

UNIVERSITE DE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des sciences de l'ingénieur
Département d'Electronique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Signaux et systèmes

LA SIMULATION NUMERIQUE DE LA DIFFUSION ACOUSTIQUE MULTIPLE PAR UN RESEAU BIDIMENSIONNEL ET MONODIMENSIONNEL

Par

MOUMENA Ahmed

Devant le jury composé de

H.	Salhi	Maître de conférences, U. de Blida	Président
A.	Aissat	Maître de conférences, U de Blida	Examineur
A.	Ali Benamara	Maître de conférences, U de Chlef	Examineur
A.	Guessoum	Professeur, U. de Blida	Promoteur

Blida, 21 janvier 2009

RESUME

La simulation de la diffusion multiple acoustique par un réseau bidimensionnel d'un nombre fini de réseaux linéaires monodimensionnels a été étudiée. Un empilement constituant un réseau 2D dit « bidimensionnel » périodique et un empilement constituant un réseau 1D dit « monodimensionnel » sont axées sur l'existence des bandes interdites. L'évolution de ces dernières est analysée en fonction de la concentration d'inclusions, de la nature du fluide contenu dans les inclusions et de l'angle sous lequel on excite le réseau cas normale ou cas oblique. L'objectif de cet mémoire est de vérifier par la simulation numérique l'existence des positions fréquentielles des bandes interdites et leurs largeurs ainsi que leur évolution en fonction des caractéristiques géométriques des réseaux bidimensionnels et monodimensionnels. Dans notre étude, Les cavités sont excitées en incidence normale et dans le cas des cavités vides ou fluides.

Mots-clés : Diffusion multiple acoustique / Distributions périodiques des inclusions / Bandes interdites/ réseau bidimensionnel.

ABSTRACT

The simulation of acoustic multiple scattering by a two-dimensional array of a finite number of linear arrays 1D was studied. Stacking up an array 2D said "two-dimensional " periodic and stacking up an array 1D said " mono-dimensional " focus on the existence of gap-bands. The evolution of these last is analyzed according to the concentration of inclusions, of the nature of the fluid contained in inclusions and of the incidence angle under which we excite the studied array in normal-case or oblique-case. The aim of work is to check by simulation the existence of the frequency positions of the stop-bands and their widths like their evolutions according to the geometrical characteristics of the two-dimensional and mono-dimensional arrays. The cavities are excited in normal incidence. The study is carried out in the case of the empty and fluid cavities.

Keywords: Acoustic multiple scattering / Periodic distributions of inclusions / Gap-bands/ two-dimensional array.

REMERCIEMENTS

- Un travail de cette envergure ne s'accomplit pas en un jour. Même s'il est porté par le dynamisme de son auteur, il est le résultat des nombreuses influences, proches ou lointaines, qui ont accompagné un esprit avide de connaissances dans sa découverte des sciences d'acoustique.
- Je remercie tout d'abord le directeur de recherche : Professeur Guessoum Abderrezzak pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche, signaux et systèmes. Je le remercie également, pour son soutien et sa disponibilité durant toute la durée 2006/2008.
- Je tiens à exprimer mes sincères remerciements aux membres du jury.
- Je remercie Mr : Sébastien de l'université de paris 7 Denis-Diderot, laboratoire LOA, pour son aide pour réaliser ce sujet.
- Je n'oublie pas, pour finir, les proches qui m'entourent depuis toujours, qu'ils soient famille ou amis, pour leur affection et leur soutien sans faille.

TABLE DES MATIERES

RESUME.....	
REMERCIEMENTS.....	
TABLE DES MATIERES.....	
LISTE DES FIGURES.....	
INTRODUCTION.....	10
1. THEORIE DE LA DIFFUSION SIMPLE PAR UN RESEAU MONODIMENSIONNEL PERIODIQUE.....	13
1.1 Cas de l'incidence oblique.....	13
1.1.1 Réflexion et transmission d'un réseau 1D périodique.....	13
1.1.1.1 Position du problème.....	13
1.1.1.2 Les équations de la diffusion multiple sous l'hypothèse de périodicité.....	14
1.1.1.3 Décomposition du champ diffusé en une somme d'ondes planes.....	18
1.1.1.3.1 Décomposition en ondes planes de $\sum_0^{L,T}$	19
1.1.1.3.2 Décomposition en ondes planes de $\sum_n^{L,T}$	25
1.1.2 Coefficients de réflexion et de transmission.....	26
1.1.3 Fréquences de coupure.....	29
1.2 Cas de l'incidence normale.....	33
1.3 Relations de conservation des flux d'énergie.....	34
2. THEORIE DE LA DIFFUSION MULTIPLE PAR UN RESEAU BIDIMENSIONNEL PERIODIQUE.....	39

2.1 Cas de l'incidence oblique.....	39
2.1.1 Réflexion et transmission par un réseau 2D composé de N réseaux linéaires infinis mis en parallèle.....	39
2.1.1.1 Réflexion et transmission par deux réseaux linéaires Infinites.....	39
2.1.1.2 Généralisation à $N > 2$ réseaux linéaires infinis.....	44
2.1.2 Equation caractéristique pour un réseau 2D infini Périodique.....	48
2.2 Cas de l'incidence normale.....	53
2.2.1 Réflexion et transmission d'un réseau 2D périodique et fini.....	53
2.2.2 Equation caractéristique.....	58
3. LA SIMULATION NUMERIQUE DES DEUX RESEAUX MONODIMENSIONNEL ET BIDIMENSIONNEL PERIODIQUE.....	62
3.1 Résultats numériques obtenus dans le cas du réseau linéaire 1D périodique.....	62
3.1.1 Résultats du premier réseau 1D : (d=5mm).....	62
3.1.1.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides.....	62
3.1.1.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides.....	64
3.1.2 Résultats du deuxième réseau 1D : (d=2mm).....	66
3.1.2.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides.....	66
3.1.2.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides.....	68
3.1.3 Résultats du troisième réseau 1D : (d=1mm).....	70
3.1.3.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides.....	70
3.1.3.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides.....	72
3.2 Résultats numériques obtenus dans le cas du réseau bidimensionnel 2D périodique.....	74
3.2.1 Résultats du premier réseau bidimensionnel 2D :(d=6mm),(D=7mm), (S=7mm).....	74
3.2.1.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides.....	74
3.2.1.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides.....	76
3.2.2 Résultats du deuxième réseau 2D:(d=4mm),(D=30mm), (S=8mm)	77
3.2.2.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides.....	77
3.2.2.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides.....	79
3.2.3 Résultats du troisième réseau 2D:(d=5mm),(D=20mm), (S=6mm)	80

	6
3.2.3.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides.....	80
3.2.3.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides.....	82
3.3 Résultats de comparaison entre l'étude numérique et l'étude l'expérimentale.....	83
3.3.1 Résultats obtenus sur le premier réseau bidimensionnel.....	86
3.3.2 Résultats obtenus sur le deuxième réseau bidimensionnel.....	86
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	89
ANNEXE. A.....	90
ANNEXE. B.....	94
ANNEXE. C.....	95
ANNEXE. D.....	97
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Géométrie du problème de la diffusion par un réseau linéaire infini	13
Figure 1.2	Directions de propagation des modes p homogènes transmis, l'un de type longitudinal et l'autre de type transversal	24
Figure 1.3	Vecteurs d'onde des modes fondamentaux transmis par le réseau	32
Figure 1.4	Vecteurs de Poynting entrants et sortants au travers de $S=S_{-x_0} \cup S_{x_0}$	35
Figure 2.1	Réseau 2D composé de deux réseaux linéaires infinis distants de D et soumis à une onde plane longitudinale. Toutes les notations prises en compte pour le calcul des coefficients de réflexion et de transmission R_1^{LL} et T_1^{LL} sont ici représentées	40
Figure 2.2	Première décomposition de la méthode itérative de calcul des coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau 2D composé de $N > 2$ réseaux linéaires infinis.	45
Figure 2.3	Réseau 2D infini et périodique : amplitudes des ondes de part et d'autre d'un réseau linéaire n , entre les réseaux $n-1$ et $n+1$.	49
Figure 2.4	Géométrie du réseau de cavités cylindriques.	53
Figure 2.5	La première décomposition pour déterminer le coefficient de réflexion global.	55
Figure 2.6	La première décomposition pour déterminer le coefficient de transmission global.	56
Figure 2.7	Réseau 2D composé d'un nombre infini de réseaux identiques et périodiquement espacés ; les amplitudes des ondes dans les deux cotés sont présentées.	61
Figure 3.1	Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $ R^{LL} ^2$ et $ T^{LL} ^2$ d'un réseau de cavités vides	

en incidence normale avec $d/a=2.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$. **63**

Figure 3.2 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités remplies d'eau en incidence normale avec $d/a=2.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$ **65**

Figure 3.3 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=1$, la fréquence de coupure $f_c = 1.57MHz$. **67**

Figure 3.4 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités remplies d'eau en incidence normale avec $d/a=1$, la fréquence de coupure $f_c = 1.57MHz$ **69**

Figure 3.5 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=0.5$, la fréquence de coupure $f_c = 3.14MHz$ **71**

Figure 3.6 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités remplies d'eau en incidence normale avec $d/a=0.5$, la fréquence de coupure $f_c = 3.14MHz$. **73**

Figure 3.7 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=3$, $D/a= 3.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.520MHz$ **75**

Figure 3.8 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités fluides en incidence normale avec $d/a=3$, $D/a= 3.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.520MHz$ **76**

- Figure 3.9 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2$, $D/a= 15$, la fréquence de coupure $f_c = 0.780MHz$. **78**
- Figure 3.10 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2$, $D/a= 15$, la fréquence de coupure $f_c = 0.780MHz$. **79**
- Figure 3.11 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2.5$, $D/a= 3$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$. **81**
- Figure 3.12 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités fluides en incidence normale avec $d/a=2.5$, $D/a= 3$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$. **82**
- Figure 3.13 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2.5$, $D/a= 3$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$. **84**
- Figure 3.14 Fonction de forme normée. **84**
- Figure 3.15 Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=3$, $D/a= 10$, la fréquence de coupure $f_c = 0.520MHz$. **87**
- Figure 3.16 Fonction de forme normée. **87**

INTRODUCTION

L'étude du champ acoustique qui résulte de la propagation d'ondes dans un milieu contenant une distribution de diffuseurs, en nombre fini ou infini, fait l'objet de la diffusion multiple. Le cadre général dans lequel s'inscrit cet mémoire est celui de la diffusion multiple dans les milieux élastiques présentant des distributions périodiques, d'une infinité d'inclusions de forme cylindrique, vides ou remplies d'un liquide.

Pour ce qui concerne la diffusion multiple dans des milieux présentant une distribution périodique d'objets, un nombre important d'études porte sur la diffusion par des réseaux de tubes ou de cylindres élastiques immergés dans un fluide. Ces études sont orientées vers des applications telles que le contrôle des réseaux de tubes dans les échangeurs de chaleur de certaines installations industrielles (échangeur de chaleur dans un réacteur nucléaire, par exemple).

La propagation d'ondes acoustiques dans les milieux hétérogènes dotés d'une structure périodique est l'objet d'un intérêt croissant depuis quelques décennies. Un grand nombre de structures périodiques a été étudié et des approches théoriques variées ont été employées. Toutes ont mis en évidence l'existence de propriétés physiques originales telles que la présence de bandes interdites — c'est-à-dire des bandes fréquentielles pour lesquelles les ondes ne peuvent se propager à longue distance dans le milieu — correspondant à une forte atténuation, et des bandes passantes d'atténuation moindre. L'analogie existant avec la propagation d'ondes électromagnétiques dans les structures diélectriques périodiques stimule aujourd'hui la recherche sur les « cristaux phononiques » constitués d'inclusions élastiques périodiquement réparties dans une matrice élastique. La propagation d'ondes élastiques dans de tels milieux fait par ailleurs l'objet d'études dans des domaines aussi variés que la géophysique, l'acoustique médicale et l'ingénierie mécanique (citons comme applications le contrôle non destructif NDT).

Le milieu périodique considéré dans cette étude est un réseau bidimensionnel 2D périodique d'inclusions cylindriques dans un milieu élastique (Aluminium) et un autre réseau de type monodimensionnel 1D. L'objectif de ce travail est de montrer l'existence des [1] bandes interdites et leurs évolutions en fonction des caractéristiques géométriques du réseau utilisé. En utilisant la méthode des éléments finis, *P. Langlet* [2] a pu caractériser la propagation d'ondes dans un tel réseau en analysant la dispersion et l'atténuation des ondes de Lamb se propageant dans une plaque élastique percée périodiquement. Cette étude sera basée sur l'analyse des coefficients de réflexion globale et de transmission globale d'un réseau 2D périodique d'épaisseur finie et d'un seul réseau linéaire 1D périodique.

Dans cet mémoire, les points fondamentaux de la théorie sont présentés. Cette théorie est une extension du modèle théorique développé par Audoly, Dumery, Mulolland et Heckl [3,4,5] pour des réseaux d'obstacles rigides ou élastiques immergés dans un fluide. Ce modèle consiste à décomposer le réseau 2D périodique en une série de réseaux 1D périodiques. Si la diffusion par chacun de ces réseaux est connue, la propagation des ondes d'un réseau à l'autre est alors déduite à partir du théorème de Bloch ou d'une méthode itérative. L'approche de ces différents auteurs est basée sur le travail de Twersky [6,7] sur la diffusion d'ondes planes par un réseau 1D périodique d'objets cylindriques. Twersky, en utilisant un calcul exact de diffusion multiple, obtient une expression du champ diffusé sous la forme d'une superposition d'ondes planes diffractées sous différents angles. Dans le contexte de la diffusion en milieu élastique, le formalisme de Twersky a été généralisé en se basant sur la théorie de la matrice de transition T , théorie intensivement exploitée par Varadan [8,9] pour des milieux multi-diffusants similaires.

L'étude proposée, concerne les réseaux périodiques, Pour ces derniers, il s'agit d'identifier, dans le cas d'une incidence normale, les effets des résonances d'inclusions d'air ou fluide sur les bandes interdites. Pour ce faire, les résultats obtenus pour des réseaux d'inclusions d'air (peu résonantes) et des réseaux d'inclusions fluides (beaucoup plus résonantes) les différents réseaux sont soumis

à une onde plane incidente dans un plan perpendiculaire aux axes des inclusions cylindriques. Les cavités sont d'autre part excitées en incidence normale. Il n'y aura donc jamais de conversion entre les ondes longitudinales et transversales lors de la réflexion ou de la transmission par les réseaux 2D. L'étude sera de plus menée aux basses fréquences pour lesquelles les réseaux 2D ne diffractent qu'une seule onde plane dans la même direction que l'onde plane incidente. Par conséquent, en incidence normale et en basse fréquence, les réseaux 2D auront le comportement acoustique d'un milieu fluide stratifié et périodique.

Pour mettre en évidence l'influence des caractéristiques géométriques des réseaux sur le champ acoustique réfléchi ou transmis, plusieurs réseaux sont étudiés. Les calculs numériques sont obtenus dans le cas des inclusions vides ou fluides eau et le cas de l'incidence normale.

Les applications sont:

- ❖ Télécommunication pour les guides d'ondes.
- ❖ Micro-électronique pour la conception des filtres fréquentiels sélectifs.
- ❖ La conception des matériaux à isolants phoniques.
- ❖ Militaire pour l'invisibilité des avions de chasse et les sous-marins.
- ❖ Nanostructure pour la réalisation de composants optiques intégrés.
- ❖ La conception de super-lentilles pour l'imagerie ultrasonore.
- ❖ Nucléaire pour la détection des fuites de chaleur dans les réacteurs nucléaires.
- ❖ Médicale pour l'imagerie

CHAPITRE 1

THEORIE DE LA DIFFUSION SIMPLE PAR UN RESEAU MONODIMENSIONNEL PERIODIQUE

1. Théorie de la diffusion simple pour un réseau 1D périodique

1.1 Cas de l'incidence oblique

1.1.1 Réflexion et transmission d'un réseau linéaire 1D périodique

1.1.1.1 Position du problème

L'objectif de cette section est d'écrire le champ diffusé par un réseau linéaire infini sous la forme d'ondes planes réfléchies et transmises. La géométrie du réseau et les notations utilisées sont présentées sur la Figure 1.1 ci-dessous.

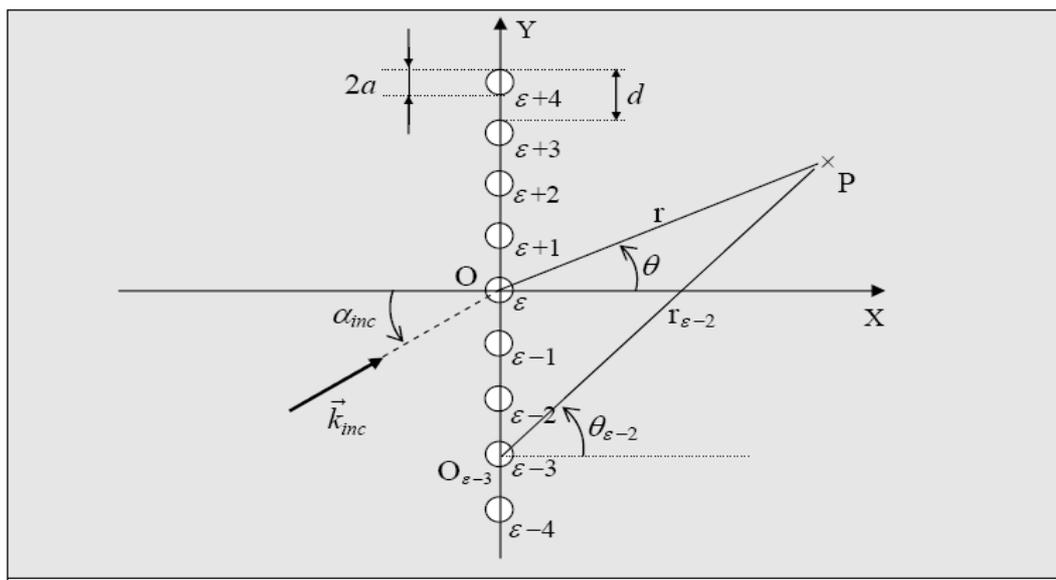


Figure 1.1 : Géométrie du problème de la diffusion par un réseau linéaire infini.

Le réseau est composé d'inclusions identiques, de rayon a , placées de façon périodique selon L'axe Oy avec un pas de réseau égal à d . L'indice ε de numérotation des inclusions est ici un entier relatif variant de $-\infty$ à $+\infty$. Le champ diffusé au point d'observation P est donc donné par :

$$\phi_S = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)incL} H_n^{(1)}(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon} \quad (1.1)$$

$$\psi_S = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)incT} H_n^{(1)}(k_T r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon} \quad (1.2)$$

Les coefficients $C_n^{(\varepsilon)incL}$ et $C_n^{(\varepsilon)incT}$ sont solutions de systèmes d'équations linéaires couplées

$$C_m^{(\varepsilon)incL} - T_m^{(\varepsilon)LL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incL} - T_m^{(\varepsilon)TL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incT} = T_m^{(\varepsilon)LL} A_m^{(\varepsilon)inc} \quad (1.3)$$

$$C_m^{(\varepsilon)incT} - T_m^{(\varepsilon)LT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incL} - T_m^{(\varepsilon)TT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incT} = T_m^{(\varepsilon)LT} A_m^{(\varepsilon)inc} \quad (1.4)$$

Où la sommation sur τ est ici une sommation de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'agit alors de tenir compte de l'hypothèse de périodicité du réseau (inclusions identiques et distribution périodique) pour récrire ces systèmes sous une forme plus adaptée à une résolution rapide. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

1.1.1.2 Les équations de la diffusion multiple sous l'hypothèse de périodicité

Désormais, la mise en équation sera effectuée dans le cas d'une onde incidente longitudinale ($inc = L$), la généralisation à tout type d'onde incidente s'effectuant sans difficulté. D'après la Figure 1.1, le repère lié à l'inclusion ε a été choisi comme repère principal (xOy). Par suite, le potentiel scalaire de l'onde incidente sur l'inclusion ε s'écrit :

$$\phi_{inc}^{(\varepsilon)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(\varepsilon)L} J_n(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L J_n(k_L r) e^{in\theta} \quad (1.5)$$

Où A_n^L est réduit à :

$$A_n^L = i^n e^{-in\alpha_L} \quad (1.6)$$

D'une inclusion à une autre, le potentiel incident est le même mais déphasé de la quantité

$$\varphi_L = k_L d \sin \alpha_L \quad (1.7)$$

Lorsque l'on passe de l'inclusion ε à celle $\varepsilon + 1$. Par suite, pour respecter l'hypothèse de périodicité, les coefficients de diffusion doivent nécessairement vérifier la condition

$$C_n^{(\varepsilon+1)LL} = C_n^{(\varepsilon)LL} e^{i\varphi_L}, C_n^{(\varepsilon+1)LT} = C_n^{(\varepsilon)LT} e^{i\varphi_L}, \quad (1.8),(1.9)$$

De façon plus générale, d'une inclusion ε à une inclusion $\varepsilon + p$, avec $p \in \mathbb{Z}$, les coefficients de diffusion doivent vérifier

$$C_n^{(\varepsilon+p)LL} = C_n^{(\varepsilon)LL} e^{ip\varphi_L}, C_n^{(\varepsilon+p)LT} = C_n^{(\varepsilon)LT} e^{ip\varphi_L}, \quad (1.10),(1.11)$$

De cette façon, nous pouvons donc éliminer un grand nombre de coefficients inconnus dans les systèmes d'équations linéaires (1.3) et (1.4) en ne conservant que les coefficients de diffusion de l'inclusion ε . Ces coefficients seront notés par la suite C_n^{LL} et C_n^{LT} . D'autre part, le fait de choisir l'inclusion ε comme diffuseur de référence conduit à poser

$$p = \tau - \varepsilon, r_{\varepsilon\tau} = pd, \theta_{\varepsilon\tau} = \theta_p \quad (1.12)$$

Avec : $\theta_p = +\pi/2$, si $p > 0$ et $\theta_p = -\pi/2$ si $p < 0$. Compte tenu de ces notations, l'opérateur de Graff s'écrit

$$G_{L, Tnm}^{(\tau\varepsilon)} = e^{i(n-m)\theta_p} H_{n-m}^{(1)}(k_{L,T} pd) \quad (1.13)$$

L'introduction de (1.10) (1.11) et (1.13) dans le système (1.3) et (1.4) conduit à ((1.14) et (1.15))

$$C_m^{LL} - T_m^{LL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) - T_m^{TL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) = T_m^{LL} A_m^L \quad (1.14)$$

$$C_m^{LT} - T_m^{LT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) - T_m^{TT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) = T_m^{LT} A_m^L \quad (1.15)$$

D'autre part, en tenant compte de la loi de Snell-Descartes

$$k_L \sin \alpha_L = k_T \sin \alpha_T \quad (1.16)$$

Le système ((1.14) et (1.15)) peut également s'écrire ((1.17) et (1.18))

$$C_m^{LL} - T_m^{LL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) - T_m^{TL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_T} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) = T_m^{LL} A_m^L \quad (1.17)$$

$$C_m^{LT} - T_m^{LT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) - T_m^{TT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_T} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) = T_m^{LT} A_m^L \quad (1.18)$$

Cette dernière forme d'écriture a pour but d'introduire les séries définies par

$$\sigma_{nm}^L = \sigma(\alpha_L, n-m) = \sum_{p \neq 0} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) e^{ik_L pd \sin \alpha_L} e^{i(n-m)\theta_p} \quad (1.19)$$

$$\sigma_{nm}^T = \sigma(\alpha_T, n-m) = \sum_{p \neq 0} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) e^{ik_T pd \sin \alpha_T} e^{i(n-m)\theta_p} \quad (1.20)$$

L'introduction de ces séries permet d'écrire ((1.17) et (1.18)) de façon plus compacte, à savoir

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - T_m^{LL} \sigma_{nm}^L \right] C_n^{LL} - T_m^{TL} \sigma_{nm}^T C_n^{LT} \right\} = T_m^{LL} A_m^L \quad (1.21)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - T_m^{TT} \sigma_{nm}^T \right] C_n^{LT} - T_m^{LT} \sigma_{nm}^L C_n^{LL} \right\} = T_m^{LT} A_m^L \quad (1.22)$$

Ce système étant valable quel que soit m , il peut être écrit en termes de matrices et de vecteurs. En introduisant la matrice de dimensions infinies

$$\sigma^{L,T} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1n-1}^{L,T} & \sigma_{n-1n}^{L,T} & \sigma_{n-1n+1}^{L,T} & & \\ \dots & \sigma_{mn-1}^{L,T} & \sigma_{mn}^{L,T} & \sigma_{mn+1}^{L,T} & \dots \\ \sigma_{n+1n-1}^{L,T} & \sigma_{n+1n}^{L,T} & \sigma_{n+1n+1}^{L,T} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Et en prenant les vecteurs et les matrices définis dans l'appendice B, le système matriciel à résoudre s'écrit finalement

$$\begin{bmatrix} I_d - T^{LL} \overline{\sigma}^L & -T^{TL} \overline{\sigma}^T \\ -T^{LT} \overline{\sigma}^L & I_d - T^{TT} \overline{\sigma}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}^{LL} \\ \overline{C}^{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{LL} \\ T^{LT} \end{bmatrix} \overrightarrow{A} \quad (1.24)$$

où $\overline{\sigma}^{L,T}$ désigne la matrice transposée de $\sigma^{L,T}$. L'hypothèse d'un réseau constitué d'inclusions identiques permet de réduire le système de $2N$ équations pour $2N$ inconnues à seulement deux équations pour deux inconnues. D'autre part, l'hypothèse d'une répartition périodique des inclusions permet d'introduire la série σ . Cette série prend deux formes suivant que son ordre est pair ($n - m = 2q$) ou impair ($n - m = 2q + 1$) :

$$\sigma(\alpha_{L,T}, q) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q}^{(1)}(k_{L,T} pd) \cos(k_{L,T} pd \sin \alpha_{L,T}) \quad (1.25)$$

$$\sigma(\alpha_{L,T}, 2q + 1) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q+1}^{(1)}(k_{L,T} pd) \sin(k_{L,T} pd \sin \alpha_{L,T}) \quad (1.26)$$

Ces deux séries sont des séries de Schlömilch. Elles sont toutes deux mal conditionnées pour le calcul numérique car elles convergent très lentement. Cependant, V. Twersky a obtenu des expressions analytiques équivalentes qui convergent beaucoup plus rapidement [14]. L'hypothèse de périodicité du réseau infini (inclusions identiques et distribution périodique) permet en fin de compte de réduire considérablement les temps de calcul puisque ces derniers sont alors comparables à ceux mis en jeu dans le calcul de la diffusion par un réseau limité de quelques inclusions.

1.1.1.3 Décomposition du champ diffusé en une somme d'ondes planes

Les coefficients de diffusion du réseau C_n^{LL} et C_n^{LT} sont désormais connus. Compte tenu des conditions (1.10) (1.11), les composantes du champ diffusé définies par (1.1) et (1.2) peuvent s'écrire respectivement

$$\phi_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_n^L \quad (1.27)$$

$$\psi_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_n^T \quad (1.28)$$

Avec ;

$$\sum_n^L = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_L p d \sin \alpha_L} H_n^{(1)}(k_L r_p) e^{in\theta_p} \quad (1.29)$$

Et

$$\sum_n^T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_T p d \sin \alpha_T} H_n^{(1)}(k_T r_p) e^{in\theta_p} \quad (1.30)$$

Où p est l'indice de numérotation des diffuseurs. Au vu de ces expressions, le champ diffusé par le réseau s'interprète alors comme la superposition d'une infinité d'ondes cylindriques de type

$$\left[e^{ik_{L,T}pd \sin \alpha_{L,T}} C_n^{LL,T} \right] H_n^{(1)}(k_{L,T}r_p) e^{in\theta_p} \quad (1.31)$$

Où le terme entre crochets représente leur amplitude. L'objectif, dans de ce paragraphe, est de montrer que, suffisamment loin du réseau, le champ diffusé de part et d'autre de ce dernier peut aussi s'écrire comme une superposition d'ondes planes. Pour ce faire, nous ferons appel à la théorie des distributions, et procéderons en deux étapes : tout d'abord décomposer en ondes planes les termes d'ordre 0 des séries (1.29) et (1.30), puis écrire cette décomposition pour n'importe quel ordre n . La démonstration figure en détail dans la référence [14], l'unique différence étant ici la prise en compte des conversions entre les ondes longitudinales et transversales.

1.1.1.3.1 Décomposition en ondes planes de $\sum_0^{L,T}$

En effectuant les changements de variable $\xi_{L,T} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{L,T}$, les termes d'ordre 0 des séries (1.29) et (1.30) s'écrivent

$$\sum_0^L = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_L pd \cos \xi_{L,T}} H_0^{(1)}(k_L r_p) \quad (1.32)$$

Au sens des distributions, $H_0^{(1)}(k_{L,T}r_p)$ est solution de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$\left[\Delta + k_{L,T}^2 \right] H_0^{(1)}(k_{L,T}r_p) = 4i\delta(x)\delta(y - pd) \quad (1.33)$$

Où δ représente la distribution de Dirac. $H_0^{(1)}(k_{L,T}r_p)$ est la fonction de Green de l'équation des ondes à deux dimensions et $\delta(x)\delta(y - pd)$ représente un point source localisé en $x = 0$ et $y = pd$. Par suite, $H_0^{(1)}(k_{L,T}r_p)$ représente le champ rayonné par le point source situé en $(0, pd)$. Compte tenu de la linéarité de l'opérateur de Helmholtz, les séries, $\sum_0^{L,T}$ vérifient nécessairement l'équation

$$\left[\Delta + k_{L,T}^2\right] \sum_0^{L,T} = 4i\delta(x) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(y - pd) e^{ik_{L,T}pd \cos \xi_{L,T}} \quad (1.34)$$

Qui, après quelques transformations, peut encore s'écrire

$$\left[\Delta + k_{L,T}^2\right] \sum_0^{L,T} = \frac{4i}{d} \delta(x) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_{L,T}y \cos \xi_{L,T}} \quad (1.35)$$

En posant

$$\cos \xi_p^{L,T} = \cos \xi_{L,T} + \frac{2\pi p}{k_{L,T}d} \quad (1.36)$$

L'idée consiste maintenant à chercher la solution $u_p^{L,T}$ de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$\left[\Delta + k_{L,T}^2\right] u_p^{L,T} = \frac{4i}{d} \delta(x) e^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}} \quad (1.37)$$

Où $u_p^{L,T}$ représentera une onde plane réfléchiée ou transmise par le réseau. La méthode consiste tout d'abord à chercher la solution générale de (1.37) après avoir effectué la transformée de Fourier membre à membre de cette dernière par rapport à la variable x . Cette transformée de Fourier conduit à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k_{L,T}^2 - \lambda^2)\right] \tilde{u}_p^{L,T} = \frac{4i}{d} e^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}} \quad (1.38)$$

En notant

$$\tilde{u}_p^{L,T} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_p^{L,T} e^{-\lambda x} dx \quad (1.39)$$

(Où λ est la variable conjuguée de x par transformation de Fourier). Supposons une solution $\tilde{u}_p^{L,T}$ de la forme suivante

$$\tilde{u}_p^{L,T} = ce^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}} \quad (1.40)$$

Où c est une constante à déterminer. En injectant (1.40) dans (1.38), on montre alors que

$$\tilde{u}_p^{L,T} = \left[\frac{4i}{d} e^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}} \right] \frac{1}{k_{L,T}^2 \sin^2 \xi_p^{L,T} - \lambda^2} \quad (1.41)$$

A partir de maintenant, considérons $\tilde{u}_p^{L,T}$ comme une fonction de λ . Dans ce cas, la quantité

$$c_0 = \frac{4i}{d} e^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}} \quad (1.42)$$

Est une constante, et $\tilde{u}_p^{L,T}$ vérifie l'équation

$$\left[(k_{L,T} \sin \xi_p^{L,T})^2 - \lambda^2 \right] \tilde{u}_p^{L,T} = c_0 \quad (1.43)$$

D'après la théorie des distributions, il résulte de (1.43) que

$$\tilde{u}_p^{L,T} = \frac{4i}{d} \frac{e^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}}}{(k_{L,T} \sin \xi_p^{L,T})^2 - \lambda^2} + c_1 \delta(\lambda - k_{L,T} \sin \xi_p^{L,T}) + c_2 \delta(\lambda + k_{L,T} \sin \xi_p^{L,T}) \quad (1.44)$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires par rapport à la variable λ . Par suite, la transformée de Fourier inverse de (1.44) conduit à

$$u_p^{L,T} = 2i \frac{e^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}}}{k_{L,T} d \sin \xi_p^{L,T}} + \text{sgn}(x) \sin(k_{L,T} x \sin \xi_p^{L,T}) + c_1 e^{-ik_{L,T} x \sin \xi_p^{L,T}} + c_2 e^{ik_{L,T} x \sin \xi_p^{L,T}} \quad (1.45)$$

Où $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\text{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$. Pour la détermination des constantes c_1 et c_2 , la seule façon d'aboutir à une solution qui représente des ondes qui se propagent en s'éloignant du réseau consiste à poser

$$c_1 = c_2 = \frac{e^{ik_{L,T}y \cos \xi_p^{L,T}}}{k_{L,T}d \sin \xi_p^{L,T}} \quad (1.46)$$

Autrement dit, les constantes c_1 et c_2 sont choisies ici pour respecter les conditions de rayonnement à l'infini de Sommerfeld. Finalement, en injectant (1.46) dans (1.45) pour $x > 0$ et $x < 0$, on montre que quel que soit x

$$u_p^{L,T} = \frac{2}{k_{L,T}d \sin \xi_p^{L,T}} e^{ik_{L,T}[|x| \sin \xi_p^{L,T} + y \cos \xi_p^{L,T}]} \quad (1.47)$$

Pour $x < 0$, on a $|x| = -x$ et $u_p^{L,T}$ représente une onde plane se propageant vers les x négatifs. L'onde incidente est supposée se propager vers les x positifs donc $u_p^{L,T}$ représente une onde Plane réfléchiée par le réseau. Pour $x > 0$, on a $|x| = x$ et $u_p^{L,T}$ représente une onde plane transmise. Comme les termes $u_p^{L,T}$ sont solutions de (1.37), alors les séries

$$\sum_n^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_{L,T}d \sin \xi_p^{L,T}} e^{ik_{L,T}[|x| \sin \xi_p^{L,T} + y \cos \xi_p^{L,T}]} \quad (1.48)$$

Avec

$$\cos \xi_p^{L,T} = \cos \xi_{L,T} + \frac{2p\pi}{k_{L,T}d} = \sin \alpha_{L,T} + \frac{2p\pi}{k_{L,T}d} \quad (1.49)$$

Sont bien solutions de l'équation Helmholtz inhomogène (1.34) régissant la diffusion par le réseau linéaire. Le terme $\cos \xi_p^{L,T}$ de cette dernière équation tend vers l'infini quand p tend vers l'infini. Il est par conséquent préférable de changer de notation. Introduisons $\alpha_p^{L,T}$ tel que

$$\alpha_p^L = k_L \sin \alpha_L + \frac{2p\pi}{d} = \alpha_p^T = k_T \sin \alpha_T + \frac{2p\pi}{d} \quad (1.50)$$

Où l'égalité $\alpha_p^L = \alpha_p^T$ émane de la loi de Snell-Descartes. En notant alors

$k_p^{L,T} = k_{L,T} \sin \xi_p^{L,T}$, $k_p^{L,T}$ se déduit de $\alpha_p^{L,T}$ par

$$k_p^{L,T} = \left[k_{L,T}^2 - \alpha_p^{L,T^2} \right]^{1/2} \quad (1.51)$$

Avec ces notations, $\sum_0^{L,T}$ se met sous la forme suivante

$$\sum_0^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_p^{L,T} d} e^{i[k_p^{L,T}|x| + \alpha_p^{L,T}y]} \quad (1.52)$$

Il apparaît donc clairement que, $\sum_0^{L,T}$ est une somme d'ondes planes qui ont pour vecteurs d'onde

$$\vec{K}_p^{L,T} = \begin{bmatrix} K_{px}^{L,T} \\ K_{py}^{L,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p^{L,T} \\ \alpha_p^{L,T} \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Au vu de (1.50), quand p tend vers l'infini, il en est de même pour $\alpha_p^{L,T}$. Il faut par conséquent préciser la détermination de la racine de l'expression (1.51). Pour

$|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T}$, la composante $k_p^{L,T}$ du vecteur d'onde $\vec{K}_p^{L,T}$ est réelle et définie par

$$k_p^{L,T} = \sqrt{k_{L,T}^2 - \alpha_p^{L,T^2}} \quad (1.54)$$

Et pour $|\alpha_p^{L,T}| > k_{L,T}$, $k_p^{L,T}$ devient imaginaire pur et s'écrit

$$k_p^{L,T} = \pm i \sqrt{\alpha_p^{L,T^2} - k_{L,T}^2} \quad (1.55)$$

Pour effectuer un choix entre les déterminations positive et négative devant la racine, il faut se reporter à l'expression de $\sum_0^{L,T}$ dans le cas où $|\alpha_p^{L,T}| > k_{L,T}$. Il apparaît alors que les ondes ne seront évanescentes que si l'on choisit la détermination positive. Lorsque $|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T}$, $\sum_0^{L,T}$ représente une somme d'ondes planes homogènes réfléchies et transmises suivant différents angles définis par (1.50) et (1.54) de la façon suivante

$$\sin \theta_p^{L,T} = \frac{\alpha_p^{L,T}}{\sqrt{\alpha_p^{L,T^2} + k_p^{L,T^2}}} \quad (1.56)$$

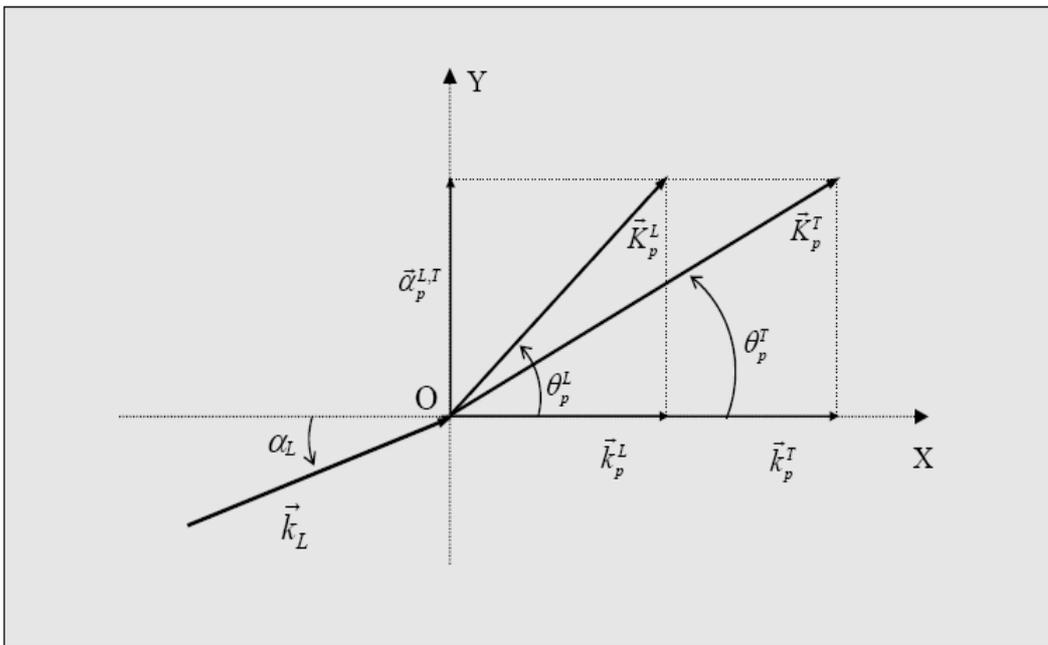


Figure 1.2 : Décrit les directions de propagation des modes p homogènes transmis, l'un de type longitudinal et l'autre de type transversal.

Comme le suggère cette figure, les modes p transmis ou réfléchis par le réseau ne vérifient pas nécessairement la loi de Snell-Descartes puisque, d'après (1.50),

$\vec{\alpha}_p^L = \vec{\alpha}_p^T \neq k_L \sin \alpha_L$ quand $p \neq 0$. Seuls les modes fondamentaux, $p = 0$, vérifiant

$\vec{\alpha}_0^L = \vec{\alpha}_0^T = k_L \sin \alpha_L$, satisfont la loi de Snell-Descartes.

1.1.1.3.2 Décomposition en ondes planes de $\sum_n^{L,T}$

Pour terminer complètement la démonstration, il nous faut maintenant décomposer

$\sum_n^{L,T}$ en somme d'ondes planes quel que soit l'ordre n . Pour ce faire, il convient d'introduire l'opérateur différentiel $\Lambda_n^{L,T}$ défini par

$$\Lambda_n^{L,T} = \frac{1}{(-k_{L,T})^n} \left[\left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] \right]^n \quad \text{si } n > 0 \quad (1.57)$$

Et

$$\Lambda_n^{L,T} = \frac{1}{k_{L,T}^{|n|}} \left[\left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right] \right]^{|n|} \quad \text{si } n < 0 \quad (1.58)$$

L'intérêt de cet opérateur est que, connaissant la décomposition en ondes planes de $\sum_0^{L,T}$ on peut « monter » ($n > 0$) ou « descendre » ($n < 0$) à n'importe quelle décomposition d'ordre n en appliquant directement $\Lambda_n^{L,T}$ à $\sum_0^{L,T}$. Il s'agit alors de calculer

$$\sum_n^{L,T} = \Lambda_n^{L,T} \sum_0^{L,T} \quad (1.59)$$

En différenciant les deux cas $x > 0$ et $x < 0$. Après calcul, il vient

$$\sum_n^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_p^{L,T}} d \left[\frac{\alpha_p^{L,T} - ik_p^{L,T}}{k_{L,T}} \right]^n e^{i[k_p^{L,T}x + \alpha_p^{L,T}y]} \quad \text{pour } x > 0 \quad (1.60)$$

$$\sum_n^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_p^{L,T}} d \left[\frac{\alpha_p^{L,T} + ik_p^{L,T}}{k_{L,T}} \right]^n e^{i[-k_p^{L,T}x + \alpha_p^{L,T}y]} \quad \text{pour } x < 0 \quad (1.61)$$

L'interprétation physique en termes d'ondes planes transmises et réfléchies est la même pour $\sum_n^{L,T}$ que pour $\sum_0^{L,T}$. La convergence de ces séries est assurée par la présence des termes

$$e^{-\sqrt{\alpha_p^{L,T^2} - k_{L,T}^2}(|x|)} \quad (1.62)$$

Qui tendent très rapidement vers zéro quand p tend vers l'infini. Ce terme vaut 1 pour $x = 0$, la convergence dans ce cas n'est plus assurée. Les développements ci-dessus de $\sum_n^{L,T}$ ne sont donc pas valables pour $x = 0$.

1.1.2 Coefficients de réflexion et de transmission

Les composantes longitudinale et transversale du champ total transmis par le réseau s'écrivent respectivement

$$\phi_T = e^{ik_L(x \sin \alpha_L + y \cos \alpha_L)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_n^L \quad (1.63)$$

Et

$$\psi_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_n^T \quad (1.64)$$

Où \sum_n^L et \sum_n^T sont définis pour $x > 0$. Dans (1.63), le premier terme du second membre correspond au potentiel scalaire de l'onde incidente longitudinale. Plus explicitement, en utilisant (1.60) et (1.61), et en tenant compte du fait que

$$k_{L,T} \sin \alpha_{L,T} = k_0^{L,T} \quad (1.65)$$

$$k_{L,T} \cos \alpha_{L,T} = \alpha_0^{L,T} \quad (1.66)$$

ϕ_T et ψ_T peuvent respectivement s'écrire

$$\phi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\left[\delta_{p0} + \frac{2}{k_p^L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \left[\frac{\alpha_p^L - ik_p^L}{k_L} \right]^n \right] \right] e^{i[k_p^L x + \alpha_p^L y]} \quad (1.67)$$

$$\psi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2}{k_p^T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \left[\frac{\alpha_p^T - ik_p^T}{k_T} \right]^n \right] e^{i[k_p^T x + \alpha_p^T y]} \quad (1.68)$$

Avec $\delta_{p0} = 1$ si $p = 0$ et $\delta_{p0} = 0$ si $p \neq 0$. D'après la théorie générale des réseaux [15], on sait que le champ transmis doit s'écrire

$$\phi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p^{LL} e^{i[k_p^L x + \alpha_p^L y]} \quad (1.69)$$

$$\psi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p^{LT} e^{i[k_p^T x + \alpha_p^T y]} \quad (1.70)$$

Où t_p^{LL} et t_p^{LT} sont respectivement les coefficients de transmission associée aux ondes planes

$$e^{i[k_p^L x + \alpha_p^L x]} \quad \text{et} \quad e^{i[k_p^T x + \alpha_p^T x]} \quad (1.71)$$

Lorsque le réseau est soumis à une onde incidente longitudinale. Finalement, l'identification de (1.67) et (1.68) avec respectivement (1.69) et (1.70) conduit directement à

$$t_p^{LL} = \left[\delta_{p0} + \frac{2}{k_p^L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \left[\frac{\alpha_p^L - ik_p^L}{k_L} \right]^n \right] \quad (1.72)$$

Et

$$t_p^{LT} = \frac{2}{k_p^T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \left[\frac{\alpha_p^T - ik_p^T}{k_T} \right]^n \quad (1.73)$$

Les coefficients de réflexion r_p^{LL} et r_p^{LT} s'obtiennent similairement, la différence étant que les champs réfléchis ϕ_R et ψ_R s'écrivent en fonction des séries \sum_n^L et \sum_n^T définies pour $x < 0$. Ces champs réfléchis ont alors pour expressions

Avec ;

$$\phi_R = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p^{LL} e^{i[-k_p^L x + \alpha_p^L y]} \quad (1.74)$$

$$r_p^{LL} = \frac{2}{k_p^L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \left[\frac{\alpha_p^L + ik_p^L}{k_L} \right]^n \quad (1.75)$$

Et

Avec ;

$$\psi_R = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p^{LT} e^{i[-k_p^T x + \alpha_p^T y]} \quad (1.76)$$

$$r_p^{LT} = \frac{2}{k_p^T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \left[\frac{\alpha_p^T + ik_p^T}{k_T} \right]^n \quad (1.77)$$

Ainsi, lorsqu'il est soumis à une onde incidente longitudinale, le réseau réfléchit et transmet une infinité d'ondes planes longitudinales et transversales dans une infinité de directions. Pour un mode p donné, le réseau est alors caractérisé par les quatre coefficients de réflexion et de transmission $r_p^{LL}, r_p^{LT}, t_p^{LL}, t_p^{LT}$ définis ci-dessus. Soumis à une onde incidente transversale, il est caractérisé par quatre autres coefficients notés $r_p^{TT}, r_p^{TL}, t_p^{TT}, t_p^{TL}$. L'écriture de ces huit coefficients peut alors être synthétisée de la façon suivante

$$t_p^{l_2} = \delta_{l_2} \delta_{p0} + \frac{2}{k_p^{l_2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{l_2} \left[\frac{\alpha_p^{l_2} - ik_p^{l_2}}{k_{l_2}} \right]^n \quad (1.78)$$

$$r_p^{l_2} = \frac{2}{k_p^{l_2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{l_2} \left[\frac{\alpha_p^{l_2} + ik_p^{l_2}}{k_{l_2}} \right]^n \quad (1.79)$$

Avec $\delta_{l_1 l_2} = 1$ si $l_1 = l_2$, $\delta_{l_1 l_2} = 0$ si $l_1 \neq l_2$. Dans le double exposant $l_1 l_2$, le premier terme l_1 se rapporte à la nature de l'onde incidente, et le deuxième terme l_2 à celle du mode p réfléchi ou transmis. Nous avons vu que les ondes planes réfléchies et transmises par le réseau peuvent être soit homogènes si $|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T}$, soit évanescentes si $|\alpha_p^{L,T}| > k_{L,T}$. Les domaines de fréquence pour lesquels un mode p est homogène ou évanescent sont alors délimités par des fréquences particulières, appelées fréquences de coupure.

1.1.3 Fréquences de coupure

Les composantes suivant x et y des vecteurs d'onde $\vec{K}_p^{L,T}$ des modes p longitudinaux et transversaux sont définies respectivement par

$$k_p^{L,T} = \left[k_{L,T}^2 - \alpha_p^{L,T^2} \right]^{1/2} \quad (1.80)$$

$$\alpha_p^{L,T} = k_{L,T} \sin \alpha_{L,T} + \frac{2\pi p}{d} \quad (1.81)$$

Il est clair que α_p^L et α_p^T sont réels (négatifs ou positifs selon la valeur de p) quelle que soit la fréquence. Par conséquent, la composante suivant y du vecteur d'onde d'un mode p quelconque, qu'il soit homogène ou évanescent, sera toujours une composante propagative. Lorsque les composantes suivant x , k_p^L et k_p^T , deviennent des imaginaires purs, les modes p correspondants sont évanescents dans la direction perpendiculaire au réseau et se propagent le long de celui-ci. La conséquence est que, suffisamment loin du réseau, on peut considérer que ce dernier ne transmet et ne réfléchit que des modes purement propagatifs. Le problème consiste alors à déterminer, à fréquence fixée, le nombre de modes purement propagatifs transmis et réfléchis par le réseau. Un mode p , avec p négatif ou positif, est homogène lorsque

$$|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T} \quad (1.82)$$

Ce qui se traduit en termes de fréquence f par

$$f_p^{L,T} \geq p \frac{c_{L,T}}{d(1 - \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p > 0 \quad (1.83)$$

Et

$$f_p^{L,T} \geq -p \frac{c_{L,T}}{d(1 + \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p < 0 \quad (1.84)$$

En supposant que : $0 \leq \alpha_{L,T} < \frac{\pi}{2}$. Les fréquences de coupure du réseau sont alors définies par

$$f_p^{L,T} = p \frac{c_{L,T}}{d(1 - \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p > 0 \quad (1.85)$$

Et

$$f_p^{L,T} = -p \frac{c_{L,T}}{d(1 + \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p < 0 \quad (1.86)$$

Ces fréquences étant les racines des équations $k_p^{L,T} = 0$. En notant $p_+ = -p_-$, avec $p_+ > 0$ ces fréquences vérifient

$$f_{p_-}^{L,T} \leq f_{p_+}^{L,T} \quad (1.87)$$

De sorte que, pour $f \leq f_{p_-}^{L,T}$, seuls les modes

$$p_- + 1, p_- + 2, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, p_+ - 2, p_+ - 1 \quad (1.88)$$

Sont homogènes. A une fréquence donnée, il apparaît donc que le nombre de modes homogènes est fini ; tous les autres modes, en nombre infini, sont évanescents. Le cas particulier intéressant est celui où seuls les modes fondamentaux, $p = 0$, sont homogènes. La situation se rencontre lorsque $f \leq f_{-1}^{L,T}$, avec

$$f_{-1}^{L,T} = \frac{c_{L,T}}{d(1 + \sin \alpha_{L,T})} \quad (1.89)$$

Ces modes fondamentaux ont la particularité d'être homogènes quelle que soit la fréquence. En effet, pour $p = 0$, les composantes des vecteurs d'onde définies par (1.80) et (1.81) deviennent

$$k_{L,T} \cos \alpha_{L,T} = k_0^{L,T} \quad (1.90)$$

$$k_{L,T} \sin \alpha_{L,T} = \alpha_0^{L,T} \quad (1.91)$$

En effet, quel que soit $p \neq 0$, les fréquences de coupure associées aux modes transversaux et longitudinaux vérifient

$$f_p^T < f_p^L \quad (1.92)$$

Ceci étant dû au fait que $c_L > c_T$. Par conséquent, à une fréquence donnée, il y a toujours inégalité entre le nombre de modes homogènes longitudinaux et le nombre de modes homogènes transversaux. Il s'ensuit également que, pour une fréquence inférieure à

$$f_{-1}^T = \frac{c_T}{d(1 + \sin \alpha_T)} \quad (1.93)$$

Il n'existe que deux modes purement propagatifs : les modes fondamentaux, l'un étant de type longitudinal et l'autre de type transversal. Cette fréquence particulière est la première fréquence de coupure du réseau. En-dessous de cette fréquence, et en considérant le cas d'une onde incidente longitudinale, par exemple, les champs transmis et réfléchis par le réseau sont réduits à

$$\phi_T = t_0^{LL} e^{ik_L(x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)} ; \quad \psi_T = t_0^{LT} e^{ik_T(x \cos \alpha_T + y \sin \alpha_T)} \quad (1.94)$$

Et

$$\phi_R = r_0^{LL} e^{ik_L(-x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)} ; \quad \psi_R = r_0^{LT} e^{ik_T(-x \cos \alpha_T + y \sin \alpha_T)} \quad (1.95)$$

Les coefficients de transmission et de réflexion ont alors simplement pour expressions

$$t_0^{LL} = 1 + \frac{2}{k_L d \cos \alpha_L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{LL} e^{in\alpha_L} \quad (1.96)$$

$$t_0^{LT} = \frac{2}{k_T d \cos \alpha_T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{LT} e^{in\alpha_T} \quad (1.97)$$

Et

$$r_0^{LL} = \frac{2}{k_L d \cos \alpha_L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n C_n^{LL} e^{-in\alpha_L} \quad (1.98)$$

$$r_0^{LT} = \frac{2}{k_T d \cos \alpha_T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n C_n^{LT} e^{-in\alpha_T} \quad (1.99)$$

La Figure 1.3 ci-dessous représente la seule situation où les vecteurs d'ondes de tous les modes homogènes en présence vérifient la loi de Snell-Descartes.

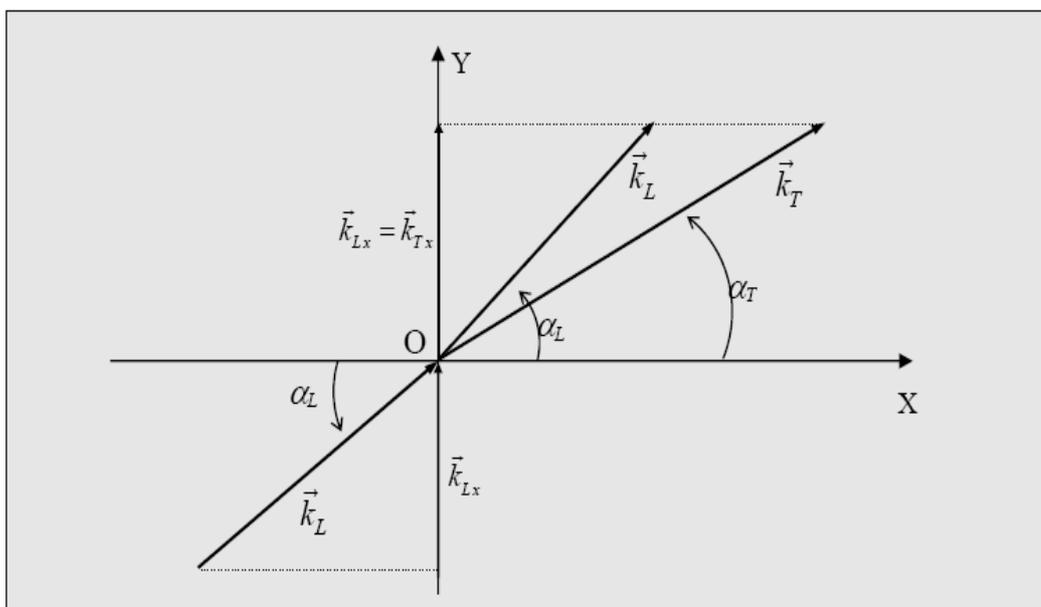


Figure 1.3 : Vecteurs d'onde des modes fondamentaux transmis par le réseau.

1.2 Cas de l'incidence normale

Remarques

- La première fréquence de coupure du réseau est inversement proportionnelle à d . Plus le réseau est dense et plus cette fréquence est haute.
- En incidence normale, $\alpha_L = \alpha_T = 0^\circ$ la première fréquence de coupure à une valeur maximale. Pour $0 \leq \alpha_{L,T} < \frac{\pi}{2}$, les fréquences de coupure sont en effet des fonctions décroissantes de l'angle d'incidence.
- En incidence normale, les coefficients de diffusion C_n^{LT} vérifient

$$C_0^{LT} = 0, \quad C_{-n}^{LT} = (-1)^{n+1} C_n^{LT} \quad (1.100)$$

Il s'ensuit que $t_0^{LT} = r_0^{LT} = 0$. Autrement dit, une onde incidente longitudinale ne peut générer de modes fondamentaux transversaux en incidence normale. De la même façon, les relations (1.100) étant valables pour les coefficients de diffusion C_n^{TL} , une onde incidente transversale ne peut générer de modes fondamentaux longitudinaux en incidence normale. En d'autres termes, si l'on considère le domaine fréquentiel $f < f_{-1}^T$, il n'y a jamais de conversions en incidence normale entre les ondes longitudinales et transversales lors de la réflexion et la transmission par le réseau.

- Toujours en incidence normale les coefficients de réflexion et de transmission deviennent :

$$t_0^{LL} = 1 + \frac{2}{k_L d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{LL} \quad (1.101)$$

$$t_0^{LT} = \frac{2}{k_T d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{LT} \quad (1.102)$$

$$r_0^{LL} = \frac{2}{k_L d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n C_n^{LL} \quad (1.103)$$

$$r_0^{LT} = \frac{2}{k_T d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n C_n^{LT} \quad (1.104)$$

Les coefficients C_n^{LL} et C_n^{LT} sont ici déterminés par un calcul exact de diffusion multiple prenant en compte toutes les interactions possibles entre les cavités. La méthode employée s'inspire de celle de Varadan qui, au moyen du formalisme de la matrice de transition T d'un diffuseur individuel, a étudié la diffusion multiple élastique par des cavités ou des inclusions élastiques aléatoirement [10] ou périodiquement [11] réparties dans une matrice élastique. Appliquer cette technique à un nombre infini de cavités en respectant la condition de périodicité conduit aux équations linéaires couplées suivantes :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - T_m^{LL} \sigma_{n-m}^L \right] C_n^{LL} - T_m^{TL} \sigma_{n-m}^T C_n^{LT} \right\} = T_m^{LL} A_m^L \quad (1.105)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - T_m^{LL} \sigma_{n-m}^T \right] C_n^{LT} - T_m^{LT} \sigma_{n-m}^L C_n^{LL} \right\} = T_m^{LT} A_m^L \quad (1.106)$$

Avec $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$, sinon 0. Les deux coefficients de diffusion C_n^{LL} et C_n^{LT} sont calculés en résolvant ce système infini incluant les coefficients de diffusion d'une seule cavité comme T_m^{LL} (élément de la matrice diagonale de transition T^{LL}), les séries de Schlömilch σ_{n-m}^L et σ_{n-m}^T définies par Twersky [12], et les amplitudes A_m^L des différentes harmoniques cylindriques composant l'onde plane incidente L . Notons qu'on obtient des expressions similaires lorsqu'une onde T est incidente sur le réseau.

1.3 Relations de conservation des flux d'énergie

Le but est d'écrire la conservation des flux d'énergie à travers le réseau. Les relations qui en découlent permettent de valider les calculs des coefficients de réflexion et de transmission. Pour écrire les flux d'énergie, il faut, comme l'indique la Figure 1.4, ci-dessous, considérer deux surfaces de part et d'autre du réseau à une distance x_0 de celui-ci. Le vecteur de Poynting (moyenné temporellement sur

une période $T = 2\pi/\omega$) \vec{P}_{inc} est le vecteur de Poynting entrant associé à l'onde incidente. Les vecteurs de Poynting sortants, \vec{P}_R et \vec{P}_T , sont les vecteurs de Poynting associés respectivement aux ondes réfléchies et transmises par le réseau. Les vecteurs \vec{n} et $-\vec{n}$ représentent les normales unitaires sortantes aux deux surfaces S_{-x_0} et S_{x_0} . La conservation des flux d'énergie impose alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{inc} \cdot \vec{n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_T \cdot \vec{n} - \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_R \cdot \vec{n} \cdot dy \quad (1.107)$$

Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{incx} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{Tx} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} P_{Rx} dy \quad (1.108)$$

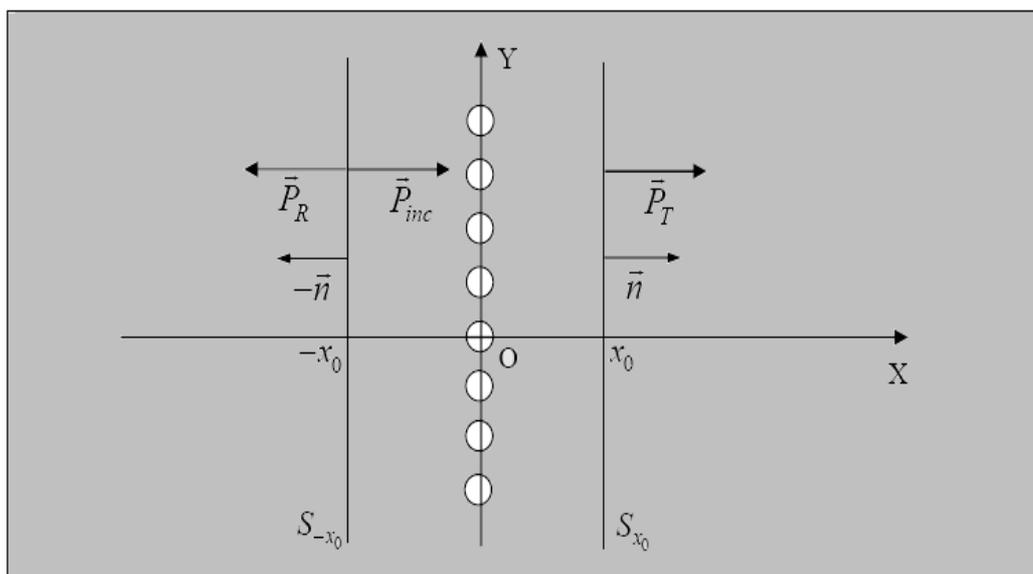


Figure 1.4 : Vecteurs de Poynting entrants et sortants au travers de $S = S_{-x_0} \cup S_{x_0}$

En coordonnées cartésiennes, la composante suivant x d'un vecteur de Poynting s'écrit de façon générale :

$$P_x = \frac{\omega}{2} \Im m(\sigma_{xx} u_{xx}^* + \sigma_{xy} u_{xy}^*) \quad (1.109)$$

Avec ;

$$u_{sx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.110)$$

$$u_{sy} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.111)$$

Et

$$\sigma_{xx} = -\lambda k_L^2 \phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.112)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.113)$$

A titre d'exemple, considérons de nouveau le cas d'une onde incidente longitudinale. Pour calculer le flux du vecteur \vec{P}_{inc} , il suffit alors de remplacer ϕ dans toutes les expressions ci-dessus par

$$\phi_{inc} = e^{ik_L(x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)} \quad (1.114)$$

Et de prendre $\psi = 0$. Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{incx} dy = \frac{\omega}{2} k_L^3 (\lambda + 2\mu) \cos \alpha_L \quad (1.115)$$

Pour le calcul du flux de \vec{P}_R , il s'agit de remplacer ϕ et ψ par ϕ_R et ψ_R étant respectivement définis par (1.74) et (1.76). Il vient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{Rx} dy = -\frac{\omega}{2} k_L^2 (\lambda + 2\mu) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^L |r_p^{LL}|^2 - \frac{\omega}{2} k_T^2 \mu \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^T |r_p^{LT}|^2 \quad (1.116)$$

En remplaçant ϕ et ψ par ϕ_T et ψ_T donnés respectivement par (1.69) et (1.70), le flux de \vec{P}_T s'écrit de façon similaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{T_x} dy = \frac{\omega}{2} k_L^2 (\lambda + 2\mu) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^L |t_p^{LL}|^2 + \frac{\omega}{2} k_T^2 \mu \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^T |t_p^{LT}|^2 \quad (1.117)$$

Finalement, en injectant (1.113), (1.114) et (1.115) dans (1.108), la relation de conservation des flux d'énergie se traduit par

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k_p^L}{k_0^L} |r_p^{LL}|^2 + \frac{k_p^T}{k_0^L} |r_p^{LT}|^2 + \frac{k_p^L}{k_0^L} |t_p^{LL}|^2 + \frac{k_p^T}{k_0^L} |t_p^{LT}|^2 \right) = 1 \quad (1.118)$$

Lorsque l'onde incidente est transversale, il suffit de remplacer dans (1.116) chacun des exposants L par T , et réciproquement. La relation de conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k_p^T}{k_0^T} |r_p^{TT}|^2 + \frac{k_p^L}{k_0^T} |r_p^{TL}|^2 + \frac{k_p^T}{k_0^T} |t_p^{TT}|^2 + \frac{k_p^L}{k_0^T} |t_p^{TL}|^2 \right) = 1 \quad (1.119)$$

Pour aboutir à ces deux dernières relations, on voit que le calcul effectué ne dépend pas de la valeur de $x = \pm x_0$. Par suite, les modes évanescents ne jouent qu'un rôle mineur dans la conservation de l'énergie puisque leur contribution devient très vite négligeable lorsque l'on se place suffisamment loin du réseau [13]. La conservation de l'énergie se traduit donc bien par les formules (1.116) et (1.117) dans lesquelles les sommations se font uniquement sur les modes homogènes. Aux basses fréquences, $f \leq f_{-1}^T$, seuls les modes fondamentaux sont homogènes. Il s'ensuit donc que

$$|r_0^{LL}|^2 + \frac{k_0^T}{k_0^L} |r_0^{LT}|^2 + |t_0^{LL}|^2 + \frac{k_0^T}{k_0^L} |t_0^{LT}|^2 = 1 \quad (1.120)$$

$$|r_0^{TT}|^2 + \frac{k_0^L}{k_0^T} |r_0^{TL}|^2 + |t_0^{TT}|^2 + \frac{k_0^L}{k_0^T} |t_0^{TL}|^2 = 1 \quad (1.121)$$

D'autre part, dans le cas d'une incidence normale au réseau, les coefficients relatifs aux conversions $L \leftrightarrow T$ sont nuls. Les relations de conservation de l'énergie sont donc réduites à

$$\left| r_0^{LL} \right|^2 + \left| t_0^{LL} \right|^2 = 1 \quad (1.122)$$

Et

$$\left| r_0^{TT} \right|^2 + \left| t_0^{TT} \right|^2 = 1 \quad (1.123)$$

CHAPITRE 2

THEORIE DE LA DIFFUSION MULTIPLE PAR UN RESEAU BIDIMENSIONNEL PERIODIQUE

2. Théorie de la diffusion multiple pour un réseau 2D périodique

2.1 Cas de l'incidence oblique

2.1.1 Réflexion et transmission par un réseau 2D composé de N réseaux linéaires infinis mis en parallèle

Pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau 2D formé de N réseaux linéaires infinis, la principale difficulté de la mise en équation réside dans l'écriture des multiples réflexions (avec prise en compte des conversions entre les ondes longitudinales et les ondes transversales à chaque réflexion) et les allers-retours entre deux réseaux linéaires consécutifs. Le calcul des coefficients de réflexion et de transmission du réseau 2D s'effectue en utilisant un algorithme itératif.

2.1.1.1 Réflexion et transmission par deux réseaux linéaires infinis

La Figure 2.1 décrit la géométrie du réseau 2D. Il est constitué de deux réseaux linéaires parallèles et espacés d'une distance D le long de l'axe Ox . Ces derniers ne sont pas nécessairement identiques ; ils sont donc numérotés 1 et 2, le réseau linéaire 1 étant celui soumis à l'onde plane incidente. Les paramètres géométriques d'un réseau linéaire n ($n = 1$ ou 2) sont notés a_n (rayon des inclusions) et d_n (pas du réseau). Les fréquences considérées sont inférieures à la plus petite des deux premières fréquences de coupure existantes, l'une

associée au réseau 1 et l'autre au réseau 2. Ces fréquences étant inversement proportionnelles à d_n , le domaine fréquentiel d'étude est donc défini par le moins dense des deux réseaux linéaires. L'unique différence réside dans les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission notés

$$r_n^{LL}, r_n^{LT}, r_n^{TL}, r_n^{TT}, t_n^{LL}, t_n^{LT}, t_n^{TL}, t_n^{TT},$$

Où l'indice 0 associé aux modes fondamentaux a été ici supprimé pour alléger les écritures.

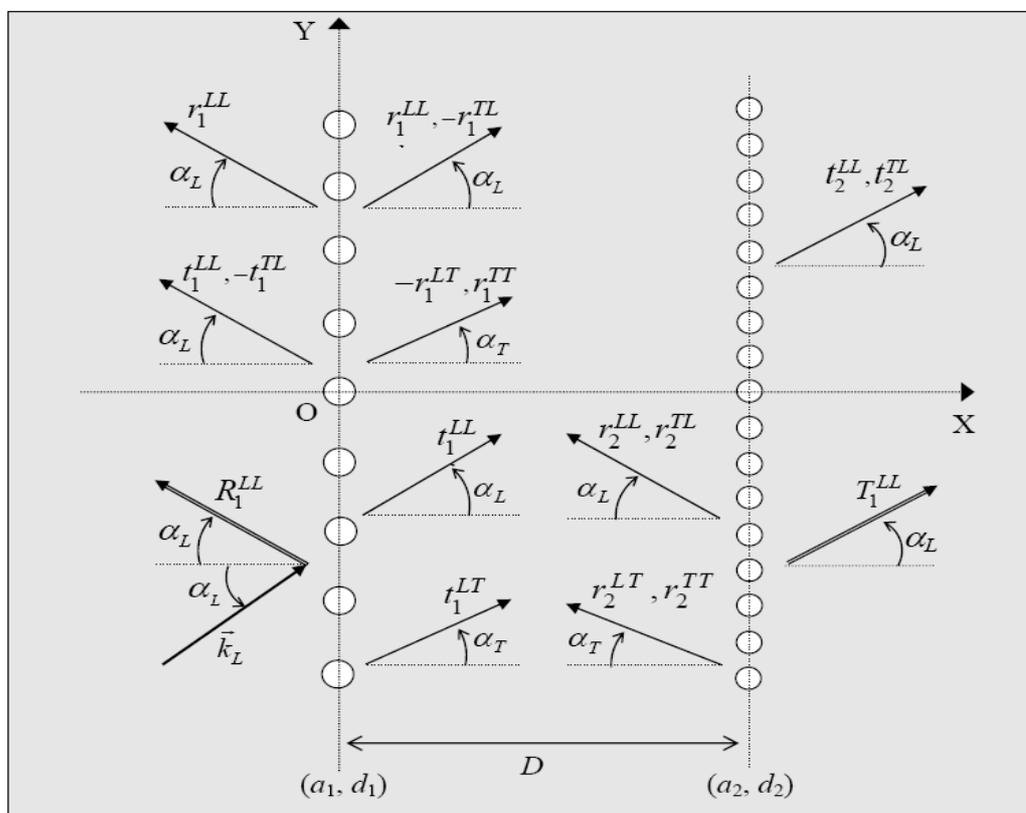


Figure 2.1 : Réseau 2D composé de deux réseaux linéaires infinis distants de D et soumis à une onde plane longitudinale. Toutes les notations prises en compte pour le calcul des coefficients de réflexion et de transmission R_1^{LL} et T_1^{LL} sont ici représentées.

La deuxième hypothèse concerne l'espacement D entre les deux réseaux linéaires. Aux basses fréquences, les modes diffractés par un réseau linéaire n , autres que ceux fondamentaux, sont des modes évanescents dont les amplitudes

décroissent exponentiellement lorsque l'on s'éloigne du réseau. La contribution des modes évanescents peut donc être négligée à condition que la distance D soit suffisamment grande pour minimiser leurs effets sur le réseau linéaire voisin. Pour $D = 4a_n$, avec a_n le rayon maximal, cette condition sera supposée satisfaite.

En supposant connus tous les coefficients de réflexion et de transmission $r_n^{l_1 l_2}$ et $t_n^{l_1 l_2}$ (les exposants l_1 et l_2 remplaçant ici les notations L et T pour plus de concision dans l'écriture), il s'agit maintenant de calculer les coefficients de réflexion et de transmission du réseau 2D, notés $R_1^{l_1 l_2}$ et $T_1^{l_1 l_2}$. A titre d'exemple, détaillons le calcul de R_1^{LL} et de T_1^{LL} ; la généralisation à tout type de conversion $L \leftrightarrow T$ s'effectuant par la suite sans difficulté. Tous les coefficients locaux nécessaires au calcul des coefficients globaux R_1^{LL} et de T_1^{LL} sont reportés sur la Figure 2.1. L'onde plane longitudinale est incidente sur le réseau linéaire 1 et l'on s'intéresse uniquement aux composantes longitudinales des champs réfléchis et transmis par le réseau 2D. Le champ total réfléchi est alors composé de l'onde plane longitudinale immédiatement réfléchi par le réseau 1 et d'une série d'ondes planes longitudinales transmises initialement par ce réseau, puis réfléchies plusieurs fois entre les réseaux 1 et 2 avant d'être à nouveau transmises par le réseau 1. Les réflexions multiples entre les réseaux 1 et 2 sont décrites par des séries de Debye [13] et, suite aux multiples conversions $L \leftrightarrow T$ lors de la transmission par le réseau 1, le coefficient de réflexion R_1^{LL} s'écrit en fin de compte en fonction de quatre séries distinctes, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
R_1^{LL} = & r_1^{LL} + t_1^{LL} \left(\tilde{r}_2^{LL} + \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LL} - \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TL} + \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TL} - \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TL} \tilde{r}_2^{LL} + \dots \right) r_1^{LL} \\
& - t_1^{LL} \left(\tilde{r}_2^{LT} + \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LT} - \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TT} + \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TT} - \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TL} \tilde{r}_2^{LT} + \dots \right) r_1^{TL} \\
& - t_1^{LT} \left(\tilde{r}_2^{TT} + \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TT} - \tilde{r}_2^{TT} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TL} + \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LT} - \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TT} + \dots \right) r_1^{TL} \\
& + t_1^{LT} \left(\tilde{r}_2^{TL} - \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TL} \tilde{r}_2^{LL} + \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TL} + \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LL} - \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TL} + \dots \right) r_1^{LL}
\end{aligned} \quad (2.1)$$

Tout au long de cette section, la notation \sim indiquera que les phases associées aux parcours des ondes entre deux réseaux consécutifs sont implicitement prises en compte. Ici, pour $\tilde{r}_2^{l_1 l_2}$, le changement de variable suivant a été effectué

$$\tilde{r}_2^{l_1 l_2} = r_2^{l_1 l_2} e^{i\Delta l_1} e^{i\Delta l_2} \quad (2.2)$$

Avec

$$\Delta l_1 = \frac{k_1 D}{\cos \alpha_{l_1}} \quad (2.3)$$

Les signes - dans l'expression (2.1) sont introduits chaque fois qu'une onde incidente se propageant en direction des x décroissants subit une conversion après réflexion ou transmission. Pour ce qui est du champ total transmis, il se compose d'une transmission directe à travers des réseaux 1 et 2, et des ondes longitudinales transmises au travers le réseau 2 après plusieurs réflexions entre les réseaux 1 et 2. Le coefficient de transmission T_1^{LL} est donc défini par :

$$T_1^{LL} = t_1^{LL} \left(1 + \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LL} - \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TL} + \dots \right) \tilde{t}_2^{LL} + t_1^{LL} \left(\tilde{r}_2^{LL} r_1^{LT} + \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TT} + \dots \right) \tilde{t}_2^{TL} \\ + t_1^{LT} \left(1 + \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TT} - \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LT} + \dots \right) \tilde{t}_2^{TL} + t_1^{LT} \left(\tilde{r}_2^{TT} r_1^{TL} + \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LL} + \dots \right) \tilde{t}_2^{LL} \quad (2.4)$$

En notant ;

$$\tilde{t}_2^{l_1 l_2} = t_2^{l_1 l_2} e^{i\Delta l_1} \quad (2.5)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être également exprimés en fonction de séries géométriques. Pour ce faire, et en vue d'introduire un formalisme plus compact basé sur des notations vectorielles et matricielles, définissons

$$r_{n+}^{l_1 l_2} = r_n^{l_1 l_2}, r_{n-}^{l_1 l_2} = (2\delta_{l_1 l_2} - 1) r_n^{l_1 l_2} \quad (2.6)$$

$$t_{n+}^{l_1 l_2} = t_n^{l_1 l_2}, t_{n-}^{l_1 l_2} = (2\delta_{l_1 l_2} - 1) t_n^{l_1 l_2} \quad (2.7)$$

Ici, les signes + et - se rapportent respectivement à des ondes se propageant vers les x positifs et vers les x négatifs. Le symbole de Kronecker $\delta_{l_1 l_2}$ vaut 0 quand il y a conversion $L \rightarrow T$ ou $T \rightarrow L$, et 1 sinon. Avec ces notations, introduisons alors

les vecteurs de transmission

$$\left| t_{1\pm}^{l_1 l_2, l_3 l_4} \right\rangle = \begin{bmatrix} t_{1\pm}^{l_1 l_2} \\ t_{1\pm}^{l_3 l_4} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\left| \tilde{t}_{2\pm}^{l_1 l_2, l_3 l_4} \right\rangle = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{2\pm}^{l_1 l_2} \\ \tilde{t}_{2\pm}^{l_3 l_4} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Où les exposants l_3 et l_4 se rapportent tous deux aux notations L et T . Les matrices de réflexion

$$R_{1\pm} = \begin{bmatrix} r_{1\pm}^{LL} & r_{1\pm}^{LT} \\ r_{1\pm}^{TL} & r_{1\pm}^{TT} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Et

$$\tilde{R}_{2\pm} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{2\pm}^{LL} & \tilde{r}_{2\pm}^{LT} \\ \tilde{r}_{2\pm}^{TL} & \tilde{r}_{2\pm}^{TT} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Sont également introduites dans le but d'exprimer les réflexions multiples entre les réseaux 1 et 2 au moyen d'une seule série géométrique matricielle 2×2 . Elle est notée G et est définie par :

$$G = I_d + \tilde{R}_{2+} R_{1-} + \tilde{R}_{2+} R_{1-} \tilde{R}_{2+} R_{1-} + \dots = \left[I_d - \tilde{R}_{2+} R_{1-} \right]^{-1} \quad (2.12)$$

La convergence de cette série est assurée dès lors que la norme euclidienne de la matrice $\tilde{R}_{2+} R_{1-}$ est inférieure à l'unité. Les quatre éléments de la matrice G correspondent aux quatre séries géométriques contenues (entre parenthèses) dans l'expression (2.4) du coefficient de transmission T_1^{LL} . Finalement, compte tenu des définitions (2.8), (2.9), il vient simplement :

$$T_1^{LL} = \left\langle t_{1+}^{LL,LT} \middle| G \middle| \tilde{t}_{2+}^{LL,TL} \right\rangle \quad (2.13)$$

Au vu de l'expression (2.1), l'écriture en termes de matrices et de vecteurs du coefficient de réflexion R_1^{LL} nécessite l'introduction d'une autre matrice 2×2 définie par :

$$g = G\tilde{R}_{2+} \quad (2.14)$$

Par suite, en utilisant les définitions (2.8), (2.9), il vient :

$$R_1^{LL} = r_{1+}^{LL} + \langle t_{1+}^{LL,LT} | g | \tilde{t}_{1-}^{LL,TL} \rangle \quad (2.15)$$

Les expressions (2.13) et (2.15) sont facilement généralisables à tout type de conversion $l_1 = l_2$ car les matrices G et g sont indépendantes de la nature de l'onde incidente et de celle des ondes réfléchies ou transmises par le réseau 2D. Elles s'écrivent en effet :

$$T_1^{l_1 l_2} = \langle t_{1+}^{l_1 L, l_1 T} | G | \tilde{t}_{2+}^{L l_2, T l_2} \rangle \quad (2.16)$$

Et

$$R_1^{l_1 l_2} = r_{1+}^{l_1 l_2} + \langle t_{1+}^{l_1 L, l_1 T} | g | \tilde{t}_{1-}^{L l_2, T l_2} \rangle \quad (2.17)$$

En l'absence de conversions entre les ondes longitudinales et les ondes transversales (ce qui est le cas en incidence normale), ces relations ressemblent fort à celles obtenues dans le cas d'un réseau 2D en milieu fluide [13]. Pour généraliser le problème à un réseau 2D périodique de $N > 2$ réseaux linéaires, ces deux relations peuvent être utilisées telles quelles. Cette généralisation est l'objet du paragraphe suivant.

2.1.1.2 Généralisation à $N > 2$ réseaux linéaires infinis

Les réseaux 2D considérés dans ce paragraphe sont décrits sur la Figure 2.2. Ils sont composés d'un nombre arbitraire N de réseaux linéaires infinis positionnés de façon périodique ou apériodique le long de l'axe Ox . En outre, comme dans le paragraphe précédent, les réseaux linéaires ne sont pas nécessairement identiques. Le but de ce paragraphe est de montrer comment les relations (2.16), (2.17) peuvent être utilisées pour élaborer une méthode itérative de calcul des coefficients de réflexion et de transmission. Les réseaux linéaires sont numérotés de 1 à N , le réseau 1 étant celui soumis à l'onde plane incidente. Chaque réseau n (avec $n = 1, 2, \dots, N$) est caractérisé par ses coefficients de réflexion et de transmission r_n^{l/l_2} et t_n^{l/l_2} .

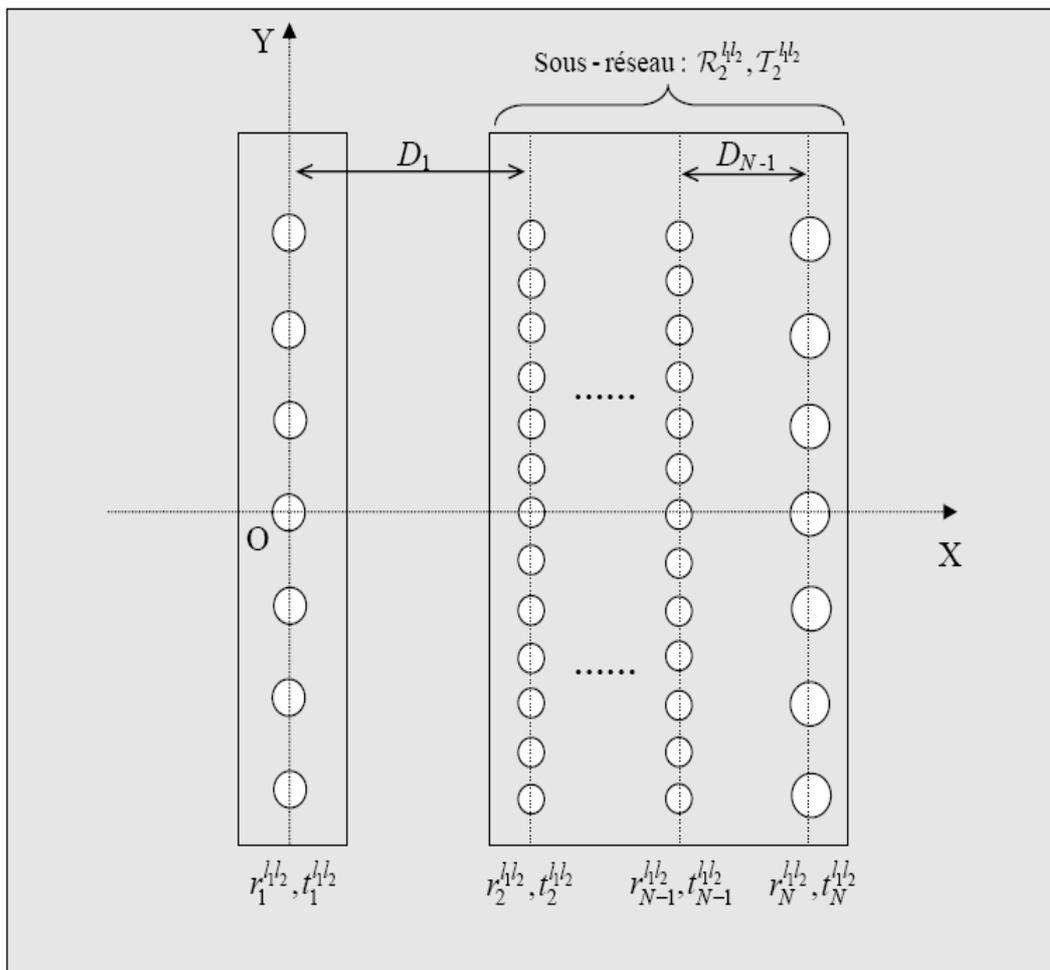


Figure 2.2 : Première décomposition de la méthode itérative de calcul des coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau 2D composé de $N > 2$ réseaux linéaires infinis.

L'espacement entre deux réseaux consécutifs n et $n+1$ est noté D_n . le terme de phase défini par (2.3) s'écrit maintenant

$$\Delta_{l_1}^n = \frac{k_{l_1} D_n}{\cos \alpha_{l_1}} \quad (2.18)$$

Ceci étant posé, explicitons maintenant la méthode de calcul des coefficients de réflexion et de transmission du réseau 2D, ces coefficients étant toujours notés $R_1^{l_1 l_2}$ et $T_1^{l_1 l_2}$. L'idée consiste à décomposer le réseau 2D comme le décrit la Figure 2.2 : le réseau linéaire 1 est considéré isolément des $N-1$ autres réseaux linéaires, ceux-ci forment alors un « sous-réseau 2D » numéroté 2 et caractérisé par les coefficients inconnus $R_2^{l_1 l_2}$ et $T_2^{l_1 l_2}$. Suite à cette composition, les coefficients du réseau 2D global peuvent s'exprimer en fonction de ceux du sous-réseau 2 en remplaçant $r_2^{l_1 l_2}$ et $r_2^{l_1 l_2}$ dans les relations (2.16), (2.17) par $R_2^{l_1 l_2}$ et $T_2^{l_1 l_2}$. Il vient alors :

$$T_1^{l_1 l_2} = \langle t_{1+}^{l_1 L, l_1 T} | G_1 | \tilde{T}_{2+}^{L l_2, T l_2} \rangle \quad (2.19)$$

Et

$$R_1^{l_1 l_2} = r_{1+}^{l_1 l_2} + \langle t_{1+}^{l_1 L, l_1 T} | g_1 | \tilde{t}_{1-}^{L l_2, T l_2} \rangle \quad (2.20)$$

Avec

$$G_1 = [I_d - \tilde{R}_{2+} r_{1-}]^{-1} \quad \text{et} \quad g_1 = G_1 \tilde{R}_{2+} \quad (2.21)$$

Les relations (2.19), (2.20), dans lesquelles les coefficients du sous-réseau 2 sont inconnus, constituent le point de départ de l'algorithme itératif suivant : le sous-réseau 2 est décomposé à son tour comme précédemment, c'est-à-dire en isolant

le réseau linéaire 2 du sous-réseau 3 composé des N-2 autres réseaux linéaires. Les deux relations (2.19), (2.20), s'écrivent alors :

$$T_2^{l_1 l_2} = \left\langle t_{2+}^{l_1 L, l_1 T} | G_2 | \tilde{T}_{3+}^{L_2, T_2} \right\rangle \quad (2.22)$$

Et

$$R_2^{l_1 l_2} = r_{2+}^{l_1 l_2} + \left\langle t_{2+}^{l_1 L, l_1 T} | g_2 | \tilde{t}_{2-}^{L_2, T_2} \right\rangle \quad (2.23)$$

Avec

$$G_2 = [I_d - \tilde{R}_{3+} r_{2-}]^{-1} \quad \text{et} \quad g_2 = G_2 \tilde{R}_{3+} \quad (2.24)$$

Ici encore, les coefficients du sous-réseau 3 ne sont pas connus. Le processus itératif doit alors être répété jusqu'à ce que le dernier sous-réseau construit ne contienne plus qu'un seul réseau linéaire, le réseau numéroté N, [13] dont les coefficients de réflexion et de transmission sont supposés être connus. La dernière décomposition conduit donc à :

$$T_{N-1}^{l_1 l_2} = \left\langle t_{(N-1)+}^{l_1 L, l_1 T} | G_{N-1} | \tilde{T}_{N+}^{L_2, T_2} \right\rangle \quad (2.25)$$

Et

$$R_{N-1}^{l_1 l_2} = r_{(N-1)+}^{l_1 l_2} + \left\langle t_{(N-1)+}^{l_1 L, l_1 T} | g_{N-1} | \tilde{t}_{(N-1)-}^{L_2, T_2} \right\rangle \quad (2.26)$$

Avec

$$G_{N-1} = [I_d - \tilde{R}_{N+} r_{(N-1)-}]^{-1} \quad \text{et} \quad g_{N-1} = G_{N-1} \tilde{R}_{N+} \quad (2.27)$$

Où les relations de fermeture de la récurrence sont :

$$\tilde{R}_{N+} = \tilde{r}_{N+} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_{N+} = \tilde{t}_{N+} \quad (2.28)$$

Pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission R_1^{l/l_2} et T_1^{l/l_2} La première étape de calcul consiste donc à déterminer les coefficients R_{N-1}^{l/l_2} et T_{N-1}^{l/l_2} à partir des relations (2.25), (2.26), Puis il s'agit de « descendre » la récurrence jusqu'à la toute première décomposition. Le principal intérêt de la méthode est qu'elle met en jeu des temps de calcul très courts, même pour un nombre N de réseaux linéaires très important ($N > 1000$). En outre, la méthode de calcul est applicable à des structures très variées sans modifier quoi que ce soit dans le formalisme. En ne jouant uniquement que sur les valeurs des espacements D_n et des caractéristiques de chaque réseau linéaire, la méthode permet d'envisager l'étude de réseaux 2D avec tout type d'apériodicité (variation des rayons des inclusions ou des pas des réseaux linéaires, distribution aléatoire des réseaux linéaires, etc.).

2.1.2 Equation caractéristique pour un réseau 2D infini périodique

Le réseau 2D de la Figure 2.2 est maintenant supposé être constitué d'un nombre infini de réseaux linéaires infinis. Ces derniers sont tous identiques et répartis régulièrement avec une période D le long de l'axe Ox. La propagation d'ondes dans un tel réseau peut être caractérisée par le théorème de Bloch [13]. Le théorème lie les champs des déplacements ou des contraintes définis en deux points du réseau 2D distants d'une période D . Plus précisément, il conduit aux quatre relations suivantes :

$$u_{xx}(x + D, y) = e^{i\gamma D} u_{xx}(x, y) \quad , \quad u_{xy}(x + D, y) = e^{i\gamma D} u_{xy}(x, y) \quad (2.29, a, b)$$

$$\sigma_{xx}(x + D, y) = e^{i\gamma D} \sigma_{xx}(x, y) \quad , \quad \sigma_{xy}(x + D, y) = e^{i\gamma D} \sigma_{xy}(x, y) \quad (2.30, a, b)$$

La grandeur complexe γ désigne le nombre d'onde effectif, ou nombre d'onde de Bloch, caractérisant la propagation des ondes, dans la direction Ox, dans un milieu élastique homogène équivalent au réseau 2D périodique. Ce nombre

d'onde effectif est complexe et peut s'écrire :

$$\gamma = \gamma' + i\gamma'' \quad (2.31)$$

Où la partie réelle $\gamma' = \omega/c'$, est la composante suivant x du vecteur d'onde des ondes se propageant avec la vitesse c' dans le milieu effectif, et la partie imaginaire γ'' est leur atténuation. Le but de cette section est de présenter la méthode de calcul de γ . Pour ce faire, considérons un réseau linéaire n pris au hasard. La Figure 2.3 décrit toutes les ondes en présence de part et d'autre de ce réseau, entre les réseaux $n-1$ et $n+1$.

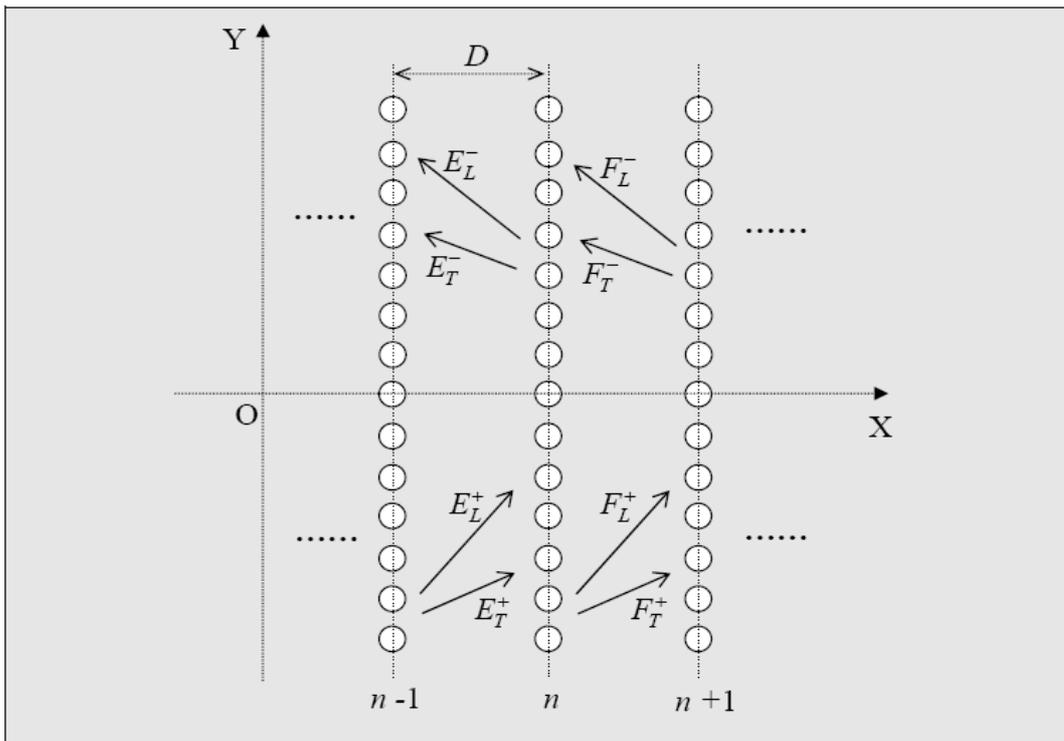


Figure 2.3 : Réseau 2D infini et périodique : amplitudes des ondes de part et d'autre d'un réseau linéaire n , entre les réseaux $n-1$ et $n+1$.

Entre les réseaux $n-1$ et n , les potentiels ϕ et ψ peuvent s'écrire :

$$\phi(x, y) = E_L^+ e^{ik_L x \cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L} + E_L^- e^{-ik_L x \cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L} \quad (2.32)$$

$$\psi(x, y) = E_T^+ e^{ik_T x \cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T} + E_T^- e^{-ik_T x \cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T} \quad (2.33)$$

Où les exposants + et - se rapportent respectivement à des ondes se propageant vers les x positifs et vers les x négatifs. Entre les réseaux n et $n+1$, à une distance D , les potentiels peuvent s'écrire similairement

$$\phi(x + D, y) = F_L^+ e^{ik_L(x+D)\cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L} + F_L^- e^{-ik_L(x+D)\cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L} \quad (2.34)$$

$$\psi(x + D, y) = F_T^+ e^{ik_T(x+D)\cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T} + F_T^- e^{-ik_T(x+D)\cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T} \quad (2.35)$$

Pour alléger les écritures, les notations suivantes peuvent être introduites

$$\left(\tilde{E}_{L,T}^\pm, \tilde{F}_{L,T}^\pm \right) = \left(E_{L,T}^\pm, F_{L,T}^\pm \right) e^{\pm ik_{L,T} x \cos \alpha_{L,T}} \quad (2.36)$$

Où $\left(\tilde{E}_{L,T}^\pm, \tilde{F}_{L,T}^\pm \right)$ sont des fonctions complexes inconnues de la variable x . pour calculer γ il faut établir un système inhomogène de huit équations linéaires dont les inconnues sont les fonctions précédentes. Ce système fournira l'équation caractéristique à résoudre pour l'obtention de γ . Parmi ces huit équations, quatre sont issues du théorème de Bloch. Les relations (2.29, a,b) fournissent en effet les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} k_L \cos \alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^+ - k_L \cos \alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^- - k_L \cos \alpha_L e^{i\chi_L D} \tilde{F}_L^+ + k_L \cos \alpha_L e^{-i\chi_L D} \tilde{F}_L^- \\ - k_T \sin \alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^+ - k_T \sin \alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^- + k_T \sin \alpha_T e^{i\chi_T D} \tilde{F}_T^+ + k_T \sin \alpha_T e^{-i\chi_T D} \tilde{F}_T^- = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Et,

$$\begin{aligned} k_L \sin \alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^+ + k_L \sin \alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^- - k_L \sin \alpha_L e^{i\chi_L D} \tilde{F}_L^+ - k_L \sin \alpha_L e^{-i\chi_L D} \tilde{F}_L^- \\ + k_T \cos \alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^+ - k_T \cos \alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^- - k_T \cos \alpha_T e^{i\chi_T D} \tilde{F}_T^+ + k_T \cos \alpha_T e^{-i\chi_T D} \tilde{F}_T^- = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Avec ;

$$\chi_{L,T} = k_{L,T} D \cos \alpha_{L,T} \quad (2.39)$$

Les relations (2.30,a,b) donnent quant à elles ;

$$\begin{aligned} & \cos 2\alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^+ + \cos 2\alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^- - \cos 2\alpha_L e^{i\chi_L D} \tilde{F}_L^+ - \cos 2\alpha_L e^{-i\chi_L D} \tilde{F}_L^- \\ & - \sin 2\alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^+ + \sin 2\alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^- + \sin 2\alpha_T e^{i\chi_T D} \tilde{F}_T^+ - \sin 2\alpha_T e^{-i\chi_T D} \tilde{F}_T^- = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Et

$$\begin{aligned} & k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^+ - k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{i\gamma D} \tilde{E}_L^- - k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{i\chi_L D} \tilde{F}_L^+ + k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{-i\chi_L D} \tilde{F}_L^- \\ & + k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^+ + k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{i\gamma D} \tilde{E}_T^- - k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{i\chi_T D} \tilde{F}_T^+ - k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{-i\chi_T D} \tilde{F}_T^- = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Il reste quatre équations manquantes. Ces relations, par rapport à celles établies jusqu'ici, sont des relations de couplage entre les ondes longitudinales et celles transversales provenant des propriétés de réflexion et de transmission des réseaux linéaires. Ces derniers étant tous identiques ici, leurs coefficients peuvent être notés $r^{l'l_2}$ et $t^{l'l_2}$. Au vu de la Figure 2.3, les potentiels d'amplitudes \tilde{E}_L^- et \tilde{E}_T^- : représentent tous deux les sommes des potentiels réfléchis d'amplitudes \tilde{E}_L^+ et \tilde{E}_T^+ des potentiels transmis d'amplitudes \tilde{F}_L^- et \tilde{F}_T^- ceci se traduit par les relations :

$$\tilde{E}_L^- = r^{LL} \tilde{E}_L^+ + r^{TL} \tilde{E}_T^+ + t^{LL} \tilde{F}_L^- - t^{TL} \tilde{F}_T^-; \quad (2.42)$$

$$\tilde{E}_T^- = r^{LT} \tilde{E}_L^+ + r^{TT} \tilde{E}_T^+ - t^{LT} \tilde{F}_L^- - t^{TT} \tilde{F}_T^-; \quad (2.43)$$

De façon similaire, les amplitudes \tilde{F}_L^+ et \tilde{F}_T^+ sont données par :

$$\tilde{F}_L^+ = r^{LL} \tilde{F}_L^- - r^{TL} \tilde{F}_T^- + t^{LL} \tilde{E}_L^+ + t^{TL} \tilde{E}_T^+; \quad (2.44)$$

$$\tilde{F}_T^+ = -r^{LT} \tilde{F}_L^- + r^{TT} \tilde{F}_T^- + t^{LT} \tilde{E}_L^+ + t^{TT} \tilde{E}_T^+; \quad (2.45)$$

$$\begin{vmatrix} -e^{i\gamma D} e^{-i\chi_L} + t^{LL} & t^{TL} & r^{LL} & -r^{TL} \\ r^{LL} & r^{TL} & -e^{-i\gamma D} e^{-i\chi_L} + t^{LL} & -t^{TL} \\ t^{LT} & -e^{i\gamma D} e^{-i\chi_T} + t^{TT} & -r^{LT} & r^{TT} \\ r^{LT} & r^{TT} & -t^{LT} & -e^{-i\gamma D} e^{-i\chi_T} + t^{TT} \end{vmatrix} = 0 ; \quad (2.46)$$

Les signes - devant certains coefficients ont été introduits pour la même raison que celle mentionnée dans la précédente section. Les valeurs de γ sont obtenues en cherchant les racines du déterminant 8×8 associé au système inhomogène formé des huit équations établies ci-dessus. Après quelques simplifications, l'équation caractéristique peut être ramenée à : (2.46), voir ci-dessus.

2.2 Cas de l'incidence normale

2.2.1 Réflexion et transmission d'un réseau 2D périodique et fini

La Figure.2.4 présente la géométrie du réseau étudié. Il est composé d'un nombre arbitraire S de réseaux périodiques 1D et infinis, régulièrement espacés d'une distance D le long de l'axe x . Le réseau global est donc fini et d'épaisseur $e = (S - 1)D$ selon cet axe. Nous considérons d'autre part que tous les réseaux 1D sont identiques, d est la période selon l'axe y , $2a$ le diamètre des cavités cylindriques [16].

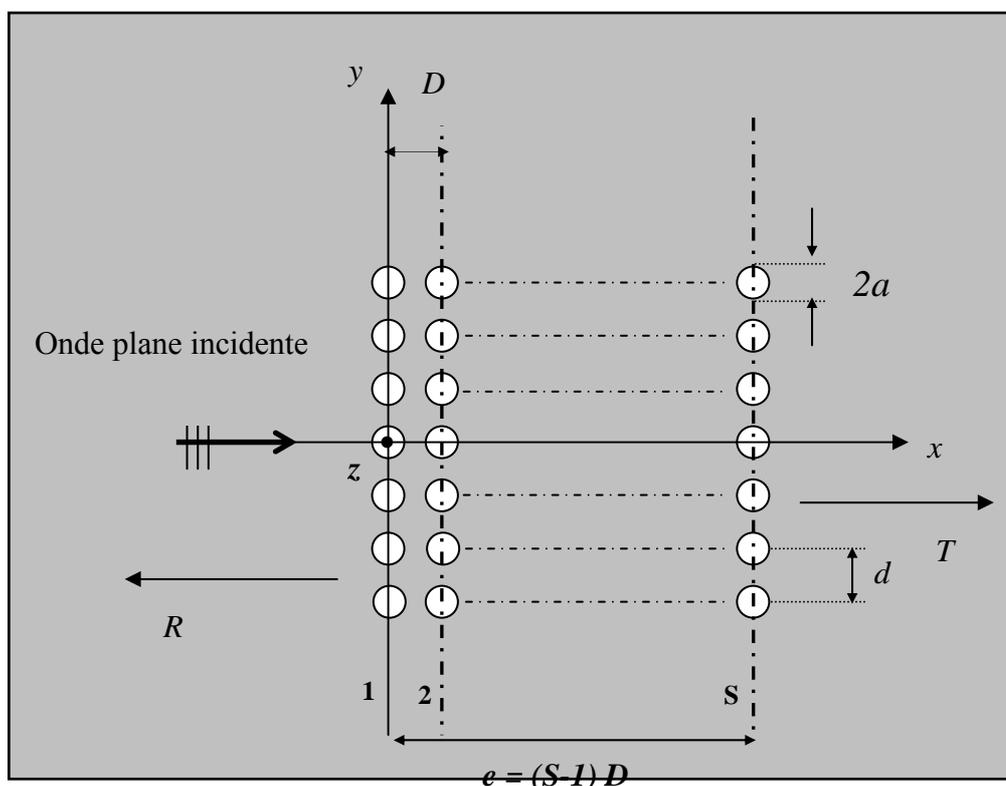


Figure 2.4 : Géométrie du réseau de cavités cylindriques.

Le réseau 2D est insonné par une onde plane longitudinale en incidence normale. Le but est alors d'exprimer les coefficients de réflexion et de transmission du réseau, notés R et T , dans le domaine des basses fréquences : $f \leq f_1^L$. Dans ces conditions on rappelle qu'il n'y a pas de conversion de mode $L \rightarrow T$ lors de la transmission et de la réflexion par les réseaux 1D périodiques et que ces derniers

transmettent des modes planes purement propagatives dans la même direction que l'onde incidente. Le réseau 2D périodique peut alors être considéré comme une structure « multicouche » dans laquelle seule une onde plane longitudinale se propage perpendiculairement avec différentes interfaces.

Désormais, on suppose connus les coefficients de réflexion et de transmission des réseaux 1D périodiques qui sont définis par (2.50) et (2.53). Dans la suite, pour alléger les notations, nous les noterons r et t .

Le but maintenant est de calculer les deux coefficients R et T .

Explicitons la méthode pour le calcul de R . L'idée consiste à décomposer le réseau 2D comme le montre la Figure 2.5 ci dessous de la façon suivante : le réseau plan 1 est isolé des autres, ceux-ci forment alors un « sous-réseau », numéroté 1, de $S-1$ réseaux plans. Le réseau étant insonné par une onde plane longitudinale. Le champ L réfléchi est alors la superposition d'une onde L réfléchie par le réseau 1, et une série d'ondes L transmises par le réseau 1 et réfléchies plusieurs fois entre le réseau 1 et le sous-réseau 1. Les multiples réflexions entre les deux réseaux sont décrites par des séries de Debye. Le coefficient de réflexion R peut alors s'écrire :

Où $k = k_L$ est le nombre d'ondes dans le milieu élastique. Et

- R_1 : est le coefficient de réflexion du Sous-réseau 1.
- r_1 : le coefficient de réflexion du réseau plan 1 ;
- t_1 : est le coefficient de transmission du réseau plan 1 ;
- T_1 : le coefficient de transmission du sous-réseau 1.

$$R = r_1 + (t_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})t_1 + (t_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})(r_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})t_1 + (t_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})(r_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})(r_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})t_1 + \dots$$

$$= r_1 + t_1 e^{i2kd} R_1 t_1 \left\{ 1 + r_1 R_1 e^{i2kd} + (r_1 R_1)^2 e^{i4kd} + (r_1 R_1)^4 e^{i6kd} + \dots \right\} \quad (2.47)$$

La série géométrique ci dessus est convergente. Elle peut donc s'écrire :

$$1 + (r_1 R_1) e^{i2kd} + (r_1 R_1)^2 e^{i4kd} + (r_1 R_1)^4 e^{i6kd} + \dots = \frac{1}{1 - (r_1 R_1) e^{i2kd}} \quad (2.48)$$

Finalement, le coefficient de réflexion R du réseau 2D global s'écrit :

$$R = r_1 + t_1 e^{i2kd} R_1 t_1 \frac{1}{1 - (r_1 R_1) e^{i2kd}} \quad (2.49)$$

Soit :

$$R = r_1 + \frac{t_1 R_1 t_1 e^{i2kd}}{1 - r_1 R_1 e^{i2kd}} \quad (2.50)$$

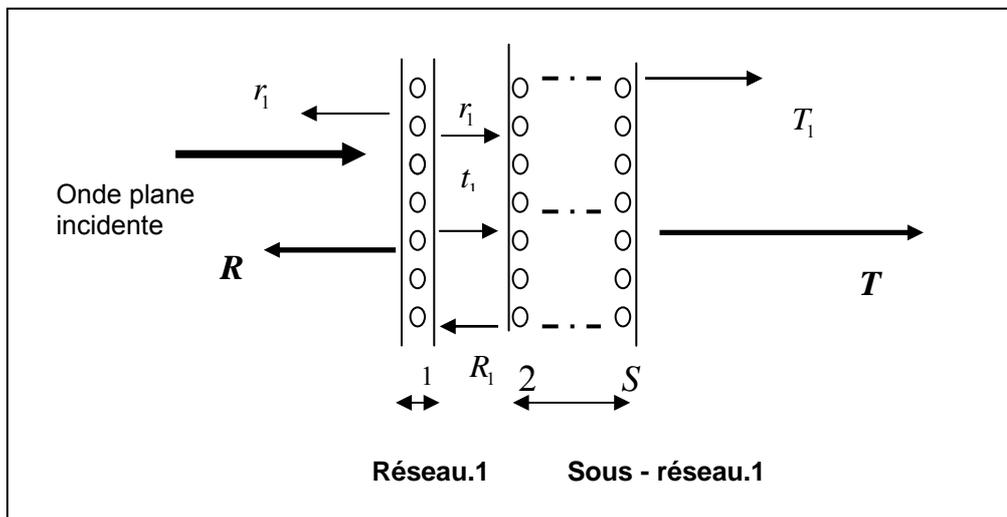


Figure 2.5 : La première décomposition pour déterminer le coefficient de réflexion global.

On cherche maintenant le coefficient de transmission global T : (voir Figure 2.6)
De la même façon que précédemment on peut calculer T comme suit :

$$\begin{aligned}
T &= T_1 (t_1 e^{ikD}) + (t_1 e^{ikD})(r_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})T_1 + \\
&(t_1 e^{ikD})(r_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})(r_1 e^{ikD})(R_1 e^{ikD})T_1 + \dots \\
&= T_1 t_1 e^{ikD} \left\{ 1 + (r_1 R_1) e^{2ikD} + (r_1 R_1)^2 e^{4ikD} + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

La série géométrique elle est convergente. Elle peut donc s'écrire :

$$\left\{ 1 + (r_1 R_1) e^{2ikD} + (r_1 R_1)^2 e^{4ikD} + \dots \right\} = \frac{1}{1 - r_1 R_1 e^{2ikD}} \tag{2.52}$$

Finalement, le coefficient de transmission peut s'écrire sous la forme :

$$T = \frac{T_1 t_1 e^{ikD}}{1 - r_1 R_1 e^{2ikD}} \tag{2.53}$$

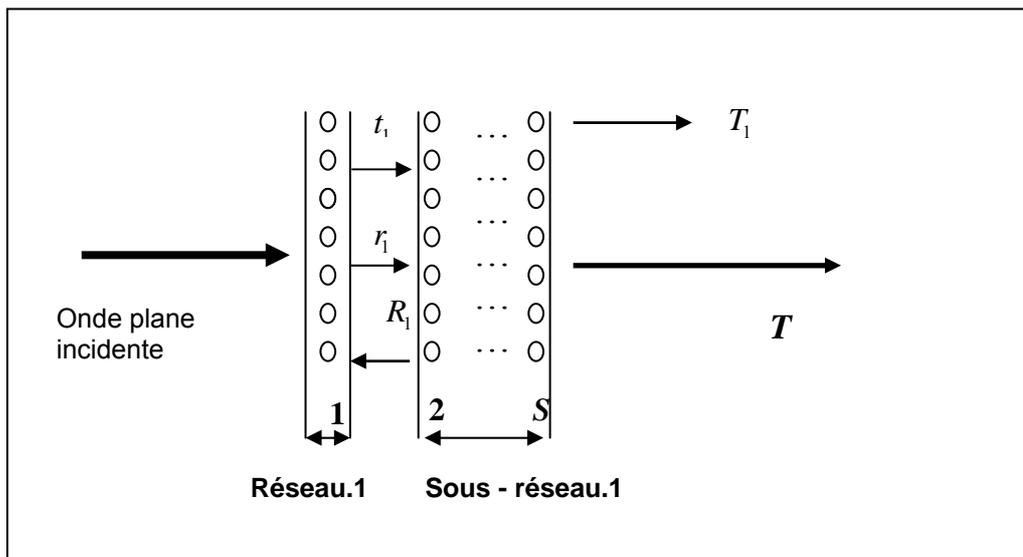


Figure 2.6 : La première décomposition pour déterminer le coefficient de transmission global.

Dans les expressions (2.50) et (2.53), les coefficients de réflexion/transmission R_1 et T_1 sont inconnus. Il faut donc répéter cette décomposition pour le sous-réseau 1. A son tour, ce dernier peut-être décomposé comme suit : le réseau plan 2 est isolé des S-2 autres réseaux plans qui forment alors un sous-réseau 2 [16]. On note alors R_2 et T_2 les coefficients de réflexion/transmission de ce dernier. Cette deuxième décomposition fournit alors :

$$R_1 = r_2 + \frac{t_2 R_2 t_2 e^{2ikD}}{1 - r_2 R_2 e^{2ikD}} \quad (2.54)$$

$$T_1 = \frac{T_2 t_2 e^{ikD}}{1 - r_2 R_2 e^{2ikD}} \quad (2.55)$$

De même, les coefficients de réflexion/transmission R_2 et T_2 sont inconnus. Il faut donc décomposer à son tour le sous-réseau 2 comme les précédents. Cette méthode est donc une récurrence. A la décomposition S, les deux relations ci-dessus deviennent

$$R_{S-1} = r_S + \frac{t_S R_S t_S e^{2ikD}}{1 - r_S R_S e^{2ikD}} \quad (2.56)$$

$$T_{S-1} = \frac{T_S t_S e^{ikD}}{1 - r_S R_S e^{2ikD}} \quad (2.57)$$

Dans cette dernière décomposition, le dernier sous-réseau S ne contient plus qu'un seul réseau plan dont les coefficients r_S et t_S sont supposés connus :

$$R_S = r_S = r, \quad T_S = t_S = t \quad (2.58)$$

Par conséquent, les deux relations (2.58) sont des relations qui « ferment » la récurrence. Pour calculer R et T, on démarre de ces deux dernières relations, puis on « descend » la récurrence jusqu'aux relations (2.50) et (2.53). Cette méthode de calcul est, numériquement, très rapide lorsque l'on connaît une fois pour toutes

les coefficients de réflexion/transmission de tous les réseaux plans. D'autre part, la méthode peut être généralisée aisément au cas d'une incidence oblique (en prenant en compte les conversions de modes entre les ondes longitudinales et transversales) et au cas où tous les réseaux plans sont différents les uns des autres [16].

2.2.2 Equation caractéristique

Si le réseau 2D comporte un nombre suffisamment grand de réseaux linéaires, il peut être considéré comme étant infini de sorte que la propagation d'ondes puisse être décrite par le théorème de **Bloch**. Ce théorème applicable aux champs de potentiels, de déplacements ou de contraintes, lie les champs définis en deux points du réseau séparés d'une distance D . Appliqué aux champs de potentiels et de déplacements, le théorème de **Bloch** s'écrit :

$$u_i(x + D, y) = e^{i\gamma D} u_i(x, y) \quad (2.59)$$

$$\phi(x + D, y) = e^{i\gamma D} \phi(x, y) \quad (2.60)$$

$$\sigma_{ij}(x + D, y) = e^{i\gamma D} \sigma_{ij}(x, y) \quad (2.61)$$

Où les indices i et j désignent les composantes suivant x ou y .

Le grandeur complexe γ est le nombre d'onde de **Bloch** défini par :

$$\gamma = \gamma' + i\gamma'' \quad (2.62)$$

La partie réelle γ' est la composante selon x du vecteur d'onde d'une onde se propageant dans le réseau périodique, et la partie imaginaire γ'' est son atténuation. Soit un réseau plan S pris au hasard. (Voir Figure 2.5).

- Entre les réseaux $S-1$ et S , le potentiel scalaire peut s'écrire ;

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ &= \tilde{A} + \tilde{B}\end{aligned}\quad (2.63)$$

- Entre les réseaux S et $S+1$, à une distance D . On a ;

$$\begin{aligned}\phi(x+D, y) &= e^{ikD}Ce^{ikx} + e^{-ikD}De^{-ikx} \\ &= e^{ikD}\tilde{C} + e^{-ikD}\tilde{D}\end{aligned}\quad (2.64)$$

La projection selon x et y de la relation de **Bloch** sur les déplacements conduisent à ;

$$e^{i\gamma D}\tilde{A} - e^{i\gamma D}\tilde{B} - e^{i\xi}\tilde{C} + e^{-i\xi}\tilde{D} = 0 \quad (2.65)$$

Avec $\xi^D = kD$, La relation de **Bloch** sur les contraintes σ_{xx}, σ_{xy} fournit directement ;

$$e^{i\gamma D}\tilde{A} + e^{i\gamma D}\tilde{B} - e^{i\xi}\tilde{C} - e^{-i\xi}\tilde{D} = 0 \quad (2.66)$$

Remarque

On a deux équations pour déterminer quatre inconnues, à savoir : $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$: Le système est jusqu'ici sous déterminé. Les deux équations manquantes sont obtenues de la façon suivante : si on se reporte à la Figure 2.7, on peut observer que le champ **B** résulte de la réflexion du champ **A** et de la transmission du champ **D** :

$$\tilde{B} = r\tilde{A} + t\tilde{D} \quad (2.67)$$

De façon similaire on trouve que ;

$$\tilde{C} = r\tilde{D} + t\tilde{A} \quad (2.68)$$

On a maintenant quatre équations pour quatre inconnues, le problème est donc bien posé. On a finalement le système d'équation suivant ;

$$\begin{aligned} e^{i\gamma D}[\tilde{A} + \tilde{B}] &= \tilde{C}e^{ikD} + \tilde{D}e^{-ikD} \dots \quad (I) \\ e^{i\gamma D}[\tilde{A} - \tilde{B}] &= \tilde{C}e^{ikD} - \tilde{D}e^{-ikD} \dots \quad (II) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= r\tilde{A} + t\tilde{D} \\ \tilde{C} &= r\tilde{D} + t\tilde{A} \end{aligned}$$

Qu'on peut encore écrire sous la forme matricielle ;

$$\begin{pmatrix} e^{i\gamma D} & e^{i\gamma D} & -e^{ikD} & -e^{-ikD} \\ e^{i\gamma D} & -e^{i\gamma D} & -e^{ikD} & e^{-ikD} \\ r & -1 & 0 & t \\ t & 0 & -1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Le déterminant associé au système est donc ;

$$D = \begin{vmatrix} e^{i\gamma D} & e^{i\gamma D} & -e^{ikD} & -e^{-ikD} \\ e^{i\gamma D} & -e^{i\gamma D} & -e^{ikD} & e^{-ikD} \\ r & -1 & 0 & t \\ t & 0 & -1 & r \end{vmatrix} = 0 \quad (2.71)$$

Le système d'équations (2.69) a une solution non nulle à condition que le déterminant associé au système soit nul, on obtient l'équation caractéristique qui donne γ .

On peut développer les calculs plus loin. Si on élimine \tilde{B}, \tilde{C} dans (I) et (II), il vient :

$$[te^{ikD} - (1+r)e^{i\gamma D}]\tilde{A} + [re^{ikD} + e^{-ikD} - te^{i\gamma D}]\tilde{D} = 0 \quad (2.72)$$

$$[te^{ikD} - (1-r)e^{i\gamma D}]\tilde{A} + [re^{ikD} - e^{-ikD} + te^{i\gamma D}]\tilde{D} = 0 \quad (2.73)$$

Le déterminant associé à ce nouveau système est donc ;

$$\begin{vmatrix} te^{ikD} - (1+r)e^{i\gamma D} & re^{ikD} + e^{-ikD} - te^{i\gamma D} \\ te^{ikD} - (1-r)e^{i\gamma D} & re^{ikD} - e^{-ikD} + te^{i\gamma D} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.74)$$

Et par simplification, on a :

$$\begin{vmatrix} -re^{i\gamma D} & e^{-ikD} - te^{i\gamma D} \\ te^{ikD} - e^{i\gamma D} & re^{ikD} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.75)$$

L'équation caractéristique $D=0$ peut se ramener à :

$$ch(\gamma D) = \frac{1}{2t} \left\{ \left((t)^2 - (r)^2 + 1 \right) \cos \xi^D + i \left((t)^2 - (r)^2 - 1 \right) \sin \xi^D \right\} \quad (2.76)$$

En raison de l'absence de conversions de modes, cette équation est identique à celle établie par **Heckl** dans le cas d'un réseau de tubes immergés dans l'eau.

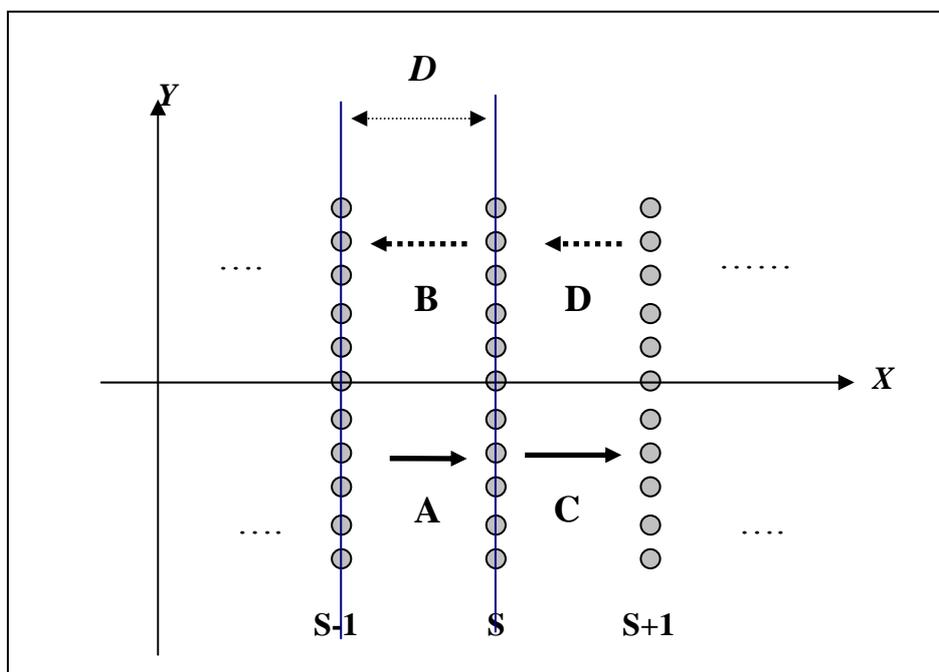


Figure 2.7 : Réseau 2D composé d'un nombre infini de réseaux identiques et périodiquement espacés ; les amplitudes des ondes dans les deux cotés sont présentée

CHAPITRE 3

LA SIMULATION DES DEUX TYPES DE RESEAUX MONODIMENSIONNEL ET BIDIMENSIONNEL PERIODIQUES

3 La simulation des deux types de réseaux monodimensionnel et bidimensionnel

3.1 Les résultats numériques obtenus dans le cas du réseau monodimensionnel 1D périodique

3.1.1 Les résultats du premier réseau 1D

3.1.1.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un seul réseau linéaire monodimensionnel 1D et fini. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg / m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$). Les cavités peuvent être remplies d'air assimilable au vide. Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

La géométrie du premier réseau monodimensionnel 1D : avec un seul réseau linéaire périodique.

Voici les dimensions du réseau monodimensionnel périodique:

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 5 \text{ mm}$

- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 0$
- L'épaisseur du réseau 1D : $e = 0$
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 0.620\text{MHz}$

Remarque : désormais les deux séries représentent :

- Série 1 : représente le coefficient de réflexion global.
- Série 2 : représente le coefficient de transmission global.

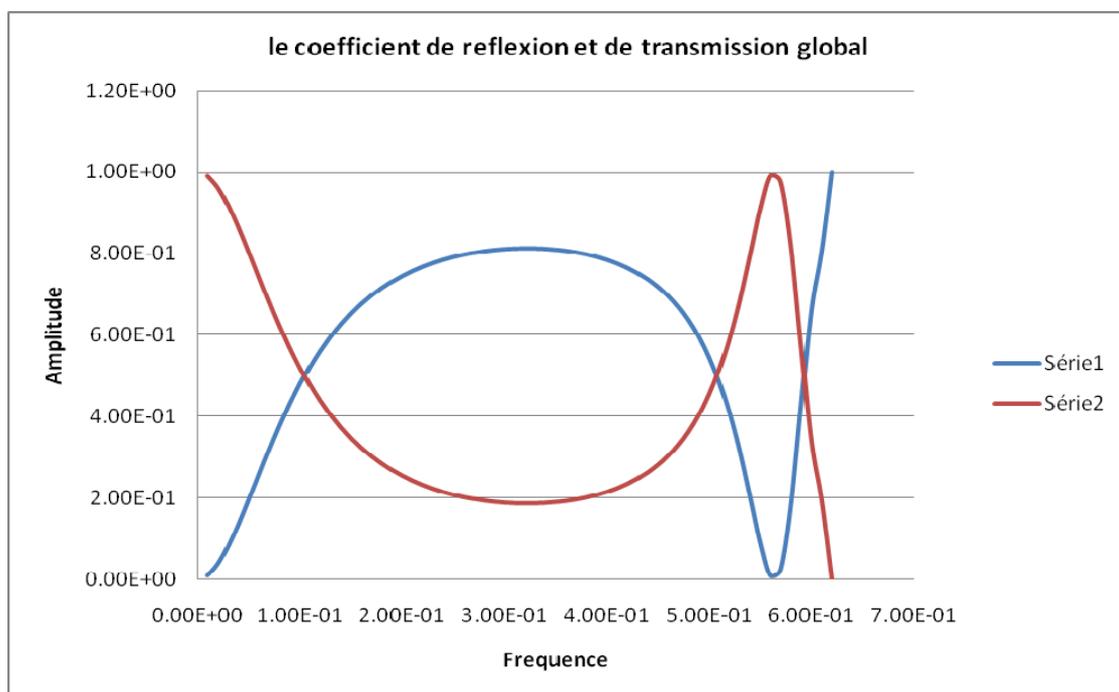


Figure 3.1 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620\text{MHz}$.

D'après la figure 3.1 ci-dessus et dans les basses fréquences c'est-à-dire. Au dessous de la première fréquence $f_c = 0.620\text{MHz}$ on voit bien l'absence des bandes interdites ce qui signifie qu'il n'y a pas d'autres réseaux qui réfléchissent beaucoup plus qu'ils ne transmettent et que les cavités sont un peu plus espacées, d est supérieure au rayon des cavités.

3.1.1.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides (eau)

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un réseau composé de $S = 1$ réseau 1D. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$) la masse volumique du fluide (eau) 1000 kg/m^3 : Les cavités peuvent être remplies d'eau. Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

Avec les mêmes dimensions du réseau monodimensionnel précédent pour le cas fluide (eau) on a effectuée les résultats suivants:

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 5 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 0$
- L'épaisseur du réseau 1D : $e = 0$
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 0.620 \text{ MHz}$

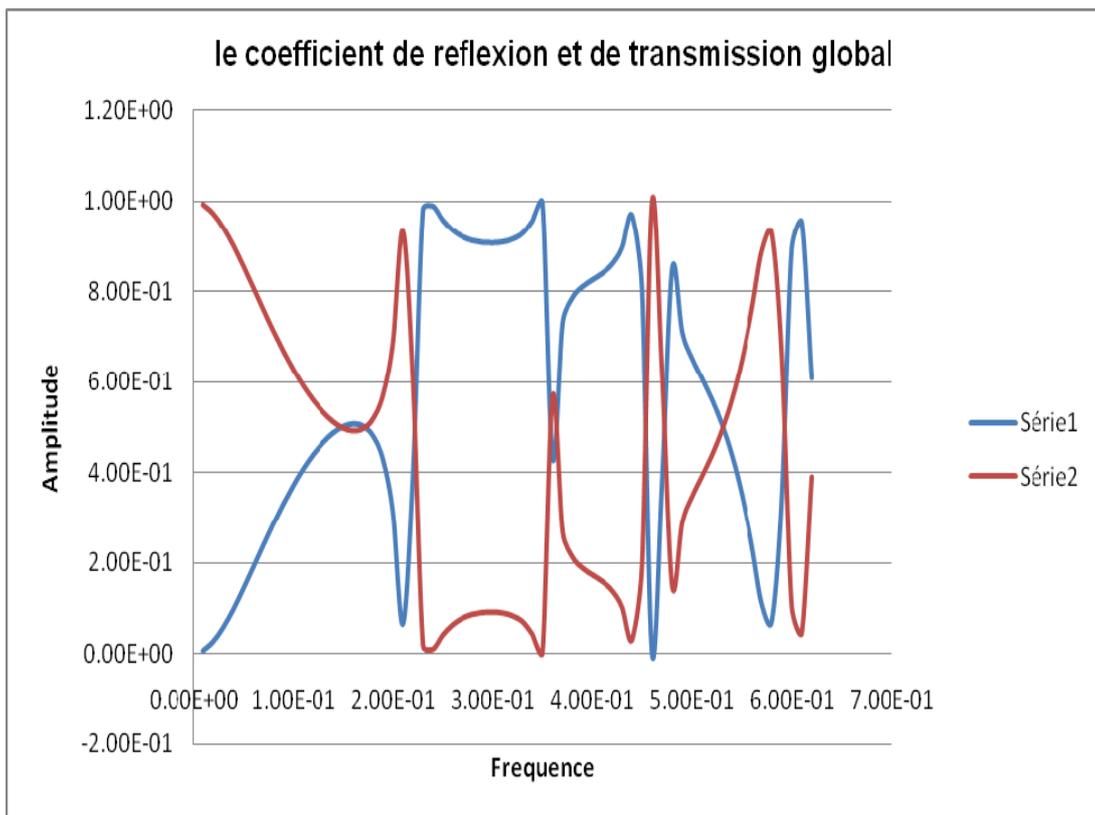


Figure 3.2 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités remplies d'eau en incidence normale avec $d/a=2.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$

Dans le cas fluide de type eau, on voit bien l'absence des bandes interdites, même explication pour le cas vide, mais on voit bien la naissance de nouvelles résonances par rapport au cas vide.

3.1.2 Les résultats du deuxième réseau 1D

3.1.2.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un seul réseau linéaire monodimensionnel 1D et fini. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$). Les cavités peuvent être remplies d'air assimilable au vide. Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

La géométrie du deuxième réseau monodimensionnel 1D : avec un seul réseau linéaire périodique.

Voici les dimensions du réseau monodimensionnel périodique:

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 2 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 0$
- L'épaisseur du réseau 1D : $e = 0$
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 1.57 \text{ MHz}$.

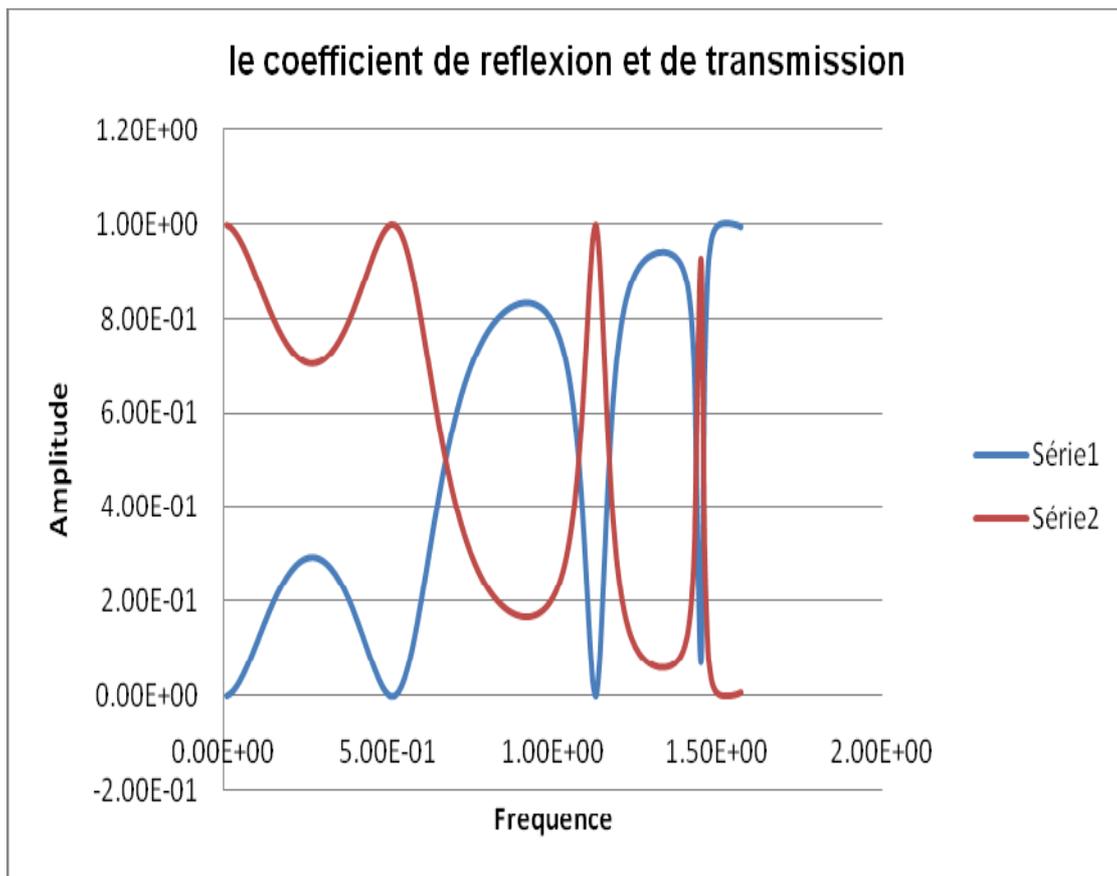


Figure 3.3 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=1$, la fréquence de coupure $f_c = 1.57MHz$.

D'après la figure 3.3 ci-dessus et dans les basses fréquences c.à.d. au dessous de la première fréquence $f_c = 1.57MHz$ on voit bien toujours l'absence des bandes interdites ce qui signifie qu'il n'y a pas d'autres réseaux qui réfléchissent beaucoup plus qu'ils ne transmettent et aussi les cavités sont un peu plus espacées, $d=a$, les résonances sont un peu plus nombreuses.

3.1.2.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides (eau)

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un réseau composé de $N = 1$ réseau 1D. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$), et la masse volumique du fluide (eau): 1000 kg/m^3 . Les cavités peuvent être remplies d'eau. Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

Avec les mêmes dimensions du réseau monodimensionnel précédent pour le cas fluide (eau) :

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 2 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 0$
- L'épaisseur du réseau 1D : $e = 0$
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 1.57 \text{ MHz}$

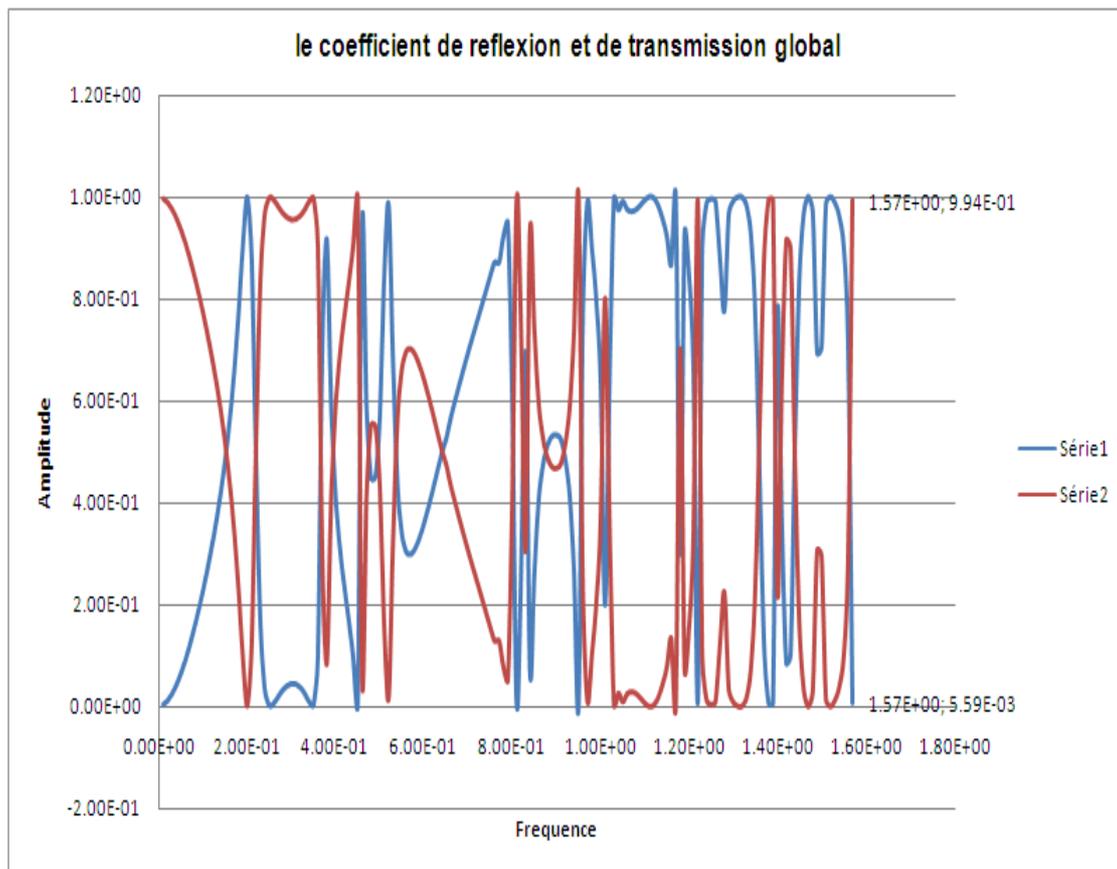


Figure 3.4 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités remplies d'eau en incidence normale avec $d/a=1$, la fréquence de coupure $f_c = 1.57\text{MHz}$

Dans le cas fluide de type eau, on voit l'absence des bandes interdites, mais on voit bien que les résonances sont plus nombreuses par rapport au cas vide.

3.1.3 Les résultats du troisième réseau 1D

3.1.3.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un seul réseau linéaire monodimensionnel 1D et fini. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$). Les cavités peuvent être remplies d'air assimilable au vide. Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

La géométrie du deuxième réseau monodimensionnel 1D : avec un seul réseau linéaire périodique.

Voici les dimensions du réseau monodimensionnel périodique:

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 1 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 0$
- L'épaisseur du réseau 1D : $e = 0$
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 3.14 \text{ MHz}$

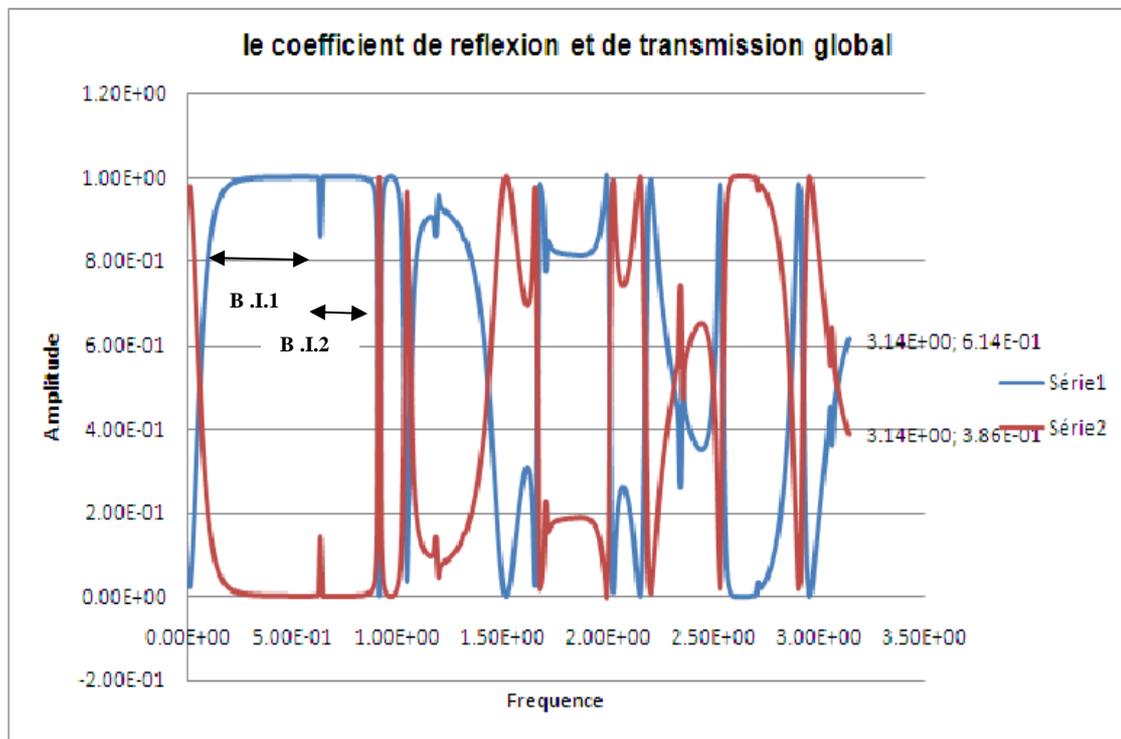


Figure 3.5 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=0.5$, la fréquence de coupure $f_c = 3.14\text{MHz}$

D'après la figure 3.5 ci-dessus et toujours dans les basses fréquences c'est à dire. Au dessous de la première fréquence $f_c = 3.14\text{MHz}$ on voit bien la présence d'une bande interdite large et une autre bande interdite étroite ce qui signifie que les cavités sont plus proches d'elles, $d < a$, et les autres bandes sont des bandes passantes.

3.1.3.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides (eau)

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un réseau composé de $S=1$ réseau 1D. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$). Et la masse volumique du fluide (eau): 1000 kg/m^3 . Les cavités peuvent être remplies d'eau. Le réseau est insonné par une onde plane de type **L** (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

Avec les mêmes dimensions du réseau monodimensionnel précédent pour le cas fluide (eau) :

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 1 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 0$
- L'épaisseur du réseau 1D : $e = 0$
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 3.14 \text{ MHz}$

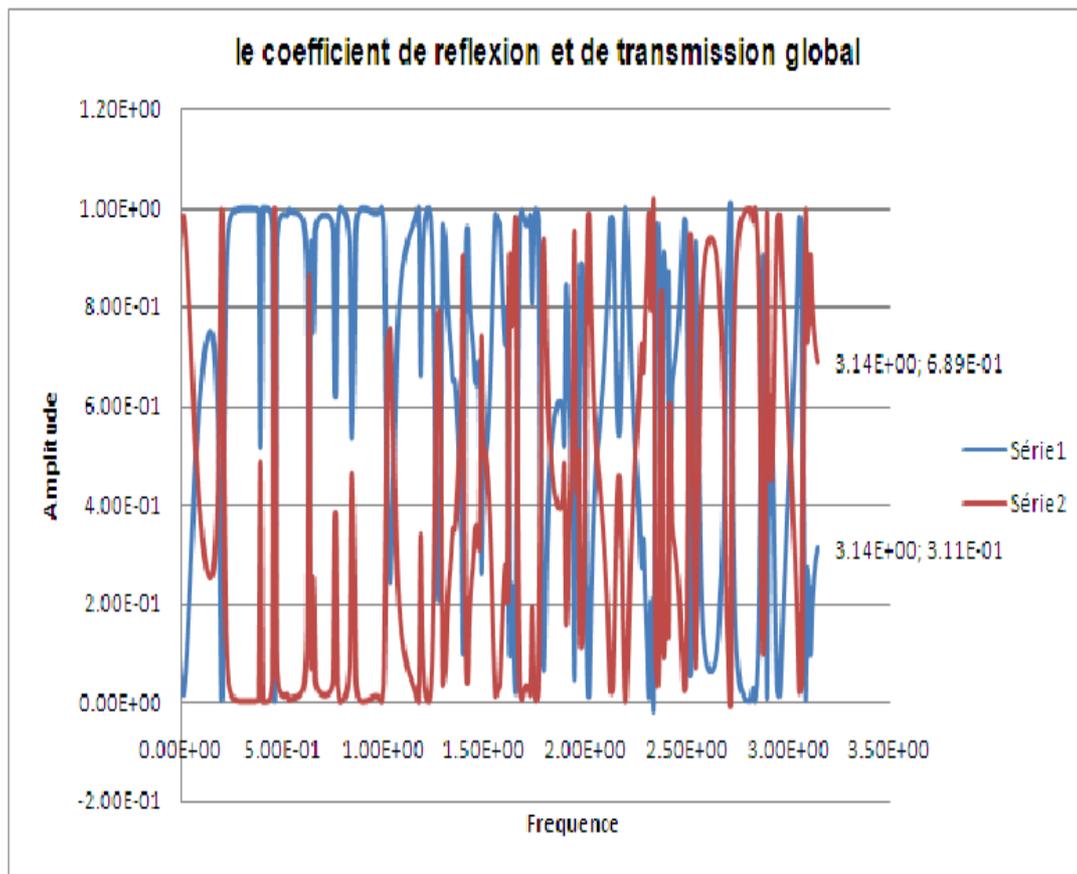


Figure 3.6 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités remplies d'eau en incidence normale avec $d/a=0.5$, la fréquence de coupure $f_c = 3.14\text{MHz}$

Dans le cas de l'eau, on voit bien que les deux bandes interdites B.I.1 et B.I.2 remarquées dans la figure 3.5 précédente que leurs largeurs sont affectées par les résonances qui sont nombreuses dans le cas fluide par rapport au cas vide.

3.2 Les résultats numériques obtenus dans le cas du réseau bidimensionnel 2D périodique

3.2.1 Les résultats du premier réseau 2D

3.2.1.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides (air)

Dans le cas de l'incidence normale, les ondes L et T se propagent indépendamment dans le réseau.

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un réseau composé d'un nombre de réseaux 1D et finis. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$). Et la masse volumique du fluide (eau): 1000 kg/m^3 . Les cavités peuvent être remplies d'air assimilable au vide ou peuvent être remplies d'eau (eau). Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

La géométrie du premier réseau 2D : avec $S = 7$ réseaux 1D et finis.

Voici les dimensions de ce réseau bidimensionnel périodique :

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 6 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 7 \text{ mm}$
- L'épaisseur du réseau 2D : $e = (S - 1)D = 42 \text{ mm}$
- La fréquence de coupure est donnée par $f_c = 0.520 \text{ MHz}$

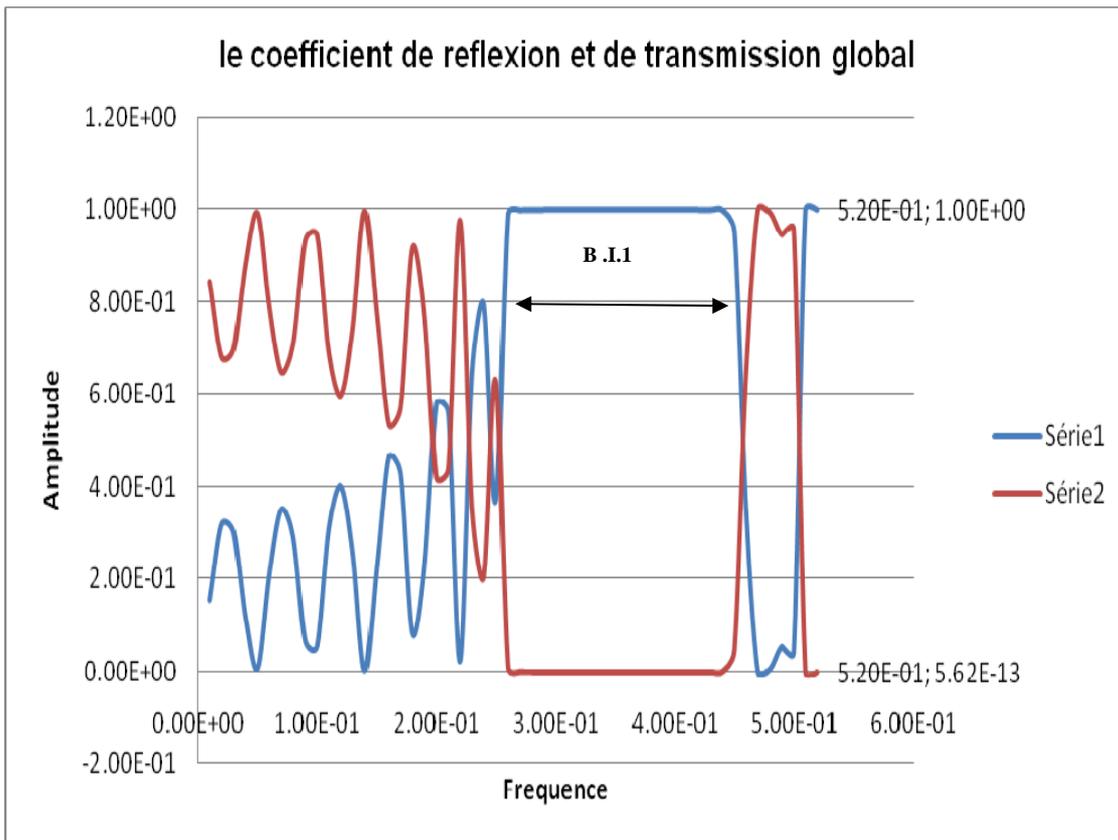


Figure 3.7 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=3$, $D/a= 3.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.520MHz$

D'après la figure 3.7 ci-dessus et toujours dans les basses fréquences c'est à dire au dessous de la première fréquence $f_c = 0.520MHz$, on voit bien la présence d'une seule bande interdite large et les autres bandes sont des bandes passantes ce qui signifie que la naissance des bandes interdites est due à la dimension ou la géométrie du réseau choisie.

3.2.1.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides (eau)

Avec les mêmes dimensions du réseau bidimensionnel précédent mais cette fois pour le cas fluide:

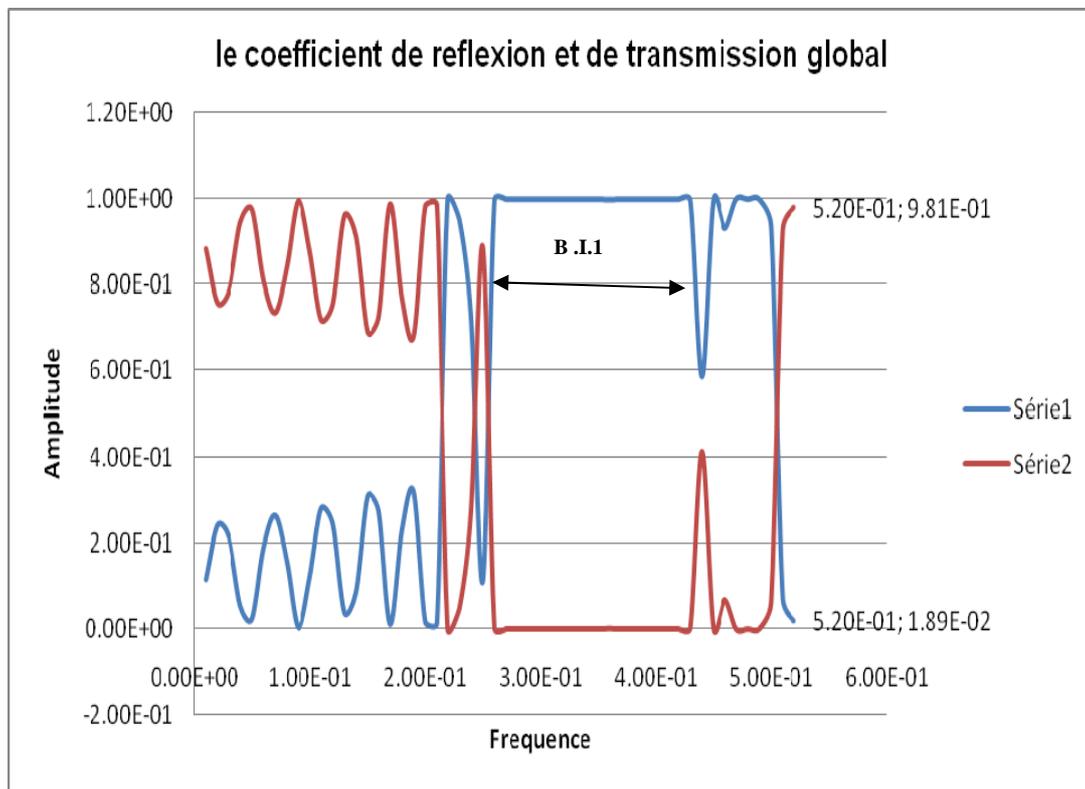


Figure 3.8 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités fluides en incidence normale avec $d/a=3$, $D/a= 3.5$, la fréquence de coupure $f_c = 0.520MHz$.

Pareil avec le cas fluide, mais on voit bien que la largeur est un peu affectée par les résonances dues au cas fluide.

3.2.2 Les résultats du deuxième réseau 2D

3.2.2.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides (air)

Dans le cas de l'incidence normale, les ondes L et T se propagent indépendamment dans le réseau.

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un réseau composé d'un nombre de réseaux 1D et finis. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$). Et la masse volumique du fluide (eau): 1000 kg/m^3 . Les cavités peuvent être remplies d'air assimilable au vide ou peuvent être remplies d'eau (eau). Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

La géométrie deuxième réseau 2D : avec $S = 8$ réseaux 1D et finis.

Voici les dimensions de ce réseau bidimensionnel périodique :

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 4 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 30 \text{ mm}$
- L'épaisseur du réseau 2D : $e = (S - 1)D = 210 \text{ mm}$
- La fréquence de coupure est donnée par

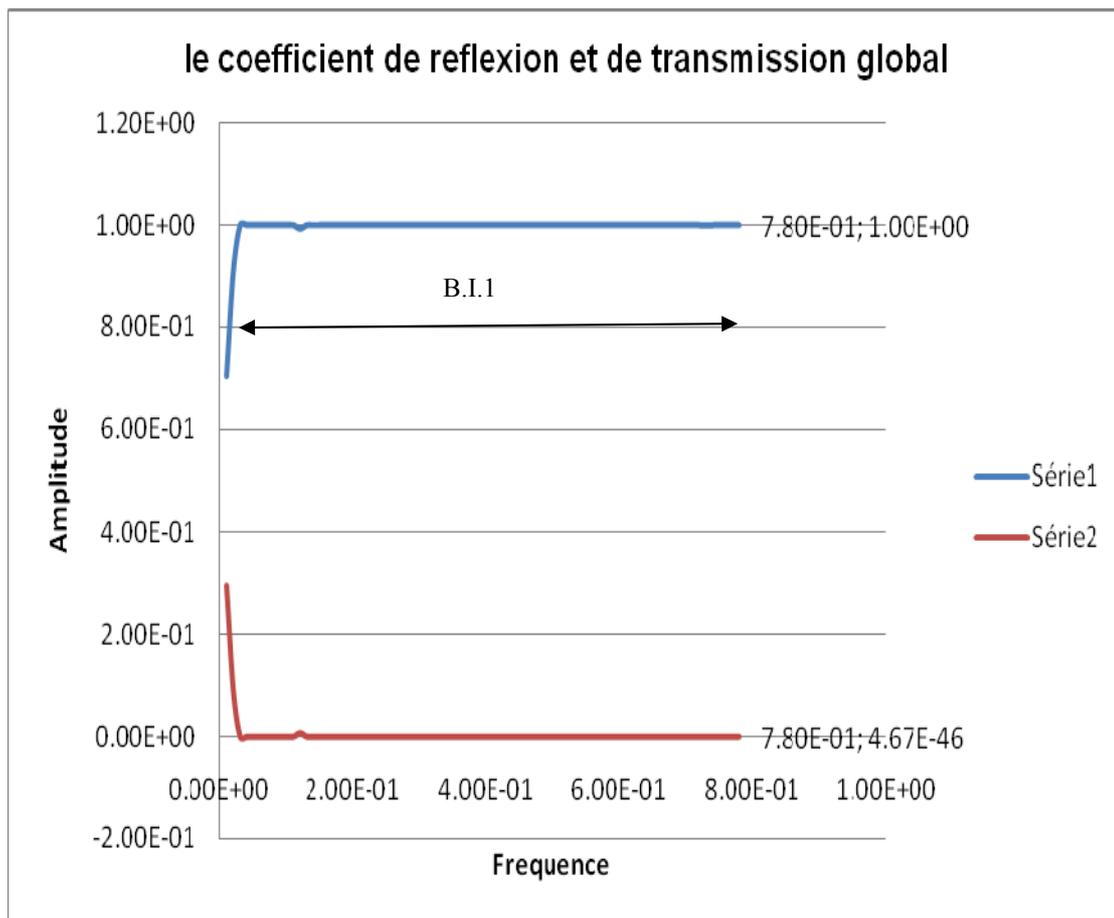


Figure 3.9 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2$, $D/a= 15$, la fréquence de coupure $f_c = 0.780MHz$

On voit bien la présence d'une seule bande interdite très large le long des basses fréquences et une très petite bande passante.

3.2.2.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides (eau)

Avec les mêmes dimensions du réseau bidimensionnel précédent mais cette fois pour le cas fluide:

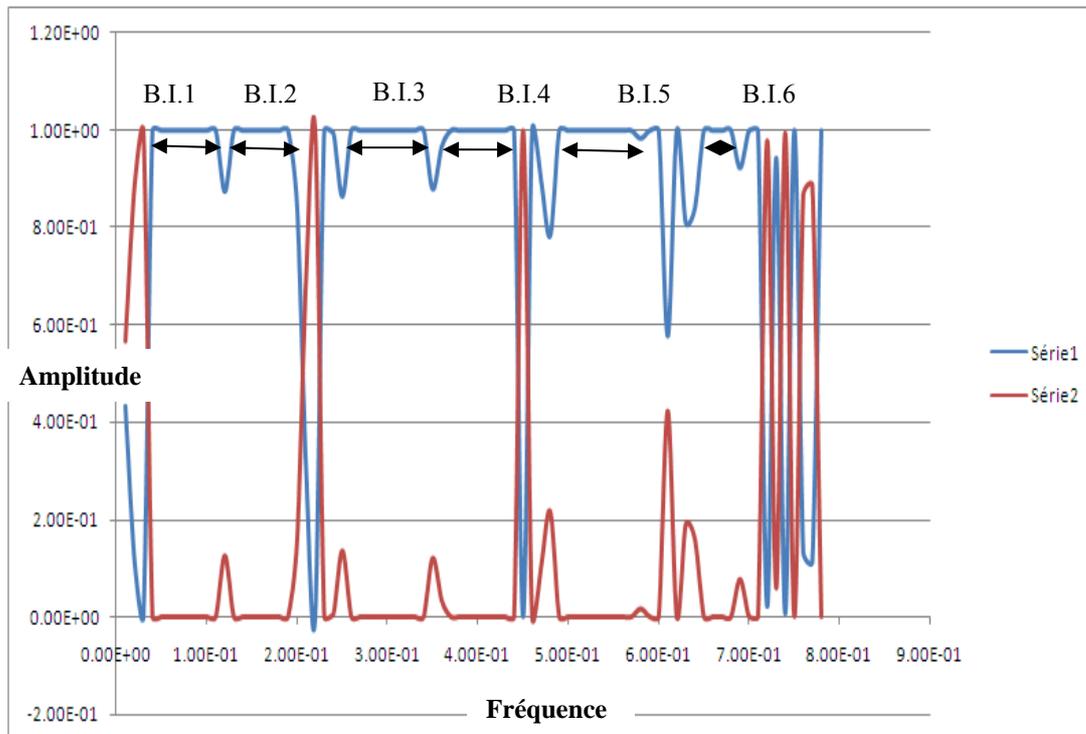


Figure 3.10 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2$, $D/a= 15$, la fréquence de coupure $f_c = 0.780MHz$.

Dans le cas des cavités remplies de l'eau, la largeur de la précédente bande interdite dans le cas vide et affectée par les résonances dues au cas fluide de type eau, ce qui donne plusieurs bandes interdites mais étroites.

3.2.3 Les résultats du troisième réseau 2D

3.2.3.1 Cas de l'incidence normale et des cavités vides (air)

Dans le cas de l'incidence normale, les ondes L et T se propagent indépendamment dans le réseau.

Les résultats sont obtenus dans le cas d'un réseau composé d'un nombre de réseaux 1D et finis. Le milieu élastique est de l'aluminium (masse volumique : 2700 kg/m^3 ; $c_L = 6380 \text{ m/s}$, $c_T = 3140 \text{ m/s}$). Et la masse volumique du fluide (eau): 1000 kg/m^3 . Les cavités peuvent être remplies d'air assimilable au vide ou peuvent être remplies d'eau (eau). Le réseau est insonné par une onde plane de type L (longitudinale). Toutes les courbes sont tracées en fonction de la fréquence.

La géométrie du troisième réseau 2D : avec $S = 6$ réseaux 1D et finis.

Voici les dimensions de ce réseau bidimensionnel périodique :

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2 \text{ mm}$
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 5 \text{ mm}$
- La période des réseaux 1D selon l'axe x : $D = 20 \text{ mm}$
- L'épaisseur du réseau 2D : $e = (S - 1)D = 100 \text{ mm}$
- La fréquence de coupure est donnée par $f_c = 0.620 \text{ MHz}$

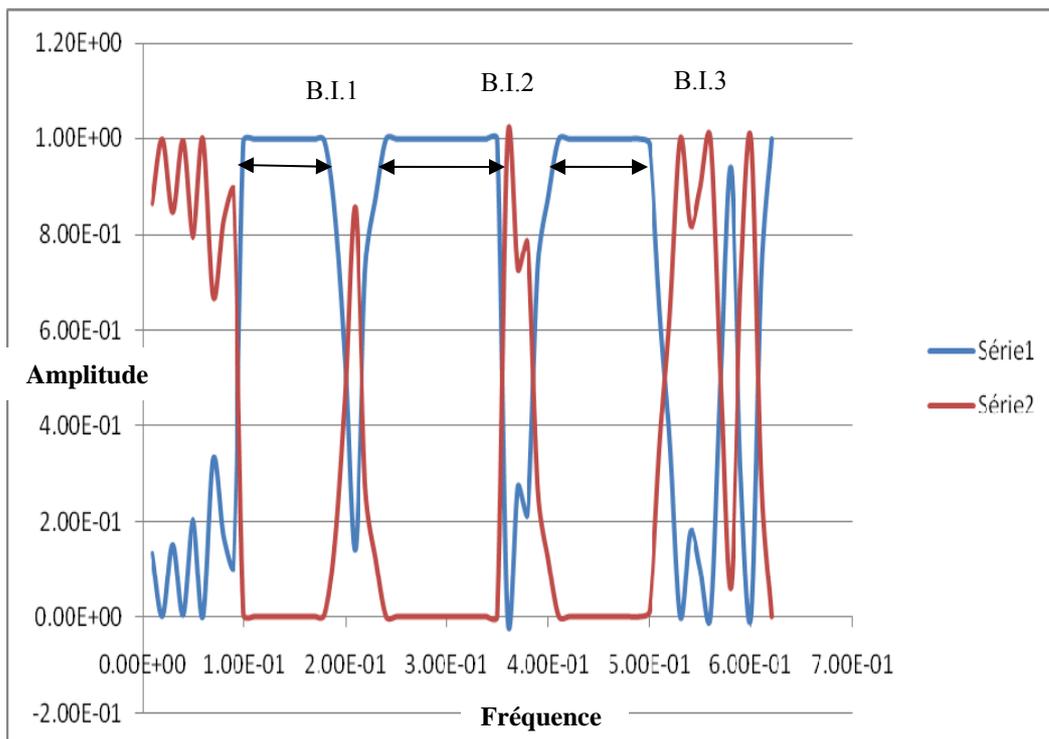


Figure 3.11 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2.5$, $D/a= 10$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$.

D'après la figure 3.11 ci-dessus, on voit bien la présence de trois bandes interdites qui sont un peu larges et des bandes passantes ce qui signifie que la naissance des bandes interdites est due à la dimension ou la géométrie du réseau choisie.

3.2.3.2 Cas de l'incidence normale et des cavités fluides (eau)

Avec les mêmes dimensions du réseau bidimensionnel précédent mais cette fois pour le cas fluide:

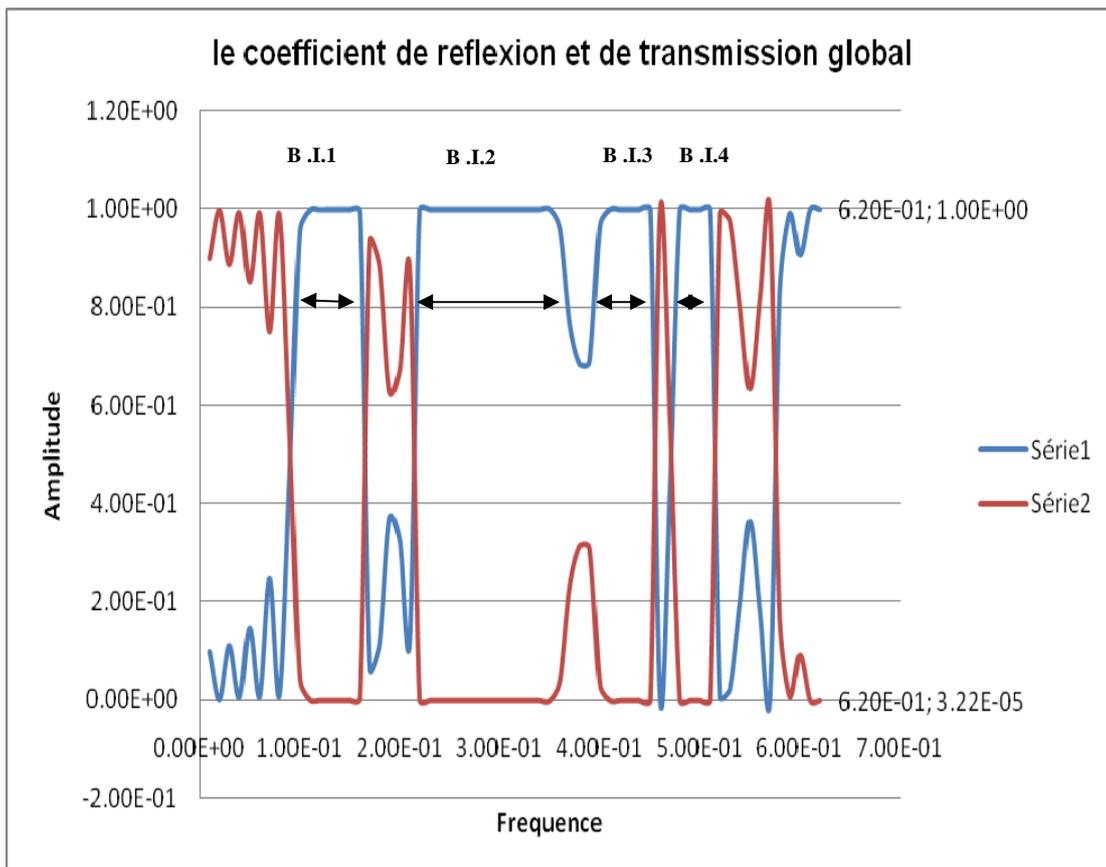


Figure 3.12 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités fluides en incidence normale avec $d/a=2.5$, $D/a= 3$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$.

On voit bien l'apparition de quatre bandes interdites dans le cas de l'eau par rapport à trois bandes interdites trouvées dans le cas vide, ce qui est dû aux interactions résonantes des cavités remplies du fluide de type eau.

3.3 Les résultats de comparaison entre l'étude numérique et l'étude l'expérimentale

- Cas des cavités vides et incidence normale.

3.3.1 Les résultats obtenus sur le premier réseau 2D : avec $S = 6$ réseaux linéaires et finis.

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2mm$.
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 5mm$.
- La période des réseaux 1d selon l'axe x : $D = 6mm$.
- L'épaisseur du réseau 2d : $e = (s - 1)D = 30mm$.
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 0.620MHz$

Figure 3.13 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=2.5$, $D/a= 3$, la fréquence de coupure $f_c = 0.620MHz$.

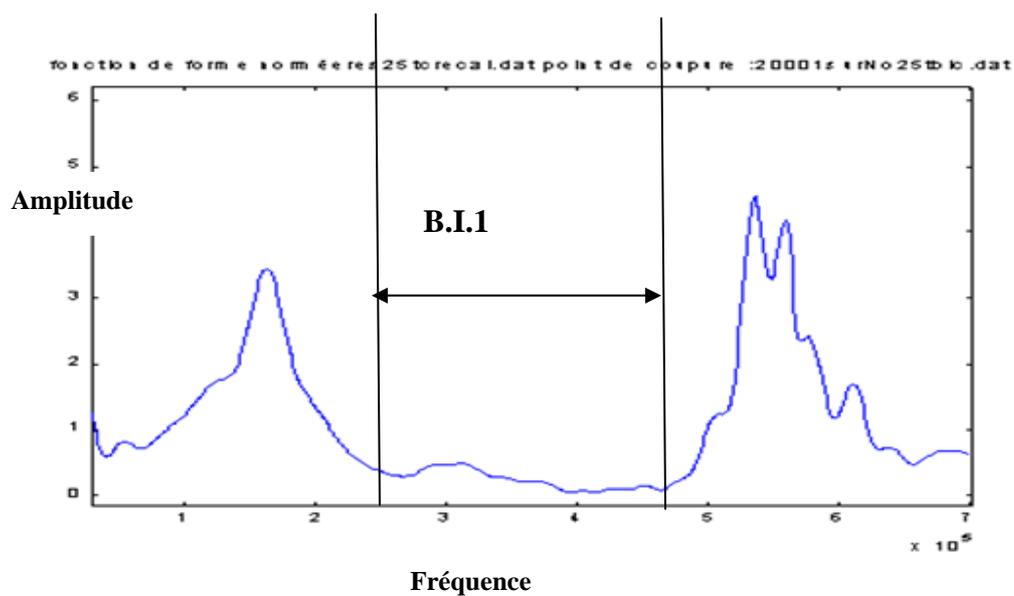
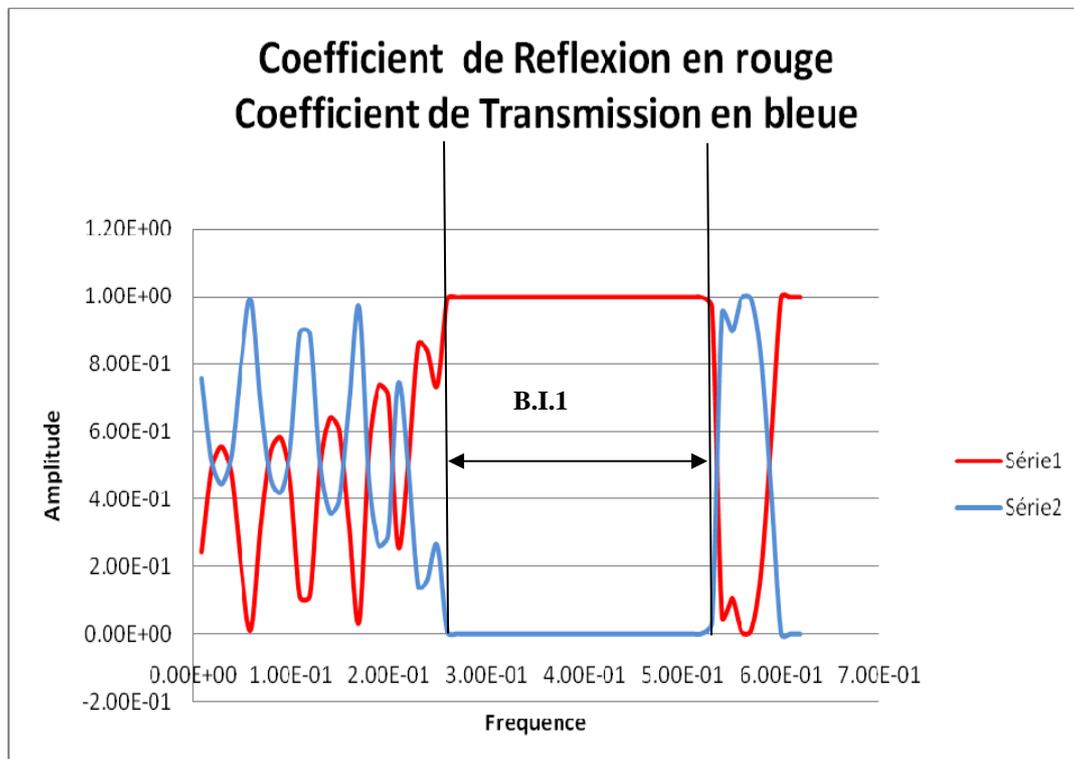


Figure 3.14 : fonction de forme normée.

Bande interdite	Théoriquement	expérimentalement
B.I	0.25Mhz-0.52Mhz	0.26Mhz-0.47Mhz

Dans l'étude expérimentale, on a extrait tous les signaux temporels de transmission de normalisation et avec diffuseurs. Ensuite, ils ont subi plusieurs traitements comme l'élimination des parties indésirables (échos), le recalage, la transformée de Fourier rapide FFT afin d'obtenir la fonction de forme normée pour qu'on puisse la comparer avec le résultat obtenu numériquement, en utilisant plusieurs transducteurs.

D'après les courbes ci-dessus, on voit bien que la bande interdite obtenue théoriquement et la bande interdite obtenue expérimentalement sont superposées, ce qui signifie que ce résultat théorique a été vérifié expérimentalement.

L'étude expérimentale (cas des cavités vides) a été réalisée dans mon stage de Master recherche (DEA) Electronique obtenu en juillet 2004 [16].

- Cas des cavités vides et incidence normale.

3.3.2 Résultats obtenus sur le deuxième réseau 2D : avec $S = 5$ réseaux 1D et finis.

- Le rayon des cavités cylindriques : $a = 2mm$.
- La période des cavités selon l'axe y : $d = 6mm$.
- La période des réseaux 1d selon l'axe x : $D = 20mm$.
- L'épaisseur du réseau 2d : $e = (s - 1)D = 80mm$.
- La fréquence de coupure est donnée par : $f_c = 0.520MHz$.

Figure 3.15 : Evolution fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission en énergie $|R^{LL}|^2$ et $|T^{LL}|^2$ d'un réseau de cavités vides en incidence normale avec $d/a=3$, $D/a= 10$, la fréquence de coupure $f_c = 0.520MHz$.

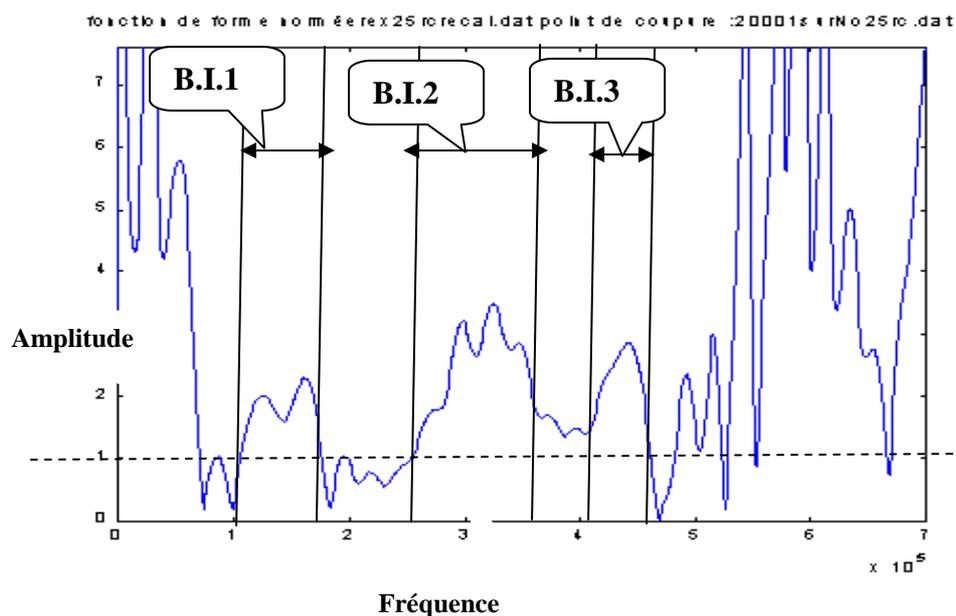
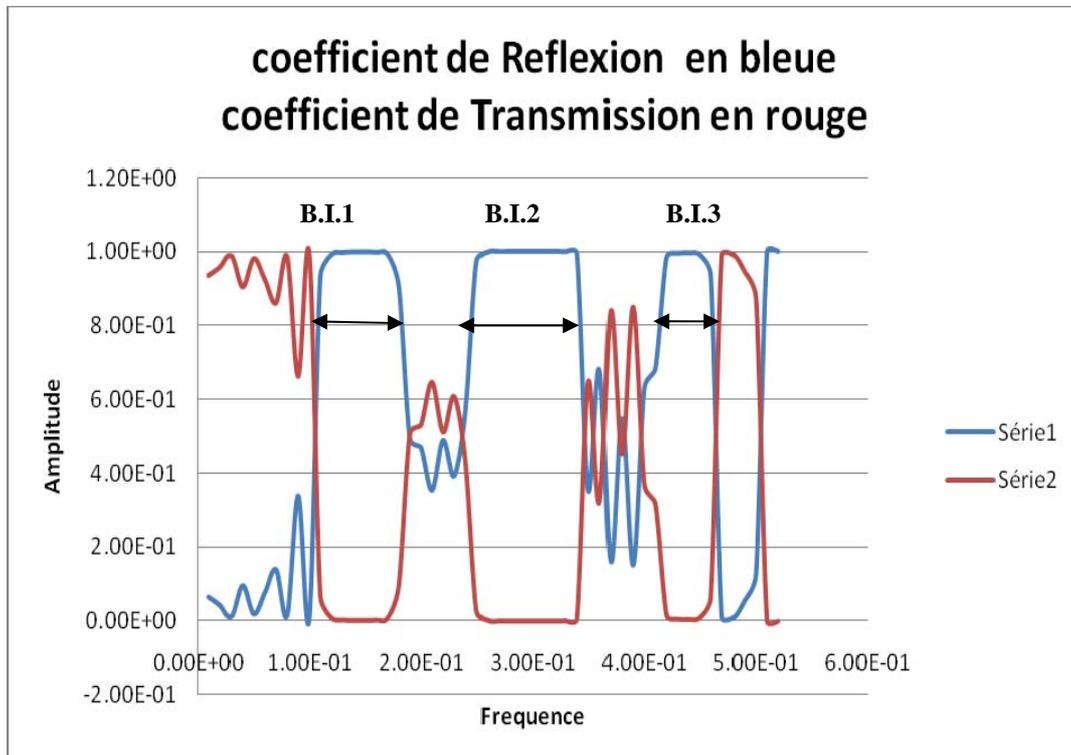


Figure 3.16 : La fonction de forme normée.

Bandes interdites	Numériquement	Expérimentalement
<i>B.I.1</i>	(0.12-0.18)MHz	(0.11-0.17)MHz
<i>B.I.2</i>	(0.25-0.35)MHz	(0.25-0.38)MHz
<i>B.I.3</i>	(0.42-0.45)MHz	(0.41-0.46)MHz

D'après les courbes ci-dessus, on voit bien que les trois bandes interdites obtenues théoriquement et les trois bandes interdites obtenues expérimentalement sont superposées [16].

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

- Une méthode de calcul de la diffusion par un réseau 2D périodique dans un milieu élastique a été présentée. Cette méthode repose sur la décomposition du réseau 2D en un nombre fini de réseaux 1D périodiques. La diffusion par chacun des réseaux 1D est déterminée par un calcul exact de diffusion multiple qui a été adapté ici à la diffusion en milieu élastique. La diffusion plan après plan est calculée à l'aide du théorème de Bloch.
- La simulation numérique a mis en évidence l'existence de deux propriétés intéressantes qui sont : les bandes interdites et les bandes passantes.
- L'effet d'interaction résonante des cavités est plus fort dans le cas fluide de type eau que dans le cas vide.
- L'apparition d'une ou plusieurs bandes interdites est due au choix de la géométrie du réseau étudié.
- L'étude théorique développée ici peut faire l'objet de développements ultérieurs et peut être appliquée à un réseau à porosité variable, aperiodique ou aléatoire, suivant la direction de propagation des ondes planes. De même l'étude des réseaux tridimensionnels 3D peut constituer une perspective est une continuité de ce travail.

ANNEXE A

LISTE DES SYMBOLES

S	: Le nombre de réseaux 1D.
D	: La période selon l'axe x des réseaux 1D.
e	: L'épaisseur du réseau 2D.
Δ	: Opérateur Laplacien.
d	: La période selon l'axe y des cavités cylindriques.
$2a$: Le diamètre des cavités cylindriques.
α_L	: L'angle d'incidence d'une onde longitudinale.
$\lambda_{L,T}$: Longueur d'onde d'une onde longitudinale ou transversale.
N	: Nombre d'inclusions ou de réseaux linéaires infinis.
J_n	: Fonction de Bessel d'ordre n .
$k_p^{L,T}$: La composante selon l'axe x du vecteur d'onde.
$\vec{K}_p^{L,T}$: Vecteur d'onde d'un mode p longitudinal (L) ou transversal (T) diffracté par un réseau linéaire infini.
$k_0^{L,T}$: La composante selon l'axe x du vecteur d'onde pour $n=0$
$\alpha_p^{L,T}$: Composante, selon Oy , du vecteur d'onde $\vec{K}_p^{L,T}$ d'un mode p longitudinal (L) ou transversal (T) diffracté par un réseau linéaire infini.
$\alpha_0^{L,T}$: La composante selon l'axe y du vecteur d'onde pour $p=0$.
$f_p^{L,T}$: n^{ieme} Fréquence de coupure des ondes longitudinale et transversales.
p	: Le mode d'onde.
$C_{L,T}$: La vitesse de phase d'onde longitudinale ou transversale.

- $f_1^{L,T}$: La première fréquence de coupure.
- φ_{inc} : Potentiel scalaire ou vectoriel (projeté sur oz) d'une onde plane incidente longitudinale ou transversale.
- $H_n^{(1)}$: Fonction de Hankel de première espèce et d'ordre n .
- $G_{L,Tmm}^{(\tau\varepsilon)}$: Opérateur de Graff exprimant une fonction d'onde (d'ordre n) diffusée par une inclusion τ en tant que somme de fonctions d'onde (d'ordre m) incidentes sur une inclusion ε .
- $C_n^{(\varepsilon)^{1/2}}$: Coefficient de diffusion $l_1 \rightarrow l_2$, associé à un mode de vibration n , d'une inclusion ε dans un réseau fini ou infini d'inclusions.
- $A_n^{(\varepsilon)L,T}$: Amplitude d'une fonction d'onde, associée à un mode de vibration n , d'une onde plane longitudinale (L) ou transversale (T) incidente sur une inclusion ε .
- $\Lambda_n^{L,T}$: Opérateur de « création » ($n > 0$) ou d'« annihilation » ($n < 0$) opérant sur $\sum_0^{L,T}$
- $\sum_n^{L,T}$: Somme infinie d'ondes cylindriques de type longitudinal (L) ou transversal (T) diffusées par toutes les inclusions d'un réseau linéaire infini pour un mode de vibration n .
- $\sigma_q^{L,T}$: Séries de **Schlömilch** d'ordre q .
- \vec{u}_s, \vec{u}_f : Vecteurs déplacements dans le fluide et dans le solide.
- ϕ : Potentiel scalaire des vecteurs déplacements longitudinaux.
- ψ : Projection sur Oz du potentiel vectoriel des vecteurs déplacements transversaux.
- r_0^{LL}, r_0^{LT} : Les coefficients de réflexion d'ordre 0.
- t_0^{LL}, t_0^{LT} : Les coefficients de transmission d'ordre 0.
- r_p^{LL}, r_p^{LT} : Les coefficients de réflexion d'ordre p .
- t_p^{LL}, t_p^{LT} : Les coefficients de transmission d'ordre p .

C_n^{LL}, C_n^{LT}	: Les coefficients de diffusion du réseau.
δ_{nm}	: Le symbole de Kronecker .
T_m^{LL}	: L'élément de la matrice diagonale de transition.
$\sigma_{n-m}^L, \sigma_{n-m}^T$: Les séries de Schlömilch .
A_m^{LL}	: Les amplitudes des différentes harmoniques cylindriques composant l'onde plane incidente L .
R_1	: Le coefficient de réflexion du sous-réseau 1.
r_1	: Le coefficient de réflexion du réseau 1.
t_1	: Le coefficient de transmission du réseau 1.
T_1	: Le coefficient de transmission du sous - réseau 1.
R	: Le coefficient de réflexion global.
T	: Le coefficient de transmission global.
R_2	: Le coefficient de réflexion du sous-réseau 2.
r_2	: Le coefficient de réflexion du réseau 2.
t_2	: Le coefficient de transmission du réseau 2.
T_2	: Le coefficient de transmission du sous - réseau 2.
R_{S-1}	: Le coefficient de réflexion du sous-réseau $S-1$.
R_S	: Le coefficient de réflexion du sous-réseau S .
r_S	: Le coefficient de réflexion du réseau S .
t_S	: Le coefficient de transmission du réseau S .
T_{S-1}	: Le coefficient de transmission du sous - réseau $S-1$.
T_S	: Le coefficient de transmission du sous - réseau S .
u_i	: Le déplacement des ondes longitudinales suivant l'axe x ou
y .	
σ_{ij}	: Les contraintes suivant les deux axes x et y .
γ	: Le nombre d'onde de Bloch .
γ'	: La composante selon l'axe x du vecteur d'onde
γ''	: Son atténuation.
A, B, C, D	: Amplitudes des ondes longitudinales.

- $\theta_p^{L,T}$: Angle sous lequel est diffracté un mode p longitudinal (L) ou transversal (T) par un réseau linéaire infini.
- $r^{l_1 l_2}, t^{l_1 l_2}$: Coefficients de réflexion et de transmission $l_1 \rightarrow l_2$ d'un réseau linéaire infini pour $f \leq f_{-1}^{L,T}$.
- $r_n^{l_1 l_2}, t_n^{l_1 l_2}$: Coefficients de réflexion et de transmission $l_1 \rightarrow l_2$ d'un mode n diffracté par un réseau linéaire infini.
- $R^{l_1 l_2}, T^{l_1 l_2}$: Coefficients de réflexion et de transmission $l_1 \rightarrow l_2$ d'un réseau 2D périodique ou apériodique.
- $\delta_{l_1 l_2}$: Le symbole de Kronecker.

ANNEXE B

- Pour une conversion de type $L \longrightarrow L$, par exemple, l'opérateur matriciel de transition T^{LL} est donné par :

$$T^{LL} = \begin{bmatrix} \vdots & & & & \vdots \\ & T_{n-1n-1}^{LL} & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & T_{nn}^{LL} & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & T_{n+1n+1}^{LL} & \\ \vdots & & & & \vdots \end{bmatrix}$$

- Les matrices, T^{LT} , T^{TL} et T^{TT} : sont construites de la même façon.
- Les vecteurs inconnus :

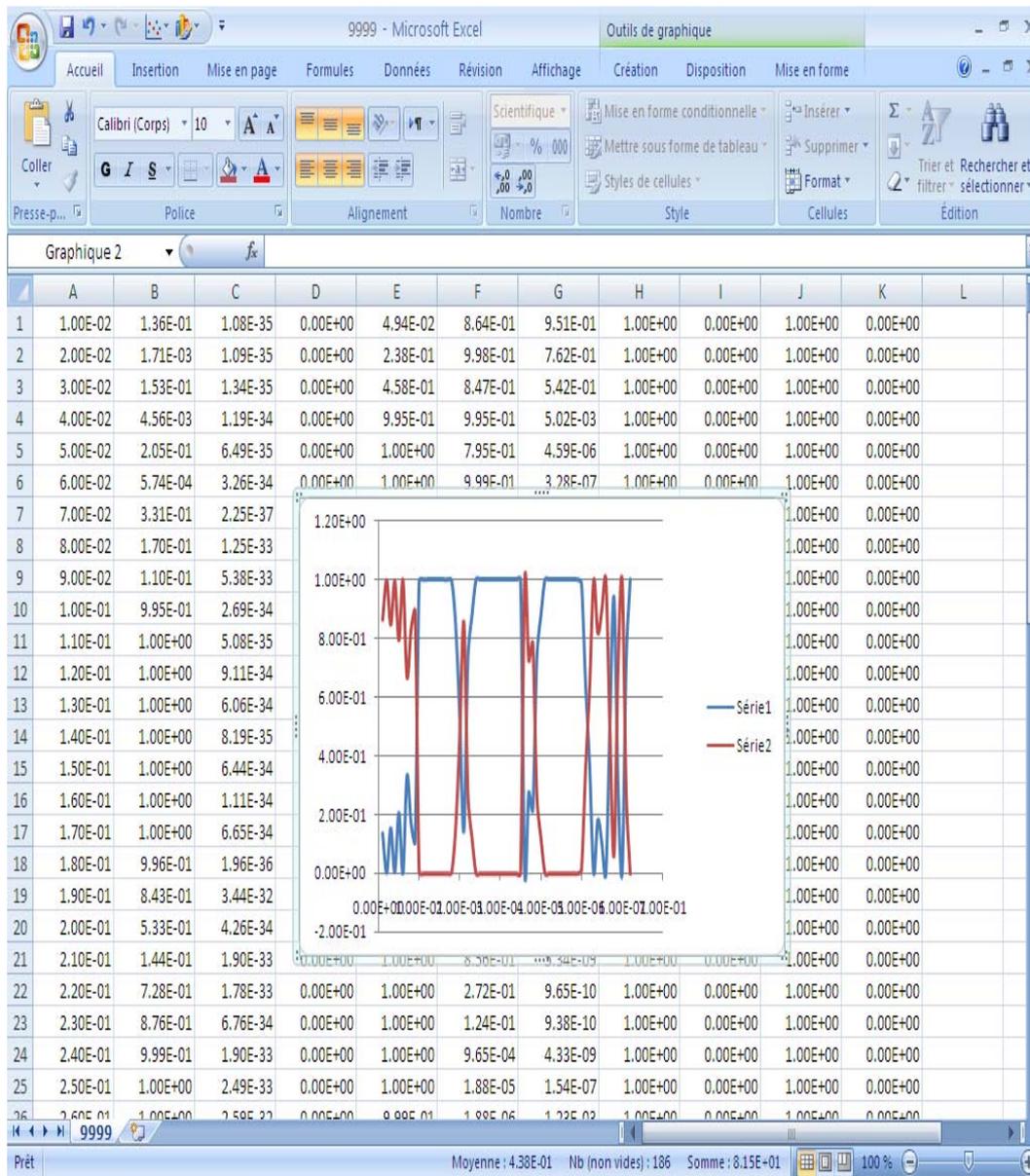
$$\vec{C}^{(\varepsilon)LL} = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{n-1}^{(\varepsilon)LL} \\ C_n^{(\varepsilon)LL} \\ C_{n+1}^{(\varepsilon)LL} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad \vec{C}^{(\varepsilon)LT} = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{n-1}^{(\varepsilon)LT} \\ C_n^{(\varepsilon)LT} \\ C_{n+1}^{(\varepsilon)LT} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- Le vecteur source associé au potentiel de l'onde plane incidente

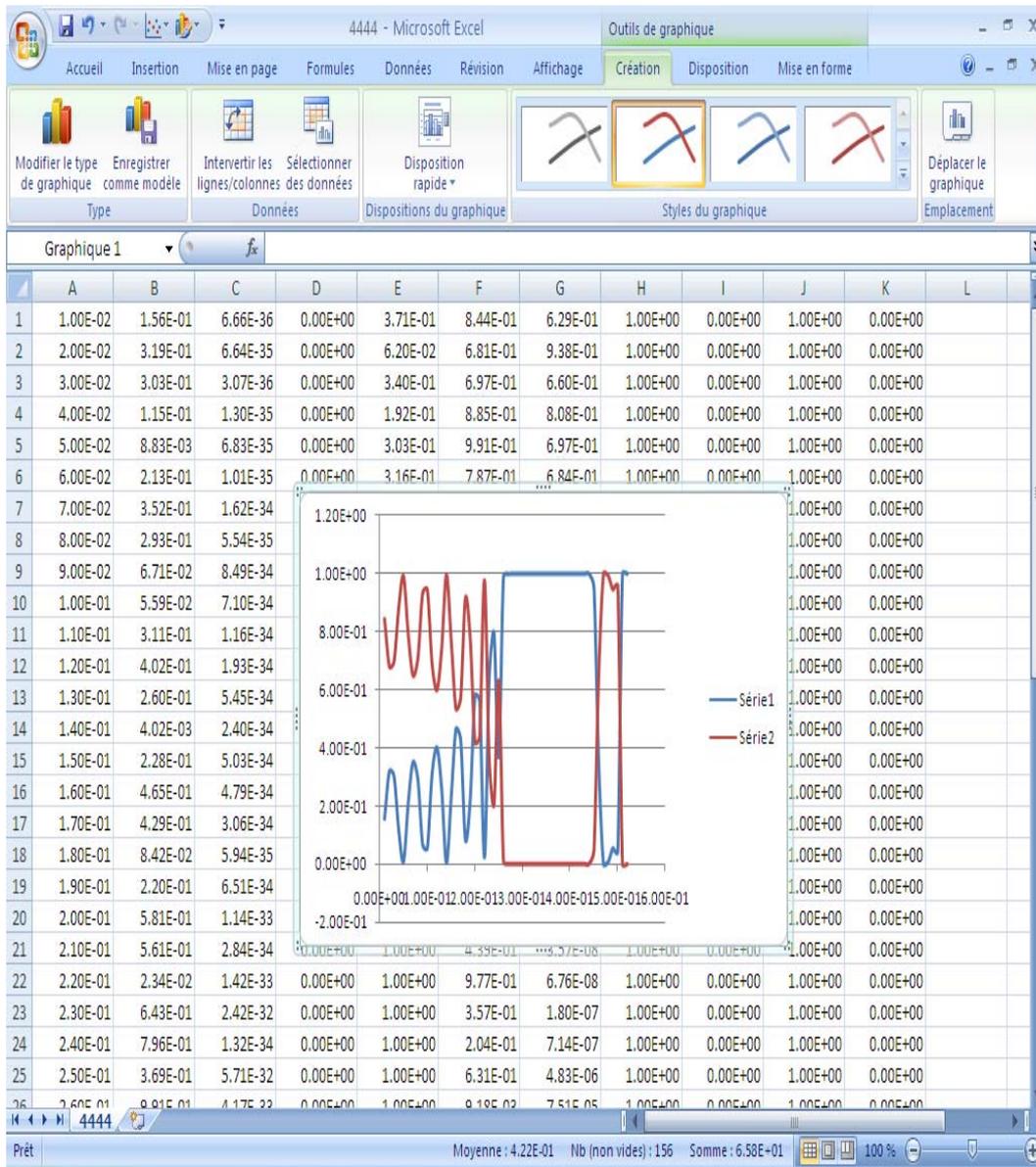
$$\vec{A}^{(\varepsilon)L} = \begin{bmatrix} \vdots \\ A_{n-1}^{(\varepsilon)L} \\ A_n^{(\varepsilon)L} \\ A_{n+1}^{(\varepsilon)L} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ANNEXE C

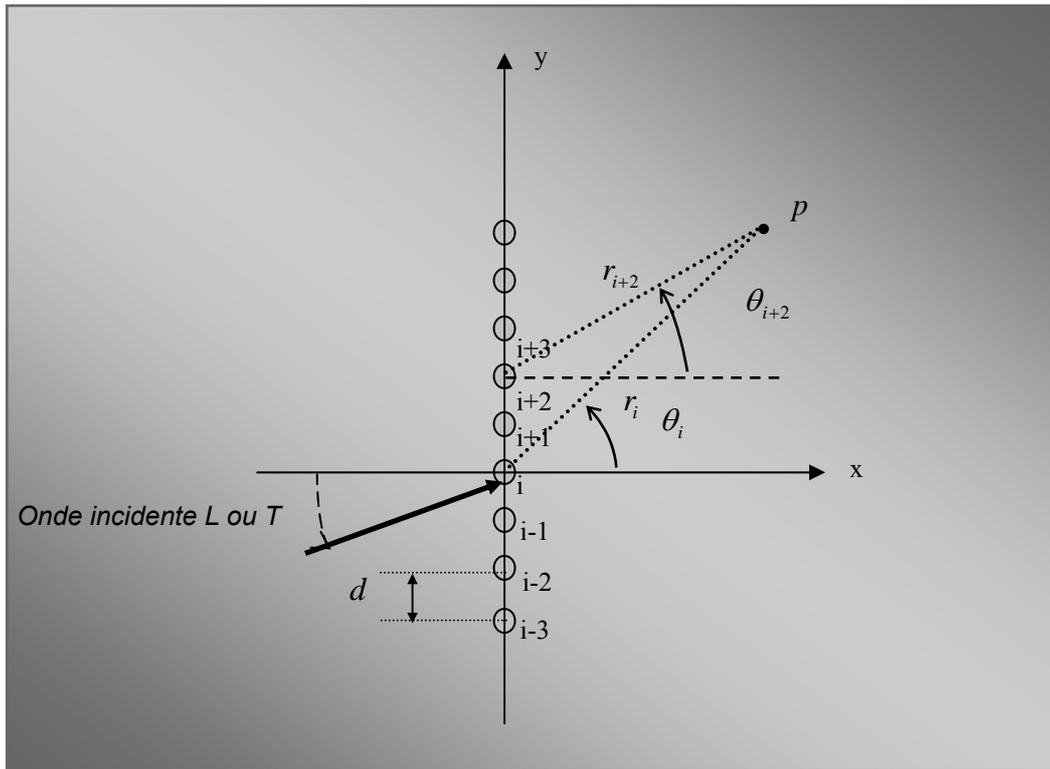
Voici quelques fichiers Excel qui présentent les résultats numériques obtenues lors de l'exécution du projet pour un réseau bidimensionnel : fichier .xls.



Voici l'autre fichier.xls,



ANNEXE.D

Diffusion acoustique dans le cas d'un réseau linéaire.

Remarquons au passage que cette décomposition en série est liée au choix de l'obstacle i comme élément de référence.

1 L'onde plane incidente est longitudinale

1.1 Notations

Dans le repère de base (o_i, x, y) , la décomposition en série de l'onde plane incidente est la suivante

$$\phi_{inc}^{(i)} = \sum_n i^n J_n(k_L r_i) e^{in\theta_i}$$

$$= \sum_n A^{(i)L} J_n(k_L r_i) e^{in\theta_i} \quad (1.1)$$

Soit j un cylindre quelconque ($j = i + p, p \in \mathbf{Z}$) les potentiels scalaire et vectoriel du champ acoustique diffusé par ce diffuseur s'écrivent dans le repère (o_i, x, y) ,

$$\Phi_{inc}^{(i)} = \sum_n C_n^{(j)LL} H_n^{(1)}(k_L r_j) e^{in\theta_j} \quad (1.2)$$

$$\Psi_{inc}^{(i)} = \sum_n C_n^{(j)LT} H_n^{(1)}(k_T r_j) e^{in\theta_j} \quad (1.3)$$

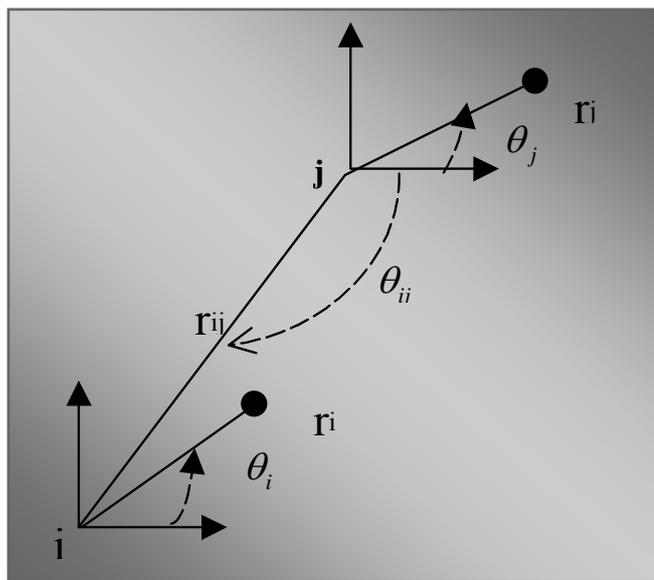
$C_n^{(j)LL}$ et $C_n^{(j)LT}$ sont les coefficients inconnus que l'on cherche à déterminer. Ces notations précisées, le champ acoustique incident sur le cylindre i s'écrit :

$$\phi^{(i)} = \phi_{inc}^{(i)} + \sum_{j \neq i} \Phi^{(j)}, \quad (1.4)$$

$$\psi^{(i)} = \sum_{j \neq i} \Psi^{(j)}, \quad (1.5)$$

1.2 Transformation de *Graff*

La figure ci-dessous présente les variables θ_{ij} et r_{ij} .



Dans le cas où $r_i < r_{ij}$, la transformation de **Graff** donne :

$$H_n^{(1)}(kr_j)e^{in\theta_j} = \sum_m G_{nm}^{ji} J(kr_i)e^{im\theta_i}, \quad (1.6)$$

Avec ;

$$\begin{aligned} G_{nm}^{ji} &= (-1)^{m-n} e^{i(n-m)\theta_j} H_{m-n}^{(1)}(kr_{ij}) \\ G_{nm}^{ji} &= e^{i(n-m)\theta_j} H_{n-m}^{(1)}(kr_{ij}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

En appliquant cette transformation à chacun des potentiels (1.4) et (1.5), il vient :

$$\phi^{(i)} = \sum_m \left[a_m^{(i)L} + \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Lnm}^{ji} C_n^{(j)LL} \right] J_m(k_L r_i) e^{im\theta_i}, \quad (1.8)$$

$$\psi^{(i)} = \sum_m \left[\sum_{j \neq i} \sum_n G_{Tnm}^{ji} C_n^{(j)LT} \right] J_m(k_T r_i) e^{im\theta_i}. \quad (1.9)$$

En introduisant les coefficients de diffusion du cylindre i seul, on peut donc écrire les potentiels (1.2) et (1.3) de la façon suivante (1.10) et (1.11) :

$$\Phi^{(i)} = \sum_m \tau_m^{(i)LL} \left[a_m^{(i)L} + \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Lnm}^{ji} C_n^{(j)LL} \right] H_m^{(1)}(k_L r_i) e^{im\theta_i} + \sum_m \tau_m^{(i)TL} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Tnm}^{ji} C_n^{(j)LT} H_m^{(1)}(k_L r_i) e^{im\theta_i},$$

$$\Psi^{(i)} = \sum_m \tau_m^{(i)LT} \left[a_m^{(i)L} + \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Lnm}^{ji} C_n^{(j)LL} \right] H_m^{(1)}(k_T r_i) e^{im\theta_i} + \sum_m \tau_m^{(i)TT} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Tnm}^{ji} C_n^{(j)LT} H_m^{(1)}(k_T r_i) e^{im\theta_i},$$

L'identification de (1.10) et (1.11) avec les potentiels définis en (1.1) conduit à :

$$C_m^{(i)LL} - \tau_m^{(i)LL} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Lnm}^{ji} C_n^{(j)LL} - \tau_m^{(i)TL} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Tnm}^{ji} C_n^{(j)LT} = \tau_m^{(i)LL} a_m^{(i)L}, \quad (1.12)$$

$$C_m^{(i)LT} - \tau_m^{(i)LT} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Lnm}^{ji} C_n^{(j)LL} - \tau_m^{(i)TT} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Tnm}^{ji} C_n^{(j)LT} = \tau_m^{(i)LT} a_m^{(i)L}, \quad (1.13)$$

1.3 Application au réseau

D'après la figure à l'en-tête de ce papier, on doit faire les identifications suivantes :

$$\begin{cases} r_{ij} = pd. \\ \theta_{ij} = \theta_p. \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\text{Avec : } \theta_p = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, p > 0. \\ +\frac{\pi}{2}, p < 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Le champ incident d'un obstacle à l'autre est le même mais déphasé de la quantité

$$\varphi = k_L d \sin \alpha_L. \quad (1.16)$$

Quand on passe de l'obstacle i et $i+1$.

Pour respecter l'hypothèse de périodicité, les amplitudes de diffusion vérifient nécessairement la condition.

$$C_n^{(i+1)LL} = C_n^{(i)LL} e^{i\varphi_L}. \quad (1.17)$$

Plus généralement, on a :

$$C_n^{(i+p)LL} = C_n^{(i)LL} e^{ip\varphi_L}. \quad (1.18)$$

Les équations (1.12) et (1.13) s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} C_m^{(i)LL} - \tau_m^{(i)LL} \sum_{P \neq 0} \sum_n e^{ik_L pd \sin \alpha_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) e^{i(n-m)\theta_P} C_n^{(i)LL} \\ - \tau_m^{(i)TL} \sum_{P \neq 0} \sum_n e^{ik_T pd \sin \alpha_T} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) e^{i(n-m)\theta_P} C_n^{(i)LT} = \tau_m^{(i)LL} a_m^{(i)L}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} C_m^{(i)LT} - \tau_m^{(i)LT} \sum_{P \neq 0} \sum_n e^{ik_L pd \sin \alpha_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) e^{i(n-m)\theta_{ij}} C_n^{(i)LL} \\ - \tau_m^{(i)TT} \sum_{P \neq 0} \sum_n e^{ik_T pd \sin \alpha_T} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) e^{i(n-m)\theta_{ij}} C_n^{(i)LT} = \tau_m^{(i)LT} a_m^{(i)L}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

Introduisons alors la série de **SchlÖmilch** :

$$\sigma_q(kd, \alpha) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} H_q^{(1)}(kpd) e^{ikpd \sin \alpha} e^{ik\theta_p}, \quad (1.21)$$

Les équations (1.19) et (1.20) peuvent s'écrire de façon plus concise :

$$C_m^{(i)LL} - \tau_m^{(i)LL} \sum_n \sigma_{n-m}(k_L d, \alpha_L) C_n^{(i)LL} - \tau_m^{(i)TL} \sum_n \sigma_{n-m}(k_T d, \alpha_T) C_n^{(i)LT} = \tau_m^{(i)LL} a_m^{(i)L}, \quad (1.22)$$

$$C_m^{(i)LT} - \tau_m^{(i)LT} \sum_n \sigma_{n-m}(k_L d, \alpha_L) C_n^{(i)LL} - \tau_m^{(i)TT} \sum_n \sigma_{n-m}(k_T d, \alpha_T) C_n^{(i)LT} = \tau_m^{(i)LT} a_m^{(i)L}, \quad (1.23)$$

Ce qui peut encore écrire :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - \tau_m^{(i)LL} \sigma_{n-m}^L(k_L d, \alpha_L) \right] C_n^{(i)LL} - \tau_m^{(i)TL} \sigma_{n-m}^T(k_T d, \alpha_T) C_n^{(i)LT} \right\} = \tau_m^{(i)LL} a_m^{(i)L}, \quad (1.24)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - \tau_m^{(i)LT} \sigma_{n-m}^L(k_L d, \alpha_L) \right] C_n^{(i)LL} - \tau_m^{(i)TT} \sigma_{n-m}^T(k_T d, \alpha_T) C_n^{(i)LT} \right\} = \tau_m^{(i)LT} a_m^{(i)L}, \quad (1.25)$$

Les diffuseurs étant tous identiques, on peut poser :

$$\begin{aligned} \tau_n^{(i)} &= \tau_n, \\ C_n^{(i)} &= C_n. \end{aligned} \quad (1.26), (1.27)$$

Les relations (1.24) et (1.25) deviennent alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - \tau_m^{LL} \sigma_{n-m}^L(k_L d, \alpha_L) \right] C_n^{LL} - \tau_m^{TL} \sigma_{n-m}^T(k_T d, \alpha_T) C_n^{LT} \right\} = \tau_m^{LL} a_m^L, \quad (1.28)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - \tau_m^{LT} \sigma_{n-m}^L(k_L d, \alpha_L) \right] C_n^{LL} - \tau_m^{TT} \sigma_{n-m}^T(k_T d, \alpha_T) C_n^{LT} \right\} = \tau_m^{LT} a_m^L, \quad (1.29)$$

On a deux systèmes linéaires, chacun présentant autant d'inconnues que d'équations : les coefficients de diffusion C_n^{LL} et C_n^{LT} sont donc accessibles et ce seront les mêmes pour tous les diffuseurs.

2 L'onde plane incidente est transversale

On refait la mise en équations en prenant :

$$\begin{aligned} \psi_{inc}^{(i)} &= \sum_n i^n J_n(k_T r_i) e^{in\theta_i} \\ &= \sum_n A^{(iT)} J_n(k_T r_i) e^{in\theta_i}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

Les équations (1.12) et (1.13) deviennent alors :

$$C_m^{(i)TL} - \tau_m^{(i)LL} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Lnm}^{ji} C_n^{(j)TL} - \tau_m^{(i)TL} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Tnm}^{ji} C_n^{(j)IT} = \tau_m^{(i)TL} a_m^{(i)T}, \quad (1.31)$$

$$C_m^{(i)IT} - \tau_m^{(i)LT} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Lnm}^{ji} C_n^{(j)LT} - \tau_m^{(i)IT} \sum_{j \neq i} \sum_n G_{Tnm}^{ji} C_n^{(j)IT} = \tau_m^{(i)IT} a_m^{(i)T}, \quad (1.32)$$

Puis l'application au réseau donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - \tau_m^{LL} \sigma_{n-m}^L(k_L d, \alpha_L) \right] C_n^{TL} - \tau_m^{TL} \sigma_{n-m}^T(k_T d, \alpha_T) C_n^{LT} \right\} = \tau_m^{TL} a_m^T, \quad (1.33)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\delta_{nm} - \tau_m^{TT} \sigma_{n-m}^L(k_L d, \alpha_L) \right] C_n^{IT} - \tau_m^{LT} \sigma_{n-m}^T(k_T d, \alpha_T) C_n^{TL} \right\} = \tau_m^{IT} a_m^T, \quad (1.34)$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. S.Robert, H.Franklin, J-M-Conoir, Multiple Scattering by a 2d-Lattice composed of cylindrical cavities in an Aluminium Matrix, article soumis au *Journal of Applied Physics*. (2004).
2. P.Langlet, Analyse de la propagation d'ondes acoustiques dans les matériaux périodiques à l'aide de la méthode des éléments finis, *Thèse de doctorat, Université de Valenciennes*, (1993).
3. M.M Sigalas and N.Garcia, Theoretical study of three dimensional elastic band gaps with the finite-difference time-domain method, *J. Appl. Phys.* 87 6(2000) 3122-3125.
4. Y. Tamaka, Y.Tomoyasu and S.Tamura, Band structure and acoustic waves in phononic lattices : *mismatch*, *phys. Rev. B* 62 11 52000° 7387-7392.
5. C M.A. Heckl, Sound propagation in bundles of periodically arranged cylindrical tubes , *Acustica* 77 (1992) 143-152.
6. R.C.Mcphedran , N.A. Nicirovici, L.C. Botton and K.A.Grubits, Lattice sums for gratings and arrays, *J.Math. Phys.* 41 11(2000) 7808-7816.
7. C.Audoly and G.Duméry, Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions, *phys. Acoust.* , O.Leroy and M.A.Breazeale (Eds.), Plenum press , New York (1991) 199-204.
8. L.S.Mulholland M.A.Heckl , Multi-directional sound wave propagation through a tube bundle, *Journal of Sound and Vibration* 176 3 (1994) 377-398.

9. M.A.Heckl and L.S.Mulholland, some recent developpements in the theory of acoustic transmission in tubes bundles, *Journal of Sound and Vibration* 179 1 (1995) 37-62.
10. V.K.Varadan, Y.Ma and V.V.Varadan , A multiple scattering theory for elastic wave propagation in discrete random media, *J.Acoustic. Soc. Am.* 772(1985) 375-385.
11. V.K.Varadan, Multiple scattering of acoustic, electromagnetic and elastic waves, *Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering. Focus on the T-matrix approach Pergamon*, New-York (1980) 103-134.
12. V.Twersky, Elementary functional representations of Schlomilch series, *Archives of Rational Mechanics Analysis* 8 (1961) 323-332.
13. S.Robert, Propagation d'ondes cohérentes et résonances dans les milieux élastiques présentant des inclusions cylindriques périodiquement ou aléatoirement distribuées. Thèse de doctorat, Novembre 2004. Université du Havre.
14. G. Dumery *Contribution à la théorie des réseaux d'objets diffringents*, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille, 1967.
15. W. Von Ignatowski Zur theorie der Gitter, *Annalen der Physik* 44, pp. 369-427, 1914.
16. A.Moumena, Etude expérimentale de la diffusion élastique par un réseau 2D périodique. Mémoire de Master recherche deuxième année (DEA), Université du Havre, Académie de Rouen, juillet 2004.