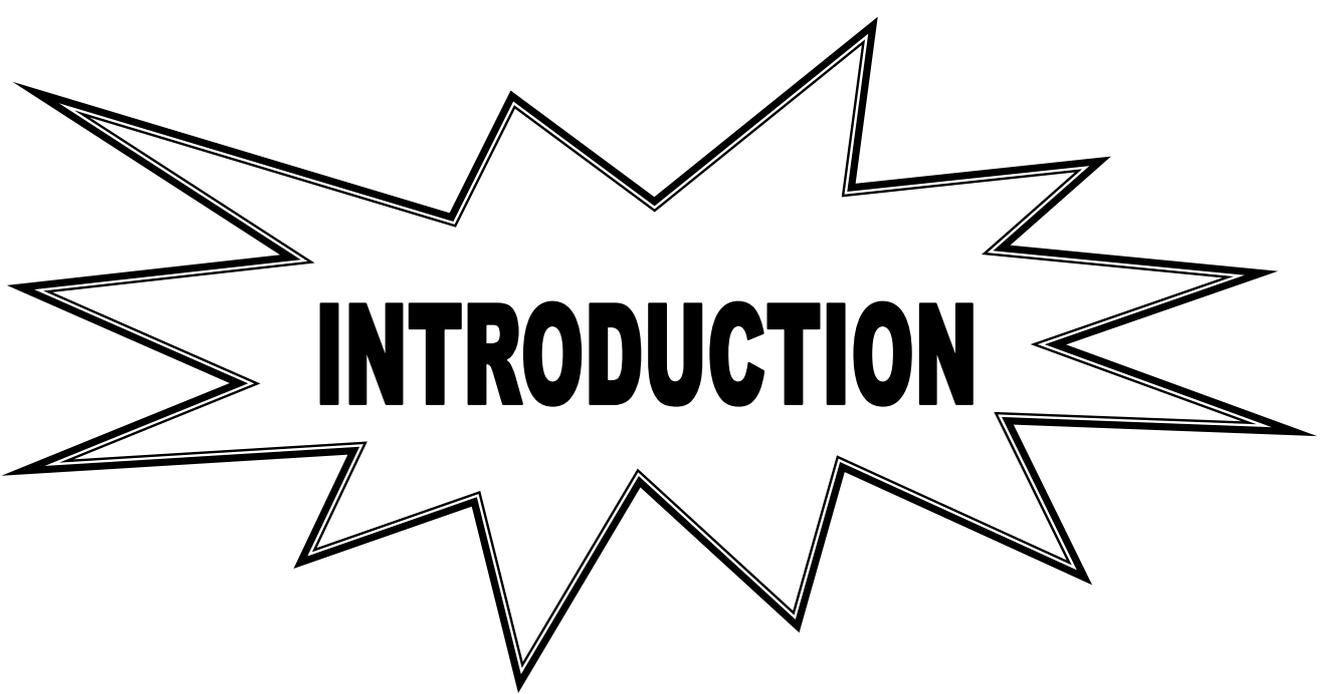
4.4 Méthode de mesure.....	122
4.5 Identification de la position.....	124
4.5.1 Principe de fonctionnement.....	124
4.6 Certaines solutions pour les erreurs.....	124
4.7 Approche énergétique.....	125
4.8 Conclusion.....	126

CONCLUSION.....	127
-----------------	-----

APPENDICES

- A Transformations homogènes-opérations matricielles
- B Repérage d'un solide dans l'espace
- C Liste des symboles et des abréviations
- D Précision et répétabilité selon ISO 230-2
- E Programme

REFERENCES



INTRODUCTION

INTRODUCTION

La robotique est une science qui s'intéresse aux problèmes de conception et de modélisation des robots. Aujourd'hui, la robotique s'intéresse à l'augmentation et l'amélioration de la productivité et ceci par l'automatisation et la robotisation des chaînes de production (cellules, ateliers et chaînes flexibles) ; ce qui a pour effet d'augmenter la rentabilité et la sécurité au sein des unités industrielles.

Pour concevoir, simuler ou commander un robot, il est nécessaire entre autres, de disposer de modèle du mécanisme. Plusieurs niveaux de modélisation sont possibles. Ils dépendent des spécifications du cahier des charges de l'application envisagée : modèles géométriques, différentiels et dynamiques à partir desquels peuvent être engendrés les mouvements de robots ou bien les modèles statiques qui décrivent les interactions du mécanisme avec son environnement, ainsi que les modèles des erreurs systématiques et aléatoires qui décrivent et donnent la précision de positionnement de l'organe terminal.

L'évaluation de ces différents modèles n'est pas aisée. La difficulté varie selon la complexité de la cinématique de la chaîne articulée. Entre en ligne de compte, le nombre de degrés de liberté, le type d'articulation et aussi le fait que la chaîne peut être ouverte simple, arborescente ou fermée. Les outils mathématiques que nous présentons dans ce mémoire utilisent les descriptions des mécanismes fondés sur des notions originales qui permettent d'avoir la même approche quelle que soit la structure.

Etat de l'art

Quelques travaux récents sont plutôt orientés vers la détermination des modèles dynamiques et d'autres vers la reconnaissance de la nature de la tâche et sur l'influence des erreurs sur le comportement dynamique d'un système de positionnement de l'objet.

L'importance de cette dernière peut rendre le problème très complexe et la formulation

mathématique difficilement généralisable. Ajoutée à cela, des exigences liées à la tâche (telles que les limitations de durée d'exécution, de vitesses et d'accélération), liées aux manipulateurs (telles que les limitations des efforts actionneurs afin de ne pas dépasser leur capacité) ou bien liées à l'environnement (telles que les évitements d'obstacles).

A. Bouguerra [1] ce travail de mémoire présente et commente les travaux déjà effectués concernant différentes problématiques. Parmi ces travaux, J. Wittenberg [2] a développé un algorithme pour la modélisation dynamique d'un système de corps rigide et d'un objet relié entre eux pour former une chaîne cinématique fermée. Il propose que les contraintes cinématiques doivent être résolues séparément pour chaque manipulateur. Les principales difficultés du problème sont la détermination du nombre de degrés de liberté (ddl) et le choix des coordonnées généralisées afin de présenter le mouvement et la dynamique du système. J. F. Kleinfinger et W. Khalil [3] ont présenté un autre algorithme et comme [2], ils supposent que les équations de contraintes ont été données à l'avance sous formes analytiques. D. E. Orin et S. Y. Oh [4] traitent l'analyse dynamique de plusieurs robots en contact avec des objets, constituant des chaînes cinématiques fermées. Ils déterminent les couples moteurs et les forces généralisées de contact pour une trajectoire imposée en faisant intervenir moins d'équations que d'inconnues. En appliquant la programmation linéaire, ils proposent une solution en prenant des contraintes additionnelles pour résoudre le problème de distribution des forces. S. Hayati [5] utilise la fonction d'énergie de Lagrange pour la modélisation dynamique du système formé par plusieurs manipulateurs tenant un objet rigide. Les équations du mouvement sont établies pour chaque robot. Des contraintes de position sont incorporées au système en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Les différentes recherches abordées dans ce mémoire donnent une bonne idée des divers problèmes qui attendent le concepteur d'un robot manipulateur.

J. J. Uicker [6] propose une méthode basée sur les équations de Lagrange. Il fait appel à la notion de matrice de passage généralisée d'ordre quatre (04) préconisée pour la première fois par Denavit et Hartenberg. Au cours des travaux récents sur la commande en temps réel, plusieurs chercheurs ont utilisé le formalisme de Newton-Euler qui leur a permis le calcul récurrent des forces et/ou couples. Plusieurs travaux ont été présentés par des chercheurs, ces travaux sont basés sur une approche théorique qui consiste à considérer le mécanisme comme un assemblage de corps rigides.

Neubauer, Cohen et Hall [7] ont été parmi les premières personnes citées dans la littérature pour leur contribution à l'élaboration du modèle dynamique des mécanismes déformables. Ils ont étudié le mécanisme de bielle manivelle dont la bielle est supposée déformable. En supposant que l'amplitude des mouvements vibratoires est petite par rapport aux grands mouvements rigides, ils ont pu établir les équations du mouvement.

Jasinski, LEE et Sandor [8] proposent une méthode pour résoudre le problème des mécanismes plans. Ils tiennent compte des vibrations transversales et longitudinales de l'élément. Ils utilisent la méthode variationnelle de GALERKINE pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires.

G. R. Pennock et B. S. Ryu [9] proposent une formulation dynamique pour deux manipulateurs de coopération de six articulations chacun tenant et déplaçant un corps rigide. Les couples communs sont calculés quand la trajectoire désirée et l'objet sont donnés. Le système est modélisé comme une chaîne cinématique fermée simple. A tout moment, seulement six articulations sont actionnées. Les six restantes sont passives donc ont des entrées extérieures nulles (type goupille). Cette formulation est basée sur la mécanique newtonienne.

J. Y. S. Luh et Y. F. Zheng [10] déterminent un modèle dynamique pour une chaîne fermée qui se compose d'un objet tenu par deux robots en considérant le premier menant ayant à son bout une paire de pinces et le deuxième mené ayant à son bout une articulation sphérique. Pour des positions, des vitesses et des accélérations communes, les contraintes cinématiques du robot mené sont calculées quand celles du robot menant sont données.

E. Tabarah [11] s'intéresse aux procédés manufacturiers tels que la peinture, le soudage et l'ébavurage avec et sans contact entre les deux objets. La formulation du problème étant différente dans les deux cas. La trajectoire de l'outil (tenu par le 1^{er} robot) est décomposée en deux (02) trajectoires conjuguées dans un repère lié à la pièce (tenue par le 2^{ème} robot) en respectant les contraintes de vitesse et d'efforts liés au procédé (tâche avec contact). Cette paire de trajectoires est modélisée par deux (02) fonctions polynomiales de degré n .

Hadad Moussa [12] cible l'évolution des erreurs de positionnement dues aux déformations quasi-statiques des segments d'un robot ; ceci dans un but de compensation par action sur les valeurs des consignes de commande en position des variables articulaires. Il s'appuie sur l'application des concepts de base de la résistance des matériaux des poutres pour réduire le temps de calcul et permettre une correction en temps réel de la situation de l'effecteur. Il a présenté une nouvelle idée de description géométrique des bras manipulateurs, qui répond pleinement à l'objectif fixé, maintien du caractère systématique des calculs mis en œuvre dans la formulation récurrente des modèles géométrique, cinématique et dynamique et prise en charge du caractère lié au repère local vis à vis de la géométrie du segment dans la formulation de la théorie des poutres droites. Cette idée de description prend en charge par ailleurs, de manière précise, les influences des mouvements de translation sur la géométrie instantanée du bras. Il a aussi présenté les nouvelles formulations des modèles géométrique, cinématique de second ordre. Comparativement, elles restent aussi simples qu'avec le paramétrage de Denavit – Hartenberg.

Le projet de *Mitsubishi* [13, 14, 15] consiste à étudier un robot manipulateur industriel (PA-10 de Mitsubishi) à sept (07) degrés de liberté de rotation. Le projet est divisé en deux parties. La première est dédiée à l'étude de la cinématique du robot. La seconde illustre à l'aide de la toolbox « robotics », l'étude dynamique lors d'une tâche de manipulation.

Drouet Philippe et Zeghloul Saïd [16, 17] ont développé un modèle afin de compenser les erreurs au niveau de l'effecteur d'un manipulateur série. L'objectif est d'atteindre une très haute précision en position et en orientation. Le modèle décompose explicitement les erreurs géométriques et élastiques. La méthode de compensation n'offre que peu de difficultés de programmation et requiert uniquement l'identification de paramètres fonctions d'une seule variable. Il est montré que le nombre de mesures nécessaires est relativement réduit et que le processus d'identification ne souffre d'aucun problème de convergence. La méthode est appliquée à un manipulateur médical à six (06) ddl devant positionner des patients sous faisceau de protons avec une très haute précision pour le traitement du cancer. Les résultats obtenus par la simulation ainsi que par l'expérience sur site montrent la grande efficacité de la méthode de compensation.

Richard Béarée, Pierre-Jean Barre, Eric Dumetz, François Ghestem et Henri David [18, 19, 20] traitent de l'influence particulière du jerk sur le comportement dynamique d'un système de positionnement à grande cadence. Le robot cartésien trois (03) axes, utilisé comme support d'étude, est destiné au déchargement des presses à injecter le plastique. Dans ce type d'application, les critères de performances privilégiés sont la rapidité de mouvement et l'amplitude des oscillations liées aux modes de structure sollicités par la dynamique rapide du positionnement. Les performances d'une loi de mouvement à jerk contrôlé sont évaluées à partir d'un modèle analytique du système. On démontre que ce paramètre permet, d'une part, de maîtriser le comportement vibratoire des axes et d'autre part, de conserver un temps de cycle acceptable en agissant sur les gains de boucle. Enfin, des essais expérimentaux viennent confirmer les résultats théoriques.

Edouard Laroche, Philippe Celka [21, 22, 23, 24] dans leur travail proposent une méthode permettant d'identifier les dynamiques d'un manipulateur comportant des flexibilités articulaires, s'appuyant sur les mesures de la position des moteurs et de la position de l'organe terminal donné par une caméra. La méthode envisagée s'appuie sur une formulation linéaire en fonction des paramètres nécessitant le calcul des dérivées secondes à partir de la mesure bruitée des positions. Cette méthode, relativement peu coûteuse en temps de calcul, peut cependant s'avérer délicate à régler et il n'est pas évident d'obtenir des valeurs précises de paramètres. Dans ce travail, on démontre qu'une précision moyenne inférieure à 1 % peut être obtenue avec un réglage adéquat.

Payannet Dominique [25, 26] après avoir fait le bilan des erreurs statiques intervenant lors d'une tâche robotisée étudie la compensation des erreurs de précision et de réversibilité des robots. Pour la précision, il propose deux méthodes permettant la modélisation de l'erreur de position : la première utilise une tabulation de l'erreur et une interpolation à partir de cette dernière, la seconde consiste à modéliser l'erreur par des polynômes. Il présente ensuite deux méthodes de modélisation de l'erreur de situation : la première basée sur une tabulation dans un espace particulier, la seconde consistant à identifier les paramètres régissant le comportement statique du robot. A partir de ces modélisations, il développe ensuite trois méthodes permettant la correction de ces erreurs : dans l'espace de la tâche, dans l'espace des variables articulaires et en utilisant le modèle variationnel. Une modélisation statique de l'erreur de réversibilité est enfin proposée : elle

a permis de mettre en oeuvre une commande stochastique, basée sur les filtres de Kalman, réduisant l'effet de cette erreur aléatoire.

Khelifi Fouad, Bouakrif Farah [27, 28, 29] traitent de la commande non linéaire des robots manipulateurs. Ils considèrent une structure de commande nécessitant la connaissance exacte du modèle dynamique du robot, à savoir la commande passive et ont tenté d'améliorer les performances vis-à-vis des perturbations agissant sur le robot (dynamique non structurée, frottement, incertitudes paramétriques). Une modification portant sur la loi de commande a été introduite tout en garantissant la stabilité du robot en boucle fermée. L'amélioration apportée par cette alternative a été montrée par les résultats de simulation.

Dans le travail de *Niaritsiry, Tiavina ; claved, reymond (dir)* [30] il est traité de l'industrie de la haute précision, la plupart des opérations exigent l'intervention de robots pouvant fournir des mouvements très précis et hautement répétables. Or, garantir l'exactitude du mouvement (précision absolue), il est indispensable de limiter, voire d'éliminer les effets de différentes Sources d'erreur qui provoquent l'imprécision de l'organe terminal du robot, souvent à l'aide d'un calibrage. Cependant, un calibrage ne peut être appliqué pour compenser des erreurs parasites (erreurs suivant les degrés de liberté non souhaités) des robots comme, par exemple, les variations angulaires subies par l'organe terminal d'un robot à trois (03) degrés de liberté en translation. Le but principal de son travail de thèse est d'identifier et de classifier ces différentes sources d'erreur selon leur importance et d'établir des règles de conception de robots parallèles à articulations flexibles afin d'assurer une précision absolue optimale par la limitation des erreurs parasites. Les robots étudiés dans ce travail sont de la famille des robots delta trois (03) où chaque chaîne cinématique est formée par un guidage en translation et un parallélogramme de l'espace. Ces robots ont les caractéristiques suivantes : trois (03) degrés de liberté en translation (x,y,z), des sources d'erreurs allant de ± 1 mm à ± 4 mm suivant les trois axes (commandés par les actionneurs linéaires à entraînement direct), des répétabilités nanométriques (dues à l'absence de jeu et de frottement dans la cinématique), des résolutions de quelques nanomètres (qui ne sont limitées que par les capteurs utilisés), un encombrement allant de 1.5 dm^3 suivant les versions. L'étude des effets des différentes sources d'erreur sur la précision absolue des robots s'articule autour des points suivants : les éléments composants la structure mobile de base d'un robot delta trois (03) : le guidage

en translation et le parallélogramme de l'espace ; ceci permet d'identifier les paramètres géométriques sensibles. L'optimisation de ces paramètres géométriques entraîne la modification de la forme géométrique de la structure qui est l'une des solutions pour limiter les erreurs parasites afin de garantir la précision voulue ; l'assemblage, analysé en fonction de la disposition ou de l'orientation, de ces deux structures de base du robot delta trois (03). Elle permet de déterminer la répercussion des erreurs parasites sur chaque structure vers la position ou la rotation de l'organe terminal du robot. Ceci permet de déterminer l'influence de leur choix et de leur emplacement sur la précision de l'organe terminal du robot. L'analyse de l'influence de chaque source d'erreur tels que les défauts de fabrication, la variation de température, les défauts d'assemblage, les effets de charges et leurs combinaisons a été faite principalement à l'aide de la méthode des éléments finis. Chaque résultat obtenu par un développement théorique (analytique et élément finis) a été vérifié et validé expérimentalement. Les règles générales de conception des robots à articulations flexibles, établies à partir des résultats de l'étude de chaque structure de base ainsi que des résultats de l'étude comparative des variantes de disposition de ces dernières, sont ensuite appliquées pour optimiser la conception des trois prototypes du robot Delta trois (03) dans le but de grandir la précision absolue et selon l'application voulue. Ce travail contribue à la conception de robots de très haute précision à structure flexible afin d'améliorer la précision absolue de l'organe terminal du robot d'une part et est un outil indispensable pour faciliter le calibrage d'un robot d'autre part. La description et la modélisation utilisées ne sont en fait que des modèles théoriques de systèmes mécaniques. Pour commander et communiquer avec ces systèmes, il faut créer un langage, donc effectuer une programmation et utiliser l'informatique. Ce genre d'outils est généralement développé pour une utilisation spécifique en industrie. Rares sont les outils universels. Chaque programme est développé spécialement pour un robot activant dans un domaine déterminé et aux caractéristiques définies au préalable.

A. *Belaidi* [31] leur travail traite un modèle des erreurs systématiques et des erreurs aléatoires des robots industriels ayant pour objectif, une comparaison de l'erreur obtenue par le modèle et la valeur de l'erreur admissible. Il permette aussi la compensation ou la correction des erreurs, afin de pouvoir atteindre le point ou la trajectoire désirée.

Cette partie présente et commente les travaux déjà effectués concernant différentes problématiques que peut rencontrer le concepteur d'un robot manipulateur. Les thèmes abordés sont les suivants :

- Conception et modélisation des robots,
- Conception et modélisation des erreurs.

Notre travail s'inscrit dans ce cadre et a pour but de présenter une étude globale d'un modèle de robot tout en partant de son schéma cinématique et en faisant sa modélisation géométrique, cinématique, dynamique, le modèle des erreurs ainsi que sa simulation afin de mieux appréhender les problèmes liés à la modélisation des robots-tout en lui donnant les bases mathématiques nécessaires pour comprendre les principes des méthodes utilisées et de mettre une synthèse des techniques les plus récentes dans ce domaine. Pour ce, on utilise des méthodes numériques pour la résolution des problèmes mathématiques ainsi que les méthodes de calculs assistées par ordinateur.

Notre mémoire est subdivisé en quatre parties :

La première partie traite de quelques notions générales sur les robots manipulateurs, leurs champs d'application, leurs constituants mécaniques, leurs architectures, les modélisations géométrique, cinématique et dynamique des bras manipulateurs, une classification des robots et enfin les notions générales de la planification des mouvements.

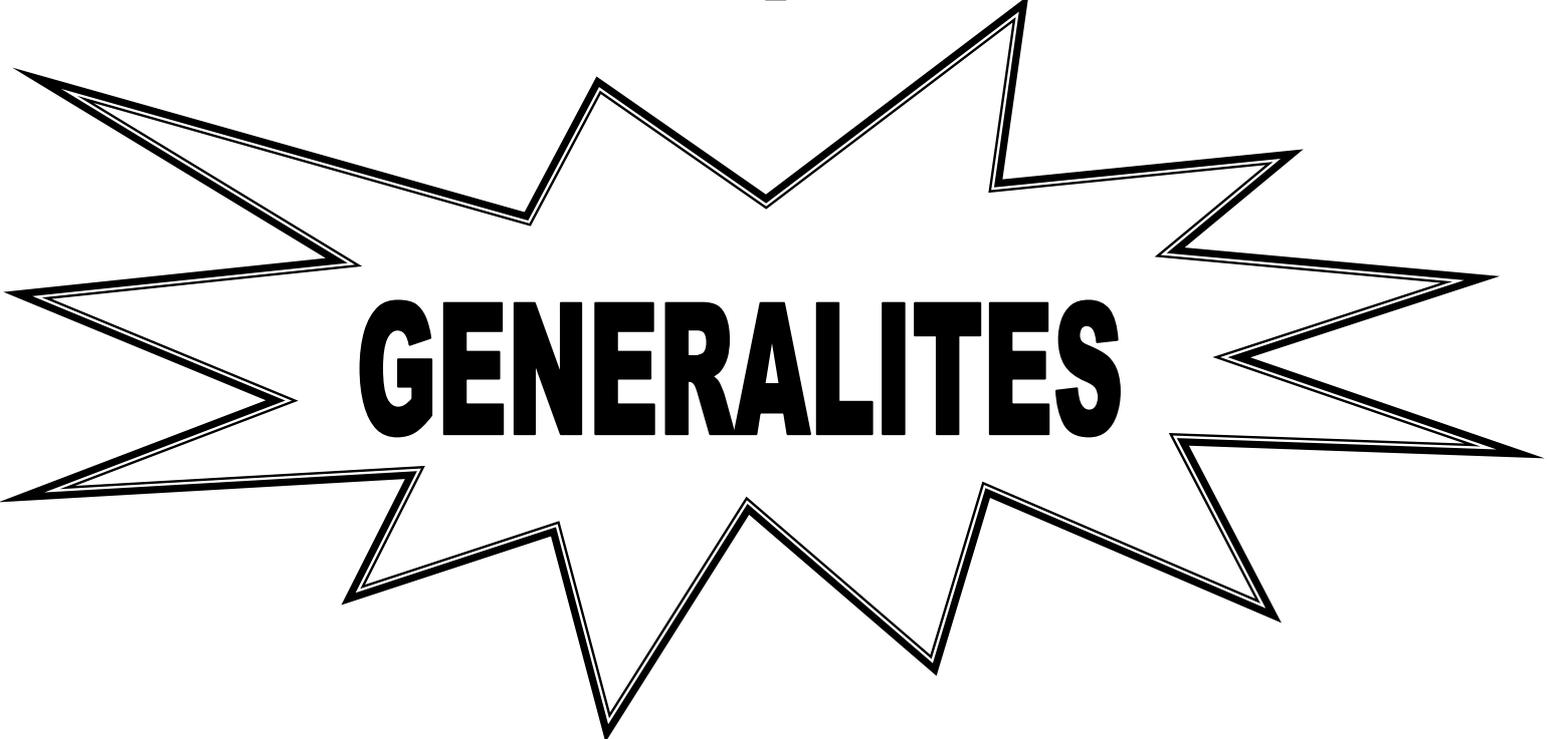
La deuxième partie est consacrée à la classification des erreurs de robots industriels ainsi que leur modélisation.

Dans la troisième partie, nous présentons la modélisation géométrique directe et inverse, cinématique, dynamique et le modèle des erreurs du modèle de robot considéré. Finalement, une simulation informatique faite à partir d'un programme écrit sous Visuel lisp pour la première partie et sous Matlab pour la deuxième partie est présentée.

La quatrième partie est relative aux remèdes des erreurs statiques et dynamiques d'un robot manipulateur.

Nous terminons le mémoire par une conclusion générale et par des perspectives envisagées.

chapitre 1



GENERALITES

CHAPITRE 1

GENERALITES

1.1 Introduction

Ce premier chapitre, sera consacré aux généralités. Nous donnons une brève présentation des systèmes mécaniques articulés et la définition du terme «ROBOT» ainsi qu'un aperçu général sur la morphologie et description des systèmes mécaniques articulés avec la terminologie des termes couramment utilisés.

1.2 Définition d'un robot industriel

L'Association Française de Normalisation (AFNOR) définit un robot industriel comme étant un manipulateur commandé en position, programmable, polyvalent, à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel [32].

1.3 Classification des robots

Dans une tentative de classification, deux définitions ont été proposées pour qualifier un robot. L'une des deux définitions provient de la J.I.R.A (Japon Industrial Robot Industry Association) qui décrit un robot comme étant un système versatile doté d'une mémoire et pouvant effectuer des mouvements comme ceux d'un opérateur humain. De son côté, le Robot Institute of America définit un robot comme étant un manipulateur à fonctions multiples pouvant être programmé pour réaliser automatiquement des tâches variées éventuellement répétitives. Ces deux définitions sont très grossières et de façon à déduire plus précisément les robots. La J.I.R.A a répertorié six classes de robots [33] :

1.3.1 Manipulateur manuel

Ce système est un robot qui est actionné par un opérateur humain.

1.3.2 Robot à séquence de travail fixe

Cet appareil réalise de façon répétitive une succession d'opérations en suivant un protocole fixé à l'avance mais la séquence des différentes étapes de travail du robot est difficile à modifier.

1.3.3 Robot à séquence de travail évolutive

Ce type de robot a les mêmes caractéristiques que le robot précédent. Il se positionne automatiquement de façon éventuellement répétitive en des sites prédéterminés. Cependant dans ce système, la séquence des diverses opérations que doit effectuer le robot est facilement modifiée.

1.3.4 Robot copieur

Ce type du robot est capable de reproduire des mouvements qui sont exécutés sans contrôle d'un opérateur humain et qui sont enregistrés dans une mémoire. Ce type d'opération sous-entend aussi que l'ensemble des opérations que doit réaliser le robot a été enregistré.

Par exemple, la position du robot à un instant donné mais aussi la tâche qu'il doit réaliser en chaque point de sa trajectoire. En fonctionnement en esclave, le robot copieur exécute automatiquement et de façon éventuellement répétitive une séquence opératoire qui a été enregistrée (Play back robot).

1.3.5 Robot à commande numérique

Le robot à commande numérique présente la particularité d'être contrôlé de façon numérique. Il exécute des opérations enregistrées comme un robot copieur et directement programmable.

1.3.6 Robot intelligent

Ce type de robot est doté de moyens sensoriels de perception de l'environnement comme le sens visuel, le sens tactile et il est capable de s'adapter au changement éventuel des conditions de travail ou de l'environnement tout en continuant à exécuter une tâche donnée, programmée ou enregistrée à l'avance.

1.4 Structure d'un robot

Il se compose de sept (07) parties principales : la structure mécanique articulée, la source d'énergie, les actionneurs, les transmissions, les capteurs internes, les capteurs externes et le système de commande.

La structure mécanique articulée représente des articulations. La mobilité d'un segment par rapport à un autre s'exprime en terme de degrés de liberté. La structure se compose de trois (03) parties : le véhicule pour les robots mobiles (absent pour les robots à base fixe), le porteur et l'organe terminal qui peuvent être généralement une pince à deux (02) ou trois (03) doigts que l'on nomme préhenseur. La source d'énergie peut être d'origine pneumatique, hydraulique ou électrique [01].

1.5 Utilisation des robots

Les robots industriels sont presque toujours des robots de substitution utilisés dans trois classes principales d'applications [34] :

- Manipulation de pièces (opération de transfert,...),
- Manipulation d'outils (opération de soudage,...),
- Assemblage.

1.6 Description des robots

Une structure polyarticulée est un ensemble de corps liés les uns par rapport aux autres par des liaisons appelées articulations. Les articulations rencontrées dans la plupart des réalisations technologiques appartiennent à la classe cinq et sont de type : rotoïde ou prismatique [01].

1.6.1 Structure à chaînes ouvertes simples

Se sont les plus répandus, ils peuvent être représentés par la figure suivantes :

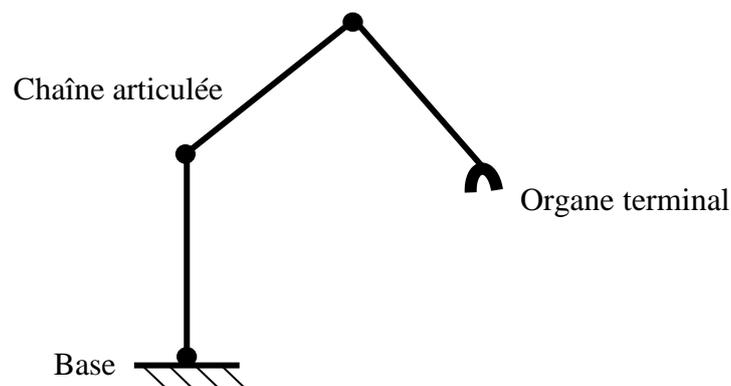


Figure 1.1 : Robot à chaîne ouverte simple.

1.6.2 Structure à chaînes arborescentes

Ces robots sont constitués de plusieurs robots à chaîne ouverte simple qui sont liées à une seule base comme le montre la figure (1.2) [35] :

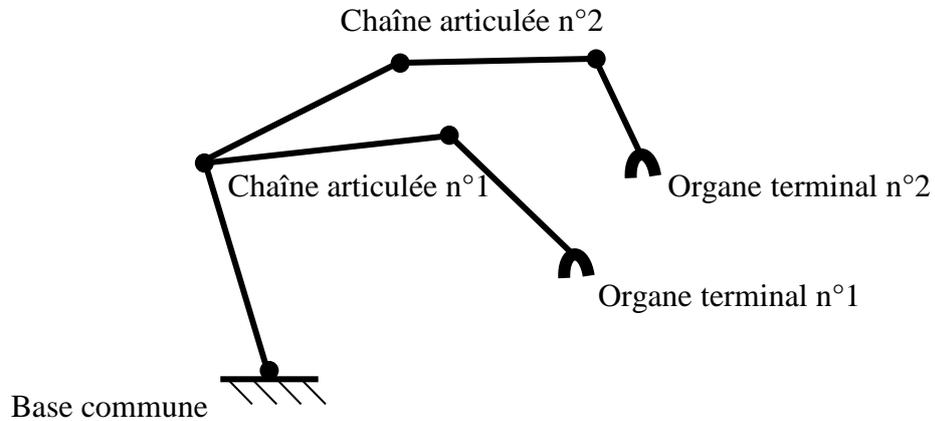


Figure 1.2 : Robot à chaîne arborescente.

1.6.3 Structure avec fermeture de chaîne

Dans cette catégorie, la structure des robots contient des boucles cinématiques, ont pour avantage essentiel d'augmenter la rigidité ainsi que la précision. Elles permettent en outre un meilleur équilibrage statique. Ils peuvent être représentés par le schéma suivant [35] :

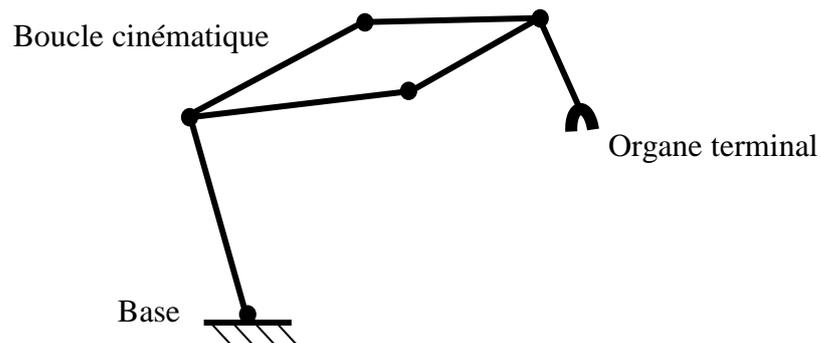


Figure 1.3 : Robot à chaîne fermée.

Les systèmes polyarticulés sont formés de deux (02) parties :

- Le porteur : représente la chaîne cinématique simple ou complexe. Cette chaîne est constituée d'un ensemble de segments reliés entre eux par des articulations ou joints.

- L'organe terminal : dispositif servant à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétique,...,ect) où à les transformer (outils, torche de soudage,...,ect), donc l'organe terminal est l'interface entre le robot et son environnement.

1.6.4 Articulation (ou joint)

Une articulation lie deux segments (corps) successifs en limitant le nombre de degrés de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit m le nombre de degrés de liberté résultant appelé aussi mobilité de l'articulation ($0 \leq m \leq 6$). En robotique, dans la majorité des cas, $m = 1$. Ce qui revient à dire que l'articulation est simple. On distingue deux types d'articulation simples [01, 32] :

Articulation rotoïde (R) : type pivot. Le mouvement entre les deux (02) corps se réduit à une rotation autour d'un axe commun modélisé de la manière suivante :

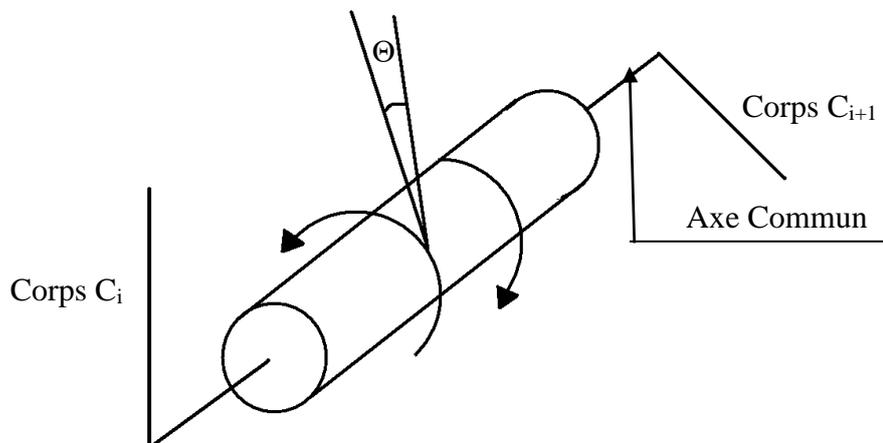


Figure 1.4 : Schéma d'une articulation rotoïde.

La situation relative entre les deux (02) corps est donnée par l'angle Θ autour de l'axe de l'articulation.

Articulation prismatique (P ou T) : type glissière. Le mouvement entre les deux corps se réduit à une translation le long d'un axe commun modélisé de la manière suivante :

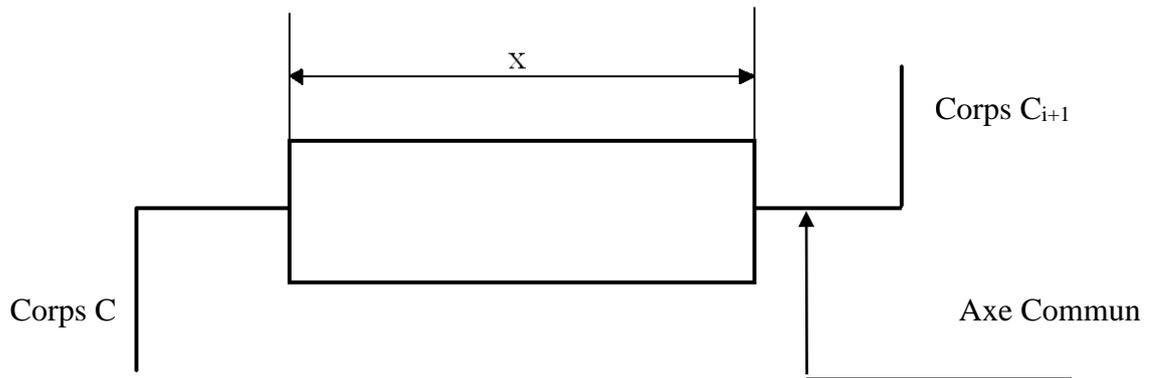


Figure 1.5 : Schéma d'une articulation prismatique.

La situation relative entre les deux (02) corps est mesurée par la distance x le long de l'axe.

Remarque : Normalement chacune de ces articulations fait référence à un degré de liberté, c'est-à-dire, la différente position (translations ou rotations) qui peut faire une structure robotisée.

1.6.5 Espace articulaire (ou espace de configuration)

On appelle configuration articulaire (ou simplement configuration) l'état du robot qui représente la situation de ses différents corps. La solution consiste à utiliser des variables articulaires ou coordonnées. L'espace de ces variables est appelé espace articulaire. La dimension de ce dernier est égale au nombre de variables articulaires indépendantes qui correspond au nombre de degrés de liberté de la structure [01, 35, 36].

Remarque : pour les structures à chaînes ouvertes simples ou arborescentes, les variables articulaires sont généralement indépendantes ce qui n'est pas le cas pour les structures à chaînes fermées pour lesquelles il existe des relations entre les variables. On considère qu'un robot à n degrés de liberté dispose de n articulations motorisées (hors les structures avec fermeture de chaînes).

1.6.6 Espace de travail (ou espace opérationnel)

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal (autant d'espaces opérationnels que d'organes terminaux). La dimension m de cet

espace est au maximum égale à six (06) : trois variables indépendantes de position et trois variables indépendantes d'orientation [34].

Par exemple, on peut voir dans la figure (1.6) diverses morphologies pour les porteurs (bras du robot sans considérer son organe terminal ou poignet) d'un robot manipulateur. On peut identifier sur la figure (1.6) des articulations rotoïdes et prismatiques en diverses configurations, toutes permettant trois degrés de liberté [32].

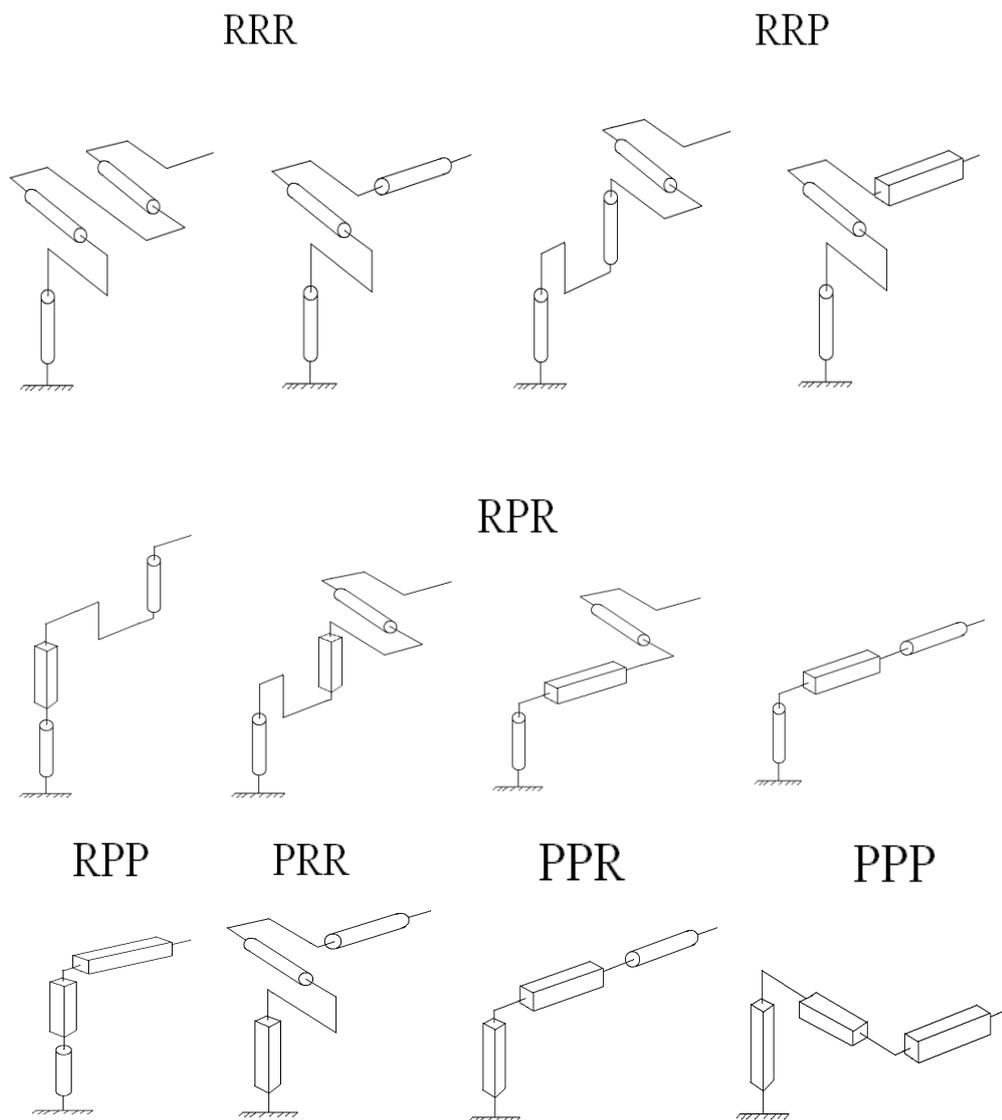


Figure 1.6 : Architecture des porteurs.

1.6.7 Redondance

Un robot est redondant quand le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre d'articulations motorisées. A titre d'exemple et pour les chaînes

ouvertes simples, les combinaisons qui peuvent donner des structures redondantes sont [01] :

- nombre d'articulations motorisées > 6 ,
- Nombre d'articulations rotoïdes d'axes concourants > 3 ,
- nombre d'articulations rotoïdes d'axes parallèles > 3 ,
- nombre d'articulations prismatiques > 3 .

Remarque : Pour une structure comportant plusieurs organes terminaux, on évalue la redondance pour chaque organe terminal. Pour le même organe terminal, on compare le nombre de degrés de liberté de l'espace articulaire avec celui de l'espace opérationnel.

1.6.8 Configurations singulières

Pour tous les robots (redondants ou non) une configuration est singulière si le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur à la dimension de l'espace opérationnel.

Remarque : un robot non redondant peut être le vis-à-vis de certaines tâches.

1.6.9 Repérage de Denavit-Hartenberg (D-H)

La modélisation des robots de façons systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées : méthode de Denavit-Hartenberg [37], Khalil-Kleifinger [38], méthode de Paul [39], méthode de Megahed [40]. La plus répandue étant celle de Denavit-Hartenberg modifiée plus tard par Khalil-Kleifinger.

Ce repérage convient aussi bien pour les chaînes ouvertes simples, complexes, arborescentes et fermées [41, 42, 43, 44, 45]. Les notions qui vont suivre permettent de mettre en équation tous les modèles de robots.

1.6.9.1 Règles et conventions

- q_i est la variable de l'articulation i ,
- C_i représente le corps i ,
- Les corps sont supposés rigides, reliés par des articulations (rotoïdes ou prismatiques) idéales, sans jeu mécanique et non élastiques,
- Le repère R_i est lié au corps C_i ,
- L'axe Z_i du repère R_i est porté par l'axe de l'articulation i .

1.6.9.2 Description des robots à chaînes ouvertes simples

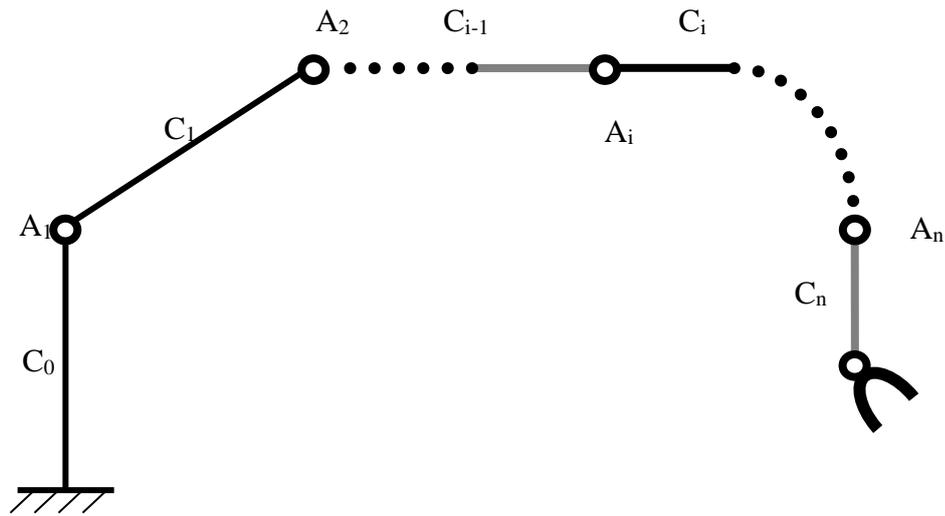


Figure 1.7 : Schéma d'un manipulateur à chaîne ouverte simple.

Le robot est composé de n articulations et $n+1$ corps. L'articulation A_i relie le corps C_{i-1} au corps C_i . C_0 est la base du robot, C_n porte l'organe terminal. L'axe x_{i-1} est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_{i-1} et z_i . On introduit quatre (04) paramètres pour exprimer le passage de R_{i-1} à R_i [01, 32].

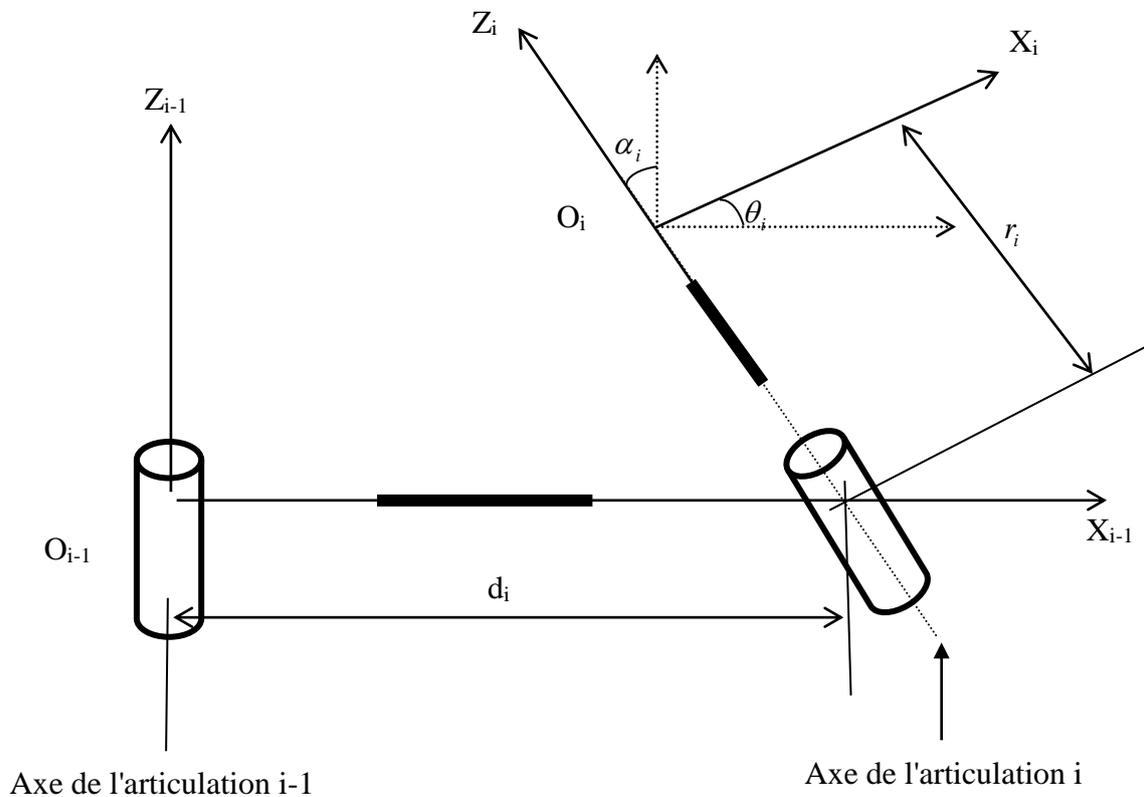


Figure 1.8 : Repérage de Denavit-Hartenberg.

- d_i : distance entre z_{i-1} et z_i le long de l'axe x_{i-1} (projection orthogonale de $\overline{O_{i-1}O_i}$ sur l'axe x_{i-1}),
- α_i : angle formé par les axes z_{i-1} et z_i qui correspondre à la rotation autour de x_{i-1} ,
- θ_i : angle formé par les axes x_{i-1} et x_i qui correspondre à la rotation autour de z_i ,
- r_i : distance entre x_{i-1} et x_i le long de l'axe z_i (projection orthogonale de $\overline{O_{i-1}O_i}$ sur l'axe z_i).

Si on prend q_i comme coordonnée généralisée de l'articulation A_i , cela veut dire que si :

A_i est rotoïde : $q_i = \theta_i$

A_i est prismatique : $q_i = r_i$

Pour résumer cela, on introduit la variable binaire σ_i telle que :

$$q_i = \overline{\sigma_i} \theta_i + \sigma_i r_i \quad \text{avec : } \overline{\sigma_i} = 1 - \sigma_i$$

$\sigma_i = 1$ si A_i est prismatique.

$\sigma_i = 0$ si A_i est rotoïde.

En définitive et en utilisant tous les résultats précédents :

$${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_i) Trans(x, d_i) Rot(z, \theta_i) Trans(z, r_i) \quad (1.01)$$

$$Rot(x, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.02)$$

$$Trans(x, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.03)$$

$$Rot(z, \theta_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.04)$$

$$Trans(x, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.05)$$

En définitive, on obtient la matrice de transformation ${}^{i-1}\tilde{T}_i$:

$${}^{i-1}\tilde{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & d_i \\ c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.06)$$

Remarque : on peut écrire la matrice ${}^{i-1}\tilde{T}_i$ de la manière suivante :

$${}^{i-1}\tilde{T}_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}A_i & {}^{i-1}P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où :} \quad {}^{i-1}A_i = A(x, \alpha_i).A(z, \theta_i)$$

La matrice de transformation homogène qui donne le passage de R_{i-1} à R_i sera :

$${}^i\tilde{T}_{i-1} = Trans(z, -r_i).Rot(z, -\theta_i).Trans(x, -d_i).Rot(x, -\alpha_i) \quad (1.07)$$

$${}^i\tilde{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} & & -d_i c\theta_i \\ & {}^{i-1}A_i^T & -d_i s\theta_i \\ & & -r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.08)$$

1.7 Modélisation des bras manipulateurs

Afin de procéder à la conception, la simulation ou la commande des robots, on dispose de trois modèles utilisés d'une manière individuelle ou combinée pour réaliser ces modélisations qui sont [01, 34] :

- Le modèle géométrique (direct et inverse),

- Le modèle différentiel ou cinématique (direct et inverse),
- Le modèle dynamique (direct et inverse).

1.7.1 Modélisation géométrique

1.7.1.1 Le modèle géométrique direct (MGD)

C'est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Ces variables sont définies par la matrice unicolonne $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$. La matrice de l'organe terminal est définie par m coordonnées, telle que :

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \quad \text{avec : } m \leq 6$$

Le modèle géométrique direct est défini par l'équation :

$$X = F(q) \quad (1.09)$$

Si la structure est ouverte simple ou arborescente, le calcul de X implique celui de l'organe terminal. Si la structure est fermée, il faut ajouter les relations liant les variables articulaires pour la fermeture de chaîne.

1.7.1.2 Le modèle géométrique inverse (MGI)

Le modèle géométrique inverse consiste à utiliser les coordonnées articulaires pour calculer les coordonnées opérationnelles (positions désirées de l'organe terminal). C'est l'inverse du MGD :

$$q = F^{-1}(X) \quad (1.10)$$

En général, il n'y a pas unicité de la solution au problème du MGI. En pratique, trois (03) cas peuvent se présenter :

Cas 1 : Lorsqu'on a limitation du nombre de degrés de liberté et de la dimension des segments, l'organe terminal ne pouvant pas accéder à une position désirée, alors, il n'y a pas de solution au problème.

Cas 2 : Lorsque le robot se trouve dans une configuration singulière (redondance locale ou vis-à-vis de la tâche), l'organe terminal ne pouvant pas effectuer certaines tâches

(limitation des déplacements et/ ou des rotations) alors, il perd un certain nombre de degrés de liberté et les solutions au problème sont infinies.

Cas 3 : Les solutions à la forme explicite de l'équation $q = F^{-1}(X)$ sont en nombre fini.

En général, pour résoudre le MGI, il n'existe pas de méthodes analytiques mais d'autres formes de résolution adaptées à des classes cinématiques données [44, 46]. (Méthode de PIEPER, méthode de PAUL, etc...). Ce modèle présente un grand intérêt pour les robots programmés par apprentissage ou langage de haut niveau.

1.7.2 Modélisation cinématique

1.7.2.1 Le modèle différentiel direct (MDD)

Il décrit les variations élémentaires des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires :

$$dX = J(q)dq \quad (1.11)$$

Le terme $J(q)$ désigne le jacobien (matrice de dimension $m \times n$) :

$$J(q) = \frac{\partial X}{\partial q} \quad (1.12)$$

Ce modèle permet de déterminer par itération les coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées articulaires. Si on remplace le calcul différentiel par le calcul des dérivées par rapport au temps, le MDD devient :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (1.13)$$

Où : \dot{X} représente les vitesses opérationnelles et \dot{q} les vitesses articulaires. Sous forme matricielle, l'équation devient :

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\text{Où : } J_{ij} = \frac{\partial F_i(q)}{\partial q_j} \quad i = (1, \dots, m) \quad \text{et} \quad j = (1, \dots, n)$$

1.7.2.2 Le modèle différentiel inverse (MDI)

A partir d'une configuration q , on calcule la différentielle articulaire dq pour satisfaire une différentielle des coordonnées opérationnelles dX imposée. Si les

différentielles sont remplacées par les dérivées par rapport au temps, on constitue le modèle cinématique inverse.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} = [J_{ij}]^{-1} \begin{bmatrix} \dot{X} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Pour obtenir le modèle différentiel inverse, on peut soit dériver le modèle géométrique inverse (PAUL) (méthode analytique) soit inverser le modèle différentiel direct d'une manière plus générale (résolution analytique ou numérique).

1.7.3 Modélisation dynamique

Elle exprime une équation mathématique qui donne la relation entre les couples (et/ou les moments) appliqués aux actionneurs et les positions, les vitesses et les accélérations articulaires. Elle est de la forme :

$$\Gamma = g\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, F\right) \quad (1.16)$$

Où :

- Γ : vecteur des couples (et/ou forces) des actionneurs (On considère un couple pour une articulation rotoïde et une force pour une articulation prismatique),
- q : vecteur des positions articulaires,
- \dot{q} : vecteur des vitesses articulaires,
- \ddot{q} : vecteur des accélérations articulaires,
- F : forces extérieures (et couples) exercées par l'organe terminal.

Conventionnellement, on dira que la relation (1.16) représente le modèle dynamique inverse ou tout simplement le modèle dynamique. Alors le modèle dynamique direct est celui qui exprime les accélérations en fonction des positions, des vitesses et des couples des actionneurs.

$$\ddot{q} = h\left(q, \dot{q}, \Gamma, F\right) \quad (1.17)$$

Pour obtenir le modèle dynamique des robots, on dispose de deux formalismes qui sont les plus souvent utilisés. Il s'agit de :

- Formalisme de LAGRANGE,
- Formalisme de NEWTON-EULER.

Nous allons utiliser les notions suivantes :

a_j : vecteur unitaire sur l'axe x_j .

F_j : résultante des forces extérieures sur le corps C_j .

f_j : force extérieure sur C_j par son antécédent en O_j .

f_{ij} : force exercée par le corps C_j sur l'environnement en O_j .

g : accélération de la pesanteur.

G_j : centre de gravité du corps C_j .

τ_j : tenseur d'inertie du corps C_j par rapport au repère parallèle à R_j d'origine G_j .

$j\tau_j$: tenseur d'inertie du corps C_j par rapport au repère R_j .

$$\text{Où : } j\tau_j = \begin{bmatrix} \iiint (y^2 + z^2) dm & -\iiint (xy) dm & -\iiint (xz) dm \\ -\iiint (xy) dm & \iiint (x^2 + z^2) dm & -\iiint (yz) dm \\ -\iiint (xz) dm & -\iiint (yz) dm & \iiint (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

$$\text{On le note aussi : } j\tau_j = \begin{bmatrix} xx_j & xy_j & xz_j \\ xy_j & yy_j & yz_j \\ xz_j & yz_j & zz_j \end{bmatrix}$$

l_j : vecteur $O_{j-1}O_j$ qui lie les origines des repères R_{j-1} et R_j .

m_j : masse du corps C_j .

N_j : résultante des moments extérieurs exercés sur C_j autour de G_j .

n : couple exercé sur C_j par son antécédent.

n_{ij} : couple exercé par C_j sur l'environnement.

ρ_j : vecteur O_jG_j .

v_j : vecteur vitesse absolue du point O_j .

v_{gj} : vecteur vitesse absolue du point G_j .

ω_j : vecteur vitesse de rotation du point G_j .

\dot{v}_j : vecteur accélération absolue du point O_j .

\dot{v}_{gl} : vecteur accélération absolue du point G_j .

$\dot{\omega}_j$: vecteur accélération de rotation du point G_j .

1.7.3.1 Formalisme de LAGRANGE

Il décrit les équations en terme de travail et d'énergie du système qui donne ce qui suit quand l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul [45, 46, 47, 48].

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{avec : } i = (1, \dots, n) \quad (1.18)$$

L est la fonction de LAGRANGE égale à la différence entre l'énergie cinétique totale (E) et l'énergie potentielle totale (U) du système. L'expression de l'énergie cinétique est :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (1.19)$$

A : matrice d'inertie du robot d'éléments génériques A_{ij} .

A_{ij} : sont fonction des variables articulaires q .

Avec : $i = (1, \dots, n)$ et $j = (1, \dots, n)$.

Le lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} - U \quad (1.20)$$

Comme l'énergie potentielle est aussi fonction des variables articulaires q , alors, d'après l'équation (1.18) et après dérivation :

$$\Gamma_i = [A_{i1}, \dots, A_{in}] \ddot{q} + \dot{q}^T \left[\frac{\partial A_{i1}}{\partial q}, \dots, \frac{\partial A_{in}}{\partial q} \right] \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \right] \dot{q} + \frac{\partial u}{\partial q_i} \quad (1.21)$$

Où encore :

$$\Gamma_i = \left[A_{i1} \ddot{q}_1 + \dots + A_{in} \ddot{q}_n \right] + \left[B_i^{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + B_i^{1n} \dot{q}_1 \dot{q}_n + B_i^{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dots + B_i^{(n-1)n} \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \right] + \left[C_{i1} \dot{q}_1^2 + \dots + C_{in} \dot{q}_n^2 \right] + Q_i \quad (1.22)$$

Elle s'écrit sous la forme matricielle de la manière suivante :

$$\Gamma = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + Q \quad (1.23)$$

B : matrice des termes de Coriolis d'éléments génériques B_i^{jk} de dimension $[n \times n(n-1)/2]$.

C : matrice des termes centrifuges d'éléments génériques C_{ij} de dimension $(n \times n)$.

$$\dot{q}\dot{q} = \left[\dot{q}_1 \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_1 \dot{q}_n, \dot{q}_2 \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \right]^T$$

$Q = [Q_1, \dots, Q_n]^T$: vecteur des forces de gravité.

On identifie les expressions des équations (1.21) et (1.22) :

$$B_i^{jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad (1.24)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \quad (1.25)$$

$$Q_i = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \quad (1.26)$$

Où A, B, C et Q représentent les coefficients dynamiques du robot qui sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Avec les équations d'un système mécanique articulé, on forme un système de n équations différentielles couplées, non linéaires et du second ordre.

Propriétés des coefficients dynamiques

Termes de Coriolis :

$$B_i^{jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad (1.27)$$

Avec :

$$\begin{aligned} B_i^{jl} &= -B_l^{ij} & \text{si } j \leq i \text{ et } j \leq l \\ B_l^{jj} &= -B_j^{ij} & \text{si } j \leq i \\ B_l^{jk} &= 0 & \text{si } j \leq l \end{aligned}$$

Termes centrifuges :

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i} \quad (1.28)$$

Avec :

$$\begin{aligned} C_{ij} &= -\frac{1}{2} B_j^{ij} & \text{si } j > i \\ C_{ii} &= 0 \end{aligned}$$

Pour calculer les dérivées et dérivées partielles du lagrangien, on utilise la méthode de UICKER qui fait appel aux notions essentielles suivantes :

- La notion de matrice de passage homogène,
- La notion de matrice d'inertie homogène.

On prend un système à chaîne cinématique simple et un corps S_i qui fait partie de cette chaîne. Soient les repères successifs $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$ et M_i un point de S_i tels que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_0 M_i} &= [O_0 M_i] \\ \overrightarrow{O_i M_i} &= [O_i M_i] \\ [O_0 M_i] &= [{}^0 T_i] \cdot [O_i M_i] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Avec : $\|O_i M_i\| = cste$ si le corps S_i est rigide.

En dérivant l'équation (1.29), on obtient :

$$V^0(M_i) = \frac{d^0}{dt} [O_0 M_i] = \frac{d^0}{dt} ([{}^0 T_i] \cdot [O_i M_i]) \quad (1.30)$$

Quant à l'énergie cinétique, elle sera égale à :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \int [V^0(M_i)]^2 dm \quad (1.31)$$

Alors :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{Trace} \left(\left[\frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_k} \right] \cdot \left[\int_{S_k} [O_i M_i] \cdot [O_i M_i]^T dm \right] \cdot \left[\frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_l} \right] \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (1.32)$$

$[J_i] = \int_{S_i} [O_i M_i] \cdot [O_i M_i]^T dm$ représente la pseudo matrice d'inertie d'ordre (4x4) relative à

S_i dans le repère R_i de la chaîne cinématique considérée. Elle est constituée par :

Le moment d'ordre 0 de S_i qui est en fait m_i (masse de S_i).

Le moment d'ordre 2 de S_i qui est $m_i \times \overrightarrow{O_i G_i}$ (G_i est le centre de masse de S_i).

Le moment d'ordre 2 de S_i qui est la matrice d'inertie $[I_i]$ en O_i dans le repère R_i .

$$[I_i] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[J_i] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) & -I_{xy} & -I_{xz} & m\bar{x} \\ -I_{xy} & \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) & -I_{yz} & m\bar{y} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

L'expression de E_{ck} sera alors :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{Trace} \left(\left[\frac{\partial^0 T}{\partial q_i} \right] \cdot [J_i] \cdot \left[\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_l} \right] \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (1.34)$$

Comme l'énergie cinétique totale est $E_c = \sum_{i=1}^n E_{ci}$ donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{i=1}^i \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{Trace} \left(\left[\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \right] \cdot [J_i] \cdot \left[\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_l} \right] \right) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

$$E_c = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \left[\sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \right] \cdot [J_i] \cdot \left[\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_l} \right] \right) \right] \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (1.35)$$

On pose :

$$A_{kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \right] \cdot [J_i] \cdot \left[\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_l} \right] \right)$$

Alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\dot{q} \right] \cdot [A] \cdot \left[\dot{q} \right] \quad (1.36)$$

On peut donner les expressions des coefficients dynamiques :

Expression de la matrice d'inertie

Les éléments qui constituent la matrice $[A]$ sont exprimés de la manière suivante :

$$A_{kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\Omega_{ok} {}^0T_i \right] \cdot [J_i] \cdot \left[\Omega_{ol} {}^0T_i \right]^T \right) \quad (1.37)$$

Expression de la matrice des termes de Coriolis

$$B_{i,kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\Omega_{ok} \Omega_{ol} {}^0T_i \right] \cdot [J_i] \cdot \left[\Omega_{ok} {}^0T_i \right]^T \right) \quad (1.38)$$

Expression de la matrice des termes centrifuges

$$C_{kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\Omega_{ol} \Omega_{ol} {}^0T_i \right] \cdot [J_i] \cdot \left[\Omega_{ol} {}^0T_i \right]^T \right) \quad (1.39)$$

Expression du vecteur force de gravité

L'expression de l'énergie cinétique étant $E_p = \sum_{i=1}^n (-m_i g T_i u_i)$ avec :

$$G_i = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

Donc on a : $G = \sum_{i=1}^n -m_i g \left[\frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_l} \right]$ où encore : $G_i = \sum_{i=1}^n -m_i g {}^0T_i \Omega_{oi}$

$$\text{Avec :} \quad \Omega_{oi} = {}^0T_i \Omega_{ii} {}^0T_i \quad \text{et} \quad \Omega_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\sigma_i) & 0 & 0 \\ (1-\sigma_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_i = 0$ si la liaison est rotoïde.

$\sigma_i = 1$ si la liaison est prismatique .

1.7.3.2 Formalisme de NEWTON-EULER

Il est adapté à la construction du modèle dynamique inverse. Il permet le dimensionnement de la structure et des actionneurs. Le caractère itératif de ce formalisme réduit le temps de calcul par rapport au formalisme de LAGRANGE [45, 46, 47, 48]. Il est basé sur une double récurrence : une récurrence avant la base du robot vers l'effecteur en utilisant la formule de composition pour calculer les vitesses et accélérations donc, le

torseur dynamique et une récurrence arrière de l'effecteur vers la base pour calculer les couples des actionneurs en exprimant le bilan des efforts pour chaque corps. La composition des vitesses donne :

$$\omega_j = \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j a_j \quad (1.40)$$

$$v_j = v_{j-1} + \omega_{j-1} \wedge L_j + \sigma_j \dot{q}_j a_j \quad (1.41)$$

On dérive ces deux (02) expressions par rapport au temps pour obtenir la composition des accélérations :

$$\dot{\omega}_j = \dot{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \left(\ddot{q}_j a_j + \omega_{j-1} \wedge \dot{q}_j a_j \right) \quad (1.42)$$

$$\dot{v}_j = \dot{v}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \wedge L_j + \omega_{j-1} \wedge \left(\omega_{j-1} \wedge L_j + \sigma_j \dot{q}_j a_j \right) + \sigma_j \left(\ddot{q}_j a_j + \omega_{j-1} \wedge \dot{q}_j a_j \right) \quad (1.43)$$

On arrange l'expression (1.43) comme suit :

$$\dot{v}_j = \dot{v}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \wedge L_j + \omega_{j-1} \wedge \left(\omega_{j-1} \wedge L_j \right) + \sigma_j \left(\ddot{q}_j a_j + 2\omega_{j-1} \wedge \dot{q}_j a_j \right) \quad (1.44)$$

On peut utiliser cette dernière expression pour déterminer la vitesse du centre de gravité, à savoir :

$$\dot{v}_{Gj} = \dot{v}_j + \omega_j \wedge \left(\omega_j \wedge S_j \right) \quad (1.45)$$

Ce qui permet d'obtenir le torseur dynamique :

$$F_j = m_j \dot{v}_{Gj} \quad (1.46)$$

$$N_j = \tau_j \dot{\omega}_j + \omega_j \wedge \left(\tau_j \wedge \omega_j \right) \quad (1.47)$$

F_j et N_j : représentent respectivement la somme totale des forces extérieures et la somme totale des moments extérieurs. On initialise la récurrence par :

$$\dot{\omega}_0 = 0 \quad , \quad \omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{v}_0 = 0$$

Bilan des efforts :

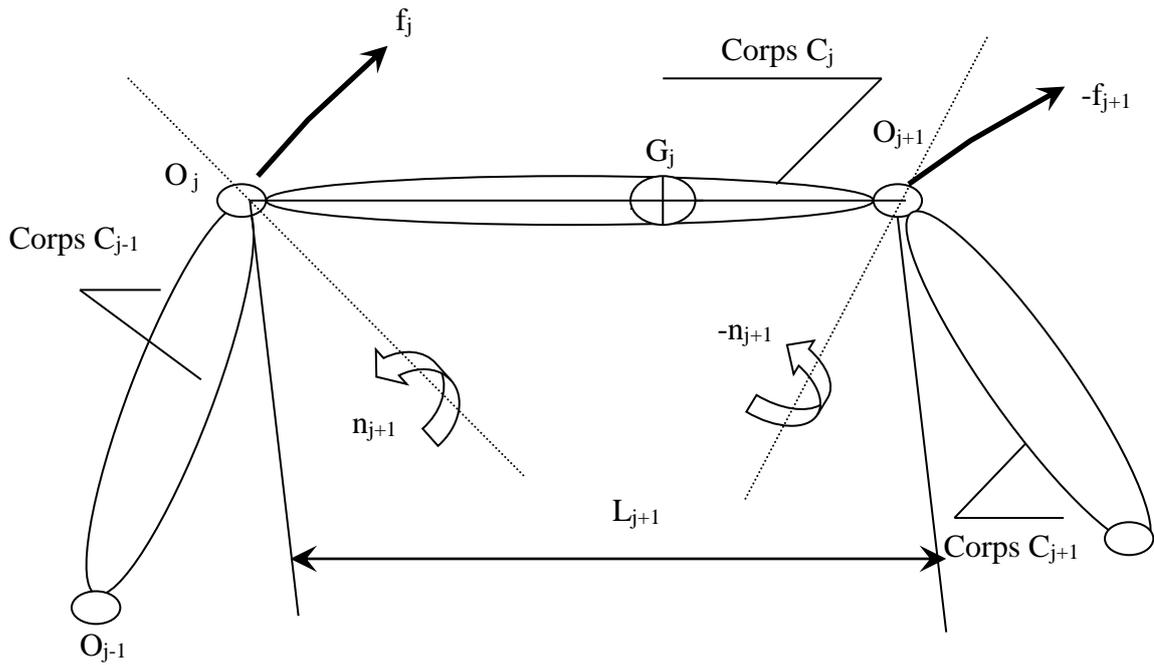


Figure 1.9 : Bilan des efforts au niveau articulaire.

Les équations qui composent la récurrence arrière sont obtenues à partir du bilan des forces sur chaque corps :

$$F_j = f_j - f_{j+1} + m_j g \quad (1.48)$$

$$N_j = n_j - n_{j+1} + (s_j - L_{j+1}) \wedge f_{j+1} - s_j \wedge f_j \quad (1.49)$$

Pour faire intervenir l'effort de la gravité sans le prendre en compte dans le bilan des forces, on prend $\dot{v}_0 = -g$. Les équations deviennent :

$$f_j = F_j + f_{j+1} \quad (1.50)$$

$$n_j = N_j - n_{j+1} L_j \wedge f_{j+1} + s_j \wedge F_j \quad (1.51)$$

Cette récurrence est initialisée par les efforts f_{n+1} et n_{n+1} notés respectivement f_m et n_m qu'exerce l'organe terminal sur l'environnement en projetant les vecteurs f_j et n_j sur l'axe du mouvement. On obtient les couples σ_j aux actionneurs et cela, suivant la nature de l'articulation j .

1.8 Planification des mouvements

1.8.1 Introduction sur la planification

L'utilisation courante des robots manipulateurs dans l'exécution des tâches répétitives fait que les recherches se sont naturellement orientées vers la planification de mouvements minimisant une fonction de coût relative essentiellement au rendement du robot et à son fonctionnement. Cette idée générale a conduit à la formulation de problèmes de planification dans lesquels des grandeurs physiques telles que la durée de parcours, les efforts actionneurs ou la puissance consommée soit optimisés individuellement ou globalement. Selon la tâche que doit accomplir le robot, on peut classer les différents mouvements selon deux catégories de trajectoires : l'une libre et l'autre imposée [49, 50].

1.8.2 Définitions

1.8.2.1 Trajectoires libres

Appelées aussi mouvement point à point ou mouvement de transfert. Seules les configurations initiales et finales doivent être respectées en plus des obstacles à éviter. La trajectoire qui relie ces deux configurations est alors libre. Ceci peut être le cas de la manutention d'objets ou de soudure point à point (un programme de simulation de ce type de trajectoire écrit en visuel lisp a été réalisé).

1.8.2.2 Trajectoires imposées

De tels mouvements sont rencontrés lorsque l'outil en fin de chaîne agit sur son environnement sans interruption et selon un parcours déterminé. Il est nécessaire de spécifier la trajectoire de l'effecteur. On citera par exemple les travaux de découpage ou de soudure en continu. Dans ces deux cas, il existe généralement plusieurs trajectoires possibles. Il faut profiter de cette multiplicité de choix pour adopter la meilleure solution afin d'accomplir la tâche. Pour les mouvements libres, l'optimisation a pour but de rechercher la trajectoire à suivre ainsi que les modalités pour la parcourir tandis que pour les mouvements imposés, l'optimisation ne porte que sur les modalités de la parcourir. Le programme de ce type de trajectoire n'a pu être réalisé à cause du temps imparti.

1.8.3 Les contraintes

Pour que la planification du mouvement soit possible, on tient compte des capacités technologiques du robot et des spécificités de la tâche à effectuer. Ceci implique

une restriction des solutions. Pour planifier un mouvement, on s'intéresse aux contraintes suivantes :

1.8.3.1 Les contraintes sur les débattements

Du fait de la conception de la liaison et de la limitation des mouvements entre butées mécaniques, ces derniers ne doivent pas dépasser les capacités de la structure. Tout ceci se traduit par la formulation suivante :

$$\forall t \in [0, T] , |q_i(t)| \leq q_{i\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.52)$$

t : représente le temps.

$q_i(t)$: représente les coordonnées généralisées de la $i^{\text{ème}}$ articulation.

$q_{i\max}$: représente la valeur maximale de la $i^{\text{ème}}$ articulation (valeur intrinsèque du robot).

1.8.3.2 Contraintes cinématiques

La conception des articulations et de la technologie des actionneurs implique une limitation des caractéristiques cinématiques notamment pour les objets manipulés sensibles aux survitesses, accélérations et freinages (par exemple des liquides qui peuvent se déverser). Les formulations se traduisent par:

Vitesse :

$$\forall t \in [0, T] , \left| \dot{q}_i(t) \right| \leq \dot{q}_{i\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.53)$$

Accélérations :

$$\forall t \in [0, T] , \left| \ddot{q}_i(t) \right| \leq \ddot{q}_{i\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.54)$$

$\dot{q}_{i\max}$ et $\ddot{q}_{i\max}$ sont imposées par les caractéristiques techniques et la nature de la tâche à effectuer.

1.8.3.3 Contraintes sur les couples moteurs

Les capacités maximales des actionneurs impliquent la formule suivante [51] :

$$\forall t \in [0, T] , |\Gamma_i(t)| \leq \Gamma_{i\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.55)$$

1.8.3.4 Contraintes dues aux obstacles dans l'espace opérationnel

L'encombrement dû à la présence d'autres robots fait que la planification tient compte de ces obstacles. Ces contraintes rendent le problème très complexe. Pour éviter les

collisions et si g traduit la distance entre le robot et l'obstacle, la formulation mathématique est traitée dans [52, 53, 54]. En plus des disfonctionnements déjà cités, la génération des mouvements peut aussi entraîner des phénomènes de survitesse au niveau des articulations d'où la nécessité de minimiser les puissances articulaires [53]. La puissance instantanée est telle que :

$$P(t) = \Gamma(t) \cdot \dot{q}(t) \quad (1.56)$$

Le lagrangien s'écrit dans ce cas :

$$L\left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma\right) = \mu + \frac{1-\mu}{2} \left[\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Gamma_i(t)}{\Gamma_{i\max}} \right)^2 + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i(t)}{P_{i\max}} \right)^2 \right] \quad (1.57)$$

Où : $P_{i\max} = \Gamma_{i\max} \cdot \dot{q}_{i\max}$

$\dot{q}_{i\max}$ représente la vitesse articulaire maximale tolérée de la $i^{\text{ème}}$ articulation. Quand à α , il joue le même rôle que μ mais sur le terme des puissances quadratiques si on veut accorder plus ou moins d'importance à la minimisation de ces dernières.

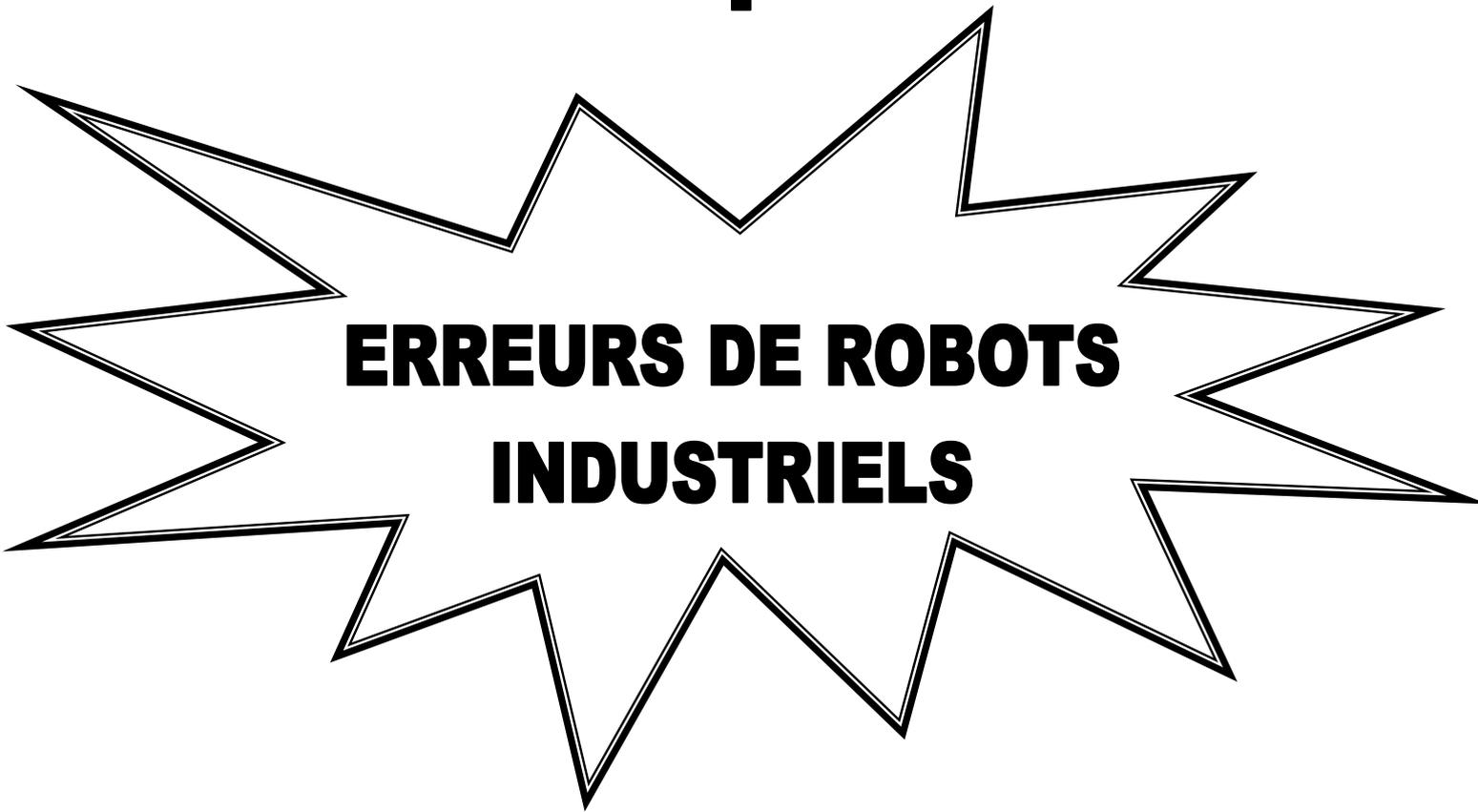
$$g[q(t)] \leq 0 \quad (1.58)$$

1.9 Conclusion

Dans ce présent chapitre, nous avons donné quelques définitions de base qui reviennent souvent dans l'étude de la robotique étant donné les différentes classes des robots ou une classification générale des robots qui n'introduit pas les robots à structure parallèle et les robots mobiles et la planification de leurs mouvements dans le but de mieux comprendre notre démarche dans les prochains chapitres.

Dans ce qui suit, nous exposons la classification des erreurs de robot ainsi que leur modélisation.

Chapitre 2



ERREURS DE ROBOTS INDUSTRIELS

CHAPITRE 2

ERREURS DE ROBOTS INDUSTRIELS

2.1 Introduction

Pour une planification de trajectoire précise, il faut tenir compte des erreurs des bras manipulateurs et apporter les corrections nécessaires dans les programmes qui automatisent la planification de trajectoire pour un manipulateur donné [12, 55].

Le positionnement réel d'un bras manipulateur, que ce soit en statique ou en dynamique (poursuite des trajectoires) s'écarte inévitablement et pour différentes causes, de sa position désirée.

La position de l'organe terminal par rapport au repère de référence R_0 dépend de plusieurs paramètres, tels que : les coordonnées généralisées q_i , les longueurs des chaînons l_i , la disposition de la structure, la performance des organes mécaniques (jeux articulaire, usure, flexion....). Et étant donné que ces paramètres ne sont jamais connus de façon exacte, la position réelle de l'organe terminal sera toujours écartée par rapport à la position théorique souhaitée. Pour l'étude de ces erreurs, nous avons adopté une classification de ces erreurs, elles regroupent toutes les erreurs de même nature dans un groupe unique, ce qui nous a conduit à donner deux (02) principaux groupes [35].

2.2 Classification des erreurs de robots

La classification des erreurs de robots est composée de deux (02) catégories lesquelles sont subdivisées en sous-catégories. Leur composition est la suivante :

2.2.1 Erreurs systématiques

2.2.1.1 Erreurs de commande

Les erreurs de commande se divisent en erreurs de calcul et erreurs de commande des moteurs.

2.2.1.2 Erreurs géométriques

Les erreurs géométriques contiennent les erreurs technologiques qui sont divisées en erreurs de fabrication, erreurs de réglage, erreurs dues au montage, erreurs de déformations thermiques, erreurs dues aux déformations mécaniques et erreurs de mise en place du robot.

2.2.1.3 Erreurs dues aux efforts extérieurs

Les erreurs dues aux efforts extérieurs se composent des erreurs dues aux forces de gravité, aux erreurs dues aux forces de frottements et aux erreurs dues aux charges extérieures.

2.2.2 Erreurs aléatoires

2.2.2.1 Erreurs dues aux jeux

Les erreurs dues aux jeux sont classées en erreurs dues aux jeux d'articulations, erreurs dues aux rotations libres, erreurs dues aux incertitudes des variables articulaires.

2.2.2.2 Erreurs physiques

Les erreurs physiques se composent d'erreurs de répétitivité et d'exactitude et erreurs de réversibilité.

Une classification des erreurs des robots est résumée dans l'organigramme suivant :

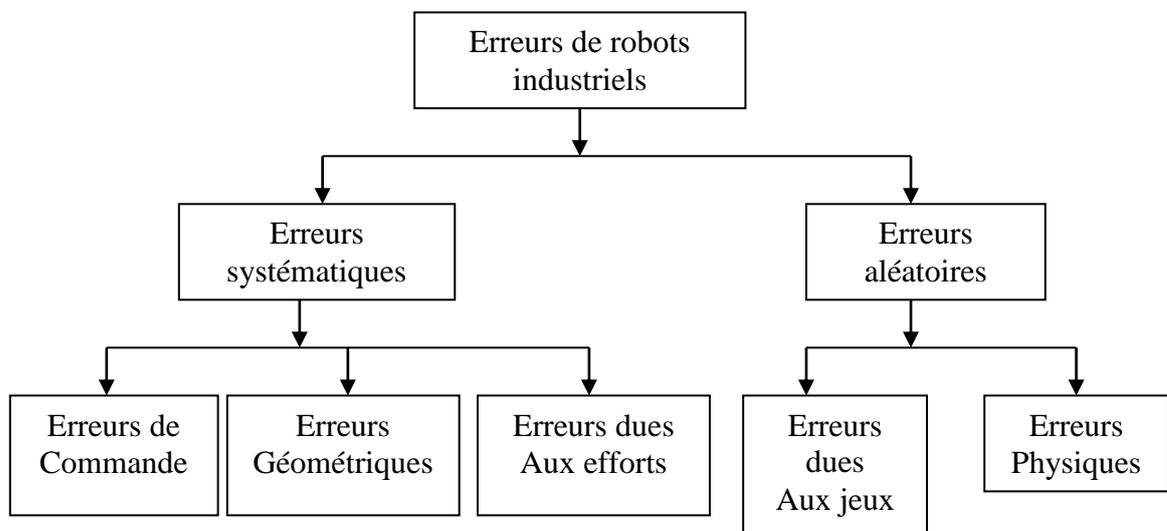


Figure 2.1 : Organigramme de classification des erreurs de robots.

2.3 Analyse sommaire sur les erreurs

- Généralement, dans les applications industrielles de la robotique, les machines sont utilisées quand un équilibre thermique est atteint, ce qui est d'ailleurs préconisé pour les normalisations officielles.
- Chacune des articulations d'un robot peut tourner librement à l'intérieur d'une petite zone. Cette sorte de zone morte est due aux jeux au niveau des articulations. Ces jeux sont causés par l'usure des pièces mécaniques. Cette usure est provoquée par les forces de frottement générées par les efforts extérieurs agissants sur les articulations.
- Le réglage et la calibration périodique pour des services de maintenance limitent les erreurs dues à la température, à l'usure des pièces et aux jeux [36].

2.4 Modélisation des erreurs

Dans ce paragraphe, nous essayons de donner une forme mathématique de l'erreur de positionnement du repère terminal, et cela, en se basant sur les modèles différentiels et statiques du robot qui sont déjà étudiés.

Les erreurs systématiques (erreurs de commande, erreurs géométriques et erreurs dus aux efforts) apparaissent à chaque configuration du robot, tandis que les erreurs dues aux jeux d'articulation et aux jeux de rotation libre tels que les erreurs d'engrenage, sont des erreurs accidentelles, ils peuvent apparaître dans certaines configurations, comme ils peuvent ne pas apparaître dans d'autres [35].

2.4.1 Modèle des erreurs systématiques

2.4.1.1 Erreurs de commande

Les erreurs de commande font intervenir les erreurs de calcul et de commande des moteurs.

- **Erreurs de calcul** : elles sont liées à :
 - L'arrondi dans les calculs effectués par le calculateur (rondomisation),
 - La performance des algorithmes employés pour le calcul des modèles mathématiques.

Ces erreurs peuvent être déterminées comme suit :

Soit X la configuration à atteindre, et soit q_i les coordonnées articulaires calculées par le modèle géométrique inverse, alors :

$$\Delta X = X - f(q^i) \quad (2.01)$$

Où :

- $f(q^i)$: représente la configuration terminale tirée du modèle direct.

• **Erreurs de commande des moteurs** : pour les actionneurs pas à pas tels que les moteurs pas à pas, la commande n'est pas toujours satisfaite car le pas du moteur fait passer la coordonnée articulaire de q_i à $q_i + dq_i$ d'où la configuration qui se trouve entre q_i et $q_i + dq_i$ n'est jamais atteinte et l'erreur due à la commande des moteurs peut être déterminée comme suit :

Supposant que le chaînon i du bras manipulateur se trouve à la position q_i et qu'on veut l'amener à la position q_i' , le nombre de pas nécessaire que fournit le moteur pour assumer cette tâche est de :

$$Nbp = \frac{\Delta q_i}{d\theta} \quad (2.02)$$

Avec : $\Delta q_i = (q_i - q_i')$

$d\theta$: représente l'incrément le plus petit de l'articulation i .

On remarque que ce rapport n'est pas toujours entier. Donc on est obligé de prendre le nombre de pas le plus proche, on commet ainsi une erreur δ sur la variable q_i , la détermination de l'erreur propagée au repère terminal se fait par un simple calcul.

$$\Delta X = X - f(q_i + \delta) \quad (2.03)$$

Avec : $q_i + \delta = Nbp * d\theta$

2.4.1.2 Erreurs géométriques

Ces erreurs sont dues aux erreurs des paramètres géométriques du robot, l'expression de l'erreur est déterminée directement du modèle différentiel direct.

• **Erreurs dues à $d\theta$** :

$$\Delta X = {}^\theta J_n dq \quad (2.04)$$

Où : ${}^\theta J_n$: est la matrice jacobienne associée au modèle différentiel pour le paramètre q .

- **Erreurs dues à $d\alpha$:**

$$\Delta X = {}^\alpha J_n d\alpha \quad (2.05)$$

Où : ${}^\alpha J_n$: est la matrice jacobienne associée au modèle différentiel pour le paramètre α .

- **Erreurs dues à $d(d)$:**

$$\Delta X = {}^{d(d)} J_n dq \quad (2.06)$$

Où : ${}^{d(d)} J_n$: est la matrice jacobienne associée au modèle différentiel pour le paramètre $d(d)$.

- **Erreurs dues à dr :**

$$\Delta X = {}^{dr} J_n dq \quad (2.07)$$

Où : ${}^{dr} J_n$: est la matrice jacobienne associée au modèle différentiel pour le paramètre dr .

D'où l'erreur globale due aux paramètres géométriques est donnée par :

$$\Delta X_G = {}^\theta J_n dq + {}^\alpha J_n d\alpha + {}^{d(d)} J_n d(d) + {}^{dr} J_n dr \quad (2.08)$$

Remarque :

- 1) Les erreurs géométriques : elles regroupent les imprécisions de fabrication dont les corps, les liaisons et les erreurs d'initialisations des offsets codeurs (les valeurs des offsets codeurs correspondants à la configuration initiale géométrique dans laquelle les variables articulaires sont nulles) [56].
- 2) Les erreurs non géométriques : elles regroupent les déformations, les jeux dans les chaînes cinématiques, les erreurs liées à la résolution des capteurs et aux performances des asservissements. Elles ne sont pas accessibles à la calibration géométrique.
- 3) La procédure d'identification géométrique distingue trois niveaux de complexité :

Niveaux 1 : Ou « calibration des articulations »

L'objectif de ce niveau est d'établir la relation la plus exacte entre le signal produit par les capteurs de position et les déplacements articulaires. Ceci, implique généralement la calibration de la cinématique des organes d'entraînement (réducteurs, courroies,...etc).

Niveaux 2 : Ou « calibration géométrique globale »

L'objectif de ce niveau est de déterminer le modèle géométrique de base qui lie les coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires (ou valeurs de commande des actionneurs). Donc, dans ce niveau, on doit identifier tous les paramètres géométriques de description du manipulateur.

Niveaux 3 : Ou « calibration non géométrique »

Ce niveau porte sur les possibilités de compenser les erreurs d'ordre non géométriques à savoir les déformations des articulations, des segments et des frottements.

2.4.1.3 Erreurs dues aux efforts

Les erreurs dues aux efforts (extérieurs et intérieurs aux robots) sont de deux types :

1. erreurs dues aux déformations des articulations.
2. erreurs dues aux phénomènes de flexion des corps articulés.

• **Erreurs dues aux déformations des articulations** : les articulations sont des organes qui permettent d'exécuter un mouvement de rotation pour les articulations rotoïdes et un mouvement de translation pour les articulations prismatiques sous l'effet des efforts extérieurs et les forces de gravité, ces articulations vont se déformer. On va supposer que cette déformation suit une loi de la forme :

$$d\theta = K * C \quad (2.09)$$

Où : $1/K$: une constante de rigidité de l'articulation considérée,

C : le couple ou la force agissant sur l'articulation i ,

$d\theta$: représente la variation de la coordonnée q_i .

- le couple ou la force C est déterminé directement du modèle statique.

- la constante K est déterminée par identification, par des essais expérimentaux.

Une fois les K_i sont connues, le $d\theta$ sera aussi connue et pour étudier l'influence de cette déformation sur la position de l'organe terminal, on a qu'à utiliser le modèle différentiel $\Delta X = {}^o J_n dq$ ou les $d\theta$ sont variables en fonction de la configuration du robot d'où l'erreur est donnée par :

$$\Delta X = {}^o J_n [C] \cdot [K] \quad (2.10)$$

Où : $[C]$: est une matrice dont sa diagonale contient les couples dans chaque articulation et nul pour les autres éléments.

$[1/K]$: est le vecteur des constantes de rigidité des articulations.

${}^\theta J_n$: est la matrice jacobienne associée au modèle différentiel $dX = {}^\theta J_n dq$.

- **Erreurs dues à la flexion des chaînons** : sous l'effet des forces extérieures les chaînons subissent une flexion. Cette flexion va engendrer une variation de la position de l'organe terminal qu'on peut la schématiser par :

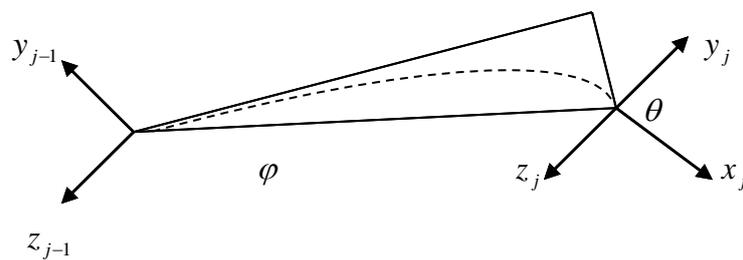


Figure 2. 2 : Variation de la position de l'organe terminal.

D'après le schéma, le repère R_j subit une translation y et une rotation θ exprimée dans le repère R_{j-1} qui peuvent être déterminées par les formules d'R.D.M suivantes :

$$\theta_{j-1} = \left[\frac{F}{2} (d_{j-1})^2 + P_{j-1/y} \left(x_{G_{j-1}} (d_{j-1}) - \frac{d^2_{j-1}}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{EI} \right)_{j-1} \quad (2.11)$$

$$y_{j-1} = \left[\frac{F}{3} (d_{j-1})^3 + P_{j-1/y} d^2_{j-1} (3x_{G_{j-1}} - d_{j-1}) \right] \left(\frac{1}{EI} \right)_{j-1} \quad (2.12)$$

$$F = [F_j]^{\delta-1} A_j \quad (2.13)$$

$$P_{j-1/y} = m_{j-1} g_{j-1} \bar{y}_{j-1} \quad (2.14)$$

Pour l'étude de l'influence de la translation et de la rotation du repère R_j sur la position du repère terminal, on va suivre la démarche suivante :

On suppose que le repère R_{j-1} subit une rotation φ_{j-1} de telle sorte qu'il fait subir au repère R_j la translation 'y' et que le repère R_j subit une rotation de $(\theta_{j-1} - \theta_j)$, ce qui est équivalent à la transformation réelle (translation y_{j-1} + rotation θ_{j-1}) du repère R_j mais cette fois-ci, on ramène le problème à des rotations des repères dont la résolution est systématique en utilisant les transformations différentielles [57].

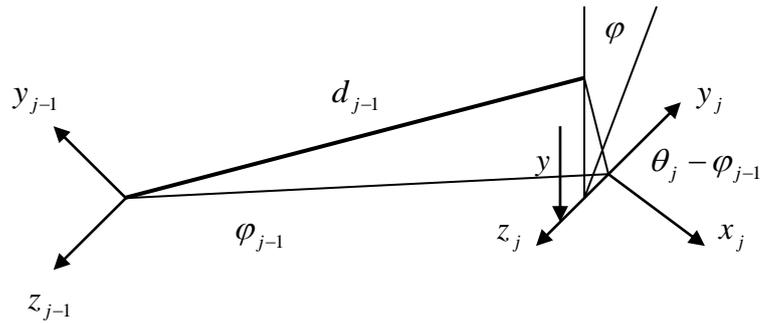


Figure 2. 3 : L'influence de la rotation du repère R_j sur la position du repère terminal.

On a :

$$\tan \varphi \approx \varphi = \frac{y}{d_{j-1}} = \frac{1}{EI} \left[\frac{F}{3} (d_{j-1})^2 + P_{j-1/y} (d_{j-1}) \cdot (3x_{G_{j-1}} - d_{j-1}) \right] = Fl \cdot \left(\frac{1}{EI} \right) \quad (2.15)$$

Avec :

$$Fl_{2_{ii}} = \left[\frac{F}{3} d_j^2 + P_{j/y} d_j (3x_{G_j} d_j - d_j) \right] \text{ pour } i=2,3 \text{ et nul pour les autres.}$$

Une fois φ calculé, on applique la relation ${}^{\theta}J_n \varphi$, où φ : est une rotation différentielle et l'erreur devient :

$$\Delta X_1 = {}^{\theta}J_n \varphi = {}^{\theta}J_n [Fl_1] \cdot [1/EI] \quad (2.16)$$

Avec :

φ : vecteur des rotations des repères (dans notre cas φ_i est nul pour $i \neq 2,3$).

${}^{\theta}J_n$: matrice jacobienne associée à θ .

$[Fl_1]$: matrice des flèches qui contient en diagonal les flèches des chaînons est nul pour les autres éléments.

$[1/EI]$: vecteur des caractéristiques des chaînons qui est déterminé par identification.

Pour la rotation $(\theta_j - \varphi_{j-1})$ du repère R_j , on applique directement la formule :

$$\Delta X = {}^{\theta}J_n (\theta - \varphi) \quad (2.17)$$

Avec :

$$(\varphi - \theta) = \frac{1}{EI} \left[\frac{F}{6} (d_{j-1})^2 + P_{j-1/y} \left(-2x_{G_{j-1}} d_{j-1} + \frac{d_{j-1}^2}{2} \right) \right] = Fl_2 \cdot \left(\frac{1}{EI} \right) \quad (2.18)$$

D'où :

$$dX = {}^{\theta}J_n [Fl_2] \cdot [1/EI] \quad (2.19)$$

Avec :

$$Fl_{2_{ii}} = \left[\frac{F}{6} (d_{j-1})^2 + P_{j-1/y} \left(-2x_{G_{j-1}} d_{j-1} + \frac{d_{j-1}^2}{2} \right) \right] \quad (2.20)$$

Dans notre cas $Fl_{2_{ii}} = 0$ pour $i \neq 3,4$.

D'où l'expression finale de la flèche est donnée par :

$$\Delta X = {}^\theta J_n [Fl_1 + Fl_2] \cdot [1/EI] \quad (2.21)$$

D'où l'erreur globale est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta X = & (X - f(q^i)) + {}^\theta J_n dq + {}^\alpha J_n d\alpha + {}^{d(d)} J_n d(d) \\ & + {}^{dr} J_n dr + {}^\theta J_n [C] \cdot [K] + {}^\theta J_n [Fl_1 + Fl_2] \cdot [1/EI] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sous forme matricielle :

$$\Delta X = [A] \cdot [dq_i d(d)_i, dr_i d\alpha_i, K_i 1/EI_i]^T \quad (2.23)$$

Avec :

$[A]$: matrice connue. Elle est fonction de la configuration du robot.

$[dq_i d(d)_i, dr_i d\alpha_i, K_i 1/EI_i]^T$: vecteur des paramètres du robot (défauts géométriques et caractéristiques de rigidités).

$$\Delta X = [dx dy dz \theta_x \theta_y \theta_z]^T \quad (2.24)$$

2.4.2 Modèle des erreurs aléatoires

2.4.2.1 Erreurs dues aux incertitudes des variables articulaires

On suppose que les sources d'erreurs sont localisées au niveau des articulations, c'est-à-dire que seules les valeurs des coordonnées articulaires q_i sont entachées d'erreurs qui varient de façon imprévisible. Les amplitudes de variation de ces erreurs sur q_i peuvent s'exprimer par les variances de q_i que nous noterons $V(q_i)$. Si les erreurs sur q_i sont liées, nous pourrions faire intervenir la covariance de q_i que nous noterons $\text{cov}(q_i)$.

La théorie du calcul des erreurs et de l'estimation des incertitudes montre que nous sommes capables de calculer une incertitude sur la position de l'effecteur, en connaissant l'incertitude sur q_i . Cette opération s'appelle la propagation des incertitudes. Cette dernière s'effectue de la façon suivante :

Soit le vecteur des variances des coordonnées articulaires q :

$$V(q) = d(q) = [V(q_1) \dots V(q_i) \dots V(q_n)]^T \quad (2.25)$$

La matrice des variances-covariances s'écrit :

$$Q = V(q) \cdot V^T(q) = \begin{bmatrix} V^2(q_1) & \dots & COV(q_i, q_1) & \dots & COV(q_n, q_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ COV(q_1, q_i) & \dots & V^2(q_i) & \dots & COV(q_n, q_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ COV(q_1, q_n) & \dots & COV(q_i, q_n) & \dots & V^2(q_n) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Lorsque les erreurs sur chaque axe sont indépendantes des autres axes ($cov(q_i) = 0$), cette matrice est diagonale. Comme l'erreur de situation est de la forme : $dx = Jdq$.

Alors la loi de propagation des erreurs aléatoire nous permet de calculer la matrice de variance-covariance des erreurs de situation, qui a pour expression :

$$R = dX \cdot d^T X = Jd^T qJ^T \quad (2.27)$$

Avec : $V(q) = dq$ et $Q = V(q) \cdot V^T(q)$

D'où :

$$R = JQJ^T \quad (2.28)$$

R : est une matrice symétrique.

Nous montrons ainsi que nous pouvons calculer les variances et les covariances de la situation de l'effecteur à partir de la connaissance des variances des coordonnées articulaires q . La diagonale de R représente les variances de la situation et les autres éléments sont des covariances.

2.4.2.2 Erreurs de précision

La précision est un facteur essentiel dans le domaine de robotique car l'exécution de la tâche exige une précision donnée (cas de montage des pièces, dans le domaine électronique (fabrication des puces)), cette précision est fonction des qualités géométriques des bras, rigidités des éléments constituant le robot, précision de commande....etc.

La précision d'un manipulateur est généralement définie en terme de précision statique (les caractéristiques de pose : exactitude et répétabilité de pose). Ces deux (02) caractéristiques permettent d'apprécier les différences entre pose commandée et poses

atteintes ainsi que les fluctuations des poses atteintes lorsque pour une même pose commandée, nous répétons plusieurs fois le cycle.

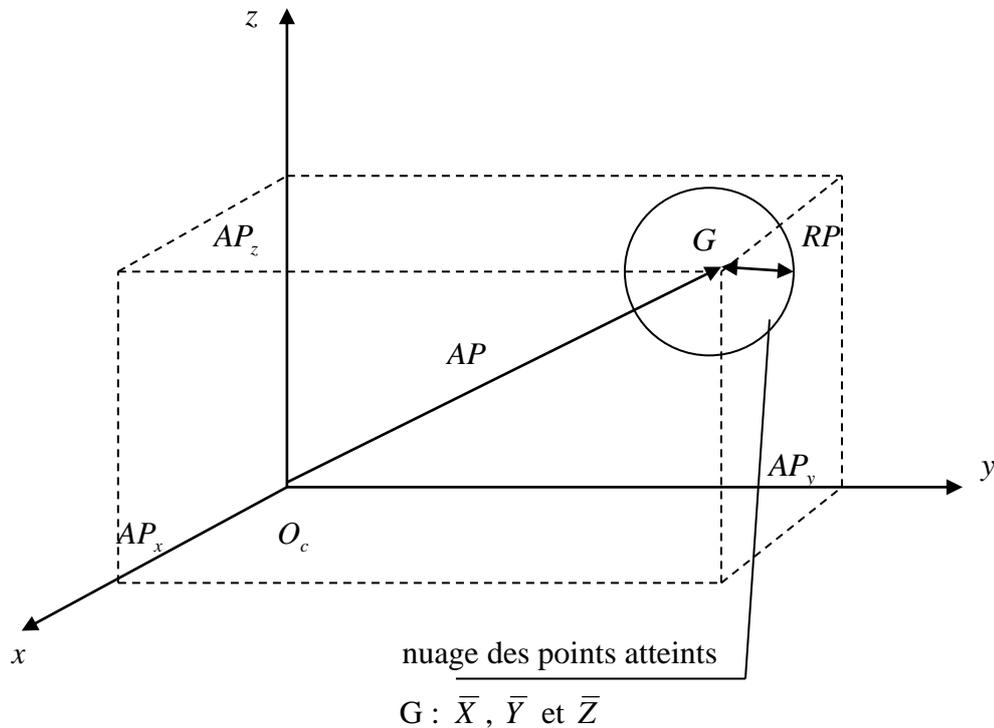


Figure 2. 4 : Exactitude et répétabilité de pose.

2.4.2.2.1 Exactitude de pose : Selon la définition ISO, c'est l'écart entre une pose commandée et la moyenne des poses atteintes. Elle comprend :

- la différence entre une pose commandée et le barycentre du nuage des points atteints (exactitude de positionnement).
- la différence entre une orientation angulaire commandée et la moyenne des orientations angulaires atteintes (exactitude d'orientation).

• **Exactitude de positionnement :**

$$AP = \sqrt{AP_x^2 + AP_y^2 + AP_z^2} \quad (2.29)$$

Avec : $AP_x = (\bar{X} - X_c)$; $AP_y = (\bar{Y} - Y_c)$; $AP_z = (\bar{Z} - Z_c)$

Et : $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$; $\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$

$(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$: sont les coordonnées du barycentre du nuage des points obtenus pour la même pose répétée n fois.

(X_c, Y_c, Z_c) : sont les coordonnées de pose commandée.

(X_i, Y_i, Z_i) : sont les coordonnées de la $i^{\text{ème}}$ pose atteintes.

- **Exactitude d'orientation :**

$$AP_a = (\bar{a} - a_c) ; AP_b = (\bar{b} - b_c) ; AP_c = (\bar{c} - c_c) \quad (2.30)$$

Avec : $\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} ; \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} ; \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n}$

(a_c, b_c, c_c) : sont les coordonnées angulaires de la pose commandée.

(a_i, b_i, c_i) : sont les coordonnées angulaires de la $i^{\text{ème}}$ pose atteintes.

Remarque : pour les rotations, on peut définir de la même manière la variation entre la moyenne des positions angulaires atteintes et la valeur commandée.

2.4.2.2.2 Répétabilité de pose : Selon la définition ISO, c'est l'étroitesse de l'accord entre les positions et les orientations des poses atteintes pour la même pose commandée, répétée n fois. Elle comprend :

- la valeur de RP , rayon de la sphère dont le centre et le barycentre du nuage de point.

-l'étendue des variations angulaires $\pm 3Sa, \pm 3Sb, \pm 3Sc$, autour des valeurs moyennes $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Avec : Sa, Sb, Sc : sont des écarts-types.

- **Répétabilité de positionnement :**

$$RP = \bar{L} + 3S_L \quad (2.31)$$

Avec : $\bar{L} = 1/n \sum_{i=1}^n L_i = 1/n \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(X_i - \bar{X})^2 + (Y_i - \bar{Y})^2 + (Z_i - \bar{Z})^2} \right)$

$$S_L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}{(n-1)}}$$

- **Répétabilité d'orientation :**

$$(2.32) \quad RP_a = \pm 3Sa = \pm 3 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{(n-1)}}$$

$$RP_b = \pm 3Sb = \pm 3 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (b_i - \bar{b})^2}{(n-1)}} \quad (2.33)$$

$$(2.34) \quad RP_c = \pm 3Sc = \pm 3 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2}{(n-1)}}$$

Remarque sur l'erreur de réversibilité

La réversibilité caractérise la dispersion de position et d'orientation, du trièdre de mesure d'une part et de la trajectoire réelle d'autre part, pour un même point et orientation.

L'erreur de réversibilité est négligeable devant l'erreur de répétabilité, elle est estimée à 10 fois moins importante que la répétabilité.

2.4.2.2.3 Temps de stabilisation et dépassement de pose

Il est bien intéressant de connaître le comportement du robot lorsqu'il approche une pose commandée. Suivant le réglage des asservissements des actionneurs et le niveau de déformations des segments, le manipulateur peut osciller, dépasser la situation commandée ou au contraire s'en approcher sans oscillation. Ce comportement se traduit par deux caractéristiques : dépassement et temps de stabilisation. Ces caractéristiques peuvent être utiles pour régler une temporisation du manipulateur avant d'effectuer une tâche ; la connaissance du dépassement permet de s'assurer que l'espace dégagé autour du point d'arrêt est suffisant pour éviter les collisions de l'outil avec l'environnement [55].

2.5 Identification des paramètres du modèle des erreurs

Une fois le modèle d'erreurs est conçu, il faut évaluer ses paramètres à savoir (dq_i , $q(d_i)$, dr_i , $d\alpha_i$, K_i , $1/EI_i$) qui représentent les défauts ou les paramètres géométriques et les caractéristiques mécaniques du robot. Pour cela, on mesure ${}^o d_n$ qui représente l'écart entre la position réelle et le modèle du robot sur plusieurs points (le nombre de mesures doit être de telle façon qu'on puisse construire un système d'équations

résoluble puis on utilise la méthode des moindres carrées pour l'identification de ces paramètres [35].

2.5.1 Méthode des moindres carrées pour un modèle linéaire

Soit le modèle :

$$[dX]^* = [A] \cdot [dq] \quad (2.35)$$

Où :

$[dX]^*$: représente les valeurs des mesures.

$[A] \cdot [dq]$: modèle approximant les $[dX]^*$.

Le principe des moindres carré dit que les paramètres inconnus d'un modèle doivent être choisis de manière à rendre minimale la somme des carrés des différences entre les valeurs réellement observées (valeurs mesurées) et les valeurs calculées.

Le vecteur d'erreur est donné par :

$$e = dx - dx^* \quad (dx : \text{représente les valeurs mesurées}) \quad (2.36)$$

Donc :

$$e = dx - Adq \quad (2.37)$$

D'après Gauss, on doit choisir dq de telle manière à rendre minimale la forme quadratique:

$$Z = e^t e$$

$$\Rightarrow \Delta Z = 0 \quad \text{avec : } \Delta Z = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial Z}{\partial dq_1} \dots \dots \dots \frac{\partial Z}{\partial dq_2} \end{array} \right]$$

En outre, on a :

$$\Delta Z = 2\Delta e^t e = 2e^t \Delta e$$

$$\text{Avec : } \Delta e = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial e_i}{\partial dq_i} \end{array} \right\} \quad (2.38)$$

De (2.37), on a $\Delta e = -A$, en remplaçant e et Δe dans la relation (2.38), on abouti à la relation :

$$\Delta Z = -2A^t(dx - Adq) = 0$$

$$\Rightarrow (A^t A)dq = A^t dx \quad (2.39)$$

Donc pour identifier les paramètres du modèle, on a qu'à résoudre le système (2.39).

Dans notre cas, pour construire la matrice A , on doit effectuer plusieurs expériences de mesures. On aura donc pour chaque mesure le vecteur dX tel que :

$$dX = [dx dy dz \theta_x \theta_y \theta_z]^T \quad (2.40)$$

On prend par exemple les trois (03) premières composantes qui ont la forme :

$$dx_i = \sum a_{ij} dq_j$$

$$dy_i = \sum a_{ij} dq_j$$

$$dz_i = \sum a_{ij} dq_j$$

Pour j variant de 1 à n (n : nombre d'inconnues).

Donc le nombre de mesures sera égale à : $n/3$.

Une fois la matrice construite, on applique la méthode des moindres carrées pour identifier les paramètres inconnus.

Remarque : la matrice A est fonction que de la configuration du robot.

2.6 Identification des paramètres dynamiques

Pour utiliser le modèle dynamique, il faut connaître les valeurs numériques des paramètres de masse (masse, centre de masse et matrice d'inertie) relatifs aux différents corps et qui interviennent dans le modèle dynamique. Plusieurs techniques peuvent être envisagées pour estimer ces paramètres, soit par [58] :

- calcul au moment de la conception,
- mesure corps par corps avant le montage ou par identification.

La technique d'identification des paramètres, consiste à exploiter le caractère linéaire des actions dynamiques relativement à ces paramètres pour les identifier, en utilisant la méthode d'optimisation des moindres carrée.

2.7 Déformations et précision des manipulateurs

Les applications industrielles de la robotique font appel aux principaux modes d'emploi des manipulateurs :

2.7.1 Emploi en mode restitution

- De point d'arrêt acquis par apprentissage d'une suite discrète de configuration articulaire,
- De trajectoires acquises par l'enregistrement échantillonné d'une suite continue de configurations articulaires correspondant aux mouvements que doit reproduire le manipulateur.

2.7.2 Emploi en mode programmé

- Les points d'arrêt sont seuls fonctionnels (travail en cours mouvement : peinture).

Dans ces quatre types d'emploi, le problème de précision prend des dimensions tout à fait différentes :

- Il peut dépendre de la répétitivité de la réversibilité, de l'exactitude statique ou dynamique ou de l'un de ces critères seulement.

Les déformations de la structure mécanique peuvent être tout à fait transparentes à l'utilisateur comme elles peuvent s'imposer comme un aspect du comportement dont la modélisation et la prise en charge est vital pour l'application.

2.8 Evaluation des erreurs de positionnement ou de poursuite de trajectoire d'un manipulateur

La simulation de l'effecteur dans l'espace opérationnel est donnée par le vecteur X [12]. Si on désigne par :

X_D : la situation instantanée de l'effecteur correspond à la configuration déformée du manipulateur.

X_R : La situation de l'effecteur correspond à la configuration non déformée du manipulateur.

L'erreur de positionnement ou de poursuite de trajectoire instantané sera donnée par :

$$\delta X = X_D - X_R \quad (2.41)$$

La situation X_R de l'effecteur est donnée par le modèle géométrique direct, dans l'hypothèse rigide obtenu par le produit des matrices de transformations homogènes.

Ces matrices sont calculées sur la base des paramètres de descriptions géométriques de la topologie du manipulateur.

Les déformations d'un segment (segment C_{j-1}) engendrent un torseur des déplacements au point de l'articulation en aval (point O_i) du segment et se traduisent par une variation de la transformation relative entre deux repères consécutifs (le repère R_{j-1} et le repère R_j). Le modèle d'évaluation de la situation X_D de l'effecteur peut être donc obtenu par un modèle géométrique modifié basé sur des matrices de transformations homogènes corrigées pour prendre en compte l'effet des déformations sur la situation de l'effecteur.

2.9 Evaluation des erreurs accidentelles d'un robot manipulateur

2.9.1 Erreurs premières des systèmes mécaniques

Considérant le robot de la figure (2.5) composé de trois (03) chaînons.

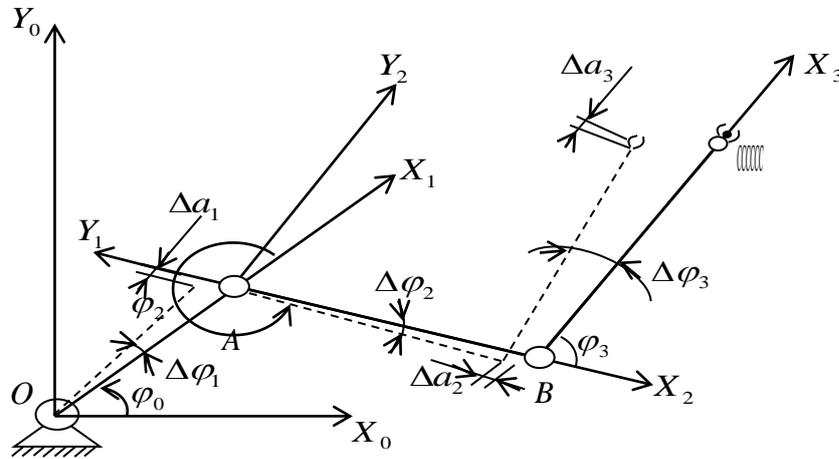


Figure 2.5 : Schéma cinématique des erreurs premières d'un robot manipulateur.

Si notre structure ne possède aucune erreur dans ce cas les coordonnées du point C seront :

$$\begin{aligned} X_c &= \sum_{j=1}^3 a_j \cdot \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_j) \\ Y_c &= \sum_{j=1}^3 a_j \cdot \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_j) \end{aligned} \quad (2.42)$$

X_c, Y_c : représente les coordonnées du point C appartenant au préhenseur.

a_j : représente la longueur du $j^{\text{ème}}$ chaînon.

φ_j : coordonnées généralisées.

En tenant compte les formules (2.42) pour le cas du robot de la figure (2.5) et en développant les équations, on obtient :

$$\begin{aligned} X_c &= a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + a_3 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \\ Y_c &= a_1 \cdot \sin \varphi_1 + a_2 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + a_3 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Soient $\Delta \varphi_j$ les erreurs angulaires communiquées aux différentes articulations et Δa_j les erreurs dimensionnelles des chaînons. Dans ce cas, la nouvelle position de l'organe terminal sera :

$$X'_c = \sum_{j=1}^3 (a_j + \Delta a_j) \text{Cos}[(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \dots + (\varphi_j + \Delta\varphi_j)]$$

$$Y'_c = \sum_{j=1}^3 (a_j + \Delta a_j) \text{Sin}[(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \dots + (\varphi_j + \Delta\varphi_j)]$$
(2.44)

$\Delta\varphi_j$ et Δa_j : représentent les erreurs premières ou coefficients accidentels propres.

En appliquant les formules (2.43) pour le cas du robot de la figure (2.5) et en développant les équations, on obtient :

$$X'_c = (a_1 + \Delta a_1) \text{Cos}(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) + (a_2 + \Delta a_2) \text{Cos}(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi_2) +$$

$$(a_3 + \Delta a_3) \text{Cos}(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi_2 + \varphi_3 + \Delta\varphi_3)$$

$$Y'_c = (a_1 + \Delta a_1) \text{Sin}(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) + (a_2 + \Delta a_2) \text{Sin}(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi_2) +$$

$$+ (a_3 + \Delta a_3) \text{Sin}(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi_2 + \varphi_3 + \Delta\varphi_3)$$
(2.45)

En développant la formule (2.45) et en limitant les paramètres au premier degré de la puissance, on obtient (on fait une approximation) :

$$X'_c = (a_1 + \Delta a_1) \text{Cos}\varphi_1 - a_1 \Delta\varphi_1 \text{Sin}\varphi_1 + a_2 \text{Cos}\varphi_1 \text{Cos}\varphi_2 - \Delta a_2 \text{Cos}\varphi_1 \text{Cos}\varphi_2 -$$

$$- \Delta a_2 \text{Sin}\varphi_1 \text{Sin}\varphi_2 - \Delta\varphi_1 a_2 \text{Sin}\varphi_1 \text{Cos}\varphi_2 - \Delta\varphi_1 a_2 \text{Cos}\varphi_1 \text{Sin}\varphi_2 -$$

$$- \Delta\varphi_2 a_2 \text{Sin}\varphi_1 \text{Cos}\varphi_2 - \Delta\varphi_2 a_2 \text{Cos}\varphi_1 \text{Sin}\varphi_2 + a_3 \text{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) +$$

$$+ \Delta a_3 \text{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - a_3 (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3) \text{Sin}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$$

$$\Delta X_c = X'_c - X_c \quad (2.46)$$

$$\Delta Y_c = Y'_c - Y_c \quad (2.47)$$

$$\Delta X_c = \Delta a_1 \text{Cos}\varphi_1 + \Delta a_1 \text{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2) + \Delta a_3 \text{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - a_1 \Delta\varphi_1 \text{Sin}\varphi_1$$

$$- a_2 (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) \text{Sin}(\varphi_1 + \varphi_2) - \Delta\varphi_2 a_2 \text{Sin}(\varphi_1 + \varphi_2) -$$

$$- a_2 (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3) \text{Sin}(\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi_3)$$

Dans le cas général :

$$\Delta X_c = \sum_{j=1}^3 \Delta a_j \text{Cos}(\varphi_1 + \dots + \varphi_j) + \sum_{j=1}^3 \Delta a_j (\Delta\varphi_1 + \dots + \Delta\varphi_j) \text{Sin}(\varphi_1 + \dots + \varphi_j) \quad (2.48)$$

$$\Delta Y_c = \sum_{j=1}^3 \Delta a_j \text{Sin}(\varphi_1 + \dots + \varphi_j) + \sum_{j=1}^3 \Delta a_j (\Delta\varphi_1 + \dots + \Delta\varphi_j) \text{Cos}(\varphi_1 + \dots + \varphi_j) \quad (2.49)$$

Posons :

$$\xi_j = [\text{Cos}(\varphi_1 + \dots + \varphi_j), \text{Sin}(\varphi_1 + \dots + \varphi_j)]^T \quad (2.50)$$

$$\zeta_1 = (-Y_p, X_p)^T, \quad \zeta_2 = (Y_Q - Y_p, X_p - X_Q)^T, \quad \zeta_3 = (Y_c - Y_Q, X_Q - X_c)^T \quad (2.51)$$

En remplaçant dans les formules (2.48) et (2.49) les termes par leur valeurs données par les formules (2.50) et (2.51), on obtient la valeur de l'erreur sommaire sous forme vectorielle :

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta X_c \\ \Delta Y_c \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \xi_j \cdot \Delta a_j + \sum_{j=1}^3 \zeta_j \cdot \Delta \varphi_j \quad (2.52)$$

De cette façon, on peut dire que l'erreur sommaire peut être représentée sous forme d'une somme de six (06) vecteurs constants (dépendant seulement de la configuration φ) multipliée par des coefficients propres.

Pour une meilleure analyse de ΔX , il est nécessaire de connaître les caractéristiques statistiques des erreurs premières Δa_j et $\Delta \varphi_j$.

En supposant que les grandeurs accidentelles des erreurs premières sont :

1. indépendantes les unes des autres,
2. indépendantes de la configuration du système mécanique,
3. la moyenne arithmétique des dispersions des erreurs est nulle $M(\Delta a_j) = M(\Delta \varphi_j) = 0$.

Remarque : la matrice des moments quadratiques S_φ de la répartition de l'erreur ΔX qu'on appelle matrice de covariance est définie comme suit :

$$S_\varphi = M(\Delta X_c \cdot \Delta X_c^T) = \sum_{j=1}^3 (\xi_j \cdot \xi_j^T \cdot \sigma_{aj}^2 + \zeta_j \cdot \zeta_j^T \cdot \sigma_{\varphi j}^2) \quad (2.53)$$

Avec :

$$M(\Delta a_j) = \frac{\sum_{j=1}^n (\Delta a_j)}{n}$$

$$M(\Delta \varphi_j) = \frac{\sum_{j=1}^n (\Delta \varphi_j)}{n} \quad (2.54)$$

La somme des éléments des diagonales principales des matrices S_φ est égale à l'erreur moyenne quadratique (dispersion) σ_φ^2 de positionnement.

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^2 &= \sum_{j=1}^3 [(\Delta X_c)_j^2 + (\Delta Y_c)^2] = \sum_{j=1}^3 [(\xi_{j1}^2 + \xi_{j2}^2) \sigma_{aj}^2 + (\zeta_{j1}^2 + \zeta_{j2}^2) \sigma_{\varphi j}^2] \\ &= \sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 + \sigma_{a3}^2 + R_{OC}^2 \cdot \sigma_{\varphi 1}^2 + R_{PC}^2 \cdot \sigma_{\varphi 2}^2 + a_3^2 \cdot \sigma_{\varphi 3}^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

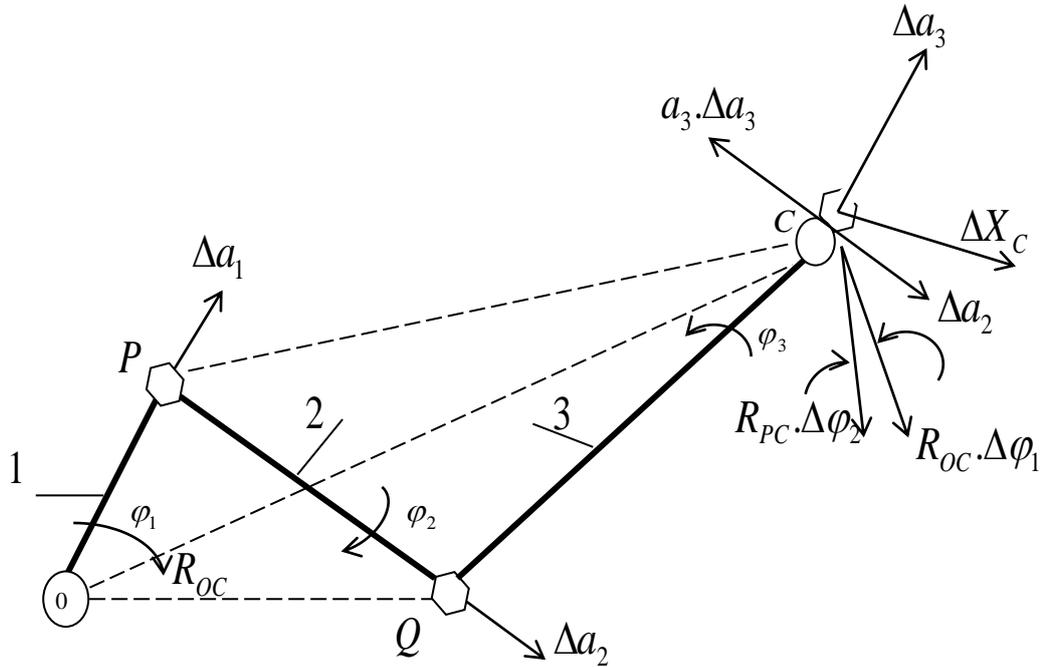


Figure 2.6 : L'influence des erreurs premières sur l'erreur de positionnement globale ΔX .

$R_{PC} \cdot \Delta\varphi_2$: Représente l'erreur de positionnement provoquée par l'erreur de rotation de $\Delta\varphi_2$.

La figure (2.6) nous montre l'influence des erreurs premières sur l'erreur de positionnement globale ΔX .

Les erreurs Δa_j déplacées au point C conservent leurs grandeurs $|\xi_i|=1$ et leur direction coïncide avec celle du vecteur ξ_i donc les coefficients propres pendant la dispersion sont égaux à 1.

Les erreurs de commande $\Delta\varphi_j$ (erreurs de rotation des moteurs par exemple) peuvent être aussi déplacées au point C .

D'après la figure (2.6) nous avons :

$$\begin{aligned} R_{PC}^2 &= a_2^2 + a_3^2 + 2.a_2.a_3.Cos\varphi_3 \\ R_{OC}^2 &= a_1^2 + R_{PC}^2 + 2.a_1.[a_2.Cos\varphi_2 + a_3.Cos(\varphi_2 + \varphi_3)] \end{aligned} \quad (2.56)$$

En remplaçant les termes de la formule (2.56) par leur valeur dans la formule (2.55), on obtient :

$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_0^2 + 2.a_2.a_3.(\sigma_{\varphi_1}^2 + \sigma_{\varphi_2}^2).Cos\varphi_3 + 2.a_1.\sigma_{\varphi_1}^2.[a_2.Cos\varphi_2 + a_3.Cos(\varphi_2 + \varphi_3)] \quad (2.57)$$

Avec :

$$\sigma_0^2 = \sum_{j=1}^3 [\sigma_{aj}^2 + \sigma_{\varphi_j}^2 \cdot (a_j^2 + \dots + a_3^2)] \quad (2.58)$$

2.9.2 Influence des jeux des couples cinématiques

Examinant l'influence des jeux des couples cinématiques sur la précision de positionnement dans le système de coordonnées plan.

Les méthodes de probabilités donnent de bons résultats à l'étude de l'influence des jeux sur la précision des systèmes mécaniques. Ces méthodes se basent sur le fait que tous les petits déplacements s'effectuent dans les intervalles des jeux limites.

Introduisant la notion de jeux conditionnel des erreurs premières ΔW_j en respectant les recommandations :

1. Le mouvement des chaînons des systèmes mécaniques dans le système plan reste plan même en présence de jeux,
2. Les erreurs ΔW_j des couples cinématiques sont indépendantes les unes des autres ΔW_1 n'est pas $f(\Delta W_2)$ et ΔW_j n'est pas une $f(\Delta \alpha_j)$.

Si on néglige la présence de jeux, la disposition relative des chaînons des couples cinématiques se détermine avec les mêmes paramètres (α_j pour les couples rotatifs et S_j pour les couples prismatiques). En présence de jeux, la disposition relative des chaînons devient indéterminée. Le couple cinématique reçoit deux degrés complémentaires de mobilité, et sa composante se caractérise par trois erreurs premières c'est-à-dire par le vecteur à deux directions $\Delta \alpha_j$ et par l'erreur de commande $\Delta \alpha_j$.

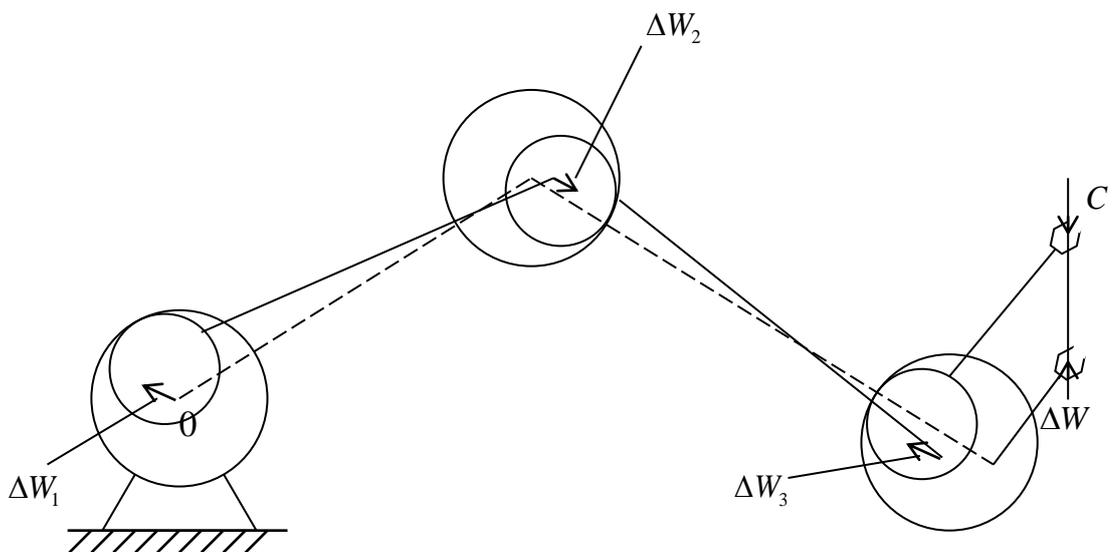


Figure 2.7 : L'influence des jeux des couples cinématiques sur la précision de positionnement.

Soit :

δ_j : Le déplacement maxi constant dans tout le couple cinématique ex. jeux de fonctionnement de l'articulation.

β : Direction du vecteur erreur.

$$\Delta W_j = (\delta_j \cdot \cos\beta, \delta_j \cdot \sin\beta)^T \quad (2.59)$$

En supposant que la direction β du vecteur erreur est telle que $|\beta| \leq \pi$ alors :

La matrice δ_j de covariance dont lequel est régulièrement réparti le vecteur accidentel

ΔW_j se présente sous forme :

$$S_j = M(\Delta W_j \cdot \Delta W_j^T) = \frac{\delta_j^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \cdot \cos\beta \\ \sin\beta \cdot \cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix} d\beta \quad (2.60)$$

A savoir que :

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \beta \cdot d\beta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta \cdot d\beta = 1/2$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot d\beta = 0 \quad (2.61)$$

En remplaçant les termes par leur valeur dans la formule (2.60), on obtient :

$$S_j = 1/2 \cdot \delta_j^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

On remarque que pour les couples rotatifs, les erreurs ΔW_j sont directement cumulées c'est-à-dire que la matrice δ_j s'additionne avec la matrice de covariance conditionnée par d'autres erreurs premières.

Pour le mouvement sans contact entre les chaînons :

$$|\Delta W_j| \leq \delta_j \quad (2.63)$$

Comme la dépendance fictive de ΔW_j en fonction du temps, est inconnue alors en supposant que le vecteur accidentel ΔW_j est réparti sur un cercle de rayon δ_j . Dans ce cas pour trouver la matrice correspondant à la covariance, on utilise la formule :

$$X^T \cdot S^{-1} \cdot X = n + 2 \quad (2.64)$$

n : nombre de chaînons.

L'équation (2.64) décrit un ellipsoïde d'espace à n degré (qu'on appelle ellipsoïde de dispersion).

Dans la matrice S de covariance est répartie le vecteur accidentel.

Pour notre cas n=2 l'équation (2.63) répond à l'équation d'un cercle de rayon δ_j c.à.d il doit avoir la forme :

$$1/4 \cdot X^T \cdot S^{-1} \cdot X = 1 \quad (2.65)$$

$$(X_1^2 + X_2^2) = \delta^2 \quad \delta^2 \cdot (X_1^2 + X_2^2) = 1 \quad (2.66)$$

Egalisant (2.65) et (2.66), on obtient :

$$1/4 \cdot X^T \cdot S^{-1} \cdot X = \delta_j^{-2} \cdot (X_1^2 + X_2^2)$$

$$S_j = \frac{1}{4} \cdot \delta_j^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

En comparant (2.62) et (2.67), on obtient :

$$\frac{1}{2} \cdot \delta_j^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \frac{1}{4} \cdot \delta_j^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

On voit que pour des intervalles sans rupture de mouvement, l'écart quadratique moyen apparaît égal à 2 fois plus grand que pour un mouvement discontinu.

En tenant compte de l'alternance des intervalles du mouvement de tous les types et du jeu de forme circulaire, l'erreur résultante de positionnement se trouve entre deux grandeurs :

$$1/2 \cdot \delta_j^2 \leq M |\Delta W_j|^2 \leq \delta_j^2 \quad (2.69)$$

2.10 Les causes structurales dans les mécanismes

2.10.1 Frottement dans les mécanismes

2.10.1.1 Introduction

Dans cette partie de ce chapitre, nous introduirons la notion de frottement et les phénomènes qui le composent dans le cas des systèmes mécaniques.

Le frottement est la force de réaction tangentielle de sens opposé à la vitesse relative qui se crée entre deux surfaces en contact. Il est omniprésent et inévitable dans

tous les systèmes mécaniques ou il y a un mouvement relatif d'une partie par rapport à une autre. Ce phénomène hautement non-linéaire et asymétrique, qui peut être responsable d'erreurs de suivi, d'erreurs statiques et de cycles limites, font des frottements un problème complexe à modéliser.

On distingue le plus souvent deux (02) états fondamentaux de frottement : frottement sec (lorsque deux solides frottent directement sans interposition d'un lubrifiant, on dit aussi frottement immédiat). Ce type de frottement est très présent autour de nous : rails et roues des chemins de fer, balais et collecteurs de machines électriques, pantographes et caténaies, freins, têtes de lecture et bandes magnétiques, la plupart des mécanismes utilisés dans l'espace...ect, et le frottement avec lubrification qui fait appelle à des lubrifiants liquides ou visqueux (huiles, graisses) ou à des lubrifiants solides (graphite, bisulfure de molybdène, ect...).

Les frottements interviennent dans la grande majorité des phénomènes physiques de la vie courante. Ils sont parfois exploités (par exemple pour le freinage, le sciage, le polissage, le lavage, etc...) mais ils ont également des conséquences fâcheuses (usure, perte d'énergie et de rendement, échauffement qui entraîne des déformations, etc...) pour les êtres vivants et de nombreuses applications technologiques et économiques [56, 59].

2.10.1.2 Action de contact sans frottement

Le modèle de contact ponctuel est souvent utilisé dans les études statiques pour présenter le contact entre un couple cinématique qui est formé d'une sphère et un plan.

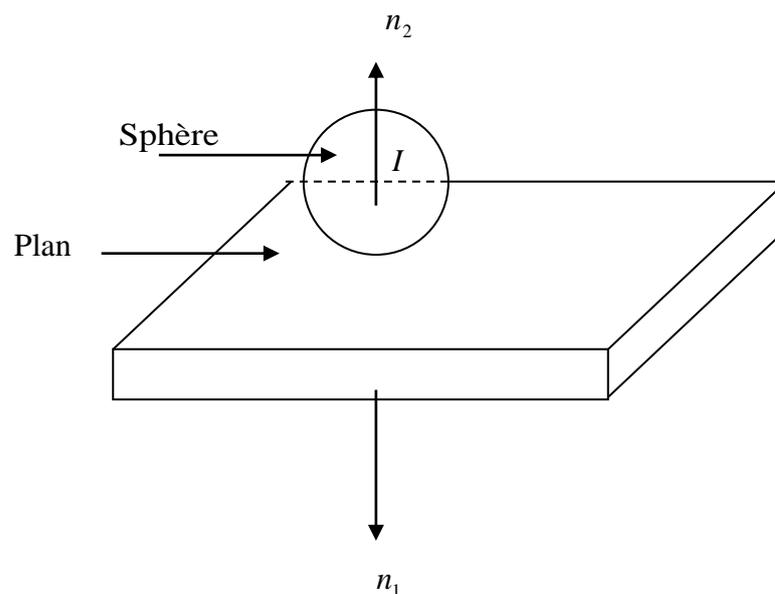


Figure 2. 8 : Le contact ponctuel (sphère-plan).

Le contact entre les deux (02) se fait en un point unique I .

$$\{T_{2/1}\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} R_{2/1} = -I_{2/1}n_1 \\ M_{Q2/1} = QI \wedge (-I_{2/1})n_1 \end{array} \right\}_Q \quad (2.70)$$

Pour tous points P appartenant au support de la normale (axe central du torseur), ce torseur devient un glisseur [57].

$$\{T_{2/1}\}_P = \left\{ \begin{array}{l} R_{2/1} = -I_{2/1}n_1 \\ M_{Q2/1} = 0 \end{array} \right\}_P \quad (2.71)$$

2.10.1.3 Action de contact avec frottement

Considérons deux (02) solides en contact (1) et (2). Le contact entre les deux (02) solides se fait suivant une surface commune S . L'action de contact exercée par l'élément (2) sur l'élément (1) est définie à partir d'une répartition (densité de charge $P(M)$), déterminée en chaque point M de la surface S .

En présence de frottement entre l'élément (1) et l'élément (2), $P(M)$ s'écrit :

$$P(M) = -P_n(M)n_1(M) + P_t t(M) \quad (2.72)$$

Dans cette relation :

P_n : représente la répartition surfacique normale,

P_t : est la répartition surfacique tangentielle,

$n_1(M)$: est la normale en M au solide 1,

$t(M)$: est la tangente en M au solide 1, sa direction sera définie ultérieurement.

Le torseur d'action de contact avec frottement s'écrit :

$$\{T_{2/1}\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} R_{2/1} = \int_S (-P_n(M)n_1(M) + P_t t(M)) dS \\ M_{Q2/1} = \int_S QM \wedge (-P_n(M)n_1(M) + P_t t(M)) dS \end{array} \right\}_Q \quad (2.73)$$

Si l'on suppose connue la répartition $P_n(M)$ de pression de contact, la détermination de ce torseur requiert la connaissance du vecteur unitaire $t(M)$ et celle du $P_t(M)$.

Pour cela on utilise les lois expérimentales de Coulomb qui dans bon nombre de cas sont acceptable pour étudier le frottement de deux (02) solides.

Le modèle de Coulomb c'est le modèle de frottement de la forme la plus simple. Ces lois permettent de distinguer deux cas suivant que la vitesse de glissement d'un solide par rapport à l'autre est nulle ou pas.

Dans le cas où la vitesse de glissement n'est pas nulle, la pression de contact au point M se trouve sur un cône d'angle au sommet, appelé cône de frottement.

Dans le cas où la vitesse de glissement est nulle, l'action de contact au point M se trouve à l'intérieur d'un cône d'angle au sommet, appelé cône d'adhérence [57].

2.10.2 Usure

2.10.2.1 Usure abrasive

2.10.2.1.1 Description et modèle

Une surface est rayée par un corps de dureté supérieure qui peut être la surface opposée ou des particules dures présentes. On observe des rayures, des griffures, l'arrachement de microcristaux, du polissage... Les particules peuvent être «enchâssées» ou «incrustées» dans la surface la plus tendre (abrasion à deux corps) ou bien «rouler» entre les surfaces (abrasion à trois corps).

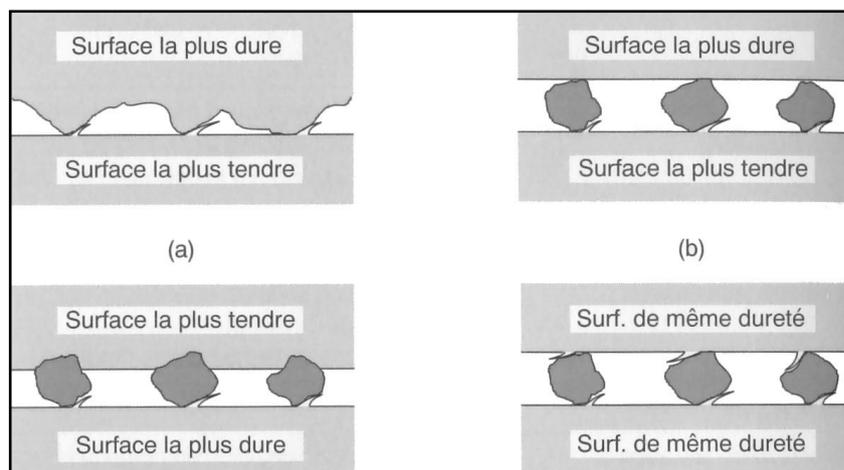


Figure 2.9 : Exemples d'usure entre deux surfaces différentes.

Les particules peuvent être étrangères ou provenir de l'écaillage des surfaces. Ces particules peuvent être enchâssées dans la surface la plus tendre :

- abrasion à deux (02) corps : (a).

- abrasion à trois corps : (b).

L'usure abrasive à deux (02) corps provoque plus de dégâts que l'usure abrasive à trois (03) corps. L'action des aspérités des grains abrasifs se fait par déformation plastique et par coupe.

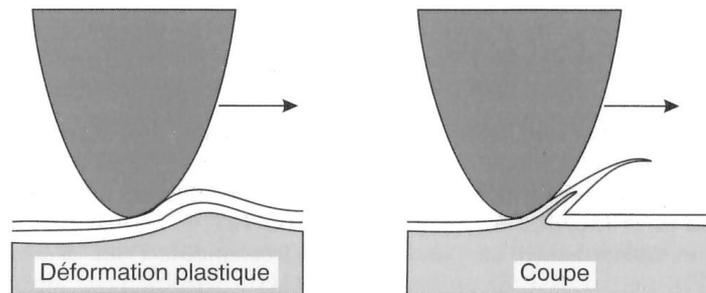


Figure 2.10 : Action d'une particule abrasive par déformation et coupe.

Si le grain abrasif est en contact avec une surface ductile, on observe la formation d'un sillon plastique avec enlèvement de matière sous forme de micro copeaux primaires. La formation de ce sillon est accompagnée par la formation de deux rives ou bourrelets latéraux dont le détachement peut former des micros copeaux secondaires. Quand le matériau est ductile il y a prédominance de la déformation et quand le matériau est dur il y a prédominance de la coupe.

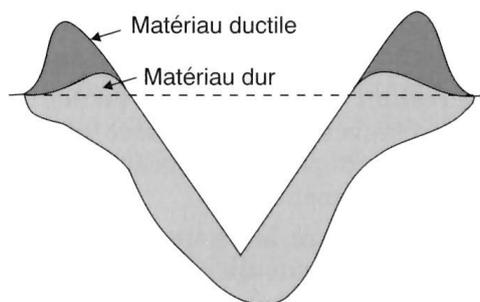


Figure 2.11 : Formation de bourrelets latéraux.

Quelques variantes :

- Abrasion sous l'effet de fortes pressions ou meulage (grinding) : c'est le mécanisme de dégradation des broyeurs de matériaux minéraux (broyeurs à boulets par exemple),

- Abrasion-polissage : c'est une usure abrasive faisant intervenir des particules de l'ordre du micromètre (usure des têtes magnétiques, des rails de chemin de fer. . des marches d'escaliers métalliques...),
- Abrasion par enlèvement clé métal par «coupe» sous l'effet de chocs importants (gouging) ; c'est, par exemple, le cas du sablage, de la dégradation des dents de pelles mécaniques...

2.10.2.1.2 Paramètre de l'usure abrasive

L'usure abrasive est due à la présence de particules dures qui peuvent soit provenir d'une pollution externe, soit résulter de la dégradation des surfaces par une autre cause, à laquelle il faut évidemment s'attaquer pour traiter le problème. Concernant la pollution externe des mécanismes, il est relativement facile de s'en affranchir par une étanchéité soignée et par l'emploi de filtres, tant sur les circuits hydrauliques que sur les circuits de lubrification.

En fait, il y a toujours coexistence des deux modes d'action (déformation et coupe), la part de la coupe restant en général assez faible (10 à 20 %). Cette proportion dépend des duretés relatives surface abrasée/abrasif ; pour un rapport allant de 0,8 à 1,3 l'abrasion par coupe est négligeable. Si le matériau est fragile, la rayure peut provoquer des effritements. Il existe une relation directe entre la charge appliquée et l'importance de l'usure. Certains auteurs distinguent l'usure par low stress abrasion, qui ressemble approximativement au mécanisme à trois (03) corps et l'usure par high stress abrasion, qui correspond approximativement au mécanisme à deux (02) corps avec déformation plastique car il faut une charge suffisante pour enchâsser les particules dures. L'usure abrasive augmente avec la taille (jusqu'à 100 /Lim) et le nombre des particules.

2.10.2.1.3 Usure abrasive et ingénierie des surfaces

En ce qui concerne les surfaces, il faut augmenter la dureté superficielle sur une profondeur importante.

Dans le cas des alliages, l'usure dépend également de la microstructure qui doit contenir des précipités durs au sein d'une matrice suffisamment résistante pour qu'ils ne soient pas arrachés. Par exemple, dans le cas d'un acier, on apportera un pourcentage important de phases dures (carbures, nitrures) dans une matrice clé dureté au moins égale à 600 HV.

L'usure abrasive dépend de l'état de surface initial ; on doit avoir une rugosité aussi faible que possible. La tenue est liée à la forme des saillies (arêtes vives, angles aigus) et à la hauteur relative de ces saillies par rapport au jeu (risque de traverser le film lubrifiant) ; le milieu ambiant peut jouer un rôle défavorable en facilitant la formation de particules plus dures par oxydation des microcopeaux.

On observe généralement une augmentation de l'usure abrasive avec la température par transformation défavorable des couches superficielles en oxydes durs ; on doit chercher à augmenter la tenue du matériau à cette oxydation.

2.10.2.2 Usure adhésive

Cette usure se traduit par une augmentation progressive du jeu nécessaire au fonctionnement des mécanismes et peut s'accompagner de détériorations des surfaces visibles à l'oeil nu ; parfois elle s'achève par un blocage catastrophique : c'est le grippage.

La théorie de l'usure adhésive a été proposée par Bowden et reprise par Rabinowicz ; elle a été contestée par Suh qui a proposé la théorie de l'usure par « délamination ». Ceci montre bien que de tels phénomènes, vraisemblablement observés dès l'invention de la roue, ne sont pas évidents à comprendre. Nous reviendrons sur ces mécanismes en présentant dans la suite le « modèle du frottement sec » proposé par Godet et Berthier.

La pièce cassée constituait le maneton d'un système bielle manivelle (le roulement faisait partie de la bielle) assurant le mouvement vibratoire de faible amplitude, symbolisé par les flèches croisées.

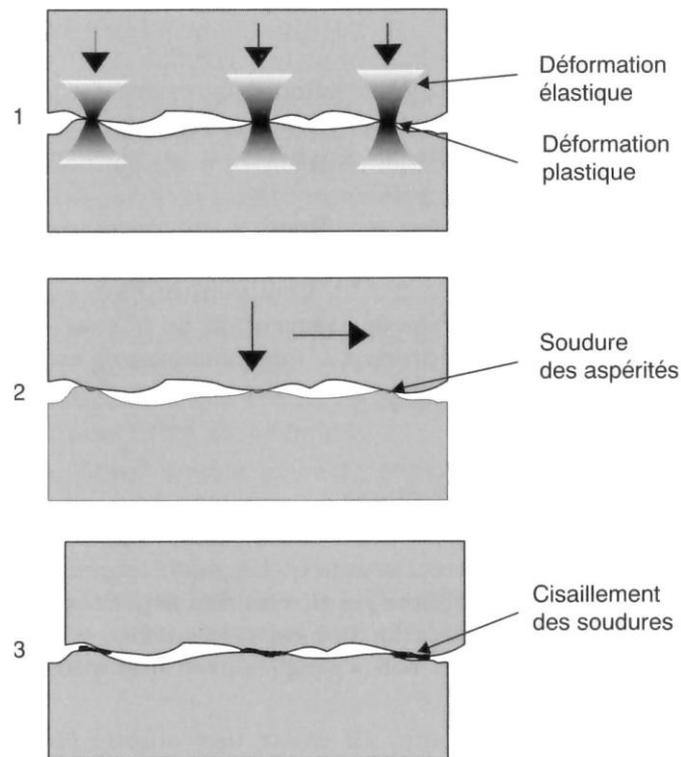


Figure 2.12 : Etapes successives de l'usure en petits débattements sous l'action d'un mouvement vibratoire de faible amplitude, symbolisé par les flèches croisées.

2.10.3 La durée de vie

Le mécanisme réalisé doit avoir une durée de vie acceptable de fonctionnement pour cela on doit bien étudier les conditions de travail et les contraintes qui sollicitent les pièces réalisées. L'évaluation du jeu d'un palier en fonction du temps comporte deux (02) phases :

Première phase : correspond à la période de rodage, caractérisée par un écrasement rapide des aspérités au contact entre l'arbre et le palier. A l'issue de cette période, les caractéristiques du contact sont améliorées :

- Réduction du coefficient de frottement,
- Accroissement de la surface de contact,
- Réduction de la valeur maximale de la pression par un changement donné.

Deuxième phase : correspond à l'usure normale et progressive du palier, proportionnelle au temps de fonctionnement de la liaison.

Lorsque le jeu devient trop important, le palier n'est plus apte à remplir sa fonction, qui définit sa durée de vie.

La durée de vie pour une géométrie (R , L et J) et un chargement donnés du palier est conditionné par :

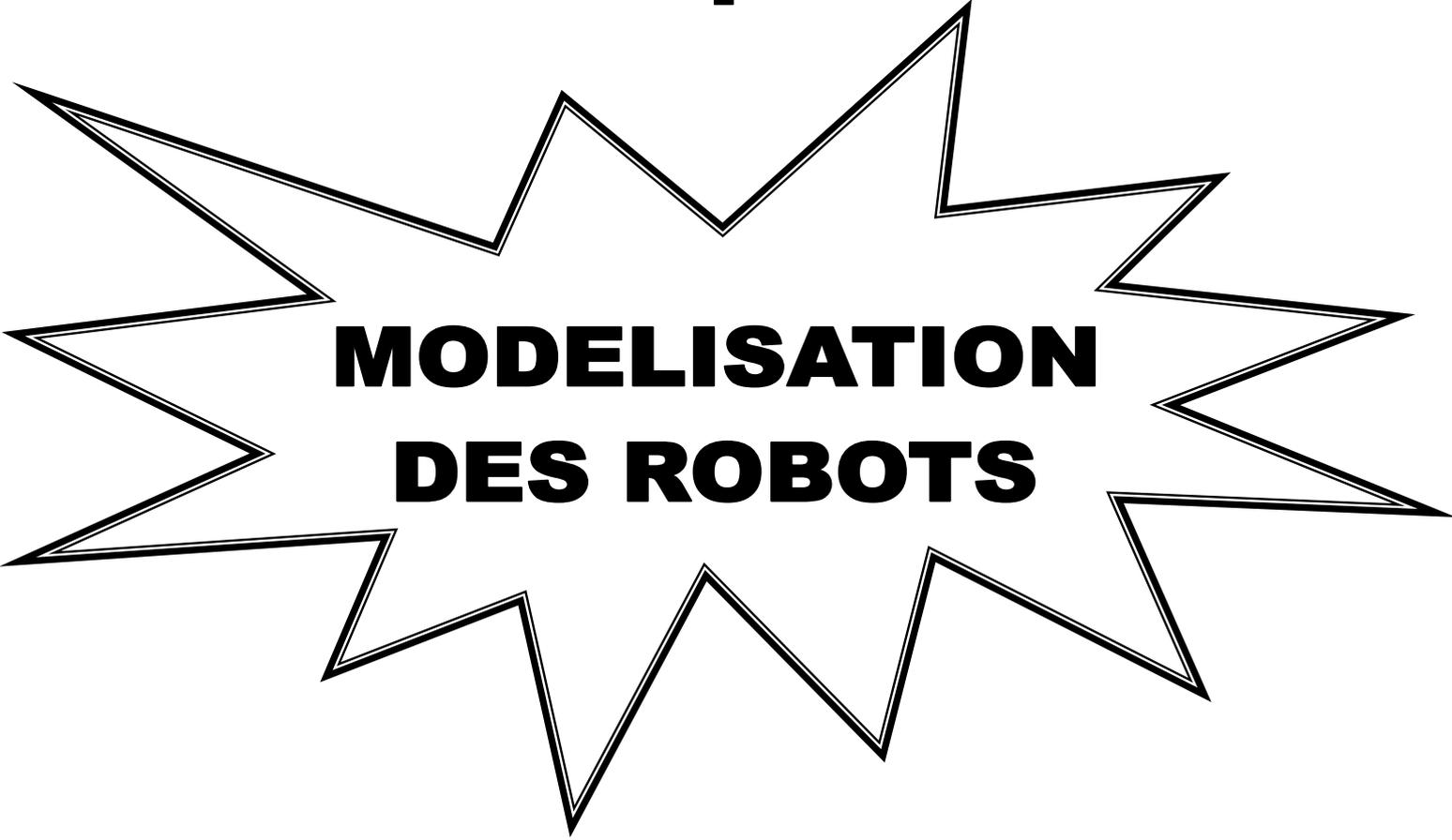
- La pression de contact,
- La vitesse de glissement,
- Les matériaux employés,
- Les conditions de fonctionnements.

Le critère PV utilisé pour l'étude du comportement thermique est également retenu par les constructeurs pour l'estimation théorique de la durée de vie. Les autres paramètres sont pris en compte par des coefficients minorant la durée de vie nominale calculée pour un fonctionnement dans des conditions de référence [57].

2.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons élaboré une classification des erreurs de robots industriels. Nous avons donné les méthodes de modélisation de certaines erreurs systématiques et aléatoires, l'évaluation des erreurs de positionnement et les erreurs accidentelles d'un robot ainsi que les erreurs dues aux frottements. La modélisation des robots industriels est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3



MODELISATION DES ROBOTS

CHAPITRE 3

MODELISATION DES ROBOTS

3.1 Introduction

Pour pouvoir commander un robot, il faut calculer un certain nombre de modèles mathématiques du robot tel que :

- a) le modèle géométrique direct et inverse, ce modèle met en évidence une relation entre les coordonnées opérationnelles (l'organe terminal) et les coordonnées articulaires du robot.
- b) le modèle différentiel direct et inverse qui donnent la variation de la position et de l'orientation de l'organe terminal en fonction des variations des coordonnées articulaires et inversement. Ce modèle nous permet de donner une première approche pour la détermination des erreurs de positionnement et d'orientation due aux erreurs géométriques du robot.
- c) le modèle dynamique, qui établit la relation entre les couples et forces exercés par les actionneurs et les vitesses, position et accélération angulaires [35].

Ce qui suit, s'inscrit dans ce cadre et ayant pour but de présenter une étude globale en partant d'un schéma cinématique d'un robot. Nous avons utilisé des méthodes numériques pour la résolution des problèmes mathématiques ainsi que les méthodes de programmation numérique.

3.2 Paramétrisation du robot

Notre robot est composé de cinq (05) corps, notés C_1, \dots, C_5 et de cinq (05) articulations (une rotation et quatre (04) translations (R4T)). Le corps C_0 désigne la base du robot et le corps C_5 le corps qui porte l'organe terminal.

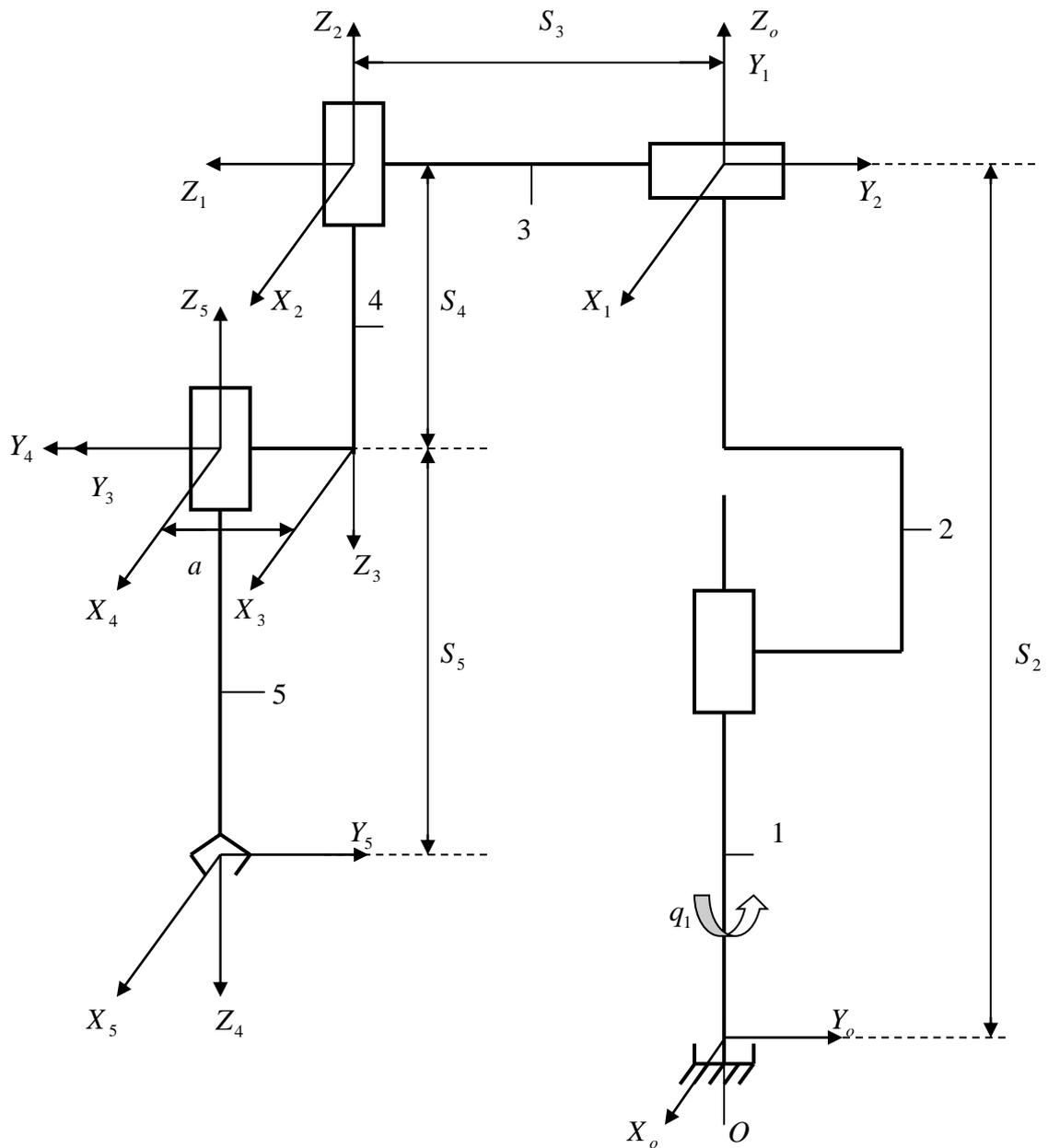


Figure 3.1 : Schéma cinématique d'un robot manipulateur à cinq degrés de liberté.

Les paramètres du robot sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 3.1 : Paramètres géométriques du robot.

Couple cinématique	Type de couple	N° de chaînon	Valeur des paramètres			
			q_j	α_j	S_j	a
0.1	Rotatif	0	q_1	$\pi/2$	$q_2 = S_2$	0
1.2	Prismatique	1	0	$\pi/2$	$q_3 = S_3$	0
2.3	/	2	0	π	$-S_4 = q_4$	0
3.4	/	3	0	0	0	$a_5 = 50$
4.5	/	4	0	π	$q_5 = S_5$	0

3.3 Modèle géométrique direct (MGD)

La détermination du modèle géométrique direct (MGD) consiste à trouver la transformation 0T_5 qui permet de décrire la situation du repère final par rapport au repère de base choisi. Pour cela, on doit calculer les matrices de transformation élémentaires (${}^{j-1}T_j$), pour j variant de 0 à 5 puis on effectue le produit matriciel de toutes les matrices.

3.3.1 Calcul des matrices de passages élémentaires

A partir du tableau des paramètres géométriques du robot et en utilisant la matrice de transformation générale, on trouve :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & 0 & -Cq_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.01)$$

Avec :

- Cq_i : représente le $\cos q_i$.
- Sq_i : représente le $\sin q_i$.

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.02)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -S_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.03)$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.04)$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.05)$$

Pour le calcul de la matrice de passage du repère 5 au repère 0 (0T_5), on a qu'à effectuer le produit de ces matrices ; pour cela, on va définir les matrices 4T_5 , 3T_5 , 2T_5 et 1T_5 qui représentent la matrice de passage du repère R_i au repère R_5 .

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes de la matrice sont :

$$\begin{array}{llll} s_x = 1 & n_x = 0 & a_x = 0 & p_x = 0 \\ s_y = 0 & n_y = -1 & a_y = 0 & p_y = 0 \\ s_z = 0 & n_z = 0 & a_z = -1 & p_z = S_5 \end{array}$$

$${}^3T_5 = {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.06)$$

Les composantes de la matrice sont :

$$\begin{array}{llll} s_x = 1 & n_x = 0 & a_x = 0 & p_x = 50 \\ s_y = 0 & n_y = -1 & a_y = 0 & p_y = 0 \\ s_z = 0 & n_z = 0 & a_z = -1 & p_z = S_5 \end{array}$$

$${}^2T_5 = {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -S_4 - S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.07)$$

Les composantes de la matrice sont :

$$\begin{array}{llll}
 s_x = 1 & n_x = 0 & a_x = 0 & p_x = 50 \\
 s_y = 0 & n_y = 1 & a_y = 0 & p_y = 0 \\
 s_z = 0 & n_z = 0 & a_z = 1 & p_z = -S_4 - S_5
 \end{array}$$

$${}^1T_5 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & -1 & S_4 + S_5 \\ 0 & 1 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.08)$$

Les composantes de la matrice sont :

$$\begin{array}{llll}
 s_x = 1 & n_x = 0 & a_x = 0 & p_x = 50 \\
 s_y = 0 & n_y = 0 & a_y = -1 & p_y = S_4 + S_5 \\
 s_z = 0 & n_z = 1 & a_z = 0 & p_z = S_2
 \end{array}$$

Le produit des matrices de transformation d'un robot à 5 ddl sera :

$${}^0T_5 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 = \begin{bmatrix} Cq_1 & Sq_1 & 0 & (a + S_3) \cdot Sq_1 \\ Sq_1 & -Cq_1 & 0 & (a + S_3) \cdot Cq_1 \\ 0 & 0 & -1 & (S_5 + S_2 + S_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.09)$$

Les composantes de la matrice sont :

$$\begin{array}{llll}
 s_x = Cq_1 & n_x = Sq_1 & a_x = 0 & p_x = (a + S_3) \cdot Sq_1 \\
 s_y = Sq_1 & n_y = -Cq_1 & a_y = 0 & p_y = (a + S_3) \cdot Cq_1 \\
 s_z = 0 & n_z = 0 & a_z = -1 & p_z = (S_5 + S_2 + S_4)
 \end{array}$$

3.4 Modèle géométrique inverse (MGI)

3.4.1 Algorithme de résolution du problème inverse par la méthode d'approximation successive

La matrice de transformation 0T_5 est donnée par :

$$T_5 = T_5^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 \frac{dT_5^{(k-1)}}{dq_j} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \quad (3.10)$$

Avec :

$T_5^{(k-1)}$: est la matrice approchée de T_5 dont les éléments sont obtenue par des grandeurs approximatives des coordonnées généralisées,

$q_j^{(k-1)}$: la valeur de l'approximation de q_j ,

$q_j^{(k)}$: la valeur précise,

k : Le numéro du pas.

Soit U la situation désirée du repère terminal par rapport au repère R_0 :

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} (U_{ij})_{11} & (U_{ij})_{12} & (U_{ij})_{13} & (U_{ij})_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (U_{ij})_{41} & \dots & \dots & (U_{ij})_{44} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Avec : $U_{ij} = \frac{dT_i}{dq_j}$: est une matrice de dimension 4X4 .

En tenant compte de (3.10) et de la formule (3.11), on obtient :

$$T_5 = T_5^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 U_{5j}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)})$$

Les éléments de la matrice sont :

$$\begin{aligned} (t_5)_{12} &= (t_5)_{12}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 (U_{5j})_{12}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \\ (t_5)_{13} &= (t_5)_{13}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 (U_{5j})_{13}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \\ (t_5)_{14} &= (t_5)_{14}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 (U_{5j})_{14}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \\ (t_5)_{23} &= (t_5)_{23}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 (U_{5j})_{23}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \\ (t_5)_{24} &= (t_5)_{24}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 (U_{5j})_{24}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \\ (t_5)_{34} &= (t_5)_{34}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^5 (U_{5j})_{34}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le système (3.12) permet le calcul de $q_j^{(k)}$ à partir des grandeurs approximative $q_j^{(k-1)}$.

Plus les valeurs de $q_j^{(k-1)}$ et $q_j^{(k)}$ sont plus proches plus les grandeurs $T_5^{(k-1)}$ et T_5 sont proches et plus la grandeur $(q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)})$ est petite.

Dans le cas ou le robot manipulateur admet $n < 6$ ddl et le nombre d'inconnues de coordonnées généralisées est égal à 6, le système d'équation linéaire analogue à (3.12) peut être écrit :

$$(t_n)_{vu} = (t_n^{k-1})_{vu} + \sum_{j=1}^n (U_{nj})_{vu}^{(k-1)} \cdot (q_j^{(k)} - q_j^{(k-1)}) \quad (3.13)$$

Avec : v et u c'est le nombre de ligne et de colonne de la matrice T_n .

3.4.2 Application numérique

Soient données les coordonnées de la position de la pince.

$$\begin{cases} X_0 = 30mm \\ Y_0 = 100mm \\ Z_0 = 120mm \end{cases}$$

Les coordonnées généralisées : q_1, q_2, q_3, q_4 et q_5 .

Réellement les trois (03) éléments de la 4^{ème} colonne de la matrice 4×4 doivent être égaux à ces valeurs donc :

$$(t_5)_{14} = 30mm$$

$$(t_5)_{24} = 100mm$$

$$(t_5)_{34} = 120mm$$

Pour écrire le système d'équation correspondant à la formule (3.12), il faut écrire les matrices ${}^1U_5, {}^2U_5, {}^3U_5, {}^4U_5$ et 5U_5 et à leur tours sont fonction des matrices ${}^i T_j$ c'est-à-dire des coordonnées généralisées q_1, q_2, q_3, q_4 et q_5 .

Pour trouver 1U_5 il faut dérivée par rapport à q_1 la matrice 0T_5 .

$${}^1U_5 = \begin{bmatrix} -Sq_1 & Cq_1 & 0 & (a + q_3) \cdot Cq_1 \\ Cq_1 & Sq_1 & 0 & -(a + S_3) \cdot Sq_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pour trouver 2U_5 il faut dérivée par rapport à S_2 la matrice 1T_5 .

$${}^2U_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Pour trouver 3U_5 il faut dérivée par rapport à S_3 la matrice 2T_5 .

$${}^3U_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Pour trouver 4U_5 il faut dérivée par rapport à S_4 la matrice 3T_5 .

$${}^4U_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Pour trouver 5U_5 il faut dérivée par rapport à S_5 la matrice 4T_5 .

$${}^5U_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La dernière colonne de la matrice 0T_5 donne :

$$\begin{aligned} (t_5)_{14} &= (a + q_3)Sq_1 \\ (t_5)_{24} &= (a + q_3)Cq_1 \\ (t_5)_{34} &= (S_2 + S_4 + S_5) = q_2 + q_4 + q_5 \end{aligned}$$

Le système (3.13) sera dans ce cas :

$$\begin{aligned} (t_{1,5})_{v,4} &= (t_5^{(k-1)})_{v4} + (U_{5,1}^{(k-1)})_{v4} \cdot (q_1^{(k)} - q_1^{(k-1)}) + (U_{5,2}^{(k-1)})_{v4} \cdot (q_2^k - q_2^{(k-1)}) + \\ & (U_{5,3}^{(k-1)})_{v4} \cdot (q_3^k - q_3^{(k-1)}) + (U_{5,4}^{(k-1)})_{v4} \cdot (q_4^k - q_4^{(k-1)}) + (U_{5,5}^{(k-1)})_{v4} \cdot (q_5^k - q_5^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

En utilisant les données numériques, on obtient :

1^{ère} approximation : $k = 1$

$$30 = (a + q_3^{(k-1)})S_{q_1}^{k-1} + (a + q_3^{k-1})C_{q_1}^{k-1} \cdot (q_1^k - q_1^{(k-1)}) + S_{q_1}^{(k-1)} \cdot (q_3^k - q_3^{k-1})$$

v=1

$$0 = (a + q_3^{(k-1)})S_{q_1}^{k-1} + (a + q_3^{k-1})C_{q_1}^{k-1} \cdot (q_1^k - q_1^{(k-1)}) + S_{q_1}^{(k-1)} \cdot (q_3^k - q_3^{k-1})$$

v=2

$$200 = (a + q_3^{(k-1)})C_{q_1}^{k-1} - (a + q_3^{k-1})S_{q_1}^{k-1} \cdot (q_1^k - q_1^{(k-1)}) + C_{q_1}^{(k-1)} \cdot (q_3^k - q_3^{k-1})$$

v=3

$$150 = (q_2^{k-1} + q_4^{k-1} + q_5^{k-1}) + (q_2^k - q_2^{(k-1)}) + 0 + 0 + 0 + 0 + (q_4^k - q_4^{(k-1)}) + (q_5^k - q_5^{k-1})$$

Prenons : $q_1^0 = q_2^0 = q_3^0 = q_4^0 = q_5^0 = 0$.

Avec : q_1^0 : la valeur approximative de q_1 .

q_1^1 : la valeur précise.

On remplace les données dans le système d'équation, on obtient :

$$\begin{cases} 0 = (a + 0) \cdot \sin 0 + (a + 0) \cdot \cos 0 \cdot (q_1^1) + \sin 0 \cdot (q_3^k - q_3^{k-1}) \\ 200 = a + q_3^1 \\ 150 = q_2^1 + q_4^1 + q_5^1 \end{cases}$$

Après tous calcul fait, on trouve :

$$q_1^1 = 0$$

$$q_3^1 = 150$$

$$q_2^1 + q_4^1 + q_5^1 = 150$$

Prenons : $q_2^1 = q_4^1 = 50$, on reçoit : $q_5^1 = 50$.

On aura donc :

$$q_1^1 = 0$$

$$q_2^1 = q_4^1 = q_5^1 = 50$$

$$q_3^1 = 150$$

2^{ème} approximation : $k = 2$

v=1

$$0 = (a + q_3^1)S q_1^1 + (a + q_3^{k-1})C q_1^1 \cdot (q_1^2 - q_1^1) + S q_1^1 \cdot (q_3^2 - q_3^1)$$

v=2

$$200 = (a + q_3^1)C q_1^1 - (a + q_3^1)S q_1^1 \cdot (q_1^2 - q_1^1) + C q_1^1 \cdot (q_3^2 - q_3^1)$$

v=3

$$150 = (q_2^1 + q_4^1 + q_5^1) + (q_2^2 - q_2^1) + (q_4^2 - q_4^1) + (q_5^2 - q_5^1)$$

On remplace les résultats obtenus dans le système d'équation, on obtient :

$$\begin{cases} 0 = 200 \cdot \sin 0 - 200 \cdot \cos 0 \cdot (q_1^2 - 0) + \sin 0 \cdot (q_3^2 - 150) \\ 200 = 200 \cdot \cos 0 - 200 \cdot \sin 0 \cdot (q_1^2 - 0 \cdot 6) + \cos 0 \cdot (q_3^2 - 150) \\ 150 = (q_2^1 + q_4^1 + q_5^1) + q_2^2 - q_2^1 + q_4^2 - q_4^1 + q_5^2 - q_5^1 \end{cases}$$

Après tous calcul fait, on trouve :

$$q_1^2 = 0$$

$$q_3^2 = 150$$

$$q_2^2 + q_4^2 + q_5^2 = 150$$

3^{ème} approximation : $k = 3$

v=1

$$0 = (a + q_3^2)S q_1^2 + (a + q_3^2)C q_1^2 \cdot (q_1^3 - q_1^2) + S q_1^2 \cdot (q_3^3 - q_3^2)$$

v=2

$$200 = (a + q_3^2)C q_1^2 - (a + q_3^2)S q_1^2 \cdot (q_1^3 - q_1^2) + C q_1^2 \cdot (q_3^3 - q_3^2)$$

v=3

$$150 = (q_2^2 + q_4^2 + q_5^2) + (q_2^3 - q_2^2) + (q_4^3 - q_4^2) + (q_5^3 - q_5^2)$$

Après tous calcul fait, on trouve :

$$q_1^3 = 0$$

$$q_3^3 = 150$$

$$q_2^3 + q_4^3 + q_5^3 = 150$$

D'autre part, on a :

$$\begin{cases} X = (a + S_3) \cdot S q_1 \\ Y = (a + S_3) \cdot C q_1 \\ Z = (S_2 + S_4 + S_5) \end{cases} \quad (3.20)$$

Avec : $q_2 = S_2$, $-S_4 = q_4$, $q_5 = S_5$ et $q_3 = S_3$.

De (3.20) on tire la solution analytique des coordonnées généralisées :

$$q_1 = \arcsin(X / a + S_3) \quad (3.21)$$

Où :

$$q_1 = \arccos(Y / a + S_3) \quad (3.22)$$

En égalisant (3.21) et (3.22), on obtient :

$$a + S_3 = \frac{X}{\sin q_1} = \frac{Y}{\cos q_1} \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin q_1}{\cos q_1} = \operatorname{tg} q_1 = \frac{X}{Y}$$

Donc :

$$q_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{Y}\right) \quad (3.23)$$

$$q_3 = \frac{X}{\sin q_1} - 50 = -50 + \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (3.24)$$

$$q_2 = Z + q_4 - q_5 \quad (3.25)$$

En donnant différentes valeurs à q_4 et q_5 on détermine les valeurs de q_2 .

La loi de variation des coordonnées généralisées

Pour trouver les coordonnées généralisées à l'instant t_1 il faut résoudre le problème inverse. Pour cela dans le cas de l'approximation par approche successive on peut utiliser les coordonnées généralisées à l'instant t_0 . Une fois obtenue les coordonnées généralisées correspondant à l'instant t_1 . On peut utiliser les coordonnées pour obtenir le modèle inverse au moment t_2 et aussi de suivre.

$$q_j^{(0)}(t_1) = q_j(t_{l-1}) + (q_j(t_{l-1}) - q_j(t_{l-2})) \cdot \frac{t_1 - t_{l-1}}{t_1 - t_{l-2}} \quad (3.26)$$

Avec :

t_l : temps nécessaire pour atteindre la longueur l ,

t_0 : temps correspondant aux coordonnées généralisées,

t_1 : temps correspondant à la position 1,

l : longueur de déplacement quelconque.

Plus la longueur L est grande plus le nombre de calcul du modèle inverse est grand.

Avec : L : nombre de petit segment,

Soient à déterminer la loi de variation des coordonnées généralisées du manipulateur, si on suppose que l'organe terminal se déplace suivant une ligne rectiligne du point (30, 100,120) au point (-50,-50,60).

Tableau 3.2 : Position des points (voir la simulation).

Position des points	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Y	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110	100	90	80	70	60
Z	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150
q_3^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q_3^1	150	140	130	120	110	100	90	90	90	90	90	90	90	90	90
q_3^2	150	140	130	120	110	100	90	90	90	90	90	90	90	90	90
q_3^3	150	140	130	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
q_2	50	40	50	60	60	40	50	0	100	100	0	40	70	40	0
q_4	50	60	60	40	50	50	40	50	50	0	100	70	40	40	0
q_5	50	50	40	50	40	60	60	100	0	50	50	40	40	70	150

3.5 Modèle différentiel

3.5.1 Introduction

Le modèle différentiel d'un robot est le modèle qui nous permet de déterminer les variations élémentaires des coordonnées opérationnelles (x, y, z) en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires q_i , plus simplement le modèle différentiel nous permet de dire :

Si les coordonnées articulaires q_i varient de dq_i , quel serait les variations de x , y , z respectivement dx , dy , dz ?

L'intérêt de ce modèle est multiple :

- Il est la base du modèle différentiel inverse.
- Supposant qu'on a une configuration donnée q_i et que ces derniers sont connus avec une erreur donnée dq_i , ces erreurs vont se propager sur les coordonnées opérationnelles (x, y, z) , la détermination de ces erreurs à savoir (dx, dy, dz) peut être déterminée par ce modèle et on peut même élargir l'application de ce modèle pour déterminer les variations dx, dy, dz des coordonnées opérationnelles en fonction des autres paramètres géométriques $(\alpha, r, d \dots)$.

Le modèle différentiel nous permet de donner une première approche pour la détermination des erreurs de positionnement et d'orientation du repère outil du robot manipulateur.

3.5.2 Calcul du modèle différentiel $dX = J(\theta) d\theta$

Pour le calcul de la matrice jacobienne ${}^n J_j(\theta)$, deux (02) cas se présentent :

1. cas où l'articulation est prismatique :

Pour une articulation prismatique :

$$\begin{cases} d_n = [s_z & n_z & a_z] \\ \delta_n = 0 \end{cases}$$

2. cas où l'articulation est rotoïde :

Pour une articulation rotoïde, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_n = \begin{bmatrix} s_y \\ n_y \\ a_y \end{bmatrix} \cdot p_x - \begin{bmatrix} s_x \\ n_x \\ a_x \end{bmatrix} \cdot p_y \\ \delta_n = \begin{bmatrix} s_z \\ n_z \\ a_z \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Le calcul des éléments de ${}^n J_j(\theta)$ se fait par la matrice ${}^j T_5$ ($j = 1$ à 5) calculées par le MGD.

- Pour $j = 1$, on utilise ${}^1 T_5$ et on calcul $J(i,1)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(1,1) = -(S_4 + S_5).$$

$$J(3,1) = 50 \cdot (S_4 + S_5).$$

$$J(5,1) = 1.$$

$$J(2,1) = J(4,1) = J(6,1) = 0.$$

- Pour $j = 2$, on utilise ${}^2 T_5$ et on calcul $J(i,2)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(3,2) = 1.$$

$$J(1,2) = J(2,2) = J(4,2) = J(5,2) = J(6,2) = 0.$$

- Pour $j = 3$, on utilise ${}^3 T_5$ et on calcul $J(i,3)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(3,3) = -1.$$

$$J(1,3) = J(2,3) = J(4,3) = J(5,3) = J(6,3) = 0.$$

- Pour $j = 4$, on utilise ${}^4 T_5$ et on calcul $J(i,4)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(3,4) = -1.$$

$$J(1,4) = J(2,4) = J(4,4) = J(5,4) = J(6,4) = 0.$$

- Pour $j = 5$, on utilise ${}^5 T_5$ et on calcul $J(i,5)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(1,5) = J(2,5) = J(3,5) = J(4,5) = J(5,5) = 0.$$

$$J(6,5) = 1.$$

3.5.3 Calcul du modèle différentiel $dX = J(\alpha) d\alpha$

La matrice jacobienne correspondante est :

$${}^n J_j(\alpha) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_z \\ n_z \\ a_z \end{bmatrix} \cdot p_y - \begin{bmatrix} s_y \\ n_y \\ a_y \end{bmatrix} \cdot p_z \\ \begin{bmatrix} s_x \\ n_x \\ a_x \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le calcul des éléments de ${}^n J_j(\alpha)$ se fait par la matrice ${}^{j-1}T_5$.

- Pour $j = 1$, on utilise 0T_5 et on calcul $J(i,1)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(1,1) = S_{q_1} \cdot (S_5 + S_2 + S_4)$$

$$J(2,1) = C_{q_1} \cdot (S_5 + S_2 + S_4)$$

$$J(3,1) = -(a + S_3) \cdot C_{q_1}$$

$$J(4,1) = C_{q_1}$$

$$J(5,1) = S_{q_1}$$

$$J(6,1) = 0$$

- Pour $j = 2$, on utilise 1T_5 et on calcul $J(i,2)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(1,2) = J(5,2) = J(6,2) = 0$$

$$J(2,2) = S_4 + S_5$$

$$J(3,2) = S_2$$

$$J(4,2) = 1$$

- Pour $j = 3$, on utilise 2T_5 et on calcul $J(i,3)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(1,3) = J(3,3) = J(5,3) = J(6,3) = 0$$

$$J(2,3) = S_4 + S_5$$

$$J(4,3) = 1$$

- Pour $j = 4$, on utilise 3T_5 et on calcul $J(i,4)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(1,4) = J(3,4) = J(5,4) = J(6,4) = 0$$

$$J(2,4) = S_5$$

$$J(4,4) = 1$$

- Pour $j = 5$, on utilise 4T_5 et on calcul $J(i,5)$ avec $i = 1$ à 6 :

$$J(1,5) = J(3,5) = J(6,5) = J(5,5) = 0$$

$$J(2,5) = S_5$$

$$J(4,5) = 1$$

3.5.4 Calcul du modèle différentiel $dX = J(d) d(d)$

La matrice jacobienne correspondante est :

$${}^n J_j(d) = \begin{bmatrix} s_x \\ n_x \\ a_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le calcul des éléments de ${}^n J_j(d)$ se fait par ${}^{j-1}T_5$ ($j = 1$ à 5) calculées par le MGD.

- Pour $j = 1$, on utilise 0T_5 :

$$J(1,1) = Cq_1$$

$$J(2,1) = Sq_1$$

$$J(3,1) = J(4,1) = J(5,1) = J(6,1) = 0$$

- Pour $j = 2$, on utilise 1T_5 :

$$J(1,2) = 1$$

$$J(2,2) = J(3,2) = J(4,2) = J(5,2) = J(6,2) = 0$$

- Pour $j = 3$, on utilise 2T_5 :

$$J(1,3) = 1$$

$$J(2,3) = J(3,3) = J(4,3) = J(5,3) = J(6,3) = 0$$

- Pour $j = 4$, on utilise 3T_5 :

$$J(1,4) = 1$$

$$J(2,4) = J(3,4) = J(4,4) = J(5,4) = J(6,4) = 0$$

- Pour $j = 5$, on utilise 4T_5 :

$$J(1,5) = 1$$

$$J(2,5) = J(3,5) = J(4,5) = J(5,5) = J(6,5) = 0$$

3.5.5 Vitesses et Accélérations généralisées

Les vitesses et les accélérations généralisées sont données par la méthode des différences finies.

Soit donnée les lois de variation des coordonnées généralisées en fonction du temps. Elles peuvent être en général obtenu par la résolution du problème inverse en fonction de la trajectoire de l'organe terminal.

Pour un nombre important de segments L et pour un déplacement des coordonnées généralisées pendant un temps t_{l-1} et t_{l+1} petit, on peut calculer les dérivées par rapport au temps des coordonnées généralisées par des formules des différences finies. A savoir que pendant l'instant t_{l-1} et t_{l+1} les coordonnées généralisées varient à une vitesse constante :

$$\begin{aligned} q_j^{(l-1)} &= q_j^l + \dot{q}_j^l \cdot (t_{l-1} - t_l) + \ddot{q}_j^l \cdot (t_{l-1} - t_l)^2 / 2 \\ q_j^{(l+1)} &= q_j^l + \dot{q}_j^l \cdot (t_{l+1} - t_l) + \ddot{q}_j^l \cdot (t_{l+1} - t_l)^2 / 2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Avec :

$q_j^{(l-1)}$, q_j^l , $q_j^{(l+1)}$: les valeurs des coordonnées généralisées correspondant à t_{l-1} , t_l , t_{l+1} .

\dot{q}_j^l et \ddot{q}_j^l : les vitesses et les accélérations généralisées à l'instant t_l correspondant à la coordonnée généralisée q_j .

En résolvant le système (3.27) par rapport à \dot{q}_j^l et \ddot{q}_j^l , on obtient les formules pour les vitesses et les accélérations généralisées.

$$\dot{q}_j^l = \frac{[q_{j(l+1)} \cdot (t_l - t_{l-1})^2 - q_{j(l-1)} \cdot (t_{l+1} - t_l)^2 + q_{jl} \cdot (t_{l+1} - t_l)^2 - (t_l - t_{l-1})^2]}{[(t_{l+1} - t_l) \cdot (t_l - t_{l-1}) \cdot (t_{l+1} - t_{l-1})]} \quad (3.28)$$

$$\ddot{q}_j^l = 2 \cdot \frac{[q_{j(l+1)} \cdot (t_l - t_{l-1})^2 + q_{j(l-1)} \cdot (t_{l+1} - t_l)^2 - q_{jl} \cdot (t_{l+1} - t_l)]}{[(t_{l+1} - t_l) \cdot (t_l - t_{l-1}) \cdot (t_{l+1} - t_{l-1})]} \quad (3.29)$$

Pour des intervalles égaux :

$$t_l - t_{l-1} = t_{l+1} - t_l$$

Les formules (3.28) et (3.29) se simplifient :

$$\dot{q}_j^l = (q_{j(l+1)} - q_{j(l-1)}) / (t_{l+1} - t_{l-1}) \quad (3.30)$$

$$\ddot{q}_j^l = 4 \cdot (q_{j(l+1)} + q_{j(l-1)} - 2q_{jl}) / (t_{l+1} - t_{l-1})^2 \quad (3.31)$$

Si l'organe terminal parcourt la distance de $l=0$ à $l=10$ (linéaire) pour un temps $\tau = 0.18$, on détermine les valeurs des vitesses et des accélérations généralisées du manipulateur. Le calcul est effectuée pour $l=1$. Pour $l=10$, on a un intervalle $(t_{l+1} - t_{l-1})$ qui égal à $0.02s$. Pour déterminer les vitesses et les accélérations généralisées dans la position $l=1$, on utilise les données de la formule (3.30) et la formule (3.31).

3.5.5.1 Les vitesses et les accélérations généralisées

$$\dot{q}_{11} = (-0.1974 + 0.2916)/0.02 = 4.71 \text{ cm/s}$$

$$\dot{q}_{21} = (108 + 120)/0.02 = -600 \text{ cm/s}$$

$$\dot{q}_{31} = (71.39 - 104.40)/0.02 = 1651 \text{ cm/s}$$

$$\ddot{q}_{11} \approx 4(-0.197 - 0.292 + 2.0253)/0.02^2 = 176 \text{ cm/s}^2$$

$$\ddot{q}_{21} \approx 4(108 + 120 - 2.114)/0.02^2 = 0 \text{ cm/s}^2$$

$$\ddot{q}_{31} \approx 4(71.39 + 104.40 - 287.80)/0.02^2 = 1900 \text{ cm/s}^2$$

3.5.5.2 Les vitesses et les accélérations des points des chaînons

$$\dot{q}_{11} = (q_{12} - q_{10})/0.02 = (0 - 0)/0.02 = 0$$

$$\dot{q}_{21} = (q_{22} - q_{20})/0.02 = (50 - 50)/0.02 = 0$$

$$\dot{q}_{31} = (q_{32} - q_{30})/0.02 = (130 - 150)/0.02 = -1000 \text{ mm/s}$$

$$\dot{q}_{41} = (q_{42} - q_{40})/0.02 = (60 - 50)/0.02 = 500 \text{ mm/s}$$

$$\dot{q}_{51} = (q_{52} - q_{50})/0.02 = (40 - 50)/0.02 = -500 \text{ mm/s}$$

$$\ddot{q}_{11} = 4(q_{12} + q_{10} - 2q_{11})/0.02 = (0 + 0 - 0)/0.02 = 0$$

$$\ddot{q}_{21} = 4(q_{22} + q_{20} - 2q_{21})/0.02 = (40 + 50 - 2.40)/0.02 = 2000 \text{ mm/s}^2$$

$$\ddot{q}_{31} = 4(q_{32} + q_{30} - 2q_{31})/0.02 = (130 + 150 - 2.150)/0.02 = -4000 \text{ mm/s}^2$$

$$\ddot{q}_{41} = 4(q_{42} + q_{40} - 2q_{41})/0.02 = 4(60 + 50 - 2.60)/0.02 = -20000 \text{ mm/s}^2$$

$$\ddot{q}_{51} = 4(q_{52} + q_{50} - 2q_{51})/0.02 = 4(40 + 50 - 2.50) = -20000 \text{ mm/s}^2$$

Connaissant les vitesses et les accélérations généralisées du robot, on peut calculer la vitesse et l'accélération de n'importe quel point du robot.

Soit \vec{v}_{0i} et \vec{a}_{0i} les vecteurs des vitesses et des accélérations d'un point i appartenant à la situation du robot se trouvant dans le système de coordonnées O , alors on prenant la différentielle du vecteur R_0 , on obtient :

$$\dot{R}_0 = \begin{bmatrix} \vec{v}_{0i} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \ddot{R}_0 = \begin{bmatrix} \vec{a}_{0i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$R_0 = T_i \cdot R_i \quad (3.33)$$

On différencie par rapport au temps la formule (3.33) et sachant que R_i détermine la position recherchée du point i dans le système de coordonnées.

$$\dot{R}_0 = \dot{T}_i \cdot R_i \quad (3.34)$$

$$\ddot{R}_0 = \ddot{T}_i \cdot R_i \quad (3.35)$$

On différencie T_i et à savoir que $U_{ij} = \frac{dT_i}{dq_j}$, on obtient :

$$\dot{T}_i = \sum_{j=1}^i U_{ij} \cdot \dot{q}_j \quad (3.36)$$

$$\ddot{T}_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i V_{ij,k} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \sum_{j=1}^i U_{ij} \cdot \ddot{q}_j \quad (3.37)$$

Sachant que : $V_{ij,k}$: la matrice de dimension 4×4 .

$$V_{ij,k} = \frac{dU_{ij}}{dq_k} = V_{ikj} \quad (3.38)$$

$$U_{ij} = T_1 \cdot T_2 \cdots T_{j-1} \cdot \Omega_j \cdot T_j \cdots T_{i-1} \cdot T_i \quad (3.39)$$

$$\Omega_j = \frac{dT_j}{dq_j}$$

On différencie par rapport à q_k la formule (3.39), on obtient :

Pour $j > k$

$$V_{ijk} = T_1 \cdot T_2 \cdots T_{j-1} \cdot \Omega_j \cdot T_j \cdots T_j \cdots T_k \cdots T_{i-1} \cdot T_i \quad (3.40)$$

Pour $j < k$

$$V_{ijk} = T_1 \cdot T_2 \cdots T_{k-1} \cdot \Omega_k \cdot T_k \cdots T_{j-1} \cdot \Omega_j \cdots T_{i-1} \cdot T_i \quad (3.41)$$

Pour $j = k$

$$V_{ijk} = T_1 \cdot T_2 \cdots T_{j-1} \cdot \Omega^2 \cdot T_j \cdots T_{i-1} \cdot T_i \quad (3.42)$$

$$\Omega_d^2(k) = 0$$

Et (3.43)

$$\Omega_k^2(k) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.5.3 Application

Détermination de la vitesse et de l'accélération d'un point de l'organe terminal, connaissant la position du point par rapport à son système de coordonnées $\{x_5 = 0, y_5 = 0, z_5 = 200mm\}$ ainsi que les vitesses et les accélérations généralisées :

D'après (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18).

On remplace les termes par leurs valeurs données par le tableau (3.2), on obtient :

Pour : $l = 1$

$$U_{1,5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 50+150 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{2,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{3,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{4,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{5,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remplace dans l'équation (3.36), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{T}_5 &= U_{15} \cdot \dot{q}_{11} + U_{25} \cdot \dot{q}_{21} + U_{35} \cdot \dot{q}_{31} + U_{45} \cdot \dot{q}_{41} + U_{5,5} \cdot \dot{q}_{51} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (-1000) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (500) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (-500) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1000 & 0 & -200000 \\ -1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remplace le résultat obtenu dans l'équation (3.34), on obtient :

$$\dot{R}_0 = \dot{T}_5 \cdot R_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1000 & 0 & -200000 \\ -1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{05x} \\ v_{05y} \\ v_{05z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$v_{05} = \sqrt{v_{05x}^2 + v_{05y}^2 + v_{05z}^2} = 200000 \text{ mm/s}$$

Pour calculer l'accélération de ce même point, il faut déterminer la matrice : $V_{5,jk}$.

Avec : $j = 1,2,3,4,5$ et $k = 1,2,3,4,5$.

$$\begin{aligned} V_{511} &= \Omega_1^2 \cdot {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 = \Omega_1^2 \cdot {}^0T_5 = \left[\frac{d^0T_2}{dq_1} \right] \cdot {}^0T_5 \\ &= \begin{bmatrix} -Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ Cq_1 & Sq_1 & 0 & S_3 \cdot Sq_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Cq_1 & Sq_1 & 0 & (a + S_3) \cdot Sq_1 \\ Sq_1 & -Cq_1 & 0 & (a + S_3) \cdot Cq_1 \\ 0 & 0 & -1 & (S_2 + S_4 + S_5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & (a + S_3) \cdot [(Cq_1)^2 - (Sq_1)^2] \\ 1 & 0 & 0 & 2 \cdot (a + S_3) \cdot Sq_1 \cdot Cq_1 + S_3 \cdot Sq_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$V_{512} = \Omega_1 \cdot T_1 \cdot \Omega_2 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 = \Omega_1 \cdot T_1 \cdot \Omega_{dep} \cdot T_2 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{513} = \Omega_1 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \Omega_3 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 = V_{531} = 0$$

$$V_{514} = \Omega_1 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \Omega_4 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{515} = 0$$

$$V_{521} = V_{512} = 0$$

$$V_{522} = T_1 \cdot \Omega_2^2 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{523} = T_1 \cdot \Omega_2 \cdot T_2 \cdot \Omega_3 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 = V_{532} = 0$$

$$V_{524} = T_1 \cdot \Omega_2 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \Omega_4 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{525} = T_1 \cdot \Omega_2 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot \Omega_5 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{533} = T_1 \cdot T_2 \cdot \Omega_3^2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{541} = \Omega_1 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \Omega_4 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{542} = V_{524} = 0$$

$$V_{543} = T_1 \cdot T_2 \cdot \Omega_3 \cdot T_3 \cdot \Omega_4 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{544} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \Omega_4^2 \cdot T_4 \cdot T_5 = 0$$

$$V_{551} = V_{515} = 0$$

$$V_{552} = 0$$

$$V_{553} = 0$$

$$V_{554} = 0$$

$$V_{555} = 0$$

En tenant compte uniquement des membres non nul, on obtient :

$$\ddot{T}_5 = V_{211} \cdot \dot{q}_1^2 + 2 \cdot V_{513} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_3 + U_{31} \cdot \ddot{q}_1 + U_{33} \cdot \ddot{q}_3$$

$$\ddot{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & (50+q_3) \cdot [(Cq_1)^2 - (Sq_1)^2] \\ 1 & 0 & 0 & 2 \cdot (50+q_3) \cdot Sq_1 \cdot Cq_1 + S_3 \cdot Sq_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_1^2$$

$$\ddot{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & (50+150) \cdot [1] \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (4,71)^2$$

$$\ddot{R}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 22.18 & 0 & 4436.82 \\ 22.18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R_5$$

$$\ddot{R}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 22.18 & 0 & 4436.82 \\ 22.18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4436.82 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{05} = 4436.82 \text{ mm/s}^2$$

3.6 Modèle dynamique

3.6.1 Introduction

Généralement, la méthode d'analyse cinétostatique est utilisée pour étudier le modèle dynamique qui nous permet de déterminer les réactions aux niveaux des différents couples cinématique ainsi que les moments des forces qui agissent sur l'actionneur.

3.6.2 Description de la structure

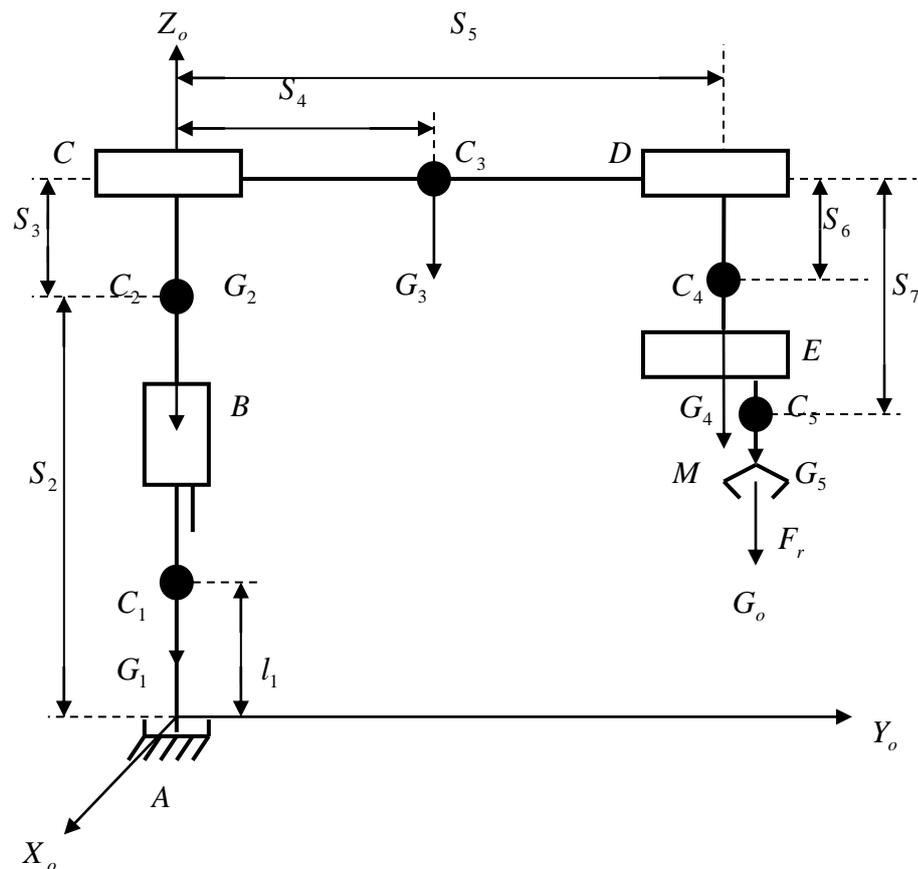


Figure 3.2 : Schéma cinématique d'un robot travaillant dans le système de coordonnées cylindrique.

- Les distances par rapport aux centres de masses sont connues.
- G_i : poids des chaînons.
- G_o : poids de l'objet.
- F_r : force réactive au niveau de la pince.

3.6.3 Les vecteurs principaux des forces d'inerties

$$\vec{F}_i^I = \sum_{i=1}^5 m_i \cdot \ddot{s}_i \cdot \vec{k} \quad (3.44)$$

m_i : représentent les masses des corps en mouvement.

\ddot{s}_i : les accélérations des corps en mouvement.

$$\vec{F}_1^I = 0 \quad (3.45)$$

$$\vec{F}_2^I = -m_2 \cdot \ddot{s}_2 \cdot \vec{k}_1 \quad (3.46)$$

$$\vec{F}_3^I = -m_3 \cdot \left[\left(\ddot{s}_3 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_4 \right) \vec{i}_1 + \left(\ddot{\varphi}_1 s_4 + 2 \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_3 \right) \vec{j}_1 + \ddot{s}_2 \vec{k}_1 \right] \quad (3.47)$$

$$\vec{F}_4^I = -m_4 \cdot \left[\left(\ddot{s}_3 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) \vec{i}_1 + \left(\ddot{\varphi}_1 s_5 + 2 \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_4 \right) \vec{j}_1 + \ddot{s}_2 \vec{k}_1 + \ddot{s}_3 \vec{j}_1 \right] \quad (3.48)$$

$$\vec{F}_5^I = -m_5 \cdot \left[\left(\ddot{s}_3 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) \vec{i}_1 + \left(\ddot{\varphi}_1 s_5 + 2 \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_5 \right) \vec{j}_1 + \ddot{s}_2 \vec{k}_1 + \ddot{s}_3 \vec{j}_1 + \ddot{s}_4 \vec{k}_1 \right] \quad (3.49)$$

3.6.4 Les moments principaux des forces d'inerties par rapport à leur centre de masse

$$\vec{M}_{ci}^I = J_{zi} \cdot \ddot{\varphi}_i \cdot \vec{k}_i \quad (3.50)$$

$$\vec{M}_{c1}^I = -J_{z1} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1 \quad (3.51)$$

$$\vec{M}_{c2}^I = -J_{z2} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1 \quad (3.52)$$

$$\vec{M}_{c3}^I = -J_{z3} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1 \quad (3.53)$$

$$\vec{M}_{c4}^I = -J_{z4} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1 \quad (3.54)$$

$$\vec{M}_{c5}^I = -J_{z5} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1 \quad (3.55)$$

J_{z1} , J_{z2} , J_{z3} , J_{z4} et J_{z5} : représentent les moments d'inertie des chaînons 1, 2, 3, 4 et 5 par rapport aux axes centraux des chaînons.

1, 2, 3, 4 et 5 : sont parallèles aux axes de coordonnées.

3.6.5 Le vecteur principal de la force d'inertie de l'objet pris par la pince du robot

$$\vec{F}_0^I = -m_0 \cdot \left[\left(\ddot{s}_3 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) \vec{i}_1 + \left(\ddot{\varphi}_1 s_5 + 2 \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_5 \right) \vec{j}_1 + \ddot{s}_2 \vec{k}_1 + \ddot{s}_3 \vec{j}_1 + \ddot{s}_4 \vec{k}_1 \right] \quad (3.56)$$

\vec{F}_0^I : vecteur principal de la force d'inertie de l'objet.

m_0 : masse de l'objet.

3.6.6 Le moment principal des forces d'inerties de l'objet par rapport au centre de la masse:

$$\vec{M}_0^I = -J_{z0} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1 \quad (3.57)$$

J_{z0} : moment d'inertie de la masse pris par la pince du robot.

3.6.7 Les réactions d'un robot manipulateur

Pour déterminer les réactions aux niveaux du couple cinématique E projetons les forces agissant sur le couple E suivant le système de coordonnées $EX_5Y_5Z_5$:

- **Projection suivant EX_5 :**

$$m_5 \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_4 - \ddot{s}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad m_0 \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 - \ddot{s}_3 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

- **Projection suivant EY_5 :**

$$-m_5 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2 \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_5 + \ddot{s}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad -m_0 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2 \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_3 + \ddot{s}_3 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

- **Projection suivant EZ_5 :**

$$-m_5 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{s}_2 + \ddot{s}_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad -m_0 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{s}_2 + \ddot{s}_4 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

L'équation des forces et des moments :

• **Equation des forces :**

$$\vec{G}_5 + \vec{G}_0 + \vec{F}_5^I + \vec{F}_r + \vec{R}_E = 0 \quad (3.61)$$

\vec{R}_E : réaction au niveau du couple E .

\vec{F}_r : force réactive qui agit sur la pince.

• **Equation des moments :**

$$\vec{M}_{c5}^I + \vec{M}_0^I - \vec{F}_5^I \cdot s_5 - \vec{G}_5 \cdot s_5 - \vec{G}_0 \cdot s_5 - \vec{F}_0^I \cdot s_5 + \vec{M}_E = 0 \quad (3.62)$$

Avec :

$$\vec{M}_{c5}^I = -J_{c5} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1$$

$$\vec{M}_0^I = -J_{z0} \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \vec{k}_1$$

Projection les équations (3.61) et (3.62) sur les systèmes de coordonnées, on obtient :

• **Projection des forces :**

Sur l'axe EX_5 :

$$m_5 \cdot \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_4 - \ddot{s}_3 \right) + m_0 \cdot \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 - \ddot{s}_3 \right) + R_{EX} + F_{rx} = 0$$

Sur l'axe EY_5 :

$$-m_5 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2\dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_5 + \ddot{s}_3 \right) - m_0 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2\dot{\varphi}_1 \cdot \dot{s}_3 + \ddot{s}_3 \right) + R_{EY} + F_{ry} = 0$$

Sur l'axe EZ_5 :

$$-m_5 \cdot \left(\ddot{s}_2 + \ddot{s}_4 \right) - m_0 \cdot \left(\ddot{s}_2 + \ddot{s}_4 \right) + R_{EZ} + F_{rz} - G_5 - G_0 = 0$$

• **Projection des moments :**

Suivant l'axe X :

$$M_{c5X}^I + M_{0X}^I - \left[m_5 \cdot \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_4 - \ddot{s}_3 \right) + m_0 \cdot \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 - \ddot{s}_3 \right) \right] \cdot (s_2 + l_3) + M_{EX} = 0$$

Suivant l'axe Y :

$$M_{c5Y}^I + M_{0Y}^I - \left[m_5 \cdot \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_4 - \ddot{s}_3 \right) + m_0 \cdot \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 - \ddot{s}_3 \right) \right] \cdot (s_2 + l_3) + M_{EY} = 0$$

Suivant l'axe Z :

$$M_{c5Z}^I + M_{0Z}^I - \left[m_5 \cdot \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_4 - \ddot{s}_3 \right) + m_0 \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \cdot s_3 \right) \right] \cdot (s_2 + l_3) + M_{EZ} = 0$$

- ✚ Pour déterminer les forces agissant sur le couple cinématique E projetons toutes les forces sur l'axe X_5 .

$$-m_3 \cdot \left(\ddot{s}_5 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) - m_0 \cdot \left(\ddot{s}_5 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) + \varphi_E = 0$$

Où : φ_E : est la force que doit fournir l'actionneur dans le couple cinématique E .

- ✚ Pour déterminer les réactions aux niveaux du couple cinématique D qui permettent le déplacement des chaînons 4 et 5. on détermine les forces et les moments des forces d'inertie.

- ❖ Equation des projections des forces sur l'axe X_4 :

$$-m_5 \cdot \left(\ddot{s}_5 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_6 \right) - m_0 \cdot \left(\ddot{s}_5 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_6 \right) + R_{DX} = 0$$

- ❖ Equation des projections des forces sur l'axe Y_4 :

$$-m_5 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_3 \right) - m_0 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 \cdot (s_5 + s_6) + 2\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_3 \right) + R_{DY} = 0$$

- ❖ Equation des moments des forces par rapport à X_4 :

$$-\left[m_5 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_3 \right) + m_0 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_3 \right) \right] \cdot (s_5 + s_6) + M_{DX} = 0$$

- ❖ Equation des moments des forces par rapport à Y_4 :

$$\left[m_3 \cdot \left(\ddot{s}_3 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_4 \right) + m_0 \cdot \left(\ddot{s}_5 - \dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) \right] \cdot (s_5 + s_6) + (m_3 + m_4 + m_5 + m_0) \ddot{s}_2 \cdot s_5 + m_5 \cdot \ddot{s}_2 \cdot s_5 + M_{DY} = 0$$

- ❖ Equation des moments des forces par rapport à Z_4 :

$$m_5 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) \cdot s_5 + m_0 \cdot \left(\ddot{\varphi}_1 \cdot s_5 + 2\dot{\varphi}_1^2 \cdot s_5 \right) \cdot s_5 + M_{DZ} = 0$$

- ✚ Pour déterminer les forces qui agissent sur l'actionneur qui se trouve au niveau du couple prismatique D projetons toutes les forces suivant X_4 .

De cette façon nous pouvons déterminer et dimensionner tous les actions aux niveaux de chacun des couples cinématiques.

3.7 Modèle des erreurs

Dans cette partie, nous allons considérer l'articulation rotoïde afin de déterminer son erreur.

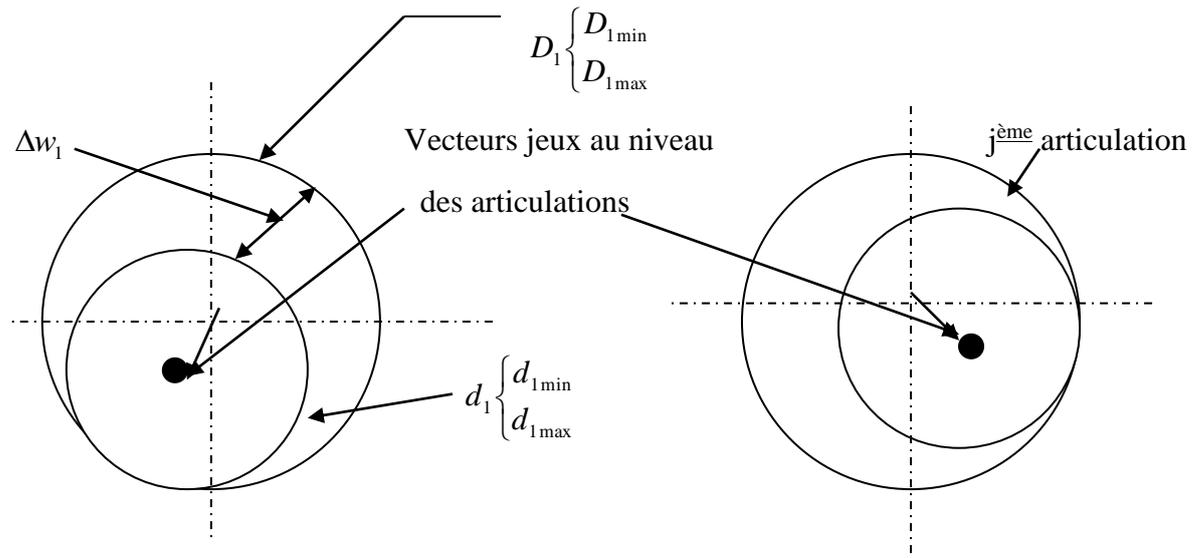


Figure 3.3 : Erreurs provenant de jeux prévus lors de la conception.

Erreurs angulaires et linéaires d'un robot

$$A_1 = \begin{cases} d_1 \begin{cases} d_{1\min} \\ d_{1\max} \end{cases} \\ D_1 \begin{cases} D_{1\min} \\ D_{1\max} \end{cases} \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} d_2 \begin{cases} d_{2\min} \\ d_{2\max} \end{cases} \\ D_2 \begin{cases} D_{2\min} \\ D_{2\max} \end{cases} \end{cases}$$

$$\delta_1 = D_{1\max} - d_{1\min}$$

$$\delta_2 = D_{2\max} - d_{2\min}$$

$$\delta_3 = D_{3\max} - d_{3\min}$$

$$\Delta w_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 \cos \beta_1 \\ \delta_1 \sin \beta_1 \end{bmatrix}$$

Considérons le cas où le robot réalise une tâche correspondant à la configuration φ_1 . Pour déterminer le modèle des erreurs correspondant à cette configuration, il faut connaître l'orientation $\bar{\beta}_j$ des vecteurs erreurs Δw_j ce qui est presque impossible.

Dans ce cas considérons le cas suivant où les erreurs $|\Delta w_j|^2$ sont tel que :

$$\frac{1}{2} \cdot \delta_j^2 \leq M |\Delta w_j|^2 \leq \delta_j^2. \text{ Tel que } M \text{ est la moyenne quadratique.}$$

L'erreur minimale correspond au cas où $M |\Delta w_j|^2 = \frac{1}{2} \delta_j^2$, pour une articulation sans tenir compte de l'erreur de l'articulation prismatique, l'erreur globale au niveau du point M (figure 3.3) causée par les deux articulations sera $\Delta t = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{2} \delta_j^2 \right)$ et l'erreur nominale :

$\Delta T = \sum_{j=1}^2 \delta_j^2$, ces erreurs seront répartie pour un robot à n articulations rotoïdes, l'erreur globale Δ sera comprise entre :

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j^2 \leq \Delta \leq \sum_{j=1}^n \delta_j^2$$

En utilisant la méthode matricielle du chapitre 2 et les formules (2.46) à (2.52), on obtient l'erreur Δx_c du robot :

$$\begin{aligned} \Delta x_c &= \sum_{j=1}^n T_1 \dots T_{j-1} \cdot \Delta T_j \cdot T_{j+1} \dots T_n \cdot (l e_3 + e_4) + (A e_3) \cdot \Delta l \\ &= \sum_{j=1}^n (\xi_{aj} \Delta \alpha_j + \xi_{sj} \Delta s_j + \xi_{\theta j} \Delta \theta_j) + \xi_l \cdot \Delta l \\ \Delta A_j &= \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j + \frac{\partial A_j}{\partial s_j} \Delta s_j + \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j + \frac{\partial A_j}{\partial \theta_j} \Delta \theta_j \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\text{Où : } \xi_{aj} = \frac{\partial T_j}{\partial \alpha_j}, \quad \xi_{sj} = \frac{\partial T_j}{\partial s_j} \quad \text{et} \quad \xi_{\theta j} = \frac{\partial T_j}{\partial \theta_j}$$

La formule (3.63) présente la somme de $(4.n + 1)$ vecteurs ξ_j , multipliés par les erreurs premières correspondantes. Les éléments entrant dans les matrices $\frac{\partial T_j}{\partial \alpha_j}$, $\frac{\partial T_j}{\partial s_j}$, $\frac{\partial T_j}{\partial \alpha_j}$ et

$\frac{\partial T_j}{\partial \theta_j}$ coïncident avec les dérivées partielles des éléments T_j .

$$S_\varphi = M (\Delta X_c \cdot \Delta X_c^T)$$

$$S_{\varphi} = \sum_{j=1}^n \left(\xi_{aj} \xi_{aj}^T \sigma_{aj}^2 + \xi_{sj} \xi_{sj}^T \sigma_{sj}^2 + \xi_{aj} \xi_{aj}^T \sigma_{aj}^2 + \xi_{\theta j} \xi_{\theta j}^T \sigma_{\theta j}^2 \right) + \xi_1 \xi_1^T \sigma_1^2 \quad (3.64)$$

σ_j^2 : représente les erreurs premières discrètes (voir chapitre 2).

3.7.1 Modèle des erreurs aléatoires

3.7.1.1 Erreurs dues aux variables articulaires

- Le vecteur des variances des coordonnées articulaires est donné par :

$$V(\theta) = d\theta = [d\theta_1 \quad d\theta_2 \quad d\theta_3 \quad d\theta_4 \quad d\theta_5]^T$$

- La matrice de variance est égale à :

$$Q = d\theta \cdot d^t \theta$$

Avec : $COV(\theta_i, \theta_j) = 0$

D'où :

$$Q = \begin{bmatrix} d^2\theta_1 & & & & 0 \\ & d^2\theta_2 & & & \\ & & d^2\theta_3 & & \\ & & & d^2\theta_4 & \\ 0 & & & & d^2\theta_5 \end{bmatrix}$$

- La matrice de variance-covariance est égale à :

$$R = J Q J^T$$

Avec :

R : matrice de variance-covariance (symétrique).

J : la matrice jacobienne en fonction des coordonnées θ_j , calculée par le modèle différentiel direct.

$$J = \begin{bmatrix} J(1,1) & J(1,2) & J(1,3) & 0 & 0 \\ J(2,1) & J(2,2) & J(2,3) & 0 & 0 \\ 0 & J(3,2) & J(3,3) & 0 & 0 \\ J(4,1) & J(4,2) & J(4,3) & J(4,4) & 0 \\ J(5,1) & J(5,2) & J(5,3) & J(5,4) & 0 \\ J(6,1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ & & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ \text{symétrique} & & & R_{44} & R_{45} & R_{46} \\ & & & & R_{55} & R_{56} \\ & & & & & R_{66} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$R_{11} = J^2(1,1) \cdot d^2\theta_1 + J^2(1,2) \cdot d^2\theta_2 + J^2(1,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{22} = J^2(2,1) \cdot d^2\theta_1 + J^2(2,2) \cdot d^2\theta_2 + J^2(2,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{33} = J^2(3,2) \cdot d^2\theta_2 + J^2(3,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{44} = J^2(4,1) \cdot d^2\theta_1 + J^2(4,2) \cdot d^2\theta_2 + J^2(4,3) \cdot d^2\theta_3 + J^2(4,4) \cdot d^2\theta_4$$

$$R_{55} = J^2(5,1) \cdot d^2\theta_1 + J^2(5,2) \cdot d^2\theta_2 + J^2(5,3) \cdot d^2\theta_3 + J^2(5,4) \cdot d^2\theta_4$$

$$R_{66} = J^2(6,1) \cdot d^2\theta_1 + d^2\theta_5$$

3.7.1.2 Les variances de la situation du préhenseur

$$R_{12} = J(1,1) \cdot J(2,1) \cdot d^2\theta_1 + J(1,2) \cdot J(2,2) \cdot d^2\theta_2 + J(1,3) \cdot J(2,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{13} = J(1,2) \cdot J(3,2) \cdot d^2\theta_2 + J(1,3) \cdot J(3,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{14} = J(1,1) \cdot J(4,1) \cdot d^2\theta_1 + J(1,2) \cdot J(4,2) \cdot d^2\theta_2 + J(1,3) \cdot J(4,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{15} = J(1,1) \cdot J(5,1) \cdot d^2\theta_1 + J(1,2) \cdot J(5,2) \cdot d^2\theta_2 + J(1,3) \cdot J(5,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{16} = J(1,1) \cdot J(6,1) \cdot d^2\theta_1$$

$$R_{23} = J(2,2) \cdot J(3,2) \cdot d^2\theta_2 + J(2,3) \cdot J(3,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{24} = J(2,1) \cdot J(4,1) \cdot d^2\theta_1 + J(2,2) \cdot J(4,2) \cdot d^2\theta_2 + J(2,3) \cdot J(4,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{25} = J(2,1) \cdot J(5,1) \cdot d^2\theta_1 + J(2,2) \cdot J(5,2) \cdot d^2\theta_2 + J(2,3) \cdot J(5,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{26} = J(2,1) \cdot J(6,1) \cdot d^2\theta_1$$

$$R_{34} = J(3,2) \cdot J(5,2) \cdot d^2\theta_2 + J(3,3) \cdot J(4,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{35} = J(3,2) \cdot J(5,2) \cdot d^2\theta_2 + J(3,3) \cdot J(5,3) \cdot d^2\theta_3$$

$$R_{36} = 0$$

$$R_{46} = J(5,1) \cdot J(6,1) \cdot d^2\theta_1$$

$$R_{56} = J(5,1) \cdot J(6,1) \cdot d^2\theta_1$$

$$R_{45} = J(4,1) \cdot J(5,1) \cdot d^2\theta_1 + J(4,2) \cdot J(5,2) \cdot d^2\theta_2 + J(4,3) \cdot J(5,3) \cdot d^2\theta_3 + J(4,3) \cdot J(5,3) \cdot d^2\theta_4$$

3.7.1.3 Les covariances de la situation du préhenseur

$$R_{36} = 0$$

$$R_{46} = J(5,1) \cdot J(6,1) \cdot d^2\theta_1$$

$$R_{56} = J(5,1) \cdot J(6,1) \cdot d^2\theta_1$$

$$R_{45} = J(4,1) \cdot J(5,1) \cdot d^2\theta_1 + J(4,2) \cdot J(5,2) \cdot d^2\theta_2 + J(4,3) \cdot J(5,3) \cdot d^2\theta_3 + J(4,4) \cdot J(5,5) \cdot d^2\theta_4$$

Remarque :

Pratiquement, il est impossible d'obtenir la vraie valeur de la grandeur mesurée ceci vient du fait que toute mesure est entachée d'erreur. Cependant pour dire que la valeur d'une grandeur mesurée est acceptée ou refusée, on établit une tolérance. On peut faire donc une comparaison entre l'erreur globale E_G et la valeur de l'erreur admissible E_a pour voir si la trajectoire T décrite par l'effecteur est à l'intérieur de la plage de E_a .

Ce qui se traduit par :

$$E_G \leq E_a$$

3.8 Simulation sur le logiciel Matlab et Visual-Lisp

Soient donner les positions P_i d'un ensemble de points par leur coordonnées généralisées q_{1i} , q_{2i} , q_{3i} , q_{4i} et q_{5i} (voir tableau 3.2).

Les graphes donnés par les figures (3.4) jusqu'à (3.18) expriment les coordonnées optimisées des positions, des vitesses et des accélérations des actionneurs c'est-à-dire connaissant la loi du mouvement, on peut déterminer la position, la vitesse et l'accélération de l'actionneur à n'importe quel instant. Les positions, les vitesses et les accélérations sont obtenues à partir de la 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} approximation.

3.8.1 Les vecteurs positions

$$q_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$q_2 = [50 \ 40 \ 50 \ 60 \ 60 \ 40 \ 50 \ 0 \ 100 \ 100 \ 0 \ 40 \ 70 \ 40 \ 0]$$

$$q_3 = [150 \ 140 \ 130 \ 120 \ 110 \ 100 \ 9 \ 80 \ 70 \ 60 \ 50 \ 40 \ 30 \ 20 \ 10]$$

$$q_4 = [50 \ 60 \ 60 \ 40 \ 50 \ 50 \ 40 \ 50 \ 50 \ 0 \ 100 \ 70 \ 40 \ 40 \ 0]$$

$$q_5 = [50 \ 50 \ 40 \ 50 \ 40 \ 60 \ 100 \ 0 \ 50 \ 40 \ 40 \ 70 \ 150]$$

3.8.1.1 Actionneur n°1

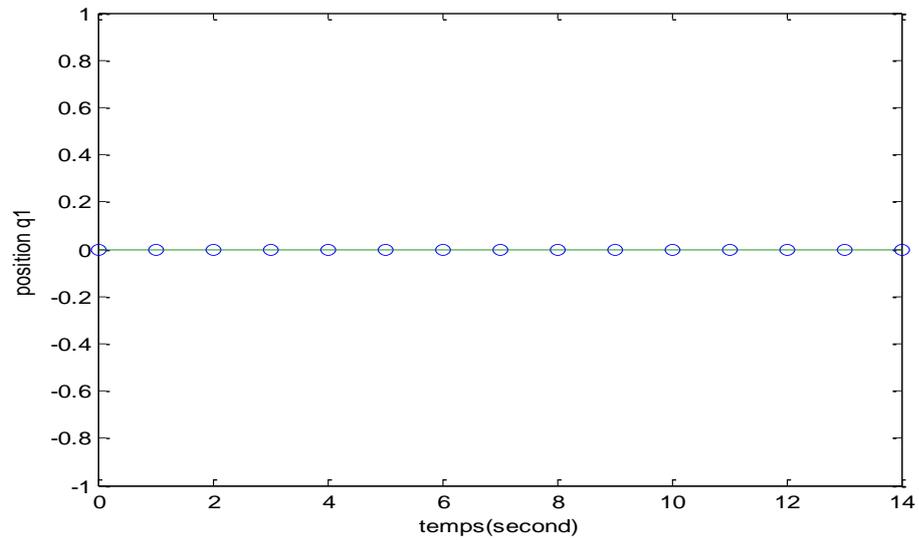


Figure 3.4 : Coordonnées articulaires optimisées du 1^{er} actionneur.

3.8.1.2 Actionneur n°2

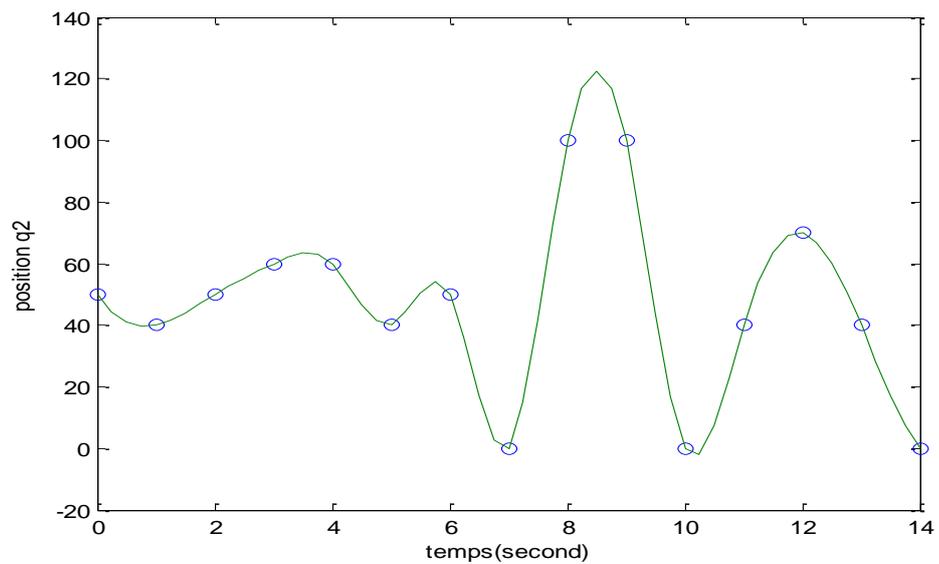


Figure 3.5 : Coordonnées articulaires optimisées du 2^{ème} actionneur.

3.8.1.3 Actionneur n°3

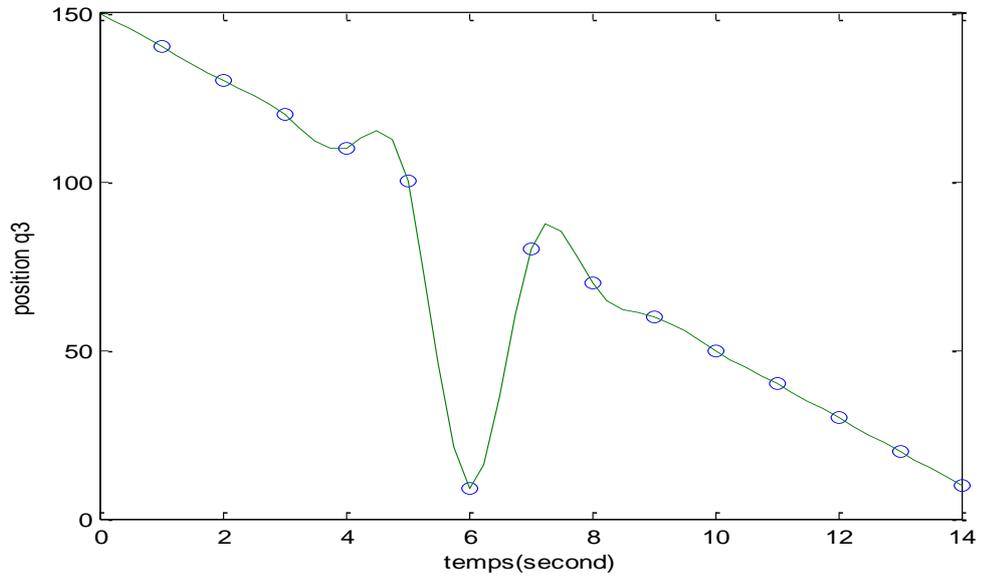


Figure 3.6 : Coordonnées articulaires optimisées du 3^{ème} actionneur.

3.8.1.4 Actionneur n°4

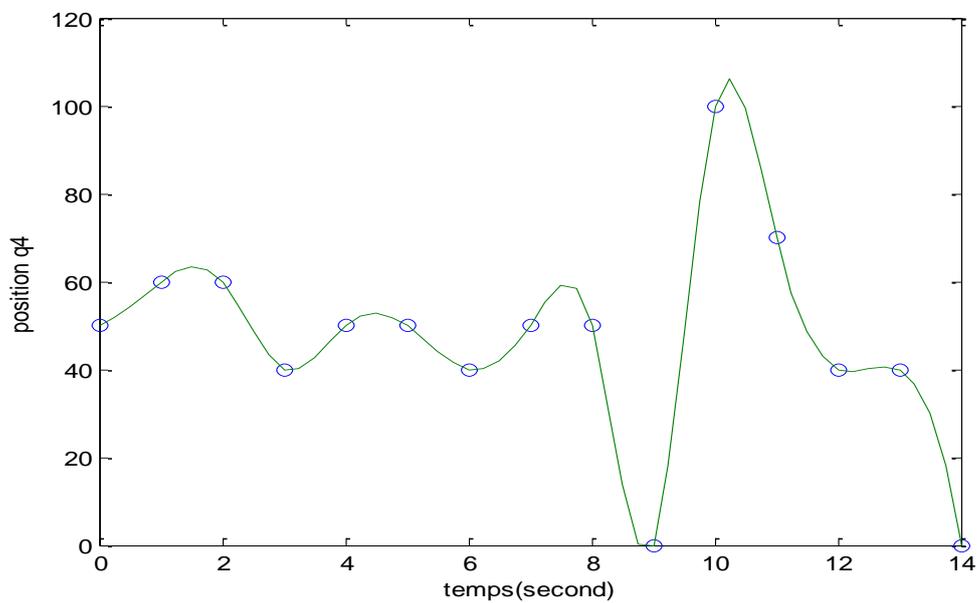


Figure 3.7 : Coordonnées articulaires optimisées du 4^{ème} actionneur.

3.8.1.5 Actionneur n°5

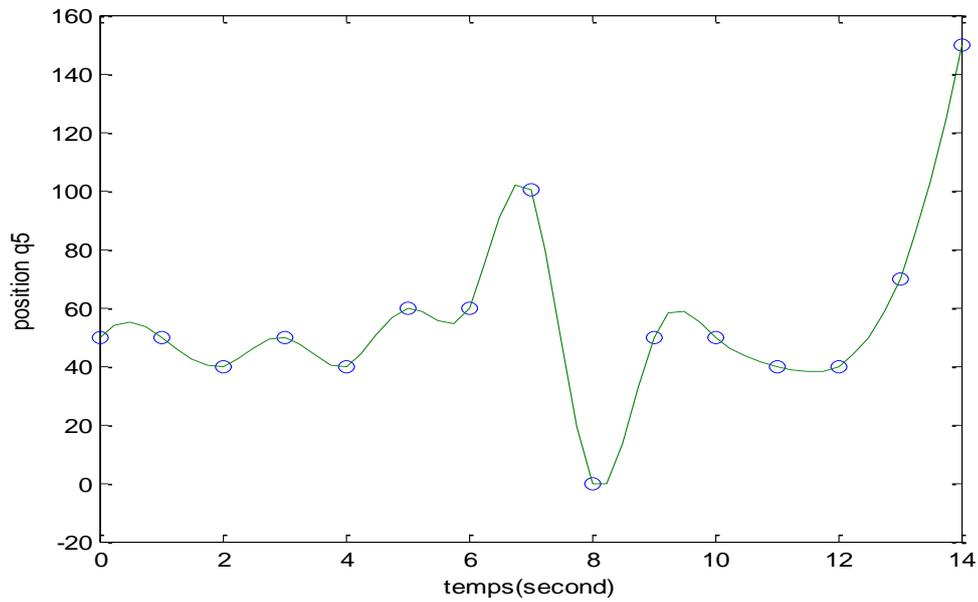


Figure 3.8 : Coordonnées articulaires optimisées du 5^{ème} actionneur.

3.8.2 Les vecteurs vitesses

$$\dot{q}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\dot{q}_2 = [-2.5 \ 0 \ 5 \ 2.5 \ -5 \ -2.5 \ -10 \ 12.5 \ 25 \ -25 \ -15 \ 17.5 \ 0 \ -17.5 \ -10]$$

$$\dot{q}_3 = [-2.5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -25.25 \ -5 \ 15.25 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -2.5]$$

$$]10 \ -10 \ -7.5 \ -15 \ -12.5 \ 12.5 \ 17.5 \ -2.5 \ 0 \ 2.5 \ -2.5 \ 2.5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -2.5] \dot{q}_4$$

$$15] \ -2.5 \ 7.5 \ 27.5 \ -2.5 \ -12.5 \ 12.5 \ -15 \ -2.5 \ 0 \ 0 \ 2.5 \ 5 \ 10 \ -5] \dot{q}_5$$

3.8.2.1 Actionneur n°1

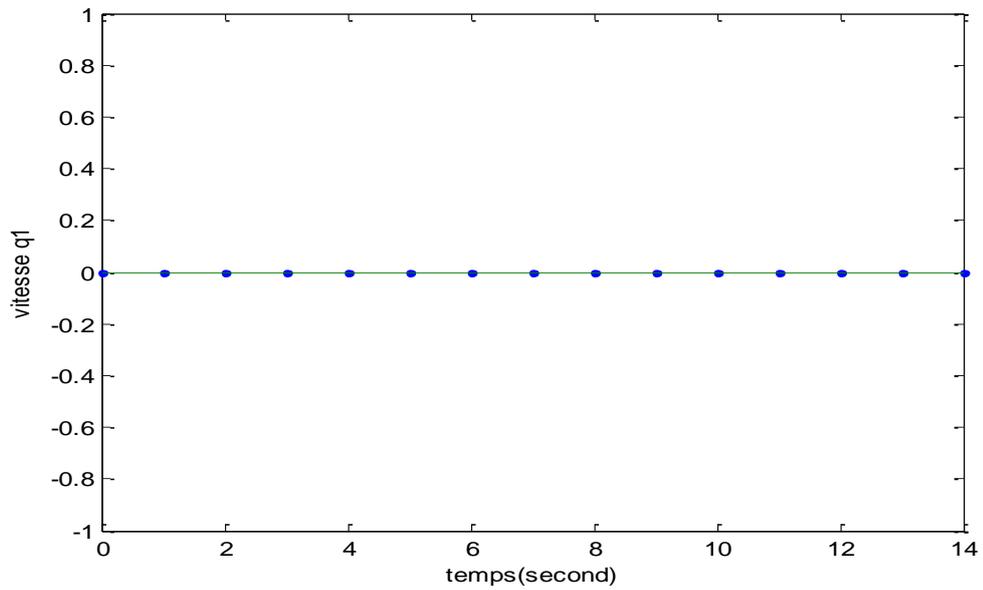


Figure 3.9 : Vitesses articulaires optimisées du 1^{er} actionneur.

3.8.2.2 Actionneur n°2

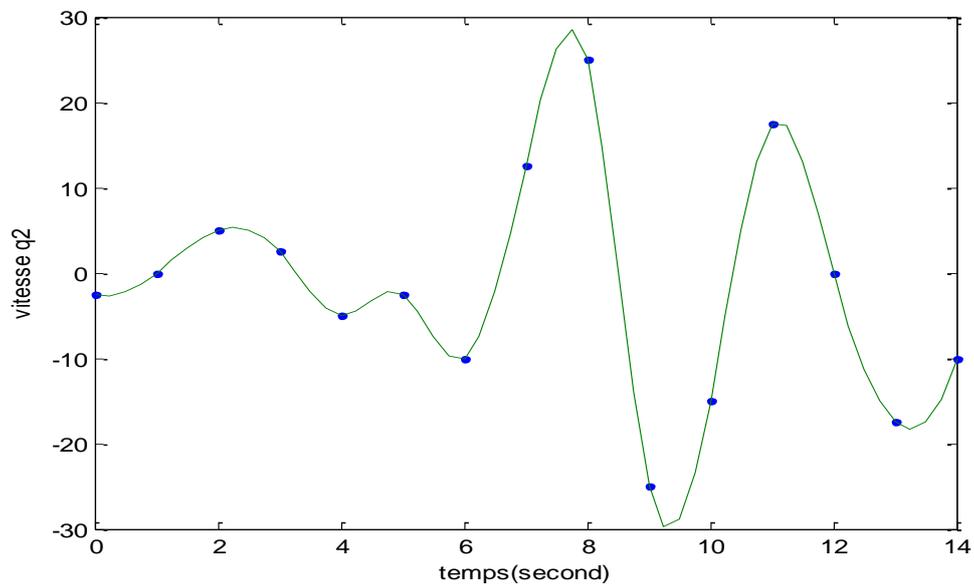


Figure 3.10 : Vitesses articulaires optimisées du 2^{ème} actionneur.

3.8.2.3 Actionneur n°3

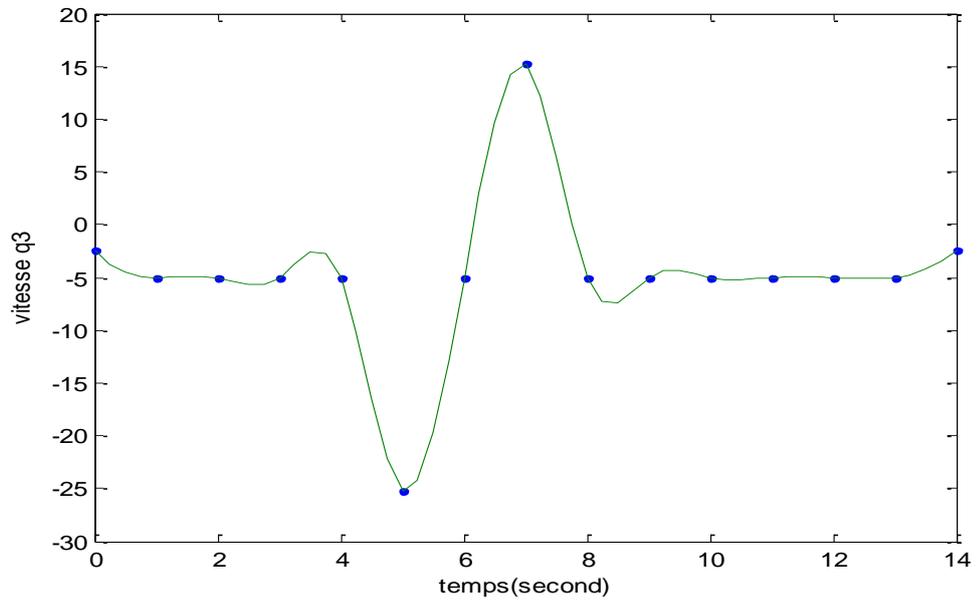


Figure 3.11 : Vitesses articulaires optimisées du 3^{ème} actionneur.

3.8.2.4 Actionneur n°4

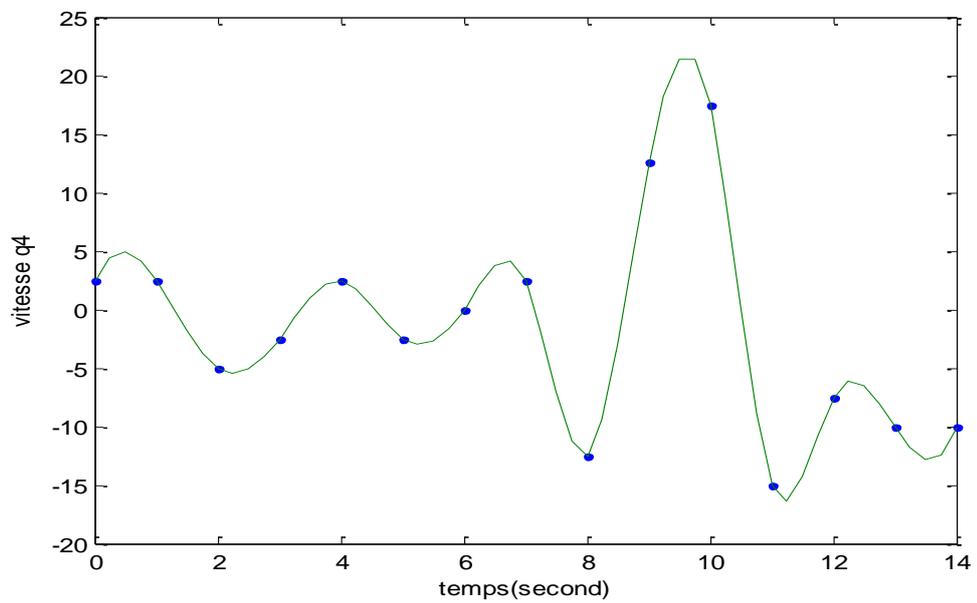


Figure 3.12 : Vitesses articulaires optimisées du 4^{ème} actionneur.

3.8.2.5 Actionneur n°5

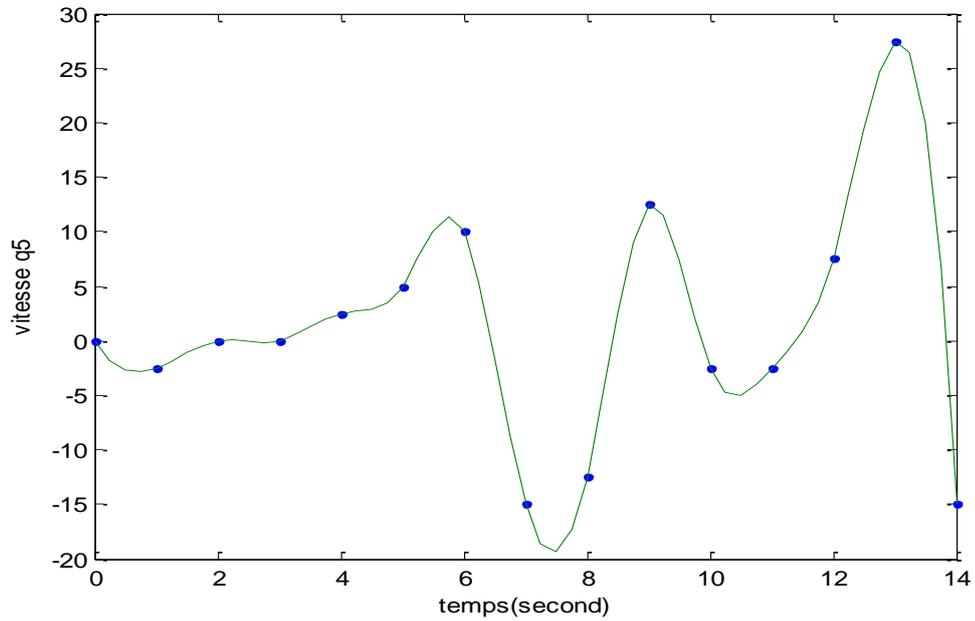


Figure 3.13 : Vitesses articulaires optimisées du 5^{ème} actionneur.

3.8.3 Les vecteurs accélérations

$$\ddot{q}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\ddot{q}_2 = [0 \ 5 \ 0 \ -2.5 \ -5 \ 7.5 \ -15 \ 37.5 \ -25 \ -25 \ 35 \ -2.5 \ -15 \ -2.5 \ 0]$$

$$\ddot{q}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -20.25 \ 40.5 \ -20.25 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\ddot{q}_4 = [0 \ -2.5 \ -5 \ 7.5 \ -2.5 \ -2.5 \ 5 \ -2.5 \ -12.5 \ 37.5 \ -32.5 \ 0 \ 7.5 \ -10 \ 0]$$

$$\ddot{q}_5 = [0 \ -2.5 \ 5 \ -5 \ 7.5 \ -5 \ 10 \ -35 \ 37.5 \ -12.5 \ -2.5 \ 2.5 \ 7.5 \ 12.5 \ 0]$$

3.8.3.1 Actionneur n°1

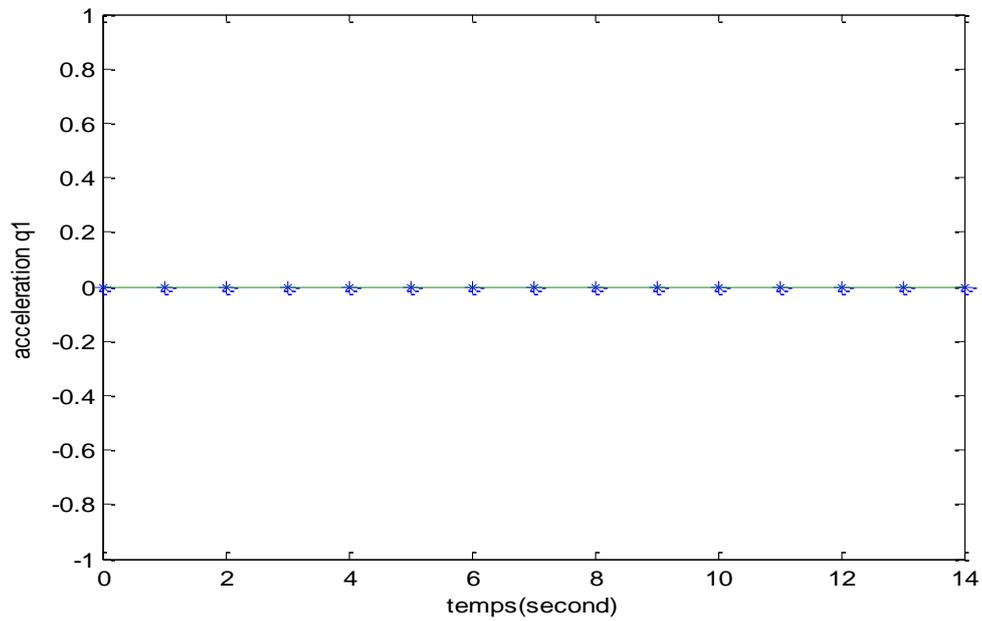


Figure 3.14 : Accélérations articulaires optimisées du 1^{er} actionneur.

3.8.3.2 Actionneur n°2

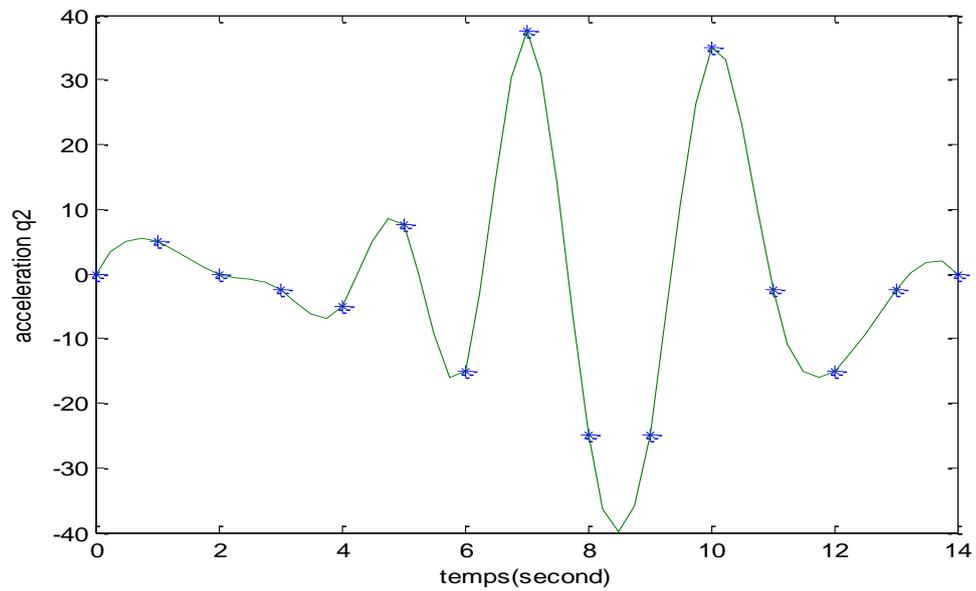


Figure 3.15 : Accélérations articulaires optimisées du 2^{ème} actionneur.

3.8.3.3 Actionneur n°3

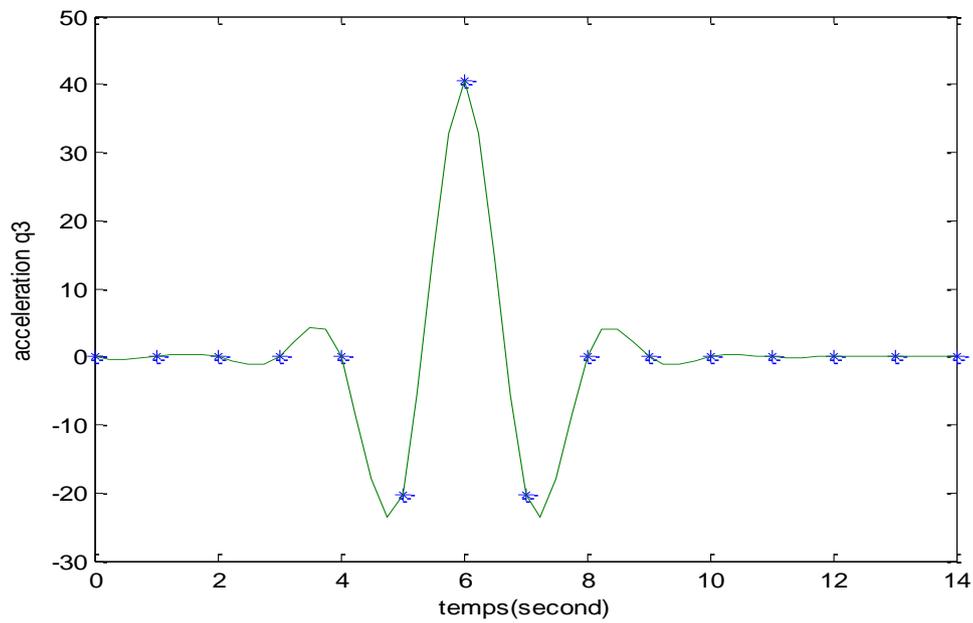


Figure 3.16 : Accélérations articulaires optimisées du 3^{ème} actionneur.

3.8.3.4 Actionneur n°4

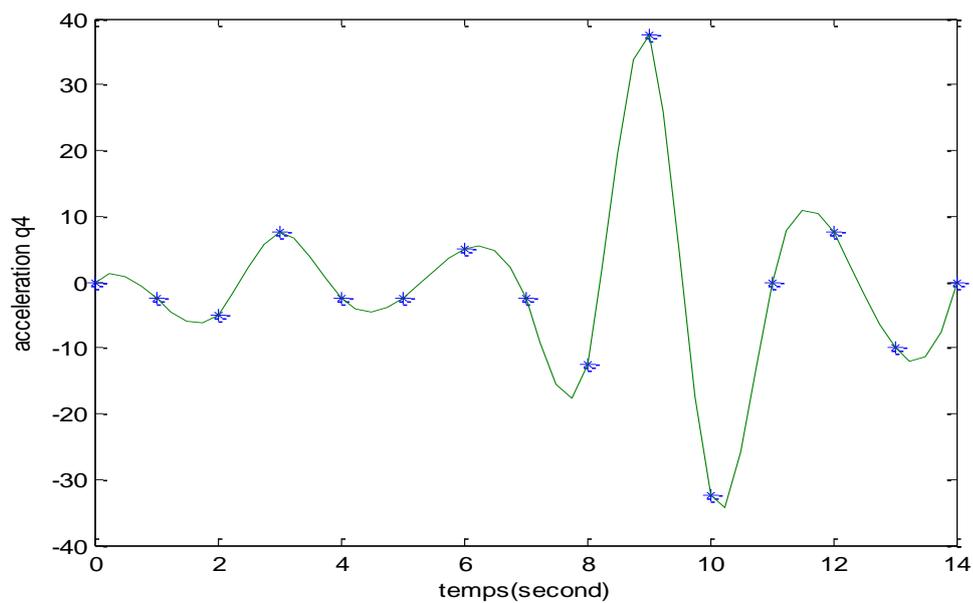


Figure 3.17 : Accélérations articulaires optimisées du 4^{ème} actionneur.

3.8.3.5 Actionneur n°5

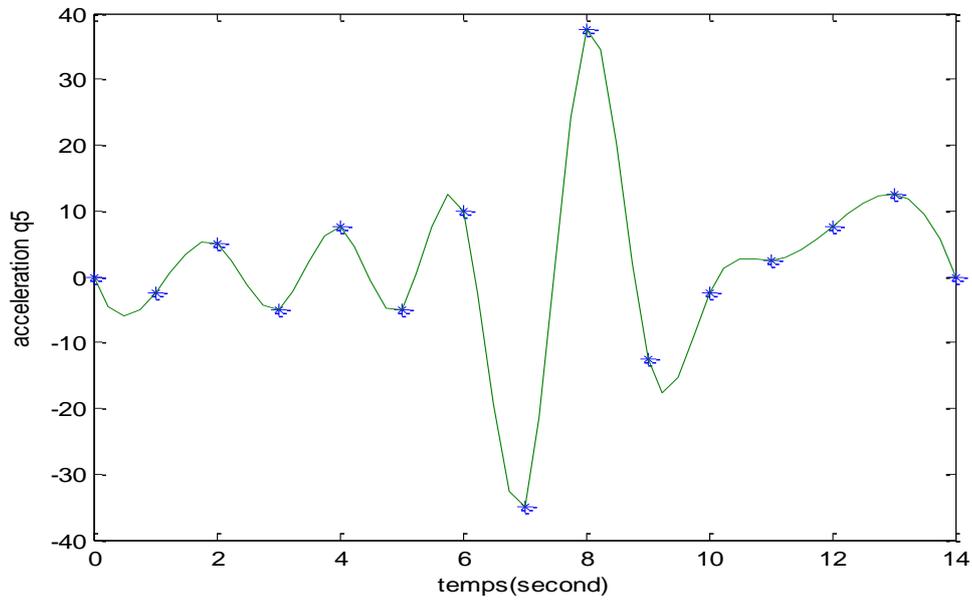


Figure 3.18 : Accélérations articulaires optimisées du 5^{ème} actionneur.

3.9 Application sur un robot PUMA RRR

Dans le but de valider nos résultats donnés par le programme que nous avons élaboré, on a choisi pour exemple de validation un robot PUMA à trois degrés de liberté. Les articulations sont au nombre de trois (03) articulations rotoïdes. Les éléments sont considérés comme étant rigides et le mouvement sans frottements.

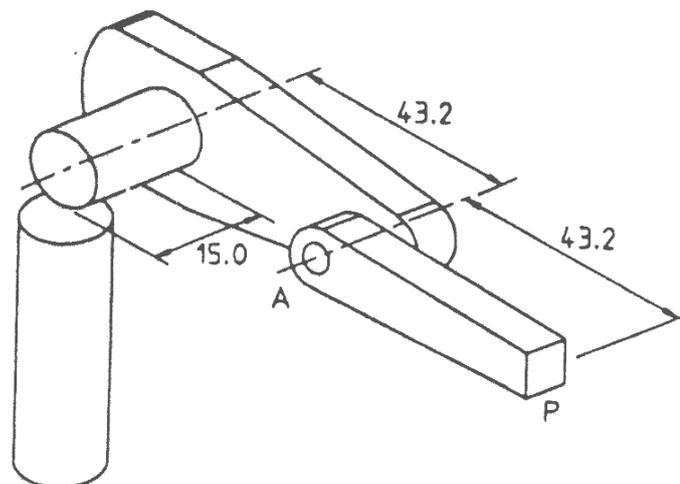


Figure 3.19 : Système mécanique articulé RRR.

Les paramètres de Denavit-Hartenberg correspondant à ce robot sont donnés par le tableau suivant :

Tableau 3.3 : Paramètre de Denavit-Hartenberg

Paramètres / Eléments	1	2	3
α_i	$\Pi/2$	0	$\Pi/2$
a_i	0	43.2	0
θ_i	$\Pi/2$	0	$\Pi/2$
r_i	0	15.0	0

Les matrices de passage associés à chaque repère sont donnés par :

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos 1 & 0 & -\sin 1 & 0 \\ \sin 1 & 0 & \cos 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos 2 & -\sin 2 & 0 & a_2 \cos 2 \\ \sin 2 & \cos 2 & 0 & a_2 \sin 2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{34} = \begin{bmatrix} \cos 3 & 0 & \sin 3 & 0 \\ \sin 3 & 0 & -\cos 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les courbes ci-dessous nous donnent l'évolution dans le temps des différents paramètres cinématiques.

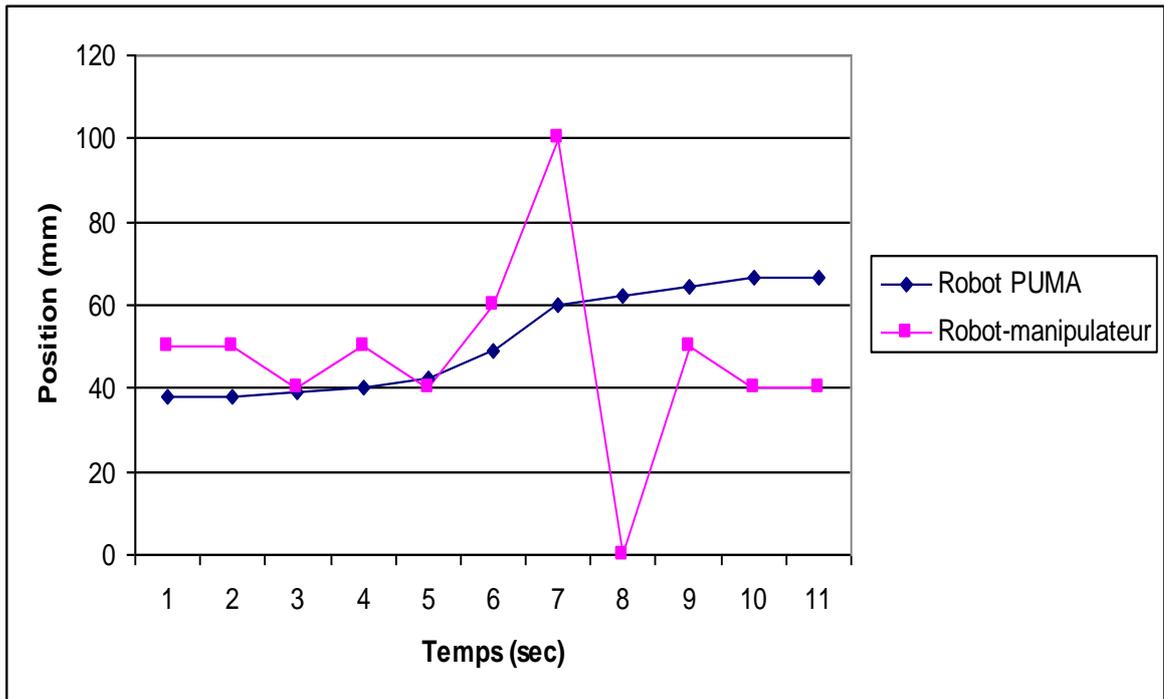


Figure 3.20 : Positions.

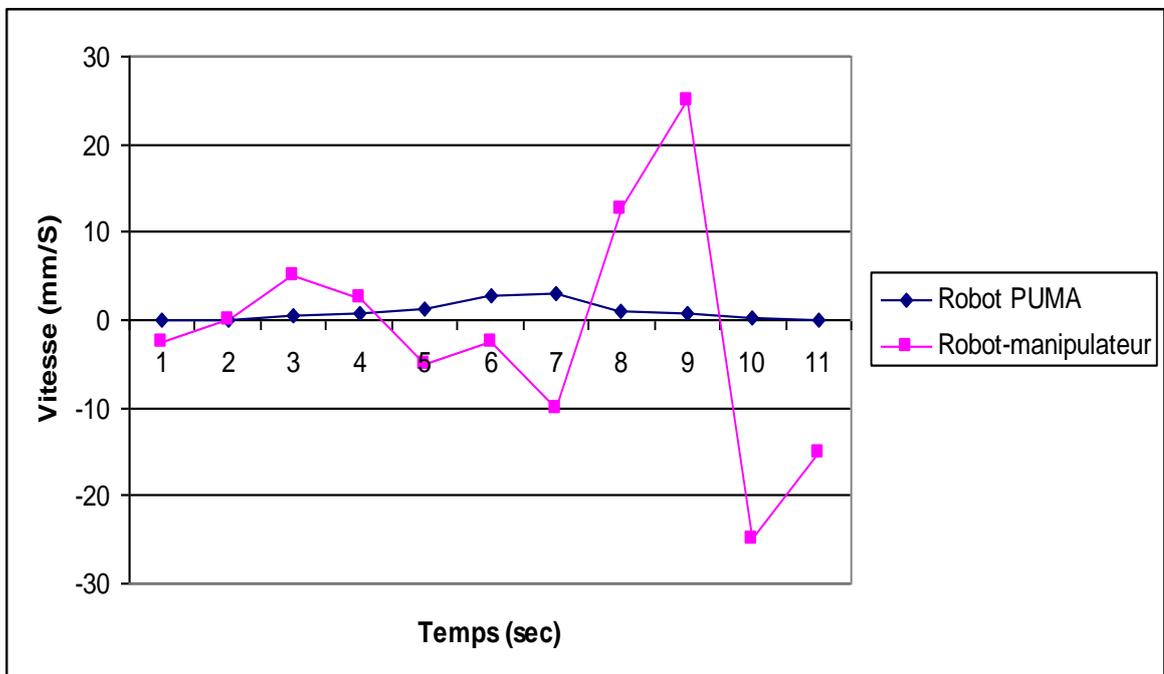


Figure 3.21 : Vitesses.

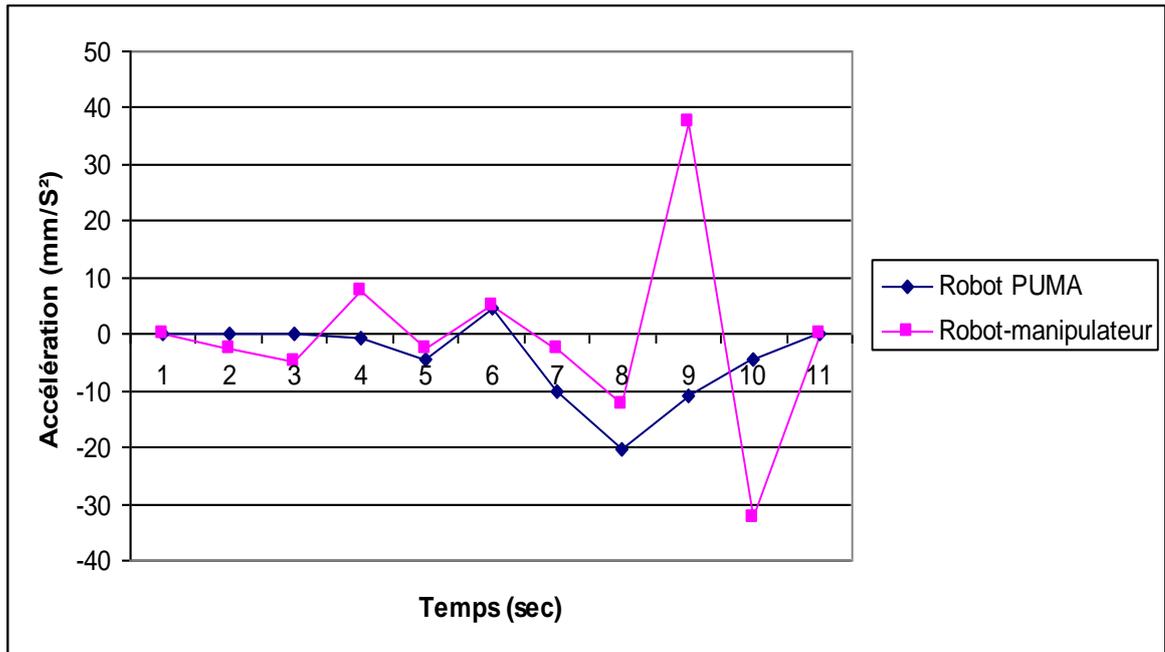


Figure 3.22 : Accélérations.

Nous constatons que les résultats de notre robot-manipulateur proposé pour la conception possèdent des performances plus adéquates que ce robot "PUMA" ; utilisé déjà dans beaucoup des domaines industriels.

3.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions élémentaires puis nous exposons une méthode de calcul du modèle, enfin, on appliquera ce modèle pour déterminer les erreurs de positionnement et d'orientation due aux erreurs géométriques du robot.

Les solutions proposées pour déterminer les erreurs du robot industriel sont présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 4



**PROPOSITION
DES SOLUTIONS
POUR
LES ERREURS**

CHAPITRE 4

PROPOSITION DES SOLUTIONS POUR LES ERREURS

4.1 Introduction

L'introduction de la robotique dans un processus de fabrication, outre son impact sur la productivité et sur la qualité, contribue largement à améliorer les conditions de travail et à rentabiliser les chaînes de productions.

Le robot est une chaîne cinématique dans laquelle le mouvement donné d'un ou plusieurs éléments par rapport à n'importe lequel d'entre eux implique des mouvements définis de façon unique de tous les autres éléments [60, 61].

Si l'on veut étudier le mouvement d'un robot industriel, il ne suffit pas de connaître sa structure, c'est-à-dire le nombre d'éléments, le nombre et les classes des couples cinématiques. On doit aussi connaître les dimensions des éléments isolés qui ont une influence sur le mouvement, la position relative des éléments, ect [62].

On établit le schéma cinématique du robot industriel à l'échelle choisi, en reproduisant fidèlement toutes les dimensions et formes qui déterminent le mouvement de tel ou tel élément, ou, autrement dit, les dimensions et formes dont la variation fait changer les positions, les vitesses et les accélérations des points du mécanisme [63, 64].

Pendant l'étude des robots industriels et l'établissement de leurs formules de structure, nous avons admis que les degrés de liberté des éléments des robots et les conditions de liaison imposées au mouvement des éléments par le fait de constituer des couples cinématiques étaient suffisants, considérés ensemble, pour conférer au mouvement de robot un caractère déterminé [65, 66].

La chaîne cinématique de corps assemblé d'un manipulateur après un certains nombres d'heures de fonctionnement provoquent la première raison de leur courte durée de vie qui est liée directement à l'usure, frottement, fatigue, etc [59, 67]. Pour cela, nous avons proposé des techniques et des solutions pour permettre de résoudre les problèmes de détermination des erreurs systématiques et aléatoires des robots industriels.

4.2 Proposition d'une solution pour les erreurs accidentelles

Nous proposons une solution pour les erreurs dues aux jeux d'articulation et aux jeux de rotation libre tels que les erreurs d'engrenage qui sont des erreurs accidentelles. Ils peuvent apparaître dans certaines configurations du robot industriel.

4.2.1 Erreurs de rotation libre

Le schéma ci-dessous permet d'expliquer le phénomène de rotation libre.

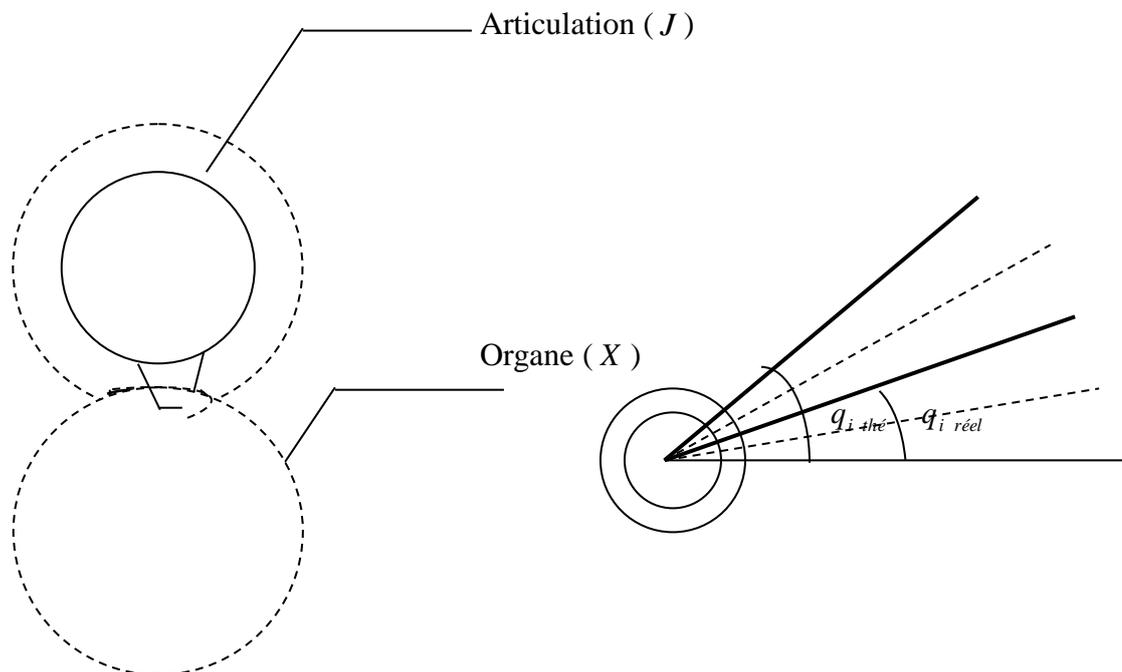


Figure 4.1 : Phénomène de rotation libre (système d'engrenage).

D'après la figure (4.1), l'articulation reçoit le mouvement de l'organe (X) (par exemple un système d'engrenage) et à cause du phénomène d'usure et les défauts de fabrication un jeu existe entre l'articulation et l'organe de transmission (X), ce qui permet à l'articulation de tourner librement autour d'un certains angles ($d\alpha$) ce que nous avons appelé par jeu de rotation libre.

Considérant deux cas :

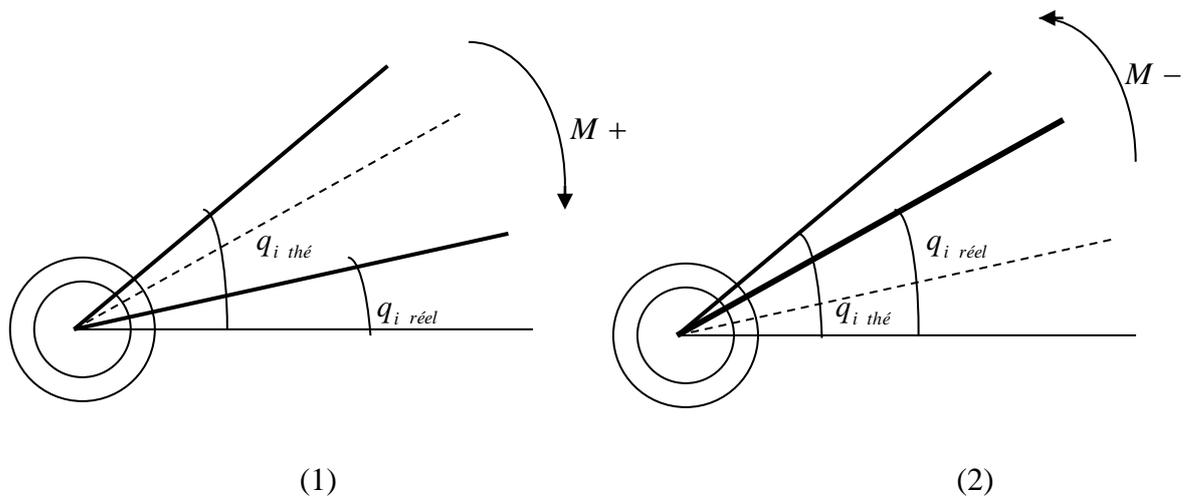


Figure 4.2 : Modèle d'erreurs dus aux jeux de rotation libre.

Dans le premier cas, on applique un moment positif à l'articulation (J), donc la position réelle sera écartée à gauche et on aura un certain Δq_i , dans le deuxième cas, on applique un moment négatif, donc la position réelle sera écartée à droite et on aura un certain $\Delta q_i'$ qui est différent à celui du premier cas. Pour cela, le modèle d'erreurs avec sa première version ne sera pas correct si les jeux de rotation libre sont importants, pour valider notre modèle, on a proposé la solution suivante :

On procède à deux (02) identifications des paramètres du modèle :

- la première identification sera faite en respectant la condition suivante :

Les points de mesures pour l'identification sont choisis de telle sorte que tous les moments développés au niveau des articulations auront le même signe, ce qui nous assure que tous les chaînons seront écartés dans le même sens pour tous les points de mesures donc les Δq_i identifiés seront plus au moins proches de leurs valeurs.

- dans la deuxième identification

On inverse le problème, ou autrement dit, on choisi les points de l'identification de telle sorte que les couples développés au niveau des articulations auront le même signe mais de signe contraire par rapport à la première, on aura donc les $\Delta q_i'$.

Théoriquement, les valeurs des autres paramètres ($\Delta r_i, \Delta \alpha_i, \dots$) ne changent pas de valeurs pour les deux (02) identifications, donc, il sera un critère qui permet de valider le modèle d'erreur.

Revenant maintenant au calcul d'erreurs, supposant qu'on a une configuration donnée où les signes développés au niveau des actionneurs sont aléatoires (par exemple : positif, positif, négatif, positif), d'après le modèle d'erreurs on a :

$$\Delta X = [A] \cdot \begin{bmatrix} \Delta q_i \\ \Delta d_i \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (4.01)$$

Les valeurs des Δq_i seront choisies en fonction du signe du couple développé au niveau de l'articulation, dans l'exemple qu'on a cité, on prend ($\Delta q_1^+, \Delta q_2^+, \Delta q_3^-, \Delta q_4^+$) où les signes (+) et (-) désignent les Δq_i de la première ou de la deuxième identification et comme ça on aura une bonne approximation de l'erreur.

4.2.2 Erreurs des jeux d'articulations

Soit le schéma de l'articulation suivante :

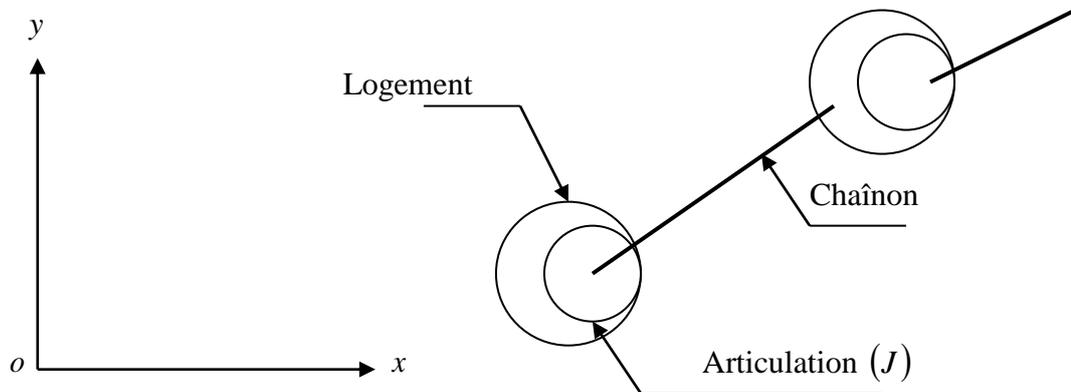


Figure 4.3 : Modèle d'erreurs dus aux jeux d'articulation.

L'articulation (J) peut prendre n'importe quelle position dans son logement, cette position dépend des forces agissant sur cette dernière qu'on ne peut pas les quantifier, donc on ne peut connaître sa position réelle, ce qu'on peut faire est de donner l'erreur maxi que provoque ces jeux.

On remarque que l'articulation ne peut avoir que des translations et elle ne fait subir au repère R_0 qu'une translation de même valeur, l'écart de position maxi que fait subir ces jeux au repère terminal sera égal à la somme de ces jeux d'où l'erreur globale que peut avoir le préhenseur :

$$\Delta X = \Delta X_m \pm \sum \text{jeux} \quad (4.02)$$

Avec : ΔX_m : l'erreur déterminée par le modèle.

Pour notre cas, on a :

$$\Delta X = \Delta X_m + {}^0T_1 \cdot \begin{bmatrix} \sum \text{jeux} \\ 0 \\ \sum \text{jeux} \end{bmatrix} \quad (4.03)$$

4.3 Amélioration des structures des robots industriels

Généralement, le robot est un mécanisme qui comporte un certain nombre de pièces (couples cinématiques). Ces éléments sont fabriqués avec les alliages ferreux qui doivent être résistés à l'usure. Pour cela, nous avons pensé à améliorer la dureté, la fiabilité de notre structure du robot industriel ainsi que les caractéristiques mécaniques de ces pièces, on applique des traitements thermiques dans le but d'avoir la qualité et un prix de revient le plus bas possible

Pour cela, nous avons proposé un traitement de surface "boro-carbo-nitruration" qui peut être effectué industriellement vu ses avantages majeurs : coût réduit, ne nécessite pas de matériel sophistiqué, ni de main d'œuvre qualifiés. Ce traitement est la composition de trois (03) traitements chimiques : la boruration, la carburation et la nitruration de ce fait, il peut réaliser une couche dure d'épaisseur variable permettant d'augmenter les propriétés de résistance à l'usure et au frottement ainsi que à la fatigue mécanique. Pour cela, des expériences sur des différents alliages ferreux ont été élaborées dans notre laboratoire de mécanique de l'université de Blida. Les meilleurs résultats de la résistance à l'usure sont obtenus après ce traitement à la suite desquelles se forment des couches. Il serait très intéressant de faire ces traitements à des températures de revenu des aciers alliés et fortement alliés avec lesquelles sont fabriquées les pièces de manipulateur.

Dans ce cas, le traitement se fait sur des pièces qui ont déjà subit l'opération de finition et même de polissage.

4.3.1 Présentation des matériaux

L'évènement de la révolution industrielle, les progrès des technologies et l'évolution des traitements thermiques et thermochimiques, les chercheurs s'intéressaient de plus en plus à l'emploi et à la mise en œuvre des aciers à outils. Nous allons alors traiter des aciers à outils de type XC38 ordinaire, 23MCD5 faiblement alliés et Z32WCV5, Z200C12 fortement alliés qui ont été élaborés dans notre laboratoire de mécanique de l'université de Blida en utilisant la technique de boro-carbo-nitruration (milieu solide poudre) travaillant à de température de revenu de ces aciers [31, 68, 69].

Les nuances des aciers à outils traités sont :

Tableau 4.1 : Acier ordinaire travaillé à froid (XC38).

	C	Cr	Mn	Si	S	P	Ni	Mo	Cu	Al
%	0,35	0,21	0,66	0,27	0,02	0,015	0,02	0,02	0,22	0,06

Tableau 4.2 : Acier faiblement allié travaillé à froid (23MCD5).

	C	Cr	Mn	Mo
%	0,28 - 0,38	0,5 - 0,7	1,05 - 1,45	0,20 - 0,40

Tableau 4.3 : Acier fortement allié travaillé à chaud [X30WCrV53 (Z32WCV5)].

	C	Cr	Mn	P	S	Si	W	V
%	0,25 - 0,35	2,2 - 2,5	0,2 - 0,4	0,035	0,035	0,15 - 0,3	4 - 4,5	0,5 - 0,7

Tableau 4.4 : Acier fortement allié travaillé à froid [X210Cr12 (Z200C12)].

	C	Cr	Mn	Si
%	1,90 - 2,20	11 - 12	0,15 - 0,45	0,10 - 0,40

La technique de la boro-carbo-nitruration

Les pièces sont placées dans une caisse bien fermée avec un couvercle en acier pour éliminer tout échappement des gaz du caisse pendant le traitement de boro-carbo-nitruration, une couche assez épaisse de sable est ajoutée sur le couvercle pour assurer bonne étanchéité.



Figure 4.4 : Caisse utilisée pour la boro-carbo-nitruration.

Les traitements de boro-carbo-nitruration ont été effectués dans un four à moufle électrique.



Figure 4.5 : Four à moufle électrique.

- Dans ce travail, les pièces ont subi la température revenue 550°C,
- Le temps de maintien à la température de ces pièces dans les conditions réelles est 12 heures,
- Après boro-carbo-nituration, les pièces sont laissées se refroidir à l'air calme, tout en conservant la caisse fermée. Après refroidissement les pièces sont tirées et nettoyées.



Figure 4.6 : Les pièces traitées.

4.3.2 Résultats et discussion

Après un TTC (boro-carbo-nituration) de 12 heures à la température 550°C qui joue un rôle important sur les propriétés mécaniques des pièces de manipulateur, se forme une couche avec une épaisseur qui varie pour l'acier XC38 170 à 190µm, pour l'acier 23MCD5 150 à 170µm, pour l'acier X30WCrV53110 à 130µm et pour l'acier X210Cr12, l'épaisseur est de 110 à 140µm, ces résultats obtenus montrent que la quantité d'éléments d'alliage dans l'acier influence la couche de diffusion, du fait que les éléments d'alliage freinent la diffusion dans l'acier.

Tableau 4.5 : Epaisseur de la couche borocarbonitrurée.

	L'épaisseur de la couche borocarbonitrurée [μm]
XC38	170 à 190
23MCD5	150 à 170
X30WCrV53	110 à 130
X210Cr12	110 à 140

L'analyse de la microstructure de la couche de diffusion reflète la différence qui existe entre les structures des couches de diffusion pour chaque acier. On a déjà mentionné que l'épaisseur de cette couche change d'une classe d'acier à une autre, en plus comme le montrent les figures (4.4, 4.5, 4.6 et 4.7)

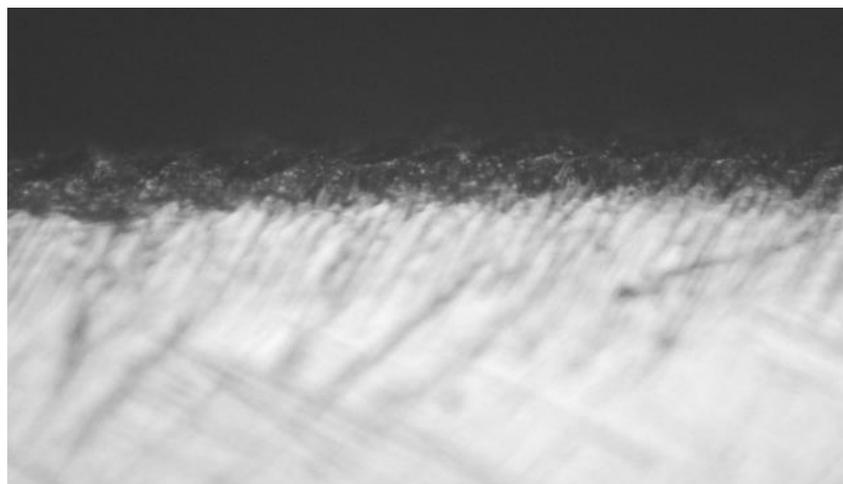


Figure 4.7 : Microstructure de l'acier XC38.

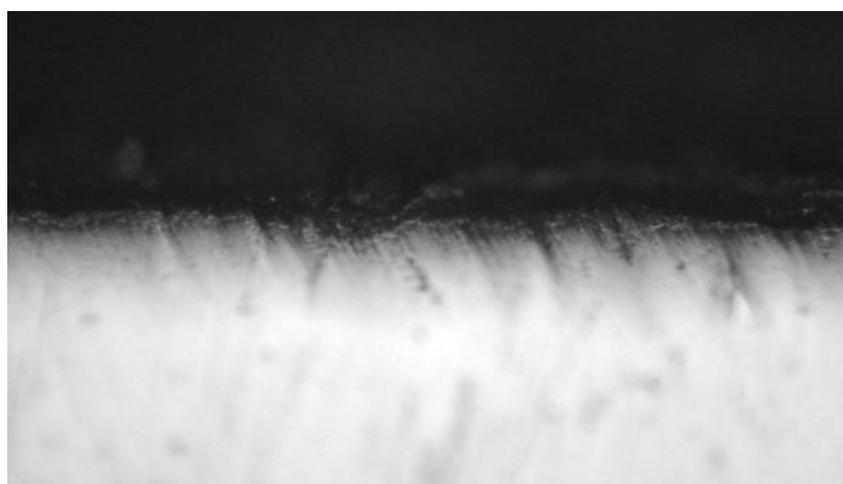


Figure 4.8 : Microstructure de l'acier 23MCD5.

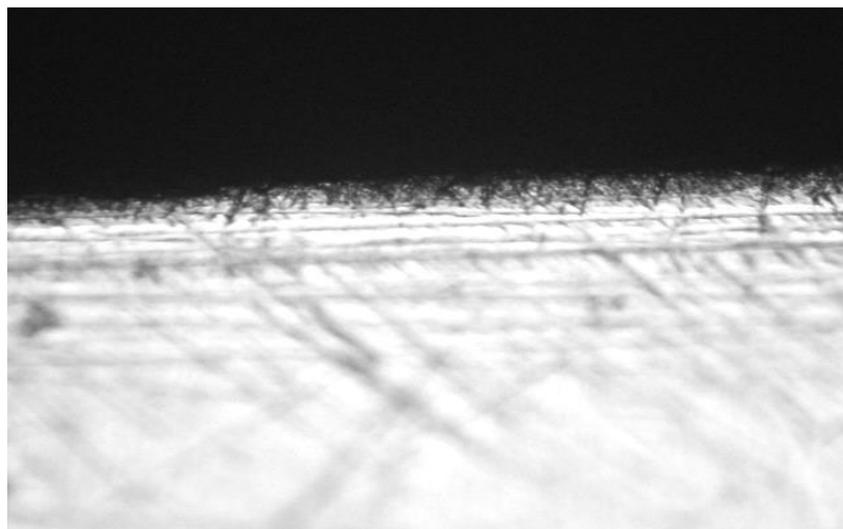


Figure 4.9 : Microstructure de l'acier X30WCrV53.

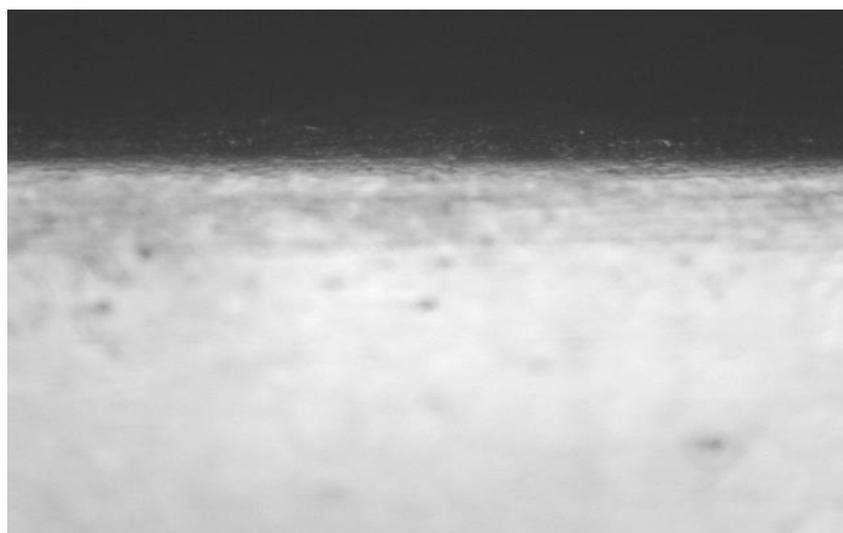


Figure 4.10 : Microstructure de l'acier X210CrW12.

Les résultats des essais de microdureté des pièces boro-carbo-nitruration sur les graphes (4.11, 4.12, 4.13 et 4.14) montrent une nette augmentation de la dureté de la couche et de la sous-couche en la comparant avec celle de la matrice.

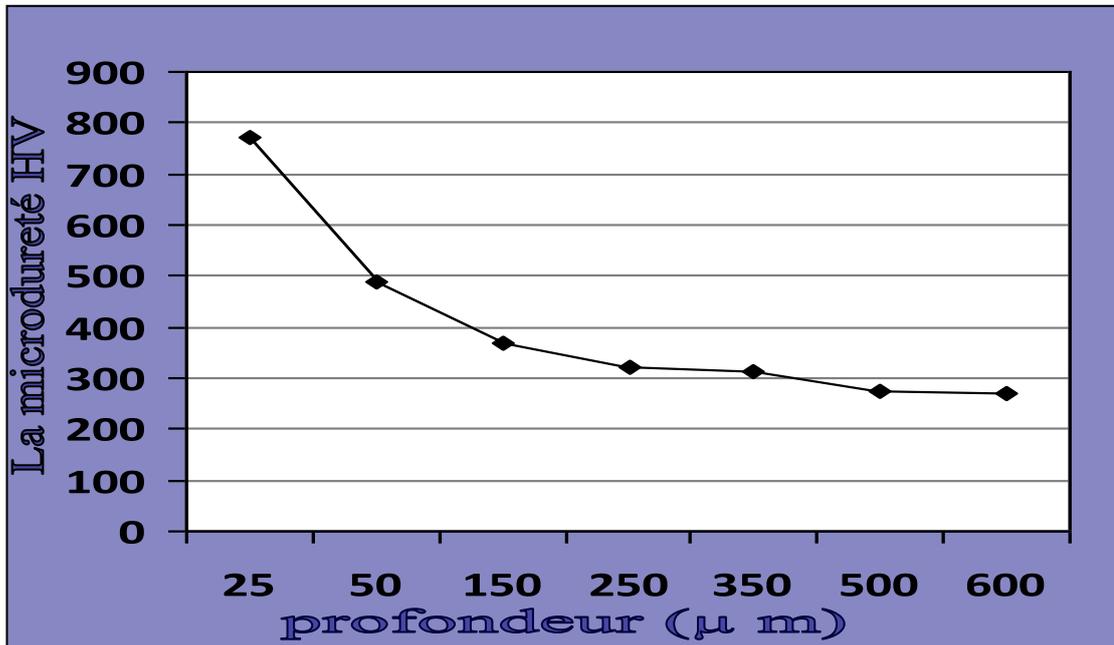


Figure 4.11 : Profil de microdureté de l'acier XC38.

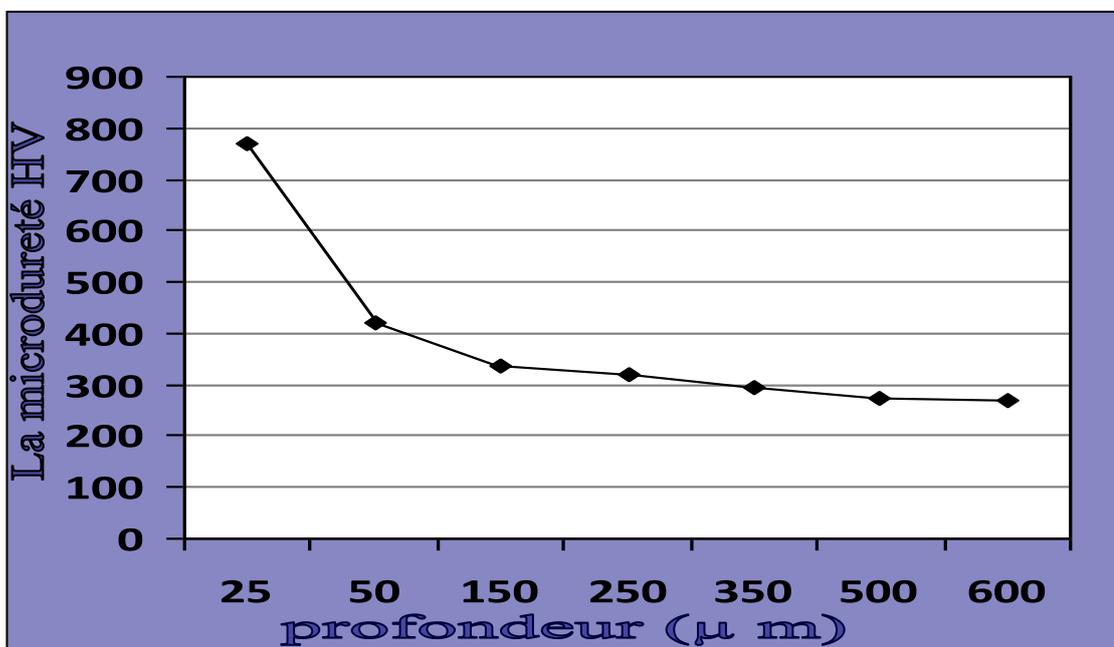


Figure 4.12 : Profil de microdureté de l'acier 23MCD5.

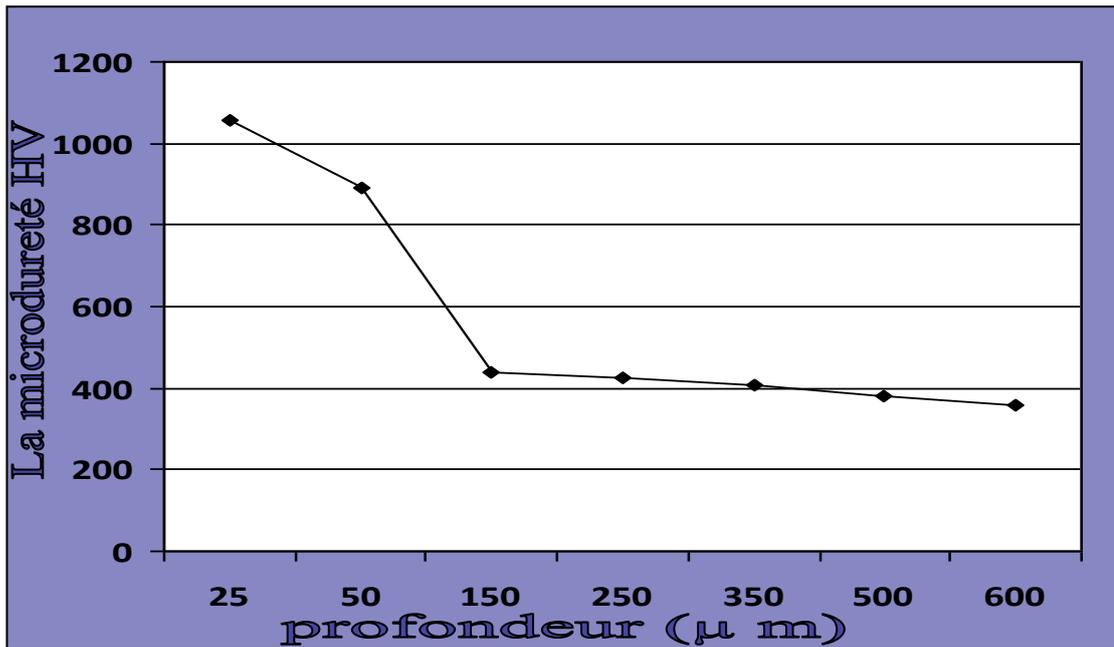


Figure 4.10 : Profil de microdureté de l'acier X30WCrV53.

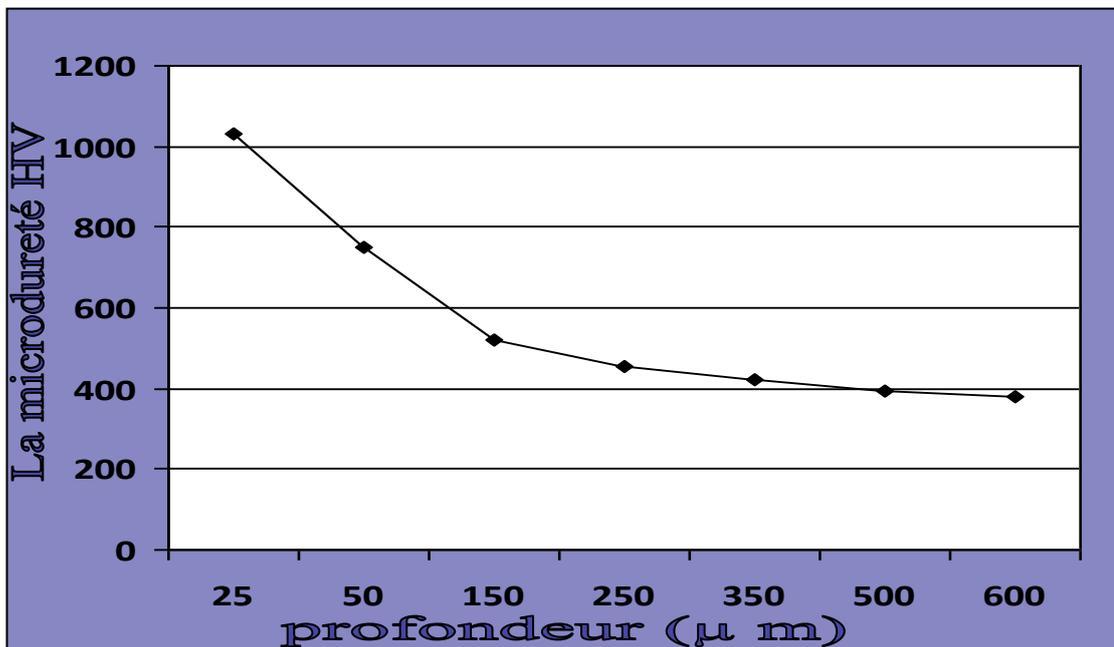


Figure 4.11 : Profil de microdureté de l'acier X210Cr12.

D'après TTC (boro-carbo-nituration) de 12 heures à une température de 550°C, on remarque que la microdureté des couches de diffusion diminue au fur et à mesure que l'on

s'éloigne de la surface, ce qui assure une bonne cohésion entre la couche de diffusion et le métal de base. Ce qui permet d'éviter le glissement lors de grands efforts dynamiques.

A la fin des traitements on aura des pièces de bonnes dimensions avec de bonnes caractéristiques du cœur et de très bonnes caractéristiques surfaciques (meilleure résistance à l'usure, meilleure dureté). De plus la couche de diffusion obtenue par la boro-carbonituration donne une épaisseur maximum possible pour assurer une longue durée de vie de ces pièces.

4.4 Méthode de mesure

Etant donné le manque de mesures standards dans le domaine de fonctionnement de robot. Un grand nombre de chercheurs ont et continuent de proposer des techniques pour permettre de résoudre les problèmes de détermination des erreurs de fonctionnement et d'orientation et de calibration des robots industriels.

Il existe plusieurs méthodes de mesures, il y a celles qui permettent des mesures statiques et d'autres des mesures dynamiques. Nous exposerons ici ces quelques méthodes [35].

1. Méthode cube

Les appareils qui peuvent être utilisés pour mesurer la performance de positionnement en six (06) degrés de liberté sont conçus depuis les années 70.

Cependant, la majorité de ces appareils ne possèdent pas de système d'interface pour l'acquisition de données automatiques pour une période donnée.

L'un des premiers appareils de mesure des positions et d'orientations de RH Mac Entire au milieu des années 70, il utilise un dispositif de mise en marche de trois (03) paires de cadrans calibre-mesureurs pour détecter trois (03) côtes mutuellement orthogonales d'un cube. De cette expérience, on peut déduire des informations complètes à la fois sur la position et l'orientation du cube.

Un travail a été fait dans le domaine de calibration des robots pendant les années 80.

Les recherches courantes suivent le concept original d'attacher un cube à un objectif mobile. "Pince du robot" comme l'a proposé Mc Entire. P. G Ranley, qui décrit un système de mesure utilisant neuf (09) cadrans parce que les dimensions sont prises de trois (03) régions différentes. Pour avoir les dimensions de chaque face du cube.

B. X. Mooring et T. T. Pack ont développés des tests qui utilisent une méthode d'acquisition de données d'ordinateur pour lire les résultats de six (06) capteurs employés pour mesurer la position d'un cube.

Cependant, leur système est incapable de mesurer la position et l'orientation dans des situations dynamiques et il est approprié seulement pour mesurer la respectabilité statique, cette méthode a été améliorée pour mesurer des positions précises des dispositifs de contact. On a besoin de maintenir un contact avec le cube à tout moments. Ceci peut demander des exigences spéciales sur le comportement dynamique du système de contact pour permettre un contact continu entre les capteurs et l'élément de mesure.

Les systèmes de mesure de position et d'orientation ont aussi des inconvénients ; d'imposer des charges sur le manipulateur pendant le mesurage. Lors du fonctionnement d'un robot des charges peut être affecté au système.

2. Méthode Ball-Bar

J. B. Bryant fut l'innovateur de cette méthode. Elle était à l'origine utilisée pour mesurer l'exactitude des positions des machines –outils. Le principe est comme suit :

Une balle est magnétiquement attachée à une douille placée à l'intérieur de la machine et l'autre à une douille sur un piston de la machine. Pendant le test, l'axe de la machine est mis en marche et la «ball-bar» fonctionne manuellement vers des positions angulaires.

Le principe du «ball-bar» fixe a été modifié et un «ball-bar» extensible a été conçu et utilise pour tester la position du robot comme suit :

Le robot est programmé pour suivre un certain arc dont le rayon est égal au rayon décrit par la longueur nominale du ball-bar.

Quelque que soit la différence entre la trajectoire réelle ou programmée. Elle produit un changement en longueur est mesurée par un sonde ajustée au «ball-bar». L'information obtenue par la sonde est utilisée pour obtenir les lignes radiales (position des rayons) du robot dans n'importe quel cas parce que la «ball-bar» extensible est conçue pour mesurer les déplacements radiaux et est classifiée comme étant un appareil de mesure unidimensionnel, son application pour les tests des robots est limitée.

Ils existent d'autres méthodes plus sophistiquées qui utilisent des caméras ou des systèmes laser qui permettent de donner des mesures plus précises, soit dans le cas dynamique ou dans le cas statique.

3. Méthode des trois (03) câbles

Cette méthode emploie trois câbles sous tension. Un bout de chaque câble est relié au robot, l'autre bout est relié à un dispositif qui alimente les câbles. Lorsque le robot bouge, il fait changer les longueurs de chaque câble. Les longueurs actives des câbles dans n'importe quel cas sont utilisées pour déterminer la position du robot. L'orientation du robot ne peut pas être déterminée par cette méthode. Les chercheurs proposent l'examen d'une technique utilisant au moins six (06) câbles pour mesurer à la fois la position et l'orientation. L'exactitude de ce système est limitée par la précision de mesure des longueurs des câbles.

4.5 Identification de la position

Pour l'identification de la position, nous proposons des capteurs inductifs qui ont pour rôle :

- produisant des signaux qui sont relatifs aux déplacements de l'organe terminal,
- enregistrer un déplacement minimal qui correspond à la précision de la machine,
- avoir la haute mobilité.

4.5.1 Principe de fonctionnement

Le capteur possède deux (02) bobines, la première est alimentée par un courant, dans le deuxième pôle, on enregistre un deuxième courant qui est relié à la valeur du champ magnétique. Ce signal passe de la valeur maximale à la valeur minimale pour un déplacement de 1/2 pas.

Le niveau de signal est déterminé par la position relative des dents de la règle et du capteur.

La coïncidence des dents donne le signal maximal. La coïncidence dans le creux donne le signal minimal.

Avec l'appareil de contrôle de niveau de signal on peut mesurer les déplacements avec la précision jusqu'à 2 micro. Dans ce cas, on doit utiliser une transmission de grand rapport (exemple : 1/100).

4.6 Certaines solutions pour les erreurs

Dans les applications industrielles, on doit éliminer le jeu fonctionnel pour assurer la précision et la facilité de mouvements. Parmi les solutions utilisées, on distingue :

- pièces liées par une force d'attraction,

- transmission par bielle,
- transmission par vis-écrou hydraulique.

1^{ème} Solution : Pièces liées par une force d'attraction

Dans les engrenages en mouvement, il y a toujours un flanc en contact et un flanc libre. La solution ne permet la deuxième pièce est précis contre la première pièce par un lien flexible.

2^{ème} Solution : Transmission par bielle.

Dans les solutions vis-écrou (transformation des mouvements), le contact entre les pièces c'est le filetage celui-ci est malheureusement en contact suivant un seul flanc. La solution par bielle est utilisé à la place des filetages assurant le contact suivant les deux (02) sens. L'ensemble vis-écrou forme un logement interne suivant un pas bien déterminé.

D'habitude les bielles sont installées entre la vis et l'écrou avec un faible serrage.

3^{ème} Solution : Transmission par vis-écrou hydraulique.

La vis tourne dans un bain d'huile, la force de pression d'huile dans les poches doit être plus grande que le poids du mécanisme.

Dans cette solution, on utilise le principe de l'hydrostatique de la côte gauche et chaque poche est liée à la pompe par des canots dans l'écrou.

La pression d'huile dans chaque poche est de l'ordre 40atm. Le profil de la vis s'appui simplement à l'huile tous les jeux sont remplis d'huile, pour assurer la condition : $P_1 = P_2$, on utilise deux (02) clapets pour le réglage automatique et le profil de la vis doit se trouve toujours au milieu. Les forces de frottement sont très petites et presque toute la puissance est utilisée pour la coupe d'usinage.

Le rendement de la transmission hydraulique est supérieur au rendement de la transmission par bielle.

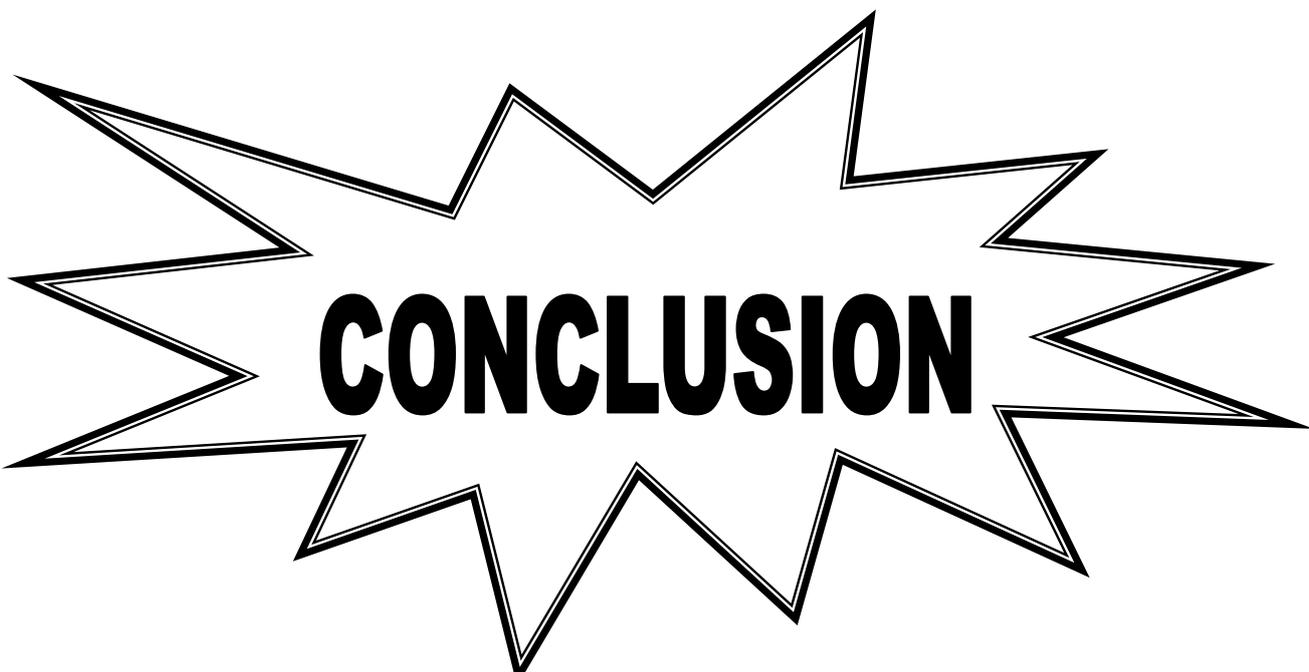
4.7 Approche énergétique

Un autre problème de recherche concernant la conception des articulations élastique et l'impact des erreurs de fabrication sur les mouvements obtenus ainsi que sur les raideurs. Une approche énergétique basée sur une minimisation de l'énergie de déformation est proposée afin d'optimiser la géométrie d'éléments élastiques. Dépassant le cadre strict

des articulations élémentaires. Cette approche s'applique principalement à des mécanismes plans sans corps rigides [70].

4.8 Conclusion

Nous sommes contents dans ce chapitre, de donner quelques solutions et techniques qui permettent de résoudre les problèmes de détermination des erreurs systématiques et aléatoires des robots industriels.



CONCLUSION

CONCLUSION

Enfin de ce mémoire, un résultat assez positif est dégagé de ce travail pour lequel les objectifs essentiels qu'on a fixé sont en majorité atteints.

Cette étude nous a permis de connaître de près le domaine de la robotique à savoir sa constitution morphologique, les modèles permettant d'engendrer des commandes, les différents types d'erreurs et leur influence sur la situation du préhenseur.

Ce travail repose essentiellement sur des essais expérimentaux car eux seules qui permettent la détermination et l'évaluation des erreurs du robot d'une façon adéquate.

Une grande partie des erreurs de robots provient de la différence qui s'établit entre le robot réel et son modèle idéal et différentes erreurs s'établissent entre ces deux concepts. Cette différence aura une influence sur la précision des modèles géométriques dont lequel on utilise toujours le modèle théorique (modèle probabiliste ou systématique).

En pratique, la réalisation d'un robot très rapide de grande précision n'a pas été couronnée de succès du point de vue des précisions malgré tous les solutions apportés aux robots et compte tenu des paramètres géométrique et non géométrique (aléatoire) qui n'ont pas tous la même influence sur la précision absolue du robot. La classification des paramètres en fonction de leur influence a donné lieu à de nombreuses discussions.

De plus les programmes que nous avons établis ont permis de simuler même d'une manière simple des actions qu'effectue un robot. Nous avons montré l'importance de l'informatique en générale et de la programmation en particulier dans le domaine de la robotique et de la productique car une conception robotisée doit passer obligatoirement par une simulation informatique.

Notre souhait est que ce mémoire fasse l'objet d'une étude dans le cadre d'un autre mémoire afin de compléter ce travail.

Perspectives

En perspectives, cette étude peut considérer comme une base pour décrire des trajectoires et des surfaces complexes en vue de les utiliser pour des applications différentes telles que :

- Application en un suivi de trajectoire au cas de soudure.
- Application au cas de contrôle de surface.
- Positionnement et orientation très précis pour assemblage de pièces.
- Ect.....

REFERENCES

1. A. Bouguerra, «Contribution à la planification optimale des robots coopérants», Mémoire DE Magister, Département de Mécanique, Université de Saad Dahleb de Blida, Janvier 2005.
2. J. Witteburg, Proc. NATO ASI series, vol. F9 «computer aided analysis and manipulation robots» Springer, Berlin (1985).
3. W. Khalil, J. F. Kleinfinger : «A new geometric notation for open and closed loop robots» Proceeding of the IEEE int. conf. on robotics and automation. San Francisco 1986. p. 1174-1180.
4. D. E. Orin and S. Y. Oh, ASME J. Dynam. Sys. Measur. Control 102, June (1981).
5. S. Hayati Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation. S. F. (1986).
6. J. J. Uicker : «Une méthode basée sur les notions de matrices de passage homogène et d'inertie homogène». 1978.
7. Neubauer, Cohen et Hall : «Contribution à l'élaboration du modèle dynamique des mécanismes déformables» en 1966.
8. Jasinski, LEE et Sandor : «Une méthode pour résoudre le problème des mécanismes plan» en 1971.
9. G. R. Pennock and B. S. Ryuh, ASME Design Technology Conf., The Design Automation Conf., Advances in Design Automation, Boston, Mass.,Vol. DE-2, page 63(1987).
10. J. Y. S. Luh and Y. F. Zheng, Robotics Res. 8(3) (1987).

11. E. Tabarah : «Coordination de 2 robots manipulateurs» Agence spatiale canadienne. APII vol. 28 n°2-1994.
12. Haddad. Moussa : «Modélisation des déformations des bras manipulateurs par les concepts de base de la théorie des poutres évaluation et compensation des erreurs » Mémoire de Magister, © E. M. P. Bordj El Bahri, Alger, Septembre 1999.
13. Mitsubishi : «Cinématique inverse et étude dynamique d'un robot manipulateur à 7ddl». Système articulé MECA349. Edition 2006-2007.
14. Robot PA-10 Mitsubishi : http://www.mhi.co.jp/kobe/mhikobee/products/mechatronic/e_index.html.
15. Toolbox Robotics : <http://www.cat.csiro.au/ict/staff/pic/robot/>.
16. Drouet Philippe ; Zegloul Saïd : «Modélisation, identification et compensation des erreurs de positionnement de manipulateurs à très haute précision sous chargement variable: application à un positionneur médical de patients pour le traitement du cancer par protonthérapie». Travaux universitaires 1999, [Note (s) :, 210] (37 ref.) Travaux universitaires (Année de soutenance : 1999) (N° : 99 POIT 2270). Source : français.
17. Copyright 2006 INIST- CNRS. ALL rights reserved.
18. Richard Béarée, Pierre-Jean Barre, Eric Dumetz, François Ghestem et Henri David : «Influence du jerk sur le comportement dynamique d'un robot cartésien 3 axes». Mécanique & Industries 6, 439-445 (2005). AFM, EDP Sciences 2005. DOI : 10.1051/meca : 2005052.
19. R. D. Benning, M. G. Hodgins, G. G. Zipfel, Active control of mechanical vibrations, Bells Labs technical J. (1997).
20. G. Spinnler, Conception des machines. Principes et applications. (Vol. 2 Dynamique), Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1997.
21. Edouard Laroche, Philippe Celka : «Identification des dynamiques d'un manipulateur flexible par vision». Journée Identification et Modélisation Expérimentale JIME : 2006-16 et 17 novembre-Poitiers.

22. M. Gautier and W. Khalil. Direct calculation of minimum inertial parameters of serial robots. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 6(3) : 368-373, 1990.
23. M. Gautier and P. Poignet. Identification non linéaire continue en boucl fermée des parameters physiques de systèmes mécatroniques par modèle inverse et moindre carrés d'erreur d'entrée. In *Journées Identification et Modélisation Expérimentale*, Nancy-France, 2001.
24. E. Laroche, C. Durieu, and J. P. Louis. Erreurs d'estimation des paramètres de la machine asynchrone. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 36(3) : 481-496, 2002.
25. Payannet Dominique : «Modélisation et correction des erreurs statiques des robots manipulateurs». *Travaux universitaires-Thèse d'Etat 1985*, [Note (s) :, 168 p.,] (4 p.) (Année de soutenance : sd) (Discipline : Autom.) (N° : 1757).
26. Copyright 2007 INIST- CNRS. ALL rights reserved.
27. Khelifi Fouad, Bouakrif Farah : «Amélioration de la commande passive des robots manipulateurs en tenant compte des perturbations».
28. Seraji H., "A new approach to adaptive control manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 109, n° 3, 1987, p. 193-202.
29. Sadegh N., Horowitz R., "Stability and robustness analysis of a class of adaptive controllers for robotic manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 9, 1990, p. 74-94.
30. Niaritsiry, Tiavina ; claved, reymond (dir) : «Robots manipulateurs- Robotique mobile-Télérobotique». Institut de recherche en Communications en Cybernétique de Nantes. IRCCYN. 1, rue de la Noe-BP 82 101- 44321 Nantes CEDEX 03.
31. A. Belaid, A. Khoukih : «Compensation des erreurs systématiques de positionnement des robots industriels», C.N.P. 1^{er} Colloque National sur la Productique, Tizi Ouzou, Algérie, 1998.

32. Etienne Dombre et Wisama Khalil : «Modélisation et commande des robots». Editions Hermes 1988.
33. B. Bhenitng : «Méthodes Numériques Dans les Problèmes D'extremum». Edition Mir 1977.
34. Claude Vibet : «Robot Principes et Contrôle». Editions Ellipses 1987.
35. F. Messaoud, K. Gasmi : «Détermination des erreurs statiques de positionnement des robots industriels», Mémoire d'ingénieur d'état, Département de Mécanique, Université M'hamed Bouguera de Boumerdes, Juillet 1996.
36. S. Kechout : «Modélisation des erreurs statiques des robots industriels», Mémoire d'ingénieur d'état, Département de Mécanique, Université M'hamed Bouguera de Boumerdes, Juin 1998.
37. J. Denavit et R.S. Hartenberg : «A kenematic notation for lower pair mecanisms based on matrices». TRANS ASME Jour .of applied mech . vol. 22 N°2 p. 215-221. 1995.
38. W. Khalil, J. F. Kleinfinger : «A new geometric notation for open and closed loop robots» Proceeding of the IEEE int. conf. on robotics and automation. San Francisco 1986. p. 1174-1180.
39. R.P. Paul : «Robot manipulators, mathematics, programming and control» the MIT press, Cambridge 1981.
40. J. Lam and J. -M. Delosme «Logic minimization using simulated annealing» Proc. International conference on computer aided design ICCAD 86, santaclara CAp. 348-351. Nov. 1986.
41. M. Kirkanski, O. timcenko : «A geometric approach to manipulator path planning in 3d space in the presence of obstacles avoidance» Robotica, vol. 10. p. 321-328. 1992.
42. P. Borne, G.D. Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. ZAmbettakis : «Commande et optimization des processus». Editions Technip 1990.
43. J. Angeles : «Fundamentals of robotic mechanical system. Theory, methods and algorithms». Springer-Verlag 1997.
44. J. J. Graig : «Introduction to robotics, mechanics and control» Addison-Wesley 1989.

45. W. Khalil, E. Dambre : «Modélisation, identification et commande des robots » Hermes 2ème ed. 1999.
46. J. P. Lallemand et S. Zegloul : «Robotique, aspect fondamentaux». Edition Massou 1994.
47. A. A. Kobrinski, A. E. Kobrinski : «Bras manipulateurs des robots, architecture et théorie». Edition MIR Moscou 1989.
48. V. Arnold : «Les méthodes mathématiques de la mécanique classique». Edition MIR Moscou 1976.
49. L. Landau, E. Lifchitz : «Mécanique» Edition MIR Moscou 1988.
50. R. L. Fox : «Optimization methods for engineering design» Addison- Wesley 1971.
51. T. Chettibi, H. E. Lehtihet : «A new approach for point to point optimal motion planning problems of robotic manipulators» ESDA 2002. APM-10. ASME conf. 2002.
52. K. Glass, R. Colpaugh, D. Lim, H. Seradji : «Real time collision avoidance for redundant manipulators» IEEE transaction on rob. And aut. N° 11 vol. 3p. 448-457. 1995.
53. S. Mitsi, K. D. Bouzakis, G. Mansour : «Optimization of robot links motion in inverse kinematics solution considering collision avoidance and joints limits» Mach. And mec. Theory N° 30 vol. 5 p. 653-663. 1995.
54. R. V. Ma yorga : «A framework far the path planning of robot manipulator» Lasted third int. conf. on rob. And manufacturing, p. 61-66. June 1995.
55. Parc Prifl : «Les robots industriels : Caractéristiques performances et choix». A. F. NOR.
56. B. Mecheri, H. Mekkari : «Les erreurs statiques et dynamiques d'un robot manipulateur», Mémoire d'ingénieur d'état, Département d'Aéronautique, Université Saad Dahleb de Blida, édition : 2006 - 2007.
57. M. Kbab, B. Bouzerzour : «Influence de l'usure des pièces sur la précision de positionnement des robots industriels», Mémoire d'ingénieur d'état, Département de Mécanique, Université Saad Dahleb de Blida, promotion : 2004.

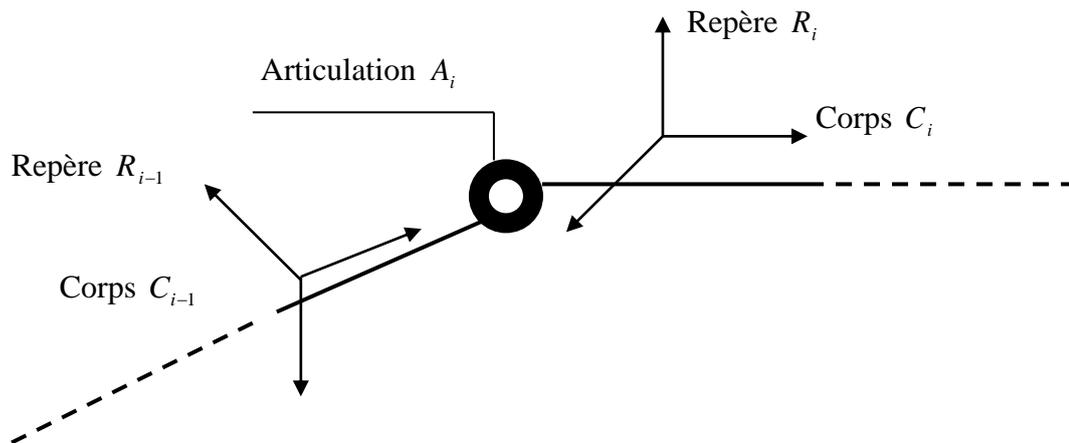
58. Yousnadji Ali : «La robotique et son environnement rétrospective et aperçu général sur les bras manipulateurs actes des journées d'études sur la robotique et son environnement», © E.N.I.T.A.ROB'95, du 16 au 18 Septembre 1995.
59. Artobolevski : «Théorie des mécanismes et des machines», édition Mir, 2, Pervi Rijiski péréoulok, Moscou, 1-110, GSP, U.R.S.S.
60. J. Lenarcic : «Kinematics». Journal of mechanism transmission and automation in design. Vol 10. septembre 1997.
61. P. Andre ; J. M Kaufmann ; F. Lhote ; J. P. Taillard : «Les robots : Tome 4 les constituants technologiques». Hermes 1983.
62. C. Barthly, D. Willis : «Conception mécanique, cinématique et dynamique des robots». Revue française de mécanique N° 1995 - 4 Paris, Automne 1989.
63. T. J. Tarn ; A. K. Bejczy : «Software elements». Journal of structural mechanics vol 15 PP 1198 - 1208 - 1992.
64. M. Hattali : «Logiciel de calcul de robots industriels, Application au robot de soudage ALG. SOUD. 1», Mémoire de Magistère, Département de Mécanique, Université Saad Dahleb de Blida, 13. 06. 2001.
65. M. Renand : «Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs». Thèse de doctorat d'état, université Paul Sabatier de Toulouse, septembre 1980.
66. M. J. Aldon : «Elaboration automatique des méthodes dynamiques des robots en vue de leur conception et leur commande». Thèse de doctorat d'état, université de Languedoc Montpellier 1982.
67. Computer simulation of manipulator dynamics using different control laws. Third international conference on advanced robotics - Versailles. October 1987.
68. Alain Liegfois : «Les robots : Analyse des performances et C.A.O. Tome7» Hermès, Paris, 1984.
69. G. Béranger, G. Henry, G. Labbe, P. Soullignac : «Les aciers spéciaux». Edition Décembre 1997 N° (97112032).

70. Jean Philippe Bachir : «Conception de robots de très haute précision à articulations flexibles : interaction dynamique-commande», thèse de doctorat, école polytechnique fédérale de Lausanne, Institut de production et robotique, EPFL 2003.

APPENDICE A

TRANSFORMATIONS HOMOGENES-OPERATIONS MATRICIELLES

Coordonnées généralisées



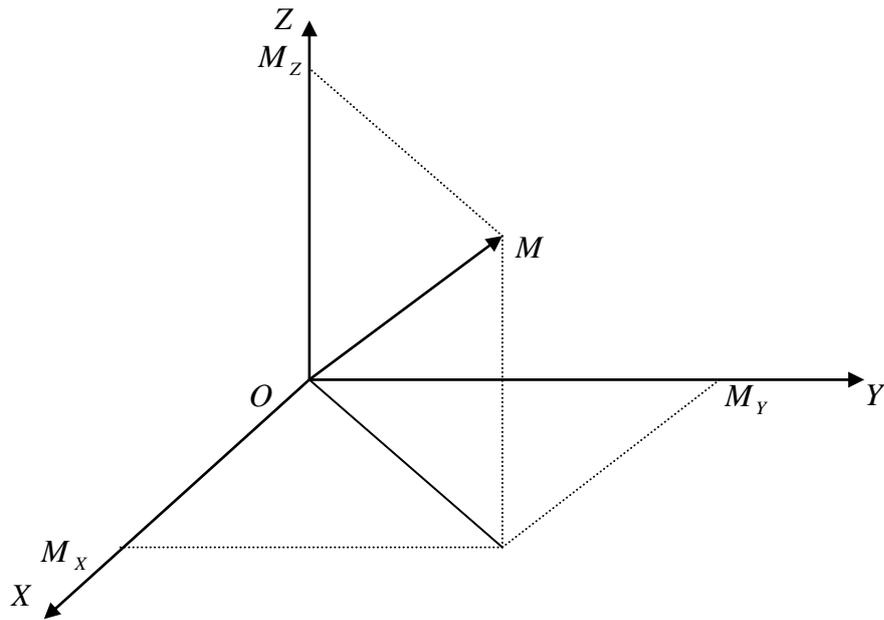
Les paramètres (réels et indépendants) qui permettent de définir la situation du corps C_i par rapport au corps C_{i-1} sont appelés coordonnées généralisées. Dans l'espace, six (06) paramètres suffisent à connaître la situation d'un corps.

Matrices de transformations homogènes

On introduit la notion de coordonnées homogènes (largement utilisées en informatique graphique) pour calculer les projections et perspectives d'un objet sur un écran, maintenant, très répandues en robotique.

Coordonnées homogènes d'un point

C'est un vecteur colonne à quatre (04) composantes :



$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

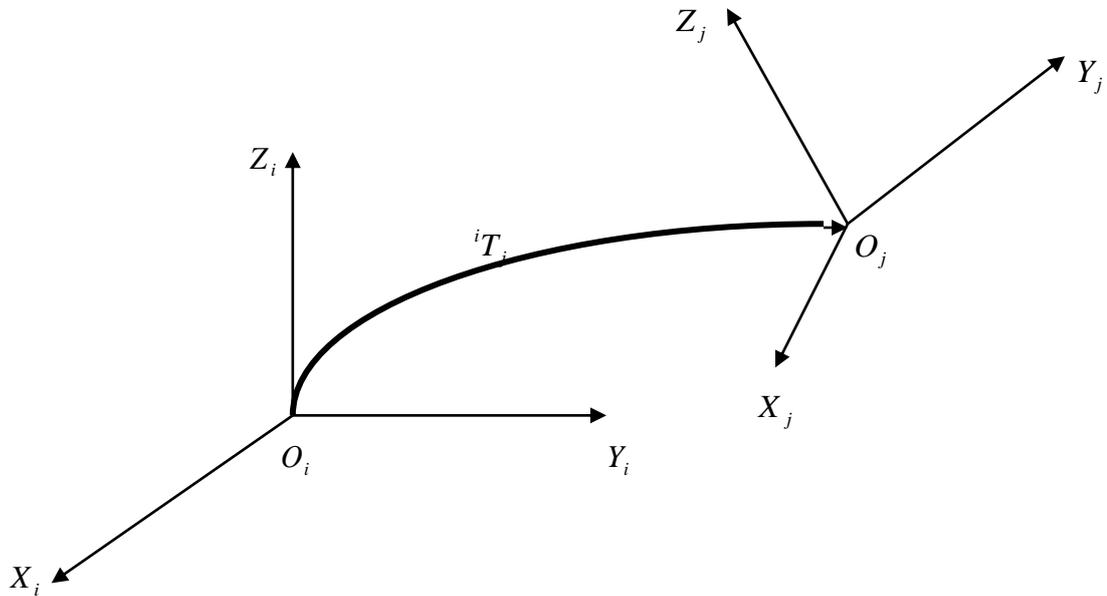
M_x , M_y et M_z sont les coordonnées de M dans le système $Oxyz$, la 4^{ème} valeur est un facteur d'échelle égal à 1 en robotique.

Coordonnées homogènes d'un vecteur libre

C'est un vecteur constitué de quatre (04) facteurs. Les trois premiers étant les composantes du vecteur libre, la 4^{ème} est égal à 0.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformations homogènes



${}^i T_j$ transforme le repère R_i en R_j . Elle peut être une (des) translation (s) et/ou une (des) rotation (s). Cette transformation se définit par une matrice (4×4) . Telle que :

$${}^i T_j = \begin{vmatrix} \vec{x}_i \vec{x}_j & \vec{x}_i \vec{y}_j & \vec{x}_i \vec{z}_j & P_x \\ \vec{y}_i \vec{x}_j & \vec{y}_i \vec{y}_j & \vec{y}_i \vec{z}_j & P_y \\ \vec{z}_i \vec{x}_j & \vec{z}_i \vec{y}_j & \vec{z}_i \vec{z}_j & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

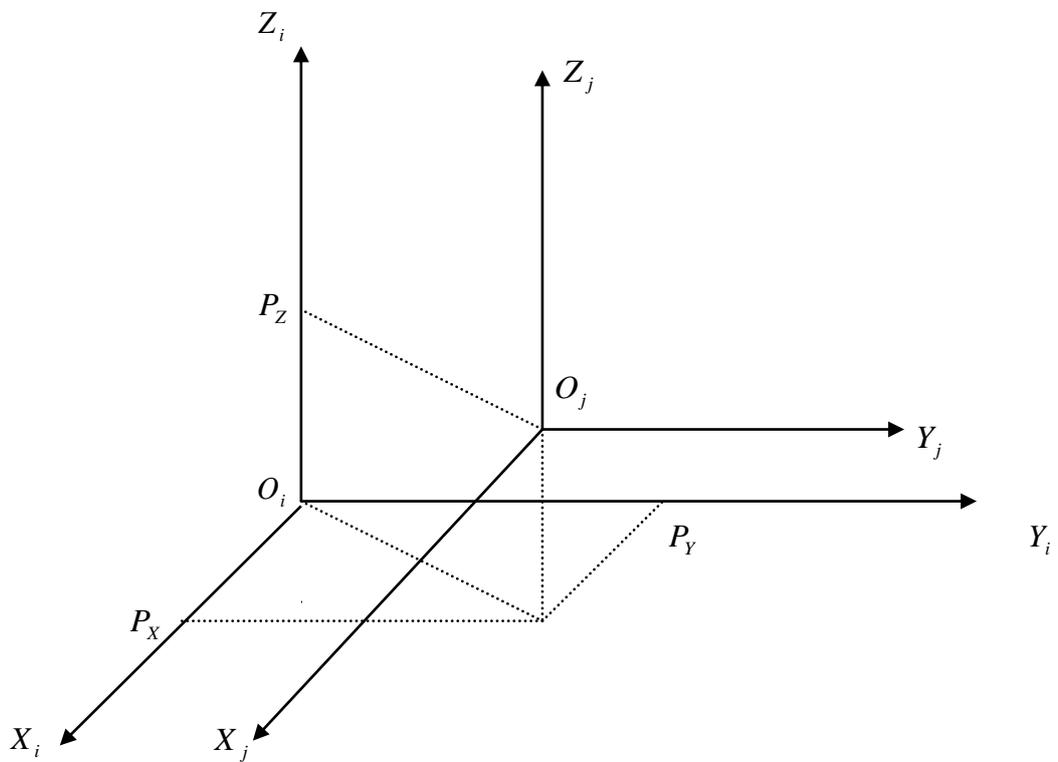
$$= \begin{vmatrix} S_x & n_x & a_x & P_x \\ S_y & n_y & a_y & P_y \\ S_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^i S_j & {}^i n_j & {}^i a_j & {}^i P_j \end{vmatrix}$$

Où : ${}^i S_j$, ${}^i n_j$ et ${}^i a_j$ désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes X_j , Y_j et Z_j du repère R_j exprimés dans le repère R_i et où ${}^i P_j$ est l'origine du repère R_j exprimés dans le repère R_i . Cette matrice peut être notée sous la forme partitionnée suivante :

$${}^i T_j = \begin{vmatrix} {}^i A_j & {}^i P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Où : ${}^i A_j$ représente la matrice de passage du repère R_i au repère R_j et ${}^i P_j$ représente l'origine du repère R_j exprimée dans le repère R_i .

Translation pure



Trois translations sont possibles :

- $T(x, P_x)$
- $T(y, P_y)$
- $T(z, P_z)$

Où : P_x , P_y et P_z représentent les translations respectivement par rapport à x , y et z .

La transformation totale ${}^i T_j$ est le produit des trois translations (l'ordre de multiplication est quelconque).

$${}^i T_j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$${}^i T_j = T(x, P_x) \cdot T(y, P_y) \cdot T(z, P_z)$$

Rotation pure

On peut considérer une rotation autour de x d'un angle θ de la manière suivante :

$$Rot(x, \theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(x, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Par analogie, la rotation autour de y d'un angle θ sera donc :

$$Rot(y, \theta) = \begin{vmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(y, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Et la rotation autour de z d'un angle θ sera :

$$Rot(z, \theta) = \begin{vmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(z, \theta) & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Propriétés des matrices de transformations homogènes

Comme :

$${}^i T_{ji} = \begin{vmatrix} {}^i A_j & {}^i P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotation pure

Pour une rotation pure : ${}^i P_j = 0$

Translation pure

$$\text{Pour une translation pure : } {}^i A_j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrice inverse

Comme la matrice ${}^i A_j$ est orthogonale: ${}^i A_j^T = {}^i A_j^{-1}$

La matrice inverse est égale à la matrice transposée. Leurs éléments représentent les cosinus directeurs d'orientation.

Transformation inverse

$${}^i T_j^{-1} = {}^j T_i$$

Rotation inverse

$$Rot^{-1}(u, \theta) = Rot(-u, \theta) = Rot(u, -\theta)$$

Transformation inverse

L'inverse d'une matrice de transformation peut être écrite sous la forme suivante :

$${}^i T_j^{-1} = \begin{vmatrix} & & -s^T P \\ A^T & -n^T P \\ & -a^T P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^T & -A^T P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Produit des transformations

Si un repère R_0 a subi k transformations consécutives, la transformation totale sera égale à :

$${}^0 T_k = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot \dots \cdot {}^{k-2} T_{k-1} \cdot {}^{k-1} T_k = \prod_{i=k}^{i=1} {}^{i-1} T_i$$

Transformations composées :

Composition de deux matrices :

$$\text{Si } T_1 = \begin{vmatrix} A_1 & P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{vmatrix} A_2 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Alors :

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{vmatrix} A_1 A_2 & A_1 P_2 + P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Avec :

$$T_1 \cdot T_2 \neq T_2 \cdot T_1$$

Produit des rotations

$$Rot(u, \theta_1) \cdot Rot(u, \theta_2) = Rot(u, \theta_1 + \theta_2)$$

Deux rotations autour du même axe u .

$$Rot(u, \theta) \cdot Trans(u, d) = Trans(u, d) \cdot Rot(u, \theta)$$

A condition que la rotation et la translation se fassent par rapport au même axe u .

Décomposition de la matrice de transformation :

$$T = \begin{vmatrix} & A & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & I & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

APPENDICE B

REPERAGE D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE

Orientation d'un solide dans l'espace

Dans l'espace, un solide libre et rigide possède six (06) degrés de liberté. A un instant donné, il faut pouvoir le positionner et l'orienter par rapport à un repère fixe qu'on choisit préalablement. En robotique, ces paramètres représentent les coordonnées opérationnelles définies dans un espace opérationnel. La matrice de transformation s'écrit sous la forme :

$$T = \begin{vmatrix} & A & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_x & n_x & a_x & P_x \\ S_y & n_y & a_y & P_y \\ S_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice $A(3 \times 3)$ représente la matrice d'orientation, la matrice $P(3 \times 1)$ celle de position. On associe le repère R_n à un solide, R_0 étant le repère de référence fixe. Pour les paramètres de positionnement d'un solide dans l'espace, on utilise les coordonnées cartésiennes, cylindro-polaires ou sphériques. Quand aux paramètres d'orientation, on dispose des cosinus directeurs, angles d'EULER, des angles de roulis-tangage-lacet et des paramètres d'EULER (appelés aussi paramètres d'OLINDE-RODRIGUES ou quaternions).

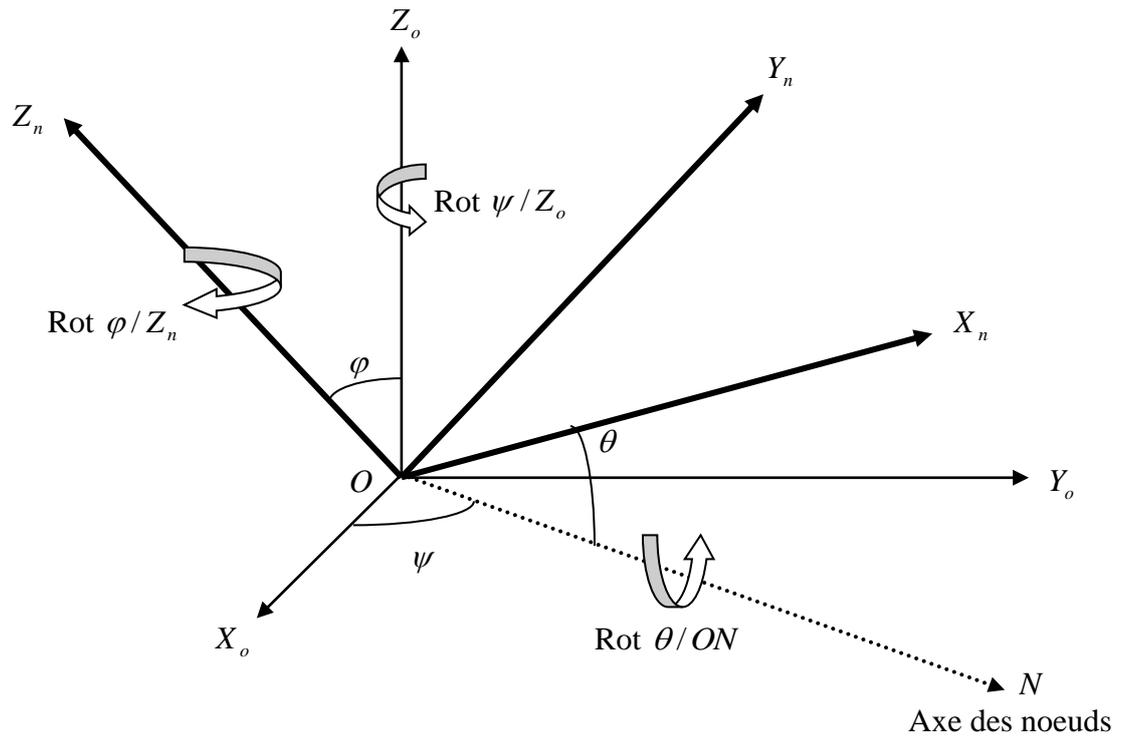
a) Cosinus directeurs

L'orientation est définie par la donnée de trois (03) vecteurs unitaires s, n et a qui sont les cosinus directeurs. La matrice correspondante s'écrit :

$$A_{CD} = \begin{vmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{vmatrix}$$

b) Angles d'EULER

L'orientation de R_n par rapport à R_0 est donnée par trois (03) angles ψ, θ et φ .



Angles d'EULER

ψ : rotation autour de z_0 (angle de précession).

θ : rotation autour de l'axe des nœuds ON (angle de nutation).

ϕ : rotation autour de z_n (angle de rotation propre).

La matrice d'orientation s'écrit :

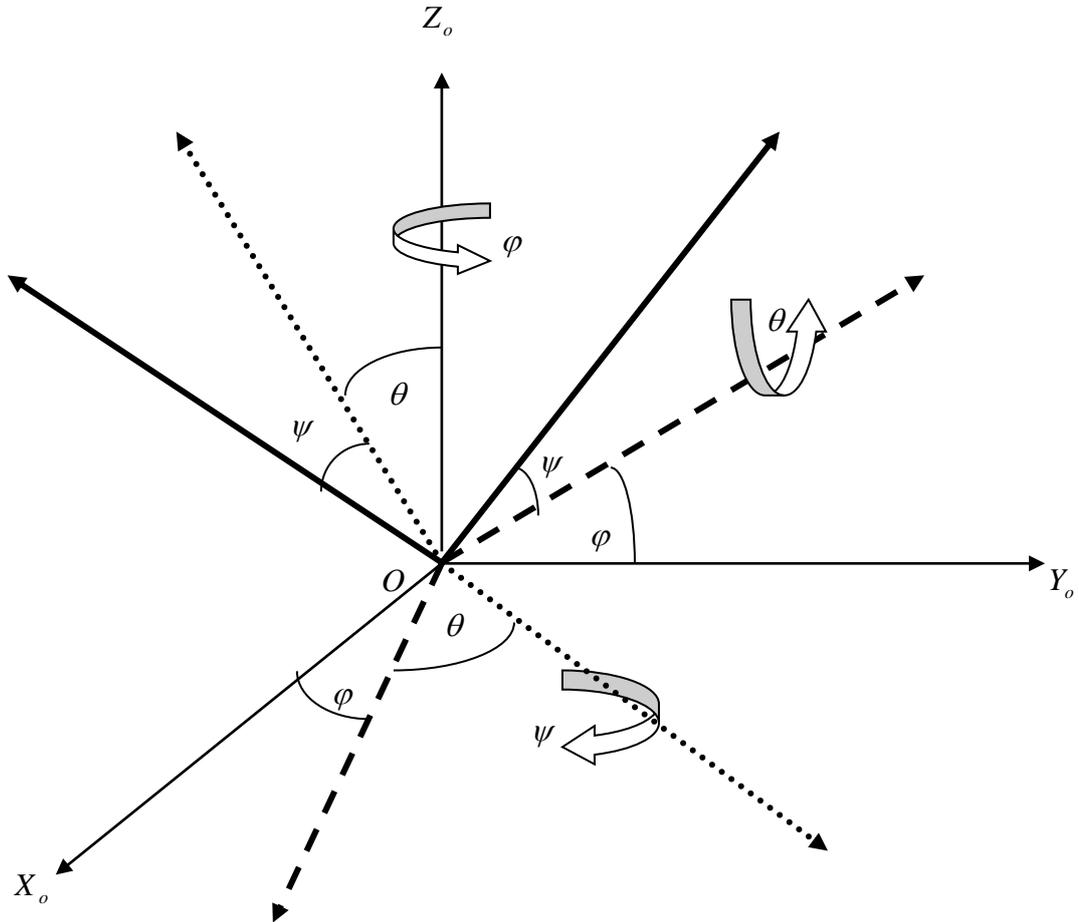
$$A_{EULER} = A(z, \psi) \cdot A(x, \theta) \cdot A(z, \phi)$$

Où :

$$A_{EULER} = \begin{vmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi & -c\psi s\phi - s\psi c\theta c\phi & s\psi s\theta \\ s\psi c\phi + c\psi c\theta s\phi & -s\psi s\phi + c\psi c\theta c\phi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\phi & s\theta c\phi & c\theta \end{vmatrix}$$

c) Angles de roulis-tangage-lacet (RTL)

L'orientation de R_n par rapport à R_0 est donnée par trois (03) angles φ , θ et ψ désignent respectivement le roulis, le tangage et le lacet :



Angles de roulis-tangage-lacet

- Rotation φ autour de z .
- Rotation θ autour de y .
- Rotation ψ autour de x .

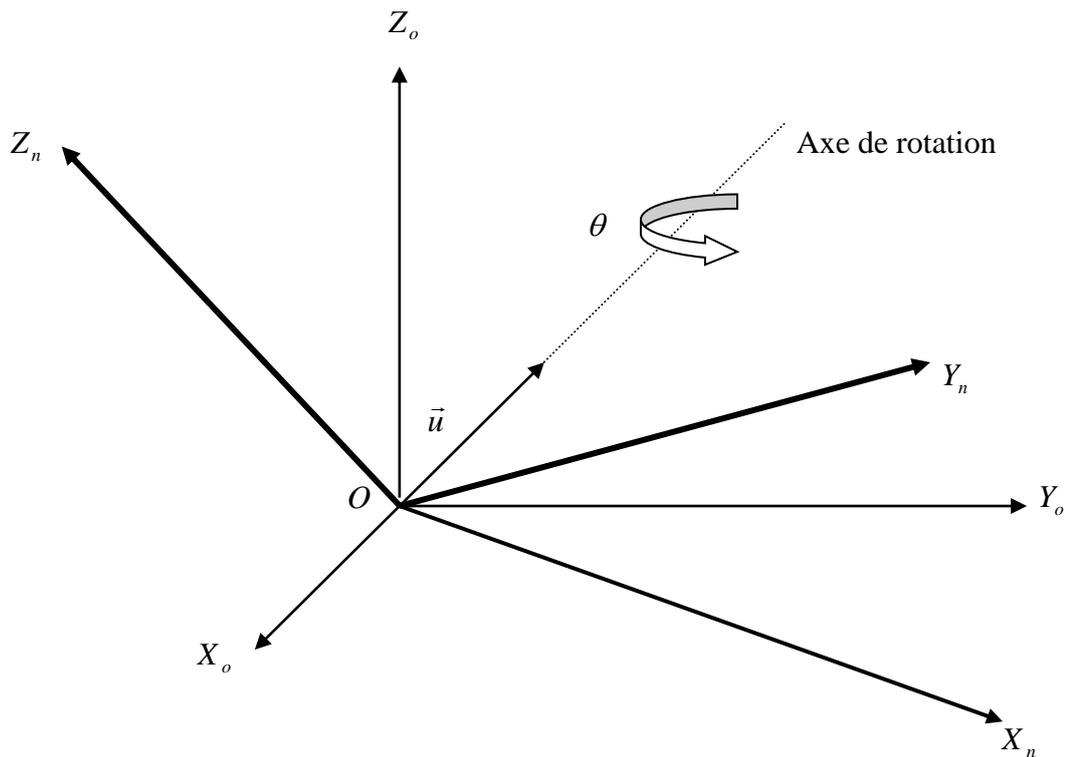
La matrice d'orientation s'écrit :

$$A_{RTL} = A(z, \varphi) \cdot A(y, \theta) \cdot A(x, \psi)$$

$$A_{RTL} = \begin{vmatrix} c\psi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & s\psi s\theta \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\theta c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{vmatrix}$$

d) Paramètres d'EULER

L'orientation est exprimée par quatre (04) paramètres décrivant une rotation unique autour d'un axe de vecteur unitaire u .



Paramètres d'EULER

On définit les paramètres d'EULER comme suit :

$$\lambda_1 = c(\theta/2)$$

$$\lambda_2 = u_x s(\theta/2)$$

$$\lambda_3 = u_y s(\theta/2)$$

$$\lambda_4 = u_z s(\theta/2)$$

La matrice d'orientation s'écrit :

$$A_{PE} = \begin{vmatrix} 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) - 1 & 2(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_4^2) - 1 \end{vmatrix}$$

APPENDICE C

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

Cq : cosinus q .

D_i : matrice d'inertie du robot i .

F : fonction objectif.

G_i : centre de masse du segment i .

$J(q)$: matrice jacobienne.

K_c : matrice d'inertie relative à l'objet ramenée au repère fixe R_f .

Sq : sinus q .

T : temps de transfert.

T_a : la limite inférieure du temps de transfert qui respecte la contrainte d'accélération.

T_v : la limite inférieure du temps de transfert qui respecte la contrainte de vitesse.

f_i, n_i : torseur des forces de contact généralisées.

g : accélération de la pesanteur.

l_i : longueur du segment i .

m_c : masse de l'objet à manipulateur de centre de masse c .

m_i : masse du segment i .

$q(t)$: vecteur des positions articulaires (coordonnées généralisées).

$\dot{q}(t)$: vecteur des vitesses articulaires (vitesses généralisées).

$\ddot{q}(t)$: vecteur des accélérations articulaires (accélérations généralisées).

r : distance entre c et l'origine de dernier bras d'un robot.

v : vecteur vitesse linéaire.

\dot{v} : vecteur accélération linéaire.

v_c, ω_c : vitesses linéaires et angulaire de c .

Γ ou u : commande (moments quadratiques).

Γ_i : vecteur des couples articulaires (forces généralisées).

μ : facteur de pondération (pour les moments quadratiques).

τ : tenseur d'inertie.

φ : orientation de l'objet par rapport au effecteur.

ω : vecteur vitesse angulaire.

$\dot{\omega}$: vecteur accélération angulaire.

APPENDICE D
PRECISION ET REPETABILITE SELON ISO 230-2

Cette annexe résume les définitions données par la norme iso 230-2 pour les termes liés à la détermination de la précision et de la répétabilité des axes en commande numérique.

Ecart de position : Position réelle (P_{ij} : i^{ème} point j^{ème} approche) atteinte par la partie mobile moins la position du point visé (P_i), soit $X_{ij} = P_{ij} - P_i$;

Unidirectionnel : Concerne une série de mesurages pour lesquels l'approche du point visé est toujours faite dans le même sens le long ou autour de l'axe (les symboles $\uparrow\downarrow$ donnent le sens d'approche utilisé pour un mesurage donné).

Bidirectionnel : L'approche du point visé est faite dans l'une quelconque des directions.

Ecart de position unidirectionnel (resp. bidirectionnel) moyen en une position $\bar{x}_i \uparrow$:
Moyenne arithmétique des écarts de position obtenue pour une série de n approches unidirectionnelles (resp. bidirectionnelles) d'une position P_i .

Valeur de réversibilité B_i : Valeur de la différence entre les écarts de position unidirectionnels moyens obtenue à partir des deux sens d'approche d'une position P_i ($B_i = \bar{x}_i \uparrow - \bar{x}_i \downarrow$).

Valeur de réversibilité d'un axe : Valeur maximale des valeurs de réversibilité absolues de tous les points visés le long ou autour de l'axe.

Valeur moyenne de réversibilité d'un axe : Moyenne arithmétique des valeurs de réversibilité de tous les points visés.

Estimateur de l'incertitude type unidirectionnelle du positionnement en une position :

Estimateur de l'incertitude type des écarts de position obtenus par une série d'approches n unidirectionnelles en une position P_i (attention au facteur $n-1$ correspondant à un estimateur sans biais).

$$s_i \uparrow = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} \uparrow - \bar{X}_i \uparrow)^2} \quad (D.1)$$

Répétabilité unidirectionnelle de positionnement en une position, $R_i \uparrow$: Etendue dérivée de l'incertitude type des écarts de position unidirectionnels en une position P_i .

$$R_i \uparrow = 4 \times s_i \uparrow \quad (D.2)$$

Répétabilité bidirectionnelle de positionnement en une position, R_i :

$$R_i = \max \cdot [2s_i \uparrow + 2s_i \downarrow + |B_i|; R_i \uparrow; R_i \downarrow] \quad (D.3)$$

La figure (D.1) illustre les différentes valeurs décrites ci-dessus pour une série de mesurages en un point.

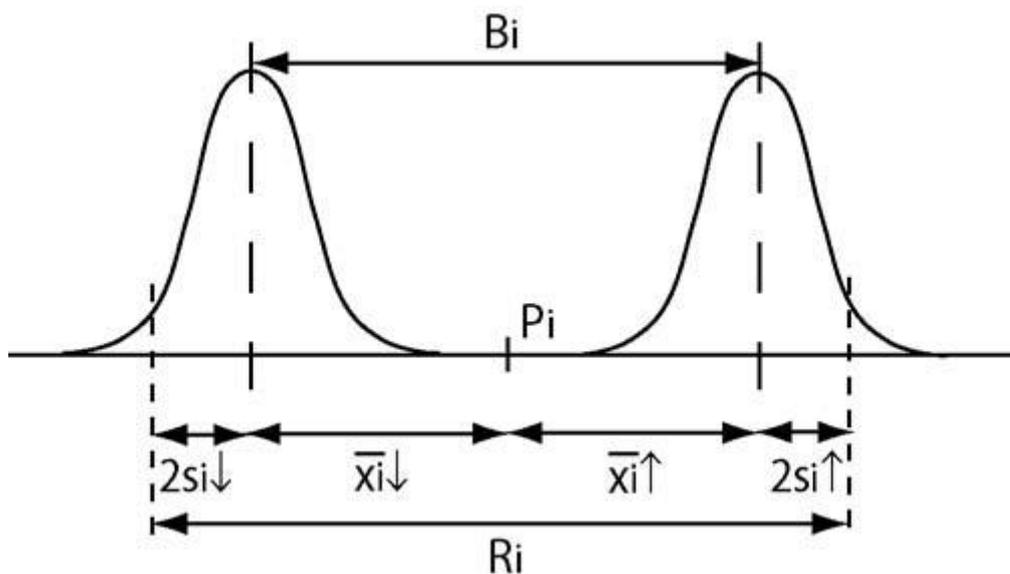


Figure D.1 : Illustration des définitions de l'écart de position moyen, de la valeur de réversibilité et de l'incertitude et de la répétabilité de positionnement en un point

Ecart de position systématique unidirectionnel d'un axe $E \uparrow$: Différence entre le maximum et le minimum algébriques des écarts de position unidirectionnels moyens pour un sens d'approche, en toute position P_i le long de l'axe.

$$E \uparrow = \max \cdot [\bar{x}_i \uparrow] - \min \cdot [\bar{x}_i \uparrow] \quad (\text{D.4})$$

Etendue de l'écart de position bidirectionnel moyen d'un axe, M : Différence entre le maximum et le minimum algébriques des écarts de position bidirectionnels moyens en toute position P_i le long de l'axe.

$$M = \max \cdot [\bar{x}_i] - \min \cdot [\bar{x}_i] \quad (\text{D.5})$$

Précision unidirectionnelle de positionnement d'un axe $A \uparrow$: Etendue dérivée de la combinaison des écarts systématiques unidirectionnels et de l'estimateur de l'incertitude type de positionnement unidirectionnel, à l'aide d'un facteur conventionnel de 2.

$$A \uparrow = \max \cdot [\bar{x}_i \uparrow + 2 \cdot \bar{s}_i \uparrow] - \min \cdot [\bar{x}_i \uparrow - 2 \cdot \bar{s}_i \uparrow] \quad (\text{D.6})$$

Précision bidirectionnelle de positionnement d'un axe A : Etendue dérivée de la combinaison des écarts systématiques bidirectionnels et de l'estimateur de l'incertitude type de positionnement bidirectionnel, à l'aide d'un facteur conventionnel de 2.

$$A = \max \cdot [\bar{x}_i \uparrow + 2 \cdot \bar{s}_i \uparrow; \bar{x}_i \downarrow + 2 \cdot \bar{s}_i \downarrow] - \min \cdot [\bar{x}_i \uparrow - 2 \cdot \bar{s}_i \uparrow; \bar{x}_i \downarrow - 2 \cdot \bar{s}_i \downarrow] \quad (\text{D.7})$$