

# UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté de Technologie

Département de Mécanique

## MEMOIRE DE MAGISTER

En génie mécanique

Option : construction mécanique

Etude méthodologique et comparative de description  
du mouvement des systèmes multicorps.

Par :

Mustapha RAHMANI

Devant le jury composé de :

M.HADJ SADOK	Maître de conférence A	USDB	Président
A.ALLALI	Maître de conférence A	USDB	Examineur
M.OUALI	Professeur	USDB	Rapporteur
M.GOUASMI	Maître assistant A	USDB	Invité

Blida, Septembre 2012

## TABLE DES MATIERES

Résumé.....	3
INTRODUCTION .....	6
But du travail .....	7
1. GENERALITES SUR LA ROBOTIQUE.....	9
1.1. Définition.....	9
1.2. Historique .....	9
1.3. Etat de l'art .....	11
1.4. Morphologie .....	12
a) Structure mécanique des robots [25] .....	12
b) Architecture mécanique des manipulateurs .....	13
c) Définitions générales.....	17
d) Critères de sélection [25] .....	19
2. CONCEPTS THEORIQUES.....	21
2.1. Généralités et définitions .....	21
2.1.1. Matrice de rotation, Angles d'Euler .....	21
2.1.2. Modélisation par les paramètres de Denavit-Hartenberg.....	24
2.1.3. Groupes de Lie, algèbre de Lie .....	26
2.1.4. Quaternions .....	28
2.2. Cinématique.....	31
2.3. Dynamique inverse récursive .....	33
2.3.1. Définitions.....	34
2.3.2. Méthode récursive de Newton-Euler .....	37
2.3.3. Le formalisme de Lagrange : .....	38
3. APPLICATIONS.....	41
3.1.1. Présentation générale du manipulateur.....	41
3.1.2. Méthode des angles d'EULER.....	43
3.1.3. Méthode des Groupes de Lie .....	46
3.1.4. Méthode des Quaternions [26].....	48
<b>3.1.5.</b> Analyse et Discussions des résultats.....	51
3.1.6. Conclusions .....	53
3.2. Application Dynamique .....	54
3.2.1. Méthode de Newton-Euler récursive .....	54

3.2.2. Méthode de Lagrange.....	60
3.3. Validation des résultats.....	62
3.4. Application 1:.....	68
3.5. Conclusion .....	73
4. CONCLUSION GENERALE .....	74
RÉFÉRENCES .....	76

## Résumé

Ce travail à caractère scientifico-pédagogique, consiste d'abord à présenter des méthodes utilisées pour la description du mouvement des systèmes multicorps à savoir ; les angles d'Euler, Denavit-Hartenberg, Lagrange et d'utiliser des techniques et des notations de la théorie des groupes et algèbre de Lie ainsi que les quaternions. Le but est d'appliquer ces méthodes pour l'étude cinématique et dynamique d'un manipulateur (robot), d'analyser les résultats trouvés et de les comparer. Cette étude comparative permettra de démystifier les groupes de Lie et algèbre de Lie quant à leurs utilisations en Robotique et surtout à démystifier et vulgariser les quaternions dans la même optique. Des programmes adéquats sont élaborés pour les calculs et des applications.

L'étude cinématique présentée dans ce mémoire fait l'objet d'une publication dans le journal « MEDWELL Journals », 2008, ISSN 1816-949X [Annexe A.2]

**Mots Clés :** Robotique / Angles d'Euler / Groupes de Lie et Algèbre de Lie / Quaternions / Cinématique / Dynamique/ Newton-Euler/Lagrange.

### المخلص:

هذا العمل العلمي والتربوي يعرض في البداية تقنيات مستعملة في وصف حركة الجمل متعددة الأجسام ، وهي زوايا أويلر، لاغرانج ، دينايفيت و هرتنبرغ و استعمال تقنيات و رموز نظريات جبر و زمر لي و الكواتيرنيون. والهدف من ذلك هو تطبيق هذه الأساليب لدراسة حركة و تحريك الروبوت وتحليل ومقارنة النتائج. وسوف تساعد هذه الدراسة المقارنة لإزالة الغموض عن جبر و زمر لي فيما يتعلق باستخدامها في مجال الروبوتات وخاصة لإزالة الغموض وترويج الكواتيرنيون في نفس المنظور.

الكلمات الرئيسية : جبر و زمر لي، الكواتيرنيون، زوايا أويلر، لاغرانج

**Abstract:** Our work, with rather educational and pedagogical character, consists at first; in defining the three main methods used for the description of the motion of multibody systems to be known: the Euler angles, Denavit-Hartenberg, Lagrange, and use the theory of Lie Groups and Lie algebra as well as the quaternions, then to use them to study the kinematics and dynamics of a manipulator (robot) and finally to analyze and to compare the found results. This comparative study will allow us to demystify the Lie groups and Lie algebra as for their use in Mechanics and Robotics and especially to demystify and to popularize the use of quaternions in the same optics.

**Keywords:** Robotics / Euler Angles / Lie groups and Lie algebra / Quaternion / Dual Quaternion.

## SYMBOLES

$R$ :	Matrice de rotation
$(\phi, \theta, \psi)$ :	Angles, Amplitudes
$t(t_x, t_y, t_z)$ :	Translations
$A, K, R, I$ :	Matrices
$D3, D4, d3, L2$ :	Distances [m]
$G, H$ :	Groupe de Lie
$g, h$ :	Algèbre de Lie
$p, q, r$ :	Quaternions
MO :	Objet manipulé; objet rigidement attaché au dernier chaînon du robot
$p$ :	Vecteur position
$(x, y, z)$ :	Axes de coordonnées d'un référentiel dextrogyre orthogonal
$i, j, k$ :	Vecteurs unitaires
$R$ :	Matrice de rotation
$b$ :	Vecteur de translation
$\omega$ :	La vitesse angulaire [rad/s]
$v$ :	La vitesse linéaire [m/s]
$\theta$ :	Coordonnée généralisée [m ou rad]
$[ ]$ :	Crochets de Lie (Lie brackets )
$V$ :	Etat spatial des vitesses du solide
$M_i$ :	Matrice de passage du lien $i$ à $i - 1$
$T_{i-1,i}$ :	Matrice de transformation du mouvement entre le repère $i$ et $i - 1$
$S$ :	Screw
$a_i$ :	Accélération linéaire [m/s <sup>2</sup> ]
$\dot{V}$ :	Etat spatial des accélérations du solide
$J_i$ :	Inertie spatiale du lien $i$ [Kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
$\Gamma$ :	Vecteur des couples/forces des actionneurs
$q$ :	Vecteur des positions articulaires [rad]
$\dot{q}$ :	Vecteur des vitesses articulaires [rad/s]
$\ddot{q}$ :	Vecteur des accélérations articulaires [rad/s <sup>2</sup> ]
$f_e$ :	Vecteur représentant l'effort extérieur (forces [N] et moments [Nm]) qu'exerce le robot sur l'environnement.

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Les quatre parties principales dans un robot.....	12
Figure 1.2 : Robot PUMA a 6 degrés de libertés.....	14
Figure 1.3 : manipulateur parallèle sphérique à trois degrés de libertés.....	15
Figure 1.4 : plateforme de Gough-Stewart à 6 degrés de libertés.....	15
Figure 1.5 : un robot GMF à six degrés de liberté.....	16
Figure 1.6 : liaisons, paires cinématique.....	18
Figure 1.7 : paires élémentaires de base, paires de Reuleaux.....	18
Figure 2.1 : Les angles d'EULER.....	23
Figure 2.2 : Poignet sphérique (3-R) .....	24
Figure 2.3 : Structures de base d'un groupe de Lie.....	27
Figure 3.1 : Robot PUMA.....	42
Figure 3.2 : Manipulateur PUMA 6 degrés de libertés.....	42
Figure 3.3 : Mécanisme plan à deux degrés de libertés.....	54
Figure 3.4 : Différentes configurations en suivant la trajectoire.....	62
Figure 3.5 : variation des angles $\theta_1, \theta_2$ en fonction du temps.....	63
Figure 3.6 : variation des angles $\theta_1, \theta_2$ en fonction du temps (calculés) .....	63
Figure 3.7 : vitesses articulaires.....	64
Figure 3.8 : accélérations articulaires.....	64
Figure 3.9 : Mécanisme plan à 2 ddl.....	65
Figure 3.10 : les variables articulaires en fonction du temps.....	66
Figure 3.11a : Variation du couple dans l'articulation 1.....	67
Figure 3.21b : Variation du couple dans l'articulation 2.....	67
Figure 3.12 : Variation des couples dans les articulations .....	68
Figure 3.13 : mécanisme plan à 2ddl suivant une trajectoire circulaire.....	69
Figure 3.14 : Variation des angles $\theta_1, \theta_2$ en fonction du temps.....	70
Figure 3.15 : Variation des vitesses articulaires $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ .....	71
Figure 3.16 : Variation des accélérations articulaires $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ .....	71
Figure 3.17 : Variation des couples dans les articulaires $\tau_1, \tau_2$ .....	72

## INTRODUCTION

L'homme conçoit et construit des outils pour l'assister ou le remplacer dans un large éventail de travaux. Ces développements conduisent à des machines hautement perfectionnées qui peuvent réaliser des tâches de plus en plus sophistiquées. Ces machines sont destinées à augmenter les possibilités de l'homme pour la rapidité de ses déplacements et de ses actions, et pour l'amplification de sa force et de son champ d'action, notamment dans l'accomplissement de tâches pénibles, dangereuses et/ou répétitives. La conception, la fabrication et le pilotage de ces machines, qui seront appelées communément « Robot », ont été rendus possibles grâce aux connaissances scientifiques et techniques en différentes disciplines comme la mécanique, électronique, informatique...etc. Mais la difficulté de maîtriser ces robots augmente avec la complexité du système.

Une approche simplifiée est donc l'objectif de tous les chercheurs, pour cela une multitude de méthodes existent afin de résoudre les problèmes de la robotique (géométrie, cinématique, dynamique, simulation, etc.). Chaque méthode est adaptée pour un problème spécifique, elle a ses avantages et ses inconvénients. La modélisation d'un nouveau robot nécessite d'habitude un investissement en temps important et le choix des paramètres peut influencer sur les résultats obtenues, la convergence de la méthode et surtout sur le volume de calcul qui est un facteur important lorsque le manipulateur interagit avec l'environnement en temps réel.

L'outil mathématique permettant de modéliser le mouvement du corps rigide ou déplacement, c'est-à-dire la cinématique, n'est pas définitivement achevé et on trouve dans la littérature plusieurs techniques comme les paramètres de Denavit-Hartenberg [1], les angles d'Euler [2], paramètres de Euler-Rodrigues [3], mais il existe une approche qui est relativement récente dans la robotique et qui a prouvé son efficacité dans d'autres domaines comme l'animation [4], c'est la géométrie algébrique.

La géométrie algébrique est un domaine des mathématiques qui, historiquement, s'est d'abord intéressé à des objets géométriques (courbes, surfaces...) dont les coordonnées vérifiaient des équations ne faisant intervenir que des sommes et des

produits (par exemple le cercle unité dans le plan rapporté à un repère orthonormé admet pour équation  $x^2 + y^2 = 1$ ). La simplicité de cette définition fait qu'elle embrasse un grand nombre d'objets et qu'elle permet de développer une théorie riche. [5]

Camille Jordan est probablement le premier à avoir en 1967 publié sur "les groupes de mouvements". Cependant, Jordan n'a pas clairement distingué les mouvements discontinus (par bonds successifs) des mouvements continus produits dans les machines. Sophus Lie a conçu sa théorie des groupes continus de transformations, lesquelles groupes sont désormais appelés groupes de Lie. Les développements modernes de la théorie de Lie par des mathématiciens peu intéressés par l'application au déplacement des corps rigides dans la mécanique non-relativiste sont plutôt abstraits. Ainsi, les ouvrages modernes sur les groupes de Lie assimilent tout groupe *de Lie* à un groupe multiplicatif  $GL(n)$  des matrices carrés  $(n \times n)$  de nombres réels. Un élément de  $GL(n)$  agit sur les vecteurs abstraits de  $R^n$ . [6]

### But du travail

Dans le domaine de la mécanique, la communauté scientifique et universitaire, surtout préfère utiliser la méthode « classique » dans l'étude cinématique et dynamique du mouvement du solide ou du système multicorps (mbs), malgré l'existence ou l'émergence de méthodes beaucoup plus simples, rapides et intuitives comme les groupes de Lie et algèbre de Lie ou les quaternions et qui ont fait leurs preuves dans plusieurs domaines comme le graphisme, la navigation et l'animation... La raison principale est l'inertie de cette communauté, sa résistance aux changements et son autosatisfaction quant à la méthode d'Euler. Car comment se fait-il que la plupart d'entre eux ignorent et continuent d'ignorer jusqu'à l'existence des autres ou nouvelles méthodes, malgré leurs apparition depuis presque une vingtaine d'années et leurs utilisations dans plusieurs domaines scientifiques ?

Notre étude à caractère pédagogique et scientifique démystifie ces notions et contribuera certainement à combler cette lacune.

On a commencé par des généralités et des définitions sur les systèmes articulés et la robotique ; En chapitre deux, des concepts théoriques sont présentés pour définir les outils (méthodes) utilisés en robotique pour la description du mouvement.

Le problème géométrique direct est ensuite développé pour l'architecture sérielle par trois méthodes (Angles d'Euler, Groupe de Lie et les quaternions). Par la suite le modèle dynamique est traité par la méthode récursive de Newton-Euler en utilisant les groupes et algèbre de Lie. Finalement dans le chapitre trois, des applications sont faites en portant une analyse comparative des différentes approches et on conclura par quelques observations et recommandations importantes.

Il faut noter que dans ce mémoire :

- On a travaillé seulement sur des mécanismes à chaîne cinématique ouverte simple.
- Les robots utilisés sont pris juste à titre d'application sans aucun intérêt pratique, car le but est de montrer l'existence de ces méthodes et de montrer comment les appliquer.
- La comparaison est faite entre les résultats sous forme analytique, puis les utilisés pour une application numérique.

# 1. GENERALITES SUR LA ROBOTIQUE

## 1.1. Définition

L'Association Française de Normalisation (A.F.N.O.R.) définit un robot comme étant un système mécanique de type manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent (i.e., à usages multiples), à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un, ou plusieurs, bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel.

Un robot manipulateur peut donc être considéré d'une manière générale, vu par son environnement, comme un générateur de mouvements et d'efforts dans les diverses directions de l'espace.

## 1.2. Historique

Avant de parler sur la robotique "moderne" et les techniques utilisées, il est intéressant d'avoir une idée sur le développement de la robotique au cours de ces dernières décennies.

Si l'utilisation des systèmes articulés remonte à quelques siècles, le mot "robot" n'est apparu que dans les années 1920. Et les travaux les plus récents qui font naître la robotique telle que nous connaissons commença après la deuxième guerre mondiale en développant un manipulateur commandé à distance pour travailler sur des matériaux radioactifs. Ces manipulateurs sont de type "maître-esclave" où le manipulateur "Esclave" duplique le mouvement d'un "Maître" à travers une série d'articulations mécaniques qui ont été remplacé, après, par des actuateurs électriques ou hydraulique et les nomma : les "téléopérateurs".

En parallèle avec les "téléopérateurs" il y'avait le développement des machines outils a commande numérique (CNC), des machines fiable et de haute performances.

Les premiers robots, développés par George Devol en 1954, remplace le manipulateur "Maitre" des téléopérateurs par le contrôleur programmable des machines CNC et l'appela "Programmed Articulated Transfer Device".

Un étudiant de l'université de Columbia, Joseph Engelberger, a acheté le brevet et fonda plus tard la société "Unimation" en 1956. l'Unimation installa son premier robot dans l'usine de General Motors en 1961.

L'innovation ici été:

- la programmabilité de la machine dont on pouvait changer les outils et la reprogrammer à un coût relativement bas pour lui permettre d'exécuter une grande variété de tâches;
- L'utilisation d'une chaîne cinématique ouverte qui a permet au robot d'accéder à un espace plus vaste.

Mais il a crée des problèmes de conception, car il est difficile de contrôler avec précision les derniers points d'une structure articulé, en plus, les erreurs à la base d'une chaîne cinématique ont une tendance de s'amplifier en allant vers l'extérieur de la chaîne.

Pour remédier le problème, des actuateurs hydraulique d'une grande puissance et haute précision ont été utilisés dans les articulations. Puis ils ont ajouté des capteurs (de force, de pression..) pour corriger les erreurs ou détecter les obstacles comme il à fait McCarthy en 1963 avec un système de vision binaire.

Plusieurs modèle de robots ont été introduit mais celui qui a marqué cette période été le robot marchant développé par General Electric pour l'armée en 1969.

En 1973, le premier langage de programmation de haut niveau a été développé a Stanford qui a permet l'apparition des robots commandé par ordinateur.

En 1978, Unimation a introduit son robot PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) et en 1979 le robot SCARA (Selective Compliant Articulated Robot for Assembly) au Japon puis aux Etats-Unis

Comme les applications des robots industriels ont progressé dans les années 80s jusqu'à nos jours, plusieurs robots sont introduits, mais les efforts sont concentrés surtout sur l'amélioration de sa précision, en utilisant des actionneurs et des capteurs plus performants, et le développement des techniques et des algorithmes de commande et de planification des trajectoires. Et pour que cela soit fiable on doit bien modéliser notre système et qu'il soit le plus proche possible de la réalité, cela ouvre un nouveau domaine qui, lui aussi, n'a pas cessé de progresser.

### 1.3. Etat de l'art

La plupart des ouvrages de références en robotique comme et proposent des exemples de résolutions de cinématiques sérielles particulières et quelques procédures pour y arriver de manière rigoureuse. Dans le cas des robots parallèles, Merlet regroupe et décrit les solutions pour plusieurs classes de structures parallèles dans. On peut citer : Solutions géométriques, Solutions algébriques, Méthodes itératives. [19][21] [22]

L'utilisation de « screw », « Twist » et « wrench » pour décrire la cinématique des corps rigides, a deux avantages principaux [7] : le premier nous permet de faire une description globale du mouvement sans passer par des singularités, due à l'utilisation des coordonnées locales, de telles singularités sont inévitables lorsqu'on choisit pour représenter la rotation par les angles d'Euler, par exemple.

Une des méthodes de représentation du mouvement d'un caractère d'animation est l'utilisation d'un modèle articulé. Le mouvement du modèle d'un squelette est défini par une translation et une orientation dans un repère global, et des orientations locales des articulations. Il existe plusieurs façons pour décrire une rotation dans l'espace et les plus utilisées sont les angles d'Euler et les quaternions.

Plusieurs domaines utilisent les angles d'Euler dans la représentation des rotations. D'après le théorème de rotation d'Euler [7]: toute rotation peut être décrite en utilisant trois angles.

Les Quaternions aussi peuvent être utilisés dans la représentation des rotations. Le quaternion est inventé par le mathématicien irlandais William Hamilton comme extension des nombres complexes. Il est composé de quatre éléments est

souvent noté par  $(q_0, \vec{q})$  où  $q_0$  est un nombre réel et  $\vec{q}$  un vecteur à trois composantes.

Plusieurs applications dans l'animation par ordinateur interpolent l'orientation en utilisant les angles d'Euler mais on peut faire face à ce qu'on appelle « gimbal lock », qui est la perte d'un degré de liberté de rotation. Par contre, les quaternions ne posent pas ce genre de problèmes, on peut faire l'interpolation des orientations sur la sphère en 4D formée par les quaternions unitaires et ils sont utilisés pendant des années dans le domaine aérospatial [12].

Récemment, quelques auteurs ont utilisé l'algèbre de Lie pour traiter les problèmes du système de vision [8], cette approche nous permet de faire une paramétrisation de la transformation d'une façon *naturelle* en 2D et en 3D.

#### 1.4. Morphologie

##### a) Structure mécanique des robots [25]

On distingue classiquement 4 parties principales dans un robot manipulateur ;

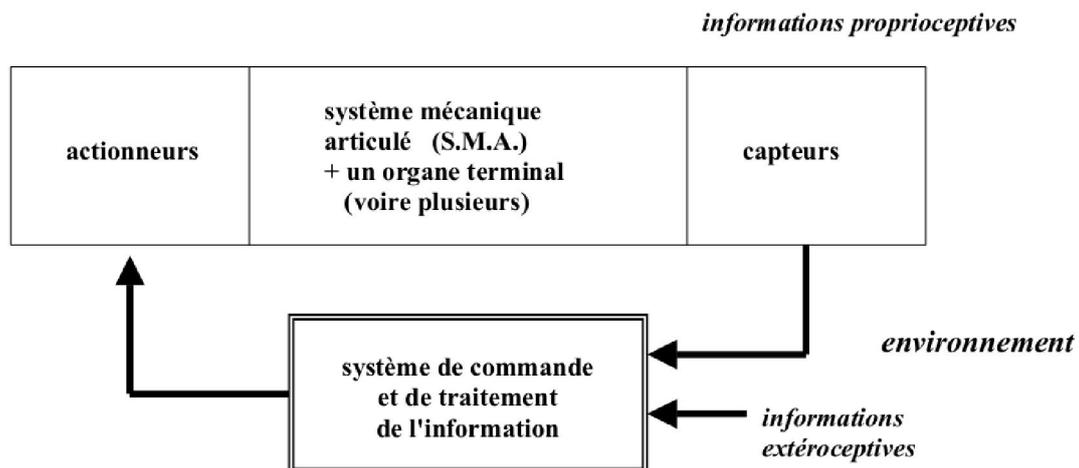


Figure1.1 : Les quatre parties principales dans un robot

Un robot est un ensemble de *liens* reliés entre eux par des *articulations* pour former la chaîne cinématique, qui est entraîné par des *actuateurs* ; qui sont à leur tour commandé par un ordinateur. Chaque sous système (figure1.1) donne au robot une capacité pour que l'ensemble exécute la tâche voulue. Ces capacités sont :

- La capacité d'action, que ce soit pour le porteur du robot ou pour le poignet, cette capacité est due à un ensemble d'*actuateurs* (actionneurs) qui entraînent les différents composants du robot. Sa motorisation est réalisée par des actionneurs électrique, pneumatique ou hydraulique qui transmettent leur mouvement aux articulations par des systèmes appropriés. Le concept d'un tel système fait appel au contrôle du mouvement (servomoteur, transmission)
- Un système *sensoriel* lui donne la capacité de perception qui lui permet d'obtenir des informations sur l'état interne et externe du système mécanique pour gérer les relations entre le robot et son environnement. Les organes de perception sont des capteurs dits *proprioceptifs* lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (positions et vitesse des articulations) et *extéroceptifs* lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement (détection de présence, mesure de distance, vision artificielle). La réalisation d'un tel système se réfère au contexte des propriétés des matériaux, de conditionnement du signal, traitement des données et récupération de l'information.
- La capacité de relier les actions à la perception d'une manière intelligente est assurée par un système de *contrôle* qui peut commander l'exécution des actions tout en respectant les objectifs tracés par les techniques de planification, et les contraintes imposés par le robot et l'environnement. La réalisation d'un tel système suit le même principe de rétroaction utilisé pour le contrôle des fonctions du corps humain, qui peut exploiter la description des composants du système robotique (modélisation).

La robotique est donc une science pluridisciplinaire qui requiert des connaissances en mécanique, électronique, traitement du signal, communication, informatique...

#### b) Architecture mécanique des manipulateurs

De tous les manipulateurs, on peut former trois grandes classes en se basant sur leur architecture : les manipulateurs sériels, les manipulateurs parallèles et les manipulateurs hybrides.

Les premiers sont caractérisés par des actionneurs placés les uns à la suite des autres sur une chaîne cinématique. En procédant de la sorte, le poids des actionneurs occupe une part importante dans la masse en mouvement. De plus, les actionneurs près de la base doivent supporter le poids des actionneurs situés plus loin sur la chaîne, ce qui oblige à placer des actionneurs plus puissants à la base et près de la base ainsi qu'à augmenter considérablement la masse des membrures pour les supporter. En général ces manipulateurs sont aussi reconnus pour avoir un grand espace de travail, un faible rapport capacité de chargement sur poids du manipulateur et une structure peu rigide. Des exemples de manipulateurs sériels sont présentés à la (Figure 1.2) ; On retrouve un manipulateur PUMA à six degrés de liberté. Ce dernier est beaucoup utilisé en recherche dans le domaine du contrôle et en industrie pour l'assemblage ou le déplacement de pièces.



Figure 1.2 : Robot PUMA a 6 degrés de libertés

A l'opposé, les manipulateurs parallèles sont caractérisés par la présence de plus d'une chaîne cinématique entre la base et l'effecteur. En général, chaque chaîne cinématique comporte un actionneur et ce dernier est placé le plus près possible de la base, si ce n'est sur la base. De cette façon, les actionneurs n'ont pas à porter le poids des autres actionneurs. En raison des chaînes cinématiques multiples entre la base et l'effecteur, ce type de manipulateur est en général très rigide et en mesure de supporter et de mouvoir des masses beaucoup plus supérieures à la masse totale du manipulateur. En contrepartie, la présence de plusieurs chaînes cinématiques entre la base et l'effecteur diminue la taille de leur espace atteignable. Deux exemples de manipulateurs parallèles sont illustrés à la Figure 1.2 et 1.3. Dans le premier cas, en 1.2, on peut voir un manipulateur parallèle sphérique à trois degrés de libertés. Ce manipulateur est utilisé pour

orienter une caméra avec des vitesses et des accélérations supérieures à celles de l'œil humain. De telles performances peuvent être atteintes parce que les actionneurs sont fixés à la base et, par le fait même, les membrures sont allégées au maximum. On obtient alors une faible inertie pour ce manipulateur et les actionneurs sont en mesure d'exécuter des manœuvres plus rapidement tout en demeurant en contrôle. La Figure 1.4 représente quant à elle un manipulateur parallèle à six degrés de liberté plus connu sous le nom de plateforme de Gough-Stewart [21]. On retrouve souvent ce type de manipulateur dans l'industrie aéronautique utilisé comme simulateur de vol. Par contre, dans ce cas-ci, le manipulateur représenté est un simulateur automobile utilisé par la compagnie Mercedes-Benz.

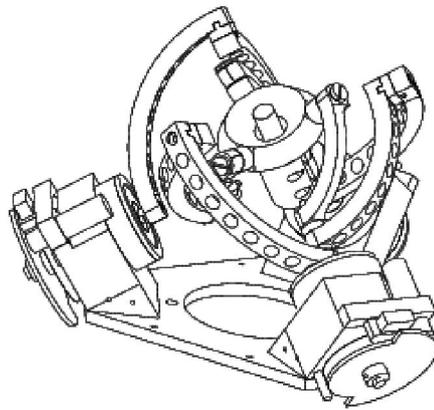


Figure 1.3 : manipulateur parallèle sphérique à trois degrés de libertés



Figure 1.4 : plateforme de Gough-Stewart à 6 degrés de libertés

Le troisième et dernier type d'architecture présenté est l'architecture hybride. Cette architecture représente un compromis intéressant entre les architectures sérielles et parallèles. Le terme hybride englobe, à lui seul, toutes les combinaisons possibles de manipulateurs sériels et de manipulateurs parallèles. Un manipulateur hybride peut donc être formé d'une combinaison de chaînes sérielles, d'une

combinaison de manipulateurs parallèles ou d'une combinaison de chaînes sérielles et de manipulateurs parallèles.

L'architecture hybride est de plus en plus utilisée en robotique pour amener un actionneur plus près de la base comme on peut le constater à la figure 1.5 pour un robot GMF à six degrés de liberté. En effet, une boucle fermée a été ajoutée pour déplacer le troisième actionneur dans l'axe du second et ainsi diminuer la masse en mouvement. Puisque cet actionneur subit maintenant seulement une rotation autour de l'axe du premier actionneur, sa masse n'influence plus l'énergie potentielle du manipulateur. D'autres ont fait l'étude d'un manipulateur hybride à trois degrés de liberté construit à partir de deux chaînes sérielles entre la base et l'effecteur. Avec une telle architecture, il en a résulté un manipulateur plus précis pouvant évoluer à plus grande vitesse en comparaison avec le manipulateur sériel obtenu en ouvrant la chaîne cinématique.



Figure 1.5 : un robot GMF à six degrés de liberté

Dans un ordre d'idées plus générale, Earl et Rooney ont fait le survol de plusieurs structures cinématiques pouvant être employées pour la conception de manipulateurs. On peut citer le projet AMADEUS (Lane et al. 1997) qui porte sur un système complet de manipulation. D'autres (Ioi et Etoh 1990; Ishirni et al. 1991) ont également effectué des travaux qui traitent de manipulateurs sous-marins. Au niveau des manipulateurs commerciaux, les compagnies ALSTOM Automation Schilling Robotics (avec les robots Titan, Canan et Orion), Tek Engineering (avec le robot Python) et Hydro-Technologie (avec le robot BM 100) produisent des manipulateurs pouvant travailler sous l'eau ou dans des milieux très hostiles. Il est à noter que tous ces robots possèdent des architectures sérielles. Ceci conclut le survol des trois grandes classes de manipulateurs. On est maintenant en mesure

d'examiner les critères de sélection qui vont permettre d'effectuer le choix de l'architecture la mieux adaptée à la situation.

### c) Définitions générales

#### **Articulations ou liaisons**

On admettra qu'un corps solide rigide isolé dans l'espace à trois dimensions possède six degrés de liberté : trois composantes d'un vecteur position et trois composantes d'orientation. Quand on relie un tel corps à un autre, au moyen de « liaisons » mécaniques, il perd de sa mobilité par rapport au second. On peut imaginer diverses combinaisons de translations et de rotations, dont quelques-unes sont représentées sur la figure 1.6.

Dans l'assemblage de robots manipulateurs, les liaisons les plus courantes sont :

- La liaison rotoïde R (ou pivot) à un degré de liberté (figure 1.6 j) ; Articulation rotoïde : Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée R, réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe
- La liaison prismatique P (ou glissière) à un degré de liberté (figure 1.6 k) ; Articulation prismatique : Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée P, réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe

Pour une articulation complexe, i.e., avec une mobilité supérieure à 1, peut toujours se ramener à une combinaison d'articulations prismatique ou rotoïde. Par exemple, une rotule est obtenue avec trois articulations rotoïdes dont les axes sont concourants.

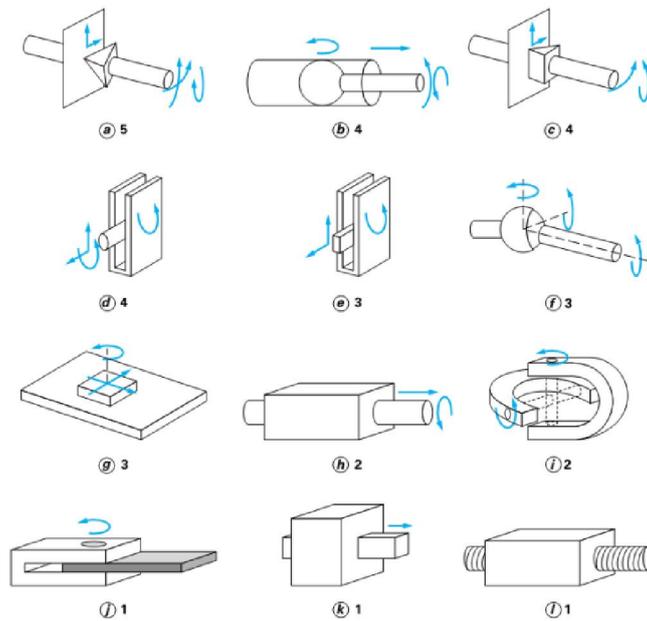


Figure 1.6 : liaisons, paires cinématique.

La nature du mouvement relatif existante entre une paire de liens successifs est déterminée par le type du joint d'articulation. D'un certain point de vue, il existe d'innombrables façons pour relier un lien avec un autre et leurs permettre un mouvement relatif entre eux.

Dans les années 1870, Franz Reuleaux, un ingénieur mécanicien allemand, simplifia la chose en définissant les 6 paires élémentaires de base (Figure 1.7). Une paire de Reuleaux est une paire de surfaces identiques, l'une pleine et l'autre creuse. Ces deux surfaces s'assemblent et restent en contact tout en permettant un mouvement relatif entre elles.

Les 6 paires de bases sont : rotoïde R (1ddl), hélicoïdale H (1ddl), prismatique P (1ddl), cylindrique C (2ddl), sphérique ou rotule S (3ddl), planaire E (3ddl)

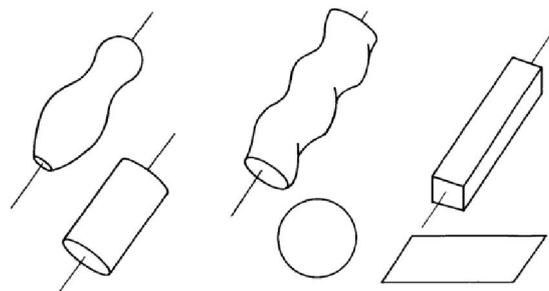


Figure 1.7 : paires élémentaires de base, paires de Reuleaux

d) Critères de sélection [25]

Chacune des combinaisons pouvant former un manipulateur hybride comporte des avantages et des inconvénients. Une bonne connaissance des tâches à accomplir par le manipulateur est donc très importante avant de choisir l'architecture appropriée. En ce qui concerne le manipulateur pour applications sous-marines, les quatre points suivants sont à considérer :

- le nombre de degrés de liberté : un robot doit disposer de six degrés de liberté pour positionner et orienter un solide quelconque dans l'espace ; de même, pour situer un corps dans un plan, il ne faut que trois degrés de liberté.
- espace de travail : il faut qu'il y ait compatibilité entre le robot et la tâche et que le nombre de degrés de libertés de l'organe terminal du robot soit supérieur ou égal à celui de la tâche, le mécanisme peut alors placer l'organe terminal dans la situation désirée.
- bonne rigidité. Le manipulateur doit avoir une bonne rigidité afin d'accomplir les tâches prévues et de pouvoir interagir avec son environnement;

Sur le plan des applications les plus courantes, on peut distinguer :

- Les robots industriels, travaillant généralement à poste fixe, de manière totalement autonome, et dont les « tâches » sont programmées sur le site par apprentissage, ou bien hors ligne en utilisant un langage spécialisé ou des moyens de conception assistée par ordinateur ;
- Les robots pour l'intervention et l'exploration en milieu hostile et mal connu (nucléaire, planétaire, sous-marin) qui sont le plus souvent téléopérés mais peuvent être dotés d'une certaine autonomie locale compte tenu des difficultés relatives aux délais des transmissions et à leur faible bande passante.
- Les outils de la « réalité virtuelle » qui émergent dans de nombreux laboratoires et industries sont susceptibles d'aider les opérateurs dans la commande des manipulateurs dont ils sont dotés les véhicules robotisés.

Dans tous ces cas où les robots manipulateurs ne sont pas directement téléopérés et doivent posséder une certaine autonomie d'action, leurs système de commande automatique doivent connaître et compenser les imprécisions éventuelles puisque l'opérateur humain n'est pas directement dans la boucle d'asservissement,

pour s'adapter aux caractéristiques des machines et de leur environnement il est nécessaire de passer par une modélisation mathématique précise de la géométrie et de la dynamique des bras manipulateurs.

## 2. CONCEPTS THEORIQUES

### 2.1. Généralités et définitions

#### 2.1.1. Matrice de rotation, Angles d'Euler [1] [2] [3] [4] [5] [6]

#### **Rotations en 3-D autour de l'origine**

Dans ce travail toutes les transformations ou mouvements du solide sont en 3-D et on utilise la notation standard où  $i$ ,  $j$  et  $k$  représentent les vecteurs unitaires portés par les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement.

Dans l'espace, toute rotation se fait instantanément autour d'un certain axe fixe, donc pour une rotation en 3-D on doit spécifier l'angle de rotation  $\Phi$  et aussi un vecteur unitaire le long de l'axe de rotation,  $v$  par exemple. Ainsi, pour représenter une matrice de rotation 3x3 on écrira  $R(\Phi, v)$ .

Les matrices de rotations autour des axes  $z$ ,  $x$  et  $y$  s'écrivent donc :

$$R(\Phi, k) = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R(\Phi, i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}$$
$$R(\Phi, j) = \begin{pmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{pmatrix}$$

On note que le sens de rotation est, par convention, le sens trigonométrique. Et généralement on prend  $0 \leq \Phi < \pi$ , donc, une rotation de  $(-\Phi)$  est représentée par  $R(\Phi, -v)$ .

Le résultat de deux rotations successives est obtenu par le produit matriciel ce qui signifie que les rotations en 3-D ne sont pas commutatives et l'ordre avec lequel on doit faire la multiplication est très important.

#### **Rotations générales en 3-D**

Les matrices de rotations précédentes sont des cas particuliers car les rotations peuvent se faire autour de n'importe quel axe, mais toutes les rotations vérifient les propriétés bien connues :

$$R(\Phi, v)^T R(\Phi, v) = I \quad \text{et} \quad \det R = 1 \quad (1)$$

Du fait que les rotations doivent préserver le module du vecteur transformé et qu'elles ne sont pas des réflexions ( $\det R \neq -1$ ), pour trouver la matrice qui

représente une rotation autour d'un axe arbitraire on peut utiliser la conjugaison. Cette dernière méthode consiste à trouver la transformation en combinant des matrices déjà connues, en général on fait une opération sur une matrice M sous la forme  $TMT^{-1}$ .

Par exemple, supposons que  $w$  est un vecteur unitaire dans le plan x-z qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe z, figure 1, une rotation de  $\Phi$  autour de  $w$  peut être retrouvée par une superposition de  $w$  sur l'axe z, une rotation de  $\Phi$  autour de z puis ramener  $w$  à sa position initiale :

$$R(\Phi, w) = R(\theta, j)R(\Phi, k)R^{-1}(\theta, j) \quad (2)$$

En 3D, il s'avère qu'on a besoin de 3 paramètres, mais il est impossible de choisir les paramètres de façon non ambiguë. Pour des raisons de topologie il y aura toujours des choix de paramètres qui donnent la même matrice. Cette paramétrisation est très utile, par exemple toute rotation peut être considérée comme le produit des trois rotations autour des axes des coordonnées (Théorème de Chasles):

$$R(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) = \begin{pmatrix} \cos\Phi_z & -\sin\Phi_z & 0 \\ \sin\Phi_z & \cos\Phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi_y & 0 & \sin\Phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi_y & 0 & \cos\Phi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi_x & -\sin\Phi_x \\ 0 & \sin\Phi_x & \cos\Phi_x \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\Phi_y \cos\Phi_z & \sin\Phi_x \sin\Phi_y \cos\Phi_z - \cos\Phi_x \sin\Phi_z & \cos\Phi_x \sin\Phi_y \cos\Phi_z + \sin\Phi_x \sin\Phi_z \\ \cos\Phi_y \sin\Phi_z & \sin\Phi_x \sin\Phi_y \sin\Phi_z + \cos\Phi_x \cos\Phi_z & \cos\Phi_x \sin\Phi_y \sin\Phi_z - \sin\Phi_x \cos\Phi_z \\ -\sin\Phi_y & \sin\Phi_x \cos\Phi_y & \cos\Phi_x \cos\Phi_y \end{pmatrix}$$

Mais, en plus de la taille de la matrice, l'angle  $\Phi_y = \frac{\pi}{2}$  pose un problème et la matrice devient :

$$R\left(\Phi_x, \frac{\pi}{2}, \Phi_z\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\Phi_x - \Phi_z) & \cos(\Phi_x - \Phi_z) \\ 0 & \cos(\Phi_x - \Phi_z) & -\sin(\Phi_x - \Phi_z) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on obtient la même matrice pour tout  $(\Phi_x - \Phi_z) = \text{constante}$ .

Une autre paramétrisation locale figure 2.1 en termes d'angles d'EULER  $(\phi, \theta, \psi)$  est celle utilisée surtout en aéronautique [1];  $(\phi, \theta, \psi)$  désignant respectivement le roulis, le tangage et le lacet qui définissent les rotations suivantes :

- $\phi$  : rotation autour l'axe z,
- $\theta$  : rotation autour l'axe y et
- $\psi$  : rotation autour l'axe z

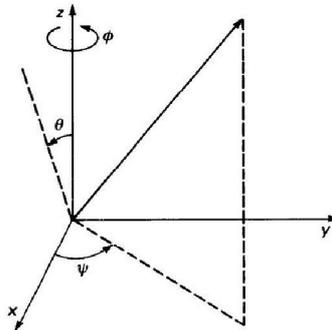


Figure 2.1 : Les angles d'EULER

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta \cos\phi - \sin\psi \sin\phi & -\cos\psi \cos\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\phi & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\psi \cos\theta \cos\phi + \cos\psi \sin\phi & -\sin\psi \cos\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \\ -\sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on peut prendre  $0 \leq \phi < 2\pi$  et aussi  $0 \leq \psi < 2\pi$ , mais pour éviter la duplication on limite  $0 \leq \theta < \pi$ . Même de cette façon, on ne peut éviter entièrement la duplication car pour  $\theta = 0$ , on aura la même matrice pour tout

$$(\phi + \psi) = \text{constante} \tag{3}$$

### Poignet à 3-Rotations

Cette structure est utilisée comme poignet dans plusieurs robots, dans les bras manipulateurs PUMA et STANFORD par exemple. Puisque les trois axes des articulations rotoïdes se rencontrent en un point commun, le mécanisme est donc sphérique. La disposition des articulations ( $J_i$ ) est illustrée sur la figure 2.

Pour simplifier, on prend comme position initiale du poignet la configuration suivante : la première et la troisième articulation seront alignées le long de l'axe z. et la deuxième le long de l'axe y. l'origine  $O$  étant le point d'intersection des axes. Donc la matrice de transformation cinématique sera donnée par :

$$K(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R(\theta_1, k)R(\theta_2, j)R(\theta_3, k) \tag{4}$$

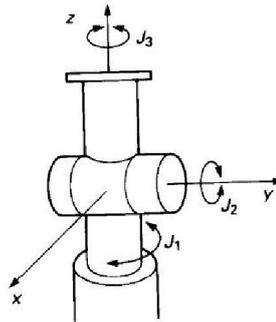


Figure 2.2 : Poignet sphérique (3-R)

Ici on n'utilise que des matrices de rotations 3x3, c'est à dire des angles d'EULER en posant :  $\psi = \theta_1, \theta = \theta_2, \phi = \theta_3$ .

### Mouvement général en 3-D

Le mouvement dans l'espace peut être une translation ou une rotation ou bien une combinaison des deux et le résultat est une transformation quelconque.

La translation peut être représentée par un vecteur  $t(t_x, t_y, t_z)$  et son effet sur un point dont le vecteur position est  $v$ , est simplement d'ajouter le vecteur de translation à ce vecteur.

Dans le cas général la transformation est représentée par une seule matrice  $4 \times 4$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} R(\theta, v) & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

où la rotation peut affecter la translation. Le mouvement est un mouvement hélicoïdal ou "vissage", si le vecteur translation «  $t$  » est parallèle à l'axe instantané de la rotation  $R$ . (screw motion).

#### 2.1.2. Modélisation par les paramètres de Denavit-Hartenberg

Cette méthode est la plus utilisée en robotique pour la définition de l'orientation et de la position des différents éléments d'un système mécanique articulé. Elle est très bien adaptée pour les mécanismes à structures à chaînes

simples où toutes les liaisons sont élémentaires, mais, elle présente des difficultés lorsqu'il s'agit de mécanismes à structures à chaînes complexes. [6][7]

En effet, les corps possédant plusieurs liaisons élémentaires (rotoïdes ou prismatiques) en aval, doivent être dotés d'autant de repères, ce qui entraîne des lourdeurs et souvent des erreurs.

La méthode de paramétrage est fondée sur les règles et conventions suivantes :

- Les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeux mécaniques, pas d'élasticité), soit rotoïdes, soit prismatiques ;
- Le repère  $R_j$  est lié au corps  $C_j$  ;
- La variable de l'articulation  $j$  est notée  $q_j$ .
- Le repère  $R_j$ , fixé au corps  $C_j$ , est défini de sorte que :
  - L'axe  $z_j$  est porté par l'axe de l'articulation  $j$  ;
  - L'axe  $x_j$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $z_j$  et  $z_{j+1}$ .

Si les axes  $z_j$  et  $z_{j+1}$  sont parallèles ou colinéaires, le choix de  $x_j$  n'est pas unique : des considérations de symétrie ou de simplicité permettent alors un choix rationnel.

Le passage du repère  $R_{j-1}$  au repère  $R_j$  s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants :

- $\alpha_j$  : angle entre les axes  $z_{j-1}$  et  $z_j$  correspondant à une rotation autour de  $x_{j-1}$  ;
- $d_j$  : distance entre  $z_{j-1}$  et  $z_j$  le long de  $x_{j-1}$  ;
- $\theta_j$  : angle entre les axes  $x_{j-1}$  et  $x_j$  correspondant à une rotation autour de  $z_j$  ;
- $r_j$  : distance entre  $x_{j-1}$  et  $x_j$  le long de  $z_j$ .

La matrice de transformation définissant le repère  $R_j$  dans  $R_{j-1}$  est donnée par :

$${}^{j-1}T_j = R(x, \alpha_j)t(x, d_j)R(z, \theta_j)t(z, r_j) \quad (6)$$

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.1.3. Groupes de Lie, algèbre de Lie [3][8] [9] [10] [11] [12] [26]

Dans cette section on définit brièvement les groupes de Lie et l'algèbre de Lie qui sont la base de l'approche géométrique utilisée dans ce travail pour décrire les transformations dans l'espace.

#### **Groupes de Lie**

Un groupe de Lie réel est une variété différentiable munie d'une structure de groupe, telle que les applications produit et inverse soient lisses. La dimension de la variété sous-jacente est constante et on l'appelle la dimension du groupe de Lie (Figure 2.3).

Une variété est un espace topologique abstrait, construit par recollement d'autres espaces simples. Parmi les variétés les plus simples figurent les *courbes* et *surfaces* du plan et de l'espace euclidien.

#### **Propriétés :**

- La composition de deux éléments (matrices)  $g_1, g_2 \in G$  est définie et donne un élément composé  $g$  qui appartient aussi à  $G$ .
- L'identité : il existe un élément  $e$  dans  $G$  tel que la composition de  $e$  avec n'importe quel élément  $g$  donne l'élément  $g$  lui-même.
- L'inverse : pour tout élément  $g$  dans  $G$ , il existe l'inverse  $g^{-1}$  tel que :

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e \quad (1)$$

- De la propriété des variétés, deux points quelconques dans  $G$ , peuvent être connectés par une trajectoire lisse. Et en n'importe quel point  $g$ , on peut définir un différentiel  $dg$  qui est tangent à  $G$ .
- Le différentiel à l'élément neutre (l'identité) est particulièrement important et l'espace tangent à l'identité est appelé l'algèbre de Lie pour ce groupe.

- La liaison primaire entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie est le produit des exponentielles. Sur les groupes des matrices, le produit des exponentielles correspond à l'exponentielle d'une matrice, i.e, si  $A$  est un élément de l'algèbre de Lie, alors  $\exp(A)$  est un élément du groupe de Lie.

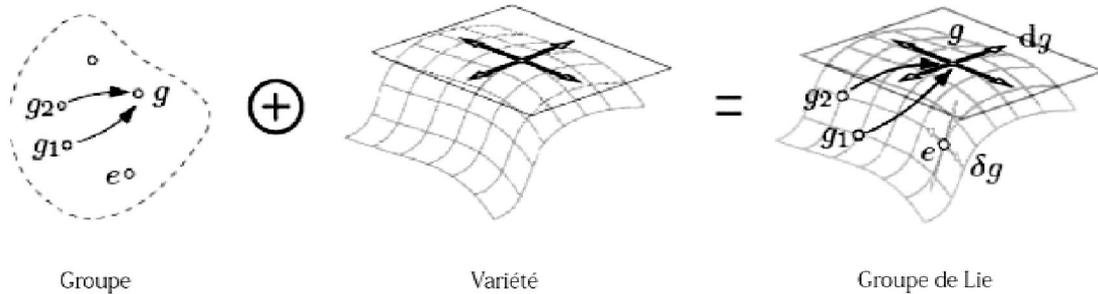


Figure 2.3 : Structures de base d'un groupe de Lie

### Groupe orthogonal

Un groupe orthogonal de degré  $n$  dans  $F$ , noté  $O(n, F)$ , est le groupe des matrices orthogonales  $n \times n$  avec des éléments de  $F$ , mené par l'opération : produit matriciel. C'est un sous-groupe du groupe linéaire général  $GL(n, F)$ . où  $Q^T$  est la transposée de  $Q$ .

$$O(n, F) = \{Q \in GL(n, F) | Q^T Q = Q Q^T = I\} \quad (2)$$

- Les groupes classiques dans les nombres réels sont généralement notés simplement  $O(n)$ .
- Toutes les matrices orthogonales ont comme déterminant 1 ou -1.
- Les matrices orthogonales  $n \times n$  ayant le déterminant +1 forme un sous groupe normal de  $O(n, F)$  appelé un groupe orthogonal spécial  $O(n, F)$ .

Dans notre cas, les groupes  $SO(2)$  et  $SO(3)$  sont les plus importants car ils représentent une rotation autour d'un centre fixe en deux et trois dimensions ; par exemple le groupe  $SO(2)$  se compose des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

### Les groupes spéciaux orthogonaux et Euclidiens, $SO(3)$ et $SE(3)$

Les transformations dans un espace euclidien sont accomplies par l'utilisation des matrices de rotations  $R$  qui sont un élément du groupe spécial orthogonal  $SO(3)$ ,

qui est un groupe de Lie. La représentation la plus familière de cette transformation est la représentation matricielle. Elle est définie par une matrice de dimension  $4 \times 4$  appelée matrice de transformation homogène, telle que :

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- R représente la matrice de rotation, elle est de dimension  $3 \times 3$  et possède les propriétés suivantes :
  - 1) Son déterminant est égal à 1.
  - 2) Son inverse est égal à sa transposée.
  - 3) Ses valeurs propres sont : 1,  $e^{i\theta}$ ,  $e^{-i\theta}$  (complexes conjugués).
- t : représente le vecteur de translation.

Les 9 éléments de la matrice R vérifient 6 contraintes d'orthogonalité qui expriment que les vecteurs lignes (ou colonnes) sont de norme égale à 1 et orthogonaux entre eux. On a ainsi 3 éléments, parmi les 9, qui sont indépendants.

Si un point P est exprimé dans le repère  $R_i$  par le vecteur  $p_i$  et dans le repère  $R_j$  par le vecteur  $p_j$ , on aura la relation suivante :

$$p_i = R p_j + t \quad (4)$$

Si on utilise les coordonnées homogènes, la dernière équation prend la forme :

$$\begin{bmatrix} p_i \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} p_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Cette représentation permet :

- De représenter dans des différents repères les caractéristiques telles que les points, les vecteurs, les droites et les plans.
- De calculer la transformée de ces caractéristiques pour une transformation donnée.

#### 2.1.4. Quaternions [5] [13] [14] [15]

Les quaternions peuvent être considérés comme des couples  $(q_0, \vec{q})$  où  $q_0$  est un élément de  $\mathbb{R}$  et  $\vec{q}$  est un vecteur de dimension 3. L'ensemble des quaternions est alors l'ensemble  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

Les quaternions peuvent être vus également comme des nombres complexes à trois parties imaginaires (des nombres hyper complexes) :

$$q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z \quad (1)$$

avec :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (2)$$

On peut remarquer qu'on obtient également :

$$ij = ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j \quad (3)$$

Grâce à ces formules, on peut facilement calculer le produit de deux quaternions ;

$$r * q = (r_0 + ir_x + jr_y + kr_z)(q_0 + iq_x + jq_y + kq_z) \quad (4)$$

En général, le produit de deux quaternions n'est pas commutatif. Comme le produit vectoriel. Il peut s'écrire sous forme matricielle :

$$r * q = Q(r)q \quad (5)$$

$Q(r)$  est donnée par :

$$Q(r) = \begin{bmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & -r_z & r_y \\ r_y & r_z & r_0 & -r_x \\ r_z & -r_y & r_x & r_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

On peut également écrire le produit sous la forme suivante :

$$r * q = W(r)q \quad (7)$$

$W(r)$  est définie par :

$$W(r) = \begin{bmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & r_z & -r_y \\ r_y & -r_z & r_0 & r_x \\ r_z & r_y & -r_x & r_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matrice  $W(r)$  est obtenue à partir de la matrice  $Q(r)$  en transposant sa sous-matrice :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_0 & -r_z & r_y \\ \cdot & r_z & r_0 & -r_x \\ \cdot & -r_y & r_x & r_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Si le quaternion  $r$  est écrit comme une concaténation d'un réel et d'un vecteur de dimension 3,  $r = (r_0, \vec{r})$ , on peut alors exprimer les matrices  $Q(r)$  et  $W(r)$  par :

$$Q(r) = \begin{bmatrix} r_0 & -\vec{r}^T \\ \vec{r} & r_0 I + K(\vec{r}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$W(r) = \begin{bmatrix} r_0 & -\vec{r}^T \\ \vec{r} & r_0 I - K(\vec{r}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$K(\vec{r})$  est la matrice antisymétrique associée au vecteur  $\vec{r}$  :

$$K(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

On peut facilement vérifier que les matrices  $Q(r)$  et  $W(r)$  possèdent les propriétés suivantes :

$$Q(r)^T Q(r) = Q(r) Q(r)^T = r^T r I \quad (13)$$

$$W(r)^T W(r) = W(r) W(r)^T = r^T r I \quad (14)$$

$$Q(r)q = W(q)r \quad (15)$$

$$Q(r)^T r = W(r)^T r = r^T r e \quad (16)$$

$$Q(r)Q(q) = Q(Q(r)q) \quad (17)$$

$$W(r)W(q) = W(W(r)q) \quad (18)$$

$$Q(r)W(q)^T = W(q)^T Q(r) \quad (19)$$

$r$  et  $q$  sont deux quaternions quelconques,  $e$  est le quaternion unité :  $e = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

On note que si on utilise la représentation vectorielle d'un quaternion alors le produit de deux quaternions  $q = (q_0, \vec{q})$  et  $r = (r_0, \vec{r})$  sera :

$$q * r = [q_0 r_0 - \vec{q} \cdot \vec{r}, q_0 \vec{r} + r_0 \vec{q} + \vec{q} \times \vec{r}] \quad (20)$$

Si  $q$  et  $r$  sont deux quaternions purement imaginaires (vecteurs de dimension 3) on aura les deux égalités suivantes :

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = -\frac{1}{2}(q * r + r * q) \quad (21)$$

$$\vec{q} \times \vec{r} = \frac{1}{2}(q * r - r * q) \quad (22)$$

Le produit scalaire de deux quaternions est donnée par :

$$r \cdot q = r_0 q_0 + r_x q_x + r_y q_y + r_z q_z \quad (23)$$

On a bien évidemment :  $q \cdot q = \|q\|^2$

Le quaternion conjugué de  $q$  est  $\bar{q}$  défini par :

$$\bar{q} = q_0 - i q_x - j q_y - k q_z \quad (24)$$

Notons que si  $Q(q)$  et  $W(q)$  sont les matrices associées à  $q$ , alors  $Q(q)^T$  et  $W(q)^T$  seront les matrices associées au quaternion conjugué  $\bar{q}$ . On a :

$$q * \bar{q} = q \cdot q = \|q\|^2 \quad (25)$$

Et on obtient ainsi le quaternion inverse de  $q$  :

$$q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2} \bar{q} \quad (26)$$

On déduit que l'inverse d'un quaternion unitaire (de norme égale à 1) est égal à son conjugué.

Le résultat le plus intéressant pour ce travail est que chaque quaternion unitaire correspond à une rotation unique. Le quaternion représentant une rotation d'axe  $\vec{n}$  et d'angle  $\theta$  s'écrit donc :

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (i n_x + j n_y + k n_z) \quad (27)$$

## 2.2. Cinématique

### Introduction

En générale la cinématique étudie le mouvement sans prendre en considération la force qui produit ce mouvement, pour comprendre les différents

types de la cinématique, il faut d'abord définir la cinématique directe (CD) et la cinématique inverse (CI):

Comme son nom l'indique la CD est la manipulation directe de la structure par des rotations et/ou des translations jusqu'à ce que l'outil terminal atteigne la position finale désirée.

Pour la CI, la position de l'outil terminal est connue et on veut déterminer les angles aux articulations qui correspondent à cette position. Ce problème est plus difficile car il peut y avoir une, plusieurs, infinité ou bien il n'y a pas de configuration possible.

Malgré sa difficulté, la résolution de la CI est primordiale pour la commande dans l'espace cartésien. Par exemple, on connaît la position de la pièce à souder, il faut donc amener la torche à cette position.

### 2.2.1. Modèle géométrique direct [1]

#### **Définition**

Le modèle géométrique direct (MGD) d'un bras manipulateur exprime la situation de son OT en fonction de sa configuration, autrement dit ses coordonnées opérationnelles en fonction de ses coordonnées généralisées.

$$\begin{aligned} f : N &\longrightarrow M \\ q &\longrightarrow x = f(q) \end{aligned}$$

#### **Calcul**

Le calcul du MGD consiste donc à exprimer la position du point  $O_{n+1}$  et l'orientation du repère  $R_n$  lié à l'OT, en fonction de sa configuration. Il faut pour cela multiplier les matrices de passages homogènes successives reliant le repère  $R_0$  lié au bâti au repère  $R_n$  lié à l'OT :

$$T_{0,n}(q) = T_{0,1}(q_1)T_{1,2}(q_2) \dots T_{n-1,n}(q_n) \quad (1)$$

La matrice :

$$T_{0,n} = \begin{pmatrix} R_{0,n} & p_{0,n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

### 2.2.2. Modèle géométrique inverse : [23]

#### Définition

Le modèle géométrique inverse (MGI) d'un bras manipulateur permet d'obtenir la ou les configurations correspondant à une situation de l'OT donnée donc il consiste à déterminer les coordonnées articulaires des actionneurs permettant d'atteindre une position et une orientation de l'effecteur, données dans l'espace cartésien. Le MGI est donc tel que :

$$\begin{aligned} f^{-1} : M &\longrightarrow N \\ x &\longrightarrow q = f^{-1}(x) \end{aligned}$$

La résolubilité du MGI, c'est-à-dire l'existence d'un nombre fini de solutions est fondamentale en matière de conception. Supposons que la situation  $x$  d'un bras manipulateur à  $n$  liaisons soit exprimée par un nombre  $m$  minimal de paramètres. Supposons par ailleurs que  $x$  soit une situation accessible par le bras manipulateur, c'est-à-dire que la situation appartient à l'*espace de travail*. Alors (dans la majorité des cas) :

- Si  $n < m$ , il n'existe pas de solution au MGI ;
- Si  $n = m$ , il existe un nombre fini de solutions en dehors de certaines configurations, appelées *configurations singulières* ;
- Si  $n > m$ , il existe une infinité de solutions.

On sait que dans le cas où  $n < 6$  les bras manipulateurs (sériel, chaîne ouverte simple) sont tous solubles, c'est-à-dire qu'il existe une solution connue au MGI. C'est aussi le cas de la plupart des structures à six liaisons, notamment celles possédant un poignet sphérique (trois dernières liaisons rotoïdes concourantes). Enfin, seul le calcul du MGI permet de connaître le nombre de solutions.

### 2.3. Dynamique inverse récursive

Le modèle dynamique est la relation entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs et la position, vitesses et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique inverse par une relation de la forme :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \quad (3)$$

Plusieurs formalismes ont été utilisés pour obtenir le modèle dynamique des robots, les formalismes les plus souvent utilisés sont le formalisme de Lagrange et le formalisme de Newton-Euler. Dans ce chapitre, nous présentons ces deux formalismes pour la dynamique inverse des robots à chaîne ouverte simple en admettant que le mouvement (position, vitesse, accélération) de chaque articulation est donné. Pour cela nous introduisons davantage notions et opérateurs concernant l'approche géométrique de la résolution du problème.

### 2.3.1. Définitions

#### a. Vitesses et forces spatiales

La vitesse spatiale d'un corps rigide, écrite dans le repère mobile (un repère lié au corps) peut être représenté par le couple  $(\omega, v)$ . Si  $X(t) = (R(t), b(t))$  est une courbe dans  $SE(3)$  décrivant le mouvement du corps rigide, la vitesse spatiale dans le repère mobile est un élément de  $se(3)$ . C'est-à-dire  $(\omega, v) \in se(3)$ .

Bien que les vitesses spatiales sont représentées par des éléments de  $se(3)$ . Les forces spatiales, qui sont écrites sous forme de couple moment-force, sont considérées comme des éléments de l'espace dual de  $se(3)$ , noté par  $se(3)^*$ . Cette distinction est basée sur le fait que lors d'un changement de coordonnées, les forces (qui se comportent comme des co-vecteurs) ne se transforment pas comme les vitesses (qui se comporte comme des vecteurs tangents). Comme résultat, les forces peuvent être considérées comme des éléments de l'espace dual des vitesses et des vitesses angulaires.

La force spatiale représentée sous la forme hélicoïdale  $g = (\tau, F) \in se(3)^*$ , et aussi appelée « wrench ».

#### b. L'opérateur adjoint : [11]

La représentation adjointe est une transformation de coordonnées sur  $se(3)$  qui nous permet de transformer les vitesses spatiales (état des vitesses) d'un

référentiel a un autre via  $SE(3)$  entre les deux repères. la représentation adjointe, notée par  $Ad$ , est donnée par :

$$Ad_G(h) = GhG^{-1} \quad (1)$$

Où,  $G \in SE(3)$  représente une transformation et  $h \in se(3)$  représente la vitesse spatiale. Par exemple si  $V_2 = (\omega_2, v_2)$  est la vitesses spatiale d'un corps dans le repère  $M_2$  et  $T_{1,2} \in SE(3)$  est la matrice de transformation du  $M_2$  au repère  $M_1$ , alors l'état des vitesses du corps dans le repère  $M_1$ , notée  $V_1 = (\omega_1, v_1)$ , est donnée par  $V_1 = Ad_{T_{1,2}}(V_2)$ .

Notons que dans l'équation (4)  $h$  est écrite sous la forme d'une matrice  $4 \times 4$ , il est possible d'écrire l'adjoint quand  $h$  est un vecteur de dimension 6, cas de l'exemple, d'où :

$$Ad_G(h) = \left( \begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline [b]R & R \end{array} \right) \begin{pmatrix} \omega_h \\ v_h \end{pmatrix} \quad (2)$$

L'opérateur adjoint dual, noté par  $Ad^*$  est une application linéaire dans l'espace dual  $se(3)^*$ .

L'application  $Ad_G^*(h^*) : se(3)^* \rightarrow se(3)^*$ ,  $G \in SE(3)$  est donnée par :

$$Ad_G^*(h^*) = G^{-1}h^*G \quad (3)$$

La forme équivalente quand  $h$  est un vecteur de dimension 6 est :

$$Ad_G^*(h^*) = \left( \begin{array}{c|c} R^T & R^T[b]^T \\ \hline 0 & R^T \end{array} \right) \begin{pmatrix} \omega_{h^*} \\ v_{h^*} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Notons que la matrice utilisée pour  $Ad^*$  est la transposée de celle pour  $Ad$ . Physiquement, La représentation adjointe duale est une transformation de coordonnées sur  $se(3)^*$  qui nous permet de transformer les forces spatiales (état des forces) d'un référentiel a un autre via  $SE(3)$  entre les deux repères.

Par exemple si  $F_2 = (\tau_2, f_2) \in se(3)^*$  est la force spatiale (état des forces) exercée sur un corps rigide dans le repère  $M_2$  et  $T_{1,2}$  représente la matrice de

transformation du repère  $M_2$  au repère  $M_1$ , alors l'état des forces écrite dans le repère  $M_1$ , soit  $F_1 = (\tau_1, f_1)$ , est donnée par  $F_1 = Ad_{T_{1,2}}^*(F_2)$ .

L'algèbre de Lie est aussi une application linéaire et elle est utilisée par un opérateur nommé « les crochets de Lie » noté  $ad$  :

$$ad_g = [g, h] = gh - hg \quad (5)$$

Avec  $g, h \in se(3)^*$  des matrices  $4 \times 4$ , la forme équivalente quand  $g, h$  sont des vecteurs de dimension 6 est :

$$ad_g(h) = \begin{pmatrix} [\omega_g] & 0 \\ [v_g] & [\omega_g] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_h \\ v_h \end{pmatrix} \quad (6)$$

D'une façon similaire :

$$ad_g^*(h^*) = [g, h^*] = gh^* - h^*g \quad (7)$$

Et la forme équivalente :

$$ad_g^*(h^*) = \begin{pmatrix} [\omega_g]^T & [v_g]^T \\ 0 & [\omega_g]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{h^*} \\ v_{h^*} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Physiquement, les opérateurs  $ad_g(h)$  et  $ad_g^*(h^*)$  généralisent le produit vectoriel sur  $se(3)$  et  $se(3)^*$ .

### c. Cinématique en utilisant le produit des exponentiels des matrices

La cinématique des mécanismes en chaîne ouverte peuvent être modélisés comme des séquences de transformations homogènes entre deux articulations consécutives. Soit  $T_{i-1,i} \in SE(3)$  la transformation entre le repère  $i$  et le repère du lien  $i - 1$ , elle peut être écrite comme :

$$T_{i,i+1} = M_i e^{S_i q_i} \quad (9)$$

La transformation totale est la combinaison de toutes les transformations séquentielles :

$$T_{i,j} = T_{i,i+1} T_{i,i+2} \dots T_{j-1,j} \quad (10)$$

Où  $M_i$  est la matrice de passage entre le lien  $i$  et  $i - 1$ .

$S_i \in se(3)$  est le « *joint screw* » écrit dans le repère mobil fixé au lien  $i$  et  $q_i \in se(3)$  est la position du lien  $i$  par rapport a une position zéro choisis.

La représentation des transformations sous forme exponentielle a des avantages sur d'autres représentations comme Denavit-Hartenberg. Dans la première, le mouvement dans les articulations, prismatique, rotoïde et le vissage, est représenté de la même manière. En plus la dérivation de  $e^{S_i q_i}$  par rapport à  $q_i \in se(3)$  est trivial.

### 2.3.2. Méthode récursive de Newton-Euler

Utilisant la forme vectorielle de la vitesse spatiale, l'équation de Newton-Euler peut être écrite sous la forme : [11]

$$F = J\dot{V} - ad_V^*(JV) \quad (1)$$

Où  $ad^*$  est défini dans (10).  $V = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$  vecteur vitesse spatiale, son origine est le point d'application de la charge,  $F = \begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix}$ . Et l'inertie spatiale est :

$$J = \begin{pmatrix} I - m[r]^2 & m[r] \\ -m[r] & m \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dans (14), la charge peut être appliquée à une position arbitraire sur le corps relativement à son centre de masse. La masse du corps est  $m$  et le moment d'inertie par rapport au centre de masse est  $I$ . Le vecteur entre le point d'application de la charge et le centre de masse est  $r$ .

La forme spatiale des équations de Newton-Euler peut être appliquée dans les chaines cinématiques ouvertes en écrivant la résultante des forces applique sur

chaque lien dans le repère approprié. L'algorithme pour résoudre le problème dynamique est donné par la suite, dans cet algorithme on admet que le mouvement (position, vitesse et accélération) pour chaque articulation est donné pour trouver les forces articulaires.

La méthode comporte deux récurrences, une avant de la base à l'organe terminal, et l'autre arrière de l'organe terminal à la base.

### Algorithme de la méthode de Newton-Euler

Initialisation :  $V_0 = 0$  ;  $\dot{V}_0 = g$  ;  $F_{n+1}$  est connue. [11]

1. Récurrence avant (outward recursion) :

pour  $i = 1$  à  $i = n$

$$T_{i-1,i} = M_i e^{S_i q_i}$$

$$V_i = Ad_{T_{i-1,i}^{-1}}(V_{i-1}) + S_i(\dot{q}_i)$$

$$a_i = -ad_{S_i \dot{q}_i} \left( Ad_{T_{i-1,i}^{-1}}(V_{i-1}) \right) \text{ ou bien } a_i = -ad_{S_i \dot{q}_i}(V_i)$$

$$\dot{V}_i = Ad_{T_{i-1,i}^{-1}}(\dot{V}_{i-1}) + S_i \ddot{q}_i + a_i$$

2. Récurrence arrière (inward recursion) :

Pour  $i = n$  à  $i = 1$

$$F_i = Ad_{T_{i,i+1}}^*(F_{i+1}) + J_i \dot{V}_i - ad_{V_i}^*(J_i V_i)$$

$$\tau_i = S_i^T F_i$$

#### 2.3.3. Le formalisme de Lagrange :

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du système, ce qui se traduit, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante pour une configuration  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  choisi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2 \dots n \quad (1)$$

Où  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ , le Lagrangien, est une fonction scalaire ;  $Q$  (souvent noté  $\tau$ ) est le vecteur représentant les forces généralisées exercé sur le système.  $T(q, \dot{q})$  est l'énergie cinétique total du système et  $U(q)$  est l'énergie potentielle totale.

L'énergie cinétique d'un robot est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2)$$

Où  $M_{ij} \in R^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive appelée matrice masse.

De (2) le Lagrangien devient :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q) \quad (3)$$

En le remplaçant dans (1) l'équation de mouvement peut être écrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n M_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + G_k(q) = \tau_k \quad k = 1, 2 \dots n \quad (4)$$

Où  $\tau_k$  et le couple/force appliqué sur la  $k^{\text{ème}}$  articulation et  $\Gamma_{ijk}$  est le symbole de Christoffel de première espèce :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (5)$$

Représentant l'effet de Coriolis et de centrifuge, et  $G_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$ .

L'équation (4) peut être aussi écrite sous forme matricielle plus compacte:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (6)$$

Et  $M(q)$  est la matrice masse:

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk} \end{pmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{pmatrix}$$

Est la matrice de Coriolis/centrifuge,  $G(q)$  pour les termes dus à la gravité, et  $\tau$  représente les couples (forces) appliqués.

L'équation du mouvement peut être générée en appliquant la deuxième loi de Newton et l'équation d'Euler sur chaque lien:

$$\sum F = ma_c \quad (7)$$

$$\sum M = I_p \dot{\omega} + \omega \times I_p \omega + r \times ma_p \quad (8)$$

Où  $\sum F$  est la somme des forces extérieures agissant sur le lien,  $m$  est la masse du lien,  $a_c$  l'accélération du centre de masse;  $\sum M$  la somme des moments extérieures autour d'un point quelconque  $p$  appartenant au lien.  $\omega$  vecteur des vitesses angulaires,  $r$  vecteur position du point  $p$  par rapport au centre de masse,  $a_p$  accélération du point  $p$ .

Toutes les quantités dans (7) et (8) sont exprimées par rapport à un repère lié au centre de masse de chaque lien.

La méthode de Lagrange est considéré plus utile lorsqu'il s'agit du calcul symbolique explicite et la méthode de Newton Euler pour le calcul numérique mais cette distinction n'est pas toujours vraie car on peut avoir les caractéristiques obtenues par le formalisme de Lagrange en utilisant le formalisme de Newton Euler, et vice vers ça.

### 3. APPLICATIONS

#### 3.1. Problème géométrique direct

Dans cette partie on s'intéressera à l'étude cinématique d'un robot manipulateur à six degrés de liberté. On considère un manipulateur similaire à l'UNIMATE PUMA. Plusieurs robots industriels sont basés sur le modèle du PUMA : les dimensions ou la commande peuvent différer mais la disposition des articulations reste toujours la même.

##### 3.1.1. Présentation générale du manipulateur

Notre manipulateur à six degrés de liberté, figure 3.1 est un robot PUMA. Ce choix est délibérément fait car les robots de la gamme PUMA sont répandus dans les universités et utilisés dans l'industrie.

Chaque degré de liberté est dû à une articulation rotoïde à laquelle on associe un repère. Le repère de base (absolu)  $R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$  coïncide avec le repère  $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ .

$J_1 // (O_0 z_0) = (O_1 z_1)$  : axe de la première articulation (premier degré de liberté),

$J_2 // (O_2 x_2)$  : axe de la deuxième articulation,

$J_3 // (O_3 x_3)$  : axe de la troisième articulation,

$J_4 // (O_4 z_4)$  : axe de la quatrième articulation,

$J_5 // (O_5 x_5)$  : axe de la cinquième articulation,

$J_6 // (O_6 z_6)$  : axe de la sixième et dernière articulation.

$O_4$ ,  $O_5$  et  $O_6$  représentent le même point qui est le centre du poignet du manipulateur.

$D_5$  : Entraxe entre  $z_1$  et  $z_2$  ;

$L_2$  : Entraxe entre  $x_2$  et  $x_3$  ;

$D_4$  : Entraxe entre  $x_3$  et  $x_4$  ;

$d_3$  : Entraxe entre  $z_2$  et  $z_3$ .

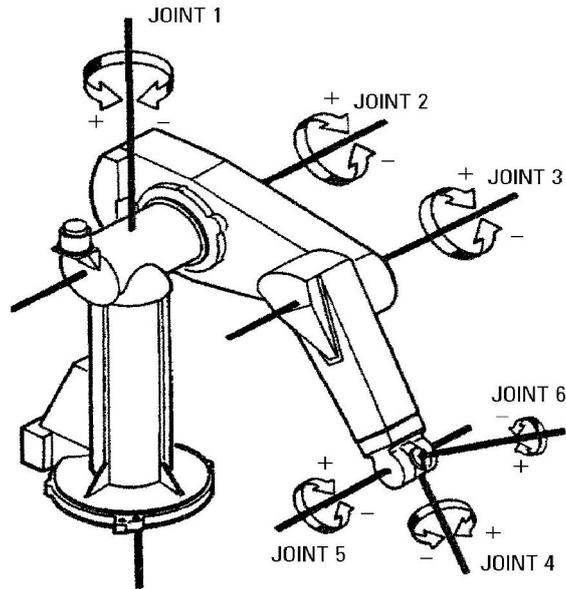


Figure 3.1 : Robot PUMA

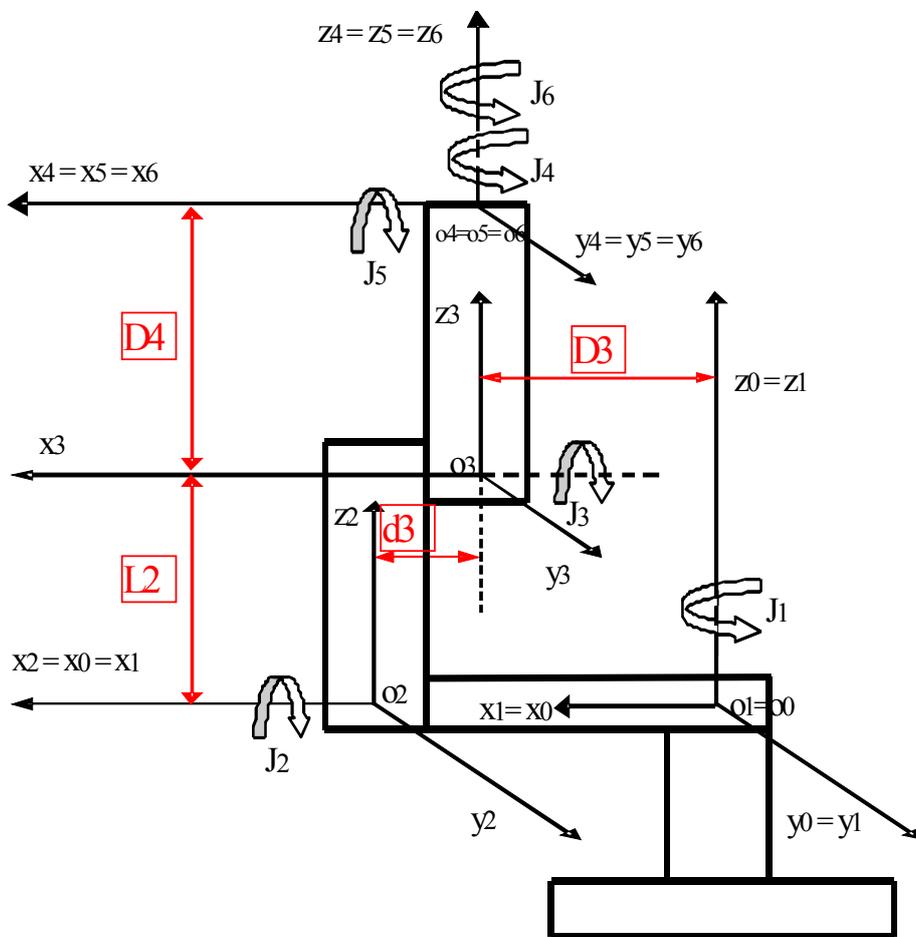


Figure 3.2 : Manipulateur PUMA 6 degrés de liberté

On commence par choisir une position initiale du robot correspondant à  $\theta_j = 0$  (figure 3.2), soit le repère fixe ou absolu  $R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$  coïncidant avec le repères  $R_1(O_1)$  mobile et les repères mobiles  $R_2(O_2)$ ,  $R_3(O_3)$ ,  $R_4(O_4)$ ,  $R_5(O_5)$  et  $R_6(O_6)$  respectivement liés aux articulations des six composants de notre bras manipulateur. On doit trouver les matrices  $A_j$  qui correspondent aux rotations  $\theta_j$  autour des axes des articulations  $j$ , et ensuite faire le produit de ces rotations pour trouver la matrice  $K$  de la transformation rigide de l'organe terminal dans le repère de base en utilisant successivement les trois méthodes citées.

### 3.1.2. Méthode des angles d'EULER

Si la direction de l'axe de rotation est  $\vec{v}$  et  $t$  le vecteur position d'un repère dans  $R_0$ , en utilisant la conjugaison  $TMT^{-1}$  la rotation autour de cet axe est donnée par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} R(\theta, v) & (I - R)t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les axes des articulations et ses emplacements dans la position initiale sont donnés par le tableau 3.1 suivant (voir paramètres de Denavit-Hartenberg), seule la composante non nulle du vecteur  $t$  est mentionnée :

Articulation	$\vec{v}$	t
$J_1$	$k$	0
$J_2$	$i$	0
$J_3$	$i$	$L_2 k$
$J_4$	$k$	$D_3 i$
$J_5$	$i$	$(L_2 + D_4) k$
$J_6$	$k$	$D_3 i$

Tableau 3.1 Paramètres géométriques du manipulateur

En effectuant ces rotations on obtiendra les matrices  $A_j$ . Les deux premières sont simples du fait qu'elles sont dans le repère de base :

$$A1 := \begin{bmatrix} \cos(\theta1) & -\sin(\theta1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta1) & \cos(\theta1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta2) & -\sin(\theta2) & 0 \\ 0 & \sin(\theta2) & \cos(\theta2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour  $A_3$  on doit connaître le terme  $(I - R)t$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta3) & -\sin(\theta3) \\ 0 & \sin(\theta3) & \cos(\theta3) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L2 \sin(\theta3) \\ L2(1 - \cos(\theta3)) \end{pmatrix}$$

D'où, on a:

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta3) & -\sin(\theta3) & L2 \sin(\theta3) \\ 0 & \sin(\theta3) & \cos(\theta3) & L2(1 - \cos(\theta3)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

De même, on a :

$$A4 := \begin{bmatrix} \cos(\theta4) & -\sin(\theta4) & 0 & (1 - \cos(\theta4)) D3 \\ \sin(\theta4) & \cos(\theta4) & 0 & -\sin(\theta4) D3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta5) & -\sin(\theta5) & (L2 + D4) \sin(\theta5) \\ 0 & \sin(\theta5) & \cos(\theta5) & (L2 + D4) (1 - \cos(\theta5)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalement, on aboutit à :

$$A6 := \begin{bmatrix} \cos(\theta6) & -\sin(\theta6) & 0 & (1 - \cos(\theta6)) D3 \\ \sin(\theta6) & \cos(\theta6) & 0 & -\sin(\theta6) D3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice cinématique  $K$  de la transformation est donnée par :

$$K(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = A_1(\theta_1)A_2(\theta_2)A_3(\theta_3)A_4(\theta_4)A_5(\theta_5)A_6(\theta_6);$$

Où la première transformation est représentée par  $A_6(\theta_6)$  et la multiplication se fait en commençant par le produit le plus à droite. C'est-à-dire on fait tourner la dernière articulation en premier et garder les autres fixes, puis l'avant dernière et ainsi de suite jusqu'à la première articulation.

Le produit de ces six matrices donne une matrice  $K(l, j)$  qu'on appellera **Ke** et qui est très compliquée et dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} Ke(1, 1) &= (C1 C4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) S4) C6 + ((-C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) C5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) S5) S6 \\ Ke(1, 2) &= -(C1 C4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) S4) S6 + ((-C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) C5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) S5) C6 \\ Ke(1, 3) &= -(C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) S5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) C5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ke(1, 4) &= (C1 C4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) S4) (1 - C6) D3 \\ &- ((-C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) C5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) S5) S6 D3 \\ &+ (-C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) (L2 + D4) S5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) (L2 + D4) (1 - C5) + C1 (1 - C4) D3 \\ &- (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) S4 D3 - S1 C2 L2 S3 + S1 S2 L2 (1 - C3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ke(2, 1) &= (S1 C4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) S4) C6 + ((-S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) C5 + (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) S5) S6 \\ Ke(2, 2) &= -(S1 C4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) S4) S6 + ((-S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) C5 + (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) S5) C6 \\ Ke(2, 3) &= -(S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) S5 + (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) C5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ke(2, 4) &= (S1 C4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) S4) (1 - C6) D3 \\ &- ((-S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) C5 + (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) S5) S6 D3 \\ &+ (-S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) (L2 + D4) S5 + (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) (L2 + D4) (1 - C5) + S1 (1 - C4) D3 \\ &- (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) S4 D3 + C1 C2 L2 S3 - C1 S2 L2 (1 - C3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ke(3, 1) &= (C2 S3 + S2 C3) S4 C6 + ((C2 S3 + S2 C3) C4 C5 + (C2 C3 - S2 S3) S5) S6 \\ Ke(3, 2) &= -(C2 S3 + S2 C3) S4 S6 + ((C2 S3 + S2 C3) C4 C5 + (C2 C3 - S2 S3) S5) C6 \\ Ke(3, 3) &= -(C2 S3 + S2 C3) C4 S5 + (C2 C3 - S2 S3) C5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ke(3, 4) &= (C2 S3 + S2 C3) S4 (1 - C6) D3 - ((C2 S3 + S2 C3) C4 C5 + (C2 C3 - S2 S3) S5) S6 D3 \\ &+ (C2 S3 + S2 C3) C4 (L2 + D4) S5 + (C2 C3 - S2 S3) (L2 + D4) (1 - C5) - (C2 S3 + S2 C3) S4 D3 + S2 L2 S3 + C2 L2 (1 - C3) \end{aligned}$$

$$Ke(4, 1) = 0$$

$$Ke(4, 2) = 0$$

$$Ke(4, 3) = 0$$

$$Ke(4, 4) = 1$$

Pour simplifier l'écriture, on note:  $Ci = \cos(\theta_i)$  et  $Si = \sin(\theta_i)$ .

Dans la pratique ces produits sont faits par le calculateur du système de commande ou à l'aide d'un logiciel comme MAPLE ou MATLAB.

### Exemple d'application :

Soit un point  $p$  rigidement lié à l'outil terminal du manipulateur et en choisissant la même position initiale, ce point aura les coordonnées  $(0, 0, L_2 + D_4)$ .

Quelle est sa position si les angles de rotation sont :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_3 = 0, \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_5 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_6 = \frac{\pi}{2}$$

La nouvelle position est donnée par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} &= K \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (L_2 - D_3 + D_4) \\ 0 & 0 & -1 & (L_2 + D_3 + D_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_2 + D_4) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_2 - D_3 + D_4) \\ D_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.1.3. Méthode des Groupes de Lie

Afin de pouvoir écrire les matrices de transformations, on associe à chaque articulation un repère  $R_j$  ( $j = 1..6$ ) et on notera par  $\theta_j$  les rotations relatives entre les différents constituants du manipulateur, figure 3.2.

Cette méthode consiste à écrire le vecteur translation  $t_j$  d'une articulation  $j$ , dans le repère  $R_{j-1}$ , la transformation est donc une rotation pure autour d'un axe suivie par une translation qui aura les coordonnées du repère  $R_j$  dans  $R_{j-1}$ , donc  $A_j$  est la transformation dans le repère  $R_j$ .

$R_j / R_{j-1}$	$\vec{v}$	$\vec{t}$
$R_{10}$	$\vec{k}_1$	$(0,0,0)$
$R_{21}$	$\vec{i}_2$	$(D_3 + d_3, 0, 0)$
$R_{32}$	$\vec{i}_3$	$(-d_3, 0, L_2)$
$R_{43}$	$\vec{k}_4$	$(0,0, D_4)$
$R_{54}$	$\vec{i}_5$	$(0,0,0)$
$R_{65}$	$\vec{k}_6$	$(0,0,0)$

Tableau 3.2 : Paramètres géométriques du manipulateur en utilisant les groupes de Lie

$\vec{t}$  : Vecteur position du repère  $R_j$  dans  $R_{j-1}$

$\vec{v}$  : Vecteur unitaire autour duquel se fait la rotation.

Les matrices de rotations s'écrivent comme suit :

$$A1 := \begin{bmatrix} \cos(\theta 1) & -\sin(\theta 1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta 1) & \cos(\theta 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & D3 + d3 \\ 0 & \cos(\theta 2) & -\sin(\theta 2) & 0 \\ 0 & \sin(\theta 2) & \cos(\theta 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d3 \\ 0 & \cos(\theta 3) & -\sin(\theta 3) & 0 \\ 0 & \sin(\theta 3) & \cos(\theta 3) & L2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A4 := \begin{bmatrix} \cos(\theta 4) & -\sin(\theta 4) & 0 & 0 \\ \sin(\theta 4) & \cos(\theta 4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta 5) & -\sin(\theta 5) & 0 \\ 0 & \sin(\theta 5) & \cos(\theta 5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A6 := \begin{bmatrix} \cos(\theta 6) & -\sin(\theta 6) & 0 & 0 \\ \sin(\theta 6) & \cos(\theta 6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformation résultante sera le produit de ces six matrices

Les éléments de la matrice  $K_L(i, j)$  sont :

$$KL(1, 1) = (C1 C4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) S4) C6 + ((-C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) C5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) S5) S6$$

$$KL(1, 2) = -(C1 C4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) S4) S6 + ((-C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) C5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) S5) C6$$

$$\begin{aligned}
KL(1, 3) &= -(-C1 S4 + (-S1 C2 C3 + S1 S2 S3) C4) S5 + (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) C5 \\
KL(1, 4) &= (S1 C2 S3 + S1 S2 C3) D4 - C1 d3 + S1 S2 L2 + C1 (D3 + d3) \\
KL(2, 1) &= (S1 C4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) S4) C6 + ((-S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) C5 \\
&+ (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) S5) S6 \\
KL(2, 2) &= -(S1 C4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) S4) S6 + ((-S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) C5 \\
&+ (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) S5) C6 \\
KL(2, 3) &= -(-S1 S4 + (C1 C2 C3 - C1 S2 S3) C4) S5 + (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) C5 \\
KL(2, 4) &= (-C1 C2 S3 - C1 S2 C3) D4 - S1 d3 - C1 S2 L2 + S1 (D3 + d3) \\
KL(3, 1) &= (S2 C3 + C2 S3) S4 C6 + ((S2 C3 + C2 S3) C4 C5 + (-S2 S3 + C2 C3) S5) S6 \\
KL(3, 2) &= -(S2 C3 + C2 S3) S4 S6 + ((S2 C3 + C2 S3) C4 C5 + (-S2 S3 + C2 C3) S5) C6 \\
KL(3, 3) &= -(S2 C3 + C2 S3) C4 S5 + (-S2 S3 + C2 C3) C5 \\
KL(3, 4) &= (-S2 S3 + C2 C3) D4 + C2 L2 \\
KL(4, 1) &= 0 \\
KL(4, 2) &= 0 \\
KL(4, 3) &= 0 \\
KL(4, 4) &= 1
\end{aligned}$$

### Exemple d'application:

Pour cet exemple, on prendra le même point de coordonnées  $p(0,0, L_2 + D_4)$  dans  $R_1$  et qui aura les coordonnées  $(-D_3, 0, 0)$  dans le repère final  $R_6$  et ceci pour les mêmes angles que 3.2.1.

$$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (L_2 + D_4) \\ 0 & 0 & -1 & D_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_2 - D_3 + D_4) \\ D_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### 3.1.4. Méthode des Quaternions [26]

Soit le vecteur V de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère  $R_6(O_6)$ , représentant la position d'un outil quelconque rigidement lié au poignet du manipulateur . Sa position finale ou nouvelle position dans le repère de base  $R_0(O_0)$ , après les six manipulations, est tout simplement donnée par l'équation quaternionnienne et en une seule ligne

$$V' = q_1 * q_2 * q_3 * q_4 * q_5 * q_6 * V * q_6^{-1} * q_5^{-1} * q_4^{-1} * q_3^{-1} * q_2^{-1} * q_1^{-1}$$

Il faudra bien sûr commencer par l'opération au cœur de cette équation à savoir l'opération :  $q_6 \cdot V \cdot q_6^{-1}$  et en plus commencer par le produit le plus à droite c'est-à-dire le produit  $V \cdot q_6^{-1}$  et ainsi de suite.

### Exemple

Procédons par étapes et confirmons les résultats trouvés grâce à la première méthode  $K_e$  et la deuxième méthode  $K_l$ .

Pour bien expliciter la méthode et guider le lecteur dans cette manipulation des quaternions.

On se contente de l'exemple de l'application numérique 3.2.1. c'est-à-dire on retrouve la position du point  $p$  après qu'on a effectué des rotations d'amplitude  $\theta_i$  (voir 3.2.1).

$V = [0, (V)]$  est le vecteur (écrit dans le repère précédant) qui doit subir une rotation  $R(v)$

$$V'_e = R(v) = q \cdot V \cdot q^{-1}$$

$q$  est le Quaternion unité correspondant à la rotation d'amplitude  $(\theta)$  autour de l'axe  $n(n_x, n_y, n_z)$  et qui s'écrit de la forme :

$$q = [\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} (n_x i, n_y j, n_z k)]$$

Notons que les trois dernières rotations s'effectuent toutes autour du centre du poignet  $O_4$ .

- Pour  $(\theta_6) = \pi/2$  ;

$$q = [\cos(\pi/4), (0, 0, \sin(\pi/4))] \text{ et } V = [0, (-D_3, 0, 0)]$$

$$V' = q \cdot V \cdot q^{-1} = [\cos(\pi/4), (0, 0, \sin(\pi/4))] * [0, (-D_3, 0, 0)] * [\cos(\pi/4), (0, 0, -\sin(\pi/4))]$$

$$V' = [0, (0, -D_3, 0)]$$

- Pour  $(\theta_5) = \pi/2$  ;

$$q = [\cos(\pi/4), (\sin(\pi/4), 0, 0)] \text{ et } V = [0, (0, -D_3, 0)]$$

Qui est le vecteur résultant de la transformation précédente.

$$V' = q \cdot V \cdot q^{-1} = [\cos(\pi/4), (\sin(\pi/4), 0, 0)] * [0, (0, -D_3, 0)] * [\cos(\pi/4), (-\sin(\pi/4), 0, 0)]$$

La nouvelle transformée est  $V' = [0, (0, 0, -D_3)]$

- Pour  $(\theta_4) = -\pi/2$  ; Même technique ;  $V' = q \cdot V \cdot q^{-1}$

$$q = [\cos(\pi/4), (0, 0, -\sin(\pi/4))] \text{ et } V = [0, (0, 0, -D_3)]$$

$$V' = q \cdot V \cdot q^{-1} = [\cos(\pi/4), (0, 0, -\sin(\pi/4))] * [0, (0, 0, -D_3)] * [\cos(\pi/4), (0, 0, \sin(\pi/4))]$$

$$V' = [0, (0, 0, -D_3)]$$

- Pour la troisième rotation  $(\theta_3) = 0$  qui doit se faire autour de l'axe  $x_3$  le vecteur à transformer est (voir figure 3.2)

$$V = [0, (0, 0, (D_4 - D_3))]$$

$$V' = q \cdot V \cdot q^{-1} = [\cos(0), (0, 0, \sin(0))] * [0, (0, (D_4 - D_3))] * [\cos(0), (0, 0, -\sin(0))]$$

$$V' = [0, (0, 0, (D_4 - D_3))]$$

- Pour  $(\theta_2) = \pi/2$ , autour de l'axe  $x_2$ , le vecteur qui subit la rotation est le vecteur :

$$V = [0, (-d_3, 0, (L_2 + D_4 - D_3))]$$

Donc :

$$V' = [\cos(\pi/4), (\sin(\pi/4), 0, 0)] * [0, (-d_3, 0, (L_2 + D_4 - D_3))] * [\cos(\pi/4), (-\sin(\pi/4), 0, 0)]$$

$$V' = [0, (-d_3, -(L_2 + D_4 - D_3), 0)]$$

Finalement pour la dernière transformation d'amplitude  $(\theta_1) = \pi/2$  autour de l'axe fixe  $Oz_1$  ; le vecteur à transformer sera le vecteur :

$$V = [0, (D_3 + d_3 - d_3, -(L_2 + D_4 - D_3), 0)]$$

Et le dernier quaternion est  $q = [\cos(\pi/4), (0, 0, -\sin(\pi/4))]$  alors ;

$$V' = [\cos(\pi/4), (0, 0, \sin(\pi/4))] * [0, (D_3, -(L_2 + D_4 - D_3), 0)] * [\cos(\pi/4), (0, 0, -\sin(\pi/4))]$$

Le résultat  $V' = [0, (L_2 + D_4 - D_3), D_3, 0)]$  est un quaternion qui représente le vecteur  $V'^T = (L_2 + D_4 - D_3, D_3, 0)$  et c'est le vecteur transformée du vecteur

$V^T = (-D_3, 0, 0)$  par les six transformations successives :  $R(\theta_6)$ ,  $R(\theta_5)$ ,  $R(\theta_4)$ ,  $R(\theta_3)$ ,  $R(\theta_2)$  et  $R(\theta_1)$ .

### 3.1.5. Analyse et Discussions des résultats

Un outil quelconque MO (Objet manipulé) maintenu par le robot PUMA (voir figures 4 et 5) dont les coordonnées de l'extrémité sont  $(x, y, z)$  dans le repère  $R_6$ , donc dans  $R_1$   $(x + D_3, y, L_2 + D_4 + z)$  aura pour transformée :

$$C = [K_I]. (x, y, z, 1)^T$$

Par la méthode de Lie est :

$$D = [K_e]. (x + D_3, y, L_2 + D_4 + z, 1)^T$$

Par la méthode d'Euler est au lecteur de vérifier que quelque soient les amplitudes  $(\theta_i)$  choisies et le degré de complexité des deux matrices on aura :

$$[K_I]. (x, y, z)^T = [K_e]. (x + D_3, y, L_2 + D_4 + z)^T \quad \text{où} \quad C - D = (0, 0, 0, 0)^T$$

Indépendamment de la méthode choisie, les résultats trouvés concordent :

En utilisant la méthode **Ke**, **KI** ou **Kq** ; un point **P** de coordonnées cartésiennes  $(-D_3, 0, 0)$  dans le repère  $R_6$  et après les six transformations aura les coordonnées  $[(-D_3 + L_2 + D_4), D_3, 0]$  dans le même repère de base  $R_0$

En utilisant la méthode **Ke**, ce même point **P** aura les coordonnées  $[(0, 0, (L_2 + D_4))]$  dans le repère  $R_0$  et après transformations aura les coordonnées  $[(L_2 + D_4 - D_3), (D_3), 0]$  dans ce même repère.

C'est donc le même résultat identique qui est exprimé dans le repère absolu  $R_0$ .

Plusieurs remarques et observations importantes s'imposent :

1) Pour les méthodes **KI** ou **Kq** les paramètres de Denavit-Hartenberg ne sont plus utilisés. Donc, on n'a plus besoin de dresser un tableau pour la description de l'architecture du robot manipulateur.

2) La méthode «  $TMT^{-1}$  » de conjugaison n'est donc plus sollicitée.

3) La partie rotation des matrices **Ke** et **KI** est tout simplement :

$$R(\theta) = R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) \cdot R(\theta_3) \cdot R(\theta_4) \cdot R(\theta_5) \cdot R(\theta_6).$$

Dans le cas général il suffira de déterminer sa trace, ses vecteurs et ses valeurs propres pour connaître l'axe de rotation résultant et l'amplitude résultante.

Concernant notre application,  $R(\theta)$  est équivalente à une rotation d'amplitude  $\pi/2$  autour de l'axe fixe  $Ox$ .

4) La dernière colonne de la matrice **KI** (voir 3.1.3)

$$KI(1,4)i + KI(2,4)j + KI(3,4)k \text{ représente la translation résultante}$$

5) Pour l'exemple étudié, le mouvement de l'outil rigidement lié au poignet du manipulateur est la composition d'une rotation d'amplitude  $\pi/2$  autour de l'axe  $Ox$  suivie d'une translation  $\mathbf{t}^t = ((L2 + D4), D3, 0)$

6) Connaissant les amplitudes  $(\theta_j)$  ces deux calculs peuvent être rapidement accomplis séparément à l'aide d'un logiciel comme MAPLE ou MATLAB.

7) Malgré la complication de la matrice **KI**, cela sous-entend, pour ce genre de robots manipulateurs, que la matrice **KI** aurait pu et du être écrite et pourrait et devrait être facilement construite directement, par simple observation du manipulateur dans une position de base judicieusement choisie, si les amplitudes  $(\theta_j)$  sont bien sûr connues.

8) La méthode **KI** est donc beaucoup plus, géométriquement intuitive, directe et rapide que la méthode **Ke**.

9) Ces résultats peuvent se généraliser à la cinématique inverse et à l'étude dynamique des manipulateurs grâce au produit des exponentielles et aux concepts de " Twist et Wrench ".

10) Pour la troisième méthode, celle des quaternions, et surtout si les articulations sont rotoïdes, on remarque que les calculs sont beaucoup plus directs et plus rapides que par les méthodes matricielles classiques. On n'a plus besoin d'écrire des matrices 4x4, une seule ligne suffit ; bien que MAPLE dans ses conversions quaternion-matrices et l'inverse, utilise le calcul matriciel mais

implicitement. Pour l'application on a préféré le faire manuellement pour initier le lecteur et le guider dans le calcul quaternionien.

Si le manipulateur comporte des translations, il faudra faire appel aux quaternions duaux.

Angles d'Euler	Groupes et algèbre de Lie	Quaternions
<p>Ecrire la transformation dans chaque articulation dans le repère de base <math>R_0</math>, donc On a besoin de connaître les paramètres géométriques (D-H) du robot, et pour chaque articulation on utilise la conjugaison (<math>TMT^{-1}</math>) qui augmente le volume et le temps de calcul.</p>	<p>On associe à chaque articulation <math>J_i</math> un repère <math>R_i</math> et la transformation dans cette articulation est :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La rotation dans ce repère ;</li> <li>• Une translation qui est le vecteur position de <math>R_i</math> dans <math>R_{i-1}</math></li> </ul> <p>D'où des matrices <math>4 \times 4</math> assez simples.</p>	<p>Utilise le même principe que G/A de Lie or l'écriture hypercomplexe des quaternions nous mène à manipuler des vecteurs au lieu des matrices ce qui est plus simple. Cette technique est surtout pour les rotations</p>

Tableau 3.3 : Tableau comparatif entre les trois méthodes.

### 3.1.6. Conclusions

Pour conclure, chacune des trois principales méthodes étudiées, aussi bien que les autres méthodes occultées dans ce travail, possède des avantages et des inconvénients.

Il ressort de notre étude cinématique comparative, concernant les robots manipulateurs à articulations rotoïdes, que l'utilisation des quaternions, **Kq**, est la méthode la plus appropriée, évidente et rapide. Ne souffrant pas de singularités; elle pourra être généralisée à l'étude dynamique des manipulateurs [16] [17], à l'animation des manipulateurs, pour la génération de trajectoires quelconques (Interpolation, dérivation, évitement d'obstacles...).

Dans le cas d'articulations prismatiques il se fera appel à la théorie des quaternions duaux.

A défaut, la méthode **Kl**, dans ce cas de figure, est beaucoup plus rapide, intuitive et directe que la méthode **Ke**.

### 3.2. Application Dynamique

#### manipulateur plan a 2 ddl [11]

Soient  $\theta_1, \theta_2$  les angles de rotation du lien 1 et 2 respectivement (figure 3.3)

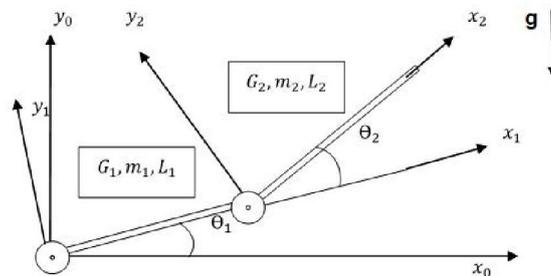


Figure 3.3 : Mécanisme plan à deux degrés de libertés

#### 3.2.1. Méthode de Newton-Euler récursive

Matrice de transformation

$$S = (\omega_S, v_S)$$

$$e^{S_i q_i} = \exp\left(\begin{bmatrix} [\omega_S] & v_S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q\right)$$

$$e^{S_i q_i} = \begin{pmatrix} \exp([\omega_S]q) & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où

$$\exp([\omega_S]q) = I + \sin(q) [\omega_S] + (1 - \cos(q)) [\omega_S]^2$$

Et

$$b = qI + (1 - \cos(q)) [\omega_S] + (q - \sin(q)) [\omega_S]^2 v_S$$

Dans ce cas le mécanisme est plan et les articulations sont rotoïdes ( $v_S = (0,0,0)$ ) et elles tournent autour de l'axe Z ( $\omega_S = (0,0,1)$ )

Donc  $S_i = (0,0,1,0,0,0)$ .

**Lien 1 :**

$S_1 = (0,0,1,0,0,0)$  Donc sa forme antisymétrique est  $[S_1] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$T_{0,1} = M_1 e^{S_1 \theta_1}$$

$M_i$  est écrite dans le repère  $(i - 1)$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lien 2 :**

$S_2 = (0,0,1,0,0,0)$  ; Donc sa forme antisymétrique est  $[S_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$T_{1,2} = M_2 e^{S_2 L_1}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & L_1 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Connaissant les angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  on peut avoir la position de l'outil terminal en remplaçant leurs valeurs dans la matrice de transformation totale :  $T_{0,2} = T_{0,1} T_{1,2}$ .

**a. Récurrence avant (outward recursion) :**

L'utilité de cette récurrence est le calcul successif des vitesses et des accélérations des corps puis leur torseur dynamique [6]

- Calcul des vitesses

La matrice adjointe s'écrit :

$$Ad_g = \begin{pmatrix} R & | & 0 \\ [b]R & | & R \end{pmatrix}$$



**Lien 1 : (i = 1 )**

$$V_1 = Ad_{T_{0,1}^{-1}}(V_0) + S_1(\dot{\theta}_1)$$

D'où :  $V_1 = (0,0, \omega_1, 0,0,0)$

**Lien 2 : (i = 2 )**

$$V_2 = Ad_{T_{1,2}^{-1}}(V_1) + S_2(\dot{\theta}_2)$$

$$V_2 = (0,0, \omega_1 + \omega_2, L_1 s_2 \omega_1, L_1 c_2 \omega_1, 0)$$

- Calcul des accélérations :

Matrice adjointe  $ad$  :

Soit  $h \in se(3)$  avec  $h(\omega_h, v_h)$

$$ad_h = \begin{pmatrix} [\omega_h] & 0 \\ [v_h] & [\omega_h] \end{pmatrix}$$

**Lien 1 : (i = 1 )**

$$a_1 = -ad_{S_1 \dot{\theta}_1} \left( Ad_{T_{0,1}^{-1}}(V_0) \right)$$

Et  $V_0 = 0$

D'où :  $a_1 = (0,0,0,0,0,0)$

$$\dot{V}_1 = Ad_{T_{0,1}^{-1}}(\dot{V}_0) + S_1 \ddot{\theta}_1 + a_1$$

Avec  $\dot{V}_0 = (0,0,0,0, g, 0)$  , d'où  $\dot{V}_1 = (0,0, \varepsilon_1, g s_1, g c_1, 0)$

**Lien 2 : (i = 2 )**

$$ad_{S_2 \dot{\theta}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 & & & \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ & 0 & & \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = -ad_{S_2 \dot{\theta}_2}(V_2)$$

$$a_2 = (0,0,0, L_1 c_2 \omega_1 \omega_2, -L_1 s_2 \omega_1 \omega_2, 0)$$

$$\dot{V}_2 = Ad_{T_{1,2}^{-1}}(\dot{V}_1) + S_2 \ddot{\theta}_2 + a_2$$

$$\dot{V}_2 = (0, 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, L_1 s_2 \varepsilon_1 + g s_{12} + L_1 c_2 \omega_1 \omega_2, L_1 c_2 \varepsilon_1 + g c_{12} - L_1 s_2 \omega_1 \omega_2, 0)$$

**b. Récurrence arrière (inward recursion) :**

$$J = \begin{pmatrix} I - m[r]^2 & m[r] \\ -m[r] & m \end{pmatrix}$$

$J$  : Inertie spatiale

$I$  : Moment d'inertie autour du centre de masse du corps  $i$ .

$r$  : Distance entre le repère local et le centre de masse

Avec  $Ad_{T_{i,i+1}^{-1}}^* = (Ad_{T_{i,i+1}^{-1}})^T$  et  $ad_{V_i}^* = (ad_{V_i})^T$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 a_1^2 & 0 & 0 & 0 & -m_1 a_1 \\ 0 & 0 & I_{zz1} + m_1 a_1^2 & 0 & m_1 a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 a_1 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & -m_1 a_1 & 0 & 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 a_2^2 & 0 & 0 & 0 & -m_2 a_2 \\ 0 & 0 & I_{zz2} + m_2 a_2^2 & 0 & m_2 a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 a_2 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & -m_2 a_2 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

**Lien 2 : ( $i = 2$ )**

$$F_2 = Ad_{T_{2,3}^{-1}}^*(F_3) + J_2 \dot{V}_2 - ad_{V_2}^*(J_2 V_2)$$

Comme il n'y a pas de force extérieure appliquée sur l'outil terminal ;  $F_3 = 0$ .

$h \in se(3)$  avec  $h(\omega_h, v_h)$

$$ad_h^* = \begin{pmatrix} [\omega_h]^T & [v_h]^T \\ 0 & [\omega_h]^T \end{pmatrix}$$

$$ad_{V_2}^* = \begin{pmatrix} 0 & (\omega_1 + \omega_2) & 0 & 0 & 0 & -L_1 c_2 \omega_1 \\ -(\omega_1 + \omega_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 s_2 \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 c_2 \omega_1 & -L_1 s_2 \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\omega_1 + \omega_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega_1 + \omega_2) & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(I_{zz2} + m_2 a_2^2) + m_2 a_2 L_1 (c_2 \varepsilon_1 + s_2 \omega_1^2) + m_2 a_2 g c_{12} \\ m_2 (L_1 s_2 \varepsilon_1 + g s_{12}) - m_2 a_2 (\omega_1 + \omega_2)^2 \\ m_2 a_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + m_2 L_1 (c_2 \varepsilon_1 + s_2 \omega_1^2) + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = S_2^T F_2$$

$$\tau_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(I_{zz2} + m_2 a_2^2) + m_2 a_2 L_1 (c_2 \varepsilon_1 + s_2 \omega_1^2) + m_2 a_2 g c_{12}$$

**Lien 1 : (i = 1)**

$$F_1 = Ad_{T_{1,2}}^*(F_2) + J_1 \dot{V}_1 - ad_{V_1}^*(J_1 V_1)$$

$$Ad_{T_{1,2}}^* = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 s_2 & L_1 c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ad_{V_1}^* = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & & & \\ -\omega_1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & 0 & \omega_1 & 0 \\ & & & -\omega_1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\tau_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(I_{zz2} + m_2 a_2^2 + m_2 a_2 L_1 c_2) + \varepsilon_1 (I_{zz1} + m_1 a_1^2 + m_2 a_2 L_1 c_2 + m_2 L_1^2) - m_2 a_2 L_1 s_2 (2\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) + m_2 g (a_2 c_{12} + L_1 c_1) + m_1 a_1 g c_1$$

$$f_{1x} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) m_2 a_2 s_2 + m_2 g s_1 - m_2 a_2 c_2 (\omega_1 + \omega_2)^2 - (m_2 L_1 + m_1 a_1) \omega_1^2 + m_1 g s_1$$

$$f_{1y} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) m_2 a_2 c_2 + (m_2 L_1 + m_1 a_1) \varepsilon_1 + m_2 g c_1 - m_2 a_2 s_2 (\omega_1 + \omega_2)^2 + m_1 g c_1$$

Et

$$\tau_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(I_{zz2} + m_2 a_2^2) + m_2 a_2 L_1 (c_2 \varepsilon_1 + s_2 \omega_1^2) + m_2 a_2 g c_{12}$$

$$f_{2x} = m_2 (L_1 s_2 \varepsilon_1 + g s_{12}) - m_2 a_2 (\omega_1 + \omega_2)^2$$

$$f_{2y} = m_2 a_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + m_2 L_1 (c_2 \varepsilon_1 + s_2 \omega_1^2) + m_2 g c_{12}$$

### 3.2.2. Méthode de Lagrange

Pour le même mécanisme et en utilisant le formalisme de Lagrange :

lien 1:  $k = 1, q_1 = \theta_1, \dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = \omega_1$

lien 2:  $k = 2, q_2 = \theta_2, \dot{q}_2 = \dot{\theta}_2 = \omega_2$  et  $Q_k = \tau_k$

L'équation du mouvement est :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2 \dots n$$

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{Gi}^T \cdot v_{Gi} + \frac{1}{2} {}^i w_i^{Gi} I_{zzi} {}^i w_i$$

Pour le premier lien 1 :

$$T_i = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz1} \omega_1^2$$

Pour le deuxième lien, le vecteur position par rapport au repère de base (O xy) du centre de masse  $G_2$  est :  $\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} L_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ L_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{pmatrix}$

Sa dérivée seconde donne :

$$v_{G_2}^T \cdot v_{G_2} = L_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 + 2L_1 a_2 (\omega_1^2 + \omega_1 \omega_2) c_2$$

Donc :  $T_2 = \frac{1}{2} m_2 [L_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 + 2L_1 a_2 (\omega_1^2 + \omega_1 \omega_2) c_2] + \frac{1}{2} I_{zz2} (\omega_1 + \omega_2)^2$

L'énergie potentielle est :

Lien 1 :  $U_1 = m_1 g a_1 s_1$

Lien 2 :  $U_2 = m_2 g (L_1 s_1 + a_2 s_{12})$

Le Lagrangien est donc :

$$\mathbf{L} = T_1 + T_2 - U_1 - U_2$$

En résolvant l'équation (3.1) on trouve les expressions des couples suivantes :

$$\tau_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(I_{zz2} + m_2 a_2^2 + m_2 a_2 L_1 c_2) + \varepsilon_1 (I_{zz1} + m_1 a_1^2 + m_2 a_2 L_1 c_2 + m_2 L_1^2) - m_2 a_2 L_1 s_2 (2\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) + m_2 g (a_2 c_{12} + L_1 c_1) + m_1 a_1 g c_1$$

$$\tau_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(I_{zz2} + m_2 a_2^2) + m_2 a_2 L_1 (c_2 \varepsilon_1 + s_2 \omega_1^2) + m_2 a_2 g c_{12}$$

### 3.3. Validation des résultats

Le but de cette application numérique est de valider les expressions analytiques trouvées à partir des modèles déjà traités.

On a d'abord établi des programmes MATLAB, puis on les a validé par une confrontation avec ceux de la littérature. Nous avons utilisé ces programmes pour une étude cinématique et dynamique d'un mécanisme plan à deux degrés de libertés.

#### a) Le modèle cinématique inverse

Considérons un manipulateur plan à deux degrés de libertés de type rotoïde  $\theta_1, \theta_2$  et des longueurs  $l_1 = l_2 = 1m$ . L'extrémité du manipulateur se déplace d'un point  $P_1(1.2, 1.5)$  vers un point  $P_2(-1.2, 1.5)$  décrivant une ligne droite.

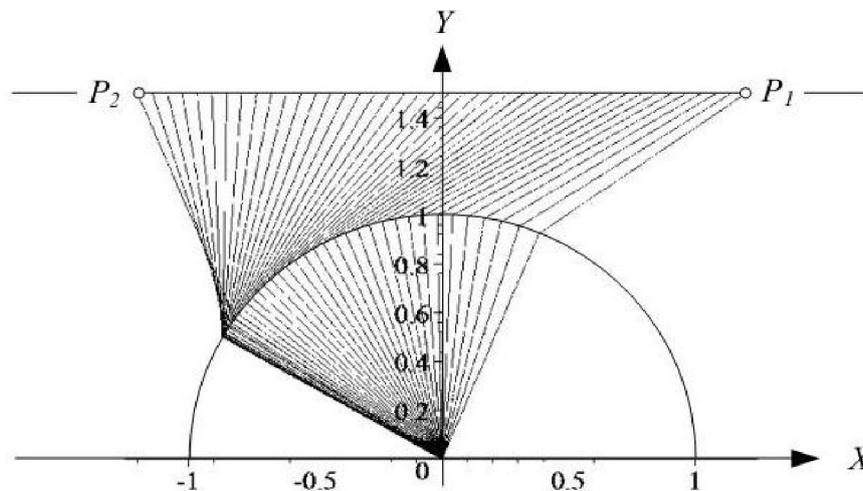


Figure 3.4 : Différentes configurations en suivant la trajectoire.

D'après le modèle géométrique direct, on a :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

D'où :

$$X^2 + Y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_2)$$

En utilisant la fonction atan2 on obtient [21]

$$\theta_1 = \text{atan2}(x, y) \pm \text{atan2}(k, x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2) \quad (\text{a})$$

$$\theta_2 = \pm \text{atan2}(k, x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2) \quad (\text{b})$$

Où :

$$k = \sqrt{(x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2)^2 - 2[(x^2 + y^2)^2 + l_1^4 - l_2^4]}$$

Les deux solutions correspondent aux deux postures ; « coude vers le haut » ou « coude vers le bas ».

L'extrémité du manipulateur se déplace selon les équations du temps suivantes [23] :

$$x = 1.2 - t \text{ et } y = 1.5 \text{ avec } 0 \leq t \leq 2.4s$$

En introduisant les équations (a), (b) et l'équation du mouvement dans notre programme on peut déterminer toutes les configurations que prend le manipulateur pour passer sur cette trajectoire. La figure 3.15 montre la variation des angles  $\theta_1, \theta_2$  en fonction du temps [23] et celle qu'on a calculée figure 3.16.

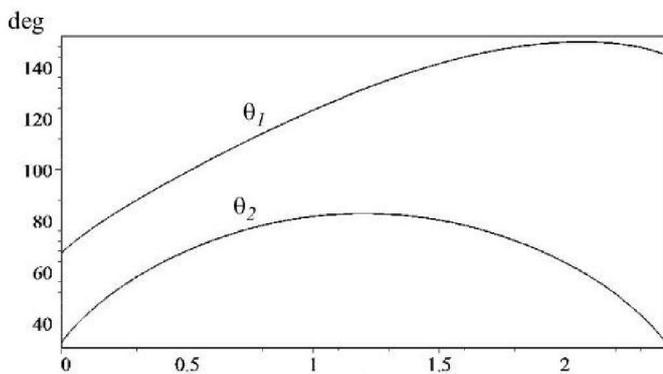


Figure 3.5 : variation des angles  $\theta_1, \theta_2$  en fonction du temps [23]

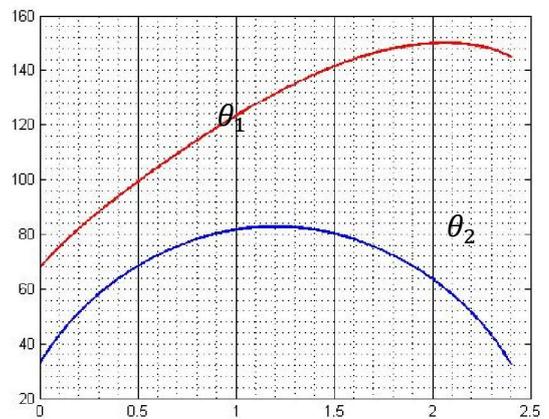


Figure 3.6 : variation des angles  $\theta_1, \theta_2$  en fonction du temps (calculés)

Les deux courbes sont quasi identiques donc notre programme donne de bons résultats.

Pour les vitesses et les accélérations et d'après le modèle cinématique inverse, on calcul la matrice Jacobienne ;

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

On détermine les vitesses articulaires en utilisant l'équation :

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X}$$

Et nous avons pour les accélérations :

$$\ddot{X} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{X} - \dot{J}\dot{q})$$

Les résultats sont illustrés dans les figures 3.7 et 3.8

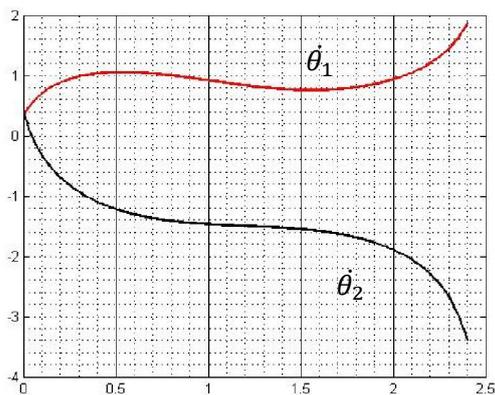


Figure 3.7 : vitesses articulaires

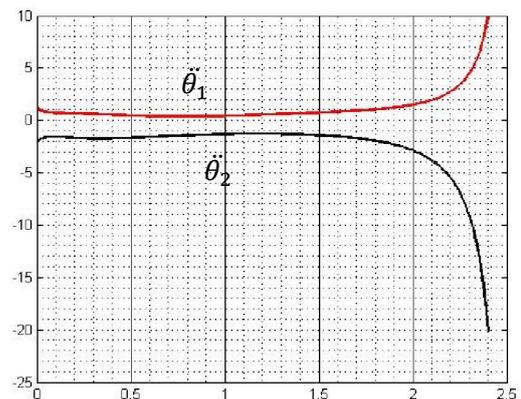


Figure 3.8 : accélérations articulaires

## Conclusion

En utilisant les équations de la cinématique directe et inverse nous avons pu établir un programme MATLAB qui est fiable pour la détermination des variables articulaires qui sont nécessaires pour le modèle dynamique.

## b) le modèle dynamique :

Dans cette partie, on validera le Modèle dynamique de Newton-Euler avec la notation de groupe et algèbre de Lie qu'on a développé dans 3.2 . une confrontation des résultats obtenus avec ceux du système à 2 degrés de liberté [20] est faite.

Soit le même mécanisme précédent (figure 3.19) avec les paramètres suivants :

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ m} ; l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m} ; m_{l1} = m_{l2} = 50 \text{ Kg} ; I_{l1} = I_{l2} = 10 \text{ Kg.m}^2 ;$$

$$k_{r1} = k_{r2} = 100 ; m_{m1} = m_{m2} = 5 \text{ Kg} ; I_{m1} = I_{m2}.$$

Où  $I_{m1}, I_{m2}$  ce sont les moments d'inertie des actionneurs par rapport au centre de masse, et  $k_{r1}, k_{r2}$  sont les rapports de transmission.

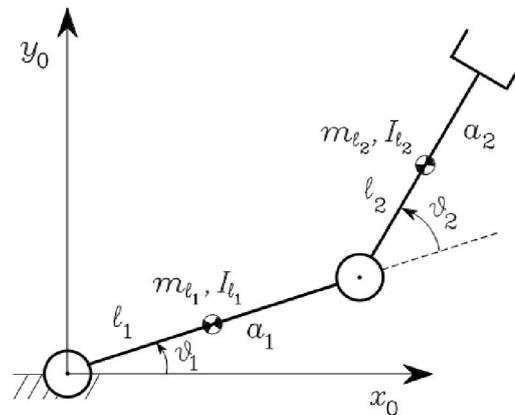


Figure 3.9 : Mécanisme plan à 2 ddl

La figure 3.10, montre les positions, vitesses et accélérations articulaires, respectivement, en fonction du temps. Nous avons introduit ces données dans notre programme MATLAB en utilisant la méthode de Newton-Euler pour déterminer les couples appliqués sur les articulations figure 3.11.

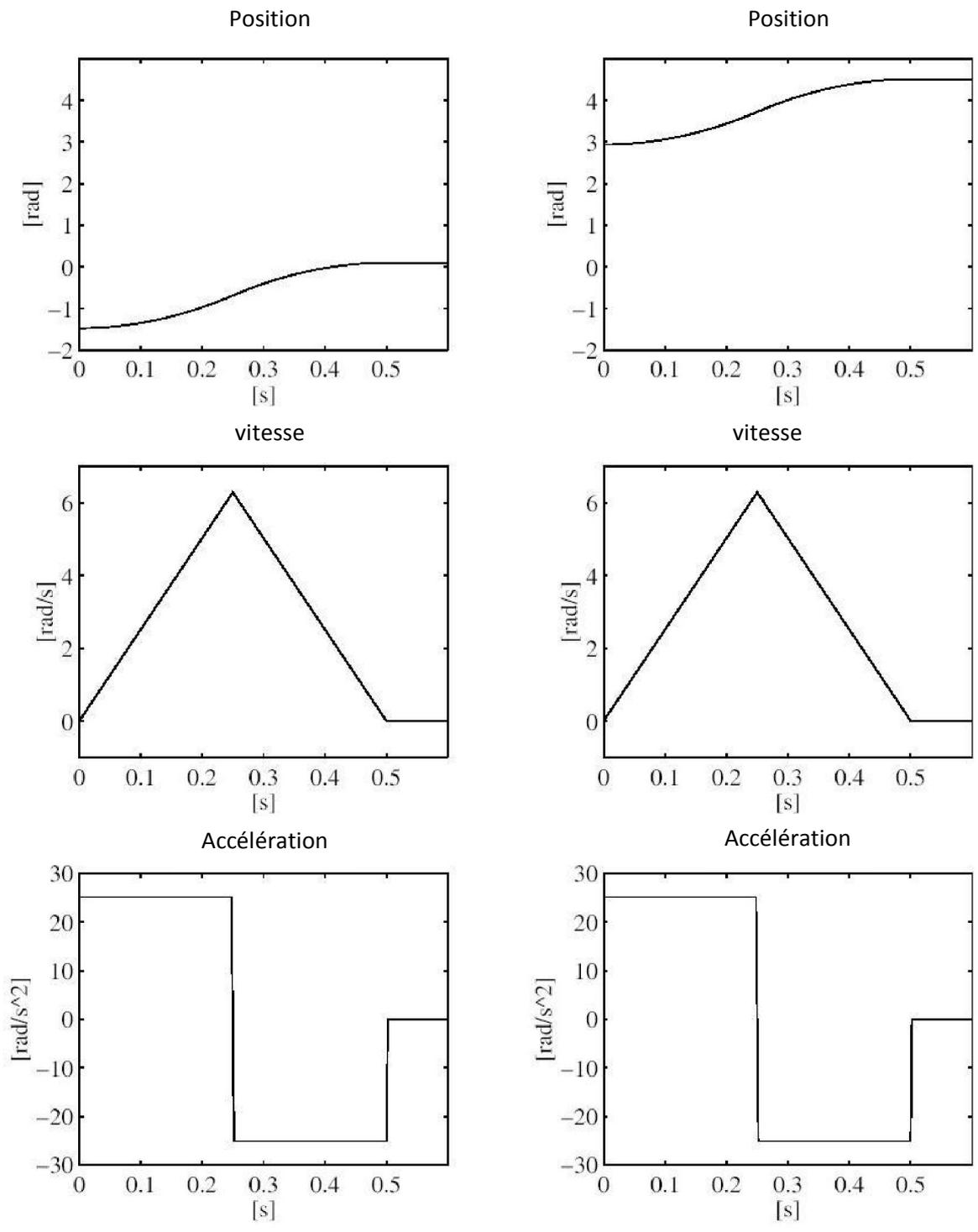


Figure 3.10 les variables articulaires en fonction du temps [20]

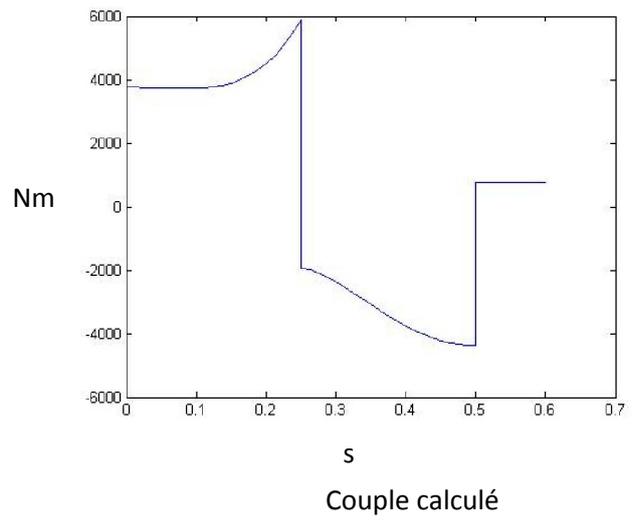
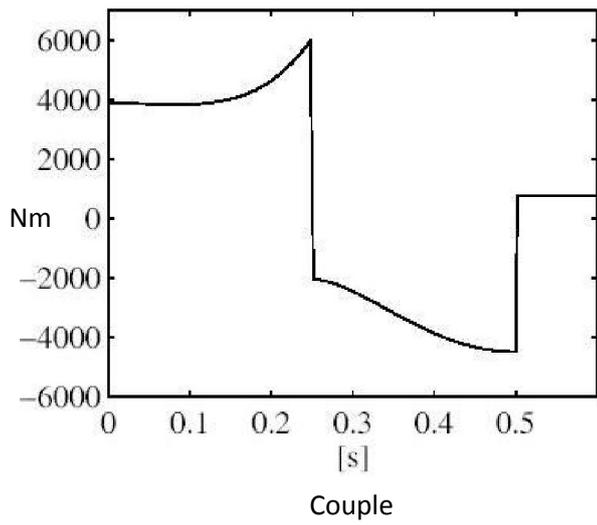


Figure 3.11a Variation du couple calculé dans l'articulation 1

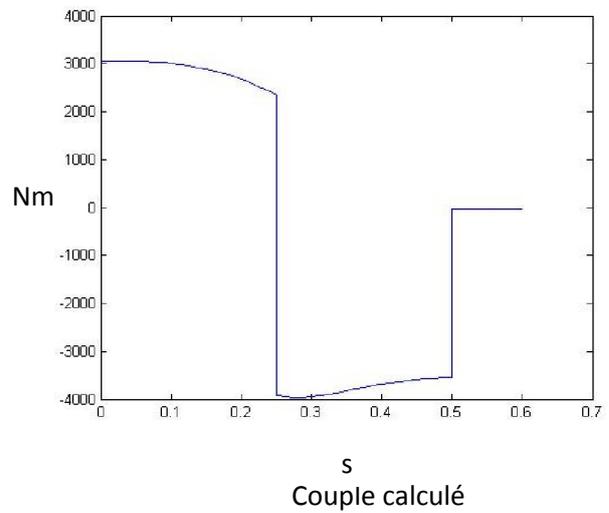
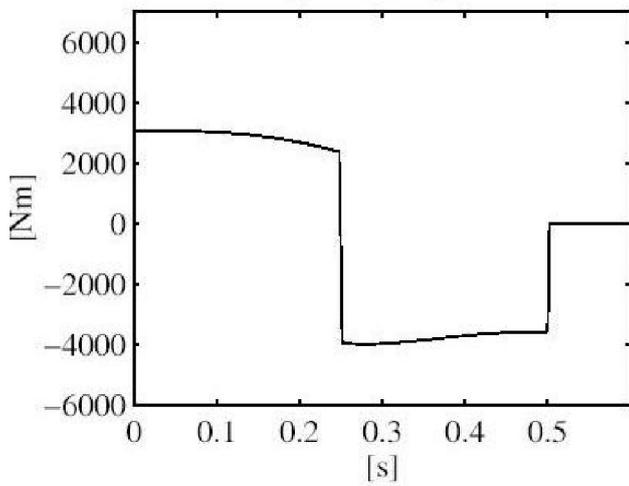


Figure 3.11b Variation du couple calculé dans l'articulation 2

- **conclusion**

Cette application nous a permis de valider la méthode récursive de Newton Euler pour l'étude dynamique du manipulateur pour laquelle on a utilisé la notation des groupes et algèbre de Lie.

### 3.4. Application 1:

Nous allons maintenant utiliser ce programme et les résultats du modèle cinématique inverse (figures 3.6, 3.7, 3.8) pour faire l'étude dynamique du premier exemple figure 3.14 en prenant compte de l'inertie des actionneurs sur les articulations; les conditions initiales sont :

- Vitesse linéaire de l'outil terminal  $V = (-1 \ 0)$
- Accélération linéaire de l'outil terminal  $a = (-1 \ 0)$
- Temps total  $t = 2.4s$
- Du  $P_1(1.2, 1.5)$  vers un point  $P_2(-1.2, 1.5)$

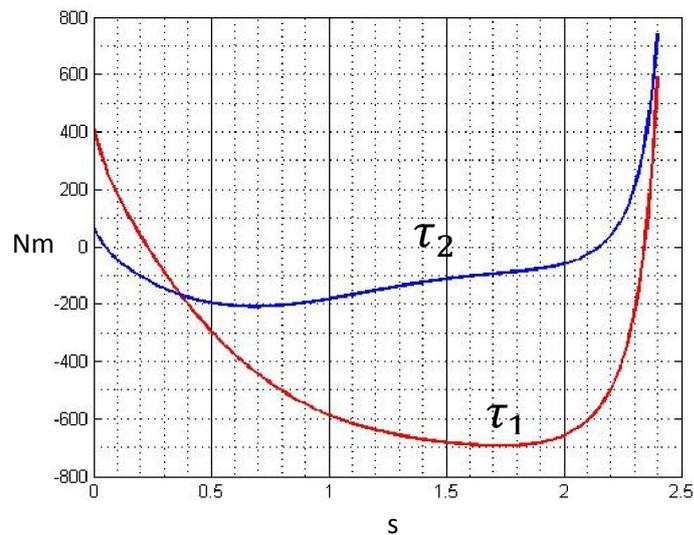


Figure 3.12 Variation des couples dans les articulations

Application 2 :

a) Problème cinématique inverse :

Pour cette deuxième application numérique, nous avons choisi une autre trajectoire pour notre système ; La nouvelle trajectoire est un demi cercle de rayon  $r = 1$  et de centre  $O(0,0)$  (figure 3.13)

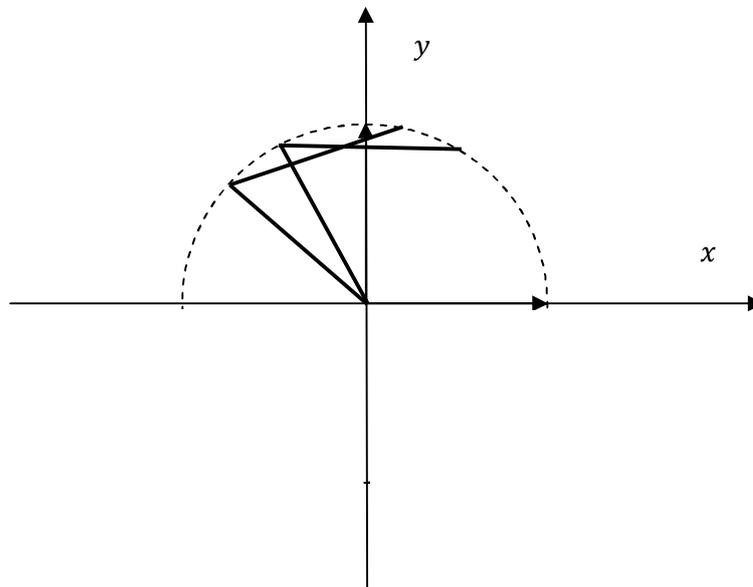


Figure 3.13 : mécanisme plan à 2ddl suivant une trajectoire circulaire.

L'équation de la trajectoire est donc :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Supposant que  $x$  varie linéairement en fonction du temps

$$x = at + b$$

Nous avons les conditions aux limites suivantes ; sachant que le temps total du mouvement est de 2,4 s :

$$t = 0 \text{ s} : \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$t = 2,4 \text{ s} : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$x = \frac{1}{1.2}t - 1$$

$$y = -\frac{1}{1.44}t^2 + \frac{1}{0.6}t$$

En Introduisant ces équations dans notre programme MATLAB pour la résolution du problème cinématique inverse, nous obtiendrons les courbes de variation des paramètres articulaires  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$  respectivement.

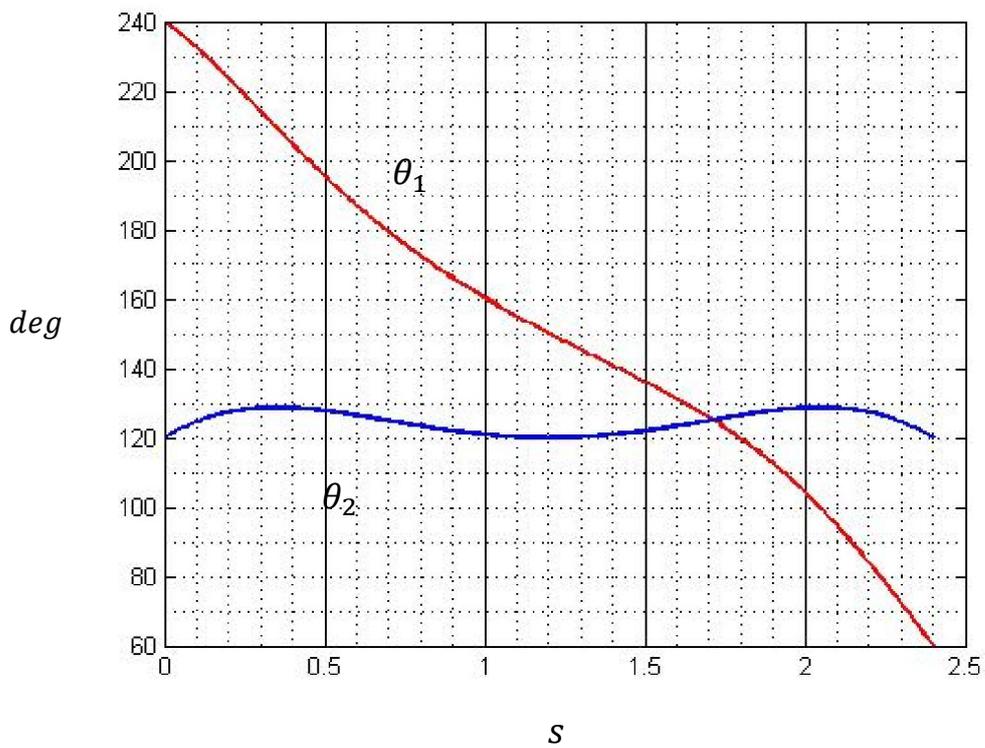


Figure 3.14 : Variation des angles  $\theta_1, \theta_2$  en fonction du temps.

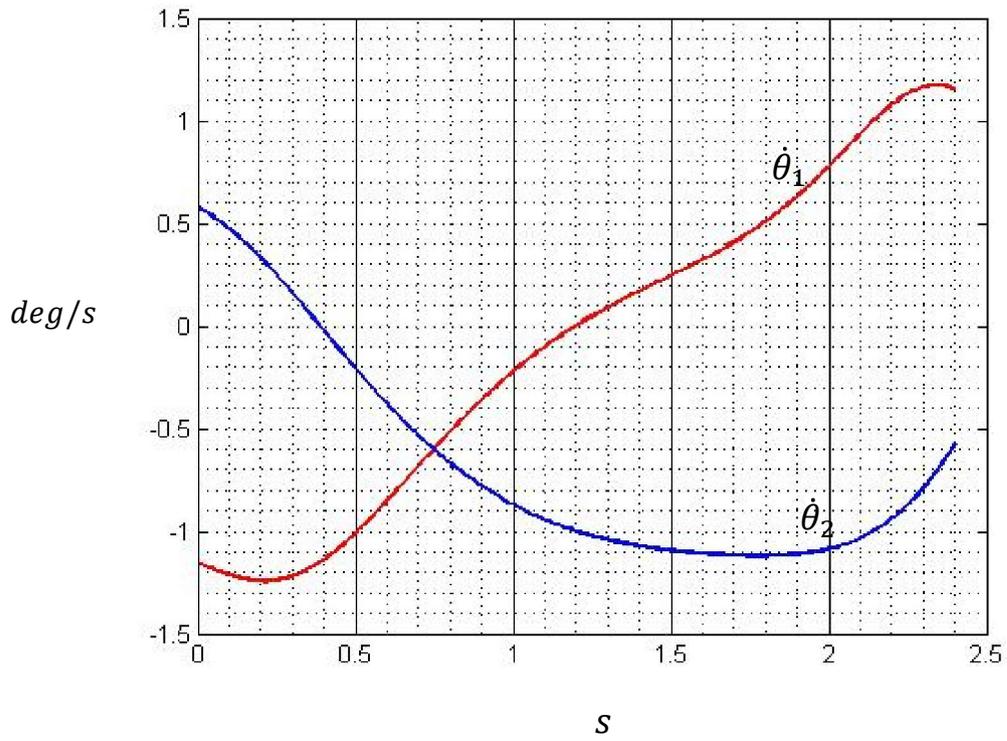


Figure 3.15 : Variation des vitesses articulaires  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ .

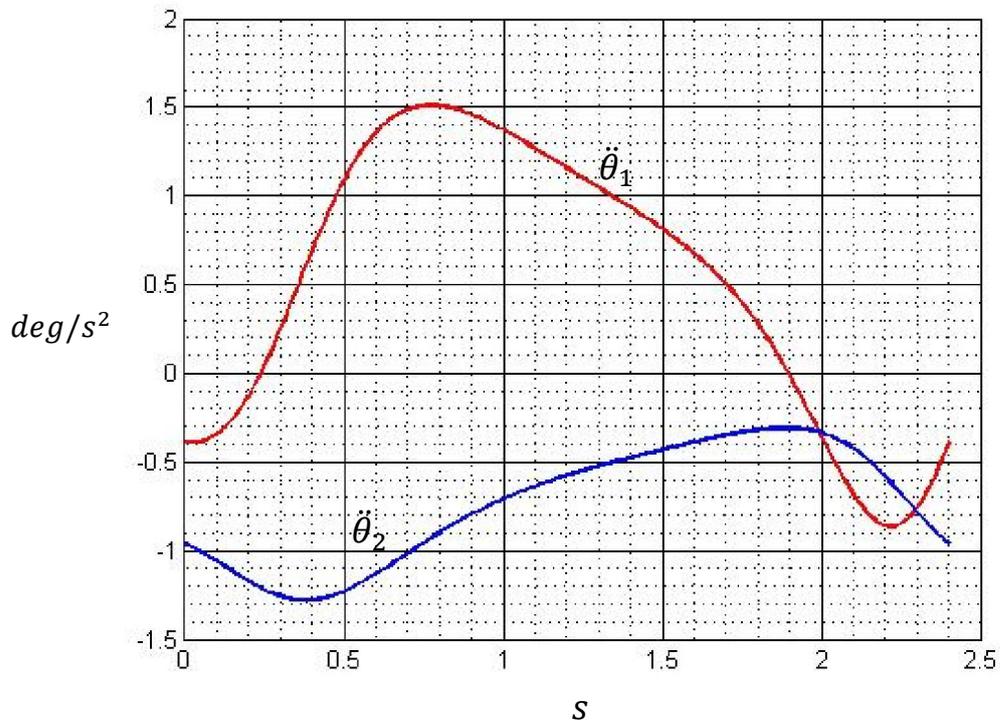


Figure 3.16 : Variation des accélérations articulaires  $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ .

b) Problème dynamique :

Pour traiter le problème dynamique nous avons besoin des résultats obtenus par la cinématique inverse, en injectant ces valeurs dans le programme MATLAB pour la résolution du problème dynamique, nous obtiendrons la courbe de variation des couples moteurs dans les articulations.

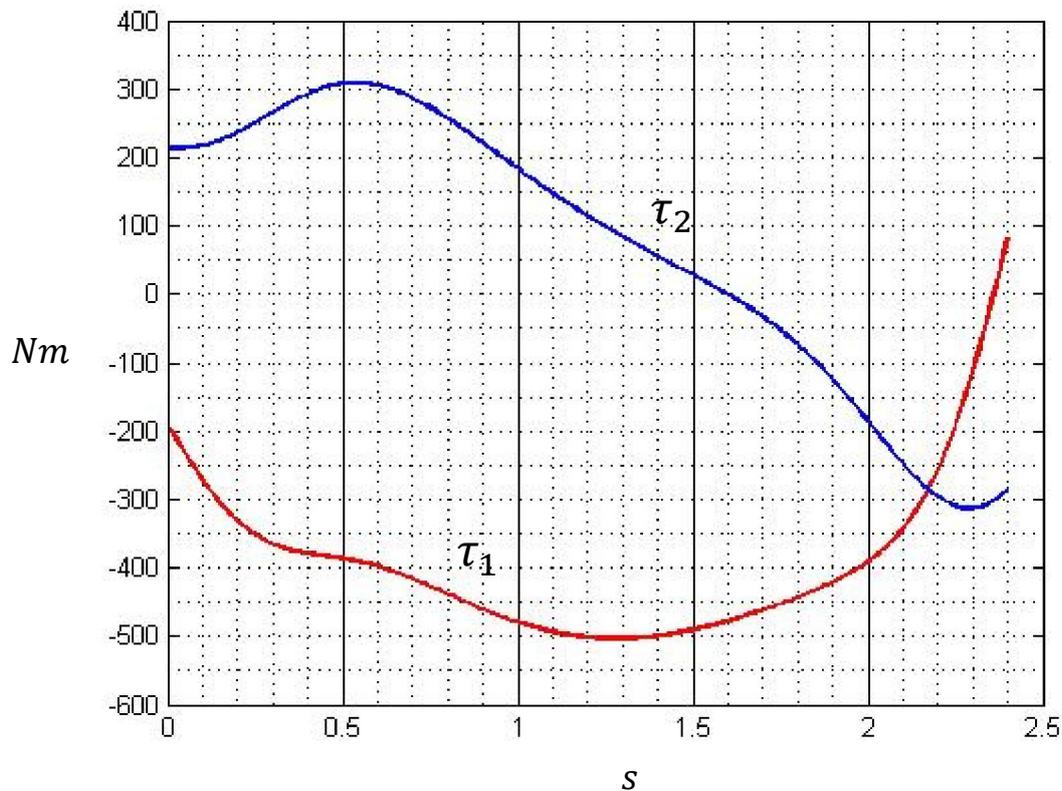


Figure 3.17 : Variation des couples dans les articulaires  $\tau_1, \tau_2$ .

## Conclusion

Avec ces programmes, on peut donc faire des applications numériques pour l'étude cinématique et dynamique d'un système plan à deux degrés de liberté pour différentes trajectoires. Ici, on a pris l'exemple d'une ligne droite et d'un demi-cercle ; on a pu choisir n'importe quelle trajectoire en changeant les équations de  $x, y$  en fonction du temps.

### 3.5. Conclusion

Chaque robot (sériel, parallèle ou hybride) est conçu pour faire une (des) tâche(s) spécifiée, dans un espace et un intervalle de temps défini tout en considérant les contraintes comme le chargement, dextérité, vitesse et la fiabilité...

Pour les robots plans à  $n$  degrés de libertés, connaissant ses paramètres géométriques  $m_i$ ,  $L_i$ ,  $I_{zz}$  et  $\theta_i(t)$  (polynôme cubique ou quintique...) pour une tâche précise (évitement d'obstacle, suivi une trajectoire, soudage...) en utilisant un logiciel de calcul puissant (MAPLE, MATLAB...) la cinématique et la dynamique peuvent être traitées numériquement ou analytiquement à n'importe quelle instant  $t$ ; et les graphes de position, vitesse, accélération et couple peuvent être tracés avec précision.

Pour l'exemple du robot plan à 2 degrés de libertés, nous avons écrit l'expression du couple appliqué aux articulations en utilisant la théorie des groupes de Lie et l'algèbre de Lie (équation A) puis avec la méthode classique de Lagrange pour confirmer les résultats (équation B) et les valider par une application numérique.

## 4. CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, nous avons introduit plusieurs méthodes utilisées dans l'étude (cinématique et dynamique) des robots manipulateurs ; parmi ces approches il y a celles qui sont relativement méconnues : théories des Groupes et algèbre de Lie, quaternions. Ces dernières sont relativement récentes et leurs applications sont beaucoup plus dans le domaine de l'animation malgré qu'elles ont prouvé leur efficacité en robotique. Nous utilisons d'autres approches (paramètres de Denavit-Hartenberg, angles d'Euler, Lagrange) dites « classiques » à cause de leur utilisation très répandue pour valider les résultats obtenus par les méthodes des Quaternions et des groupes de Lie.

Nous avons commencé par l'étude géométrique directe d'un robot PUMA à 6 degrés de liberté en utilisant les angles d'Euler par lesquels on a obtenu la matrice de transformation homogène ( $K_e$ ) ; ensuite on a retrouvé cette matrice en utilisant l'approche de groupes et algèbre de Lie ( $K_l$ ) puis les quaternions ( $K_q$ ). Des programmes MAPLE pour l'obtention des écritures analytiques et symboliques des matrices de transformation ont été établis.

Nous avons fait une comparaison et quelques applications numériques et on a constaté que :

- par simple observation du manipulateur dans une position de base judicieusement choisie, la matrice de transformation homogène ( $K_l$ ), en utilisant les groupes de Lie, peut être facilement écrite.
- pour la méthode des quaternions, et surtout si les articulations sont rotoïdes, les calculs sont plus rapides et directs par rapport aux méthodes matricielles classiques. On n'a plus besoin d'écrire des matrices 4x4, une seule ligne suffit.
- contrairement à  $K_e$ ,  $K_l$  et  $K_q$  ne présentent pas de singularités.
- les quaternions unitaires ne représentent qu'une rotation. Si les articulations du manipulateur sont prismatiques nous aurons besoin des quaternions duaux.

Le problème dynamique est traité par la suite. Après avoir introduit des notions sur les groupes et algèbre de Lie (matrices adjointes et adjointes duales, produit des exponentielles...). On a pris l'exemple d'un mécanisme simple plan à deux degrés de liberté pour lequel on applique la méthode récursive de Newton-Euler. On a établi un programme MAPLE pour l'obtention des expressions analytiques des couples dans les articulations et une comparaison avec la méthode de Lagrange est faite.

Même si les deux méthodes aboutissent au même résultat, l'aspect récursif de la méthode de Newton-Euler la rend plus facile à programmer. En utilisant l'approche des groupes de Lie, les dérivées sont triviales du fait qu'on dérive des exponentielles ( $e^{S_i q_i}$ ) ce qui n'est pas le cas pour la méthode de Lagrange.

Finalement, pour valider notre travail, on a pris un exemple de la littérature pour lequel on connaît tous les paramètres du système et dont les résultats sont donnés. On a établi d'autres programmes MATLAB en utilisant les expressions trouvées par MAPLE pour le calcul de la cinématique inverse et le calcul numérique des couples et on a tracé les différents graphes qu'on a validés par des exemples.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, notre but est à caractère scientifico-pédagogique. De ce fait, nous avons utilisé des robots simples afin de simplifier les calculs et de se concentrer sur la méthode.

Une introduction à l'approche géométrique pour l'étude des robots manipulateurs est abordée, traitée et commentée dans ce mémoire. Ce dernier peut aisément servir comme support pédagogique et/ou document de base à des mémoires et thèses et surtout pour une démystification des groupes de Lie et des quaternions.

## RÉFÉRENCES

- [1] J.M Selig, *introductory robotics*. Prentice hall international (UK) Ltd, 1992.
- [2] G.Karàné, H.Sachs, F.Schipp. *Leçons de géométrie et de cinématique classique*, pp.185-236, ouvrage publié en Hongrie par BPR Kiad, 2000.
- [3] Selig, J.M., *Geometrical fundamentals of Robotics*, Springer, second edition, 2004.
- [4] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer Verlag, New York, NY, second edition, 1999
- [5] Angeles, J. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms*. New York: Springer-Verlag, 2nd ed. 2002.
- [6] W. Khalil, E. Dombre, *modélisation identification et commande des robots*, Hermes science 2eme édition. Paris. 1999.
- [7] J. Denavit and R. S. Hartenberg: "A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices." ASME Journal of Applied Mechanics Vol. 22, 1955, pp. 215-221
- [8] A.Sagle and R. Walde, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Pure and Applied Mathematics 51, Academic Press 1973.
- [9] S. R. Ploen, *Geometric Algorithms for the Dynamics and Control of Multibody Systems*, Ph.D. dissertation, Univ. California, Irvine, 1997,<http://www.eng.uci.edu/~sploen/srpindex.html>.
- [10] Jaime Ortegon, Aguilar and Eduardo Bayro-Corrochano, *Lie algebra and system identification techniques for 3D rigid motion*, Springer, J math Imaging Vis 25: 173-185,2006.
- [11] Anish K Mampetta, *A Lie group formulation of kinematics and dynamics of serial manipulators*, course project report,Carnegie Mellon University, 2006.
- [12] J.M. Selig. *Lie groups and Lie algebras in robotics*. Course report, south bank university, London.
- [13] J.Wittenburg, *dynamics of multibody systems*, Springer seconde edition, Allemagne. 2007.
- [14] Cheng, H. H. and S. Thompson. 1996. *Dual polynomials and complex dual numbers for analysis of spatial mechanisms*. In ASME Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference, Irvine, California
- [15] Christoph M. Hoffmann, W.yang, *compliant motion constraints*, Purdue University, USA. 2003.

- [16] Brockett, R.W, "*Robotic Manipulators and the Product of Exponentials Formula*," in *Mathematical Theory of Networks and Systems* (A. Fuhrman, ed.), pp.120-129, Springer-Verlag, 1984.
- [17] O.Khatib, "*A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation*," *IEEE Robot. Automat.*, vol. RA-3, pp. 43–53, Feb. 1987.
- [18] Hamilton, W. R. 1844. *On quaternions: or a new system of imaginaries in algebra*. Phil.Mag.
- [19] Etienne Dombre, Wisama Khalil *Modeling, Performance Analysis and Control of Robot Manipulators* edition ISTE -LAVOISIER, 2001,
- [20] Bruno Siciliano • Lorenzo Sciavicco Luigi Villani • Giuseppe Oriolo, *Robotics Modelling, Planning and Control* Springer 2009
- [21] Tsuneo Yoshikawa *Foundation of robotics Analysis and control* 1990
- [22] Miomir Vukobratovic-Dragoljub Surdilovic-Yury Ekalo-Dusko Katic *Dynamics and robust control of robot- environment interaction* Edition World Scientific 2009
- [23] Reza N. Jazar *Theory of Applied Robotics Kinematics, Dynamics, and Control* Second Edition Springer 2011
- [24] Tony Postiau : *Génération et Parallélisation des Équations du Mouvement de Systèmes Multicorps par l'Approche Symbolique*. Thèse 2004
- [25] MANSOURI Imed *Contribution à la conception optimale des manipulateurs*. . Mémoire de magister. EMP, Bordj El Bahri, Algérie, 2000
- [26] Richard M. Murray - Zexiang Li- S. Shankar Sastry *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* 1994, CRC Press
- [27] William B. Heard, *Rigid body mechanics*. PHYSICS TEXTBOOK, Wiley-VCH, USA 2006.
- [28] B. Siciliano, O. Khatib, Editors, *Handbook of Robotics*, Springer. ISBN: 978-3-540-23957-4, 2008.

## Methodological and Comparative Study of Techniques for the Description of the Movement of Multibody Systems (mbs)

Mahmoud Gouasmi, Mohammed Ouali and Mustapha Rahmani  
Laboratoire de Recherche Structures, Universite of Saad Dahleb Blida, Algeria

**Abstract:** Our research, with its rather educational and pedagogical character, consists at first; in defining the 3 main methods used for the description of the motion of multibody systems to be known: the angles, the orthogonal and homogeneous matrices (SO3) as well as the quaternions, then to use them (numerical application) for the kinematic study of a manipulator (robot) of 6 degrees of freedom and finally to analyze and to compare the found results. This comparative study will allow us to demystify the Lie groups and Lie algebra as for their use in Mechanics and Robotics and especially to demystify and to popularize the use of quaternions in the same optics.

**Key words:** Robotics, euler angles, Lie groups and Lie algebra, (SO3), quaternions, dual quaternions

### INTRODUCTION

In the field of mechanics, the scientific community, in its majority uses and continues to use the method of the angles of Euler in its kinematic and dynamic study of the movement of the rigid body and multibody system (mbs), in spite of the emergence of much simpler methods, faster and more intuitive, as the Lie groups and Lie algebra or quaternions, which showed their ability in several domains as the graphics, the navigation and the image animation, for example. This study represents the Lie groups, Lie algebra and quaternions methods used in robotics for the description of the movement. The research describes an application of the classical Euler Angles method and our two new methods in the kinematic study of a manipulator robot of six degrees of freedom.

### MATERIALS AND METHODS

**Lie groups, Lie algebra:** In this study, we define briefly the Lie groups and its Lie algebra, which are the base of the geometrical approach used in our research to describe the transformation in space (Rosenthal, 1990).

**Lie groups:** A real Lie group is a derivable variety provided with a structure of a group, such as the applications product and invert are smooth (Fig. 1) (Lilly and Orin, 1994; Featherstone, 2001).

**Orthogonal group:** An orthogonal group of degree  $n$  in  $F$ , noted  $O(n, F)$ , is the group of the orthogonal matrices

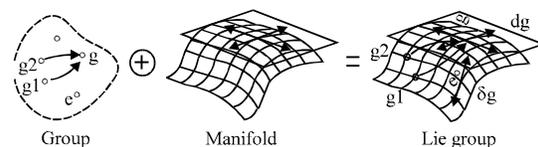


Fig. 1: Basic structure of a Lie group

$n \times n$  with elements of  $F$ , led by the operation: matrix product. It is a subgroup of the general linear group  $GL(N, F)$ .  $O(n, F) = \{Q \in GL(n, F) / Q^T Q = Q Q^T = I\}$  where,  $Q^T$  is the transpose of  $Q$ .

In our case, the groups  $SO(2)$  and  $SO(3)$  are the most important ones because they represent a rotation around a fixed center in 2 and 3 dimensions; for example the group  $SO(2)$  consists of matrices of the form:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**The orthogonal and euclidian special groups, SO (3) and SE (3):** The transformations in an Euclidian space are carried out by the use of the matrices of rotations which are an element of the orthogonal special group, which is a Lie group. The most familiar representation of this transformation is the matrix representation. It is defined by a matrix of dimension  $4 \times 4$  called a homogeneous matrix transformation, such as (Ascher *et al.*, 1995):

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R, represents the matrix of rotation, it is of dimension 3x3 and possesses the following properties:

- C Its determinant is equal to 1
- C Its inverse is equal to its transpose
- C Its eigen values are: 1, (combined complexes)

And t: represents the vector of translation the 9 elements of the matrix R verify 6 constraints of orthogonality which express that vectors lines (or columns) are of norme equal to 1 and orthogonal.

We so have 3 elements, among the 9, which are independent.

If a point P is expressed in the frame R<sub>i</sub> by the vector p<sub>i</sub>, and in the frame R<sub>j</sub> by the vector p<sub>j</sub>, we shall have the following relation: p<sub>i</sub> = Rp<sub>j</sub> + t.

If we use the homogeneous coordinates, the last equation becomes:

$$\begin{bmatrix} p_i \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} p_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

This representation allows us:

- To represent in different frames the characteristics such as points, vectors, lines and planes
- To calculate the transformed of these characteristics for a given transformation

**Quaternions:** Quaternions can be considered as couples (q<sub>0</sub>, q̄) where, q<sub>0</sub> is an element of R and q̄ is a vector of dimension 3. The set of quaternions is then the set R<sup>4</sup> = R × R<sup>3</sup>

Quaternions can be also seen as complex numbers with three imaginary parts or hyper complex numbers:

$$q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$$

such that:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

and

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

Using these properties, we can easily calculate the product of 2 quaternions q and r;

$$q^*r = [q_0r_0 - \vec{q} \cdot \vec{r}, q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{r}]$$

Generally, the product of 2 quaternions is not commutative.

The most interesting result for our study is that every unitary quaternion corresponds to a unique rotation, the quaternion representing a rotation of axis n and angle 2 thus spells:

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (in_x + jn_y + kn_z)$$

### APPLICATIONS

We are interested in the kinematic study of a robot manipulator with 6° of freedom. A manipulator that resembles the UNIMATE Puma. Several industrial robots are based on the model of the PUMA; the dimensions or the command can differ but the arrangement of the joints always remains the same.

**General presentation of the manipulator:** Our manipulator with 6° of freedom (Fig. 2) looks like the PUMA robot. This choice is deliberately made because Puma robots are probably the most spread in universities and robots of assembly the most used in the industry. The home frame(absolute frame) Ro(O<sub>0</sub>, x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>) coincide with frame R1(O1).

- J1 // (O<sub>0</sub> z<sub>0</sub>) = (O1 z1) is the axis of the 1st joint (1st degree of freedom)
- J2 // (O2x2): The 2nd joint articulation
- J3 // (O3x3): The 3rd joint articulation
- J4 // (O4 z4): The 4th joint articulation
- J5 // (O5x5): The 5th joint articulation
- J6 // (O6 z6): 6th and last joint articulation

With O4, O5 and O6 the same point representing the wrist center of the manipulator.

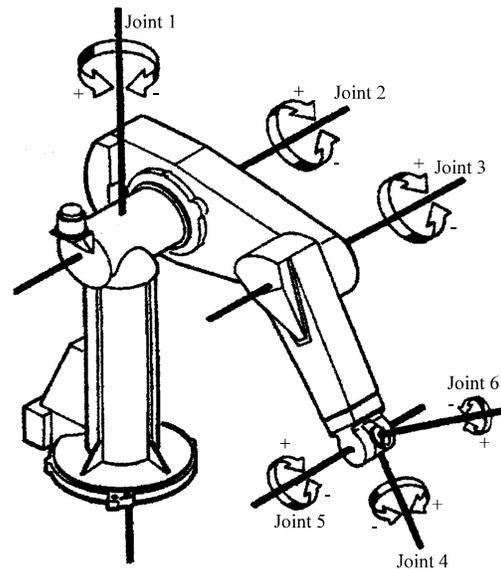


Fig. 2: Puma robot

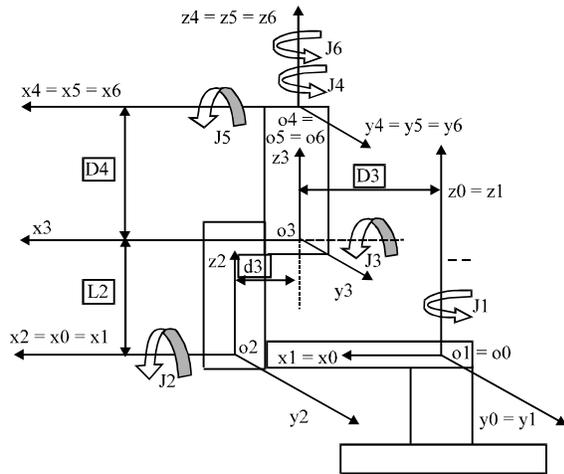


Fig. 3: The manipulator

- D3: distance between z1 and z2
- L2: distance between x2 and x3
- D3: distance between x3 and x4
- d3:: distance between z3 and z2

We begin by choosing an initial (home) position of the robot corresponding to  $\theta_j = 0$  (Fig. 3). We then have: the fixed or absolute frame  $R_0$  ( $O_0, x_0, y_0, z_0$ ) coinciding with the mobile frame  $R_1$  ( $O_1$ ) and the mobile frames  $R_2$  ( $O_2$ ),  $R_3$  ( $O_3$ ),  $R_4$  ( $O_4$ ),  $R_5$  ( $O_5$ ) and  $R_6$  ( $O_6$ ), respectively attached to the joints (articulations) of the 6 components of our manipulator arm.

We have to find the matrices  $A_j$ , which correspond to the rotations  $\theta_j$  around the axes of the joints (articulations) and then to compute the product of these rotations to find the transformation matrix  $K$  of the end effector, in the home frame, using our 3 presented above methods.

**EULER angles method: Matrix Ke (Bae and Haug, 1987):**  
If the direction of the axis of rotation is  $\bar{v}$  and  $t$  the vector position of a point on this axis, then by using the conjugation  $TMTG^t$  the rotation around this axis is given by:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} R(\theta, \bar{v}) & (I-R)^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The axes of the joints (articulations) in the initial position are given by the following board (Table 1) (using the parameters of Denavit-Hartenberg) (Denavit and Hartenberg, 1955).

Applying these rotations (Rosenthal, 1990) we shall obtain the wanted matrices. Both first ones are straight forward since they are in the home frame (Lilly and Orin, 1994).

Table 1: (Denavit hartenberg modelling) euler angles method

Articulation	$\bar{v}$	t
j1	k	0
j2	i	0
j3	i	$L_2 k$
j4	k	$D_3 i$
j5	i	$(L_2 + D_4) k$
j6	k	$D_3 i$

$$A1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For  $A_3$  we have to know the term  $(I - R)t$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \sin(\theta_3) \\ L_2(1 - \cos(\theta_3)) \end{pmatrix}$$

$$A3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & L_2 \sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & L_2(1 - \cos(\theta_3)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Also, we have

$$A4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & (1 - \cos(\theta_4))D_3 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & -\sin(\theta_4)D_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$A5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & (L_2 + D_4)\sin(\theta_5) \\ 0 & \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & (L_2 + D_4)(1 - \cos(\theta_5)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and finally

$$A6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & (1 - \cos(\theta_6))D_3 \\ \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 & -\sin(\theta_6)D_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The kinematic matrix of the transformation is given by:

$$K(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = A_1(\theta_1)A_2(\theta_2)A_3(\theta_3)A_4(\theta_4)A_5(\theta_5)A_6(\theta_6)$$

where, the first transformation is represented by  $A_6(2_6)$  and we start the product from the rightmost one. That is we firstly move the last joint (articulation) and keep all the others fixed and so on until the first joint (articulation).

The product of these 6 matrices gives a matrix  $K(i, j)$ , which we shall call  $K_e$ , very complicated.

**Example of application:** Let be a point  $p$  rigidly attached to the end effector of the manipulator, by choosing the same home position, this point will have coordinates  $(0, 0, L_2 + D_4)$ . What will be its final position if the angles of rotation are:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = 0, \theta_4 = -\frac{\pi}{2}, \theta_5 = \frac{\pi}{2}, \theta_6 = \frac{\pi}{2}$$

The new position is given by:

$$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = K \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (L_2 - D_3 + D_4) \\ 0 & 0 & -1 & (L_2 + D_3 + D_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_2 + D_4) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_2 - D_3 + D_4) \\ D_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lie Group method (SO3): matrix  $K_l$ :** To be able to write the matrices of transformations we associate with every joint (articulation) a frame  $R_j$  where,  $j = 1..6$  and we shall note by  $2_j$  the relative rotations between the various constituents of our manipulator (Fig. 3). This method consists in writing the vector translation  $t_j$  of a joint  $j$  in the frame  $R_{j-1}$ .

The transformation is thus a pure rotation around an axis followed by a translation which will have the coordinates of the frame  $R_j$  in  $R_{j-1}$ . Thus,  $A_j$  is the transformation in the frame  $R_j$  (Table 2).

$\bar{i}$  : Position vector of frame  $R_j$  in  $R_{j-1}$

The matrices of rotations will then be:

Table 2: Lie groups and Lie Algebra method

$R_j/R_{j-1}$	$\bar{v}$	$\bar{i}$
$R_{10}$	$\bar{k}_1$	$(0, 0, 0)$
$R_{21}$	$\bar{i}_2$	$(D_3 + d_3, 0, 0)$
$R_{32}$	$\bar{t}_3$	$(-d_3, 0, L_2)$
$R_{43}$	$\bar{k}_4$	$(0, 0, D_4)$
$R_{54}$	$\bar{t}_5$	$(0, 0, 0)$
$R_{65}$	$\bar{k}_6$	$(0, 0, 0)$

$$A1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta 1) & -\sin(\theta 1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta 1) & \cos(\theta 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & D3 + d3 \\ 0 & \cos(\theta 2) & -\sin(\theta 2) & 0 \\ 0 & \sin(\theta 2) & \cos(\theta 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d3 \\ 0 & \cos(\theta 3) & -\sin(\theta 3) & 0 \\ 0 & \sin(\theta 3) & \cos(\theta 3) & L2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta 4) & -\sin(\theta 4) & 0 & 0 \\ \sin(\theta 4) & \cos(\theta 4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta 5) & -\sin(\theta 5) & 0 \\ 0 & \sin(\theta 5) & \cos(\theta 5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta 6) & -\sin(\theta 6) & 0 & 0 \\ \sin(\theta 6) & \cos(\theta 6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The resultant transformation will be the product of these 6 matrices.

**Example:** For this example we shall take the same point having the coordinates  $p(0, 0, L_2 + D_4)$  in  $R_1$  and  $(-D_3, 0, 0)$  in the last frame  $R_6$  and for the same angles:

$$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (L_2 + D_4) \\ 0 & 0 & -1 & D_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_2 - D_3 + D_4) \\ D_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Table 3: The 3 methods comparative board

Euler angles	Lie groups and Lie algebra	Quaternions
*Each joint transformation is written in the base $R_0$ , thus we need to know the geometrical parameters (D-H) of the robot and	*We associate to each articulation $j_i$ a referentiel $R_i$ ; the transformation in $R_i$ will be represented by:	*For rotary joints this method is recommended
*use conjugation (TMT <sup>-1</sup> ).	A rotation and a translation which is the vector position of $R_i$ wrt $R_{i-1}$	*No singularity problem
*Singularity problems	*No singularity problem	*Need to use dual quaternions for prismatic joints

**Quaternions method:** Kq (Shoemake, 1985; Hamilton, 1834; Hamilton, 1850).

Let be the vector  $V$ , of coordinates (X,Y, Z) in the frame  $R_6$  (O6), representing the position of some tool rigidly attached to the wrist of the manipulator, its final position or new position in the home frame  $R_0(O0)$ , result of the 6 manipulations, is simply given by the quaternion equation:

$$V' = q_1 * q_2 * q_3 * q_4 * q_5 * q_6 * V * q_6^{-1} * q_5^{-1} * q_4^{-1} * q_3^{-1} * q_2^{-1} * q_1^{-1}$$

It will be necessary to begin with the operation at the heart of this equation that is the operation:  $q_6 * V * q_6^{-1}$  and to start with the product on the right that is the product  $V * q_6^{-1}$  and so on, writing after each operation the coordinates of  $V$  in the frame  $R_{j-1}$ .

**Example:** Let us proceed step by step and let us confirm the results found by the first method Ke and the second method Kl (Table 3).

Let us clarify well the method and guide the reader in this manipulation of quaternions.

$V = [0, V]$  is the vector which has to undergo some rotation  $V'_2 = Rot(v) = q * V * q^{-1}$  where,  $q$  is the unit Quaternion corresponding to the rotation of amplitude (2) around some axis (X, Y, Z).

Let us note that the last 3 rotations are all made around the center of the wrist O.

For  $(2_6) = B/2$ ;  $q = [\cos(B/4), (0, 0, \sin(B/4))]$  and  $V = [0, (-D_3, 0, 0)]$ .

$$V' = q * V * q^{-1} = [\cos(B/4), (0, 0, \sin(B/4))] * [0, (-D_3, 0, 0)] * [\cos(B/4), (0, 0, -\sin(B/4))] = V' = [0, (0, -D_3, 0)]$$

For  $(2_5) = B/2$ ;  $q = [\cos(B/4), (\sin(B/4), 0, 0)]$  and  $V = [0, (0, -D_3, 0)]$ , which is the result of the precedent operation.

$$V' = q * V * q^{-1} = [\cos(B/4), (\sin(B/4), 0, 0)] * [0, (0, -D_3, 0)] * [\cos(B/4), (-\sin(B/4), 0, 0)]$$

The new position is  $V' = [0, (0, 0, -D_3)]$ .

For  $(2_4) = -B/2$  ; Same technique ;  $V' = q * V * q^{-1}$ ,  $q = [\cos(B/4), (0, 0, -\sin(B/4))]$  and  $V = [0, (0, 0, -D_3)]$ .

$$V' = q * V * q^{-1} = [\cos(B/4), (0, 0, -\sin(B/4))] * [0, (0, 0, -D_3)] * [\cos(B/4), (0, 0, \sin(B/4))] = V' = [0, (0, 0, -D_3)]$$

For  $(2_3) = 0$  that must be performed around the axis  $x_3$ , the vector to be transformed is:

$$V = [0, (0, 0, (D_4 - D_3))]$$

$$V' = q * V * q^{-1} = [\cos(0), (0, 0, \sin(0))] * [0, (0, (D_4 - D_3))] * [\cos(0), (0, 0, -\sin(0))] = V' = [0, (0, 0, (D_4 - D_3))]$$

For  $(2_2) = B/2$ , about the axis  $x_2$ , the vector is:  $V = [0, (-d_3, 0, (L_2 + D_4 - D_3))]$  then;

$$V' = [\cos(B/4), (\sin(B/4), 0, 0)] * [0, (-d_3, 0, (L_2 + D_4 - D_3))] * [\cos(B/4), (-\sin(B/4), 0, 0)] = V' = [0, (-d_3, -(L_2 + D_4 - D_3), 0)]$$

Finally for the last transformation of amplitude  $(2_1) = B/2$  around the axis  $Oz_1$  the vector to be transformed will be the vector  $V = [0, (D_3 + d_3 - d_3, -(L_2 + D_4 - D_3), 0)]$  and the final quaternion is  $q = [\cos(B/4), (0, 0, -\sin(B/4))]$  then:

$$V' = [\cos(B/4), (0, 0, \sin(B/4))] * [0, (D_3, -(L_2 + D_4 - D_3), 0)] * [\cos(B/4), (0, 0, -\sin(B/4))] = V' = [0, ((L_2 + D_4 - D_3), D_3, 0)]$$

which is the quaternion representing the vector  $V'' = ((L_2 + D_4 - D_3), D_3, 0)$  and which is the transformed vector through all the 6 manipulations, of the vector  $V' = (-D_3, 0, 0)$ .

## RESULTS AND DISCUSSION

A manipulated object or tool, rigidly fixed by the end effector of the PUMA robot (Fig. 2 and 3), which have extremity coordinates (x, y, z) in  $R_6$ , therefore in  $R_1$ :  $(x + D_3, y, L_2 + D_4 + z)$  will have new vector position:

$c = [Kl]. (x, y, z, 1)^T$  using Lie method or Kl matrix and  $d = [Ke]. (x + D_3, y, L_2 + D_4 + z, 1)^T$  using Euler method or Ke matrix.

The interested reader may check that whatever amplitudes (angles)  $(2_i)$  are chosen and whatever cumbersome are the matrices we will always have:

$$[Kl]. (x, y, z)^T = [Ke]. (x + D_3, y, L_2 + D_4 + z)^T$$

or  $c - d = (0, 0, 0, 0)^T$  or  $c = d$

Independently of the chosen method the found results match:

By using the methods K<sub>l</sub> or K<sub>q</sub>; a point P of coordinates (-D<sub>3</sub>, 0, 0) in the frame R<sub>6</sub> and after the 6 transformations will have coordinates [(-D<sub>3</sub> + L<sub>2</sub> + D<sub>4</sub>), D<sub>3</sub>, 0] in the home frame R<sub>0</sub>. Using the method K<sub>e</sub>, the same point P will have coordinates [(0, 0, (L<sub>2</sub> + D<sub>4</sub>))] in the home frame R<sub>0</sub> and after the transformations, it will have the coordinates [(L<sub>2</sub> + D<sub>4</sub> - D<sub>3</sub>), (D<sub>3</sub>), 0] in the same home frame R<sub>0</sub>.

It is thus, the same identical result which is expressed in the home frame R<sub>0</sub>.

**Several remarks and important observations can then be made:**

- C For the methods K<sub>l</sub> or K<sub>q</sub> the parameters of Denavit-Hartenberg are not any more used. Thus no need for a description board of the architecture of the manipulator robot
- C No need for the conjugation method  $*TMT^{-1}$
- C The rotation part of the matrices K<sub>e</sub> and K<sub>l</sub> is simply:

$$R(2) = R(2_1) \cdot R(2_2) \cdot R(2_3) \cdot R(2_4) \cdot R(2_5) \cdot R(2_6)$$

In the general case, it will be enough to determine the trace, the eigen vectors and eigen values of the resultant matrix R(2) to know the resultant axis of rotation and the resultant amplitude.

Concerning our application R(2) is equivalent to a rotation of amplitude B/2 around the fixed axis 0x.

- C The last column of the matrix K<sub>l</sub>: K<sub>l</sub>(1,4) i+K<sub>l</sub>(2,4)j+K<sub>l</sub>(3,4)k represents the resultant translation
- C For our example, the movement of the tool rigidly attached to the wrist of the manipulator is the composition of a rotation of amplitude B/2 around the axis 0x followed by a translation  $t^T = ((L_2 + D_4), D_3, 0)$
- C Knowing the amplitudes (2<sub>i</sub>), these two calculations (remarks 3 and 4) can be carried out quickly and separately by means of a software as MAPLE or MATLAB
- C In spite of the terrible complication of the matrix K<sub>l</sub>, it implies, for this kind of manipulator and similar robots, that the matrix K<sub>l</sub> could and should be built easily directly, by simple observation of the manipulator in a basic position sensibly chosen, if the amplitudes (2<sub>i</sub>) are naturally known

- C The method K<sub>l</sub> is thus much more geometrically intuitive, direct, easier and faster than the method K<sub>e</sub>
- C These results can be generalised to the inverse kinematics and to the dynamics study of manipulators thanks to the Product of the Exponential (POE) and to the concepts of "Twist and Wrench" and screw theory
- C For the 3rd method, that of the quaternions K<sub>q</sub> and especially if the joints are rotoides, we notice that the calculations are much more direct and faster than by the classic matrix methods. No more need to write 4x4 matrices, a single line will be enough; although, MAPLE in its conversions quaternion-matrices and the opposite, uses the matrix calculation but implicitly. For translations we will need the concept of dual quaternions.

**REFERENCES**

Ascher, U., H. Chin, L. Petzold and S. Reich, 1995. Stabilization of constrained mechanical system with daes and invariant manifolds. *J. Mech. Struct. Machines*, 23: 135-158.

Bae, D.S. and E.J. Haug, 1987. A recursive formulation for constrained mechanical system dynamics: Part II. closed-loop systems. *Mechanics of Structures and Machines*, 15 (4): 481-506.

Denavit, J. and R.S. Hartenberg, 1955. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Applied Mechanics*, pp: 215-221.

Featherstone, R., 2001. The acceleration vector of a rigid body. *Int. J. Robotics Res.*, 20 (11): 841-846.

Hamilton, W.R., 1834. On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics. *Br. Assoc. Rep.*, pp: 513-518.

Hamilton, W.R., 1850. On Quaternions and the Rotation of a Solid Body. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 4: 38-56.

Lilly, K.W. and D.E. Orin, 1994. Efficient dynamic simulation of multiple chain robotic mechanisms. *J. Dynamic Syst. Measurement and Control*, 116: 223-231.

Rosenthal, D.E., 1990. An Order Formulation for Robotic Systems. *J. Astronautical Sci.*, 38 (4): 511-529.

Shoemake, K., 1985. Animating rotation with quaternion curves. *Proc. SIGGRAPH*, 19: 245-254.