

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد دحلب - البليدة-

Université SAAD DAHLEB -BLIDA-

كلية علوم الهندسة

Faculté des Sciences de L'Ingénieur

معهد الاكترونيك

INSTITUT D'ELECTRONIQUE

مذكرة ماجستير

Thèse de Magister

Présenté par : Bouzid Rafika

Option contrôle

**Application des techniques de contrôle à structure variable flou
pour assurer un suivi robuste de trajectoire
d'un robot mobile non holonome**

Membres de jury de la soutenance :

Mr H.Salhi	Maître de conférence (U.Blida)	Président
Mr A.Guessoum	Professeur (U.Blida)	Examineur
Mr M.Hamerlain	Maître de recherche (CDTA)	Examineur
Mr B. Kazed	Chargé de cours (U.Blida)	Examineur
Mr R.Ouiguini	Maître de recherche (CDTA)	Promoteur

Année universitaire : 2003/2004

Remerciement

Ce mémoire présente la synthèse des travaux de recherche que j'ai effectué en collaboration entre le département d'électronique de l'université *Saad Dahleb* de *Blida* et le laboratoire de robotique et d'intelligence artificielle de centre de développement des technologies avancées (CDTA). Mon intention dans ce qui suit de remercier un certain nombre de personnes qui mon aidé pendant la réalisation de ma thèse.

Je remercie avant tous mon directeur de thèse *Mr Rachid Ouiquini* pour avoir accepté de m'encadré. Ses remarques judicieuses ainsi que l'intérêt qu'il a porté à ce travail m'ont permis de mener à bien ce travail. J'exprime ma gratitude à *Mr Yamine Sellami* pour son aide efficace et precieuse, sa disponibilité et ses encouragements.

Mes remerciements vont également aux membres de jury *Mrs H. Salhi, A. Guessoum, B. Kazed* et *M. Hamerlain* pour avoir acceptés de juger mon travail et pour leur participation à la soutenance.

Mes remerciements à ma mère, mes frères et sœurs pour leur soutien, confiance et patience. Sans oublier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, en particulier *Melle Taoues* responsable de la bibliothèque du département d'électronique de Blida et *Mme Khélalfa* chargée de cours au département de TCTSEI et *Mr Bencherif* du CDTA.

Ce mémoire est dédié à :

Toute ma famille, en particulier ma mère, mes frères et mes sœurs.

Mes amies, et tous ceux qui ont participé à l'aboutissement de ce travail.

Bouzid Rafika

Résumé

Ce mémoire traite le problème de poursuite de trajectoire d'un robot mobile non holonome, muni de roues comme organes d'appui et de locomotion.

Cette classe de systèmes mécaniques est caractérisée par une contrainte cinématique appelée "Contrainte non holonome", qui se traduit mathématiquement par des équations différentielles non intégrables, ce qui rend obsolète l'utilisation des algorithmes de contrôle dédiés aux systèmes holonomes.

Dans ce contexte, nous avons opté pour une modélisation qui prend en compte la dynamique du robot mobile. Ensuite, nous avons cherché une loi de commande qui lui permet de suivre une trajectoire de référence.

Pour arriver à ce but, nous avons considéré la commande à structure variable par mode glissant, connue par sa robustesse vis-à-vis des perturbations. Les performances globales de la commande ont été améliorées en introduisant la logique floue, vu sa grande capacité de réglage. Ce qui nous a permis de développer les deux extensions suivantes :

- La commande floue à structure variable par mode glissant à bande limitée.
- La commande floue à structure variable par mode glissant à deux entrées et une sortie (TISO).

Les résultats de simulation montrent l'efficacité et la robustesse des deux commandes et permet de distinguer les améliorations apportées par chaque extension.

Mots clés : robot mobile à roues, non holonomie, commande à structure variable, mode glissant, contrôleur flou par mode glissant.

Abstract

This work deals with the problem of a command law for tracking a nonholonomic mobile robot having wheels as a mechanism of support and locomotion. This class of mechanical systems is characterized by a kinematic constraint called "nonholonomic constraint", which is expressed by a mathematical set of non-integrable differential equations. Thus, it is not feasible to use control algorithms dedicated to the holonomic systems.

In this context, we have considered a model, which takes into account the dynamic of the mobile robot. Then, we looked for a control law, which allows it to track a reference trajectory.

To achieve this goal, a sliding mode controller structure is considered, which is well known by its robustness against disturbances.

We improved the present work in introducing fuzzy controller to have a great capacity of adjustment, which gave rise to:

- The sliding mode fuzzy controller by band layer.
- The sliding mode fuzzy controller with two input –single output (TISO).

The simulation results have proven effectiveness and robustness and allowed to distinguish between the improvements brought by each extension.

Key words: wheeled mobile robot, nonholonomic, variable structure control, sliding mode, sliding mode fuzzy controller.

."Contrainte non holonome"

non holonome

.()



non holonome

:

Table des matières

Remerciement	
Dédicace	
Résumé	
Table des matières	i
Introduction	1

Chapitre I : Etude des robots mobiles à roues

I.1. La structure d'un robot mobile.....	4
I.1.1. La fonction perception et décision.....	5
I.1.2. La fonction localisation	5
I.1.3. La fonction locomotion	5
I.2. La représentation d'un robot mobile à roues	6
I.2.1. La représentation en coordonnées cartésienne	7
I.2.1.1. Description des roues	7
I.2.1.1.1. Les roues conventionnelles.....	7
I.2.1.1.2. Les roues suédoises	9
I.2.1.2. Conditions de la mobilité du robot mobile à roues.....	10
I.2.1.3. Degré de mobilité et degré de directivité.....	11
I.2.1.4. Structure non singulière d'un robot mobile à roues	12
I.2.1.5. Les différents types de robots mobiles	13
I.2.1.6. La modélisation cinématique.....	14
I.2.1.6.1. Modèles cinématiques des robots de types (2,0) et (1,1).....	15
I.2.2. La représentation dans un repère de Frenet.....	17
I.2.2.1. La modélisation du robot mobile de type (2,0)	17
I.2.2.2. La modélisation du robot mobile de type (1,1)	18
I.3. La contrainte de non holonomie.....	18
I.4. La modélisation dynamique	20
I.4.1. Le formalisme de Lagrange.....	21
I.5. Les modèles de commande	24
I.6. Conclusion	25

Chapitre II : Techniques de commande en robotique mobile

II.1. Rappel sur la commande en boucle ouverte et fermée.....	26
II.2. Exemples d'outils de commande pour des robots mobiles	28
II.2.1. La méthode du linéarisé tangent.....	28
II.2.2. La méthode directe de Lyapunov	30
II.2.3. Théorème de LaSalle et lemme de Barbalat.....	31
II.2.4. Retour d'Etat Linéarisant	33
II.3. Commentaire sur les lois de commande appliquées	35
II.4. Robustesse des systèmes bouclés.....	35
II.5. Le besoin d'élaborer des lois de commande robuste en robotique mobile	36
II.6. Système robuste et stabilité asymptotique robuste	37
II.7. Conclusion	38

Chapitre III : Commande à structure variable

III.1. Configuration des systèmes à structure variable.....	39
III.2. Le régime glissant	40
III.2.1. Régime glissant idéal.....	41
III.2.2. Régime glissant réel	41
III.3. Propriétés du contrôleur par mode glissant.....	41
III.3.1. La réponse complète du contrôleur par mode glissant	41
III.3.2. Les caractéristiques du mode glissant	42
III.4. La conception du contrôleur par mode glissant	42
III.4.1. Le choix de la surface de glissement	43
III.4.1.1. La méthode de Slotine	43
III.4.2. Condition d'existence du mode de glissement	44
III.4.2.1. La fonction de commutation directe.....	44
III.4.2.2. La fonction de Lyapunov.....	44
III.4.3. Conception de la loi de commande	45
III.4.3.1. La commande équivalente	45
III.4.3.2. L'interprétation de la commande équivalente	45
III.5. Le phénomène de chattering	46
III.6. La réduction du phénomène de chattering	47
III.6.1. L'approche par commande continue	47
III.6.1.1. La fonction de saturation	48
III.6.1.2. La fonction continue.....	48
III.7. L'application de la commande par mode glissant en robotique mobile	49
III.7.1. La modélisation du problème de la poursuite.....	49
III.7.1.1. Formulation du problème	49
III.7.1.2. Modélisation de l'erreur de configuration.....	51
III.8. La commande des robots mobiles de type (2,0) et (1,1).....	52
III.8.1. La conception du contrôleur par mode glissant.....	52
III.8.2. L'effet des perturbations.....	53
III.9. Les résultats de simulation	54
III.10. Conclusion.....	55

Chapitre IV : Commande floue par mode glissant

IV.1. Généralités sur la logique floue	79
IV.1.1. La théorie des sous ensembles flous.....	79
IV.1.2. Fonction d'appartenance.....	80
IV.1.3. L'univers de discours	81
IV.1.4. Propriétés des ensembles flous	81
IV.1.5. Les opérations dans les ensembles flous	82
IV.1.6. Les variables linguistiques	83
IV.1.7. L'inférence floue Si-Alors (If-Then).....	83
IV.1.8. Les règles d'inférence floues.....	84
IV.2. Structure d'une commande floue	84
IV.2.1. La base de règles et définitions	84
IV.2.1.1. Partition floue	85
IV.2.1.2. Base de règles	85
IV.2.2. Interface de fuzzification.....	85
IV.2.3. Le mécanisme d'inférence.....	86

IV.2.4. L'interface de défuzzification.....	87
IV.3. La non linéarité du contrôleur flou	87
IV.4. Les types de contrôleurs flous.....	87
IV.4.1. Le contrôleur PID flou.....	88
IV.4.2. Le contrôleur flou par mode glissant.....	90
IV.4.2.1. Rappel sur le contrôleur par mode glissant avec bande limitée	90
IV.4.2.2. La forme diagonale du contrôleur flou	90
IV.4.2.3. Description analytique d'un contrôleur flou de forme diagonale.....	91
IV.4.2.4. Comparaison entre le contrôleur par mode glissant et le contrôleur flou de forme diagonale	92
IV.5. Le contrôleur flou par mode glissant à bande limitée (CFMG à BL)	93
IV.6. Description du contrôleur flou par mode glissant TISO	95
IV.7. Résultats de simulation	97
IV.8. Conclusion	99
Conclusion générale.....	127
Bibliographie	129
Annexe	
A.1. Tableau des valeurs des paramètres des robots mobiles utilisées en simulation	A-1
A.2. Calcul du moment d'inertie de la plate-forme des robots mobiles.....	A-1
A.3. Les signaux de perturbations utilisés pour tester la robustesse de la loi de commande.....	A-2
B.1. Notions relatives à la stabilité des systèmes	B-1
B.2. Théorèmes de Lyapunov	B-2
B.3. Théorème de LaSalle et Lemme de Barbalat	B-4
B.4. Retour d'état linéarisant.....	B-5
B.4.1. Linéarisation Entrée/Sortie des systèmes SISO.....	B-5
B.4.2. Outils mathématiques	B-6
B.4.3. Application de l'algorithme du retour d'état linéarisant pour le problème de suivi de ligne droite.....	B-7
B.4.4. Méthode des couples calculés en robotique	B-9
B.4.5. Le difféomorphisme	B-10
C.1. Description graphique de la commande à structure variable	C-1
C.2. Avantages et inconvénients de la VSC	C-2
C.3. Calcul de la commande équivalente du robot mobile de type (2,0) :.....	C-2
C.3.1. Preuve du lemme	C-3
D.1. Quelques fonctions d'appartenance utilisées dans la logique floue :.....	D-1
D.2. Description du contrôleur flou par mode glissant à bande limitée	D-2
D.3. Description du contrôleur flou par mode glissant à deux entrées et une sortie.....	D-2
E.1. Poursuite de trajectoire du robot de type (2,0).....	E-3
E.1.1. Poursuite d'une trajectoire linéaire	
E.1.2. Poursuite d'une trajectoire circulaire	
E.1.3. Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale	
E.1.4. Poursuite d'une trajectoire de référence respectant la contrainte du robot	
E.2. Poursuite de trajectoire du robot de type (1,1).....	E-16
E.2.1. Poursuite d'une trajectoire linéaire	
E.2.2. Poursuite d'une trajectoire circulaire	
E.2.3. Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale	
E.2.4. Poursuite d'une trajectoire de référence respectant la contrainte du robot	

2002 05 23

Introduction

Les robots mobiles occupent une place particulière en robotique. Leur intérêt réside dans leur mobilité qui leur ouvre des applications dans de nombreux domaines tels que l'industrie nucléaire, militaire, de nettoyage, l'aide aux handicapés physiques et aux non voyants ...etc. Le milieu dans lequel évolue le mobile oriente très fortement la mécanique nécessaire pour le mouvement. Ainsi, pour le déplacement d'un robot sur une surface plane, les robots mobiles à roues sont très répandus actuellement. La raison est la simplicité de la conception du mécanisme qui est due essentiellement à la disponibilité et la variété aussi bien des modes de propulsion que des organes d'appui sur le milieu. En ce qui concerne la diversité des organes d'appui, on dénombre plusieurs types de roues classées dans deux principales catégories : la classe des roues conventionnelles (elle regroupe les roues fixes, les roues orientables centrées et les roues orientables non centrées) et la classe des roues suédoises ou universelles.

Les différentes combinaisons des types de roues assurent une liberté d'imagination de l'architecture du robot mobile et par conséquent une stratégie de commande spécifique. Néanmoins, il faut noter que cette architecture n'est pas forcément acceptable du point de vue pratique. Cela se justifie par les restrictions sur la mobilité du robot introduite par les contraintes imposées par les roues. L'introduction des notions du degré de mobilité et degré de directivité permet de classer tous les robots mobiles à roues ayant une structure non singulière dans seulement cinq classes. Quelque soit la classe d'appartenance d'un robot, l'acte principal de ce dernier peut être soit une stabilisation vers un point fixe ou la poursuite d'une trajectoire de référence ou encore un suivi d'un chemin.

La question qui se pose alors est comment faire exécuter des mouvements pour un robot appartenant à une des cinq classes, via la commande des actionneurs dont t'il est équipé?. De façon générale, ceci est difficile à mettre en œuvre pour deux raisons, que nous résumons comme suit :

◆ *La nature du système de locomotion :*

Un robot mobile à roues est soumis lors de son déplacement à la condition de roulement sans glissement imposée par les roues et qui a pour effet de contraindre le robot à se déplacer tangentiellement à sa direction principale. Cette contrainte, connue sous le nom de contrainte non holonome ne permet pas au robot d'effectuer des déplacements latéraux. Ce qui nécessite dans plusieurs cas de nombreuses manœuvres pour qu'il puisse se mouvoir dans la direction désirée, cette tâche devient plus pénible lorsque l'environnement où le robot évolue est parsemé d'obstacles [Lau01][Agu97].

◆ *La dérive du robot mobile lors de son déplacement :*

Dû à la possibilité de glissement des roues sur le sol lors de son déplacement, la technique d'odométrie qui consiste à mesurer l'angle de rotation de chacune des roues, ne permet pas de déterminer de manière précise la position d'un robot mobile, car lors d'un glissement il se produit un écart croissant entre la trajectoire désirée et la trajectoire réellement effectuée par

le robot. Aussi, les autres méthodes de localisation introduisent des erreurs non négligeables dans l'estimation de la position du robot [Lau01][Pru88][Agu97].

Pour ces deux raisons, il est nécessaire d'élaborer des lois de commandes robustes en boucle fermée sur l'état courant du robot permettant de suivre un chemin planifié ou une trajectoire désirée. La robustesse est la sensibilité du système en boucle fermée aux effets négligés dans le modèle nominal utilisé lors de la conception. Ces effets peuvent être des perturbations des dynamiques non modélisées, ...etc. Le système en boucle fermée doit être insensible à ces effets, dans le sens qu'ils n'influent pas négativement sur la stabilité du système.

Parmi les méthodes reconnues robustes, nous trouvons le contrôle par mode glissant [Col94][Ham93] et le contrôle flou [Dri92][Pal97]. Le principe de la commande par mode glissant consiste à diviser l'espace d'état en deux demi-surfaces, puis déterminer la distance à la surface de glissement. L'existence de la surface de glissement est garantie en respectant une certaine fonction de Lyapunov et la loi de contrôle est formulée à partir d'une condition de glissement. Les performances de cette méthode sont obtenues au prix d'une très grande activité de commande, car du point de vue théorique il faut appliquer au système un commutateur à vitesse infinie, ce qui fait apparaître un phénomène appelé "*phénomène de broutement ou chattering*". Pratiquement, il n'existe aucun actionneur capable de produire des commutations à ces vitesses.

Afin de résoudre ce problème, plusieurs extensions de la commande par mode glissant sont proposées [Ham93]. Nous citons à titre d'exemple la commande par mode glissant à bande limitée qui permet de lisser la commande tout en assurant que le système bouclé reste dans cette bande. L'inconvénient de cette méthode est que la bande limitée est définie de façon expérimentale. Ce qui rend l'élimination du chattering dépendant de la largeur de la bande choisie et ceci réduit les performances de cette commande.

Par contrôleur flou, nous voulons dire une loi de commande décrite par une base de connaissances constituée de règles de type (Si...Alors) avec des prédicats vagues et un mécanisme d'inférence flou. La base de règles est la partie essentielle du contrôleur flou, elle est formée par un ensemble de règles qui décrit la relation entre l'entrée et la sortie du contrôleur flou [Ron95].

Le mode de fonctionnement du contrôleur flou ressemble beaucoup à celui du contrôleur par mode glissant, où les règles du contrôleur flou pour un système d'ordre deux, sont déduites du plan de phase qui est divisé en deux demi-plans par une ligne de commutation. La valeur absolue du gain de la commande croit à partir de cette ligne de commutation, ce qui permet d'appliquer une commande spécifique à chaque instant [Ron95] [Dri92][Pal97]. Outre la robustesse de ces deux commandes, nous citons une autre caractéristique qui est la possibilité d'être combinée avec d'autres types de commandes. Dans ce contexte plusieurs travaux sont publiés [Mey92][Li97][Ben98][Hsu98] et c'est dans ce cadre que se situe notre travail.

Contribution de la thèse

Nous avons élaboré et étudié la loi de commande floue par mode glissant pour résoudre le problème de la poursuite de trajectoire pour un robot mobile non holonome et ceci en incorporant l'effet du modèle dynamique.

La loi de commande développée est constituée de deux parties, la partie de la commande dynamique et la partie du contrôleur flou qui simule la partie discontinue de la commande par mode glissant. Le contrôleur flou est constitué de deux entrées et une sortie. Chaque entrée du contrôleur flou représente une distance dans le plan de phase [Oui03].

Nous avons testé la nouvelle commande en simulation sur deux types de robots mobiles à roues, un robot unicycle et un robot tricycle. La différence entre les deux robots repose sur le type de roues, ce qui permet d'un côté d'imposer une stratégie de commande spécifique et d'un autre côté de constater l'effet de la non holonomie sur l'allure de la trajectoire suivie par un robot mobile afin d'atteindre la trajectoire désirée.

Organisation de la thèse

La thèse est présentée en quatre chapitres :

L'objectif du premier chapitre, est l'étude des robots mobiles à roues. Nous présentons d'abord les contraintes cinématiques imposées par les types de roues utilisés. Puis nous déduisons les modèles cinématiques pour les robots de types (2,0) et (1,1). Ensuite nous établissons les modèles dynamiques des deux robots en utilisant le formalisme de Lagrange.

Le deuxième chapitre présente quelque technique de commande utilisée en robotique mobile, mettant en œuvres différentes techniques de contrôle non-linéaire. Les lois de commande sont déterminées pour qu'un robot mobile suive un chemin désiré. Ces lois sont établies pour le modèle cinématique du robot mobile en tenant compte de sa contrainte de roulement sans glissement. Des critiques sont apportées aux différentes méthodes de commande justifiant le besoin de concevoir une loi de commande robuste.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la commande à structure variable par mode glissant. Nous présentons les différentes étapes à respecter pour la synthèse de la loi de commande. Par la suite, nous considérons le modèle dynamique des robots décrits dans le premier chapitre pour définir la commande en boucle fermée par mode glissant. Des résultats de simulation sont donnés à la fin du chapitre pour montrer la robustesse de la commande. Nous constaterons la différence entre la commande par mode glissant et la commande par mode glissant à bande limitée qui réside dans la capacité de cette dernière à éliminer ou à réduire le chattering.

Le dernier chapitre traite la commande par mode glissant flou. Après la présentation de la théorie de la logique floue, nous déterminons les ressemblances entre une commande floue et celle par mode glissant, l'exploitation des points communs joue un rôle important dans la conception de la nouvelle loi de commande. Les résultats de simulation concernant cette dernière ainsi que des commentaires sont donnés à la fin du chapitre. D'autres résultats pour tester cette commande sont présentés dans l'annexe E, où les deux robots mobiles sont contraints de suivre différentes trajectoires de référence telle qu'une trajectoire linéaire, une trajectoire circulaire, une trajectoire sinusoïdale et une trajectoire de référence qui respecte la contrainte non holonome du robot (donc une trajectoire réalisable par le robot mobile).

Nous terminons cette étude par une conclusion générale.

Etude des robots mobiles à roues

Chapitre I

Étude des robots mobiles à roues

Le mot robot tire sa racine du terme bulgare *robu* signifiant serviteur et aussi de l'expression tchèque *robot* qui se traduit par travaux forcés. Ce mot a été popularisé grâce à la pièce théâtrale « Rossum's Universal Robot » où l'écrivain a donné le nom robot aux petits êtres artificiels qui jouaient dans la pièce et qui répondaient parfaitement aux instructions de leur maître.

La recherche de la définition du mot robot dans le dictionnaire [Bib96] a abouti aux trois résultats suivants :

1. Dans les œuvres de science fiction, machine à l'aspect humain, capable de se mouvoir, d'exécuter des opérations et de parler.

2. Appareil automatique capable de manipuler des objets ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe ou modifiable.

3. Bloc moteur électrique combinable avec divers accessoires destinée à différentes opérations culinaires.

Les robots peuvent être classés en deux principales catégories qui sont la catégorie des robots manipulateurs et celle des robots mobiles. Les robots manipulateurs ou robots à poste fixe, c.-à-d. dont la base est rigidement fixée au sol, ont le pouvoir de manipuler les objets. Ils sont intégrés dans des unités de production pour effectuer des tâches répétitives. Les robots mobiles quant à eux sont des machines dotées de moyens de locomotion qui les rendent mobiles, ils sont appelés à se déplacer dans des environnements de travail pour effectuer des tâches qui leur sont affectées, ce qui permet d'avoir d'autres utilisations que celle des robots manipulateurs. Ainsi l'objectif principal d'un robot mobile consiste à réaliser un mouvement reliant un point source à un point de destination. Bien que ce rôle paraît simple a priori et réalisable dans tous les cas, la réalité n'est pas aussi évidente vu les contraintes rencontrées (tels que le type de roues, la nature du terrain, etc.). Notre objectif dans ce chapitre est d'illustrer les problèmes, les conséquences et les solutions pour garantir l'exécution d'une trajectoire pour une classe particulière de robots mobiles qui est celle des robots mobiles à roues.

I.1. La structure d'un robot mobile

Les tâches principales visées pour un robot mobile sont la recherche et l'exécution de trajectoires. Ainsi il est caractérisé par trois grandes fonctions qui sont [Coi92][Pru88] :

- ❖ La fonction perception et décision.
- ❖ La fonction localisation.
- ❖ La fonction locomotion.

I.1.1. La fonction perception et décision

C'est par le biais de la perception qu'un robot appréhende l'état de son environnement et peut donc y adapter la résolution et l'exécution de tâches pour mener à bien une mission. Dans le contexte de la navigation, nous pouvons constater l'intervention évidente de la fonction de perception. Nous citons à titre d'exemple la génération de déplacement réactive où il est nécessaire d'utiliser des informations locales sur l'environnement pour en déduire les consignes de locomotion à appliquer, alors que dans les techniques planifiées des représentations plus globales de l'environnement deviennent indispensables [Gal02]. Pratiquement, la perception est le rôle des capteurs extéroceptifs, dont le choix est dicté par le type de tâches à exécuter. Après, le traitement des informations fournies par les capteurs, le robot doit prendre les décisions convenables à la situation où il se trouve, ces réactions sont soit de type adaptatif (demande de complément d'informations) soit de type ordre générique (arrêt immédiat) ou de type sans réaction (poursuite de tâche en cours) [Pru96].

I.1.2. La fonction localisation

Le robot mobile nécessite d'être localisé à chaque instant, c'est-à-dire de connaître précisément sa position et son orientation durant sa progression par rapport à un repère fixe connu (localisation absolue) ou par rapport à un repère qu'il avait établi avant son dernier déplacement (localisation relative).

La localisation absolue est obtenue par la mise en place dans l'univers de balises à des emplacements repérés d'avance. Ces balises peuvent être des réflecteurs passifs si le système de mesure embarqué est par exemple un capteur infrarouge, comme ils peuvent être des marques au sol ou des mires sur les murs détectées par caméras. Ils peuvent être également des balises actives lumineuses, etc. La localisation relative est caractérisée par la faible distance à évaluer comprise entre la position précédente et la position actuelle du robot, elle est réalisée en utilisant des odomètres ou les capteurs inertiels (les gyroscopes et les accéléromètres). La précision de localisation est limitée à cause des erreurs qui peuvent exister tels que les défauts de planéité du sol, le glissement et la discrétisation des calculs [Pru88].

I.1.3. La fonction locomotion

Le système de locomotion peut se décomposer en deux parties confondues ou non [Coi92] :

- ❖ Celle réalisant l'appui vis-à-vis du milieu dans lequel le robot se déplace.
- ❖ Celle réalisant la propulsion qui inclut les moteurs et les mécanismes conduisant au déplacement.

Les modes de locomotion sont diverses, suivant que le véhicule doit se déplacer sur une surface ou bien dans un fluide ou dans le vide. Les véhicules de surface correspondent à une large classe d'utilisation pratique, pour cette catégorie nous citons :

Les véhicules utilisant le même organe d'appui et de propulsion

C'est le cas général des véhicules à roues ou à chenilles qu'on peut encore séparer en deux catégories :

Ceux dont les éléments de propulsion sont à direction fixe

Les véhicules à roues ou à chenille dont le changement de direction est assuré par la différence de vitesses des propulseurs latéraux appartiennent à cette catégorie (figure 1.1.a).

Ceux dont les éléments de propulsion sont orientables

C'est le cas de la voiture automobile, dont on fixe le rayon de courbure du déplacement avant d'accélérer (figure 1.1.b).

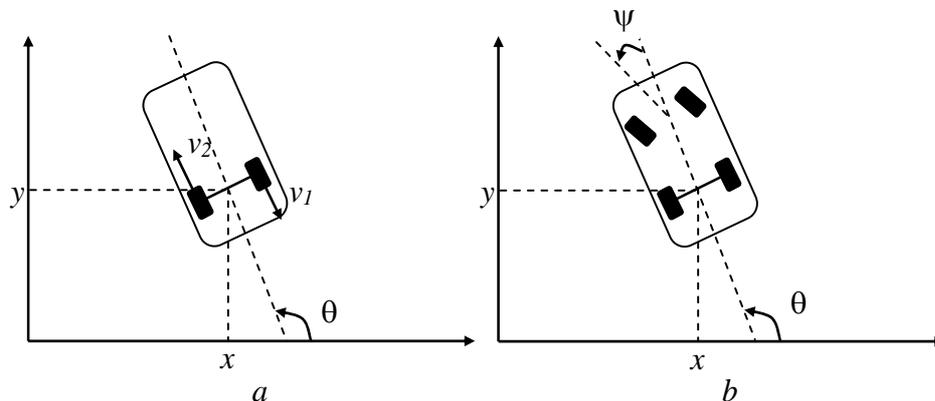


Figure 1.1 : Véhicule dont les éléments de propulsion

a) sont à direction fixe

b) sont à direction orientable

Les véhicules à appui non gravitaire

Ces véhicules diffèrent par le fait de se maintenir sur des surfaces non horizontales en créant sous eux une dépression. Cette technique est très utilisée pour parcourir des surfaces peu accidentées sous l'eau.

Les véhicules à locomotion articulée

Dans un milieu hostile terrestre ou sous-marin, les surfaces à parcourir sont très irrégulières, ce qui rend le déplacement d'un robot à roues ou à chenille une tâche délicate. La solution dans ce cas est d'utiliser des mobiles ayant des points d'appui discrets, c'est le cas des robots à pattes.

I.2. La représentation d'un robot mobile à roues

Un robot mobile à roues est un véhicule à roues capable de se mouvoir. Dans ce qui suit nous considérons que le robot mobile étudié est constitué d'une plate-forme montée sur des roues non déformables et qui peut se déplacer sur un plan horizontal. La position du robot peut être déterminée soit en coordonnées cartésiennes [Cam96][Lag98], soit dans un repère de Frénet [Lau01].

I.2.1. La représentation en coordonnées cartésiennes

La position du robot dans le plan cartésien est décrite comme le montre la figure 1.2 par : une base orthonormale inertielle $\{\vec{O}, \vec{I}_1, \vec{I}_2\}$ fixée dans le plan de mouvement, un point de référence P ainsi qu'une base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ de la plate-forme. La position du robot est alors complètement spécifiée par trois variables : x, y, θ .

x, y sont les coordonnées du point de référence P dans la base inertielle tel que :

$$\vec{OP} = x\vec{I}_1 + y\vec{I}_2$$

θ est l'orientation de la base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ par rapport à la base $\{\vec{I}_1, \vec{I}_2\}$.

La position du robot est décrite par le vecteur $\xi = (x \ y \ \theta)^T$ et la matrice de transformation de la base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ vers la base $\{\vec{I}_1, \vec{I}_2\}$ est défini par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

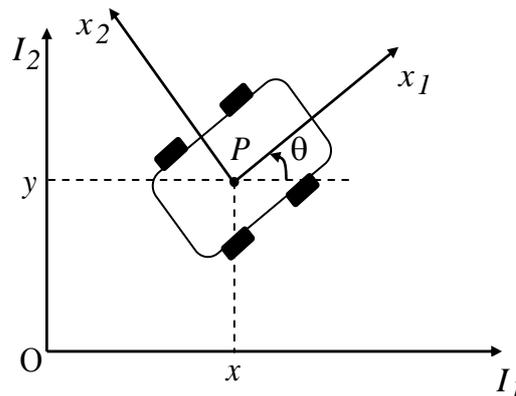


Figure 1.2 : Coordonnées cartésiennes de la position d'un robot mobile

I.2.1.1. Description des roues

Les roues utilisées en robotique mobile peuvent être classées en deux catégories : les roues conventionnelles et les roues suédoises [Cam96]. Avant de décrire en détail les principales caractéristiques de chaque type de roues, nous considérons dans ce qui suit, que durant le déplacement du robot dans le plan, chaque roue reste verticale et que la roue tourne autour de son axe horizontal dont l'orientation par rapport à la plate-forme peut être fixe ou variable. Aussi, nous supposons que le contact, entre la roue et la surface de déplacement, est réduit à un point ponctuel du plan.

I.2.1.1.1. Les roues conventionnelles

Pour ce type de roues, le contact entre la roue et le sol est supposé satisfaire la condition de pur roulement sans glissement. Ceci veut dire que la vitesse au point de contact est nulle. Par conséquent, les composantes de la vitesse parallèle et orthogonale au plan de la roue sont

nulles. Les roues fixes, les roues orientables centrées et les roues orientables non centrées appartiennent à cette classe.

a) Les roues fixes

Le centre de la roue noté A , est un point fixe de la plate-forme (figure 1.3). La position de A dans la base $\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\}$ est définie en coordonnées polaires par la distance PA et l'angle α . L'orientation du plan de la roue par rapport à PA est représentée par l'angle constant β . L'angle de rotation de la roue de rayon r autour de son axe horizontal est noté $\varphi(t)$.

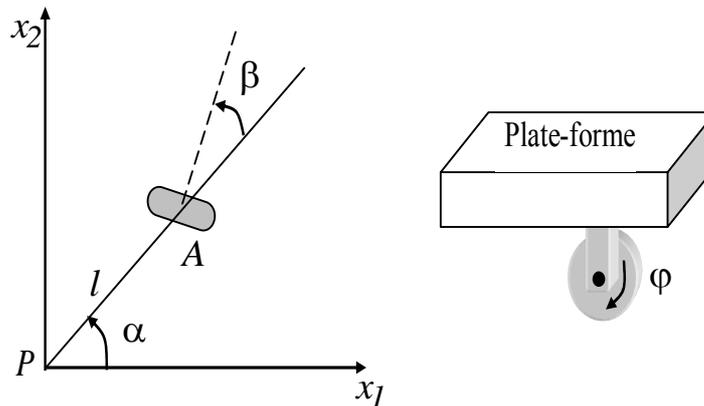


Figure 1.3 : La représentation des roues conventionnelles fixes et orientables centrées

Par cette description, les composantes de la vitesse sont déduites et nous obtenons les deux contraintes suivantes :

➤ La contrainte de pur roulement

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos(\beta)] \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.1)$$

➤ La contrainte de non glissement

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)] \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} = 0 \quad (1.2)$$

b) Les roues orientables centrées

Une roue est de type orientable centré si le mouvement du plan de la roue par rapport à la plate-forme est une rotation autour de l'axe verticale passant par le centre de la roue (figure 1.3). La description de cette roue est la même que celle d'une roue fixe, sauf que l'angle β n'est pas constant, mais variable dans le temps.

Les expressions des contraintes de pur roulement sans glissement sont les mêmes que (1.1) et (1.2), sauf que l'angle β est fonction du temps et devient $\beta(t)$.

$$[-\sin(\alpha + \beta(t)) \quad \cos(\alpha + \beta(t)) \quad l \cos(\beta(t))] \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.3)$$

$$[\cos(\alpha + \beta(t)) \quad \sin(\alpha + \beta(t)) \quad l \sin(\beta(t))] \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} = 0 \quad (1.4)$$

c) Les roues orientables non centrées

Ce type de roues est aussi orientable par rapport à la plate-forme, mais la rotation du plan de la roue est autour d'un axe qui ne passe pas à travers le centre de la roue (figure 1.4). Dans ce cas le centre de la roue est noté B , il est lié à la plate-forme par une tige AB de longueur constante ds qui peut tourner autour d'un axe vertical passant par le point A . La position de la roue est décrite par quatre constantes α, l, r, ds , et son mouvement par les deux variables $\beta(t), \varphi(t)$.

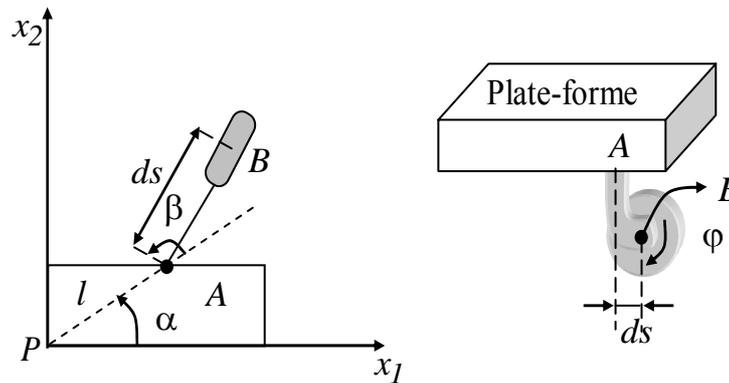


Figure 1.4 : La représentation de la roue conventionnelle orientable non centrée

Les contraintes ont la forme suivante :

$$[-\sin(\alpha + \beta(t)) \quad \cos(\alpha + \beta(t)) \quad l \cos(\beta(t))] \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.5)$$

$$[\cos(\alpha + \beta(t)) \quad \sin(\alpha + \beta(t)) \quad ds + l \sin(\beta(t))] \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + ds\dot{\beta} = 0 \quad (1.6)$$

1.2.1.1.2. Les roues suédoises

Connue sous le nom de roue universelle, la roue suédoise ne possède pas de contraintes non holonomes. Elle est constituée de rouleaux passifs incorporés dans la roue elle-même. Ces rouleaux ne sont efficaces que lorsqu'un glissement surgit [Abo01]. Par conséquent, seulement une composante de la vitesse au point de contact de la roue avec le sol est supposée égale à zéro. La direction de cette composante est a priori arbitraire, mais fixe par rapport à l'orientation de la roue. La position de la roue par rapport à la plate-forme est décrite comme pour une roue fixe conventionnelle. De plus, un nouveau paramètre γ est nécessaire pour caractériser la direction de la composante nulle de la vitesse par rapport au plan de la roue, ceci est illustré par la figure 1.5.

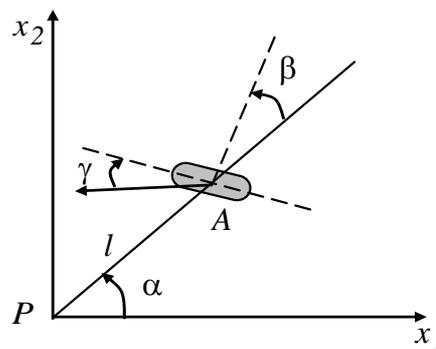


Figure 1.5 : La représentation de la roue suédoise

L'expression de la contrainte de roulement est donnée par :

$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)] \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + r \cdot \cos \gamma \cdot \dot{\phi} = 0 \quad (1.7)$$

I.2.1.2. Conditions de la mobilité du robot mobile à roues

Considérant un robot mobile, équipé de N roues des quatre types décrits précédemment. Le nombre de roues correspondant à chaque type est noté respectivement :

N_f : Le nombre de roues fixes,

N_c : Le nombre de roues orientables centrées

N_{oc} : Le nombre de roues orientables non centrée

N_{sw} : Le nombre de roues suédoises

Le nombre total des roues est donc : $N = N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw}$.

La configuration du robot est complètement décrite par les vecteurs de coordonnées suivants :

- Coordonnées de position : $\xi = (x(t) \quad y(t) \quad \theta(t))^T$ représente le vecteur de position dans le plan.
- Coordonnées angulaires : $\beta_c(t)$, $\beta_{oc}(t)$ représentent respectivement les angles d'orientation d'une roue orientable centrée et celui d'une roue orientable non centrée.
- Coordonnées de rotation : $\varphi(t) = (\varphi_f(t) \quad \varphi_c(t) \quad \varphi_{oc}(t) \quad \varphi_{sw}(t))^T$ représente les angles de rotation des roues autour de leurs axes de rotation horizontaux.

L'ensemble des coordonnées de position, des coordonnées angulaires et des coordonnées de rotation est appelé *ensemble des coordonnées de configuration*. Le nombre total des coordonnées de configuration est : $N_f + 2N_c + 2N_{oc} + N_{sw} + 3$.

Les expressions des contraintes cinématiques (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) peuvent être écrites sous une forme matricielle générale :

$$j_1(\beta_c, \beta_{oc}) R(\theta) \dot{\xi} + j_2 \dot{\phi} = 0 \quad (1.8)$$

$$c_1(\beta_c, \beta_{oc}) R(\theta) \dot{\xi} + c_2 \dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (1.9)$$

≠ Définitions des paramètres $j_1(\beta_c, \beta_{oc})$, j_2

$$j_1(\beta_c, \beta_{oc}) = (j_{1f} \quad j_{1c}(\beta_c) \quad j_{1oc}(\beta_{oc}) \quad j_{1sw})^T, \quad j_2 = \text{diag}(r)$$

j_{1f} , $j_{1c}(\beta_c)$, $j_{1oc}(\beta_{oc})$ et j_{1sw} : sont des matrices de dimensions $(N_f \times 3)$, $(N_c \times 3)$, $(N_{oc} \times 3)$, $(N_{sw} \times 3)$. Leurs coefficients sont extraits des équations de la contrainte de pur roulement (1.1), (1.3), (1.5) et (1.7). Il est évident que j_{1f} , j_{1sw} sont des matrices constantes, alors que $j_{1c}(\beta_c)$ et $j_{1oc}(\beta_{oc})$ sont variables dans le temps.

j_2 : est une matrice diagonale de dimension $(N \times N)$. Les éléments de la diagonale sont les rayons des roues, à l'exception des rayons des roues suédoises qui sont multipliés par $\cos(\gamma)$.

✎ *Définitions des paramètres $c_1(\beta_c, \beta_{oc})$, c_2*

$$c_1(\beta_c, \beta_{oc}) \stackrel{\Delta}{=} (c_{1f} \quad c_{1c}(\beta_c) \quad c_{1oc}(\beta_{oc}))^T, \quad c_2 \stackrel{\Delta}{=} (0 \quad 0 \quad c_{2oc})^T$$

c_{1f} , c_{1c} et c_{1oc} sont trois matrices de dimensions $(N_f \times 3)$, $(N_c \times 3)$ et $(N_{oc} \times 3)$. Les éléments de ces matrices sont extraits des équations de la contrainte de non glissement (1.2), (1.4) et (1.6).

c_{2oc} est une matrice diagonale, dont les éléments sont égaux à d , la distance entre le centre de la roue orientable non centrée et l'axe vertical passant par le point de rotation de cette roue par rapport à la plate-forme.

I.2.1.3. Degré de mobilité et degré de directivité

Considérant les $(N_f + N_c)$ premières contraintes de l'équation (1.9) écrites sous la forme suivante :

$$c_{1f} R(\theta) \dot{\xi} = 0 \quad (1.10)$$

$$c_{1c}(\beta_c) R(\theta) \dot{\xi} = 0 \quad (1.11)$$

A partir des équations (1.10) et (1.11), on peut déduire les remarques suivantes :

➤ Ces expressions ont une interprétation géométrique. A chaque instant, le mouvement du robot peut être vu comme une rotation autour d'un point appelé Centre de Rotation Instantané (CRI), dont la position par rapport à la plate-forme peut être variable dans le temps. Par conséquent, le vecteur vitesse de chaque point de la plate-forme est orthogonal à la ligne droite joignant ce point et le CRI à chaque instant. La figure 1.6 montre deux exemples de la position du CRI dans le cas d'un robot équipé de roues fixes, et d'un robot équipé de roues fixes et orientables centrées.

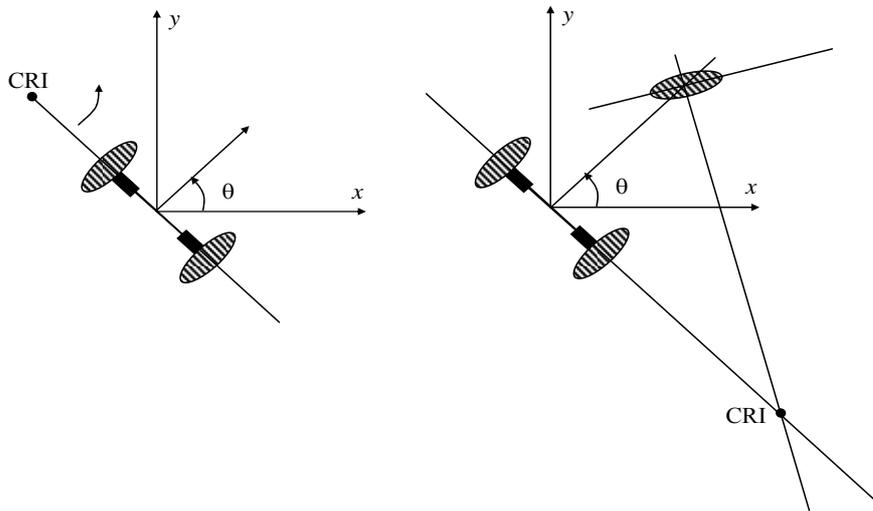


Figure 1.6 : Représentation du CRI

➤ Ces contraintes impliquent que le vecteur $R(\theta)\dot{\xi}$ appartient au noyau de la matrice :

$$c_1^*(\beta_c) = \begin{pmatrix} c_{1f} \\ c_{1c}(\beta_c) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$R(\theta)\dot{\xi} \in N[c_1^*(\beta_c)] \quad (1.13)$$

➤ Le $\text{rang}[c_1^*(\beta_c)] \leq 3$, car si le $\text{rang}[c_1^*(\beta_c)] = 3$, ceci implique que $R(\theta)\dot{\xi} = 0$. L'interprétation de ce cas implique que n'importe quel mouvement dans le plan est impossible. Cette spécificité permet de définir *le degré de mobilité* (degree of mobility) δ_m .

➤ Le $\text{rang}[c_{1f}] = 2$ implique que le robot a au moins deux roues fixes distribuées sur la plate-forme. Dans ce cas :

- ✎ soit ces roues déterminent un CRI dont la position par rapport à la plate-forme est fixe. Par conséquent, le seul mouvement possible est la rotation du robot autour du CRI.
- ✎ soit le positionnement des roues ne permet pas de déterminer un CRI (cela veut dire qu'elles ne sont pas sur le même axe, mais orientées dans la même direction). Dans ce cas le seul mouvement possible du robot est le déplacement rectiligne.

Pratiquement ces deux cas ne sont pas acceptables puisqu'ils représentent des mouvements particuliers. Le rang de $[c_{1f}]$ doit donc être inférieur ou égale à 1.

➤ Le $\text{rang}[c_{1c}(\beta_c)] \leq 2$ représente le nombre de roues orientables centrées qui peuvent être commandées indépendamment pour réorienter le robot. Ce nombre est appelé degré de directivité (degree of steerability) δ_s .

I.2.1.4. Structure non singulière d'un robot mobile à roues

D'après les remarques citées ci-dessus, un robot mobile à roues possède une structure non singulière si les conditions suivantes sont satisfaites [Cam96] :

$$\begin{cases} \text{rang}[c_{1f}] \leq 1 \\ \text{rang}[c_1^*(\beta_c)] = \text{rang}[c_{1f}] + \text{rang}[c_{1c}(\beta_c)] \leq 2 \end{cases}$$

Ces deux conditions imposent quelques règles à respecter lors de la conception du modèle du robot qui se résume par les points suivants :

- ✎ Si le robot a plus d'une roue fixe ($N_f > 1$), alors elles sont toutes sur un axe commun.
- ✎ Les centres des roues orientables centrées n'appartiennent pas à l'axe commun des roues fixes.

✍ Si le robot mobile est équipé de plus de δ_s roues orientables centrées ($N_c > \delta_s$), le mouvement des roues doit être coordonné pour garantir l'existence d'un centre de rotation instantané.

I.2.1.5. Les différents types de robots mobiles

En respectant les conditions nécessaires pour garantir une structure non singulière d'un robot mobile, seulement cinq structures peuvent présenter un intérêt pratique. Leurs configurations doivent respecter les inégalités suivantes :

- Le degré de mobilité est tel que : $1 \leq \delta_m \leq 3$;
- Le degré de directivité est tel que : $0 \leq \delta_s \leq 2$;
- Le degré de manœuvrabilité est tel que : $2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3$;

Le tableau suivant représente les cinq types de robots mobiles à roues correspondant au cinq paires de valeurs (δ_m, δ_s) satisfaisant les conditions de mobilité, de directivité et manœuvrabilité.

δ_m	3	2	2	1	1
δ_s	0	0	1	1	2
Le type du robot mobile	(3,0)	(2,0)	(2,1)	(1,1)	(1,2)

Tableau 1.1 : Classification des robots mobiles à roues

❖ **Le robot mobile de type (3,0)** $\delta_m = \dim N(c_1^*(\beta_c)) = 3$, $\delta_s = 0$

Ce robot ne possède ni roues fixes ($N_f = 0$), ni roues orientables centrées ($N_c = 0$). Ce robot à une mobilité totale dans le plan, il peut donc se mouvoir dans n'importe quelle direction sans aucune réorientation.

❖ **Le robot mobile de type (2,0)** : $\delta_m = \dim N(c_1^*(\beta_c)) = \dim N(c_{1f}) = 2$, $\delta_s = 0$

Ce robot n'a pas de roues orientables centrées ($N_c = 0$), il a une ou plusieurs roues fixes avec un axe commun.

❖ **Le robot mobile de type (2,1)** : $\delta_m = \dim N(c_1^*(\beta_c)) = \dim N(c_{1c}(\beta_c)) = 2$, $\delta_s = 1$

Ce robot n'a pas de roues fixes ($N_f = 0$) mais au moins une roue orientable centrée ($N_c \geq 1$). Si le robot est équipé de plus d'une roue orientable centrée, leurs orientations doivent être coordonnées de telle sorte que ($\delta_s = 1$).

❖ **Le robot mobile de type (1,1)** : $\delta_m = \dim N(c_1^*(\beta_c)) = 1$, $\delta_s = 1$

Ce type de robot est équipé d'une ou de plusieurs roues fixes avec un axe commun, et d'une ou de plusieurs roues orientables centrées. Le centre d'une roue orientable ne doit pas

être sur l'axe des roues fixes. Dans le cas où le robot est équipé de plusieurs roues orientables centrées, il faut coordonner leurs orientations pour satisfaire la condition ($\delta_s=1$).

❖ **Le robot mobile de type (1,2) :** $\delta_m = \dim N(c_1^*(\beta_c)) = \dim N(c_{1c}(\beta_c)) = 1$, $\delta_s = 2$

Ce robot n'a pas de roues fixes, mais au moins deux roues orientables non centrées ($N_c \geq 2$). Si le robot est équipé de plus de deux roues orientables non centrées, leurs orientations doivent être coordonnées afin que le ($\text{rang}(c_{1c}(\beta_c)) = \delta_s = 2$).

I.2.1.6. La modélisation cinématique

L'équation (1.13) impose que le vecteur vitesse pour tous les types de robots mobiles doit appartenir à la distribution Δ_c définie par le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de $R^T(\theta) \sum(\beta_c)$. Ceci peut être exprimé par :

$$\dot{\xi} \in \Delta_c = \text{sev}\left\{ \text{col} R^T(\theta) \sum(\beta_c) \right\} \quad (1.14)$$

Sachant que les colonnes de la matrice $\sum(\beta_c)$ forment une base du noyau de la matrice $c_1^*(\beta_c)$, donnée par la relation suivante :

$$N[c_1^*(\beta_c)] = \text{sev}\left\{ \text{col} \sum(\beta_c) \right\} \quad (1.15)$$

Le modèle cinématique déduit de ces définitions est donné par :

$$\dot{\xi} = R^T(\theta) \sum(\beta_c) \eta \quad \text{si le robot possède des roues orientables centrées} \quad (1.15.a)$$

$$\dot{\xi} = R^T(\theta) \sum \eta \quad \text{si le robot ne possède pas des roues orientables centrées} \quad (1.15.b)$$

telle que la dimension de $\eta(t)$ est égale au degré de mobilité du robot.

Lorsque le robot est équipé de roues orientables centrées ($\delta_s \geq 1$), l'expression (1.15.a) peut être généralisée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= R^T(\theta) \sum(\beta_c) \eta \\ \dot{\beta}_c &= \varsigma \end{aligned} \quad (1.16)$$

Chaque système (1.15.a), (1.15.b) ou (1.16) est appelé « modèle cinématique », en considérant $\dot{\xi}$ (coordonnées de vitesse) et $\dot{\beta}_c$ (coordonnées angulaires) comme variables d'état. η et ς peuvent être considérées comme des entrées de commande pour le modèle cinématique.

I.2.1.6.1. Modèles cinématiques des robots de types (2,0) et (1,1)

Le modèle cinématique écrit sous une forme compact est donné par [Cam96] :

$$\dot{z} = B(z) \cdot u \quad (1.17)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} z = \xi, B(z) = R^T(\theta) \sum, u = \eta \text{ si } N_c = 0 \\ z = \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_c \end{pmatrix}, B(z) = \begin{pmatrix} R^T(\theta) \sum \beta_c & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} \eta \\ \varsigma \end{pmatrix} \text{ si } N_c \geq 0 \end{cases}$$

Les tableaux ci-dessous résument les étapes successives pour l'établissement du modèle cinématique pour deux types de robots mobiles à roues : le robot mobile de type (2,0) et le robot mobile de type (1,1), dont les structures mécaniques sont comme suit :

Structure mécanique du robot mobile de type (2,0)

Ce robot est un exemple du mode classique de locomotion. La plate-forme parallélépipédique est équipée de deux roues parallèles de type conventionnel fixe, chacune d'elles est commandée par un moteur indépendamment de l'autre. La rotation et le déplacement du robot dans le plan sont accomplis par l'application d'une commande différentielle aux moteurs des roues fixes. La stabilité de la plate-forme est assurée par des roues folles (voir figure 1.7.a).

Structure mécanique du robot mobile de type (1,1)

Le robot est un tricycle constitué d'une plate-forme parallélépipédique montée sur trois roues. Une roue orientable centrée est placée à l'avant du robot, son rôle est de faire tourner le robot dans la direction désirée. L'orientation de cette roue est assurée par un moteur. Les deux autres roues de type conventionnel fixe sont placées de part et d'autre de la plate-forme à l'arrière du robot. Ces deux roues peuvent être commandées par un seul moteur comme elles peuvent être commandées par deux moteurs indépendamment. Leur rôle est d'assurer le déplacement du robot sur le plan (voir figure 1.7.b).

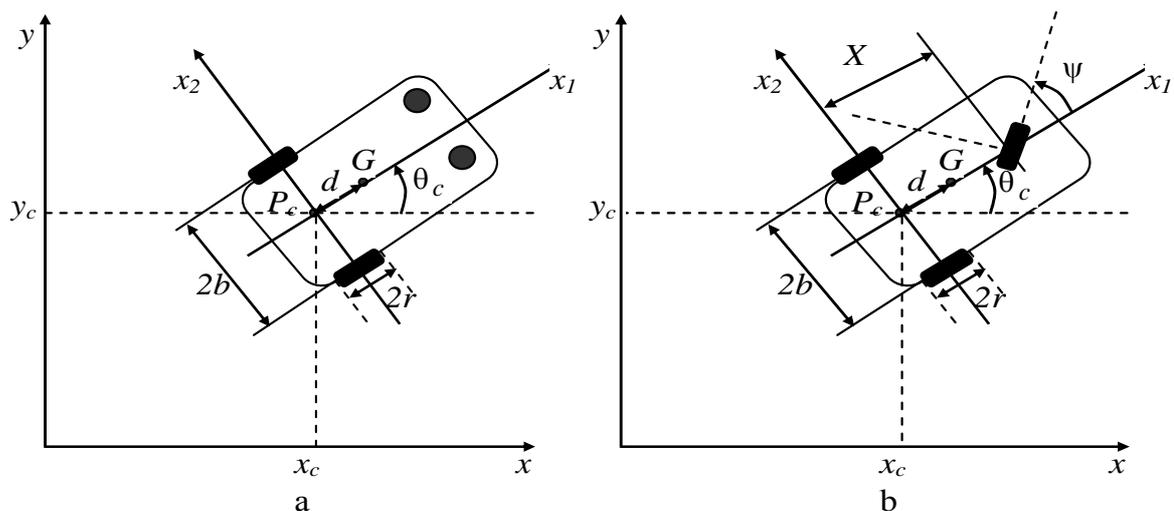


Figure 1.7 : Représentation des robots mobiles à roues de type (2,0) et (1,1)

Type du robot	(2,0)			(1,1)		
Les paramètres	α	β	l	α	β	l
1 ^{ière} roue (roue fixe)	$\pi/2$	0	b	$\pi/2$	0	b
2 ^{ième} roue (roue fixe)	$-\pi/2$	π	b	$-\pi/2$	π	b
3 ^{ième} roue (roue orientable centrée)	—	—	—	0	$\beta = \pi/2 + \psi$	X

Tableau 1.2 : Les paramètres décrivant la position des roues
(ψ est l'angle de braquage de la roue orientable centrée)

	j_1	j_2	c_1	c_2
Robot type (2,0)	$[j_{1f}]$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & -b \end{pmatrix}$	$diag(r)$	$[c_{1f}]$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	—
Robot type (1,1)	$[j_{1f} \ j_{1c}]$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & -b \\ -\cos \psi & -\sin \psi & -X \sin \psi \end{pmatrix}$	$diag(r)$	$[c_{1f} \ c_{1c}]$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & X \cos \psi \end{pmatrix}$	—

Tableau 1.3 : Les matrices des contraintes

Type du robot	z	$\sum \beta_c$ ou \sum	Les équations du modèle cinématique $\dot{z} = B(z).u$
(2,0)	x_c, y_c, θ_c	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
(1,1)	x, y, θ, ψ	$\begin{pmatrix} X \cos \psi \\ 0 \\ \sin \psi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\psi}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & 0 \\ \frac{\tan \psi}{X} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Tableau 1.4 : Modèles cinématiques des robots mobiles de types (2,0) et (1,1)

I.2.2. La représentation dans un repère de Frenet

La modélisation dans un repère de Frenet est utilisée dans l'établissement de lois de commande pour les problèmes de poursuite de chemin. Considérons une courbe C du plan et les trois repères $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_s$ représentés par la figure 1.8. Le repère \mathcal{R}_0 est fixe, \mathcal{R}_1 est lié au robot avec pour origine le point P_0 situé au milieu de l'axe des roues arrière, et le repère \mathcal{R}_s , indexé par l'abscisse curviligne sur la courbe, est tel que le vecteur unitaire \vec{i}_s soit tangent à C [Lau01].

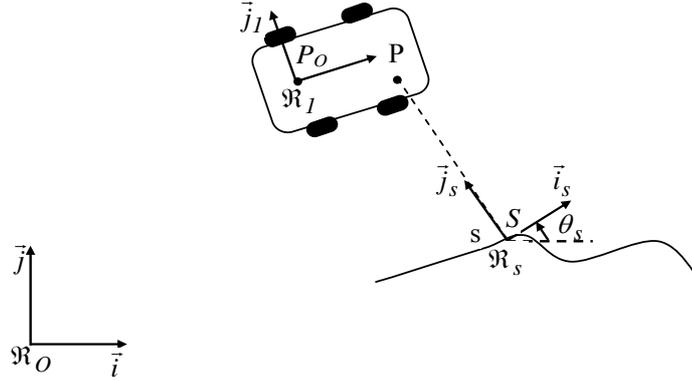


Figure 1.8 : Représentation du robot mobile dans un repère de Frenet

Considérons un point P lié au robot, et soit (l_1, l_2) les coordonnées de P exprimées dans la base du repère \mathcal{R}_1 . Notre but est d'établir les équations de mouvement de P par rapport à la courbe C . Pour cela, nous introduisons les trois variables s, d et θ_e sont définies comme suit :

s : est l'abscisse curviligne du point S obtenue par projection orthogonale de P sur C

d : correspond à l'ordonnée de P dans \mathcal{R}_s ; c'est aussi la distance de P à la courbe C

$\theta_e = \theta - \theta_s$: représente l'orientation du robot par rapport au repère \mathcal{R}_s

I.2.2.1. La modélisation du robot mobile de type (2,0)

Les expressions de $\dot{s}, \dot{d}, \dot{\theta}_e$ sont déterminées de la manière suivante :

Par définition de la courbure $c(s)$ de C en s :

$$c(s) = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \Rightarrow \dot{\theta}_e = u_2 - \dot{s} \cdot c(s) \quad (1.18)$$

Sachant que $\overrightarrow{SP} = d \cdot \vec{j}_s$ et en utilisant l'égalité $d \overrightarrow{OS} / dt = \dot{s} \cdot \vec{i}_s$, nous déduisons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} &= \frac{\partial \overrightarrow{OS}}{\partial t} + \dot{d} \cdot \vec{j}_s - d \cdot c(s) \cdot \dot{s} \cdot \vec{i}_s \\ &= \dot{s} \cdot (1 - d \cdot c(s)) \cdot \vec{i}_s + d \cdot \dot{\vec{j}}_s \end{aligned} \quad (1.19)$$

Nous avons également $\overrightarrow{P_O P} = l_1 \cdot \vec{i}_1 + l_2 \cdot \vec{j}_1$ et $d\overrightarrow{OP}_O / dt = u_1 \cdot \vec{i}_1$, d'où l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} &= \frac{\partial \overrightarrow{OP}_O}{\partial t} + l_1 \cdot u_2 \cdot \vec{j}_1 - l_2 \cdot u_2 \cdot \vec{i}_1 \\ &= \left[(u_1 - l_2 \cdot u_2) \cdot \cos(\theta_e) - l_1 \cdot u_2 \cdot \sin(\theta_e) \right] \cdot \vec{i}_s \\ &\quad + \left[(u_1 - l_2 \cdot u_2) \cdot \sin(\theta_e) + l_1 \cdot u_2 \cdot \cos(\theta_e) \right] \cdot \vec{j}_s \end{aligned} \quad (1.20)$$

Des équations (1.18), (1.19) et (1.20), nous déduisons finalement le système d'équations cinématiques du robot mobile sans le repère de Frenet :

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{1}{1 - dc(s)} \left[(u_1 - l_2 u_2) \cos \theta_e - l_1 u_2 \sin \theta_e \right] \\ \dot{d} = (u_1 - l_2 u_2) \sin \theta_e + l_1 u_2 \cos \theta_e \\ \dot{\theta}_e = u_2 - \dot{s} c(s) \end{cases} \quad (1.21)$$

Nous remarquons que le système d'équations (1.21) représente une généralisation du système obtenu dans le repère cartésien. Car, en considérant le point P comme origine du repère \mathfrak{R}_1 (c.-à-d. $l_1 = l_2 = 0$) et si l'axe (O, \vec{i}) du repère \mathfrak{R}_O est choisi comme courbe avec $s = x$, nous aurons $c(s) = 0$. En posant $y \equiv d$, $\theta_c \equiv \theta_e$ et $u_1 = v_c, u_2 = \omega_c$ nous retrouvons exactement le modèle cinématique dans le plan cartésien.

1.2.2.2. La modélisation du robot mobile de type (1,1)

En procédant de la même façon que pour le robot de type (2,0), la modélisation du robot mobile de type (1,1) dans le repère de Frenet est déterminée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{u_1}{1 - dc(s)} \left[\cos(\theta_e) - \frac{\tan \psi}{X} (l_2 \cos \theta_e + l_1 \sin \theta_e) \right] \\ \dot{d} = u_1 \left[\sin \theta_e + \frac{\tan \psi}{X} (l_1 \cos \theta_e - l_2 \sin \theta_e) \right] \\ \dot{\theta}_e = u_1 \frac{\tan \psi}{X} - \dot{s} \cdot c(s) \\ \dot{\psi} = u_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

I.3. La contrainte de non holonomie

Le terme "non holonome" a été utilisé en robotique pour la première fois à la fin de 1980. Les systèmes non holonomes sont caractérisés par des contraintes cinématiques prenant la forme d'équations en fonction des dérivées des paramètres de configurations : le système est non holonome lorsque ces équations différentielles ne sont pas intégrables. Les robots mobiles de types (2,0) et (1,1) sont des systèmes non holonomes, car tous les deux sont soumis à la condition de roulement sans glissement. Cette condition est une contrainte non holonome. Elle ne permet pas au robot de se déplacer latéralement. Par conséquent il, ne peut

pas suivre les trajectoires qui sont parallèles à sa direction principale sauf s'il effectue des manœuvres afin de se réorienter vers la trajectoire désirée.

Les contraintes cinématiques pour un robot mobile à roues sont formulées par des équations différentielles du premier ordre non intégrables contenant des dérivées des coordonnées généralisées. La représentation sous forme matricielle de ces contraintes est donnée par :

$$A(q)\dot{q} = 0$$

où \dot{q} est le vecteur des coordonnées généralisées de la vitesse.

Matrice des contraintes cinématiques du robot de type (2,0)

Les contraintes de roulement sans glissement sont déduites du tableau 1.2, et s'écrivent :

$$\begin{cases} -\dot{x}_c \cos \theta_c - \dot{y}_c \sin \theta_c + b\dot{\theta}_c + r\dot{\theta}_g = 0 \\ -\dot{x}_c \cos \theta_c - \dot{y}_c \sin \theta_c - b\dot{\theta}_c + r\dot{\theta}_d = 0 \\ -\dot{x}_c \sin \theta_c - \dot{y}_c \cos \theta_c = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

où :

θ_d, θ_g : sont respectivement les positions angulaires des roues droite et gauche ;

Du système d'équation (1.23), nous déduisons que l'angle de rotation du robot n'est qu'une variable dépendante des paramètres θ_d, θ_g par la relation [Yam94][Bel01] :

$$\theta_c = c \cdot (\theta_d - \theta_g) \text{ sachant que } c = r/2b$$

La forme matricielle du système (1.23) est donnée par :

$$A(q)\dot{q} = 0 \text{ telle que } A(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 & 0 \\ -\cos \theta_c & -\sin \theta_c & cb & cb \end{bmatrix}$$

Le vecteur des coordonnées généralisées peut être défini comme suit :

$$q = (x_c \quad y_c \quad \theta_d \quad \theta_g)^T$$

Matrice des contraintes cinématiques du robot de type (1,1)

$$\begin{cases} -\dot{x}_c \cos \theta_c - \dot{y}_c \sin \theta_c + b\dot{\theta}_c + r\dot{\theta}_g = 0 \\ -\dot{x}_c \cos \theta_c - \dot{y}_c \sin \theta_c - b\dot{\theta}_c + r\dot{\theta}_d = 0 \\ -\dot{x}_c \sin \theta_c + \dot{y}_c \cos \theta_c = 0 \\ -\dot{x}_c \cos(\theta_c + \psi_c) - \dot{y}_c \sin(\theta_c + \psi_c) - X\dot{\theta}_c \sin \psi_c + r\dot{\theta}_a = 0 \\ -\dot{x}_c \sin(\theta_c + \psi_c) + \dot{y}_c \cos(\theta_c + \psi_c) + X\dot{\theta}_c \cos \psi_c = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

où : θ_a est la position angulaire de la roue avant.

La forme matricielle du système (1.24) devient :

$$A(q) \cdot \dot{q} = 0 \text{ telle que } A(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_c & -\sin \theta_c & -b & r & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_c & -\sin \theta_c & b & 0 & r & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_c + \psi) & \cos(\theta_c + \psi) & X \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\theta_c + \psi) & -\sin(\theta_c + \psi) & -X \sin \psi & 0 & 0 & r & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des coordonnées généralisées peut être défini par :

$$q = (x_c \quad y_c \quad \theta_c \quad \theta_d \quad \theta_g \quad \theta_a \quad \psi)^T.$$

Pour l'établissement du modèle dynamique des deux types de robots, nous avons considéré les matrices des contraintes cinématiques déterminées en fonction des vecteurs des coordonnées généralisées suivants :

$$q = (\theta_d \quad \theta_g)^T : \text{ le vecteur de coordonnées généralisées du robot de type (2,0) ;}$$

$$q = (\theta_d \quad \theta_g \quad \psi)^T : \text{ le vecteur de coordonnées généralisées du robot de type (1,1) ;}$$

Ainsi, les matrices des contraintes cinématiques pour les deux cas sont respectivement :

$$A(q) = (cb \quad cb) \tag{1.25}$$

$$A(q) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

I.4. La modélisation dynamique

Le modèle dynamique représente la relation entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs, la position, la vitesse et l'accélération du robot. Le modèle dynamique est donné par une relation de la forme [Dom01] :

$$\tau = f(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tag{1.27}$$

avec : τ : vecteur des couples/forces des actionneurs ;

q : vecteur des positions ;

\dot{q} : vecteur des vitesses ;

\ddot{q} : vecteur des accélérations ;

La relation (1.27) est appelée "*modèle dynamique inverse*" ou simplement "*modèle dynamique*". Par contre le modèle dynamique direct est celui qui exprime les accélérations en fonction de la position, de la vitesse et des couples des actionneurs. Il est représenté par la relation :

$$\ddot{q} = g(q, \dot{q}, \tau) \tag{1.28}$$

Les formalismes les plus utilisés pour obtenir le modèle dynamique sont : *le formalisme de Newton-Euler* et *le formalisme de Lagrange*. L'approche Newtonienne consiste à décrire le principe fondamental de la dynamique reliant les accélérations du système aux forces

s'exerçant sur lui. L'expression de ces forces est donnée en fonction de la configuration de ce système. Si l'établissement de toutes les équations dynamiques permet en principe de déterminer complètement le mouvement du système, la résolution de cet ensemble d'équations peut être très délicate. En particulier, dans le cas où le système est soumis à des contraintes, ces forces deviennent de nouvelles variables inconnues dans le problème, et doivent être déterminées en même temps que les variables dynamiques. Par contre l'approche Lagrangienne décrit le système mécanique par des coordonnées indépendantes appelées coordonnées généralisées qui sont de nature arbitraire (position, angle,...), mais doivent déterminer l'état mécanique du système même lorsque nous prenons en compte ces contraintes. Pour cela, nous avons opté pour l'utilisation de la seconde approche, afin d'établir les modèles dynamiques des robots mobiles de types (2,0) et (1,1).

I.4.1. Le formalisme de Lagrange

Les équations du mouvement d'un système non holonome dans le formalisme de Lagrange sont déterminées à partir de la formule suivante [Yam94] :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} \gamma_j ; j = 1..m, i = 1..n \quad (1.29)$$

Les paramètres de cette équation sont :

$L = E - U$: le Lagrangien du système. C'est la différence entre l'énergie cinétique E et l'énergie potentielle U , cette dernière est nulle.

Q : le vecteur des forces généralisées du système ;

a_{ji} : les coefficients de la matrice des contraintes $A^T(q)$;

γ_j : les grandeurs des liaisons non holonomes ;

Les grandeurs γ_j ont une interprétation physique qui rend leur obtention importante. L'effet des liaisons non holonomes peut être « simulé » à des forces supplémentaires appliquées au système. Dans notre cas, ces forces peuvent correspondre par exemple aux frottements responsables d'un roulement sans glissement. Les forces des liaisons γ_j sont calculées à partir de la formule suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^m a_{ij} \gamma_j \quad (1.30)$$

Les principales notations qui sont utilisées pour l'établissement des équations du modèle dynamique sont les suivantes :

m, m_c : sont respectivement la masse totale du robot et la masse de la plate-forme;

I_G : le moment d'inertie du robot par rapport à un repère passant par son centre de gravité ;

J_c : le moment d'inertie du robot par rapport à un repère parallèle au repère du centre de gravité G et d'origine c (voir figure 1.7);

I_r : le moment d'inertie des roues;

$\tau = (\tau_1 \quad \tau_2)^T$: le vecteur des couples appliqués aux moteurs;

θ_c : l'angle de rotation du robot par rapport au repère de référence;

$\theta_g, \theta_d, \theta_a$: les positions angulaires des roues gauche, droite et la roue avant;

ψ : l'angle de braquage de la roue avant du robot de type (1,1);

v_G, v_c : sont respectivement la vitesse linéaire du robot à son centre de gravité et au point c ;

ω : la vitesse angulaire du robot mobile;

$D = (d \quad 0 \quad 0)$: le vecteur de la distance entre le point c et le point G ;

r : le rayon des roues;

b : la distance entre une roue et le point de référence c du robot;

Calcul de l'énergie cinétique

Les équations de l'énergie cinétique totale des deux robots de types (2,0) et (1,1), exprimée à leurs centres de gravité G , sont données respectivement par les relations suivantes :

$$E = \frac{1}{2} \left(m_c v_G^T v_G + \omega^T I_G \omega \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_d^2 + \dot{\theta}_g^2 \right) \quad (1.31)$$

$$E = \frac{1}{2} \left(m_c v_G^T v_G + \omega^T I_G \omega \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_d^2 + \dot{\theta}_g^2 + \dot{\theta}_a^2 \right) \quad (1.32)$$

Étant donné que :

$$v_G = v_c + \omega \times D \quad \text{et} \quad J_c = I_G + m_c \cdot D^T D$$

les équations de l'énergie cinétique s'écrivent respectivement :

$$L = E = \frac{1}{2} \left(m_c v_c^T v_c + \omega^T J_c \omega + 2m_c D^T (v_c \times \omega) \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_d^2 + \dot{\theta}_g^2 \right)$$

$$L = E = \frac{1}{2} \left(m_c v_c^T v_c + \omega^T J_c \omega + 2m_c D^T (v_c \times \omega) \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_d^2 + \dot{\theta}_g^2 + \dot{\theta}_a^2 \right)$$

Les équations de mouvement du robot mobile de type (2,0)

L'équation du Lagrangien en fonction du vecteur des coordonnées généralisées $q = (\theta_d \quad \theta_g)^T$ est obtenue en remplaçant v_c par $\frac{r}{2}(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g)$ et ω par $\frac{r}{2}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_g)$

$$L = E = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{4} m_c (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g)^2 + \frac{r^2}{4} J_c (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_g)^2 + \frac{r^2}{2b} m_c d (\dot{\theta}_d^2 - \dot{\theta}_g^2) \sin \theta_c \right) + \frac{1}{2} I_r (\dot{\theta}_d^2 + \dot{\theta}_g^2)$$

Ainsi, les équations de mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} - \frac{\partial L}{\partial \theta_d} &= \frac{r^2}{4} m_c (\ddot{\theta}_d + \ddot{\theta}_g) + \frac{r^2}{4b^2} J_c (\ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}_g) + \frac{r^2}{2b} m_c d \sin \theta_c \ddot{\theta}_d \\ &\quad + \frac{r^2}{2b} m_c d \cos \theta_c \dot{\theta}_c \dot{\theta}_d + I_r \ddot{\theta}_d = \tau_1 - cb\gamma \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_g} - \frac{\partial L}{\partial \theta_g} &= \frac{r^2}{4} m_c (\ddot{\theta}_d + \ddot{\theta}_g) - \frac{r^2}{4b^2} J_c (\ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}_g) - \frac{r^2}{2b} m_c d \sin \theta_c \ddot{\theta}_g \\ &\quad - \frac{r^2}{2b} m_c d \cos \theta_c \dot{\theta}_c \dot{\theta}_g + I_r \ddot{\theta}_g = \tau_2 - cb\gamma \end{aligned}$$

À partir des équations de mouvement, le modèle dynamique s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} m & m_c d \sin \theta_c \\ m_c d \sin \theta_c & J_c + 2I_r \frac{b^2}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_c d \cos \theta_c \omega_c^2 \\ m_c d \cos \theta_c v_c \omega_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{b}{r} & -\frac{b}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma \quad (1.33)$$

avec $m = m_c + 2m_r$

Le modèle dynamique inverse du robot mobile, tel que $q_c = (v_c \ \omega_c)^T$, est déterminé à partir de la relation (1.33). Son expression est la suivante :

$$\tau = H(q_c) \dot{q}_c + B(q_c) + P\gamma \quad (1.34)$$

telles que :

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{b}{r} & -\frac{b}{r} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m & m_c d \sin \theta_c \\ m_c d \sin \theta_c & J_c + 2I_r \frac{b^2}{r^2} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{b}{r} & -\frac{b}{r} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m_c d \cos \theta_c \omega_c^2 \\ m_c d \cos \theta_c v_c \omega_c \end{pmatrix}; \\ P &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{b}{r} & -\frac{b}{r} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

avec : $H \in R^{2 \times 2}$: la matrice d'inertie ;

$B \in R^{2 \times 1}$: le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis ;

$P \in R^{2 \times 1}$: le vecteur des facteurs des liaisons non holonomes ;

$\gamma \in R^{2 \times 1}$: le vecteur des forces des liaisons non holonomes ;

Les équations de mouvement du robot mobile de type (1,1)

En procédant de la même manière que pour le premier robot mobile, telles que $v_c = \frac{r}{2} (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g)$, $\omega = \dot{\psi}$ et $\dot{\theta}_a = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g)$, l'expression du Lagrangien devient :

$$L = E = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{4} m_c (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g)^2 + J_c \dot{\psi}^2 + r m_c d (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g) \dot{\psi} \sin \theta_c \right) + \frac{1}{2} I_r (\dot{\theta}_d^2 + \dot{\theta}_g^2 + \dot{\theta}_a^2)$$

Les équations de mouvement dans ce cas s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} - \frac{\partial L}{\partial \theta_d} &= \frac{r^2}{4} m_c (\ddot{\theta}_d + \ddot{\theta}_g) + r m_c d \ddot{\psi} \sin \theta_c + r m_c d \dot{\psi} \dot{\theta}_c \cos \theta_c + I_r \dot{\theta}_d + \frac{1}{4} I_r (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g) = \tau_1 - r \gamma_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_g} - \frac{\partial L}{\partial \theta_g} &= \frac{r^2}{4} m_c (\ddot{\theta}_d + \ddot{\theta}_g) + r m_c d \ddot{\psi} \sin \theta_c + r m_c d \dot{\psi} \dot{\theta}_c \cos \theta_c + I_r \dot{\theta}_g + \frac{1}{4} I_r (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g) = \tau_1 - r \gamma_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi_a} &= J_c \ddot{\psi} + \frac{r}{2} m_c d (\ddot{\theta}_d + \ddot{\theta}_g) \sin \theta_c + \frac{r}{2} m_c d (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g) \dot{\theta}_c \cos \theta_c = \tau_2 \end{aligned}$$

La forme matricielle représentant le modèle dynamique du robot est :

$$\begin{pmatrix} m & m_c d \sin \theta_c \\ m_c d \sin \theta_c & J_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_c \frac{d}{b} \cos \theta_c \tan \psi \omega_c v_c \\ m_c \frac{d}{b} \cos \theta_c \tan \psi v_c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

avec : $m = m_c + 3m_r$

La forme de l'expression du modèle dynamique inverse du robot mobile de type (1,1) est la même que celle du (1.34) :

$$\tau = H(q_c) \dot{q}_c + B(q_c) + P\gamma \quad (1.36)$$

Telles que :

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \frac{2}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m & m_c d \sin \theta_c \\ m_c d \sin \theta_c & J_c \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{2}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m_c \frac{d}{b} \cos \theta_c \tan \psi \omega_c v_c \\ m_c \frac{d}{b} \cos \theta_c \tan \psi v_c^2 \end{pmatrix}; \\ P &= - \begin{pmatrix} \frac{2}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I.5. Les modèles de commande

Le robot mobile peut être représenté par deux modèles : le modèle cinématique et le modèle dynamique. Du point de vue automatique, le modèle dynamique est un système de commande de type $\dot{x} = f(x, v)$, avec $x = (q, u)$ comme vecteur d'état et $v = \tau$ comme vecteur de commande. Le modèle cinématique est également un système de commande avec q comme vecteur d'état et u comme commande. Par conséquent, l'utilisation d'une commande dynamique revient à utiliser un modèle de commande en couple, alors qu'un modèle de commande cinématique n'est autre qu'une commande en vitesse [Lau01]. La majorité des travaux publiés dans le domaine de la commande des robots mobiles sont dans le

cadre cinématique [Ori91][Agu00][Gus98]. Les raisons de ce choix peuvent être résumées par les points suivants :

1) Le modèle cinématique est plus simple que le modèle dynamique. Il ne fait pas intervenir un certain nombre de fonctions matricielles dont la connaissance précise repose sur celle des paramètres inertiels du véhicule et de ses actionneurs (masse, moments d'inertie, coefficients de réduction des moteurs électriques, etc.).

2) Pour les robots à motorisation électrique, il est fréquent de disposer d'un asservissement en vitesse sur les moteurs, dont la grandeur en entrée est une vitesse désirée, et ayant pour rôle d'asservir la vitesse du modèle à celle désirée. Si cet asservissement est bien conçu, l'écart entre ces deux vitesses est toujours faible, de sorte que la vitesse désirée peut, à son tour, être interprétée comme une variable de commande libre.

Ceci ne diminue pas l'importance de l'élaboration d'une loi de commande dynamique [Ege98][Dix00]. Par contre, ce type de commande est réservé pour les cas suivants :

1) S'il se trouve que l'asservissement en vitesse évoqué ci-dessus (dont le rôle est de découpler la partie dynamique de la partie cinématique du véhicule) n'est pas présent, alors le modèle dynamique est incorporé en considérant que les couples fournis par les moteurs sont les variables de commande dont on dispose. Du point de vue commande, la méthode utilisée est celle des couples calculés ("computed torques" en anglais). Cette méthode est développée dans l'annexe A [Alh03][Lew03].

2) Lorsque la tâche affectée au robot mobile nécessite durant son déplacement une grande stabilité avec une bonne poursuite du chemin à suivre, il devient nécessaire de concevoir des lois de commande robustes. Par conséquent, il faut définir un modèle qui prend mieux en compte la dynamique des actionneurs.

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude sur les robots mobiles à roues basée sur la nature des roues. Nous avons constaté que malgré la diversité des roues, seulement cinq structures de robots mobiles ont un intérêt pratique. Ceci est dû aux conditions imposées sur le degré de mobilité et celui de directivité afin d'avoir une structure non singulière. Par conséquent, chaque type de robots mobiles est défini par la paire (degré de mobilité, degré de directivité). Cette classification est suivie par l'établissement d'une forme générale permettant de déduire facilement le modèle cinématique de chaque type de robots mobiles. Nous avons enrichi cette étude par l'application de ces notions sur deux types de robots qui sont le robot de type(2,0) constitué uniquement de roues fixes et le robot (1,1) constitué de deux roues fixes et une roue orientable centrée. Nous avons choisi ces deux robots parce qu'ils sont constitués des principales roues responsables de la définition d'une structure non singulière d'un robot mobile. L'étude cinématique est complétée par la représentation de ces deux robots dans le repère de Frenet et le développement de leurs modèles dynamiques. Nous présentons dans le chapitre suivant quelques techniques de commande basées sur le modèle cinématique du robot.

Techniques de commande en robotique mobile

Chapitre II

Techniques de commande en robotique mobile

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats de base relatifs à la commande des robots mobiles. En premier lieu, nous faisons un rappel des notions de commande en boucle ouverte et fermée. Puis, après avoir cité quelques outils de commande, nous présentons des exemples d'application en robotique mobile. Nous terminerons, en introduisant des notions de robustesse liées à ce problème.

Pour une étude plus détaillée des concepts et des méthodes de commande, le lecteur pourra consulter [Slo91].

II.1. Rappel sur la commande en boucle ouverte et fermée

En robotique mobile, la commande en boucle ouverte (BO) est considérée comme équivalente à la planification et opposée au contrôle en boucle fermée (BF). Par conséquent, la comparaison entre les deux commandes revient à comparer la commande en BF avec la planification.

Le contrôleur en (BF) dérive de la superposition d'une action de retour d'état à l'état actuel. Ce dernier est déterminé sur la base de la connaissance a priori de la tâche du mouvement et de l'environnement, qui peut avoir été acquis précédemment par des capteurs extéroceptifs. La commande par retour d'état est calculée en temps réel en se basant sur les données des capteurs externes et/ou internes.

La phase de planification prend en considération le besoin d'éviter les obstacles et fournit un chemin réalisable par le robot mobile en fonction des valeurs nominales de la commande en (BO) permettant d'atteindre le but recherché. Nous déduisons que la commande en (BO) représentée sur la figure 2.1 est calculée en off-line. Par conséquent, en pratique, si le système présente très peu d'imperfections (erreurs de modélisation et de mesure) et s'il est très peu perturbé, la consigne en boucle ouverte produira alors des résultats satisfaisants.

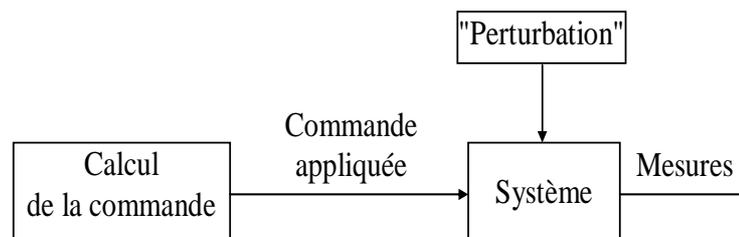


Figure 2.1 : Schéma de la commande en boucle ouverte

Par contre, si ces imperfections et ces perturbations ne peuvent pas être négligées, l'application de la commande en boucle ouverte produira un écart important entre le résultat désiré et la réponse obtenue. En particulier, dans le cas des robots mobiles, un léger glissement des roues sur le sol entraîne inévitablement une dérive du véhicule. La figure 2.2 montre l'effet d'une commande en boucle ouverte appliquée au problème de suivi d'une ligne horizontale pour une petite erreur dans la valeur initiale de l'angle d'orientation du robot.

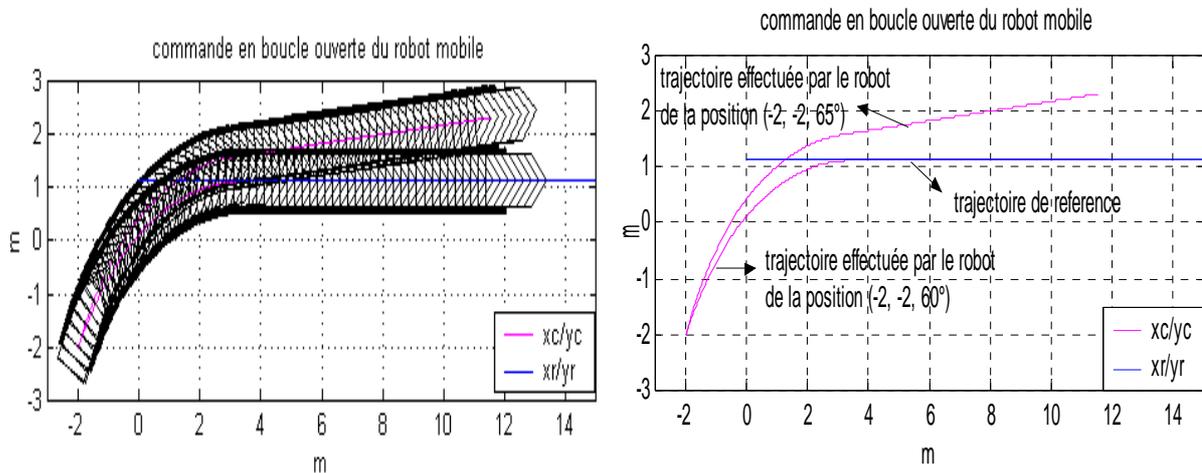


Figure 2.2 : Exemple de suivi d'une ligne horizontale en utilisant une commande en boucle ouverte

Ce type de comportement peut être corrigé si le calcul de la commande est renouvelé en fonction des valeurs mesurées dans le temps. Donc, la solution est d'utiliser la commande en boucle fermée car elle est calculée en fonction de l'état du système à chaque instant (voir figure 2.3).

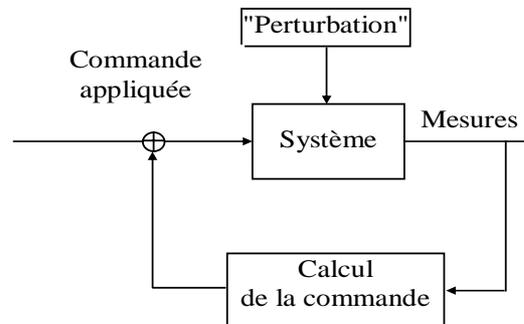


Figure 2.3 : Schéma de la commande en boucle fermée

La commande en boucle fermée présente l'avantage de rendre le système relativement insensible à plusieurs facteurs :

- Simplifications et approximations dans la modélisation du système;
- Perturbations externes au système;
- Erreurs internes ou variations des paramètres du modèle;
- Incertitudes sur les variables physiques mesurées;

En revanche, il est nécessaire de calculer les paramètres de la commande, de sorte que le système soit stable. La conception d'une telle loi de commande est une tâche délicate.

II.2. Exemples d'outils de commande pour des robots mobiles

Il existe plusieurs techniques de commande de systèmes en BF pouvant être appliquées en robotique mobile :

- La méthode du linéarisé tangent;
- La technique directe de Lyapunov;
- L'utilisation du théorème de LaSalle et du lemme de Barbalat;
- Le retour d'état linéarisant;
- La commande à structure variable;

Nous présentons dans cette section les quatre premières méthodes de commande. En ce qui concerne la commande à structure variable, une étude détaillée est présentée dans le troisième chapitre.

Pour plus d'informations sur les notions de stabilité des systèmes, le lecteur est convié à consulter l'annexe B.

II.2.1. La méthode du linéarisé tangent

Dans certains cas, il est possible de considérer l'approximation linéaire du système au voisinage d'un point d'équilibre. La théorie des systèmes linéaires étant très riche, ceci est particulièrement intéressant.

Le principe de la méthode consiste à développer en série de Taylor, au voisinage d'un point d'équilibre x^* , la fonction qui représente la dynamique du système. Puis, en ne considérant que le terme linéaire de la série, on approxime la dynamique de l'erreur de configuration de l'état par rapport à x^* . Finalement, on déduit une loi de commande stabilisante à partir de la théorie des systèmes linéaires. La commande ainsi obtenue ne peut évidemment être utilisée que pour des positions initiales se trouvant près de x^* et en considérant seulement de petites perturbations sur le système.

Bien que l'approche du linéarisé tangent paraît très simple, elle présente l'inconvénient de ne définir la loi de commande que localement autour du point d'équilibre, et ne fournit pas un résultat global.

Exemple

Considérons les équations cinématiques qui expriment le mouvement d'un robot mobile se déplaçant avec une vitesse linéaire v et une vitesse angulaire ω :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c v \\ \sin \theta_c v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

x_c et y_c représentent la position du robot par rapport à un point fixe, et θ_c est l'angle déterminé par la direction du robot par rapport à l'axe horizontal.

Supposons que l'on cherche à commander le mouvement du robot le long de l'axe horizontal $(x_c, 0)$, en considérant que le déplacement se réalise avec une vitesse linéaire constante.

Pour cela, nous allons calculer en fonction de la position du robot la vitesse angulaire permettant au véhicule d'atteindre son but. Plus précisément, nous allons calculer $\omega(y_c, \theta_c)$ à chaque instant, de manière à faire converger les valeurs du couple (y_c, θ_c) vers l'origine.

Ainsi, nous allons utiliser seulement les deux dernières lignes de l'équation (2.1) :

$$\begin{cases} \dot{y}_c = \sin \theta_c v \\ \dot{\theta}_c = \omega \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour appliquer la méthode du linéarisé tangent, nous allons réécrire la dynamique (2.2) sous la forme générique suivante :

$$\dot{x} = F(x, \omega) \quad (2.3)$$

avec : $x = (y_c, \theta_c)^T$, $F(x, \omega) = (\sin \theta_c v, \omega)^T$.

Les points d'équilibre du système sont déterminés en examinant les valeurs de x et ω pour lesquelles la dynamique du système (2.2) s'annule :

$$X_{eq} = \begin{pmatrix} Y_{eq} \\ \theta_{eq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{eq} \\ \{0, \pm\pi\} \end{pmatrix}, \quad \omega_{eq} = 0$$

En développant la fonction F en série de Taylor au voisinage du point d'équilibre (X_{eq}, ω_{eq}) , $F(x, \omega)$ s'exprime de la manière suivante [Kra93] :

$$F(x, \omega) = F(X_{eq}, \omega_{eq}) + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(X_{eq}, \omega_{eq})} (x - X_{eq}) + o(x - X_{eq}) + \frac{\partial F}{\partial \omega} \Big|_{(X_{eq}, \omega_{eq})} (\omega - \omega_{eq}) + o(\omega - \omega_{eq})$$

où : $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ est la matrice Jacobienne de F , $\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)$ est un vecteur colonne, et les vecteurs colonne $o(x - X_{eq})$ et $o(\omega - \omega_{eq})$ sont négligeables devant $(x - X_{eq})$ et $(\omega - \omega_{eq})$ respectivement.

Comme $F(X_{eq}, \omega_{eq}) = 0$, on approxime le comportement du système par :

$$\dot{x} \approx \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(X_{eq}, \omega_{eq})} (x - X_{eq}) + \frac{\partial F}{\partial \omega} \Big|_{(X_{eq}, \omega_{eq})} (\omega - \omega_{eq})$$

Pour notre problème où le point d'équilibre considéré est l'origine, la dynamique du système linéarisé tangent est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_c \\ \theta_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega$$

Avec cette approximation linéaire et grâce à la théorie des systèmes linéaires, on sait qu'il est possible de trouver une valeur de la commande garantissant la convergence du système vers zéro. Par exemple, si on utilise un placement de pôles à $-\alpha_1, -\alpha_2$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$. La commande qu'il faut appliquer sera :

$$\omega = -\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{v}\right) y_c - (\alpha_1 + \alpha_2) \theta_c.$$

Quelques tests effectués pour montrer l'efficacité de la loi de commande sont représentés sur la figure 2.4.

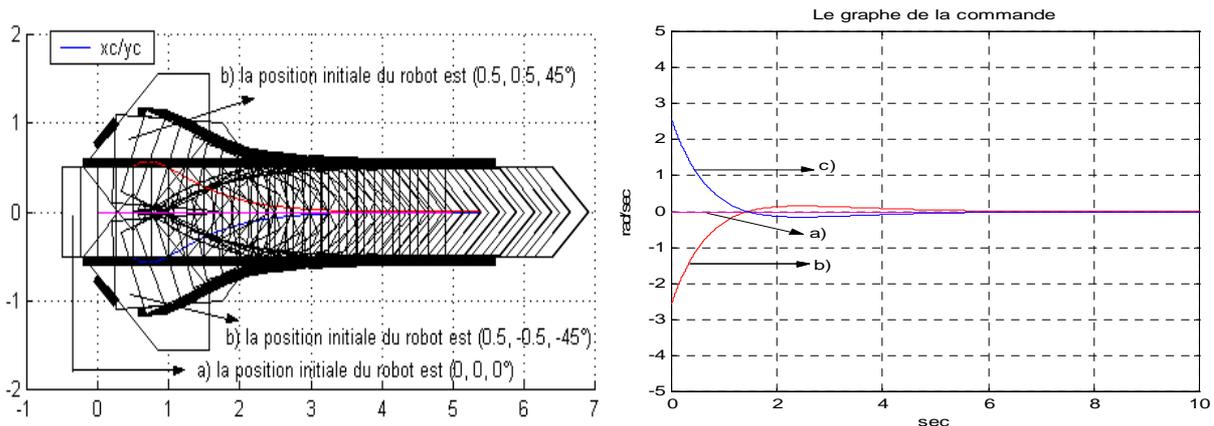


Figure 2.4 : Commande d'un robot le long de l'axe horizontal

II.2.2. La méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov consiste à concevoir une loi de commande en fonction de l'état (et éventuellement du temps), de manière à construire une fonction de « potentiel ».

Nous présentons dans l'annexe B, les théorèmes de stabilité au sens de Lyapunov, garantissant que lorsque ces fonctions d'énergie décroissent au cours du temps, le système converge à l'origine.

Exemple

Reprenant l'exemple du paragraphe (II.2.1) (voir aussi l'équation (2.2)). En supposant la vitesse du véhicule positive ($v > 0$), nous allons voir qu'en choisissant une loi de commande appropriée, il est possible de garantir la convergence du système en utilisant la méthode directe de Lyapunov.

En faisant référence à [Ham96][Agu97], considérons respectivement la loi de commande et la fonction de Lyapunov suivantes :

$$\omega = -v(y_c + \theta_c + \sin \theta_c)$$

$$V = \frac{1}{2}(y_c^2 + (y_c + \theta_c)^2) + (1 - \cos \theta_c)$$

La dérivée première de V , définie par :

$$\dot{V} = -v(\theta_c \sin(\theta_c) + \sin^2(\theta_c) + (y_c + \theta_c)^2)$$

est négative sauf pour des valeurs de y_c et θ_c pour lesquelles elle s'annule, c.-à-d. $\theta_c = \{0, +\pi, -\pi\}$, $y_c = 0$.

En utilisant ces deux dernières expressions, nous pouvons conclure, conformément au théorème de Lyapunov, que lorsque $\theta_c(t) \in (-\pi, \pi)$ le système convergera vers l'origine. Ceci est illustré sur la figure 2.5.

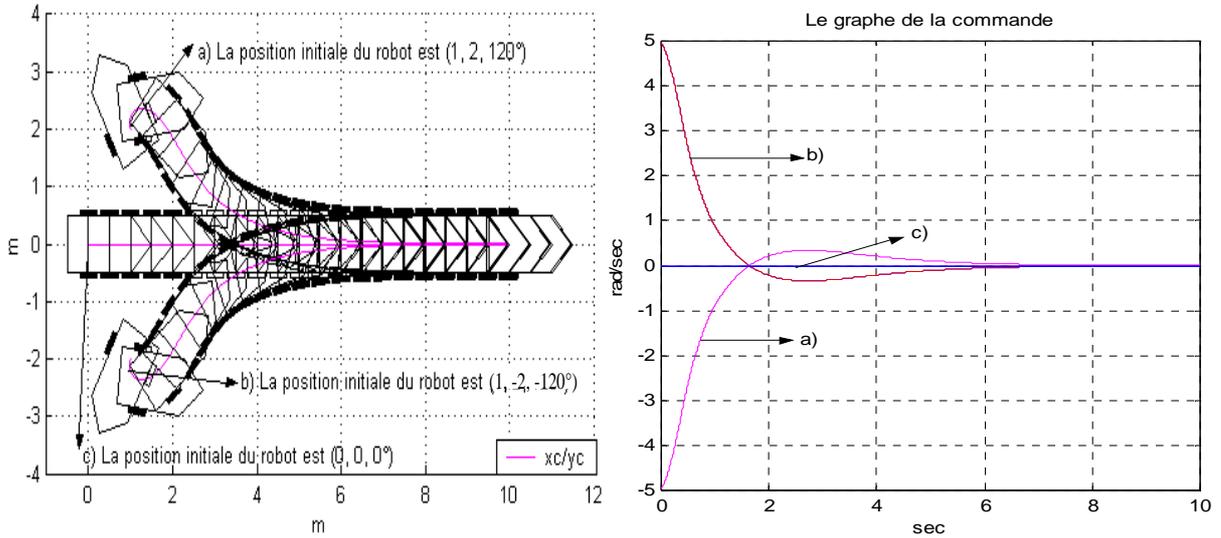


Figure 2.5 : Suivi d'une ligne horizontale par la méthode directe de Lyapunov

II.2.3. Théorème de LaSalle et lemme de Barbalat

Le théorème de LaSalle et le lemme de Barbalat peuvent être utilisés pour garantir la stabilité asymptotique d'un système, dans le cas où l'analyse de Lyapunov ne permet pas de le faire.

Nous allons illustrer la manière dont ces lemmes peuvent être combinés avec la théorie de Lyapunov, en les appliquant au problème de suivi de ligne droite énoncé dans la section (II.2.1). L'énoncé de ces lemmes est donné dans l'annexe B. D'autres exemples sur l'application du lemme de Barbalat ou bien du théorème de LaSalle peuvent être consultés dans [Slo91].

Exemple

Reprenons les notations introduites à la section (II.2.1). Considérons la loi de commande, qui a été proposée pour le problème de suivi de chemin dans [Sam92][Lau01] et que nous allons appliquer à notre exemple (système (2.2)), définie par :

$$\omega = -k_1 v y_c \left(\frac{\sin \theta_c}{\theta_c} \right) - k_2 |v| \theta_c. \quad k_1, k_2 > 0 \quad (2.4)$$

Soit la fonction de Lyapunov :

$$V = k_1 \left(\frac{y_c^2}{2} \right) + \left(\frac{\theta_c^2}{2} \right)$$

En calculant la dérivée de V , on trouve :

$$\dot{V} = -k_2 |v| \theta_c^2 \leq 0 \quad (2.5)$$

Nous allons considérer le théorème de LaSalle, puis le lemme de Barbalat pour conclure :

En utilisant la fonction de Lyapunov V et le théorème de LaSalle, nous pouvons affirmer que les variables y_c et θ_c convergent vers zéro. D'abord, on détermine l'ensemble P défini par l'ensemble des points pour lesquels $\dot{V} = 0$ ($\theta_c = 0$). Puis, on calcule le plus grand ensemble invariant $M \subset P$ respectant la relation $\dot{\theta}_c = 0$. Dans ce cas, on trouve que l'ensemble M est constitué par l'unique point $(\dot{\theta}_c, \theta_c) = (0, 0)$.

$$\text{Or, } \dot{V} = 0 \Rightarrow (\theta_c, \dot{\theta}_c) = (0, 0) \Rightarrow \dot{\theta}_c = -k_1 v y_c = 0$$

L'utilisation du lemme implique que le système converge vers l'ensemble M , c.-à-d. $(y_c, \theta_c) = (0, 0)$.

On peut montrer également que θ_c converge vers zéro en appliquant le lemme de Barbalat à la fonction V . Ensuite, la convergence de y_c est garantie en faisant le même raisonnement que celui de la fonction V pour la variable θ_c . En consultant l'équation (2.5), nous pouvons assurer que $\theta_c \rightarrow 0$ quand $\dot{V} \rightarrow 0$. L'utilisation du lemme va nous permettre de prouver la convergence de \dot{V} si V converge vers une valeur limite V_l quand $t \rightarrow \infty$, et si \ddot{V} est bornée. La première condition ($V \rightarrow V_l$) est vérifiée puisque $V(t)$ n'est pas une fonction croissante. De plus, comme

$$V(y_c(t), \theta_c(t)) \leq V(y_c(0), \theta_c(0)) \Rightarrow |\theta_c(t)| \leq \theta_{\max}, |y_c(t)| \leq y_{\max}$$

et

$$|\dot{\theta}_c(t)| = |\omega(t)| \leq |v| (k_1 |y_c(t)| + k_2 |\theta_c(t)|) \leq |v| (k_1 y_{\max} + k_2 \theta_{\max})$$

on vérifie que θ_c , $\dot{\theta}_c$ puis $\ddot{V}(\theta_c, \dot{\theta}_c)$ sont bornées. Par suite, on conclut sur la continuité uniforme de \dot{V} et que $\dot{V} \rightarrow 0$. Par conséquent, on en déduit la convergence de θ_c vers zéro.

en réécrivant la dérivée de θ_c en fonction de la commande lorsque $t \rightarrow \infty$

$$\dot{\theta}_c = -k_1 v y_c \left(\frac{\sin(\theta_c)}{\theta_c} \right) - o(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} o(t) = 0$$

et en vérifiant que $y_c \left(\frac{\sin \theta_c}{\theta_c} \right)$ est uniformément continue (puisque sa dérivée est bornée),

l'application du lemme de Barbalat une deuxième fois entraîne que $\dot{\theta}_c \rightarrow 0$, et $y_c \rightarrow 0$. De cette façon, la convergence totale du système est assurée.

II.2.4. Retour d'Etat Linéarisant

La linéarisation par retour d'état peut être interprétée comme une nouvelle modélisation du système réalisée à partir d'un autre point de vue. Un nouveau système de coordonnées, différent de celui qui a été pris initialement, est considéré afin de représenter le système non-linéaire sous une forme linéaire.

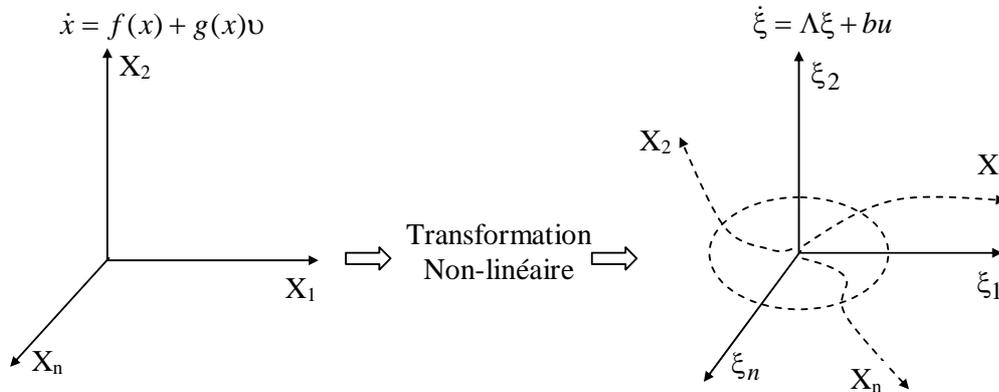


Figure 2.6 : Principe du retour d'état linéarisant

Il ne s'agit pas d'une approximation du système mais d'une transformation exacte. Pour cette raison, le résultat est plus précis que celui obtenu par linéarisation tangente. Néanmoins, à cause de la nature non-linéaire du système, la méthode par linéarisation exacte ne permet pas dans tous les cas d'obtenir une modélisation globale, i.e. le résultat de la transformation n'est valable que dans une région de l'espace.

Le principal intérêt d'une telle représentation est de pouvoir utiliser la théorie des systèmes linéaires qui est beaucoup plus riche que celle des systèmes non-linéaires.

Exemple

Considérons encore une fois l'exemple du véhicule qui doit suivre l'axe horizontal du repère de référence (voir section (II.2.1)). Par commodité, nous écrivons le système (2.2) sous la forme générique suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{avec: } x = \begin{pmatrix} y_c \\ \theta_c \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} v \sin \theta_c \\ 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En considérant que $h(x) = y_c$, la dérivée de la première ligne de (2.2) devient :

$$\dot{y}_c = v \sin \theta_c$$

Lorsqu'on dérive cette équation, nous trouvons que la loi de commande ω apparaît pour la première fois

$$\ddot{y}_c = \omega v \cos \theta_c$$

Nous allons chercher, d'une manière plus formelle, la valeur de la fonction de sortie $h(x)$ à l'aide du lemme de linéarisation (voir l'annexe B ou [Slo91]). À ce propos, il suffit de vérifier que les vecteurs $\{g, ad_f g\}$ sont linéairement indépendants, puisque la condition d'involutivité est triviale. Les étapes de calcul permettant de déterminer le modèle linéaire sont données dans l'annexe B.

La transformation linéarisante obtenue est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= y \\ \xi_2 &= v \sin \theta_c \\ u &= v \omega \cos \theta_c\end{aligned}\tag{2.7}$$

Le système linéaire résultant de cette transformation est donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u$$

L'équation (2.7) est définie dans le domaine X_1 ou bien dans le domaine X_2 (voir figure 2.7).

La figure (2.7) montre les projections de X_1 et X_2 sur le plan (θ_c, ξ_2) , pour $v = 1$. Avec ce graphique, nous pouvons voir effectivement que lorsque le système est représenté dans X_1 , lorsque $\xi_2 \rightarrow 0$, alors nécessairement $\theta_c \rightarrow 0$. De manière similaire, si X_2 est l'espace où le système est représenté en amenant $\xi_2 \rightarrow 0$, alors $\theta_c \rightarrow \pm\pi$.

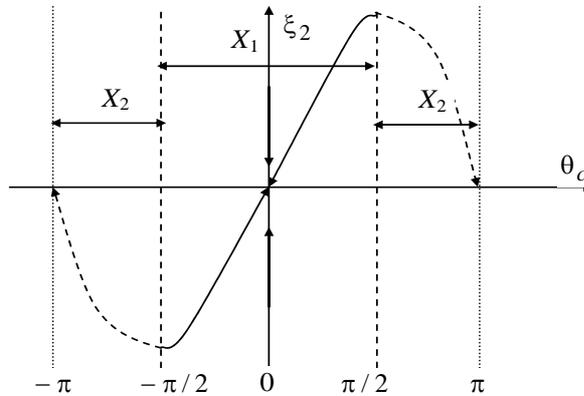


Figure 2.7 : Définition de X_1 et X_2 dans le plan (θ_c, ξ_2) , avec $v = 1$.

Il est donc clair que pour stabiliser le système à l'origine, il est nécessaire de travailler dans le domaine X_1 . Ainsi la commande est définie de manière locale dans cette région de l'espace.

Dans cet exemple, la linéarisation exacte permet d'obtenir deux représentations locales différentes. Deux phénomènes peuvent être vérifiés :

1. Le difféomorphisme (Voir l'annexe B) ξ ne peut pas être défini dans tout l'espace à la fois, car il n'est pas possible de construire sa fonction inverse pour $\theta_c \in (-\pi, \pi)$.

2. Pour $\theta_c = \pm \frac{\pi}{2}$ la commande ω (vitesse angulaire) ne peut pas être définie, car sa relation avec u est singulière pour ces valeurs de θ_c .

II.3. Commentaire sur les lois de commande appliquées

Nous faisons maintenant une récapitulation des techniques de commande non-linéaire, en décrivant la façon dont elles s'appliquent à l'exemple du suivi de ligne droite (voir section (2.2)).

Bien que la technique par linéarisation tangente et celle du retour d'état linéarisant permettent de trouver une commande de façon simple, elles présentent l'inconvénient de ne pas générer une commande globale. Avec la méthode du linéarisé tangent on obtient une commande qui est définie autour de zéro. Quant à la technique par retour d'état linéarisant, la commande déduite est définie pour des valeurs de l'angle d'orientation dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

Pour les autres techniques que nous avons énoncé (la méthode directe de Lyapunov, l'utilisation du théorème de LaSalle et du lemme de Barbalat), la détermination de la loi de commande garantissant la stabilité du système est beaucoup plus délicate. La tâche est d'autant plus difficile si de plus on souhaite étudier et garantir la robustesse du système.

En ce qui concerne la méthode directe de Lyapunov, il n'est pas facile de régler les paramètres de la loi de commande afin d'obtenir une réponse convenable du système. Certains auteurs ont utilisé la méthode du linéarisé tangent pour fixer ces paramètres de manière locale [Sam92], [Ham96].

Afin de montrer la convergence du système soumis à une loi de commande donnée, dans l'hypothèse où il n'y a pas de perturbations, il est possible d'employer le théorème de LaSalle où le lemme de Barbalat lorsque la dérivée de la fonction de Lyapunov ne dépend pas de toutes les variables.

Néanmoins, si on n'utilise pas un autre type d'information dans le cas bruité, on ne peut rien déduire sur la convergence du système. Ceci est une conséquence du fait que la dérivée de la fonction de Lyapunov va dépendre du bruit, ce qui ne permet plus d'employer ces lemmes.

II.4. Robustesse des systèmes bouclés

L'élaboration d'une loi de commande en boucle fermée permet de rendre le système moins sensible aux perturbations et aux erreurs de modélisation. Toutefois, si les perturbations sont trop fortes et si on ne les prend pas en compte dans la conception de la commande, rien ne permet d'assurer que le système aura le comportement désiré.

De manière générale, l'objet de la théorie de la commande robuste est de déterminer des commandes de manière à :

- Prendre explicitement en compte les incertitudes de mesure et de modélisation du système ainsi que les perturbations afin de les compenser.
- Garantir le bon fonctionnement du système par rapport à un ensemble de critères donné.
- Réaliser une tâche désirée avec une certaine précision.

La conception d'une telle loi est caractérisée dans la plupart des cas, par une étude préliminaire du comportement nominal du système, suivi d'une analyse de sa réponse en présence d'incertitudes et de perturbations éventuelles.

Après avoir donné quelques idées liées à la robustesse, nous allons :

- Expliquer pourquoi il est nécessaire de concevoir des commandes robustes en robotique mobile.
- Présenter de manière formelle les concepts de robustesse et de stabilité asymptotique robuste.

II.5. Le besoin d'élaborer des lois de commande robuste en robotique mobile

A ce jour, la majorité des travaux dédiés à l'élaboration de loi de commande en boucle fermée pour les robots mobiles font l'hypothèse implicite que la configuration exacte du véhicule est connue à chaque instant. Cette supposition est connue par les roboticiens comme étant irréaliste pour les raisons suivantes :

- Modélisation imprécise du système, i.e simplification du modèle du robot, sol non uniformément plat.
- Glissement des roues sur le sol.
- Erreur non négligeable sur la localisation du robot.

Nous discuterons par la suite chacune d'elles :

On peut considérer des modèles qui tiennent plus ou moins compte de la dynamique réelle du robot. Particulièrement, bien qu'une modélisation cinématique facilite la conception de la loi de commande, il est nécessaire de rechercher un modèle plus élaboré prenant mieux en compte la dynamique des actionneurs. Dans tous les cas, le modèle choisi doit être considéré comme inexact.

Contrairement aux robots manipulateurs qui sont fixés au sol à leur base, et pour lesquels la position de l'organe terminal peut être calculée de manière précise à partir de mesures de chaque liaison, les robots mobiles peuvent glisser pendant leur mouvement, entraînant une dérive par rapport à la position estimée. Même si ce phénomène peut être en partie corrigé par le gyroscope, l'erreur de dérive croissante au cours du temps est inévitable.

Grâce aux informations provenant de capteurs extéroceptifs, les méthodes de relocalisation permettent d'obtenir une estimation de la localisation avec une erreur bornée. Bien que cette erreur soit faible, il est nécessaire d'en tenir compte dans la boucle de

commande. Il apparaît donc nécessaire de chercher à déterminer des lois de commande robustes par rapport à ces différentes erreurs.

II.6. Système robuste et stabilité asymptotique robuste

De manière plus rigoureuse, la notion générale de robustesse se définit comme suit [Agu97] :

Définition 1 : Un système est robuste par rapport à une propriété si le système présente un certain degré d'insensibilité par rapport à cette propriété vis-à-vis des incertitudes.

La propriété principale à laquelle nous nous intéressons est la stabilité asymptotique sous l'hypothèse que les perturbations et les incertitudes sont bornées. Notre but est de trouver un moyen de vérifier que le système va converger vers un ensemble invariant défini dans un voisinage de l'origine.

En vue de définir la notion de stabilité robuste, nous supposons que le système dynamique représenté sous la forme

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (2.8)$$

est perturbé par des fonctions inconnues mais bornées $\delta_\varepsilon(t)$. Ensuite, au lieu d'utiliser dans la commande les valeurs d'état réelles x , on utilise leurs valeurs estimées $\hat{x} = x + \delta x$, où δx représente l'erreur bornée de mesure. Le système devient :

$$\dot{x} = F(x, u(\hat{x}), \delta_\varepsilon(t)) \quad (2.9)$$

Définition 2 : Soit $U \subset V \subset \mathcal{R}^n$ deux ensembles non vides et compacts. Un système en boucle fermée de la forme (2.9) a une *stabilité asymptotique et robuste par rapport à U*, si toute trajectoire $x(t)$ issue de V est définie $\forall t \geq 0$, et converge asymptotiquement vers U (voir figure 2.8). De plus, si $V = \mathcal{R}^n$, alors la stabilité est aussi globale.

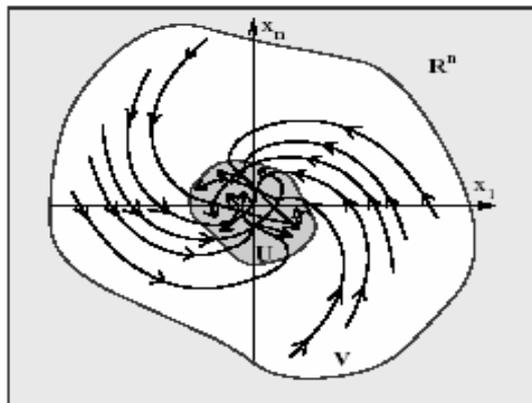


Figure 2.8 : Stabilité asymptotique robuste

S'il est possible de compenser les perturbations, de façon à continuer de garantir la convergence du système à l'origine, la définition précédente correspond à la notion de stabilité asymptotique vers le point d'équilibre. Ceci est possible dans le cas où les paramètres

de la modélisation du système sont variables, alors que dans le cas nominal ils sont supposés constants.

II.7. Conclusion

Il existe un grand nombre de travaux dédiés au problème de la stabilisation asymptotique de systèmes non-linéaires avec incertitudes. Une technique fréquemment utilisée concerne l'utilisation de la commande à structure variable, déterminée par l'introduction d'un terme discontinu dans la loi nominale. Les références [Utk77][Itk78] constituent une bonne source d'exemples de cette technique et de son utilisation en présence de perturbations.

Outre les propriétés de robustesse, la commande à structure variable présente l'avantage de pouvoir être combinée avec d'autres méthodes.

REFERENCE

- Règles de construction parasismique règle PS applicables aux bâtiments-PS92, Eyrolles
1996, p.141-156
2. Djelal, C., David, E., Buyle-Bodin, F. «Utilisation de plaques en composite pour la réparation de poutres en béton armé endommagées», Proceeding of ACMBS-2, Canadian Society for Civil Engineering, Montréal, p. 581-588.
3. Mckennaj, .K., Erki, M.A. (1994) «Strengthening of Reinforced Concrete Flexural Members Using Externally Applied Steel Plates and Fiber Composite Sheets»-a Survey, Canadian journal of Civil Engineering, no. 21, p.16-24.
4. Dorlotl, M., Babon, J P., Masounavie, J., (1986) «Des matériaux», Edition de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 2' édition, Canada p, 467.
5. Meier, U., (1992) «Carbon Fiber-Reinforced Polymers»: Modern Materials in Bridge Engineering, Structural Engineering International, no.1, p.7-12.
6. Dbeloims, M., Picard, A., Beaulie, U., (1992) «Renforcement de poutres en béton armé à l'aide de matériaux composites»: études théorique et expérimentale, Proceedings of ACMBS-1, Canadian Society for Civil Engineering, Montréal, p265275.
7. Meier, U., Kaiser, H., (1991) «Strengthening of Structures with CFW Laminates, Proceedings of Advanced Composites Materials in Civil Engineering Structures» (ASCE), Las Vegas, Nevada, p.224-232.
8. McCrum, N.G., Buckley, C.P., (1988) «Principles of Polymer Engineering», Oxford University Press, Oxford.
9. Ritchie, A., Thomas, D.A., Le-Wu, L., Connelly, M., (1991) «External reinforcement of Concrete Beams Using Fiber Reinforced Plastics», ACI Structural Journal, vol. 88, no.4, p. 490-500.

10. Missihoun, M., (1995) «Renforcement en flexion de poutres en béton armé a l'aide de matériaux composites: optimisation de l'orientation des fibres», Mémoire de maîtrise, Département de génie civil, Université de Sherbrooke, 160 p.
11. Chajes, M.J., Januszka, T.F., Mertz, D.R., Thomson, T.A.J.R, Finch, W.W.JR (1995) «Shear Strengthening of Reinforced Concrete Beams Using Externally Applied Composite Fabrics», ACI Structural Journal, vol. 92, no. 3, p. 295-303.
12. Sato, Y., Ueda, T., Kakuta, Y., Tanaka, T., (1996) «Shear Reinforcing Effect of carbon Fiber Sheet Attached to Side of Reinforced Concrete Beams», Proceedings of ACMB S-2, Canadian Society for Civil Engineering, Montréal, p.621-628.
13. Taljsten, B., (1997) «Strengthening of Concrete Structures for Shear with Bonded CFRP-a Fabrics, Recent Advances in Bridge Engineering», Proceedings, Zürich, p.57-64.
14. Umezu, K., Fujta, M., Nakai, H., Tamaki, K., (1997) « Shear Behavior of RC Beams with aramid Fiber Sheet», Proceedings, FRPRCS -3, Sapporo, Japan, p.491-498.
- 15 Triantafillou, C., Deskovinc, N., Deuring, M. (1992). «Strengthening of Concrete Structures with Prestressed Fiber Reinforced Plastic Sheets», ACI Structural Journal, vol.89, no.3, p. 235-244.
16. Triantafillou, C., Plevris, N. (1992) «Strengthening of RC Beams with Epoxy-Bonded Fiber-Composite Materials», Materials and Structures, no.25, p.201-211.
17. M' bzaa, 1. (1995) «Renforcement en flexion de poutres en béton armé à l'aide de lamelles en matériaux composites: optimisation de la longueur des lamelles», Mémoire de maîtrise, Département de génie civil, Université de Sherbrooke, p 139.
18. Wang,Y. Koudur.V, «Variation of strength and stiffness of fiber Reinforced polymer reinforcing bars with temperature », cement and concrete, 27 (2005), p. 64874.
19. Chicoine, T. (1997) «Conception et analyse d'ancrages sur des poutres renforcées en flexion à l'aide de matériaux composites », Mémoire de Maîtrise, Département de génie civil, Université de Sherbrooke, 101 p.
20. Varastehpour, H., Hamelin, P. (1996b) « Experimental Study of RC Beams Strengthened with CFRP Plate », Proceedings of ACMBS-2, Canadian Society for Civil Engineering, Montréal, p. 555-563.

21. Pikaloutas, K., He, G.H., and Waldron, P., (1997), « CFRP plate strengthening of RC Beams», International conference on structure faults and repair», Edinburgh, 1997. p.119-127.
22. Pinzelli, R., (1999), « Kavelar aramide fiber for external strengthening and repair of concrete structures ». International conference on structural faults et repair, London, 1999.
23. Tumailan, G., Nanni, A., Ibel, T and Fukuyama, H, (2002) « FRP composite for strengthening civil infrastructure around the world », SAMPE journal vol .38, no.5 September / October 2002, p.9-15.
24. Dhatt, G., Touzot, G. (1981), « Une présentation de la méthode des éléments finis », Malouine SA, Paris, et les presses de l'université Laval, Québec.
25. Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C and Topp, L.J (1956) « Stiffness and deflection analysis of complex structures », Journal of Aeronautical Science, vol.23, p.805-823.
26. American concrete institute (2002), 440-2R-02: « Design and construction of externally bonded FRP system for strengthening concrete structures », American concrete institute.
27. Barbosa, A.F. and Ribeiro G.O. (1998) « Analysis of reinforced concrete structures using ANSYS nonlinear concrete model », computational mechanics, Barcelona, 1998.
28. Beber A.J., Filho A.C and Campagnolo J.L. (1999) « Flexural strengthening of R/C beams with CFRP sheets », Structures faults and repair conference, London.1999.
29. Buyle-Bodin F., David E. and Ragneau E. (2002) « Finite element modelling of flexural behaviour of externally bonded CFRP reinforced concrete structures », Engineering structures, no 24, 2002, p.1423-1429.
30. Parent, S. and Labossière, P. (2000) « Finite element analysis of reinforced concrete columns confined with composite materials », Canadian journal of civil Engineering, no 27, 2000. p. 400-411
31. BAEL 91 modifié 99 et DTU associés Jean-Pierre Mouglin, Eyeolles, p.75-81
32. (ENV 1992-1-1:1991, 1991) Calcul des structures en béton - Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, NBN B 15-002, Décembre 1995, 1ère édition, Institut Belge de Normalisation, Bruxelles.
33. (prEN 1-1, 2003) prEN 1992-1-1, Eurocode 2 : Calcul des structures en béton,

Partie 1-1 : Règles générales et règles pour le bâtiments,
Bruxelles 2003.

34. (prEN 1-1, 2003) prEN 1992-1-1, Eurocode 2 : Calcul des
structures en béton, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour
le bâtiment, Bruxelles 2003.

35. Park, Pauley, « reinforced concrete structures » John Wiley
and Son 1974.

36. Kaw, A.K., «Mechanics of Composite Materials », CRC Press
LLC, Boca Raton, Florida, 1997.

37. Gibson, R.F., « Principles of Composite Material Mechanics »,
McGraw-Hill, Inc., New York, New York, 1994.

38. ANSYS, «ANSYS User's Manual Revision 5.5 », ANSYS, Inc.,
Canonsburg, Pennsylvania, 1998.

39. Bangash, M.Y. H., Concrete and Concrete Structures:
«Numerical Modeling and Applications », Elsevier Science
Publishers Ltd., London, England, 1989.

40. Huyse, L., Hemmaty, Y., and Vandewalle, L., « Finite Element Modeling of Fiber Reinforced Concrete Beams », Proceedings of the ANSYS Conference, Vol. 2, Pittsburgh, Pennsylvania, May 1994.
41. Kachlakev, D.I. and McCurry, D., Jr., « Simulated Full Scale Testing of Reinforced Concrete Beams Strengthened with FRP Composites: Experimental Results and Design Model Verification », Oregon Department of Transportation, Salem, Oregon, June 2000.
- 42 Règles Parasismiques Algériennes RPA 99/version 2003, document technique réglementaire.
43. Règles Parasismiques Algériennes RPA 99/version 2003, document technique réglementaire d.t.r-b.c.2.48, 2004.
44. Bathe, K. J., « Finite Element Procedures », Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
45. Adams, V. and Askenazi, A., «Building Better Products with Finite Element Analysis », On Word Press, Santa Fe, New Mexico, 1998.
46. V. Davidovici., «La construction en zone sismique», Le moniteur, 1999. 47. V. Davidovici., «Rapport de mission séisme de Boumedes 21 mai 2003».
48. Jean Luyckx, « Composites à fibres de carbone dans le génie civil », Centre Français d'exploitation, Techniques de l'Ingénieur, Année 2003, pp.1-10.
- 49 Mouloud Abdessemed, « Comportement des poutres isostatiques en béton armé renforcées par tissus et lamelles de fibres de carbone », Mémoire de Magister sous la direction du prof. S. KENAI, Université de Blida, 2003.
- 50 M.Bouhamadi, « Le renforcement des structures par le composite en fibres de carbone en Algérie », Actes du 3ème séminaire sur les technologies du béton, Le Béton, du Traditionnel à la Haute Performance, ACC, Alger, 17 et 18 Septembre 2006, pp.1-9.

51 A.Bensalma, « Renforcement des structures par le tissu en fibres de carbone », Actes du 3^{ème} séminaire sur les technologies du béton, Le Béton, du Traditionnel à la Haute Performance, ACC, Alger, 17 et 18 Septembre 2006, pp.1-8.

52 R.Bayasli, « Réhabilitation du Pont Blanc EL-Harrach », Actes du 3^{ème} séminaire sur les technologies du béton, Le Béton, du Traditionnel à la Haute Performance, ACC, Alger, 17 et 18 Septembre 2006, pp.1-8.

53 Ahmed Laichaoui, « Analyse expérimental du comportement des poutres en béton armé renforcées par matériaux composites », Mémoire de Magister sous la direction de M.Abdessemed et A.Bali, ENP, Alger, 2006.

commande floue par mode glissant

Chapitre IV

Commande floue par mode glissant

Les prémisses de la logique floue sont apparues avant les années 1940 avec les premières approches du concept d'incertitude. Il a fallu attendre jusqu'à 1965 pour que le concept de sous-ensemble flou (fuzzy en anglais) soit proposé par L.A.Zadeh [Zad65], qui a contribué à la modélisation de phénomènes sous forme floue. En 1974, M.Mamdani [Mam75] expérimentait la théorie énoncée par Zadeh sur une chaudière à vapeur, introduisant ainsi la commande floue dans la régulation d'un processus industriel. Grâce au chercheur japonais M.Sugeno, la logique floue a été introduite au Japon dès 1985. Les sociétés japonaises comprirent l'avantage de la logique floue qui réside dans les points suivants :

- Facilité d'implémentation.
- Solution des problèmes complexes.
- Robustesse vis-à-vis des incertitudes.
- Possibilité d'intégration du savoir d'un expert.

Ainsi, ils ont contribué à la promotion de cette technique, en développant des applications dont la majorité étaient orientées vers la régulation d'appareils de grande consommation ou de processus industriels.

Actuellement, il est possible de développer une commande floue fiable de manière rapide. L'application des commandes floues a fait ses preuves et n'est plus du domaine exclusif de la recherche. Par contre, il faut noter que les techniques utilisées actuellement en matière de réglage des paramètres d'un correcteur flou ou bien de la détermination de conditions garantissant a priori la stabilité du système sont basées sur l'expérience (des méthodes empiriques). Ceci ouvre les portes à de nouvelles perspectives de recherche dans le domaine [Bor98].

IV.1. Généralités sur la logique floue

IV.1.1. La théorie des sous ensembles flous

Un ensemble classique C de l'univers de discours ou du domaine D comme le montre la figure 4.1 peut être représenté par l'utilisation de la fonction caractéristique μ_c définie par :

Définition :

La fonction $\mu_c : D \rightarrow [0,1]$ est une fonction caractéristique de l'ensemble classique C si et seulement si pour tout d :

$$\mu_c(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \in C \\ 0 & \text{si } d \notin C \end{cases} \quad (4.1)$$

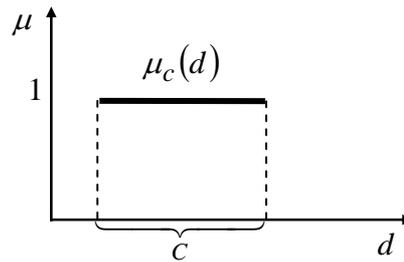


Figure 4.1 : La fonction caractéristique d'un l'ensemble classique

Par contre dans la théorie des ensembles flous, la fonction caractéristique est généralisée à une fonction d'appartenance qui attribut à chaque $d \in D$ une valeur dans l'intervalle $[0,1]$ comme le montre la figure 4.2. L'ensemble F défini par une telle fonction caractéristique est appelé ensemble flou.

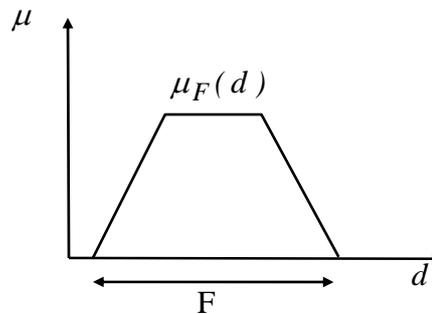


Figure 4.2 : Fonction d'appartenance d'un ensemble flou

IV.1.2. Fonction d'appartenance

Définition

La fonction d'appartenance μ_F de l'ensemble flou F est une fonction définie par :

$$\mu_F : D \rightarrow [0,1].$$

Où chaque élément $d \in D$ a un degré d'appartenance $\mu_F(d) \in [0,1]$. L'ensemble flou est alors complètement déterminé par l'ensemble de paires :

$$F = \{(d, \mu_F(d)) / d \in D\} \quad (4.2)$$

Une fonction d'appartenance est une courbe qui définit le degré d'appartenance de chaque point dans l'espace d'entrée à l'ensemble flou. Ses valeurs sont comprises entre 0 et 1.

➤ Les types des fonctions d'appartenance

Les fonctions d'appartenance les plus simples sont la fonction triangulaire définie par trois points formant un triangle, et la fonction trapézoïdale qui est juste une courbe tronquée de la courbe triangulaire (voir la figure 4.3). Les équations mathématiques et les courbes correspondantes de quelques fonctions d'appartenances très connues sont rapportées dans l'annexe (c).

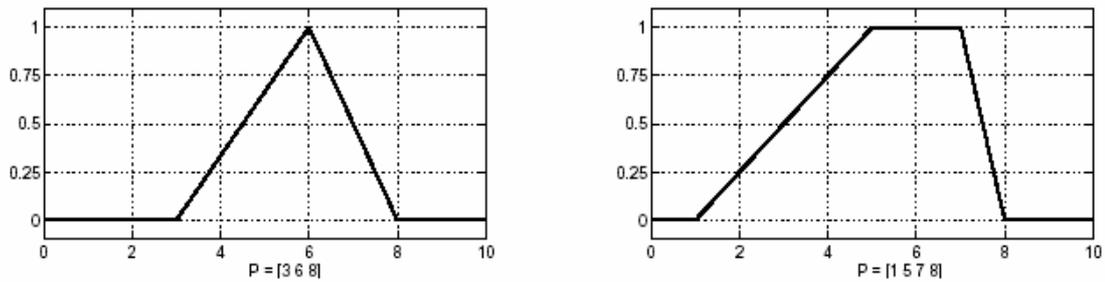


Figure 4.3 : Les fonctions d'appartenance
a- Fonction triangulaire, b- Fonction trapézoïdale

IV.1.3. L'univers de discours

Afin de définir la notion d'univers de discours, prenons l'exemple de la variable «température». L'utilisateur pourra décrire cette variable par un certain nombre de mots : «chaud», «froid», «tiède» ...etc. Pour chacun de ces prédicats, on pourra donner une fonction d'appartenance. Ainsi, l'univers de discours sera considéré comme le domaine de fonctionnement du processus et couvrira l'ensemble des valeurs prises par cette variable.

Fonctions d'appartenance

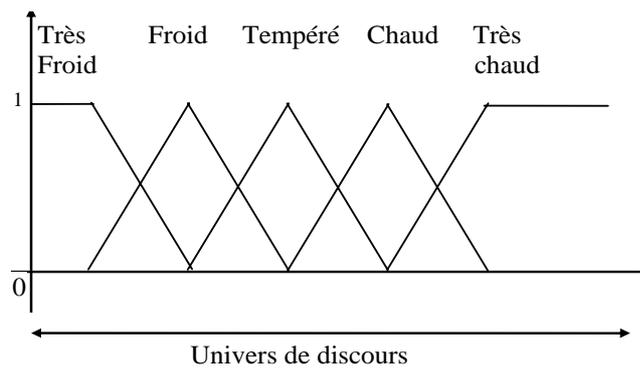


Figure 4.4 : Univers de discours et classe d'appartenance

IV.1.4. Propriétés des ensembles flous

1- Un ensemble flou A est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1] : \mu_A(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \tag{4.3}$$

La figure 4.5 montre un ensemble flou convexe, et un ensemble flou non convexe.

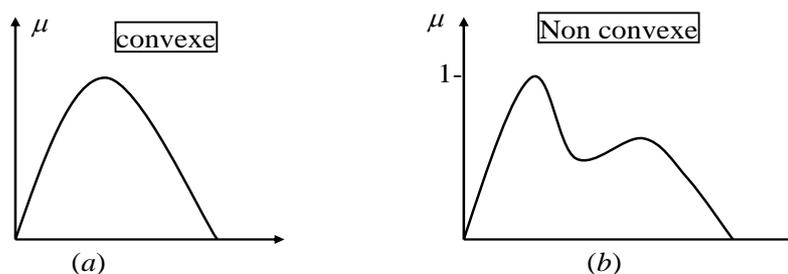


Figure 4.5 : Exemple d'ensembles flous
(a) Ensemble flou convexe, (b) Ensemble flou non convexe

2- Le support d'un ensemble flou A est défini par :

$$S(A) = \{u \in X / \mu_A(u) > 0\} \quad (4.4)$$

C'est la partie de l'univers de discours X sur laquelle la fonction d'appartenance de A n'est pas nulle.

3- La largeur d'un ensemble flou convexe A avec un support $S(A)$ est définie par

$$largeur(A) = \sup(S(A)) - \inf(S(A)) \quad (4.5)$$

telles que :

$$\alpha = \sup(A) \quad \text{si} \quad \forall x \in A : x \leq \alpha \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x > \alpha - \varepsilon$$

$$\beta = \inf(A) \quad \text{si} \quad \forall x \in A : x \geq \beta \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x < \beta + \varepsilon$$

4- Le noyau d'un ensemble flou A est défini par :

$$noyau(A) = \{u \in X / \mu_A(u) = 1\} \quad (4.6)$$

IV.1.5. Les opérations dans les ensembles flous

1- Deux ensembles flous sont égaux ($A=B$) si et seulement si :

$$\forall x \in S : \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (4.7)$$

2- A est un sous ensemble de B ($A \subseteq B$) si et seulement si :

$$\forall x \in S : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (4.8)$$

3- La norme triangulaire ou norme-T : est une fonction $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ qui vérifie les critères suivants :

$$\begin{cases} T-1: & a \hat{*} b = b \hat{*} a \\ T-2: & (a \hat{*} b) \hat{*} c = a \hat{*} (b \hat{*} c) \\ T-3: & a \leq c \quad \text{et} \quad b \leq d \quad \text{implique} \quad a \hat{*} b \leq c \hat{*} d \\ T-4: & a \hat{*} 1 = a \end{cases} \quad (4.9)$$

L'opération d'intersection peut être définie par la T-norme.

4- La co-norme triangulaire ou norme-S, est une fonction $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ qui vérifie les mêmes critères que ceux de la norme-T sauf que T-4 est remplacé par :

$$S-4: a \hat{\vee} 0 = a \quad (4.10)$$

L'opération d'union peut être définie par la S-norme.

5- L'opération du complément C doit satisfaire :

$$\begin{cases} C-1: & c(0) = 1 \\ C-2: & a < b \quad \text{implique} \quad c(a) > c(b) \\ C-3: & c(c(a)) = a \end{cases} \quad (4.11)$$

Dans la théorie des ensembles flous par rapport à celle des ensembles classiques, l'interprétation des opérations telles que l'union, l'intersection et le complément est plus compliquée, car il faut faire intervenir des fonctions afin de les déterminer. L.Zadeh a proposé les formes suivantes:

$$\forall x \in X : \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) : \text{correspondant à la norme-T } \mu_A(x) \hat{*} \mu_B(x)$$

$$\forall x \in X : \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) : \text{correspondant à la norme-S } \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

$$\forall x \in X : \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) : \text{correspondant à la norme-C } (\mu_A(x)).$$

IV.1.6. Les variables linguistiques

Selon L.Zadeh : « Par "*variable linguistique*", on entend une variable dont les valeurs sont des mots ou des phrases dans le langage naturel ou artificiel. Par exemple l'âge est une variable linguistique si ses valeurs sont linguistiques et non pas numériques, i.e. jeune, non jeune, très jeune, vieux, pas très vieux, ...etc. plutôt que 20, 21... ».

Dans le raisonnement approximatif la notation suivante est utilisée : $\langle X, LX, x, M_X \rangle$

sachant que :

X représente le nom symbolique de la variable linguistique. Exemple : l'âge, la vitesse, la température...

$L\tilde{X}$ est l'ensemble des valeurs linguistiques que prend X . Une valeur linguistique représente un symbole pour une propriété particulière de X . Exemple : dans le cas d'une variable linguistique (température (T)) nous avons : $L\tilde{T} = \{froid, tempéré, chaud, \dots\}$.

\mathcal{X} est le domaine physique actuel, où X prend ces valeurs quantitatives. Exemple : pour la variable linguistique de température x peut être l'intervalle $[-6^\circ\text{C}, 35^\circ\text{C}]$.

M_x est la fonction qui donne "un sens" (une interprétation) à une valeur linguistique.

$M_x : LX \rightarrow L\tilde{X}$. avec $L\tilde{X}$ est la notation d'ensemble floue.

où : $L\tilde{X} = \sum_x \mu_{LX}(x) / x$ si \mathcal{X} est discrète.

$$L\tilde{X} = \int_x \mu_{LX}(x) / x \text{ si } \mathcal{X} \text{ est continue.}$$

IV.1.7. L'inférence floue Si-Alors (If-Then)

La règle de condition floue ou bien la règle de production (Si-Alors) floue est représentée symboliquement par :

Si <proposition floue> Alors <proposition floue>

Cette règle décrit la relation causale entre l'état du processus et les variables de contrôle de sortie.

IV.1.8. Les règles d'inférence floues

Dans le raisonnement approximatif, deux règles d'inférence sont d'importance majeure. La règle d'inférence compositionnelle et la règle du modus ponens généralisé. La première règle utilise une relation floue pour représenter la connexion entre deux propositions floues, et la seconde utilise la règle d'inférence Si-Alors qui représente implicitement une relation floue.

➤ La règle d'inférence modus ponens généralisé a le schéma suivant :

$$\begin{cases} S_1 \text{ est } Q_1; \\ \text{Si } S_1 \text{ est } P_1 \text{ Alors } S_2 \text{ est } P_2; \end{cases}$$

Définition

En présence d'une règle de la forme : " Si V est A alors W est B", et d'une observation de la forme V est A', la conclusion définie par le modus ponens généralisé est la proposition W est B'. [Bou95]

➤ La règle d'inférence compositionnelle est définie comme suit :

$$\begin{cases} S_1 \text{ est } Q_1; \\ S_1 \text{ R } S_2; \\ \therefore S_2 \text{ est } Q_2; \end{cases}$$

où $(S_1 \text{ R } S_2)$ est définie comme $(S_1 \text{ est en relation avec } S_2)$.

IV.2. Structure d'une commande floue

La structure conventionnelle d'une commande floue est représentée par la figure 4.6. Elle est composée de quatre blocs distincts dont les définitions sont données ci-dessous :

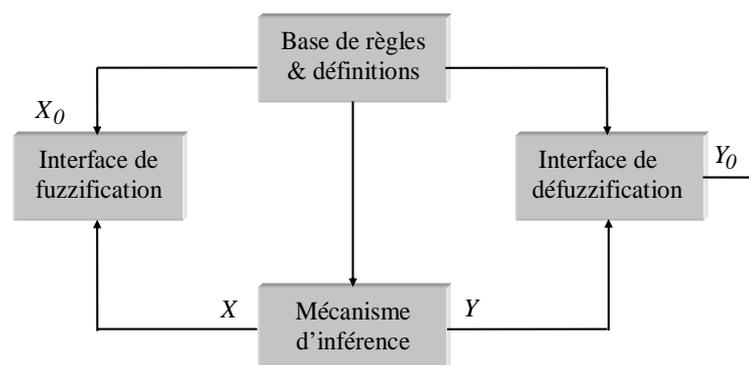


Figure 4.6 : Structure d'une commande floue

IV.2.1. La base de règles et définitions

Ce bloc regroupe l'ensemble des définitions utilisées dans la commande floue (univers de discours, partition floue, ...) ainsi que la base de règles.

IV.2.1.1. Partition floue

Pour créer et utiliser une base de règles, il est nécessaire que chaque univers de discours soit constitué de sous-ensembles flous particuliers.

La partition floue d'un univers de discours U consiste à définir n sous-ensembles flous F_i de façons à recouvrir U . C.-à-d. que pour tout élément x de U , il faut assurer une appartenance minimale ε à l'union des F_i .

$$\bigcup_{i=1}^n F_i \supseteq U_\varepsilon = \{x \in U; \mu_{U_\varepsilon}(x) = \varepsilon\} \quad (4.12)$$

IV.2.1.2. Base de règles

Une fois la partition des univers de discours réalisée, il est possible de définir la base de règles. Celle-ci caractérise les relations entre les classes d'événements possibles en entrée et les commandes correspondantes.

Si nous considérons n univers de discours U_i ($i = 1, \dots, n$) pour les prémisses des règles floues et pour chaque univers U_i une partition en m_i sous-ensembles flous est définie. Le nombre maximum de règles r_{max} est donnée par :

$$r_{max} = \prod_{i=1}^n m_i \quad (4.13)$$

IV.2.2. Interface de fuzzification

Cette interface permet de transformer les variables non floues provenant du monde extérieur en des sous-ensembles flous. L'opérateur, dit de fuzzification, associe à une mesure de la variable x_0 une fonction d'appartenance particulière $\mu_{X_0}(x)$.

➤ Si la mesure de la variable est exacte, le sous-ensemble doit être représenté par un fait précis. Nous utilisons comme opérateur de fuzzification la transformation dit du singleton, présentée sur la figure 4.7.a. La fonction d'appartenance du sous-ensemble X_0 est alors définie par :

$$\begin{aligned} \mu_{X_0} &: U \rightarrow U \\ \mu_{X_0} &= 1 \text{ si } x = x_0 \\ \mu_{X_0} &= 0 \text{ si } x \neq x_0 \end{aligned}$$

➤ Si la mesure de la variable est incertaine, le sous-ensemble flou X_0 doit être représenté par un fait imprécis (figure 4.8.b).

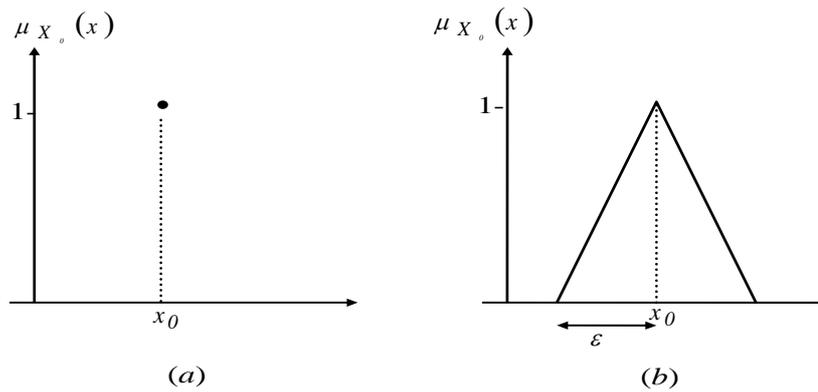


Figure 4.7 : Méthode de fuzzification

(a) Pour une mesure exacte, (b) Pour une mesure incertain

IV.2.3. Le mécanisme d'inférence

À partir de la base de règles (fournie par l'expert) et du sous-ensemble flou X_0 correspondant à la fuzzification du vecteur de mesure x_0 , le mécanisme d'inférence calcule le sous-ensemble flou de sortie relatif à la commande du système. Comme le montre la figure 4.8, le mécanisme d'inférence passe par deux étapes essentielles, l'étape d'implication et l'étape d'agrégation.

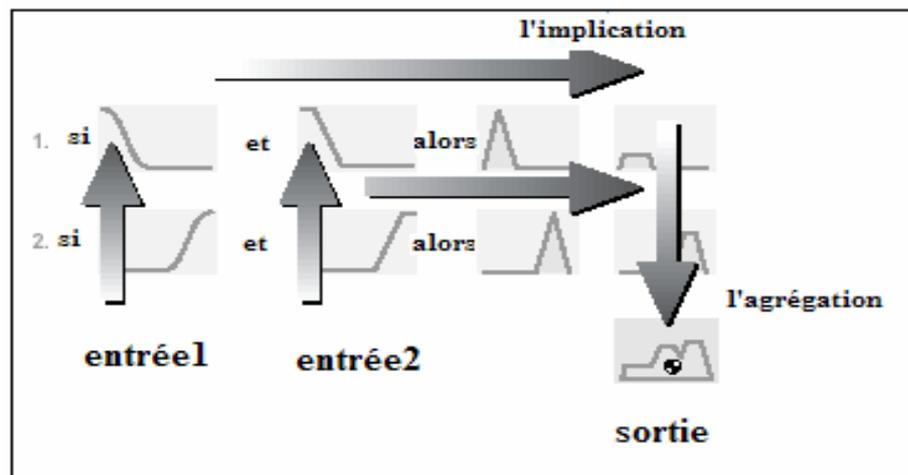


Figure 4.8 : Diagramme d'inférence floue

❖ Etape d'implication:

Chaque règle de la base des règles fournit un résultat selon le degré de validité de l'antécédent de la règle et de la fonction d'appartenance de la sortie. Pour évaluer l'implication d'une règle donnée, plusieurs méthodes ont été proposées [Dri92]. Nous citons :

- Méthode d'implication de Kleene-Dienes donnée par :

$$\mu_{R_b}(x, y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y))$$

- Méthode d'implication de Mamdani donnée par :

$$\mu_{R_c}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

❖ Étape d'agrégation :

Lorsque les décisions sont établies pour chaque règle de la base de règles, ces décisions doivent être combinées de manière à prendre une décision générale. L'agrégation est le processus par lequel les ensembles flous, représentant les sorties pour chaque règle, sont combinés en un seul ensemble flou.

L'agrégation se produit une seule fois avant l'étape de défuzzification. L'entrée du processus d'agrégation est la liste de fonctions d'appartenance retournées par le procédé d'implication pour chaque règle, et la sortie du processus d'agrégation est un ensemble flou pour chaque variable de sortie.

IV.2.4. L'interface de défuzzification

L'interface de défuzzification a pour objectif de transformer en une valeur non floue, le sous-ensemble flou de l'univers de discours ayant été calculé par le mécanisme d'inférence. Les méthodes de défuzzification les plus utilisées sont :

- La méthode du maximum
- La méthode de la moyenne du maximum.
- La méthode du barycentre.

IV.3. La non linéarité du contrôleur flou

Le contrôleur flou est un élément de transfert statique. Sa représentation ne contient aucune dynamique c.-à-d. que les opérations en relation avec le temps telles que les dérivées, les intégrales ...etc. ne sont pas incluses dans ce contrôleur. En plus, il possède une caractéristique de transfert non linéaire qui provient des propriétés non linéaires de sa structure (fuzzification, règle d'inférence, défuzzification). Pour l'étude de la non linéarité du contrôleur flou le lecteur peut consulter [Pal97] et [Dri92].

IV.4. Les types de contrôleurs flous

Comme représenté sur la figure 4.14 [Pal97], les contrôleurs sont répartis en des contrôleurs classiques (linéaires, non linéaires) et des contrôleurs basés sur des connaissances floues. Ces derniers sont des contrôleurs non linéaires mais ils sont considérés comme une classe de contrôleur indépendante. Les principales structures des contrôleurs flous sont : [Pal97][Dri92][Yag94]

1- Les contrôleurs PID flous avec les différents types possibles :

- ❖ Contrôleur PD flou.
- ❖ Contrôleur PI flou.

2- Le contrôleur flou de Sugeno-Takagi.

3- Le contrôleur flou par mode glissant.

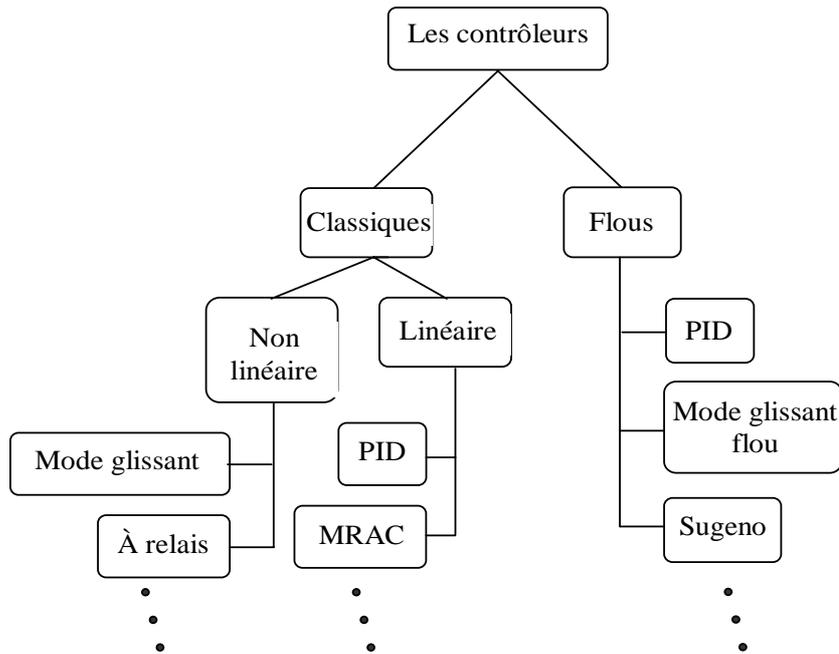


Figure 4.9 : Schéma représentant les classes des contrôleurs

IV.4.1. Le contrôleur PID flou

Le modèle de base du processus à contrôler est un système d'ordre (n) ayant l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t, u) \\ y &= g(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec :

x le vecteur d'état.

y la sortie du système.

u la variable de contrôle.

L'idée de base d'un contrôleur PID est de choisir une loi de contrôle en considérant l'erreur $e = x - x_d$, le changement d'erreur $\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d$ et l'intégrale de l'erreur $\delta = \frac{1}{T} \int_0^t e \cdot dt$.

avec x_d : le vecteur d'état désiré

Ainsi, la loi de la commande est donnée par :

$$u_{PID} = K_P \cdot e + K_D \cdot \dot{e} + K_I \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^t e \cdot dt \quad (4.15)$$

où : K_P , K_I , K_D sont respectivement les constantes de régulation : proportionnelle, intégrale et dérivée.

Le contrôleur flou correspondant au contrôleur PID classique est représenté par l'équation suivante :

$$u_{PIDflou} = K_p \cdot e + K_D \cdot \dot{e} + K_I \cdot \delta \tag{4.16}$$

Cette commande est satisfaite par la base de règles que nous établissons, où chaque règle est représentée sous la forme suivante :

$$R_{PID}^{(i)} : \text{si } e \text{ est } LE^{(i)} \text{ et } \dot{e} \text{ est } L\dot{E}^{(i)} \text{ et } \delta \text{ est } L\delta^{(i)} \text{ alors } u \text{ est } Lu^{(i)}$$

où :

$LE^{(i)}, L\dot{E}^{(i)}, L\delta^{(i)}, Lu^{(i)}$ sont les valeurs linguistiques de e, \dot{e}, δ, u dans la $i^{\text{ème}}$ règle.

Le contrôleur PID flou produit une commande négative ou positive selon la condition suivante :

$$\begin{aligned} u < 0 & \text{ si } K_P \cdot e + K_D \cdot \dot{e} + K_I \cdot \delta < 0 \\ u > 0 & \text{ si } K_P \cdot e + K_D \cdot \dot{e} + K_I \cdot \delta > 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

De l'équation (4.17), nous définissons une surface de commutation s dans laquelle la commande u change de signe. L'équation de cette surface est donnée par :

$$s = \dot{e} + \frac{K_P}{K_D} \cdot e + \frac{K_I}{K_D} \cdot \delta = 0 \tag{4.18}$$

Cette équation divise le plan de phase en deux demi-plans et permet de déduire les règles du contrôleur flou pour chaque type de commande.

La figure 4.10 montre les contrôleurs PID, PD et PI conventionnels et leurs plans de phase qui permettent de déduire les règles du contrôleur flou pour chaque type [Pal97].

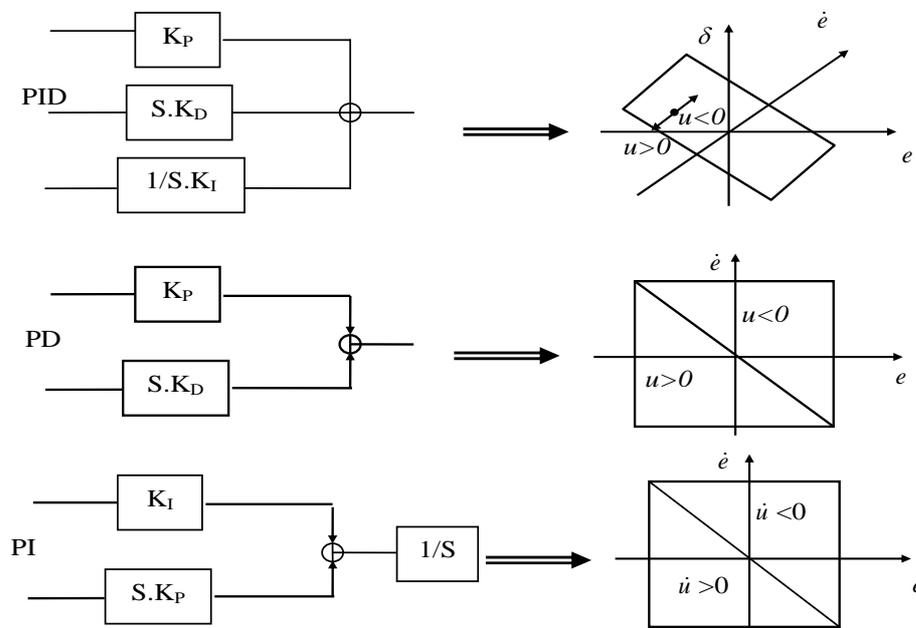


Figure 4.10 : les contrôleurs conventionnels et leur plan de phase

À partir des plans de phase de la figure 4.10, les règles des contrôleurs flous de type PD et PI sont respectivement déduites comme suit :

$R_{PD}^{(i)}$: si e est $LE^{(i)}$ et \dot{e} est $L\dot{E}^{(i)}$ alors u est $Lu^{(i)}$

$R_{PI}^{(i)}$: si e est $LE^{(i)}$ et \dot{e} est $L\dot{E}^{(i)}$ alors \dot{u} est $L\dot{u}^{(i)}$

IV.4.2. Le contrôleur flou par mode glissant

Avant la conception du contrôleur flou par mode glissant, il est nécessaire de rappeler les lois fondamentales d'un contrôleur par mode glissant et celle d'un contrôleur flou. Ceci permettra de déduire les similarités entre ces deux types de commande. L'exploitation de ces points communs sera très utile dans l'établissement de la nouvelle loi de commande.

IV.4.2.1. Rappel sur le contrôleur par mode glissant avec bande limitée

Pour un système non linéaire d'ordre (n) la surface de glissement est donnée par l'équation suivante :

$$s(x,t) = (d/dt + \lambda)^{n-1} \cdot e = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \lambda^k \cdot e^{(n-1-k)} \quad (4.19)$$

Si le système est du second ordre cette équation devient :

$$s(x,t) = \dot{e} + \lambda \cdot e$$

Rappelant l'équation de la loi de commande du contrôleur par mode glissant :

$$\begin{aligned} U &= U_{eq} + \Delta U \\ \text{et } \Delta U &= -k \cdot \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (4.20)$$

En introduisant une fonction de saturation qui permet de limiter le phénomène du Chattering, la commande haute fréquence s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta U &= -k \cdot \text{sat}(s/\Phi) \\ \text{sachant que } \text{sat}(s/\Phi) &= \begin{cases} s/\Phi & \text{si } |s| \leq \Phi \\ \text{sign}(s/\Phi) & \text{si } |s| \geq \Phi \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

IV.4.2.2. La forme diagonale du contrôleur flou

Pour une large classe de systèmes du second ordre, les contrôleurs flous sont conçus en utilisant le plan de phase (voir les contrôleurs PID), déterminé par l'erreur e et la dérivée de l'erreur \dot{e} . Les règles floues de ces contrôleurs déterminent la valeur floue de u correspondante à chaque paire de valeurs floues de l'erreur et du changement d'erreur. L'approche habituelle pour la conception de ces règles est le partitionnement du plan de phase en deux demi-plans par le moyen d'une ligne de glissement (ou de commutation). Le contrôleur flou obtenu a une forme diagonale. [Mey92][Ber96]

Les règles floues de ce contrôleur sont de la forme suivante :

si e est LE et \dot{e} est $L\dot{E}$ alors u est LU

Ainsi, toutes les règles peuvent être déduites du tableau 4.1 qui représente le diagramme d'un contrôleur flou de forme diagonale.

$\dot{e} \backslash e$	NG	NM	NP	Z	PP	PM	PG
PG	Z	NP	NP	NM	NM	NG	NG
PM	PP	Z	NP	NP	NM	NM	NG
PP	PP	PP	Z	NP	NP	NM	NM
Z	PM	PP	PP	Z	PP	NP	NM
NP	PM	PM	PP	PP	Z	NP	NP
NM	PG	PM	PP	PP	PP	Z	NP
NG	PG	PG	PM	PM	PP	PP	Z

Tableau 4.1 : Diagramme d'un contrôleur flou de forme diagonale

Où : (NG: négative grand, NM: négative moyen, NP : négative petit, Z: zéro, PP :positive petit, PM: positive moyen, PG: positive grand) sont les ensembles flous de l'univers de discours de e , \dot{e} et u .

Le principe de ce contrôleur reflète celui de la commande par mode glissant, ce qui nous incite à coupler les deux techniques dans le but d'améliorer les performances de la commande précédente.

Par déduction, nous dirons que la commande floue remplacera la partie discontinue de la commande représentée par les équations 4.29 ou 4.30. Son expression est donnée par :

$$U = U_{eq} + \Delta u \Rightarrow U = U_{eq} + u_{flou} \quad (4.22)$$

$$et \quad u_{flou} = -k_{flou} \cdot sign(s)$$

IV.4.2.3. Description analytique d'un contrôleur flou de forme diagonale

La forme diagonale représente une carte de correspondance entre les états réels e , \dot{e} et la sortie réelle du contrôleur. Les états placés sur la diagonale jouent un rôle très important, car à partir de cette diagonale le contrôleur change de signe et d'amplitude. L'amplitude de la valeur floue du contrôleur varie selon la distance par rapport à la diagonale. L'équation de cette diagonale est donnée par :

$$s = \dot{e} + \lambda \cdot e = 0$$

où : λ représente la pente de la diagonale.

Les règles du contrôleur flou de forme diagonale sont établies telles que :

- Les états e , \dot{e} sont limités par : $-e_{\max} \leq e \leq +e_{\max}$
 $-\dot{e}_{\max} \leq \dot{e} \leq +\dot{e}_{\max}$
- Les valeurs de la commande u sont limitées par : $-u_{\max} \leq u \leq +u_{\max}$
- Les états e , \dot{e} qui sont sur la diagonale $s = 0$ correspondent à la commande $u = 0$

- Les états e , \dot{e} qui sont au-dessous de la diagonale $s = 0$ correspondent aux valeurs de contrôle $u_{flou} > 0$.
- Les états e , \dot{e} qui sont au-dessus de la diagonale $s = 0$ correspondent aux valeurs de contrôle $u_{flou} < 0$.
- L'amplitude de $|u_{flou}|$ croît et décroît respectivement avec l'accroissement et le décroissement de la distance $|s|$ entre le vecteur d'état et $s = 0$.

La formulation analytique de la loi de contrôle de forme diagonale peut être résumée par :

$$u_{flou} = -k_{flou}(e, \dot{e}, \lambda) \cdot \text{sign}(s)$$

En respectant les conditions suivantes :

$$-e_{\max} \leq e \leq +e_{\max}$$

$$-\dot{e}_{\max} \leq \dot{e} \leq +\dot{e}_{\max}$$

$$\lambda > 0$$

$$0 \leq k_{flou} \leq +k_{\max} = k_{flou|\max}$$

$$k_{flou}(e_1, \dot{e}_1, \lambda) \leq k_{flou}(e_2, \dot{e}_2, \lambda) \text{ pour } |\dot{e}_1 + \lambda \cdot e_1| \leq |\dot{e}_2 + \lambda \cdot e_2|.$$

IV.4.2.4. Comparaison entre le contrôleur par mode glissant et le contrôleur flou de forme diagonale

Les principales différences entre les deux contrôleurs se résument dans les points suivants [Pal97][Son00] :

- 1- La caractéristique de transfert du contrôleur par mode glissant à bande limitée est linéaire par contre celle du contrôleur flou est non linéaire. (Voir la figure 4.11).

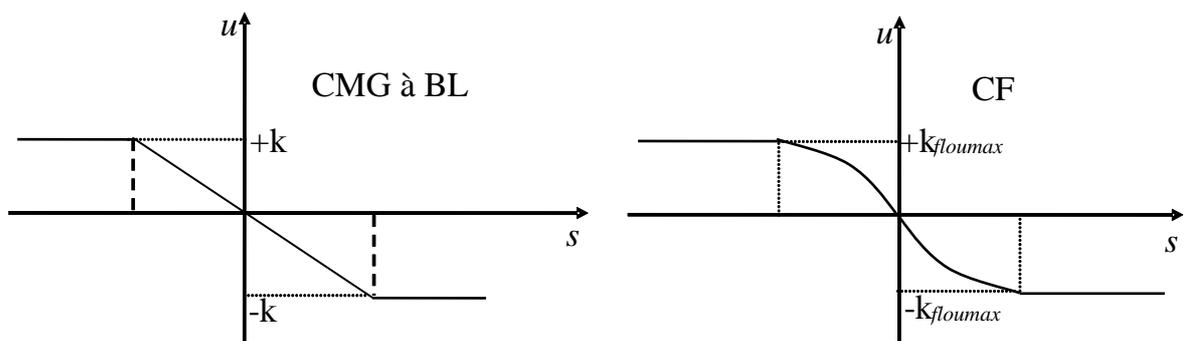


Figure 4.11 : Caractéristique de transfert du contrôleur par mode glissant et du contrôleur flou de forme diagonale

- 2- Contrairement au contrôleur par mode glissant à bande limitée, où la bande limitée est fixe, le vecteur d'état du contrôleur flou de forme diagonale est restreint par des limites dans l'espace d'état flou. (Voir figure 4.12).

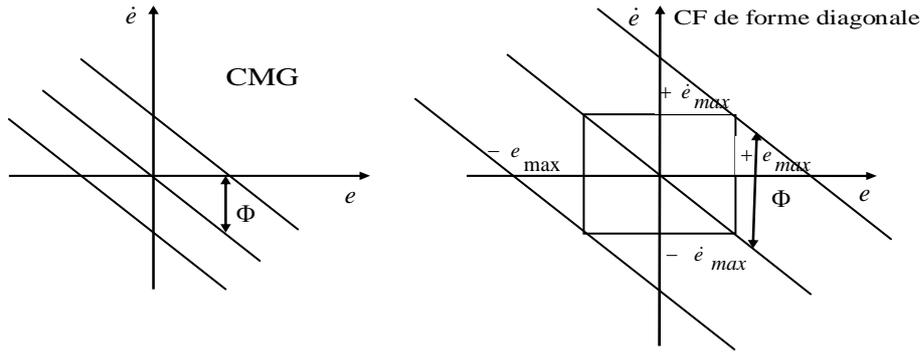


Figure 4.12 : Les bandes limitées pour un contrôleur par mode glissant et un contrôleur flou de forme diagonale

IV.5. Le contrôleur flou par mode glissant à bande limitée (CFMG à BL)

En se basant sur le principe du CF de forme diagonale qui consiste à changer l’amplitude de la commande (u_{flou}) en fonction de la distance $|s|$ entre le vecteur d’état et la diagonale $s = 0$, nous formons une nouvelle base de règles pour ce type de contrôleur. Mais au lieu que l’entrée du contrôleur soit le vecteur d’état d’erreur, nous utilisons la distance $|s|$. Le nouveau contrôleur est appelé contrôleur flou par mode glissant (CFMG à BL). Ces règles sont donc données par [Son00][Pal97] :

$$R_c^i : \text{si } s=LS^{(i)} \text{ alors } u_{flou}=LU^{(i)}$$

La forme analytique de cette nouvelle commande est donnée par :

$$u_{flou} = -k_{flou} (|s|) \cdot \text{sign}(s).$$

L’avantage que procure le CFMG à BL par rapport au contrôleur flou de forme diagonale est la réduction considérable du nombre de règles floues nécessaire pour déterminer la sortie de la commande. Pour le CF de forme diagonale le nombre d’entrées du contrôleur est égal au nombre d’états du système, alors que la seule entrée dans le cas d’utilisation d’un CFMG à BL est la distance $|s|$. Ainsi, le tableau 4.1 peut se résumer dans un nouveau tableau plus simple qui est représenté ci-dessous.[Li97][Bal94]

s	NG	NM	NP	Z	PP	PM	PG
U_{flou}	PG	PM	PP	Z	NP	NM	NG

Tableau 4.2 : Diagramme du contrôleur par mode glissant

Où : (NG: négative grand, NM: négative moyen, NP : négative petit, Z: zéro, PP :positive petit, PM: positive moyen, PG: positive grand) sont les ensembles flous de l’univers de discours de s et u_{flou} .

En affectant à chaque variable d’entrée et de sortie un ensemble flou constitué de fonctions d’appartenance triangulaires comme le montre la figure 4.13. L’établissement de la base de règles à partir du tableau 4.2 permet d’obtenir la caractéristique de transfert de la

figure 4.14. Nous remarquons que cette caractéristique n'est pas nécessairement linéaire comme dans le cas du contrôleur par mode glissant classique.

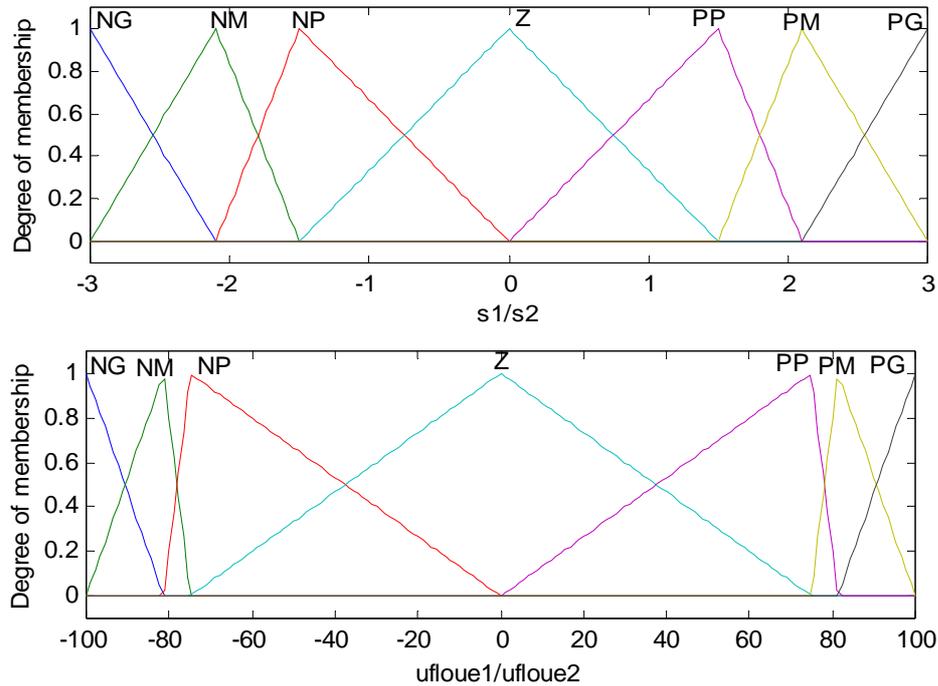


Figure 4.13 : Les ensembles flous d'entrées/sorties du contrôleur par mode glissant à bande limitée (CFMG à BL)

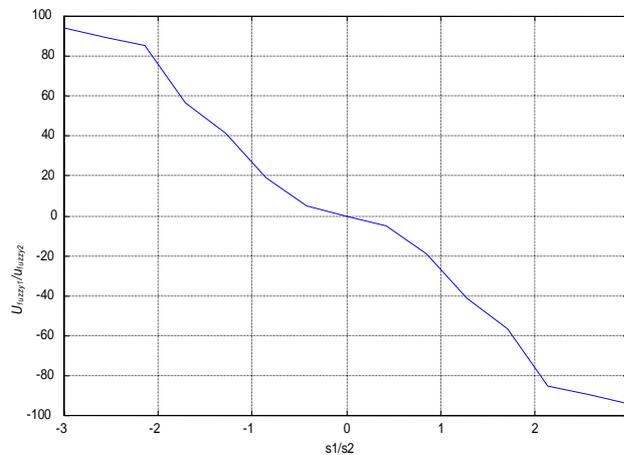


Figure 4.14 : Caractéristique de transfert du CFMG à BL

Ce que nous remarquons sur ce nouveau contrôleur flou, c'est que ce dernier évalue les grandes erreurs du vecteur d'état de la même façon que les petites erreurs si seulement elles présentent la même distance $|s|$ par rapport à la surface $s = 0$. Pour améliorer le comportement du contrôleur, il pourrait être avantageux d'ajouter un autre degré de liberté dans les règles floues. Une des solutions possibles consiste à introduire le changement \dot{s} dans les règles [Hsu98]. Une autre solution consiste à ajouter en plus une distance d , telle que la région proche de l'origine de l'espace d'état peut être atteinte rapidement [Pal97]. Le contrôleur conçu par l'une des deux extensions est appelé "Contrôleur flou par mode glissant

à deux entrées-sortie unique du contrôleur” où (en anglais TISO “two input-single output controller”).

IV.6. Description du contrôleur flou par mode glissant TISO

Ce contrôleur a deux entrées $|s_p|$, d et une sortie de commande u . Pour concevoir le contrôleur, il faut respecter les deux règles générales suivantes [Pal97] :

R_1 : $|u_{flou}|$ doit augmenter quand la distance $|s_p|$ entre l'état actuel et la surface de glissement $s = 0$ augmente.

R_2 : $|u_{flou}|$ doit augmenter quand la distance d entre l'état actuel et la surface de glissement $s = 0$ augmente.

L'interprétation graphique des paramètres du contrôleur TISO est donnée par la figure 4.15.

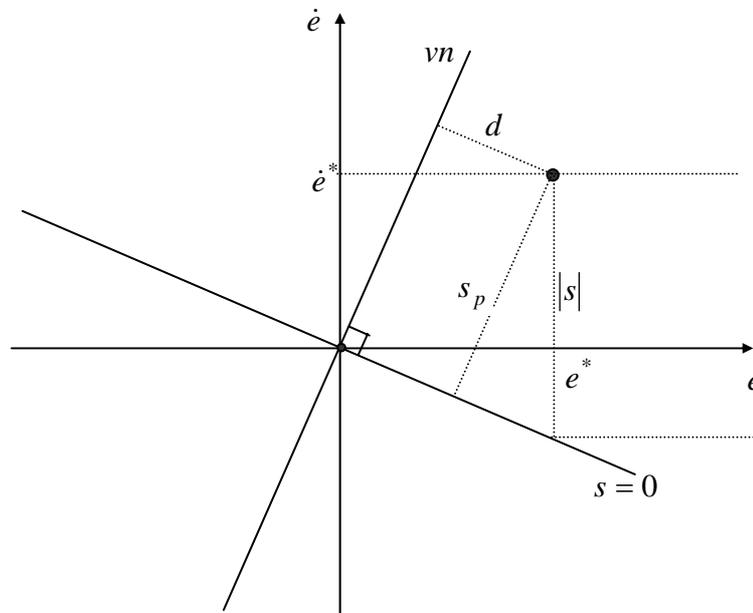


Figure 4.15 : Les distances $|s_p|$ et d d'un contrôleur flou par mode glissant.

➤ **Détermination de la distance d**

Soit une surface de glissement de dimension $(n-1)$, le vecteur normal vn est défini par la formule suivante :

$$vn = \frac{\left(1, \binom{n-1}{1} \cdot \lambda, \binom{n-2}{2} \cdot \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1} \right)^T}{\left| \left(1, \binom{n-1}{1} \cdot \lambda, \binom{n-2}{2} \cdot \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1} \right)^T \right|} \tag{4.23}$$

avec :

vn est le vecteur normal à une surface de glissement de dimension $(n-1)$ dans l'espace d'état de dimension n et passant par l'origine.

Soit s_p la projection du vecteur d'état sur la ligne de glissement dans la direction du vecteur normal vn . Cette distance est donnée par :

$$s_p = \mathbf{v}_n^T \cdot \mathbf{x} \quad (4.24)$$

La distance d est définie comme étant la plus courte distance Euclidienne entre le vecteur d'état et le vecteur normal à la ligne de glissement. Elle est donnée par l'équation suivante :

$$d = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 - s_p^2} \quad (4.25)$$

L'exploitation de la distance $|s_p|$ entre le vecteur d'état d'erreur et la surface de glissement, ainsi que la distance entre le vecteur normal et la surface de glissement, permet d'établir la base de règles de ce contrôleur. En affectant un ensemble flou pour chacune des variables nous obtenons le diagramme $s_p - d$. Le tableau suivant représente le diagramme pour un système du deuxième ordre.

PG	PG	PG	PG	NG	NG	NG	NG	G
PG	PG	PG	PM	NM	NG	NG	NG	M
PG	PG	PM	PP	NP	NM	NG	NG	P
PG	PM	PP	PZ	NZ	NP	NM	NG	Z
NG	NM	NP	NZ	PZ	PP	PM	PG	$s_p - d$

Tableau 4.2 : Diagramme S_p-d

où : (Z :Zéro, P :Petit, M :Moyen, G :Grand) sont les ensembles flous de l'univers de discours de la distance d .

et: (NG: négative grand, NM: négative moyen, NP : négative petit, NZ : négative zéro, PZ: positive zéro, PP :positive petit, PM: positive moyen, PG: positive grand) sont les ensembles flous de l'univers de discours de s_p et u_{flou} .

La $i^{\text{ème}}$ règle de ce contrôleur peut être présentée par :

$$R_c^i : \text{si } s_p = LS_p^i \text{ et } d = LD^i \text{ alors } u = LU^i$$

La fonction analytique d'un tel contrôleur est définie par : $u_{flou} = -k_{flou}(|s_p|, d) \cdot \text{sign}(s)$.

En affectant à chaque variable d'entrée et de sortie un ensemble flou constitué de fonctions d'appartenance triangulaires comme le montre la figure 4.16. L'établissement de la base de règles à partir du tableau 4.2 permet d'obtenir la caractéristique de transfert de la figure 4.17.

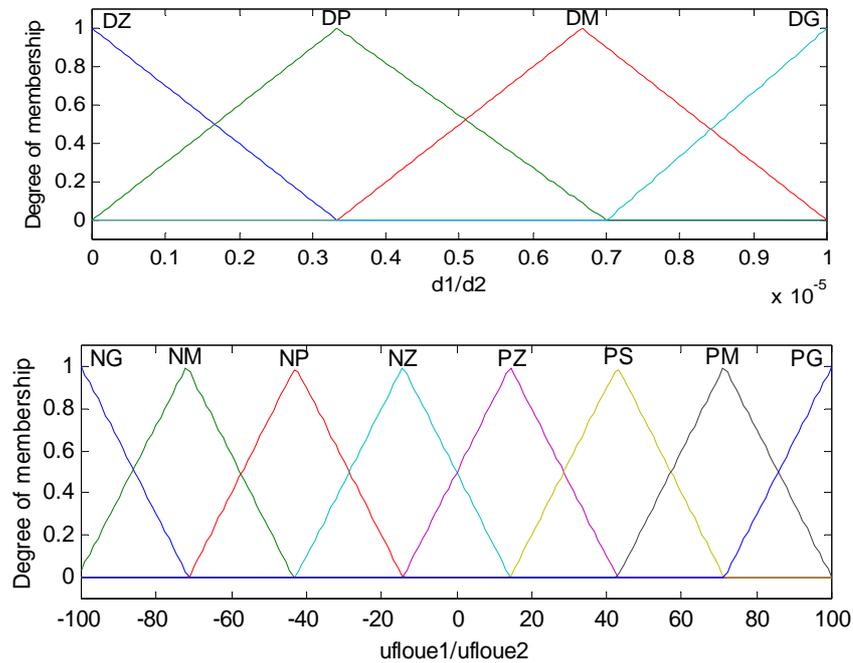


Figure 4.16 : Les ensembles flous des entrées/sorties du contrôleur flou TISO

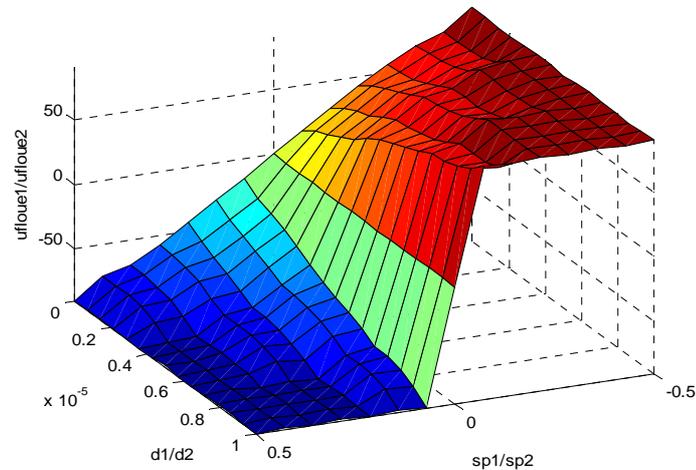


Figure 4.17 : Caractéristique de transfert du contrôleur flou TISO

IV.7. Résultats de simulation

Les résultats de simulation obtenus par l'application de la commande floue par mode glissant à bande limitée (CFMG à BL) et la commande floue par mode glissant à deux entrées et une sortie (CFMG TISO) sont présentés sur les figures 4.18 à 4.41. La structure de la partie floue de chaque commande est représentée dans l'annexe D. D'autres résultats concernant l'application de la (CFMG TISO) sont présentés dans l'annexe E. Les mêmes essais de simulation ont été refaites en utilisant les nouvelles lois de commande dans le but d'extraire les caractéristiques de chaque méthode.

Interprétation des résultats

❖ Les graphes décrivant la poursuite de la trajectoire, sagissant d'une trajectoire linéaire ou circulaire pour les deux types de robots mobiles, sont présentés sur les figures 4.18, 4.24, 4.30 et 4.36. Ces derniers sont similaires à ceux obtenus précédemment avec la commande par mode glissant. Ceci est tout à fait normal car le changement introduit à la commande concerne la partie haute fréquence dans le but de lisser la commande sans affecter sa robustesse.

❖ Les figures 4.20, 4.26, 4.32 et 4.38 représentent les graphes des erreurs de la poursuite. Nous remarquons que toutes les erreurs tendent vers une très faible valeur en un temps fini. tandis que l'excitation du système par des perturbations n'influent sur la poursuite de la trajectoire, que lorsque l'amplitude de ces perturbations devient importante devant le gain flou maximal, que se soit pour la commande floue par MG à BL ou pour la commande floue par MGTISO. Les figures 4.22, 4.28, 4.34 et 4.40 présentent l'effet des perturbations appliquées sur les deux commandes et sur les vitesses, sans avoir un effet sur l'allure de la poursuite de la trajectoire elle-même. L'invariance de la réponse du système vis-à-vis des perturbations ou des erreurs des positions initiales des robots de type (2,0) ou de type (1,1) confirme la conservation de la robustesse de la commande principale par les deux nouvelles commandes.

❖ De façon générale les résultats obtenus par l'application de la commande floue par mode glissant à BL et la commande floue par mode glissant TISO pour la poursuite de trajectoire, sont identiques pour les deux types de robots mobiles. Mais les graphes de la commande floue par (MG à BL) et ceux du contrôleur TISO présentés dans les figures 4. 21, 4.27, 4.33 et 4.39 montrent les différences entre les deux commandes. Nous constatons que la surface de glissement est atteinte presque en même temps, bien que la commande (nécessaire pour atteindre la surface de commutation) est plus faible dans le cas de la commande floue par MG TISO par rapport à celle de la commande floue par MG à BL. L'explication de ce résultat peut être résumée par les points suivants :

1. D'une part, si nous consultons la figure 4.13, nous remarquons que la répartition des univers de discours de l'entrée du contrôleur flou et de sa sortie (qui assure la convergence du système vers la surface de glissement et réduit en même temps le broutement) est non homogène. En plus, le gain de la commande nécessaire pour garder le robot sur la trajectoire est considérable. Par contre la répartition des univers de discours des entrées et de la sortie du contrôleur TISO, comme le montre la figure 4.16, sont homogènes et n'a pas nécessité de faire des essais de répartition complexes.

2. D'autre part, l'architecture du contrôleur flou TISO permet d'atteindre l'origine du plan de phase plus rapidement que le contrôleur flou par mode glissant à BL. Ceci est montré sur les graphes des distances S_p et d (voir les figures 4.23 4.29, 4.35 et 4.41).

Vu les avantages de la commande TISO, nous avons testé la robustesse de la commande sur d'autres exemples de poursuite de trajectoire qui sont présentés dans l'annexe E (Voir les figures E.1 jusqu'à E.6 pour la poursuite de trajectoire par le robot mobile de type (2,0) et les figures E.7 jusqu'à E.12 pour la poursuite de trajectoire par le robot mobile de type (1,1)). Les trajectoires utilisées dans ce cas sont : les trajectoires linéaire et circulaire (cette fois-ci les simulations sont faites en positionnant le robot mobile sur la trajectoire de référence), une

trajectoire sinusoïdale et enfin une trajectoire de référence qui respecte la contrainte cinématique du robot mobile.

➤ Les figures E.1, E.2, E.7 et E.8 présentent respectivement la poursuite de la trajectoire linéaire et circulaire par les robots de type (2,0) et (1,1) lorsque le robot se trouve sur la trajectoire de référence. Dans ce cas, nous remarquons une bonne poursuite de la trajectoire avec une erreur de poursuite stable et très petite. Nous remarquons aussi qu'un faible gain de commande suffit pour garder le robot sur la trajectoire désirée. Nous déduisons un des avantages de l'introduction de la logique floue, qui réside dans la possibilité de régler le gain de la commande à la valeur nécessaire pour maintenir le robot sur la trajectoire désirée ou pour le faire converger vers elle.

❖ Les résultats de simulation relatifs à la poursuite de la trajectoire sinusoïdale et la trajectoire qui respecte les contraintes des robots mobiles (voir les figures E.3 jusqu'à E.6 pour le robot de type (2,0) et les figures E.9 à E.12 pour le robot de type (1,1)) montrent de manière concrète l'effet des forces non holonomes sur le suivi des trajectoires. Alors que, les deux robots suivent facilement la trajectoire de référence qui respecte leur contrainte cinématique, ils trouvent une grande difficulté à suivre exactement la trajectoire sinusoïdale, surtout lorsqu'il s'agit du robot de type (1,1). Malgré cela les deux robots arrivent à suivre cette trajectoire, mais avec une erreur bornée plus grande par rapport à l'erreur de poursuite des autres trajectoires. La difficulté de la poursuite de la trajectoire sinusoïdale par les deux robots mobiles est due au changement instantané de la vitesse linéaire du robot qui prend des valeurs que le robot ne peut pas atteindre à cause de la contrainte de pur roulement sans glissement.

IV.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux extensions de la commande par mode glissant qui sont la commande floue par mode glissant à bande limitée et la commande floue par mode glissant TISO. Les résultats de simulation ont prouvé la robustesse de ces deux nouveaux contrôleurs. Les caractéristiques que nous pouvons extraire sont :

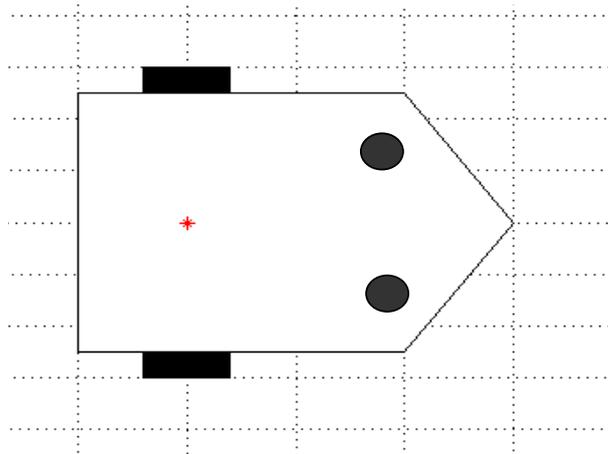
- Les commandes développées présentent une stabilité asymptotique robuste.
- L'introduction de la logique floue permet un réglage automatique du gain de la commande, nécessaire pour atteindre la trajectoire de référence et se maintenir sur cette trajectoire.
- La commande floue par mode glissant à bande limitée, permet d'améliorer l'allure de la commande par rapport à la celle classique, avec une bande limitée variable. Mais cette commande conserve le problème de la détermination de la bande dans laquelle le chattering est réduit.
- Les deux extensions de commande permettent de réduire le broutement. Le contrôleur flou TISO est plus rapide, il permet de réduire le chattering dans une zone très proche de l'origine et garantir la poursuite de la trajectoire désirée avec un gain de commande plus faible qu'avec les autres contrôleurs.

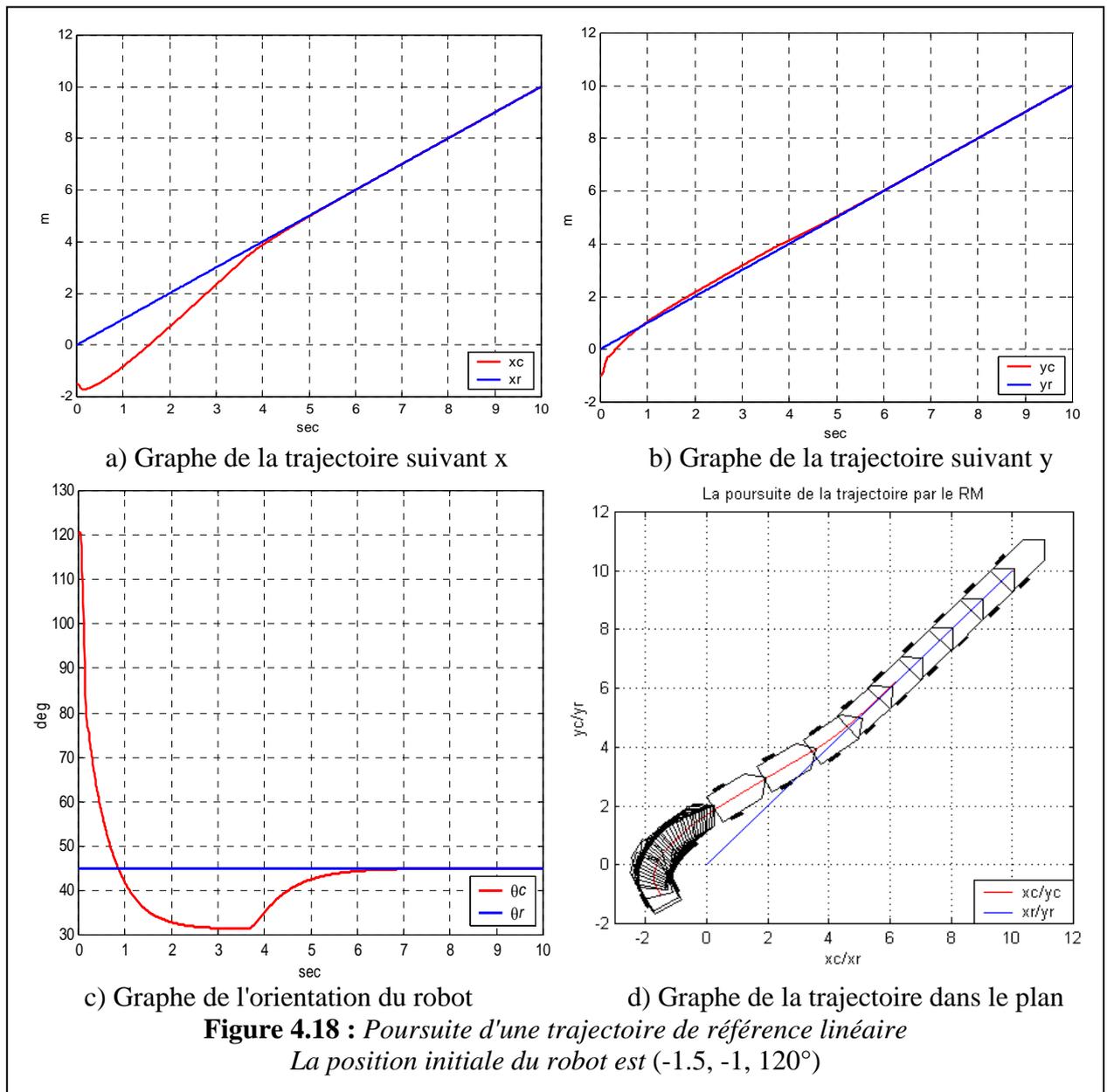
Le tableau 4.3 résume les avantages et les inconvénients de la commande floue par mode glissant à bande limitée (CFMG à BL) et la commande floue par mode glissant à deux entrées et une sortie (CFTISO).

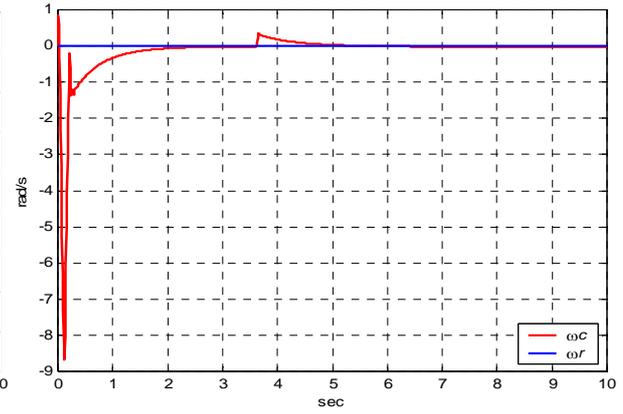
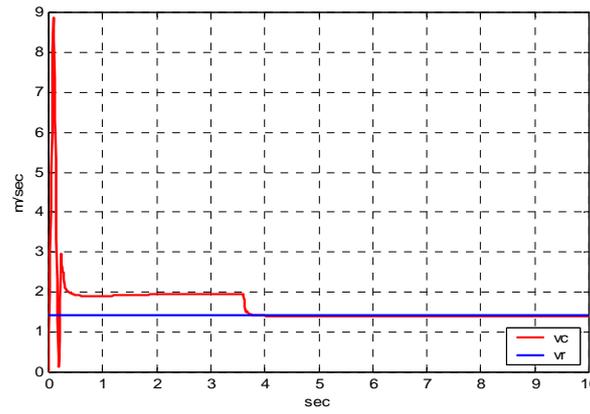
	Les avantages	Les inconvénients
<p align="center">Commande floue par mode glissant à bande limitée</p>	<ul style="list-style-type: none"> 1- Commande robuste 2- Base de règle réduite par rapport à celle d'un contrôleur flou standard. 2- Phénomène de chattering réduit. 3- Amélioration du gain de la commande nécessaire pour assurer la poursuite de la trajectoire désirée. 	<ul style="list-style-type: none"> 1- Il n'y a pas de méthodes pour définir la bande dans laquelle le chattering est éliminé. 2- Les erreurs peuvent être traitées de la même manière si elles présentent la même distance à la surface de commutation.
<p align="center">Commande floue par mode glissant à deux entrées et une sortie (TISO)</p>	<ul style="list-style-type: none"> 1- Commande robuste 2- Ajout d'un nouveau degré de liberté dans la partie floue de la commande (la distance d). 2- Phénomène de chattering réduit. 3- Amélioration du gain de la commande nécessaire pour assurer la poursuite de la trajectoire par rapport à toutes les autres extensions. 4- Convergence plus rapide par rapport aux autres méthodes. 	<p align="center">_____</p>

Tableau 4.3 : *Résumé des propriétés des CFMG à BL et CFTISO*

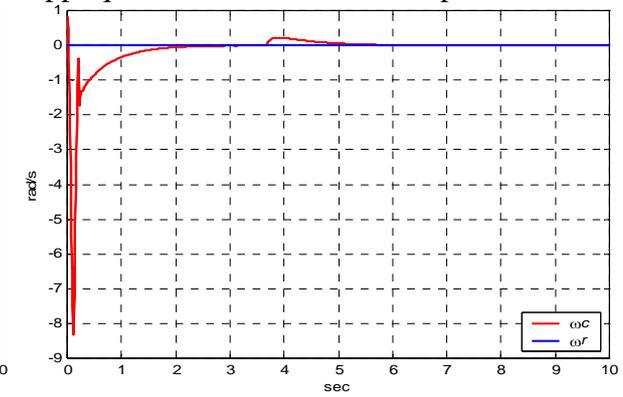
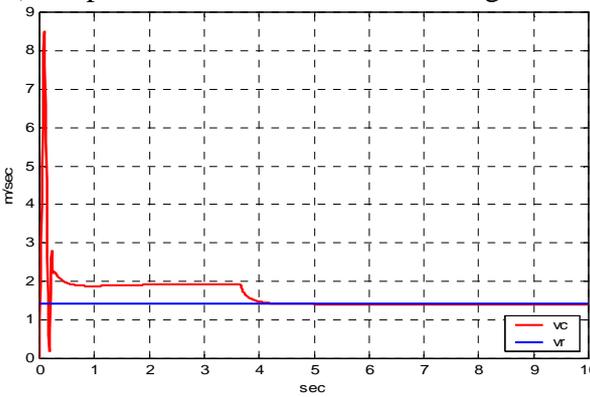
Résultats de simulation
Poursuite de trajectoire circulaire et linéaire
par un robot mobile à roues de type (2,0)



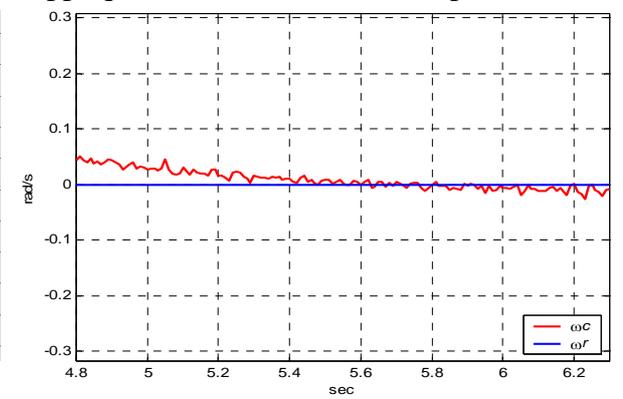
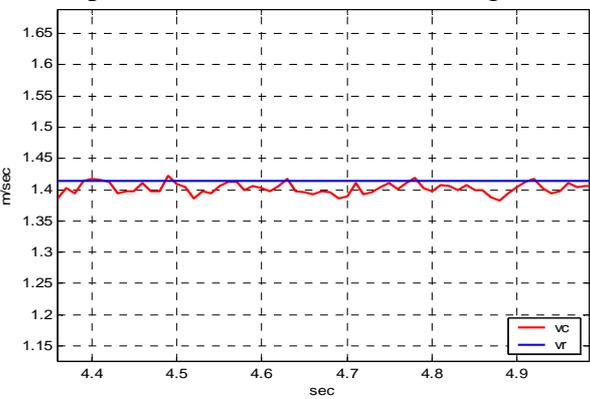




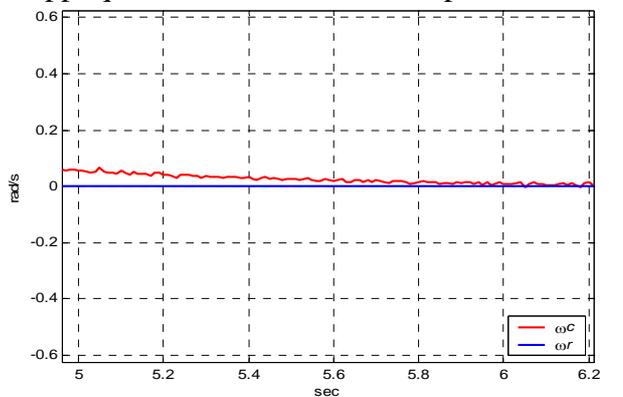
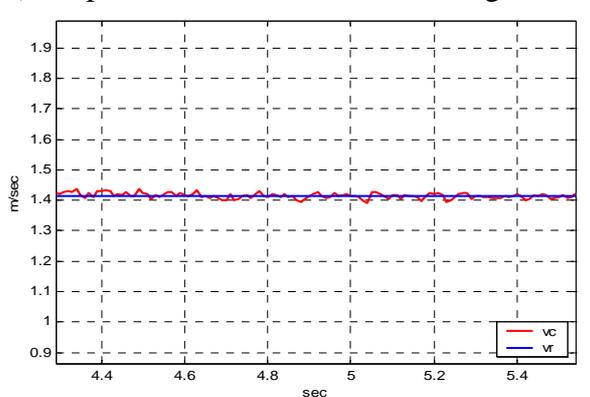
a) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG à BL sans perturbations



b) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG TISO sans perturbations

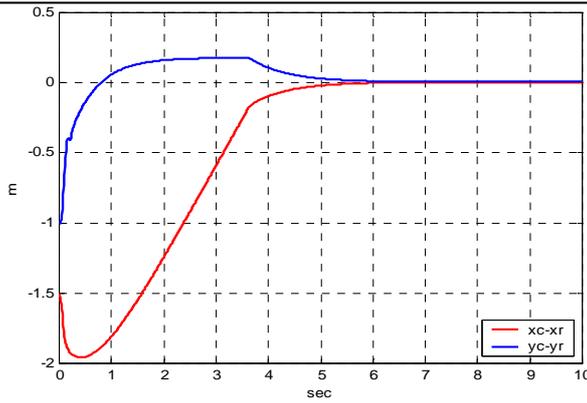


c) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG à BL avec perturbations

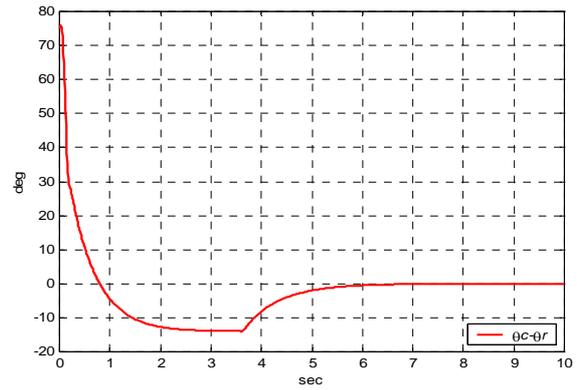


d) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG TISO avec perturbations

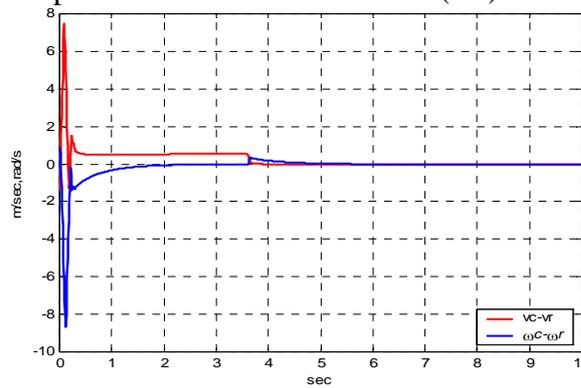
Figure 4.19 : Graphes des vitesses linéaire et angulaire en appliquant: la CFMG à BL et la CFMG à deux entrées et une sortie (TISO)



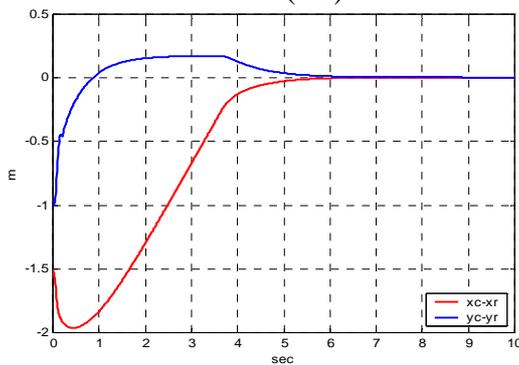
(a.1) L'erreur en position



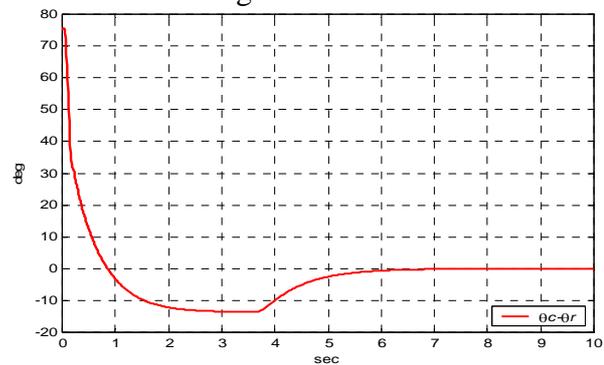
(a.2) L'erreur en orientation



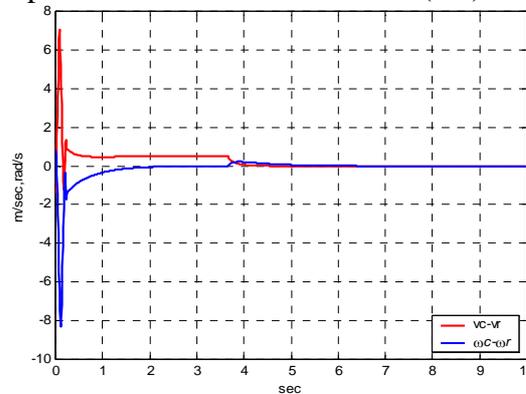
(a.3) L'erreur en vitesse linéaire et angulaire



(b.1) L'erreur en position

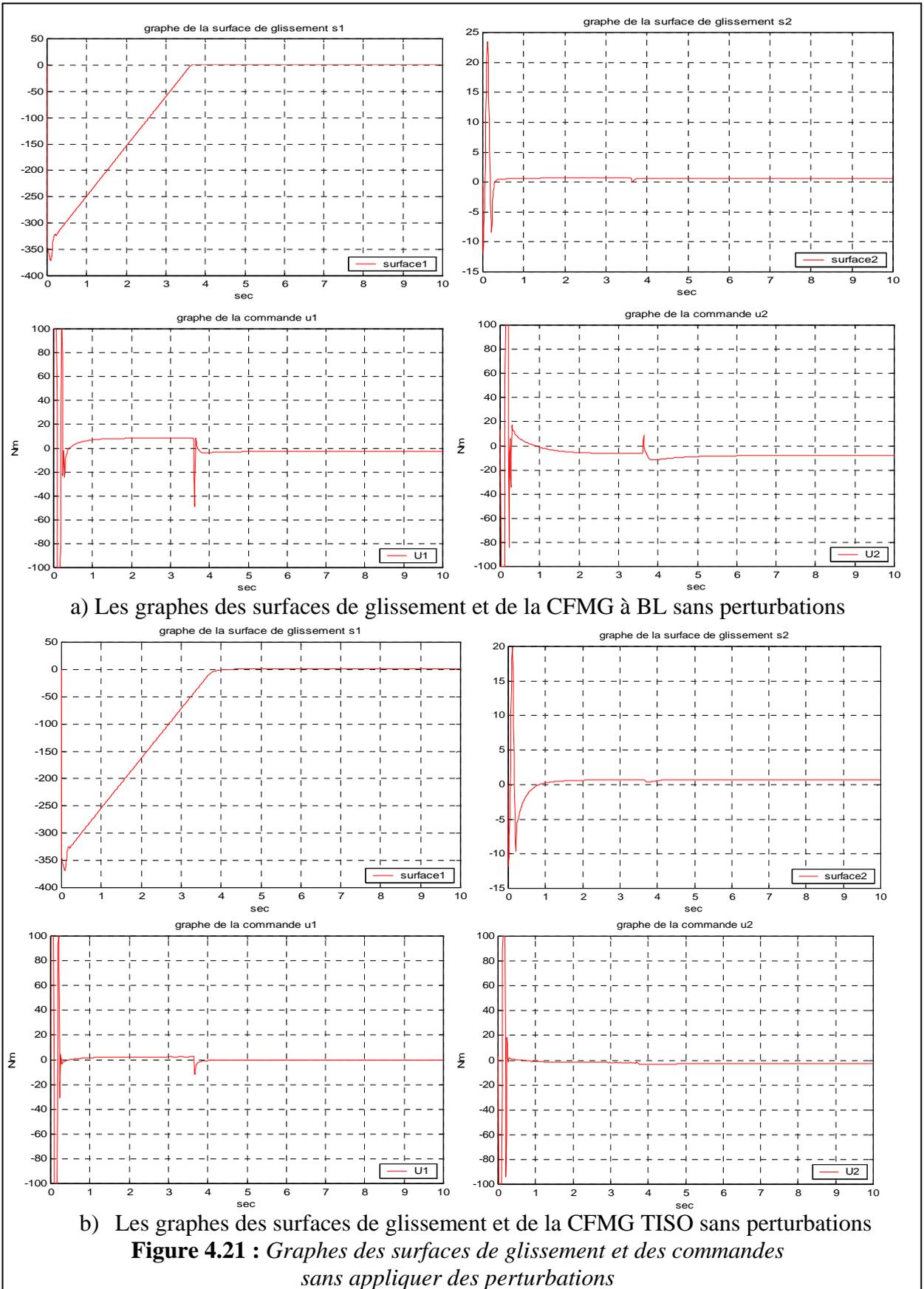


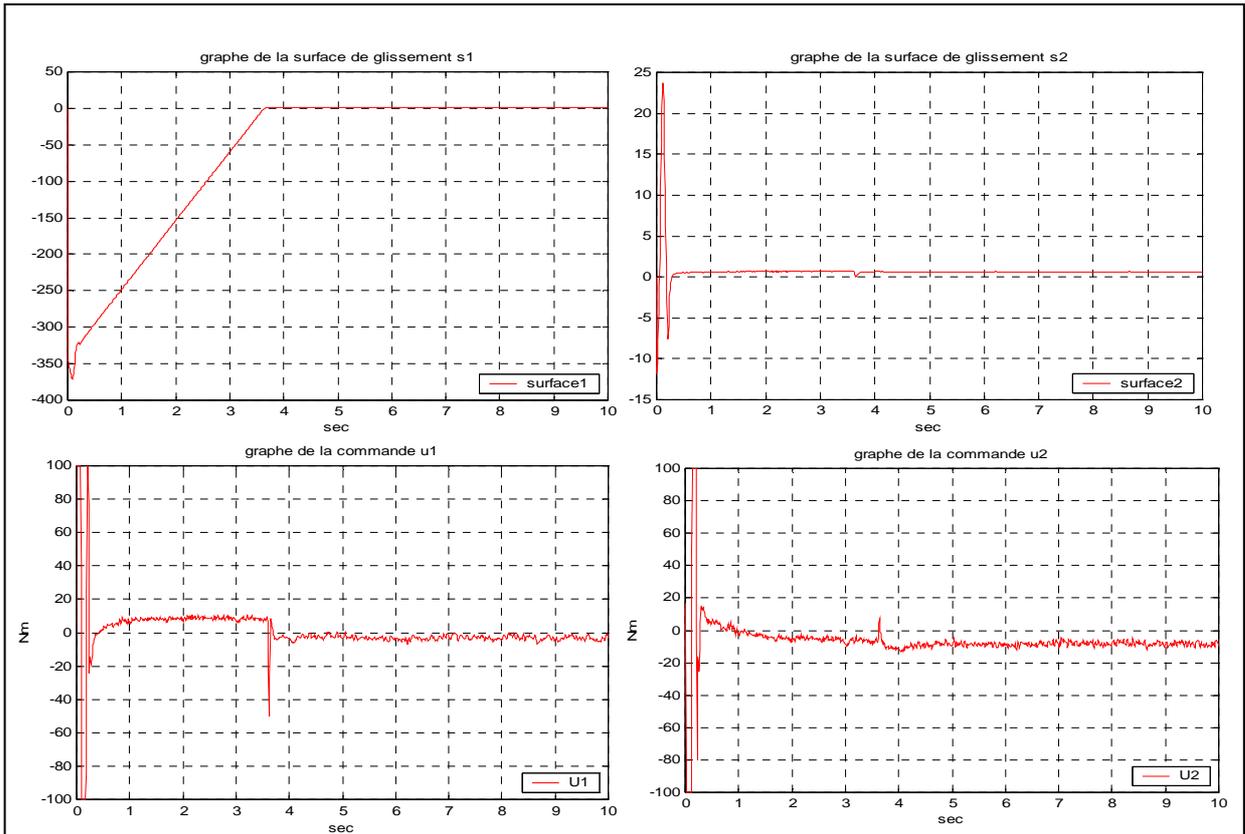
(b.2) L'erreur en orientation



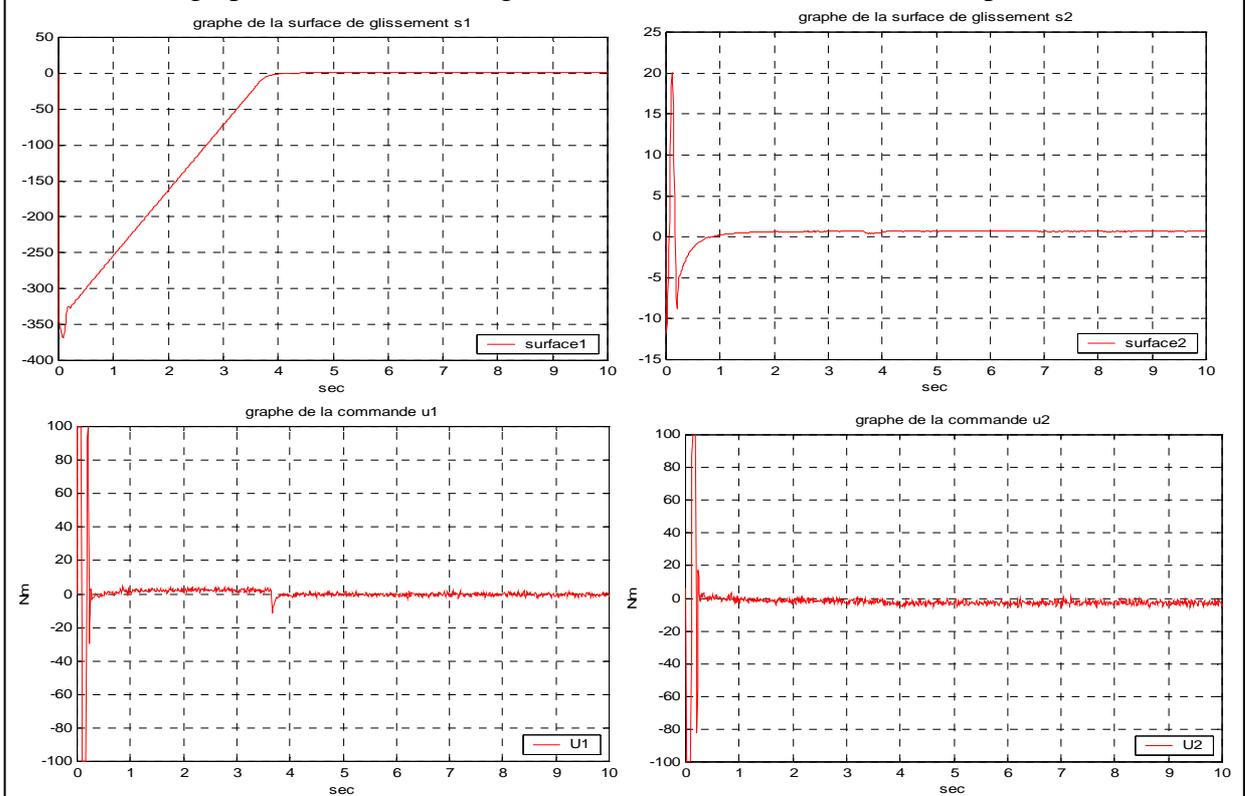
(b.3) L'erreur en vitesse linéaire et angulaire

Figure 4.20 : Graphes des erreurs de la poursuite de la trajectoire en appliquant:
 (a.1), (a.2), (a.3) la commande floue par mode glissant à BL sans perturbations
 (b.1), (b.2), (b.3) la commande floue par mode glissant TISO et sans perturbation



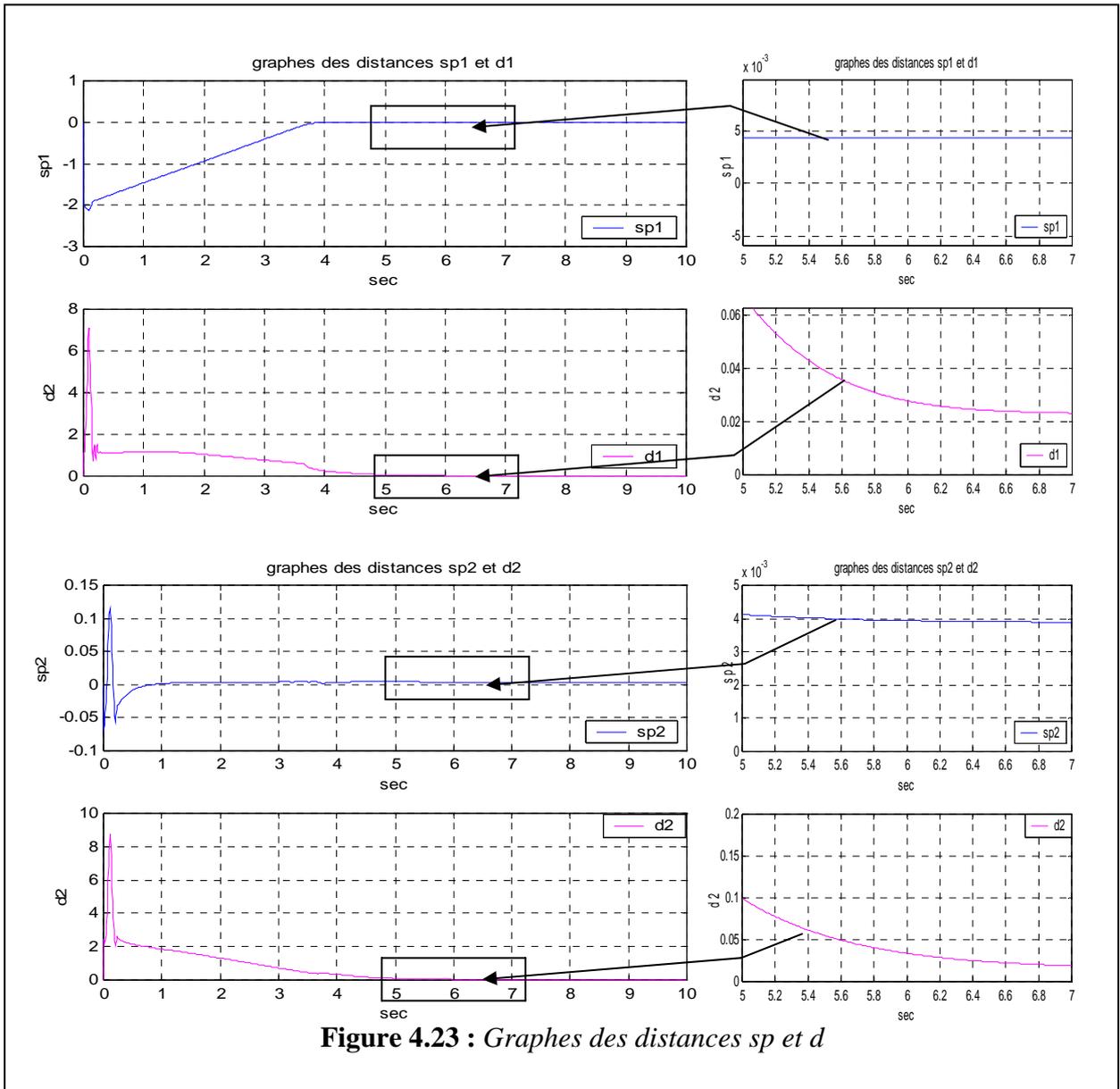


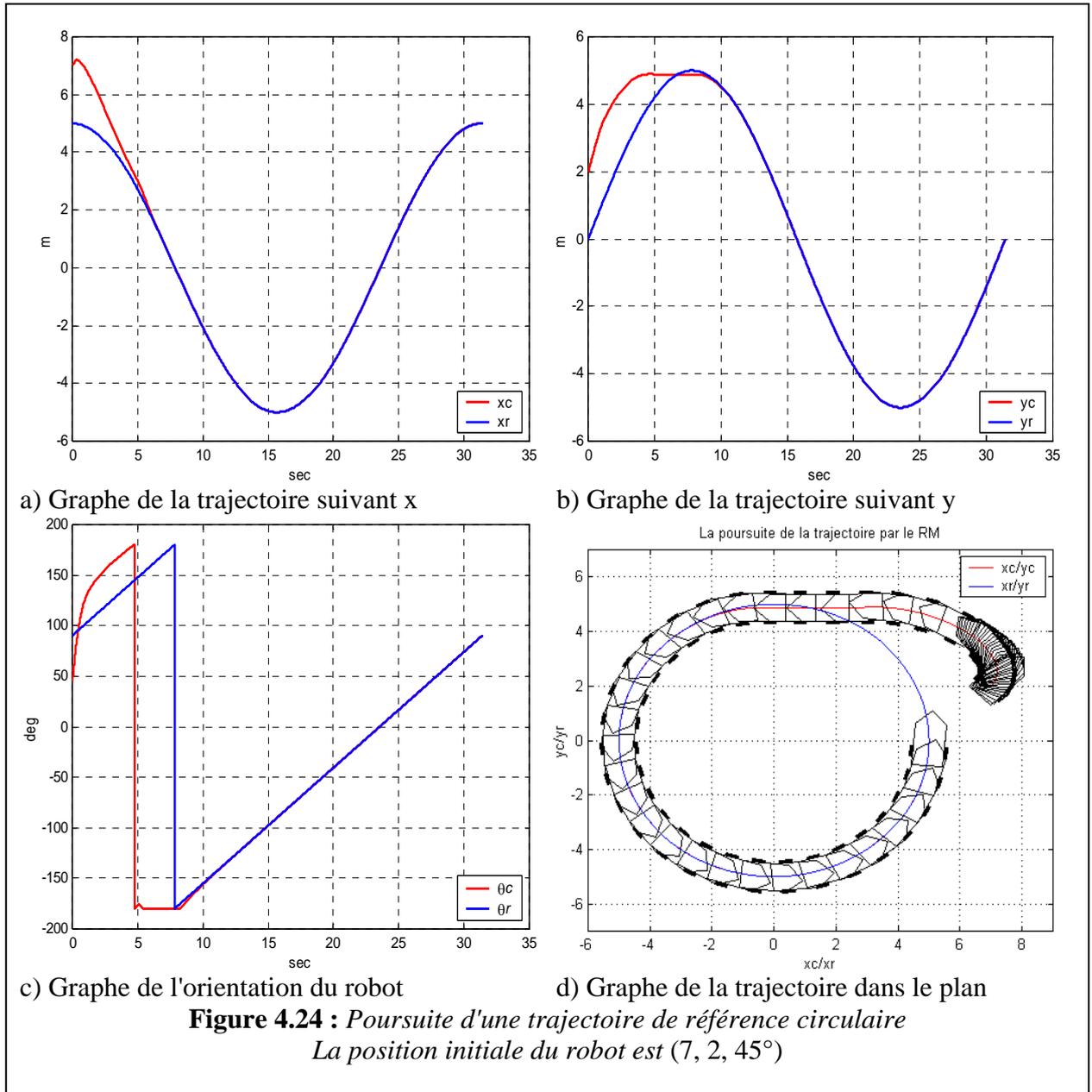
a) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG à BL avec perturbations

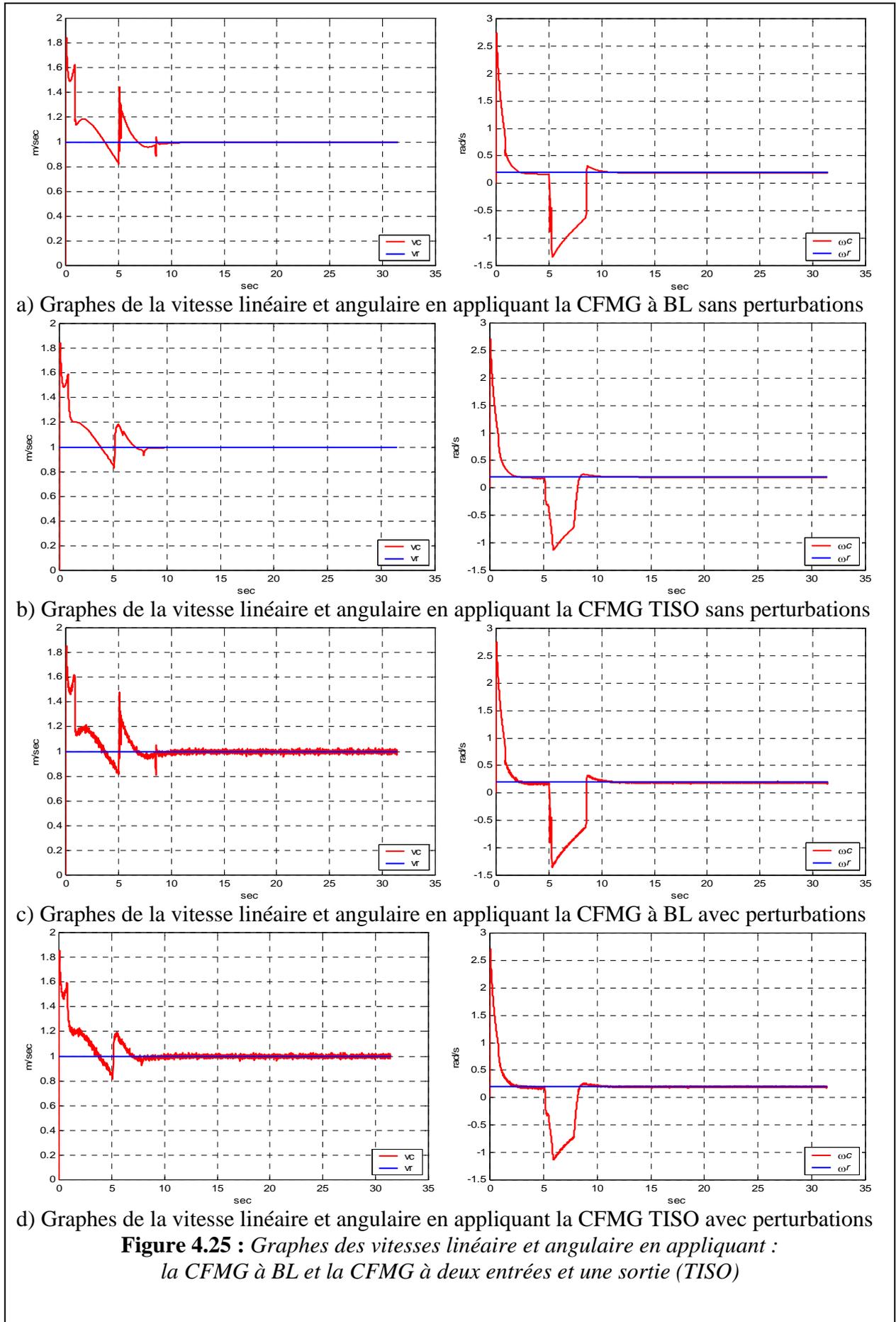


b) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG TISO avec perturbations

Figure 4.22 : Graphes des surfaces de glissement et des commandes avec application des perturbations







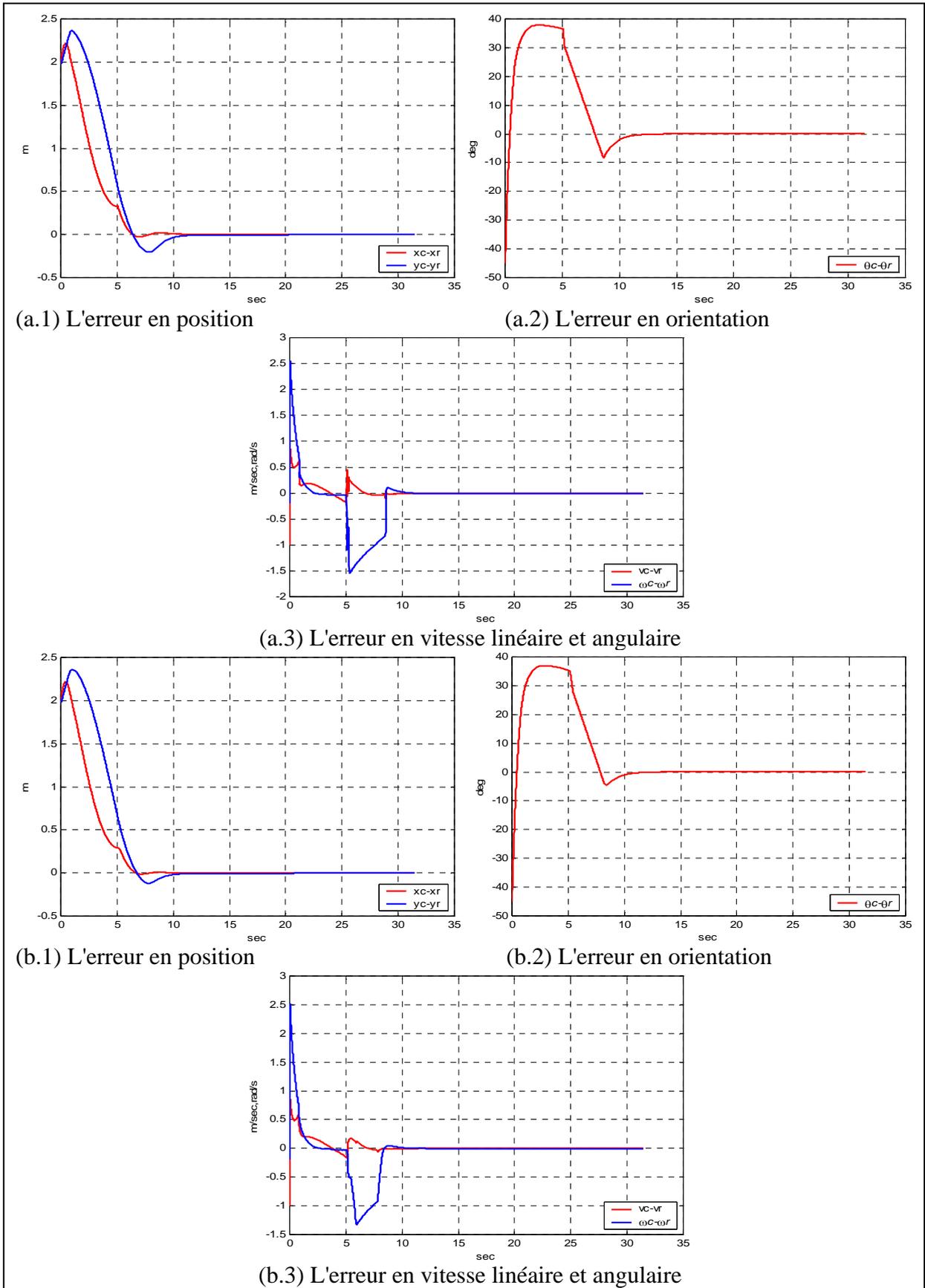
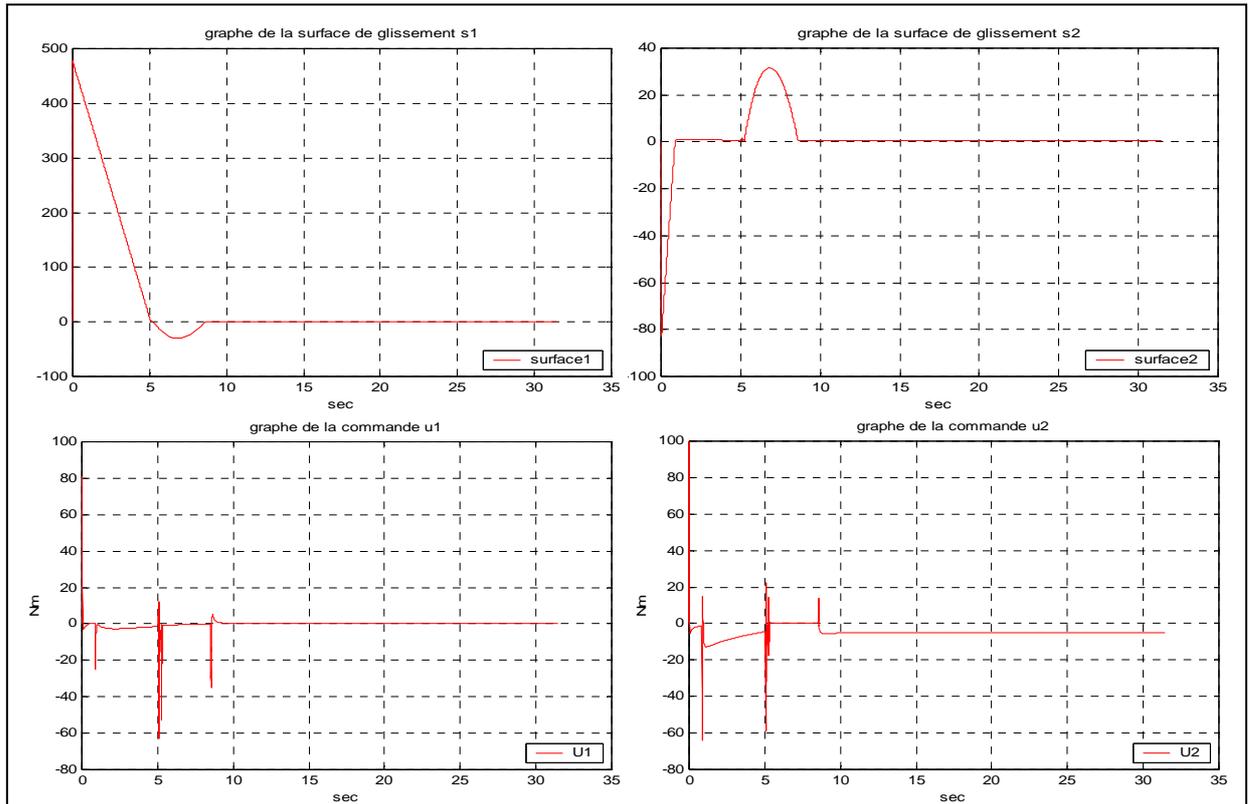
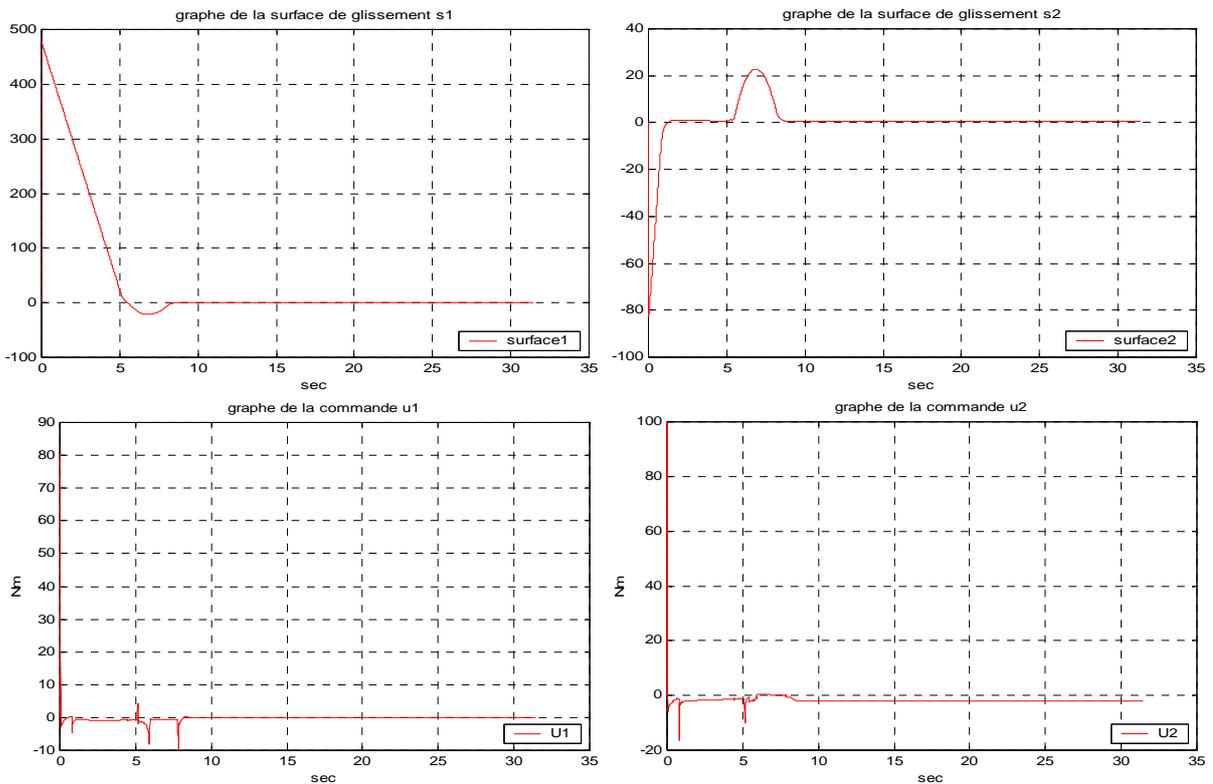


Figure 4.26 : Graphes des erreurs de la poursuite de la trajectoire en appliquant :
 (a.1), (a.2), (a.3) la commande floue par mode glissant à BL sans perturbations
 (b.1), (b.2), (b.3) la commande floue par mode glissant TISO et sans perturbation

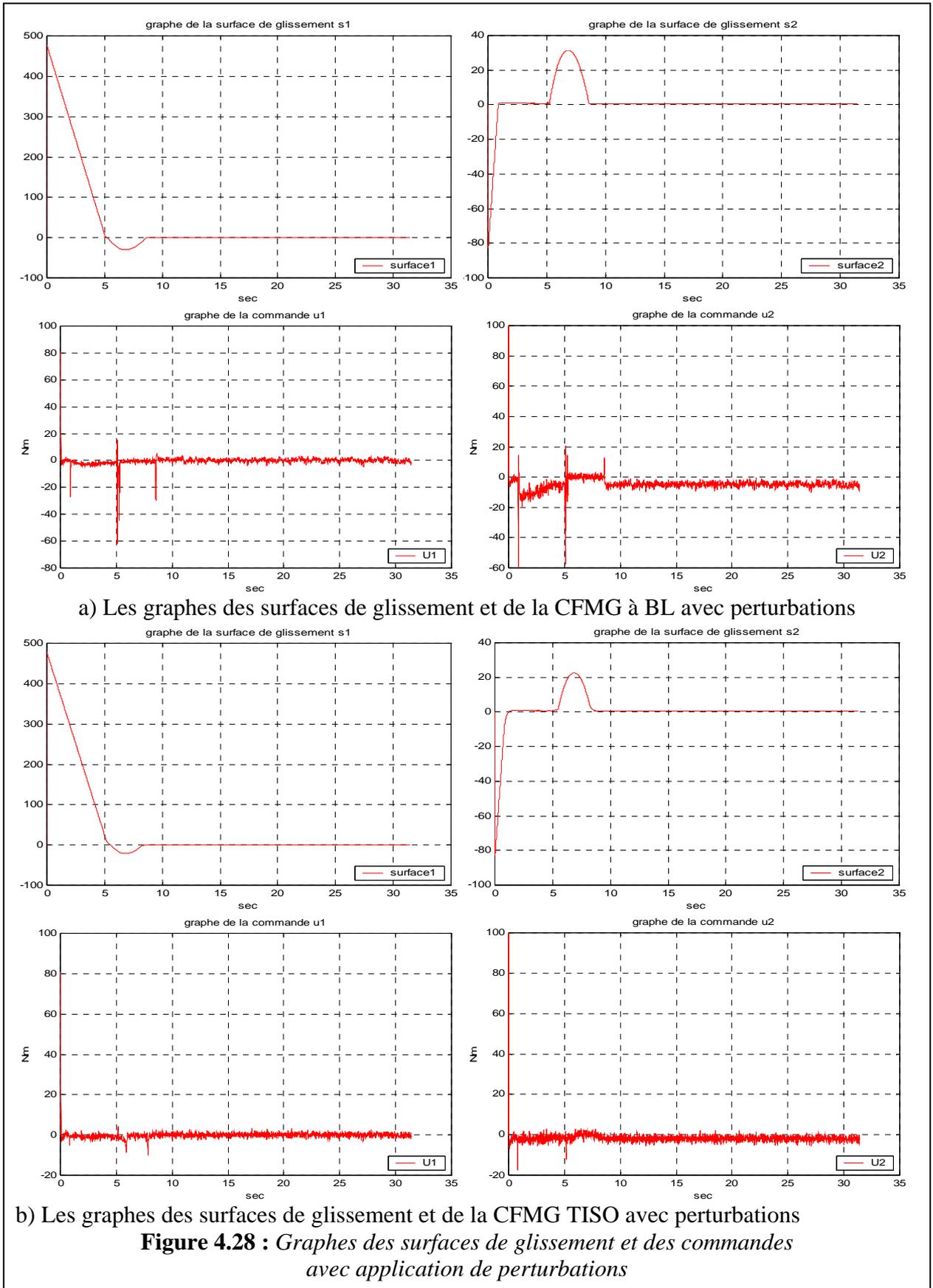


a) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG à BL sans perturbations



b) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG TISO sans perturbations

Figure 4.27 : Graphes des surfaces de glissement et des commandes sans appliquer des perturbations



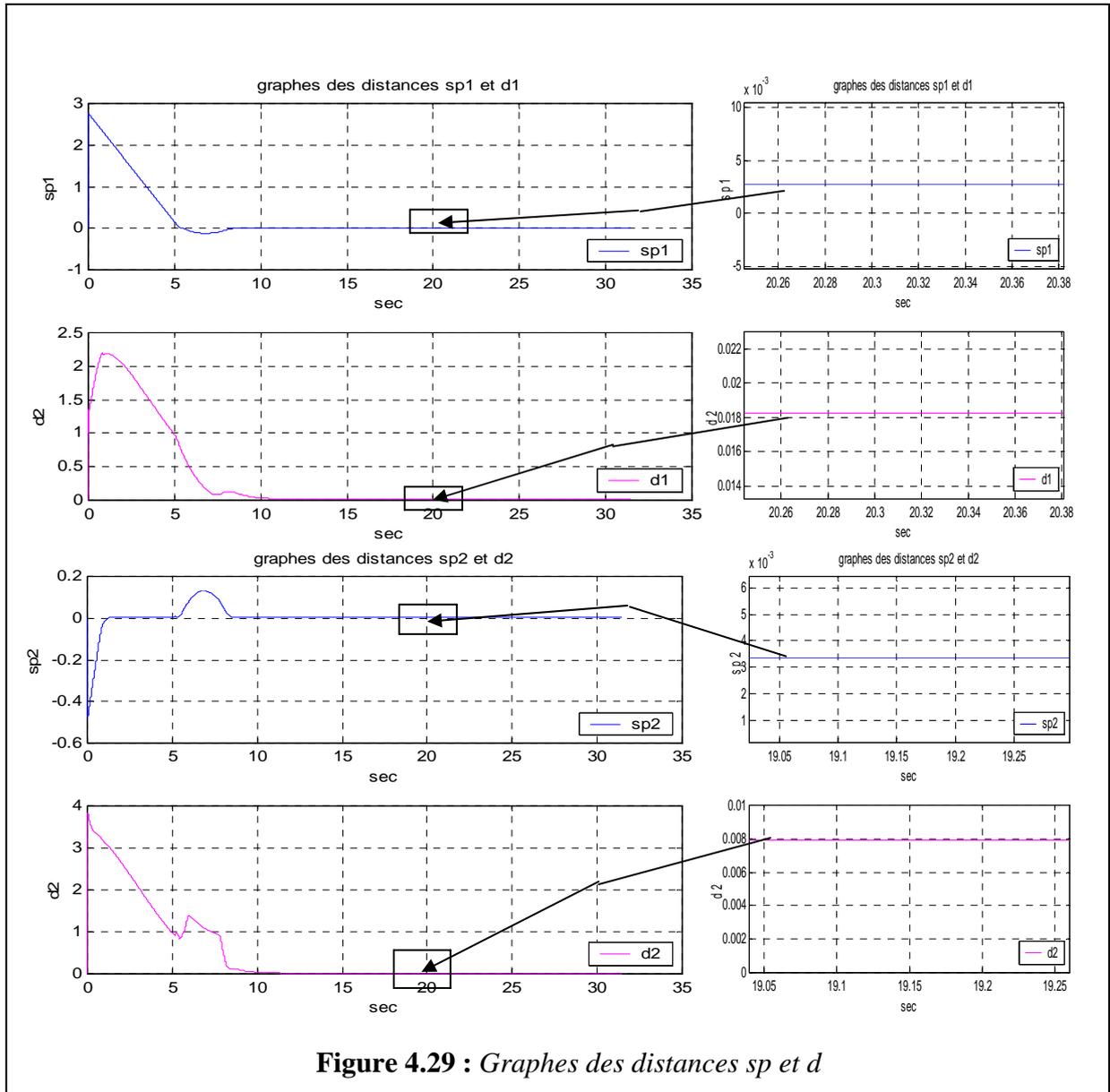
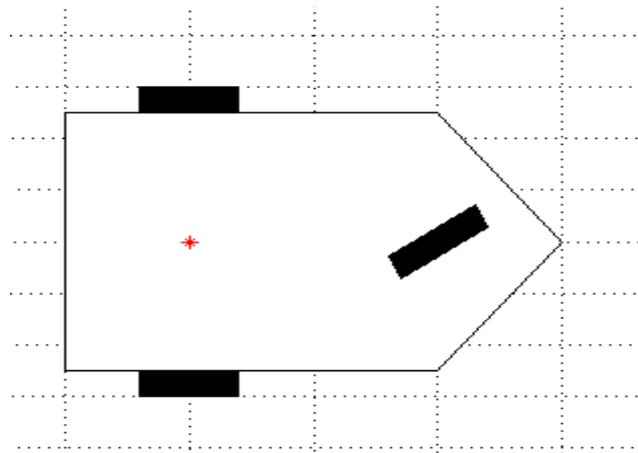
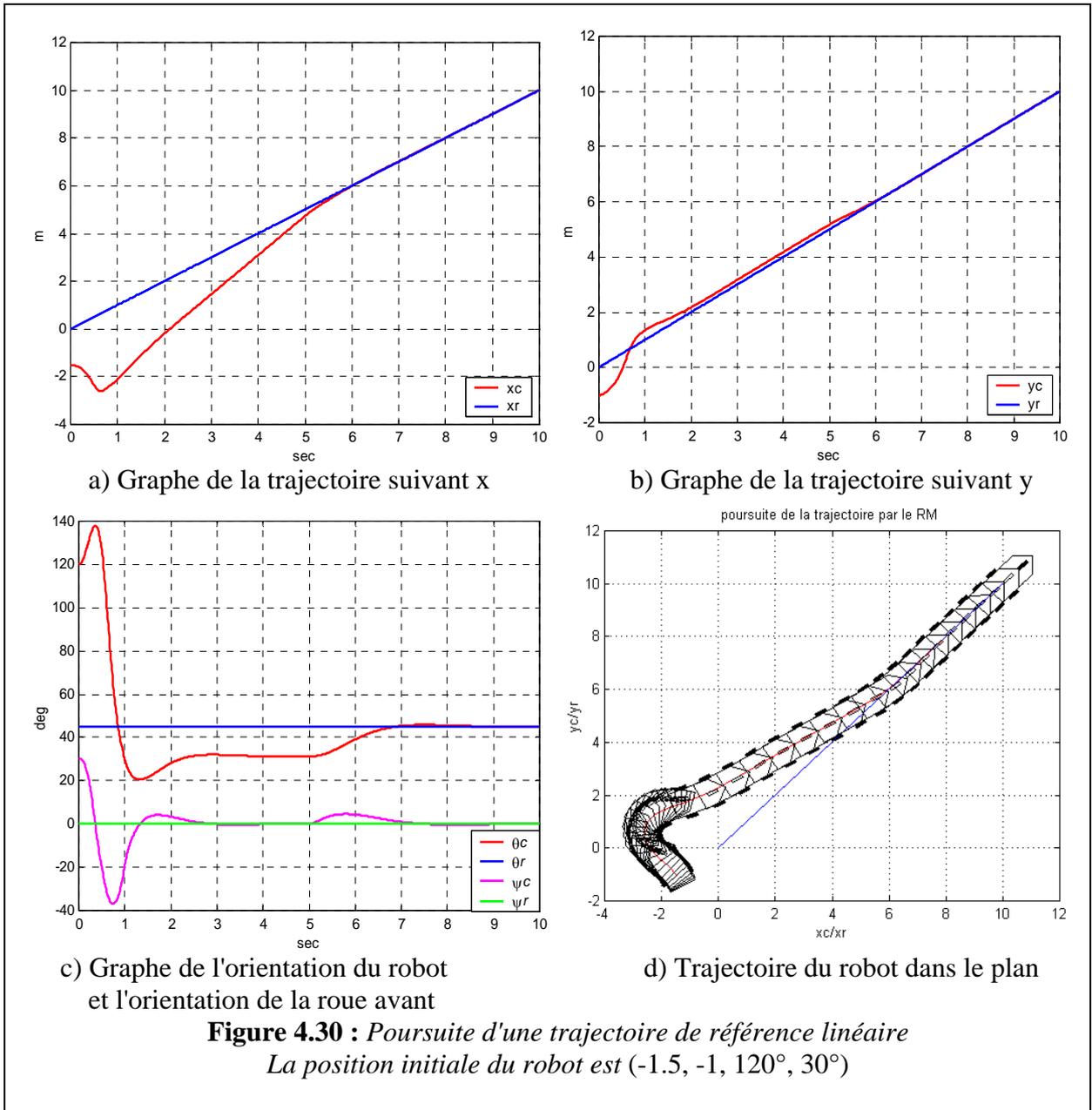
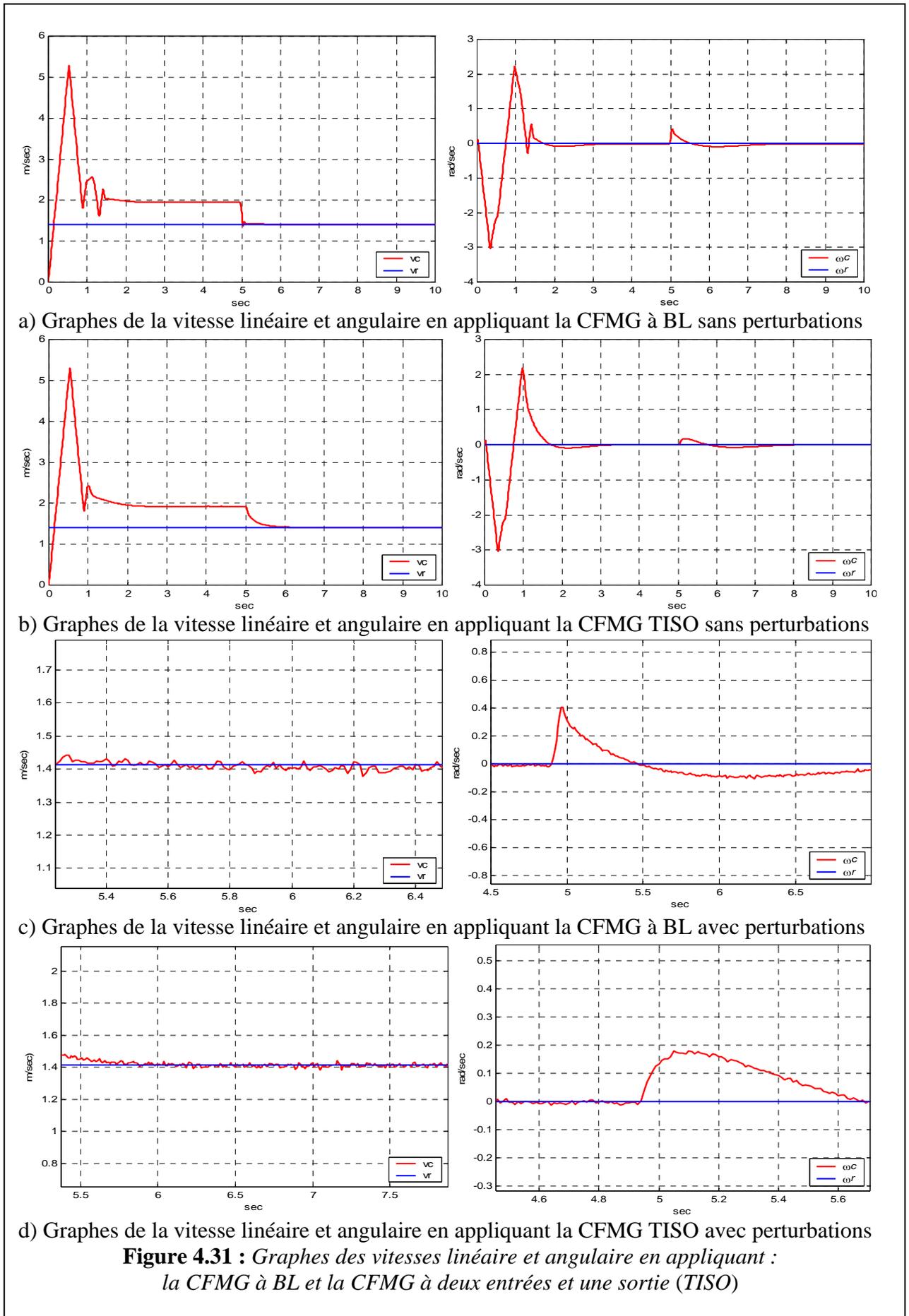


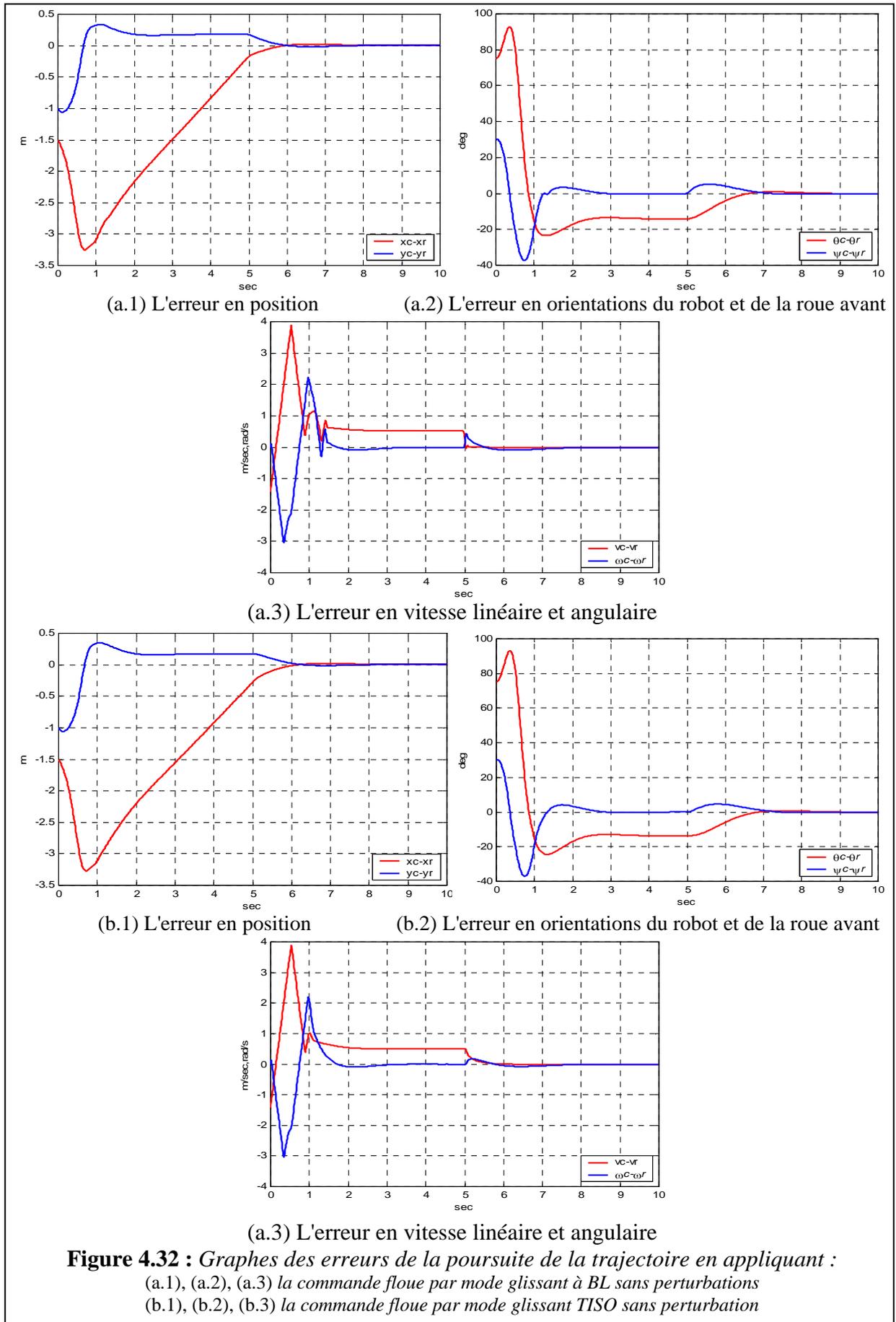
Figure 4.29 : Graphes des distances sp et d

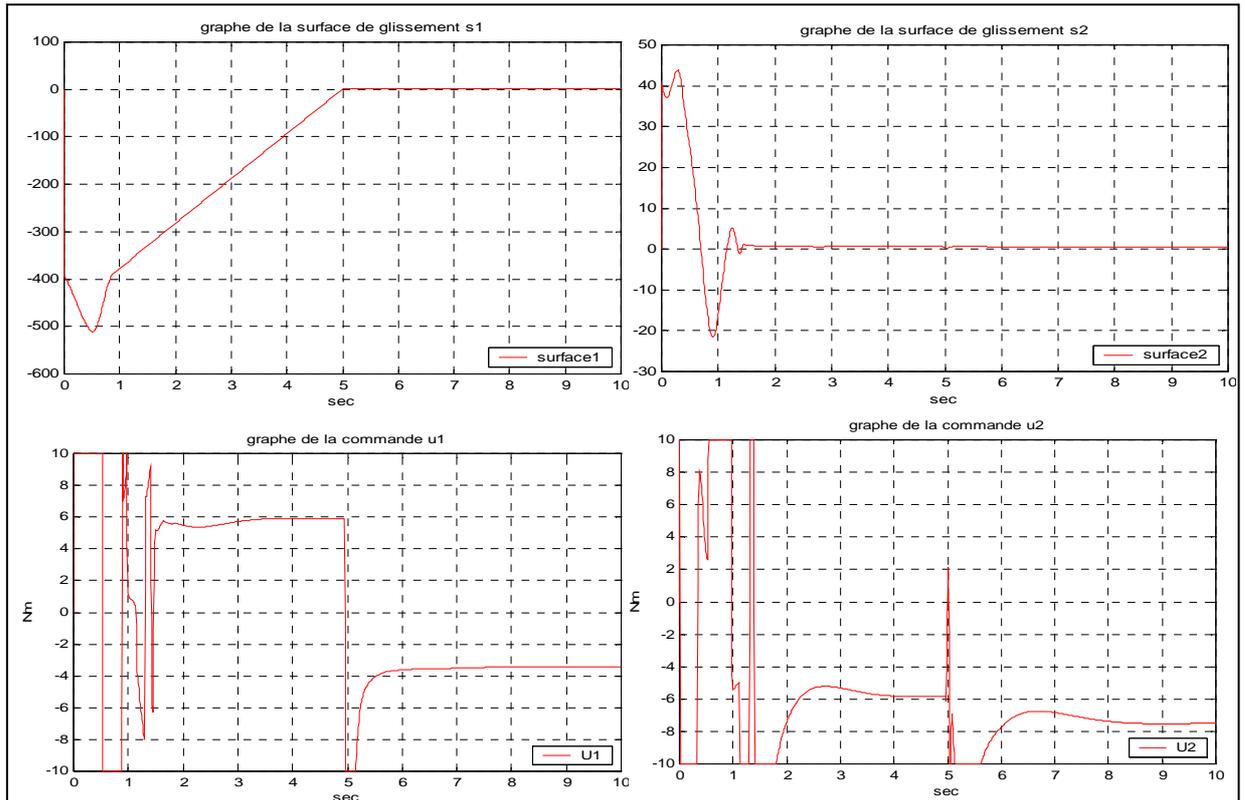
Résultats de simulation
Poursuite de trajectoire circulaire et linéaire
par un robot mobile à roues de type (1,1)



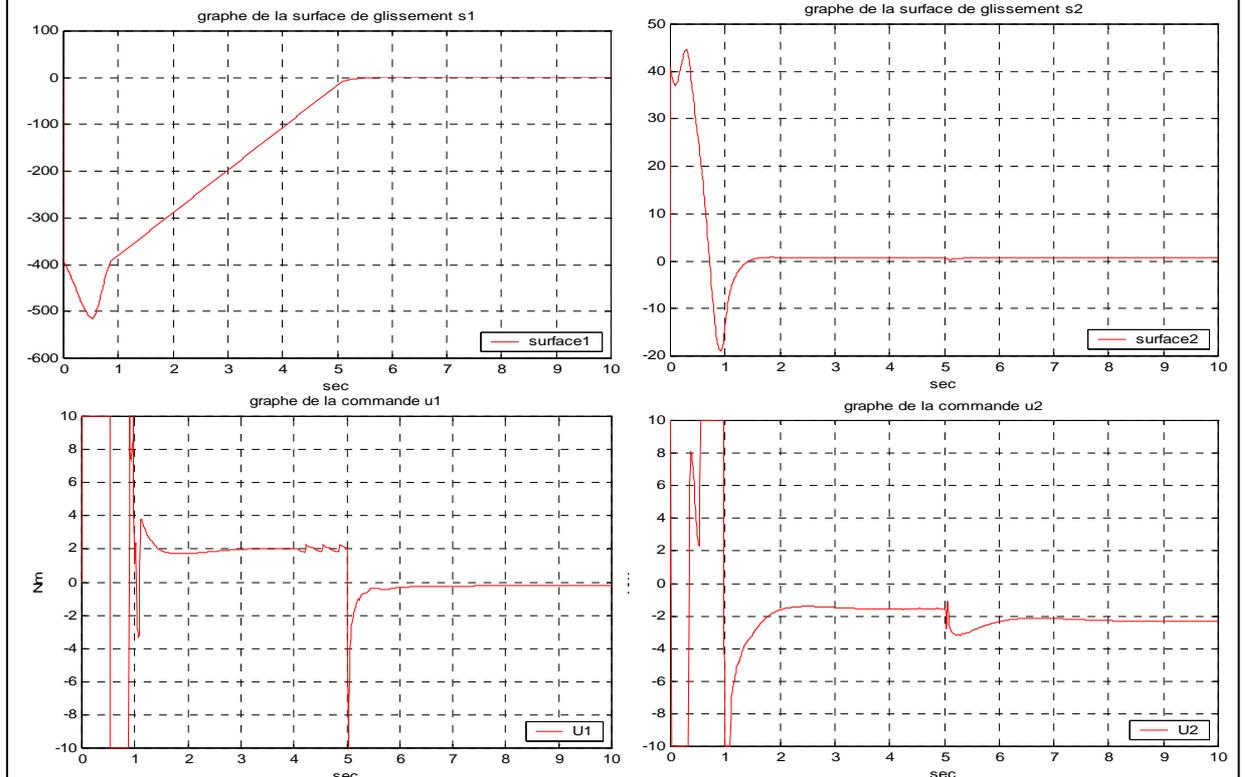






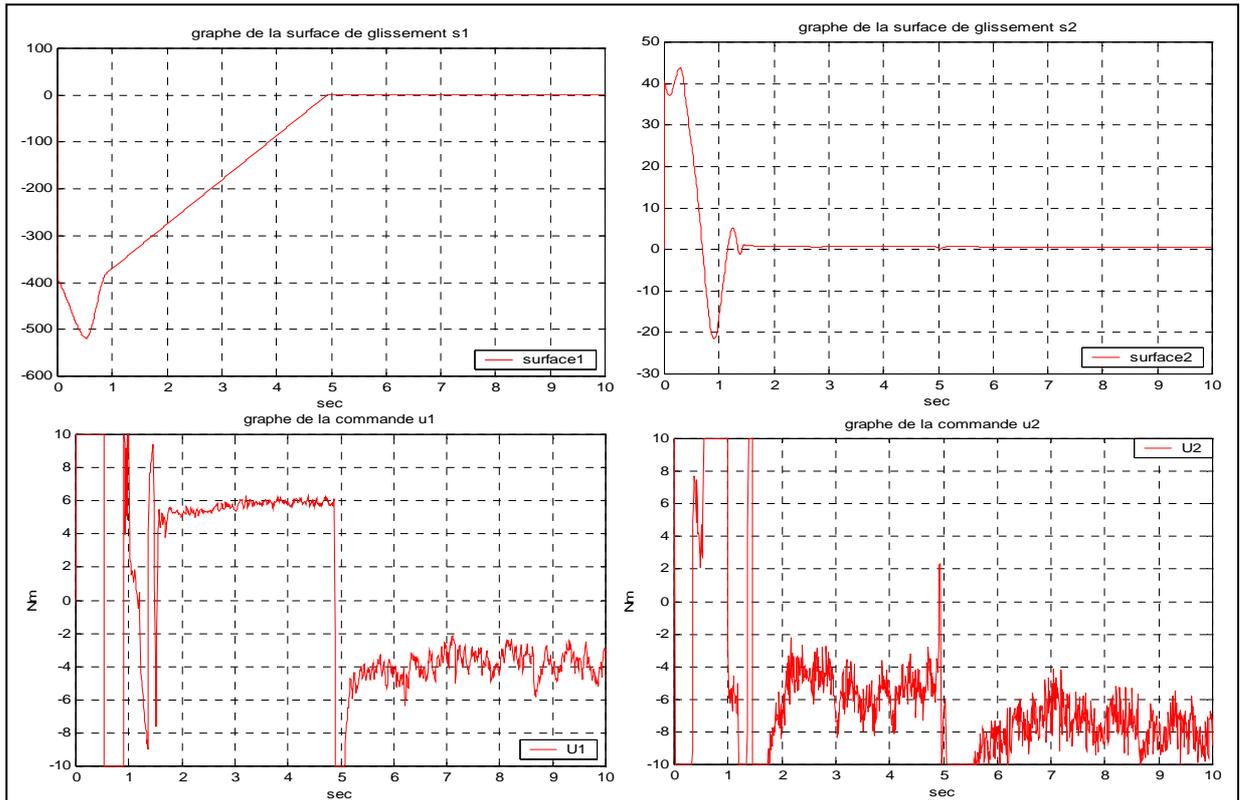


a) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG à BL sans perturbations

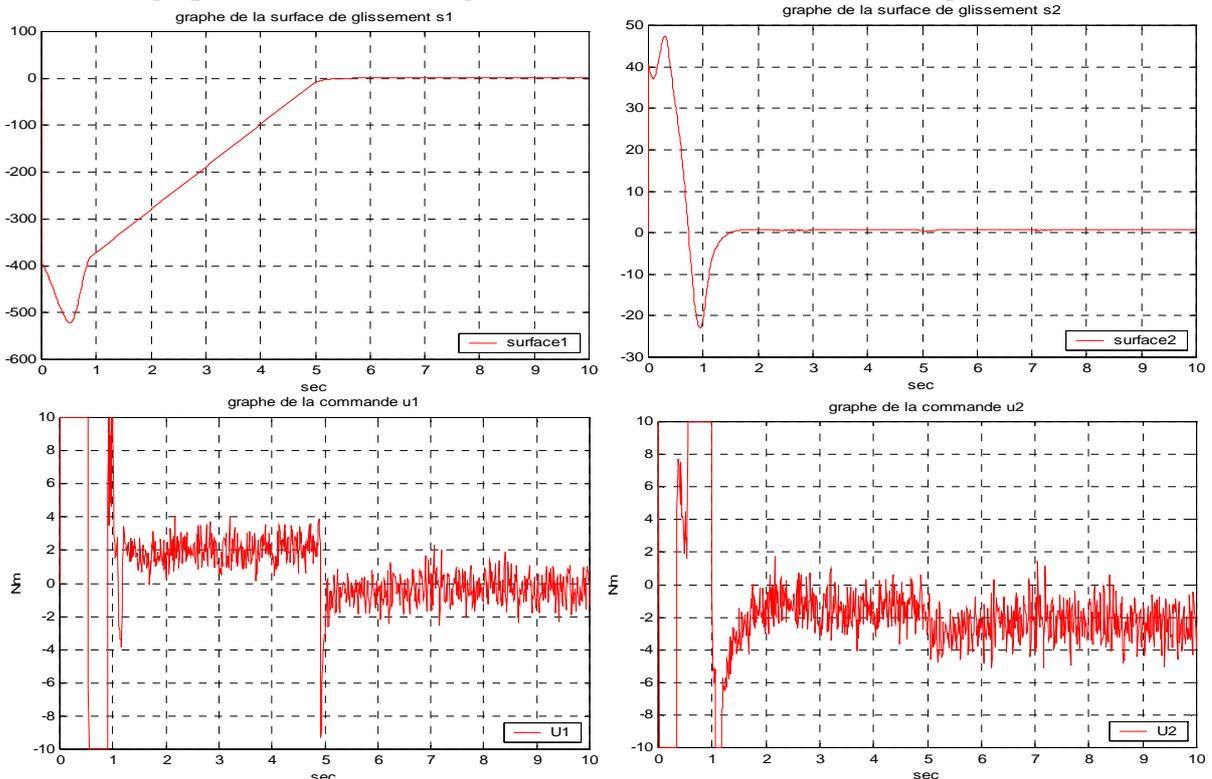


b) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG TISO sans perturbations

Figure 4.33 : Graphes des surfaces de glissement et des commandes sans appliquer des perturbations



a) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG à BL avec perturbations



b) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG TISO sans perturbations

Figure 4.34 : Graphes des surfaces de glissement et des commandes avec application des perturbations

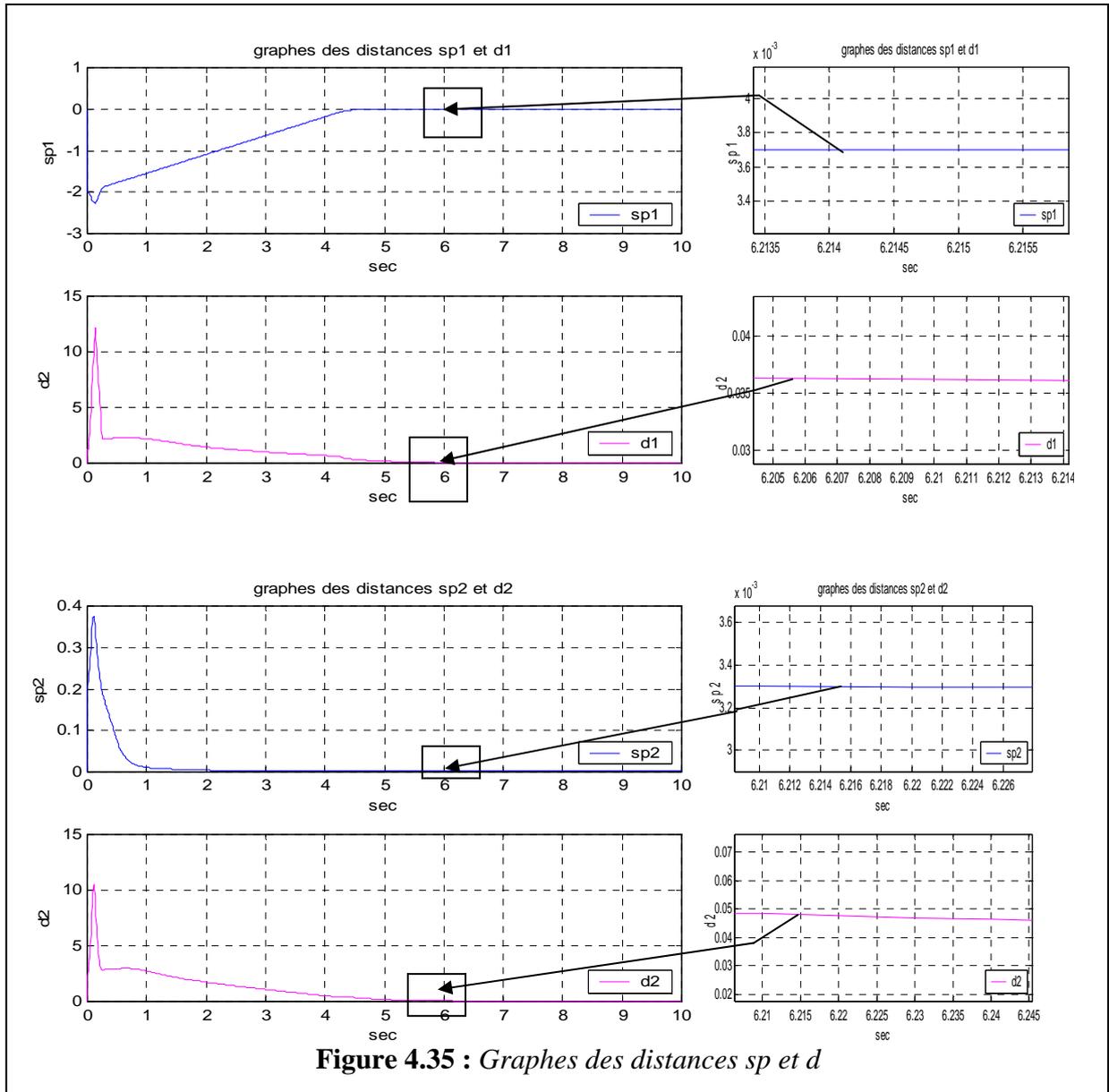
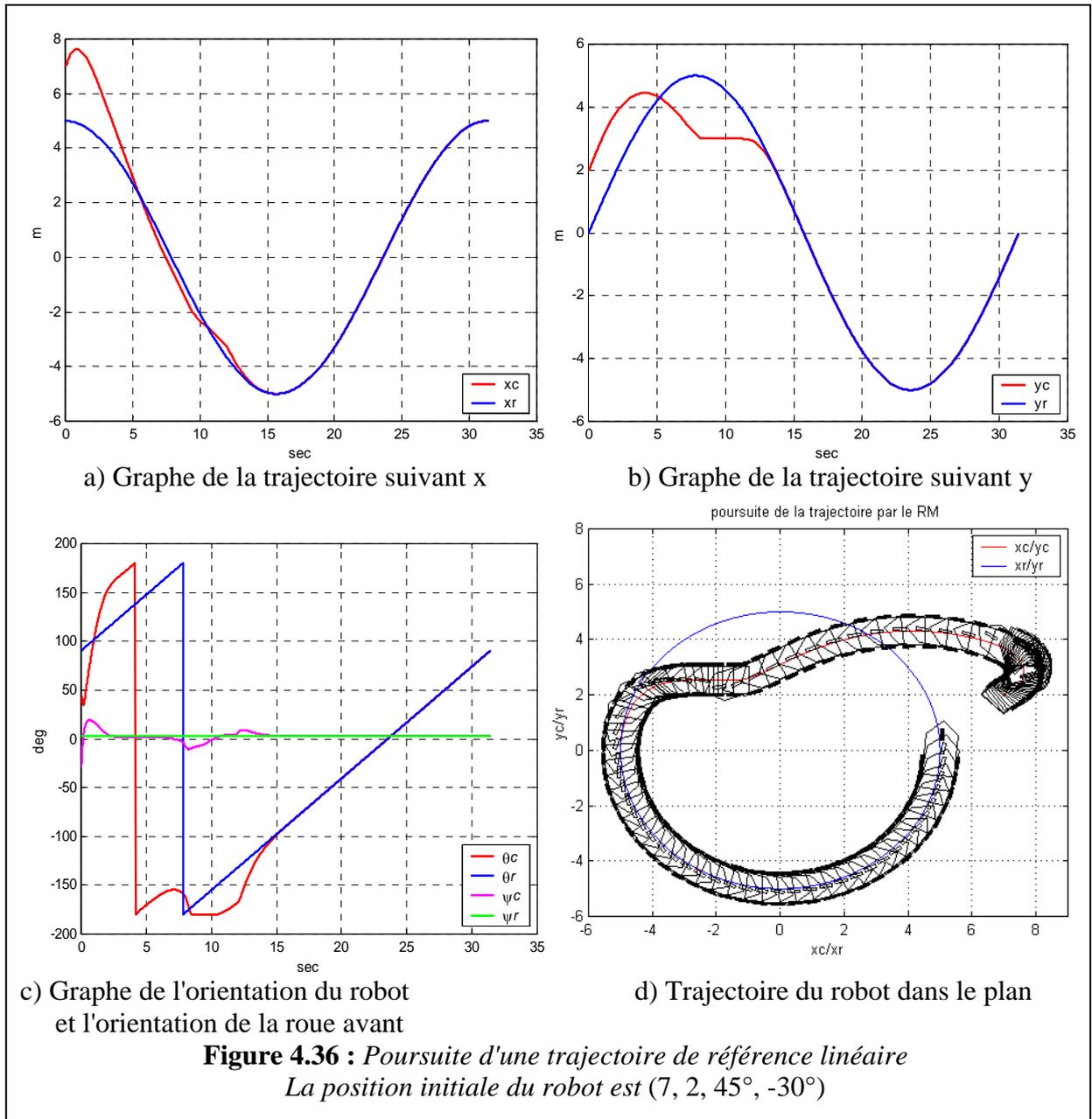
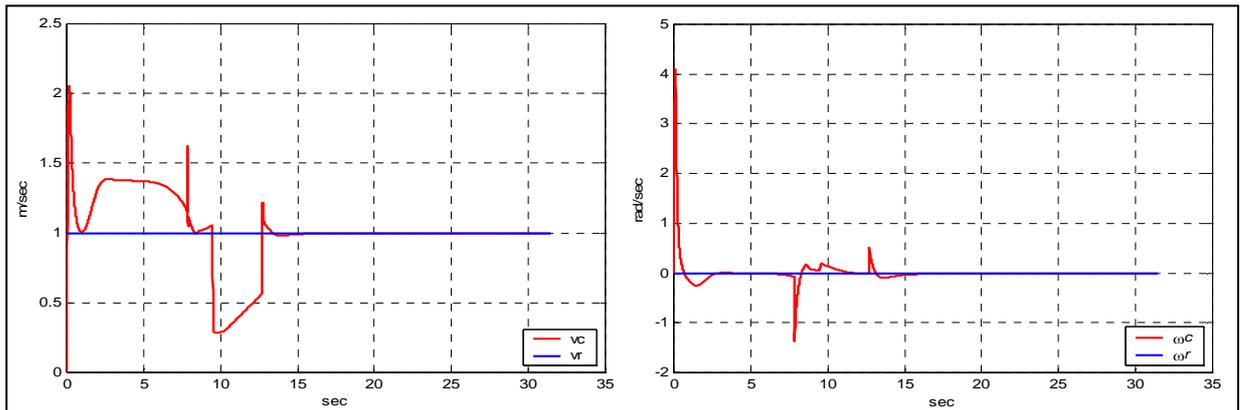
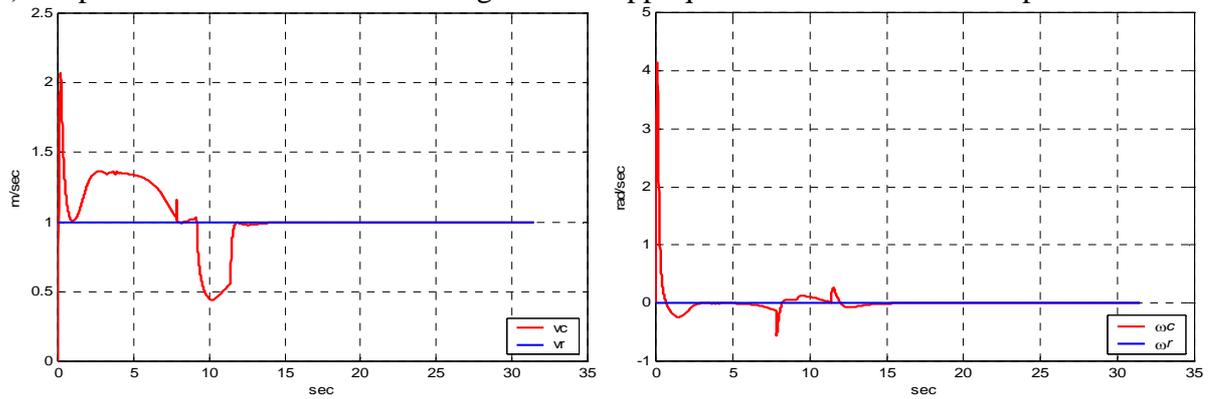


Figure 4.35 : Graphes des distances sp et d

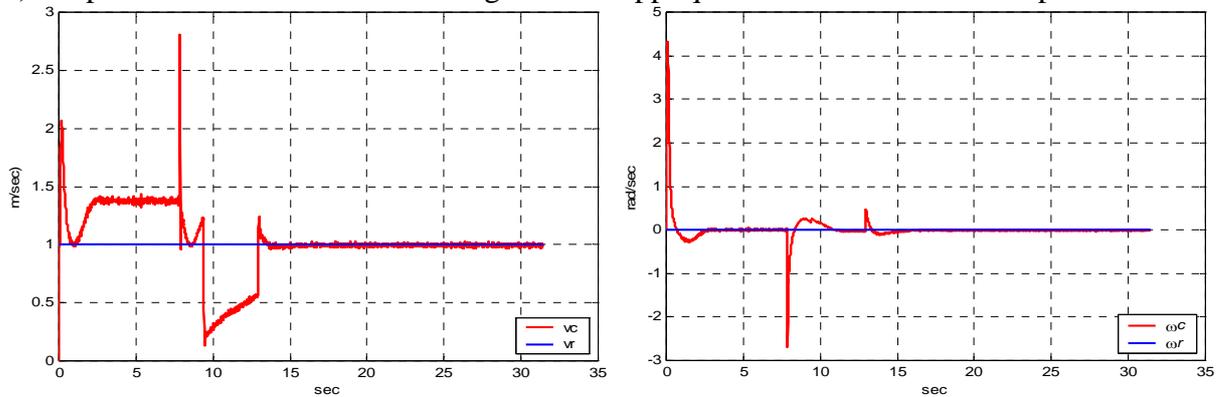




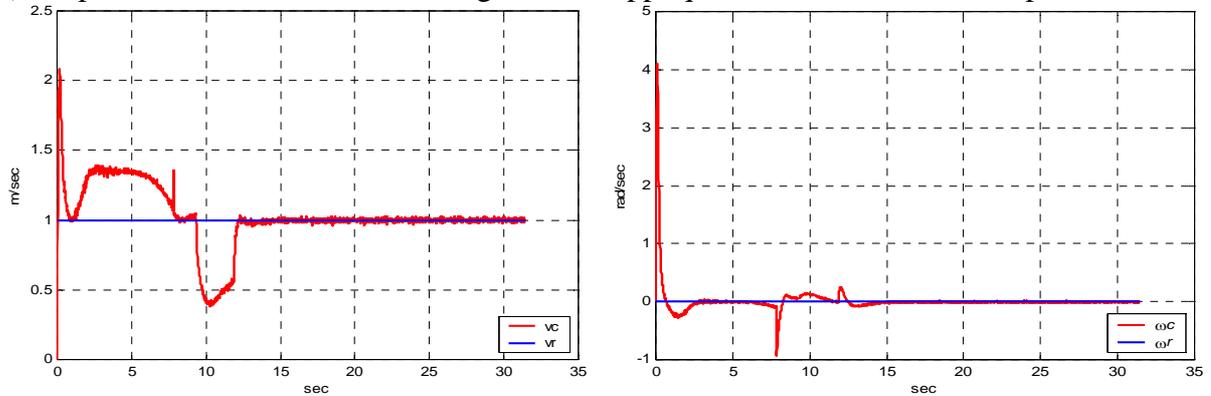
a) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG à BL sans perturbations



b) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG TISO sans perturbations

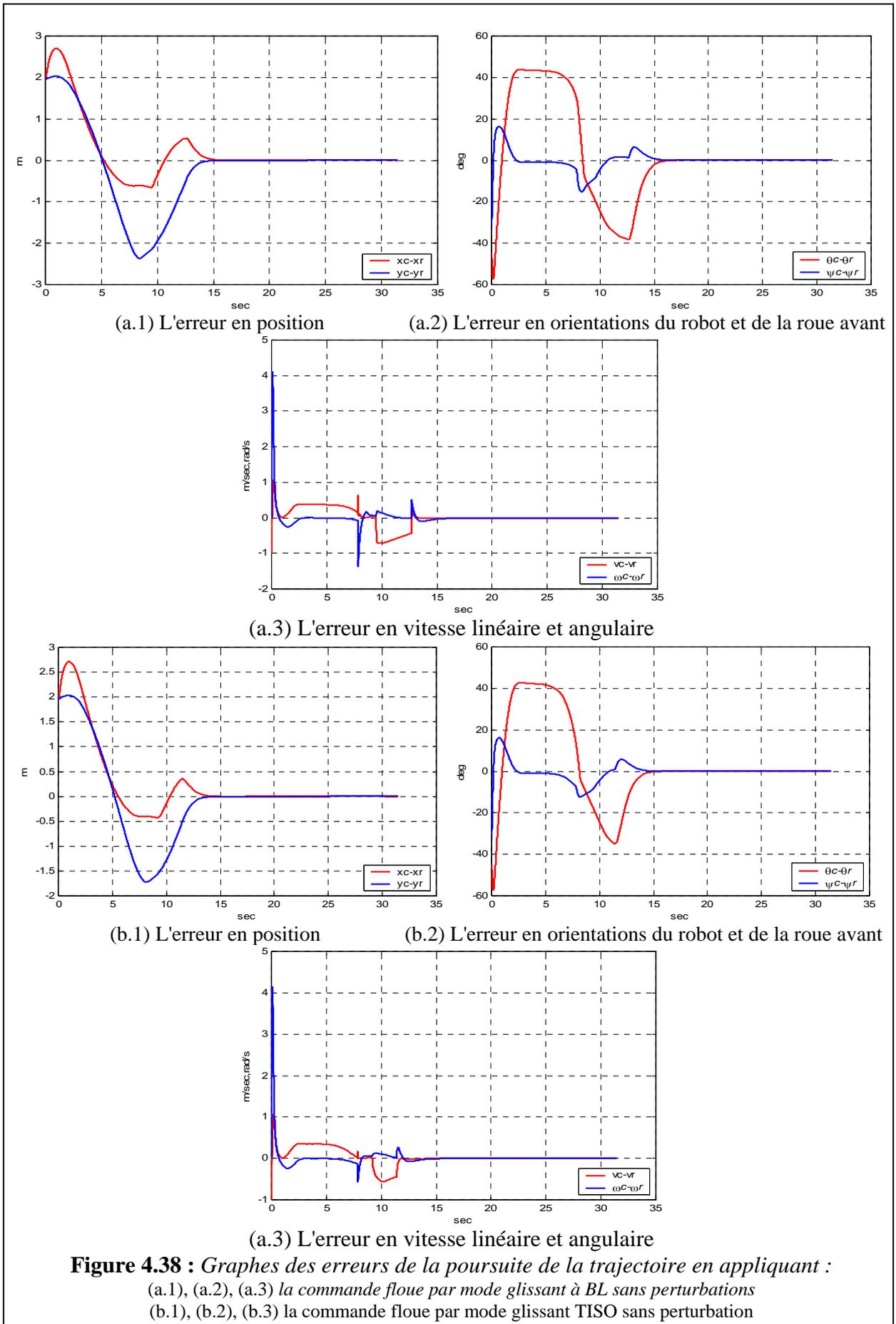


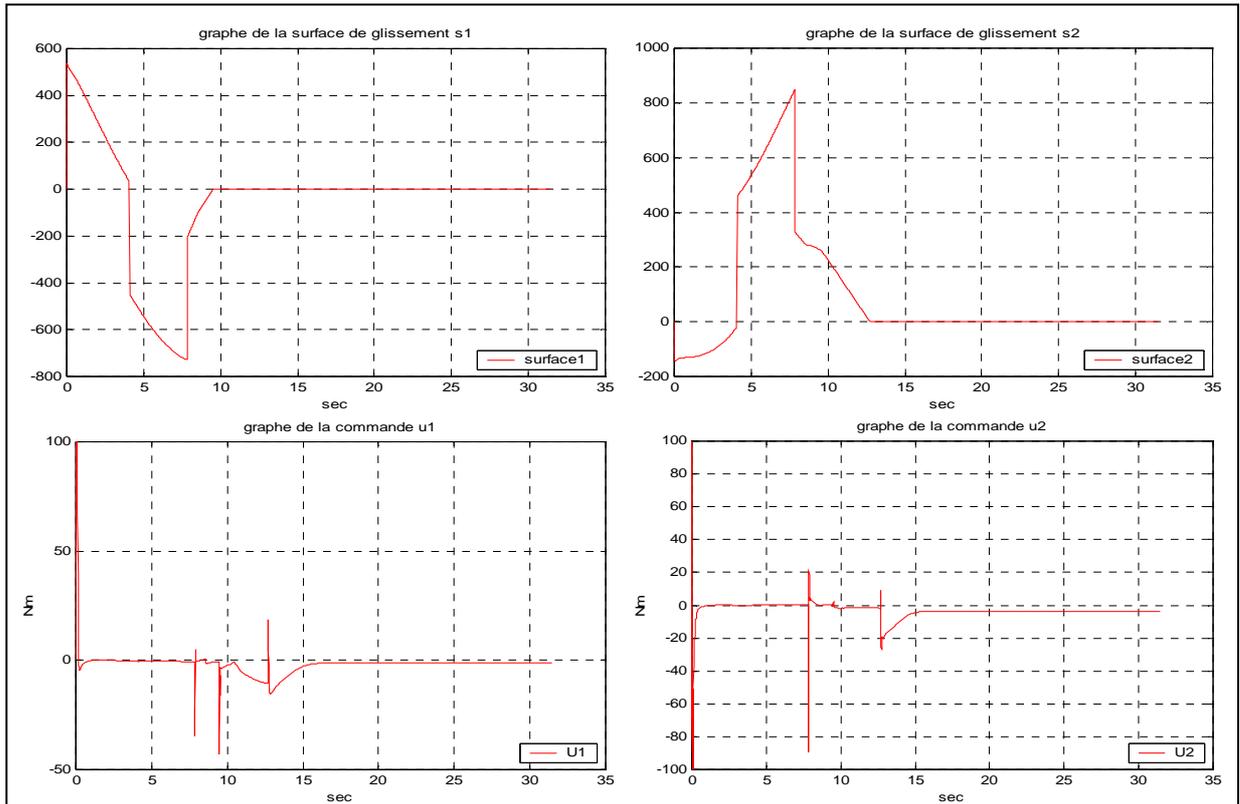
c) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG à BL avec perturbations



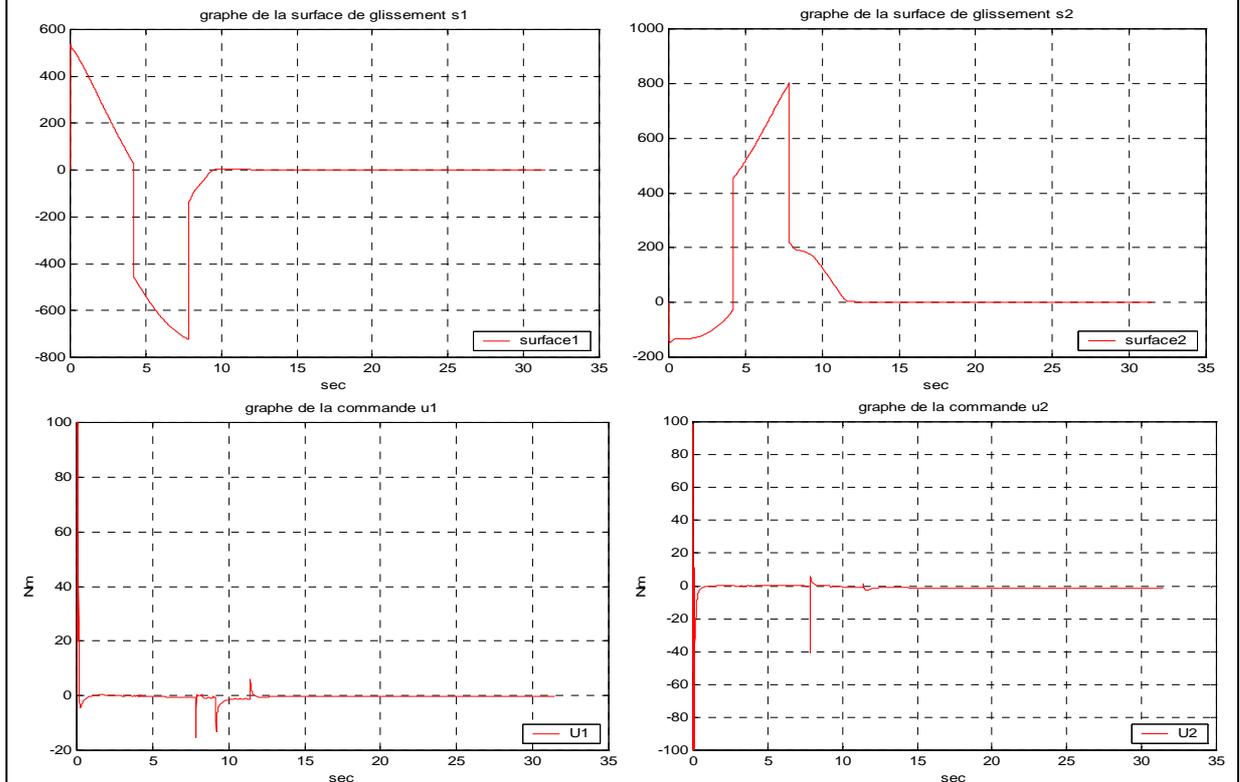
d) Graphes de la vitesse linéaire et angulaire en appliquant la CFMG TISO avec perturbations

Figure 4.37 : Graphes des vitesses linéaire et angulaire en appliquant :
la CFMG à BL et la CFMG à deux entrées et une sortie (TISO)



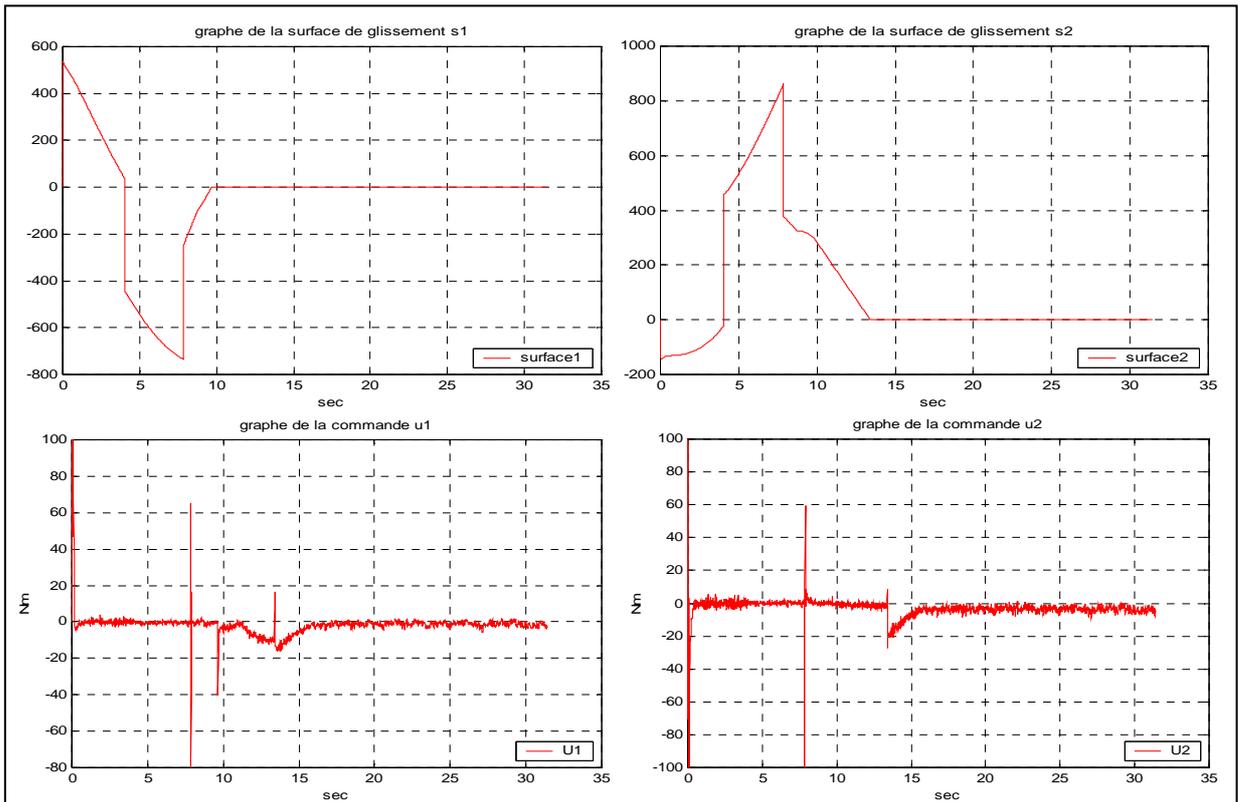


a) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG à BL sans perturbations

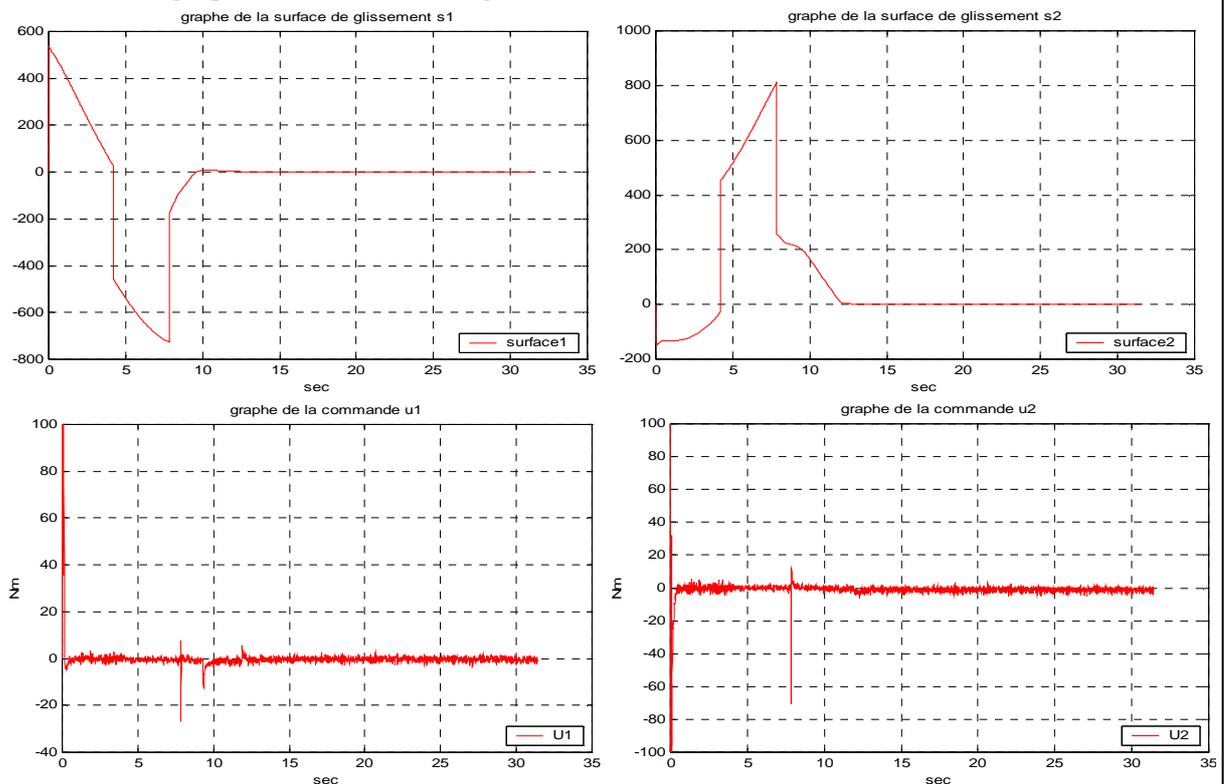


b) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG TISO sans perturbations

Figure 4.39 : Graphes des surfaces de glissement et des commandes : sans appliquer des perturbations



a) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG à BL avec perturbations



b) Les graphes des surfaces de glissement et de la CFMG TISO avec perturbations

Figure 4.40 : Graphes des surfaces de glissement et des commandes avec application des perturbations

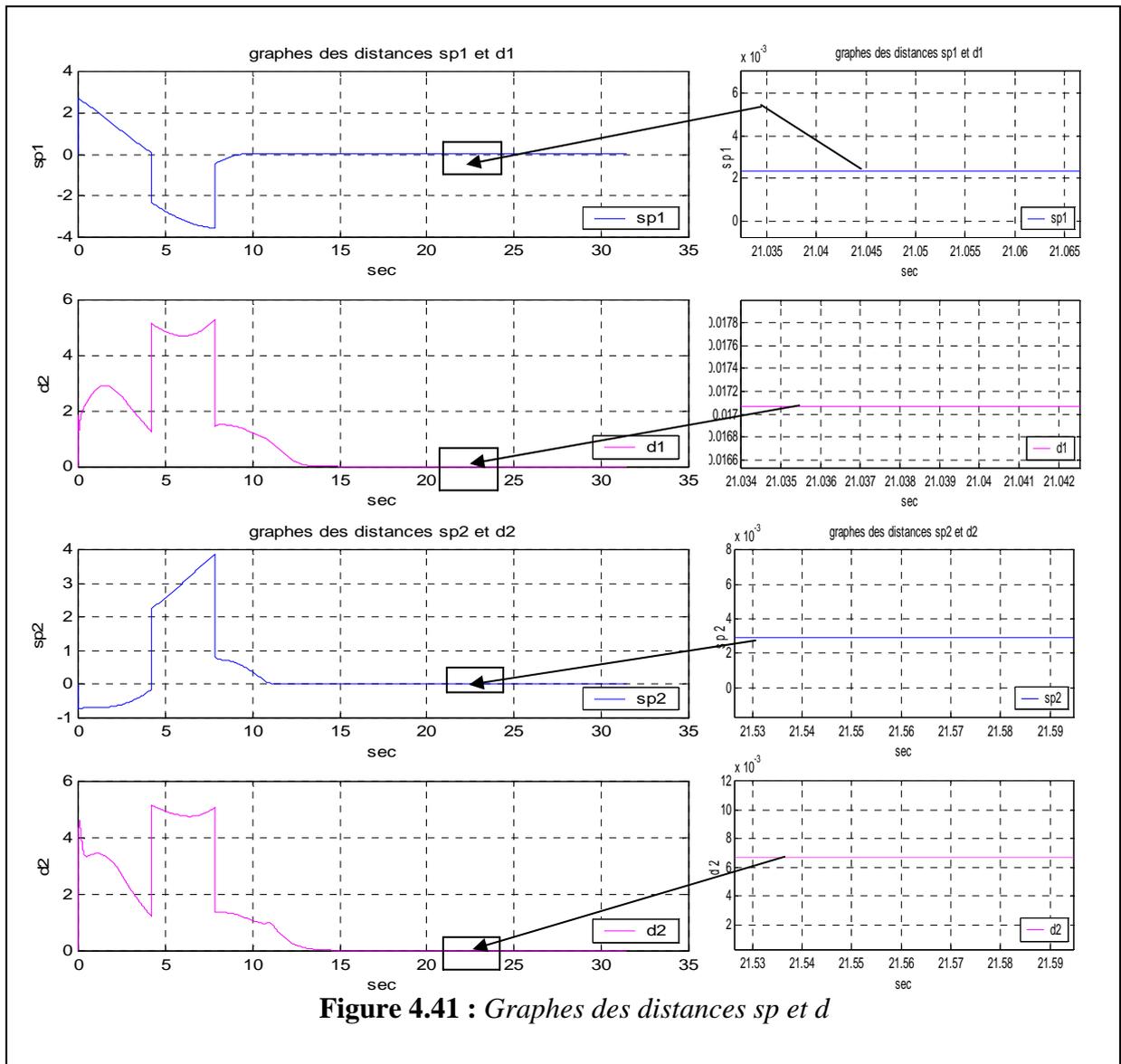


Figure 4.41 : Graphes des distances sp et d

Conclusion générale

Lors de son déplacement un robot mobile exécute soit :

- Une poursuite de trajectoire.
- Un suivi de chemin.
- Une stabilisation vers un point fixe.

L'objectif général de notre travail a été limité à la recherche des solutions pour résoudre le problème de la poursuite de trajectoire.

Afin d'atteindre ce but, nous avons étudié dans le premier chapitre les différentes représentations des robots mobiles à roues de façon générale et la représentation des robots mobiles de type (2,0) et (1,1) de façon particulière et détaillée. Nous avons établi les modèles cinématiques des deux robots dans un repère cartésien et dans le repère de Frenet pour éclaircir la différence entre le problème de poursuite de trajectoire et celui de suivi de chemin, puis nous avons développé les modèles dynamiques pour les deux robots.

Vu la possibilité d'établir des lois de commande en considérant le modèle cinématique ou dynamique du robot, nous avons visé l'étude des deux types de commande pour mieux apprécier les performances et les limites de l'utilisation de chaque modèle. Dans le second chapitre nous nous sommes basés sur un exemple spécifique qui est le suivi d'une ligne droite par un robot mobile de type (2,0) pour étudier quelques commandes établies sur la base du modèle cinématique. Nous avons déduit que, bien que la commande en boucle ouverte permet de suivre un chemin planifié, elle ne garantit pas la stabilité du système vis-à-vis des incertitudes et des perturbations, d'où la nécessité de chercher des lois de commande en boucle fermée. Dans ce dernier cas, nous nous sommes intéressés, aux techniques de commande non linéaire, où nous avons constaté que la conception des commandes par les méthodes du linéarisé tangent, du retour d'état linéarisant et les théorèmes de Lyapunov, de Lasalle et de Barbalatt a donné de bons résultats dans le cas de suivi de la ligne droite. Mais la convergence du système n'est pas toujours garantie, soit par ce que la loi de commande n'est définie que dans une région, ou parce que les théorèmes de la stabilité ne garantissent pas l'invariance de la réponse en présence des perturbations.

Pour ces raisons, nous avons cherché à élaborer une commande robuste. Le résultat de notre étude nous a mené à exploiter la technique de commande à structure variable par mode glissant. Cette technique a fait l'objet du troisième chapitre, les résultats de simulation montrent que la commande conçue garantit l'exécution de la trajectoire désirée en un temps de convergence fini, même en présence de perturbations et d'erreurs en position initiale. La robustesse de cette commande est prouvée par l'invariance de la réponse du système vis-à-vis des incertitudes et les perturbations externes.

L'avantage de la commande établie réside dans la simplicité et la possibilité de la modification de la loi de commande afin de décrire la dynamique du système réel. Ceci est justifié par la généralisation de la commande établie pour le robot de type (2,0) au robot de type (1,1). On conclut que la commande proposée peut être généralisée à tout type de robots mobiles à roues ayant deux entrées de commande qui peuvent être assimilées à la vitesse linéaire et angulaire. L'inconvénient de cette commande est le broutement. L'introduction d'une fonction de saturation a permis de réduire considérablement ce phénomène. Néanmoins, il faut passer par plusieurs tests afin de définir la largeur de la bande dans laquelle le broutement peut être éliminé ou réduit.

Dans le dernier chapitre nous nous sommes basés sur la commande par mode glissant à bande limitée (MG à BL), afin de concevoir la commande floue par mode glissant. L'étude détaillée de la théorie de la commande floue nous a permis de déduire les points communs entre les deux types de commandes. En se basant sur ces deux techniques, nous avons développé la commande floue par mode glissant à bande limitée (CFMG à BL). Les résultats de simulation ont montré les améliorations apportées par cette dernière loi du point de vue de l'allure de la commande qui est plus lisse et aussi du gain de la commande nécessaire pour effectuer la trajectoire désirée, chose qui est obtenue grâce à la capacité de régulation de la partie de commande floue. Malgré ces résultats qui peuvent être considérés comme satisfaisants, nous avons essayé d'améliorer ces derniers. Notre contribution consiste à appliquer une nouvelle extension qui est la commande flou par mode glissant TISO à la poursuite de trajectoire pour les robots mobiles de type (2,0) et (1,1). Dans ce cas, nous définissons les entrées du contrôleur flou en termes de distances (la distance entre un vecteur d'état d'erreur et la surface de glissement et la distance Euclidienne entre ce vecteur d'état d'erreur et un vecteur normal à la surface glissement passant par l'origine du plan de phase). Ce nouveau degré de liberté a introduit de nouvelles améliorations à notre commande, que l'on peut résumer par les points suivants :

- Une grande capacité à éliminer le broutement autour de la surface de glissement.
- Une amélioration de l'allure de la commande par rapport aux commandes précédentes (la commande est plus lisse).
- Une Meilleure la poursuite de la trajectoire désirée avec un gain de commande plus faible par rapport aux autres commandes.
- Sans oublier de mentionner que la convergence de cette nouvelle commande est plus rapide par rapport aux autres extensions même si cela n'apparaît pas explicitement dans les résultats de simulation.

Enfin, comme nous l'avons déjà dit, toutes les commandes établies dans ce travail ont pour but de résoudre le problème de la poursuite de trajectoire pour un robot mobile non holonome à roues. Mais il est possible d'étendre ces applications pour résoudre le problème de suivi de chemin qui peut être considéré comme un cas particulier de suivi de trajectoire, ou bien pour la stabilisation du robot vers un point fixe. Dans ce dernier cas, nous pouvons ajouter un autre contrôleur dans la boucle de commande, comme celui proposé par Kim [Kim95]. C'est un contrôleur de position qui permet de calculer la vitesse nécessaire pour que le robot puisse atteindre son objectif. Cette vitesse sera considérée comme la vitesse de référence pour le contrôleur par mode glissant.

Bibliographie

[Abo01] Michel Abou-Samah

"A Kinematically Compatible Frame Work for Collaboration of Multiplier Nonholonomic Wheeled Mobile Robots", Master of Engineering Thesis, Departement of Mechanical Engineering, Center of intelligent Machines, Mc.Gill University, Montreal, Canada, November 2001.

[Agu97] L.E.Aguilar

"Commande Robuste et Coordination de Mouvements de Robots Mobiles", Thèse de doctorat, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS, Toulouse, France, Soutenu le 21 Octobre 1997.

[Agu00] Antonio Pedro Aguiar, A.Nazir Atassi, Antonio Pascal

"Stabilization of Nonholonomic Dynamic Wheeled Mobile Robot with Nonparametric Modeling Uncertainty Using Lyapunov Function", Proc. of Controle'2000, 4th Portuguese Conference on Automatic Control, Guimares, Portugal, pages 1-7, October 2000.

[Alh03] Souma M.Alhadj Ali, Masoud Ghaffari

"Dynamic Simulation of Computed-Torque controllers for a Wheeled mobile Robot Autonomous Navigation in Outdoor Environment", Intelligent Engineering Systems Through Artificial Neural Networks, Vol.13, pages 511-516, 2003.

[Ali99] H.Aliziane, S.Brahimi

"Commande à Structure Variable Appliquée à un Robot Manipulateur", Thèse d'ingénieur, Université Saad Dahleb, Blida, Octobre 1999.

[Bal94] Jacky baltes, Robin Otte

"A Fuzzy Logic Controller for Car Like Mobile Robot", IEEE in Proceeding of the International Symposium on Computational Intelligence in Robotic and Automation, Monterey, CA, pages 89-94, November1999.

[Bel01] Saliha Bellakehal

"Génération de Mouvements et Commande Coordinée d'un Robot Manipulateur Mobile", Thèse Magister, 2001, Université de Blida.

[Ben98] S.Bentalba, A.El.Haffafi, A.Rachid

"Fuzzy sliding mode control of mobile robot", Proceeding of the 37th IEEE Conference on Decision and control, Tampa, Florida USA, pages 4264-4265, December 1998.

[Ber96] Michel Bertrand

"*Commande Floue d'un Séchoir Pilote*", Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Nancy, pages : 211-216, Décembre 96.

[Bib96] Microsoft Corporation, Liris interactive

"*Bibliorom Larousse*", version 1, 1996.

[Bou95] Bernadette Bouchon- Meunier

"*La Logique Floue et ses Applications*", Préface de Lotfi Zadeh, Édition Addison-Wesley, France, SA, 1995.

[Bor98] P. Borne, J. Rozinoer, J.-Y. Dieulot, L. Dubois

"*Introduction à la logique floue*". Édition Technip, 1998.

[Cam96] G. Campion, Georges G. Bastin, Brigitte B. d'Andréa Novel

"*Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robot*", IEEE Transactions of Robotics and Automation, Vol 12, N°1, pages 47-62, Mars 1996.

[Coi92] Philippe Coiffet

"*La Robotique Principe et Application*", Édition Hermes Science, 2001.

[Col94] Charles P.Coleman, Datta Gobole

"*A Comparison of Robustness : a Fuzzy Logic, PID and Sliding Mode Control*", Proceeding IEEE International Conference of Fuzzy Systems, Orlando, June 1994.

[Dom01] Etienne Dombre

"*Analyse et Modélisation des Robots Manipulateurs*", Edition Hermes Science, 2001.

[Dri92] Dimiter Driankov, Hans Heleedoorn, Michel Reinfrank

"*An Introduction to Fuzzy Control*", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

[Dix00] Warren E.Dixon, Darren M.dowsson, F.Zhang, E.Zergeroglu

"*Global Exponential Traking Control of a Mobile Robot System via a PE*", IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics- Part B : Cybernetic, Vol 30, N°1, pages : 129-141, February 2000.

[Ege98] M.Egerstedt, X.Hu, A.Stotsky

"*Control of a Car Like Robot Using a Dynamic Model*", Proceedings of the 1998 IEEE Conference on Robotics and Automation, Vol. 4, pages 3273-3278, Leuven, Belgium, May 1998.

[Gal02] Jean Gallice

"*Images de Profondeur*", édition Hermes science, Lavoisier, 2002.

- [Gus98] S.V. Gusev, I.A Markov, I.E. Paromtchic, V.A.Yakubovich, C.Langiee
"Adaptive Motion Control of Nonholonomic Vehicle", Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium. 1998.
- [Ham93] M.Hamrelain
"Commande Hiérarchisée à Modèle de Fréquence et à Structure Variable d'un Robot Manipulateur Artificiel", Thèse de Doctorat GARI-DGE-INSA, Toulouse, France 1993.
- [Ham96] T.Hamel
"Sur la Robustesse et la Précision du Contrôle des déplacements des Robots Mobiles à Roues", thèse de Phd, Université de Technologie de Compigne, janvier 1996.
- [Hsu98] Ya.Chen Hsu, Heider A.Malki
"Fuzzy Variable Structure Control for MIMO Systems", IEEE International Conference on Fuzzy Système Proceeding, Vol.1, pages : 280-285,1998.
- [Itk76] U.Itkis
"Control Systems of Variable Structure", Keter publishing house, 1976.
- [Kem01] M.Kemiha
"Sur la Commande des Robots Mobiles, Application des Commandes par : Mode Glissant et Mode Glissant Discret", Thèse de MAgister, 2001, École Militaire Polytechnique.
- [Kra93] Mikhail Krasnov, Alexander Kssélev, G. Makarenko, E.Chikine
"Mathématiques Supérieures", Tome1, Traduit du Russe par Djillali Embarek, Édition De Boeck université, Bruxelles, 1993.
- [Lag98] Walter Felter Lages, Elder M. Hemerly
"Smooth Time Invariant of Wheeled Mobile Robots", XIII International Conference on Systems Science, Wroclaw, Poland, September, 1998.
- [Lag00] S.Laghrouche, R-Ben lamine
"Conception d'une Loi de Commande basée sur les Régimes Glissants Discrets et Continus", Thèse d'Ingéniorat, USTHB Alger, Juin 2000.
- [Lau01] J.Paul Laumond
*"La Robotique Mobile"*Hermes Science Publication, Paris, 2001.
- [Lew03] Andrew D.Lewis
"Math 439 Courses Notes : Lagrangian Mechanics, Dynamics and Control", April 2003.
- [Li97] H.X.Li, H.Bigalland, A.W.Green
"Fuzzy Variable Structure Control", IEEE, Transaction on Système, Man and Cybernetics, Part B : Cybernetics, vol27, N°2, April97.

[Mam75] E.H.Mamdani, S.Assilian

"*An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller*", Int. J. of Man-Machine Studies, Vol.7, N°1, pages: 1-13, 1975.

[Mey92] A.meystel, Y.Nisenzon, R.Nawath

"*Merger of Rule Based and Variable Structure Controller*", Second IEEE Conference on Control Application, Vancouver, B.C, September 13-16, 1993.

[Ori91] Giuseppe Oriolo, Yoshihico Nakamura

"*Control of Mechanical Systems with Second Order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulator*", 30th IEEE Conference of Decision and Control of a Mobile Robot Brighton, UK, December 11-13, 1991.

[Oui03] R.Ouiguini, R.Bouزيد, Y.Sellemi

"*Une Commande Robuste par Mode Glissant Flou appliquée à la Poursuite de Trajectoire d'un Robot Mobile Non Holonome*", Conférence Internationale sur les Systèmes de Télécommunications, d'Électronique Médicale et d'Automatique, Tlemcen, Septembre 2003.

[Pal97] Rainer Palm, Dimiter Drainkov, Hans Hellen doorn

"*Model Based Fuzzy Control, Fuzzy Gainschedulers and Sliding Mode Fuzzy Controllers*", Springer-Verlag, Berlin, New york, Heidelberg, 1996.

[Pru88] Alain Pruski

"*Robotique Générale*", Edition Ellipses, 1987.

[Pru96] Alain Pruski

"*Robotique Mobile : La Planification de Trajectoire*", Edition Hermes, Paris, 1996.

[Rua98] P.Ruau, G.Bourdon, S.Delaplace

"*Dynamic Control of Wheeled Mobile Robot using Sliding Mode*", Romancy, pages 205-112, 1996.

[Sam92] C. Samson

"*Path Following and Time Varying Feedback Stabilisation of a Wheeled Mobile Robot*", Proceeding of the international conference on automation, robotics and computer vision, 1992.

[Sel01] Y.Sellami

"*Contribution à la Modélisation Floue des Systèmes. Application à la Commande d'un Moteur Asynchrone*", Thèse de magister. Ecole Nationale Polytechniques, El-Harrach, Algérie, juin 2001.

[Shi94] H.S.Shim, J.H.Kim, K.Koh

"*Variable Structure Control of Nonholonomic Mobile Robots*", IEEE Conférence of Robotique and Automation, pages: 1694-1699, May 1995.

[Shi95] H.S.Shim, J.H.Kim

"*Evolutionary Programming-Based Optimal Robust Locomotion Control of Autonomous Mobile Robot*", IEEE Proceeding of the First Korea-Australia Work Shop on Evolutionary Computation Teajon, Korea, 1995.

[Slo91] E.Slotine, J.Jacques, W.Li

"*Applied Nonlinear Control*", Englewood Cliffs-New jersey, Printice Hall, 1991.

[Son00] Feijun Song, Samuel M. Smith

"*A Comparison of Sliding Mode Fuzzy Controller and Fuzzy Sliding Mode Controller*", The 19th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, pages 480-484, 2000.

[Utk77] V.Utkin

"*Variable Structure Systems with Sliding Modes*", IEEE Transaction on Automatic and Control, pages: 212-222, Avril 1977.

[Yag94] Ronald R.Yager, Dimitar P.Filev

"*Essentials of Fuzzy Modeling and Control*", Hardcover, june1994.

[Yam94] Y. Yamamoto

"*Control and Coordination of Locomotion and Manipulation of Wheeled Mobile Manipulator*", PhD Thesis, Grasp Laboratory, University of Pennsylvania, Philadelphia, P. A. August 1994.

[Yan99] J.M.Yang, I.H.Choi, J.H.Kim

"*Sliding Mode Motion Control of Nonholonomic Mobile Robots*", IEEE Control System, Vol.19, N°19, pages: 15-23, April 1999.

[Zad65] L.Zadeh

"*Fuzzy sets*", Information and Control, Vol.8, N°19, pages: 338-353, 1965.

A n n e x e

Annexe A

Caractéristiques des robots mobiles

A.1. Tableau des valeurs des paramètres des robots mobiles utilisées en simulation

Les paramètres	Notation	Valeurs
- Masse de la plate-forme	m_c	20kg
- Masse de la partie avant de la plate-forme	m_{av}	10kg
- Masse de la partie arrière de la plate-forme	m_{ar}	10kg
- Masse des roues	m_r	0.5kg
- Longueur du robot	L	0.80m
- Largeur du robot	l	0.5m
- Distance entre une roue motrice et l'axe de symétrie	b	0.25m
- Distance entre le centre de masse et l'axe des roues arrière	d	0.30m
- Distance entre l'axe des roues arrière et le point de fixation de la roue avant	X	0.45m
- Longueur de la partie arrière de la plate forme	l_{ar}	0.40m
- Longueur de la partie avant de la plate forme	l_{av}	0.40m
- Rayon de chaque roue	r	0.07m

A.2. Calcul du moment d'inertie de la plate-forme des robots mobiles

Pour calculer le moment d'inertie des robots mobiles, nous avons considéré que la plate-forme des robots mobiles est constituée de deux parties de forme parallélépipédique et de masse m_{av} et m_{ar} . La matrice du moment d'inertie au centre de gravité de la plate forme s'exprime par la relation suivante :

$$I_G = \begin{bmatrix} \left(l^2 + H^2\right) \frac{m_c}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_c}{12} H^2 + \frac{m_{av} l_{av}^2 + m_{ar} l_{ar}^2}{12} + \frac{L^2}{3m_c} (m_{av}^2 + m_{ar}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_c}{12} l^2 + \frac{m_{av} l_{av}^2 + m_{ar} l_{ar}^2}{12} + \frac{L^2}{3m_c} (m_{av}^2 + m_{ar}^2) \end{bmatrix}$$

Puisque le robot se déplace dans le plan, donc $I_c = I_{G(3,3)}$.

A.3. Les signaux de perturbations utilisés pour tester la robustesse de la loi de commande

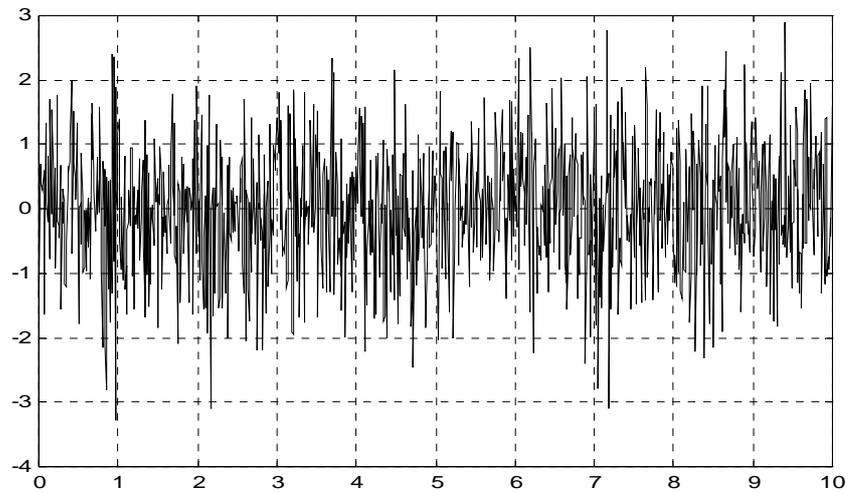


Figure A.1 : *Signal de bruit appliqué dans le cas de la poursuite d'une trajectoire linéaire (l'écart type: 0.99)*

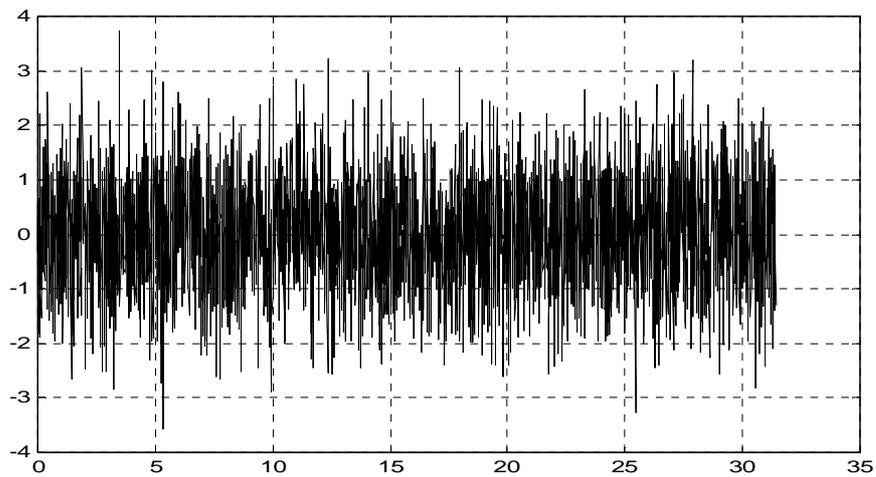


Figure A.2 : *Signal de bruit appliqué dans le cas de la poursuite d'une trajectoire circulaire (l'écart type : 0.96)*

Annexe B

Stabilité des systèmes Non linéaires

Cette annexe présente quelques définitions et théorèmes de base afin de faciliter l'étude sur la stabilisation des systèmes non-linéaires. D'abord, nous présentons des notions générales relatives à la stabilité des systèmes. Puis, nous énonçons deux théorèmes de Lyapunov utilisés pour assurer la stabilité asymptotique. Etant donné qu'il existe des situations où ces deux théorèmes de Lyapunov ne peuvent pas garantir la stabilité asymptotique, il est possible de le vérifier en employant le théorème de LaSalle ou le lemme de Barbalat. Leurs descriptions sont aussi données dans cette annexe.

B.1. Notions relatives à la stabilité des systèmes

D'une manière générale, un système dynamique est souvent représenté par un ensemble d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x} = F(x, u, t) \quad (\text{B.1})$$

où $F : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^n$ est une fonction continue,

$x \in \mathcal{R}^n$ représente l'état du système,

$u \in \mathcal{R}^m$ est la commande et $t \in \mathcal{R}$ est le temps.

Pour notre étude, nous nous restreindrons à l'analyse des systèmes *invariants*, dans lesquels le temps ne figure pas explicitement dans les équations, d'où :

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (\text{B.2})$$

La définition de la loi de commande en fonction de l'état courant $u(x)$ va nous permettre d'écrire le système (B.2) comme suit :

$$\dot{x} = F(x) \quad (\text{B.3})$$

où $F : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ est une fonction non-linéaire ;

Sur la base de l'équation (B.3), nous allons énoncer maintenant les concepts liés à la stabilité des systèmes.

Définition 1

L'état x^* est appelé *point d'équilibre* du système (B.3), s'il satisfait :

$$0 = F(x^*)$$

Afin d'alléger les définitions de stabilité, il est courant de considérer que l'origine est un point d'équilibre ($x^* = 0$). Ceci n'affecte pas la généralisation de ce cas, car un simple changement de coordonnées permet de se ramener à cette condition.

Définition 2

Le point d'équilibre $x = 0$ est dit *stable* si, pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$, tel que si $\|x(0)\| < r$ alors $\|x(t)\| < R$ pour tout $t \geq 0$. Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit *instable*.

Cette définition de base assure l'existence d'un voisinage du point d'équilibre, tel que toute trajectoire du système issue de l'intérieur de ce voisinage est assurée de rester près de l'origine.

Définition 3

Le point d'équilibre $x = 0$ est *asymptotiquement stable*, s'il est stable, et s'il existe $r > 0$ tel que $\|x(0)\| < r$ entraîne $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Au-delà de la notion de stabilité, le concept de stabilité asymptotique permet d'assurer que le point représentatif du système finira par converger vers le point d'équilibre.

Définition 4

Le point d'équilibre $x = 0$ est *exponentiellement stable*, s'il est asymptotiquement stable, et s'il existe deux constantes strictement positives α_1, α_2 indépendantes du temps et des conditions initiales $x(0)$, telles que :

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1 \|x(0)\| e^{-\alpha_2 t}$$

Cette notion est plus forte que la notion de stabilité asymptotique, puisque en plus d'assurer la convergence vers le point d'équilibre, elle permet de préciser la vitesse de convergence.

Soulignons que ces définitions sont généralement définies de manière locale, au voisinage d'un point d'équilibre. Elles deviennent globales si les conditions sont satisfaites pour n'importe quel état initial du système.

Dans les sections qui suivent, nous allons présenter des théorèmes de base utilisés pour garantir la stabilité des systèmes du type (B.3).

B.2. Théorèmes de Lyapunov

Les théorèmes sur la stabilisation au sens de Lyapunov sont basés sur l'analogie avec les systèmes physiques. L'idée de base est que lorsque l'énergie d'un système décroît continuellement au cours du temps, il arrive un moment où le système n'a plus d'énergie et s'arrête.

Un des exemples très classiques est celui d'une boule qui roule le long d'une pente, jusqu'à ce que son énergie totale : l'énergie cinétique + l'énergie potentielle, s'annule.

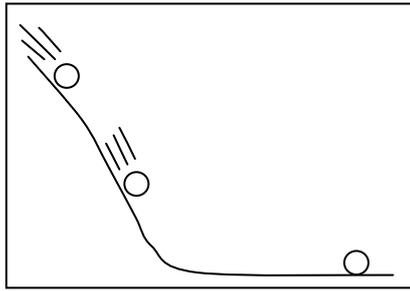


Figure B.1 : Exemple physique d'un système qui se stabilise.

L'idée de Lyapunov consiste à essayer d'associer une fonction énergie à un système quelconque, de sorte que le même raisonnement puisse être appliqué pour déterminer la stabilité.

Bien que ce principe simple constitue encore aujourd'hui l'un des meilleurs outils pour la stabilité des systèmes, la détermination de la « bonne » fonction d'énergie dans le cas des systèmes non-linéaires demeure un problème très difficile à résoudre. Nous soulignons donc que si on ne trouve pas une fonction de Lyapunov, cela ne signifie pas que le système diverge.

Par la suite, nous allons noter $B_{R_0} = \{x \in \mathfrak{R}^n / \|x\| < R_0, R_0 > 0\}$, la boule ouverte de rayon R_0 dans \mathfrak{R}^n .

Théorème 1 (Stabilité locale)

Si, dans B_{R_0} , il existe une fonction scalaire différentiable $V(x)$, telle que :

- (i) $\forall x \in B_{R_0} \setminus \{0\}, V(x) > 0$, et $V(0) = 0$
- (ii) $\forall x \in B_{R_0} \setminus \{0\}, \dot{V}(x) \leq 0$, et $\dot{V}(0) = 0$

alors, le point d'équilibre $x = 0$ du système (B.3) est *stable*. Si de plus,

- (iii) $\forall x \in B_{R_0} \setminus \{0\}, \dot{V}(x) < 0$, alors la *stabilité est asymptotique*.

Une fonction qui remplit les conditions (i) et (ii), est appelée *fonction de Lyapunov*.

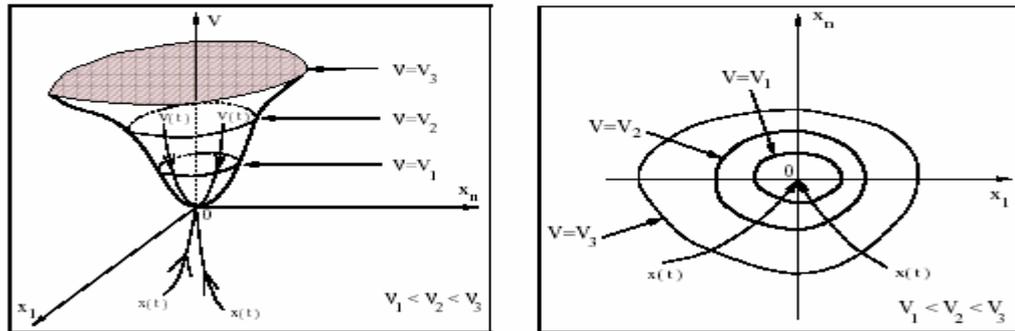
Théorème 2 (Stabilité globale)

Supposons qu'il existe une fonction scalaire et différentiable $V(x)$, telle que :

- (i) $\forall x \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\}, V(x) > 0$ et $V(0) = 0$
- (ii) $\forall x \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\}, \dot{V}(x) \leq 0$, et $\dot{V}(0) = 0$
- (iii) $V(x) \rightarrow \infty$, lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$

Alors, le point d'équilibre $x = 0$ du système (B.3) est *globalement asymptotiquement stable*.

La figure B.2 illustre graphiquement une fonction de Lyapunov, permettant d'assurer la convergence globale d'un système.



a) Représentation de $V(x)$

b) Projection de $V(x)$ sur l'espace d'état

Figure B.2 : Exemple graphique d'une fonction de Lyapunov

B.3. Théorème de LaSalle et Lemme de Barbalat

Le théorème de l'ensemble invariant de LaSalle et le lemme de Barbalat constituent deux outils très importants pour la théorie de la commande des systèmes. Ils permettent d'étendre l'étude sur la stabilité asymptotique au cas où la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative mais peut s'annuler en d'autres points qu'au point d'équilibre.

Avant de présenter le théorème de LaSalle, nous donnons la définition d'un ensemble invariant, qui représente l'élément central du théorème.

L'idée est de généraliser le concept de point d'équilibre. Au lieu de considérer que l'état du système reste dans un point de l'espace, on cherche à définir une région dans laquelle le point représentatif du système demeure.

Définition 5

Un ensemble G est un *ensemble invariant* pour un système dynamique, si toute trajectoire issue de G reste dans G .

Théorème 3 (LaSalle)

Considérons un système autonome de la forme (B.3), et soit $V(x)$ une fonction scalaire à dérivées partielles continues. Considérons aussi que :

- Pour $t > 0$, la région $U_l = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < l\}$ est bornée.
- $\forall x \in U_l, \dot{V}(x) \leq 0$.

Soit P l'ensemble de tout les points de U_l telle que $\dot{V}(x) = 0$, et M le plus grand ensemble invariant dans P . Alors, toute solution $x(t)$ issue de U_l tend vers M , lorsque $t \rightarrow \infty$.

De plus, si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\dot{V}(x) < 0$ pour tout x .

➤ $V(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$

alors, toutes les solutions convergent asymptotiquement et globalement vers M , quand $t \rightarrow \infty$.

Le théorème de LaSalle peut être appliqué aux systèmes autonomes lorsque la fonction de Lyapunov choisie ne garantit pas la convergence asymptotique à l'origine. Le lemme de Barbalat est un outil qui peut permettre de répondre au problème dans ce dernier cas. Si les conditions du lemme sont satisfaites, il est possible d'assurer la convergence asymptotique des systèmes autonomes, de même que pour les systèmes non autonomes.

Par la suite, nous donnerons la définition d'une fonction uniformément continue, sur laquelle s'appuie le lemme de Barbalat que nous énoncerons. Ensuite, nous présenterons un autre lemme permettant de garantir la convergence asymptotique du système, dans le cas où $\dot{V}(x) \leq 0$, en combinant le lemme de Barbalat avec la méthode directe de Lyapunov.

Définition 6

Une fonction g est *uniformément continue* dans $[0, \infty[$, si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que : $\forall t_1 \geq 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < \varepsilon$.

Une condition suffisante pour qu'une fonction soit uniformément continue est que sa dérivée soit bornée. En pratique, on examine le comportement de la dérivée de la fonction au lieu de vérifier les conditions de la définition précédente.

Lemme 1 (Barbalat)

Si la fonction différentiable $g(t)$ a une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$, et si \dot{g} est uniformément continue, alors $\dot{g}(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Lemme 2

Si une fonction scalaire $V(x, t)$ satisfait les conditions suivantes :

- $V(x, t)$ est bornée inférieurement,
- $\dot{V}(0, t) = 0$ et $\dot{V}(x, t) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$,
- $\dot{V}(x, t)$ est uniformément continue en t ,

alors $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

B.4. Retour d'état linéarisant

B.4.1. Linéarisation Entrée/Sortie des systèmes SISO

Soit le système non linéaire SISO de la forme [Slo91]:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

où y est la sortie. La linéarisation entrée/sortie consiste à générer une relation différentielle linéaire entre la sortie y et une nouvelle entrée v .

❖ Génération d'une relation linéaire entrée/sortie

Le principe de la génération linéaire E/S consiste à dériver la fonction de sortie y autant de fois jusqu'à ce quelle devienne explicitement en fonction de l'entrée u . La première dérivée est donnée par :

$$\dot{y} = \nabla h(f + gu) = L_f h(x) + L_g h(x)u$$

❖ Si $L_g h(x) \neq 0$ pour tout x dans la région Ω alors :

➤ La transformation de l'entrée est donnée par :

$$u = \nabla \frac{1}{L_g h} (-L_f h + v)$$

➤ La relation linéaire entre y et v sera :

$$\dot{y} = v$$

❖ Si $L_g h(x) = 0$ pour tout x dans la région Ω , on dérive une autre fois pour obtenir :

$$u = \frac{1}{L_g L_f h} (-L_f h + v)$$

❖ Si $L_g L_f h(x)$ est encore nulle, on continue à dériver jusqu'à ce que : $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

Dans ce cas la loi de commande est donnée par :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v)$$

d'où la relation entrée sortie suivante :

$$y^{(r)} = v$$

Le nombre de dérivation de y nécessaire pour que l'entrée u apparaisse est appelé "*degré relatif du système*".

B.4.2. Outils mathématiques

Soit $h(x)$ une fonction scalaire de l'espace d'état x . Le gradient de h noté ∇h est défini comme suit :

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Le gradient est représenté par un vecteur ligne d'éléments $(\nabla h)_i = \partial h / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Soit le champ de vecteur $f(x)$. Le Jacobien de f noté ∇f est défini comme suit :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Il est représenté par une matrice $m \times m$ d'éléments $(\nabla f)_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$.

❖ Dérivée et crochet de Lie

Soient la fonction scalaire $h(x)$ et le champs de vecteur $f(x)$. La fonction scalaire $L_f h$ est appelée *dérivée de Lie* (ou simplement la dérivée de h par rapport à f).

Définition

Soient $h : R^n \rightarrow R$ une fonction scalaire lisse, et $f : R^n \rightarrow R$ un champs de vecteur lisse dans R^n . La dérivé de Lie de h par rapport à f est un champs de vecteur défini par :

$$L_f h = \nabla h \cdot f$$

Donc, la dérivée de Lie $L_f h$ est simplement la dérivée directionnelle de h dans la direction du vecteur f .

La dérivée de Lie peut être définie de façon récursive :

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^i h &= L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) f \quad \text{for } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

De la même manière, si g est champs de vecteur, la fonction scalaire $L_g L_f h(x)$ sera donnée par :

$$L_g L_f h(x) = \nabla(L_f h) g$$

Définition

Soient f et g deux champs de vecteur dans R^n . Les crochets de Lie de f et g est un troisième champs de vecteur défini par : $[f, g] = \nabla g \cdot f + \nabla f \cdot g$

Généralement, un crochet de Lie $[f, g]$ est noté par $ad_f g$.

Un crochet de Lie peut être déterminé de manière récursive comme suit :

$$\begin{aligned} ad_{f0} g &= g \\ ad_{fi} g &= [f, ad_{fi-1} g] \quad \text{for } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

B.4.3. Application de l'algorithme du retour d'état linéarisant pour le problème de suivi de ligne droite

D'abord, nous calculons les valeurs de x pour lesquelles le déterminant de la matrice $\{g, ad_f g\}$ est égal à 2.

Ensuite, nous résolvons l'équation différentielle qui va nous permettre de calculer $h(x)$.

Calcul de $ad_f g$:

$$ad_f g = L_f g - L_g f$$

Comme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta_c v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$ad_f g = \begin{pmatrix} -v \cos \theta_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le rang de la matrice $(g \quad ad_f g)$ est égal à deux lorsque $\theta_c \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\det(g \quad ad_f g) = \det \begin{pmatrix} 0 & -v \cos \theta_c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v \cos \theta_c \quad (\text{B.4})$$

La valeur de la sortie $h(x)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y_c} & \frac{\partial h}{\partial \theta_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \theta_c} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Alors, pour choisir $h(x)$ il faut prendre en compte les conditions suivantes :

1. $h(x)$ ne doit pas dépendre de θ_c , ainsi on respecte (2.8).
2. Il n'y a pas de restriction sur la manière de choisir $h(x)$.

Bien évidemment, le choix le plus simple pour la sortie correspond à $h(y_c) = y_c$, ce qui revient au choix intuitif du départ.

En pratique, la linéarisation n'est pas définie pour $\theta_c = \pm \frac{\pi}{2}$, car l'expression (B.4) s'annule pour ces valeurs, ce qui implique que la linéarisation peut être définie dans l'ensemble :

$$X_1 = \left\{ (y_c, \theta_c) / y_c \in \mathfrak{R}, \theta_c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

ou bien dans l'ensemble

$$X_2 = \left\{ (y_c, \theta_c) / y_c \in \mathfrak{R}, \theta_c \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \right\}$$

sachant que la transformation du système est donnée par

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h \\ \xi_2 &= L_f h \\ u &= (L_g L_f h)\theta + L_f^2 h \end{aligned}$$

Nous calculons de manière successive $L_f h$, $L_g L_f h$ puis $L_f^2 h$:

Calcul de $L_f h$:

$$h = y_c \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = (1 \quad 0)$$

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} v \sin \theta_c \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_f h = v \sin \theta_c$$

Calcul de $L_g L_f h$:

$$\frac{\partial L_f h}{\partial x} = (0 \quad v \cos \theta_c)$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g = (0 \quad v \cos \theta_c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_g L_f h = v \cos \theta_c$$

Calcul de $L_f^2 h$:

$$L_f^2 h = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f = (0 \quad v \cos \theta_c) \begin{pmatrix} v \sin \theta_c \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_f^2 h = 0$$

B.4.4. Méthode des couples calculés en robotique

La méthode des *couples calculés* représente un exemple d'une technique plus générale connue sous le nom de retour d'état linéarisant. L'établissement de la loi de commande en couples calculés est comme suit [Lew03] :

Soit la dynamique du robot écrite sous la forme suivante [Alh03] :

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau \quad (\text{B.6})$$

L'objectif du contrôleur est de déplacer le robot le long d'une trajectoire désirée. Soit $q(t)$ la trajectoire de mouvement actuelle et $q_d(t)$ la trajectoire désirée. Dans ce cas l'erreur de poursuite est défini comme suit :

$$e(t) = q(t) - q_d(t)$$

La commande est développée en différentiant l'équation d'erreur de poursuite deux fois, puis en l'écrivant en fonction des couples.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \quad (\text{B.7})$$

Ce qui implique que $u = M^{-1}(q)(\tau - N(q, \dot{q})) - \ddot{q}_d$

Les couples nécessaires pour le fonctionnement des moteurs sont calculés en utilisant le modèle dynamique inverse du robot, qui est données par :

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + N(q, \dot{q}) + M(q)u \quad (\text{B.8})$$

B.4.5. Le difféomorphisme

Définition

La fonction $\phi : R^n \rightarrow R$, définie dans le région Ω , est appelée difféomorphisme si

- elle est lisse,
- son inverse existe et lui-même est lisse.

Lemme

Soit $\phi(x)$ une fonction lisse définie dans la région Ω de R^n . Si la matrice jacobienne $\nabla\phi$ est non singulière au point $x = x_0$ de Ω , alors $\phi(x)$ définit un difféomorphisme local dans une sous région de Ω .

Annexe C

La commande à structure variable

Cette annexe est consacrée à la description des idées clés relatives à la commande à structure variable **VSC** (Variable Structure Control).

Comme son nom l'indique, une commande à structure variable est constituée par des lois de commande de structures différentes, permettant d'assurer la convergence du système vers l'origine [Utk77][Itk76]. Chaque structure appliquée au système de manière individuelle n'entraîne pas sa stabilisation vers l'origine, seule une combinaison appropriée de l'ensemble de ces structures va permettre de le faire.

C.1. Description graphique de la commande à structure variable

Considérons par exemple un système d'ordre deux de variables (x_1, x_2) . Supposons qu'avec la première structure de commande, le comportement du système dans le plan de phase soit donné par la figure C.1.a. De manière similaire, supposons qu'avec la deuxième structure le système se comporte comme il est montré sur la figure C.1.b. Nous pouvons garantir qu'en combinant ces deux structures de manière adéquate, le système convergera vers l'origine. En effet, si on utilise la première structure lorsque le système est dans le deuxième et quatrième quadrant, et la deuxième structure lorsque le système se trouve dans les deux autres quadrants, on amènera alors le système à l'origine (voir figure C.2).

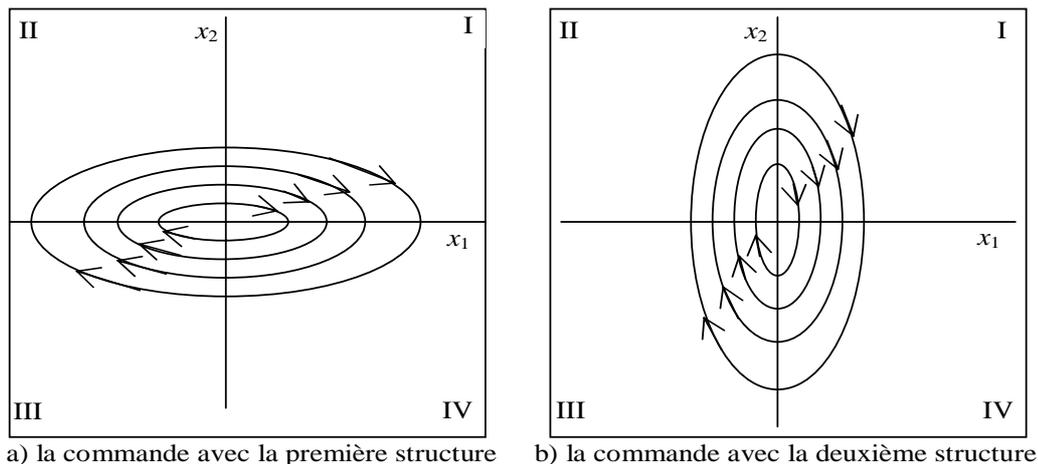


Figure C.1 : Exemple de la commande à structure variable

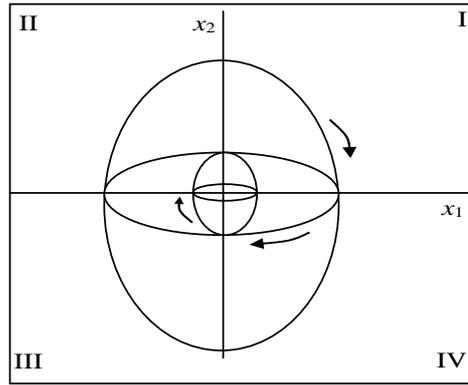


Figure C.2 : La combinaison des deux structures

C.2. Avantages et inconvénients de la VSC

Un des principaux avantages résidant dans l'utilisation de la commande à structure variable est de pouvoir définir de manière explicite les propriétés de robustesse du système, vis-à-vis des incertitudes du modèle et des perturbations du système.

En revanche, théoriquement l'utilisation directe d'une telle commande impose la nécessité d'appliquer au système un commutateur logique à vitesses infinies. Bien que dans le cas pratique les actionneurs ne peuvent pas produire la commutation à ces vitesses, celles-ci doivent être suffisamment rapides.

Quand l'état du système se trouve à la limite du changement de structure, des commutations successives à fréquences élevées peuvent se produire. Ce phénomène pouvant produire un bruit sur les actionneurs est appelé broutement (en l'anglais « chattering »). Pour certaines applications, le broutement n'est pas acceptable pour deux raisons principales :

- Pour des fréquences de broutement élevées, dans certains cas, le système n'est plus modélisé correctement et peut devenir instable en boucle fermée.
- Le broutement produit une dynamique importante sur les actionneurs (moteurs), ce qui peut réduire leurs « temps de vie ».

C.3. Calcul de la commande équivalente du robot mobile de type (2,0) :

En utilisant la formule de Slotine :

$$s = \lambda \cdot e + \dot{e}$$

La surface de glissement est donnée par :

$$s = c \cdot P_{ec} + \dot{P}_{ec} \quad (\text{C.1})$$

avec :

$c \in \mathfrak{R}^{2 \times 3}$: est une matrice constante

$P_{ec} \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$: est un vecteur d'erreurs

On obtient :

$$\dot{s} = c \cdot \dot{P}_{ec} + \ddot{P}_{ec} \quad (\text{C.2})$$

La commande équivalente est obtenue lorsque $\frac{ds}{dt} = 0$

En posant

$$c \cdot \dot{P}_{ec} + u_{ec} = 0 \Rightarrow u_{eq} = -c \cdot \dot{P}_{ec} \quad (\text{C.3})$$

C.3.1. Preuve du lemme

Considérant que les couples appliqués à l'entrée du système sont représentés comme suit [Shi95] :

$$\tau^* = \tau + \tau_b \quad (\text{C.4})$$

avec :

$$\tau_b = H \cdot f(t) \quad (\text{C.5})$$

Alors la commande s'écrit :

$$u^* = u + f(t) \quad (\text{C.6})$$

Pour que la surface de glissement existe, la condition de glissement suivante doit être satisfaite.

$$s^T \cdot \dot{s} \leq 0$$

En utilisant (C.4), (C.5) et (C.6), nous avons :

$$\begin{aligned} s^T \cdot \dot{s} &= (q_e^T + P_{ec}^T \cdot c^T) \cdot (\dot{q}_e + c \cdot \dot{P}_{ec}) \\ &= q_e^T \cdot (u^* + c \cdot \dot{P}_{ec}) + P_{ec}^T \cdot c^T (u^* + c \cdot \dot{P}_{ec}) \\ &= s^T \cdot (u^* + c \cdot \dot{P}_{ec}) = -k \cdot \|s\| + s^T \cdot f(t) \end{aligned}$$

$$s^T \cdot \dot{s} \leq -(k - \alpha) \cdot \|s\| \quad (\text{C.7})$$

Nous déduisons que cette inégalité est satisfaite si k est choisi plus large que l'amplitude des perturbations α , et dans ce cas la condition de glissement est satisfaite.

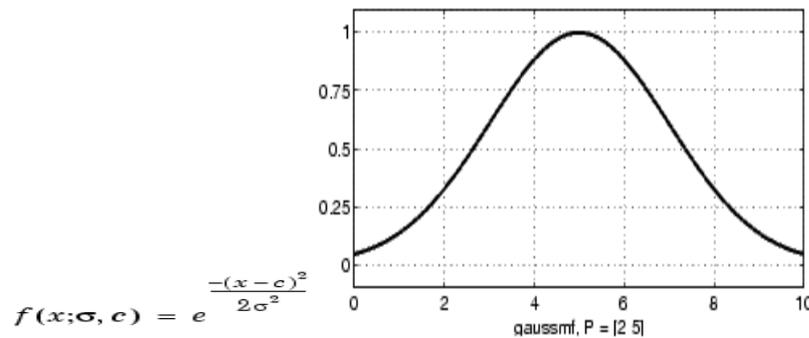
Annexe D

La logique floue

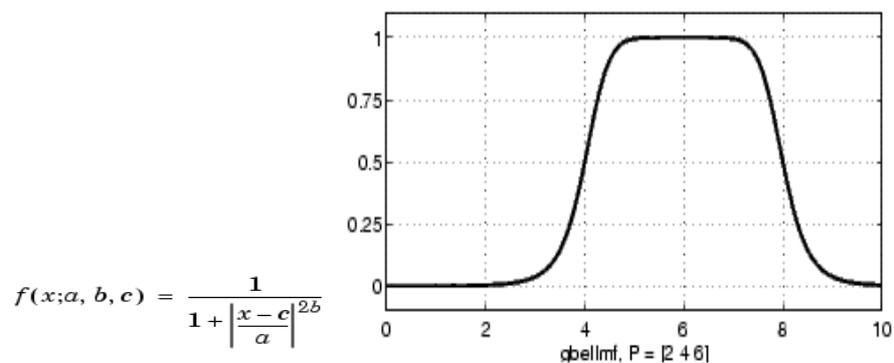
D.1. Quelques fonctions d'appartenance utilisées dans la logique floue :

Cette annexe présente quelques fonctions d'appartenance très utilisées dans la logique floue. Chaque fonction est présentée par son équation mathématique et sa courbe correspondante :

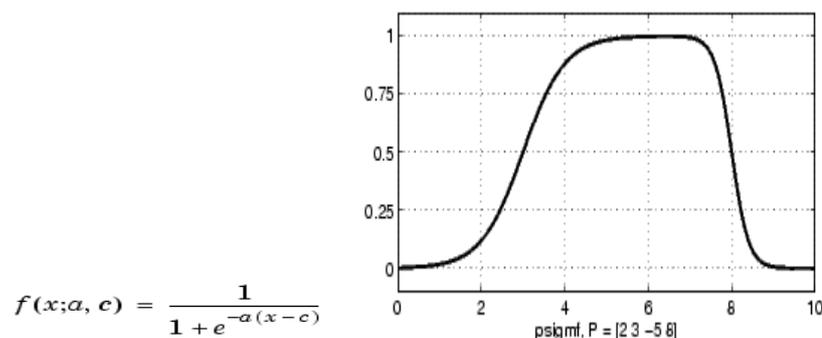
- La fonction Gaussienne dépend de deux paramètres σ et c :



- La fonction en forme de cloche dépend de trois paramètres a , b et c

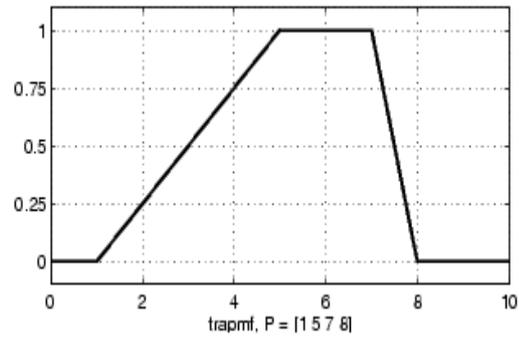


- La fonction sigmoïde dépend de deux paramètres a et c



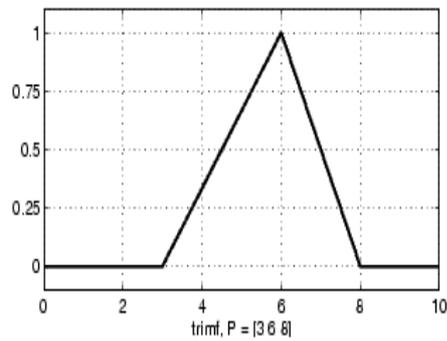
➤ La fonction trapézoïdale dépend de quatre paramètres a, b, c, d

$$f(x;a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$

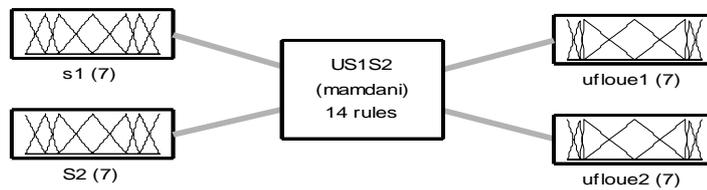


➤ La fonction triangulaire dépend de trois paramètres a, b et c

$$f(x;a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

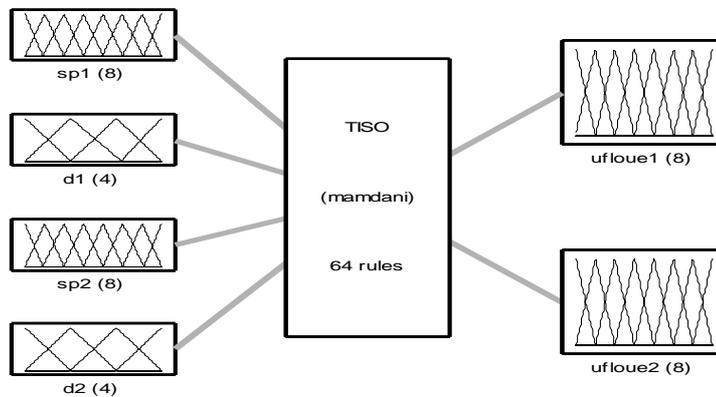


D.2. Description du contrôleur flou par mode glissant à bande limitée



System US1S2: 2 inputs, 2 outputs, 14 rules

D.3. Description du contrôleur flou par mode glissant à deux entrées et une sortie



System TISO: 4 inputs, 2 outputs, 64 rules

Annexe

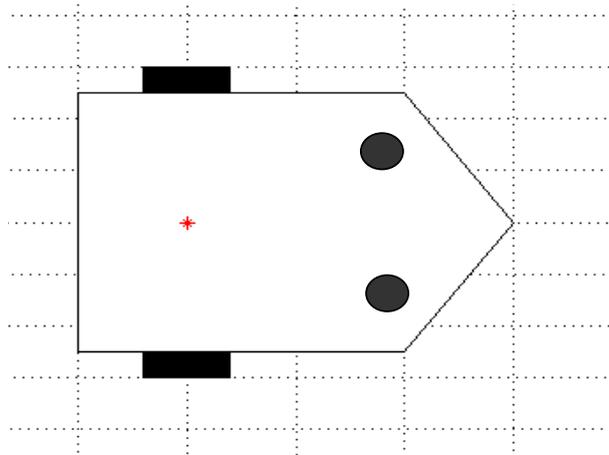
Autres simulations

Dans cette annexe, nous présentons d'autres simulations effectuées sur les deux types de robots mobiles à roues afin d'étudier la robustesse et l'efficacité de la commande par mode glissant flou dans la poursuite d'une trajectoire de référence. Les trajectoires de référence utilisées en simulation sont : une trajectoire linéaire, une trajectoire circulaire, une trajectoire sinusoïdale et une trajectoire non holonome (trajectoire qui satisfait les contraintes cinématiques du robot mobile).

Les figures présentées dans cette annexe sont divisées en trois ensembles notées comme suit :

- ❖ (a.1), (a.2), (a.3), (a.4), (a.5), (a.6) : représentant successivement le graphe de la trajectoire suivant l'axe des abscisses, le graphe de la trajectoire suivant l'axe des ordonnées, le graphes de l'orientation du robot, le graphes de la trajectoire dans le plan, le graphe de la vitesse linéaire et le graphe de la vitesse angulaire.
- ❖ (b.1), (b.2), (b.3) : représentant les graphes des erreurs en position, en orientation et en vitesse de la poursuite de la trajectoire de référence.
- ❖ (c) : représentant les graphes des surfaces de glissement ainsi que les commandes appliquées aux moteurs des roues.

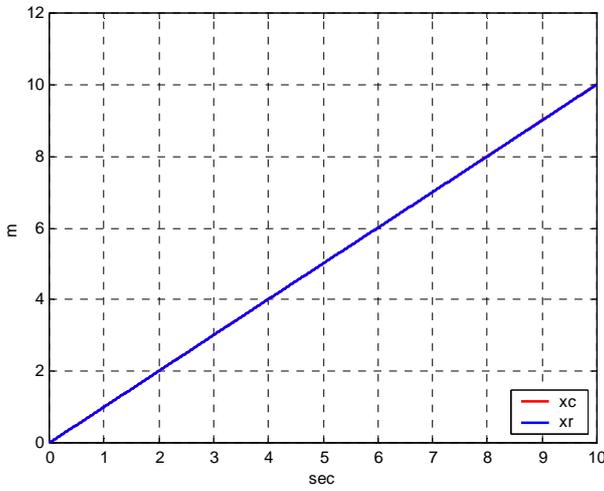
Résultats de simulation avec CFMG TISO
Poursuite de trajectoire de reference
circulaire, linéaire, sinusoïdale et non holonome
par un robot mobile à roues de type (2,0)



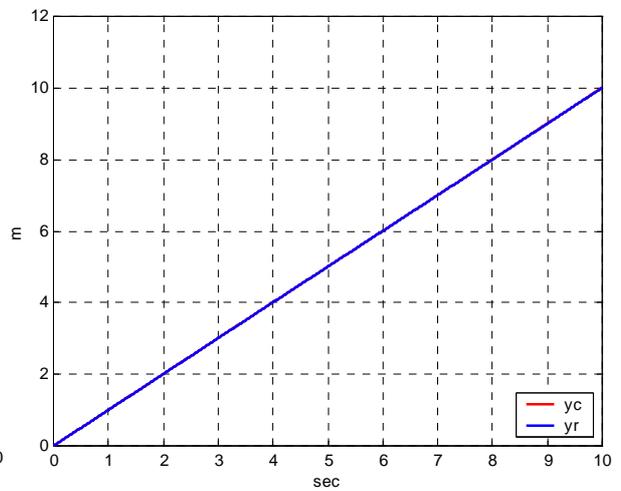
E.1. Poursuite de trajectoire du robot de type (2,0)

E.1.1. Poursuite d'une trajectoire linéaire

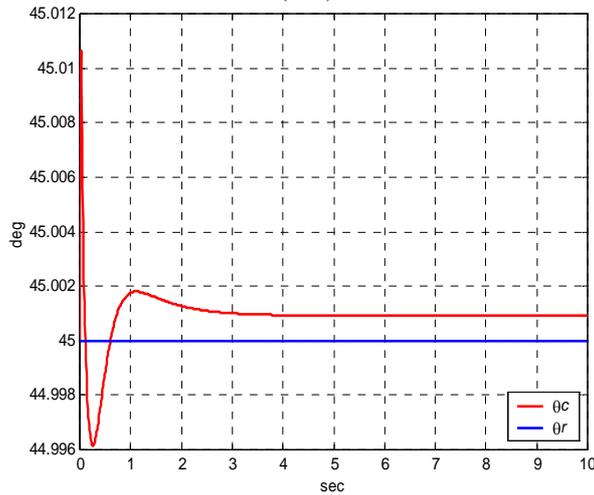
La position initiale du robot est $(0, 0, 45^\circ)$



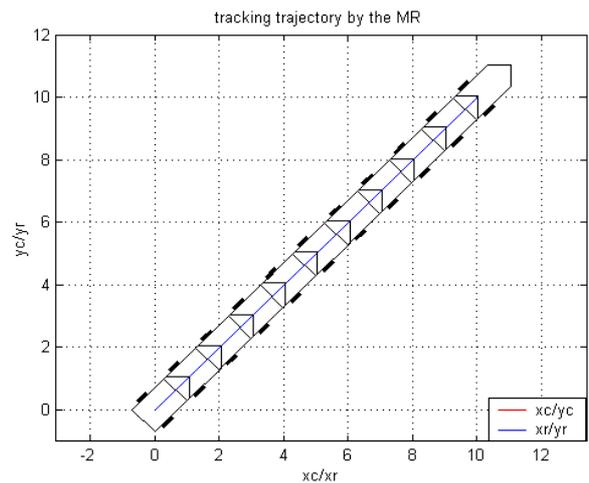
(a.1)



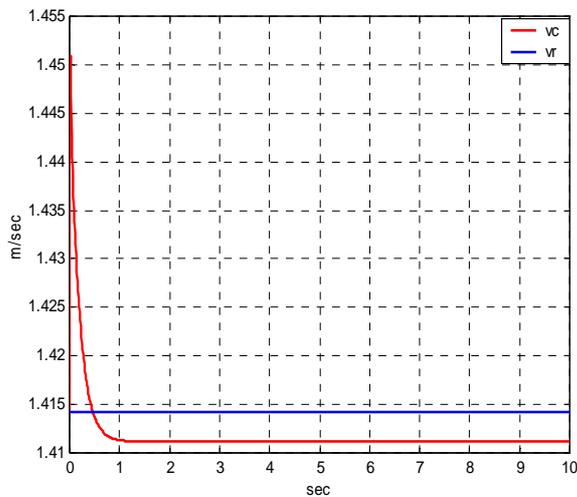
(a.2)



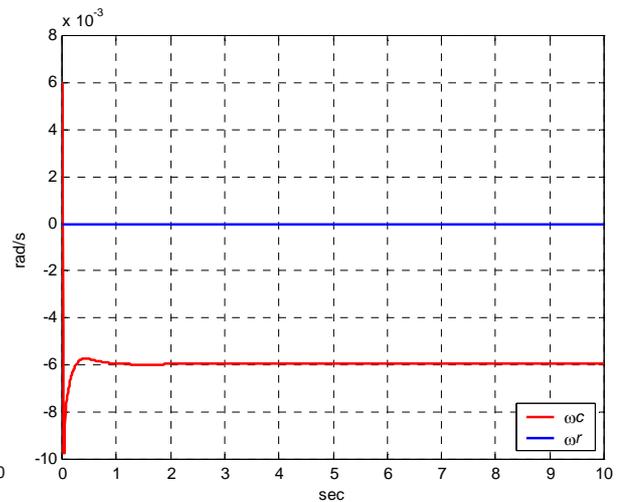
(a.3)



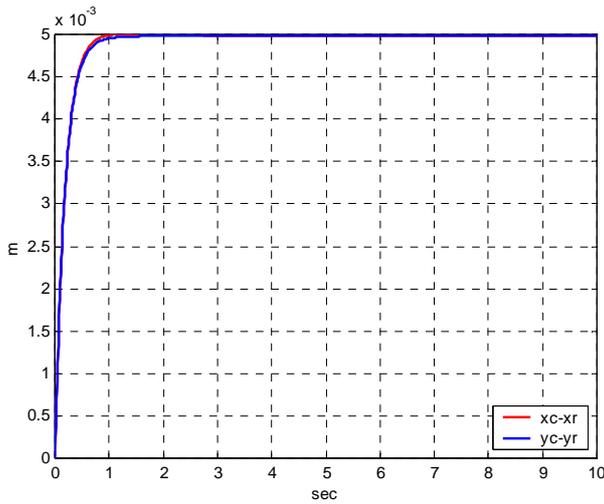
(a.4)



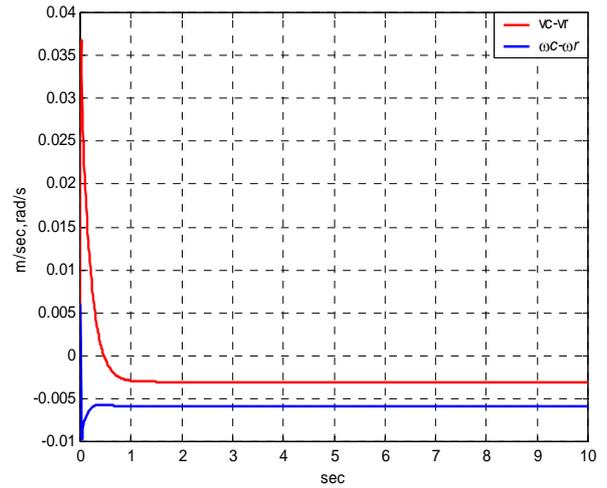
(a.5)



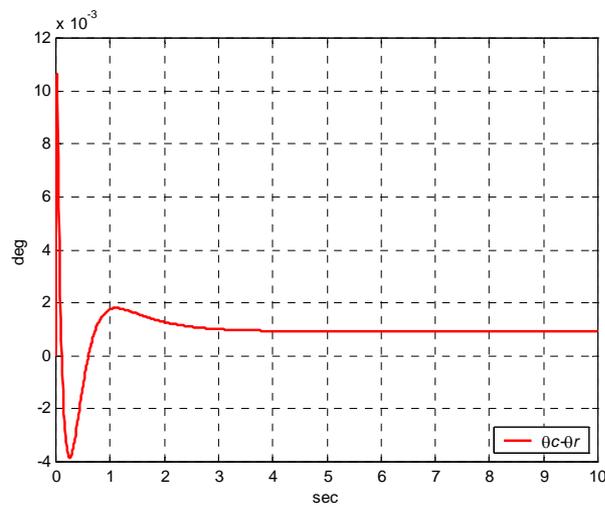
(a.6)



(b.1)

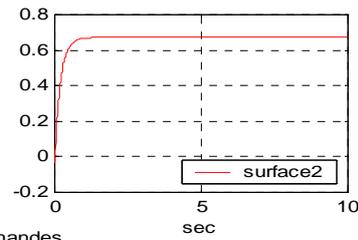
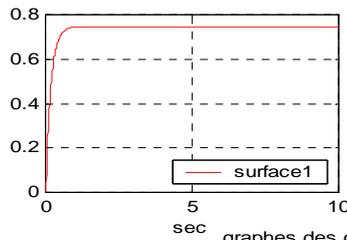


(b.2)

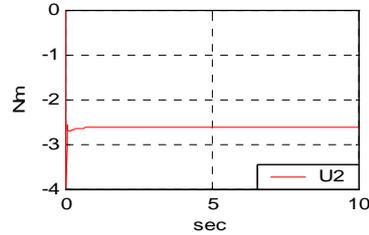
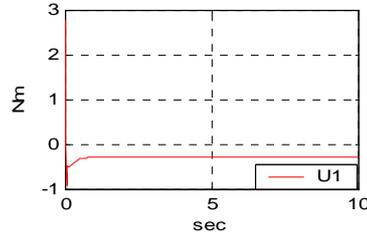


(b.3)

graphes des surfaces de glissement



graphes des commandes



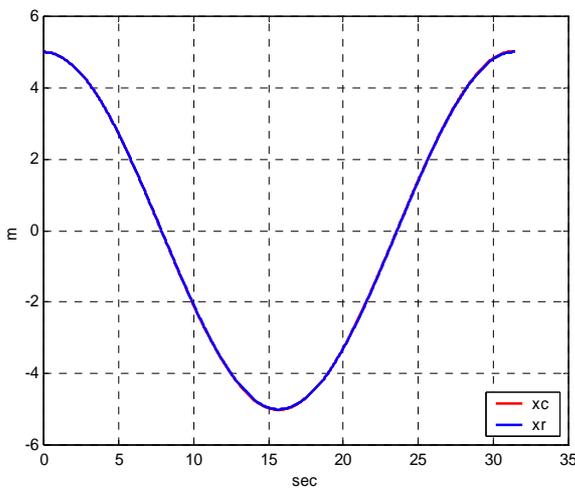
(c)

Figure E.1 : Poursuite de trajectoire linéaire

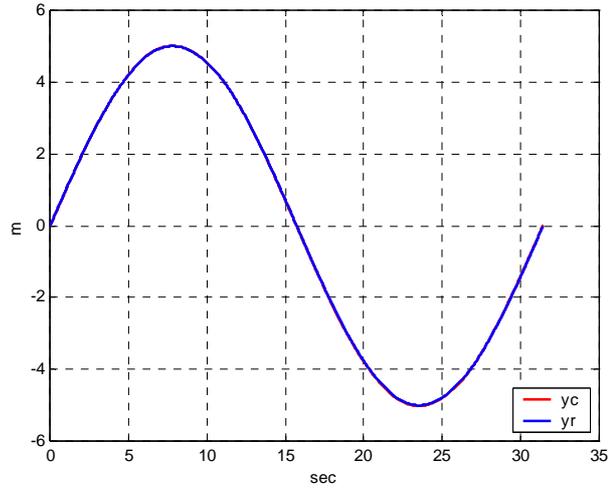
$$|u_{flou\ max}| = 100$$

E.1.2. Poursuite d'une trajectoire circulaire

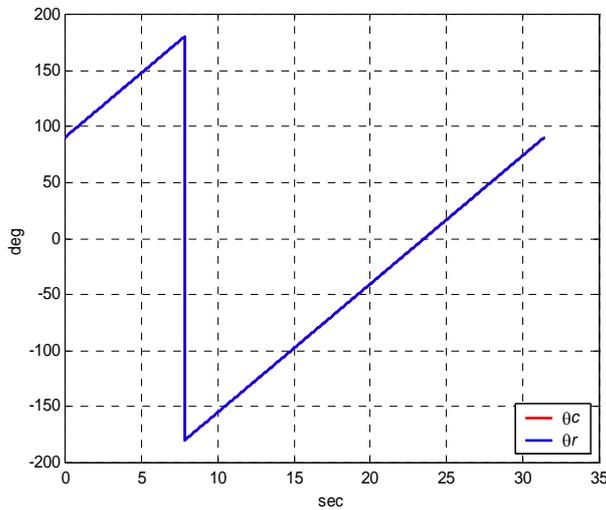
La position initiale du robot est (5, 0, 90°)



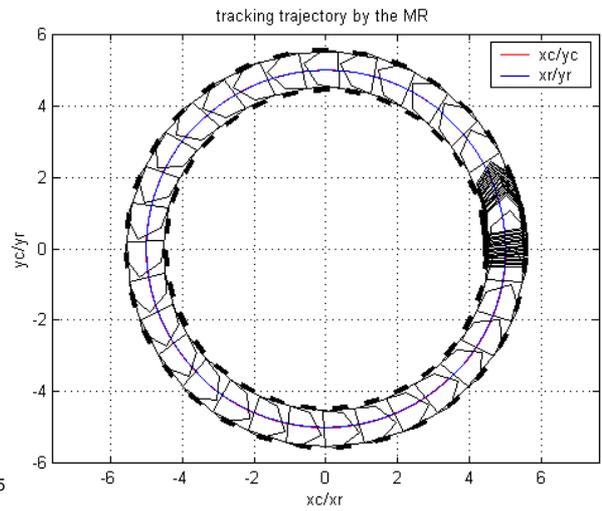
(a.1)



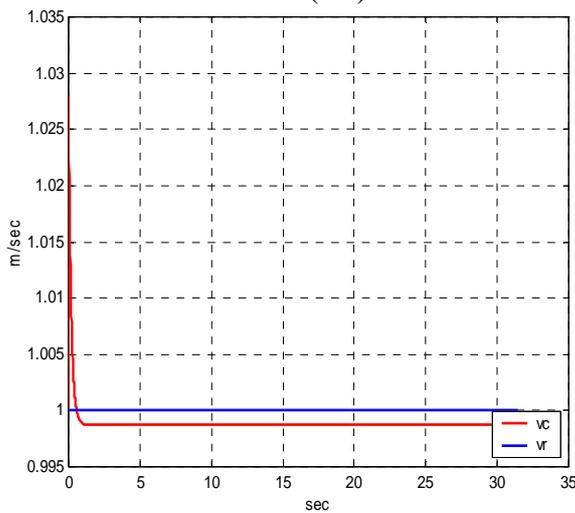
(a.2)



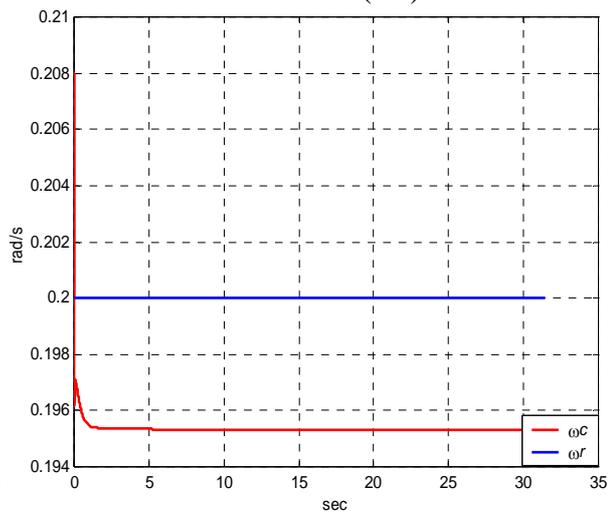
(a.3)



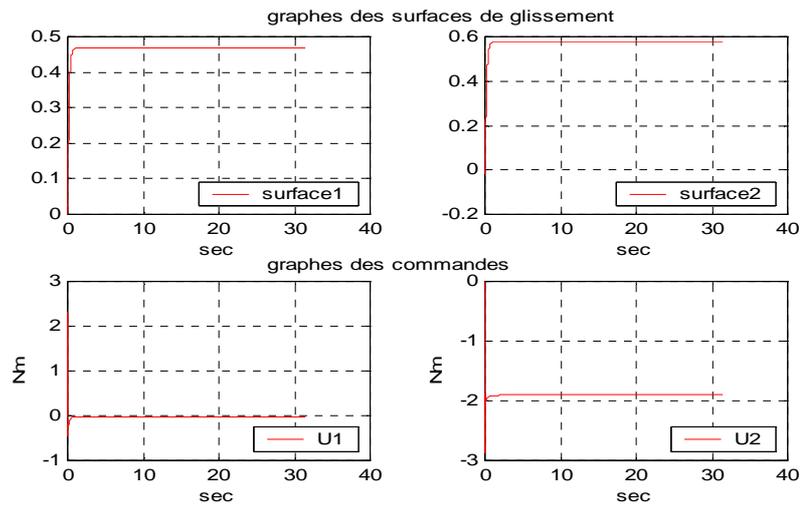
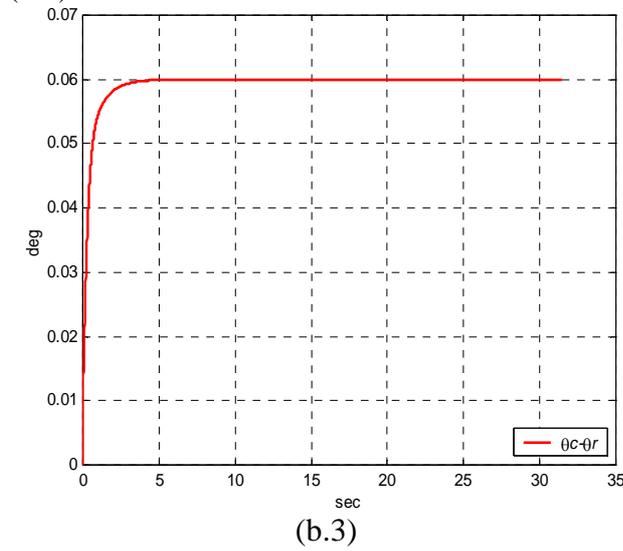
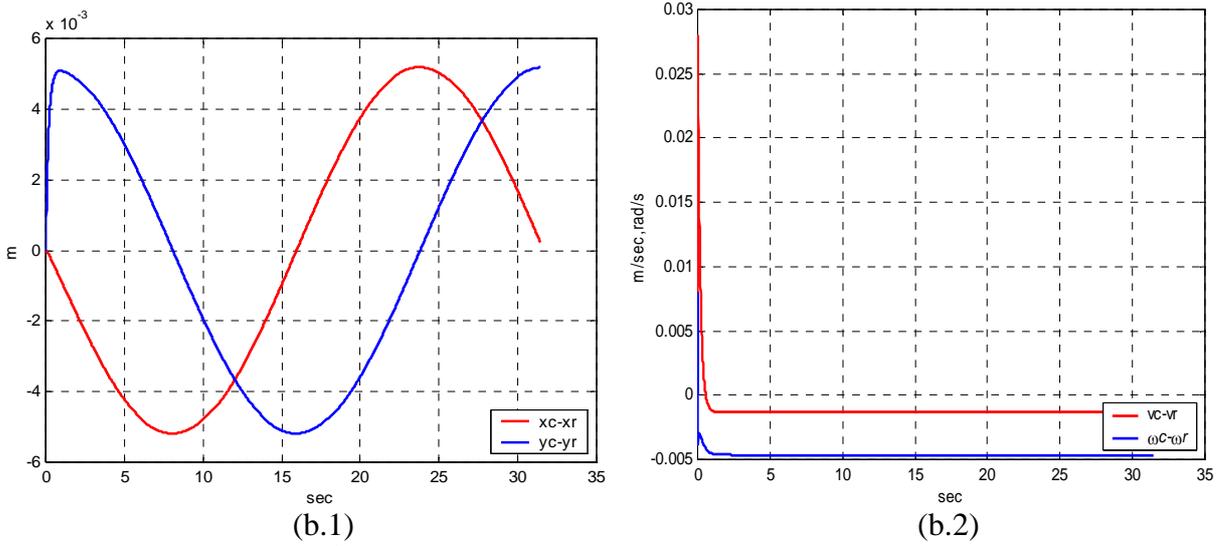
(a.4)



(a.5)



(a.6)



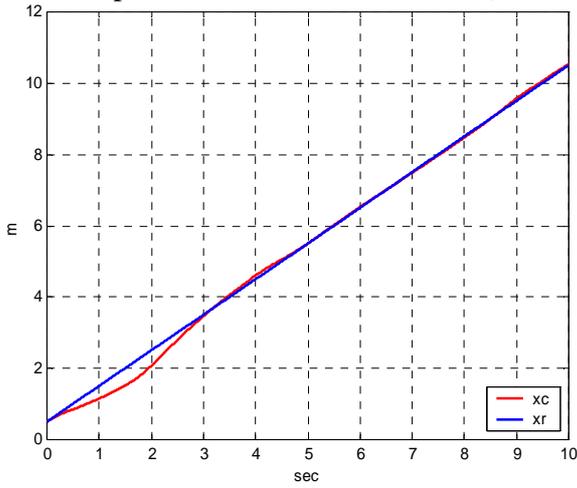
(c)

Figure E.2 : Poursuite d'une trajectoire circulaire

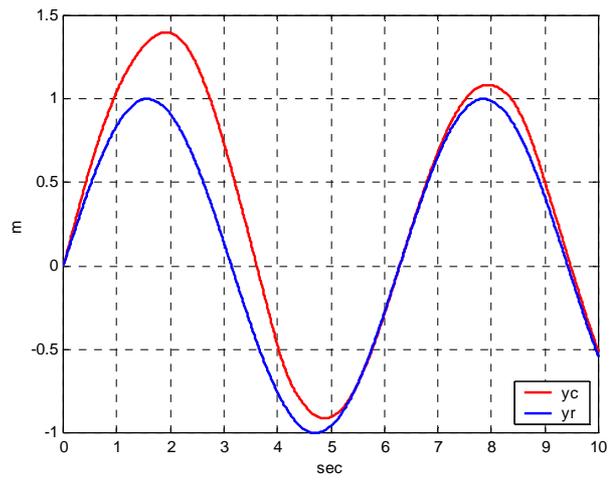
$$|u_{flou\ max}| = 100$$

E.1.3. Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale

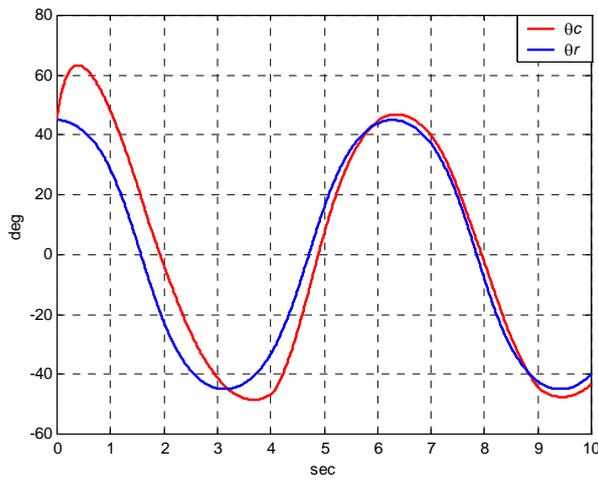
➤ La position initiale du robot est $(0, 0, 60^\circ)$



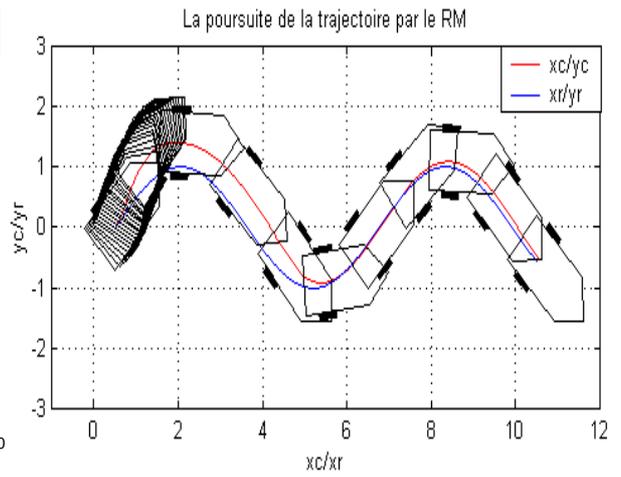
(a.1)



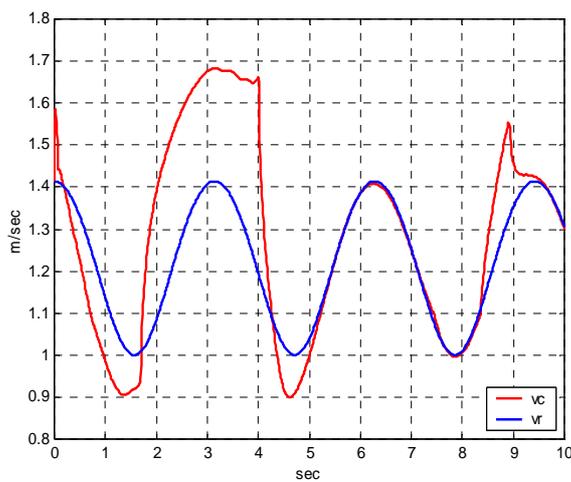
(a.2)



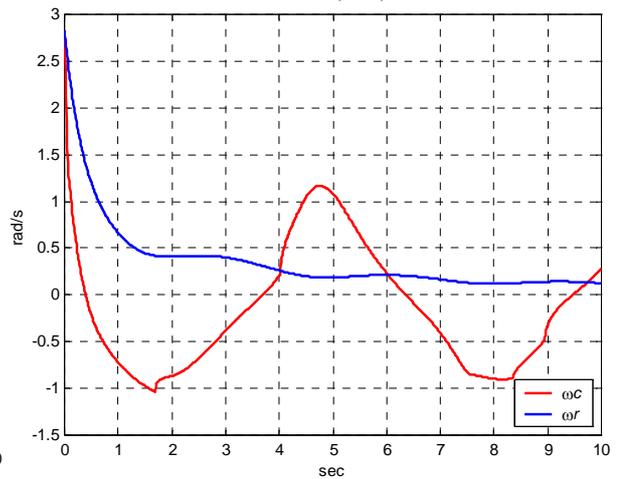
(a.3)



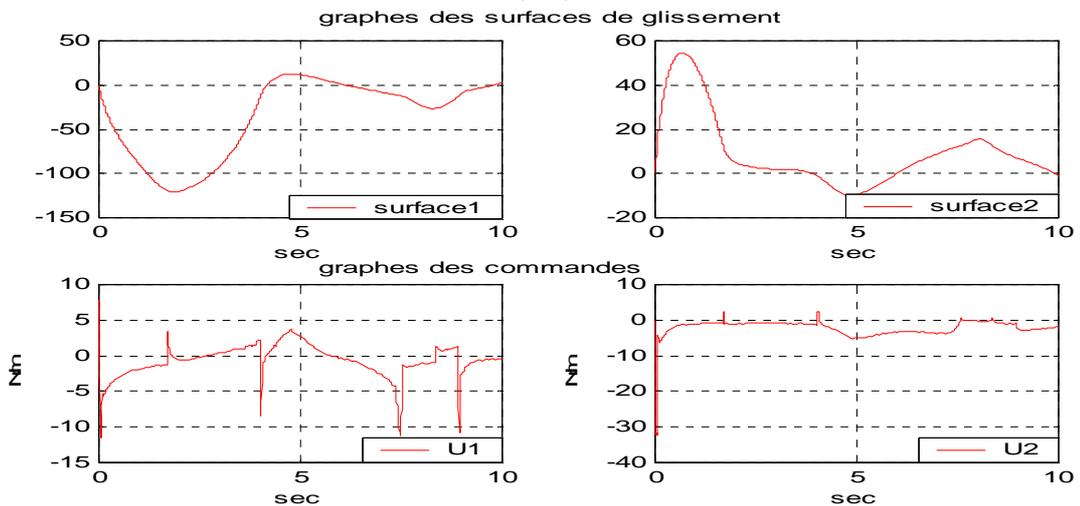
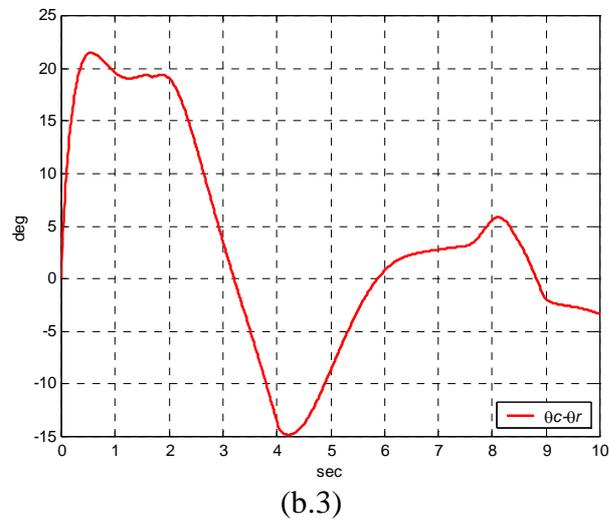
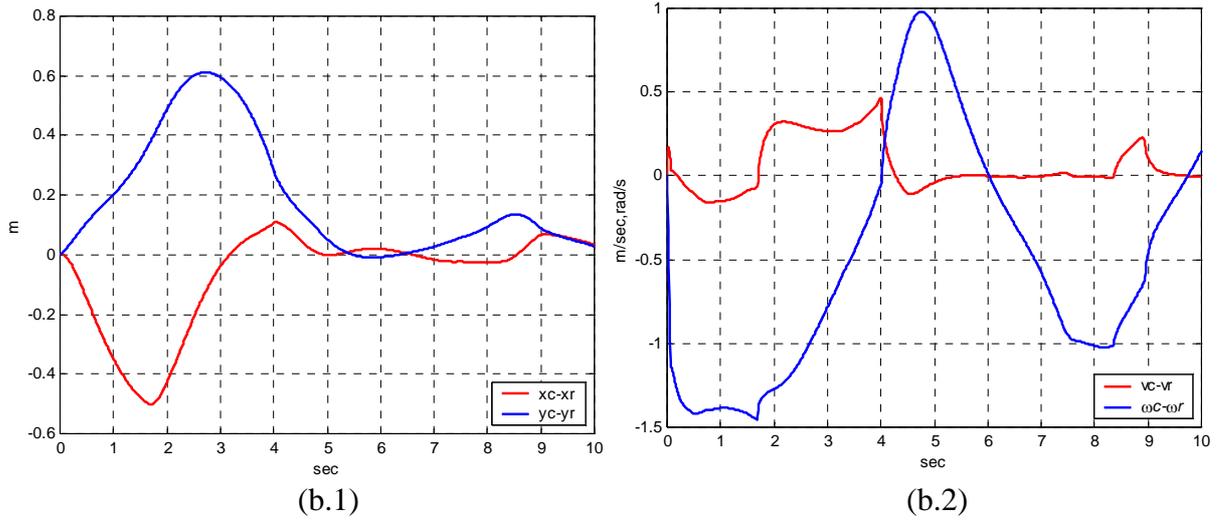
(a.4)



(a.5)



(a.6)

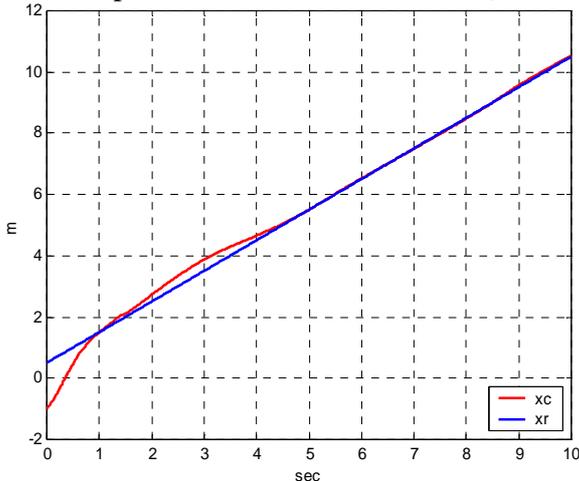


(c)

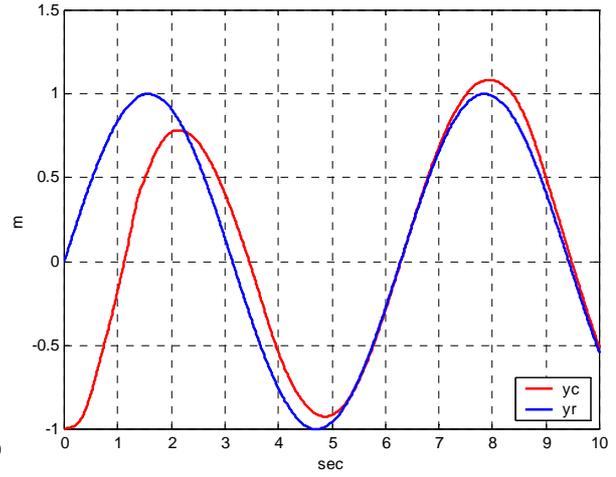
Figure E.3 : Poursuite de trajectoire sinusoïdale

$$|u_{flou\ max}| = 100$$

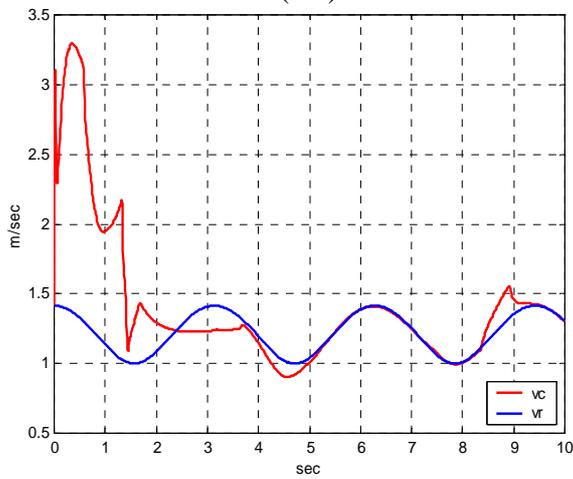
➤ La position initiale du robot est $(-1, -1, 0^\circ)$



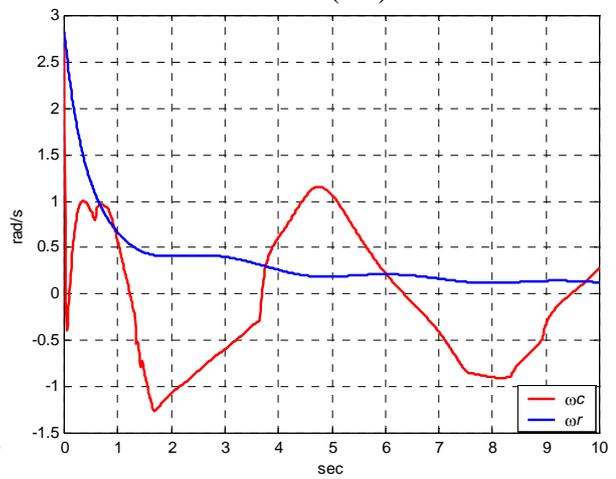
(a.1)



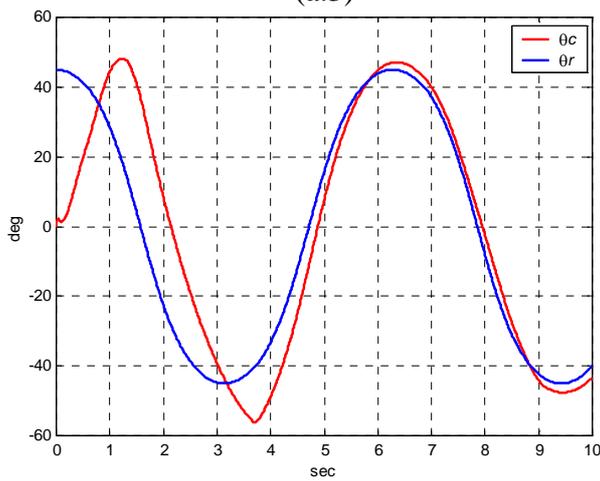
(a.2)



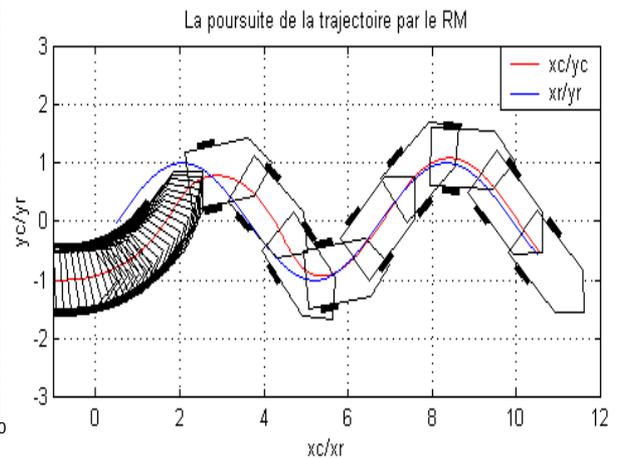
(a.3)



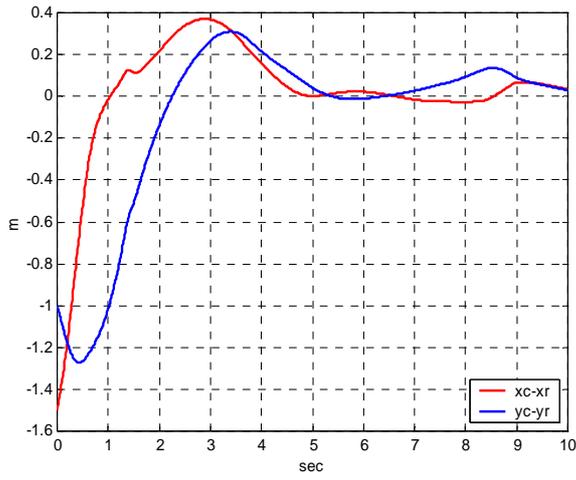
(a.4)



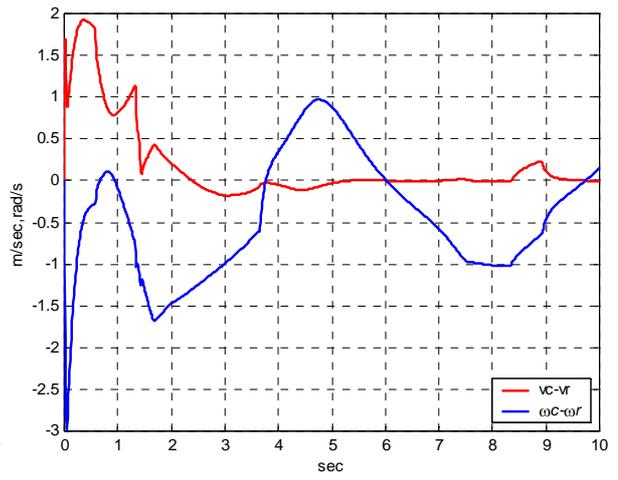
(a.5)



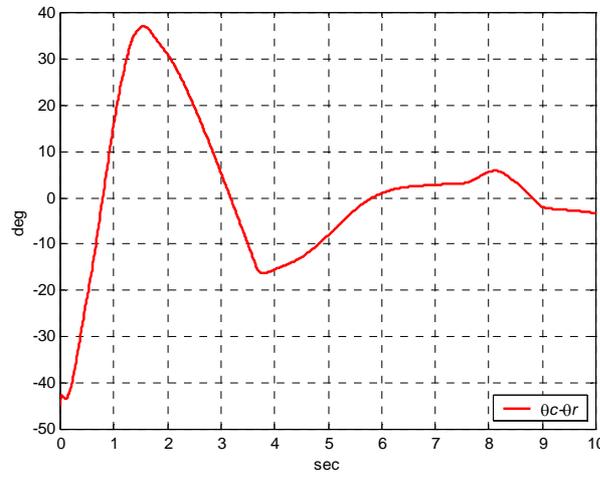
(a.6)



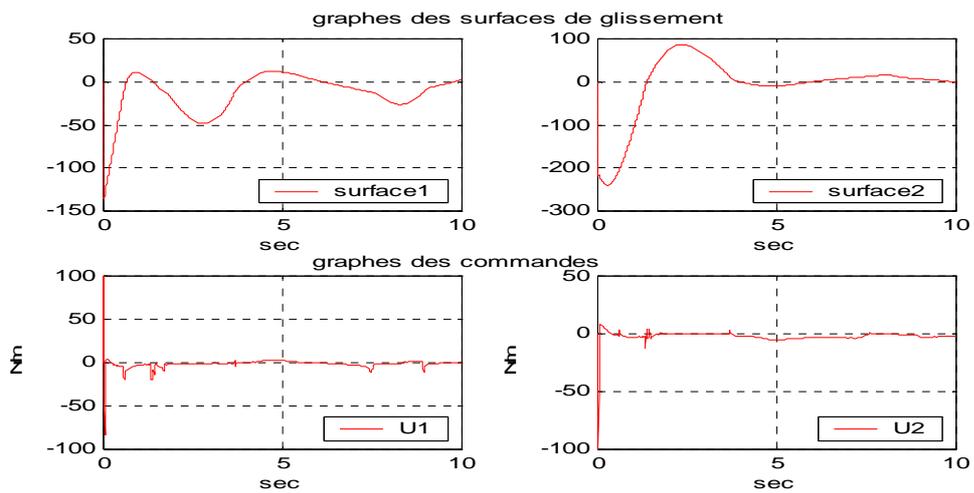
(b.1)



(b.2)



(b.3)



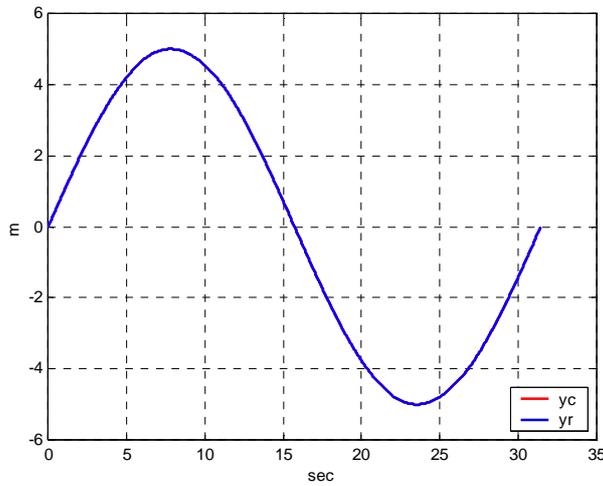
(c)

Figure E.4 : Poursuite de trajectoire sinusoïdale

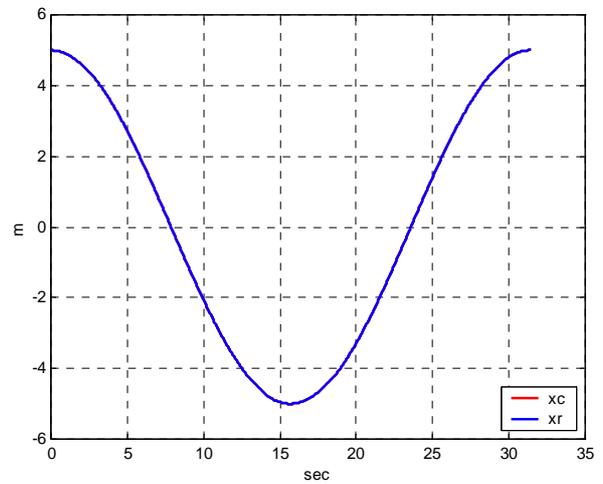
$$|u_{flou\ max}| = 100$$

E.1.4. Poursuite d'une trajectoire de référence respectant la contrainte non holonome du robot

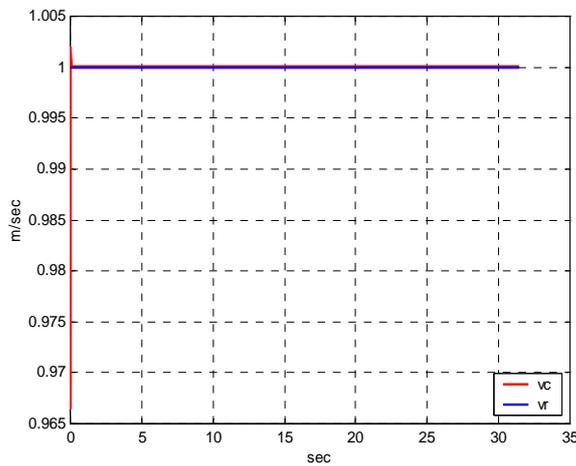
➤ La position initiale du robot est $(5, 0, 90^\circ)$



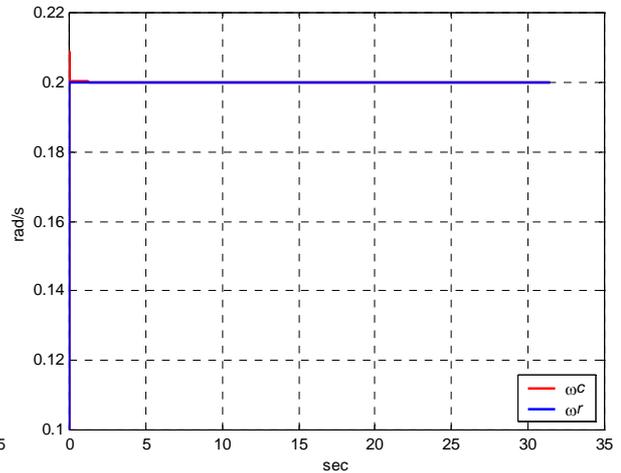
(a.1)



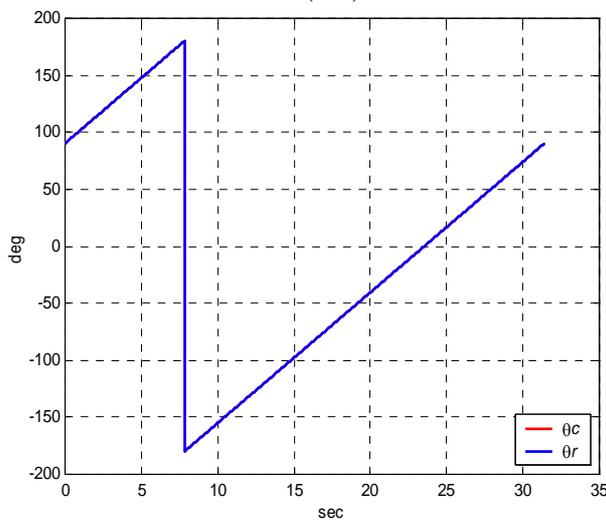
(a.2)



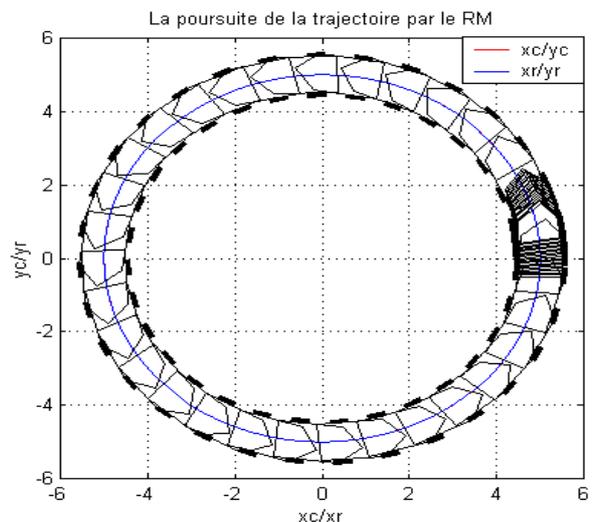
(a.3)



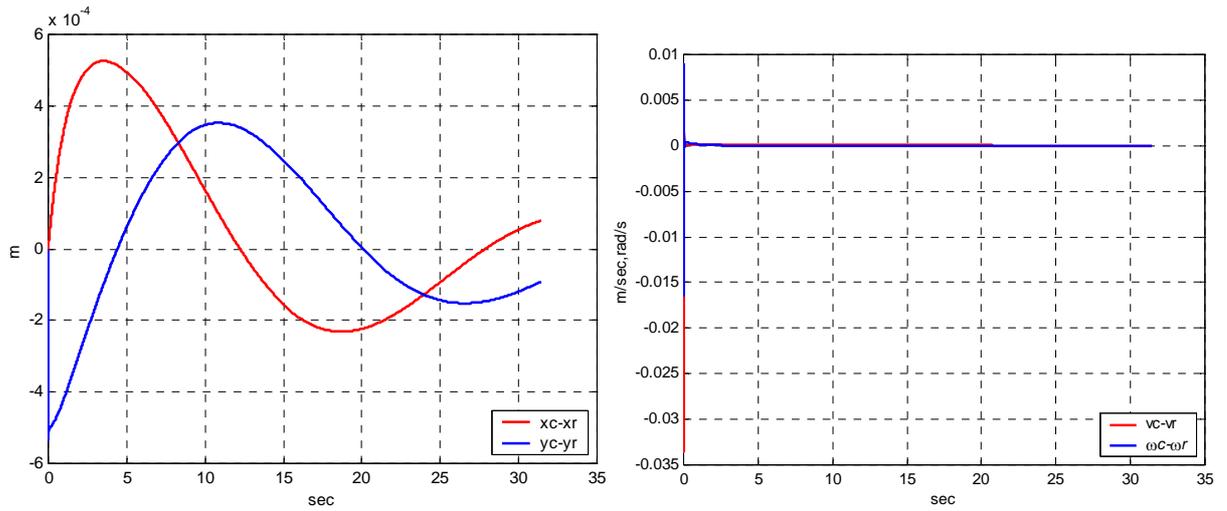
(a.4)



(a.5)

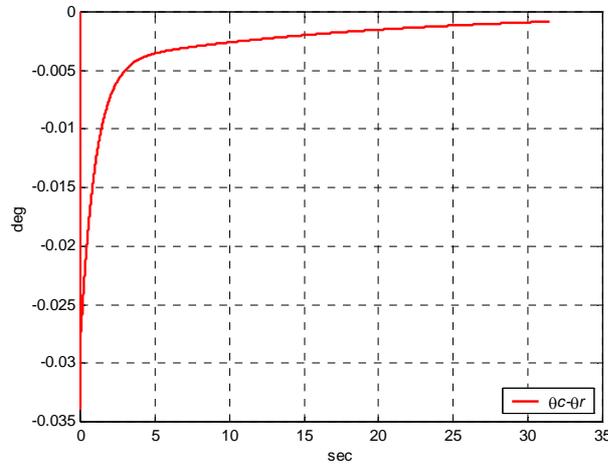


(a.6)



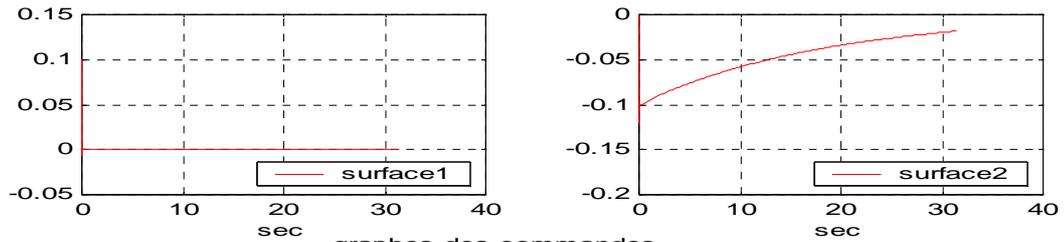
(b.1)

(b.2)

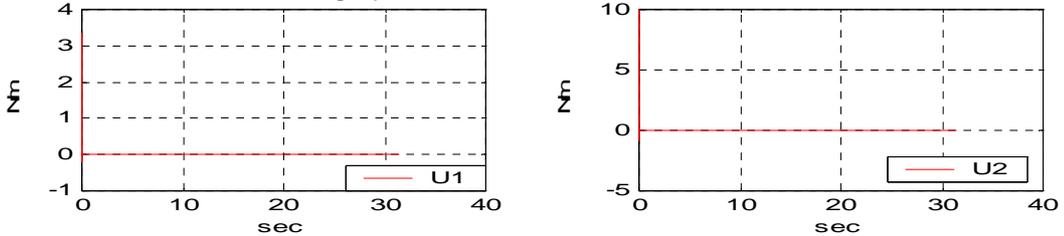


(b.3)

graphes des surfaces de glissement



graphes des commandes

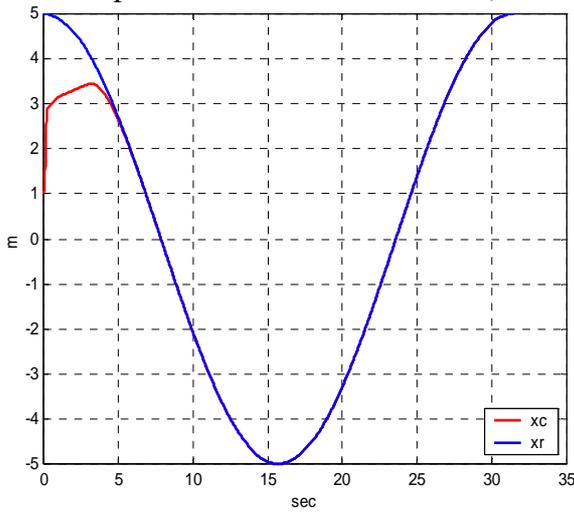


(c)

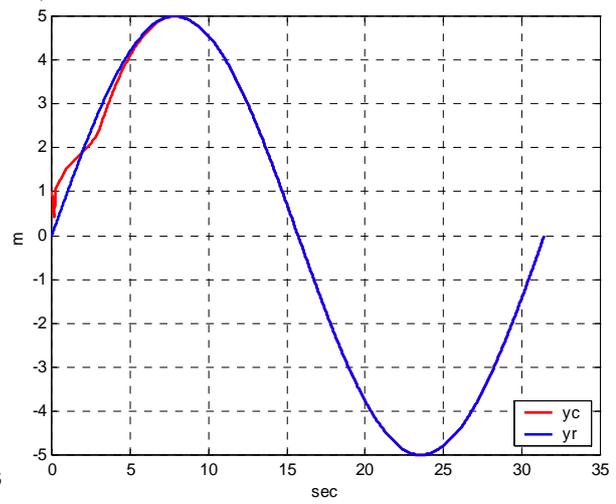
Figure E.5 : Poursuite de trajectoire non holonome circulaire

$$|u_{flou\ max}| = 100$$

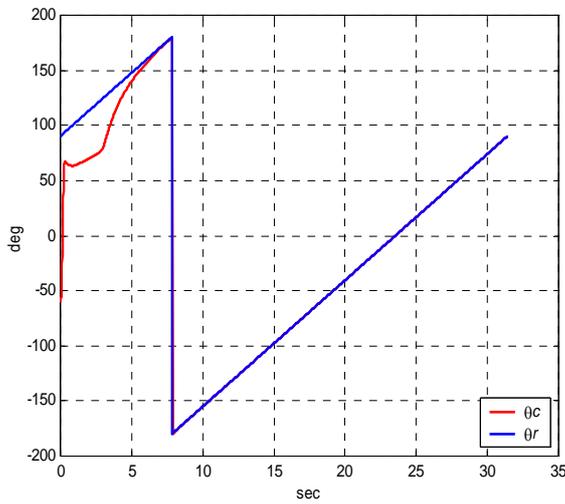
➤ La position initiale du robot est (1, 1, -60°)



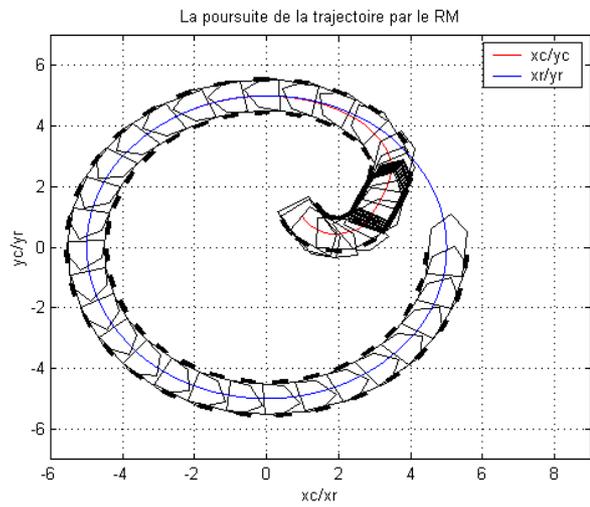
(a.1)



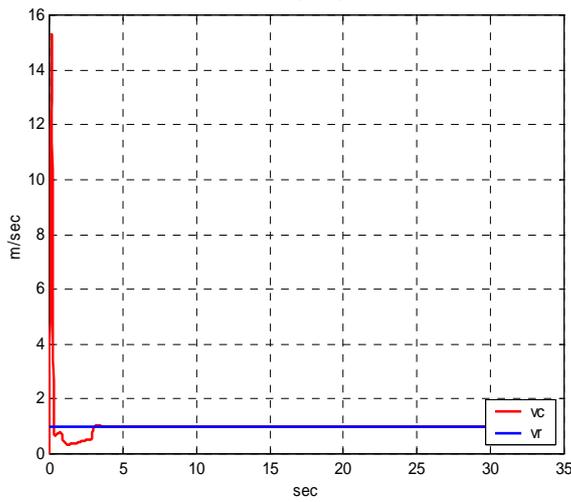
(a.2)



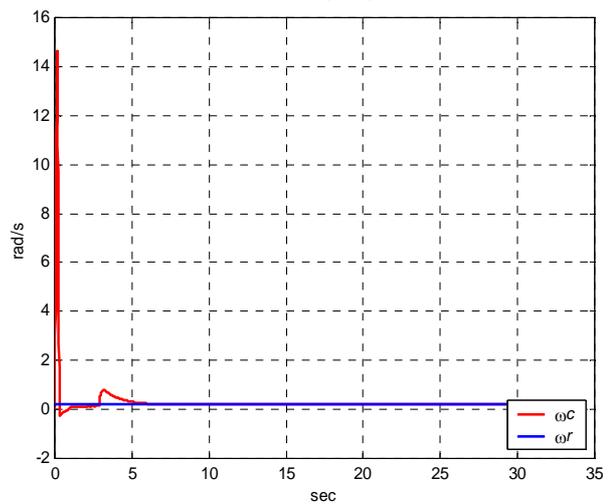
(a.3)



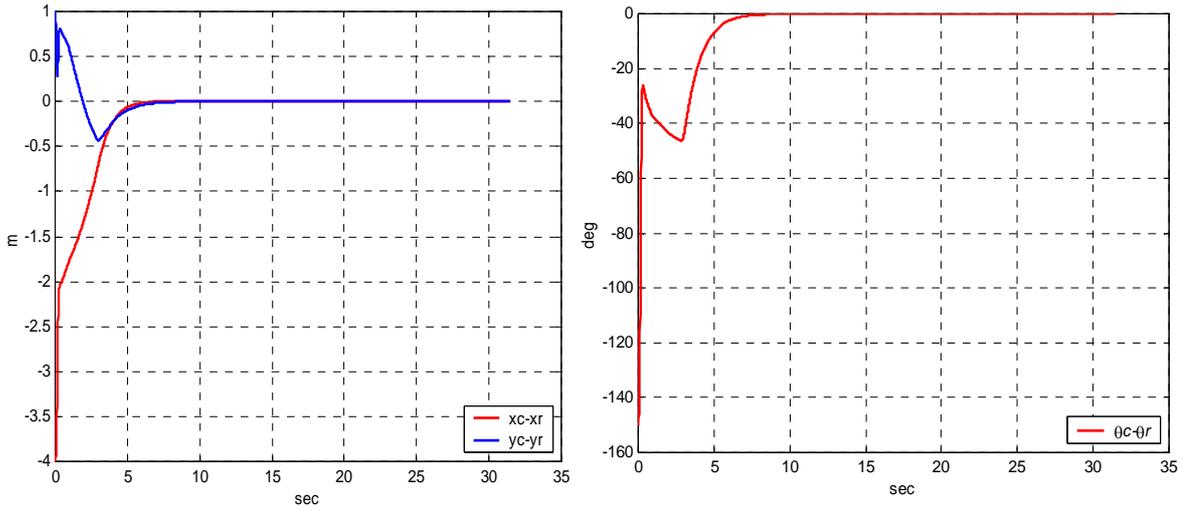
(a.4)



(a.5)

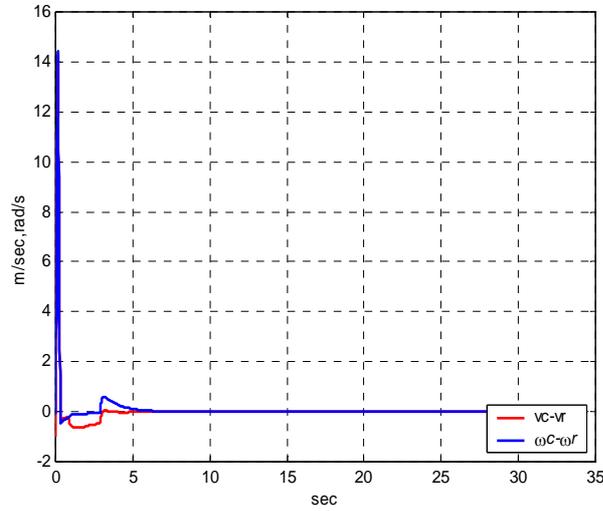


(a.6)

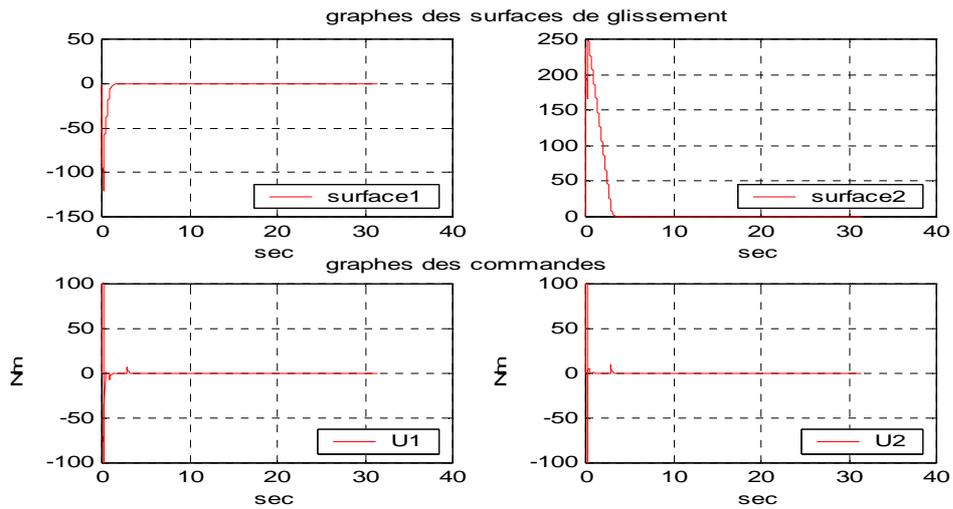


(b.1)

(b.2)



(b.3)

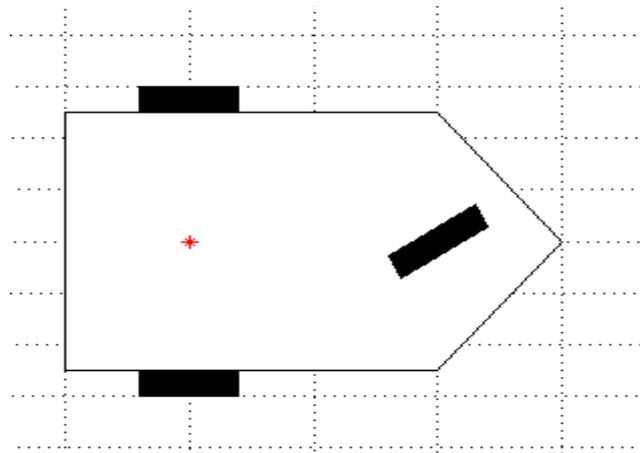


(c)

Figure E.6 : Poursuite de trajectoire non holonome circulaire

$$|u_{flou\ max}| = 100$$

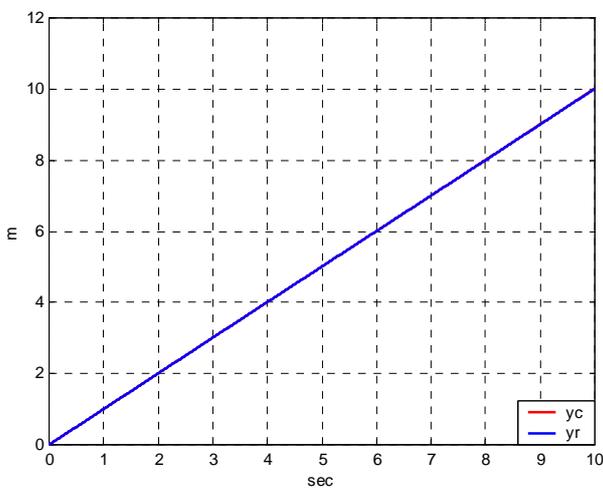
Résultats de simulation avec CFMG TISO
Poursuite de trajectoire de référence
circulaire, linéaire, sinusoïdale et non holonome
par un robot mobile à roues de type (1,1)



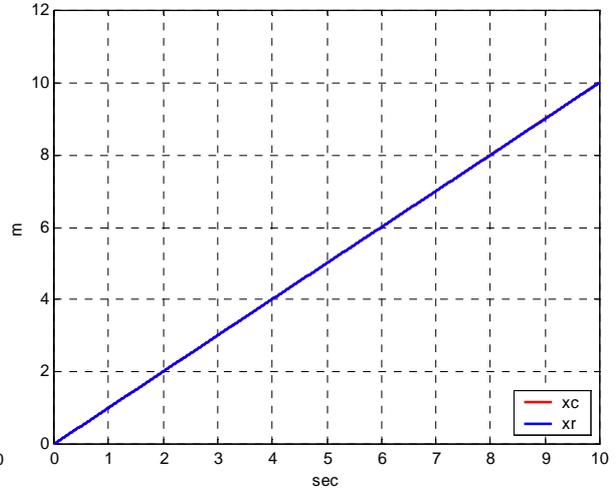
E.2. Poursuite de trajectoire du robot de type (1,1)

E.2.1. Poursuite d'une trajectoire linéaire

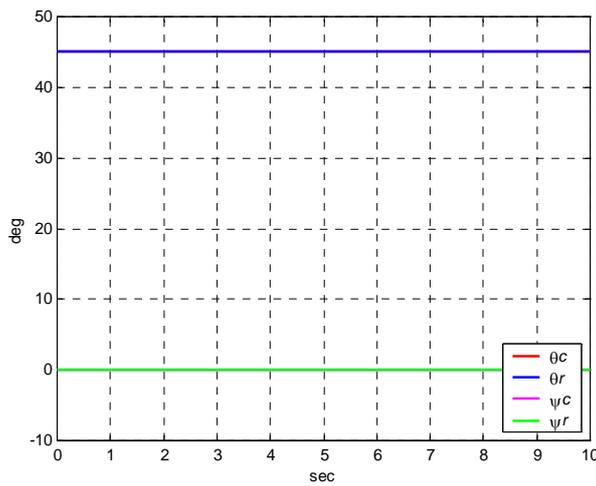
La position initiale du robot est $(0, 0, 45^\circ, 0^\circ)$



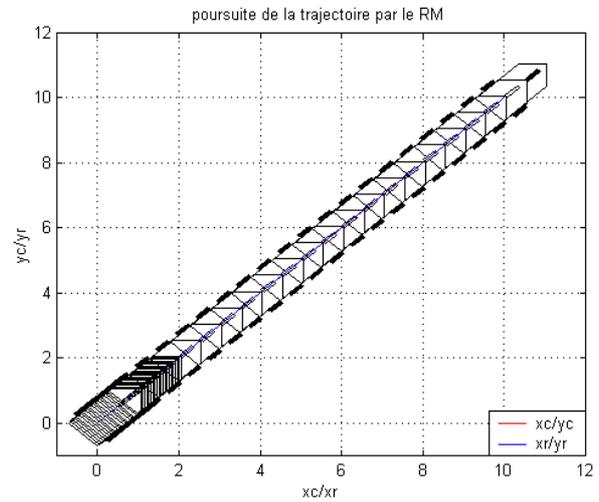
(a.1)



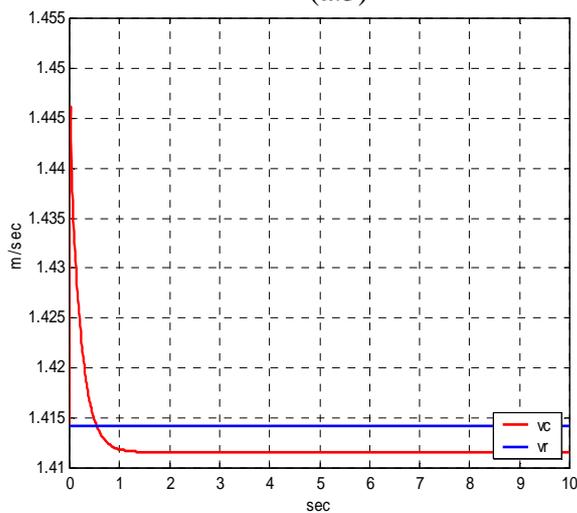
(a.2)



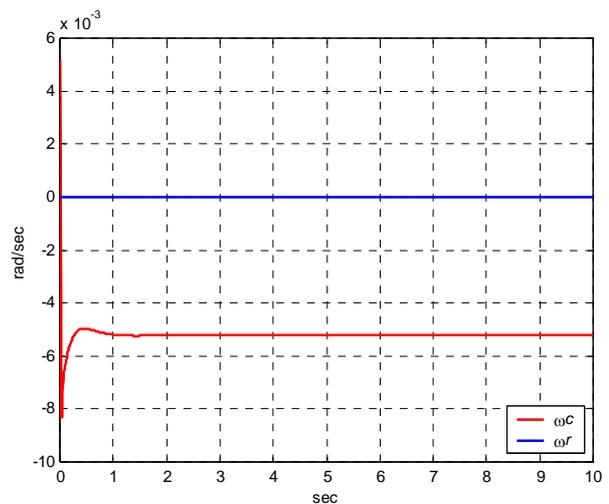
(a.3)



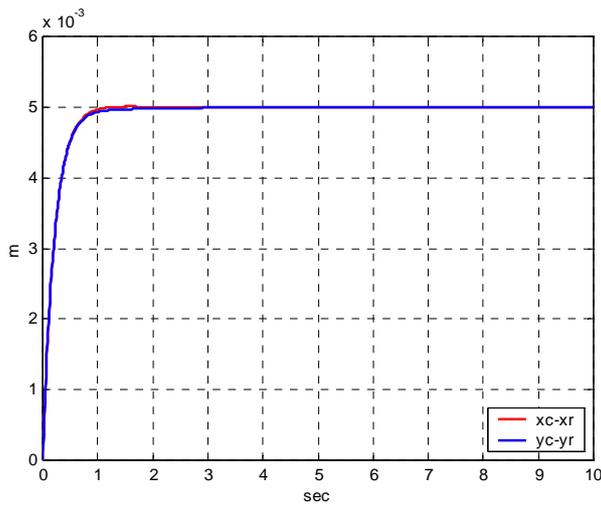
(a.4)



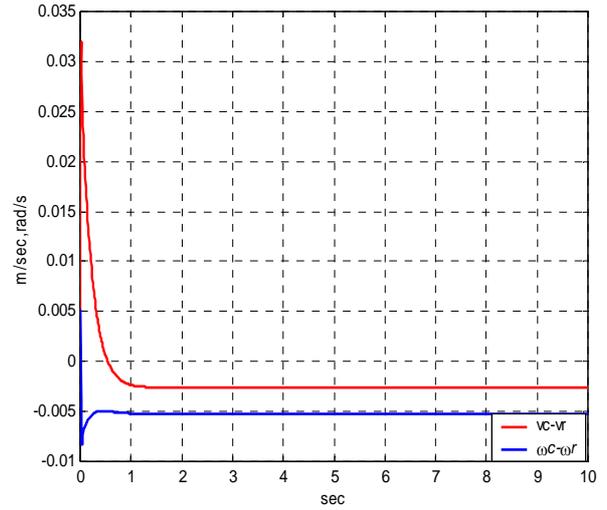
(a.5)



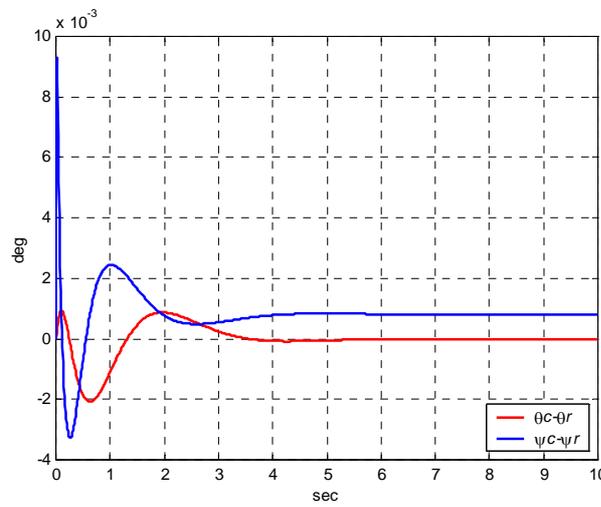
(a.6)



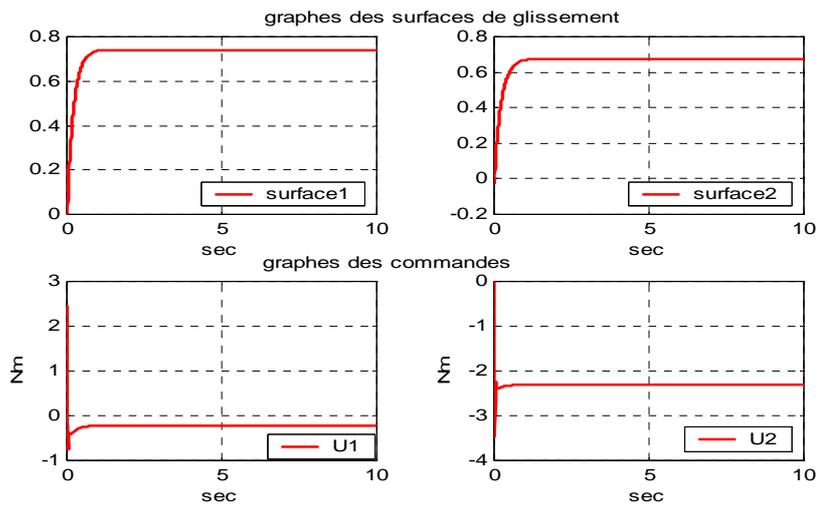
(b.1)



(b.2)



(b.3)



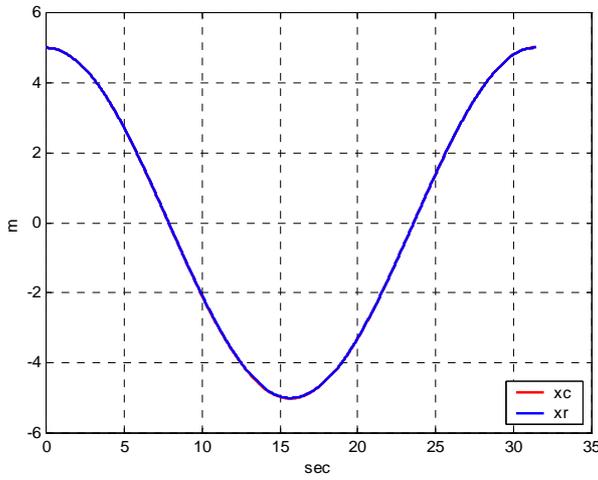
(c)

Figure E.7 : Poursuite de trajectoire linéaire

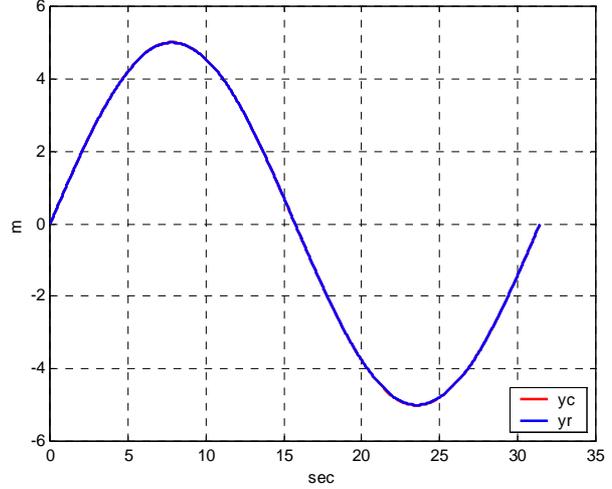
$$|u_{flou\ max}| = 100$$

E.2.2. Poursuite d'une trajectoire circulaire

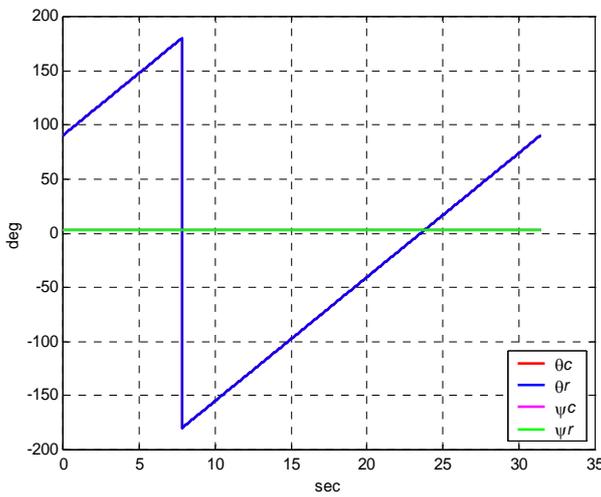
La position initiale du robot est (5, 0, 90°, 2.86°)



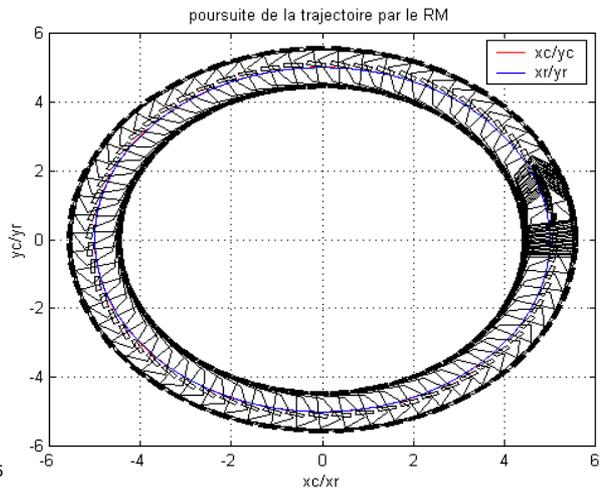
(a.1)



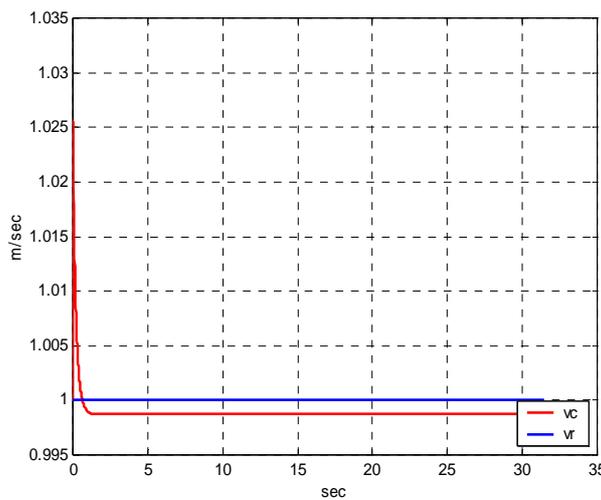
(a.2)



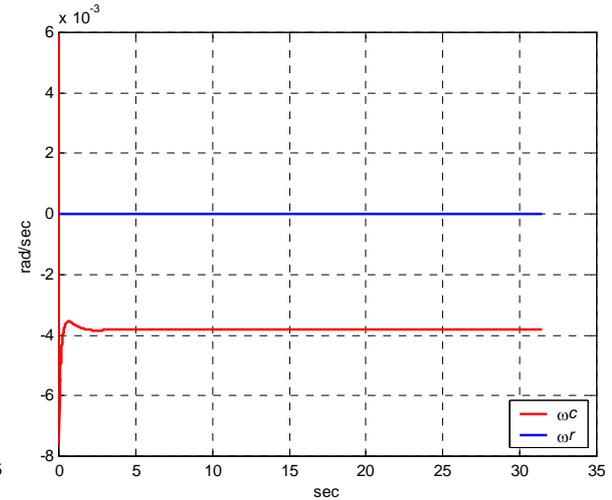
(a.3)



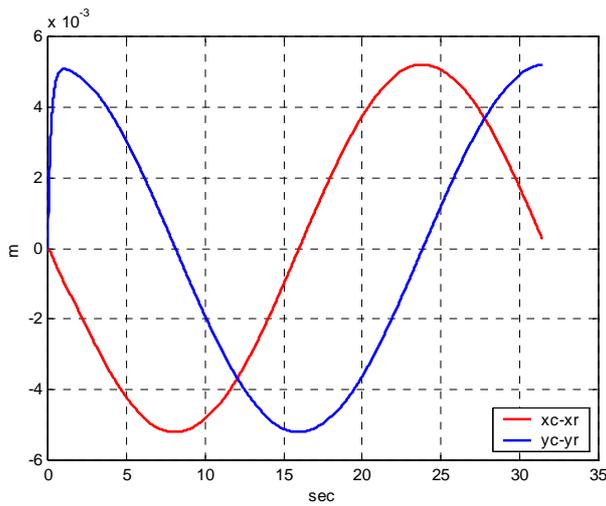
(a.4)



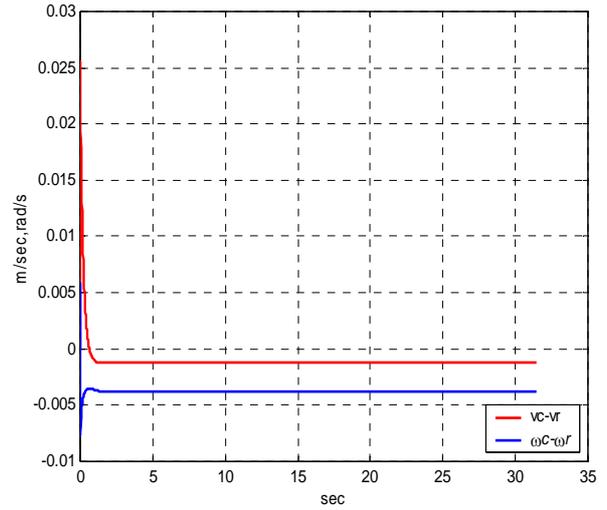
(a.5)



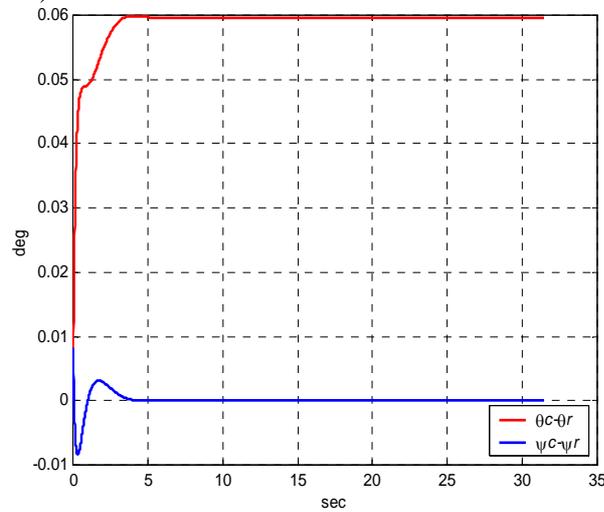
(a.6)



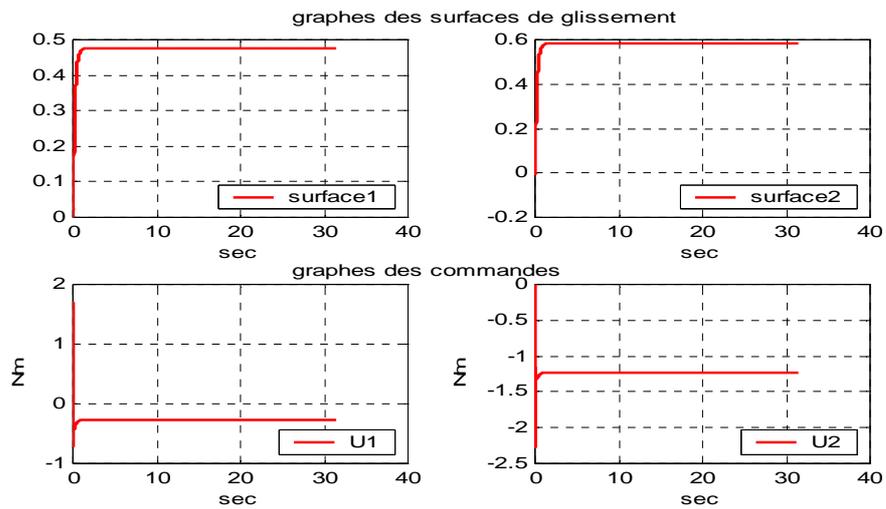
(b.1)



(b.2)



(b.3)



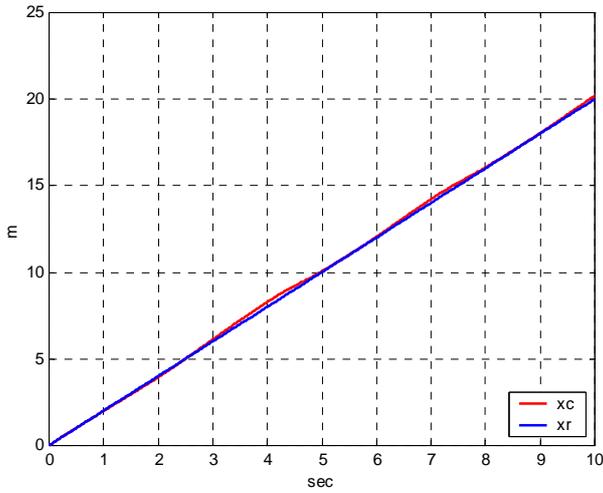
(c)

Figure E.8 : Poursuite de trajectoire circulaire

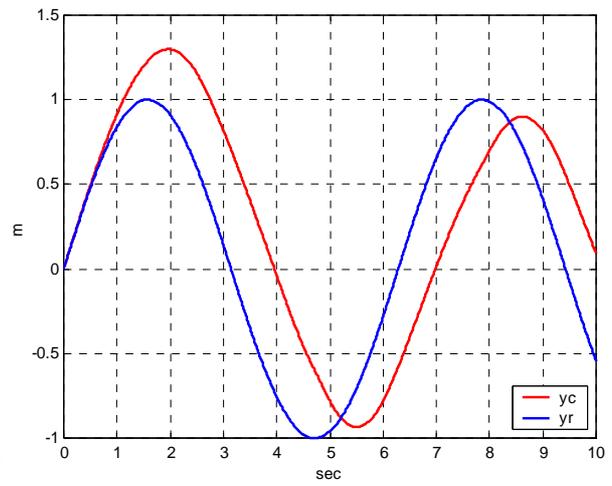
$$|u_{flou\ max}| = 100$$

E.2.3. Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale

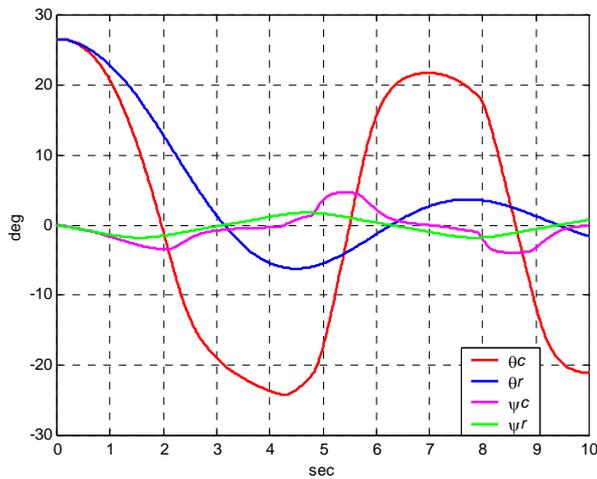
➤ La position initiale du robot est $(0, 0, 60^\circ, 0^\circ)$



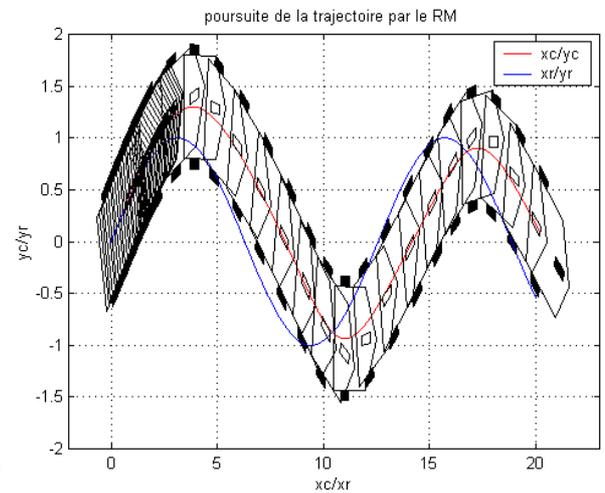
(a.1)



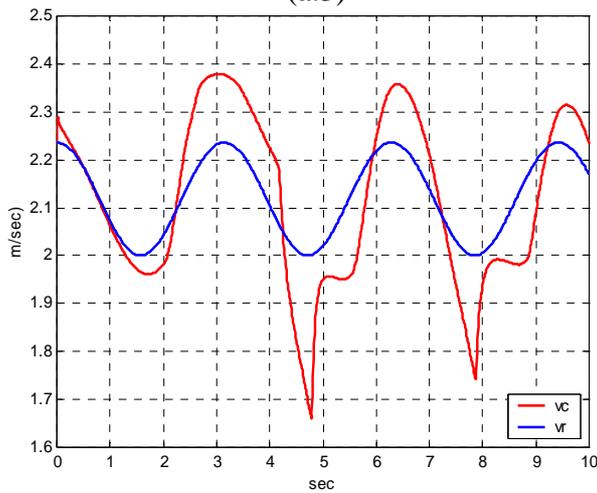
(a.2)



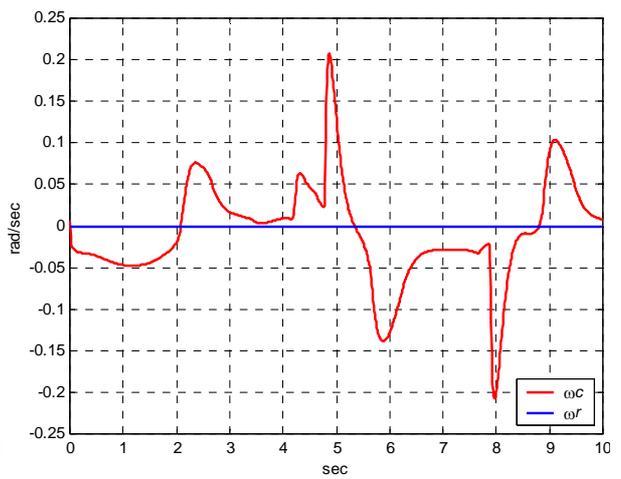
(a.3)



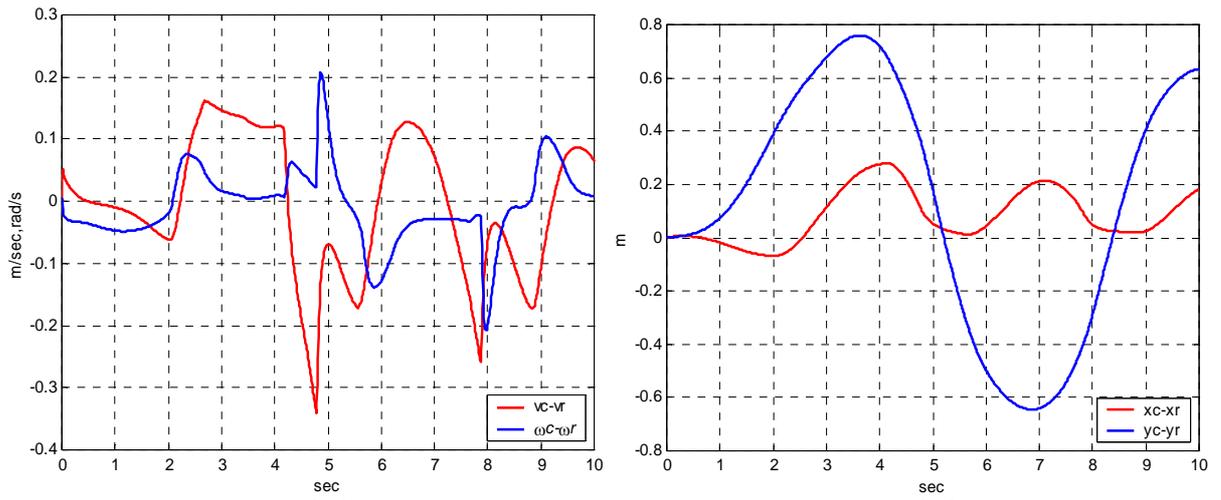
(a.4)



(a.5)

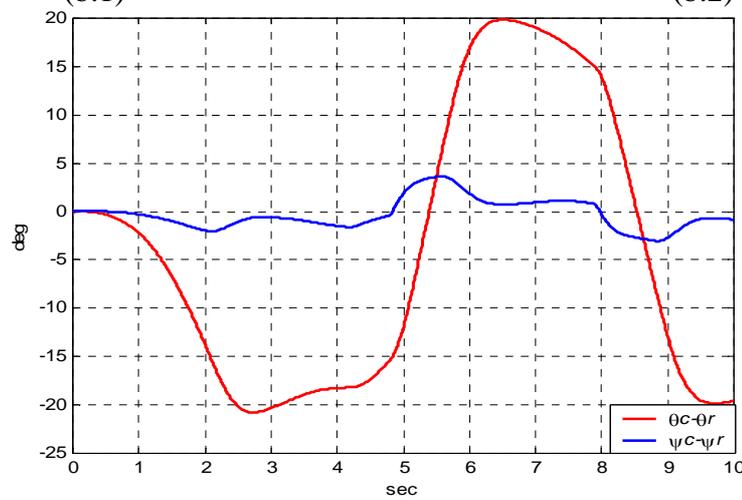


(a.6)



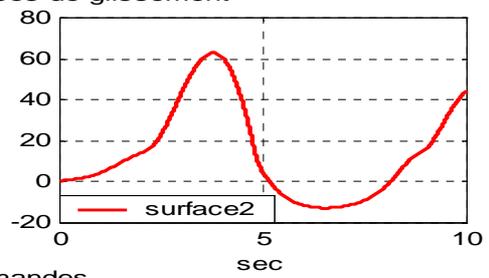
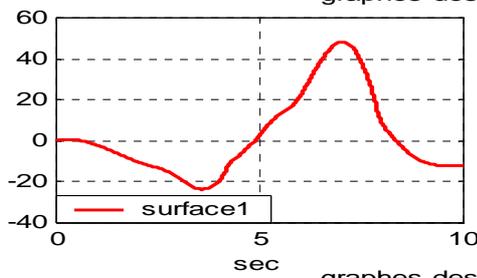
(b.1)

(b.2)

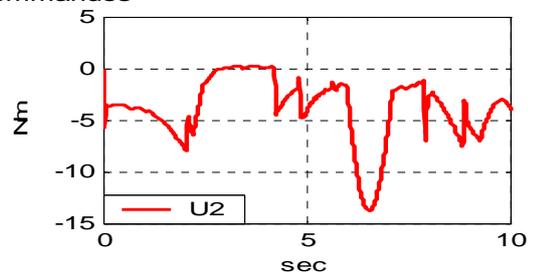
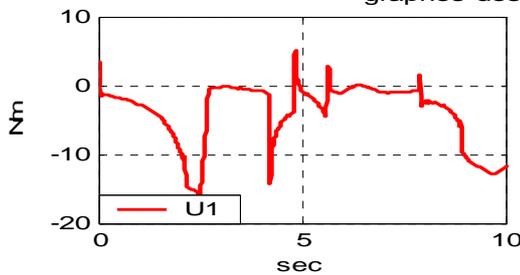


(b.3)

graphes des surfaces de glissement



graphes des commandes

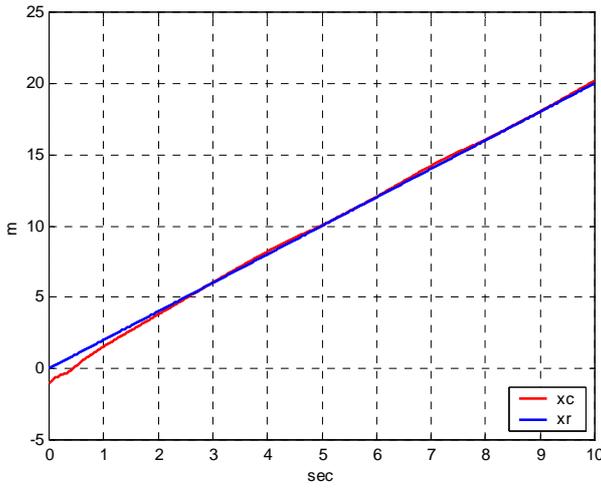


(c)

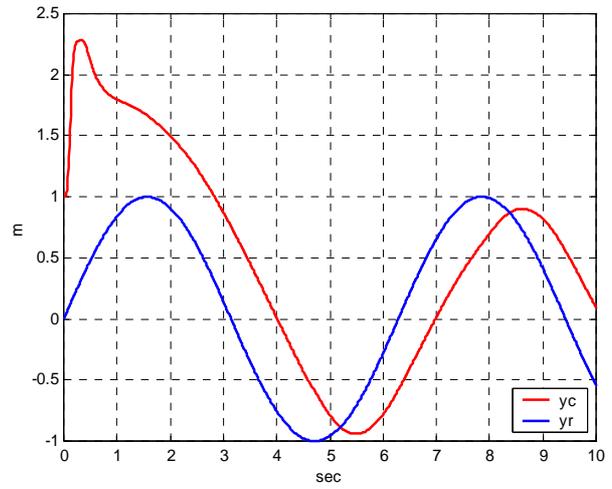
Figure E.9 : Poursuite de trajectoire linéaire

$$|u_{flou\ max}| = 100$$

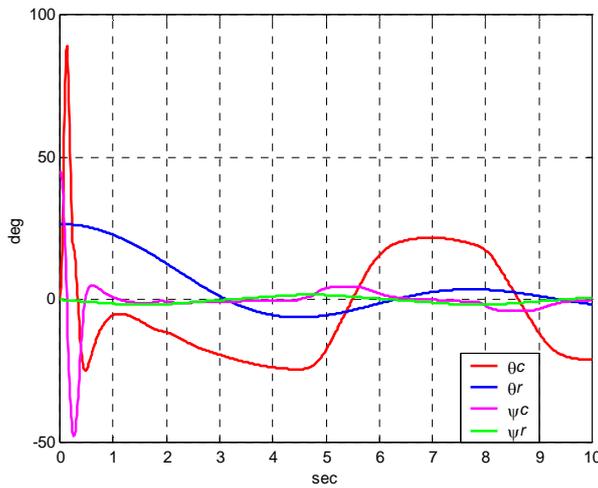
➤ La position initiale du robot est $(-1, 1, 0^\circ, 45^\circ)$



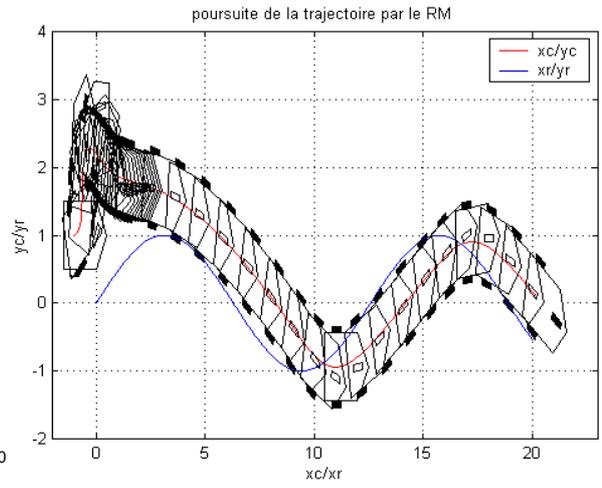
(a.1)



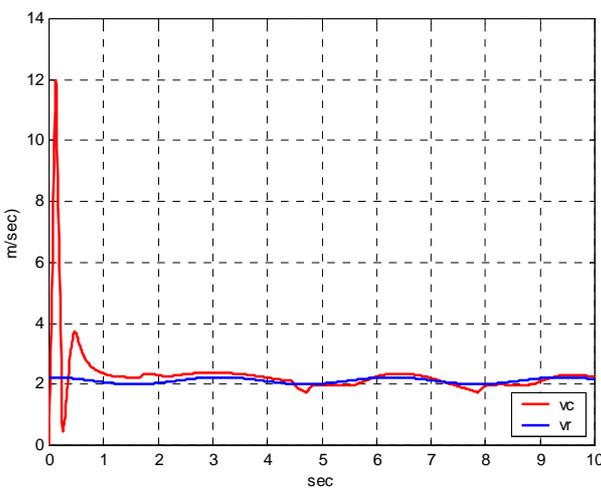
(a.2)



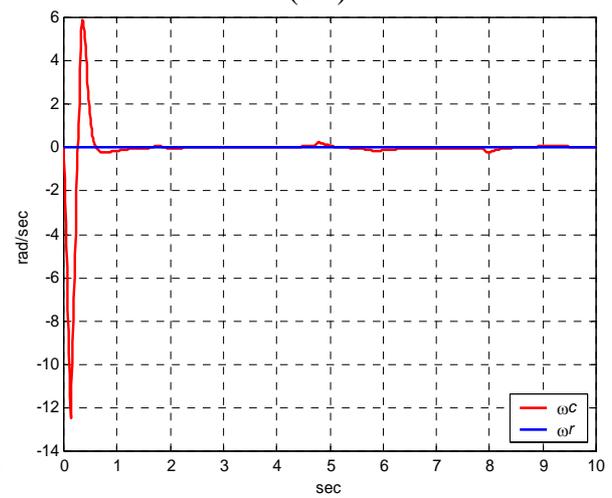
(a.3)



(a.4)



(a.5)



(a.6)

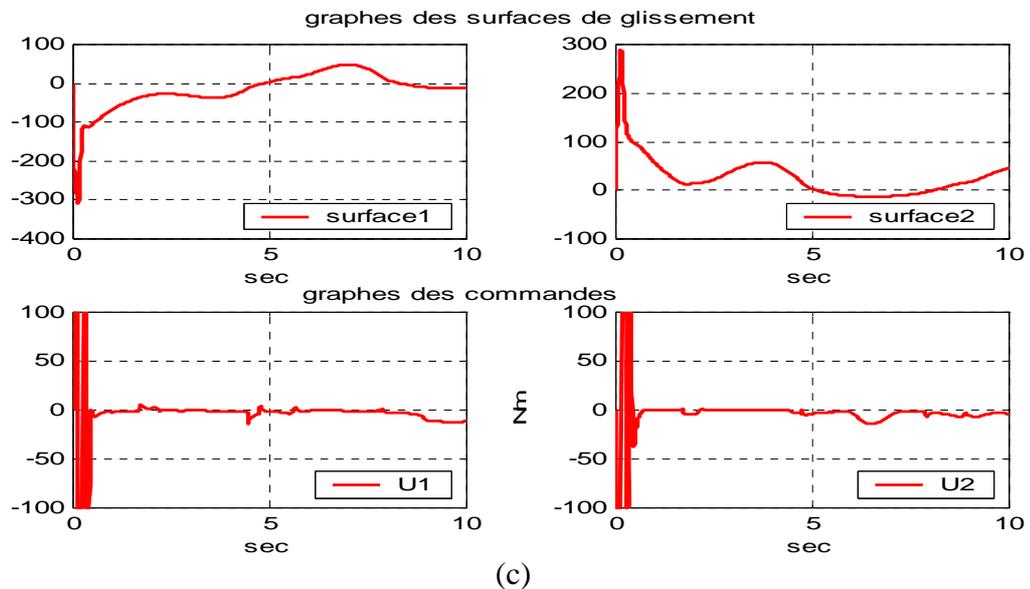
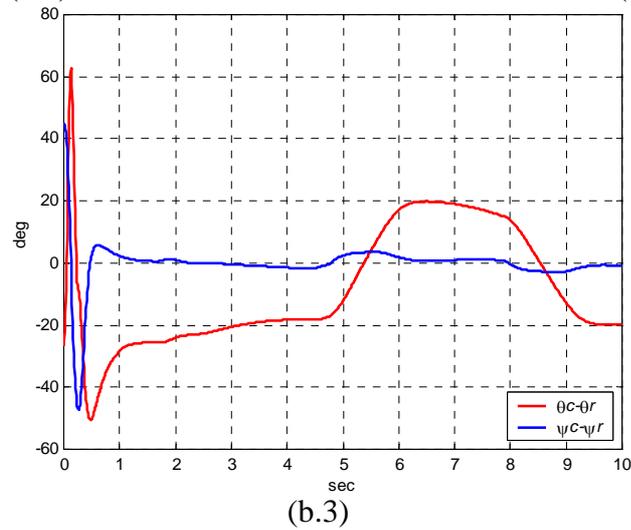
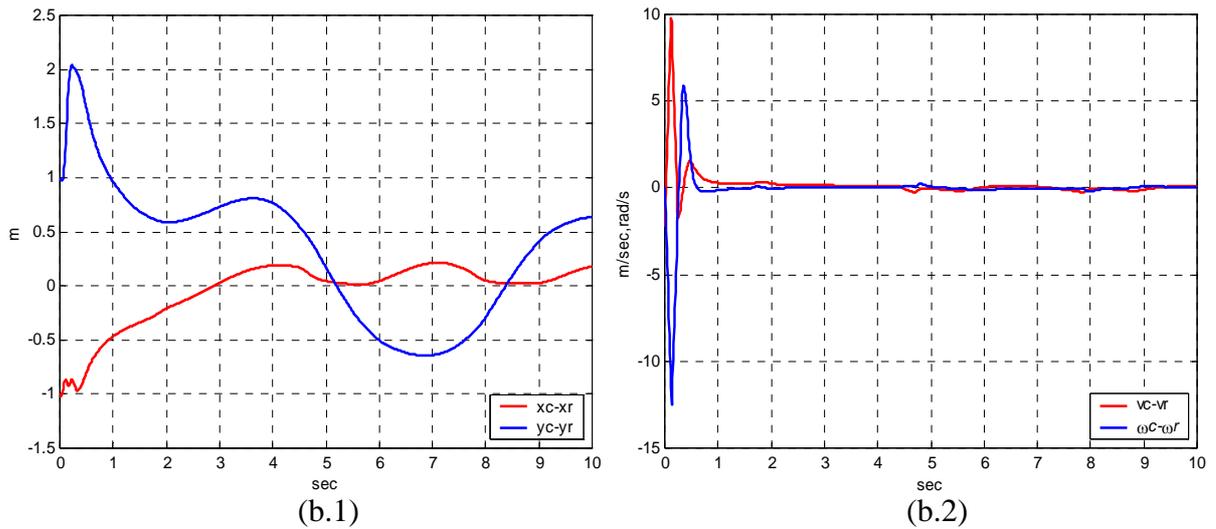
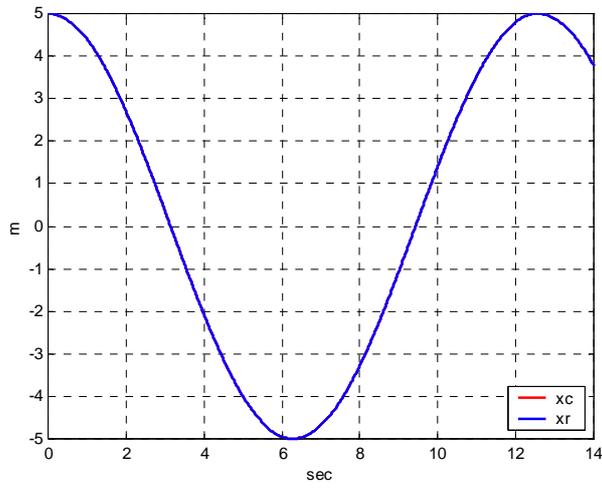


Figure E.10 : Poursuite de trajectoire sinusoidale

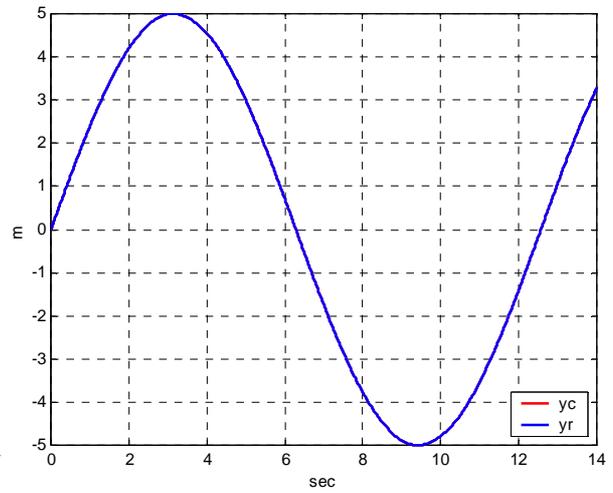
$$|u_{flou\ max}| = 100$$

E.2.4. Poursuite d'une trajectoire de référence respectant la contrainte non holonome du robot

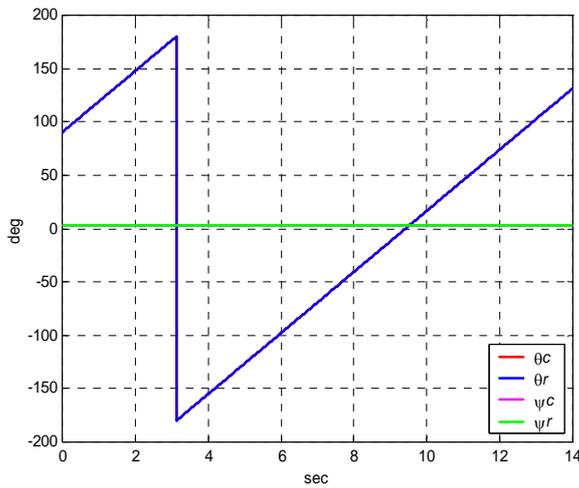
➤ La position initiale du robot est $(5, 0, 90^\circ, 0^\circ)$



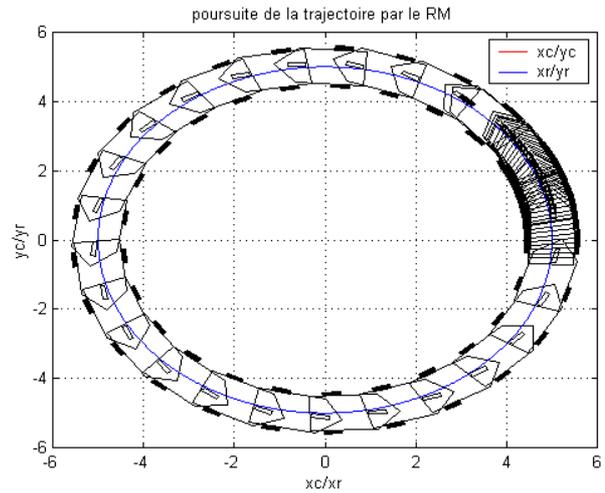
(a.1)



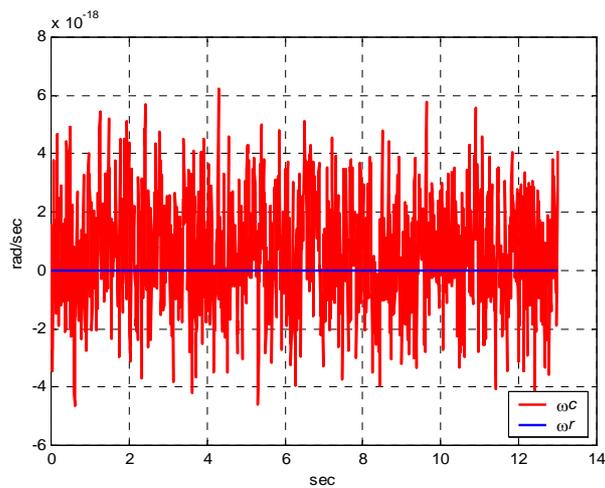
(a.2)



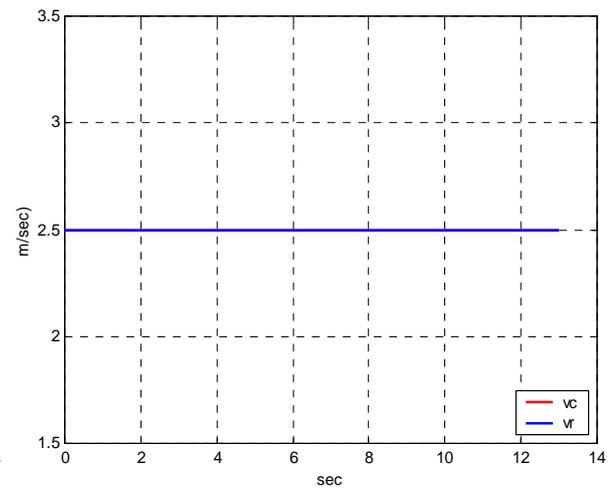
(a.3)



(a.4)



(a.5)



(a.6)

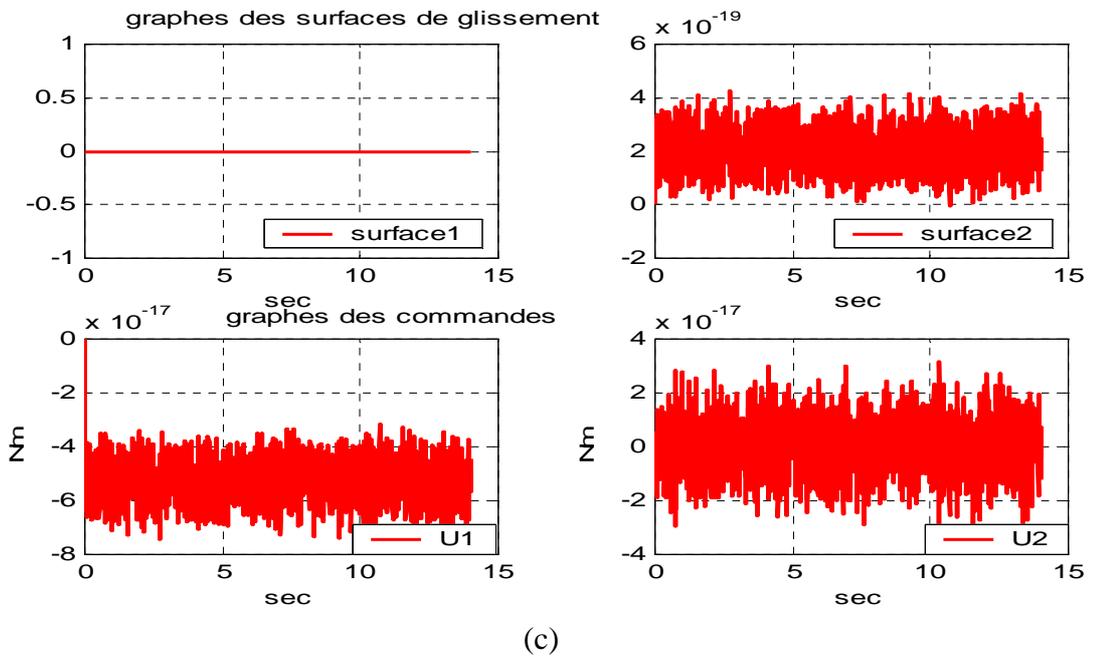
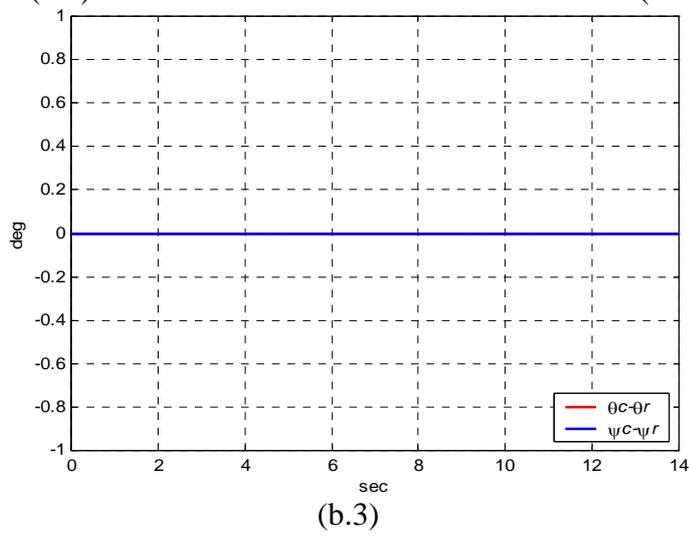
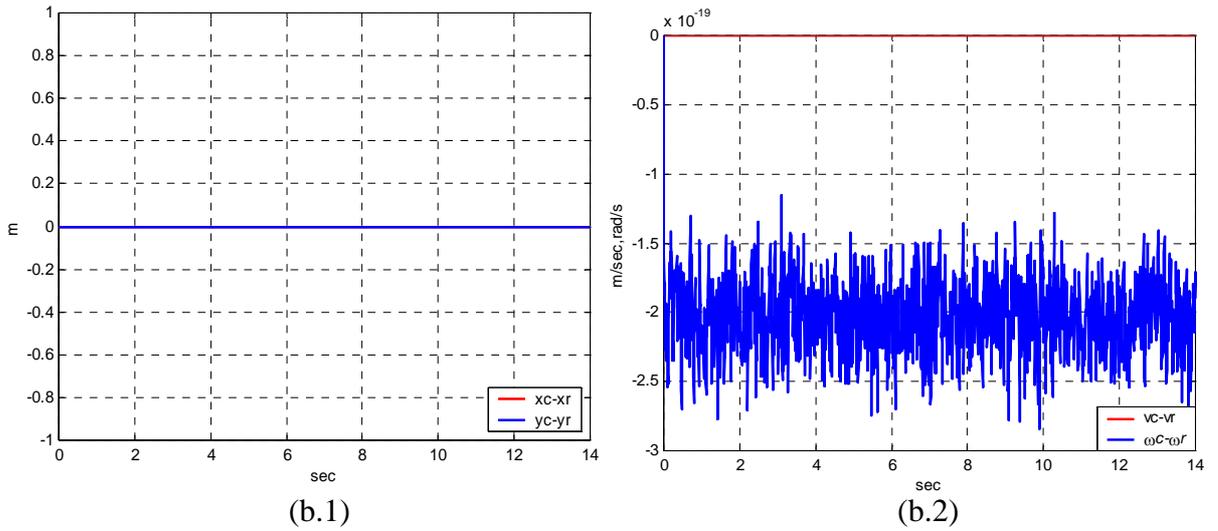
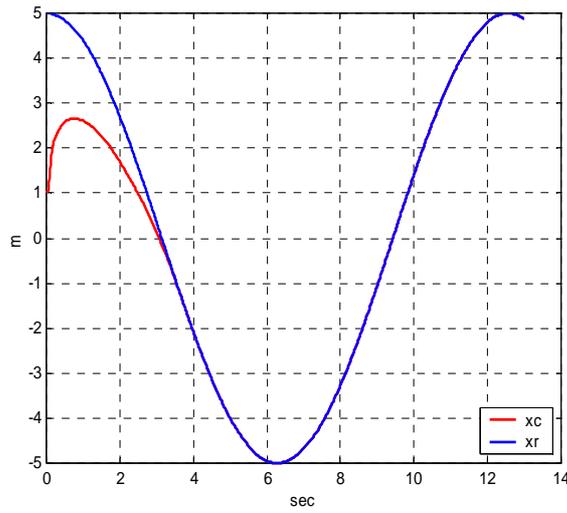


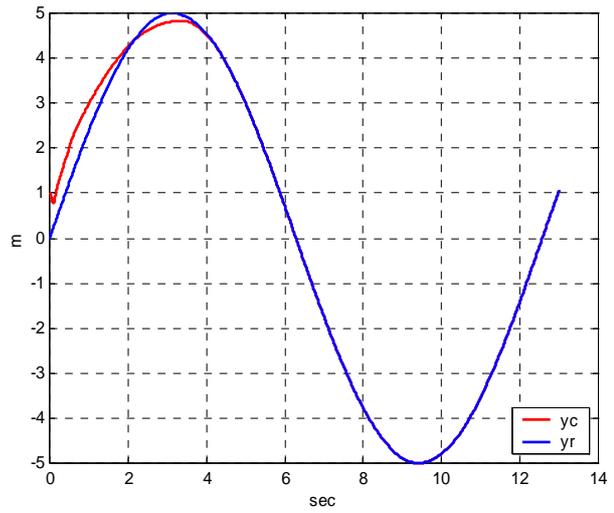
Figure E.11 : Poursuite de trajectoire non holonome circulaire

$$|u_{flou\ max}| = 100$$

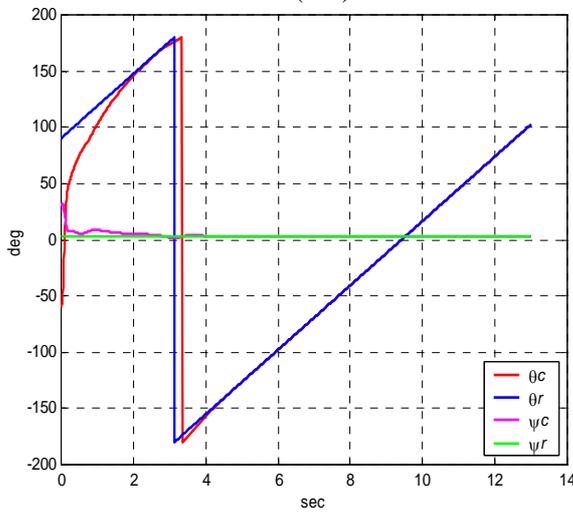
➤ La position initiale du robot est (1, 1, -60°, 30°)



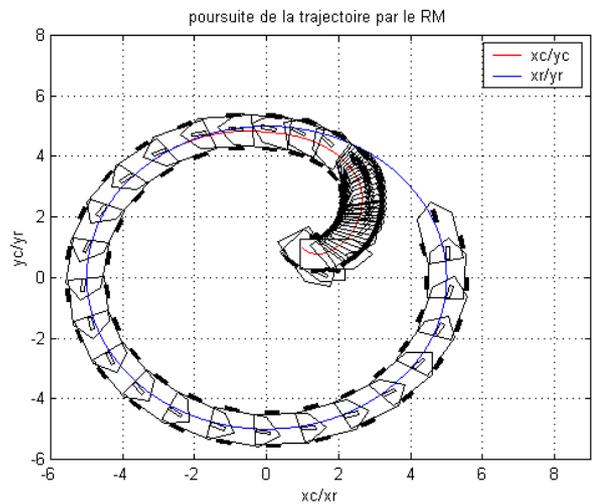
(a.1)



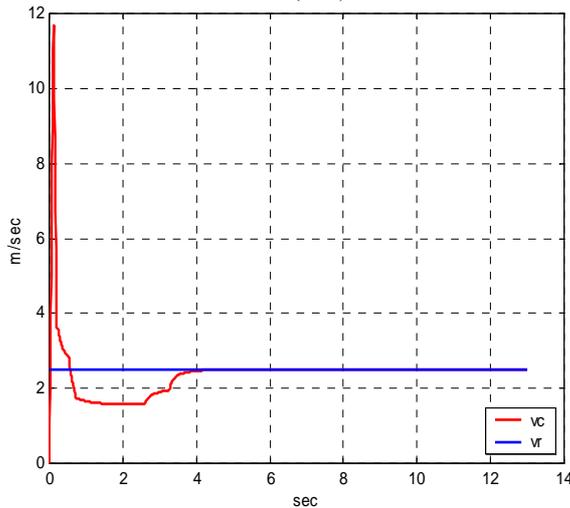
(a.2)



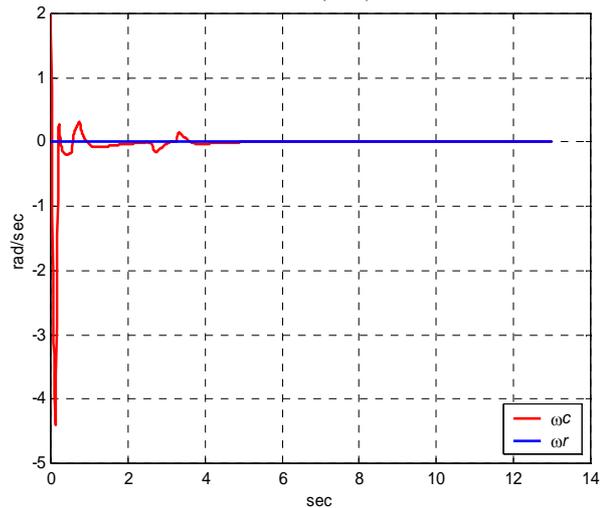
(a.3)



(a.4)



(a.5)



(a.6)

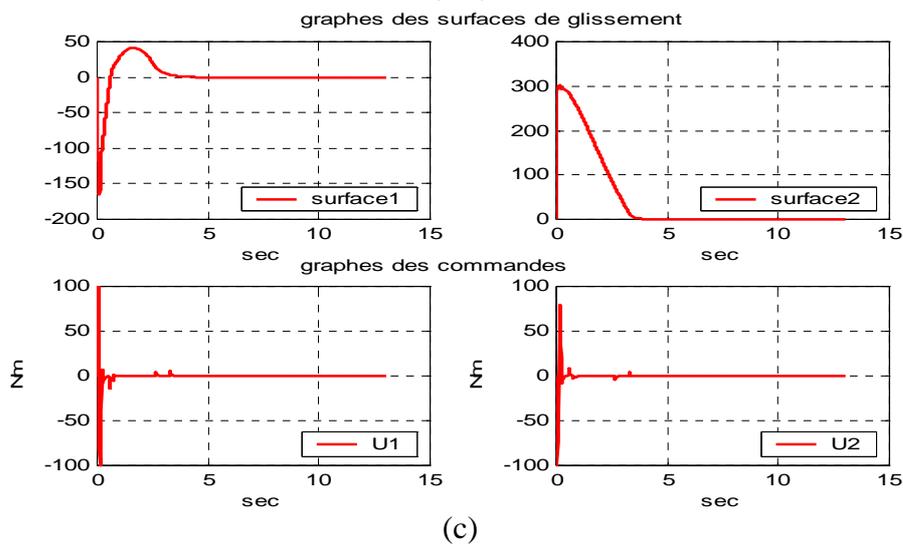
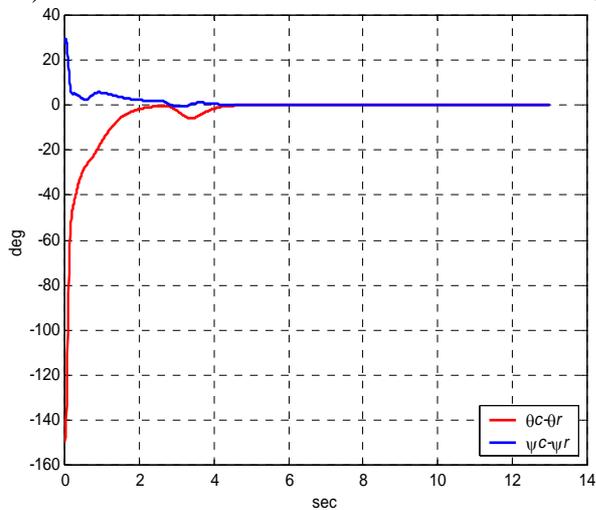
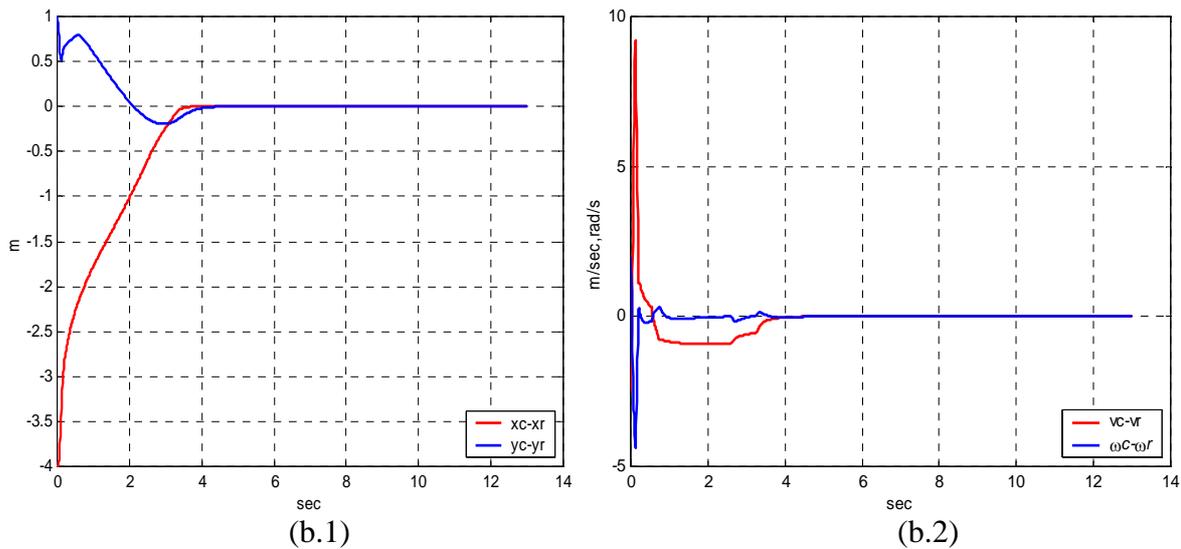


Figure E.12 : Poursuite de trajectoire non holonome circulaire

$$|u_{flou\ max}| = 100$$