

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté De Technologie

Département De Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

**CONTRIBUTION A LA REALISATION OPTIMALE DES TÂCHES PAR
UN ROBOT MANIPULATEUR**

Par

Karim OMRI

Devant le jury composé de :

Abderrazak ALLALI	M.C.A.	USD de Blida	Président
Mohammed TEMMAR	M.C.A.	USD de Blida	Examineur
Abdellah ABDELLAH EL HADJ	Professeur	U. de MÉDÉA	Examineur
Mohammed OUALI	Professeur	USD de Blida	Rapporteur

Blida, mai 2013

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Ce mémoire de thèse présente les travaux de recherche que j'ai effectués au département de mécanique de l'université de SAAD DAHLAB-BLIDA.

J'adresse mes premiers remerciements au Professeur M.OUALI, mon promoteur qui a su me motiver et diriger mon travail tout au long de la thèse.

Ma reconnaissance va ensuite à tous les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner et de juger ce travail : A.ALLALI, Maître de Conférences à l'université Saad Dahlab de Blida, M.TEMMAR, Maître de conférences à l'université Saad Dahlab de Blida et A.ABDELLAH EL HADJ Professeur à l'université de Médéa.

Je dédie ce travail à mes parents, mes frères et mes sœurs

Enfin je n'oublierai pas de remercier tous mes amis de l'université de Blida et de Bab Ezzouar particulièrement H.Osmani et mes collègues de travail surtout B.Mohamed et C. Lotfi qui m'ont aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

ملخص

تطور الروبوتات و الاحتياجات الصناعية و جهت البحوث العلمية نحو تصميم الروبوتات المستقلة التي لا تتطلب تدخل بشري أثناء تنفيذ مهام مثل اللحام , الذراع الآلي لزاما عليه إتباع مسار كي ينتقل من نقطة البداية D نحو نقطة الهدف C.

عملنا هو المساهمة في تحقيق المهام المثلى من قبل الذراع الآلي و السؤال المطروح : ما هو المسار الذي يجب على الذراع الآلي لكي ينتقل من نقطة الانطلاق إلي نقطة مطلوب الوصول إليها دون الاصطدام بالعقبات ؟ في هذه المذكرة حققنا البرامج اللازمة لحساب النموذج الهندسي المباشر (الإعدادات DH) و النموذج الهندسي المعكوس (الطريقة التحليلية لبول Paul) و حساب جاكوبي لاستنتاج السرعات و تسارعات المفاصل للروبوتات (النموذج الحركي) و كذلك شرعنا في تصميم الفضاءات العملية للمهام أو التوجيهات المطلوبة و هذا باستخدام طريقتين : زوايا Euler و إحداثيات Frenet Serret.

و فيما يتعلق بدقة نتائجنا أخذنا على سبيل المثال معالجة مسار في الفضاء المفصلي لروبوت ذات ستة DDL.

RESUME

L'évolution de la robotique et les besoins de l'industrie ont orienté la recherche vers la conception des robots autonomes. Ce type de robots ne nécessite pas d'intervention humaine. Lors de l'exécution d'une tâche comme par exemple le soudage, un bras manipulateur doit suivre une trajectoire pour se déplacer d'un point de départ D à un point cible C.

Notre travail est une contribution à la réalisation optimale des tâches par des robots manipulateurs qui peut s'énoncer ainsi : Quelle trajectoire doit suivre un robot manipulateur pour aller d'un point de départ avec une configuration donnée à un point d'arrivée avec une configuration désirée sans collision avec des obstacles ?

Dans ce mémoire nous avons réalisé les programmes nécessaires pour le calcul du modèle géométrique direct (paramètre de DH), le modèle géométrique inverse (méthode analytique de Paul), et la jacobienne pour déduire les vitesses et les accélérations articulaires du Robot (modèle cinématique).

On a procédé à la modélisation de l'espace opérationnel pour des tâches où l'orientation est exigée. Deux méthodes sont appliquées : les angles d'Euler et les coordonnées de Frenet-Serret.

De la littérature, on a pris un exemple traitant la trajectoire dans l'espace articulaire d'un Robot à six DDL avec lequel on a confronté nos résultats.

SUMMARY

The evolution of robotics and the needs of industry oriented research to design autonomous robots, this type of robot do not need human intervention during execution of a task such as welding, a manipulator arm to follow a path to move from a starting point D to a target point C.

Our work is a contribution to the achievement of optimal tasks by robot manipulators which can be stated as follows: What path should follow a robot manipulator to move from a starting point with a given configuration to a point of arrival with a configuration desired without colliding with obstacles?

In this paper we have made the necessary programs for calculating the direct geometric model (parameter DH), and the inverse geometric model (analytical method of Paul), and calculate the Jacobian to derive the joint velocities and accelerations of the robot (kinematic model).

So we proceeded to the modeling of the operational space for tasks or orientation is required. Two methods are used: the Euler angles and the Frenet-Serret coordinates.

Concerning the reliability of our results, the literature was made an example dealing with the trajectory in the joint space of a six DDL robot.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENT

RESUME

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE ET L'ETAT DE L'ART	14
1. Introduction	20
1-1. Historique de la technologie robotique	20
1-2. Le domaine de l'utilisation des Robots	21
1-3. Composants d'une cellule robotisée	22
1-4. Comparaison des architectures sérielles et parallèles	23
1-5. Description des robots	23
1-6. Constituants mécaniques d'un robot manipulateur	23
1-6-1. Organe terminal	24
1-7. Structure mécanique articulée	25
1-8. Couples cinématiques	25
1-9. Chaînes cinématiques	28
1-10. Architecture des robots manipulateurs	29
1-10-1. Structures générales des robots	29
1-10-2. Robots sériels	31
1-10-3. Robots parallèles	32
1-11. Définitions et terminologie	33
1-11-1. Espace opérationnel & Espace articulaire	33
1-11-2. Redondance	34
1-11-3. Singularités	34
1-11-4. Parcourabilité	35
1-11-5. Dexterité	36
1-11-6. Généricité	36
1-12. Coopération de robots	36
1-13. Conclusion	38
2. Introduction	39

2-1. Modélisation et identification	39
2-1-1. Modélisation : Représentation des transformations et des mouvements rigides	39
2-2. Formalismes de description des robots	40
2-2-1. Transformation de coordonnées	40
2-2-1-1. Matrice de transformation d'une translation pure	42
2-2-1-2. Matrice de transformation de rotation autour des axes principaux	42
2-2-1-2-1. Transformation correspondante à une rotation θ autour de l'axe x	42
2-2-1-3. Propriétés des matrices de transformation homogène	43
2-2-2. Modélisation des robots manipulateurs	44
2-2-2-1. Méthodes et notations	44
2-2-2-2. Modélisation géométrique : Description de la géométrie des robots à structure ouverte simple	46
2-2-2-3. Modelé géométrique inverse des chaînes ouvertes simples	48
2-2-2-3-1. Calcul du modèle géométrique inverse	49
2-2-2-4. Modélisation cinématique	52
2-2-2-4-1. Formation de la matrice jacobienne	53
2-2-2-4-2. Calcul des vitesses et des accélérations articulaires	55
a. Calcul des vitesses articulaires	55
b. Calcul des accélérations articulaires	56
2-2-2-5. Modélisation dynamique	56
2-2-2-5-1. Formalisme de Lagrange	56
2-2-2-5-2. Efforts exercés par l'organe terminal sur son Environnement	58
2-2-2-5-3. Formalisme de Newton-Euler	58
2-2-2-5-4. Equation de NEWTON	58
2-2-2-5-5. L'équation d'EULER	59
2-2-2-5-6. Récurrence avant pour calculer les vitesses et les accélérations	59
2-2-2-5-7. L'algorithme itératif de dynamique de Newton-Euler	61
2-2-2-5-8. Inclusion des forces de pesanteur dans l'algorithme de la dynamique	62
2-2-2-5-9. Comparaison entre les deux formalismes	62
2-2-2-6. Situation d'un robot dans son environnement	62

2-3. Conclusion	63
3-1. Introduction	64
3-2. La problématique générale	64
3-3. Divers aspects de la planification de trajectoires	66
3-4. Classification des types de méthodes utilisées	67
3-4-1. Méthodes globales	67
3-4-2. Méthodes locales	68
3-4-3. Méthodes mixtes	68
3-4-4. Autres méthodes	68
3.5. Commandabilité, planification et suivi de trajectoire	69
3-6. Critère de performance dans la recherche de trajectoires	70
3-7. Espace de planification de la trajectoire	72
3-7-1. Génération de mouvement et système de commande	72
3-7-2. Planification de trajectoire dans l'espace articulaire	73
3-7-2-1. Trajectoire sans contraintes – Mouvement point à point (P.T.P)	74
3-7-2-2. Trajectoire entre deux points avec des points intermédiaires	75
3-7-3. Planification de la trajectoire dans l'espace opérationnel	76
3-7-3-1. Interpolation cartésienne	76
3-7-3-2. Interpolation articulaire	77
3-8. Théorie des graphes et chemins optimaux	77
3-9. Conclusion	78
4-1. Introduction	79
4-2. Modèle géométrique direct et inverse d'un bras manipulateur (similaire au Robot Cloos)	79
4-2-1. Modèle géométrique direct(MGD)	80
4-3. Calcul des vitesses dans l'espace opérationnel	85
4-3-1. Calcul de la matrice jacobienne	85
4-3-2. Les vitesses dans l'espace opérationnel et articulaire	87
4-4. L'étude des configurations singulières	89
4-5. Génération de trajectoire pour un robot à 6 DDL similaire au Cloos	90
4-5-1. Problématique	90
4-5-2. Génération de mouvement entre deux points dans l'espace articulaire	92
4-5-2-1. Interpolations polynomiales linéaires	93
4-5-2-2. Interpolation polynomiale de degré trois	93

4-5-2-3. Interpolation polynomiale de degré cinq	93
4-5-3. Génération de mouvement dans l'espace opérationnel	93
4-5-3-1. Génération de mouvement découplable entre deux points dans l'espace	93
4-5-4. Algorithme de calcul des coordonnées articulaires pour une trajectoire rectiligne	95
4-6. Application	96
4-6-1. Trajectoire rectiligne	99
4-6-2. Génération de trajectoire curviligne	102
4-6-3. Application pour éviter les obstacles	110
4-7. Validation de programme	112
4-8. Conclusion	117
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	119
BIBLIOGRAPHIE	
ANNEXES	

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Les robots de soudage	21
Figure 1.2	Les robots de peintre	22
Figure 1.3	Les Robots de Chargement, Polissage et de Positionnement	22
Figure 1.5	Pince parallèle	24
Figure 1.6	Structure d'un poignet sphérique	25
Figure 1.7	Déplacements possibles (degrés de liberté) d'un solide dans l'espace	25
Figure 1.8.a	Chaîne cinématique ouverte simple	28
Figure 1.8.b	Chaîne ouverte complexe	28
Figure 1.8.c	Chaîne fermée simple	28
Figure 1.8.d	Chaîne cinématique fermée complexe	28
Figure 1.8.e	Chaîne cinématique parallèle	28
Figure 1.8	Les différents types de chaînes	28
Figure 1.9	Architecture des porteurs	30
Figure 1.10	Architecture des poignets	30
Figure 1.11	Structure générale d'un robot manipulateur	30
Figure 1.12	Robot sériel	31
Figure 1.13	Exemple de structure parallèle « Robot DELTA »	33
Figure 1.14	Exemples de robots coopérants	38
Figure 2.1	Représentation d'un point dans l'espace	41
Figure 2.2	Transformation des repères	41
Figure 2.3	Transformation de rotation autour de l'axe x	42
Figure 2.4	Composition des transformations : multiplication à droite	44

Figure 2.5	Composition des transformations : multiplication à gauche	44
Figure 2.6	Définition des paramètres géométriques suivant Sheth-Uiker	44
Figure 2.7	Définition des paramètres géométriques suivant Denavit-Hartenberg	45
Figure 2.8	Robot à structure ouverte simple	46
Figure 2.9	Paramètres géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple	47
Figure 2.10	Structure arborescente	48
Figure 2.11	Structure fermée	48
Figure 2.12	Modèles géométriques direct et inverse	48
Figure 2.13	Robot à six ddl muni d'un poignet du type rotule	52
Figure 2.14	Matrice jacobienne d'un manipulateur planaire à trois degrés de liberté	53
Figure 2.15	manipulateur n degré de liberté	54
Figure 2.16	Les forces agissant sur le lien i	60
Figure 3.1	Principe de la détermination de la trajectoire de référence	70
Figure 3.2	Suivi d'une trajectoire	70
Figure 3.3	Système de commande pour la génération de mouvement dans l'espace Articulaire	72
Figure 3.4	Système de commande pour la génération de mouvement dans l'espace opérationnel	72
Figure 3.5	Évolution des positions, vitesses et accélérations sur l'articulation j avec une loi trapèze	75
Figure 3.6	Description des différentes phases pour une tâche « pick & place »	76
Figure 4.1	Le Robot Cloos schématisé à l'aide logiciel Solidworks	80

Figure 4.2	Schéma cinématique de robot manipulateur (similaire au Cloos)	80
Figure 4.3	Robot à chaîne ouverte simple	81
Figure 4.4	Manipulateur n degrés de liberté	86
Figure 4.5	Etats initial et final	97
Figure 4.6	Forme de l'outil terminal	97
Figure 4.7	Organe terminal	98
Figure 4.8	Positions initiale et finale de l'organe terminal	98
Figure 4.9	Trajectoire rectiligne de l'outil	99
Figure 4.10	Accélération de l'outil	100
Figure 4.11	Vitesse de l'outil	100
Figure 4.12	Trajectoire dans le plan OXZ	100
Figure 4.13	Trajectoire dans le plan OXZ	100
Figure 4.14	Trajectoire dans le plan OYZ	101
Figure 4.15	Trajectoire dans OXYZ	101
Figure 4.16	Les graphes pour les variables articulaires	102
Figure 4.17	Repérage d'une courbe dans l'espace	103
Figure 4.18	Trajectoire rectiligne et circulaire dans l'espace obtenue à l'aide de logiciel SolidWorks	105
Figure 4.19	Le repère de trajectoire circulaire par rapport au repère R_0 atelier de Robot	106
Figure 4.20	Trajectoire circulaire désirée avec la trajectoire rectiligne représentée sur le repère du cercle dans l'espace et sur le plan YOZ du cercle	106
Figure 4.21	Trajectoire hélicoïdale dans le plan OXY	108

Figure 4.22	Trajectoire hélicoïdale dans le plan OXZ	108
Figure 4.23	Trajectoire hélicoïdale dans le plan OYZ	108
Figure 4.24	Trajectoire hélicoïdale dans le plan OXYZ	109
Figure 4.25	Graphes pour les variables articulaires	110
Figure 4.26	Trajectoire précédente (rectiligne) avec un obstacle (pilier)	110
Figure 4.27	Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OXY	110
Figure 4.28	Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OXZ	110
Figure 4.29	Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OYZ	111
Figure 4.30	Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OXYZ	111
Figure 4.31	Les graphes pour les variables articulaires pour éviter l'obstacle	112
Figure 4.32	Validation pour un robot à 6DDL	113
Figure 4.33	Trajectoire dans le plan OXY	115
Figure 4.34	Trajectoire dans le plan OXZ	115
Figure 4.35	Trajectoire dans le plan OYZ	115
Figure 4.36	Trajectoire dans l'espace OXYZ	115
Figure 4.37	Graphes des variables articulaires et graphes trouvés dans la littérature	117

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 Comparatif entre manipulateur sériel et manipulateur parallèle	23
Tableau 1.2 Signes conventionnels des couples cinématiques	27
Tableau 1.3 Nombre de morphologies possibles en fonction de nombre de degrés de liberté	29
Tableau 2.1 Nombre d'opérations effectuées pour chaque formalisme	62
Tableau 3.1 Formes du critère de performance utilisée	71
Tableau 3.2 Comparaison entre la planification de trajectoire dans les espaces articulaire et opérationnel	73
Tableau 3.3 Récapitulatif des lois utilisées pour la génération de mouvement dans l'espace articulaire	74
Tableau 4.1 Paramètres de DH du robot Cloos	80
Tableau 4.2 DH paramètres du Robot à six DDL similaire au Robot Cloos	97
Tableau 4.3 DH paramètres du robot	112
Tableau 4.4 DH paramètres du robot à l'état initial	114
Tableau 4.5 DH paramètres du robot à l'état final	114

INTRODUCTION GÉNÉRALE ET L'ETAT DE L'ART

Le développement de la robotique a été poussé en premier lieu par une motivation d'imitation des capacités basiques de l'être humain, afin de lui faciliter les tâches difficiles et répétitives, pénibles, cycliques dans l'industrie, telles que le soulèvement de pièces lourdes, serrage, découpage, assemblage, soudage etc. Les premiers robots furent alors des robots à structure série simple. Cette catégorie de robots a eu et a encore de nos jours du succès dans le domaine industriel.

L'architecture mécanique des robots sériels est inspirée du bras humain. Un robot sériel est constitué d'une chaîne cinématique ouverte, son mécanisme est donc composé de segments séparés par des articulations à un seul degré de liberté en rotation ou en translation. Son poids propre est dix fois plus important que sa charge utile.

Les systèmes mécaniques permettant le déplacement d'un solide (que l'on appellera l'organe terminal) par rapport à une base fixe joue un rôle très important dans de multiples applications. Un solide dans l'espace peut effectuer différents types de déplacement, des translations et des rotations que l'on appelle ses degrés de liberté.

Pour un solide dans l'espace le nombre total de degrés de liberté ne peut excéder 6 (par exemple 3 translations selon des axes perpendiculaires entre eux et 3 rotations autour de ces axes). On repère la position et l'orientation de l'organe terminal (ce que l'on qualifiera de posture) par ses coordonnées généralisées qui sont généralement les coordonnées d'un point particulier de l'organe terminal et des angles qui définissent son orientation.

Dés que on peut commander plusieurs degrés de liberté de l'organe terminal par l'intermédiaire d'un système mécanique celui-ci peut être qualifié de robot. Les systèmes multicorps sont souvent difficiles à modéliser à cause de leur géométrie qui peut être assez complexe. On peut citer les systèmes robotisés parallèles. Les demandes de performance des robots sont croissantes ce qui fait que leur conception doit être rigoureusement faite en tenant compte de tous les paramètres : géométriques, cinématiques et dynamiques.

Pour l'obtention du modèle dynamique, on peut utiliser : les multiplicateurs de Lagrange, le principe des travaux virtuels, la formulation de Newton-Euler....

La référence [1] présente un algorithme pour la résolution numérique de la dynamique inverse des robots manipulateurs de type sériel à n axes. L'algorithme est applicable aux

manipulateurs contenant n articulations de type rotoïde ou prismatique. Pour des paramètres de Hartenberg-Denavit et des données initiales, ainsi que pour une trajectoire donnée dans l'espace de coordonnées articulaires, l'algorithme produit les évolutions temporelles des couples ou des forces nécessaires pour conduire le manipulateur à travers la trajectoire prescrite.

La notion de complément orthogonal naturel [2] est utilisée pour concevoir un algorithme qui permet la dérivation systématique de la matrice inertie généralisée de dimension $n \times n$ d'un manipulateur à plusieurs axes. Deux algorithmes pour la simulation dynamique de robots manipulateurs sériels à n axes sont présentés.

Les calculs des modèles cinématique et dynamique dans le cas des robots parallèles sont complexes [3]. En effet, la complexité des architectures des robots parallèles rend souvent les modèles établis inadaptés à une commande dynamique sous la contrainte temps réel. En considérant le robot parallèle comme une entité composée de plusieurs robots sériels transportant une charge commune, cette approche permet une interprétation physique de la cinématique du manipulateur.

De nombreux travaux dans le domaine de la robotique ont été ainsi consacrés à l'étude du problème de planification des mouvements des systèmes robotisés. Ces travaux cherchent, en général, une meilleure gestion de la rapidité de l'exécution et de la fiabilité du fonctionnement du manipulateur.

Le problème de planification optimale des trajectoires pour les robots manipulateurs dans les tâches point par point (Soudage par points, transfert d'objet, ...) a fait l'objet de plusieurs recherches. Le problème est assez difficile ce qui a poussé beaucoup de chercheurs à adopter des hypothèses et à développer des approches dédiées à des cas particuliers. Une approche qui a été validée pour la robotique mobile est abordée [4] en essayant d'exploiter ces avantages pour traiter le cas de problème de planification de trajectoires des robots manipulateurs, la démarche consiste en un premier temps à normaliser l'échelle de temps puis à décomposer la trajectoire en deux fonctions: une de ces deux fonctions sera chargée de limiter l'espace de recherche des contraintes géométriques en exploitant les propriétés des algorithmes génétiques, les fonctions sont modélisées par des fonctions splines cubiques ensuite elles sont injectées dans un processus stochastique des algorithmes génétiques qui permet de trouver une trajectoire optimale pour le robot manipulateur.

Un modèle mathématique de robot de SCARA a été développé [5] comprenant la cinématique du robot. Les équations de la cinématique sont dérivées en employant la notation de D-H. Le robot de SCARA est construit pour réaliser l'opération de (pick and place) en utilisant le logiciel Solidworks avec une vérification des résultats avec MATLAB/simulink.

Le travail [6] est à caractère scientifico-pédagogique. Il consiste d'abord à présenter des méthodes utilisées pour la description du mouvement des systèmes multicorps à savoir ; les angles d'Euler, Denavit-Hartenberg, Lagrange et d'utiliser des techniques et des notations de la théorie des groupes et algèbre de Lie ainsi que les quaternions. Le but est d'appliquer ces méthodes pour l'étude cinématique et dynamique d'un manipulateur (robot), d'analyser les résultats trouvés et de les comparer. Cette étude comparative permet de démystifier les groupes de Lie et algèbre de Lie quant à leurs utilisations en robotique. Des programmes adéquats sont élaborés pour les calculs et des applications.

Les indices de performance cinéto-statiques ont été largement utilisés dans plusieurs applications de la robotique, telle la conception optimale, la planification des trajectoires, la programmation des tâches, l'analyse de la redondance et de la dextérité. Cela était réalisable si le mécanisme possède soit des articulations de translation, soit celles de rotation, toutefois, dans le cas d'un mécanisme contenant des translations et des rotations, les indices de performance basés sur le

Jacobien, tel que la manipulabilité ou le conditionnement du Jacobien, peuvent ne pas être utiles à cause de l'inconsistance des unités physiques et peuvent ainsi constituer des systèmes non commensurables [7,8,9]. Utilisant la notion de puissance, un nouvel indice de performance cinéto-statique est proposé. La puissance possède les mêmes unités physiques, que ça soit dans la translation ou dans la rotation. On peut ainsi en faire usage comme critère de performance homogène ou naturel pour les robots manipulateurs. [7,8,9] .

Ces dernières années, un nombre important de recherches est consacré à la planification de trajectoires sans collision. Beaucoup de planificateurs ne sont pas efficaces lorsque l'espace de travail est très encombré. Le problème peut se traduire de la façon suivante : étant données une configuration initiale et une configuration finale, trouver une trajectoire qui amène le robot à la position finale souhaitée, si elle existe, tout en évitant les obstacles. [10]

Il existe deux types d'approches pour la recherche de trajectoires : les méthodes globales et locales. Les méthodes globales sont basées sur la connaissance de l'ensemble de

l'espace libre. La construction de cet espace est très coûteuse en temps de calcul et n'autorise pas l'utilisation de telles méthodes en temps réel. Les méthodes locales se caractérisent par la connaissance locale de l'environnement. [10]

La planification de trajectoire est un sujet d'actualité. En robotique, on est souvent amené à devoir planifier des trajectoires pour permettre à un robot de se déplacer d'un point initial à un point final. Il existe donc différents algorithmes permettant de réaliser une telle tâche. :

- **Méthode par décomposition de l'environnement en cellule.** Cette méthode de planification de trajectoire consiste à décomposer l'environnement du robot en cellules. [11]

- **La méthode des champs de potentiel.** Les champs de potentiel [12] est une méthode qui assimile le robot à une particule soumise à un champ de forces répulsives et attractives. Un obstacle génère un champ de potentiel répulsif tandis que l'objectif à atteindre génère un champ de potentiel attractif. L'algorithme calcul donc un vecteur résultant qui indiquera au robot comment effectuer son déplacement.

- **La méthode de la fenêtre dynamique.** Cette méthode [13] travaille dans l'espace de commande du robot. Elle calcule les vitesses possibles du robot pour que celui-ci ne rentre en collision avec aucun obstacle. Elle permet : une minimisation du temps de parcourt, de l'énergie dépensée, maximisation de la vitesse.

- **La méthode de la bande élastique.** Une "bande élastique" est tendue entre le robot et l'objectif [14]. Cette bande peut de se déformer en présence d'un obstacle et elle génère dont une trajectoire envisageable par le robot.

- **La planification par logique floue. Elle se base sur la logique floue [15]:** Chaque grandeur physique est convertie en une variable linguistique .Le raisonnement se fait sur des variables linguistiques et non pas sur des grandeurs physiques.

- **La planification par juxtaposition de splines polynomiales.** C'est un algorithme qui génère des bouts de splines polynomiales qui respectent les contraintes cinématiques du robot. L'algorithme génère non pas des splines, mais simplement des polynômes [16].La trajectoire du robot est alors assimilé à la juxtaposition de plusieurs polynômes.

Cette méthode permet de respecter les contraintes cinématiques du robot. L'optimisation des paramètres des polynômes peut prendre en compte des fonctions de coût, ce qui permet de choisir les critères pour qu'une trajectoire soit optimale.

- **Deterministic Kinodynamic Planning.** Cette une méthode de planification [17] complexe qui permet de respecter toutes les contraintes du robot.

Notre travail qui s'insère dans le vaste domaine de la robotique est une contribution au problème de la planification de trajectoire pour un bras manipulateur. Un robot étant défini comme un système automatique en interaction directe avec le monde physique.

L'apparition des calculateurs et l'évolution des logiciels ont permis la programmation aisée des robots en vue de l'exécution des tâches.

L'évolution des sciences et des technologies (capteurs, actionneurs et intelligence artificielle) et le désir de l'être humain de découvrir de nouveaux espaces (mers, océans) et de nouveaux domaines comme la santé ont conduit à la recherche d'une plus grande autonomie pour le robot. Ce type de robot permet une programmation " haut niveau " des tâches et leur exécution car le robot ne nécessite pas d'intervention humaine. Lors de l'exécution d'une tâche, un bras manipulateur doit suivre une trajectoire pour se déplacer d'un point de départ à un point d'arrivée. C'est le problème de la planification de trajectoires.

Lorsque nous parlons de planification de trajectoire, nous associons forcément la planification de mouvements. Ce problème est énoncé de cette manière : Quels sont les mouvements que doit opérer le robot dans son environnement pour atteindre un point cible avec une configuration désirée ?

Le problème de la planification de trajectoire sous entend de considérer le problème aux niveaux géométrique, cinématique et dynamique du robot, pour cela le sujet demande un vaste recherche dans le domaine de la Robotique, commençant par donnée toutes les notions nécessaires à la compréhension du domaine de la robotique « bras manipulateur » : l'origine et l'historique de la robotique ; ainsi que quelques notions sur les chaînes cinématiques, les degrés de liberté .Nous avons aussi donné un comparaison entre robots sériel et parallèle .

Dans la deuxième chapitre on donne des notions et des rappels pour des calculs mathématiques et les différents modèles cinématiques utilisés en robotique ont été présentés: Le modèle *géométrique direct et inverse*, le modèle *cinématique direct et inverse* ainsi que la modélisation en utilisant le système de paramétrage de Denavit Hartenberg. Par la suite, on a passe à l'étude de la génération de trajectoires en donnant les définitions des approches liées au domaine de la robotique.

On aborde un quatrième chapitre traitant une application pour des robots d'intérêt industriel. On procède à l'étude cinématique du robot. Un programme sur le logiciel Matlab a été établi pour obtenir et illustrer les différents résultats et les graphes liés au problème posé.

L'applicabilité de l'algorithme [1] est illustrée par deux exemples, nous avons choisi l'un de ces deux exemples pour valider notre programme. Les exemples [1] sont traités dans l'espace articulaire sans détails, on a seulement le tableau de Hartenberg-Denavit et les graphes pour les articulations avec leurs états initiaux et finaux. Ainsi, on établit les modèles géométriques direct et inverse pour les appliquer dans notre programme. Pour tracer les différents graphes on est dans l'obligation de trouver les positions et l'orientation de l'organe terminal ou le point final du robot, c'est-à-dire trouver le trajectoire parcourue dans l'espace opérationnel.

Les résultats sont validés et commentés.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉ

1. Introduction :

Le robot a initialement été créé pour décharger l'homme des tâches fastidieuses, par exemple, les tâches de manutention qui sont souvent fatigantes, répétitives ou même infaisables manuellement. L'idée d'une machine se substituant à l'homme pour de telles tâches était donc séduisante. De ce besoin sont nés des manipulateurs relativement simples et souvent dédiés à une tâche bien définie.

Beaucoup de livres et articles en robotique, débutent avec une définition du mot «robot». Mais, il n'existe pas de définition formelle de ce terme. La plupart des définitions tentent de dire quelque chose comme «le robot est une machine capable à être reprogrammée. Le fait de l'importance la reprogrammation, elle est donc une caractéristique des robots. Mais cette dernière définition est trop grossière puisqu'elle peut inclure un four à micro-ondes ou une machine à laver vu l'aptitude de ces derniers à être reprogrammés.

1-1. Historique de la technologie robotique :

Dans les années 60, Joe Engleberger et George Devol ont fait breveter une conception de bras mécanique commandé par ordinateur. Engleberger a vu cette invention comme un robot primitif et ceci a permis la création de la compagnie « Unimation ».

L'ancêtre des bras est le bras télé-actionné développé dans les années 40. Ces bras « maître-esclave » étaient utilisés pour manœuvrer les matériaux radioactifs derrière un écran de verre. L'homme a été remplacé par un ordinateur, en utilisant la technologie développée pour des machines-outils à commande numérique à M.I.T. Boston. Au début des années 70 ,ce sont les japonais qui ont réalisé la première fois un robot industriel.

À l'origine, les robots étaient prévus pour remplacer les ouvriers humains. C'était particulièrement dans l'industrie automobile qui souffrait de divers problèmes. Alors, on a pensé que les robots seraient des machines universelles, capables d'être rapidement reprogrammées pour une grande variété de tâches. Ces idées ont motivé le développement des robots PUMA (Unimation) dans un projet de recherche pour General Motors. Le bras du robot a été étroitement modelé sur le bras humain et pourrait soulever un poids à peu près identique.

Dans la pratique, les robots étaient difficiles à reprogrammer, et n'ont pas pu concurrencer les humains dans les tâches où l'environnement du travail n'était pas donné avec précision. Les premières demandes de ces nouvelles machines étaient : la peinture et le soudage. Ici le robot a pu être programmé par un opérateur humain qui donnait à la machine, l'ordonnancement des mouvements des bras avec un langage approprié. Le progrès a été accompli pour des tâches d'assemblage avec le développement du robot SCARA. Ceci a été développé au Japon, pour le montage des composants sur des cartes électroniques.

L'idéologie de la robotique a changé, au lieu de remplacer les ouvriers humains par des robots on pense à faire exécuter les travaux que les humains ne peuvent faire par les robots : environnements dangereux, industries nucléaires, la lutte contre l'incendie... Les robots peuvent fonctionner dans les endroits inaccessibles aux humains, dans l'espace extra atmosphérique, sur le fond marin ...Comme toutes machines, les robots ont besoin d'entretien régulier. L'installation des robots dans une usine n'est pas simplement une question de remplacer des ouvriers par des robots. La chaîne de production devra être remodelée, le procédé de production doit être changé. Souvent le produit devra être modifié de sorte que les robots puissent manœuvrer les composants facilement. Il faut aussi l'emploi des techniciens et des programmeurs fortement qualifiés. De tels problèmes ont souvent entravé l'installation des robots dans les usines.

Les problèmes de robotisation des chaînes industrielles ou l'automatisation des processus méritent une étude approfondie qui n'a pas été incluse dans le présent mémoire.

1-2. Le domaine de l'utilisation des Robots :

La plupart des robots est utilisée dans le domaine de l'industriel à cause des tâches qui sont répétitives et fatigantes .Pour ne pas trop s'étaler dans des descriptions, On cite quelques exemples des robots industriels :

Robots soudage :



Par point



A l'arc

Figure (1.1) : Les robots de soudage

+ Les Robots de peinture :

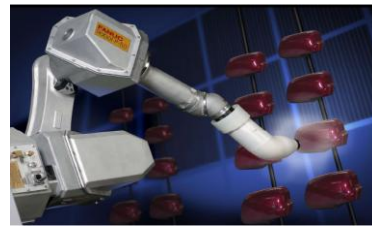
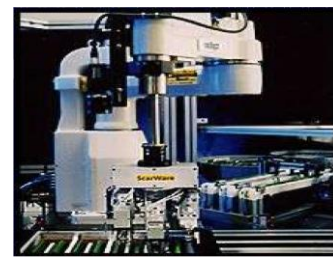


Figure (1.2) : Les robots de peinture

+ Autres applications :



Chargement

Polissage

Positionnement

Figure (1.3) : Les Robots de Chargement, Polissage et de Positionnement

1-3. Composants d'une cellule robotisée :

Généralement, une cellule robotisée est constituée des composants suivants :

- Le mécanisme : Ayant une structure proche de celle du bras humain, il permet de remplacer ou de prolonger son action. Ses mouvements sont menés par des actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques et qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés.
- La perception : Elle permet de gérer les relations entre le robot et son environnement. Les organes de perception sont des capteurs qui peuvent mesurer l'état interne du robot comme les positions et les vitesses des articulations, ou bien d'autres capteurs qui recueillent les informations sur l'environnement comme la détection d'objet, vision artificielle, mesure de distance etc.
- La commande : Synthèse des consignes des asservissements pilotant les actionneurs.
- Interface homme machine : Dispositif à travers lequel, l'utilisateur programme les tâches que le robot doit exécuter. Ce dispositif peut être une console de commande embarquée au robot, ou un micro-ordinateur distant.

Compte tenu de leur structure, les robots sériels ont des performances dynamiques limitées. Avec les robots parallèles, le fait de diminuer l'inertie du robot contribue à diminuer les effets de couplage dynamique. Les robots parallèles présentent de nombreux avantages pour les tâches de pick-and-place (prise et pose d'un objet), notamment grâce à leur surprenante vélocité.

1-4. Comparaison des architectures sérielles et parallèles :

Il est communément admis que les robots parallèles ont une bien meilleure dynamique que les robots sériels, bien que ces derniers aient un volume de travail plus important. Le tableau (1.2) résume les principales différences entre ces deux architectures.

Manipulateur sériel	Robot parallèle
Succession de segments en série de la base vers l'effecteur	Tout segment est au contact de la base et de l'effecteur
Chaîne cinématique ouverte	Chaîne cinématique fermée
Important espace de travail	Espace de travail restreint
Faible précision	Grande précision
Faible charge transportable	Lourde charge transportable
Faible rigidité	Très rigide

Tableau 1.1 : Comparatif entre manipulateur sériel et manipulateur parallèle [43]

1-5. Description des robots :

Tenant compte de la norme AFNOR, un robot est un manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent, à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction d'une façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel [1].

1-6. Constituants mécaniques d'un robot manipulateur :

Un robot manipulateur est constitué par deux sous ensemble distincts : un (ou plusieurs) organe terminal et une structure mécanique articulée.

1-6-1. Organe terminal :

L'organe terminal est un dispositif fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique (bras). Il est destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques,...), ou à les transformer (outil, torche de soudage, pistolet de peinture etc.).

La forme la plus simple des organes terminaux, ce sont les pinces, figure (1.5).

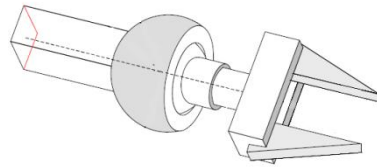


Figure (1.5) : Pince parallèle.

Ces pinces sont des mécanismes à un degré de mobilité pouvant effectuer l'une des deux actions : ouvrir, fermer. Ceci est adéquat pour la manipulation des objets, mais inadéquat pour d'autres tâches comme la soudure, l'assemblage ... Beaucoup de recherches ont été menées dans le sens du développement des organes terminaux. Ils existent des mécanismes comprenant plusieurs organes terminaux conçus de telle sorte qu'ils puissent être rapidement changés pour remplir une tâche définie.

D'autres recherches ont été menées dans le développement des poignets et mains anthropomorphes, afin de donner au robot la possibilité de s'adapter à l'objet à manipuler et à l'environnement de travail.

La liaison entre l'organe terminal et le bras est souvent réalisée par une jonction mécanique appelée poignet (Wrist en anglais). Cette jonction a pour tâche, l'orientation de l'organe terminal. Généralement on trouve des poignets sphériques (*Figure 1.6*) qui permettent des rotations autour des trois axes du référentiel lié à l'organe terminal.

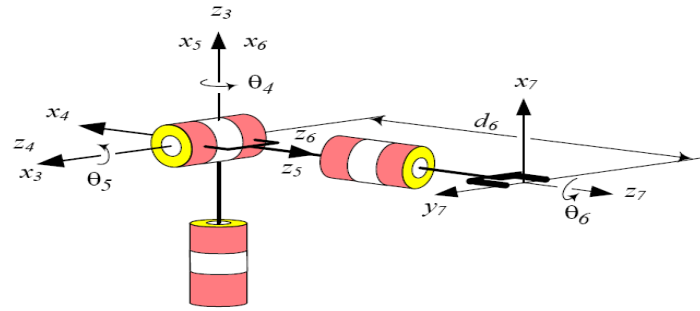


Figure 1.6 : Structure d'un poignet sphérique.

1-7. Structure mécanique articulée :

Le rôle de la structure mécanique articulée est d'amener l'organe terminal dans une situation donnée, selon des caractéristiques cinématiques données. Son architecture est une chaîne cinématique ce corps rigides, assemblés par des liaisons appelées articulations.

1-8. Couples cinématiques :

Un assemblage mobile de deux chaînons en contact permanent est appelé « couple cinématique ». Le contact en question peut se faire suivant un point, une ligne ou une surface.

On distingue deux sortes de couples cinématiques :

- Couples cinématique supérieurs : Le contact se fait suivant une ligne ou un point.
- Couples cinématique inférieurs : Le contact se fait suivant des surfaces.

Lorsqu'un chaînon constitue un couple cinématique avec un autre chaînon, cette condition impose certaines restrictions aux mouvements relatifs de ces chaînons. Le nombre de ces restrictions, définit le nombre des « conditions de liaisons ».

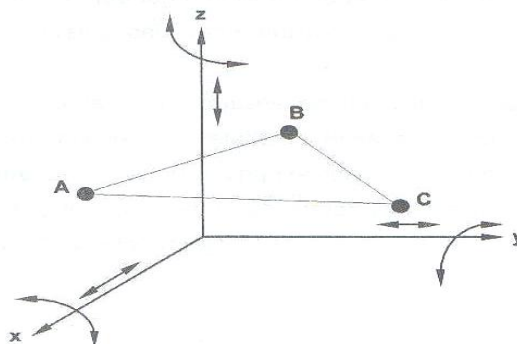


Figure 1.7 : Déplacements possibles (degrés de liberté) d'un solide dans l'espace.

Il est évident que dans le cas général, tout corps absolument rigide mobile dans l'espace (figure 1.7), dont la position est déterminée par trois points quelconques A, B et C choisis arbitrairement, possède six degrés de liberté (H).

On peut toujours représenter le mouvement d'un tel corps comme la rotation autour de trois axes arbitraires réciproquement perpendiculaires X, Y et Z, et le glissement le long de ces trois axes. Donc, le cas général, un corps solide dans l'espace est libre d'effectuer six mouvements indépendants : Trois rotations autour des axes X, Y et Z et trois translations suivant les mêmes axes.

Le nombre de « conditions de liaison » (S) imposées au mouvement relatif de chaque élément du couple cinématique ne peut varier que de 1 à 5 en sorte que $1 \leq S \leq 5$.

Par conséquent, le nombre de degrés de liberté (H) d'un élément du couple cinématique animé d'un mouvement relatif peut être exprimé par la relation :

$$H = 6 - S \quad (1.1)$$

De l'égalité (1.1), il suit que le nombre de degrés de liberté d'un élément du couple cinématique en mouvement relatif peut varier de 1 à 5.

Les couples cinématiques sont classés en fonction du nombre de conditions de liaison qui s'imposent au mouvement relatif de leurs éléments. Comme le nombre de conditions de liaison varie de 1 à 5, on a cinq classes de couples ; il y a donc des couples cinématiques de classes I, II, III, IV, et V. On détermine aisément la classe d'un couple cinématique en partant de la relation (1.1) :

$$S = 6 - H \quad (1.2)$$

Remarque :

Dans certains ouvrages de mécanique, on peut trouver la notation inverse pour la classe d'un couple cinématique ; c'est-à-dire la classe sera égale à H au lieu de S

Le tableau suivant nous donne les signes conventionnels des couples cinématiques les plus usuels en construction mécanique.


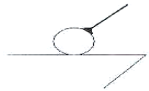

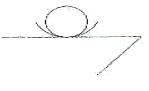









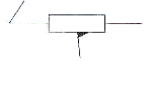



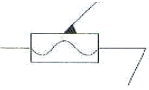
Classe du couple	Nombre de conditions de liaisons	Nombre de degrés de liberté	Appellation du couple	Dessin	Signe conventionnel
I	1	5	Sphère-plan		
II	2	4	Sphère-cylindre		
III	3	3	Couple sphérique		
III	3	3	Couple plan		
IV	4	2	Couple cylindrique		
IV	4	2	Couple sphérique guidé		
V	5	1	Couple de translation		
V	5	1	Couple de rotation		
V	5	1	Couple hélicoïdal		

Tableau 1.2 : Signes conventionnels des couples cinématiques [5].

Les couples cinématiques utilisés en robotique sont les couples de translation appelés « articulations prismatiques » et les couples de rotations appelés « articulations rotoïdes » et

même parfois, on peut trouver le couple hélicoïdal, qui peut représenter une articulation prismatique dont la translation est contrôlée par la rotation de l'un des deux chaînons.

1-9. Chaînes cinématiques :

Un mécanisme, ou chaîne cinématique, peut être classé dans l'une des deux grandes familles de chaînes cinématiques suivantes :

- Les chaînes cinématiques élémentaires ou simples : chacun de ses membres possède un degré de connexion (nombre de liaisons mécaniques) inférieur ou égal à deux.
- Les chaînes cinématiques composées ou complexes : l'un des membres, différent de la base, possède un degré de connexion supérieur ou égal à trois.

Les chaînes cinématiques élémentaires ou composées se subdivisent à leur tour en :

- Chaînes ouvertes qui possèdent des corps n'ayant qu'une seule liaison.
- Chaînes fermées dont tous les corps ont au moins deux liaisons.

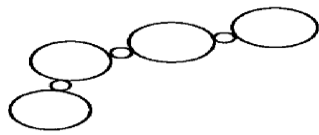


Figure 1.8.a Chaîne cinématique ouverte simple

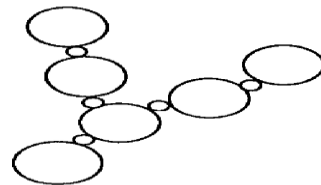


Figure 1.8.b Chaîne ouverte complexe



Figure 1.8.c Chaîne fermée simple

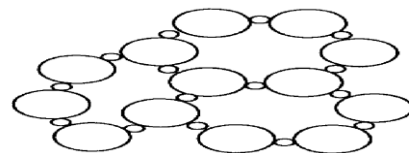


Figure 1.8.d Chaîne cinématique fermée complexe

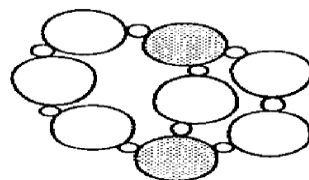


Figure 1.8.e Chaîne cinématique parallèle

Figure 1.8 : Les différents types de chaînes

Remarque :

- Une chaîne cinématique complexe ouverte est aussi appelée chaîne cinématique arborescente.
- Une chaîne cinématique parallèle est une chaîne cinématique complexe fermée ou deux corps particuliers sont reliés par un ensemble de chaînes cinématiques ouvertes.

1-10. Architecture des robots manipulateurs :1-10-1. Structures générales des robots :

L'étude des structures arborescentes ainsi que celle des structures fermées se ramène à celle des chaînes ouvertes simples, qui est généralisable aux structures complexes.

En considérant le type d'articulation et l'angle que font deux axes articulaires successifs (généralement 0° ou 90°), le nombre de morphologies possibles en fonction du nombre d'articulations se déduit de la combinaison des quatre valeurs que peuvent prendre ces paramètres (tableau 1.4).

Nombre de degrés de liberté	Nombre de structures
2	8
3	36
4	168
5	776
6	3508

Tableau 1.3 : Nombre de morphologies possibles en fonction de nombre de degrés de liberté.

Par convention, on appelle les trois premiers degrés de liberté d'une structure mécanique articulée d'un robot : « le porteur du robot », les degrés de liberté résiduels forment « le poignet », caractérisé par des dimensions beaucoup plus petites et une plus faible masse.

A partir du tableau (1.4), on constate qu'il existe 36 morphologies possibles pour le porteur, dont 12 seulement sont mathématiquement différentes et non redondantes comme montré dans la figure (1.9).

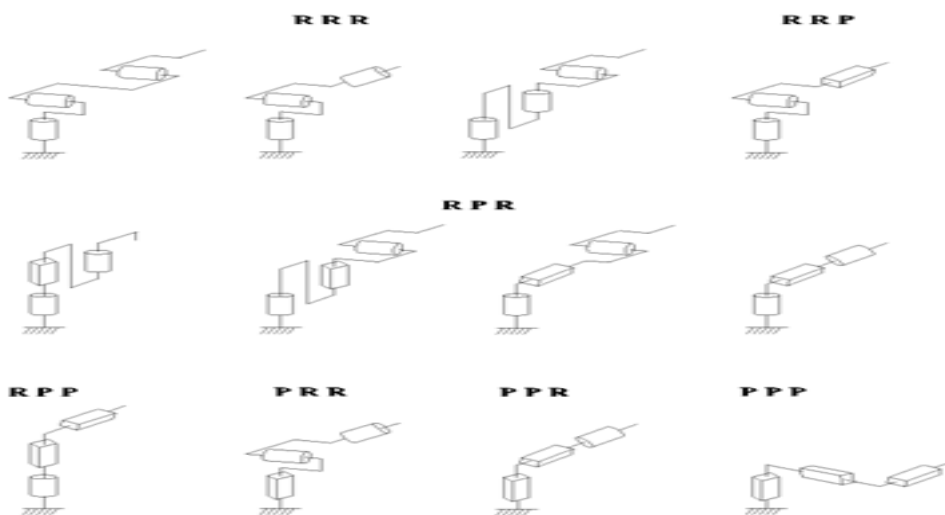


Figure 1.9 : Architecture des porteurs [2].

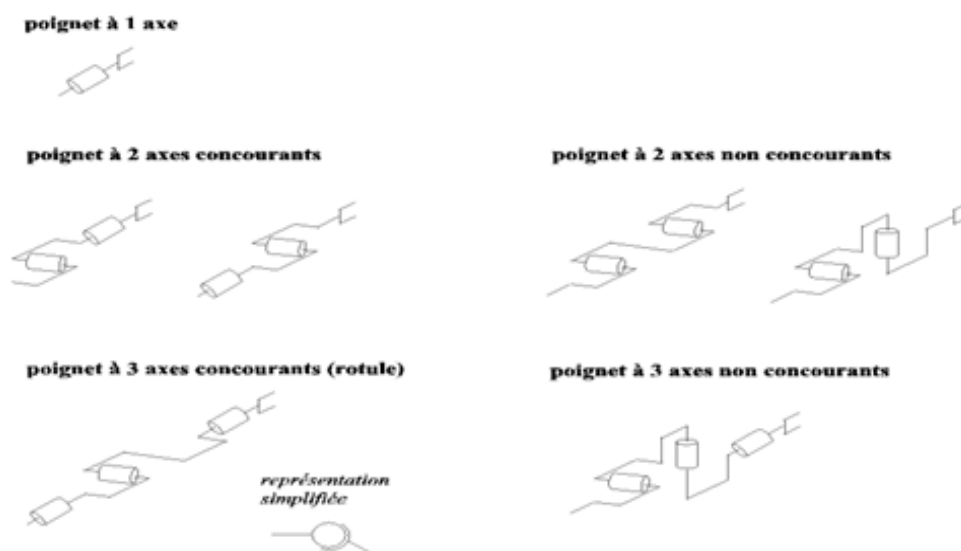


Figure 1.10 : Architecture des poignets [18].

Dans la pratique, la structure la plus classique d'un robot est celle comportant un bras à trois degrés de liberté avec un poignet sphérique comme montré dans la figure (1.11)

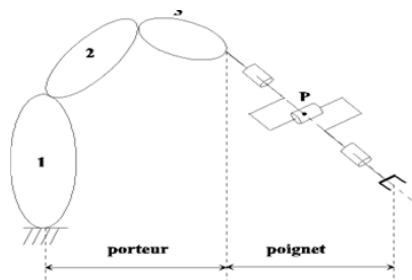


Figure 1.11 : Structure générale d'un robot manipulateur [1].

1-10-2. Robots sériels :

Dans les années 70, pratiquement tous les robots étaient des bras manipulateurs dont les actionneurs sont placés en série (caractère anthropomorphique). Ce type de robot, parfois appelé sériel, est défini de la façon suivante : la structure articulée est chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté ; chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'articulation ou sur l'un des segments précédents.

Ces robots ont pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et être relativement simple sur le plan des calculs liés à leur commande. Par contre ces robots présentent des inconvénients qui peuvent se résumer en ce qui suit :

- Une inertie élevée due aux masses réparties sur toute la chaîne cinématique (actionneurs et organes de transmission) peut engendrer des erreurs de positionnement, des oscillations et surtout limite la rapidité.
- Un manque de rigidité dû à la mise en série d'éléments souples. Le fait que les éléments soient disposés en série implique que chaque segment doit supporter la charge, mais aussi la masse des segments suivants.
- Une fatigue et une usure des liaisons de puissance assurant l'alimentation des actionneurs peut engendrer des pannes plus fréquentes.
- Une fatigue et une usure des liaisons assurant la circulation des informations entre les capteurs et la commande a des conséquences importantes sur la sécurité car une erreur de transmission peut engendrer des mouvements désastreux du robot.

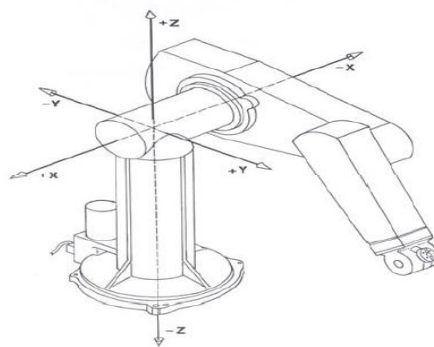


Figure 1.12 : Robot sériel.

1-10-3. Robots parallèles : [19, 20]

Un robot parallèle est constitué d'une plate-forme fixe et d'une autre plate-forme mobile (souvent appelée nacelle). La plate-forme mobile est reliée à la plate-forme fixe par plusieurs chaînes cinématiques en parallèle. L'ensemble forme une chaîne cinématique fermée de telle sorte que la définition simplifiée d'un robot parallèle peut être la suivante :

« Un manipulateur parallèle est constitué d'un organe terminal à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliée entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectue par n actionneurs simples ».

Le fait de mettre en parallèle plusieurs chaînes cinématiques entraînée chacune par un actionneur offre les avantages suivants :

- La capacité de charge est généralement plus importante que celle d'un robot série avec un poids de robot équivalent ;
- La structure parallèle donne la possibilité d'obtenir des mouvements à haute dynamique car les accélérations sont élevées ;
- La masse mobile est très faible, car les actionneurs sont souvent solidaires de la plate-forme fixe contrairement aux robots sériels qui comportent des actionneurs sur certaines articulations ;
- La fréquence propre de tels robots est élevée donc les erreurs dues aux oscillations incontrôlées de la structure mobile, observées sur les robots sériels, sont minimisées ;
- Une bonne rigidité mécanique confère aux structures parallèles une bonne précision ;
- La possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe procure de nombreux avantages.
- La symétrie des robots parallèles donne la possibilité de fabrication en série car le robot est composé de plusieurs parties identiques.

En contre partie de ces avantages, les robots parallèles présentent des inconvénients par rapport aux robots sériels :

- Limitation du volume de travail ;

- Le modèle géométrique est parfois difficile à obtenir ;
- La présence de singularités peut conduire à une perte de contrôle de la structure mobile ;
- Le fait qu'il existe un couplage fortement variable entre les différentes chaînes cinématiques complique souvent le réglage et oblige à surdimensionner les actionneurs pour contourner cette difficulté.

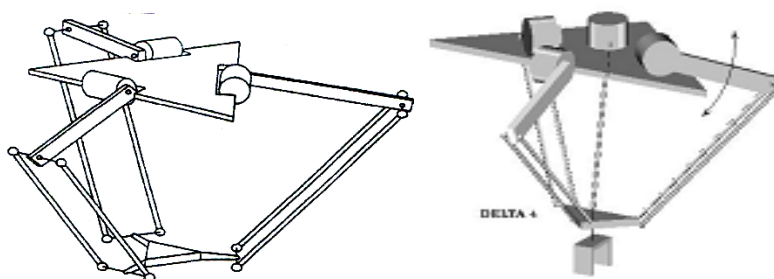


Figure 1.13: Exemple de structure parallèle « Robot DELTA » [21].

1-11. Définitions et terminologie.

1-11-1. Espace opérationnel & Espace articulaire :

L'espace opérationnel (appelé aussi espace de travail) d'un manipulateur est défini comme étant l'ensemble des positions et orientations accessibles par un repère lié à son organe terminal. La dimension de cet espace est définie par le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire la situation de ce repère. Si on note cet espace W , alors cet espace peut être défini comme suit :

$$W = \left\{ X \in \mathfrak{R}^m / m \in \mathbb{N}^* ; \forall i = \overline{1, m}, (X_i)_{\min} \leq X_i \leq (X_i)_{\max} \right\} \quad (1.3)$$

L'entier m est la dimension de W . Etant donné que le nombre de variables indépendantes nécessaires pour spécifier la situation d'un corps dans l'espace tridimensionnel est de six (trois rotations et trois translations), on peut déduire que :

$$0 < m \leq 6 \quad (1.4)$$

On appelle espace articulaire (ou configuration) Q d'un robot manipulateur l'état du robot représentant la situation de ses différents corps. L'espace Q est défini comme suit :

$$Q = \left\{ q \in \mathfrak{R}^n / n \in \mathbb{N}^* ; \forall i = \overline{1, n}, (q_i)_{\min} \leq q_i \leq (q_i)_{\max} \right\} \quad (1.5)$$

Où n est le nombre de variables articulaires.

1-11-2. Redondance :

Un robot est redondant lorsque le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre d'articulations motorisées. Les degrés de liberté supplémentaires autorisent le contournement des obstacles, cette propriété permet d'augmenter le volume du domaine opérationnel accessible.

1-11-3. Singularités :

Les manipulateurs de type sériel ou parallèle peuvent rencontrer des configurations dites singulières. Au voisinage de ces configurations, une augmentation des efforts dans les articulations du manipulateur ou une perte de rigidité peut avoir lieu alors que ses articulations motorisées sont bloquées. Son organe effecteur peut encore gagner ou perdre un ou plusieurs degré(s) de liberté. Une condition nécessaire à la robustesse d'un manipulateur est évidemment d'éviter les configurations singulières. Les singularités d'un manipulateur correspondent aux configurations annulant le déterminant de sa matrice jacobienne⁴ cinématique [19] [20] [23].

Les mouvements d'un manipulateur sont observés dans l'espace cartésien. Ces mouvements sont donnés au manipulateur par les actionneurs, que l'on décrit dans l'espace articulaire. Donc, quand les actionneurs ont des vitesses $\dot{\theta}$. On doit pouvoir connaître les vitesses \dot{X} que cela impose à l'effecteur dans toutes les directions. La correspondance entre ces deux mesures doit donc être établie, en vue d'imposer aux actionneurs les vitesses articulaires requises pour amener l'effecteur à se déplacer de la façon prescrite dans l'espace cartésien. [24]

Cette relation prend la forme suivante, où A et B sont les matrices jacobiennes du manipulateur

$$A\dot{X} = B\dot{\theta} \quad (1-6)$$

Dans certains cas, selon la position du manipulateur, cette relation n'amène plus de solution unique ou dégénère, c'est-à-dire qu'une entrée nulle amène une sortie non nulle ou vice-versa. Ces positions sont appelées les configurations singulières ou singularités du

manipulateur. Les lieux de singularité regroupent toutes les configurations singulières d'un mécanisme.

Les singularités des manipulateurs parallèles se présentent sous trois formes distinctes. Les types rencontrés sont décrits par Gosselin et Angeles (1990). Essentiellement, les singularités sont classées de la manière suivante :

- *Type I*: La matrice B est singulière. Ce type de singularité correspond généralement aux limites de l'espace atteignable. Dans cette situation, les vitesses cartésiennes peuvent être nulles pour des vitesses articulaires non nulles.
- *Type II* : La matrice A est singulière. Dans ce cas, des vitesses cartésiennes non nulles peuvent être observées même si les actionneurs présentent des vitesses articulaires nulles.
- *Type III* : Ce type de singularité peut se produire uniquement dans des cas particuliers, quand le manipulateur possède une architecture particulière.

Le type de la singularité qui sera étudié est celui attribué à la matrice jacobéenne A, le type II. En effet, celui-ci est le plus difficile à étudier et le plus susceptible de causer des problèmes mécaniques au manipulateur, en raison de l'augmentation des forces internes.

Pour les manipulateurs parallèles non-redondants, le calcul de ces lieux est connu.

Serfoui et Gosselin [25] (1994 et 1995) ainsi que Mayer St-Onge et Gosselin(1997) [26,27] ont développé l'expression pour les manipulateurs à trois degrés de liberté. La représentation et l'expression des lieux de singularité des manipulateurs parallèles à six degrés de liberté ont été établies par Mayer St-Onge (1997).

1-11-4. Parcourabilité :

L'espace de travail permet d'analyser les performances globales d'accessibilité d'un robot manipulateur. Or, une simple analyse d'accessibilité peut s'avérer insuffisante, même lorsque toutes les contraintes (butées, collisions) semblent avoir été prises en compte. Une condition nécessaire à la robustesse d'un manipulateur est bien évidemment que ses trajectoires soient parcourables. Si l'effecteur peut se déplacer entre deux points de l'espace de travail, cela signifie qu'il existe une trajectoire de liaison. Un changement de posture en cours de mouvement est nécessaire, ce qui oblige l'organe terminal à passer par une configuration « bras tendu » et donc par un point de la frontière de l'espace de travail : la

trajectoire doit être quittée et n'est donc pas parcourable. Il existe deux niveaux de parcourabilité, selon que la trajectoire entre les points soit spécifiée ou non. Pour chaque niveau de parcourabilité, il est utile de déterminer les régions de l'espace de travail qui sont réellement parcourables.

1-11-5. Dextérité :

Contrairement aux outils destinés à des analyses d'accessibilité et de parcourabilité, il existe des outils permettant d'évaluer des performances en un point particulier de l'espace de travail ou pour une configuration articulaire donnée. Ces analyses locales peuvent être complémentaires des précédentes. La dextérité, par exemple, peut être définie intuitivement comme mesurant l'aptitude de l'organe terminal du robot à effectuer « facilement » des petits déplacements arbitraires autour d'un point de l'espace de travail. La dextérité est étroitement liée au rapport entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires. Elle est généralement évaluée à l'aide de la notion de manipulabilité ou de l'indice d'isotropie [22].

1-11-6. Généricité :

Dans le cadre de la conception robuste de mécanismes, il est nécessaire de savoir si le mécanisme étudié est générique ou non puisque de faibles perturbations de ses paramètres peuvent changer ses propriétés globales lorsqu'il est non générique. La généricité d'un manipulateur implique que l'ensemble de ses configurations singulières forme une ou plusieurs surface(s) uniforme(s) et régulière(s) dans le domaine articulaire, c'est-à-dire qui ne se coupent pas. La propriété fondamentale d'un robot générique est sa stabilité vis-à-vis de petites perturbations de ses paramètres. Les robots non génériques sont reconnaissables par leurs singularités qui se coupent dans le domaine articulaire [22].

1-12. Coopération de robots :

D'une manière générale, on peut définir les systèmes multi-robots coopérants comme étant des systèmes regroupant des agents artificiels ayant une existence physique et étant engagés dans une tâche commune telle que : le fourragement qui signifie l'activité de recherche de nourriture ; la construction ; l'exploration des planètes ; l'industrie automatisée ; la recherche notamment dans les missions de secours ; le travail dans les environnements hostiles et les sites dangereux ; la maintenance et le nettoyage industriel ou bien domestique ; la sécurité, la surveillance et la reconnaissance ;...

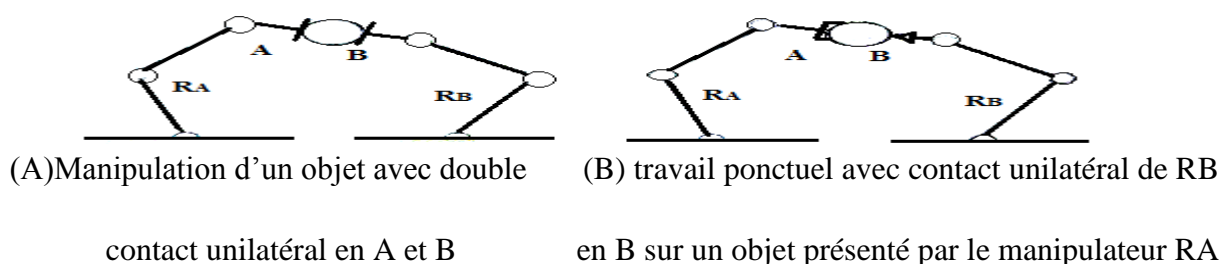
On peut s'apercevoir que constituer une équipe de robots s'avère crucial dans plusieurs cas comme :

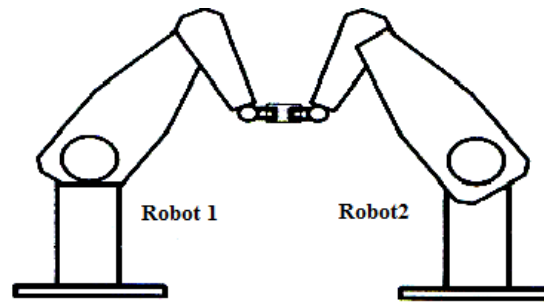
- Action distribuée : plusieurs robots peuvent être à plusieurs endroits différents au même moment ;
- Parallélisme : plusieurs robots peuvent réaliser des tâches différentes ou bien identiques à différents endroits au même moment ;
- La simplification de la conception : très souvent, dans une équipe de robots, chaque robot peut être réalisé de façon beaucoup plus simple qu'une solution constituée d'un unique robot.

Pour cas des manipulateurs, confronté à des contraintes géométriques, cinématiques, énergétique, ou autres, un manipulateur se trouve parfois incapable d'effectuer la manutention d'un objet particulier, d'où naturellement vient à l'esprit l'idée d'utiliser plusieurs robots « coopérants » pour la même tâche.

En réalité, plusieurs variantes de robots coopérants peuvent apparaître sans qu'il s'agisse toujours de manipuler un objet lourd. On peut trouver deux manipulateurs qui coopèrent pour la même tâche, dont l'un manipule l'objet, et l'autre effectue des travaux sur cet objet comme la soudure, le pointage, etc. L'ensemble d'un manipulateur posé sur un chariot peut faire l'objet de deux robots coopérants dont l'un s'occupe du déplacement dans l'espace atelier, et l'autre effectue le travail demandé dans un espace plus proche.

Les robots de coopération (*Figure 1.14*) sont aussi présents dans le domaine médical (robots médico-chirurgicaux), dont l'objectif principal est de développer une coopération entre l'homme (le chirurgien) est une machine (le robot) qui cherche à exploiter les capacités des deux pour réaliser une tâche mieux que ce que pourrait faire l'un des deux tout seuls . L'assistance des personnes handicapées fait aussi l'objet des robots coopérants avec l'homme dont l'objectif est d'imiter les mouvements de certains organes de l'être humain.





(C) Robots manipulateurs 6R, coopérants pour le transfert d'une charge

Figure 1.14 : Exemples de robots coopérants.

La coopération entre plusieurs robots passe bien entendu par un partage de leurs connaissances sur l'environnement. Dans le cas des manipulateurs, il s'agit d'intégrer les données concernant l'environnement du travail, les obstacles ainsi que l'objet à manipuler.

Par rapport à l'opération d'un robot seul, la coopération entre plusieurs robots implique des algorithmes décisionnels supplémentaires (allocation de tâche, planification d'actions coopératives, coordination), et pose des problèmes particuliers aux processus de supervision des robots individuels et de supervision de l'ensemble des robots. Cela implique le développement d'une architecture décisionnelle pour pouvoir exploiter les modèles de l'environnement construits et raisonner explicitement sur les capacités des robots à construire et à mettre à jour ces modèles.

1-13. Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté d'une manière générale la terminologie utilisée en robotique ainsi que les différents constituants et structures mécaniques des robots industriels. Les deux architectures utilisées ont été brièvement définies. Dans ce qui suit, un intérêt particulier sera porté à l'architecture sérielle. Dans le chapitre suivant, on abordera d'une manière approfondie la modélisation mathématique des robots tenant compte du comportement cinématique et dynamique des bras manipulateurs, et on tentera de proposer des méthodes algorithmiques directes et inverses pour l'analyse des robots.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DES BRAS MANIPULATEURS

2. Introduction :

En robotique, l'étude des trajectoires des bras manipulateurs est souvent primordiale. Pour cela on est amené à décrire les différentes relations mathématiques qui permettent de définir les mouvements dans l'espace et à connaître les tâches qui seront réalisées par l'outil terminal du robot comme par exemple le soudage ou la peinture etc.....

Dans la pratique, la description du mouvement d'un robot manipulateur dans l'espace est réalisée en fonction du modèle géométrique, cinématique et dynamique. Ainsi, on présentera quelques définitions concernant ces modèles ainsi que la façon de leurs obtentions.

Le problème principal dans la modélisation est de trouver une relation entre les consignes données dans l'espace opérationnel de la tâche et les postures des éléments du robot dans l'espace articulaire : cette relation permet de fournir une interface masquant le problème mathématique à l'utilisateur par le biais d'un programme informatique pour manipuler un robot de manière interactive.

Vu la complexité et la non linéarité des problèmes, un modèle complet du comportement réel d'un robot n'est pas réalisable. L'étude cinématique et dynamique des robots se fait généralement sur des modèles simplifiés, obtenus en introduisant des hypothèses simplificatrices qui permettent de résoudre les équations qui représentent ces modèles.

2-1. Modélisation et identification :

2-1-1. Modélisation :

En robotique, on associe à tout élément du poste de travail un ou plusieurs repères.

Ces repères sont généralement définis de telle sorte que leurs origines correspondent à des directions et à des points privilégiés ayant un rôle fonctionnel lors de l'exécution d'une tâche, telle que la direction d'insertion, le centre de gravité, l'orientation de l'articulation ou extrémité de l'outil [5].

La notion de transformation de repère est fondamentale, elle permet :

- d'exprimer la situation des différents corps du robot les uns par rapport au autres ;

- de spécifier les situations que doit prendre le repère associé à l'organe terminal du robot pour réaliser un tâche donnée ainsi que les vitesses correspondantes.

Nous présentons dans ce chapitre une transformation qui permet de décrire de façon homogène les différents systèmes de coordonnées.

Représentation des transformations et des mouvements rigides :

Les rappels mathématiques sur les transformations rigides et l'orientation des corps dans l'espace sont donnés dans plusieurs références dont [28], [29], [30] et des ouvrages mathématiques. Il s'agit de : notations et définitions, points, solides, transformations rigides, rotations, matrice de rotation, rotation d'un point appartenant à un solide, rotation d'un vecteur, propriétés des rotations, ..., coordonnées exponentielles, angles d'Euler, ...

2-2. Formalismes de description des robots :

La description de la structure d'un robot en termes mathématiques est primordiale. Cette description est essentiellement basée sur la position relative ou absolue des différents corps du robot dans l'espace. Il est alors nécessaire de choisir des méthodes pour :

- Décrire les transformations de coordonnées et leur composition afin de placer les différents corps dans l'espace ;
- Obtenir une notation cohérente et universelle pour paramétrer une structure articulée.

2-2-1. Transformation de coordonnées :

Il existe une grande variété d'outils pour la représentation des mouvements des corps solides dans l'espace. La géométrie analytique donne des outils très performants pour la représentation et la résolution des équations représentant les transformations ponctuelles. Ainsi, dans le cas planaire, une projection dans le plan complexe peut être très utile vu la simplicité des calculs dans le corps des nombres complexes.

Dans ce travail, nous avons adopté la méthode des matrices de transformation homogènes 4×4 , qui permettent la représentation de n'importe quelle transformation : translation, rotation ou même le mouvement hélicoïdal. Cette méthode est courante dans la littérature [1], [34], [35], vu son aptitude à décrire des robots de degrés de liberté quelconques ainsi que la simplicité de la programmation informatique des calculs matriciels.

➤ Coordonnées homogènes :

Soit P un point dans un repère cartésien de coordonnées P_x, P_y, P_z *figure (2.1)* on appelle coordonnées homogènes du point P les termes wP_x, wP_y, wP_z où w est un facteur d'échelle [1]. En robotique $w=1$, on note P :

$$P = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

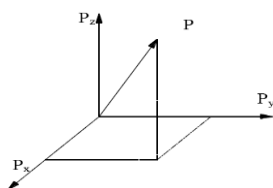


Figure (2.1) : Représentation d'un point dans l'espace

➤ b. Transformation Homogène :

Faisons subir une transformation quelconque au repère R_i , cette transformation l'amène sur le repère R_j , *figure (2.2)* [36]. Cette transformation est définie par la matrice jT_i appelée matrice de transformation homogène, de dimension (4x4), telle que :

$${}^jT_i = \begin{bmatrix} {}^j h_i & {}^j n_i & {}^j a_i & {}^j P_i \\ h_x & n_x & a_x & P_x \\ h_y & n_y & a_y & P_y \\ h_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Où ${}^j h_i, {}^j n_i$ et ${}^j a_i$ désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes x_i, y_i et z_i du repère R_j exprimés dans le repère R_i et où ${}^j P_i$ est le vecteur du repère R_j dans le repère R_i .

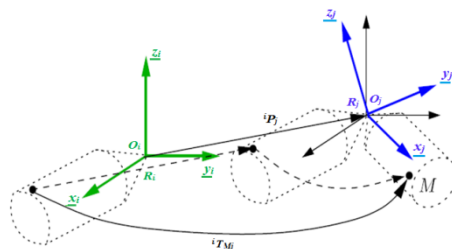


Figure 2.2 : Transformation des repères.

Par abus de notation la matrice de transformation homogène peut être exprimée de la manière suivante :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^j A_i & {}^j P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j h_i & {}^j n_i & {}^j a_i & {}^j P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2-2-1-1. Matrice de transformation d'une translation pure

Soit la transformation notée *Trans* (a,b,c), où a, b et c désignent les composantes de la translation le long de x, y et z respectivement [36].

$${}^i T_j = \text{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

L'orientation est conservée dans cette transformation.

2-2-1-2. Matrice de transformation de rotation autour des axes principaux :

2-2-1-2-1. Transformation correspondante à une rotation θ autour de l'axe x :

Soit la rotation **Rot**(x, θ) figure (2.3). On déduit les composantes des vecteurs unitaires ${}^i h_j$, ${}^i n_j$ et ${}^i a_j$ portés respectivement par les axes x_i , y_i et z_i du repère R_j exprimées dans le repère R_i .

Si on note par S_θ et C_θ les sinus et cosinus de θ respectivement nous obtenons :

$${}^i T_j = \text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta & 0 \\ 0 & S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rot}(x, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Rot (x, θ) désigne la matrice d'orientation de dimension (3x3).

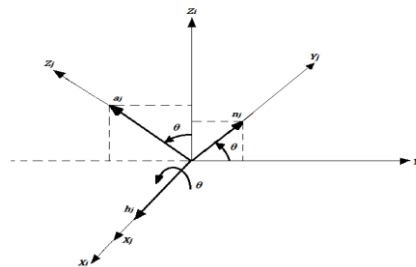


Figure 2.3 : Transformation de rotation autour de l'axe x.

Avec un raisonnement analogue, nous obtenons les matrices de transformation correspondante à une rotation autour de l'axe y et autour de l'axe z.

2-2-1-3. Propriétés des matrices de transformation homogène :

Les matrices de transformations homogènes possèdent certaines propriétés qui sont les suivantes :

Une matrice de transformation peut se mettre, d'après la relation (2.4), sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} h_x & n_x & a_x & P_x \\ h_y & n_y & a_y & P_y \\ h_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

- La matrice A représente la rotation alors que la matrice colonne P représente la translation. Pour une translation pure, $A=I_3$ (I_3 représente la matrice identité d'ordre 3), tandis que pour une rotation pure, $P=0$.
- La matrice A est orthogonale, c à d $A^{-1} = A^T$.
- L'inverse de la matrice de transformation peut être calculé par (2.7):

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} & & -h^T * P \\ A^T & & -n^T * P \\ 0 & 0 & 0 & -a^T * P \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ 0 & A^T & & -A^T * P \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

L'inverse d'une transformation jT_i est $({}^iT_j)^{-1} = {}^iT_j$

- Si un repère R_0 a subi k transformations consécutives (*figure 2.4*) et si chaque transformation i , ($i=1, \dots, k$), est définie par rapport au repère courant R_{i-1} , alors la transformation 0T_k peut être déduite de la composition des multiplications à droite de ces transformations :

$${}^0T_k = {}^0T_1 T_2 T_3 \dots T_{k-1} T_k \quad (2.8)$$

- Si un repère R_j , défini dans le repère R_i par la transformation iT_j , subit une transformation T exprimée dans le repère R_i , se transforme en R_j , à partir des propriétés *e* et *d*, on déduit que :

- une multiplication à droite de la transformation iT_j signifie que la transformation est faite par rapport au repère courant R_j , *figure (2.5)* : ${}^iT_{j'} = T {}^iT_j$

- une multiplication à gauche signifie que la transformation est faite par rapport au repère de référence R_i : $T^i T_j = {}^i T_j$,

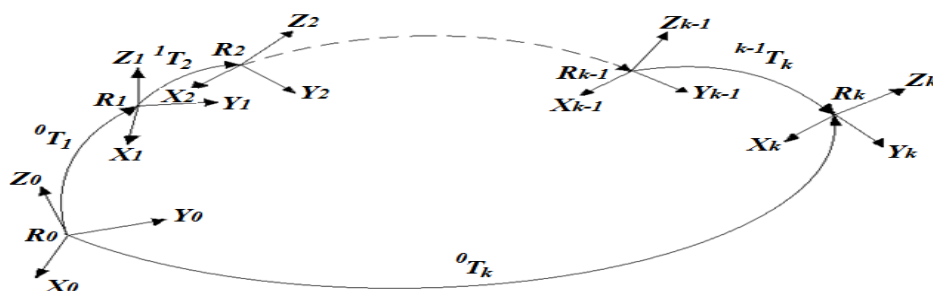


Figure 2.4 : Composition des transformations : multiplication à droite.

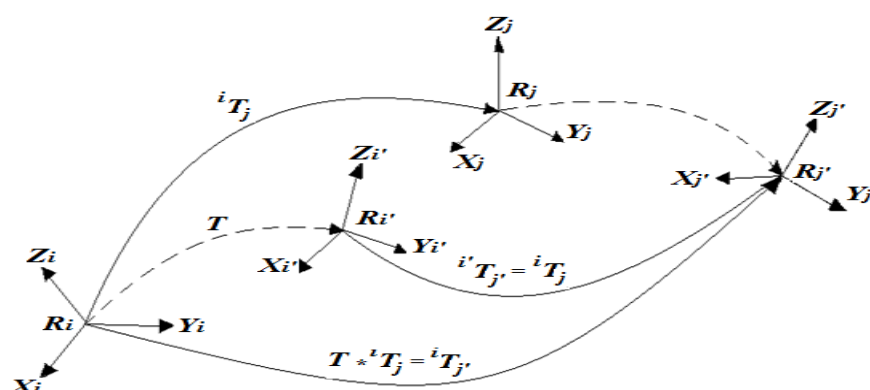


Figure 2.5 : Composition des transformations : multiplication à gauche.

2-2-2. Modélisation des robots manipulateurs :

2-2-2-1. Méthodes et notations :

La modélisation des systèmes mécaniques articulés exige une méthode adéquate pour la description de leurs morphologies. Il existe plusieurs méthodes pour décrire une telle structure dont les plus utilisées en robotique sont :

- Description de sheth [37]

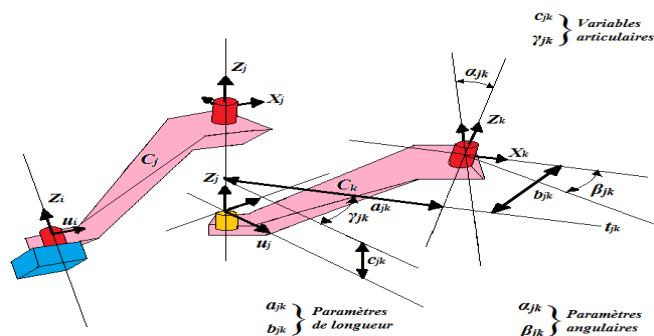


Figure 2.6 : Définition des paramètres géométriques suivant Sheth-Uiker.

Kleinfinger et Khalil ont proposé une méthode pour la description des chaînes cinématiques sérielles, arborescentes ou bouclées. La *figure* (2.6) présente l'assignation des repères pour cette notation et définit les paramètres nécessaires. Cette figure montre un corps C_j avec une articulation rotoïde, et un corps C_k avec une articulation prismatique. Ces deux corps sont reliés par leurs articulations à un corps rigide C_j qui forme un embranchement.

Cette notation utilise un repère par lien, et six paramètres pour la modélisation de chaque corps. Ce nombre élevé par rapport à d'autres méthodes rend la matrice de transformation beaucoup plus complexe à définir, mais il est avantageux pour donner à la méthode l'aptitude de représenter tout type de structure.

- Description de Denavit-Hartenberg [38] et [39].

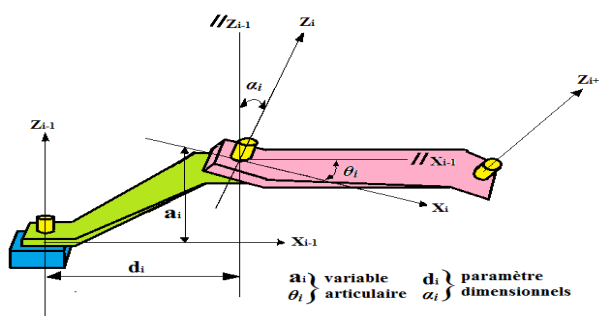


Figure 2.7: Définition des paramètres géométriques suivant Denavit-Hartenberg [39] et [40].

Denavit et Hartenberg ont proposé une méthode reposant sur l'assignation d'un repère unique pour chaque lien. La *figure* (2.7) présente l'utilisation de cette notation pour deux liens successifs

Ces méthodes sont basées sur le système de coordonnées relatives. Plusieurs auteurs ont utilisé ces descriptions telles que [26],[38],[39] et [1]. Ces méthodes donnent de bons résultats lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes mécaniques simples par contre elles présentent des ambiguïtés lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes de structure complexe : structure fermée. La notation de Khalil Kleinfinger permet la description des différents types de chaînes articulées telles que les structures à boucles.

2-2-2-2. Modélisation géométrique : Description de la géométrie des robots à structure ouverte simple :

Ce paragraphe présente la méthodologie à suivre pour décrire les robots à structure ouverte simple.

Une structure ouverte simple est composée de $n+1$ corps notés C_0, \dots, C_n , et de n articulations. Le corps C_0 désigne la base du robot et le corps C_n le corps qui porte l'organe terminal. L'articulation i connecte le corps C_i au corps C_{i-1} *figure (2.8)*. La méthode de description est fondée sur les règles et convention suivantes :

- Les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeu, pas d'élasticité) : rotoïdes ou prismatiques ;
- le repère R_i est lié au corps C_i ;
- la variable de l'articulation i est notée q_i .

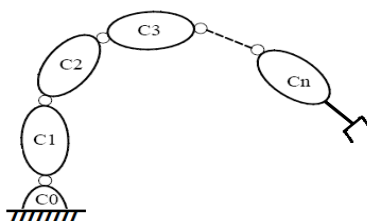


Figure 2.8 : Robot à structure ouverte simple.

Le repère R_i , fixé au corps C_i est défini de sorte que :

- l'axe z_i est porté par l'axe de l'articulation i ;
- l'axe x_i est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_i et z_{i+1} .

Le passage du repère R_{i-1} au repère R_i s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants *figure (2.9)* :

- α_i : Angle entre les axes z_{i-1} et z_i correspondant à une rotation autour de l'axe x_{i-1}
- d_i : Distance entre z_{i-1} et z_i le long de x_{i-1} .
- θ_i : Angle entre les axes x_{i-1} et x_i et qui correspond à une rotation autour de l'axe z_i
- a_i : Distance entre x_{i-1} et x_i le long de z_i

- La variable articulaire q_i est associée à la $i^{\text{ème}}$ articulation

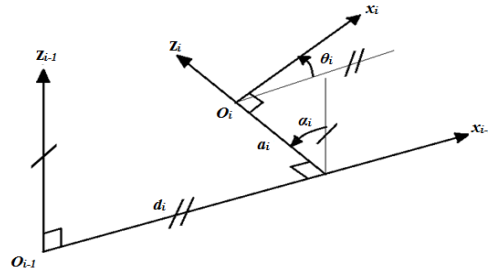


Figure 2.9 : Paramètres géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple.

La variable articulaire q_i associée à la $i^{\text{ème}}$ articulation est soit θ_i , soit a_i , selon que cette articulation soit de type rotoïde ou prismatique, ce qui se traduit par la relation.

$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i a_i. \quad (2.9)$$

Avec $\sigma_i = 0$: si l'articulation est rotoïde

$\sigma_i = 1$: si l'articulation est prismatique

$$\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$$

La matrice de transformation définissant le repère R_i dans le repère R_{i-1} est donnée par

$${}^{i-1}T_i = Rot(x_{i-1}, \alpha_i) Trans(x_{i-1}, d_i) Rot(z_i, \theta_i) Trans(z_i, a_i) \quad (2.10)$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & d_i \\ \cos\alpha_i \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i & -a_i \sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \cos\theta_i & \cos\alpha_i & a_i \cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Le modèle géométrique direct d'une chaîne cinématique simple ouverte de $n+1$ corps et de n articulations *figure* (2.8) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaires. Il peut être représenté par la matrice de passage 0T_n :

$${}^0T_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = \Pi \quad (2.12)$$

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.13)$$

Le modèle géométrique direct du robot peut aussi être représenté par la relation :

$$X = f(q) \quad (2.14)$$

q étant le vecteur des variables articulaires tel que :

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \tag{2.15}$$

Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_m]^T \tag{2.16}$$

Des descriptions de la géométrie des chaînes cinématiques à structures arborescentes et des chaînes cinématiques à structures fermées peuvent être données. On se contente uniquement des figures 2.10 et 2.11.

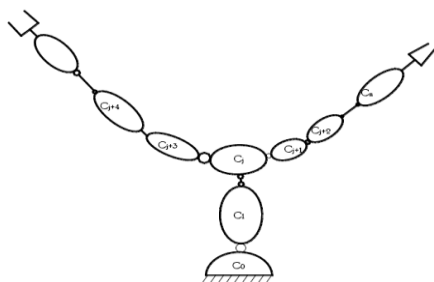


Figure 2.10: structure arborescente.

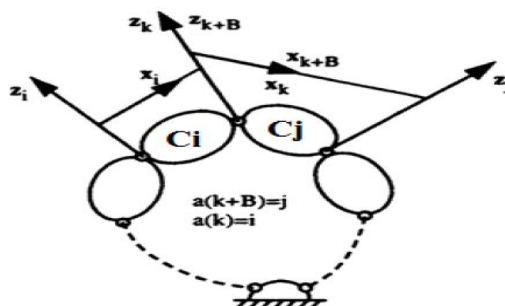


Figure 2.11: structure fermée

2-2-2-3. Modèle géométrique inverse des chaînes ouvertes simples :

Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. La forme explicite qui donne toutes les solutions possibles constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse figure (2.12). Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse, on peut calculer une solution particulière par des méthodes numériques [1].

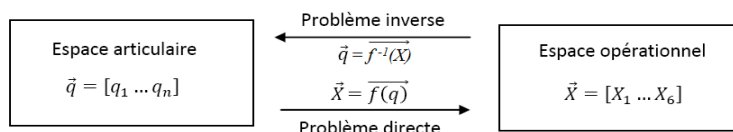


Figure 2.12 : Modèles géométriques direct et inverse

Soit T_E^d une transformation homogène qui représente une situation désirée du repère outil R_E par rapport au repère atelier, d'une manière générale, on peut exprimer T_E^d par :

$$T_E^d = Z T_n^0 E \tag{2.17}$$

Où

- Z est la matrice de transformation homogène définissant la situation du robot (repère R_0 dans le repère atelier). Dans notre étude la matrice Z est égale à l'identité.
- T_n^0 est la matrice de transformation homogène du repère terminal R_n dans le repère R_0 .
- E est la matrice de transformation homogène définissant le repère outil R_E dans le repère R_n .

Lorsque le nombre de degrés de liberté $n \geq 6$ on peut écrire la relation suivante :

$$T_n^0 = Z^{-1} {}^d T_E E^{-1} \quad (2.18)$$

Lorsque le nombre de degrés de liberté < 6 , l'espace opérationnel du robot est inférieur à six et il n'est pas possible de faire coïncider le repère outil R_E avec un repère ${}^d R_E$ décrivant la tâche sauf lorsque les repères R_E et ${}^d R_E$ sont conditionnés de façon bien particulière pour s'adapter au nombre insuffisant de degrés de liberté.

Dans le calcul du modèle géométrique inverse trois cas se présentent :

- ❖ Absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments.
- ❖ Infinité de solutions lorsque :
 - Le robot est redondant vis-à-vis de la tâche.
 - Le robot se trouve dans certaines configurations singulières
- ❖ Solutions en nombre fini : on dit qu'un robot manipulateur est résoluble lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant

2-2-2-3-1. Calcul du modèle géométrique inverse :

Plusieurs méthodes sont disponibles pour le calcul du modèle géométrique inverse [38]et[42]:

- La méthode de Paul traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plus part des robots industriels ;

- la méthode de Pieper permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques ;
- la méthode générale de Raghavan et Roth donne la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme.

On adopte la méthode de Paul qui convient le mieux pour notre cas. Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot ; pour les classes de robot à six degrés de liberté de type $6R$ ou $5R1P$, le nombre maximum de solutions est de 16, lorsque le robot possède trois articulations d'axes rotoïdes concourants, le nombre maximum de solutions est de 8.

Dans tous les cas, il décroît lorsque les paramètres géométriques prennent certaines valeurs particulières.

Principe de la méthode de Paul :

Soit T_n^0 la matrice de transformation homogène d'un robot manipulateur qui permet le transfert du repère R_n au repère R_0 :

$$T_n^0 = T_1^0(q_1)T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) \quad (2.19)$$

Soit U_0 la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Donc, on cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = Z {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) E_0 \quad (2.21)$$

Ou bien :

$$U^{-1}E_0 = Z {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.22)$$

Avec :

E : matrice de transfert du repère outil dans le repère R_n .

Z : la matrice du repère atelier.

On suppose que $Z= I_4$ matrice d'identité (4*4), et on pose $U=U_0*E^I$. La relation (2.22) devient :

$$U = {}^0T_1(q_1){}^1T_2(q_2) \dots \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.23)$$

Paul [1] a proposé une méthode pour la résolution analytique de l'équation (2.23) qui consiste à pré multiplier successivement les deux membres de l'équation (2.23) par la matrice ${}^iT_{i-1}$ pour i variant de 1 à $n-1$, opération qui permet d'isoler et d'identifier une par une les variables articulaires que l'on recherche. pour une chaine ouverte à six degrés de liberté ,on a:

$$\left. \begin{aligned} U &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 U &= {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 {}^2T_1 U &= {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 {}^2T_1 {}^3T_2 U &= {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 {}^2T_1 {}^3T_2 {}^4T_3 U &= {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 {}^2T_1 {}^3T_2 {}^4T_3 {}^5T_4 U &= {}^5T_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Avec : ${}^iT_{i-1} = \text{inverse de } {}^{i-1}T_i$

La solution des équations (2.24) demande de l'intuition et l'utilisation de la méthode sur un grand nombre de robots industriels. Elle permet de résumer les principaux types d'équations des variables articulaires.

✚ Cas des Robots avec poignet rotule :

La plupart des Robots industriels à six ddl comportent trois rotations d'axes concourants au niveau du poignet .Un tel poignet, encore appelé poignet rotule, est caractérisé par le jeu de paramètres géométriques suivant :

$$(2.25) \quad \begin{cases} d_5 = a_5 = d_6 = 0 \\ \sigma_5 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \end{cases}$$

La position du centre de la rotule est uniquement fonction des variables articulaires : q_1, q_2, q_3 . Ce type de structure assure le découplage entre la position et l'orientation et conduit à deux ensembles d'équations à trois inconnues (*figure 2.13*).

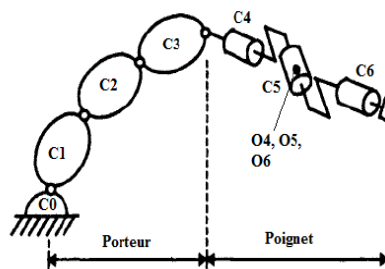


Figure (2.13) : Robot à six DDL muni d'un poignet du type rotule

2-2-2-4. Modélisation cinématique :

Le modèle géométrique du robot (qu'il soit direct ou inverse) est utile car il apporte une vision «globale» du comportement d'un robot. Toutefois, il reste limité pour le contrôle réel d'un robot. En effet, il correspond à un contrôle « point à point », qui bien qu'encore largement utilisé dans le monde industriel, répond mal au problème d'un déplacement entre deux points relativement distants. Il est nécessaire alors d'introduire les paramètres de vitesses et accélérations pour obtenir un contrôle du comportement plus efficace. Le contrôle en position n'est donc qu'un modèle restreint par rapport à la réalité robotique.

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires il est noté :

$$\dot{\vec{X}} = J(q) \cdot \dot{\vec{q}} \quad (2.26)$$

Où $J(q)$ désigne la matrice jacobienne du mécanisme. Elle intervient aussi dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires dX des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées dq , soit :

$$d\vec{X} = J(q) \cdot d\vec{q} \quad (2.27)$$

Le modèle cinématique permet non seulement de compléter éventuellement le modèle géométrique en tenant compte des vitesses, mais aussi de le remplacer : en agissant par accroissements successifs.

Le modèle cinématique possède une propriété essentielle : il est une différentiation du modèle géométrique. Il est donc une linéarisation du système d'équations non linéaires représentant le modèle géométrique. Par conséquent, on peut toujours facilement obtenir les transformations inverses, puisqu'elles proviennent de l'inversion d'un problème linéaire. Toutefois le modèle cinématique comporte aussi des inconvénients :

- la non unicité du modèle géométrique inverse implique qu'il existe plusieurs " chemins " pour se rendre d'un point à un autre ;
- le traitement par incrément peut amener à des imprécisions provoquant des singularités, mécaniques et/ou mathématiques.

Une dérivation de l'équation (2.24) par rapport au temps, donne le modèle cinématique du deuxième ordre, qui permet de calculer les accélérations des coordonnées opérationnelles en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires.

$$\ddot{\vec{X}} = J \cdot \ddot{\vec{q}} + \dot{J} \cdot \dot{\vec{q}} \quad (2.28)$$

2-2-2-4-1. Formation de la matrice jacobienne :

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la matrice jacobienne. Si on écarte les méthodes de calcul symbolique permettant de dériver les équations du modèle géométrique direct, il faut calculer les influences de chaque articulation sur l'organe terminal comme le montre la *figure* (2.14). Cette approche, très répandue pour le calcul cinématique, peut s'effectuer suivant différents moyens qui sont plus ou moins efficaces au niveau des algorithmes et du nombre d'opérations nécessaires. Ces méthodes se caractérisent par le repère dans lequel la matrice jacobienne est exprimée ainsi que par le corps auquel elle correspond, c'est-à-dire par le choix de i et j dans le calcul de ${}^i J_j$: matrice jacobienne du corps $\frac{dX}{dt} = f(X, u)$ exprimée dans repère i .

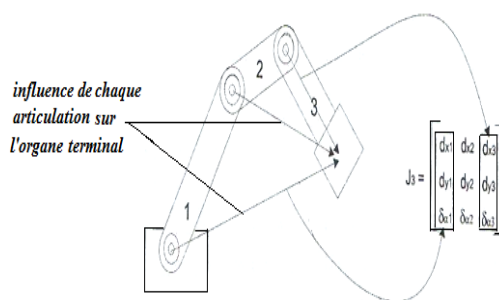


Figure 2.14 : Matrice jacobienne d'un manipulateur planaire à trois degrés de liberté.

Pour calculée la matrice jacobienne, on propose deux formalisations [43] :

Première méthode :

On considère un manipulateur à n degrés de liberté :

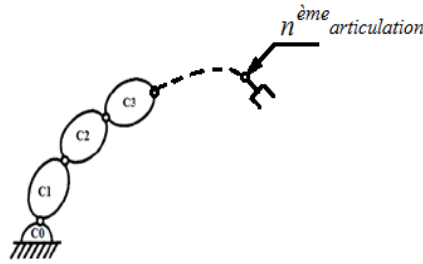


Figure 2.15 : manipulateur n degré de liberté.

La matrice jacobienne est sous la forme :

$$J(q) = [j_1 \dots \dots \dots \dots \dots j_n] \quad (2.29)$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_n & \dots \dots \dots & {}^0\hat{k}_n \times {}^0_nd_n \\ {}^0\hat{k}_1 & \dots \dots \dots & {}^0\hat{k}_n \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$${}^0\hat{k}_i \times {}^0_id_n = {}^0R_i * ({}^i\hat{k}_i \times {}^id_n) \quad (2.31)$$

Et

$${}^0\hat{k}_i = {}^0R_i * {}^i\hat{k}_i \quad (2.32)$$

Avec ${}^i\hat{k}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ et $i=1, \dots, 6$

Avec « n » est le nombre de degrés de liberté :

Pour un bras manipulateur à six degrés de liberté :

$$J(q) = \begin{bmatrix} {}^0k_1 \times {}^0_1d_6 & {}^0k_2 \times {}^0_2d_6 & {}^0k_3 \times {}^0_3d_6 & {}^0k_4 \times {}^0_4d_6 & {}^0k_5 \times {}^0_5d_6 & {}^0k_6 \times {}^0_6d_6 \\ {}^0k_1 & {}^0k_2 & {}^0k_3 & {}^0k_4 & {}^0k_5 & {}^0k_6 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\text{Avec } {}^i\hat{k}_i = [0 \ 0 \ 1]^T \text{ et } i=1, \dots, 6 \quad (2.34)$$

La matrice jacobienne est sous la forme 6x6

$$\text{Donc : } J(q) = [j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4 \ j_5 \ j_6] \quad (2.35)$$

Deuxième méthode :

$$\text{On a } \dot{X} = [\dot{X}_n \ \dot{Y}_n \ \dot{Z}_n \ w_{Xn} \ w_{Yn} \ w_{Zn}]^T = \begin{bmatrix} {}^0\dot{d}_n \\ {}^0w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0V_n \\ {}^0W_n \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\text{Où } {}^0V_n = J_D \dot{q}_D, \quad \text{avec } \dot{q}_D \in \dot{q} \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial q_1} & \frac{\partial d_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial d_2}{\partial q_1} & \frac{\partial d_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial d_2}{\partial q_n} \\ \frac{\partial d_3}{\partial q_1} & \frac{\partial d_3}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial d_3}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\text{Et } {}^0w_n = J_R \dot{\vec{q}} \quad (2.39)$$

$${}^0w_n = \dot{q}_1 \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q_2} + \dots + \dot{q}_n \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q_n} \quad (2.40)$$

$${}^0w_n = \dot{q}_1 \frac{\partial {}^0R_1 {}^0R_1^T}{\partial q_1} + \dot{q}_2 {}^0R_1 \frac{\partial {}^1R_2 {}^0R_2^T}{\partial q_2} + \dots + \dot{q}_n {}^0R_{n-1} \frac{\partial {}^{n-1}R_n {}^0R_n^T}{\partial q_n} \quad (2.41)$$

La forme de la matrice jacobienne et donnée par :

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_D \\ J_R \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\text{Où } J_D = \frac{\partial d_n(\dot{q}_D)}{\partial \dot{q}_D} = \frac{\partial T(q)}{\partial q} \quad (2.43)$$

$$\text{Et } J_R = \frac{\partial {}^0w_n}{\partial q} \quad (2.44)$$

2-2-2-4-2. Calcul des vitesses et des accélérations articulaires:

➤ Calcul des vitesses articulaires :

Le problème de la cinématique inverse consiste à déterminer les vitesses articulaires $\dot{\vec{q}}$ qui correspondent aux vitesses d'exécution $\dot{\vec{X}}$ de la tâche, le vecteur des vitesses opérationnelles $\dot{\vec{X}}$ est linéairement relié au vecteur des vitesses articulaires par la matrice jacobienne :

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} {}^0V_n \\ {}^0w_n \end{bmatrix} = J(q) \dot{\vec{q}} \quad (2.45)$$

Si la jacobienne n'est pas singulière c'est-à-dire que le déterminant de J est différent de zéro, la matrice J^{-1} existe et les vitesses articulaires sont calculées par :

$$\dot{\vec{q}} = J^{-1} \dot{\vec{X}} \quad (2.46)$$

➤ Calcul des accélérations articulaires :

La dérivation de l'équation (2.85) nous donne :

$$\ddot{\vec{X}} = J\ddot{\vec{q}} + \dot{J}\dot{\vec{q}} \quad (2.47)$$

Alors :

$$\ddot{\vec{q}} = J^{-1}(\ddot{\vec{X}} + \dot{J}\dot{\vec{q}}) \quad (2.48)$$

L'expression (2.48), permet de calculer les accélérations articulaires.

2-2-2-5. Modélisation dynamique :

Le modèle dynamique exprime la relation entre les charges appliquées aux actionneurs et les positions, vitesses, et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, F_e) \quad (2.49)$$

Avec :

$x(t)$: Vecteur des charges appliquées aux actionneurs ;

q : Vecteur des positions articulaires ;

\dot{q} : Vecteur des vitesses articulaires ;

\ddot{q} : Vecteur des accélérations articulaires ;

F_e : Vecteur représentant l'effort extérieur ;

Par convention, la relation (2.49) est appelée « modèle dynamique inverse », ou tout simplement « modèle dynamique ».

Le modèle dynamique direct, est celui qui exprime les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses et couples articulaires, il est représenté par la relation :

$$\ddot{q} = g(q, \dot{q}, \Gamma, F_e) \quad (2.50)$$

Plusieurs formalismes ont été utilisés pour obtenir le modèle dynamique de robot, les plus utilisés sont : le formalisme de Lagrange et le Formalisme de Newton-Euler.

2-2-2-5-1. Formalisme de Lagrange :

Le formalisme de Lagrange décrit l'équation du mouvement en termes de travail et d'énergie du système, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.51)$$

Où :

- L : Lagrangien du système égal à E – U ;
- E : Énergie cinétique totale du système ;
- U : Énergie potentielle totale du système ;

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T \cdot A \cdot \dot{q} \quad (2.52)$$

A est appelée matrice d'inertie du robot, c'est une matrice de dimensions $(n \times n)$, symétrique définie positive, ses éléments sont en fonction des variables articulaires q_j .

L'énergie potentielle étant en fonction des variables articulaires q_j , le vecteur Γ peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma = A(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + Q(q) \quad (2.53)$$

$C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$: Vecteur de dimensions $(n \times 1)$ représentant les couples/forces de Coriolis et les forces centrifuges ;

$Q(q)$: Vecteur des couples/forces de gravité.

- L'élément A_{ii} est égal au coefficient de $\frac{1}{2}(\dot{q}_i)^2$ dans l'expression de l'énergie cinétique ;
- L'élément A_{ij} si $i \neq j$ est égal au coefficient de $\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$ dans l'expression de l'énergie cinétique ;
- Le calcul de C se fait selon la relation suivant :

$$\begin{cases} C_j = \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \cdot \dot{q}_k \\ c_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_j}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \end{cases} \quad (2.54)$$

- Les éléments de Q se calculent selon la relation suivante :

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2.55)$$

2-2-2-5-2. Efforts exercés par l'organe terminal sur son environnement [1] :

Pour accomplir une tâche donnée, l'organe terminal porté par le corps C_n doit exercer un effort statique sur l'environnement. Pour cela, on doit établir le modèle statique qui permet de calculer les couples et/ou forces articulaires correspondant à un effort donné par l'organe terminal.

Soit f_{en} l'effort statique exercé par l'organe terminal sur son environnement. On a :

$$f_{en} = \begin{bmatrix} f_{en} \\ m_{en} \end{bmatrix} = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad m_x \quad m_y \quad m_z]^T \quad (2.56)$$

Pour calculer l'effort Γ_e des forces/moments que doivent fournir les actionneurs d'un robot pour que l'organe terminal exerce l'effort f_{en} sur son environnement, on utilise la relation :

$${}^i \Gamma_e = {}^i J_n^T \cdot f_{en} \quad (2.57)$$

Avec : f_{en} exprimé dans le repère R_i lié au corps C_i .

On en tient compte en ajoutant le terme Γ_e au second membre de l'équation (2.53).

2-2-2-5-3. Formalisme de Newton-Euler :

Le formalisme de Newton-Euler est basé sur les théorèmes généraux de la mécanique.

Il ne nécessite pas le calcul intrinsèque des coefficients dynamiques du robot. Le modèle est obtenu par double récurrence [44].

2-2-2-5-4. Equation de NEWTON :

Le schéma suivant montre un corps rigide dont le centre de masse accélère avec une accélération \dot{v}_c . Dans une telle situation, la force, F , agissant sur le centre de masse qui cause cette accélération est donnée par l'équation de NEWTON [44].

$$F = m\dot{v}_c \quad (2.58)$$

Où m est la masse totale du corps

2-2-2-5-5. L'équation d'EULER :

Le schéma suivant montre un corps rigide tournant avec une vitesse angulaire ω et avec une accélération angulaire $\dot{\omega}$. Dans une telle situation le moment N qui doit agir sur le corps pour causer ce mouvement est donné par l'équation d'Euler ;

$$N = {}^c I \dot{\omega} + \omega {}^c I \omega \quad (2.59)$$

${}^c I$: est le tenseur d'inertie du corps dont l'origine est le centre de la masse.

Formulation dynamique itérative de Newton-Euler :

Le problème est de trouver les couples qui correspondent à une trajectoire donnée d'un manipulateur. Nous supposons connues la position, la vitesse, et l'accélération des articulations $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$. Cette hypothèse faite et avec la connaissance des informations et des résultats de la cinématique et de la distribution de masses du robot, nous pouvons calculer les couples communs pris pour causer ce mouvement. L'algorithme présenté est basé sur la méthode éditée par Luh, Marcheur, et Paul [30].

2-2-2-5-6. Récurrance avant pour calculer les vitesses et les accélérations :

Il est nécessaire de calculer les forces d'inertie agissant sur les liens, la vitesse de rotation et l'accélération linéaire et de rotation du centre de la masse de chaque lien du manipulateur à n'importe quel instant donné.

Ces calculs seront donnés dans une nature itérative commençant par le lien 1 et en déplaçant successivement lien par lien vers l'extérieur du lien n.

La propagation de la vitesse de rotation d'un lien vers un autre est donnée par la relation suivante :

Pour $(i+1)$ rotation:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (2.60)$$

Nous obtenons l'équation de transformation de l'accélération angulaire d'un lien à l'autre ;

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_i R^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1}_i R^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (2.61)$$

Quand le lien $(i+1)$ est prismatique :

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_i R^i \dot{\omega}_i \quad (2.62)$$

L'accélération linéaire de chaque lien est obtenue par la relation suivante ;

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}{}_iR [{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i] \quad (2.63)$$

Pour le lien $(i+1)$ de forme prismatique :

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}{}_iR [{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i] + 2{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (2.64)$$

L'accélération linéaire du centre de masse pour chaque lien est :

$${}^i v_{ci} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{ci}) + {}^i\dot{v}_i \quad (2.65)$$

Notons que l'application des équations de liaison est spécialement simple quand :

$${}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0 \quad (2.66)$$

La force et le couple agissant sur un lien :

Après avoir calculé les accélérations linéaires et angulaires du centre de masse de chaque lien, on peut appliquer les équations de Newton-Euler pour calculer la force d'inertie et le couple agissant au centre de masse de chaque lien.

Récurrence arrière pour calculer les forces et les couples :

Après avoir calculé les forces et couples agissant sur chaque lien, maintenant il reste à calculer les couples de conjoints qui se traduiront par ces forces et les moments appliqués à chaque lien (Figure 2.16).

f_i : La force exercée sur le lien i par le lien $i-1$.

n_i : Le couple exercé sur le lien i par le lien $i-1$.

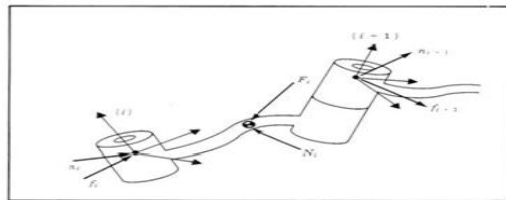


Figure 2.16: les forces agissant sur le lien i . [44]

En additionnant les forces agissant sur le lien i , nous arrivons à une relation équilibre des forces,

$${}^iF_i = {}^i f_i - {}^{i+1}{}_iR {}^{i+1}f_i \quad (2.67)$$

En additionnant les couples sur le centre de masse, nous arrivons à l'équation équilibre de couples:

$${}^iN_i = {}^in_i - {}^in_{i+1} + (-{}^iP_{ci}) \times {}^if_i - ({}^iP_{i+1} - {}^iP_{ci}) \times {}^if_{i+1} \quad (2.68)$$

En utilisant le résultat de l'équilibre des forces et en ajoutant une matrice de rotation, on peut écrire l'équation d'équilibre de couples sous la forme suivante :

$${}^iN_i = {}^in_i - {}_{i+1}{}^iR^{i+1}n_{i+1} - {}^iP_{ci} \times {}^iF_i - {}^iP_{i+1} \times {}_{i+1}{}^iR^{i+1}f_i \quad (2.69)$$

Enfin, on peut réorganiser les équations de forces et de couples sous la forme;

$${}^if_i = {}_{i+1}{}^iR^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i \quad (2.70)$$

$${}^in_i = {}^iN_i + {}_{i+1}{}^iR^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{ci} \times {}^iF_i + {}^iP_{i+1} \times {}_{i+1}{}^iR^{i+1}f_i \quad (2.71)$$

Comme dans le cas statique, les couples requis communs se trouvent en prenant la

$$\text{composante Z du couple appliqué par un lien sur son voisin : } \tau_i = {}^in_i^T {}^iZ_i \quad (2.72)$$

$$\text{Si on a (i+1) une articulation prismatique ,on utilise : } \tau_i = {}^if_i^T {}^iZ_i \quad (2.73)$$

2-2-2-5-7. L'algorithme itératif de dynamique de Newton-Euler :

L'algorithme complet pour calculer des couples communs du mouvement des joints se compose de deux parties. D'abord les vitesses des liens et les accélérations sont itérativement calculées du lien 1 dehors au lien n et les équations de Newton-Euler sont appliquées à chaque lien. Ensuite, les forces et les couples de l'interaction et les couples du déclencheur de joint sont calculés périodiquement du lien n de nouveau au lien 1. Les équations sont récapitulées pour le cas de tous les liens de rotation.

Réurrence avant :

$i=1 \dots \dots \dots 5 ;$

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}{}_iR^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (2.74)$$

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}{}_iR^i\dot{\omega}_i + {}^{i+1}{}_iR^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (2.75)$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}{}_iR^i[{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i] + 2{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (2.76)$$

$${}^{i+1}v_{ci+1} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{ci+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{ci+1}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \quad (2.77)$$

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{ci+1} \quad (2.78)$$

$${}^{i+1}R_{i+1} = {}^{ci+1}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{ci+1}I_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1} \quad (2.79)$$

Récurrance arrière :

$i=6.....1$;

$${}^i f_i = {}^{i+1}R {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad (2.80)$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^{i+1}R {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{ci} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1}R {}^{i+1} f_i \quad (2.81)$$

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i Z_i \quad (2.82)$$

2-2-2-5-8. Inclusion des forces de pesanteur dans l'algorithme de la dynamique :

L'effet de la gravité du chargement sur les liens peut être inclus, tout simplement par la mise en ${}^0\dot{v}_0 = G$, où G est le vecteur de gravité. Ceci est équivalent à dire que la base du robot est l'accélération ascendante de G accélération. Cette accélération ascendante fictive cause exactement les mêmes effets sur les liens que la gravité ainsi, sans des dépenses informatiques supplémentaires, l'effet de pesanteur est calculé [44]

2-2-2-5-9. Comparaison entre les deux formalismes :

Le formalisme de Lagrange est le plus adapté pour le calcul du modèle dynamique direct. il est souvent employé pour la modélisation et la simulation du système [45].

Par contre le formalisme de Newton-Euler est utilisé pour la commande en temps réel car il offre une réduction considérable du temps de calcul du modèle dynamique inverse comme le montre le tableau suivant : [46].

Formalisme	Multiplication	Addition
Lagrange	$32\frac{1}{2}n^4 + 86\frac{5}{12}n^3 + 171\frac{1}{4}n^2 + 53\frac{1}{3}n - 128$	$25n^4 + 66\frac{1}{3}n^3 + 129\frac{1}{2}n^2 + 42\frac{1}{3}n - 96$
Newton-Euler	150n-48	131n-48

Tableau 2.1 : Nombre d'opérations effectuées pour chaque formalisme. [46]

2-2-2-6. Situation d'un robot dans son environnement

L'environnement dans lequel évolue le robot est modélisé par un repère supposé absolu et fixe appelé « repère atelier ». Les formalismes décrits précédemment nous permettent de définir les paramètres géométriques, cinématiques et dynamiques relativement au repère lié à

la base du robot. Pour calculer ces paramètres par rapport au repère atelier $(R_A, O_A, \vec{x}_A, \vec{y}_A, \vec{z}_A)$, on doit définir la situation de la base du robot dans le repère atelier par la matrice de transformation suivante :

$${}^A T_0 = \begin{bmatrix} {}^A h_0 & {}^A n_0 & {}^A a_0 & {}^A p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A A_0 & {}^A p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Où :

$[{}^A A_0] = [{}^A h_0 \quad {}^A n_0 \quad {}^A a_0]$: Matrice (3*3) définissant l'orientation de la base par rapport au repère atelier ;

${}^A p_0$: Vecteur position de l'origine du repère $(R_0, O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par rapport au repère atelier.

La situation d'un lien i relativement au repère atelier est définie par :

$${}^A T_i = {}^A T_0 \cdot {}^0 T_i \quad (2.84)$$

2-3. Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté les grandes lignes de la modélisation des robots en général. Un intérêt particulier a été porté aux bras manipulateurs à chaîne ouverte, commençant par la description géométrique directe qui a été décrite d'une manière générale en choisissant la notation de Denavit-Hartenberg pour obtenir des matrices de transformations homogènes régissant les différents liens d'un robot.

Quant à la géométrie inverse, la complexité du problème ne nous a pas été favorable pour donner une méthode générale pour décrire le modèle géométrique inverse, on s'est contenté de donner les définitions nécessaires et on a laissé la tâche de description du modèle pour le chapitre 4 en traitant un mécanisme spécifié.

Pour la modélisation dynamique on a présenté les deux formalismes (Lagrange) et (Newton-Euler) avec les deux récurrences avant et arrière.

L'étude faite dans ce chapitre nous a permis de préparer les différents modèles mathématiques régissant un robot ou bras manipulateurs.

CHAPITRE 3

TRAJECTOIRES & GÉNÉRATION DE MOUVEMENT

3-1. Introduction :

La planification des trajectoires a été le sujet d'un nombre très important de recherches aussi bien en robotique, que dans d'autres domaines. Qu'il soit un problème de stationnement ou chemin d'un véhicule auto guidé, trajectoires pour un bras manipulateur utilisé pour une tâche de soudure ou peinture en industrie automobile, marche d'un robot humanoïde, ou animation des personnages en jeux vidéo, le terme trajectoire trouvera toujours sa place dans la liste des tâches les plus complexes en modélisation ou en programmation d'un système.

Vu la forte complexité du problème général de la planification de trajectoires, ce dernier ne semble pas soluble tel quel. Il se décompose naturellement en classes de sous problèmes dont certains, moins difficiles, peuvent trouver une solution. Cette subdivision de la complexité se trouve alors inmanquablement liée à plusieurs paramètres : la dimension de l'espace de travail, le nombre et la nature des objets mobiles, les composants constituant le robot ainsi que les exigences liées au mouvement et à l'énergie disponible.

Dans ce chapitre nous allons aborder le problème de planification de trajectoire sous ses différents aspects, ainsi qu'une synthèse des recherches menées dans cet axe, et quelques méthodes de résolution utilisées.

3-2. La problématique générale :

Pour un robot A évoluant dans un environnement W donné, le problème général de planification consiste à déterminer pour A un mouvement lui permettant de se déplacer entre deux configurations données tout en respectant un certain nombre de contraintes et de critères. Ces derniers découlent de plusieurs facteurs de natures diverses et dépendent généralement des caractéristiques du robot, de l'environnement et du type de tâche à exécuter. Ainsi, les contraintes relatives au robot concernent sa géométrie, sa cinématique et sa dynamique et leur prise en compte peut être complexe selon l'architecture initiale considérée. Cette architecture pouvant correspondre à un système articulé d'objets rigides tel qu'un bras manipulateur, une main à plusieurs doigts ou un véhicule tractant des remorques, des bras manipulateurs ou des

robots mobiles évoluant dans un réseau donné. Les contraintes de l'environnement concernent essentiellement la non collision avec les obstacles fixes encombrant W et la prise en compte d'interactions de contact avec le robot. L'évitement d'obstacles dépend de la géométrie de l'environnement et est commun à toutes les tâches robotiques. De plus aucune hypothèse simplificatrice n'est faite sur la géométrie du robot ou sur celle de l'environnement. [47]

Les critères à satisfaire pendant la résolution du problème de planification concernent le fait qu'une solution doit optimiser une fonction de coût exprimée en terme de la distance parcourue par le robot entre les deux configurations extrêmes, de la durée ou de l'énergie nécessaires à l'exécution de son mouvement. D'autres critères peuvent être également considérés tels que la prise en compte de la distance de sécurité aux obstacles pour un robot mobile ou manipulateur ou encore la "qualité" et la stabilité des prises pour une main articulée. Face à la nature de ces aspects et aux difficultés qu'elle peut induire sur un processus de résolution, la plupart des travaux proposés dans le domaine de la planification de mouvement ont porté sur la considération de certaines instances du problème général. Nous présentons dans la suite de ce chapitre les principaux concepts et approches développés à cet effet. Après ce bref exposé de la problématique de la planification de trajectoire, plusieurs questions restent en suspens :

- Comment exprimer les obstacles dans l'espace de configuration ?
- Comment trouver un chemin dans l'espace opérationnel libre ?
- Si plusieurs chemins sont possibles, y-a-t'il un chemin optimum ?
- En présence de contraintes de nature différente (géométrique, cinématique, dynamique) , le choix doit-il satisfaire un compromis entre toutes les contraintes ?
- Une fois que le chemin est désigné, comment générer un mouvement dans l'espace articulaire produisant la trajectoire donnée dans l'espace *opérationnel* ?

Le terme de trajectoire mérite d'être précisé : on peut distinguer au moins trois niveaux pour ce mot .Un premier niveau, très général assimile tous les mouvements d'un robot à des trajectoires, sans distinction de nature (amplitude, vitesse etc.) ou d'objectif (mouvement de contact, d'évitement,...). Pour des raisons de complexité et d'efficacité, le vaste problème de planification qui en découle est généralement décomposé d'un point de vue fonctionnel en sous problèmes autorisant ainsi le développement de planificateurs dédiés et d'algorithmes spécialisés.

Enfin, au niveau le plus bas de la commande des actionneurs (des moteurs du robot), le terme désigne le déplacement réellement exécuté entre deux positions de consignes : on parle alors de génération de trajectoires.

3-3. Divers aspects de la planification de trajectoires :

Commençons par l'aspect algébriste et considérons l'espace vectoriel E , et P_1, P_2 deux de ses éléments. Un problème de planification de trajectoire peut être formulé ainsi : trouver une séquence d'éléments de l'espace E , joignant les deux éléments P_1 et P_2 . Cette formulation peut avoir deux sous aspects : continu si la séquence d'éléments est continue ou discret, et dans ce cas les éléments doivent être rapprochés selon la précision voulue.

Une projection de la formulation précédente dans l'espace opérationnel d'un robot donné, donnera la définition suivante : « pour un robot A évoluant dans un environnement W donné, détermine pour A un mouvement lui permettant de se déplacer entre deux configurations données ». Cette formulation n'est pas encore réaliste, le mouvement demandé doit satisfaire un certain nombre de critères. Ceux-ci découlent de plusieurs facteurs de natures diverses et dépendent généralement des caractéristiques du robot, de l'environnement et du type de la tâche à exécuter. En l'occurrence, les contraintes relatives au robot concernant sa géométrie, sa cinématique et sa dynamique et leur prise en compte peut être complexe selon l'architecture initiale considérée. Cette architecture pouvant correspondre à un système articulé d'objets rigides tel qu'un bras manipulateur, une main à plusieurs doigts,...., ou encore à plusieurs systèmes de robots à coordonner tels que des bras manipulateurs ou des robots mobiles évoluant dans un réseau routier. Les contraintes émanant de l'environnement concernent essentiellement la non collision aux obstacles fixes encombrant W et la prise en compte d'interactions de contact avec le robot. L'évitement d'obstacles dépend de la géométrie de l'environnement et est commun à toutes les tâches robotiques.

Planifier une trajectoire pour un corps solide dans l'espace cartésien revient à planifier la trajectoire d'un point dans l'espace de travail. Si l'on considère maintenant les obstacles de l'environnement, on se rend compte que les « plonger » dans l'espace des configurations du système n'est pas une tâche aisée, surtout si le système comporte de nombreuses variables de configuration et que par conséquent la dimension de l'espace articulaire est élevée.

Après ce bref exposé de la problématique de la planification de trajectoire, plusieurs questions restent en suspens :

- Comment exprimer les obstacles dans l'espace des configurations ?
- Comment trouver un chemin dans l'espace opérationnel libre ?
- Si plusieurs chemins sont possibles, y a-t-il un moyen pour choisir un chemin optimum ?
- En présence de contraintes de natures différentes (géométrique, cinématique, dynamique) comment est-ce que le choix doit satisfaire un compromis entre toutes les contraintes ?
- Une fois que le chemin est désigné, comment générer un mouvement (dans l'espace articulaire) produisant la trajectoire trouvée dans l'espace opérationnel ?

3-4. Classification des types de méthodes utilisées :

Traditionnellement, les méthodes de planification de trajectoires ont été classées selon la connaissance de l'espace de travail. Ce dernier peut être totalement connu, ou connu dans un environnement partiel de l'espace du robot. On distingue donc les méthodes locales et les méthodes globales. Il existe de nombreux travaux de couplage entre les deux approches.

3-4-1. Méthodes globales :

Les méthodes globales [32, 33, 48] supposent une connaissance totale de l'environnement. Ces méthodes opèrent généralement en deux phases. La première phase consiste à modéliser l'espace libre accessible par le robot. Ce qui est fait généralement hors ligne une seule fois pour le robot dans son environnement. La deuxième phase se base sur le modèle généré par la première phase afin de trouver une trajectoire. Cette phase correspond à des requêtes effectuées en ligne qui sont rapides, vu que le travail le plus lourd en temps de calcul est effectué hors ligne. Les méthodes globales ne sont pas adaptées aux environnements dynamiques ou bien aux environnements qui changent lors du déplacement du robot. Tout changement dans l'environnement du robot, nécessite de recalculer la première phase qui est assez longue en temps de calcul. De plus, le temps de calcul augmente exponentiellement avec le nombre de degrés de liberté du robot. Parmi les méthodes globales les plus utilisées, on cite : « La méthode des roadmaps » et « la méthode de décomposition en cellules ».

3-4-2. Méthodes locales :

Les méthodes locales [32, 33, 48] ne nécessitent qu'une perception de l'environnement immédiat du robot. La plupart des stratégies locales se fondent sur une approche où un capteur, comme un sonar ou une caméra, qui fournit des informations sur le voisinage immédiat du robot. Ces informations sont intégrées à un ensemble de règles hiérarchiques fournissant le comportement à adopter. De tels schémas prennent rarement en compte les critères d'optimalité dans la recherche du chemin à suivre. Ces méthodes locales utilisent la connaissance courante de l'état du système et de l'environnement pour en réduire le mouvement suivant. Ces stratégies ne nécessitant pas de calcul à priori, elles sont particulièrement appropriées aux tâches dont le seul objectif est d'atteindre une configuration désirée sans contrainte sur la trajectoire à réaliser. Parmi les méthodes locales utilisées, on trouve souvent « la méthode des fonctions de potentiels » [12]. Cette dernière est basée sur la construction de champs de potentiels artificiels qui peuvent être attractifs ou répulsifs selon qu'ils sont associés à l'objet ou à un obstacle de l'environnement. Le défaut majeur d'une telle approche réside dans le fait que des minima locaux peuvent éventuellement faire échouer le processus de planification [33].

3-4-3. Méthodes mixtes :

Les méthodes mixtes, sont une combinaison des méthodes globales et locales comme celle proposée en [48], et qui consiste à utiliser une méthode locale pour avancer vers le but. Dans le cas où une configuration de blocage est rencontrée, une méthode globale prend le relais afin de trouver la meilleure façon de contourner l'obstacle qui bloque le robot. Une fois cet obstacle contourné, le robot continue à évoluer vers son but en utilisant la méthode locale. Cette méthode est adaptée aux robots sériels placés dans des environnements fortement encombrés.

3-4-4. Autres méthodes :

Ces dernières années, les recherches se sont orientées vers des méthodes de planification de trajectoires basées sur les cartes probabilistes « Probabilistic roadmaps ». Ces méthodes ont été introduites par les travaux de Kavraki [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55] afin de remédier au problème de temps de calcul des méthodes globales. Cette méthode permet de modéliser l'espace de travail en choisissant des positions au hasard et en les plaçant dans un

diagramme qui représente les chemins sans collisions entre les différentes positions. Pour chaque nouvelle position insérée, les chemins vers les autres positions sont vérifiés et rajoutés dans le diagramme. Plusieurs variantes de cette méthode ont été proposées pour la rendre soit plus rapide comme la méthode basée sur le graphe de visibilité [56], soit pour résoudre le problème des couloirs étroits avec la méthode de l'axe médian [48], soit pour essayer d'appliquer ces méthodes à des environnements dynamiques [53].

D'autres méthodes inspirées de la biologie ont également été proposées, comme par exemple les réseaux de neurones [57, 58], ou les algorithmes génétiques [58].

3.5. Commandabilité, planification et suivi de trajectoire :

En pratique, la résolution d'un problème de planification de planification de trajectoire formulé comme suit « Comment conduire un système dynamique d'un état initial X_0 vers un état final X_f », exige l'existence d'au moins une fonction d'entrée $u(t)$ produisant une trajectoire passant par les états X_0 et X_f .

On écrit souvent les équations régissant l'évolution d'un système dynamique commandé sous la forme suivante :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, u) \quad (3.1)$$

Où X désigner l'état (la configuration), et u la commande du système.

Un état X_j est dit « atteignable » à partir de l'état X_i s'il existe un temps fini T et une fonction d'entrée $u(t)$ définie sur $[t_i, t_i + T]$ tels que :

$$X(t_i + T, X_i, u) = X_j \quad (3.2)$$

Cette notion d'atteignabilité conduit au concept de commandabilité d'un système dynamique explicité dans la définition suivante : Le système (3.1) est « localement commandable » en X_i s'il existe un voisinage de X_i tel que X_i soit atteignable à partir de chaque élément du voisinage. Le système est « globalement commandable » si tout état de l'espace considéré est atteignable à partir de tout état initial de cet espace.

La détermination de la fonction de commande u consiste en la planification de la trajectoire, elle permet de calculer une trajectoire de référence définie sur $[0, T]$ satisfaisant les contraintes, et rejoignant les états $X(0)$ et $X(T)$.

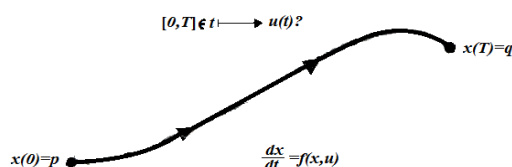


Figure 3.1: Principe de la détermination de la trajectoire de référence.

Si la condition initiale est exactement $X(0)$ spécifiée, alors on suit exactement la trajectoire de référence calculée. Si pendant l'exécution, la condition initiale est décalée, cette erreur initiale va se propager le long de la trajectoire. L'erreur s'atténue si le système est stable et s'amplifie si le système est instable. Dans ce cas il faut rajouter des termes correctifs Δu , pour assurer la convergence de cette erreur vers zéro, c'est ce que consiste en « le suivi de la trajectoire ». Ceci peut se faire par des techniques classiques d'automatique linéaire reposant sur l'étude au premier ordre des écarts à la trajectoire de référence.

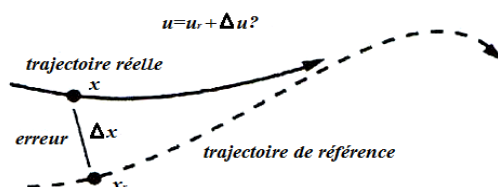


Figure 3.2 : Suivi d'une trajectoire.

3-6. Critère de performance dans la recherche de trajectoires :

Comme vu précédemment, les diverses formulations du problème de planification de mouvement, mènent à résoudre un problème d'optimisation, où la fonction objectif appelée « critère de performance » représente un coût à minimiser lors du déplacement. Pouvant être représenté par plusieurs formes, le critère de performance est généralement formulé par une fonctionnelle de type intégrale. Cette dernière est donnée sous la forme générale suivante :

$$F(u, T) = \int_0^T L(x(t), u) . dt \quad (3.3)$$

Où :

L : représente le lagrangien qui à son tour peut prendre diverses formes selon l'objectif visé ;

T : Temps de transfert total entre les configurations initiale et finale ;

$x(t)$: Vecteur des variables d'état à l'instant $t \in [0, T]$, pour les mouvements libres, ce vecteur représente les variables articulaires de position, vitesse et accélération ;

u : Vecteur qui représente la commande à optimiser et qui est considéré comme une inconnue du problème, pour les mouvements libres, il représente les couples moteurs ;

L'équation (3.3) peut donc prendre la forme suivante :

$$F(\Gamma, T) = \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma).dt \quad (3.4)$$

Dans la littérature spécialisée, une variété de critères destinés à la génération des mouvements, comme le critère « durée de parcours », le critère « effort quadratique », ou une combinaison linéaire de ces deux critères d'où l'appellation « critère mixte ».

Dans le tableau suivant, on résume les différentes formes du critère de performance utilisées dans la littérature.

Critère de performance	Forme mathématique du lagrangien
Durée de parcours	$L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma) = 1$
Critère mixte Durée de parcours / effort quadratique	$L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma) = \beta + (1 - \beta) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Gamma_j(t)}{(\Gamma_j)_{\max}} \right)$ <p>Avec : $\beta \in [0,1]$</p> <p>$(\Gamma_j)_{\max}$: l'effort maximum délivré par la $j^{\text{ème}}$</p>

Tableau3.1: Formes du critère de performance utilisées [5].

3-7. Espace de planification de la trajectoire :

Comme un robot peut être décrit dans les deux espaces : Espace cartésien et/ou espace articulaire, il en est de même pour la trajectoire. Distinguons des classes de mouvements :

- Le mouvement entre deux points avec trajectoire libre entre les points ;
- Le mouvement entre deux points à travers des points intermédiaires, spécifiés pour éviter des obstacles, avec trajectoire libre entre les points intermédiaires ;
- Le mouvement entre deux points à travers des points intermédiaires avec trajectoire contrainte entre les points intermédiaires.

Des caractéristiques de mouvements, nous pouvons faire une classification primaire des trajectoires entre deux points et distinguer des trajectoires libres et des trajectoires contraintes.

Pour le cas des trajectoires libres, la génération de mouvement peut se faire directement dans l'espace articulaire, par contre, pour les trajectoires contraintes, il est préférable de raisonner dans l'espace opérationnel.

3-7-1. Génération de mouvement et système de commande [1] :

Les figures 3.3 et 3.4 montrent une schématisation du système de commande pour les cas : générations de mouvements respectivement dans l'espace articulaire et opérationnel.

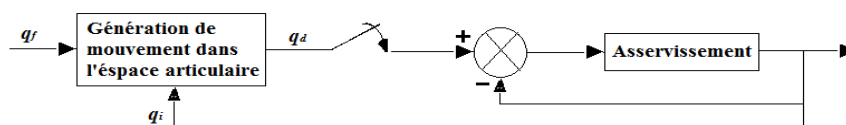


Figure 3.3: Système de commande pour la génération de mouvement dans l'espace articulaire.

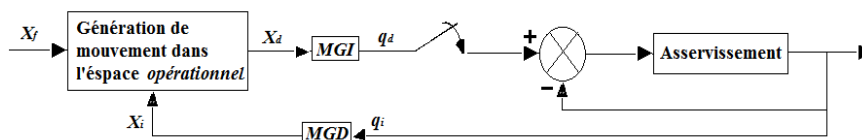


Figure 3.4: Système de commande pour la génération de mouvement dans l'espace opérationnel.

Le tableau suivant récapitule la différence entre les deux approches.

Génération de mouvement dans l'espace articulaire	Génération de mouvement dans l'espace opérationnel.
<ul style="list-style-type: none"> ✚ Elle nécessite moins de calcul en ligne, puisqu'il n'y a pas d'appel aux modèles inverses ; ✚ Le mouvement n'est pas affecté par le passage sur les configurations singulières ; 	<ul style="list-style-type: none"> ✚ Elle implique la transformation en coordonnées articulaires de chaque point de la trajectoire ; ✚ Elle peut être mise en échec lorsque la trajectoire calculée passe par une position singulière ;
<ul style="list-style-type: none"> ✚ Les contraintes de vitesses et de couples maximaux sont directement déduites des limites physiques des actionneurs. 	<ul style="list-style-type: none"> ✚ Elle est mise en échec chaque fois que les points de la trajectoire engendrée ne sont pas dans le volume accessible du robot. ✚ Les limites en vitesse et en couple sont exprimées par des valeurs de performance moyennes, on risque donc d'imposer au robot de travailler en deçà de ses capacités réelles

Tableau3.2: Comparaison entre la planification de trajectoire dans les espaces articulaire et opérationnel [5].

3-7-2. Planification de trajectoire dans l'espace articulaire :

On considère un robot à n degrés de liberté. Soit q^i et q^f les vecteurs des coordonnées articulaires correspondant respectivement aux configurations initiale et finale. On désigne par k_v et k_a les vecteurs des vitesses et accélérations articulaires maximales. Ces deux derniers sont des caractéristiques techniques des actionneurs utilisés [1].

Comme déjà montré au (§ 3), le temps de transfert t_f devra être calculé auparavant. Le problème est de trouver une fonction $q(t)$ satisfaisant le système suivant :

$$\begin{cases} q(0) = q^i \\ q(t_f) = q^f \end{cases} \quad (3.5)$$

3-7-2-1. Trajectoire sans contraintes – Mouvement point à point (P.T.P) :

Dans le tableau suivant, on récapitule les différentes fonctions permettant de satisfaire le système (3.5) trouvées dans la littérature [1], [59].

Intitulé de la loi	Expression horaire	Temps de transfert global minimum
Interpolation linéaire	$q_j(t) = (q^i)_j + \frac{t}{t_f} D_j$ Avec $D_j = (q^f)_j - (q^i)_j$	$(t_f)_j = \frac{ D_j }{(k_v)_j}$
Polynôme de degré trois	$q_j(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ Avec : $a_0 = q^i; a_1 = 0; a_2 = \frac{3}{(t_f)^2} D_j;$ $a_3 = \frac{2}{(t_f)^3} D_j; D_j = (q^f)_j - (q^i)_j$	$(t_f)_j = \max \left[\frac{3 D_j }{2(k_v)_j}, \sqrt{\frac{6 D_j }{(k_a)_j}} \right]$
Polynôme de degré cinq	$q_j(t) = (q^i)_j + 10\lambda^3 - 15\lambda^4 + 6\lambda^5$ Av ec $\lambda = \frac{t}{(t_f)_j}; D_j = (q^f)_j - (q^i)_j$	$(t_f)_j = \max \left[\frac{15 D_j }{8(k_v)_j}, \sqrt{\frac{10 D_j }{\sqrt{3}(k_a)_j}} \right]$
Loi Bang-Bang	➤ Pour $0 \leq t \leq \frac{(t_f)_j}{2}$ $q_j(t) = (q^i)_j + 2\lambda^2 D_j$ ➤ Pour $\frac{(t_f)_j}{2} \leq t \leq t_f$ $q_j(t) = (q^i)_j + [-1 + 4\lambda - 2\lambda^2] D_j$ Avec $\lambda = \frac{t}{(t_f)_j}; D_j = (q^f)_j - (q^i)_j$	$(t_f)_j = \max \left[\frac{2 D_j }{(k_v)_j}, 2\sqrt{\frac{ D_j }{(k_a)_j}} \right]$

Tableau3.3: Récapitulatif des lois utilisées pour la génération de mouvement dans l'espace articulaire.

La loi qui est souvent utilisée s'appelle « Bang-Bang avec palier de vitesse » ou encore « Loi trapèze ». Cette loi comporte trois phases de mouvement (Accélération – Mouvement uniforme – Décélération) et elle est décrite comme suit :

$$\begin{cases} q_j(t) = (q^i)_j + \frac{1}{2}t^2 \cdot (k_a)_j \cdot \text{sgn}(D_j) & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau_j \\ q_j(t) = (q^i)_j + \left(t - \frac{\tau_j}{2}\right) \cdot (k_v)_j \cdot \text{sgn}(D_j) & \text{pour } \tau_j \leq t \leq (t_f)_j - \tau_j \\ q_j(t) = (q^f)_j - \frac{1}{2}[(t_f)_j - t]^2 \cdot (k_a)_j \cdot \text{sgn}(D_j) & \text{pour } (t_f)_j - \tau_j \leq t \leq (t_f)_j \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \tau_j = \frac{(k_v)_j}{(k_a)_j} \\ D_j = (q^f)_j - (q^i)_j \end{cases} \quad (3.7)$$

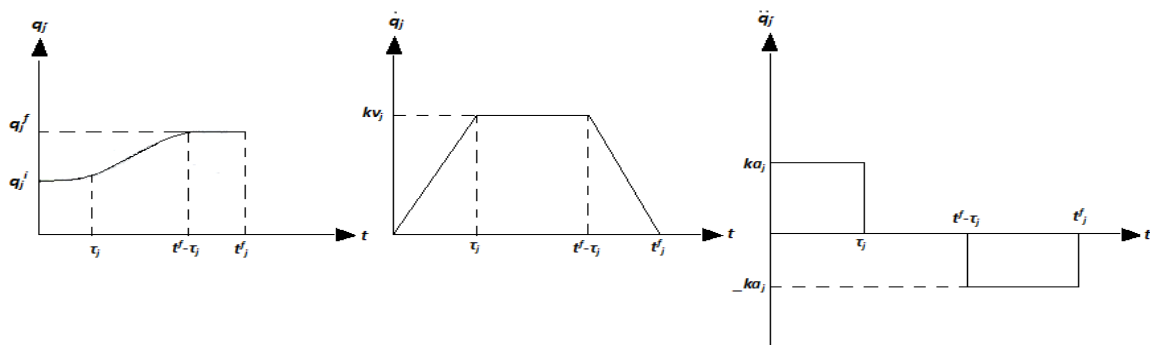


Figure 3.5: Évolution des positions, vitesses et accélérations sur l'articulation j avec une loi trapèze.

Le temps de parcours minimal pour l'articulation j est :

$$(t_f)_j = \frac{(k_v)_j}{(k_a)_j} + \frac{|D_j|}{(k_v)_j} \quad (3.8)$$

3-7-2-2. Trajectoire entre deux points avec des points intermédiaires :

Ce type de trajectoire est contraint par des configurations intermédiaires imposées

Cela peut être le cas si la tâche du manipulateur est définie de manière à éviter des obstacles et /ou pour des opérations de « pick and place » simples si on veille à éloigner / approcher l'objet correctement des sites de prise et de dépôt. Dans ce dernier cas, il suffira de spécifier

une position intermédiaire sur la normale à la surface de dépôt qui passe par le point de prise : en imposant à la pince de passer par cette position intermédiaire, on obtiendra un mouvement admissible pour le départ «lift-off». On fera de même pour la phase d'approche «set-down» nécessaire au dépôt de l'objet manipulé. De plus, en imposant les temps de parcours relatifs aux phases de « lift-off » et «set-down », il sera possible de contrôler la vitesse du manipulateur pour ces opérations délicates.

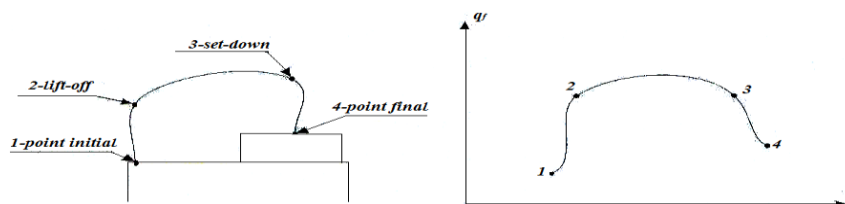


Figure 3.6: Description des différentes phases pour une tâche « pick & place ».

Afin d'avoir un mouvement doux lors des phases, « lift-off » et «set-down », on exige que les vitesses et parfois les accélérations soit continues et lisses. Plusieurs méthodes se basant sur l'interpolation ou les « splines cubiques » sont utilisées [1], [59].

3-7-3. Planification de la trajectoire dans l'espace opérationnel :

Le problème sera toujours formulé de la même manière, sauf que dans l'espace opérationnel, les deux positions : « initiale » et « finale » sont dans ce cas décrites dans cet espace. Deux approches sont utilisées : « interpolation cartésienne » et « interpolation articulaire »

3-7-3-1. Interpolation cartésienne :

Réalisée dans l'espace naturel de l'opérateur, l'interpolation cartésienne rend plus aisée la programmation de trajectoires sans collisions. Deux difficultés apparaissent :

- Si la notion d'interpolation (en ligne droite, en arc de cercle, etc.) est évidente en ce qui concerne la position de l'outil, il n'en est pas de même pour son orientation ;
- Toute trajectoire comportant un tracé anguleux de l'outil nécessiterait des accélérations infinies : il sera nécessaire de prévoir des " raccords " pour le tracé de carrés, rectangles, etc. Plusieurs méthodes ont été proposées dans ce sujet, on cite : La méthode de Paul, et la méthode de Taylor [59].

3-7-3-2. Interpolation articulaire :

L'interpolation cartésienne coûte cher en calcul si chaque point interpolé doit être transposé $Q = f^{-1}(X)$ dans l'espace articulaire. En outre, il est difficile de veiller aux respects des contraintes de limitations k_v et k_a . D'où l'idée de ne calculer dans l'espace cartésien qu'un point sur n (entier déterminé en fonction de la précision voulue), de le transposer dans l'espace articulaire et ensuite on procède à une interpolation plus fine dans cet espace. Plusieurs méthodes sont utilisées dans cette approche, on cite : La méthode de Lin et la méthode de Taylor [59].

3-8. Théorie des graphes et chemins optimaux :

Les graphes représentent un outil puissant pour modéliser de nombreux problèmes combinatoires qui seraient sans cela difficilement abordables par des techniques classiques comme l'analyse mathématique. En plus de son existence en tant qu'objet mathématique, le graphe est aussi une structure de données puissante pour l'informatique.

Les graphes sont irremplaçables dès qu'il s'agit de décrire la structure d'un ensemble complexe, en exprimant les relations et les dépendances entre éléments. Des exemples sont les diagrammes hiérarchiques, les arbres génétiques, et les diagrammes de succession de tâches en gestion de projets.

Il existe deux familles des graphes : orientés et non orientés selon que les relations entre les éléments d'un ensemble soient orientés ou non.

Un graphe est défini par un couple $G = (X, U)$ de deux ensembles :

- X est un ensemble (x_1, x_2, \dots, x_N) de sommets, également appelés nœuds et $U = (u_1, u_2, \dots, u_M)$ est une famille de couples ordonnés de sommets appelés arêtes (arcs).

L'approche générale consiste à modéliser l'espace des solutions comme un graphe value et muni de poids ou coûts sur ses arêtes et ensuite utiliser une heuristique pour le parcourir [60]. Etant donné :

- Un nœud initial ;
- Une fonction $goal(n)$ qui retourne « Vrai » si le nœud n est un nœud objectif (but) ;
- Une fonction $Transition(n)$ qui retourne les transitions immédiates du nœud n ;

L'algorithme retourne un chemin partant d'un nœud initial à un nœud objectif :

- Le coût d'un chemin est la somme des coûts des arêtes qui le composent ;
- Il peut y avoir plusieurs nœuds satisfaisant l'objectif ;
- Il peut aussi y avoir plusieurs chemins menant à un nœud.

L'enjeu de l'algorithme se résume dans les points suivants :

- Trouver un chemin solution ;
- Dans le cas où il existe plusieurs chemins possibles, choisir un chemin optimal ;
- Le trouver rapidement ;

3-9. Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté d'une manière générale le sujet des trajectoires en robotique. Après avoir donné les différents aspects du problème de planification et avoir classifié les types de méthodes utilisées, on a abordé le problème de suivi de trajectoires dans l'espace opérationnel et la génération de mouvements dans l'espace articulaire. Et enfin, on a présenté brièvement l'utilité de la théorie des graphes dans la recherche de la trajectoire optimale entre deux situations extrêmes. Le passage de la trajectoire de l'espace opérationnel vers l'espace articulaire est lié directement avec le modèle géométrique inverse qui n'a pas été traité d'une manière générale dans le chapitre précédent. Dans le chapitre suivant, nous allons traiter en détails le modèle géométrique inverse ainsi que la génération de mouvement pour deux robots à six degrés de liberté « robot similaire au robot Cloos et robot PUMA ».

CHAPITRE 4

APPLICATION

4-1. Introduction :

Les modélisations géométriques et cinématique pour décrire le comportement d'un robot avec suivi de trajectoire s'avère une tâche primordiale mais délicate à traiter.

A partir des fondements théoriques abordés dans les chapitres précédents, dans ce chapitre on procède à la modélisation de Robots. Dans un souci de validation et/ou de confrontation de résultats, on traitera deux types de manipulateurs : une variante du Robot Cloos et le Robot PUMA. On utilisera respectivement les logiciels MATLAB et Solidworks pour l'obtention des résultats numériques et les différents graphes et pour le dimensionnement.

La réalisation d'une simulation théorique permettant de décrire l'état et le comportement global d'une structure mécanique articulée ou tout autre système nécessite de combiner plusieurs concepts mathématiques.

Le souci principal dans la modélisation est de trouver une relation entre les consignes données dans l'espace opérationnel de la tâche et les postures des éléments du robot dans l'espace articulaire : cette relation permet de fournir une interface qui occulte le problème mathématique à l'utilisateur par le biais d'un programme informatique afin de manipuler un robot de manière interactive.

Vu la complexité et la non linéarité des problèmes, un modèle complet du comportement réel d'un robot n'est pas réalisable, l'étude des différents modèles de robots se fait généralement sur des modèles simplifiés, obtenus en introduisant des hypothèses simplificatrices dans les équations qui décrivent le comportement du modèle.

Dans ce chapitre nous allons décrire la théorie sous-jacente aux problèmes de modélisation des robots de similaires au Robot Cloos *figure* (4.1) et au Robot PUMA (annexe) tout en se basant sur les hypothèses suivantes :

- chaque corps composant le robot est assimilé à un solide indéformable.
- Chaque articulation ne possède qu'un seul degré de liberté.

4-2. Modèle géométrique direct et inverse d'un bras manipulateur (similaire au Robot Cloos).

4-2-1. Modèle géométrique direct(MGD).

Les paramètres de Denavit-Hartenberg sont résumés dans le tableau 4.1



Figure 4.1 : Le Robot Cloos schématisé à l'aide logiciel Solidworks.

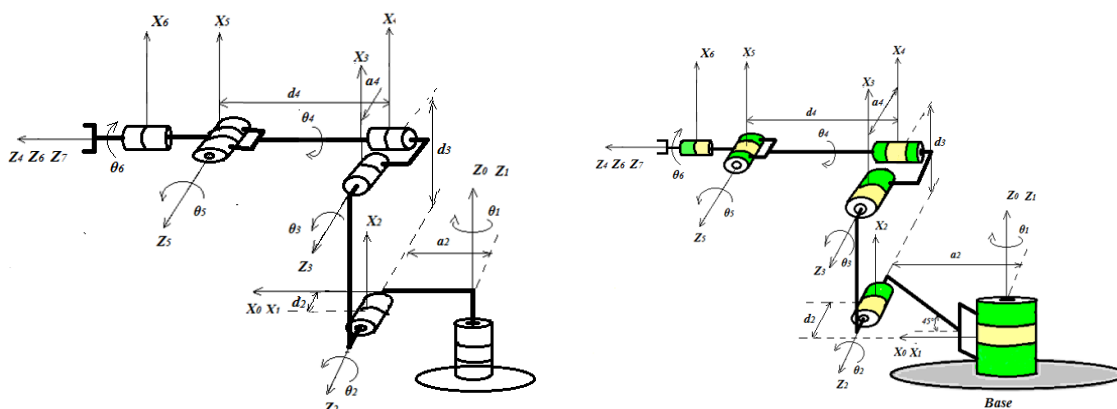


Figure 4.2 : Schéma cinématique de robot manipulateur (similaire au Cloos)

i	σ_i	α_i	d_i	a_i	θ_i
1	0	0°	0	0	θ_1
2	0	-90°	d_2	a_2	θ_2
3	0	0°	d_3	0	θ_3
4	0	-90°	d_4	a_4	θ_4
5	0	90°	0	0	θ_5
6	0	-90°	0	0	θ_6

Tableau 4.1 : Paramètres de D-H du robot Cloos.

Calcul de la matrice de transformation homogène.

Cette méthode consiste à faire tourner les bras autour de l'axe de rotation(z) avec des projections suivant l'axe(x) et l'axe(y).

On applique la matrice de transformation homogène de D-H modifié pour calculer les matrices de transformation de chaque repère donc

$${}^{i-1}T_i = Rot(x_{i-1}, \alpha_i) Trans(x_{i-1}, d_i) Rot(z_i, \theta_i) Trans(z_i, a_i) \quad (4.1)$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -a_i\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & a_i\cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Le modèle géométrique direct d'une chaîne cinématique simple ouverte de $n+1$ corps et de n articulations *figure* (4.2) est donné par

$${}^0T_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = \prod_{i=1}^{n+1} {}^{i-1}T_i(q_i) \quad (4.3)$$

La matrice 0T_n est appelée modèle géométrique direct (MGD)

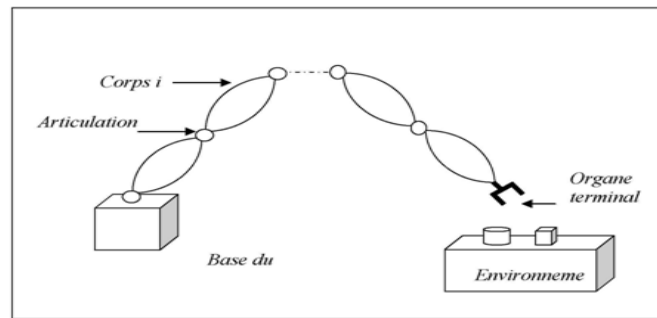


Figure 4.3 : Robot à chaîne ouverte simple. [24]

Chaque joint est de classe cinq et peut s'exprimer comme une fonction à un seul degré de liberté.

Sachant que :

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} * l_1$$

Ou l_1 la longueur de premier lien

$$\cos \theta_i = c_i$$

$$\sin \theta_i = s_i \quad i=1 \dots 5;$$

$$\cos(\theta_2 + \theta_3) = c_{23}$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3) = s_{23}$$

On aura donc les matrices de transformation suivantes:

$$\begin{aligned}
{}^0T_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & d_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^6T_E &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & a_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0.7071 & 0.05 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pour notre application l'organe termine est d'angle $\beta = 45^\circ$, $a_7 = 0.05 \text{ m}$ et $d_7 = 0.30 \text{ m}$

6T_E est la matrice de transformation homogène définissant le repère outil.

Le modèle géométrique directe est donné par la relation :

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = {}^0T_3 * {}^3T_6 = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Les différentes composantes des la matrice 0T_6 sont données dans l'annexe 2.

4-2-2. Modèle géométrique inverse par la méthode de Paul.

Soit M la matrice de la situation désirée telle que :

$$M_o = \begin{bmatrix} h_{ox} & n_{ox} & a_{ox} & P_{ox} \\ h_{oy} & n_{oy} & a_{oy} & P_{oy} \\ h_{oz} & n_{oz} & a_{oz} & P_{oz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Donc, d'après la relation (4.1) on a :

$${}^0T_6 = M_o {}^E T_6^{-1} = M \quad (4.6)$$

Où M est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} h_x & n_x & a_x & P_x \\ h_y & n_y & a_y & P_y \\ h_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} hox * c_\beta + aox * s_\beta & nox & -hox * s_\beta + aox * c_\beta & hox * (s_\beta * d7 - a7 * c_\beta) + aox * (-c_\beta * d7 - s_\beta * a7) + Pox \\ hoy * c_\beta + aoy * s_\beta & noy & -hoy * s_\beta + aoy * c_\beta & hoy * (s_\beta * d7 - a7 * c_\beta) + aoy * (-c_\beta * d7 - s_\beta * a7) + Poy \\ hoz * c_\beta + aoz * s_\beta & noz & -hoz * s_\beta + aoz * c_\beta & hoz * (s_\beta * d7 - a7 * c_\beta) + aoz * (-c_\beta * d7 - s_\beta * a7) + Poz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Le poignet est composé de trois axes concourants, structure qui permet le découplage entre les variables articulaires de position et les variables articulaires d'orientation.

Calcul de θ_1 , θ_2 et θ_3 par la méthode de Paul [19].

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\text{Avec: } {}^0T_4 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \quad (4.9)$$

Donc:

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} s_1 s_4 + c_1 c_4 c_{23} & c_4 s_1 - s_4 c_1 c_{23} & -s_{23} c_1 & (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1 - a_2 * s_1 \\ -c_1 s_4 + s_1 c_4 c_{23} & -c_4 c_1 - s_4 s_1 c_{23} & -s_{23} s_1 & (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1 + a_2 * c_1 \\ -s_{23} c_4 & s_{23} s_4 & -c_{23} & -d_3 * s_2 - a_4 * c_{23} - d_4 * s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le développement de l'expression précédente donne:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1 - a_2 * s_1 \\ (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1 + a_2 * c_1 \\ -d_3 * s_2 - a_4 * c_{23} - d_4 * s_{23} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Calcul θ_1 .

On multiplie l'équation (4.6) par ${}^1T_0 = ({}^0T_1)^{-1}$:

${}^1T_0 {}^0T_6 = {}^1T_0 M$ et par identification de la 4^{ème} colonne, on a :

$$\begin{bmatrix} p_x c_1 + p_y s_1 \\ -p_x s_1 + p_y c_1 \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23} + d_3 c_2 \\ a_2 \\ -a_4 c_{23} - d_4 s_{23} - d_3 s_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.10a)$$

Les étapes pour calculer θ_1 sont données dans l'annexe 3, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \text{atan } 2(p_y, p_x) - \text{atan } 2\left(\frac{a_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{\rho}\right)^2}\right) \\ \text{ou bien :} \\ \theta_1 = \text{atan } 2(p_y, p_x) - \text{atan } 2\left(a_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - a_2^2}\right) \end{array} \right.$$

Trois cas sont à prévoir comme solutions :

- Deux solutions pour $a_2^2 > \rho^2$

- Une solution pour $a_2^2 = \rho^2$
- Pas de solution pour $a_2^2 < \rho^2$

Deuxième méthode pour calculer θ_1 .

D'après (4.10a) on trouve (pour les calculs par cette méthode ; voir annexe 4) :

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}\left(\frac{a_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{\rho}\right)^2}\right)$$

Calcul θ_3 .

On multiplie la ${}^1T_0 {}^0T_6 = {}^1T_0 M$ par 2T_1 ; on obtient, avec la même méthode utilisée précédemment pour θ_1 , par identification de la 4^{ème} colonne on aura :

$$\begin{bmatrix} c_2(p_x c_1 + p_y s_1 - d_2) - p_z s_2 \\ -s_2(p_x c_1 + p_y s_1 - d_2) - p_z c_2 \\ -p_x s_1 + p_y c_1 - a_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 + d_4 c_3 - a_4 s_3 \\ a_4 c_3 + d_4 s_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

La résolution de système d'équations (4.11) donne (annexe 5) :

$$\begin{cases} \theta_3 = \text{atan2}\left(\frac{D}{r}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D}{r}\right)^2}\right) - \text{atan2}(A, B) \\ \text{ou bien} \\ \theta_3 = \text{atan2}\left(D, \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}\right) - \text{atan2}(A, B) \end{cases}$$

Trois solutions pour cette égalité sont à envisager :

- Deux solutions pour $D^2 > r^2$
- Une solution pour $D^2 = r^2$
- Pas de solution pour $D^2 < r^2$

Calcul θ_2 .

D'après l'équation (4.11) et les équations précédentes, on obtient (annexe 5) θ_2 :

$$\begin{cases} \theta_2 = \text{atan2}\left(\frac{D_1}{r_1}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D_1}{r_1}\right)^2}\right) - \text{atan2}(A_1, B_1) \\ \text{ou bien} \\ \theta_2 = \text{atan2}\left(D_1, \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - D_1^2}\right) - \text{atan2}(A_1, B_1) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } r_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

Calcul de θ_4 , θ_5 et θ_6 par la méthode de Paul [19].

Pour calculer θ_4 , θ_5 et θ_6 , on s'intéresse maintenant au problème de l'orientation, R est la matrice d'orientation pour la matrice de transformation homogène telle que :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}P_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Donc on peut écrire notre matrice sous forme :

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0P_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

D'où

$${}^0R_6 = {}^0R_3 {}^3R_6 = R \quad (4.14)$$

Le développement et la résolution pour les différents systèmes obtenus ont donné :

$$\begin{cases} \theta_4 = \text{atan } 2(H_z, -H_x) \text{ ou bien} \\ \theta_4 = \text{atan}(-H_z/H_x) \\ \theta_4' = \theta_4 + \pi \end{cases}$$

$$\theta_5 = \text{atan } 2(s_5, c_5)$$

$$\theta_6 = \text{atan } 2(s_6, c_6)$$

Les étapes de calcul sont données dans l'annexe 6

4-3. Calcul des vitesses dans l'espace opérationnel.

4-3-1. Calcul de la matrice jacobienne.

Le modèle cinématique direct permet de déterminer la vitesse de l'organe terminal dans l'espace opérationnel en fonction de la vitesse des variables articulaires.

Le modèle est décrit par l'équation :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (4.15)$$

J est la matrice jacobienne ou le manipulateur jacobien.

La matrice jacobienne.

L'outil mathématique principalement utilisé pour traiter le problème de la cinématique, et particulièrement les modèles géométriques et cinématique des robots est la « la matrice jacobienne ». Elle représente un opérateur permettant de lier les vitesses des corps d'un robot exprimées dans différents espaces vectoriels.

En considérant une fonction f définie comme suit :

$$f : Q \rightarrow w \quad (4.16)$$

$$q \rightarrow x = f(Q) \quad (4.17)$$

Où Q et w sont deux espaces vectoriels de dimensions (respectivement) m et n

La différentiation de l'équation $x = f(Q)$ donne :

$$dx = \frac{\partial f}{\partial q} dq \quad (4.18)$$

On définit alors, la matrice jacobienne comme suit :

$$[J(q)] = \left[\frac{\partial f}{\partial q} \right] \quad (4.19)$$

Première méthode.

On considère un manipulateur à n degrés de liberté *figure (4.5)*:

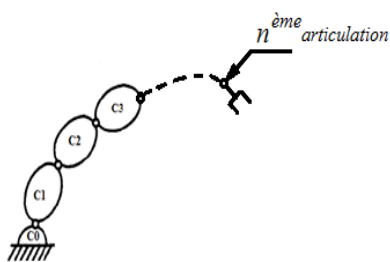


Figure 4.4 : manipulateur n degrés de liberté.

La matrice jacobienne est sous la forme :

$$J(q) = [j_1 \dots \dots \dots \dots \dots j_n] \quad (4.20)$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_1 \times {}^0d_n & \dots \dots \dots & {}^0\hat{k}_n \times {}^0d_n \\ {}^0\hat{k}_1 & \dots \dots \dots & {}^0\hat{k}_n \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$${}^0\hat{k}_i \times {}^0d_n = {}^0R_i * ({}^i\hat{k}_i \times {}^i d_n) \quad (4.22)$$

$$\text{Et } {}^0\hat{k}_i = {}^0R_i * {}^i\hat{k}_i \quad (4.23)$$

Avec ${}^i\hat{k}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ et $i=1.....6$

« n » est le nombre de degrés de liberté :

Pour notre exemple on a un bras manipulateur à six degrés de liberté donc on aura :

$$J(q) = J(q) = \begin{bmatrix} {}^0k_1 \times {}^0d_6 & {}^0k_2 \times {}^0d_6 & {}^0k_3 \times {}^0d_6 & {}^0k_4 \times {}^0d_6 & {}^0k_5 \times {}^0d_6 & {}^0k_6 \times {}^0d_6 \\ {}^0k_1 & {}^0k_2 & {}^0k_3 & {}^0k_4 & {}^0k_5 & {}^0k_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } {}^i\hat{k}_i = [0 \ 0 \ 1]^T \text{ et } i=1.....6 \quad (4.24)$$

La matrice jacobienne est sous la forme 6x6

$$\text{Donc : } J(q) = [j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4 \ j_5 \ j_6] \quad (4.25)$$

La matrice jacobienne du robot similaire au Cloos.

Pour calculer le jacobien du robot Cloos selon [43], [49]; les articulations de robot sont toutes de type rotoïde autour de l'axe z.

La matrice jacobienne de notre robot « similaire » au robot Cloos est de la forme suivante :

$J =$

$$\begin{bmatrix} -n_{24} & -c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -c_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ n_{14} & -s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -s_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23} & a_4s_{23} - d_4c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & -s_{23}c_1 & -s_1c_4 + c_1c_{23}s_4 & -s_5s_1s_4 - c_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 0 & c_1 & c_1 & -s_{23}s_1 & c_1c_4 + s_1c_{23}s_4 & s_5c_1s_4 - s_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} & -s_{23}s_4 & c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix}$$

Les étapes pour calculer J sont données dans l'annexe 7.

Deuxième méthode :

Dans cette méthode on a :

$$J = \begin{bmatrix} J_D \\ J_R \end{bmatrix} [\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z} \ w_x \ w_y \ w_z]^T \quad (4.26)$$

Les calculs de J_D et J_R sont indiqués dans l'annexe 8 .On obtient l'expression de J :

$$J = \begin{bmatrix} J_D \\ J_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{24} & -c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -c_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ n_{14} & -s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -s_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23} & a_4s_{23} - d_4c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & -s_{23}c_1 & -s_1c_4 + c_1c_{23}s_4 & -s_5s_1s_4 - c_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 0 & c_1 & c_1 & -s_{23}s_1 & c_1c_4 + s_1c_{23}s_4 & s_5c_1s_4 - s_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} & -s_{23}s_4 & c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix}$$

4-3-2. Les vitesses dans les espaces opérationnel et articulaire.

Les vitesses dans l'espace opérationnel.

On a la vitesse dans l'espace opérationnel donnée par la relation suivante :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \text{ Donc : } \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Avec :

$$J(q) =$$

$$\begin{bmatrix} -n_{24} & -c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -c_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ n_{14} & -s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -s_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23} & a_4s_{23} - d_4c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & -s_{23}c_1 & -s_1c_4 + c_1c_{23}s_4 & -s_5s_1s_4 - c_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 0 & c_1 & c_1 & -s_{23}s_1 & c_1c_4 + s_1c_{23}s_4 & s_5c_1s_4 - s_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} & -s_{23}s_4 & c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } n_{14} = -a_2 * s_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1$$

$$n_{24} = a_2 * c_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1$$

$$n_{34} = -a_4 * c_{23} - d_4 * s_{23} - d_3 * s_2$$

Alors la vitesse dans l'espace articulaire est donnée donc par :

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X} \quad (4.28)$$

Les vitesses dans l'espace articulaire.

On a $\dot{X} = J(q)\dot{q}$ donc $\dot{q} = (J(q))^{-1} * \dot{X}$, alors pour calculer les vitesses il faut calculer

l'inverse de la matrice jacobienne $(J(q))^{-1}$ ou bien résoudre le système d'équation $\dot{X} = J(q)\dot{q}$

Calcul des vitesses articulaires (annexe 9)

$$-n_{24}\dot{\theta}_1 - c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_2 - c_1(d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_3 = \dot{X} \quad (4.29)$$

$$n_{14}\dot{\theta}_1 - s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_2 - s_1(d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_3 = \dot{Y} \quad (4.30)$$

$$(a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23})\dot{\theta}_2 + (a_4s_{23} - d_4c_{23})\dot{\theta}_3 = \dot{Z} \quad (4.31)$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{Y} * c_1 - \dot{X} * s_1}{(n_{24} * s_1 + n_{14} * c_1)}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{((n_{14} - n_{24}) * \dot{\theta}_1 - (\dot{X} + \dot{Y})) * (a_4 s_{23} - d_4 c_{23}) - (s_1 + c_1) * (d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) * \dot{Z}}{(d_3 (a_4 - d_4) c_3 + 2d_4^2 s_{23}) * (s_1 + c_1)}$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{Z}}{(a_4 s_{23} - d_4 c_{23})} - \frac{(a_4 s_{23} - d_3 c_2 - d_4 c_{23}) ((n_{14} - n_{24}) * \dot{\theta}_1 - (\dot{X} + \dot{Y})) (a_4 s_{23} - d_4 c_{23}) - (s_1 + c_1) (d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) * \dot{Z}}{(a_4 s_{23} - d_4 c_{23}) (d_3 (a_4 - d_4) c_3 + 2d_4^2 s_{23}) (s_1 + c_1)}$$

$$\dot{\theta}_4 \boxminus = - \left[w_z c_{23} + (w_x c_1 + w_y s_1) s_{23} + c_5 \dot{\theta}_6 \right]$$

$$\dot{\theta}_5 = \frac{1}{s_4} \left[(w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23} + c_4 s_5 \dot{\theta}_6 \right]$$

$$\dot{\theta}_6 = \frac{\left[w_x - \left[(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \frac{c_4}{s_4} \left((w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23} \right) \right] s_1 - (w_x c_1 + w_y s_1) c_1 \right] s_4}{s_5 s_1}$$

4-4. L'étude des configurations singulières.

Pour tous les manipulateurs, de type sériel ou parallèle, on trouve des configurations dites singulières dans lesquelles le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur à la dimension de l'espace opérationnel dans lequel il évolue [48] [25].

De plus, ces configurations peuvent se situer sur la frontière de l'espace de travail, comme pour les manipulateurs sériels, ainsi qu'à l'intérieur. Ce sont ces singularités qui seront les plus perturbantes pour la génération de trajectoires. Ainsi, au voisinage de ces singularités, on rencontre les problèmes suivants :

- Une augmentation importante des efforts dans les articulations pouvant endommager la structure du manipulateur.
- Une perte de rigidité du manipulateur, qui peut se traduire par une instabilité de la plateforme mobile. C'est-à-dire des mouvements incontrôlés de celle-ci alors que les articulations motorisées sont bloquées.

Pour simplifier les calculs et l'écriture on pose :

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & 0 & 0 & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{32} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ 0 & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ 1 & 0 & 0 & j_{64} & j_{65} & j_{66} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Les calculs du $\text{Det}(J)$ sont donnés dans l'annexe 10.

Finalement on aura :

$$\text{Det}(J) = d_3 * (d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23})(d_4 s_3 - a_4 c_3) s_5 \quad (4.33)$$

$$\text{Det}(J) = 0 \Rightarrow d_3 * (d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23})(d_4 s_3 - a_4 c_3) s_5 = 0 \quad (4.34)$$

Donc on aura:

$$d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23} = 0$$

Ou bien: $d_4 s_3 - a_4 c_3 = 0$ où $s_5 = 0$

$$1- \sin(\theta_5) = 0 \Rightarrow \theta_5 = k\pi \quad (4.35)$$

$$2- d_4 s_3 - a_4 c_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = \text{atan2}(a_4, d_4) \quad (4.36)$$

De (4,36) on tire :

$$\frac{s_3}{c_3} = \frac{a_4}{d_4}$$

$$c_2(p_x c_1 + p_y s_1 - d_2) - p_z s_2 = d_3 + d_4 c_3 - a_4 s_3 \quad (4.37)$$

$$-s_2(p_x c_1 + p_y s_1 - d_2) - p_z c_2 = a_4 c_3 + d_4 s_3 \quad (4.38)$$

De plus d'après les équations (4.37) et (4.38) on aura :

$$\frac{-(d_4(p_x * c_1 - d_2) - a_4 p_z) * s_2 - (a_4(p_x c_1 - d_2) + d_4 p_z) * c_2 + a_4 d_3}{-(a_4(p_x * c_1 - d_2) + d_4 p_z) * s_2 + (d_4(p_x c_1 - d_2) - a_4 p_z) * c_2 - d_4 d_3} = \frac{a_4}{d_4}$$

Après simplification on trouve :

$$(2a_4 d_4 (p_x * c_1 - d_2) + (a_4^2 - d_4^2) p_z) * c_2 - ((a_4^2 - d_4^2)(p_x c_1 - d_2) + 2a_4 d_4 p_z) * s_2 = 2a_4 d_4 d_3$$

Cette dernière égalité est de la forme : $A_1 c_2 - B_1 s_2 = D_1$, donc sa solution est :

$$\theta_2 = \text{atan2}(B_1, A_1) - \text{atan2}\left(\frac{D_1}{r_1}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D_1}{r_1}\right)^2}\right)$$

Avec :

$$A_1 = 2a_4 d_4 (p_x * c_1 - d_2) + (a_4^2 - d_4^2) p_z$$

$$B_1 = (a_4^2 - d_4^2)(p_x c_1 - d_2) + 2a_4 d_4 p_z$$

$$D_1 = 2a_4 d_4 d_3$$

$$r_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

4-5. Génération de trajectoire pour un robot à 6 DDL similaire au Cloos.

4-5-1. Problématique.

La génération d'une trajectoire continue par un robot recouvre plusieurs applications dans le domaine industriel tel que le soudage, le découpage, le perçage, la peinture... Dans ces opérations un outil est rigidement fixé à l'organe terminal du robot manipulateur, généralement, pour que la trajectoire générée soit lisse, il faut 6 degrés de liberté : trois degrés de liberté pour la position du chemin et les trois autres pour l'orientation de l'outil. L'organe terminal doit traverser le parcours avec une vitesse et une accélération données par le processus de l'opération. De plus pour que un organe terminal d'un tel manipulateur peut atteindre une telle position la forme de l'outil influe sur sa, ainsi que sur leur degré de liberté comme la montre *figure* (4.6). Donc pour définir une trajectoire d'un tel outil il faut définir son positionnement et ses orientations initiale et finale par rapport au repère atelier *figure* (4.9) et leur matrice de transformation par rapport à sa dernière articulation qui porte l'outil terminal *figure* (4.7) *figure* (4.8).

Notre application consiste à affecter au Robot une tâche tel que le soudage d'une pièce monté sur un tour et de chercher le meilleur chemin parcouru par l'outil d'une position initial vers la position désirée avec un durée minimale et moins de consommation d'énergie.

Pour mieux expliquer, on a choisi une application sur un robot à six degrés de liberté. Pour notre approche on est amené, après l'étude de modèle géométrique et cinématique, analyser au niveau de l'espace opérationnel le chemin suivi par le robot. Pour cela on a donné au robot une tâche (soudage) et un chemin à suivre. A partir de là, il faut connaître les points de départ et cible et l'état de l'organe terminal, c'est-à-dire la position et l'orientation de chaque point de la trajectoire.

Pour le problème de la génération de mouvements, le calcul des consignes de position, vitesse et accélération sont fonction du temps. Elles assurent le passage du robot par une trajectoire désirée, dans cette trajectoire, chaque point est représenté par une matrice (4*4) qui définit la position et l'orientation de l'organe terminal.

On peut distinguer les classes de mouvements suivantes [19] et [51]:

- mouvement entre deux points avec trajectoire libre entre les points,
- mouvement entre deux points en passant par des points intermédiaires pour éviter les obstacles,
- mouvement entre deux points avec avec trajectoire contrainte entre les points et
- le mouvement entre deux points avec des points intermédiaires et trajectoire contrainte.

Dans les deux premiers cas la génération de mouvements peut se faire directement dans l'espace articulaire. Dans les deux derniers cas, la trajectoire est décrite dans l'espace opérationnel. Les deux approches : génération de mouvements dans l'espace articulaire et génération de mouvement dans l'espace opérationnel sont schématisés dans le chapitre 3 par les figures 3.3 et 3.4

La génération de mouvement dans l'espace articulaire présente plusieurs avantages :

- elle n'a pas besoin des modèles géométriques et cinématiques inverses donc moins de calcul en ligne ;
- le mouvement ne présente pas des configurations singulières et
- les contraintes de vitesse et de couple sont directement liées à la fiabilité des actionneurs

Malheureusement, la trajectoire de l'organe terminal dans l'espace opérationnel est imprévisible il y a donc risque de collision lorsque le robot travaille dans un espace qui présente des obstacles. Ce type de mouvement est approprié pour réaliser des déplacements rapides dans un espace dégagé.

La génération de mouvement dans l'espace opérationnel permet de contrôler la géométrie de la trajectoire par contre :

- elle implique la transformation en coordonnées articulaires en chaque point de la trajectoire,
- elle est mise en échec si les points de la trajectoire ne sont pas dans l'espace accessible et
- les limites en vitesse et en couple dans l'espace opérationnel varient selon la configuration du robot, on l'exprime par des valeurs traduisant des performances moyennes. On impose donc au robot de travailler en deçà de ses capacités réelles.

4-5-2. Génération de mouvement entre deux points dans l'espace articulaire.

On considère un bras à n degrés de liberté avec q^i et q^f les vecteurs des coordonnées articulaires des configurations initiale et finale. Le mouvement entre q^i et q^f en fonction du temps t est décrit par l'équation suivante :

$$q(t) = q^i + r(t)D \quad (4.39)$$

Avec $0 \leq t \leq t_f$ et $D = q^i - q^f$

$r(t)$: polynôme d'interpolation

Les modes d'interpolation polynomiale les plus rencontrés sont l'interpolation linéaire, l'interpolation de degrés 3 et 5 [51],[41] et [19].

4-5-2-1. Interpolations polynomiales linéaires.

L'interpolation linéaire est l'interpolation la plus simple. Dans ce cas le mouvement de chaque articulation est décrit par un polynôme linéaire en fonction de temps, avec l'utilisation des deux conditions aux limites : q^i et q^f , l'équation du mouvement s'écrit :

$$q(t) = q^i + \frac{t}{t_f} D \quad (4.40)$$

4-5-2-2. Interpolation polynomiale de degré trois.

Deux conditions aux limites peuvent être ajoutées : vitesses nulles de départ et d'arrivée, le polynôme qui répond à ces conditions est alors de degré trois :

$$q(t) = q^i + \left(3 \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 - 2 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 \right) D \quad (4.41)$$

4-5-2-3. Interpolation polynomiale de degré cinq.

Pour les robots à grande vitesse ou transportant des charges importantes, il est nécessaire d'assurer la continuité des accélérations afin d'éviter la présence de forces dynamiques importantes. Pour cela il faut satisfaire 6 contraintes : les contraintes précédentes plus la condition accélérations nulles au départ et à l'arrivée. Le polynôme qui satisfait ces contraintes est de degré cinq :

$$q(t) = q^i + \left(10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right) D \quad (4.42)$$

4-5-3. Génération de mouvement dans l'espace opérationnel.

4-5-3-1. Génération de mouvement découplable entre deux points dans l'espace opérationnel.

La tâche est décrite au moyen de la matrice de transformation homogène qui décrit la position et l'orientation de l'outil *figure 4.9*. Dans cette expression, \vec{p} représente le vecteur position (*absolue*) du centre d'outil, \vec{a} (*approch*), représente le vecteur unitaire suivant l'axe d'approche de l'outil considéré « ici comme une pince \vec{h} ou \vec{s} (*sliding*) », représente le

vecteur unitaire suivant son axe de fermeture et \vec{n} (*normale*), représente le vecteur unitaire normal au plan formé par \vec{a} et \vec{h} . Soient T_{Ei}^0 et T_{Ef}^0 les matrices homogènes désignant respectivement les situations initiale désirées :

$${}^0T_{Ei} = \begin{bmatrix} R^i & p^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^0T_{Ef} = \begin{bmatrix} R^f & p^f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On recherche les matrices de transformation qui ramène le point de l'outil de l'état initial T_{Ei}^0 à l'état final T_{Ef}^0 suivant une trajectoire rectiligne *figure 4.9*. On décompose le mouvement en : des mouvement de translation rectiligne entre les repères T_{Ei}^0 et T_{Ef}^0 et en de rotation d'angle γ autour d'un vecteur \vec{u} de l'organe terminal permettant d'aligner R^i et R^f . Les deux mouvements se terminent en même temps. Dans le cas des robots à poignet rotule, le mouvement est découplable c'est-à-dire l'orientation est indépendante de la position.

La distance à parcourir lors du mouvement de translation est :

$$Dist(\vec{p}^f, \vec{p}^i) = \|\vec{p}^f - \vec{p}^i\| = \sqrt{(p_x^f - p_x^i)^2 + (p_y^f - p_y^i)^2 + (p_z^f - p_z^i)^2} \quad (4.43)$$

La matrice de rotation qui permet d'aligner R^i avec R^f est donnée par :

$$R^i \text{rot}(u, \gamma) = R^f \quad (4.44)$$

$$\text{rot}(u, \gamma) = R^{iT} R^f \quad (4.45)$$

Et on a

$${}^0R_{Ei} \begin{bmatrix} h_x^i & n_x^i & a_x^i \\ h_y^i & n_y^i & a_y^i \\ h_z^i & n_z^i & a_z^i \end{bmatrix} \text{ et } {}^0R_{Ef} \begin{bmatrix} h_x^f & n_x^f & a_x^f \\ h_y^f & n_y^f & a_y^f \\ h_z^f & n_z^f & a_z^f \end{bmatrix}$$

La matrice $\text{rot}(u, \gamma)$ est donnée par :

$$\text{rot}(u, \gamma) = \begin{bmatrix} \vec{h}^{iT} \\ \vec{n}^{iT} \\ \vec{a}^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}^f & \vec{n}^f & \vec{a}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}^{iT} \vec{h}_x^f & \vec{h}^{iT} \vec{n}^f & \vec{h}^{iT} \vec{a}^f \\ \vec{n}^{iT} \vec{h}^f & \vec{n}^{iT} \vec{n}^f & \vec{n}^{iT} \vec{a}^f \\ \vec{a}^{iT} \vec{h}^f & \vec{a}^{iT} \vec{n}^f & \vec{a}^{iT} \vec{a}^f \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{2} (\vec{h}^{iT} \vec{h}^f + \vec{n}^{iT} \vec{n}^f + \vec{a}^{iT} \vec{a}^f - 1) \quad (4.47)$$

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{a}^{iT} \vec{n}^f - \vec{n}^{iT} \vec{a}^f)^2 + (\vec{h}^{iT} \vec{a}^f - \vec{a}^{iT} \vec{h}^f)^2 + (\vec{n}^{iT} \vec{h}^f - \vec{h}^{iT} \vec{n}^f)^2} \quad (4.48)$$

$$\begin{cases} u_x = \text{sign} \left(\vec{a}^{iT} \vec{n}^f - \vec{n}^{iT} \vec{a}^f \right) \sqrt{\frac{\vec{h}^{iT} \vec{h}^f - c_\gamma}{1 - c_\gamma}} \\ u_x = \text{sign} \left(\vec{h}^{iT} \vec{a}^f - \vec{a}^{iT} \vec{h}^f \right) \sqrt{\frac{\vec{n}^{iT} \vec{n}^f - c_\gamma}{1 - c_\gamma}} \\ u_x = \text{sign} \left(\vec{n}^{iT} \vec{h}^f - \vec{h}^{iT} \vec{n}^f \right) \sqrt{\frac{\vec{a}^{iT} \vec{a}^f - c_\gamma}{1 - c_\gamma}} \end{cases} \quad (4.49)$$

D'où la situation désirée a pour expression :

$${}^0T_E(t) = \begin{bmatrix} R(t) & P(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^i + r(t)(\vec{P}^f - \vec{P}^i) \quad (4.51)$$

$$R(t) = R^i \text{rot}(\vec{u}, r(t)\gamma) \quad (4.52)$$

Pour notre cas, on choisit une fonction d'interpolation linéaire de degré cinq, équations : (2.40) et (2.42) et on a :

$$\begin{cases} r(t) = \frac{t}{t_f} \\ r(t) = 10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\text{rot}(\vec{u}, r(t)\gamma) = \vec{u}\vec{u}^T (1 - \cos(r(t)\gamma)) + I_3 \cos(r(t)\gamma) + \hat{\vec{u}} \sin(r(t)\gamma) \quad (4.54)$$

I_3 : désigne la matrice unité 3X3,

$\hat{\vec{u}}$: la matrice pré produit vectoriel.

4-5-4. Algorithme de calcul des coordonnées articulaires pour une trajectoire rectiligne.

Introduction des données .

- ❖ Position et orientation de l'outil par rapport à T_6^5
 - $\beta \leftarrow 45^\circ, a_7 \leftarrow 0.05m, d_7 \leftarrow 0.3m$
- ❖ E_{outil} ,
- ❖ T_{Ei} et T_{Ef} . Situations initiale et finale de l'outil
- ❖ $v \leftarrow v_0$ vitesse de déplacement de l'outil

Calcul : situation désirée le long du parcours rectiligne

- $E \leftarrow E_{\text{outil}}^{-1}$
- $Dist$: longueur du parcours

- $rot(\vec{u}, \gamma) = T_{Ei} \cdot T_{Ef}$
- $\cos(\gamma)$
- $\sin(\gamma)$
- u
- $\gamma = a \tan 2(\cos(\gamma), \sin(\gamma))$
- $t_f = \frac{Dist}{v_0}$
- $rot(\vec{u}, \gamma) = \vec{u}\vec{u}^T (1 - \cos(\gamma)) + I_3 \cos(\gamma) + \hat{u} \sin(\gamma)$
- $P(t) = P^i + \frac{t}{t_f} (P^f - P^i)$
- $rot(\vec{u}, \gamma) = \vec{u}\vec{u}^T \left(1 - \cos\left(\gamma \frac{t}{t_f}\right)\right) + I_3 \cos\left(\gamma \frac{t}{t_f}\right) + \hat{u} \sin\left(\gamma \frac{t}{t_f}\right)$
- $T_E^0(t) = \begin{bmatrix} R(t) & P(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Modèle géométrique inverse.

N = dimension de q_i pour $i=1$ à N

- $q_1(i) = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}\left(a_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - a_2^2}\right)$
- $q_3(i) = \text{atan2}\left(D, \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}\right) - \text{atan2}(A, B)$
- $q_2(i) = \text{atan2}\left(D_1, \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - D_1^2}\right) - \text{atan2}(A_1, B_1)$
- $q_4(i) = \text{atan2}(a_y c_1 - a_x s_1, a_z s_{23} - (a_x c_1 + a_y s_1) c_{23})$
- $q_5(i) = \text{atan2}((a_y c_1 - a_x s_1) * s_4, (a_z s_{23} - (a_x c_1 + a_y s_1) c_{23}) * c_4)$
- $q_6(i) = \text{atan2}(-(h_y c_1 - h_x s_1) * c_4 - ((h_x c_1 + h_y s_1) c_{23} - h_z s_{23}) * s_4, -(n_y c_1 - n_x s_1) * c_4 - ((n_x c_1 + n_y s_1) c_{23} - n_z s_{23}) * s_4)$

Fin

- Impression des q_i sous formes de courbes .

4-6. Application .

D'après les figures (4.5,7,8) on peut déterminer l'état initial et l'état final du Robot et de l'organe terminal.

La position et l'orientation initiales et finales de l'organe terminal par rapport au repère atelier sont :

$${}^0T_{E_i} = \begin{bmatrix} -\cos(45^\circ) & 0 & -\sin(45^\circ) & p_x^i \\ 0 & 1 & 0 & p_y^i \\ \sin(45^\circ) & 0 & -\cos(45^\circ) & p_z^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 & -0.7071 & 1.65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0 & -0.7071 & 0.70 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_{E_f} = \begin{bmatrix} -\cos(45^\circ) & 0 & \sin(45^\circ) & p_x^f \\ 0 & 1 & 0 & p_y^f \\ -\sin(45^\circ) & 0 & -\cos(45^\circ) & p_z^f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 & 0.7071 & 1.65 \\ 0 & 1 & 0 & -0.50 \\ -0.7071 & 0 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i	σ_i	α_i	d_i	a_i	θ_i
1	0	0°	0	0	θ_1
2	0	-90°	0.2	0.5	θ_2
3	0	0°	0.7	0	θ_3
4	0	-90°	0.6	0.2	θ_4
5	0	90°	0	0	θ_5
6	0	-90°	0	0	θ_6

Tableau 4.2 : D-H paramètres du Robot à six DDL similaire au Robot Cloos.

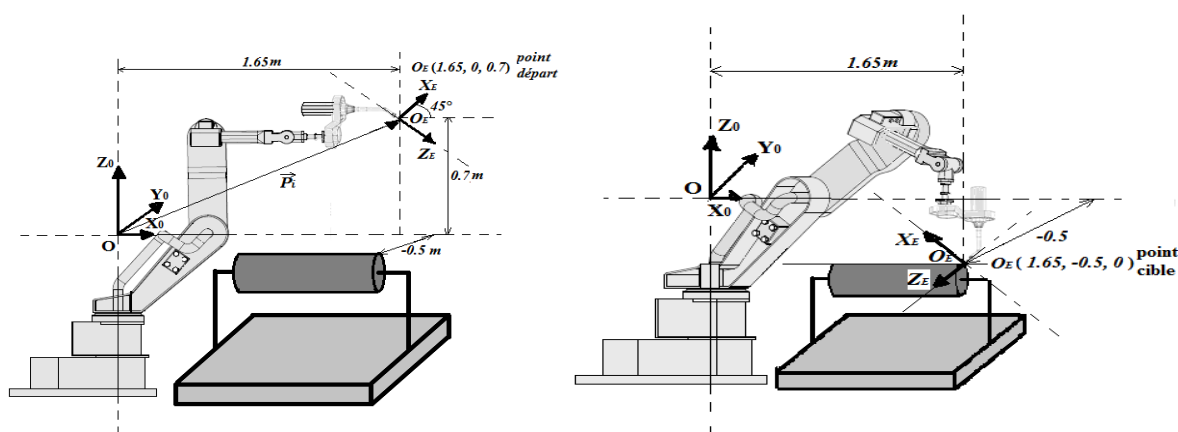
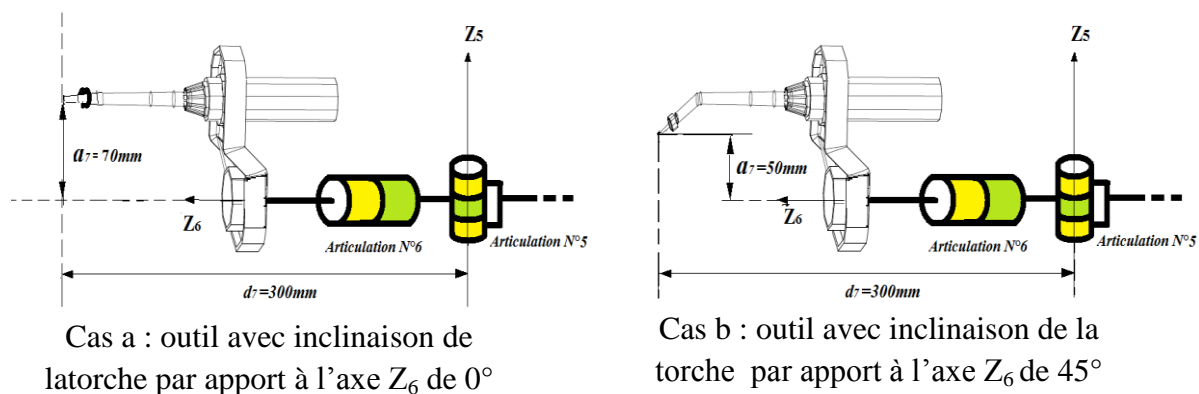


Figure (4.5) : Etats initial et final

La forme de l'outil terminal :



Cas a : outil avec inclinaison de latorche par apport à l'axe Z_6 de 0°

Cas b : outil avec inclinaison de la torche par apport à l'axe Z_6 de 45°

Figure (4.6) : Forme de l'outil terminal

Commentaire : Le choix de l'outil terminal *figure* (4.6) (Cas a) pour certaines tâches élimine l'articulation 6 car dans ce cas l'articulation 5 fait le travail de l'articulation 6. C'est le cas de redondance par exemple dans l'opération de soudage par contre dans le cas du perçage l'existence de l'articulation 6 est nécessaire. L'inconvénient de l'élimination de l'articulation 6 est la diminution de l'espace de travail pour le Robot, c'est-à-dire l'outil ne peut pas atteindre le point le plus éloigné *figure* (4.6) (Cas b). Pour notre application, on a choisi le cas b de la *figure* (4.6) avec les dimensionnes données dans la *figure* (4.7).

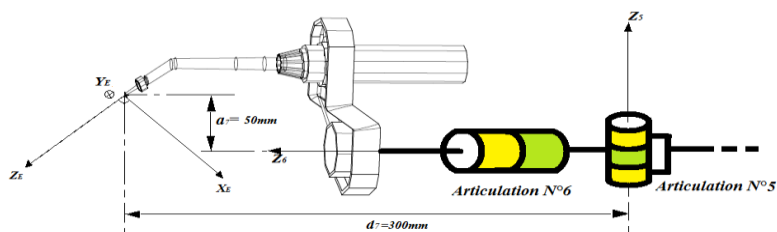
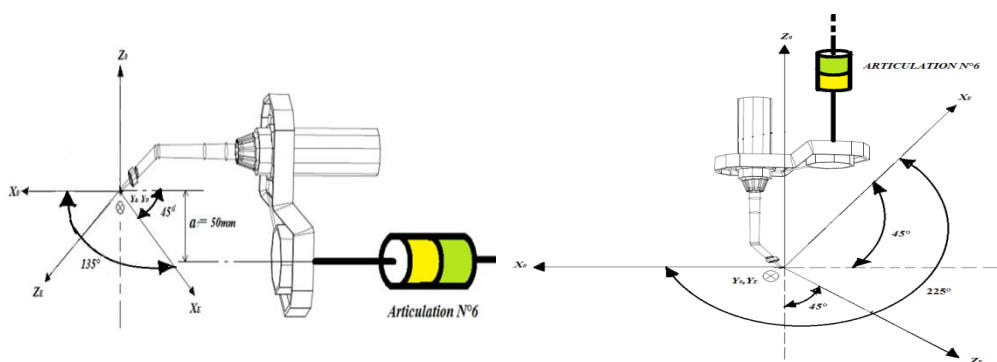


Figure (4.7) : Organe terminal

Détermination de la position et l'orientation de l'organe terminal.

Pour définir la trajectoire désirée, il faut déterminer les états initial et final de l'outil terminal par apport au repère atelier et le repère de l'articulation 6. Les *figures* (4.8), (4.9) montrent les états initial et final de l'organe terminal.

États initial et final pour l'outil de l'organe terminal :



Position initiale de l'organe terminal (1)

Position initiale de l'organe terminal (2)

Figure (4.8) : Positions initiale et finale de l'organe terminal

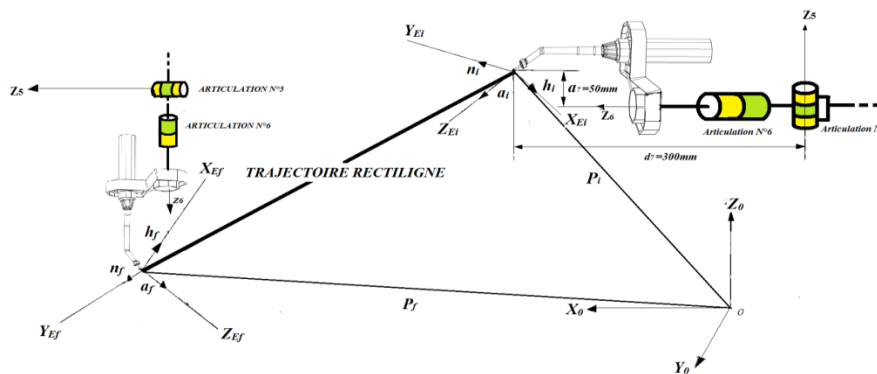


Figure (4.9) : Trajectoire rectiligne de l'outil

La *figure* (4.9) montre la position et l'orientation de l'outil terminal par rapport au repère atelier et la trajectoire désirée.

4-6-1. Trajectoire rectiligne .

Nous allons examiner deux cas :

cas1 : La fonction d'interpolation est linéaire (4.48) : $r(t) = \frac{t}{t_f}$

cas2 : La fonction d'interpolation est de degré cinq (4.49) :

$$r(t) = 10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5$$

pour une vitesse de déplacement de l'organe terminal, on donne $v_0 = 0.02m/s$,

$$Dist(p^f, p^i) = \|p^f - p^i\| = \sqrt{(p_x^f - p_x^i)^2 + (p_y^f - p_y^i)^2 + (p_z^f - p_z^i)^2}$$

Après des considérations mathématiques, on trouve :

$$Dist(p^f, p^i) = \sqrt{(1.65 - 1.65)^2 + (-0.5 - 0)^2 + (0 - 0.7)^2}$$

$$Dist(p^f, p^i) = 0.86233 \text{ m}$$

$$\|\dot{P}(t)\| = \frac{Dist}{t_f} = v_0 \quad \text{et} \quad t_f = \frac{Dist}{v_0} = \frac{0.86233}{0.02} = 43,12s$$

Naturellement, l'organe terminal doit démarrer avec une vitesse nulle pour s'arrêter à une vitesse nulle, donc le profil de vitesses le plus simple est d'avoir une accélération constante lors du démarrage et à l'arrêt *figure* 2.10. Ce qui explique notre choix du profil des vitesses (trapézoïdal) *figure* 2.11.

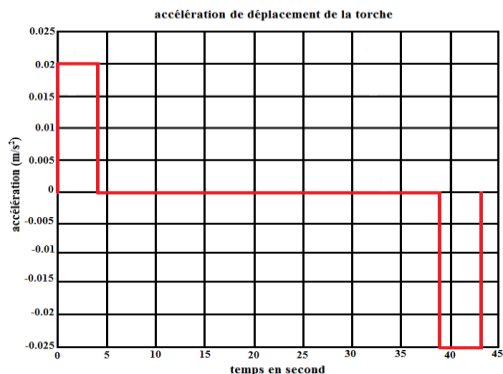


Figure (2.10) : accélération de l’outil

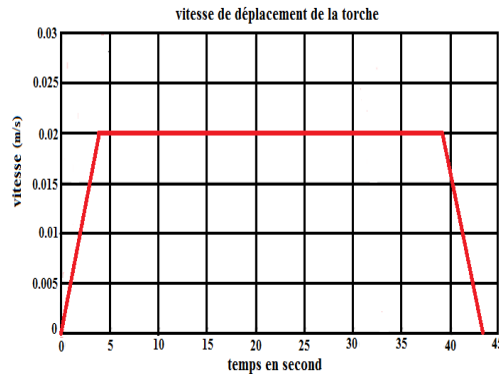


Figure (2.11) :Vitesse de l’outil

La matrice de position et l’orientation sont données par :

$${}^6T_E = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & a_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0.7071 & 0.05 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour l’application l’organe terminal a pour caractéristiques : $\beta = 45^\circ$ avec $a_7 = 0.05\text{ m}$ et $d_7 = 0.30\text{ m}$.

6T_E est la matrice de transformation homogène définissant le repère outil.

Les résultats obtenus par la programmation sous Matlab R2009b donnent la trajectoire désirée figures (4.12,13,14,15) et les variables articulaires pour l’interpolation linéaire de degré cinq figure (4.16).

Trajectoire désirée dans l’espace opérationnel : PlanS XOY et XOZ :

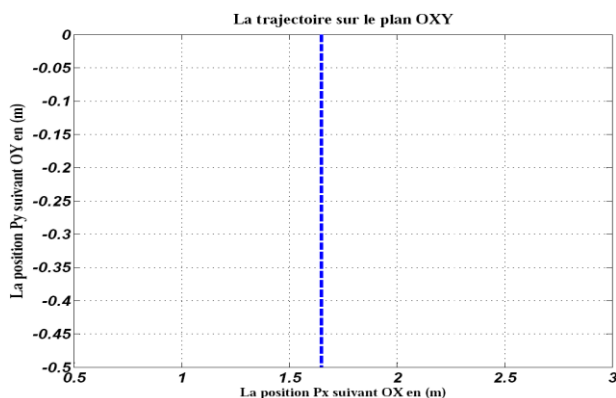


Figure (4.12) : Trajectoire dans le plan OXZ

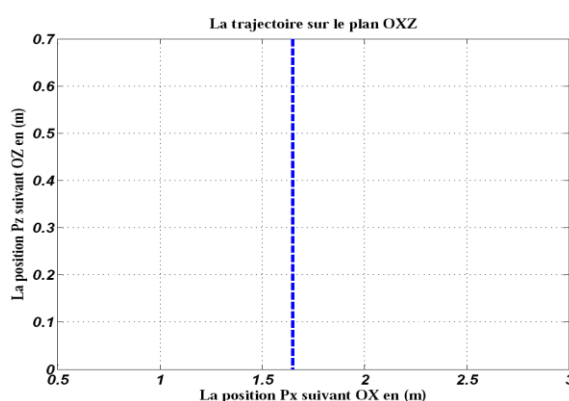


Figure (4.13) : Trajectoire dans le plan OXZ

Dans le plan YOZ :

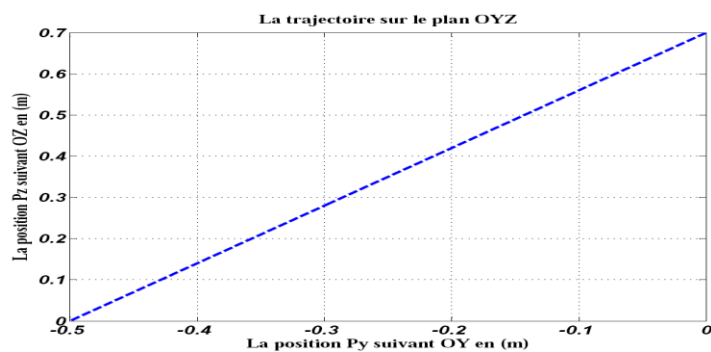


Figure (4.14) : Trajectoire dans le plan OYZ

Trajectoire dans l'espace OXYZ :

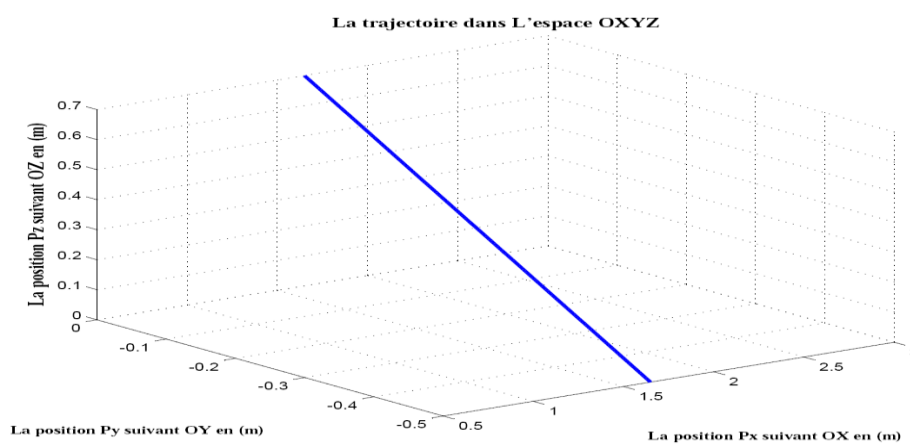
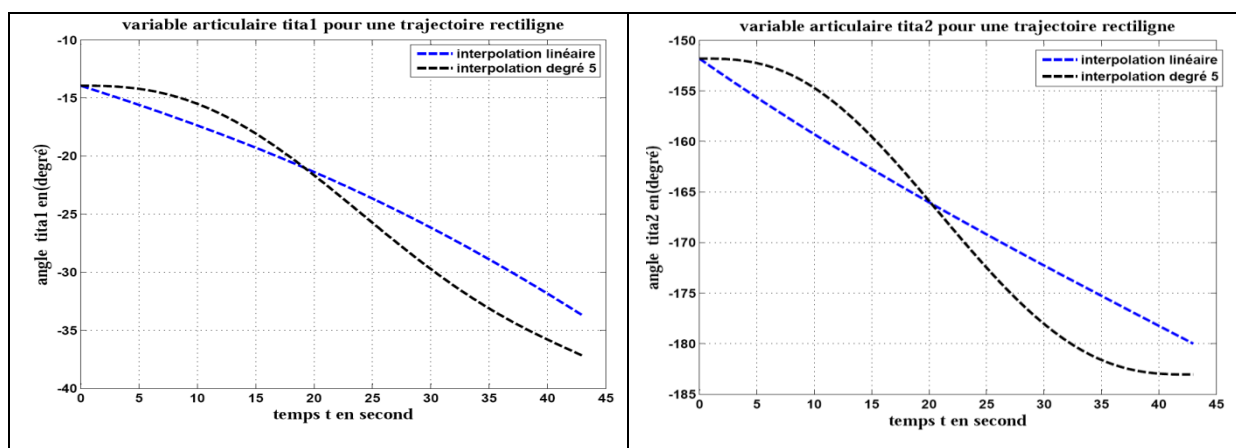


Figure (4.15) : Trajectoire dans OXYZ

Les graphes pour variable articulaire :



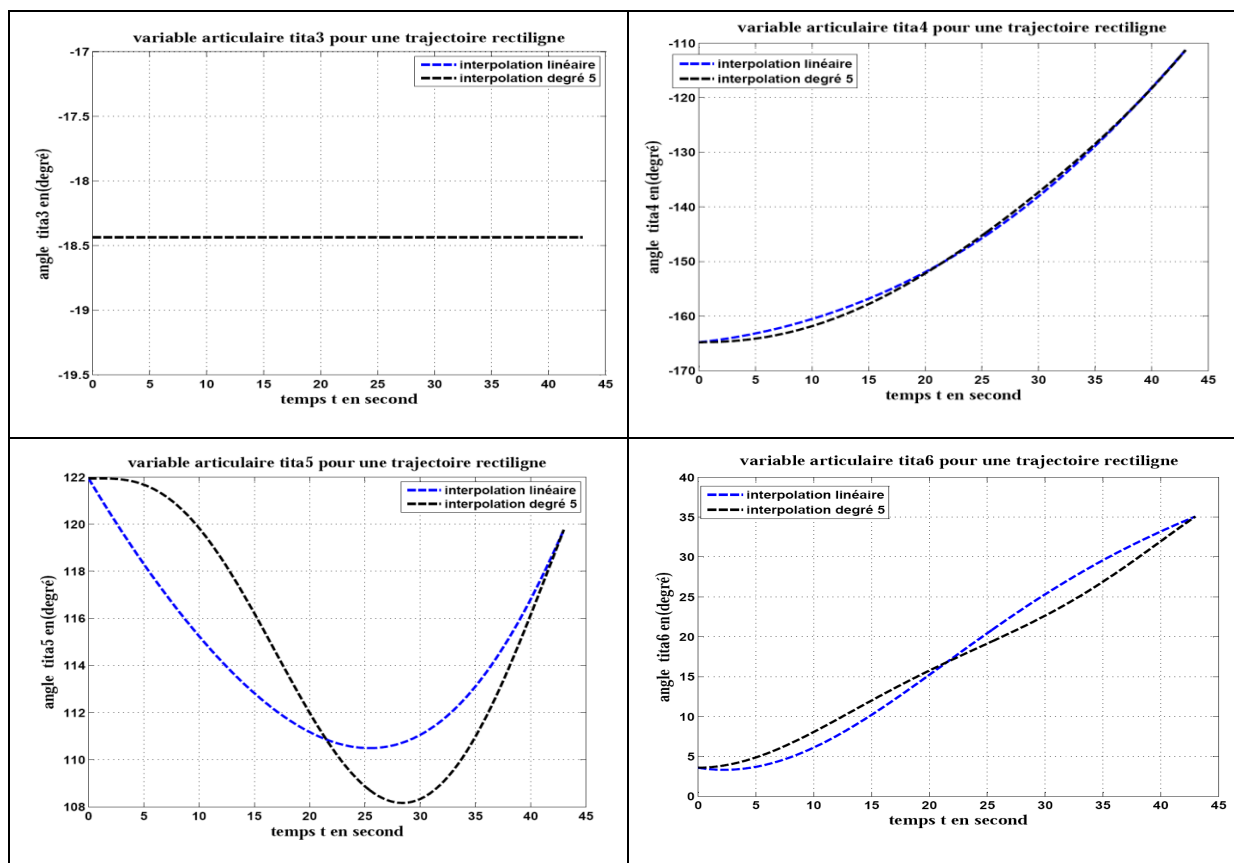


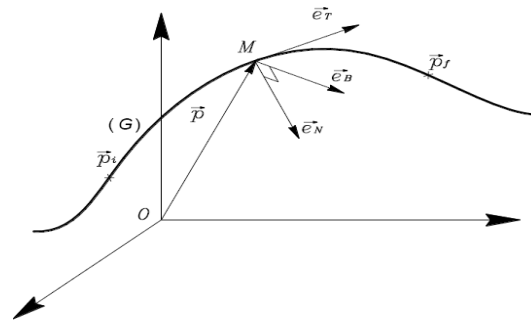
Figure (4.16) : Les graphes pour les variables articulaires

La *figure (4.16)* montre la variation des coordonnées articulaires en fonction du temps suivant deux fonctions d'interpolations de degré 1 et 5. Pour l'interpolation de degré 1, on peut observer que les pentes de départ et d'arrivée sont importantes tandis que celles pour l'interpolation de degré 5 sont trop aplaties. On conclut qu'une interpolation de degrés 4 ou 3 suffira pour cette application.

4-6-2. Génération de trajectoire curviligne :

Courbes dans l'espace :

Dans plusieurs applications de la robotique, on veut que la trajectoire de l'outil soit une courbe gauche dans l'espace de travail du robot, dans ce cas, il est possible de repérer la trajectoire par un repère intrinsèque (lié à la courbe). On note \vec{e}_T, \vec{e}_N et \vec{e}_B , trièdre de *Frenet – Serret* : tangentiel, normal et bi-normal à la courbe lisse Γ . $\vec{p}(t)$ est le rayon vecteur joignant l'origine au point M qui se déplace sur la courbe *figure (4.17)*. Soit s l'abscisse curviligne, et si on différencie \vec{p} par rapport à s on obtient le vecteur unitaire de la tangente [44][45]:



Figure(4.17) :Repérage d'une courbe dans l'espace

$$\vec{e}_T = \frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{p}' \quad (4.55)$$

$$\vec{e}_N = \frac{1}{k} \frac{d\vec{e}_T}{ds} = \rho \vec{p}'' \quad (4.56)$$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N \quad (4.57)$$

Avec : $\vec{p}' = \frac{d\vec{p}}{ds}$ et $\vec{p}'' = \frac{d^2\vec{p}}{ds^2}$, s l'abscisse curviligne, $\rho = \frac{1}{k}$ le rayon de courbure et k

la courbure.

A partir des formules de Frenet-Serret, on peut introduire le paramètre temps en dérivant les expressions des vecteurs unitaires par rapport au temps [41]:

Le vecteur \vec{e}_T :

$$\vec{e}_T = \frac{d\vec{P}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{P}}}{\dot{s}}$$

sachant que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

et en divisant cette expression par dt^2 et en prenant la racine des deux cotés, on a :

$$\dot{s} = \left\| \dot{\vec{P}} \right\| \quad (4.58)$$

D'où

$$\vec{e}_T = \frac{\dot{\vec{P}}}{\left\| \dot{\vec{P}} \right\|}$$

(4.59)

Pour le vecteur \vec{e}_N , on a

$$\vec{p}'' = \frac{d\vec{p}'}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{p}'}{dt} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{P}}}{\dot{s}} \right) = \frac{\ddot{\vec{P}}\dot{s} - \dot{\vec{P}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \quad (4.60)$$

A partir de l'expression (4.56) on trouve : $\vec{e}_N = \rho \frac{\ddot{\vec{P}}\dot{s} - \dot{\vec{P}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}$

De la relation (4.56) on tire :

$$\|\vec{e}_N\| = \rho \|\vec{p}''\| = 1$$

D'où

$$k = \frac{1}{\rho} = \|\vec{p}''\| = \left\| \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \right\|$$

et

$$\vec{e}_N = \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{k\dot{s}^3} \quad (4.61)$$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N \quad (4.62)$$

Vitesse angulaire du trièdre :

Selon le théorème de Frenet-Serret[46] Les dérivées des vecteurs \vec{e}_T , \vec{e}_N et \vec{e}_B sont :

$$\vec{e}_T' = \frac{d\vec{e}_T}{ds} = k\vec{e}_N \quad (4.63)$$

$$\vec{e}_N' = \frac{d\vec{e}_N}{ds} = -k\vec{e}_T + \tau\vec{e}_B \quad (4.64)$$

$$\vec{e}_B' = \frac{d\vec{e}_B}{ds} = -\tau\vec{e}_N \quad (4.65)$$

avec : $k = \|\vec{e}_T'\|$ et $\tau = -\vec{e}_B \cdot \vec{e}_N'$ et pour la démonstration voir [60]

En tenant compte du paramètre temps, les formules (4.63), (4.64) et (4.65) deviennent :

$$\dot{\vec{e}}_T = \frac{d\vec{e}_T}{dt} = sk\vec{e}_N \quad (4.66)$$

$$\dot{\vec{e}}_N = \frac{d\vec{e}_N}{dt} = -sk\vec{e}_T + s\tau\vec{e}_B \quad (4.67)$$

$$\dot{\vec{e}}_B = \frac{d\vec{e}_B}{dt} = -s\tau\vec{e}_N \quad (4.68)$$

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur vitesse angulaire du trièdre de Frenet-Serret, donc on a :

$$\dot{\vec{e}}_T = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_T \quad (4.69)$$

$$\dot{\vec{e}}_N = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_N \quad (4.70)$$

$$\dot{\vec{e}}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_B \quad (4.71)$$

Les relations (4.69), (4.70) et (4.71) peuvent être écrites sous les formes suivantes :

$$-E_T \vec{\omega} = \dot{s} k \vec{e}_N \quad (4.72)$$

$$-E_N \vec{\omega} = -\dot{s} k \vec{e}_T + \dot{s} \tau \vec{e}_B \quad (4.73)$$

$$-E_B \vec{\omega} = -\dot{s} \tau \vec{e}_N \quad (4.74)$$

avec E_T , E_N et E_B matrices de pré produits vectoriels, ou bien :

$$-E\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{s} k \vec{e}_N \\ -\dot{s} k \vec{e}_T + \dot{s} \tau \vec{e}_B \\ -\dot{s} \tau \vec{e}_N \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Application pour une trajectoire hélicoïdale :

$Dist(p^f, p^i) = 0.860 \text{ m}$ (La distance entre la position initiale et finale de trajectoire rectiligne)

Le temps final pour déplacer de la position initiale vers la position finale est :

$$t_f = Dist / v = 0.860 / 0.02 = 43 \text{ seconde}$$

L'angle entre la position initiale et la position finale est : $\alpha = 52.35^\circ$

Etat initial \mathbf{P}^i (1.65, 0, 0.7) (mètre) pour $\varphi = 9.36^\circ$

Etat final \mathbf{P}^f (1.65, -0.5, 0) (mètre) pour $\varphi = 61.71^\circ$

Les coordonnées de centre de cercle par rapport au Repère R_0 de Robot sont:

\mathbf{O}_c (1.65, 0.962, 0.858) mètres et $R=0.975\text{m}$ (rayon de trajectoire circulaire)

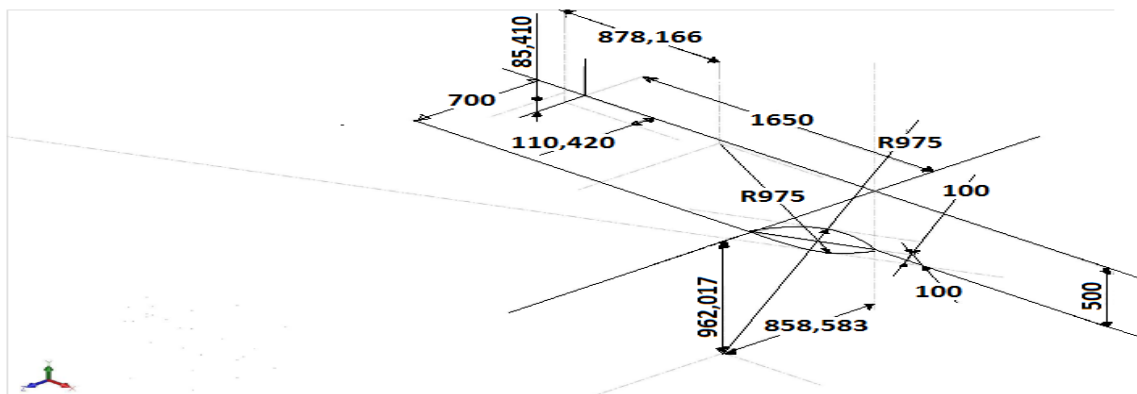


Figure (4.18) : Trajectoires rectiligne et circulaire dans l'espace obtenues à l'aide de logiciel SolidWorks

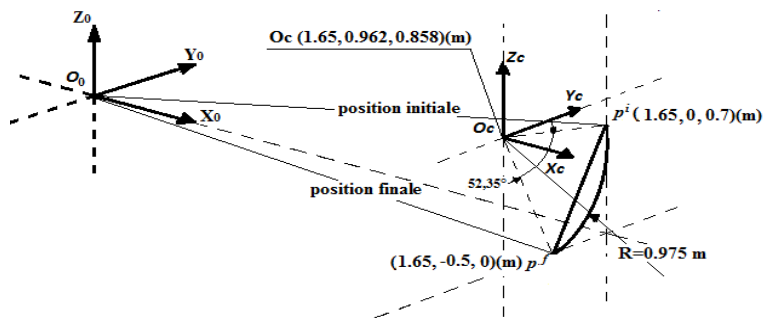
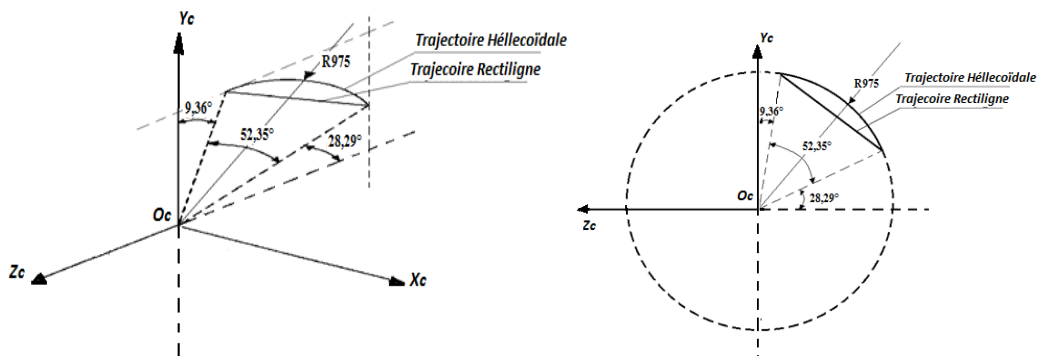


Figure (4.19) : Le repère de trajectoire circulaire par rapport au repère R₀ atelier de Robot



Figure(4.20) :Trajectoire circulaire désirée avec la trajectoire rectiligne représentée sur le repère du cercle dans l'espace et sur le plan YOZ du cercle

La distance entre la position initiale et la position finale de trajectoire circulaire est :

$$Pér(p^f, p^i) = R * \alpha * \pi/180$$

$$Pér(p^f, p^i) = 0.975 * 52,35 * \pi/180 ; \quad Pér(p^f, p^i) = 0.891m$$

Le temps final pour déplacer de position initiale vers la position finale de la trajectoire circulaire est :

La vitesse de déplacement et la même que pou la trajectoire rectiligne $v=0.02m/s$

$$t_f = Pér/v \quad ; \quad t_f = 0.891/0.02 = 44.55 \text{ seconde}$$

Les équations paramétriques de la partie circulaire de la trajectoire dans le repère

$R_c(O_c, X_c, Y_c, Z_c)$ sont :

$$\vec{p}_c(\varphi) = \begin{cases} X_c = \frac{b\varphi}{\alpha} \\ Y_c = R_c \cos(\varphi) \\ Z_c = -R_c \sin(\varphi) \end{cases}$$

Avec : $\alpha \in [0, 2\pi], \varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha + \varphi_0$

Pour notre application on a :

$\alpha \in [0, 52.35]$ (en degrés) , $\varphi_0 = 9.36^\circ$ et $b = 0 \text{ m}$; donc : $9.36^\circ \leq \varphi \leq 61.71^\circ$

Pour les paramètres de D-H voir le Tableau (4.1)

Donc les équations paramétriques dans le repère $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$ sont données par :

$$\vec{p}_0(\varphi) = \begin{cases} X_0 = l_x + \frac{b\varphi}{\alpha} \\ Y_0 = -l_y + R_c \cos(\varphi) \\ Z_0 = l_z - R_c \sin(\varphi) \end{cases}$$

Avec comme distance entre le repère fixe R_0 et le repère de cercle R_c :

Suivant $x x'$ est : l_x

Suivant $y y'$ est : l_y

Suivant $z z'$ est : l_z

Pour notre application on a :

$l_x = 1.65 \text{ m}$, $l_y = 0.962 \text{ m}$, $l_z = 0.858 \text{ m}$ et $b = 0$

avec : $w = \frac{v}{R_c} = \frac{0,02}{0,975} = 0.0205 \text{ rd/s}$, et à $t = 0$ $\varphi = 9,36^\circ \Rightarrow \varphi_0 = 9,36^\circ$

$$\vec{p}_0(\varphi(t)) = \begin{cases} X_0 = l_x \\ Y_0 = -l_y + R_c \cos(wt + \varphi_0) \\ Z_0 = l_z - R_c \sin(wt + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\dot{\vec{p}}_0(\varphi(t)) = \begin{cases} \dot{X}_0 = 0 \\ \dot{Y}_0 = -v \sin(wt + \varphi_0) \\ \dot{Z}_0 = -v \cos(wt + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\ddot{\vec{p}}_0(\varphi(t)) = \begin{cases} \ddot{X}_0 = 0 \\ \ddot{Y}_0 = -\frac{v^2}{R_c} \sin(wt + \varphi_0) \\ \ddot{Z}_0 = \frac{v^2}{R_c} \cos(wt + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\vec{e}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(1,175 * t + 9,36)^\circ \\ -\cos(1,175 * t + 9,36)^\circ \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_N = \begin{cases} 0 \\ -\cos(1,175 * t + 9,36)^\circ \\ \sin(1,175 * t + 9,36)^\circ \end{cases}$$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N$$

Voir l'annexe 11 pour les étapes de calcul

La trajectoire hélicoïdale désirée dans l'espace opérationnel :

Dans le plan XOY et le plan XOZ :

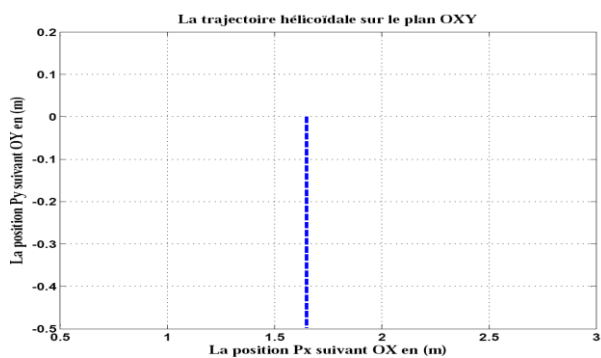


Figure (4.21) : Trajectoire hélicoïdale

dans le plan OXY

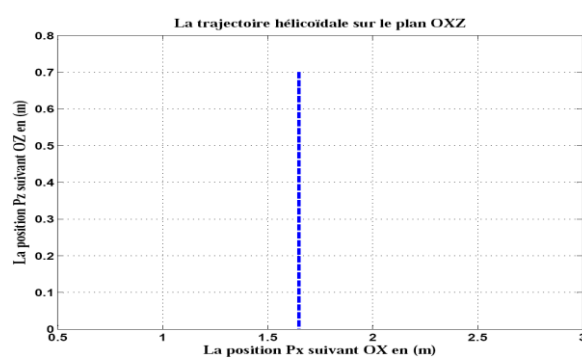


Figure (4.22) : Trajectoire hélicoïdale

dans le plan OXZ

Dans le plan YOZ :

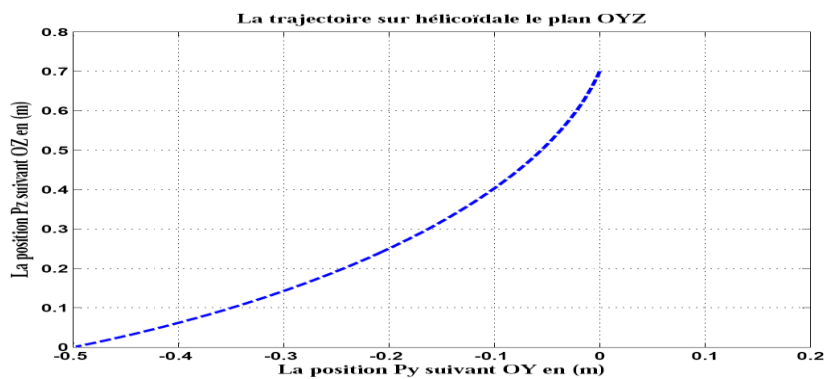


Figure (4.23) : Trajectoire hélicoïdale dans le plan OYZ

La trajectoire dans l'espace OXYZ :

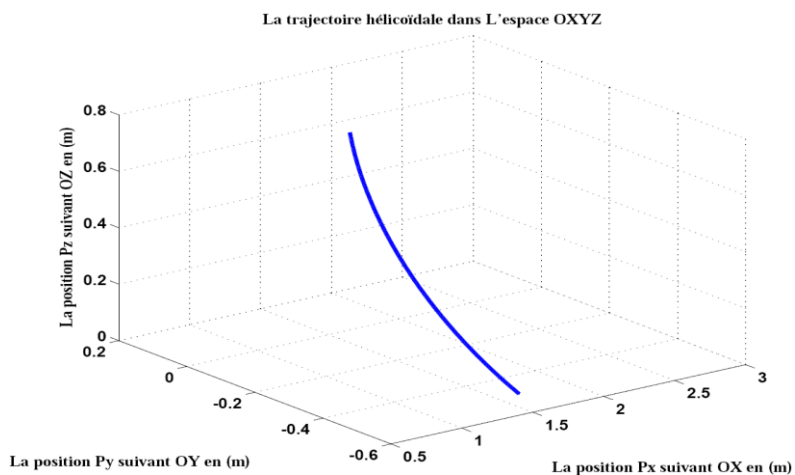
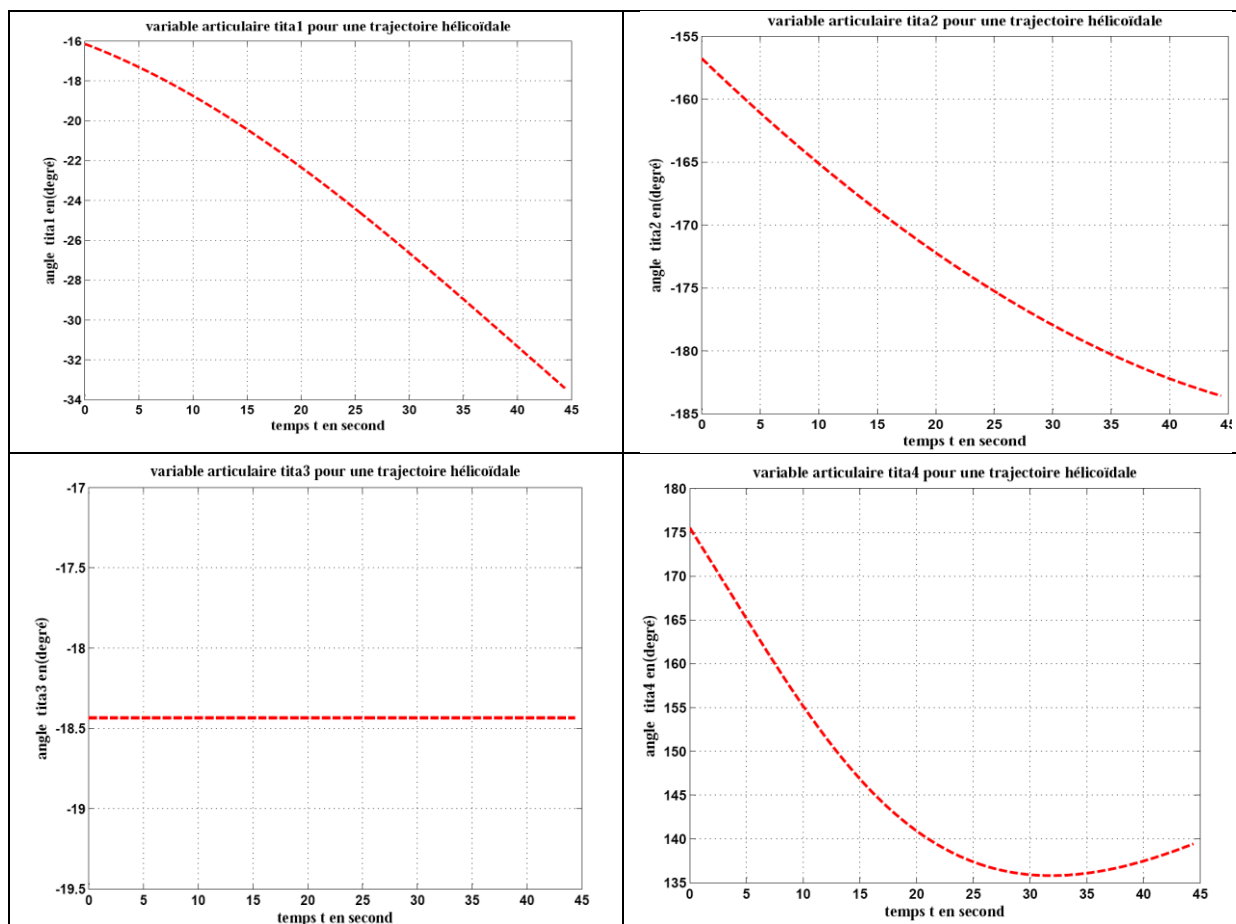


Figure (4.24) : Trajectoire hélicoïdale dans le plan OXYZ

Les graphes des variables articulaires pour la trajectoire hélicoïdale:



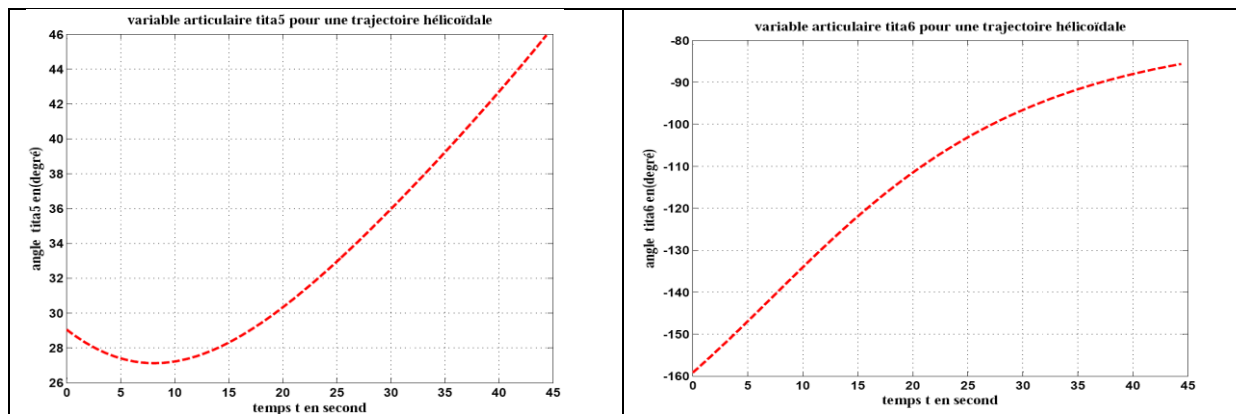


Figure (4.25) : Graphes pour les variables articulaires

4-6-3. Application pour éviter les obstacles :

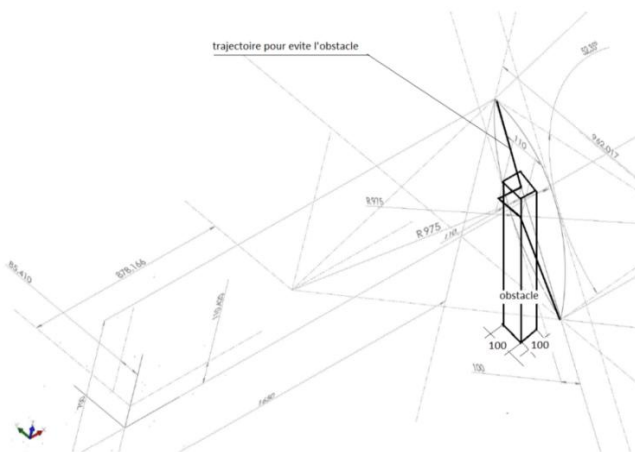


Figure (4.26) : Trajectoire précédente (rectiligne) avec un obstacle (pilier)

La trajectoire hélicoïdale désirée dans l'espace opérationnel :

Dans le plan XOY et le plan XOZ :

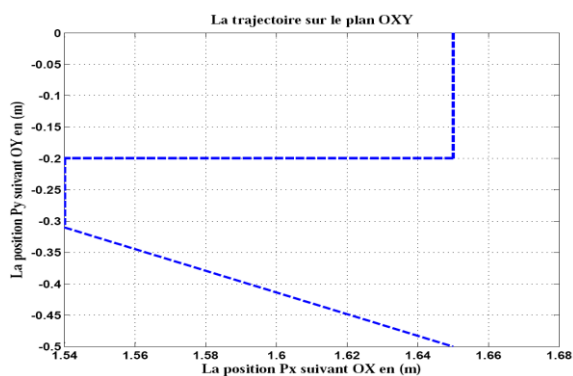


Figure (4.27) : Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OXY

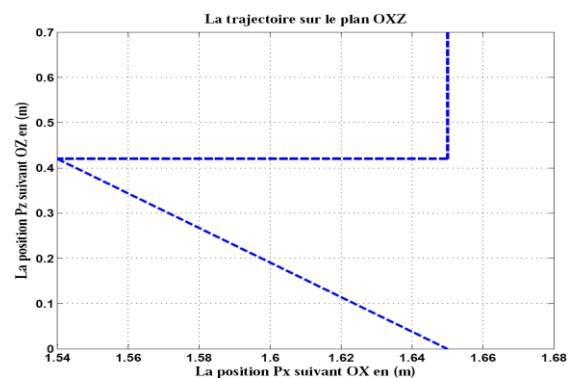


Figure (4.28) : Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OXZ

Dans le plan YOZ :

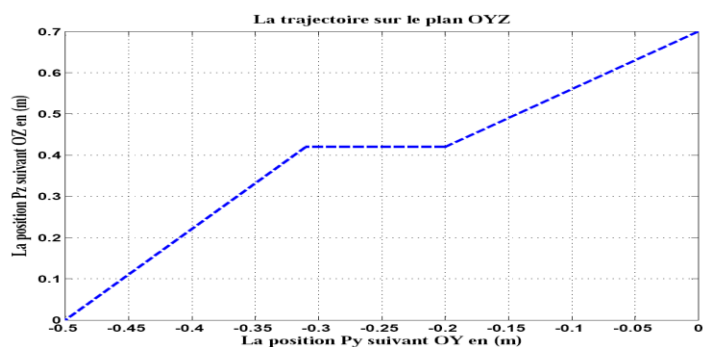


Figure (4.29) : Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OYZ

La trajectoire dans l'espace OXYZ :

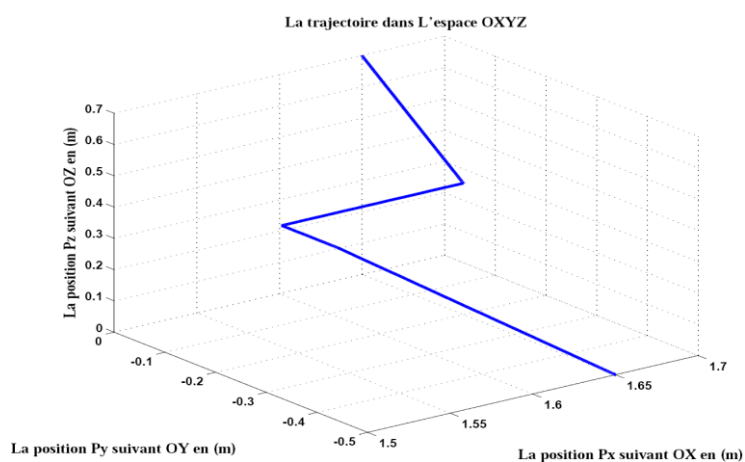
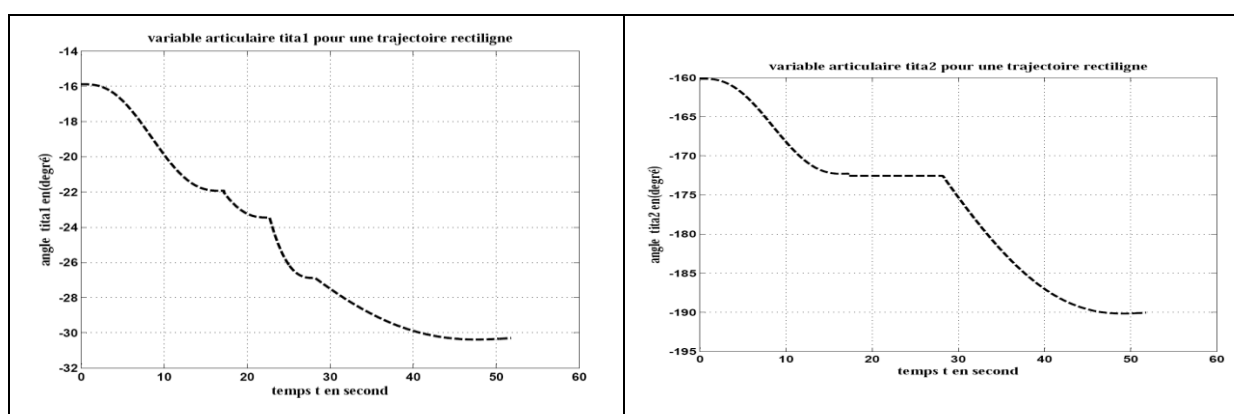


Figure (4.30) : Trajectoire pour éviter l'obstacle dans le plan OXYZ

Les graphes des variables articulaires pour la trajectoire pour éviter l'obstacle:



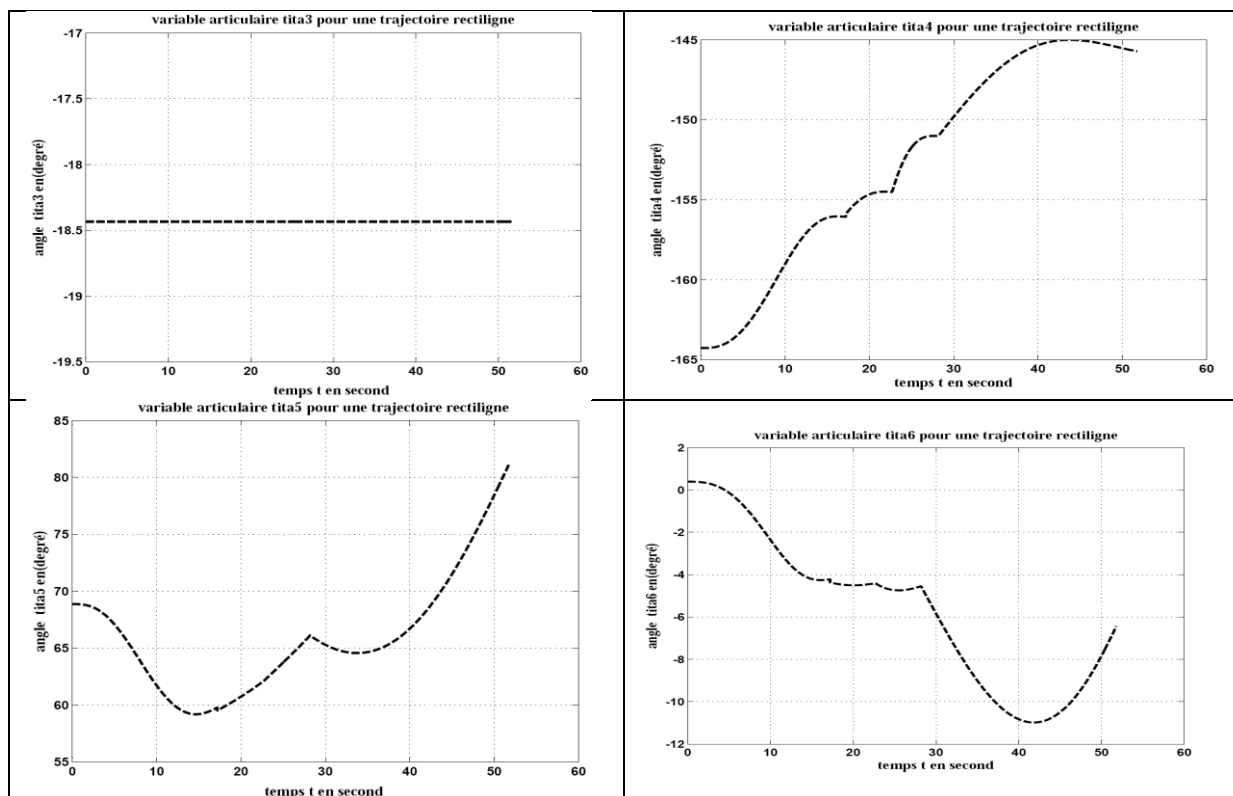


Figure (4.31) : Les graphes pour les variables articulaires pour éviter l'obstacle

4-7. validation de programme:

Pour valider notre programme on choisit [1] un Robot à six degrés de liberté et la *figure (4.32)* montre l'architecture du robot utilisé. La référence [1] donne seulement le dessin et le tableau de D-H. On est obligé de refaire tout les calculs pour la planification de trajectoire.

Joint i	σ_i	$\alpha_i(deg)$	$a_i(m)$	$b_i(m)$	$\theta_i initial(deg)$
1	0	0°	0	b_1	θ_1
2	0	-90°	0	b_2	θ_2
3	1	-90°	0	b_3^*	0
4	0	0°	0	b_4	θ_4
5	0	90°	0	0	θ_5
6	0	-90°	0	0	θ_6

Tableau (4.3): D-H paramètres du robot

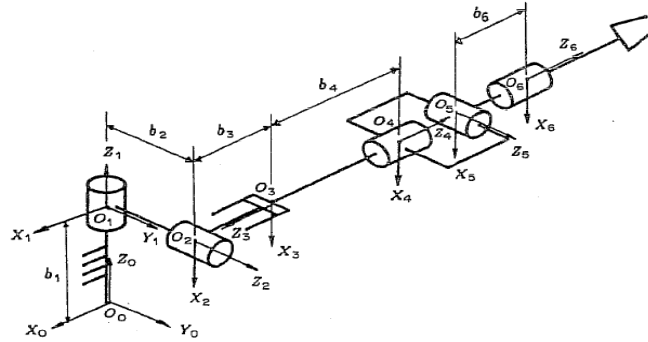


Figure (4.32) : validation pour un robot à 6DDL [1]

Matrices de transformation :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3^* \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^6T_E = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec : $\varphi = 0^\circ$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

Pour les différentes composantes de 0T_6 voir annexe 12

Calcul θ_1, θ_2 et θ_3 :

$$\theta_1 = \text{atan} 2(p_y, p_x) - \text{atan} 2\left(\frac{b_2}{r}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{r}\right)^2}\right)$$

$$\text{Ou bien : } \theta_1 = \text{atan} 2(p_y, p_x) - \text{atan} 2\left(b_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - b_2^2}\right) \text{ avec : } r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Pour cette solution, trois cas se présentent :

- Deux solutions pour $b_2^2 > r^2$
- Une solution pour $b_2^2 = r^2$
- Pas de solution pour $b_2^2 < r^2$

$$\begin{cases} \theta_2 = \text{atan 2} \left((p_x * c_1 + p_y * s_1), (p_z - b_1) \right) \\ \theta_2' = \theta_2 + \pi \end{cases}$$

$$b_3^* = (b_1 - p_z) * c_2 - (p_x * c_1 + p_y * s_1) * s_2 - b_4$$

Calcul θ_4 , θ_5 et θ_6 par la méthode de Paul [19] (annexe 13):

$$\theta_4 = \begin{cases} \text{atan}(C_y/C_x) \\ \theta_4' = \theta_4 + \pi \end{cases} ; \theta_5 = \text{atan 2}(s_5, c_5) \quad \text{et} \quad \theta_6 = \text{atan 2}(s_6, c_6)$$

Etats initial et final pour un robot à six DDL :

Etat initial :

Joint i	σ_i	$\alpha_i(\text{deg})$	$a_i(\text{m})$	$b_i(\text{m})$	$\theta_i \text{initial} (\text{deg})$
1	0	0°	0	-0.1	0°
2	0	-90°	0	-0.1	90°
3	1	-90°	0	0	0°
4	0	0°	0	-0.6	0°
5	0	90°	0	0	0°
6	0	-90°	0	0	0°

Tableau (4.4) : D-H paramètres du robot à l'état initial

$${}^6T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^0T_{E_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0.6 \\ 0 & -1 & 0 & -0.1 \\ -1 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etat final :

Joint i	σ_i	$\alpha_i(\text{deg})$	$a_i(\text{m})$	$b_i(\text{m})$	$\theta_i \text{final} (\text{deg})$
1	0	0°	0	-0.1	60°
2	0	-90°	0	-0.1	60°
3	1	-90°	0	0.1	0°
4	0	0°	0	-0.6	60°
5	0	90°	0	0	60°
6	0	-90°	0	0	60°

Tableau (4.5) : D-H paramètres du robot à l'état final

$${}^0T_{E_f} = \begin{bmatrix} 0.2188 & 0.0541 & -0.9743 & 0.3031 \\ -0.9202 & 0.3438 & -0.1875 & 0.3250 \\ 0.3248 & 0.9375 & 0.1250 & 0.1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La trajectoire parcourue dans l'espace opérationnel / Dans les plans XOY et XOZ :

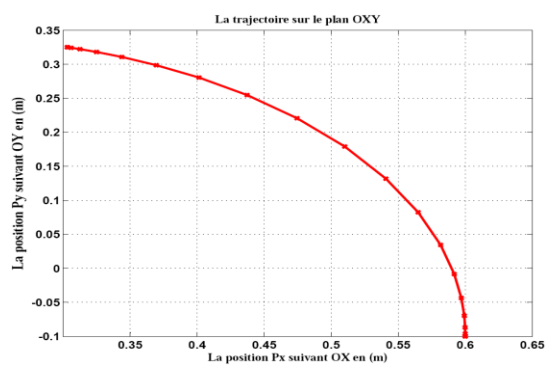


Figure (4.33) : Trajectoire dans
le plan XOY

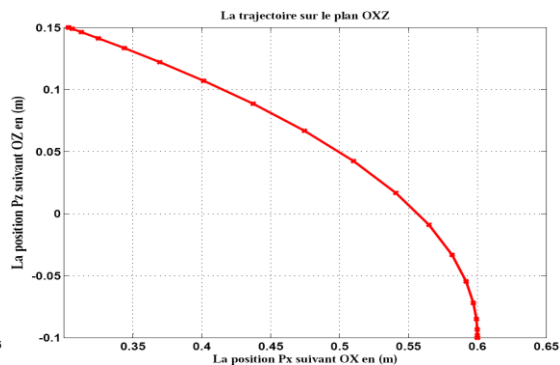


Figure (4.34) : Trajectoire dans
le plan XOZ

Dans le plan YOZ :

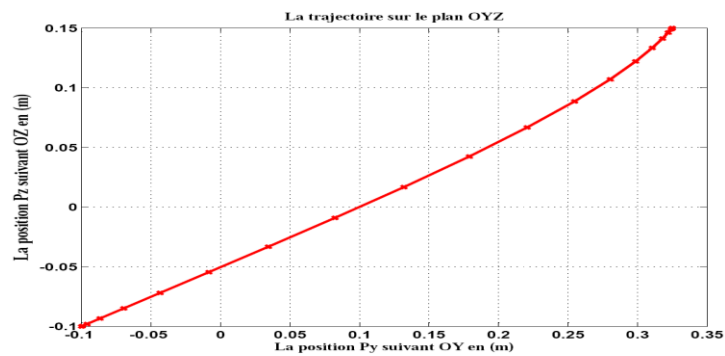


Figure (4.35) : Trajectoire dans le plan YOZ

La trajectoire dans l'espace OXYZ :

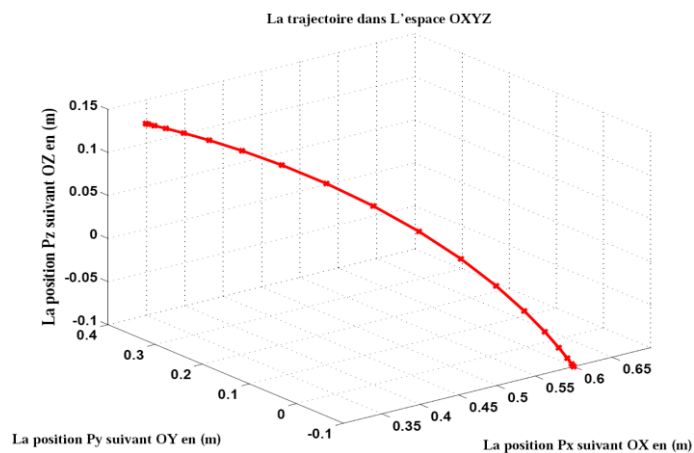
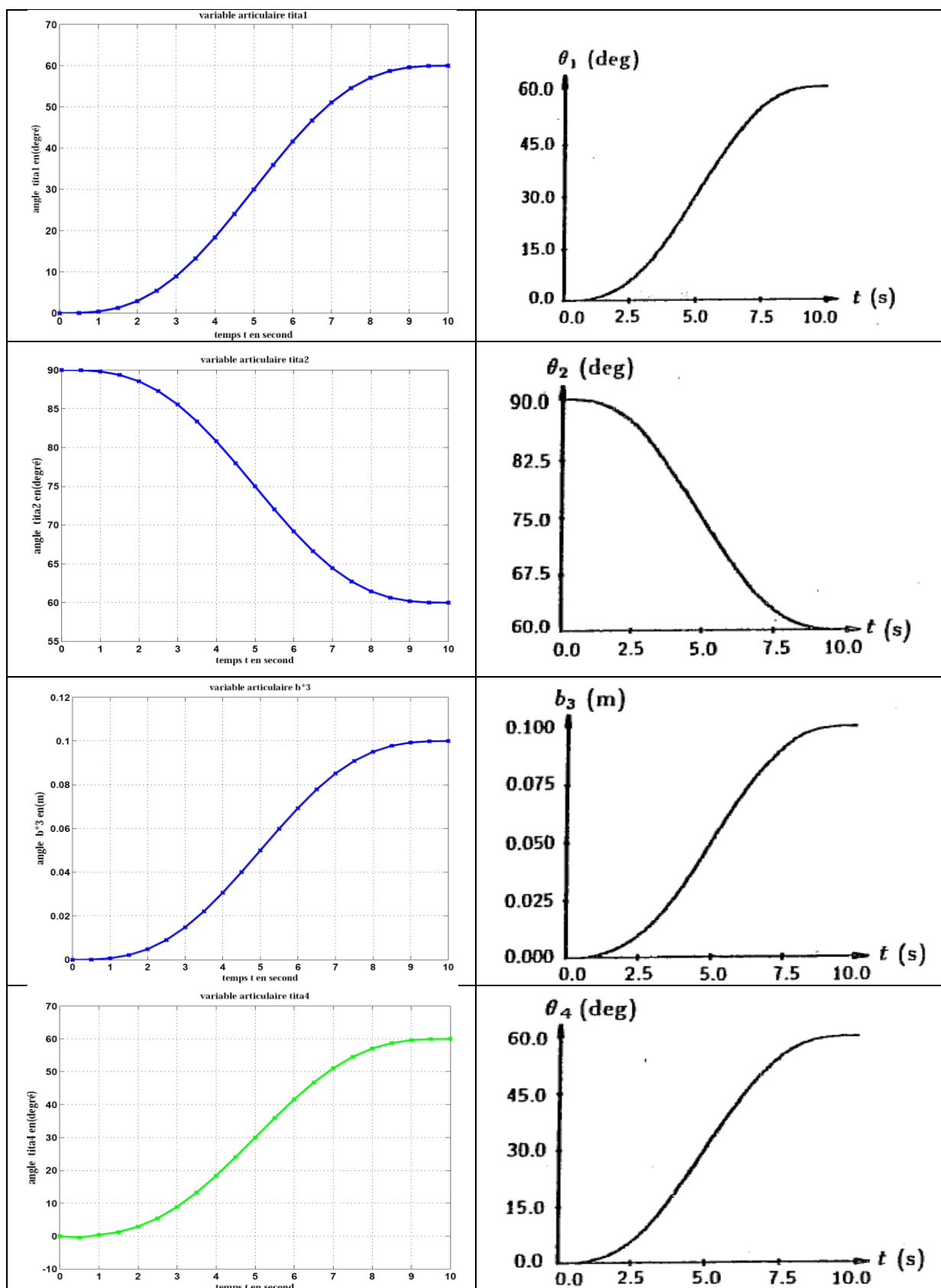


Figure (4.36) : trajectoire dans l'espace OXYZ

Les graphes pour les variables articulaires :



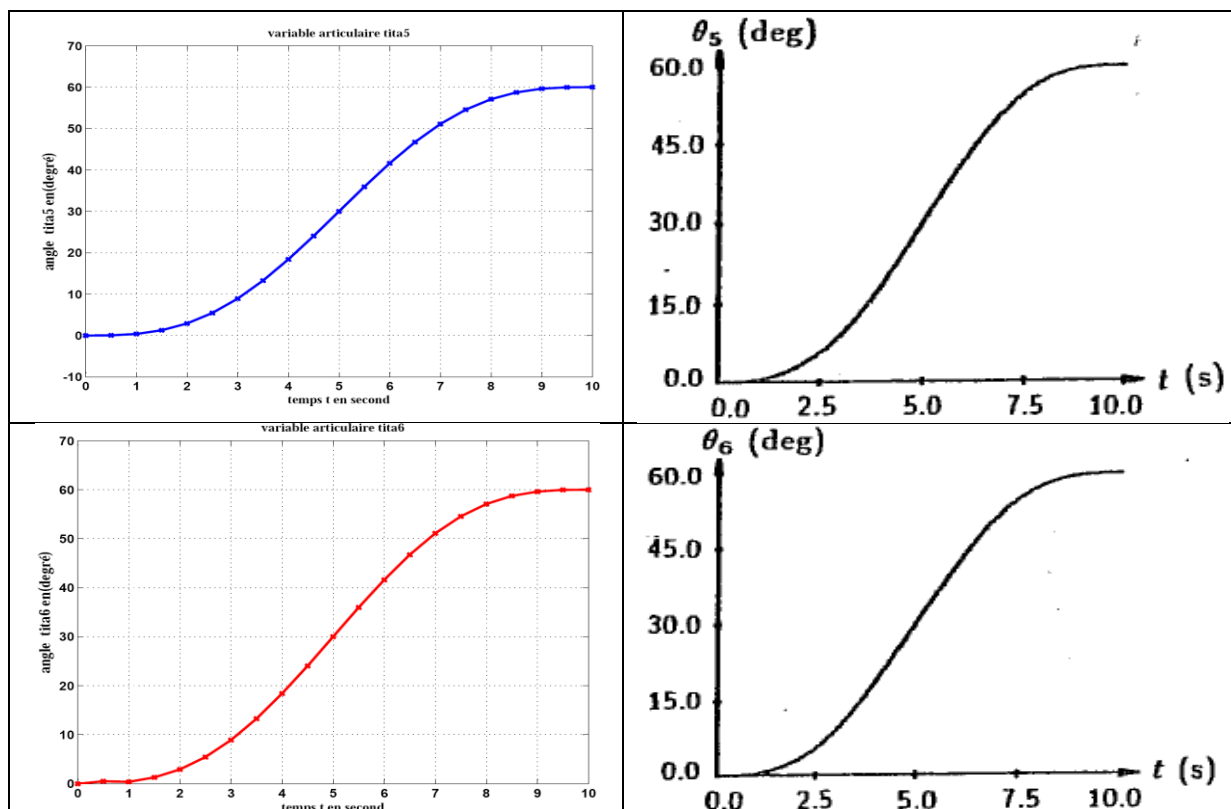


Figure (4.37) : Graphes des variables articulaires et graphes trouvés dans la littérature

Commentaires :

Dans la figure (4.37), les différents graphes de la colonne de droite sont tirés de la référence [1].

Dans cette dernière, il n'est spécifié que les graphes des variables articulaires et le tableau de Denavit-Hartenberg. De ce fait, nous avons déterminé les modèles géométriques direct et inverse. De plus, nous avons établi un programme pour l'obtention de la trajectoire de l'outil terminal. Ainsi, nous sommes parvenus à retrouver tous les résultats donnée dans [1].

Ceci nous a permis de comparer les résultats et graphes de la colonne de gauche avec ceux de la référence [1]. Nous avons constaté, une bonne similitude (exactitude) des résultats.

4-8. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a calculé et établi des modèles mathématiques pour la réalisation de trajectoires d'un Robot donné. La programmation est faite par l'utilisation des logiciels SolidWorks et Matlab pour tracer les différents graphes et le dimensionner le Robot choisi.

On a pu comparer pour des trajectoires données les résultats obtenus pour différents cas de l'outil terminal. On choisit une trajectoire avec des points de départ et cible et la forme de trajectoire. Dans le premier cas on a une trajectoire rectiligne et dans le deuxième cas pour le même point de départ et le point cible on choisit une trajectoire curviligne. On termine l'étude par une application pour que le robot évite un obstacle (pilier) avec les trajectoires du premier et du second cas pour voir les variations des variables articulaires.

Pour la fiabilité des résultats, on considère un exemple [52], traitant la trajectoire dans l'espace articulaire d'un Robot à six DDL, pour lequel on exécute notre programme. On était obligé de calculer le modèle géométrique inverse et de faire un programme pour trouver les trajectoires dans l'espace opérationnel à partir des trajectoires suivies dans l'espace articulations de ce Robot. Ces données sont nécessaires pour exécuter notre programme et l'exemple ne donne pas d'informations pour cette trajectoire.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

La modélisation est une étape cruciale dans la robotique. Qu'il s'agisse du dimensionnement des composants du robot ou de la planification d'une trajectoire de l'organe terminal, un modèle régissant le comportement du robot et tenant compte de tous ses paramètres s'avère indispensable. La modélisation d'une scène de manipulation d'un objet par des robots comporte, aussi bien pour l'objet que pour les robots les modèles suivants : le modèle géométrique, le modèle cinématique et le modèle dynamique. Ces modèles peuvent être directes, si les grandeurs cherchées sont exprimées dans l'espace opérationnel ou inverse, si elles sont exprimées dans l'espace articulaire.

Dans une proposition de démarche à suivre lors de l'étude d'un sujet de robotique, notre travail porte particulièrement sur la modélisation du robot similaire au Robot Cloos. Une recherche bibliographique approfondie nous a aidés à exposer les différents concepts théoriques et formalismes nécessaires à une compréhension assez large de ce domaine.

Notre thème dont l'intitulé est sus indiqué, porte sur : « contribution à la réalisation optimale des tâches par des robots manipulateurs », ce modeste travail permet de s'introduire à la robotique, d'appliquer les notions de théorie acquises et de voir quelques applications simples.

Dans ce mémoire nous avons réalisé les programmes nécessaires pour le calcul du modèle géométrique directe (paramètre de DH), et le modèle géométrique inverse (méthode analytique de Paul), et les deux méthodes pour calculer le jacobienne pour déduire les vitesses et les accélérations articulaires du Robot (modèle cinématique).

Concernant le modèle dynamique on a exposé dans le chapitre 2 que les outils nécessaires pour leur calcul.

La question quelle se pose est comment un Robot doit suivre une trajectoire dans un espace connue ou inconnue ?

D'abord on a commencé par effectuer au Robot l'opération d'un soudage pour définir l'outil terminale à utiliser à cause de l'effet de cette dernière sur l'architecteur de Robot ensuite on a passer au choix de la trajectoire qu'elle doit l'organe terminal à suivre cet à dire le point de départ et le point cible à attendre.

Pour passer d'un point à un autre on deux possibilité soit le mouvement est linéaire ou circulaire pour ce la on a réalisé des programme dans ce sens dans un espace libre sans un

obstacle et on a tracé les différentes variables articulaires pour voir le mouvement des articulations de Robot et de l'analyser.

En suite pour la même trajectoire on a créé un obstacle « pilier comme dans un usine » dans une position connue et de réalisé ou applique les différentes résultats obtenu dans la première partie.

La partie de la programmation qu'à été faite avec les logiciels Matlab R2009b et SolidWorks nous a donnée les différents graphes obtenu dans le chapitre 4 pour les cas que nous a étudié.

Concernant la fiabilité de nos résultats, de la littérature on a pris pour référence [52], un exemple traitant la trajectoire dans l'espace articulaire d'un Robot à six DDL, et on a exécuté notre programme pour le même exemple mais avant de le faire on été obligée de calculée le modèle géométrique inverse de cette exemple et de faire un programme pour trouver la trajectoires dans l'espace opérationnel à partir des trajectoires suivi dans l'espace articulations de cette Robot car ces donnée est nécessaire pour exécuté notre programme et l'exemple on n'a pas données.

Notre travail peut être considéré comme une base de départ pour une recherche approfondie dans le domaine des bras manipulateurs et des robots coopérants. Dans un travail futur, une étude complémentaire peut être envisagée en proposant des méthodes pour :

- La résolution du modèle géométrique inverse pour les structures complexes ;
- Incorporer la perception pour tenir compte des environnements non connus où le robot peut évoluer ; tenir compte du frottement et des inerties des actuateurs pour mieux approcher les résultats du modèle dynamique à la réalité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A J.ANGELES and O.MA, An algorithm for the inverse dynamics of n-Axis general manipulators using Kane's equations, Computers math applic. volume 17 N°12 pp.1545-1561, Great Britain, 1989.
- [2] A J.ANGELES and O.MA, Dynamic Simulation of n-Axis Serial Robotic Manipulators Using a Natural Orthogonal Complement, the International Journal of Robotics Research October 1988.
- [3] DIANE BOROJENI, Modélisation cinématique et dynamique des systèmes poly-articulés à chaînes ouvertes ou fermées .Cas des robots parallèles, Université PARIS XII-VAL DE MARNE, 2006.
- [4] BENDALI N., Contribution à la planification de trajectoires des systèmes, Mémoire de Magister, Faculté de Technologie, Département de Mécanique, Université Saad Dahlab-Blida, Algérie, 2012.
- [5] FERNINI Brahim, SYNTHESE, ANALYSE ET MODELISATION DES ROBOTS MANIPULATEURS, Mémoire de Magister, Faculté de Technologie, Département de Mécanique, Université Saad Dahlab - Blida, Algérie, 2012.
- [6] RAHMANI Mustapha, Etude méthodologique et comparative de description du mouvement des systèmes multicorps, Mémoire de Magister, Faculté de Technologie, Département de Mécanique, Université Saad Dahlab – Blida, Algérie, 2012.
- [7] I. Mansouri, M.OUALI, The power manipulability—A new homogeneous performance index of robot manipulators, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Volume 27 Issue 2, April, 2011, Pergamon Press, Inc. Tarrytown, NY, USA, 2011 – Elsevier

- [8] I. Mansouri, M.OUALI A new homogeneous manipulability measure of robot manipulators, based on power concept, Mechatronics, 2009 – Elsevier
- [9] I. Mansouri, Critères de Performance des robots manipulateurs et leur utilisation dans la conception optimale des robots, Thèse de Doctorat Sciences en Construction Mécanique, Université des Sciences et de la Technologie Mohammed Boudiaf, Oran, Algérie2011.
- [10] C. HELGUERA and S. ZEGHLOUL., A Local-based Method for Manipulators Path Planning in Heavy Cluttered Environments". Procs. Of the IEEE Int. Congress on Robotics and Automation, pp 3467- 3472 San Francisco, Ca. April 2000.
- [11] Latombe J.C., Robot Motion Planning, Springer, 31 déc. 1990.
- [12] Khatib O., Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots; International Journal of Robotics Research, 1986
- [13] Fox D. et al., The dynamic window approach to collision avoidance, IEEE Robotics and Automation Magazine, 1997.
- [14] Quinlan S., Real-Time Path Modification of Collision-Free Paths, Thèse de doctorat, Université de Stanford, 1994.
- [15] Zadeh L.A, Fuzzy sets, Information and Control, 1965.
- [16] Defoort M. et al., Motion planning for cooperative unicycle-type mobile robots with limited sensing ranges: A distributed receding horizon approach, Robotics and Autonomous Systems, 2009.
- [17] Gaillard F. et al. 2010, Deterministic Kinodynamic Planning, Workshop of the UK Planning and Scheduling Special Interest Group, Italy, 2010.

- [18] Chablat D., Wenger Ph., Working Modes and Aspects in Fully – Parallel Manipulator, Proceedings IEEE International conference on Robotics and Automation. International Conference on Robotics and Automation, Bruxelles, Belgique, (1998-05-16), pp. 1964 1969, IEEE, Vol 3.
- [19] E. DOMBRE – W. KHALIL, « Modélisation identification et commande des robots. ». HERMES 1999.
- [20] Mohamed AFROUN, MODELISATION, PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES ET COMMANDE DE ROBOTS PARALLELES Thèse de Doctorat es Sciences, EMP, bordj El Bahri, Algérie 2013.
- [21] C. PRELLE, Contribution au contrôle de la compliance d'un bras de robot à actionnement Électropneumatique. Thèse de Doctorat – INSA Lyon 1997.
- [22] F.BENNIS, P. WENGER, S.CARO, Etat de l'art de la conception robuste de mécanisme, Article : Institut de Recherche en communications et Cybernétique de Nantes, 2009
- [23] M.J.D.HAYES, M.L.HUSTY, P.J.ZSOMBOR-MURRAY, Singular Configurations of Wrist-Partitioned 6R Serial Robots: a Geometric Perspective for Users, *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 26, no. 1, pp. 41-55. April 2, 2003
- [24] Pierre DUYSINX, ELEMENTS DE PROBTIQUE ASPECTS MECANIQUE, Ingénierie des Véhicules Terrestres Département PROMETHE, (Productique, Mécanique et thermodynamique). Université de Lièges, Belgique, 2006.
- [25] Gosselin C.M., J. Angeles, « Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains » IEEE, Transaction on Robotics and Automation, Vol.6, pp. 281-290, June 1990.
- [25] Sefrioui J. and Gosselin C.M, "Etude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté ave Sefrioui J.Gosselin C.M. Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators, Journal of Robotics and Autonomous System, Vol.10, Pages: 209–224, 1993.

- [26] St-Onge B. M., Gosselin C. M. “Singularity analysis and representation of spatial six-dof parallel manipulators”, Proceedings of the 5th Recent Advances in Robot Kinematics, Pages: 389–398., 1996.
- [27] St-Onge B. M., Gosselin C. M., “Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform”, the International Journal of Robotics Research Vol. 19, Pages: 271–288, 2000.
- [28] R. Murray, Z. Li et S. Sastry. A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC Press, 1994.
- [29] M. Renaud. Comment définir l’orientation d’un corps ? Rapport technique 96078, LAAS-CNRS, 1996.
- [30] J.J. Craig. Introduction to robotics: Mechanics and control. Addison-Wesley, 1989.
- [31] C. Laugier ‘raisonnement géométrique et méthode décision en robotique application à la programmation automatique des robots. France, 1987.
- [32] M. PASQUIER, Planification de trajectoires pour un robot manipulateur, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble ,1989.
- [33] Y. MEZOUAR, Planification de trajectoires pour l’asservissement visuel, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1 – Novembre 2001.
- [34] M. CAZIN – J. METGE. « Introduction to ROBOTICS – Mechanics and control. » BORDAS Paris 1989. ISBN 2-04-018794-4
- [35] J.M. SELIG « Introductory robotics. ». Prentice Hall International (UK) Ltd. 1992
- [36] R. Paul. Robot manipulators: Mathematics, programming, and control. MIT press, Cambridge, Londres, Royaume-Uni, 1981.
- [37] Pierre Dussinx et Michel Geradin University of Liège *An introduction to robotics 2004*
- [38] J-P. LALLEMAND & S. ZEGHLOUL Robotique modélisation mécanique CAO robotique commande édition MASSON Paris Milan 1994

- [39] Denvait J, Hartenberg RS. *A Kinematic notation for lower- pair mechanisms based on matrices*. Journal of Applied Mechanics 1955; 77:215-21
- [40] L. FLÜCKIGER – Thèse de Doctorat – Lausanne 1998. « Interface pour le pilotage et l'analyse des robots basée sur un générateur de cinématiques »
- [41] Jorge Angeles *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems : Theory, Methods, and Algorithms, Second Edition Springer 2002*
- [42] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control Second Edition 2004*
- [42] Bruno Siciliano. Lorenzo Sciavicco Luigi Villani. Giuseppe Oriolo, Robotics Modelling, Planning and Control Springer 2009
- [43] Reza N. Jazar, Theory of Applied Robotics (Kinematics, Dynamics, and Control) Second Edition, Springer (path planning) ISBN 978-1-4419-1749-2 e-ISBN 978-1-4419- 1750-8 Springer New York Dordrecht Heidelberg London Springer Science + Business Media, LLC 2006, 2010
- [44] El-Hadi GUECHI, Suivi de trajectoires d'un robot mobile non holonome : approche par modèle flou de Takagi-Sugeno et prise en compte des retards, El-Hadi GUECHI, Doctorat en génie automatique, université de VALENCIENNES ET HAINAUT, juillet 2007.
- [46] Vincent NABAT, Robots parallèles à nacelle articulée. Du concept à la solution industrielle pour le pick- and-place, doctorat en Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal UNIVERSITE MONTPELLIER II, 2007
- [47] C .Laugier ‘raisonnement géométrique et méthode décision en robotique application a la programmation automatique des robots, MAG - Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble, 1987
- [48] S. LAHOUAR, Contribution à la Modélisation et à la Planification de Trajectoires de Robots Parallèles Evitant les Singularités et les Collisions –Thèse de Doctorat : Université de Poitier – 30 janvier 2008.

- [49] S. M. LAVALLE, J. H. YAKY, L. E. KAVRAKI, A Probabilistic Roadmap Approach for Systems with Closed Kinematic Chain, IEEE International Conf. On Robotics and Automation 1999
- [50] J Barraquand, L Kavraki, R Motwani, JC Latombe, TY Li, P Raghavan Symposium Robotics Research, 249-264, A Random Sampling Scheme for Path Planning 7th International, 2000.
- [51] C. L. Nielsen, L. E. KAVRAKI, A Two Level Fuzzy PRM for Manipulation Planning: IROS 2000.
- [52] David Hsu, Lydia Kavraki, Jean-Claude Latombe, Rajeev Motwani, Stephen Sorkin Robotics: The Algorithmic Perspective: 01/08/1998 Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics
- [53] R. BOHLIN, L. E. KAVRAKI, Path Planning Using Lazy PRM, ICRA 2000.
- [54] L. E. KAVRAKI, P. SVESTSKA, J. C. LATOMBE, M. H. OVERMARS, Probabilistic Roadmaps for Path Planning in High-Dimensional Configuration Spaces, IEEE Trans. on Robotics and Automation, 12 (4), 566-580, 1996.
- [55] L. E. KAVRAKI, J. C. LATOMBE – Robotics and Automation, 1994. Proceedings, 1994 IEEE International Conference, Pages 2138-2145: Department of computer Science, Rice University, Houston.
- [56] J. P. LAUMOND, T. SIMÈON, Notes on Visibility-based probabilistic roadmaps for motion planning, Advanced Robotics 14 (6), 477-493 LAAS-CNRS, Toulouse, France, 2000.
- [57] S. BRETON, Une approche neuronale du contrôle robotique utilisant la vision binoculaire par reconstruction tridimensionnelle, Thèse de Doctorat, Université de Haute Alsace – Juin 1999.
- [58] J. de Lope, T. Zarranandia, R. Gonzalez, D. Maravall (2003) Solving the inverse kinematics in humanoid robots: A neural approach. *Artificial Neural Nets Problem Solving Methods*, LNCS 2687. J. Mira, J.R. Alvarez (Eds.) Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 177-184.

[59] P. FISETTE, H. BUYSE, J. C. SAMIN – Document de cours –Université catholique de Louvain « Introduction à la Robotique », 10 novembre 2004.

[60] Adrian Down the Frenet-serret theorem disponible sur cite internet

Annexes 1 et 2

$$\begin{aligned}
 \text{Annexes 1 : } {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^0T_2 &= \begin{bmatrix} c_1 * c_2 & -c_1 * s_2 & -s_1 & d_2 * c_1 - a_2 * s_1 \\ c_2 * s_1 & -s_1 * s_2 & c_1 & d_2 * s_1 + a_2 * c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & d_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^0T_3 &= \begin{bmatrix} c_{23} * c_1 & -s_{23} * c_1 & -s_1 & d_2 * c_1 - a_2 * s_1 + d_3 * c_1 * c_2 \\ c_{23} * s_1 & -s_{23} * s_1 & c_1 & d_2 * s_1 + a_2 * c_1 + d_3 * s_1 * c_2 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -d_3 * s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3T_5 &= \begin{bmatrix} c_4 * c_5 & -c_4 * s_5 & s_4 & d_4 \\ s_5 & c_5 & 0 & a_4 \\ -s_4 * c_5 & s_4 * s_5 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^6T_E &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & a_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3T_6 &= \begin{bmatrix} c_4 * c_5 * c_6 - s_4 * s_6 & -c_6 * s_4 - c_4 * c_5 * s_6 & -c_4 * s_5 & d_4 \\ s_5 * c_6 & -s_5 * s_6 & c_5 & a_4 \\ -s_4 * c_5 * c_6 - c_4 * s_6 & s_4 * c_5 * s_6 - c_6 * c_4 & s_4 * s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Annexes 2 : Pour la matrice de transformation de Robot Cloos :

$$\begin{aligned}
 n_{11} &= s_1 * (c_4 * s_6 + c_5 * c_6 * s_4) - c_1 * (c_{23} * (s_4 * s_6 - c_4 * c_5 * c_6) + s_{23} * c_6 * s_5) \\
 n_{12} &= s_1 * (c_4 * c_6 - c_5 * s_4 * s_6) - c_1 * (c_{23} * (c_6 * s_4 + c_4 * c_5 * s_6) - s_{23} * s_5 * s_6) \\
 n_{13} &= -s_1 * s_4 * s_5 - c_1 * (s_{23} * c_5 - c_{23} * c_4 * s_5) \\
 n_{14} &= -a_2 * s_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1 \\
 n_{21} &= -c_1 * (c_4 * s_6 + c_5 * c_6 * s_4) - s_1 * (c_{23} * (c_4 * s_6 - c_4 * c_5 * c_6) + s_{23} * c_6 * s_5) \\
 n_{22} &= -c_1 * (c_4 * c_6 - c_5 * s_4 * s_6) - s_1 * (c_{23} * (c_6 * s_4 + c_4 * c_5 * s_6) - s_{23} * s_5 * s_6) \\
 n_{23} &= c_1 * s_4 * s_5 - s_1 * (s_{23} * c_5 + c_{23} * c_4 * s_5) \\
 n_{24} &= a_2 * c_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1 \\
 n_{31} &= s_{23} * (s_4 * s_6 - c_4 * c_5 * c_6) - c_{23} * c_6 * s_5
 \end{aligned}$$

$$n_{32} = s_{23} * (s_4 * c_6 + c_4 * c_5 * s_6) + c_{23} * s_6 * s_5 ; n_{33} = s_{23} * c_4 * s_5 - c_{23} * c_5 ;$$

$$n_{34} = -a_4 * c_{23} - d_4 * s_{23} - d_3 * s_2 \text{ et } n_{41} = n_{42} = n_{43} = 0, n_{44} = 1$$

Annexes 3,4 et 5

$$\underline{\text{Annexes 3}} : p_x c_1 + p_y s_1 = d_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23} + d_3 c_2 \quad (\text{A3.1})$$

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = a_2 \quad (\text{A3.2})$$

$$p_z = -a_4 c_{23} - d_4 s_{23} - d_3 s_2 \quad (\text{A3.3})$$

Pour la solution de cette équation (A3.2), on pose : $p_x = \rho * \cos(\varphi)$ et $p_y = \rho * \sin(\varphi)$ et on remplace dans l'équation (A3.2), on aura donc :

$$s_\varphi * c_1 - c_\varphi * s_1 = \frac{a_2}{\rho} \quad (\text{A3.4})$$

$$\text{Avec : } \rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \text{ et } \varphi = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (\text{A3.5})$$

$$\text{La simplification de (A3.4) donne : } \sin(\varphi - \theta_1) = \frac{a_2}{\rho} \quad (\text{A3.6})$$

$$\text{D'après l'équation (A3.6) on tire : } \cos(\varphi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{\rho}\right)^2} \quad (\text{A3.7})$$

De l'équation (A3.6) et (A3.7) on aura :

$$\varphi - \theta_1 = \text{atan2}\left(\frac{a_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{\rho}\right)^2}\right) \text{ Ce qui donne :}$$

$$\theta_1 = \varphi - \text{atan2}\left(\frac{a_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{\rho}\right)^2}\right)$$

Annexe 4

$$p_x = (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1 - a_2 * s_1 \quad (\text{A4.1})$$

$$p_y = (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1 + a_2 * c_1 \quad (\text{A4.2})$$

$$p_z = -d_3 * s_2 - a_4 * c_{23} - d_4 * s_{23} \quad (\text{A4.3})$$

De (A4.1) on tire :

$$d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23} = \frac{p_x + a_2 * s_1}{c_1} \quad (\text{A4.4})$$

On remplace dans (A4.2), on trouve après simplification l'équation suivante : $p_y * C_1 - p_x * S_1 = a_2$ dont la solution est :

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}\left(\frac{a_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{\rho}\right)^2}\right)$$

Annexe 5 : On a le système d'équations suivant :

$$c_2(p_x c_1 + p_y s_1 - d_2) - p_z s_2 = d_3 + d_4 c_3 - a_4 s_3 \quad (\text{A5.1})$$

$$-s_2(p_x c_1 + p_y s_1 - d_2) - p_z c_2 = a_4 c_3 + d_4 s_3 \quad (\text{A5.2})$$

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = a_2 \quad (\text{A5.3})$$

La sommation du carré de l'équation (A5.1) et de l'équation (A5.2) donne :

$$2d_3 d_4 c_3 - 2d_3 a_4 s_3 = (p_x c_1 + p_y s_1 - d_2)^2 + p_z^2 - d_3^2 - (d_4^2 + a_4^2) \quad (\text{A5.4})$$

$$\text{De la forme } A \cos(\theta_3) + B \sin(\theta_3) = D \quad (\text{A5.5})$$

$$\text{Avec : } A = 2d_3 d_4 ; B = -2d_3 a_4 \text{ et } D = (p_x c_1 + p_y s_1 - d_2)^2 + p_z^2 - d_3^2 - (d_4^2 + a_4^2)$$

$$\text{Pour la solution de cette équation, on pose : } \begin{cases} A = r \sin \phi \\ B = r \cos \phi \end{cases} \quad (\text{A5.6})$$

Et on remplace dans (A5.5). On trouve :

$$r \sin(\phi + \theta_3) = D \Rightarrow \sin(\phi + \theta_3) = D/r \text{ où } r = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ et } \phi = \text{atan2}(A, B) \quad (\text{A5.7})$$

$$\text{De l'équation (A5.6), on tire : } \sin^2(\phi + \theta_3) = (D/r)^2 \Rightarrow 1 - \cos^2(\phi + \theta_3) = (D/r)^2$$

$$\Rightarrow \cos(\phi + \theta_3) = \pm \sqrt{1 - (D/r)^2} \quad (\text{A5.8})$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \sin(\phi + \theta_3) = D/r \\ \cos(\phi + \theta_3) = \pm \sqrt{1 - (D/r)^2} \end{cases} \Rightarrow \phi + \theta_3 = \text{atan2} \left(D/r, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D}{r} \right)^2} \right) \quad (\text{A5.9})$$

$$\text{Alors : } \theta_3 = \text{atan2} \left(D/r, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D}{r} \right)^2} \right) - \phi$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \theta_3 = \text{atan2} \left(\frac{D}{r}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D}{r} \right)^2} \right) - \text{atan2}(A, B) \\ \text{ou bien} \\ \theta_3 = \text{atan2} \left(D, \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2} \right) - \text{atan2}(A, B) \end{cases} \quad (\text{A5.10})$$

$$p_x c_1 + p_y s_1 - d_2 = -\frac{1}{s_2} (p_z c_2 + a_4 c_3 + d_4 s_3) \quad (\text{A5.11})$$

On remplace (A5.8) dans l'équation (A5.1) et après la simplification on trouve :

$$-(a_4 c_3 + d_4 s_3) c_2 - (d_3 + d_4 c_3 - a_4 s_3) s_2 = p_z \quad (\text{A5.12})$$

On fait la soustraction de l'équation (A5.12) de l'équation (A5.11), on trouve :

$$A_1 \cos(\theta_2) + B_1 \sin(\theta_2) = D_1 \quad (\text{A5.13})$$

$$\text{Avec : } A_1 = -(a_4 c_3 + d_4 s_3) ; B_1 = -(d_3 + d_4 c_3 - a_4 s_3) \text{ et } D_1 = p_z$$

Donc la solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \text{atan2} \left(\frac{D_1}{r_1}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D_1}{r_1} \right)^2} \right) - \text{atan2} (A_1, B_1) \\ \text{ou bien} \\ \theta_2 = \text{atan2} \left(D_1, \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - D_1^2} \right) - \text{atan2} (A_1, B_1) \end{array} \right. \quad (\text{A5.14})$$

Avec : $r_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$

Annexe 6

On a ${}^0R_6 = {}^0R_3 {}^3R_6 = R$ (A6.1)

On multiplie (A6.1) par l'inverse de 0R_3 , on aura : ${}^3R_6 = {}^3R_0 R$
(A6.2)

Avec : ${}^3R_0 = {}^0R_3^{-1}$; ${}^0R_3^{-1} = \begin{bmatrix} c_{23} * c_1 & c_{23} * s_1 & -s_{23} \\ -s_{23} * c_1 & -s_{23} * s_1 & -c_{23} \\ -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$

Donc on a :

$${}^3R_0 R = \begin{bmatrix} (h_x c_1 + h_y s_1) c_{23} - h_z s_{23} & (n_x c_1 + n_y s_1) c_{23} - n_z s_{23} & (a_x c_1 + a_y s_1) c_{23} - a_z s_{23} \\ -(h_x c_1 + h_y s_1) s_{23} - h_z c_{23} & -(n_x c_1 + n_y s_1) s_{23} - n_z c_{23} & -(a_x c_1 + a_y s_1) s_{23} - a_z c_{23} \\ h_y c_1 - h_x s_1 & n_y c_1 - n_x s_1 & a_y c_1 - a_x s_1 \end{bmatrix}$$

Pour la simplification des calculs on pose : ${}^3R_0 R = \begin{bmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F_y & G_y & H_y \\ F_z & G_z & H_z \end{bmatrix}$ et

$${}^3R_6 = \begin{bmatrix} c_4 * c_5 * c_6 - s_4 * s_6 & -c_6 * s_4 - c_4 * c_5 * s_6 & -c_4 * s_5 \\ s_5 * c_6 & -s_5 * s_6 & c_5 \\ -s_4 * c_5 * c_6 - c_4 * s_6 & s_4 * c_5 * s_6 - c_6 * c_4 & s_4 * s_5 \end{bmatrix}$$

Par identification on peut tirer : $c_5 = H_y = -(a_x c_1 + a_y s_1) s_{23} - a_z c_{23}$

On multiplie l'équation ${}^3R_6 = {}^3R_0 R$ par l'inverse de 3R_4 on aura :

$${}^3R_6 {}^4R_3 = {}^4R_6 = {}^4R_3 {}^3R_0 R \text{ où } {}^4R_3 = {}^3R_4^{-1}$$

On obtient donc :

$${}^4R_3 {}^3R_0 R = \begin{bmatrix} F_x * c_4 - F_z * s_4 & G_x * c_4 - G_z * s_4 & H_x * c_4 - H_z * s_4 \\ -F_z * c_4 - F_x * s_4 & -G_z * c_4 - G_x * s_4 & -H_z * c_4 - H_x * s_4 \\ F_y & G_y & H_y \end{bmatrix}$$

$${}^4R_6 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

On a ${}^4R_6 = {}^4R_3 {}^3R_0 R$ donc :

$$\begin{bmatrix} F_x * c_4 - F_z * s_4 & G_x * c_4 - G_z * s_4 & H_x * c_4 - H_z * s_4 \\ -F_z * c_4 - F_x * s_4 & -G_z * c_4 - G_x * s_4 & -H_z * c_4 - H_x * s_4 \\ F_y & G_y & H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

Par identification on aura : $-H_z * c_4 - H_x * s_4 = 0$. Donc :

$$\begin{cases} \theta_4 = \text{atan} 2(H_z, -H_x) \text{ ou bien} \\ \theta_4 = \text{atan}(-H_z/H_x) \\ \theta_4' = \theta_4 + \pi \end{cases} \quad (\text{A6.3})$$

$$\text{Et on a aussi : } s_5 = H_z * s_4 - H_x * c_4 ; \quad c_5 = H_y \text{ et } \theta_5 = \text{atan} 2(s_5, c_5) \quad (\text{A6.4})$$

De même pour θ_6 on a : $s_6 = -F_z * c_4 - F_x * s_4 ; c_6 = -G_z * c_4 - G_x * s_4$ et $\theta_6 = \text{atan} 2(s_6, c_6)$

Annexes 7 et 8

Annexes 7 : La matrice jacobienne de notre robot Cloos est de la forme suivante :

$$J(q) = \begin{bmatrix} {}^0k_1 \times {}^0_1d_6 & {}^0k_2 \times {}^0_2d_6 & {}^0k_3 \times {}^0_3d_6 & {}^0k_4 \times {}^0_4d_6 & {}^0k_5 \times {}^0_5d_6 & {}^0k_6 \times {}^0_6d_6 \\ {}^0k_1 & {}^0k_2 & {}^0k_3 & {}^0k_4 & {}^0k_5 & {}^0k_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.1})$$

$$\text{Donc : } J = c_{i,6} = [j_1 \quad j_2 \quad j_3 \quad j_4 \quad j_5 \quad j_6]$$

Les matrices de rotation pour ce robot sont :

$$\begin{aligned} {}^0R_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1R_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} & {}^2R_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^3R_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} & {}^4R_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} & {}^5R_6 &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calcul j_1 :

$$\text{On a : } \hat{k}_1^1 = \hat{k}_2^2 = \hat{k}_3^3 = \hat{k}_4^4 = \hat{k}_5^5 = \hat{k}_6^6 = [0 \quad 0 \quad 1]^T ; \quad {}^1\hat{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{k}_1 = {}^0R_1 \quad {}^1\hat{k}_1 = {}^0R_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_6 = {}^0R_1 ({}^1\hat{k}_1 \times {}^1d_6)$$

$$\begin{aligned} \text{On applique et on trouve : } & \quad {}^1\hat{k}_1 \quad \times \quad {}^1d_6 \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23} \\ a_2 \\ -a_4 c_{23} - d_4 s_{23} - d_3 s_2 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} -a_2 \\ d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } {}^0\hat{k}_1 \times {}^0_1d_6 = {}^0R_1 ({}^1\hat{k}_1 \times {}^1d_6) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2 \\ d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_2c_1 - (d_2 + d_3c_2 + d_4c_{23} - a_4s_{23})s_1 \\ -a_2s_1 + (d_2 + d_3c_2 + d_4c_{23} - a_4s_{23})c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{24} \\ n_{14} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } j_1 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_1 \times {}^0d_6 \\ {}^0\hat{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{24} \\ n_{14} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.2})$$

Calcul j_2 :

$$\text{Avec : } {}^2\hat{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } {}^0R_2 = {}^0R_1 {}^1R_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{k}_2 = {}^0R_2 {}^2\hat{k}_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et on a : } {}^0\hat{k}_2 \times {}^0d_6 = {}^0R_2 ({}^2\hat{k}_2 \times {}^2d_6)$$

On applique et on trouve :

$${}^2\hat{k}_2 \times {}^2d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_3 + d_4c_3 - a_4s_3 \\ a_4c_3 + d_4s_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_4c_3 + d_4s_3) \\ d_3 + d_4c_3 - a_4s_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Donc :}$$

$${}^0\hat{k}_2 \times {}^0d_6 = {}^0R_2 ({}^2\hat{k}_2 \times {}^2d_6)$$

$$\times {}^2d_6 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_4c_3 - d_4s_3 \\ d_3 + d_4c_3 - a_4s_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) \\ -s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) \\ a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{Alors : } j_2 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_2 \times {}^0d_6 \\ {}^0\hat{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) \\ -s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) \\ a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23} \\ -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.3})$$

Calcul j_3 :

$$\text{Avec : } {}^3\hat{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } {}^0R_3 = {}^0R_2 {}^2R_3 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{k}_3 = {}^0R_3 {}^3\hat{k}_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et on a : ${}^0\hat{k}_3 \times {}^0d_6 = {}^0R_3 ({}^3\hat{k}_3 \times {}^3d_6)$

$$\text{On applique et on trouve : } {}^3\hat{k}_3 \times {}^3d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_4 \\ a_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_4 \\ d_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Donc :}$$

$${}^0\hat{k}_3 \times {}^0d_6 = {}^0R_3 ({}^3\hat{k}_3 \times {}^3d_6) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_4 \\ d_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1(d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) \\ -s_1(d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) \\ a_4 s_{23} - d_4 c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } j_3 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_3 \times {}^0d_6 \\ {}^0\hat{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1(d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) \\ -s_1(d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) \\ a_4 s_{23} - d_4 c_{23} \\ -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.4})$$

Calcul j_4 :

$$\text{Avec : } {}^4\hat{k}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et

$${}^0R_4 = {}^0R_3 {}^3R_4 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & s_1 c_4 - c_1 c_{23} s_4 & -s_{23} c_1 \\ s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4 & -s_{23} s_1 \\ -c_4 s_{23} & s_4 s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{k}_4 = {}^0R_4 {}^4\hat{k}_4 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & s_1 c_4 - c_1 c_{23} s_4 & -s_{23} c_1 \\ s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4 & -s_{23} s_1 \\ -c_4 s_{23} & s_4 s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{23} c_1 \\ -s_{23} s_1 \\ -c_{23} \end{bmatrix}$$

Et on a : ${}^0\hat{k}_4 \times {}^0d_6 = {}^0R_4 ({}^4\hat{k}_4 \times {}^4d_6)$

$$\text{On applique et on trouve : } {}^4\hat{k}_4 \times {}^4d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec : } {}^4d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ donc :}$$

$${}^0\hat{k}_4 \times {}^0d_6 = {}^0R_4 ({}^4\hat{k}_4 \times {}^4d_6) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & s_1 c_4 - c_1 c_{23} s_4 & -s_{23} c_1 \\ s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4 & -s_{23} s_1 \\ -c_4 s_{23} & s_4 s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } j_4 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_4 \times {}^0d_6 \\ {}^0\hat{k}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s_{23} c_1 \\ -s_{23} s_1 \\ -c_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A7.5})$$

Calcul j_5 :

$$\text{Avec : } {}^5\hat{k}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^0R_5 = {}^0R_4 {}^4R_5 = {}^0R_4 {}^4R_5 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_5(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) - s_5 c_1 s_{23} & -s_5(s_1 s_4 + c_1 c_{23} c_4) - c_5 c_1 s_{23} & -s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 \\ c_5(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) - s_5 s_1 s_{23} & s_5(c_1 s_4 - s_1 c_{23} c_4) - c_5 s_1 s_{23} & c_1 c_4 + s_1 c_{23} s_4 \\ -s_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23} & c_4 s_5 s_{23} - c_5 c_{23} & -s_{23} s_4 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{k}_5 = {}^0R_5 {}^5\hat{k}_5$$

$$= \begin{bmatrix} c_5(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) - s_5 c_1 s_{23} & -s_5(s_1 s_4 + c_1 c_{23} c_4) - c_5 c_1 s_{23} & -s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 \\ c_5(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) - s_5 s_1 s_{23} & s_5(c_1 s_4 - s_1 c_{23} c_4) - c_5 s_1 s_{23} & c_1 c_4 + s_1 c_{23} s_4 \\ -s_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23} & c_4 s_5 s_{23} - c_5 c_{23} & -s_{23} s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 \\ c_1 c_4 + s_1 c_{23} s_4 \\ -s_{23} s_4 \end{bmatrix}$$

Et on a : ${}^0\hat{k}_5 \times {}^0d_6 = {}^0R_5 ({}^5\hat{k}_5 \times {}^5d_6)$

On applique et on trouve : ${}^5\hat{k}_5 \times {}^5d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec : ${}^5d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Donc : ${}^0\hat{k}_5 \times {}^0d_6 = {}^0R_5 ({}^5\hat{k}_5 \times {}^5d_6)$

$$= \begin{bmatrix} c_5(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) - s_5 c_1 s_{23} & -s_5(s_1 s_4 + c_1 c_{23} c_4) - c_5 c_1 s_{23} & -s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 \\ c_5(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) - s_5 s_1 s_{23} & s_5(c_1 s_4 - s_1 c_{23} c_4) - c_5 s_1 s_{23} & c_1 c_4 + s_1 c_{23} s_4 \\ -s_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23} & c_4 s_5 s_{23} - c_5 c_{23} & -s_{23} s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$j_5 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_5 \times {}^0d_6 \\ {}^0\hat{k}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 \\ c_1 c_4 + s_1 c_{23} s_4 \\ -s_{23} s_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.6})$$

Calcul j_6 :

Avec : ${}^6\hat{k}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et ${}^0R_6 = {}^0R_6 {}^6R_5 = {}^0R_5 {}^5R_6$

$$= \begin{bmatrix} c_5(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) - s_5 c_1 s_{23} & -s_5(s_1 s_4 + c_1 c_{23} c_4) - c_5 c_1 s_{23} & -s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 \\ c_5(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) - s_5 s_1 s_{23} & s_5(c_1 s_4 - s_1 c_{23} c_4) - c_5 s_1 s_{23} & c_1 c_4 + s_1 c_{23} s_4 \\ -s_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23} & c_4 s_5 s_{23} - c_5 c_{23} & -s_{23} s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c_5(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) - s_5c_1s_{23})c_6 + (s_1c_4 - c_1c_{23}s_4)s_6 & -(c_5(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) - s_5c_1s_{23})s_6 + (s_1c_4 - c_1c_{23}s_4)c_6 & -s_5(s_1s_4 + c_1c_{23}c_4) - c_5c_1s_{23} \\ (c_5(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - s_5s_1s_{23})c_6 - (c_1c_4 + s_1c_{23}s_4)s_6 & -(c_5(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - s_5s_1s_{23})s_6 - (c_1c_4 + s_1c_{23}s_4)c_6 & s_5(c_1s_4 - s_1c_{23}c_4) - c_5s_1s_{23} \\ -(s_5c_{23} + c_4s_5s_{23})c_6 + s_{23}s_4s_6 & (s_5c_{23} + c_4s_5s_{23})s_6 + s_{23}s_4c_6 & c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{k}_6 = {}^0R_6 {}^6\hat{k}_6 =$$

$$\begin{bmatrix} (c_5(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) - s_5c_1s_{23})c_6 + (s_1c_4 - c_1c_{23}s_4)s_6 & -(c_5(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) - s_5c_1s_{23})s_6 + (s_1c_4 - c_1c_{23}s_4)c_6 & -s_5(s_1s_4 + c_1c_{23}c_4) - c_5c_1s_{23} \\ (c_5(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - s_5s_1s_{23})c_6 - (c_1c_4 + s_1c_{23}s_4)s_6 & -(c_5(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - s_5s_1s_{23})s_6 - (c_1c_4 + s_1c_{23}s_4)c_6 & s_5(c_1s_4 - s_1c_{23}c_4) - c_5s_1s_{23} \\ -(s_5c_{23} + c_4s_5s_{23})c_6 + s_{23}s_4s_6 & (s_5c_{23} + c_4s_5s_{23})s_6 + s_{23}s_4c_6 & c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -s_5(s_1s_4 + c_1c_{23}c_4) - c_5c_1s_{23} \\ s_5(c_1s_4 - s_1c_{23}c_4) - c_5s_1s_{23} \\ c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{Et on a : } {}^0\hat{k}_6 \times {}^0d_6 = {}^0R_6 ({}^6\hat{k}_6 \times {}^6d_6). \text{ On trouve : } {}^6\hat{k}_6 \times {}^6d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec : } {}^6d_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } {}^0\hat{k}_6 \times {}^0d_6 = {}^0R_6 ({}^6\hat{k}_6 \times {}^6d_6) =$$

$$\begin{bmatrix} (c_5(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) - s_5c_1s_{23})c_6 + (s_1c_4 - c_1c_{23}s_4)s_6 & -(c_5(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) - s_5c_1s_{23})s_6 + (s_1c_4 - c_1c_{23}s_4)c_6 & -s_5(s_1s_4 + c_1c_{23}c_4) - c_5c_1s_{23} \\ (c_5(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - s_5s_1s_{23})c_6 - (c_1c_4 + s_1c_{23}s_4)s_6 & -(c_5(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - s_5s_1s_{23})s_6 - (c_1c_4 + s_1c_{23}s_4)c_6 & s_5(c_1s_4 - s_1c_{23}c_4) - c_5s_1s_{23} \\ -(s_5c_{23} + c_4s_5s_{23})c_6 + s_{23}s_4s_6 & (s_5c_{23} + c_4s_5s_{23})s_6 + s_{23}s_4c_6 & c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } j_6 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{k}_6 \times {}^0d_6 \\ {}^0\hat{k}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s_5(s_1s_4 + c_1c_{23}c_4) - c_5c_1s_{23} \\ s_5(c_1s_4 - s_1c_{23}c_4) - c_5s_1s_{23} \\ c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A7.7})$$

Finalement on obtient la matrice jacobienne suivante : $J = c_{i_1,6} = [j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4 \ j_5 \ j_6]$

Annexes 8 : On commence par calculer : $J_D = [\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}]^T$ (A8.1)

$$\text{Avec } d_6^0 = \begin{bmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{14} \\ n_{24} \\ n_{34} \end{bmatrix} \quad (\text{A8.2})$$

$$n_{14} = -a_2 * s_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1$$

$$n_{24} = a_2 * c_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1$$

$$n_{34} = -a_4 * c_{23} - d_4 * s_{23} - d_3 * s_2$$

$$\dot{X}_6 = \frac{\partial X_6}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial X_6}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \dots + \frac{\partial X_6}{\partial \theta_6} \dot{\theta}_6$$

$$\dot{X}_6 = J_{11} \dot{\theta}_1 + J_{12} \dot{\theta}_2 + \dots + J_{16} \dot{\theta}_6$$

$$\dot{X}_6 = -n_{24} * \dot{\theta}_1 - c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) * \dot{\theta}_2 - c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) * \dot{\theta}_3$$

$$\dot{Y}_6 = \frac{\partial Y_6}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial Y_6}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \dots + \frac{\partial Y_6}{\partial \theta_6} \dot{\theta}_6$$

$$\dot{Y}_6 = J_{21}\dot{\theta}_1 + J_{22}\dot{\theta}_2 + \dots + J_{26}\dot{\theta}_6$$

$$\dot{Y}_6 = n_{14} * \dot{\theta}_1 - s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) * \dot{\theta}_2 - s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) * \dot{\theta}_3$$

$$\dot{Z}_6 = \frac{\partial Z_6}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial Z_6}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \dots + \frac{\partial Z_6}{\partial \theta_6} \dot{\theta}_6$$

$$\dot{Z}_6 = J_{31}\dot{\theta}_1 + J_{32}\dot{\theta}_2 + \dots + J_{36}\dot{\theta}_6$$

$$Z_6 = (a_4s_{23} - d_4c_{23} - d_3c_2) * \dot{\theta}_2 + (a_4s_{23} - d_4c_{23}) * \dot{\theta}_3$$

$$J_{11} = -n_{24} = -a_2 * c_1 - (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1$$

$$J_{12} = -c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2)$$

$$J_{13} = -c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23})$$

$$J_{21} = n_{14} = -a_2 * s_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1$$

$$J_{22} = -s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2)$$

$$J_{23} = -s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23})$$

$$J_{32} = (a_4s_{23} - d_4c_{23} - d_3c_2)$$

$$J_{33} = (a_4s_{23} - d_4c_{23})$$

$$J_{14} = J_{15} = J_{16} = J_{24} = J_{25} = J_{26} = J_{31} = J_{34} = J_{35} = J_{36} = 0$$

$$\omega_6^0 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$${}^0T_6 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 * {}^5T_6$$

$$= \begin{bmatrix} R_6^0 & d_6^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Donc : } d_6^0 = \begin{bmatrix} n_{14} \\ n_{24} \\ n_{34} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } n_{14} = -a_2 * s_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1 ;$$

$$n_{24} = a_2 * c_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1 \text{ et } n_{34} = -a_4 * c_{23} - d_4 * s_{23} - d_3 * s_2$$

Ensuite et à l'aide de logiciel Matlab on calcule $J_R = [w_x \quad w_y \quad w_z]^T$ qui nous donne les résultats suivants :

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \dot{\theta}_1$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 * c_1 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 * s_1 \\ -\dot{\theta}_2 * c_1 & -\dot{\theta}_2 * s_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} * \dot{\theta}_2$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_3 * c_1 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_3 * s_1 \\ -\dot{\theta}_3 * c_1 & -\dot{\theta}_3 * s_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} * \dot{\theta}_3$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_4 * c_{23} & -\dot{\theta}_4 * s_{23}s_1 \\ -\dot{\theta}_4 * c_{23} & 0 & \dot{\theta}_4 * s_{23}c_1 \\ \dot{\theta}_4 * s_{23}s_1 & -\dot{\theta}_4 * s_{23}c_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{23} & -s_{23}s_1 \\ -c_{23} & 0 & s_{23}c_1 \\ s_{23}s_1 & -s_{23}c_1 & 0 \end{bmatrix} * \dot{\theta}_4$$

$$w_5 = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_5 * s_{23}s_4 & \dot{\theta}_5 * (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) \\ -\dot{\theta}_5 * s_{23}s_4 & 0 & \dot{\theta}_5 * (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) \\ -\dot{\theta}_5 * (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) & -\dot{\theta}_5 * (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & s_{23}s_4 & (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) \\ -s_{23}s_4 & 0 & (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) \\ -(c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) & -(s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) & 0 \end{bmatrix} * \dot{\theta}_5$$

$$w_6 = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_6 * (c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) & \dot{\theta}_6 * (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) \\ -\dot{\theta}_6 * (c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) & 0 & \dot{\theta}_6 * (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) \\ -\dot{\theta}_6 * (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) & -\dot{\theta}_6 * (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) & (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) \\ -(c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) & 0 & (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) \\ -(c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) & -(s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) & 0 \end{bmatrix} * \dot{\theta}_6$$

$${}^0w_5 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

Avec : $w_x = -\dot{\theta}_2 * s_1 - \dot{\theta}_3 * s_1 - \dot{\theta}_4 * s_{23}c_1 - \dot{\theta}_5 * (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) - \dot{\theta}_6 * (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23}))$

$$w_y = \dot{\theta}_2 * c_1 + \dot{\theta}_3 * c_1 - \dot{\theta}_4 * s_{23}s_1 + \dot{\theta}_5 * (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) + \dot{\theta}_6 * (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23}))$$

$$w_z = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_4 * c_{23} - \dot{\theta}_5 * s_{23}s_4 - \dot{\theta}_6 * (c_5c_{23} - c_4s_5s_{23})$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 * s_1 - \dot{\theta}_3 * s_1 - \dot{\theta}_4 * s_{23}c_1 - \dot{\theta}_5 * (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) - \dot{\theta}_6 * (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) \\ \dot{\theta}_2 * c_1 + \dot{\theta}_3 * c_1 - \dot{\theta}_4 * s_{23}s_1 + \dot{\theta}_5 * (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) + \dot{\theta}_6 * (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_4 * c_{23} - \dot{\theta}_5 * s_{23}s_4 - \dot{\theta}_6 * (c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 & -s_{23}c_1 & (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) & (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) \\ 0 & c_1 & c_1 & -s_{23}s_1 & (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) & (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} & -s_{23}s_4 & -(c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alors : } \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = J_R \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } J_R = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 & -s_{23}c_1 & (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) & (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) \\ 0 & c_1 & c_1 & -s_{23}s_1 & (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) & (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} & -s_{23}s_4 & -(c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) \end{bmatrix}$$

Et on a:

$$\dot{X}_6 = -n_{24} * \dot{\theta}_1 - c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) * \dot{\theta}_2 - c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) * \dot{\theta}_3$$

$$\dot{Y}_6 = n_{14} * \dot{\theta}_1 - s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) * \dot{\theta}_2 - s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) * \dot{\theta}_3$$

$$\dot{Z}_6 = (a_4s_{23} - d_4c_{23} - d_3c_2) * \dot{\theta}_2 + (a_4s_{23} - d_4c_{23}) * \dot{\theta}_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{24} * \dot{\theta}_1 - c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) * \dot{\theta}_2 - c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) * \dot{\theta}_3 \\ n_{14} * \dot{\theta}_1 - s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) * \dot{\theta}_2 - s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) * \dot{\theta}_3 \\ (a_4s_{23} - d_4c_{23} - d_3c_2) * \dot{\theta}_2 + (a_4s_{23} - d_4c_{23}) * \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{24} & -c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) & -c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ n_{14} & -s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) & -s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a_4s_{23} - d_4c_{23} - d_3c_2) & (a_4s_{23} - d_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alors : } \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = J_D \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } J_D = \begin{bmatrix} -n_{24} & -c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) & -c_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ n_{14} & -s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23} + d_3s_2) & -s_1(a_4c_{23} + d_4s_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a_4s_{23} - d_4c_{23} - d_3c_2) & (a_4s_{23} - d_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_R = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 & s_{23}c_1 & (s_1c_4 - c_1s_4c_{23}) & (s_1s_4s_5 + c_1(c_5s_{23} + c_4s_5c_{23})) \\ 0 & c_1 & c_1 & s_{23}s_1 & (c_1c_4 + s_1s_4c_{23}) & (c_1s_4s_5 - s_1(c_5s_{23} - c_4s_5c_{23})) \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} & -s_{23}s_4 & -(c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) \end{bmatrix}$$

Donc on aura :

$$J = \begin{bmatrix} J_D \\ J_R \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -n_{24} & -c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -c_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ n_{14} & -s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) & -s_1(d_4s_{23} + a_4c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23} & a_4s_{23} - d_4c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & -s_{23}c_1 & -s_1c_4 + c_1c_{23}s_4 & -s_5s_1s_4 - c_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 0 & c_1 & c_1 & -s_{23}s_1 & c_1c_4 + s_1c_{23}s_4 & s_5c_1s_4 - s_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} & -s_{23}s_4 & c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \end{bmatrix}$$

Annexes 9,10 et 11

Annexes 9 : Calcul des vitesses articulaires

$$-n_{24}\dot{\theta}_1 - c_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_2 - c_1(d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_3 = \dot{X} \quad (A9.1)$$

$$n_{14}\dot{\theta}_1 - s_1(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_2 - s_1(d_4s_{23} + a_4c_{23})\dot{\theta}_3 = \dot{Y} \quad (A9.2)$$

$$(a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23})\dot{\theta}_2 + (a_4s_{23} - d_4c_{23})\dot{\theta}_3 = \dot{Z} \quad (A9.3)$$

La soustraction après la multiplication respectivement des équations (A9.1) et (A9.2) par $\sin(\theta_1)$ et $\cos(\theta_1)$ donne: $(n_{24} * s_1 + n_{14} * c_1) * \dot{\theta}_1 = \dot{Y} * c_1 - \dot{X} * s_1$

$$\text{Donc on aura : } \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{Y} * c_1 - \dot{X} * s_1}{(n_{24} * s_1 + n_{14} * c_1)} \quad (A9.4)$$

La sommation de l'équation (A9.1) et (A9.2) donne :

$$(n_{14} - n_{24}) * \dot{\theta}_1 - (s_1 + c_1)(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \dot{\theta}_2 - (s_1 + c_1)(d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \dot{\theta}_3 = \dot{X} + \dot{Y}$$

Après la simplification on trouve :

$$(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \dot{\theta}_2 + (d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \dot{\theta}_3 = \frac{(n_{14} - n_{24})}{(s_1 + c_1)} * \dot{\theta}_1 - \frac{\dot{X} + \dot{Y}}{(s_1 + c_1)} \quad (A9.5)$$

$$\text{D'après l'équation (A9.3) on tire : } \dot{\theta}_3 = \frac{\dot{Z} - (a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23}) * \dot{\theta}_2}{(a_4s_{23} - d_4c_{23})} \quad (A9.6)$$

On remplace (A 8.6) dans (A 8.5) on trouve :

$$(d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \dot{\theta}_2 + (d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \left(\frac{\dot{Z} - (a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23}) * \dot{\theta}_2}{(a_4s_{23} - d_4c_{23})} \right) = \frac{(n_{14} - n_{24})}{(s_1 + c_1)} * \dot{\theta}_1 - \frac{\dot{X} + \dot{Y}}{(s_1 + c_1)}$$

$$\left(\frac{(a_4s_{23} - d_4c_{23}) * (d_3s_2 + d_4s_{23} + a_4c_{23}) - (d_4s_{23} + a_4c_{23}) * (a_4s_{23} - d_3c_2 - d_4c_{23})}{(a_4s_{23} - d_4c_{23})} \right) * \dot{\theta}_2 = \frac{(n_{14} - n_{24}) * \dot{\theta}_1 - (\dot{X} + \dot{Y})}{(s_1 + c_1)} - \frac{(d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \dot{Z}}{(a_4s_{23} - d_4c_{23})}$$

Après la simplification, on a :

$$\left(\frac{d_3(a_4 - d_4)c_3 + 2d_4^2s_{23}}{(a_4s_{23} - d_4c_{23})} \right) * \dot{\theta}_2 = \frac{(n_{14} - n_{24}) * \dot{\theta}_1 - (\dot{X} + \dot{Y})}{(s_1 + c_1)} - \frac{(d_4s_{23} + a_4c_{23}) * \dot{Z}}{(a_4s_{23} - d_4c_{23})}$$

Ce qui donne :

$$\dot{\theta}_2 = \frac{((n_{14} - n_{24}) * \dot{\theta}_1 - (\dot{X} + \dot{Y})) * (a_4 s_{23} - d_4 c_{23}) - (s_1 + c_1) * (d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) * \dot{Z}}{(d_3 (a_4 - d_4) c_3 + 2d_4^2 s_{23}) * (s_1 + c_1)} \quad (\text{A9.7})$$

On remplace (A9.7) dans (A9.6), on trouve :

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{Z}}{(a_4 s_{23} - d_4 c_{23})} - \frac{(a_4 s_{23} - d_3 c_2 - d_4 c_{23})((n_{14} - n_{24}) * \dot{\theta}_1 - (\dot{X} + \dot{Y})) (a_4 s_{23} - d_4 c_{23}) - (s_1 + c_1) (d_4 s_{23} + a_4 c_{23}) * \dot{Z}}{(a_4 s_{23} - d_4 c_{23}) (d_3 (a_4 - d_4) c_3 + 2d_4^2 s_{23}) (s_1 + c_1)} \quad (\text{A9.8})$$

$$\text{Le terme : } n_{14} - n_{24} = (d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23}) (c_1 - s_1) - a_2 (c_1 + s_1) \quad (\text{A9.9})$$

$$\text{Et : } n_{14} c_1 + n_{24} s_1 = (d_2 + d_3 c_2 + d_4 c_{23} - a_4 s_{23}) \quad (\text{A9.10})$$

$$(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + c_4 \dot{\theta}_5 + s_5 s_4 \dot{\theta}_6) s_1 - (s_{23} \dot{\theta}_4 - c_{23} s_4 \dot{\theta}_5 + (c_{23} c_4 s_5 + c_5 s_{23}) \dot{\theta}_6) c_1 = w_x \quad (\text{A9.11})$$

$$(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + c_4 \dot{\theta}_5 + s_5 s_4 \dot{\theta}_6) c_1 - (s_{23} \dot{\theta}_4 - c_{23} s_4 \dot{\theta}_5 + (c_{23} c_4 s_5 + c_5 s_{23}) \dot{\theta}_6) s_1 = w_y \quad (\text{A9.12})$$

$$c_{23} \dot{\theta}_4 - s_{23} s_4 \dot{\theta}_5 + (s_{23} c_4 s_5 - c_5 c_{23}) \dot{\theta}_6 = w_z \quad (\text{A9.13})$$

$$(\text{A9.11}) \times c_1 \oplus (\text{A9.12}) \times s_1 \Rightarrow$$

$$s_{23} \dot{\theta}_4 + c_{23} s_4 \dot{\theta}_5 - (c_{23} c_4 s_5 + c_5 s_{23}) \dot{\theta}_6 = w_x c_1 + w_y s_1 \quad (\text{A9.14})$$

$$(\text{A9.13}) \times c_{23} + (\text{A9.14}) \times s_{23} \Rightarrow -\dot{\theta}_4 - c_5 \dot{\theta}_6 = w_z c_{23} + (w_x c_1 + w_y s_1) s_{23}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_4 = -[w_z c_{23} + (w_x c_1 + w_y s_1) s_{23} + c_5 \dot{\theta}_6] \quad (\text{A9.15})$$

$$(\text{A9.13}) \times s_{23} - (\text{A9.14}) \times c_{23} \Rightarrow +s_4 \dot{\theta}_5 - c_4 s_5 \dot{\theta}_6 = (w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_5 = \frac{1}{s_4} [(w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23} + c_4 s_5 \dot{\theta}_6] \quad (\text{A9.16})$$

On remplace (A9.15) et (A9.16) dans (A9.11). On pose (A9.11) = I+II

$$\text{Avec: } I = (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + c_4 \dot{\theta}_5 + s_5 s_4 \dot{\theta}_6) s_1 \quad \text{et} \quad II = -(s_{23} \dot{\theta}_4 - c_{23} s_4 \dot{\theta}_5 + (c_{23} c_4 s_5 + c_5 s_{23}) \dot{\theta}_6) c_1 \Rightarrow$$

$$I = (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + c_4 \dot{\theta}_5 + s_5 s_4 \dot{\theta}_6) s_1 = (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + c_4 \times \frac{1}{s_4} [(w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23} + c_4 s_5 \dot{\theta}_6] + s_5 s_4 \dot{\theta}_6) s_1$$

$$= \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \frac{c_4}{s_4} (w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - \frac{c_4}{s_4} w_z s_{23} + \frac{(c_4^2 s_5 + s_4^2 s_5)}{s_4} \dot{\theta}_6 \right) s_1$$

$$= \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \frac{c_4}{s_4} (w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - \frac{c_4}{s_4} w_z s_{23} + \frac{s_5}{s_4} \dot{\theta}_6 \right) s_1$$

$$II = -(s_{23} \dot{\theta}_4 - c_{23} s_4 \dot{\theta}_5 + (c_{23} c_4 s_5 + c_5 s_{23}) \dot{\theta}_6) c_1$$

$$\begin{aligned}
&= \left(s_{23} [w_z c_{23} + (w_x c_1 + w_y s_1) s_{23} + c_5 \dot{\theta}_6] + c_{23} s_4 \frac{1}{s_4} [(w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23} + c_4 s_5 \dot{\theta}_6] - (c_{23} c_4 s_5 + c_5 s_{23}) \dot{\theta}_6 \right) c_1 \\
&= (w_z s_{23} c_{23} + (w_x c_1 + w_y s_1) s_{23}^2 + s_{23} c_5 \dot{\theta}_6 + (w_x c_1 + w_y s_1) c_{23}^2 - w_z c_{23} s_{23} + c_{23} c_4 s_5 \dot{\theta}_6 - (c_{23} c_4 s_5 + c_5 s_{23}) \dot{\theta}_6) c_1 \\
&= (w_x c_1 + w_y s_1) c_1
\end{aligned}$$

$$I + II \Rightarrow (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) s_1 + \frac{c_4}{s_4} (w_x c_1 + w_y s_1) s_1 c_{23} - \frac{c_4}{s_4} w_z s_1 s_{23} + \frac{s_5 s_1}{s_4} \dot{\theta}_6 + (w_x c_1 + w_y s_1) c_1 = w_x$$

$$\left[\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \frac{c_4}{s_4} ((w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23}) \right] s_1 + (w_x c_1 + w_y s_1) c_1 + \frac{s_5 s_1}{s_4} \dot{\theta}_6 = w_x$$

$$\dot{\theta}_6 = \frac{\left[w_x - \left[(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \frac{c_4}{s_4} ((w_x c_1 + w_y s_1) c_{23} - w_z s_{23}) \right] s_1 - (w_x c_1 + w_y s_1) c_1 \right] s_4}{s_5 s_1} \quad (\text{A9.17})$$

Annexe 10:

$$\begin{aligned}
\text{Det}(J) = & j_{11} * (j_{22} * j_{33} \\
& * (j_{44} * (j_{55} * j_{66} - j_{65} * j_{56}) - j_{54} * (j_{45} * j_{66} - j_{46} * j_{65}) + j_{64} \\
& * (j_{45} * j_{56} - j_{46} * j_{55})) + j_{32} * j_{23} \\
& * (j_{44} * (j_{65} * j_{56} - j_{55} * j_{66}) + j_{54} * (j_{45} * j_{66} - j_{65} * j_{46}) - j_{64} \\
& * (j_{45} * j_{56} - j_{46} * j_{55})) + j_{21} \\
& * (j_{12} * j_{33} \\
& * (j_{44} * (j_{65} * j_{56} - j_{55} * j_{66}) + j_{54} * (j_{45} * j_{66} - j_{65} * j_{46}) - j_{64} \\
& * (j_{45} * j_{56} - j_{55} * j_{46})) + j_{32} * j_{13} \\
& * (j_{44} * (j_{55} * j_{66} - j_{65} * j_{56}) - j_{54} * (j_{45} * j_{66} - j_{65} * j_{46}) + j_{64} \\
& * (j_{44} * j_{56} - j_{55} * j_{46}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Det}(J) = & (j_{11} * (j_{22} * j_{33} - j_{23} * j_{32}) + j_{21} (j_{13} * j_{32} - j_{12} * j_{33})) * (j_{44} \\
& * (j_{55} * j_{66} - j_{65} * j_{56}) - j_{54} * (j_{45} * j_{66} - j_{46} * j_{65}) + j_{64} \\
& * (j_{45} * j_{56} - j_{46} * j_{55}))
\end{aligned}$$

Après les calculs de chaque terme on aura :

- ❖ $j_{22} * j_{33} - j_{23} * j_{32} = d_3 * (d_4 s_3 - a_4 c_3) s_1$
- ❖ $j_{13} * j_{32} - j_{12} * j_{33} = -d_3 * (d_4 s_3 - a_4 c_3) c_1$
- ❖ $j_{44} (j_{55} * j_{66} - j_{65} * j_{56}) = (s_1 s_4 c_5 - c_1 (s_5 s_{23} - c_4 c_5 c_{23})) (c_1 s_{23})$
- ❖ $j_{54} (j_{45} * j_{66} - j_{46} * j_{65}) = (c_1 s_4 c_5 + s_1 (s_5 s_{23} - c_4 c_5 c_{23})) (s_1 s_{23})$
- ❖ $j_{64} (j_{45} * j_{56} - j_{46} * j_{55}) = -(s_5 c_{23} + c_4 c_5 s_{23}) c_{23}$

Après la simplification , on obtient :

$$j_{11} * (j_{22} * j_{33} - j_{23} * j_{32}) + j_{21} (j_{13} * j_{32} - j_{12} * j_{33}) = d_3 * (j_{11} s_1 - j_{21} c_1) (d_4 s_3 - a_4 c_3)$$

Avec:

$$j_{11} = -n_{24} = -a_2 * c_1 - (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * s_1$$

$$j_{21} = n_{14} = -a_2 * s_1 + (d_2 + d_3 * c_2 + d_4 * c_{23} - a_4 * s_{23}) * c_1$$

$$\text{Et } j_{11}s_1 - j_{21}c_1 = -(d_2 + d_3c_2 + d_4c_{23} - a_4s_{23})$$

On trouve :

$$\begin{aligned} j_{11} * (j_{22} * j_{33} - j_{23} * j_{32}) + j_{21}(j_{13} * j_{32} - j_{12} * j_{33}) \\ = -d_3 * (d_2 + d_3c_2 + d_4c_{23} - a_4s_{23})(d_4s_3 - a_4c_3) \end{aligned}$$

Et aussi:

$$\begin{aligned} j_{44} * (j_{55} * j_{66} - j_{65} * j_{56}) - j_{54} * (j_{45} * j_{66} - j_{46} * j_{65}) + j_{64} * (j_{45} * j_{56} - j_{46} * j_{55}) \\ = (s_1s_4c_5 - c_1(s_5s_{23} - c_4c_5c_{23}))(c_1s_{23}) \\ - (c_1s_4c_5 + s_1(s_5s_{23} - c_4c_5c_{23}))(s_1s_{23}) - (s_5c_{23} + c_4c_5s_{23})c_{23} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$j_{44} * (j_{55} * j_{66} - j_{65} * j_{56}) - j_{54} * (j_{45} * j_{66} - j_{46} * j_{65}) + j_{64} * (j_{45} * j_{56} - j_{46} * j_{55}) = -s_5$$

Finalement on aura :

$$\text{Det}(J) = d_3 * (d_2 + d_3c_2 + d_4c_{23} - a_4s_{23})(d_4s_3 - a_4c_3) s_5 \quad (\text{A10.1})$$

Annexe 11 : Les équations paramétriques de la partie circulaire de la trajectoire dans le repère $R_c(O_c, X_c, Y_c, Z_c)$ sont :

$$\vec{p}_c(\varphi) = \begin{cases} X_c = \frac{b\varphi}{\alpha} \\ Y_c = R_c \cos(\varphi) \\ Z_c = -R_c \sin(\varphi) \end{cases}$$

Avec : $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha + \varphi_0$

Pour notre application on a : $\alpha \in [0, 52.35]$ (en degré) , $\varphi_0 = 9.36^\circ$ et $b = 0 \text{ m}$;

Donc : $9.36^\circ \leq \varphi \leq 61.71^\circ$

Pour les paramètres de D-H voir le Tableau (4.1) chapitre 4

Donc les équations paramétriques dans le repère $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$ sont données par :

$$\vec{p}_0(\varphi) = \begin{cases} X_0 = l_x + \frac{b\varphi}{\alpha} \\ Y_0 = -l_y + R_c \cos(\varphi) \\ Z_0 = l_z - R_c \sin(\varphi) \end{cases}$$

La distance entre le repère fixe R_0 et le repère de cercle R_c est :

Suivant $x x'$ est : l_x Suivant $y y'$ est : l_y et Suivant $z z'$ est : l_z

Pour notre application on a : $l_x=1.65 \text{ m}$, $l_y= 0.962 \text{ m}$, $l_z= 0.858 \text{ m}$ et $b=0$

$$\vec{p}_0(\varphi) = \begin{cases} X_0 = l_x \\ Y_0 = -l_y + R_c \cos(\varphi) \\ Z_0 = l_z - R_c \sin(\varphi) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{X}_0 = 0 \\ \dot{Y}_0 = -R_c \dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ \dot{Z}_0 = -R_c \dot{\varphi} \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$v^2 = \|\dot{\vec{p}}_0(\varphi)\|^2 \Rightarrow \dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2 = R_c^2 \dot{\varphi}^2 = v^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v}{R_c} \Rightarrow \varphi = \frac{v}{R_c} t + \varphi_0$$

De la forme : $\varphi = \omega t + \varphi_0$

$$\text{avec : } \omega = \frac{v}{R_c} = \frac{0,02}{0,975} = 0.0205 \text{ rd/s}$$

et à $t=0$ $\varphi = 9,36^\circ \Rightarrow \varphi_0 = 9,36^\circ$

$$\text{alors : } \varphi(t) = \omega t + \varphi_0 = \frac{v}{R_c} t + 9,36^\circ = 0,0205 \text{ rd/s} = 1,1753 \text{ deg/s}$$

$\varphi(t) = 0,0205t + 9,36^\circ \Rightarrow \varphi(t) = 1,175t + 9,36^\circ$ t est le paramètre de temps

Les coordonnées hélicoïdales de notre trajectoire pour la partie du cercle sont :

$$\vec{p}_0(\varphi) = \begin{cases} X_0 = l_x \\ Y_0 = -l_y + R_c \cos(\varphi) \\ Z_0 = l_z - R_c \sin(\varphi) \end{cases} \quad \vec{p}_0(\varphi(t)) = \begin{cases} X_0 = l_x \\ Y_0 = -l_y + R_c \cos(\omega t + \varphi_0) \\ Z_0 = l_z - R_c \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Alors la vitesse et l'accélération sont:

$$\dot{\vec{p}}_0(\varphi) = \begin{cases} \dot{X}_0 = 0 \\ \dot{Y}_0 = -R_c \dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ \dot{Z}_0 = -R_c \dot{\varphi} \cos(\varphi) \end{cases} \quad \dot{\vec{p}}_0(\varphi(t)) = \begin{cases} \dot{X}_0 = 0 \\ \dot{Y}_0 = -v \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{Z}_0 = -v \cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\ddot{\vec{p}}_0(\varphi) = \begin{cases} \ddot{X}_0 = 0 \\ \ddot{Y}_0 = -R_c \ddot{\varphi} \sin(\varphi) \\ \ddot{Z}_0 = -R_c \ddot{\varphi} \cos(\varphi) \end{cases} \quad \ddot{\vec{p}}_0(\varphi(t)) = \begin{cases} \ddot{X}_0 = 0 \\ \ddot{Y}_0 = -\frac{v^2}{R_c} \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{Z}_0 = \frac{v^2}{R_c} \cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Pour déterminer le trièdre de Frenet, on a:

$$\vec{e}_T = \frac{\dot{\vec{p}}}{\|\dot{\vec{p}}\|} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -v \sin(\omega t + \varphi_0) \\ -v \cos(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\omega t + \varphi_0) \\ -\cos(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(1,175 * t + 9,36)^\circ \\ -\cos(1,175 * t + 9,36)^\circ \end{pmatrix} \quad (\text{A11.1})$$

$$\vec{e}_N = \frac{\ddot{p}\dot{s} - \dot{p}\ddot{s}}{k\dot{s}^3}$$

Avec : $\ddot{s} = \frac{\dot{p}\ddot{p}}{\dot{s}} = 0, \dot{s} = v = 0,02 \text{ m/s}$

$$\vec{e}_N = \frac{\ddot{p}}{k\dot{s}^2} \quad \text{avec : } k = \left\| \frac{\ddot{p}}{\dot{s}^2} \right\|$$

$$\frac{\ddot{p}}{\dot{s}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v^2}{R_c \dot{s}^2} \cos(\omega t + \varphi_o) \\ \frac{v^2}{R_c \dot{s}^2} \sin(\omega t + \varphi_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{R_c} \cos(\omega t + \varphi_o) \\ \frac{1}{R_c} \sin(\omega t + \varphi_o) \end{pmatrix} \quad \text{avec : } k = \frac{v^2}{\dot{s}^2} = \frac{1}{R_c}$$

$$\text{Donc : } \frac{\ddot{p}}{k\dot{s}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\omega t + \varphi_o) \\ \sin(\omega t + \varphi_o) \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\vec{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\omega t + \varphi_o) \\ \sin(\omega t + \varphi_o) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(1,175 * t + 9,36)^\circ \\ \sin(1,175 * t + 9,36)^\circ \end{pmatrix}$$

(A11.2)

D'après \vec{e}_T et \vec{e}_N on aura :

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N \quad (\text{A11.3})$$

Annexes 12,13

Annexes 12

$$r_{11} = (-s_6 * c_2 * s_4 + c_6 * (c_5 * c_2 * c_4 - s_2 * s_5)) * c_1 + (s_6 * c_4 + c_6 * c_5 * s_4) * s_1;$$

$$r_{12} = (-c_6 * c_2 * s_4 - s_6 * (c_5 * c_2 * c_4 - s_2 * s_5)) * c_1 + (c_6 * c_4 - s_6 * c_5 * s_4) * s_1;$$

$$r_{13} = -s_5 * s_4 * s_1 - (s_5 * c_2 * c_4 + c_5 * s_2) * c_1; \quad r_{14} = -b_2 * s_1 - (b_3^* + b_4) * c_1 * s_2;$$

$$r_{21} = (-s_6 * c_2 * s_4 + c_6 * (c_5 * c_2 * c_4 - s_2 * s_5)) * s_1 - (s_6 * c_4 + c_6 * c_5 * s_4) * c_1;$$

$$r_{22} = (-c_6 * c_2 * s_4 - s_6 * (c_5 * c_2 * c_4 - s_2 * s_5)) * s_1 - (c_6 * c_4 - s_6 * c_5 * s_4) * c_1;$$

$$r_{23} = s_5 * s_4 * c_1 - (s_5 * c_2 * c_4 + c_5 * s_2) * s_1; \quad r_{24} = b_2 * c_1 - (b_3^* + b_4) * s_1 * s_2;$$

$$r_{31} = (s_6 * s_4 - c_6 * c_5 * c_4) * s_2 - c_6 * s_5 * c_2 ; r_{32} = (c_6 * s_4 + s_6 * c_5 * c_4) * s_2 + s_6 * s_5 * c_2 ;$$

$$r_{33} = -c_5 * c_2 + s_5 * c_4 * s_2 \text{ et } r_{34} = b_1 - (b_3^* + b_4) * c_2$$

Annexe 13

Calcul θ_1, θ_2 et θ_3 :

$$p_x = -b_2 * s_1 - (b_3^* + b_4) * c_1 * s_2 \quad (\text{A13.1})$$

$$p_y = b_2 * c_1 - (b_3^* + b_4) * s_1 * s_2 \quad (\text{A13.2})$$

$$p_z = b_1 - (b_3^* + b_4) * c_2 \quad (\text{A13.3})$$

Par la méthode de Paul on multiplie ${}^0T_6 = M$ par 1T_0 donc ${}^1T_0 * {}^0T_6 = {}^1T_0 * M$ on aura :

$$p_x * c_1 + p_y * s_1 = -(b_3^* + b_4) * s_2 \quad (\text{A13.4})$$

$$p_y * c_1 - p_x * s_1 = b_2 \quad (\text{A13.5})$$

$$p_z - b_1 = -(b_3^* + b_4) * c_2 \quad (\text{A13.6})$$

$$\text{De l'équation (A13.5) on tire : } \theta_1 = \text{atan } 2(p_y, p_x) - \text{atan } 2\left(\frac{b_2}{r}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{r}\right)^2}\right) \quad (\text{A13.7})$$

$$\text{Où bien : } \theta_1 = \text{atan } 2(p_y, p_x) - \text{atan } 2\left(b_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - b_2^2}\right) \quad \text{avec : } r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Cette solution présente trois cas :

- Deux solution pour $b_2^2 > r^2$
- Une solution pour $b_2^2 = r^2$
- Pas de solution pour $b_2^2 < r^2$

Par la méthode de Paul on multiplie une autre fois ${}^0T_6 = M$ par 2T_0 donc ${}^2T_0 * {}^0T_6 = {}^2T_0 * M$ on aura :

$$(b_1 - p_z) * s_2 + (p_x * c_1 + p_y * s_1) * c_2 = 0 \quad (\text{A13.8})$$

$$(b_1 - p_z) * c_2 - (p_x * c_1 + p_y * s_1) * s_2 = b_3^* + b_4 \quad (\text{A13.9})$$

$$p_y * c_1 - p_x * s_1 - b_2 = 0 \quad (\text{A13.10})$$

$$\text{La solution de l'équation (A13.8) donne : } \begin{cases} \theta_2 = \text{atan } 2\left((p_x * c_1 + p_y * s_1), (p_z - b_1)\right) \\ \theta_2' = \theta_2 + \pi \end{cases} \quad (\text{A13.11})$$

$$\text{D'après (A13.9), on trouve : } b_3^* = (b_1 - p_z) * c_2 - (p_x * c_1 + p_y * s_1) * s_2 - b_4 \quad (\text{A13.12})$$

Calcul de θ_4, θ_5 et θ_6 par la méthode de Paul : Pour la simplification des calculs on pose :

$${}^3R_0R = \begin{bmatrix} (h_x * c_1 + h_y * s_1) * c_2 - h_z * s_2 & (n_x * c_1 + n_y * s_1) * c_2 - n_z * s_2 & (a_x * c_1 + a_y * s_1) * c_2 - a_z * s_2 \\ h_x * s_1 - h_y * c_1 & n_x * s_1 - n_y * c_1 & a_x * s_1 - a_y * c_1 \\ -h_z * c_2 - (h_x * c_1 + h_y * s_1) * s_2 & -n_z * c_2 - (n_x * c_1 + n_y * s_1) * s_2 & -a_z * c_2 - (a_x * c_1 + a_y * s_1) * s_2 \end{bmatrix}$$

$${}^3R_0R = \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{bmatrix} \quad (A13.13)$$

Avec : $A_x = (h_x * c_1 + h_y * s_1) * c_2 - h_z * s_2$; $B_x = (n_x * c_1 + n_y * s_1) * c_2 - n_z * s_2$;

$C_x = (a_x * c_1 + a_y * s_1) * c_2 - a_z * s_2$; $A_y = h_x * s_1 - h_y * c_1$; $B_y = n_x * s_1 - n_y * c_1$;

$C_y = a_x * s_1 - a_y * c_1$; $A_z = -h_z * c_2 - (h_x * c_1 + h_y * s_1) * s_2$;

$B_z = -n_z * c_2 - (n_x * c_1 + n_y * s_1) * s_2$ et $C_z = -a_z * c_2 - (a_x * c_1 + a_y * s_1) * s_2$

Et ${}^3R_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & -s_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$ (A13.1)

Par identification on a : $c_5 = C_z = -a_z * c_2 - (a_x * c_1 + a_y * s_1) * s_2$

On multiplie l'équation ${}^3R_6 = {}^3R_0R$ par l'inverse de 3R_4 on aura :

$${}^3R_6 {}^4R_3 = {}^4R_6 = {}^4R_3 {}^3R_0R \quad \text{Avec : } {}^4R_3 = {}^3R_4^{-1}$$

On obtient donc : ${}^4R_3 {}^3R_0R = \begin{bmatrix} A_x * c_4 + A_y * s_4 & B_x * c_4 + B_y * s_4 & C_x * c_4 + C_y * s_4 \\ A_y * c_4 - A_x * s_4 & B_y * c_4 - B_x * s_4 & C_y * c_4 - C_x * s_4 \\ A_z & B_z & C_z \end{bmatrix}$

$${}^4R_6 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

On a ${}^4R_6 = {}^4R_3 {}^3R_0R$

donc :

$$\begin{bmatrix} A_x * c_4 + A_y * s_4 & B_x * c_4 + B_y * s_4 & C_x * c_4 + C_y * s_4 \\ A_y * c_4 - A_x * s_4 & B_y * c_4 - B_x * s_4 & C_y * c_4 - C_x * s_4 \\ A_z & B_z & C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

Par identification on aura : $C_y * c_4 - C_x * s_4 = 0$

et : $\theta_4 = \begin{cases} \text{atan}(C_y/C_x) \\ \theta_4' = \theta_4 + \pi \end{cases}$ (A13.15)

Et on a aussi : $-s_5 = C_x * c_4 + C_y * s_4$; $c_5 = C_z$

$\theta_5 = \text{atan} 2(s_5, c_5)$ (A13.16)

De même pour θ_6 on a : $s_6 = A_y * c_4 - A_x * s_4$; $c_6 = B_y * c_4 - B_x * s_4$ et $\theta_6 =$

$\text{atan} 2(s_6, c_6)$ (A13.17)

Annexe 14

Rotation unique autour d'un axe arbitraire [Duysinx 04].

Théorème d'Euler : toute rotation finie peut être exprimée comme une rotation unique d'angle θ autour d'un axe de direction appropriée \vec{u} (figure A14.1)

Considérons deux rotations d'angles α et β autour des axes ox et oy respectivement

(Figure A14.1).

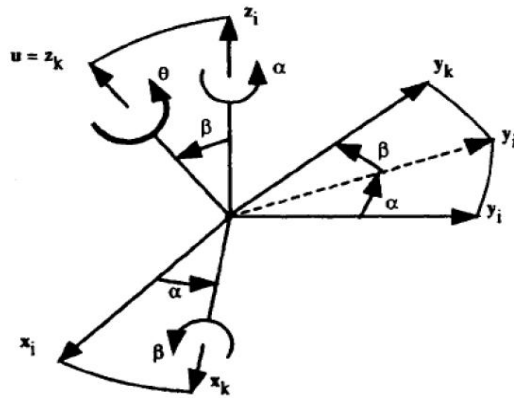


Figure (A14.1) : Rotation autour d'un axe quelconque

$$T_k^i = Rot(z_i, \alpha)Rot(x_k, \beta) = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha C\beta & S\alpha S\beta \\ S\alpha & C\alpha C\beta & -C\alpha S\beta \\ 0 & S\beta & C\beta \end{bmatrix} \quad (A14.1)$$

Tourner autour de \vec{u} est équivalent à tourner autour de l'axe z_k du repère R_k c'est-à-dire :

$$Rot(\vec{u}, \theta)T_k^i Rot(z, \theta) \quad (A14.2)$$

D'où

$$Rot(\vec{u}, \theta) = T_k^i Rot(z, \theta)T_i^k \quad (A14.3)$$

Et

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\alpha S\beta \\ -C\alpha S\beta \\ C\beta \end{bmatrix} \quad (A14.4)$$

L'utilisation de l'expression (A14.3) et l'expression (A14.4) permet d'écrire de l'expression suivante :

$$Rot(u, \theta) = \begin{bmatrix} u_x^2(1 - C\theta) + C\theta & u_x u_y(1 - C\theta) - u_z S\theta & u_x u_z(1 - C\theta) + u_y S\theta \\ u_x u_y(1 - C\theta) + u_z S\theta & u_y^2(1 - C\theta) + C\theta & u_y u_z(1 - C\theta) - u_x S\theta \\ u_x u_z(1 - C\theta) - u_y S\theta & u_y u_z(1 - C\theta) + u_x S\theta & u_z^2(1 - C\theta) + C\theta \end{bmatrix}$$

(A14.6)

Soit T une matrice de transformation homogène de rotation :

$$R = \begin{bmatrix} h_y & n_x & a_x \\ h_y & n_y & a_y \\ h_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$$

On cherche à identifier les termes de \vec{u} et θ de l'expression :

$$Rot(\vec{u}, \theta) = R \quad (A14.7)$$

En faisant la somme des termes diagonaux on a :

$$C\theta = \frac{1}{2}(h_x + n_y + a_z - 1) \quad (A14.7)$$

$$S\theta = \frac{1}{2}\sqrt{(n_z - a_y)^2 + (a_x - s_z)^2 + (h_y - n_x)^2} \quad (A14.8)$$

À partir de termes extra diagonaux on a:

$$\begin{cases} 2u_x S\theta = n_z - a_y \\ 2u_y S\theta = a_x - s_z \\ 2u_z S\theta = h_y - n_x \end{cases} \quad (A14.9)$$

$$\begin{cases} u_x = \text{sign}(n_z - a_y) \sqrt{\frac{h_x - C\theta}{1 - C\theta}} \\ u_y = \text{sign}(a_x - s_z) \sqrt{\frac{n_y - C\theta}{1 - C\theta}} \\ u_z = \text{sign}(h_y - n_x) \sqrt{\frac{a_z - C\theta}{1 - C\theta}} \end{cases} \quad (A14.10)$$

L'expression (A14.6) peut être écrite sous la forme suivante :

$$rot(\vec{u}, \theta) = \vec{u}\vec{u}^T(1 - \cos\theta) + I_3 \cos\theta + \hat{u} \sin\theta \quad (A14.5)$$

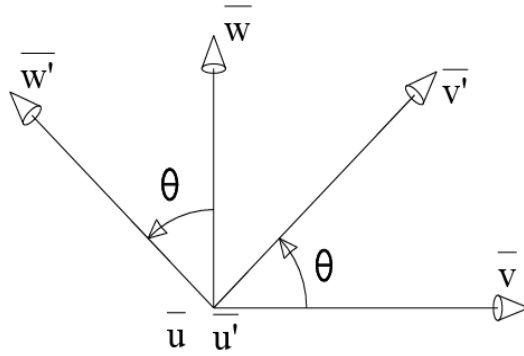


Figure (A14.2): Rotation autour du vecteur \bar{u}

La matrice de transfert $R(u, \theta)$ a la forme suivante d'après la figure (A14.2)

$$R(u, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R(u, \theta)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} \bar{u}' = \bar{u} \\ \bar{v}' = \cos(\theta) \bar{v} + \sin(\theta) \bar{w} \\ \bar{w}' = -\sin(\theta) \bar{v} + \cos(\theta) \bar{w} \end{cases}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} R &= [\bar{u}\bar{u}^T + \bar{v}\bar{v}^T + \bar{w}\bar{w}^T] \\ &= [\bar{u}\bar{u}^T + \bar{v}(\cos(\theta) \bar{v} + \sin(\theta) \bar{w})^T + \bar{w}(-\sin(\theta) \bar{v} + \cos(\theta) \bar{w})^T] \end{aligned}$$

Après arrangement, on :

$$R(\bar{u}, \theta) = [\bar{u}\bar{u}^T + \cos(\theta) (\bar{v}\bar{v}^T + \bar{w}\bar{w}^T) + \sin(\theta) (\bar{v}\bar{w}^T - \bar{w}\bar{v}^T)]$$

On sait que :

$$\bar{u}\bar{u}^T + \bar{v}\bar{v}^T + \bar{w}\bar{w}^T = I$$

$$\Rightarrow I - \vec{u}\vec{u}^T = \vec{v}\vec{v}^T + \vec{w}\vec{w}^T$$

Et

$$\vec{v}\vec{w}^T - \vec{w}\vec{v}^T = \hat{u}$$

D'où :

$$R(\vec{u}, \theta) = \vec{u}\vec{u}^T + \cos(\theta) (I - \vec{u}\vec{u}^T) + \sin(\theta) \hat{u}$$

D'où :

$$R(\vec{u}, \theta) = \vec{u}\vec{u}^T (1 - \cos\theta) + I_3 \cos\theta + \hat{u} \sin\theta$$

Annexe 15

APPLICATION POUR PUMA.

1. Les paramètres de (D-H) du robot PUMA choisi :

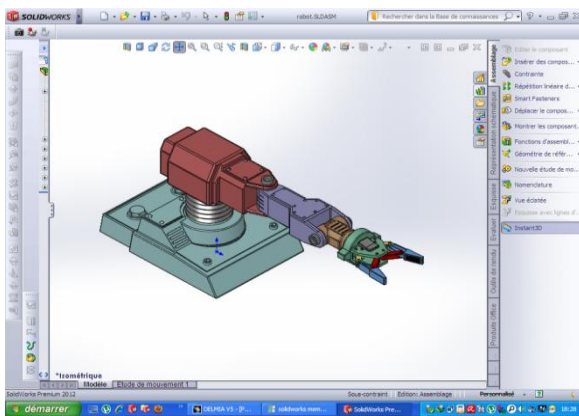


Figure A15.1 : Robot PUMA schématisé à l'aide logiciel Solidworks.

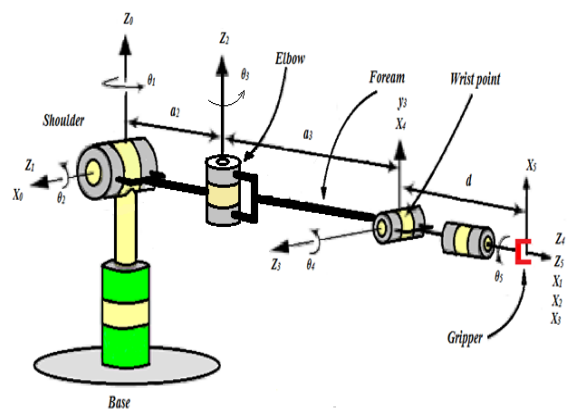


Figure A15.2 : Schéma cinématique du robot PUMA.

Lien i	σ_i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	90	0	θ_1
2	0	a_2	-90	0	θ_2
3	0	a_3	90	0	θ_3
4	0	0	90	0	θ_4
5	0	0	0	d	θ_5

Tableau A15.1 : DH paramètres du robot PUMA.

2. Calcul de la matrice de transformation homogène:

On applique la matrice de transformation homogène de D-H modifié pour calculée les matrice de transformation de chaque repère donc

$${}^{i-1}T_i = D_{Z_{i-1}, d_i} * R_{Z_{i-1}, \theta_i} * D_{X_{i-1}, a_i} * R_{X_{i-1}, \alpha_i}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sachant que :

$$\cos \theta_i = C_i \quad i=1 \dots 5; \dots \dots \dots (A15.1)$$

$$\sin \theta_i = S_i \quad i=1 \dots 5; \dots \dots \dots (A15.2)$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2 * C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2 * S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 * C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 * S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^3T_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4T_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les équations du modèle cinématique directe sont données par : ${}^0T_5 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5$

Pour L'obtention de la matrice 0T_5 voir (programme appendice)

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$n_{11} = ((c_1 * c_2 * c_3 - s_1 * s_3) * c_4 - c_1 * s_2 * s_4) * c_5 + (c_1 * c_2 * s_3 + s_1 * c_3) * s_5;$$

$$n_{12} = -((c_1 * c_2 * c_3 - s_1 * s_3) * c_4 - c_1 * s_2 * s_4) * s_5 + (c_1 * c_2 * s_3 + s_1 * c_3) * c_5;$$

$$n_{13} = (c_1 * c_2 * c_3 - s_1 * s_3) * s_4 + c_1 * s_2 * c_4;$$

$$n_{14} = ((c_1 * c_2 * c_3 - s_1 * s_3) * s_4 + c_1 * s_2 * c_4) * d + (c_1 * c_2 * c_3 - s_1 * s_3) * a_3 + c_1 * c_2 * a_2;$$

$$n_{21} = ((s_1 * c_2 * c_3 + c_1 * s_3) * c_4 - s_1 * s_2 * s_4) * c_5 + (s_1 * c_2 * s_3 - c_1 * c_3) * s_5;$$

$$n_{22} = -((s_1 * c_2 * c_3 + c_1 * s_3) * c_4 - s_1 * s_2 * s_4) * s_5 + (s_1 * c_2 * s_3 - c_1 * c_3) * c_5;$$

$$n_{23} = ((s_1 * c_2 * c_3 + c_1 * s_3) * s_4 + s_1 * s_2 * c_4);$$

$$n_{24} = ((s_1 * c_2 * c_3 + c_1 * s_3) * s_4 + s_1 * s_2 * c_4) * d + (s_1 * c_2 * c_3 + c_1 * s_3) * a_3 + s_1 * c_2 * a_2;$$

$$n_{31} = (s_2 * c_3 * c_4 + c_2 * s_4) * c_5 + s_2 * s_3 * s_5; \quad n_{32} = -(s_2 * c_3 * c_4 + c_2 * s_4) * s_5 + s_2 * s_3 * c_5;$$

$$n_{33} = s_2 * c_3 * s_4 - c_2 * c_4; \quad n_{34} = (s_2 * c_3 * s_4 - c_2 * c_4) * d + s_2 * a_3 * c_3 + a_2 * s_2$$

$$n_{41} = r_{42} = r_{43} = 0 \text{ et } r_{44} = 1$$

3. Détermination des variables articulaires du robot PUMA : (Pour d=0)

$$p_x = n_{14} = (a_3 * c_3 + a_2) * c_2 * c_1 - a_3 * s_3 * s_1$$

$$p_y = n_{24} = (a_3 * c_3 + a_2) * c_2 * s_1 + a_3 * s_3 * c_1 \text{ et } p_z = n_{34} = (a_3 * c_3 + a_2) * s_2$$

Calcul θ_1, θ_2 et θ_3 :

$$\theta_1 = \frac{2 * a_2 * p_x + \sqrt{4 * a_2^2 * a_3^2 - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_3^2 - a_2^2)^2}}{2 * a_2 * p_y} \quad (\text{A15.3})$$

Avec: $4 * a_2^2 * a_3^2 - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_3^2 - a_2^2)^2 \geq 0$ qui donne :

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 2 * a_2 * a_3 + a_3^2 + a_2^2$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{2 * a_2 * p_z}{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_3^2 + a_2^2}\right) \quad (\text{A15.4})$$

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_3^2 - a_2^2}{2 * a_2 * a_3}\right) \quad (\text{A15.5})$$

Calcul θ_4 et θ_5 :

$$\text{On tire } \theta_4 \text{ en trouvant : } \theta_4 = \arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right) \quad (\text{A15.6})$$

$$\text{On a } \begin{cases} S_4 = r_{13} \\ -C_4 = r_{23} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \text{atan } 2(r_{13}, -r_{23}) \quad (\text{A15.7})$$

$$\theta_5 = \arcsin(r_{31}) \quad (\text{A15.8})$$

$$\text{Ou bien on a } \begin{cases} S_5 = r_{31} \\ C_5 = r_{32} \end{cases} \Rightarrow \theta_5 = \text{atan } 2(r_{31}, r_{32}) \quad (\text{A15.9})$$

La méthode pour calculer les variables articulaires est identique à celles des Annexes 3 et 6

Application :

Cette application va porter sur la vérification du mouvement du robot PUMA avec $a_2=0.7\text{ m}$; $a_3=0.5\text{ m}$; $d=0.4\text{ m}$ pour les deux positions initiales et finales dans un intervalle de temps de 1s.

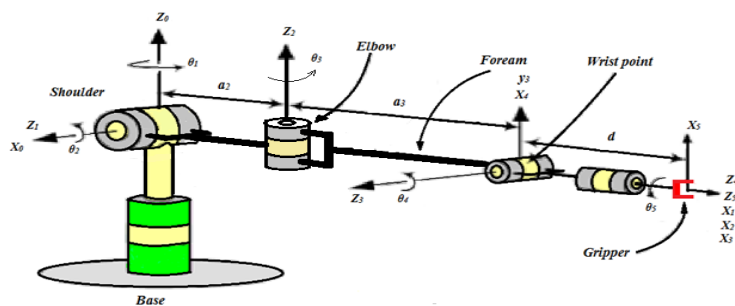


Figure A15.3 : Le schéma du robot PUMA.

4. L'équation du mouvement pour la position initiale et désirée (porteur sans outil):

L'équation du mouvement pour le chemin emprunté pour atteindre la position désirée est donnée par les relations :

$$\theta_1(t)=15t^4+10t^3+5t ; \theta_2(t)=10t^4+5t^3+5t \text{ et } \theta_3(t)=-46t^4+20t^3+10t$$

Vérification du polynôme pour les θ_i :

A t=0s .On remplace dans les polynômes avec t=0s, on trouve :

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0^\circ (\text{La position initiale}).$$

A t=1s .On remplace dans les polynômes de θ_i avec t=1s, on trouve :

$$\theta_1= 45^\circ ; \theta_2 = 60^\circ ; \theta_3= 30^\circ (\text{La position désirée}).$$

Vérification du polynôme par deux méthodes : On peut décomposer la position initiale de robot en deux parties :

Les données de robot est : $a_2=0.7 \text{ m}$; $a_3=0.5\text{m}$; $d=0.4\text{m}$

En partant de la position initiale :

La première méthode à $t=0\text{s}$: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$

$$a_3 * s_{23} + a_2 * c_2 = \frac{d_x - d * s_1}{c_1} \quad (\text{A15.10})$$

$$d_x * s_1 - d_y * c_1 = d \quad (\text{A15.11})$$

$$a_3 * s_{23} = \pm \sqrt{d_x^2 + d_y^2 - d^2} - a_2 * c_2 \quad (\text{A15.12})$$

On remplace $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$ dans (A15.10) (A15.11) et (A15.12) on trouve :

$p_x=0.22 \text{ m}$; $p_y=0 \text{ m}$; $p_z=0 \text{ m}$ (*La position initiale*).

La deuxième méthode à $t=0\text{s}$. On remplace $p_x = 0.22 \text{ m}$; $p_y = 0 \text{ m}$; $p_z = 0 \text{ m}$ dans (A15.3) (A15.4) et (A15.5) on trouve :

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$ (*La position initiale*).

Vers la position désirée :

La première méthode à $t=1\text{s}$: $\theta_1=45^\circ$; $\theta_2 = 60^\circ$; $\theta_3= 30^\circ$. On remplace $\theta_1= 45^\circ$; $\theta_2 = 60^\circ$; $\theta_3= 30^\circ$ dans (A15.10) (A15.11) et (A15.12), on trouve :

$p_x=1.2 \text{ m}$; $p_y=0.58 \text{ m}$; $p_z= 0.98 \text{ m}$ (*La position désirée*).

La deuxième méthode à $t=1\text{s}$.

Ou bien, on remplace. $p_x=1.2 \text{ m}$, $p_y=0.58 \text{ m}$, $p_z= 0.98 \text{ m}$ dans les équations (A15.3) ; (A15.4) et (A15.5) et on trouve : $\theta_1=45^\circ$; $\theta_2 = 60^\circ$; $\theta_3= 30^\circ$ (*La position désirée*).

Le choix des expressions de θ_1 et θ_2 , θ_3 doit satisfaire les conditions suivantes :

- Dans l'intervalle de temps elles doivent vérifier les positions initiale et désirée.
- A chaque instant les deux postures (coude bas et coude haut) doivent avoir les mêmes coordonnées p_x p_y p_z
- Les deux postures seront atteintes par des trajectoires de même nature.
- Les deux trajectoires ont la même longueur.
- Le degré 4 du polynôme est généralement utilisé en robotique.

5. Les graphes pour les angles θ_i le graphe de trajectoire :

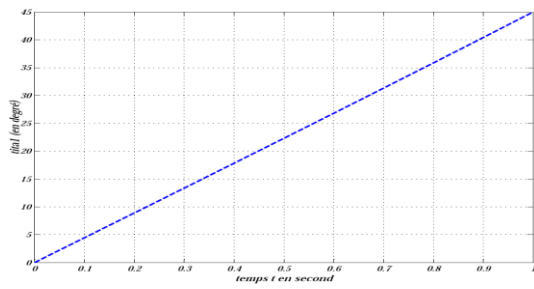


Figure A15.4: Variation de tita1

en fonction de temps

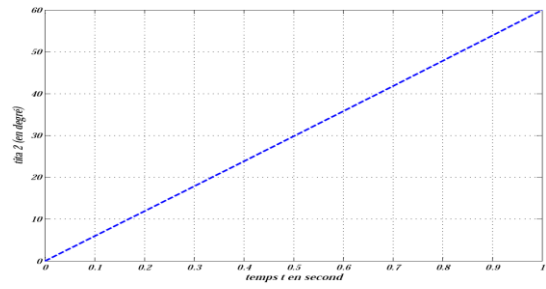


Figure A15.5: Variation de tita2

en fonction de temps

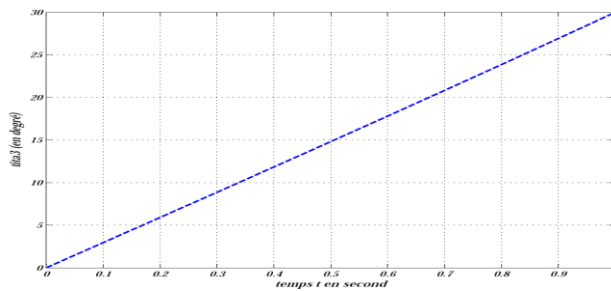


Figure A15.6: La variation de tita3 en fonction de temps

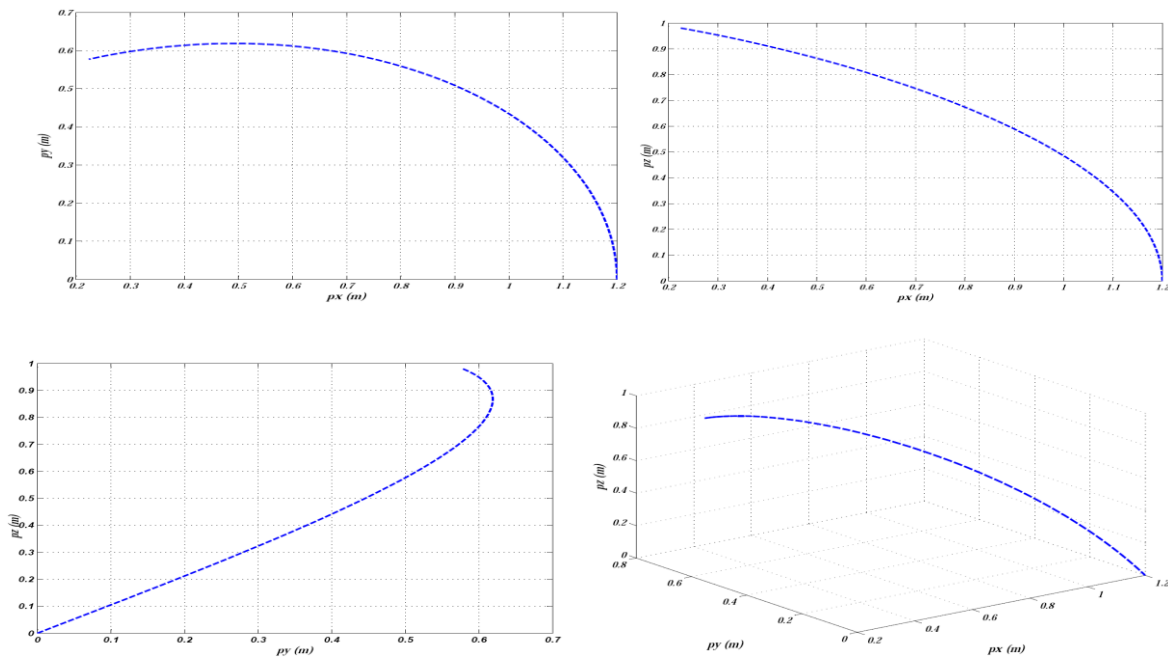


Figure A15.7 : Trajectoire du porteur pour les trois axes

6. Calcul de la vitesse linéaire :

Pour calculer les $\dot{\theta}_i$ on appliqué $\dot{X} = J\dot{q}$ (A15.13)

Il faut d'abord calculer la matrice jacobienne J

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5$$

$$= \begin{bmatrix} R_5^0 & d_5^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A15.14)$$

La matrice jacobienne du robot PUMA :

On calcule le jacobien du robot PUMA par la même méthode que celle de Robot Cloos . Les articulations de robot sont toutes de type rotoïde autour de l'axe z.

$$J = \begin{bmatrix} -n_{24} & -C_1 S_2 * (a_2 + a_3 * C_3) & -a_3 * (C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3) & 0 & 0 \\ n_{14} & -S_1 S_2 * (a_2 + a_3 * C_3) & -a_3 * (S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3) & 0 & 0 \\ 0 & C_2 * (a_2 + a_3 * C_3) & -a_3 * S_2 S_3 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & -C_1 S_2 & C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & S_4 (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) + C_1 S_2 C_4 \\ 0 & -C_1 & -S_1 S_2 & S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 & S_4 (S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) + S_1 S_2 C_4 \\ 1 & 0 & C_2 & S_2 S_3 & S_2 C_3 S_4 - C_2 C_4 \end{bmatrix}$$

Les vitesses dans l'espace opérationnel :

$$\text{On a : } \dot{X} = J(q)\dot{q}$$

$$\dot{X} = -n_{24}\dot{\theta}_1 + c_1(-a_2 s_2 + a_3 c_{23})\dot{\theta}_2 + (a_3 c_1 c_{23})\dot{\theta}_3 . \dot{Y} = n_{14}\dot{\theta}_1 + s_1(-a_2 s_2 + a_3 c_{23})\dot{\theta}_2 + (a_3 s_1 c_{23})\dot{\theta}_3 ;$$

$$\dot{Z} = (a_2 c_2 + a_3 s_{23})\dot{\theta}_2 + (a_3 s_{23})\dot{\theta}_3$$

$$w_X = s_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + (c_1 s_{23})\dot{\theta}_4 + (-c_1 s_4 c_{23} + s_1 c_4)\dot{\theta}_5 + (s_5(c_1 c_4 c_{23} + s_1 s_4) + c_5 c_1 s_{23})\dot{\theta}_6$$

$$w_Y = -c_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + (s_1 s_{23})\dot{\theta}_4 + (-s_1 s_4 c_{23} + c_1 c_4)\dot{\theta}_5 + (s_5(s_1 c_4 c_{23} + c_1 s_4) + c_5 s_1 s_{23})\dot{\theta}_6$$

$$w_Z = \dot{\theta}_1 + (-c_{23})\dot{\theta}_4 + (-s_4 s_{23})\dot{\theta}_5 + (c_4 s_5 s_{23} - c_5 c_{23})\dot{\theta}_6$$

Listing des programmes sous MATLAB

1- programme pour calculer la matrice de transformation homogène et la matrice jacobienne et l'inverse de la matrice jacobienne :

....la matrice de transformation homogène(homogenous transformation).....

.....fkine(forwardkinematic).....

clear all,clc

syms a2 a3 d tita1 tita2 tita3 tita4 tita5

T01= [cos(tita1) 0 sin(tita1) 0 ;

sin(tita1) 0 -cos(tita1) 0;

0 1 0 0;

0 0 0 1]

T12= [cos(tita2) -sin(tita2) 0 a2*cos(tita2);

$$\begin{bmatrix} \sin(\text{tita2}) & \cos(\text{tita2}) & 0 & a2*\sin(\text{tita2}); \\ 0 & -1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix}$$

$$T02=T01*T12$$

Simple (T02) ;

$$T23= \begin{bmatrix} \cos(\text{tita3}) & 0 & \sin(\text{tita3}) & a3*\cos(\text{tita2}); \\ \sin(\text{tita3}) & 0 & -\cos(\text{tita3}) & a3*\sin(\text{tita2}); \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix}$$

$$T03=T02*T23$$

Simple(T03)

$$T34= \begin{bmatrix} \cos(\text{tita4}) & 0 & \sin(\text{tita4}) & 0; \\ \sin(\text{tita4}) & 0 & -\cos(\text{tita4}) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix}$$

$$T45= \begin{bmatrix} \cos(\text{tita5}) & -\sin(\text{tita5}) & 0 & 0; \\ \sin(\text{tita5}) & \cos(\text{tita5}) & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 1 & d; \\ 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix}$$

$$T35=T34*T45$$

Simple(T35)

$$T06=T03*T35$$

simple(T05)

$$T06=T03*T36$$

simple(T06)

$$T5E= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 1 & l4; \\ 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix}$$

$$T0E=T05*T5E$$

simple(T0E)

$$T0E = [(\cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) - \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot \cos(\text{tita5}) - \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot \cos(\text{tita5}) + (\cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita3}) + \sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita5}), -(\cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) - \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot \sin(\text{tita5}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot \sin(\text{tita5}) + (\cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita3}) + \sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita3})) \cdot \cos(\text{tita5}), (\cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) - \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita4}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}), ((\cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) - \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita4}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}))^2 + (\cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) - \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot d + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot d + \cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot a^3 \cdot \cos(\text{tita3}) - \sin(\text{tita1}) \cdot a^3 \cdot \sin(\text{tita3}) + \cos(\text{tita1}) \cdot a^2 \cdot \cos(\text{tita2})] \\
[(\sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot \cos(\text{tita5}) - \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot \cos(\text{tita5}) + (\sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita3}) - \cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita5}), -(\sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot \sin(\text{tita5}) + \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot \sin(\text{tita5}) + (\sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita3}) - \cos(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita3})) \cdot \cos(\text{tita5}), (\sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita4}) + \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}), ((\sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita4}) + \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}))^2 + (\sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) + \cos(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita3})) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot d + \sin(\text{tita1}) \cdot \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot d + \sin(\text{tita1}) \cdot \cos(\text{tita2}) \cdot a^3 \cdot \cos(\text{tita3}) + \cos(\text{tita1}) \cdot a^3 \cdot \sin(\text{tita3}) + \sin(\text{tita1}) \cdot a^2 \cdot \cos(\text{tita2})] \\
[\sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot \cos(\text{tita5}) + \cos(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot \cos(\text{tita5}) + \sin(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita3}) \cdot \sin(\text{tita5}), -\sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot \sin(\text{tita5}) - \cos(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot \sin(\text{tita5}) + \sin(\text{tita2}) \cdot \sin(\text{tita3}) \cdot \cos(\text{tita5}), \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) \cdot \sin(\text{tita4}) + \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}), (\sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) \cdot \sin(\text{tita4}) - \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}))^2 + \sin(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita3}) \cdot \sin(\text{tita4}) \cdot d - \cos(\text{tita2}) \cdot \cos(\text{tita4}) \cdot d + \sin(\text{tita2}) \cdot a^3 \cdot \cos(\text{tita3}) + a^2 \cdot \sin(\text{tita2})] \\
[0, \quad 0, \quad 0, \quad 1]$$

Le programme pour dessin de la variation des angles en fonction de temps

Et la trajectoire

```

t=0:0.6:1;
tita1=0.5*t.^3+44.5*t;
tita2=0.5*t.^3+59.5*t;
tita3=0.5*t.^3+29.5*t;
Plot(t, tita1)
Plot(t, tita2)
Plot(t, tita3)
t4=0;
t5=0;
t6=0;

```



```
a2=0.7;
a3=0.5;
d=0.4;
px= cos(tita1).*(cos(tita2).*(a2+a3*cos(tita3)))-a3*sin(tita1).*sin(tita3);
py= sin(tita1).*(cos(tita2).*(a2+a3*cos(tita3)))+a3*cos(tita1).*sin(tita3);
plot(px,py)
pz= sin(tita2).*(a2+a3*cos(tita3));
plot(py,px);
plot(pz,py);
plot(pz,px);
```