

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Blida
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département d'Aéronautique

047107
EX1

Projet de fin d'étude

EN VUE D'OBTENTION DU DIPLOME D'INGÉNIEUR D'ÉTAT EN
AÉRONAUTIQUE

OPTION : STRUCTURE

Étude Thermoélastique des Matériaux Composites avec la Prise en Compte de l'effet de Température sur les Propriétés Mécaniques

Élaboré par :

TAANE Djellel.

Encadré par :

M^{me}. BENKHEDDA AMINA.

Promotion 2007

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Blida
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département d'Aéronautique

Projet de fin d'étude

EN VUE D'OBTENTION DU DIPLOME D'INGÉNIEUR D'ÉTAT EN
AÉRONAUTIQUE

OPTION : STRUCTURE

*Étude Thermoélastique des
Matériaux Composites avec la Prise
en Compte de l'effet de Température
sur les Propriétés Mécaniques*

Élaboré par :

TAANE Djellel.

Encadré par :

M^{me}. BENKHEDDA AMINA.

Promotion 2007



Remerciements

*J'adresse mon remerciement à ma promotrice, Madame **BENKHADDA AMINA** Chargé de cours au Département d'aéronautique de Blida, pour son aide appréciable et sa contribution à l'élaboration de ce projet et l'intérêt qu'elle a toujours témoigné à l'égard de mon travail, et les précieux conseils et encouragements qu'elle m'a prodigués.*

Je voudrais exprimer ma reconnaissance également à tous les enseignants du Département d'Aéronautique et ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

*Je tiens à remercier tout particulièrement **M^{me} Khalfia** Chargé de cours au département d'aéronautique de Blida qui a bien voulu nous faire l'honneur de présider le jury de notre soutenance.*

*Je voudrais exprimer ma reconnaissance à **M^{me} Hamadouche Amal** chargé de cours au sein du département d'aéronautique et **Mr Chegrani Ahmed**, qui a bien voulu examiner ce travail.*

*Je remercie enfin tous mes amis qui m'ont soutenu pendant tout le long de ce modeste travail : **Promotion Aéro 2007 (Structure+Propulsion), Hamada, Hichem, Nourinne, Teffahi yassine, Zamouchi Mohamed, Omar de mécanique et son ami Mustapha, Midoun hamza, , Islam, Redha, Raouf, Amine lawami, Ayoub, Samir, Walid, Aissam, Nessradinne.***

➤ **Djellel TAANE**

Dédicaces

Je dédie ce travail :

- *A ma très chère mère et mon très chère Père qui m'ont très aidé et soutenu durant tout le long de mes études et ma vie.*
- *A mes grands parents.*
- *A mes deux chères frères Redha, Walid.*
- *A mes très chère proches Fella, Hamza, Ali.*
- *A mes proches Amine, Nadhir, Lilla, Houda.*

Je dédie ce travail :

- *A la mémoire de mon très chère frère, ami et collègue HAMIDA TAYEB qui nous a quitté le 12/01/2007 à jamais.*

الله ربي يرحمونه

Djellel



SOMMAIRE

Liste des figures et Tableaux

Introduction Générale.....1

CHAPITRE I

Généralités sur les Matériaux Composites

I.1 Définition D'un Matériaux Composite.....	3
I.2 Constitution D'un Matériaux Composite.....	3
I.2.1 Les Résines.....	4
I.2.2 Les Charges Additifs.....	5
I.2.3 Les Fibres et Tissus.....	6
I.2.4 Les Principales Types de Fibres.....	6
I.2.4.1 Les Fibres de Verre.....	6
I.2.4.2 Les Fibres de Carbone.....	6
I.2.4.3 Les Fibres Aramides.....	7
I.2.4.4 Les Fibres Céramiques.....	7
I.2.4.5 Les Fibres Synthétiques Thermostable.....	8
I.2.4.6 Autres Fibres.....	8
I.3 Classification des Matériaux Composites.....	9
I.3.1 Classification Suivant la Forme des Constituants.....	9
I.3.1.1 Composites à Fibres.....	9
I.3.1.2 Composites à Particules.....	9
I.3.2 Classification Suivant la Nature des Constituants.....	10
I.3.2.1 Composites à Matrice Organique.....	10
I.3.2.2 Composites à Matrice Métallique.....	10
I.3.2.3 Composites à Matrice Minérale.....	10
I.4 Les Matériaux Composites.....	11
I.4.1 Isotropie et Anisotropie.....	11
I.4.2 Architecture des Matériaux Composites.....	12

I.4.2.1 Les Stratifiés.....	12
I.4.2.2 Les Stratifiés Hybrides.....	13
I.4.3 Les Composites Sandwichs.....	14
I.4.3.1 Les Matériaux Sandwichs.....	14
I.4.3.2 Les Propriétés des Matériaux Sandwichs.....	15
I.4.3.3 Les Matériaux Constitutifs des Matériaux Sandwichs.....	15
I.5 Les Repères.....	16
I.5.1 Le Repère Principal (L,T) Local.....	16
I.5.2 Le Repère Global du Stratifié (X,Y).....	16
I.6 La Micro-Analyse.....	16
I.7 Prise en Compte de l'effet de Température dans les Propriétés Mécanique.....	18
I.8 Loi de Comportement.....	18
I.8.1 La Matrice de Rigidité.....	19
I.8.2 La Matrice de Flexibilité.....	19
I.9 Les Matériaux Composites Unidirectionnels.....	20
I.9.1 La Relation d'élasticité dans un Repère Local.....	21
I.9.2 Les Constantes de Rigidité dans le Repère Local (L,T).....	21
I.9.3 Les Constantes de Souplesse dans le Repère Local (L,T).....	22
I.9.4 La Relation d'élasticité dans le Repère Global (X,Y).....	22
I.9.5 Les Constantes de Rigidité dans le Repère Global (X,Y).....	22
I.9.6 Les Constantes de Souplesse dans le Repère Global (X,Y).....	23
I.10 Les Contraintes Planes.....	24
I.10.1 Etat de Contrainte Plane.....	24
I.10.2 Matrice de Rigidité Réduite dans les Axes Principaux du Repère Local.....	24
I.10.3 Matrice de Rigidité Réduite de Chaque Pli du Stratifié (X,Y).....	25
I.11 Critère de Rupture.....	25
I.11.1 Critère de la Contrainte Maximale.....	26
I.11.2 Critère de la Déformation Maximale.....	26
I.11.2 Critère de la Déformation Maximale.....	26
I.11.3 Critère de Tsai-Hill.....	27

Conclusion du Chapitre I.

CHAPITRE II

Comportement Thermoélastique des Plaques Minces

II.1 Théorie classique des Stratifiés.....	28
II.2 Champ des Déformations.....	29
II.2.1 L'expression du Champ des Déformation	29
II.3 Champ des Contraintes.....	31
II.3.1 Forme du Champ des Contraintes.....	31
II.3.2 Expression des Contraintes.....	32
II.4 Expression des Résultantes et Moments.....	32
II.4.1 Résultante en Membrane	32
II.4.2 Moments de Flexion et de Torsion.....	34
II.5 Equation du Comportement Mécanique d'un Stratifié.....	35
II.5.1 Equation Constitutive.....	35
II.5.2 Détermination des Déformation et des Contraintes.....	36
II.5.3 Déformation en Membrane et Courbures.....	36
II.5.4 Champ des Déformations.....	36
II.5.5 Champ des Contraintes.....	37
II.6 Comportement Thermoélastique.....	37
II.6.1 Equation du Comportement des Stratifiés en tenant Compte des Phénomènes de Dilatation.....	37
II.6.2 Coefficients d'expansion Thermique pour les Unidirectionnels.....	38
II.6.3 Déformations Thermiques dans les Stratifiés.....	38
II.6.4 Relation Thermiques.....	39
II.6.4.1 Contraintes et Déformations.....	39
II.6.4.2 Contraintes Résiduelles.....	40
II.7 L'équation Constitutive Thermoélastique.....	42

Conclusion du Chapitre II.

CHAPITRE III

Code de Calcul et Simulation

III.1 Organigrammes.....	44
III.1.1 Organigramme de L'analyse Mécanique.....	44
III.1.2 Organigramme de L'analyse Thermique.....	49
III.2 Effet de la Variation de la Température T sur les Matériaux Composites.....	54
a). Choix du Matériau Composites.....	55
b). Critère de Rupture.....	55
c). Résultats.....	56
d). Interprétation.....	56

Conclusion du Chapitre III.

CHAPITRE IV

Graphes et Interprétation

IV.1 Analyse Mécanique.....	58
IV.2 Analyse Thermoélastique.....	60
a). Interprétation.....	87
IV.3 Prévision du Comportement Thermoélastique avec Prise en Compte de l'effet de Température sur les Propriétés Mécaniques.....	89
a). Interprétation des résultats.....	99

*Conclusion.....*101

Bibliographie

Annexes

List des figures et tableaux

CHAPITRE I

Figure (I.1) : Constitution d'un Matériaux Composite.....	04
Figure (I.2) : La Structure Cristalline du Graphite.	07
Figure (I.3) : Matériau Isotrope / Anisotrope.....	12
Figure (I.4) : Effet de l'anisotropie lors des Déformations	12
Figure (I.5) : Constitution d'un Stratifié.....	13
Figure (I.6) : Poutre Sollicitée en Flexion.	14
Figure (I.7) : Matériaux Sandwichs à âmes Pleines	15
Figure (I.8) : Constitution d'un Matériau Sandwich.	15
Figure (I.9) : Le Repère Local (L,T) lié à une Couche de Composite	17
Figure (I.10) : Le Repère Global (X,Y)	17
Tableau (I.1) : Constitution d'un Panneau Sandwich	17

CHAPITRE II

Figure (II.1) : Schématisation des Déformations.....	27
Figure (II.2) : Coefficients d'expansions Thermique d'un Stratifié Unidirectionnel.	37

CHAPITRE III

Figure (III.1) : organigramme de calcul des contraintes mécaniques.....	45
Figure (III.2) : Epaisseur du stratifié Verre époxyde.....	45
Figure (III.3) : Organigramme de calcul thermique.....	50
Figure (III.4) : Configuration du stratifié verre époxyde.....	50
Figure (III.5) : Organigramme des propriétés mécaniques.....	55
Figure (III.6) : Configuration du stratifié Graphite époxyde.....	55
Tableau (III.1) : propriétés mécanique du stratifié Verre époxyde.....	45
Tableau (III.2) : propriétés thermique du stratifié Verre époxyde.....	50
Tableau (III.3) : Table caractéristiques de fibres et matrice du graphite époxyde.....	55

Tableau (III.4) : Caractéristiques du T300/5208 selon Tsai.....	56
Tableau (III.5) : Propriétés du graphite époxyde.....	56
Tableau (III.6) : Résistance du composite T300/5208.....	56
Tableau (III.7) : Propriétés mécaniques en fonction de la température.....	56
Tableau (III.8) : Résistance à la rupture en fonction de la température.....	57

CHAPITR IV

Figure (IV.1) : Déformation mécanique dans le stratifié verre époxyde [30°/-15°/-30°/15°]	59
Figure (IV.2) : Contrainte mécanique dans le stratifié verre époxyde [30°/-15°/-30°/15°].....	60
Figure (IV. 3) : Déformations résiduelles dans le stratifié [90°/0°/90°] pour T=20°c T_p=120°c.....	61
Figure (IV.4) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [90°/0°/90°] pour T=20°c T_p=120°c.	62
Figure (IV.5) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=20°c , T_p=120°c.	63
Figure (IV.6) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=20°c, T_p=120°c	64
Figure (IV.7) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=40°c , T_p=120°c..	65
Figure (IV.8) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=40°c, T_p=120°c.....	66
Figure (IV.9) : Déformation thermique dans le stratifié T300/5208 [45°/-45°/-45°/45°] pour T=60°c, T_p=120°c	67
Figure (IV.10) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=60°c, T_p=120°c.....	68
Figure (IV.11) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié	

[45°/-45°/-45°/45°] pour T=80°C, T _p =120°C.....	69
Figure (IV.12) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] Pour T=80°C, T _p =120°C	70
Figure (IV.13) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] Pour T=100°C, T _p =120°C.....	71
Figure (IV.14) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] Pour T=100°C, T _p =120°C	72
Figure (IV.15) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°]Pour T=20°C, T _p =180°C	73
Figure (IV.16) : Contrainte thermique pour leT300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] Pour T=20°C, T _p =180°C	74
Figure (IV.17) : déformations Déformation pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°]Pour T=40°C, T _p =180°C	75
Figure (IV.18) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] Pour T=40°C, T _p =180°C	76
Figure (IV.19) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°]Pour T=60°C, T _p =180°C	77
Figure (IV.20) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] Pour T=60°C, T _p =180°C.	78
Figure (IV.21) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°]Pour T=80°C, T _p =180°C	79
Figure (IV.22) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] Pour T=80°C, T _p =180°C	80
Figure (IV.23) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] pour T=100°C, T _p =180°C.	81
Figure (IV.24) : Contrainte thermique pour leT300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] pour T=100°C, T _p =180°C	82
Figure (IV.25) : Déformation thermique pour le stratifié T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] pour T=120°C, T _p =180°C.....	83
Figure (IV.26) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié	
[45°/-45°/-45°/45°] pour T=120°C, T _p =180°C	84

Figure (IV.27) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T=140^{\circ}\text{C}$, $T_p=180^{\circ}\text{C}$	85
Figure (IV.28) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T=140^{\circ}\text{C}$, $T_p=180^{\circ}\text{C}$	86
Figure (IV.29) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T=160^{\circ}\text{C}$, $T_p=180^{\circ}\text{C}$	87
Figure (IV.30) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T=160^{\circ}\text{C}$, $T_p=180^{\circ}\text{C}$	88
Figure (IV.31) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=20^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	89
Figure (IV.32) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=20^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	90
Figure (IV.33) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=40^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	91
Figure (IV.34) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $t_{opr}=40^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	92
Figure (IV.35) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=60^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	93
Figure (IV. 36) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T_{opr}=60^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	94
Figure (IV.37) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T_{opr}=80^{\circ}\text{C}$ $T_p=120^{\circ}\text{C}$	95
Figure (IV.38) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T_{opr}=80^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	96
Figure (IV.39) : Déformation thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T_{opr}=100^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	97
Figure (IV.40) : Contrainte thermique pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=100^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$	98
Tableau (IV.1) : Contraintes Thermiques à la rupture.....	88
Tableau (IV.2) : Contraintes Thermiques du Modèle de Tsai.....	99
Tableau (IV.3) : Contraintes Thermiques Maximales.....	100

NOMENCLATURE

- (L, T) : Repère local de stratifié.
- (X, Y) : Repère global du stratifié.
- E_f^l : Module d'élasticité longitudinale de fibre. (Gpa).
- E_f^t : Module d'élasticité transversale de fibre. (Gpa).
- G_f : Module de glissement de fibre.(Gpa).
- ν_f : Coefficient de poisson de fibre.
- ρ_f : masse volumique de la fibre.(kg/m³).
- E_m : Module d'élasticité longitudinale de la matrice. (Gpa).
- G_m : Module de cisaillement de la matrice. (Gpa).
- ν_m : Coefficient de poisson de la matrice.
- ρ_m : masse volumique de la matrice. (kg/m³).
- V_f : Fraction de fibre en volume.
- V_m : Fraction de matrice en volume.
- ρ : Masse volumique. (kg/m³).
- ν_{LT} : coefficient de poisson.
- E_L : Module d'élasticité longitudinale. (Gpa).
- E_T : Module d'élasticité transverse. (Gpa).
- G_{LT} : Module de cisaillement. (Gpa).
- N : Nombre du Couche.
- h_k : Cote du pli d'ordre k.
- e_k : Epaisseur du la Couche k.
- M : Point matériel.
- u_0 : Déplacement du point M suivant l'axe x.
- v_0 : Déplacement du point M suivant l'axe y.

- w_0 : Déplacement du point M suivant l'axe z.
- c : cosinus θ .
- s : sinus θ .
- $[T]$: Matrice de Transfert.
- $[T']$: Matrice de Inverse de la matrice $[T]$.
- Q_{ij}, C_{ij} : Constantes de rigidité dans le repère (L, T).
- Q'_{ij}, C'_{ij} : Constantes de rigidité dans le repère (x, y).
- $[Q]$: Matrice de rigidité réduite dans le repère (L, T).
- $[Q']$: Matrice de rigidité réduite dans le repère(x, y).
- $[S]$: Matrice de flexibilité ou matrice souplesse.
- S_{ij} : Constantes de flexibilité ou constantes de souplesse.
- S_{ij} : Constantes de souplesse dans le repère (L, T).
- S'_{ij} : Constantes de souplesse dans le repère(x, y).
- $[A]$: Matrice de rigidité en membrane.
- $[B]$: Matrice de couplage membrane- flexion –torsion.
- $[D]$: Matrice de rigidité en flexion.
- N_x, N_y : Efforts résultant respectivement dans la direction x et y.
- M_x, M_y : Moments fléchissant respectivement dans la direction x et y.
- $\sigma(M)$: Tenseur des contraintes.
- $\varepsilon(M)$: Tenseur des déformations.
- $\varepsilon^0_{xx}, \varepsilon^0_{yy}, \varepsilon^0_{xy}$: Déformation en membrane.
- $\varepsilon^f_{xx}, \varepsilon^f_{yy}, \varepsilon^f_{xy}$: Déformations en flexion et en torsion.
- $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$: Contraintes normales, suivant (L, T).
- $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$: Contraintes normales respectivement suivant les axes x, y et le plan (x, y).
- $\varepsilon_L, \varepsilon_T, \gamma_{LT}$: Déformations linéaires respectivement suivant les axes L, T et le plan (L, T).
- $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$: Déformations linéaires respectivement suivant les axes x, y et le plan (x, y).

- α_L, α_T : Coefficient de dilatation thermique. ($^{\circ}\text{C}$)
- $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$: Coefficients de dilatations thermiques dans le repère (x, y).
- e_L, e_T, e_{LT} : Les déformations thermiques, dans les axes principaux (L, T).
- E_x, E_y, E_{xy} : Les déformations thermiques, dans les axes du stratifié (x,y).
- t_k : épaisseur de la couche k.(mm)
- $[M']_{x,y}$: Moments thermiques.
- $[N']_{x,y}$: Forces thermiques.
- ΔT : La variation de température. ($^{\circ}\text{C}$).
- T : température de l'enveniment. ($^{\circ}\text{C}$).
- T_p : température de polymérisation. ($^{\circ}\text{C}$).
- X_t, X_c : Contrainte longitudinal à la rupture respectivement en traction et en compression.
- Y_t, Y_c : Contrainte transversale à la rupture respectivement en traction et en compression.
- X_{et}, X_{ec} : le déformation à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression.
- Y_{et}, Y_{ec} : le Déformation à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et compression.
- S_e : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche, ou les axes longitudinal est les axes principaux de la couche.
- a, b, c, f, h, e : Constantes du modèle de Tsai à une température de référence

INTRODUCTION

Introduction

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu en offrant une meilleure isolation thermique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans le domaine aéronautique et aérospatial particulièrement les composites interviennent de plus en plus comme éléments de construction à cause de leurs performances remarquables qui sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. Les chiffres sont passés de sept pour cent dans les années 80 à 20 pour cent aujourd'hui. Une nouvelle croissance à environ 40 à 60 pour cent est attendue.

Le problème auquel sont confrontées les structures aérospatiales c'est celles sont soumises à des variations de température, d'humidité, de rayonnement ultraviolet, de thermo-oxydation..., qu'on identifie comme vieillissement sous conditions environnementales, durant leur usage structurale. En conséquences le caractère hétérogène et anisotrope des matériaux composites induit des effets structuraux spécifiques, qui peuvent avoir des conséquences pénalisantes et irréversibles sur la structure .L'intérêt industriel et sécuritaire fait qu'il est nécessaire de prendre en compte les paramètres environnementaux lors de toute tentative de modélisation et de prévision du comportement des composites au cours d'études sur les mécanismes d'endommagements.

L'intérêt de notre étude porte sur le paramètre environnementale « température ». Lorsque les structures sont soumises a un gradient de température, la vibration moléculaire des composites est déclenchée causant une réduction des propriétés mécaniques en particulier la rigidité ; le matériau devient plus ductile et plus fragile.

Il est donc impératif de pouvoir prévoir le comportement des structures composites sous des sollicitations thermiques. Particulièrement en aéronautique les recherches vont actuellement dans l'étude du type de matériau qui servira à la partie ailes et ailerons du futur avion européen supersonique (EADS), celui ci doit répondre aux variations de température allant de -55°C à 140°C qui marque le passage lors du vol, du régime subsonique au régime supersonique. Les principales investigations qui ont été faites pour ce type d'études est souvent l'expérimentation avec la simulation des conditions réelles sur le matériau par l'accomplissement de cycles de vieillissement accélérés. Mais ces des méthodes qui restent conditionnées par la méthodologie expérimentale nécessitent plusieurs tests.

Ainsi notre étude s'intéresse à la thermoélasticité, elle est axée principalement sur la prise en compte de l'effet de la température sur les propriétés mécaniques en premier, le modèle de Tsai a été choisi, puis sur le comportement thermoélastique des matériaux composites. Nous avons élaboré un programme de calcul en fortran qui détermine les contraintes et les déformations thermiques avec la prise en compte du vieillissement thermique.

Pour mener à bien cette étude, nous avons suivi un plan de travail basé sur quatre chapitres :

Le premier chapitre, traite les généralités sur les matériaux composites, la constitution, la classification, l'architecture et les lois de comportement des matériaux composites.

Dans le deuxième chapitre on passe au comportement thermoélastique des plaques minces, ou en fait appel à la théorie classique des stratifiés pour la description des champs de contrainte et de déformations.

Dans le troisième chapitre, on expose les codes de calculs, les organigrammes ainsi que les simulations.

Le quatrième chapitre, intitulé graphe et interprétation, expose les résultats numériques sous forme de graphes.

A la fin, on termine par une conclusion générale.

CHAPITRE I

Généralités sur les Matériaux Composites

CHAPITRE I

Généralités sur les Matériaux Composites

Dans ce chapitre nous donnons les principales définitions liées aux composites d'une manière aussi complète que possible et nous abordons la micro-analyse des composites unidirectionnels, On expose par la suite les effets de la température sur les propriétés mécaniques en tenant compte des lois de comportement.

I.1 Définition d'un Matériaux Composite

Dans un sens large, le mot « composite » signifie « constitué de deux ou plusieurs parties différentes ». On appelle de façon courante « matériaux composites » des arrangements de fibres continues ou non d'un matériau résistant (**le renfort**) qui sont noyées dans une **matrice** dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible, la matrice conserve la disposition géométrique des fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce. L'ensemble « renfort – matrice » se complète et permet de aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [1]

I.2 Constitution d'un Matériaux Composite

Un matériau composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. D'un point de vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène, et le composite est constitué d'une matrice et d'un renfort.

Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

- La nature, la texture et la forme du renfort.
- Le taux de renforcement.
- La nature de la résine et des charges ou additifs.
- La qualité de l'interface renfort-matrice.

- La géométrie de la pièce à réaliser.
- Le procédé de mise en œuvre utilisé.

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise. [2]

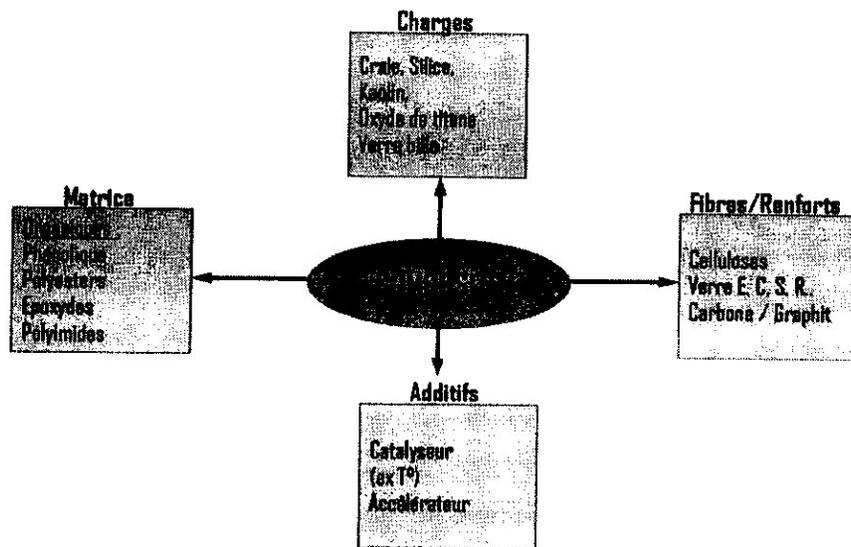


Figure (1.1) : Constitution d'un Matériaux Composite.

1.2.1 Les Résines

Les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

Deux grandes familles de résines polymères existent : les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables. Ces deux types de résine peuvent être modulés ou mis en forme, pour donner soit un produit fini, soit un produit semi-fini dont la forme peut être modifiée.

Les résines thermoplastiques, dont la fabrication atteint de loin le plus gros tonnage du fait d'un faible coût, possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines

peuvent donc être récupérées et facilement recyclées. Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle, le polyéthylène, le polypropylène, polystyrène polyamide, le poly carbonate, etc.

Par contre, les résines thermodurcissables ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois, possédant ainsi des propriétés mécaniques et surtout thermomécaniques plus élevées que les résines thermoplastiques. Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- Les résines polyesters insaturées : polyesters condensés, dérivés allyliques, etc.,
- Les résines de condensation : phénoliques, aminoplastes, furaniques, etc.,
- Les résines époxydes.

Les résines thermostables se distinguent essentiellement des autres résines par leurs performances thermiques, puisque dans ces résines nous retrouvons les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace. Parmi les résines thermostables, nous citons : les résines bismaléimides et les résines polyimides. [1]

I.2.2 Les Charges et Additifs

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût. L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre.

Les charges incorporées sont soit renforçant pour l'amélioration des caractéristiques mécaniques de la résine, ou non renforçant pour diminuer le coût des résines en conservant leurs performances.

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelque % et moins) et interviennent comme : lubrifiants et agents de démoulage, pigments et colorants, agents anti-retrait, agents anti-ultraviolets.

I.2.3 Les Fibres et Tissus

Les matériaux de renfort confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenu au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques. Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, faible coût, etc. En fonction des utilisations, les renforts peuvent être d'origines diverses : végétale, minérale, artificielle, synthétique. Toutefois, les renforts les plus utilisés se présentent sous formes de fibres ou formes dérivées.

Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- Sous forme linéique (fils, mèches, etc.),
- Sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats, etc.),
- Sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.). [1]

I.2.4 Les Principales Types de Fibres

I.2.4.1 Les Fibres de Verre

Les fibres de verre sont élaborées à partir d'un verre filable, appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites.

I.2.4.2 Les Fibres de Carbone

Le graphite a une structure hexagonale d'atomes de carbone, disposés en plans cristallographiques parallèles. Ces plans décalés de telle sorte qu'un atome de carbone se projettent au milieu d'un hexagone des plans voisins. Les liaisons entre atomes voisins de même plan sont fortes, et donnent au graphite des propriétés mécaniques élevées dans la direction parallèle aux plans cristallographiques. L'étude théorique des liaisons prévoit dans cette direction un module d'Young de 1200 GPa et une résistance à la rupture de 20000 MPa.

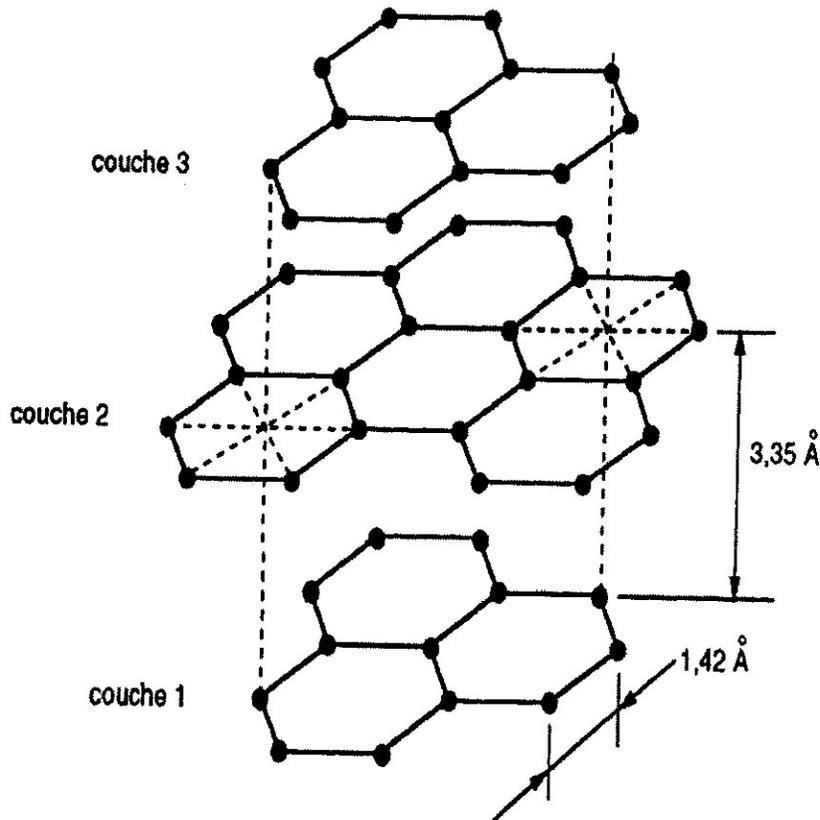


Figure (1.2) : La Structure Cristalline du Graphite.

D'autre part, la masse volumique faible (inférieure à 2000 kg/m^3) conduit à des propriétés mécaniques spécifiques théoriques remarquablement élevées. [1]

I.2.4.3 Les Fibres Aramides

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont généralement connues sous le nom de « Kevlar », nom commercial de la fibre mise au point par Dupont de Nemours (USA), et commercialisée en 1972.

Ces fibres sont des poly aramides ou polyamides aromatiques de synthèse dont la structure est constituée de noyaux benzéniques reliés par des groupes CO et HN. L'élaboration des fibres est effectuée par synthèse à basse température (-10°C), puis par filage en solution. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

I.2.4.4 Les Fibres Céramiques

Diverses fibres de matériaux réfractaires ou céramiques (carbures, borures, nitrures, etc.) peuvent être élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un

fil support. Actuellement, les fibres obtenues par ce procédé, et faisant l'objet d'une production sont :

- Les fibres de bore (**B**),
- Les fibres de bore (**B**) – carbure de bore (**B₄C**),
- Les fibres de carbure de silicium (**SiC**),
- Les fibres de bore-carbure de silicium, appelées **BorSiC**.

I.2.4.5 Les Fibres Synthétiques Thermostable

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse, et qui conservent leurs caractéristiques mécaniques à températures élevées. Associées à des résines thermostables, elles permettent d'obtenir des matériaux dont les caractéristiques mécaniques en température sont conservées. Les caractéristiques mécaniques de ces fibres sont toutefois nettement plus faibles que celles des fibres usuelles. Elles sont utilisées dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques : boucliers de missiles, cônes de rentrée de véhicule spatial, etc. Parmi ces fibres, nous avons :

- Le Kermel élaboré par Rhône-Poulenc,
- Le Nomex développé par Dupont de Nemours,
- Le Kynol fabriqué par Nippon kynol,
- La fibre PBI (polybenzimidazole) élaboré par Hoechst-Celanese,
- La fibre Apyeil de Unitika Ltd.

I.2.4.6 Autres Fibres

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte de rupture, excepté les fibres métalliques. Parmi ces fibres nous avons :

- Les fibres d'origine végétale : le bois, le sisal, le jute, le lin, etc.,
- Les fibres d'origine minérale : l'amiante, la silice,
- Les fibres synthétiques : polyester, polyamides, polyéthylène,
- Les fibres métalliques : acier, cuivre, aluminium.

I.3 Classification des Matériaux Composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

I.3.1 Classification Suivant la Forme des Constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés :

I.3.1.1 Composites à Fibres

Un matériau composite à fibres possède un renfort sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, L'arrangement des fibres, et leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécaniques.

I.3.1.2 Composites à Particules

On parle de composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules et sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Des particules de métaux fragiles tels que le tungstène, le chrome et le molybdène incorporées dans des métaux ductiles augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

Les cermets sont également des exemples de composite métal-céramique à particules, adaptés à des utilisations à température élevée. Par exemple, les cermets à base d'oxydes sont utilisés pour les outils de coupe à vitesse élevée, et pour les protections à hautes températures.

Egalement, des particules d'élastomère peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au

choc, par diminution de la sensibilité à la fissuration.

Ainsi, les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse.

I.3.2 Classification Suivant la Nature des Constituants

C'est la seconde classification des matériaux composites après avoir vu la classification suivant la forme.

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés en composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

I.3.2.1 Composites à Matrice Organique (Résine, charges), avec :

- Des fibres minérales : verre, carbone, etc.,
- Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc.,
- Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

I.3.2.2 Composites à Matrice Métallique (Alliage légers et ultra légers

D'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- Des fibres métalliques : bore,
- Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium.

I.3.2.3 Composites à Matrice Minérale (Céramique), avec :

- Des fibres métalliques : bore,
- Des particules métalliques : cermets,
- Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métalliques ou minérales sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

I.4 Les Specificités des Matériaux Composites

Nous avons indiqué l'aptitude des matériaux composites à être conçus à la carte. D'autres raisons justifient leur développement, il est fondamental pour le concepteur de prévoir et de connaître aussi précisément que possible les caractéristiques géométriques et mécaniques d'un mélange « renfort-matrice » qui est la structure de base des pièces composites.

I.4.1 Isotropie et Anisotropie

Lorsqu'on aborde l'étude du comportement des corps élastiques sous charge (théorie d'élasticité), on est amené à mettre en évidence, avec des considérations et des moyens qui ne sont pas forcément compliqués, les propriétés fondamentales suivantes :

- Un corps élastique soumis à des contraintes se déforme de façon réversible ;
- En chaque endroit à l'intérieur du corps, on peut isoler des facettes privilégiées sur lesquelles ne s'exercent que des contraintes normales ;
- Les normales à ces facettes sont appelées directions principales pour les contraintes ;
- Une petite sphère du matériau entourant un point du corps devient après application du chargement – et donc sous l'effet des contraintes – un petit ellipsoïde.

La position de cet ellipsoïde dans l'espace relativement aux directions principales pour les contraintes permet de caractériser la nature isotrope ou anisotrope du matériau constitutif du corps considéré.

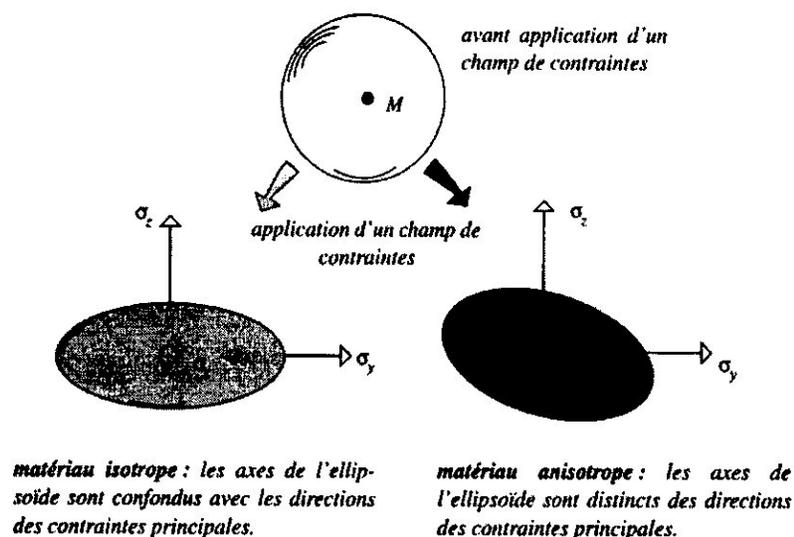


Figure (1.3) : Matériau Isotrope / Anisotrope.

Une manière simple de constater les effets de l'anisotropie lors de la déformation d'une pièce consiste à solliciter dans son plan une plaque de matériau anisotrope. Pour une plaque anisotrope, les traits obliques symbolisent par exemple la direction privilégiée suivant laquelle on a disposé les fibres du renfort. [2]

On peut constater que, pour une orientation quelconque du renfort, la même sollicitation uni axiale appliquée successivement à la plaque isotrope et à la plaque anisotrope provoque chez cette dernière, en plus des dilatations longitudinales et transversales, une distorsion angulaire caractéristique.

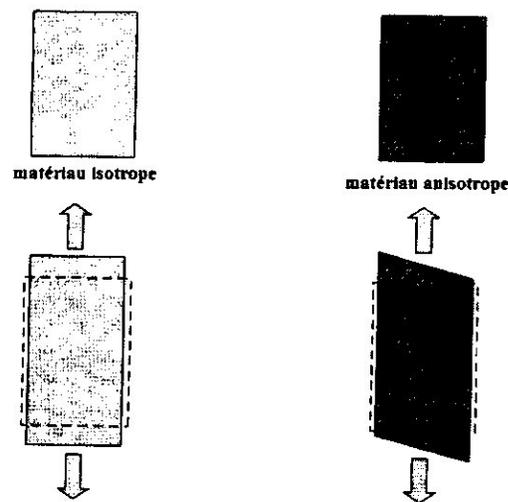


Figure (1.4) : Effet de l'anisotropie lors des Déformations.

I.4.2 Architecture des Matériaux Composites

L'objet de ce paragraphe est de dégager l'architecture générale des matériaux composites.

I.4.2.1 Les Stratifiés

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis) de renfort (fils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines.

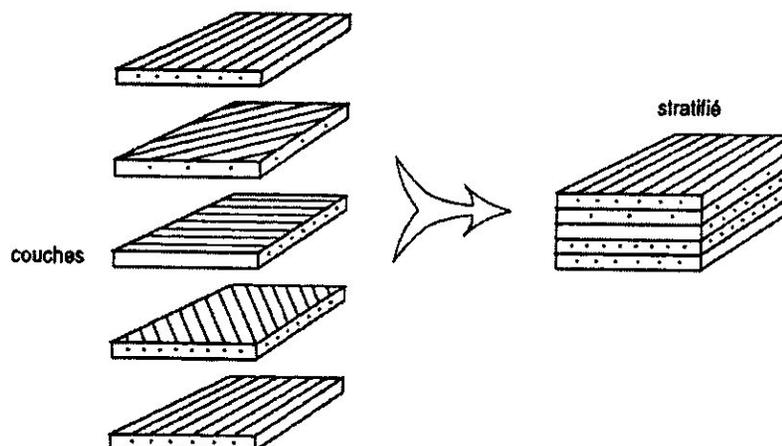


Figure (I.5) : Constitution d'un Stratifié.

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifiés, mats, issus, fibres de verre, fibres de carbone, etc. Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

- Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé ;
- Les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres ;
- Les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées : par exemple (fig. 1.6) couches unidirectionnelles dans la zone de traction, mat dans la zone de compression d'une poutre sollicitée en flexion ;
- Une stratification croisée sera sensible au délaminage inter laminaire ;
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage. [1]

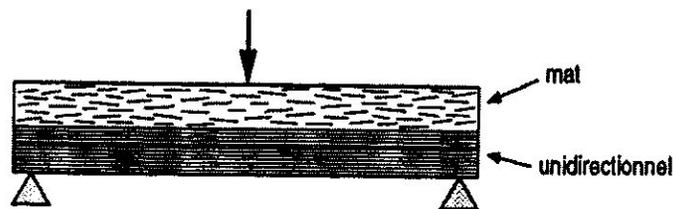


Figure (I.6) : Poutre Sollicitée en Flexion.

I.4.2.2 Les Stratifiés Hybrides

Les stratifiés hybrides permettent d'être plus performant en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides, on peut distinguer :

- Des hybrides inter couches, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente ;
- Des hybrides intra couches, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents ;
- Des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

I.4.3 Les Composites Sandwichs

Les structures dites « Sandwichs » occupent un large créneau dans la construction des pièces composites. Elles apparaissent dans quasiment tous les domaines d'applications. Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes. Dans la majorité des cas, on doit les confectionner dans un but bien spécifique ; cependant, certains matériaux sandwichs sont disponibles dans le commerce sous forme de semi-produits. On s'attache dans ce chapitre à mettre en évidence les principales propriétés et précautions d'emploi des matériaux sandwichs.

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux feuilles ou peaux (possédant de bonnes caractéristiques en traction). L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité. Généralement, le choix du matériau à pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.).

Les matériaux les plus couramment utilisés pour les âmes pleines sont :

- $\frac{3}{4}$ Le balsa ou bois cellulaire ;
- $\frac{3}{4}$ Diverses mousses cellulaires ;
- $\frac{3}{4}$ Des résines chargées de micro sphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques, etc.

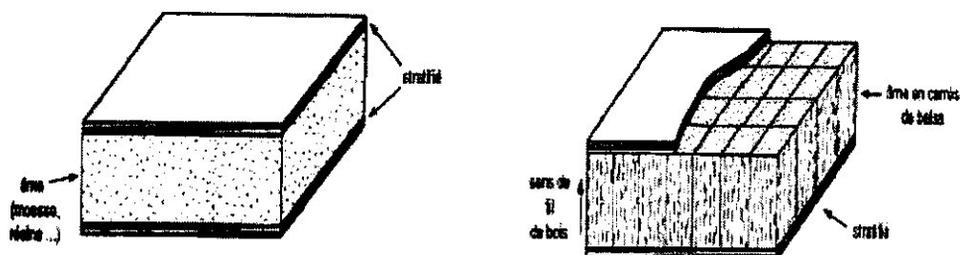


Figure (I.7) : Matériaux Sandwichs à âmes Pleines.

I.4.3.1 Les Matériaux Sandwichs

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage, ou soudure de deux revêtements ou peaux minces sur une âme ou cœur plus léger qui maintient leur

écartement comme il est montré sur la figure qui suit.



Figure (I.8) : Constitution d'un Matériau Sandwich.

I.4.3.2 Les Propriétés du Matériau Sandwich

- Une grande légèreté : à titre de comparaison, la masse d'une pale métallique pour l'hélice **Ratier Figeac** (FRA) est de 104 kg. La masse d'une même pale en sandwich est de 51 kg.
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des semelles (augmentation du moment quadratique de flexion),
- De grandes caractéristiques d'isolation thermique,
- Pas d'amortissement (mauvaise isolation acoustique),
- Tenue au feu médiocre pour certaines catégories d'âmes,
- Le flambement est plus important que dans les structures classiques.

I.4.3.3 Les Matériaux Constitutifs du Matériau Sandwich

Dans le tableau qui suit, nous citons des couples de matériaux compatibles pour constituer notre matériau sandwich :

Le Revêtement	Le Cœur
Métal stratifié contreplaqué Thermoplastique amiante/ciment	Matériaux expansés
Métal stratifié	Plaque nervurée en métal ou stratifiée
Contreplaqué stratifié	Planche de bois carton imprégnée (nids d'abeilles)
Aluminium stratifié	Aluminium déployé (nids d'abeilles)

Tableau (I.1) : Constitution d'un Panneau Sandwich.

L'assemblage des revêtements et du cœur est réalisé par collage avec des adhésifs de synthèse ; dans certains cas le revêtement et cœur sont soudés. La qualité du collage est naturellement fondamentale pour les performances et la durée de vie de la pièce. [2]

I.5 Les Repères [1]

I.5.1 Le Repère Principal (L,T) Local

Le repère principal (L,T) est lié à chaque couche de composite, la direction L est parallèle à la fibre « direction longitudinale » et la direction normale qui est perpendiculaire à la direction de fibre T est appelée direction transversale.

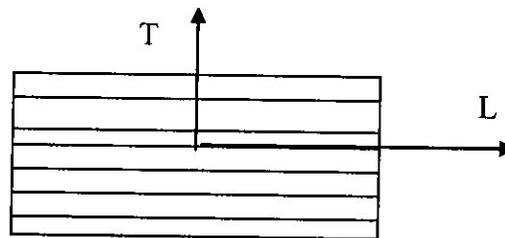


Figure (1.9) : Le Repère Local (L,T) lié à une Couche de Composite.

I.5.2 Le Repère Global du Stratifié (X,Y)

Les stratifiés étant élaborés par couches suivant des direction de fibres décalées d'une couche à une autre d'un angle θ , il est nécessaire de rapporté le comportement élastique de chaque couche à un système d'axe noté (X,Y,Z) appelé repère de stratifié.

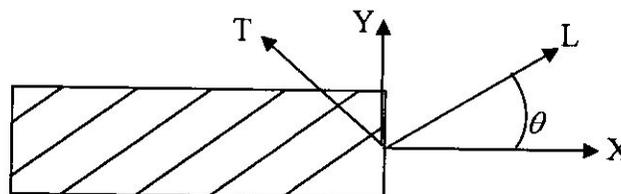


Figure (1.10) : Le Repère Global (X,Y).

Avec θ est l'angle que font le repère (L,T) et le repère (X,Y).

I.6 La Micro-Analyse

L'analyse des matériaux composites à l'échelle microscopique, met en cause les caractéristiques élémentaires des constituants (fibre et matrice). Notre étude s'intéresse

aux stratifiés unidirectionnelle, le comportement élastique de ce dernier est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants.

➤ *Fraction de fibre en volume :*

$$V_f = \frac{\text{masse des fibres}}{\text{volume total}} \quad (1.1)$$

➤ *Fraction de matrice en volume :*

$$V_m = \frac{\text{masse de la matrice}}{\text{volume total}} \quad (1.2)$$

$$\text{Ainsi, on aura :} \quad V_f + V_m = 1 \quad (1.3)$$

➤ *Module d'élasticité Longitudinal E_L :*

$$E_L = V_f E_f + V_m E_m \quad (1.4)$$

➤ *Module d'élasticité Transversal E_T :*

$$E_T = \frac{1 + 0.516 \left(\frac{V_m}{V_f} \right)}{\frac{1}{E_f} + \frac{0.516 \left(\frac{V_m}{V_f} \right)}{G_m}} \quad (1.5)$$

➤ *Module de Cisaillement ou Glissement G_{LT} :*

$$G_{LT} = \frac{1 + 0.316 \left(\frac{V_m}{V_f} \right)}{\frac{1}{G_{fx}} + \frac{0.316 \left(\frac{V_m}{V_f} \right)}{G_m}} \quad (1.6)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (1.7)$$

➤ *Coefficient de Poisson ν_{LT} et ν_{TL} :*

$$\nu_{LT} = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad (1.8)$$

I.7 Prise en compte de l'effet de température dans les propriétés mécaniques :

l'effet de température dans l'évaluation des caractéristiques mécaniques, l'effet de température et de concentration sur les propriétés a été introduits par la loi Tsai à travers la température adimensionnelles T^* :

$$T^* = \frac{T_g - T_{opr}}{T_g - T_{rm}} \quad \text{Avec :} \quad T_g = T_g^0 \quad (1.9)$$

Les propriétés des fibres et de la matrice en fonction de la température et de la concentration s'expriment en fonction de la température adimensionnelle :

$$\begin{aligned} E_m &= E_m^0 (T^*)^a \\ G_m &= G_m^0 (T^*)^a \\ \nu_m &= \nu_m^0 (T^*)^a \end{aligned} \quad (1.10)$$

Et :

$$\frac{E_{fx}}{E_{fx}^0} = \frac{E_{fy}}{E_{fy}^0} = \frac{G_{fx}}{G_{fx}^0} = \frac{\nu_{fx}}{\nu_{fx}^0} = (T^*)^f \quad (1.11)$$

Prise en compte de l'effet de température dans l'évaluation des résistances à la rupture on à :

$$X_L = X_L^0 \left(\frac{\nu_{fx}}{\nu_{fx}^0} \right) (T^*)^h \quad (1.12)$$

$$X'_L = X_L^0 \left(\frac{\nu_{fx}}{\nu_{fx}^0} \right) \left(\frac{G_{fx}}{G_{fx}^0} \right) (T^*)^e \quad (1.13)$$

$$\frac{Y_T}{Y_T^0} = \frac{Y'_T}{Y_T^0} = \frac{S}{S_0} = (T^*)^c \quad (1.14)$$

I.8 La Loi de Comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés.

I.8.1 La Matrice de Rigidité

Matrice de rigidité d'écrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié, au point $M_0(x,y) = M_0(x,y,0)$.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{46} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Les coefficients C_{ij} sont appelés les constantes de rigidité.

Dans un matériau composite unidirectionnel la matrice de rigidité sera écrite :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Avec : $C_{13} = C_{12}$, $C_{33} = C_{22}$, $C_{55} = C_{66}$, $C_{44} = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23})$

I.8.2 La Matrice de Flexibilité

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité, la matrice S est appelée la matrice de flexibilité ou matrice de souplesse, et s'écrit dans les cas générales :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{46} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Avec $S = C^{-1}$

Les coefficients S_{ij} sont appelés constantes de flexibilité ou constantes de souplesse.

Dans un matériau composite unidirectionnel la matrice de souplesse sera écrite :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Avec: $S_{13} = S_{12}$, $S_{33} = S_{22}$, $S_{55} = S_{66}$, $S_{44} = 2(S_{22} - S_{23})$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverse l'une de l'autre. Et le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants.

I.9 Les Matériaux Composites Unidirectionnels

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{46} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Ou sous forme condensée :

$$\sigma = C\varepsilon \quad (1.20)$$

Cette loi, généralement appelée **Loi de Hooke généralisée**, introduit la matrice de rigidité C symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants.

La relation d'élasticité peut être alors écrite sous la forme inverse, suivant :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{46} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Ou sous forme condensée :

$$\varepsilon = S\sigma \quad (1.22)$$

I.9.1 La Relation d'élasticité dans un Repère Local

Dans notre étude c'est à dire dans le cas de matériaux unidirectionnel l'équation d'élasticité est sous la forme suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

I.9.2 Les Constantes de Rigidité dans le Repère Local (L,T)

Les modules de l'ingénieur sont les modules de **Young**, les coefficients de **Poisson** et les modules de cisaillement, ces modules sont mesurés dans des essais simples que tels que des essais de traction uni axiale ou de cisaillement.

Ces modules sans liées aux constantes de rigidité, et elles s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L \\
 C_{12} &= 2K_L \nu_{LT} \\
 C_{22} &= G_{TT} + K_L \\
 C_{23} &= -G_{TT} + K_L \\
 C_{66} &= G_{LT}
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

I.9.3 Les Constantes de Souplesse dans le Repère Local (L,T)

Les constantes de souplesse dans le repère local (L,T) s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_L} & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_T} & S_{23} &= -\frac{\nu_{TT}}{E_T}
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

I.9.4 La Relation d'élasticité dans le Repère Global (X,Y)

De même on peut écrire l'équation dans ce repère sous la forme :

$$\sigma = C \varepsilon
 \tag{1.27}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}
 \tag{1.28}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}
 \tag{1.29}$$

Donc, on peut écrire : $\varepsilon = S \sigma$ (1.30)

I.9.5 Les Constantes de Rigidité dans le Repère Global (X,Y)

Les constants de rigidité d'un composite unidirectionnel, dont la direction des fibres fait un angle θ avec la direction x de référence :

$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 C'_{13} &= C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\
 C'_{14} &= 0 \quad , C'_{15} = 0 \\
 C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \cos^4 \theta \\
 C'_{23} &= C_{12} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta \\
 C'_{24} &= 0 \quad , C'_{25} = 0 \\
 C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 C'_{33} &= C_{22} \quad C'_{34} = 0 \quad C'_{35} = 0 \\
 C'_{36} &= (C_{12} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta \\
 C'_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta \\
 C'_{55} &= (C_{66} - \frac{C_{22} - C_{23}}{2}) \sin \theta \cos \theta \quad C'_{46} = 0 \\
 C'_{56} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta \quad C'_{56} = 0 \\
 C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

I.9.6 Les Constantes de Souplesse dans le Repère Global (X,Y)

Les constantes de souplesse d'un composite unidirectionnel, hors de ses axes principaux sont :

$$\begin{aligned}
 S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 S'_{13} &= S_{12} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta \\
 S'_{14} &= 0 \quad S'_{15} = 0 \\
 S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta \\
 S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{23} &= S_{12} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta \\ S'_{24} &= 0 \quad S'_{25} = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta \\ S'_{33} &= S_{22} \quad S'_{34} = 0 \quad S'_{35} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{36} &= 2(S_{12} - S_{23}) \cos \theta \sin \theta \\ S'_{44} &= 2(S_{22} - S_{32}) \cos^2 \theta + S_{66} \sin^2 \theta \\ S'_{45} &= [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] \sin \theta \cos \theta \quad S'_{46} = 0 \\ S'_{55} &= 2(S_{22} - S_{23}) \sin^2 \theta + S_{66} \cos^2 \theta \quad S'_{56} = 0 \end{aligned}$$

$$S'_{66} = 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

I.10 Les Contraintes Planes

I.10.1 Etat de Contrainte Plane

Un état de contrainte plane est un état de contrainte à deux dimensions, dont la direction z est la direction principale, le tenseur est caractérisé par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

I.10.2 Matrice de Rigidité Réduite dans les axes Principaux du Repère Local (L,T)

Elle est donnée par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$[\sigma] = [Q][\varepsilon] \quad (1.35)$$

Ces constantes de rigidité réduites sont :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \\
 Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22} \\
 Q_{66} &= G_{LT}
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

I.10.3 La Matrice de Rigidité Réduite de Chaque Pli du Stratifié (X,Y)

$$\left[Q' \right] = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 Q'_{22} &= Q_{22} \cos^4 \theta + Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 Q'_{26} &= (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 Q'_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{66} + Q_{12})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

I.11 Critères de Rupture

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre au concepteur, d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés, d'une manière générale, la résistance mécanique d'un matériau correspond soit à la rupture réelle du matériau, soit à la limite du domaine élastique.

Il existe plusieurs critères de rupture :

- Le critère de la contrainte maximale.
- Le critère de la déformation maximale.
- Le critère de Tsai-hill.

I.11.1 Critère de la Contrainte Maximale

Le critère de la contrainte maximale dans les axes principaux fait intervenir :

- X_t et X_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression.
- Y_t et Y_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et compression.
- S : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche, ou les axes longitudinal est les axes principaux de la couche.

Et le critère de la contrainte maximale s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} X_c < \sigma_L < X_T \\ Y_c < \sigma_T < Y_T \\ -S < \sigma_{LT} < S \end{aligned} \quad (1.39)$$

I.11.2 Critère de la Déformation maximale

Le critère de la déformation maximale est assez similaire au critère de la contrainte maximale, le critère de la déformation maximale fait intervenir :

- X_{et} et X_{ec} : le déformation à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression.
- Y_{et} et Y_{ec} : le Déformation à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et compression.
- S_e : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche, ou les axes longitudinal est les axes principaux de la couche.

Et le critère de la contrainte maximale s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 X_{\varepsilon c} < \sigma_L < X_{\varepsilon T} \\
 Y_{\varepsilon c} < \sigma_T < Y_{\varepsilon T} \\
 -S_{\varepsilon} < \sigma_{LT} < S_{\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

I.11.3 Critère de Tsai-Hill

Le critère de rupture de Tsai-Hill prend z=y dans le cas des matériaux composites unidirectionnels, le critère s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{\sigma_l}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_l * \sigma_t}{X^2}\right) + \left(\frac{\sigma_{ll}}{S_{ll}}\right)^2 = 1
 \tag{1.41}$$

Conclusion :

Les constantes de rigidités sont en fonction des propriétés mécaniques, alors la micro-analyse et les modèles de Tsai ont montrés la dépendance des propriétés des constituants matrice et fibres, de la température d'utilisation. Cet effet sera bien considéré lors de notre analyse thermoélastique.

CHAPITRE II

Comportement Thermoélastique des Plaques Minces

II.2 Champ des Déformations

II.2.1 L'expression du Champ des Déformations

Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{xz} &= 0 \\
 \gamma_{yz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{2.3}$$

La matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{2.4}$$

Le champ des déformations est la superposition :

➤ *Des déformations en membrane :*

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}
 \tag{2.5}$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (oxy) des points de ce plan.

➤ *Des déformations en Flexion et Torsion :*

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen de la cote z du point M . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (2.7)$$

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice de courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point $H(x, y, 0)$ s'expriment en fonction du déplacement transversal $w_0(x, y)$ de ce point par :

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ Suivant la direction } \vec{i}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ Suivant la direction } \vec{j}$$

Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_y \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_x \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \quad (2.10)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) & \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + z \kappa(x, y) \quad (2.13)$$

II.3 Champ des Contraintes

II.3.1 Forme du Champ des Contraintes

Le champ des contraintes dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k : les équations des contraintes [1].

$$\sigma_{xx} = Q'_{11} \varepsilon_{xx} + Q'_{12} \varepsilon_{yy} + Q'_{16} \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = Q'_{12} \varepsilon_{xx} + Q'_{22} \varepsilon_{yy} + Q'_{26} \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{xy} = Q'_{16} \varepsilon_{xx} + Q'_{26} \varepsilon_{yy} + Q'_{66} \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

Le tenseur des contraintes en M est sous la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$.

II.3.2 Expression des Contraintes

Les contraintes dans la couche k s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

avec

$$Q'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \quad (2.16)$$

Où Q'_k est la matrice de rigidité réduite de la couche k.

Les contraintes dans la couche k s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Où

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k \kappa(x, y) \quad (2.18)$$

$\sigma_k(M)$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$. la matrice de rigidité réduite Q'_k varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes, entre couches successives.

II.4 Expression des Résultantes et Moments

II.4.1 Résultante en Membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$ est défini :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (2.19)$$

Tel que :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

N_x, N_y, N_{xy} Sont les résultantes par unité de longueur, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement dans le plan (x, y).

La relation (2.18) se met sous la forme :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_k(M).dz \quad (2.21)$$

L'expression (2.21) associée à la relation (2.18) ou (2.19) conduit à l'expression des résultantes en membrane. Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q_k' \varepsilon(x, y) + z Q_k' \kappa(x, y)] dz$$

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (2.22)$$

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q_k' \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k' \right] \kappa(x, y)$$

Soit, en définitive :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B \kappa(x, y) \quad (2.23)$$

En introduisant les matrices

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q_k'$$

$$A = [A_{ij}] \text{ avec } A_{ij} = (h_k - h_{k-1}) (Q_{ij}')_k \quad (2.24)$$

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k'$$

$$B = [B_{ij}] \text{ Avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q_{ij}')_k \quad (2.25)$$

L'expression développée des résultantes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane $(\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0)$, mais sont également fonctions des courbures en flexion et torsion $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$.

II.4.2 Moments de Flexion et de Torsion

Les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié s'expriment comme suit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \sigma_k(M) dz \quad (2.27)$$

Tel que :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (2.21) des contraintes dans l'expression (2.27) soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q_k' \varepsilon(x, y) + z^2 Q_k' \kappa(x, y)] dz \quad (2.29)$$

Où

$$M_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k' \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_k' \right] \kappa(x, y) \quad (2.30)$$

Soit :

$$M_f(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + D \kappa(x, y) \quad (2.31)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_k'$$

$$D = [D_{ij}] \text{ Avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q_{ij}')_k \quad (2.32)$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Les moments de flexion et de torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, et des déformations en membrane. [1]

II.5 Equation du Comportement Mécanique d'un Stratifié

II.5.1 Equation Constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Suivant l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Soit sous la forme contractée:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Avec

[A] : la matrice de rigidité en membrane.

[D] : la matrice en flexion.

[B] : la matrice de couplage membrane –flexion -torsion.

Les divers couplages peuvent être observés et mis en évidence, le couplage traction-cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26} . Le couplage membrane-flexion résulte des termes B_{11} , B_{12} et B_{22} , alors que le couplage membrane-torsion résulte des coefficients D_{16} et D_{26} .

II.5.2 Détermination des Déformations et des Contraintes

Les problèmes de conception des structures en matériaux composites nécessite de résoudre le problème inverse, connaissant les résultantes en membrane et les moments et de trouver les déformations en membrane et les courbures, puis les contraintes.

II.5.3 Déformations en Membrane et Courbures

Les expressions des déformations en fonction des caractéristiques du stratifié, et des efforts et moment extérieurs est à partir de l'équation (2.36) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ K \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

II.5.4 Champ des Déformations

Le champ des déformations au point (x,y,z) est déterminé à partir des déformations en membrane et des courbures :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z \quad (2.38)$$

Compte tenu des hypothèses faites (schéma du 1^{er} degré). Les déformations $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$ varient linéairement dans l'épaisseur du stratifié.

Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation θ par rapport aux axes du stratifié, dans la couche k, et rapportées aux axes principaux (L,T) de cette couche, s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Avec :

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

II.5.5 Champ des Contraintes

Les contraintes dans la couche k sont ensuite obtenues sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}' & Q_{12}' & Q_{16}' \\ Q_{12}' & Q_{22}' & Q_{26}' \\ Q_{16}' & Q_{26}' & Q_{66}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Les contraintes, exprimées par rapport aux axes principaux de la couche, se calculent ensuite par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_K = T' \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_K \quad (2.42)$$

avec

$$T' = [T'(-\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

II.6 Comportement Thermoélastique

II.6.1. Equation du Comportement des Stratifiés en tenant Compte des Phénomènes de Dilatation

Dans la pratique, les structures sont soumises à des variations de température aussi bien durant leur mise en œuvre qu'au cours de leur utilisation, le premier effet de variation de la température est de modifier la rigidité et les caractéristiques à la rupture du matériau.

La variation de la température, produit une dilatation thermique (extension ou contraction) du matériau. Les phénomènes de dilatation thermique, peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x,y,z) à l'instant (t) sous la forme :

$$e_{i(thermique)}^* = \alpha_i \Delta T(x; y; z; t) \quad i=1.2.3...6 \quad (2.44)$$

ou α_i sont les coefficients de dilatation thermique, et ΔT est la variation de température à partir d'une température de référence, pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme étant égales à zéro. La répartition des

températures dans la structure et au cours du temps, est déterminée à partir des phénomènes de transfert de chaleur. [3]

En incluant les effets des phénomènes de dilatation, les lois d'élasticités écrites dans un état de référence où les déformations dues aux phénomènes de dilatation sont nulles, doivent être modifiées et écrites respectivement sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + e_i^* \\ \sigma_i &= \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_i - e_i^*) \\ e_i^* &= e_{i(thermique)}^* \end{aligned} \quad i=1.2...6 \quad (2.45)$$

II.6.2. Coefficients d'expansion Thermique pour les Unidirectionnels

Le comportement thermique des stratifiés unidirectionnels est caractérisé par deux coefficients d'expansions thermiques α_L et α_T .

➤ Dans le repère (x, y) les coefficients de dilatations thermiques :

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_L m^2 + \alpha_T n^2 \\ \alpha_y &= \alpha_L n^2 + \alpha_T m^2 \\ \alpha_{xy} &= 2(\alpha_L - \alpha_T) mn \end{aligned} \quad (2.46)$$

Avec :

$$m = \cos \theta \quad \text{Et} \quad n = \sin \theta$$

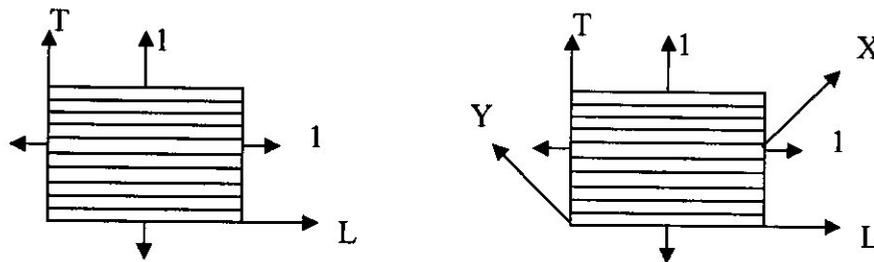


Figure (II.2) : Coefficients d'expansions Thermique d'un Stratifié Unidirectionnel.

II.6.3. Déformations Thermiques dans les Stratifiés

Lorsque le stratifié est soumis à un changement de température :

$$\Delta T = T - T_0 \quad (2.47)$$

Les déformations thermiques, dans les axes principaux du stratifié sont :

$$\begin{aligned} e_L &= \varepsilon'_L = \alpha_L \Delta T \\ e_T &= \varepsilon'_T = \alpha_T \Delta T \\ e_{LT} &= \varepsilon'_{LT} = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Les déformations thermiques, dans les axes du stratifié sont définis par :

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon'_x = \alpha_x \Delta T \\ e_y &= \varepsilon'_y = \alpha_y \Delta T \\ e_{xy} &= \varepsilon'_s = \alpha_s \Delta T \end{aligned} \quad (2.49)$$

II.6.4. Relation Thermiques

II.6.4.1. Contraintes et Déformations

Lorsque un stratifié unidirectionnel, est assujetti à des chargements thermiques (ΔT), l'état principale thermique $[\varepsilon]_{xy}^T$ dans le stratifié, est égale à la somme des déformations produites par les contraintes dans le stratifié.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k \quad (2.50)$$

et

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}' & Q_{12}' & Q_{16}' \\ Q_{21}' & Q_{22}' & Q_{61}' \\ Q_{61}' & Q_{62}' & Q_{66}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - e_x \\ \varepsilon_y - e_y \\ \gamma_s - e_s \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

d'ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}' & Q_{12}' & Q_{16}' \\ Q_{21}' & Q_{22}' & Q_{61}' \\ Q_{61}' & Q_{62}' & Q_{66}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z k_x - e_x \\ \varepsilon_y^0 + z k_y - e_y \\ \gamma_s^0 + z k_s - e_s \end{bmatrix}_k \quad (2.52)$$

Soit finalement :

$$[\sigma]_{x,y}^k = [Q]_{x,y}^k [\varepsilon^0]_{x,y} + [Q]_{x,y}^k [k]_{x,y} z - [Q]_{x,y}^k [e]_{x,y}^k \quad (2.53)$$

L'intégration des contraintes à partir de l'équation des contraintes à travers l'expression de chaque couche, donne la résultante en force :

$$[\sigma]_{x,y} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma]_{x,y}^k dz = \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \left\{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z [k]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \right\} dz \quad (2.54)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Les forces thermiques sont:

$$\begin{bmatrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k t_k \quad (2.56)$$

$t_k = h_k - h_{k-1}$, est l'épaisseur de la couche k.

Les moments thermiques résultants à travers les plis du stratifié :

$$[M]_{x,y}^t = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma]_{x,y} z dz = \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z[k]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \} z dz \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$[M']_{x,y}$ sont les moments thermiques définis comme :

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k \cdot z_k t_k \quad (2.59)$$

Donc le système sous forme contractée est :

$$\begin{bmatrix} N' \\ M' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

II.6.4.2. Contraintes Résiduelles

Les contraintes résiduelles, sont introduites dans les stratifiés multidirectionnels durant la fabrication, sur le plan microscopique les contraintes résiduelles sont introduites dans les couches unidirectionnelles autour des fibres à cause d'une imperfection dans les propriétés thermiques des constituants.

Des contraintes résiduelles sont aussi développées dans les couches à cause de l'anisotropie sur le plan macroscopique. [1]

Ces contraintes sont les contraintes thermiques résiduelles.

En l'absence de forces externes appliquées, $[N]=0$ et $[M]=0$, les relations thermiques se réduisent à :

$$\begin{bmatrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

L'inversion de ces relations, donne les déformations en membrane ε^0 et courbures $[k]$ produites par un chargement thermique seulement. Dans ce cas ces déformations sont aussi appelées les déformations non mécaniques.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{26} \\ b_{61} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_s \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{61} & d_{62} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_s \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Les déformations thermiques de la couche d'ordre k sont obtenues par l'équation :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Les déformations résiduelles dans chaque couche k sont données par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xe} \\ \varepsilon_{ye} \\ \gamma_{se} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelle}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k \quad (2.66)$$

Les contraintes résiduelles dans chaque couche k sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelle}} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xe} \\ \varepsilon_{ye} \\ \gamma_{se} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelle}} \quad (2.67)$$

Les contraintes résiduelles dans chaque couche sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LTy} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelle}} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelle}} \quad (2.68)$$

II.7 L'équation Constitutive Thermoélastique

L'équation constitutive thermomélastique sans chargement mécanique peut être explicitée comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_{xy} \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Remarque : Pour un chargement thermomélastique, les déformations en membrane et courbures, sont obtenues à partir de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ c_{11} & c_{12} & c_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{N_x} \\ \overline{N_y} \\ \overline{N_s} \\ \overline{M_x} \\ \overline{M_y} \\ \overline{M_s} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$\text{Avec : } \overline{N_{x,y,s}} = N_{x,y,xy}^t \quad (2.71)$$

$$\text{Et : } \overline{M_{x,y,s}} = M_{x,y,xy}^t \quad (2.72)$$

Soit sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Conclusion :

La variation de température engendre le développement des contraintes résiduelles non uniformes dans les plis même sans chargement mécanique. Leurs prises en compte sont nécessaires lors de l'analyse du stratifié.

Finalement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnements aux quelles ils sont soumis, ce qui introduit des déformations en l'absence de tout chargement mécanique, ces phénomènes sont la conséquence de la variation de température, induisant des déformations et des contraintes qui peuvent modifier considérablement le comportement mécanique des structures en composites.

CHAPITRE III

Code de Calcul

et

Simulation Numériques

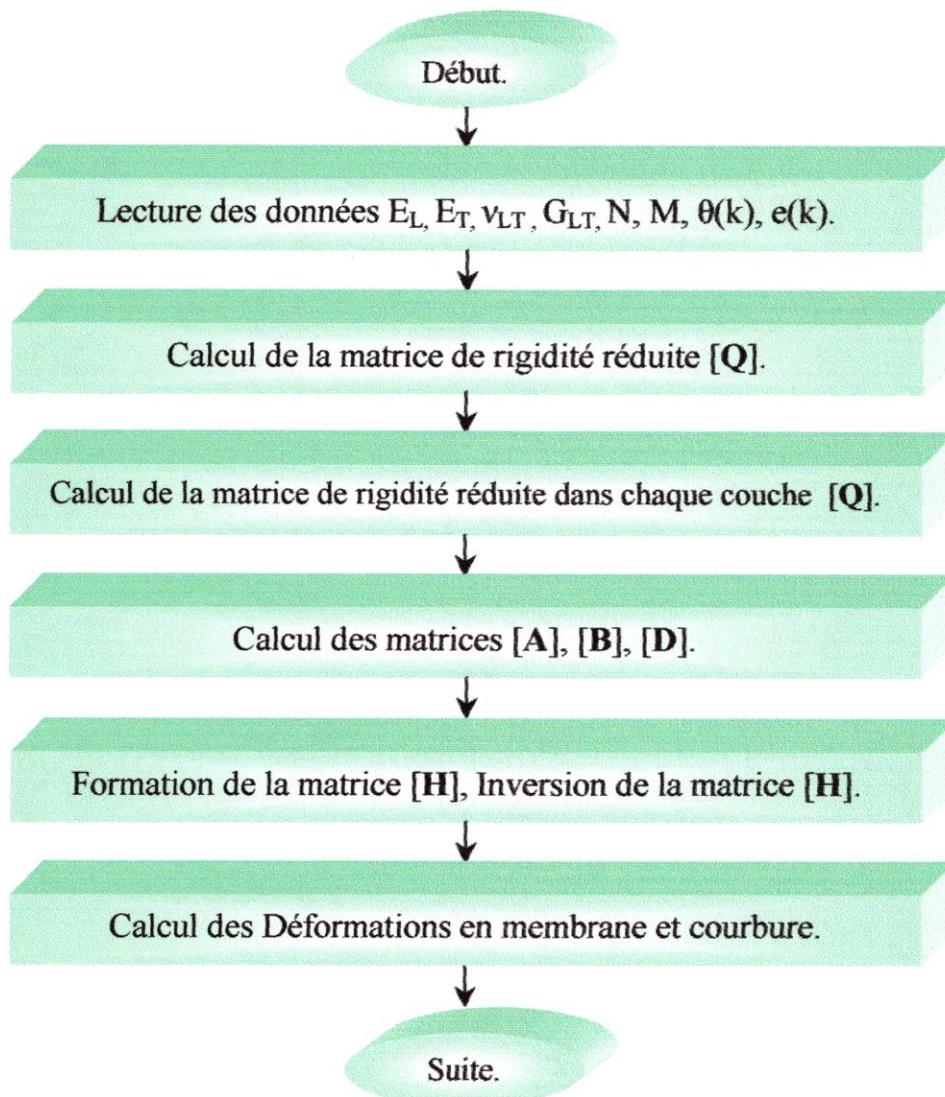
CHAPITRE III

Code de Calcul et Simulation

Avant d'aborder les organigrammes de l'analyse thermoélastique qui tiendra compte de l'effet du vieillissement thermique, nous donnons d'abord l'organigramme de l'analyse mécanique qu'on validera par la suite, puis celui de l'analyse thermoélastique et enfin celui des propriétés mécanique en fonction de la température. Nous présenterons à la fin de ce chapitre les résultats obtenus des différentes exécutions de notre code de calcul.

III.1 Organigrammes

III.1.1 Organigramme de l'Analyse Mécanique



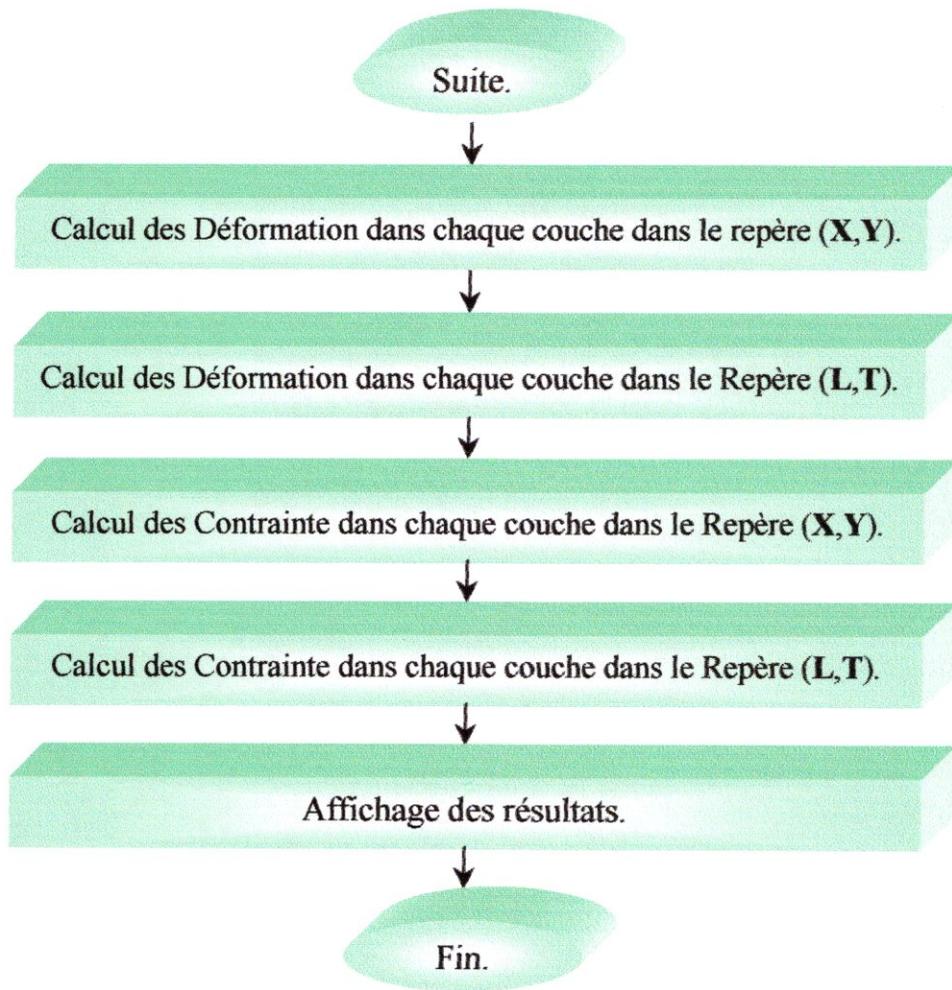


Figure (III.1) : Organigramme de Calcul des Contraintes Mécaniques.

a) Matériau utilisé :

Nous prenons comme matériau le verre époxyde [30/-15/-30/15], représenté sur la figure (fig. III.1), ayant les caractéristiques suivantes :

E_L (Gpa)	E_T (Gpa)	G_{LT} (Gpa)	ν_{LT}	N_x	N_y	N_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}
38.0	9.0	3.6	0.32	1.0	0.5	0.25	0	0	0

Tableau (III.1) : Propriétés mécanique du Verre époxyde.

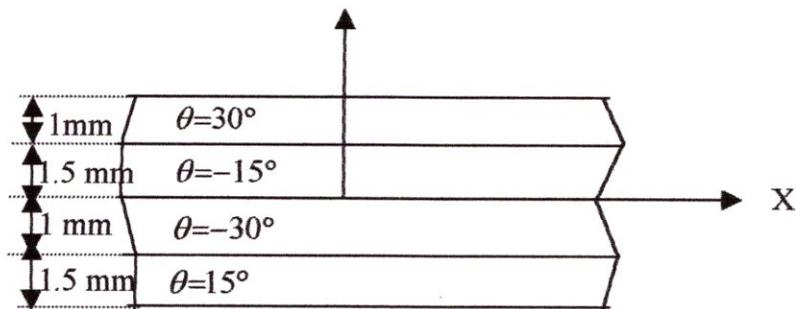


Figure (III.2) : Épaisseur du Stratifié Verre époxyde.

b) Résultats :

Les résultats obtenus sont validés, avec ceux mentionné sur la référence [1] :

a). Matrices de rigidité réduites exprimées dans les axes principaux Q :

```

38.945E+03  2.952E+03  000.000E-03
2.952E+03  9.224E+03  000.000E-03
000.000E-03  000.000E-03  3.600E+03

```

b). Matrices de rigidité réduites de chaque couches :

La matrice de rigidité de la 1^{ère} couche est:

```

35.212E+03  4.693E+03  6.732E+03
4.693E+03  9.473E+03  698.622E+00
6.732E+03  698.622E+00  5.342E+03

```

La matrice de rigidité de la 2^{ème} couche est:

```

26.290E+03  8.176E+03  -9.451E+03
8.176E+03  11.429E+03  -3.418E+03
-9.451E+03  -3.418E+03  8.825E+03

```

La matrice de rigidité de la 3^{ème} couche est:

```

35.212E+03  4.693E+03  -6.732E+03
4.693E+03  9.473E+03  -698.622E+00
-6.732E+03  -698.622E+00  5.342E+03

```

La matrice de rigidité de la 4^{ème} couche est:

```

26.290E+03  8.176E+03  9.451E+03
8.176E+03  11.429E+03  3.418E+03
9.451E+03  3.418E+03  8.825E+03

```

c). Matrices de rigidité [A], [B] et [D].

La matrice [A] est:

```

158.215E+03  30.432E+03  000.000E-03
30.432E+03  51.278E+03  000.000E-03
000.000E-03  000.000E-03  33.674E+03

```

La matrice [B] est:

```

-13.384E+03  5.225E+03  -1.615E+03
5.225E+03  2.934E+03  5.926E+03
-1.615E+03  5.926E+03  5.225E+03

```

La matrice [D] est:

```

327.385E+03  64.271E+03  60.686E+03
64.271E+03  107.317E+03  15.438E+03
60.686E+03  15.438E+03  71.025E+03

```

d). Matrices Constitutives :

La matrice [H] EST:

158.215E+03	30.432E+03	000.000E-03	-13.384E+03	5.225E+03	-1.615E+03
30.432E+03	51.278E+03	000.000E-03	5.225E+03	2.934E+03	5.926E+03
000.000E-03	000.000E-03	33.674E+03	-1.615E+03	5.926E+03	5.225E+03
-13.384E+03	5.225E+03	-1.615E+03	327.385E+03	64.271E+03	60.686E+03
5.225E+03	2.934E+03	5.926E+03	64.271E+03	107.317E+03	15.438E+03
-1.615E+03	5.926E+03	5.225E+03	60.686E+03	15.438E+03	71.025E+03

La matrice Inverse [H1] EST:

7.207E-06	-4.322E-06	69.155E-09	415.436E-09	-525.414E-09	278.649E-09
-4.322E-06	22.297E-06	279.230E-09	-187.383E-09	-42.073E-09	-1.810E-06
69.155E-09	279.230E-09	30.508E-06	1.032E-06	-1.921E-06	-2.730E-06
415.436E-09	-187.383E-09	1.032E-06	4.052E-06	-2.058E-06	-3.066E-06
-525.414E-09	-42.073E-09	-1.921E-06	-2.058E-06	10.747E-06	-445.116E-09
278.649E-09	-1.810E-06	-2.730E-06	-3.066E-06	-445.116E-09	17.154E-06

e). Le Vecteur des Déformations Rapportées aux axes (XY) sont :

5.064E-03	6.897E-03	7.836E-03	579.766E-06	-1.027E-03	-1.309E-03
-----------	-----------	-----------	-------------	------------	------------

Les déformations en membrane rapportées aux axes de référence (X,Y) :

5.064E-03	6.897E-03	7.836E-03.
-----------	-----------	------------

Les déformations en courbure rapportées aux axes de référence (X,Y):

579.766E-06	-1.027E-03	-1.309E-03.
-------------	------------	-------------

f). Les Déformations dans chaque Couche du Stratifié dans le Repère (X,Y) :

-2.5000E+00	3.6141E+00	9.4634E+00	11.1078E+00
-1.0000E+00	4.4838E+00	7.9234E+00	9.1445E+00
-1.0000E+00	4.4838E+00	7.9234E+00	9.1445E+00
000.0000E-03	5.0635E+00	6.8967E+00	7.8357E+00
000.0000E-03	5.0635E+00	6.8967E+00	7.8357E+00
1.5000E+00	5.9332E+00	5.3567E+00	5.8724E+00
1.5000E+00	5.9332E+00	5.3567E+00	5.8724E+00
2.5000E+00	6.5130E+00	4.3300E+00	4.5635E+00

g). Les Déformations dans chaque Couche du Stratifié dans le Repère (L,T) :

-2.5000E+00	6.7829E+00	6.2946E+00	12.5443E+00
-1.0000E+00	7.0003E+00	5.4068E+00	9.6392E+00
-1.0000E+00	1.3840E+00	11.0232E+00	1.5935E+00
000.0000E-03	2.1289E+00	9.8313E+00	2.3303E+00
000.0000E-03	3.2274E+00	8.7328E+00	5.8693E+00
1.5000E+00	4.4265E+00	6.8634E+00	5.3739E+00
1.5000E+00	8.3319E+00	2.9580E+00	2.4369E+00
2.5000E+00	7.9433E+00	2.8997E+00	391.2793E-03

h). Les Contraintes dans chaque Couche du Stratifié dans le Repère (X,Y) :

-2.5000E+00	246.4466E+00	114.3690E+00	90.2731E+00
-1.0000E+00	256.6252E+00	102.4901E+00	84.5643E+00
-1.0000E+00	96.2334E+00	95.9601E+00	11.2363E+00
000.0000E-03	115.4511E+00	93.4403E+00	-2.2840E+00
000.0000E-03	157.9182E+00	83.6225E+00	2.9509E+00
1.5000E+00	194.5287E+00	74.4869E+00	-12.3143E+00
1.5000E+00	255.2801E+00	129.8074E+00	126.2084E+00
2.5000E+00	249.7572E+00	118.3396E+00	116.6283E+00

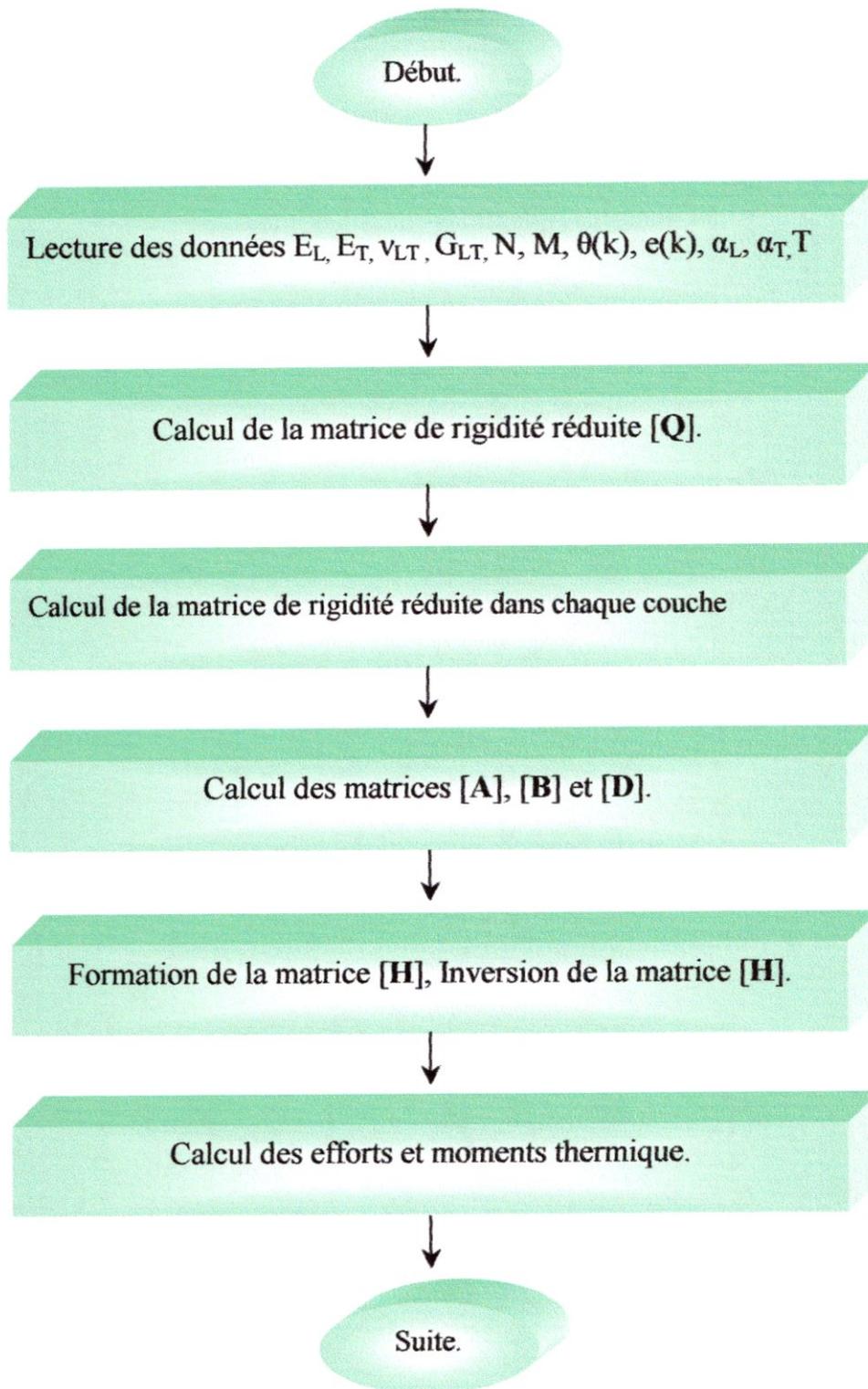
i). Les contraintes dans chaque Couche du Stratifié dans le Repère (L,T) :

-2.5000E+00	282.7356E+00	78.0799E+00	45.1594E+00
-1.0000E+00	288.5823E+00	70.5330E+00	34.7011E+00
-1.0000E+00	86.4342E+00	105.7593E+00	5.7365E+00
000.0000E-03	111.9264E+00	96.9650E+00	8.3890E+00
000.0000E-03	151.4659E+00	90.0749E+00	21.1295E+00
1.5000E+00	192.6446E+00	76.3710E+00	19.3460E+00
1.5000E+00	333.2116E+00	51.8758E+00	8.7729E+00
2.5000E+00	317.9059E+00	50.1910E+00	1.4086E+00

c) Validation :

Nos résultats ont été validés avec la référence [1] et qui sont mentionné dans l'annexe A.

III.1.2 Organigramme de l'Analyse Thermique



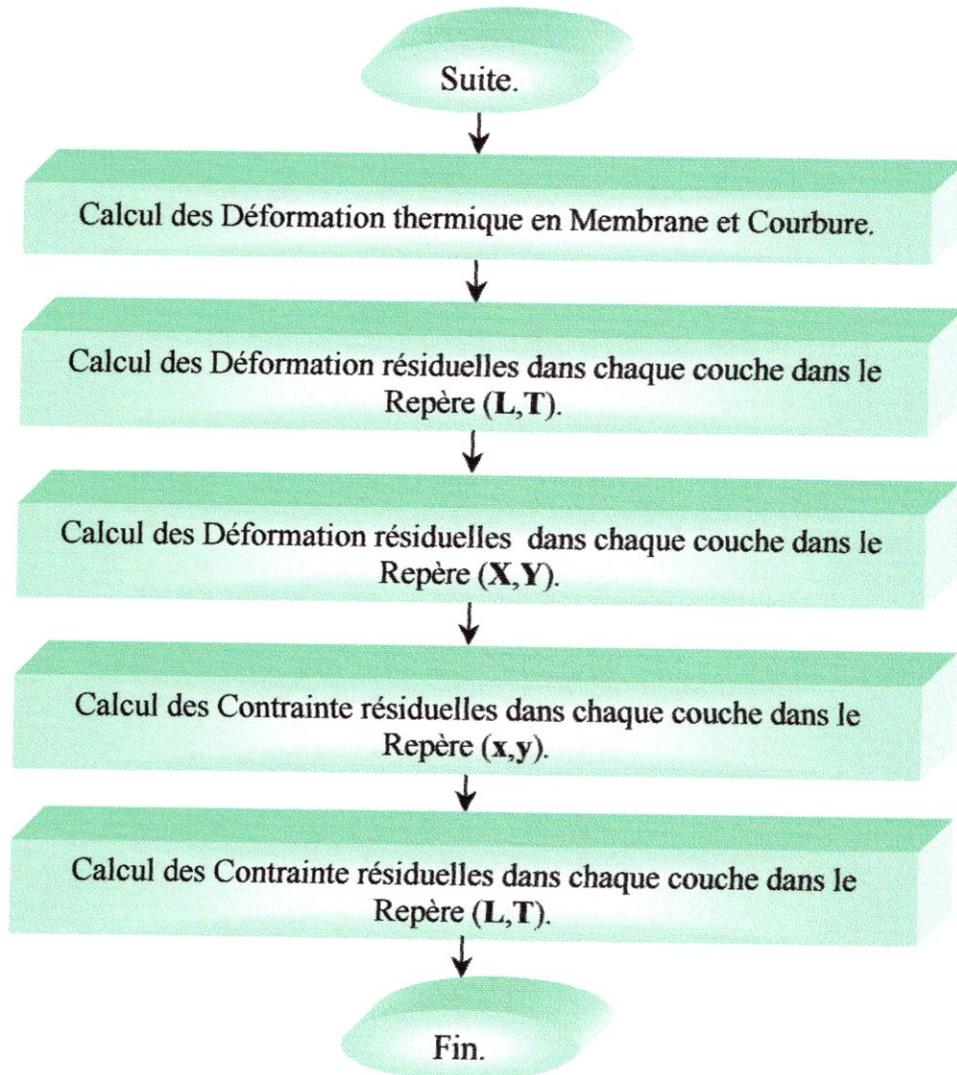


Figure (III.3) : Organigramme de Calcul Thermique.

a) Matériau utilisé :

Nous prenons comme matériau le verre époxyde [90/0/90] représenté sur la figure (fig. III.4), ayant les caractéristiques suivantes :

E_L (Gpa)	E_T (Gpa)	G_{LT} (Gpa)	ν_{LT} (Gpa)	α_L (/°k)	α_T (/°k)
45.0	10.0	4.5	0.31	$5 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{-6}$

Tableau (III.2) : Propriétés Thermique du Verre époxyde.

$\theta = 90^\circ$	1(mm)
$\theta = 0^\circ$	1(mm)
$\theta = 90^\circ$	1(mm)

Figure (III.4) : Configuration du Stratifié Verre époxyde.

- Nous allons utiliser des températures initiales de $T = 20^{\circ}\text{C}$ jusqu'à $T = 100^{\circ}\text{C}$ avec un pas de 20°C et une température de polymérisation $T_p = 120^{\circ}\text{C}$.
- Nous allons utiliser des températures initiales de $T = 20^{\circ}\text{C}$ jusqu'à $T = 160^{\circ}\text{C}$ avec un pas de 20°C et une température de polymérisation $T_p = 180^{\circ}\text{C}$

b) Résultats :

Les résultats obtenus sont validés, avec ceux qui sont mentionnés sur la référence [1], avec une température de polymérisation du stratifié $T_p = 120^{\circ}\text{C}$ et une température d'utilisation $T = 20^{\circ}\text{C}$, soit une variation de température $\Delta T = - 100^{\circ}\text{C}$.

a). Matrices de Rigidité Réduites [Q] :

45.9820E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	10.2182E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

b). Matrices de Rigidité Réduites de chaque Couches :

La matrice de rigidité de la 1^{ère} couche est:

10.2182E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	45.9820E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

La matrice de rigidité de la 2^{ème} couche est :

45.9820E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	10.2182E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

La matrice de rigidité de la 3^{ème} couche est :

10.2182E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	45.9820E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

c). Matrices de Rigidité [A],[B] et [D].

La matrice [A] est:

66.4184E+03	9.5029E+03	000.0000E-03
9.5029E+03	102.1822E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	13.5000E+03

La matrice [B] est:

000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03

La matrice [D] est:

25.9713E+03	7.1272E+03	000.0000E-03
7.1272E+03	100.4791E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	10.1250E+03

d). Matrices Constitutives :

La matrice [H] est:

66.4184E+03	9.5029E+03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
9.5029E+03	102.1822E+03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	13.5000E+03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	25.9713E+03	7.1272E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	7.1272E+03	100.4791E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	10.1250E+03

La matrice inverse de la matrice [H] est :

15.2591E-06	-1.4191E-06	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
-1.4191E-06	9.9184E-06	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	74.0741E-06	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	39.2684E-06	-2.7854E-06	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	-2.7854E-06	10.1499E-06	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	98.7654E-06

Les Déformations Thermiques dans les axes (L,T) e_L , e_T et e_{LT}

-5.000000000000000E-004	-2.000000000000000E-003	0.000000000000000E+000
-------------------------	-------------------------	------------------------

Les Coefficients de Dilatation Thermique α_x , α_y et α_{xy} pour la 1^{ère} Couche est:

2.000000000000000E-005	5.000000000000000E-006	0.000000000000000E+000
------------------------	------------------------	------------------------

Les Déformations Thermiques dans la 1^{ère} Couche E_x , E_y , E_{xy} :

-2.000000000000000E-003	-5.000000000000000E-004	0.000000000000000E+000
-------------------------	-------------------------	------------------------

Les Coefficients de Dilatation Thermique α_x , α_y et α_{xy} pour la 2^{ème} Couche est:

5.000000000000000E-006	2.000000000000000E-005	0.000000000000000E+000
------------------------	------------------------	------------------------

Les Déformations Thermiques dans la 2^{ème} Couche Ex, Ey, Exy :

-5.000000000000000E-004 -2.000000000000000E-003 0.000000000000000E+000

Les Coefficients de Dilatation Thermique α_x , α_y et α_{xy} pour la 3^{ème} Couche est:

2.000000000000000E-005 5.000000000000000E-006 0.000000000000000E+000

Les Déformations Thermiques dans la 3^{ème} Couche Ex, Ey, Exy :

-2.000000000000000E-003 -5.000000000000000E-004 0.000000000000000E+000

e). Le Vecteur des Moments et efforts N, M est:

-73.366788626062260, -80.672812870875320, 0.000000000000000E+00.
0.000000000000000E+00, 0.000000000000000E+00, 0.000000000000000E+00.

f). Le Vecteur des Déformations Thermiques rapportées aux axes (XY) sont:

-1.0050E-03 -696.0323E-06 000.0000E-03.
000.0000E-03 000.0000E-03 000.0000E-03.

Les Déformations Thermiques en membrane rapportées aux axes de référence (X,Y) :

-1.0050E-03 -696.0323E-06 000.0000E-03.

Les Déformations Thermiques en courbure rapportées aux axes de référence (X,Y) :

000.0000E-03 000.0000E-03 000.0000E-03.

g). Les Déformations Résiduel dans chaque Couche du Stratifié dans le repère (X,Y) :

-1.5000E+00 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03
-500.0000E-03 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03
-500.0000E-03 -505.0292E-03 1.3040E+00 000.0000E-03
500.0000E-03 -505.0292E-03 1.3040E+00 000.0000E-03
500.0000E-03 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03
1.5000E+00 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03

h). Les Déformations Résiduel dans chaque Couche du Stratifié dans le Repère (L,T):

-1.5000E+00 1.5134E+00 -169.6674E-03 -666.6666E-06
-500.0000E-03 1.5142E+00 -168.7590E-03 222.2222E-06
-500.0000E-03 6.9711E+00 338.4188E-03 222.2222E-06
500.0000E-03 6.9745E+00 338.8005E-03 1.1111E-03
500.0000E-03 1.5150E+00 -167.8506E-03 1.1111E-03
1.5000E+00 1.5158E+00 -166.9422E-03 2.0000E-03

i). Les Contraintes Résiduel dans chaque Couche du Stratifié dans le Repère (X,Y) :

-1.5000E+00	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03
-500.0000E-03	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03
-500.0000E-03	-19.0917E+00	11.7245E+00	000.0000E-03
500.0000E-03	-19.0917E+00	11.7245E+00	000.0000E-03
500.0000E-03	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03
1.5000E+00	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03

j). Les Contrainte Résiduel dans chaque Couche du Stratifié dans le Repère (L,T) :

-1.5000E+00	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03
-500.0000E-03	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03
-500.0000E-03	-19.0917E+00	11.7245E+00	000.0000E-03
500.0000E-03	-19.0917E+00	11.7245E+00	000.0000E-03
500.0000E-03	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03
1.5000E+00	-5.8622E+00	9.5459E+00	000.0000E-03

III.2 Effet de la Variation de la Température T sur les Matériaux Composites

Le calcul des propriété mécanique selon le modèle de Tsai se fait suivant l'organigramme suivant :

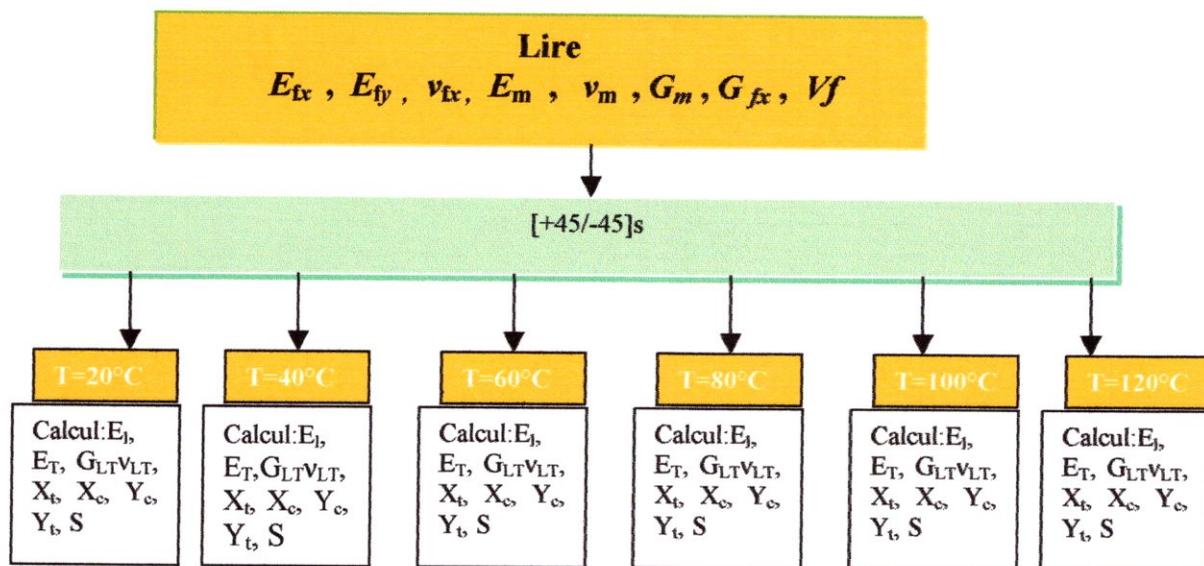


Figure (III.5) : Organigramme des propriétés mécaniques

a). Choix du Matériau Composite :

Nous utilisons le matériau composite graphite époxyde (T300/5208), qui est utilisé en construction aéronautique, en raison de sa rigidité et sa légèreté.

$\theta = 45^\circ$	0.14(mm)
$\theta = -45^\circ$	0.14(mm)
$\theta = -45^\circ$	0.14(mm)
$\theta = 45^\circ$	0.14(mm)

Figure (III.6) : Configuration du Stratifié Graphite époxyde (T300/5208).

➤ Données :

E_{fx}	E_{fy}	ν_{fx}	E_m	ν_m	G_m	G_{fx}	V_f
259	18.69	0.25	3.4	0.35	1.26	19.69	0.7

Tableau (III.3) : Table Caractéristiques de Fibres et Matrice du Graphite époxyde T300/5208 en (Gpa).

Type de Matériau	T^0g (°C)	T_{rm} (°C)	a	b	c	f	h	e
T300/5208	160.00	22.00	0.50	0.20	0.90	0.04	0.04	0.20

Tableau (III.4) : Caractéristiques du T300/5208 selon Tsai.

Type de Matériau	E_L (Gpa)	E_T (Gpa)	G_{LT} (Gpa)	ν_{LT}	α_L (°C)	α_T (°C)	β_L	β_T
T300/5208	181.0	10.3	7.17	0.28	$0.02 \cdot 10^{-6}$	$22.5 \cdot 10^{-6}$	0	0.60

Tableau (III.5) : Propriétés du Graphite époxyde.

b). Critère de Rupture :

Le critère de rupture a pour objectif, de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés, pour cela nous allons utiliser le critère de la contrainte maximale.

X, X' (Mpa)	Y (Mpa)	Y' (Mpa)	S (Mpa)
1500	40	246	68

Tableau (III.6) : Résistance du Composite T300/5208

c). Résultats :

Topr (°C)	EL (GPa)	ET(GPa)	GLT(GPa)	NULT
20	182.431700	10.344330	7.210422	2.808589E-01
40	181.240400	9.883451	6.826172	2.719374E-01
60	179.847500	9.349866	6.389233	2.621418E-01
80	178.165400	8.715605	5.880784	2.511703E-01
100	176.031800	7.931649	5.268473	2.385006E-01
120	173.087300	6.897872	4.487734	2.230727E-01

Tableau (III.7): Propriétés mécaniques en fonction de la température

Topr(°C)	XL	X'L	YT	Y'T	S
20	1501.728000	1505.189000	40.521360	249.206400	68.886310
40	1483.322000	1373.221000	35.272150	216.923700	59.962650
60	1461.844000	1230.292000	29.934280	184.095800	50.888280
80	1435.979000	1073.338000	24.487800	150.600000	41.629260
100	1403.308000	897.430100	18.901880	116.246500	32.133190
120	1358.519000	693.555300	13.122690	80.704530	22.308570

Tableau (III.8): Résistances à la rupture en fonction de la température

c). interprétation :

L'augmentation de température cause une chute des différents modules d'élasticité ; le module de Young longitudinal, le module de Young transversal, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

Nous observons une accélération de la dégradation des caractéristiques mécaniques à partir de 80°C. Le module de Young transversal E_T et le module de cisaillement longitudinal G_{LT} sont les plus affectés par l'effet de température.

Afin de raffiner l'analyse de l'effet de température, nous pouvons déterminer le taux de dégradation des modules mécaniques à différentes températures.

Les résistances à la rupture en tension compression chutent. Les propriétés les plus dominantes sont celles de la matrice telles que le cisaillement longitudinal, module transversal et leurs résistances correspondantes qui se dégradent plus la température est élevée. La résistance en compression longitudinale et transversale, décroissent considérablement à partir de la température de référence .

III.3 Conclusion :

Les organigrammes cités ci dessus nous permettront d'obtenir des courbes qu'on exposera plus en détail dans le prochain chapitre.

CHAPITRE IV

*Graphes
et
Interprétation*

CHAPITRE IV

Graphes et Interprétations

Dans ce chapitre nous exposons les graphes issus des différents organigrammes de notre code développé au paragraphe précédent, en essayant d'y apporter des interprétations au comportement des composites à matrice polymérique. Trois comportements différents seront détaillés.

a). Comportement mécanique :

Dans la partie mécanique, notre but n'est pas l'analyse mécanique en elle même, cette étude a déjà fait l'objet d'un travail antérieur, c'est pour cette raison que nous n'apporterons pas d'interprétations à ces résultats, par contre nous les validons pour s'assurer de la fiabilité de notre programme.

b). Analyse thermoélastique :

Dans cette partie nous nous intéressons aux cycles de polymérisation des composites à matrice polymère qui sont à l'origine des contraintes résiduelles. Nous examinons l'effet de la température de post cuisson sur le comportement thermoélastique des stratifiés graphite/époxyde.

On prendra deux températures d'état de contraintes libres $T_p=180^\circ\text{C}$ et $T_p=120^\circ\text{C}$ pour le même matériau, T300/5208, [45/-45]_s. Le pas de variation de la température est de 20°C .

Afin de s'assurer de la cohérence de nos résultats et avant d'entamer la partie citées ci dessus, nous effectuons une validation avec la référence 1 (voir annexe B) pour le stratifié de configuration [90°/0°/90°].

c). Partie Thermoélastique avec Prise en Compte du Vieillissement :

Nous nous intéressons à l'effet de la température sur les propriétés mécaniques d'abord, en utilisant le modèle de Tsai. Sous ces conditions nous déterminons par la suite le comportement thermoélastique des stratifié et nous établirons des conclusions sur le vieillissement thermique des composites.

Partie
Mécanique

IV .1 Analyse Mécanique

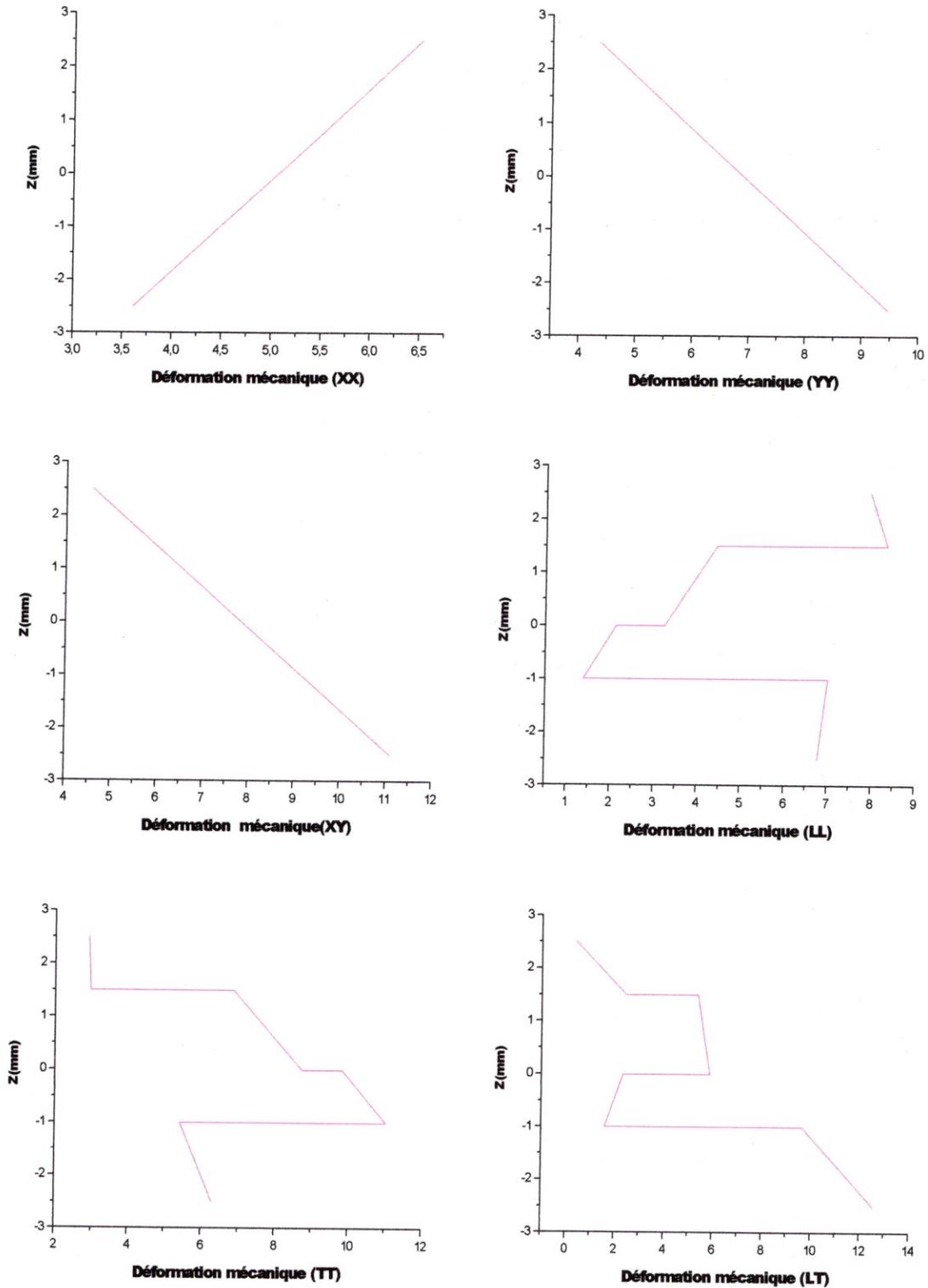


Fig.IV.1 : Déformations mécaniques pour le stratifié verre époxyde [30°/-15°/-30°/15°].

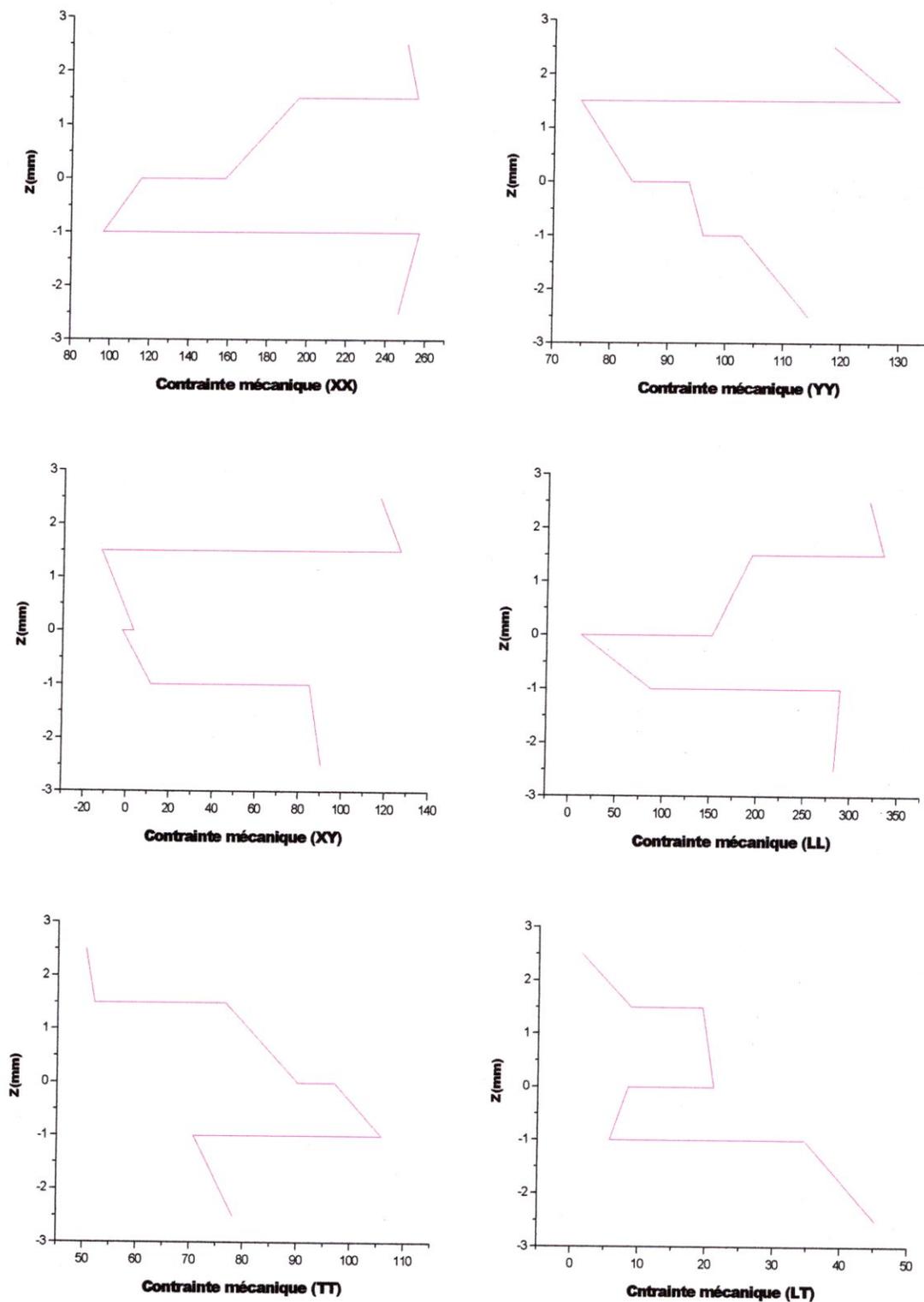


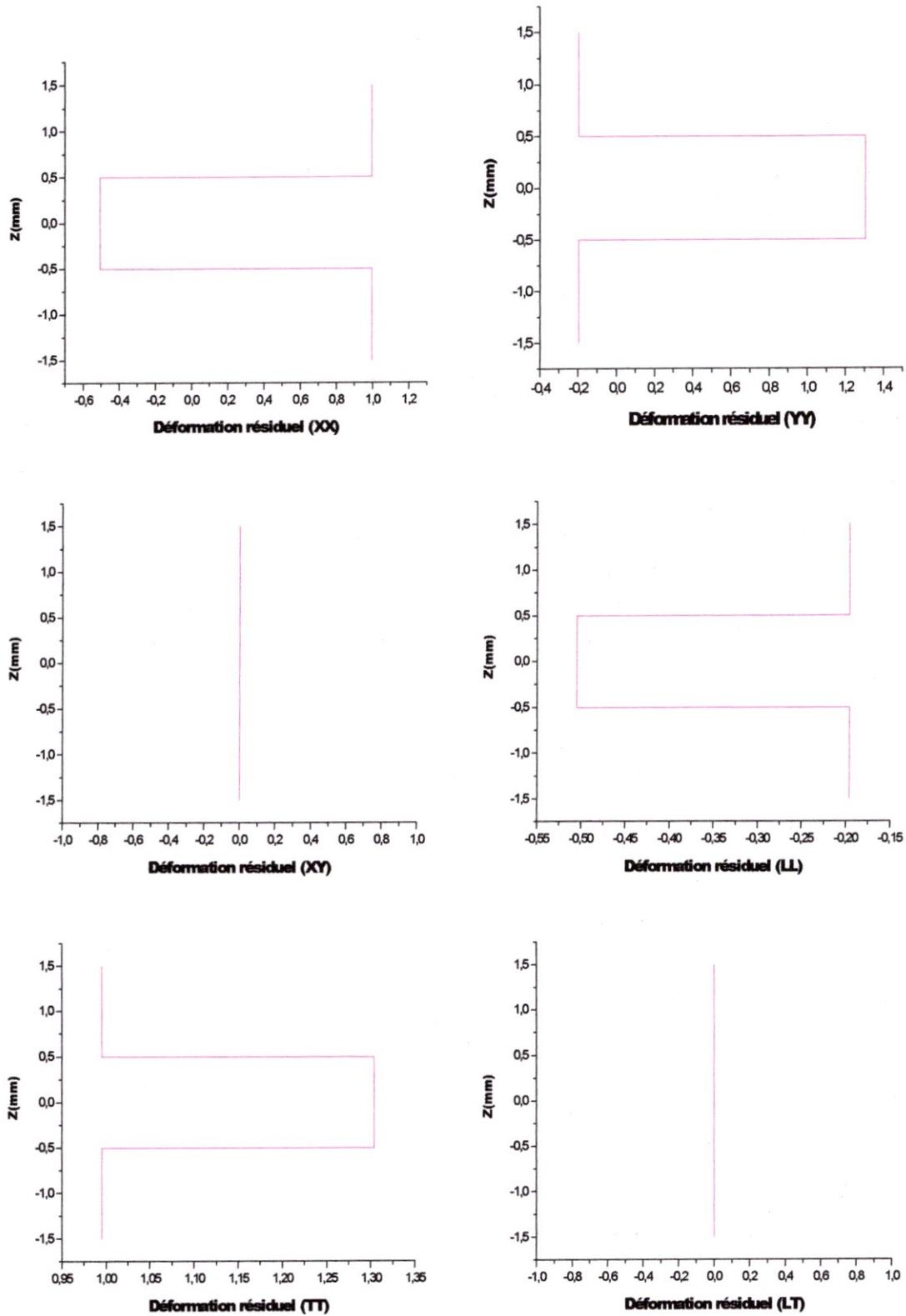
Fig.IV.2:Contraintes mécaniques pour le stratifié verre époxyde [30°/-15°/-30°/15°].



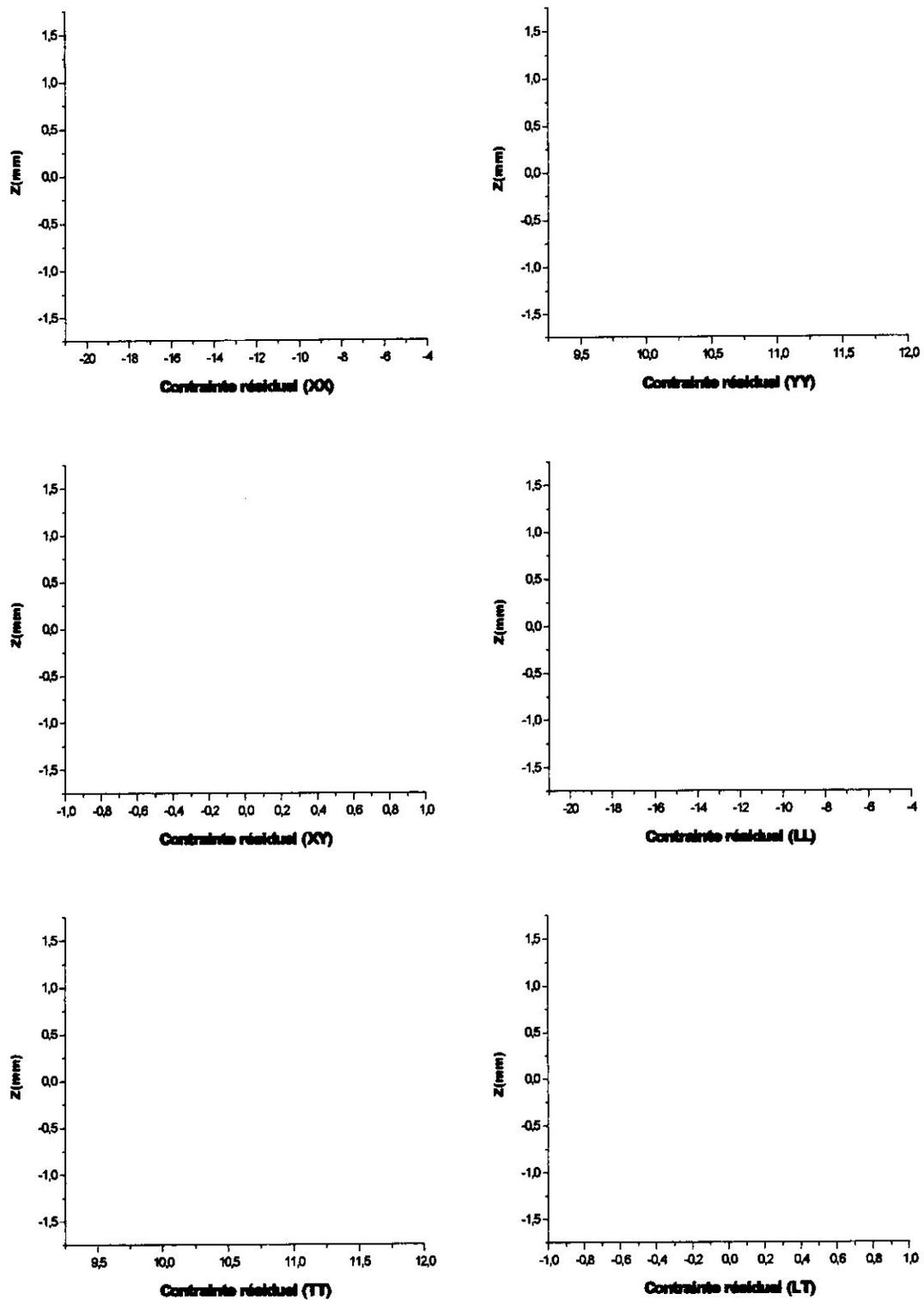
Partie

Thermoélastique

IV .2 Analyse Thermoélastique



**Fig.IV.3 : Déformations résiduelles pour le stratifié [90°/0°/90°]
Pour T=20°C, T_p=120°C.**



**Fig.IV.4 : Contraintes résiduelles pour le stratifié [90°/0°/90°]
Pour T=20°C, T_p=120°C.**

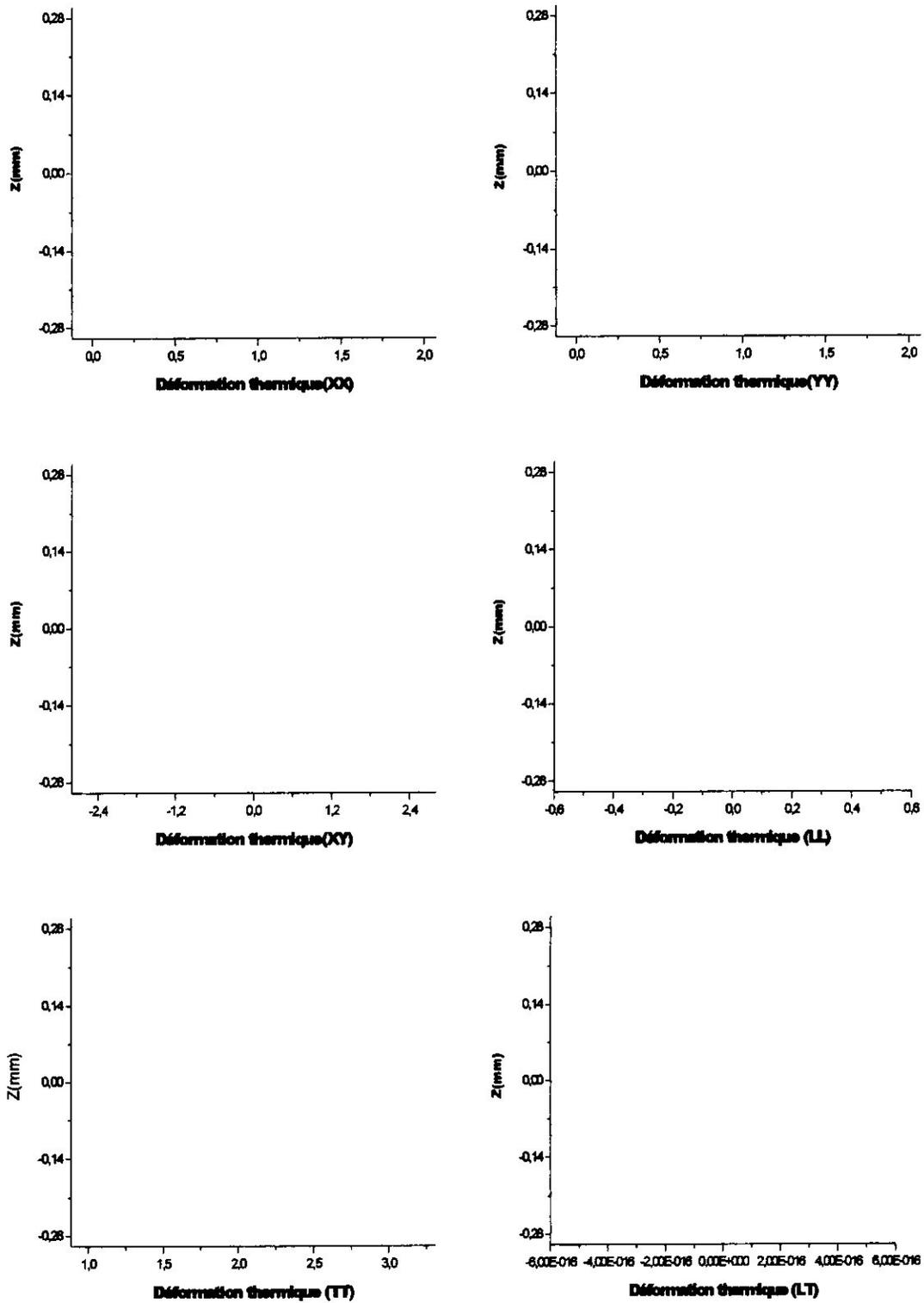


Fig.IV.5: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T=20^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$.

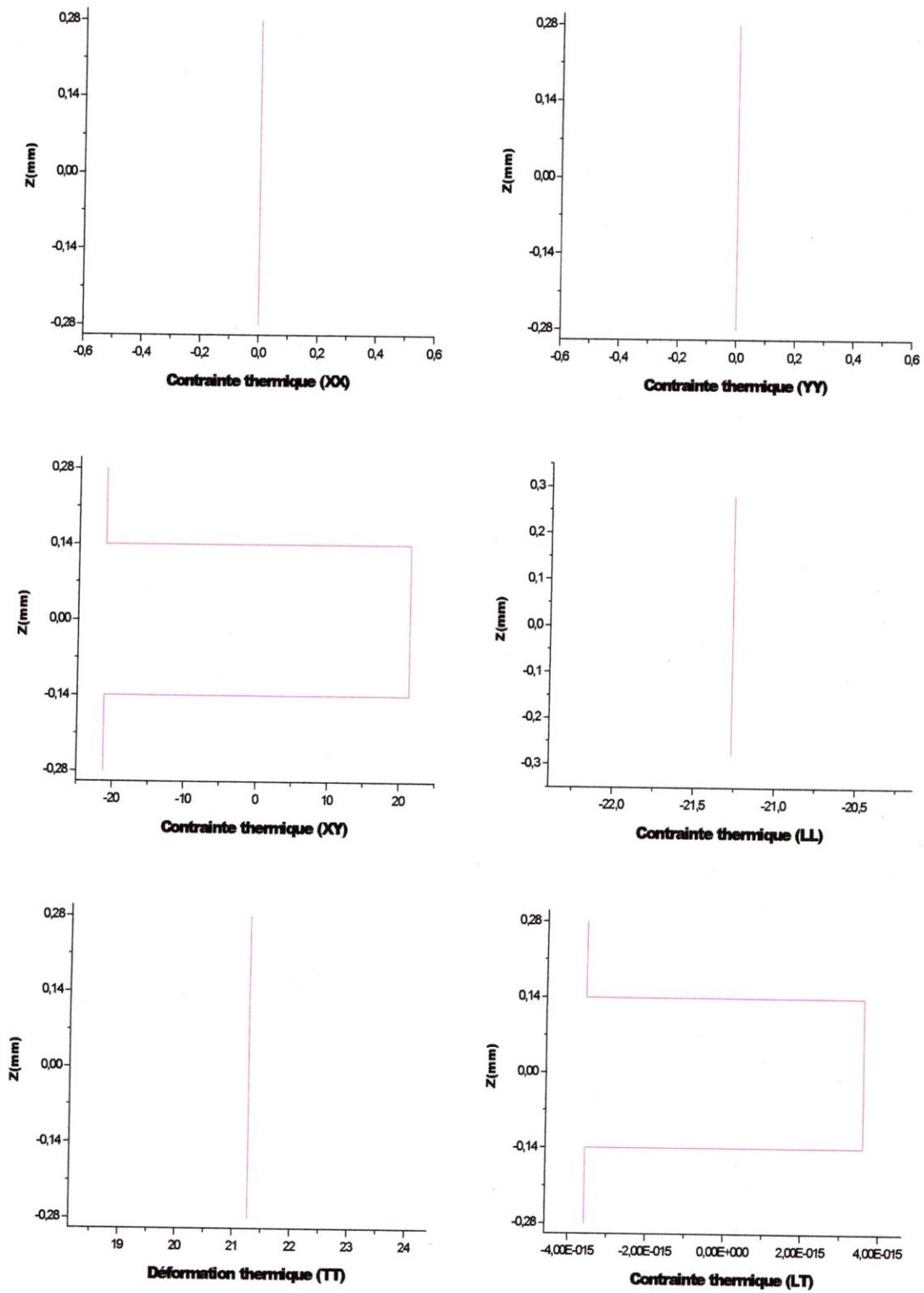


Fig.IV.6 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=20°C, T_p=120°C.

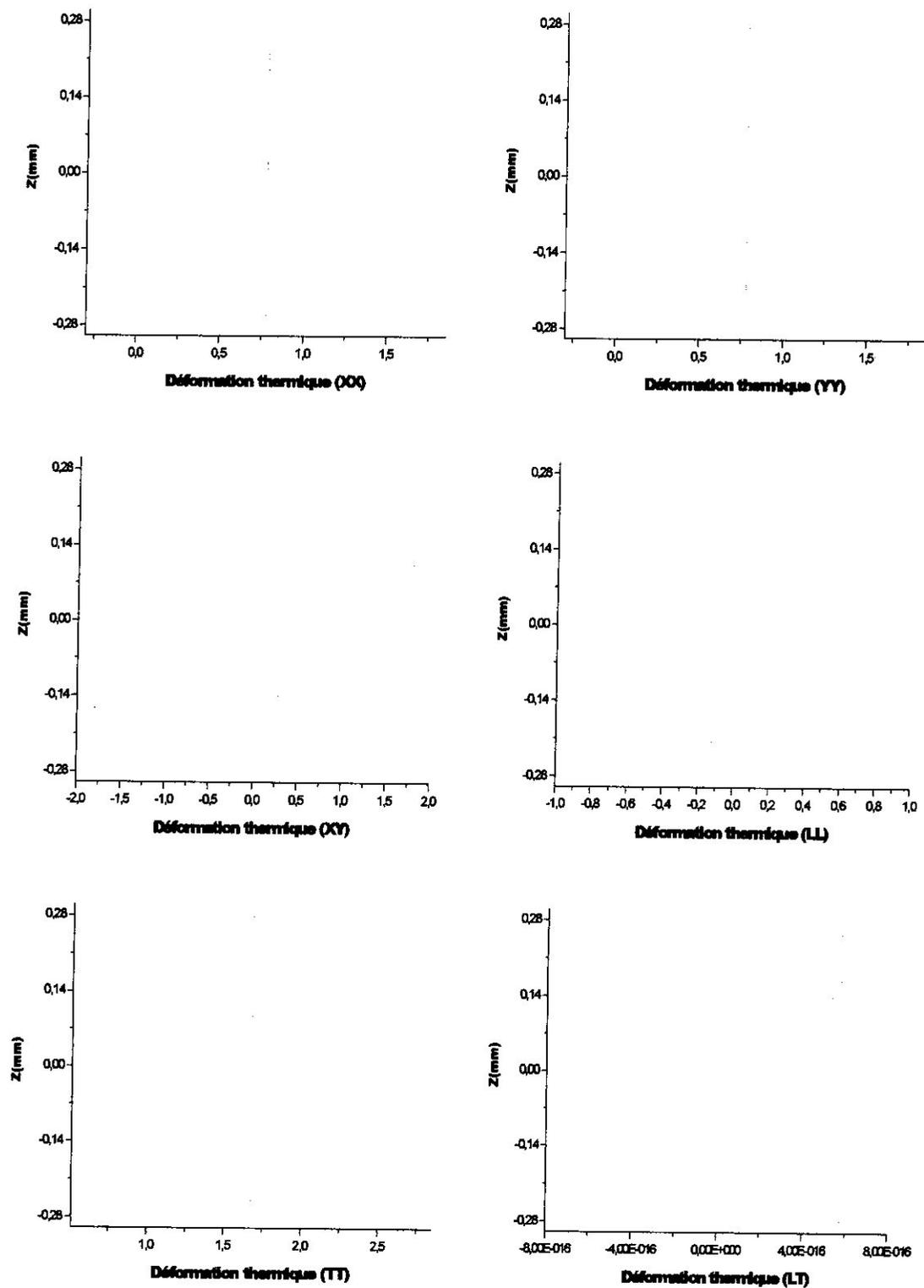


Fig.IV.7 : Déformations thermiques pour T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=40°C , T_p=120°C.

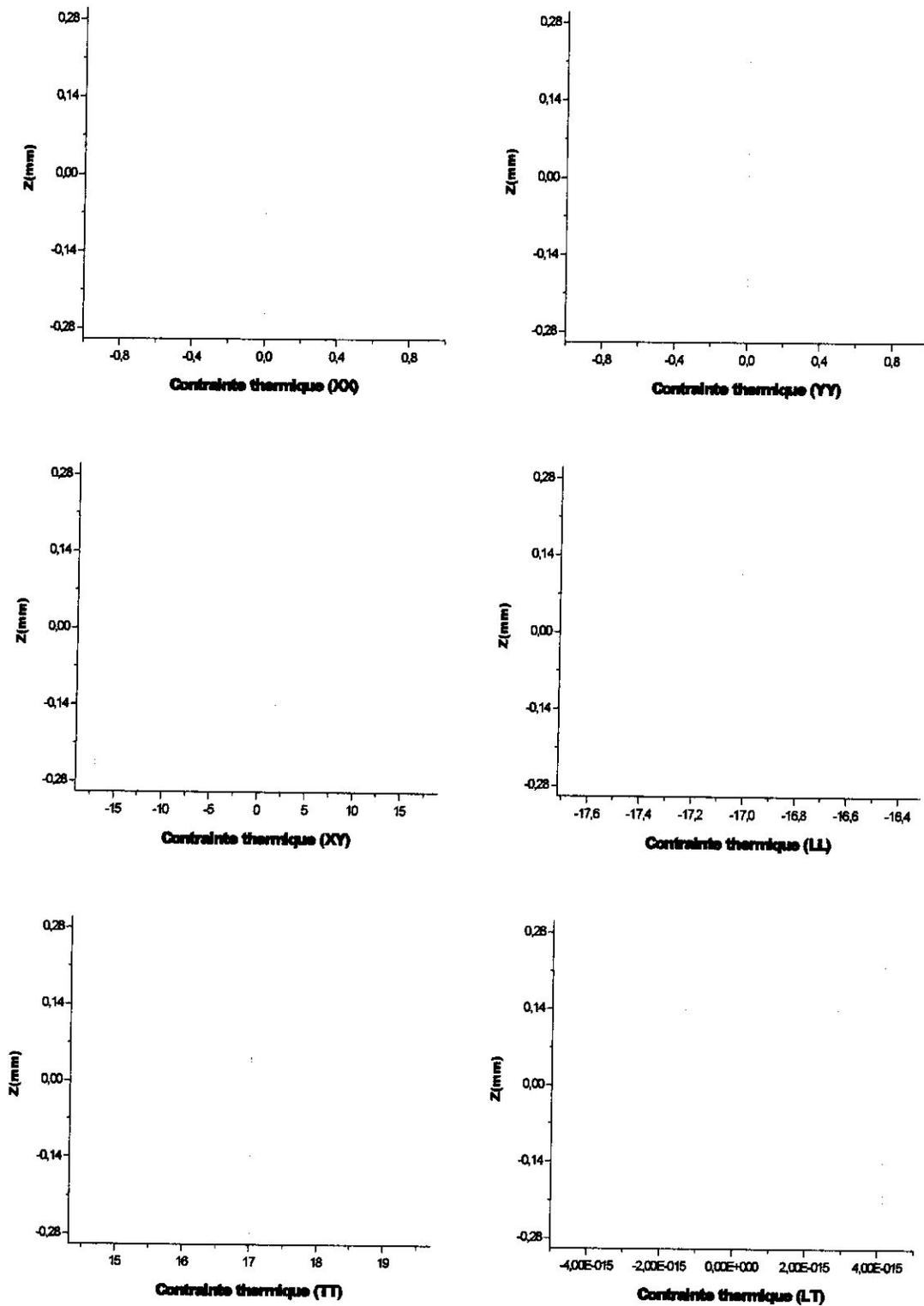


Fig.IV.8 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=40°C, T_p=120°C.

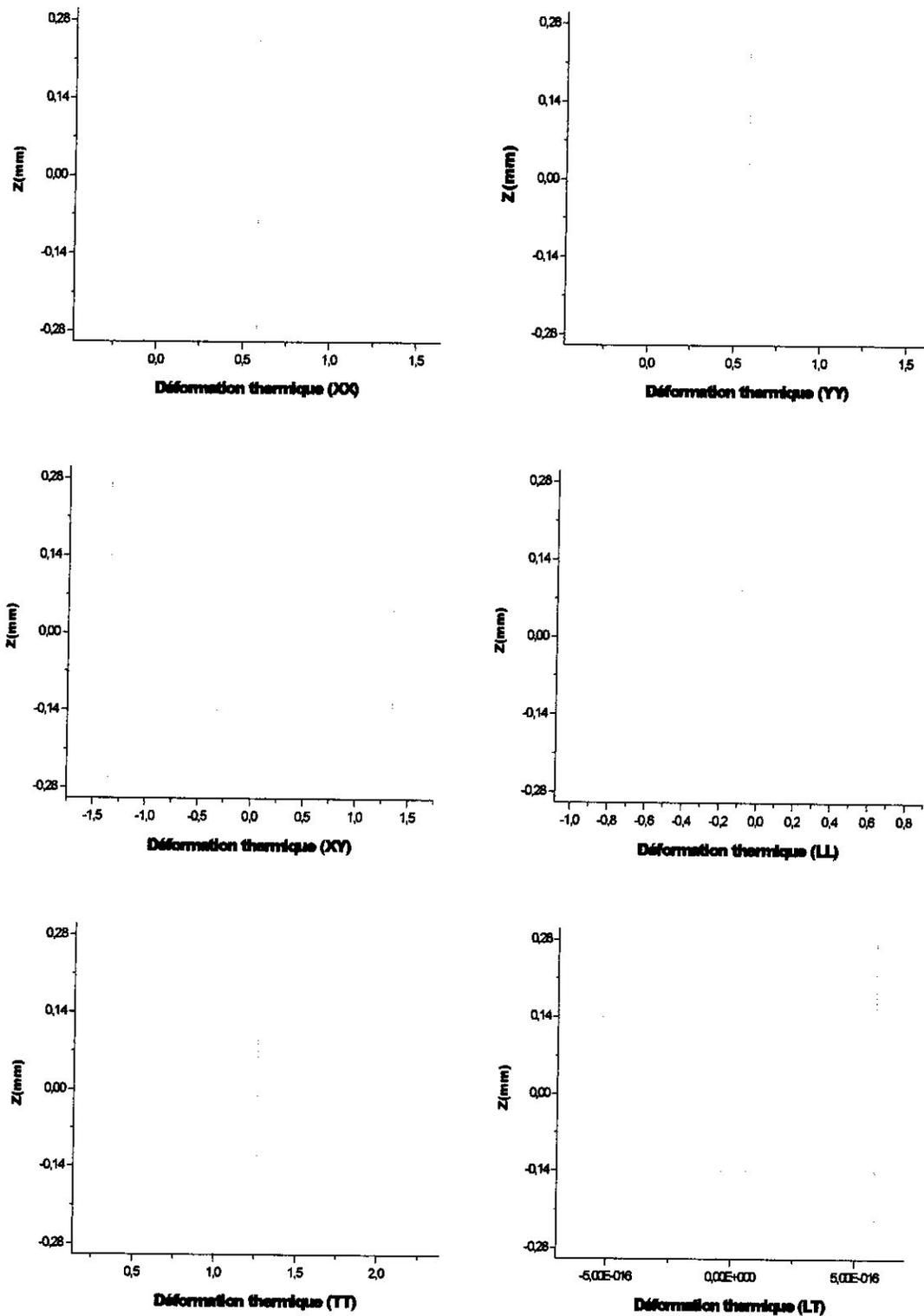


Fig.IV.9: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T=60^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$.

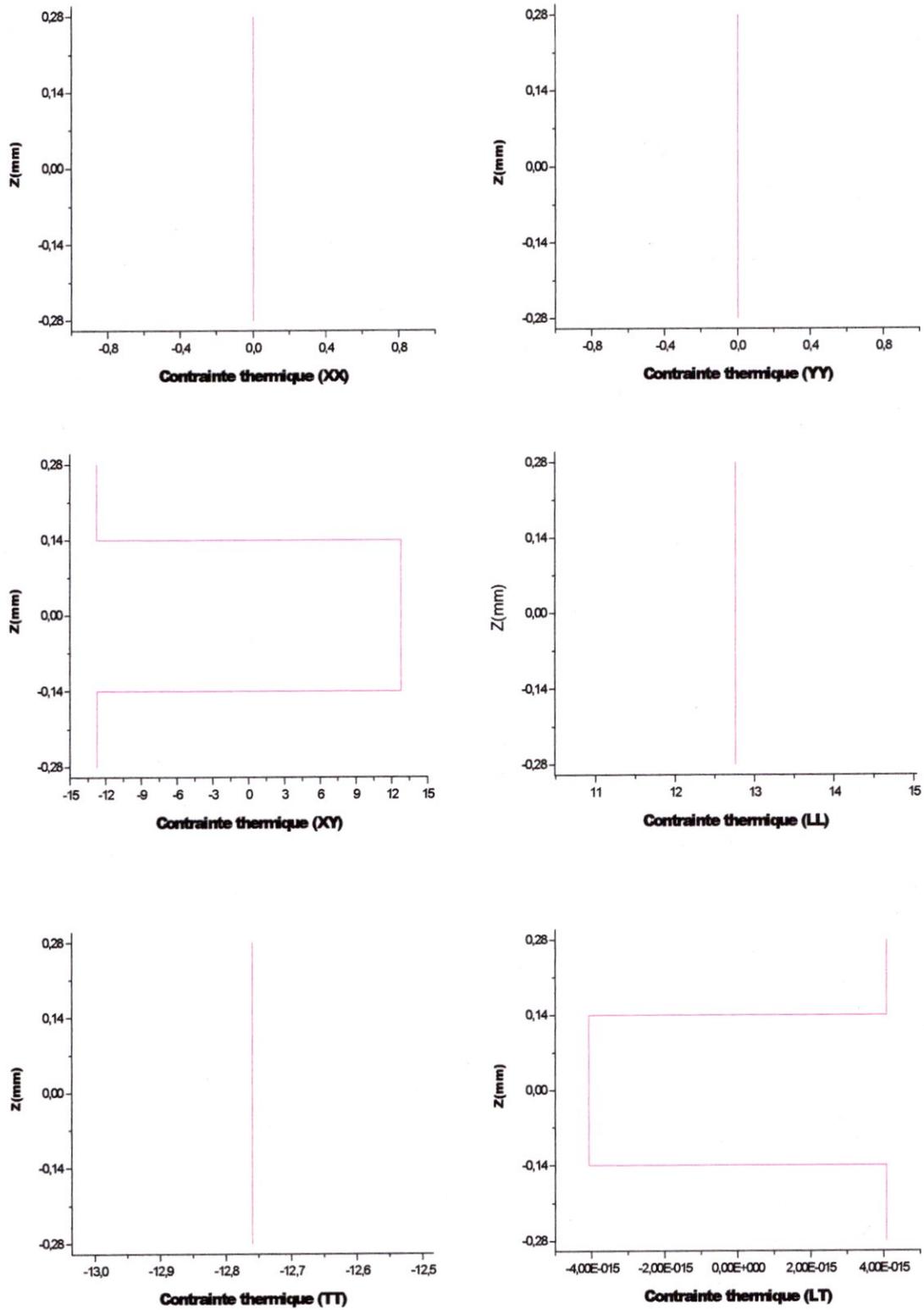


Fig.IV.10 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=60°C, T_p=120°C.

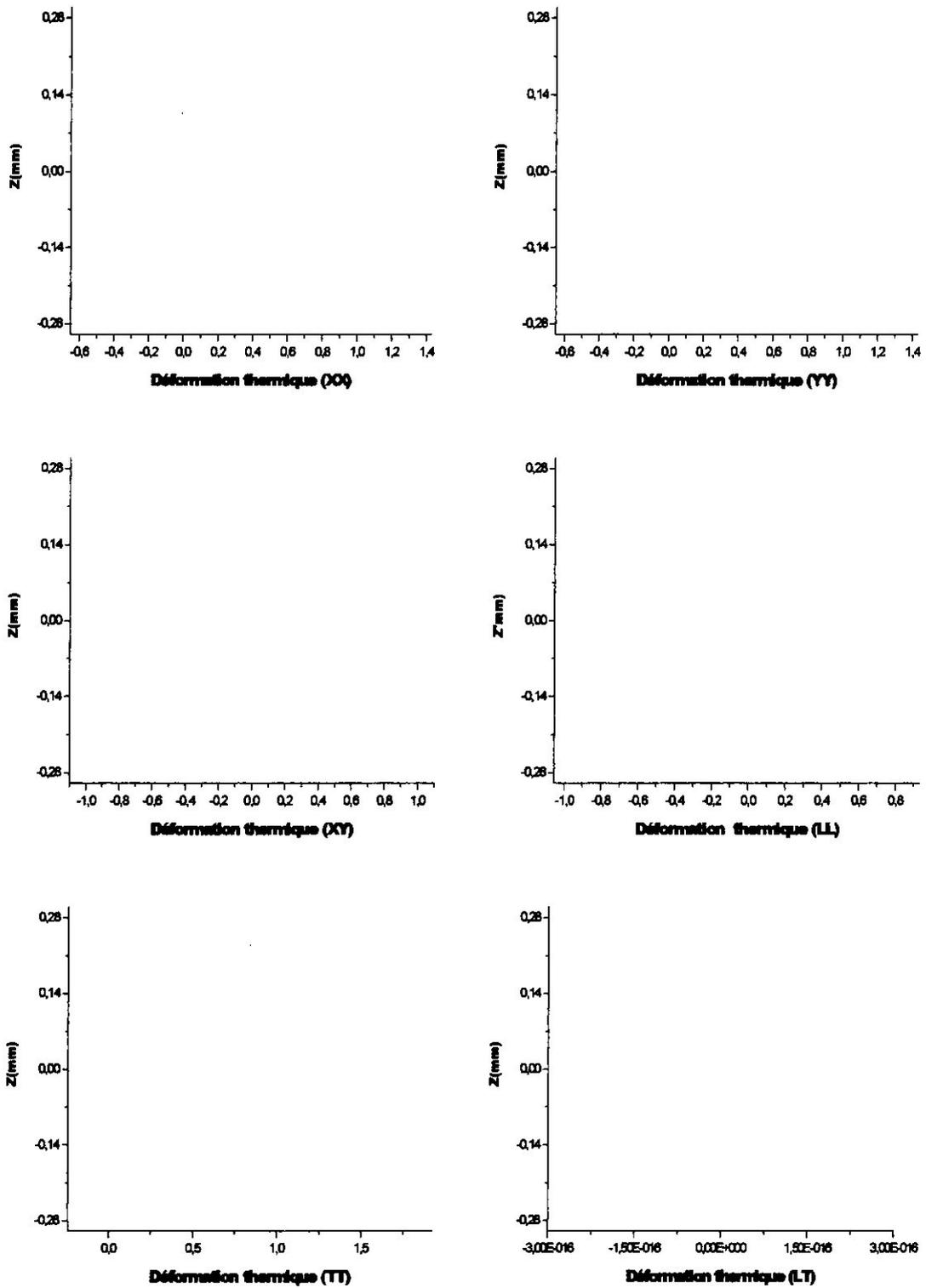


Fig.IV.11: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/45°/45°] pour $T=80^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$.

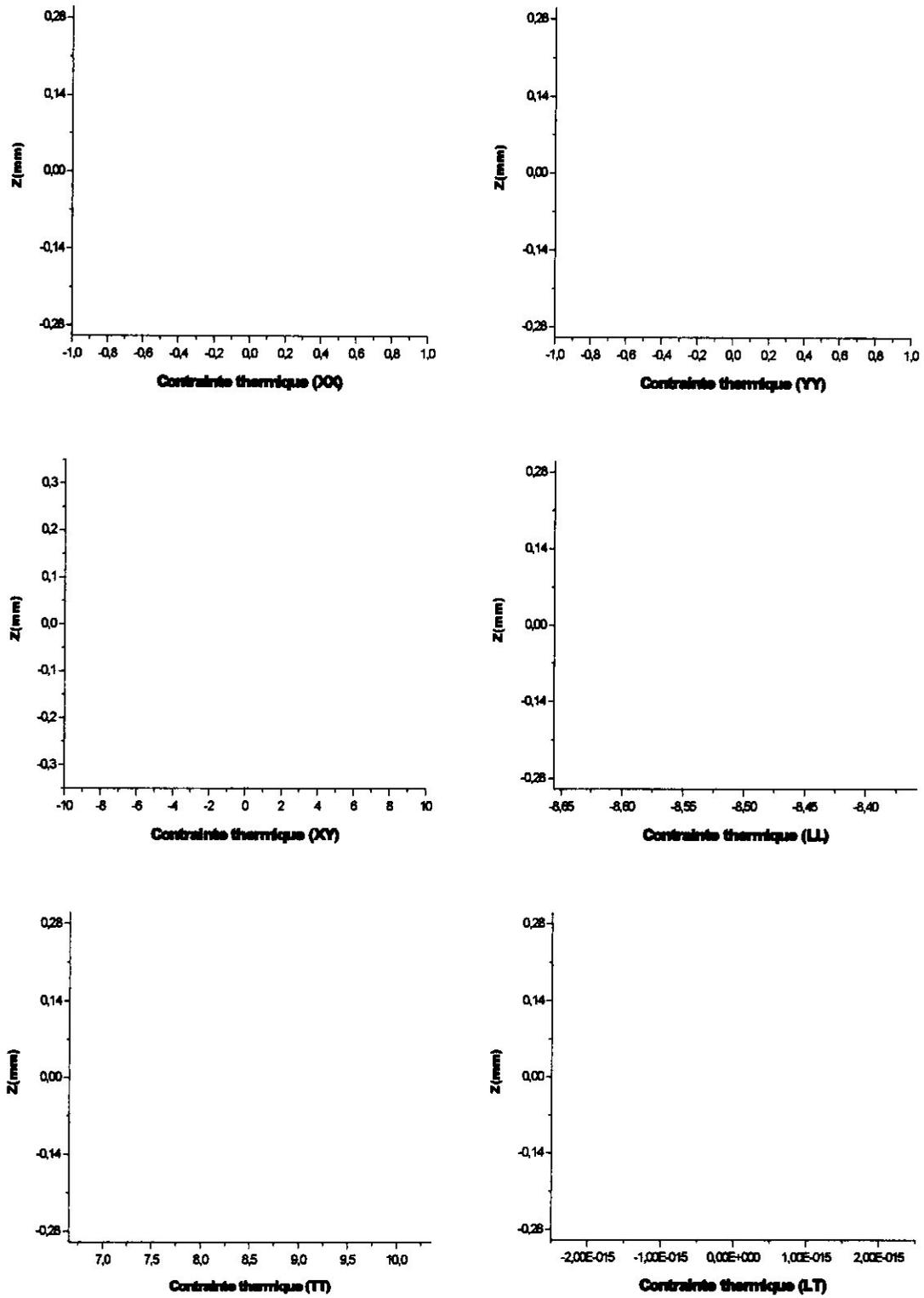
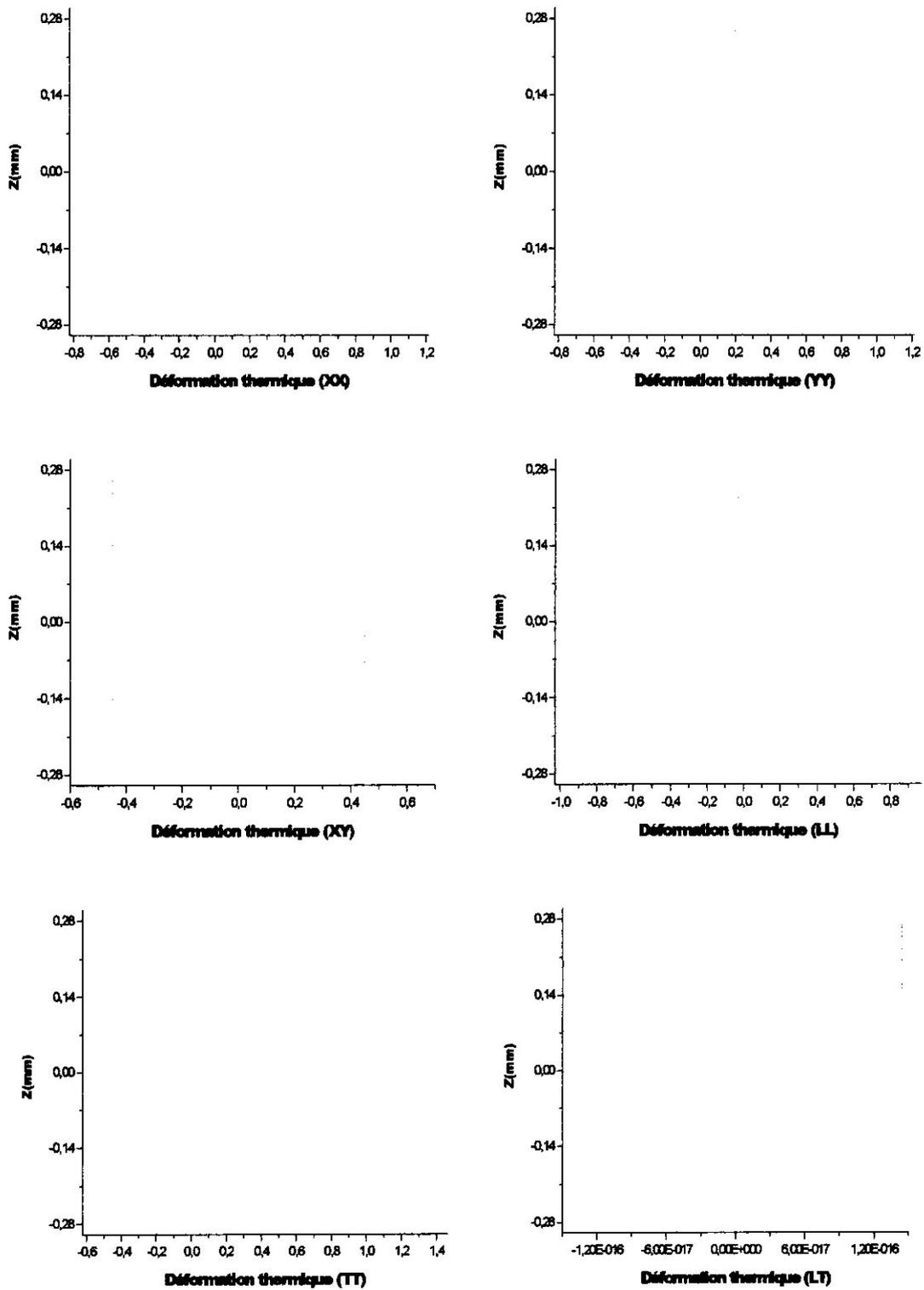


Fig.IV.12 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=80°C, T_p=120°C.



**Fig.IV.13 :Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié[45°/-45°/45°/45°]
Pour $T=100^{\circ}\text{C}$, $T_p=120^{\circ}\text{C}$.**

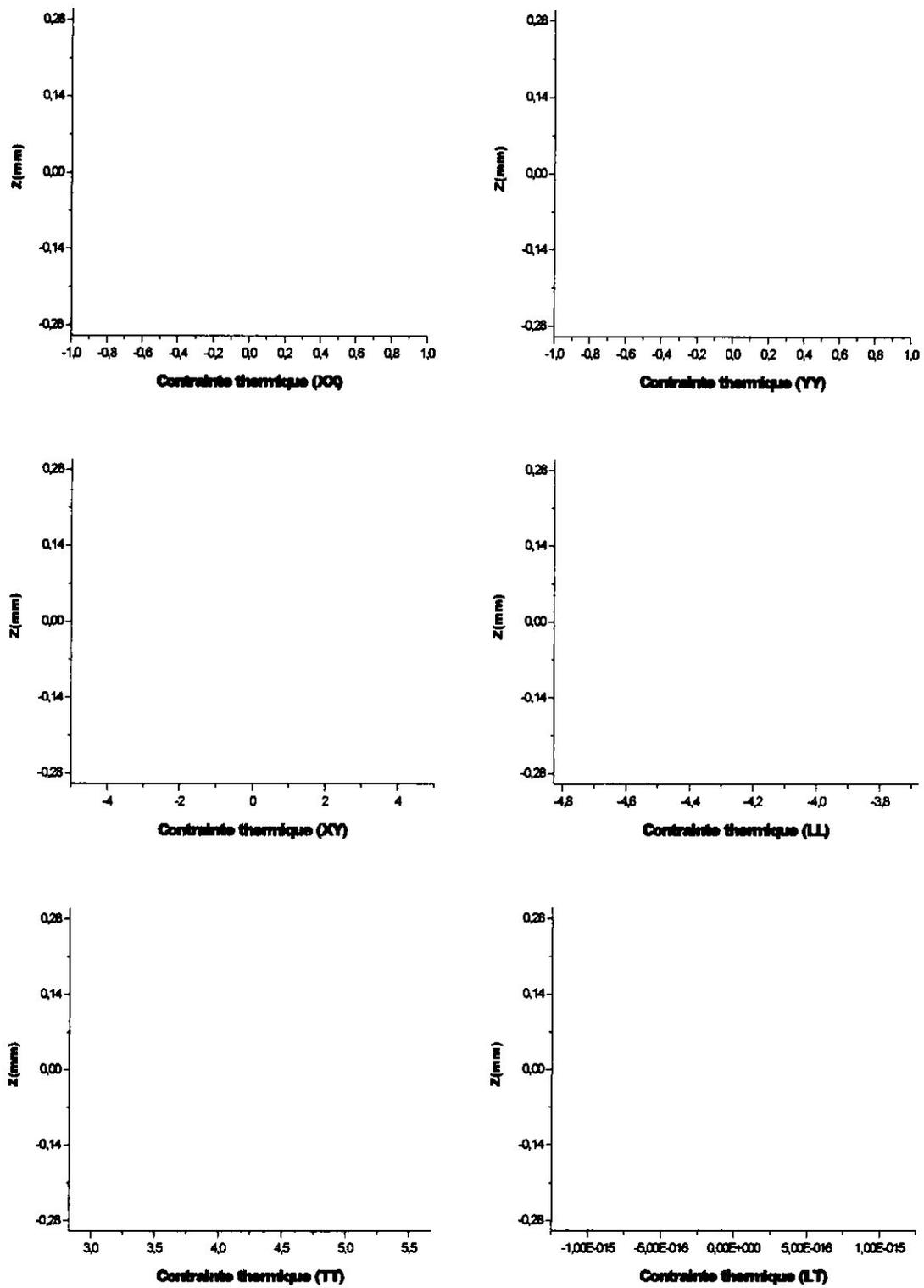


Fig.IV.14 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$
 Pour $T=100^\circ\text{C}$, $T_p=120^\circ\text{C}$.

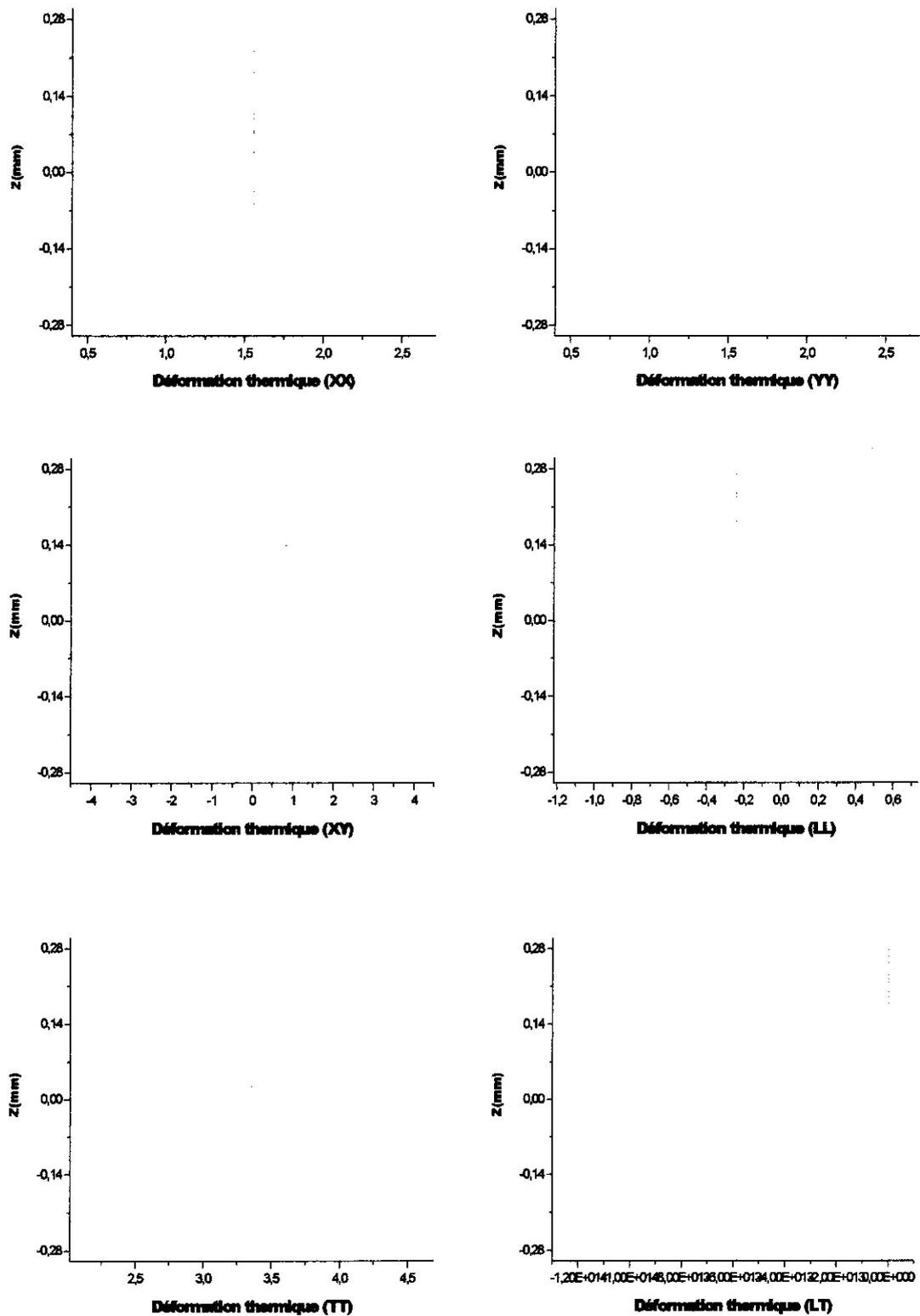


Fig.IV.15: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/45°/45°]
 Pour T=20°C, T_p=180°C.

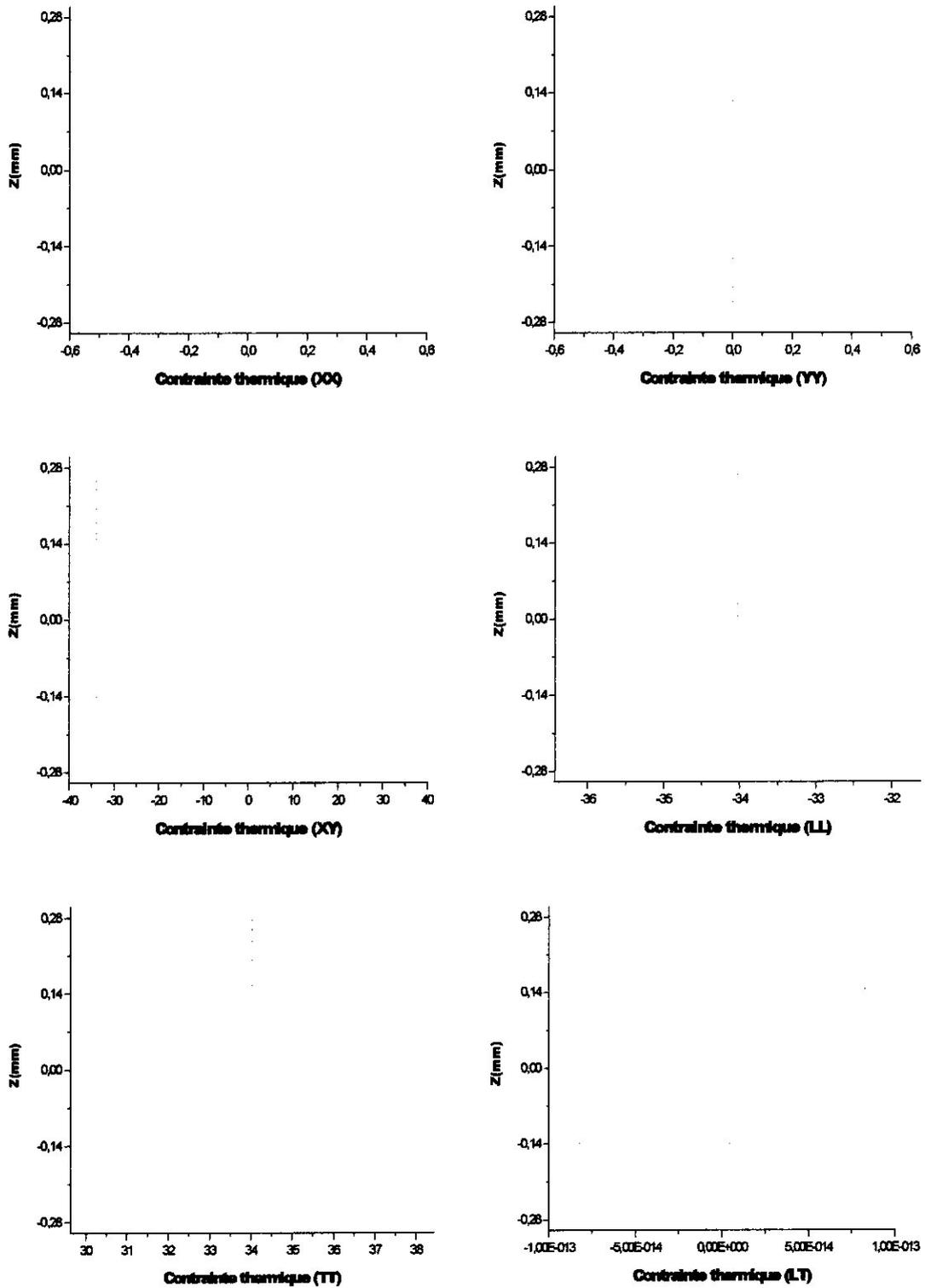


Fig.IV.16:Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
 Pour T=20°C, T_p=180°C.

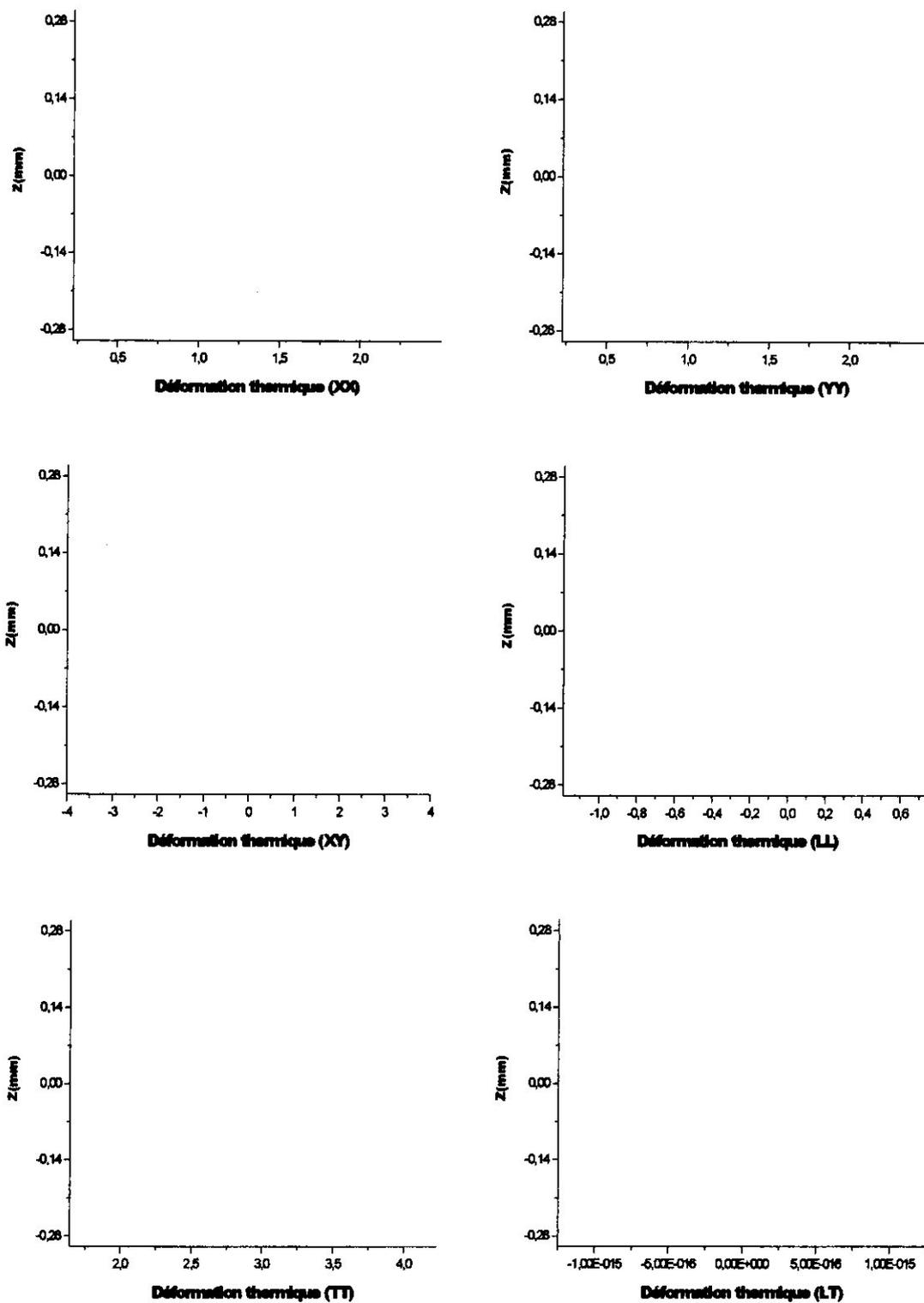
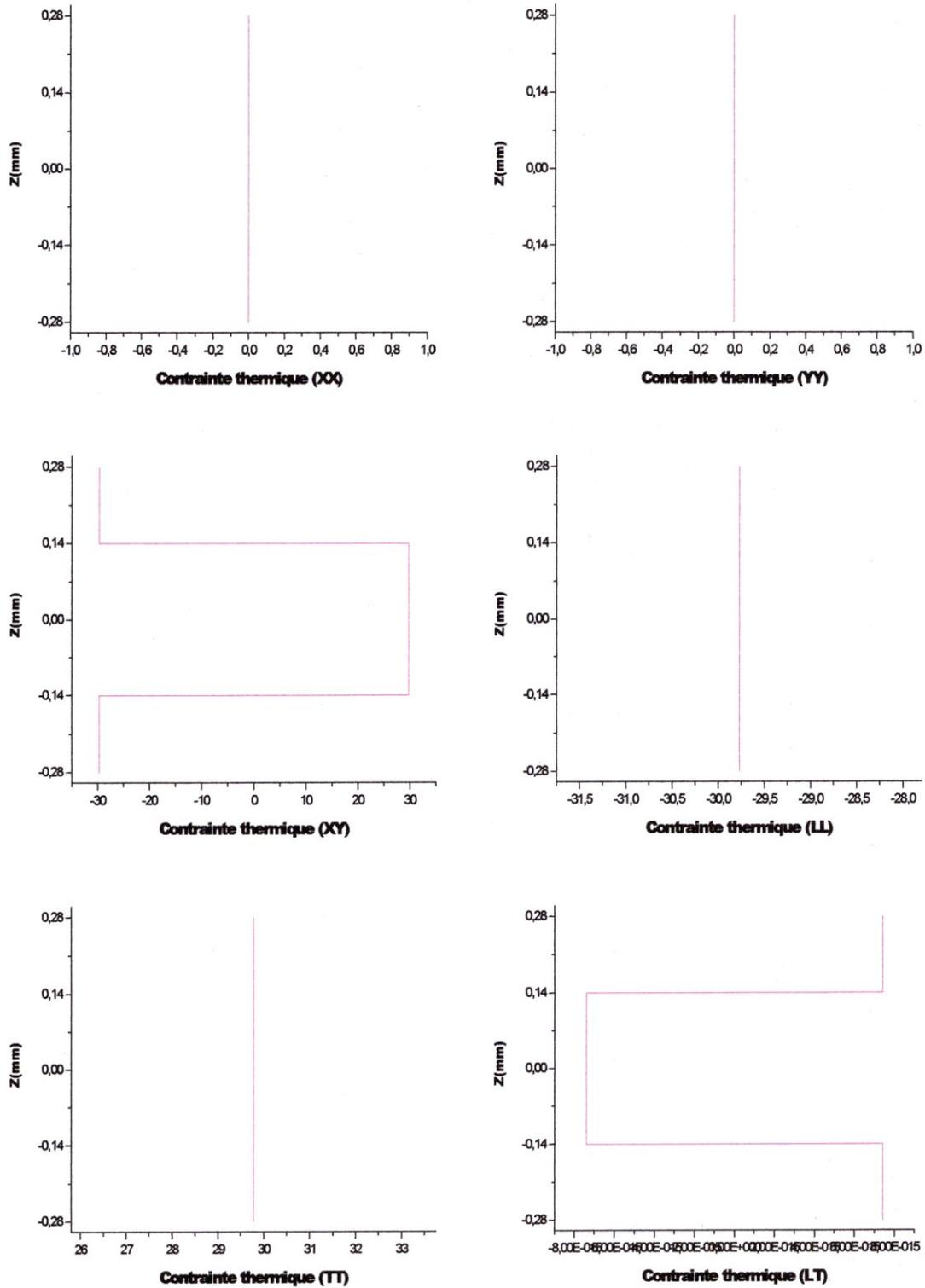


Fig.IV.17: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ]$
 Pour $T=40^\circ\text{C}$, $T_p=180^\circ\text{C}$.



**Fig.IV.18 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
Pour $T=40^{\circ}\text{C}$, $T_p=180^{\circ}\text{C}$.**

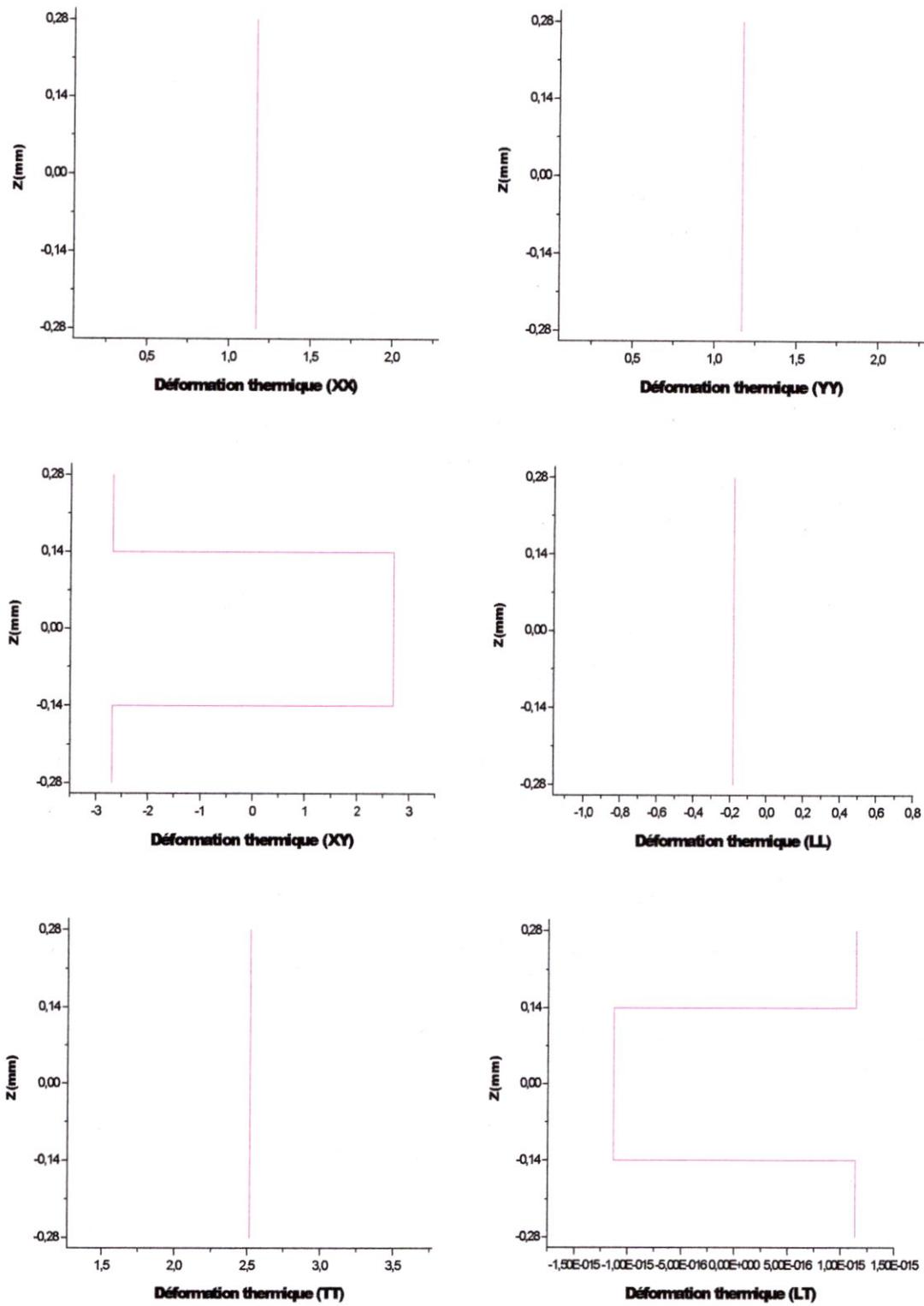


Fig.IV.19: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T=60^{\circ}\text{C}$, $T_p=180^{\circ}\text{C}$.

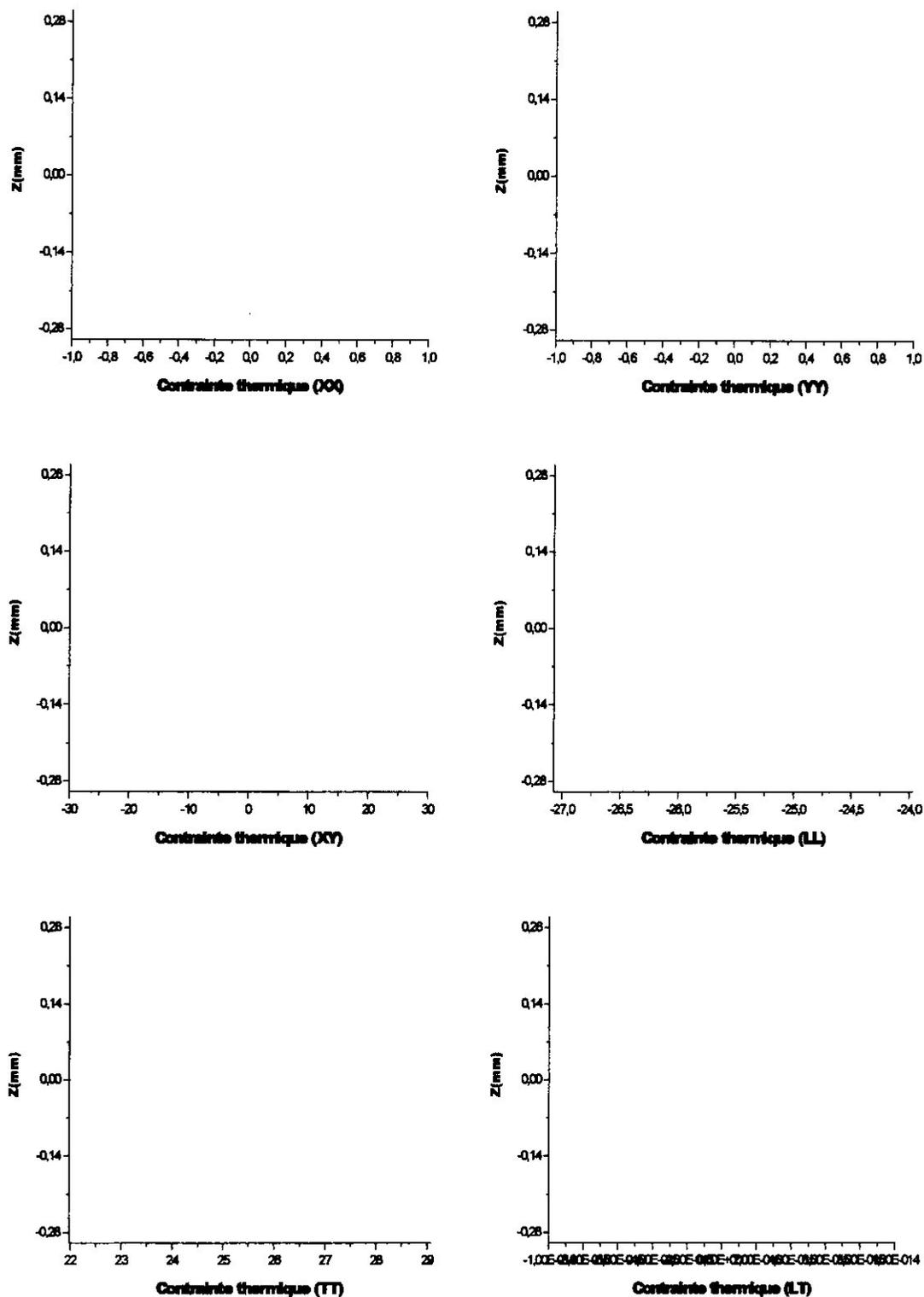
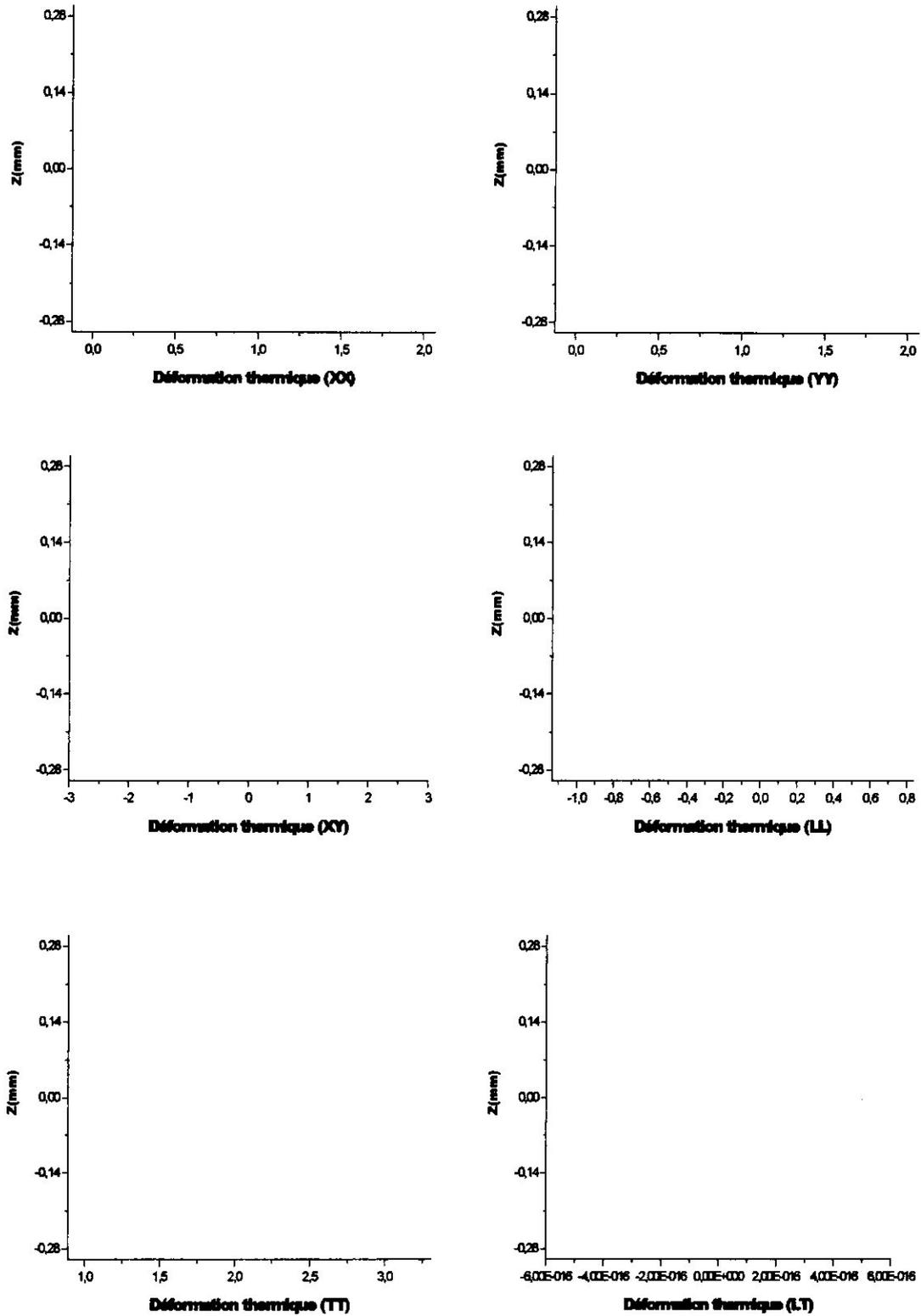


Fig.IV.20 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$
 Pour $T=60^\circ\text{C}$, $T_p=180^\circ\text{C}$.



**Fig.IV.21: Déformations thermiques le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
Pour T=80°C, T_p=180°C.**

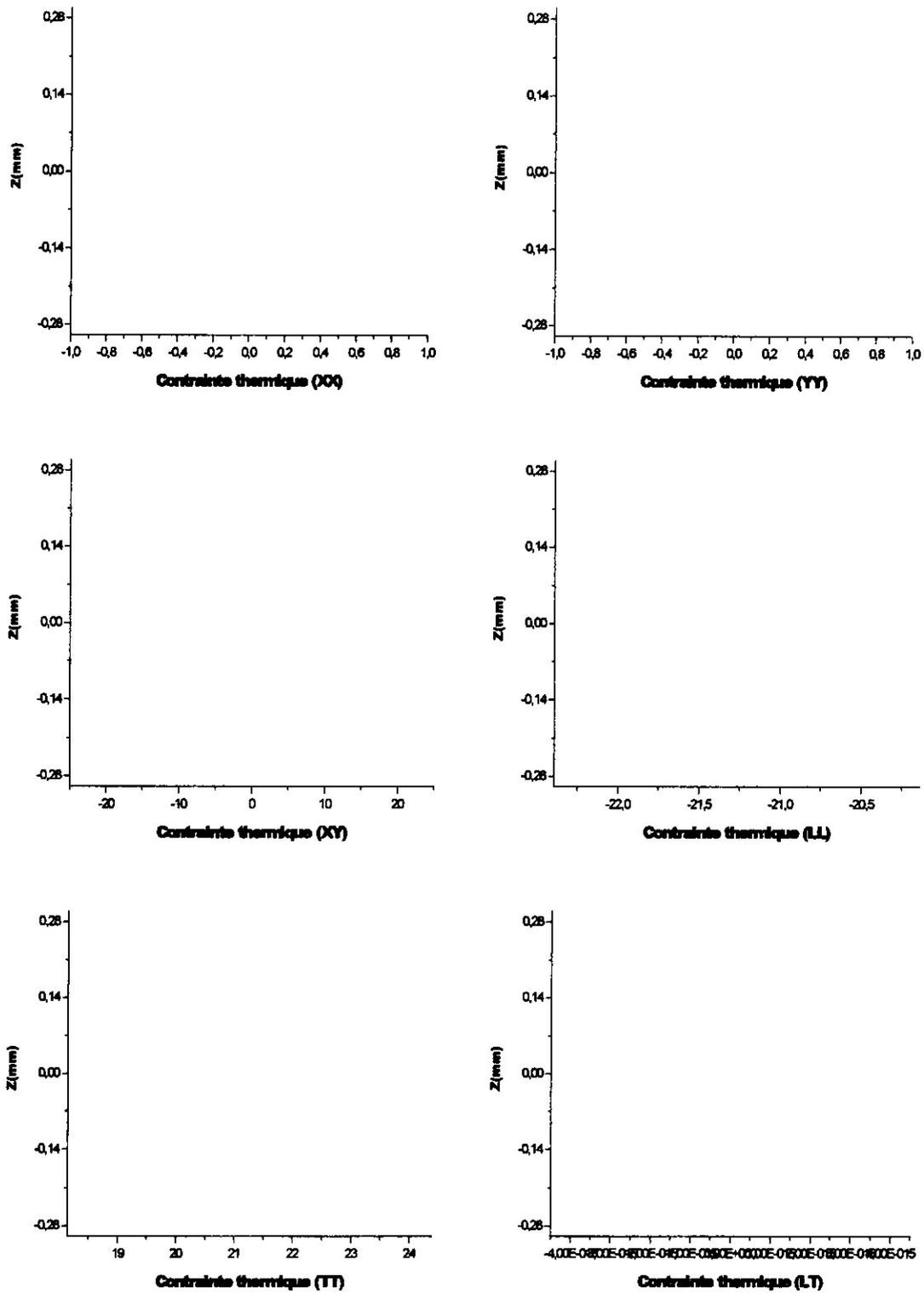


Fig.IV.22: Contraintes thermiques le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
 Pour T=80°C, T_p=180°C.

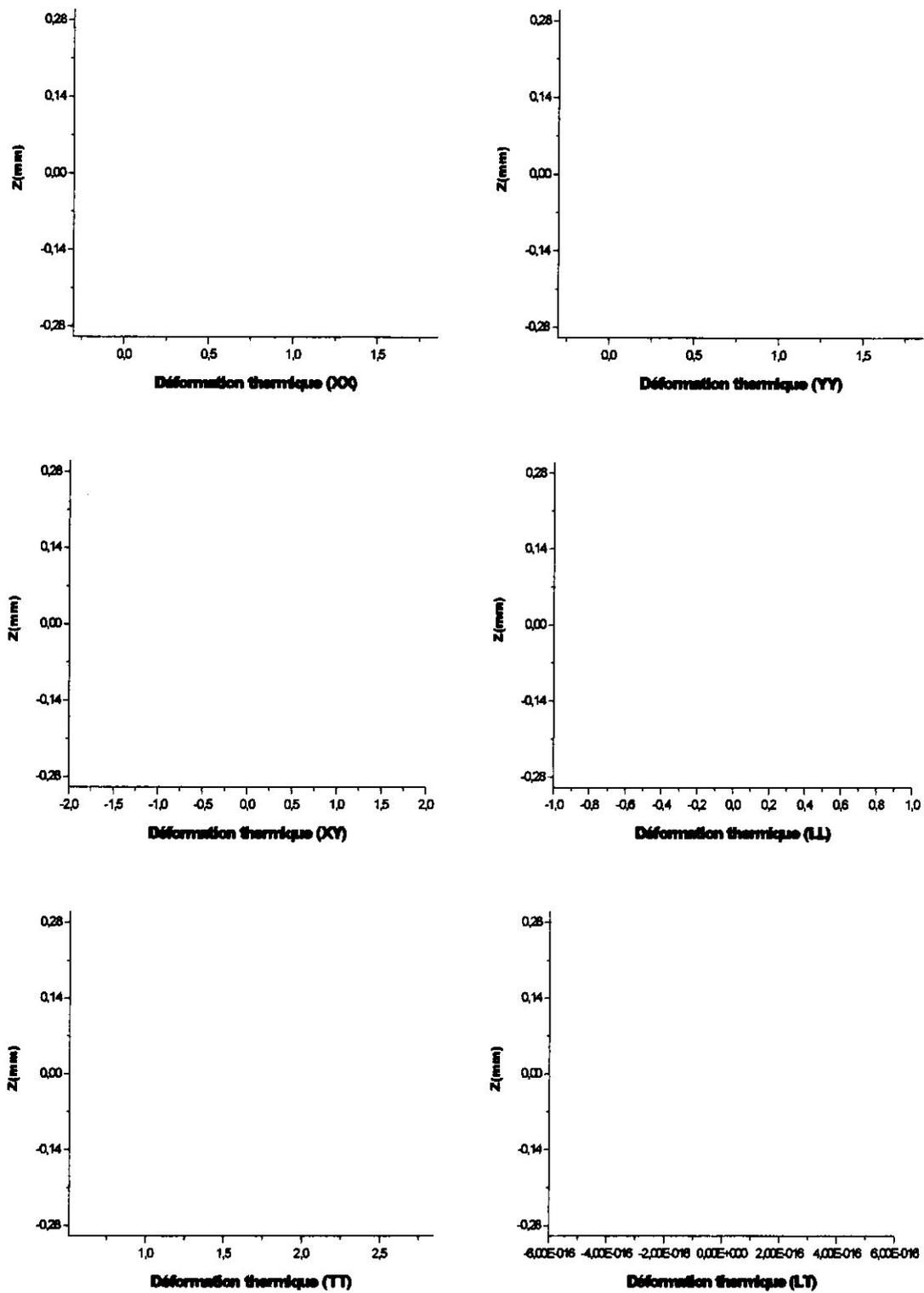


Fig.IV.23: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T=100^{\circ}\text{C}$, $T_p=180^{\circ}\text{C}$.

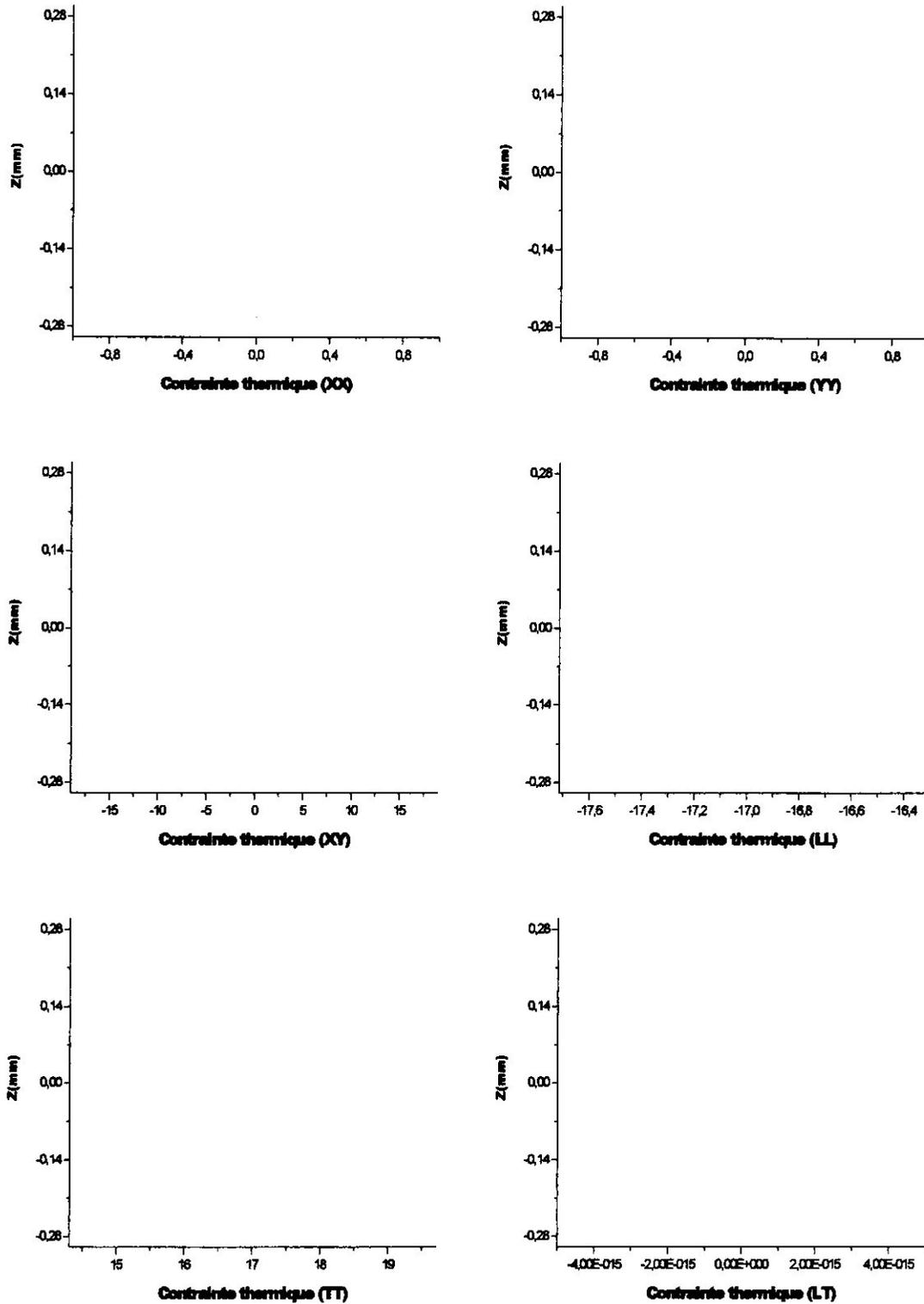


Fig.IV.24: Contraintes thermiques le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=100°C, T_p=180°C.

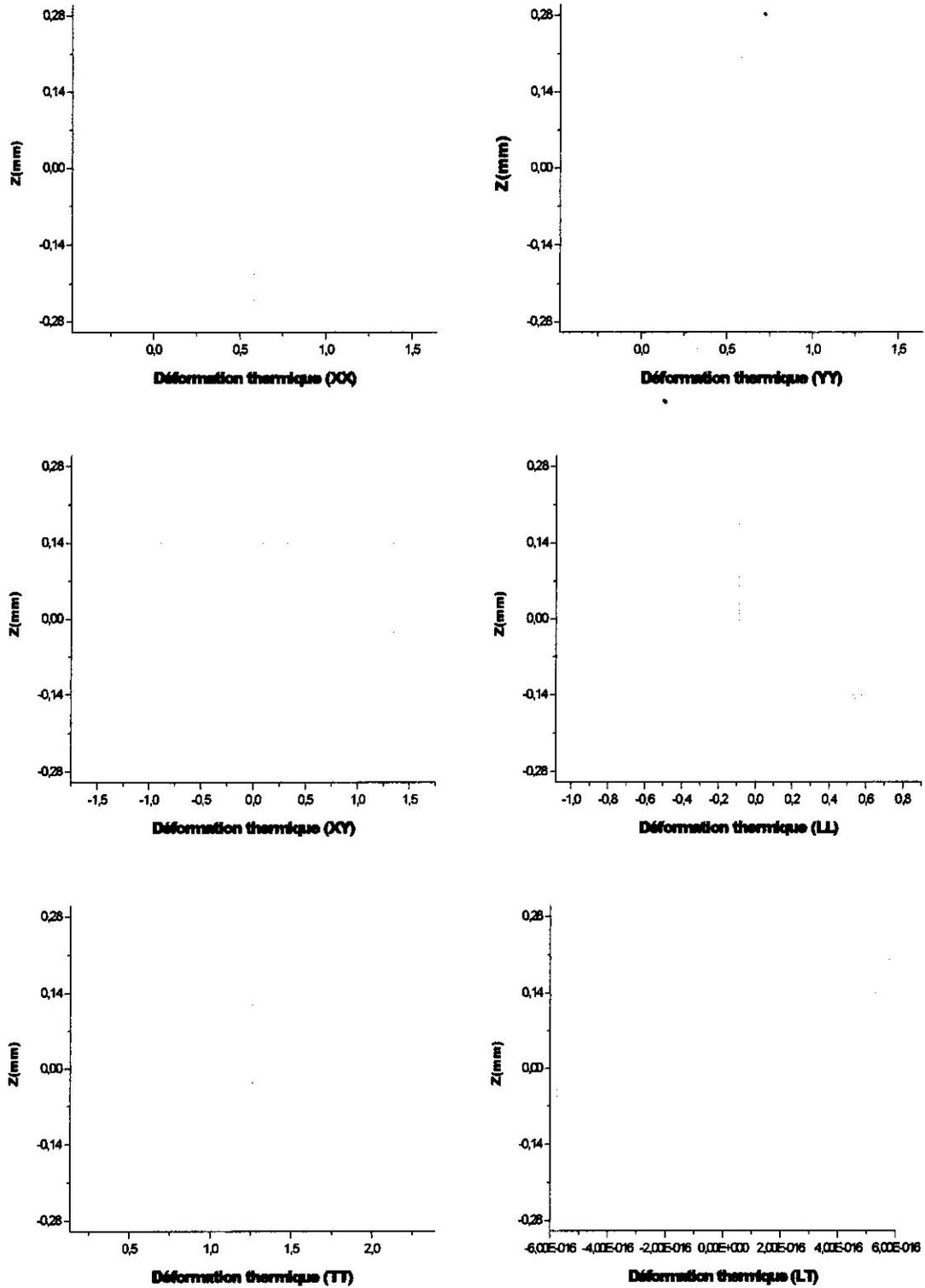


Fig.IV.25: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/45°/45°] pour T=120°C, T_p=180°C.

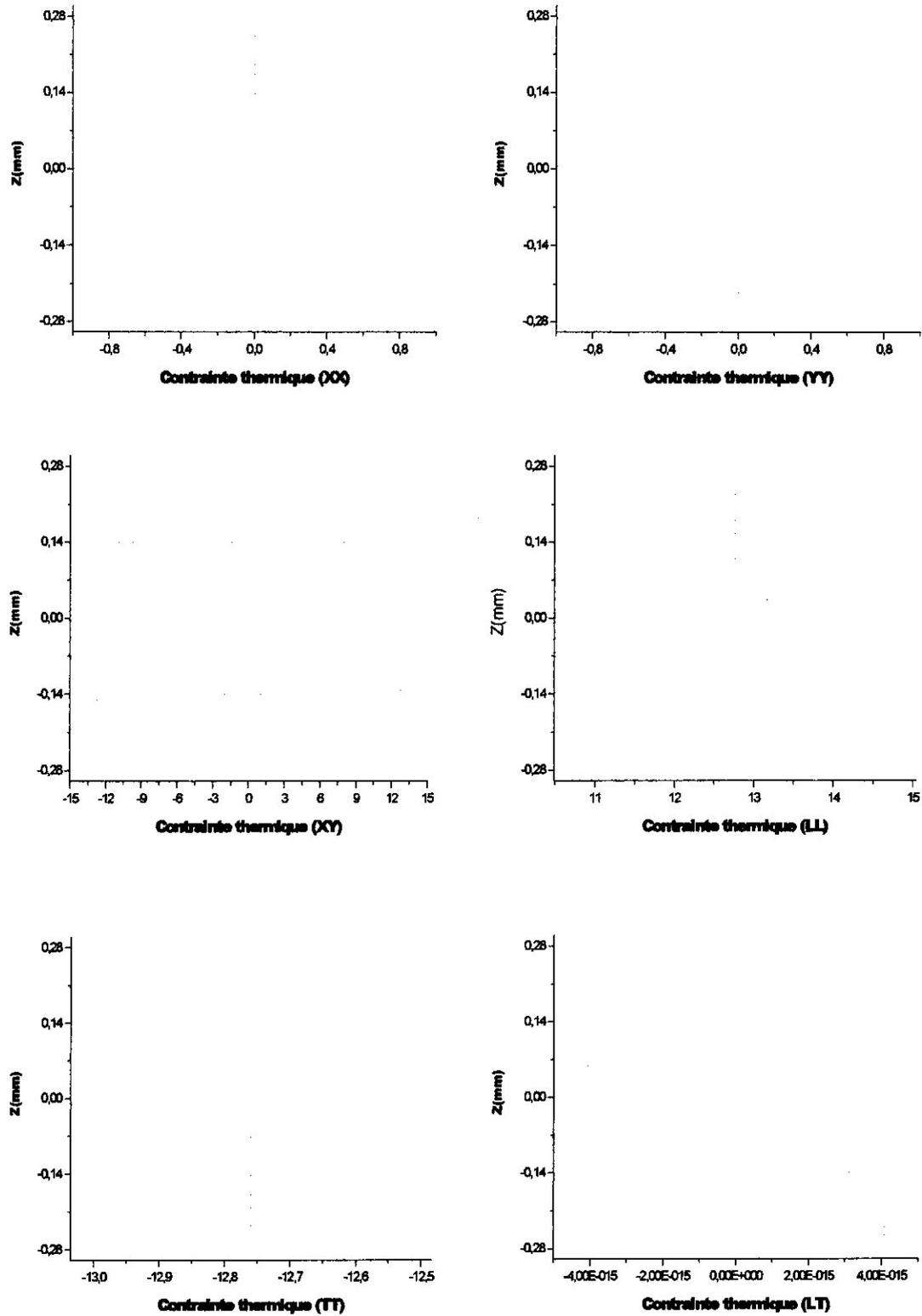


Fig.IV.26:Contraindes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=120°C, T_p=180°C.

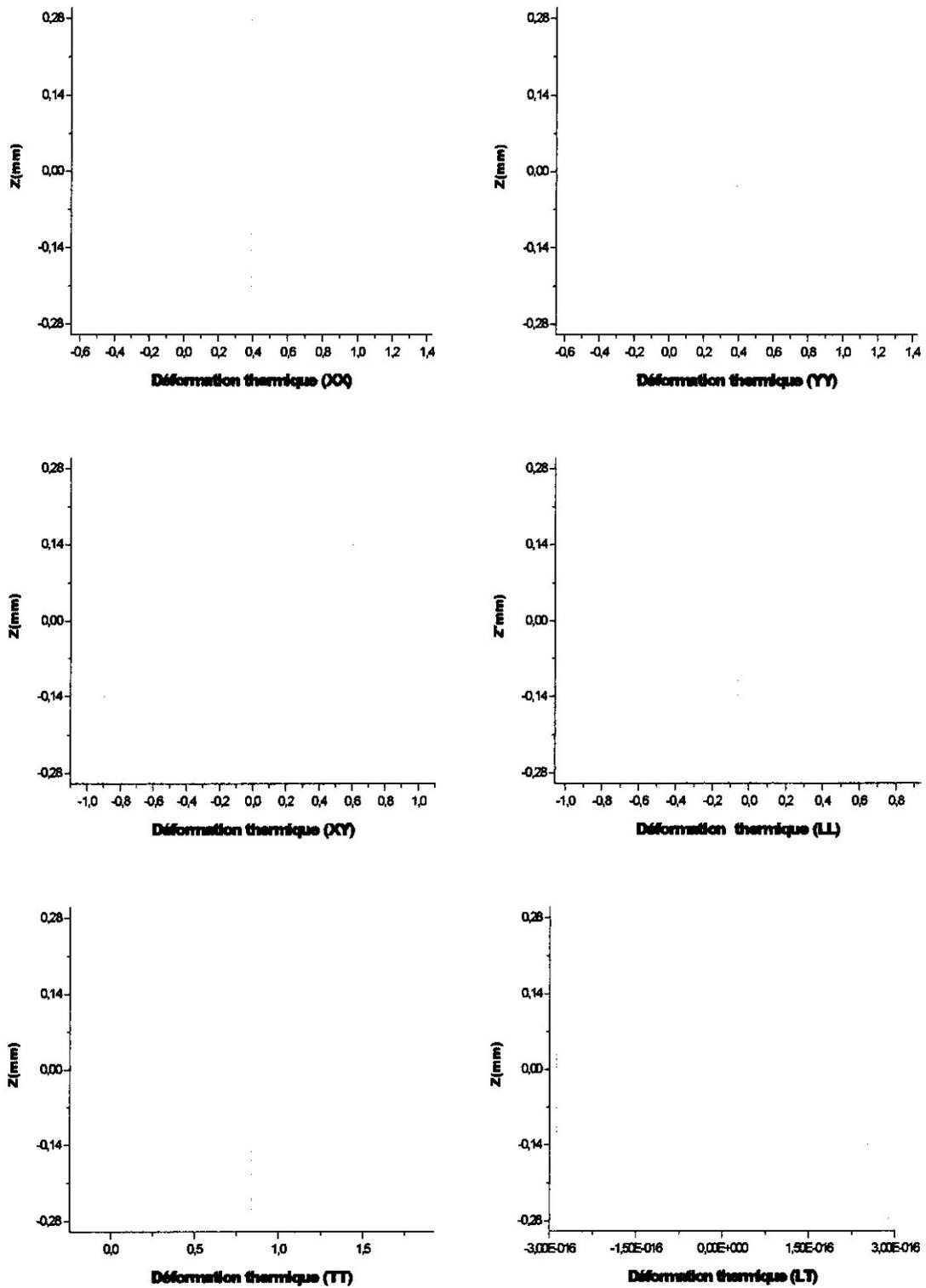


Fig.IV.27: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour T=140°C, T_p=180°C.

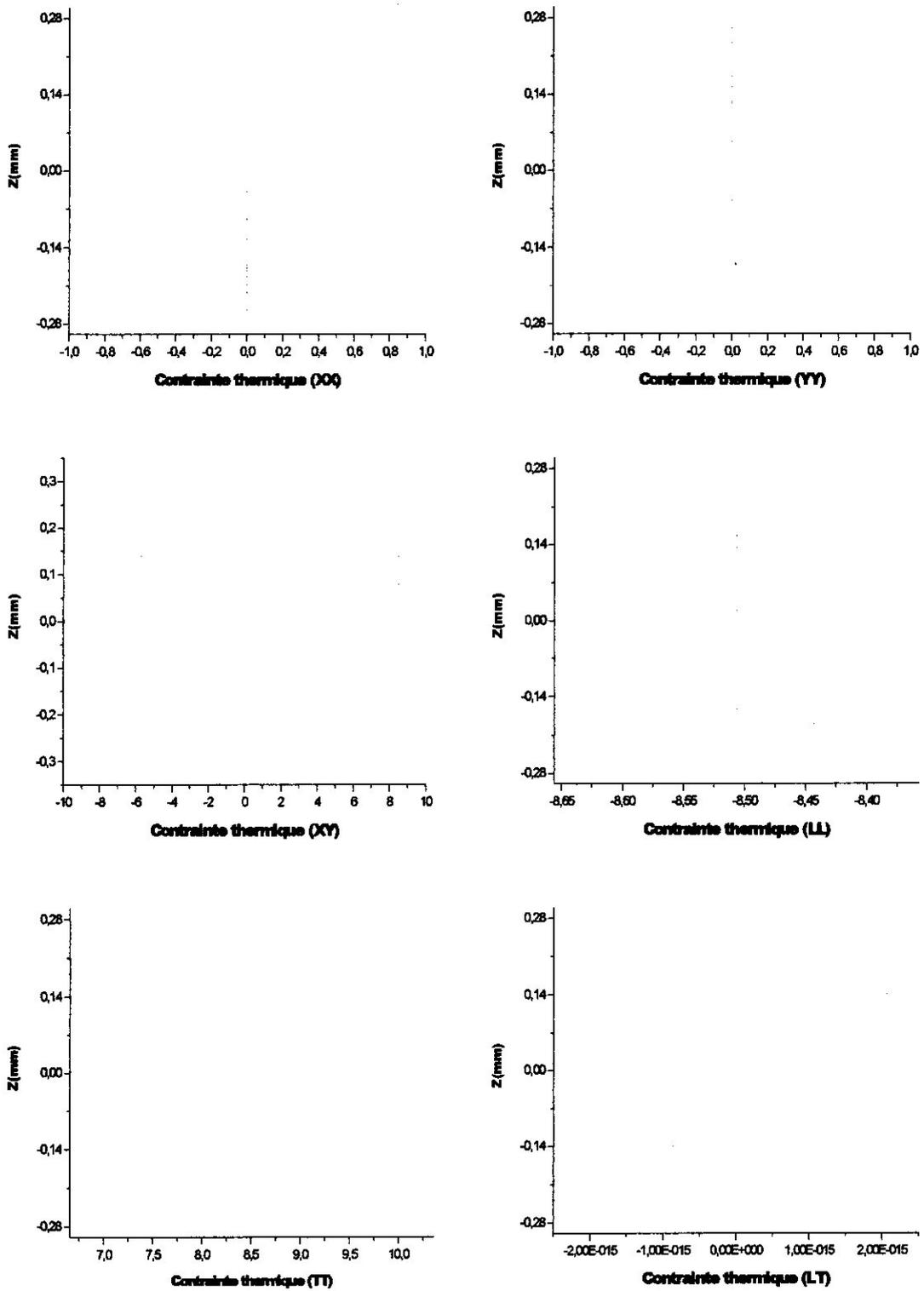


Fig.IV.28 : Contraintes thermiques le T300/5208 du stratifié $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$
 Pour $T=140^\circ\text{C}$, $T_p=180^\circ\text{C}$.

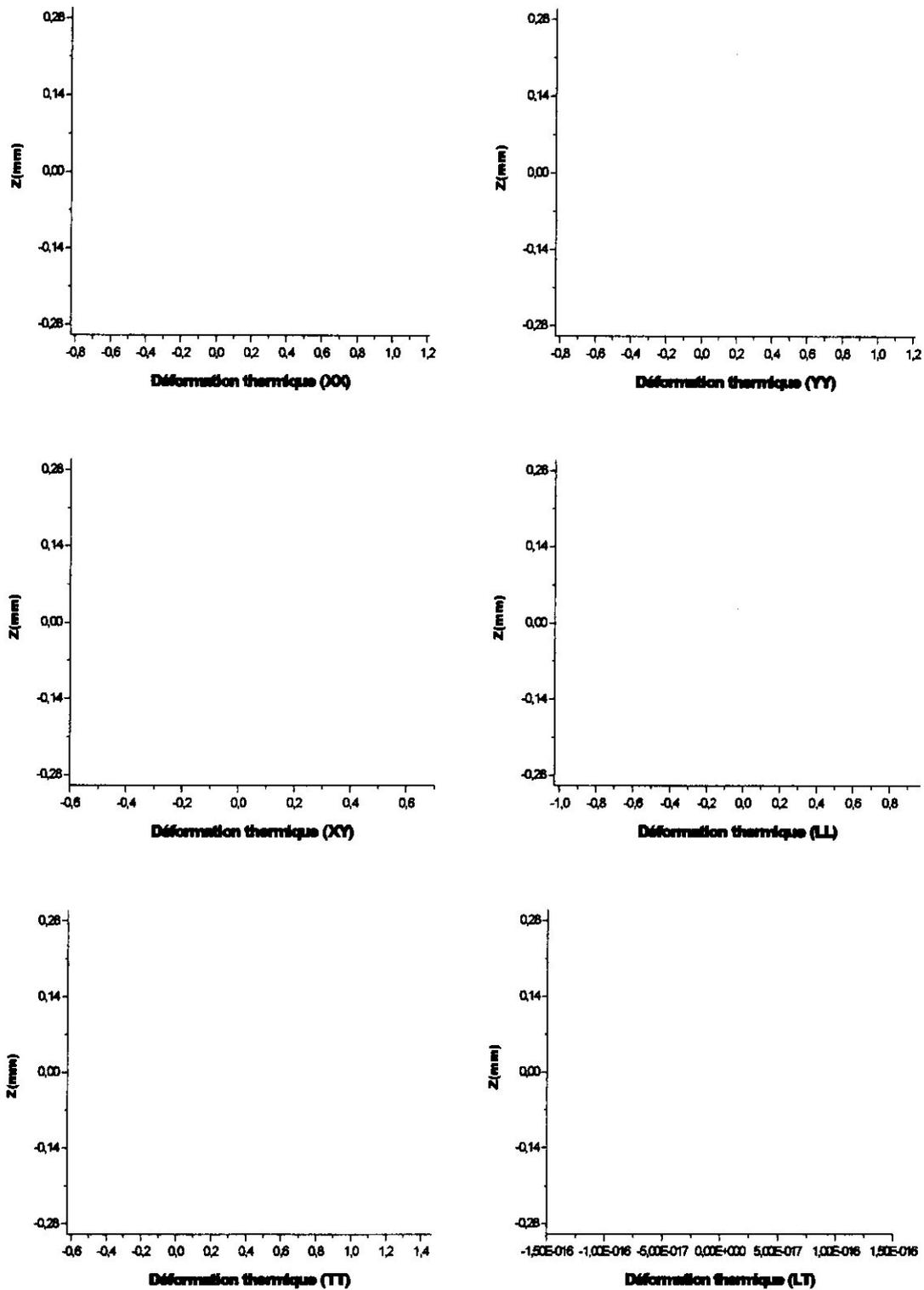


Fig.IV.29: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
 Pour T=160°C, T_p=180°C.

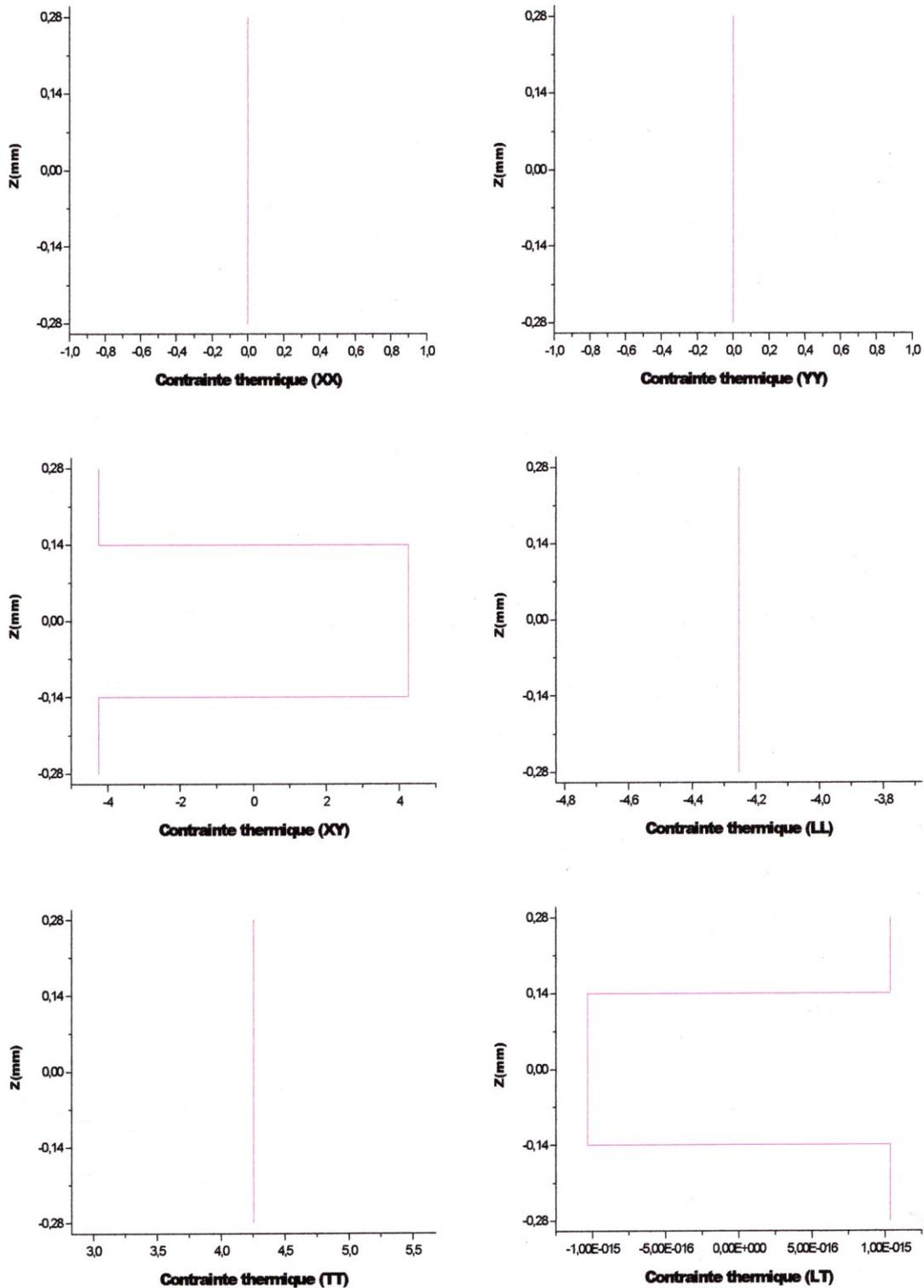


Fig.IV.30 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
 Pour T=160°C, T_p=180°C.

a) interprétation :

Afin de faire une bonne analyse des résultats, nous les résumons dans un tableau comme suit :

Graphite époxyde		T _p	T _u	ΔT	σ _L %	σ _T %	σ _{LT} %
1	[45/-45/-45/45]	180°C	20°C	- 160°C	2.268	23.305	1.09E-14
2	[45/-45/-45/45]	180°C	40°C	- 140°C	1.98	20.392	1.09E-14
3	[45/-45/-45/45]	180°C	60°C	- 120°C	1.701	17.478	1.19E-14
4	[45/-45/-45/45]	180°C	80°C	- 100°C	1.417	14.565	5.25E-15
5	[45/-45/-45/45]	180°C	100°C	- 80°C	1.134	11.65	6.07E-15
6	[45/-45/-45/45]	180°C	120°C	- 60°C	0.8506	8.739	5.98E-15
7	[45/-45/-45/45]	180°C	140°C	- 40°C	0.567	5.826	3.02E-15
8	[45/-45/-45/45]	180°C	160°C	- 20°C	0.283	2.913	1.51E-15
9	[45/-45/-45/45]	120°C	20°C	- 100°C	1.417	14.565	5.25E-15
10	[45/-45/-45/45]	120°C	40°C	- 80°C	1.134	11.65	6.07E-15
11	[45/-45/-45/45]	120°C	60°C	-60°C	0.8506	8.739	5.98E-15
12	[45/-45/-45/45]	120°C	80°C	-40°C	0.567	5.826	3.02E-15
13	[45/-45/-45/45]	120°C	100°C	-20°C	0.283	2.913	1.51E-15

Tableau (IV.1) : Contraintes Thermiques à la rupture.

La configuration choisie [+45/-45]_s présente une configuration des contraintes assez intéressante. Au fait il y a une continuité des contraintes d'une couche à une autre. Le cisaillement longitudinal est nul.

Pour la température de post cuisson 180°C les contraintes ont des valeurs plus importantes que ceux à 120°C à cause du gradient de température. Plus la température augmente, plus les valeurs des contraintes thermiques diminuent, les contraintes transversales atteignent des valeurs plus importantes par rapport à la résistance en traction transversale en comparaison à la contrainte longitudinale, qui atteint des valeurs plus faibles. Néanmoins ces valeurs ne sont pas très élevées, la plus importante représente 34.026% de Y_T .

*Partie Thermoélastique
avec Prise en Compte
du Vieillissement*

VI.3 Prédiction du comportement thermoélastique avec prise en compte de l'effet de température sur les propriétés mécaniques :

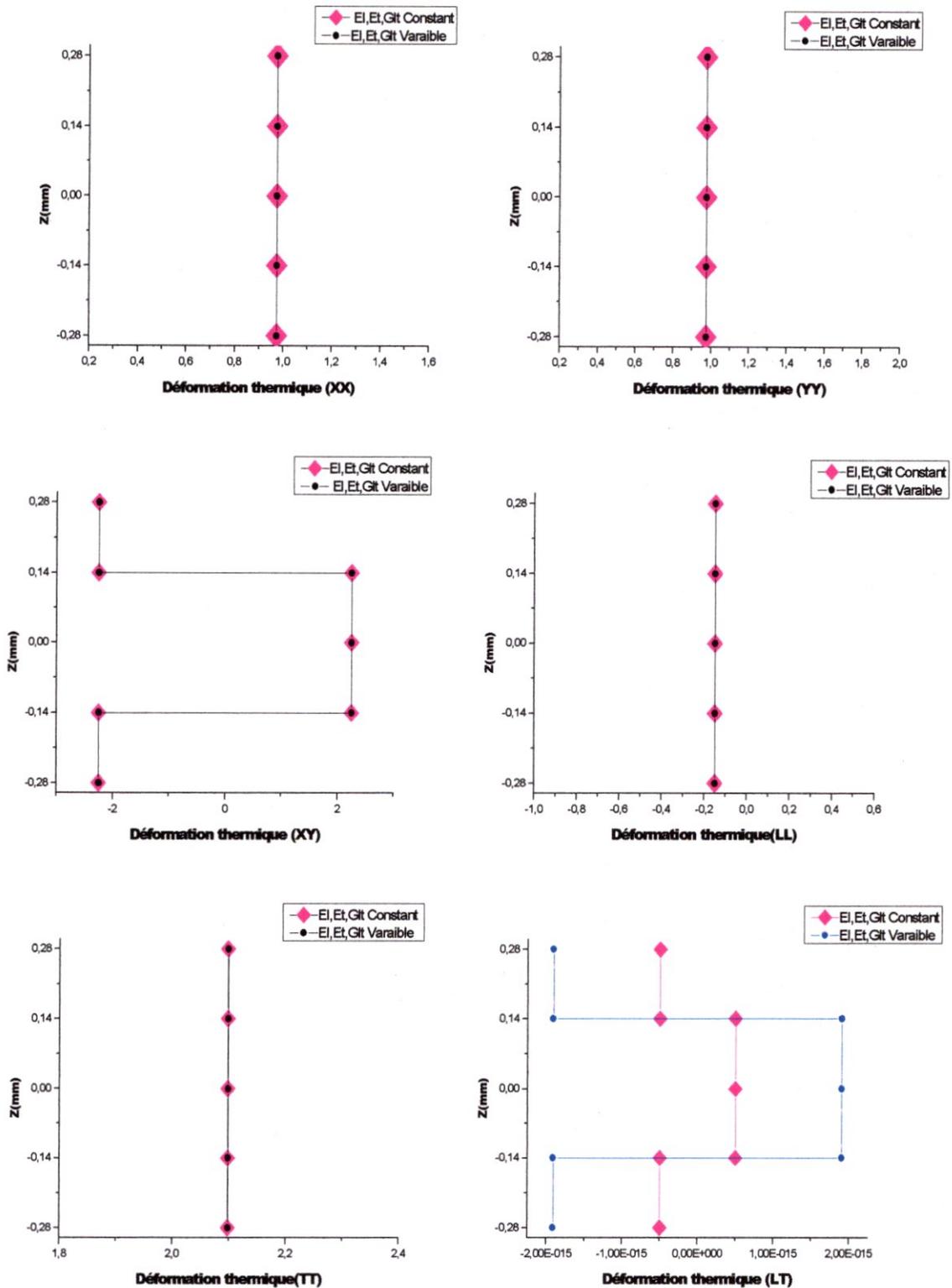


Fig.IV.31: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] pour $T_{opr}=20^{\circ}C$.

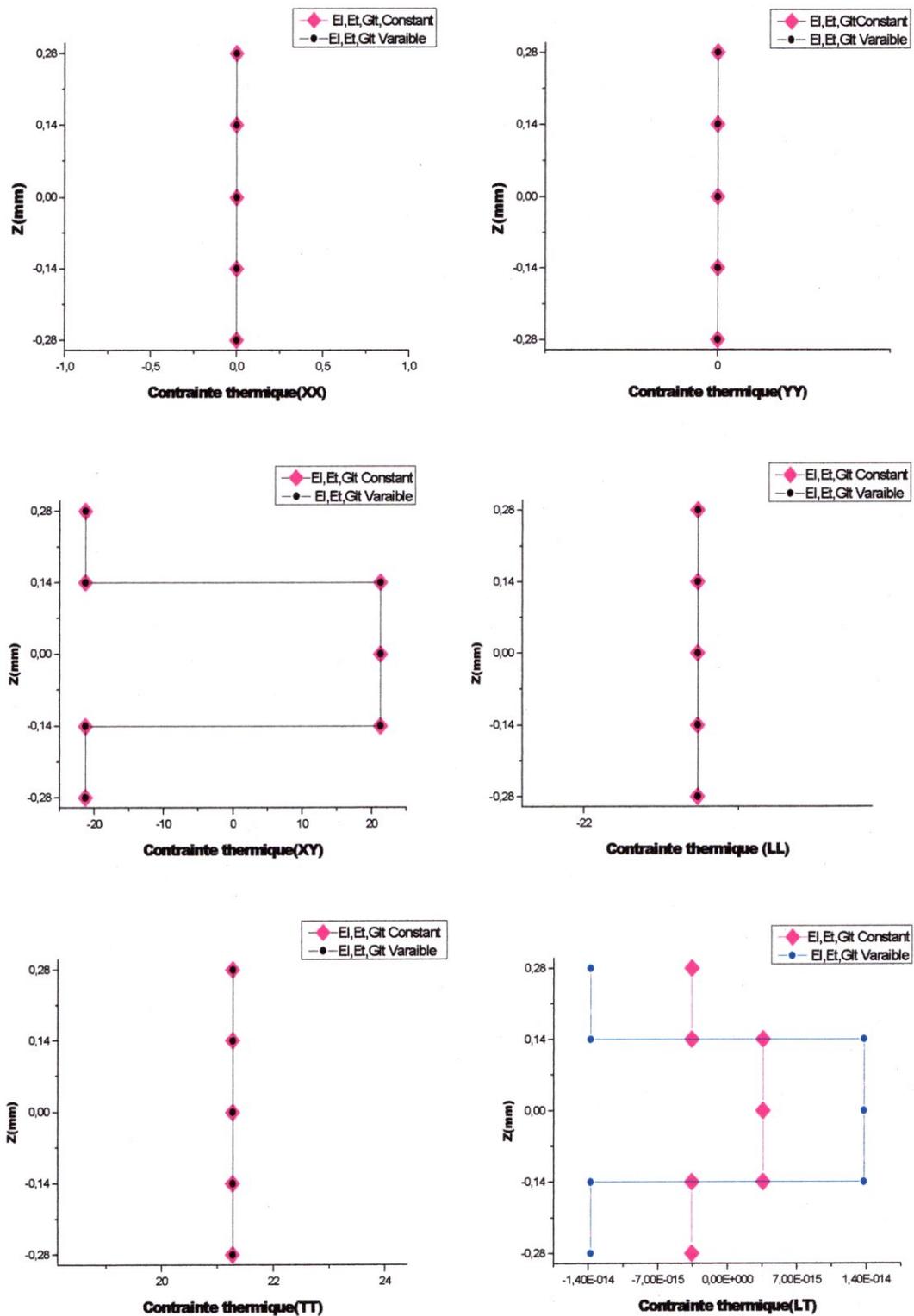


Fig.IV.32 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=20^{\circ}c$.

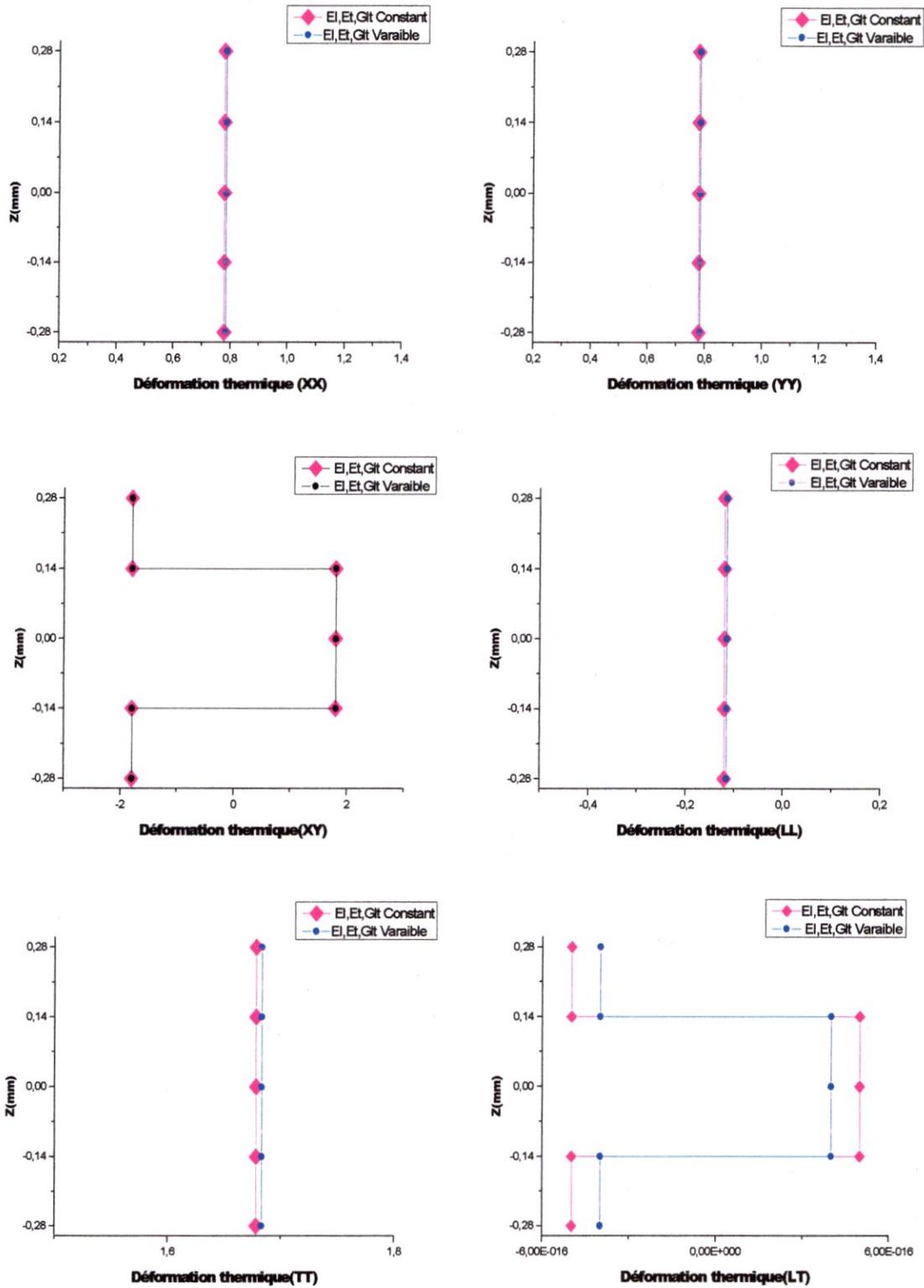


Fig.IV.33: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr} = 40^{\circ}C$.

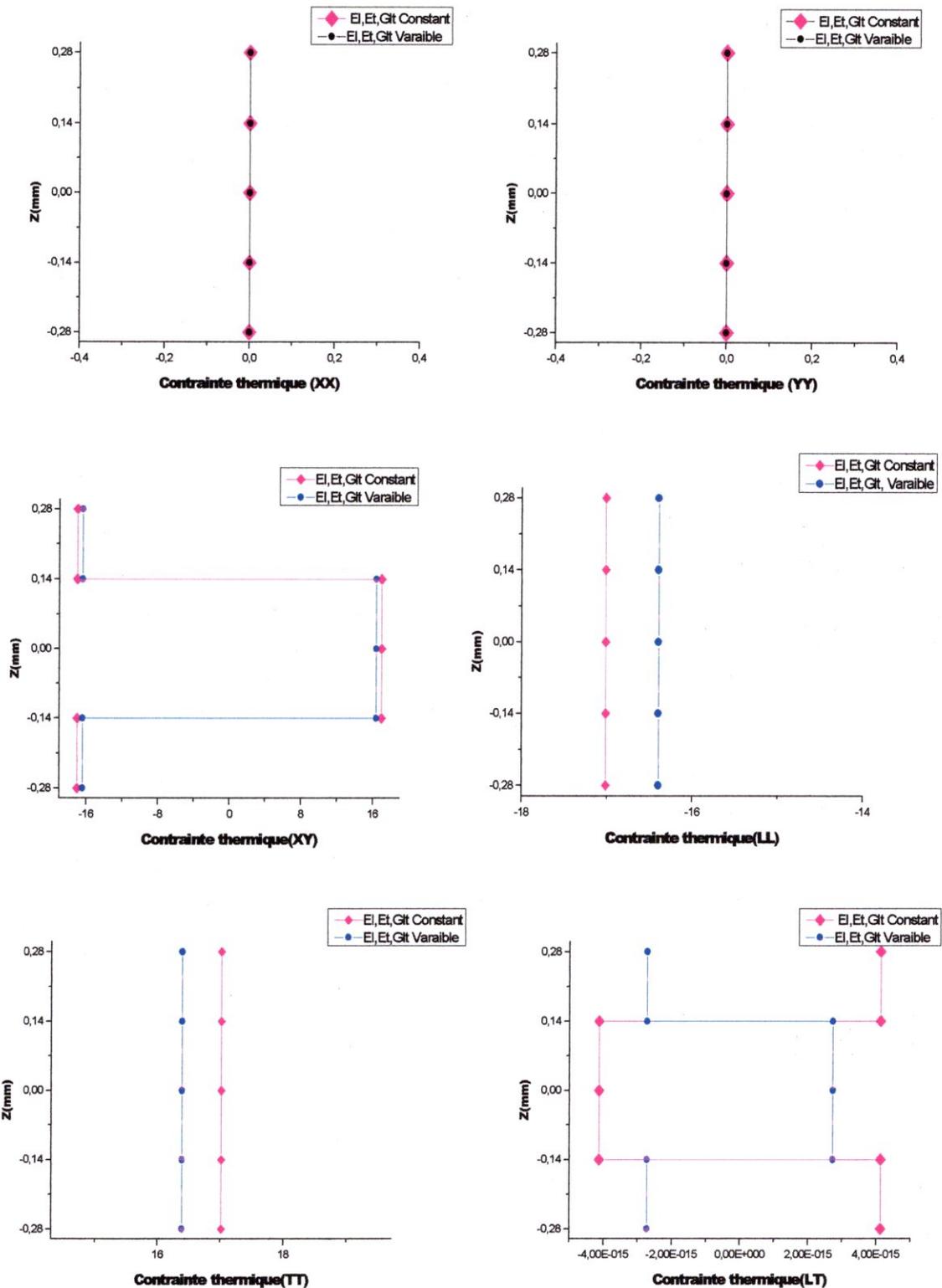


Fig .IV.34:Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=40^{\circ}c$.

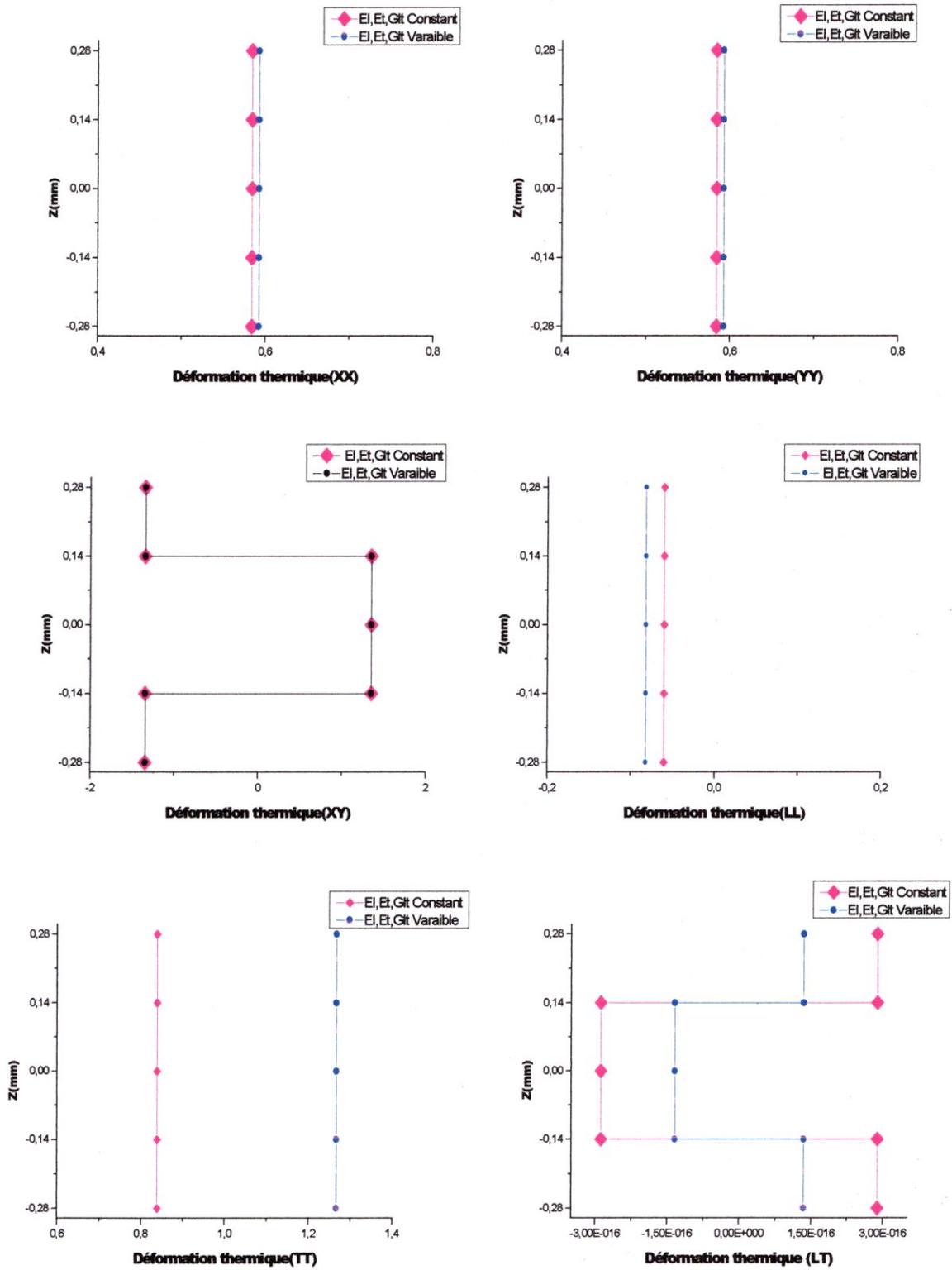


Fig .IV.35: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45/45°/45°] Pour $T_{opr}=60^{\circ}c$.

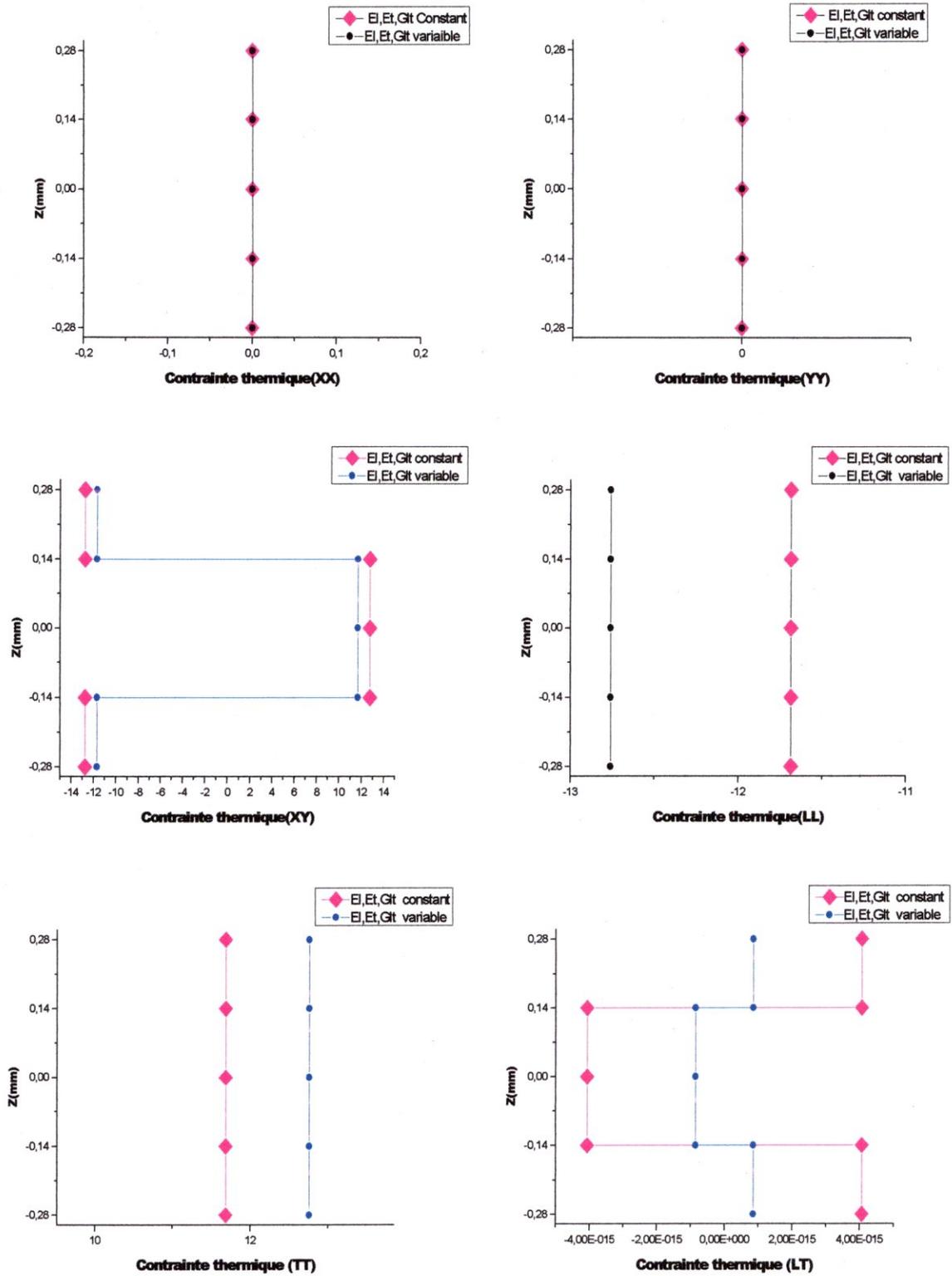


Fig.IV.36 :Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
 Pour $T_{opr} = 60^{\circ}c$.

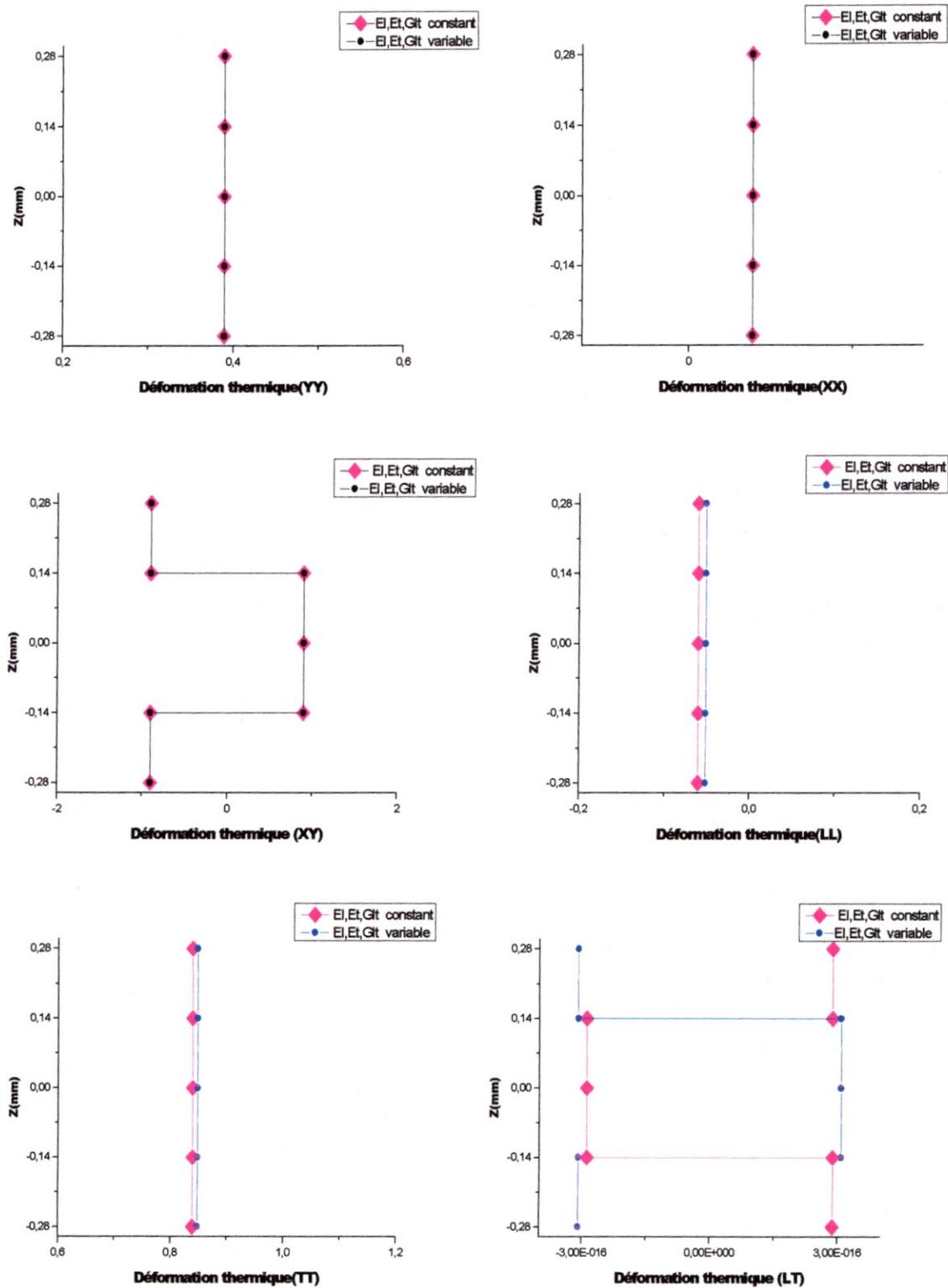


Fig.IV.37: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/45°/45°]
 Pour $T_{opr}=80^{\circ}C$.

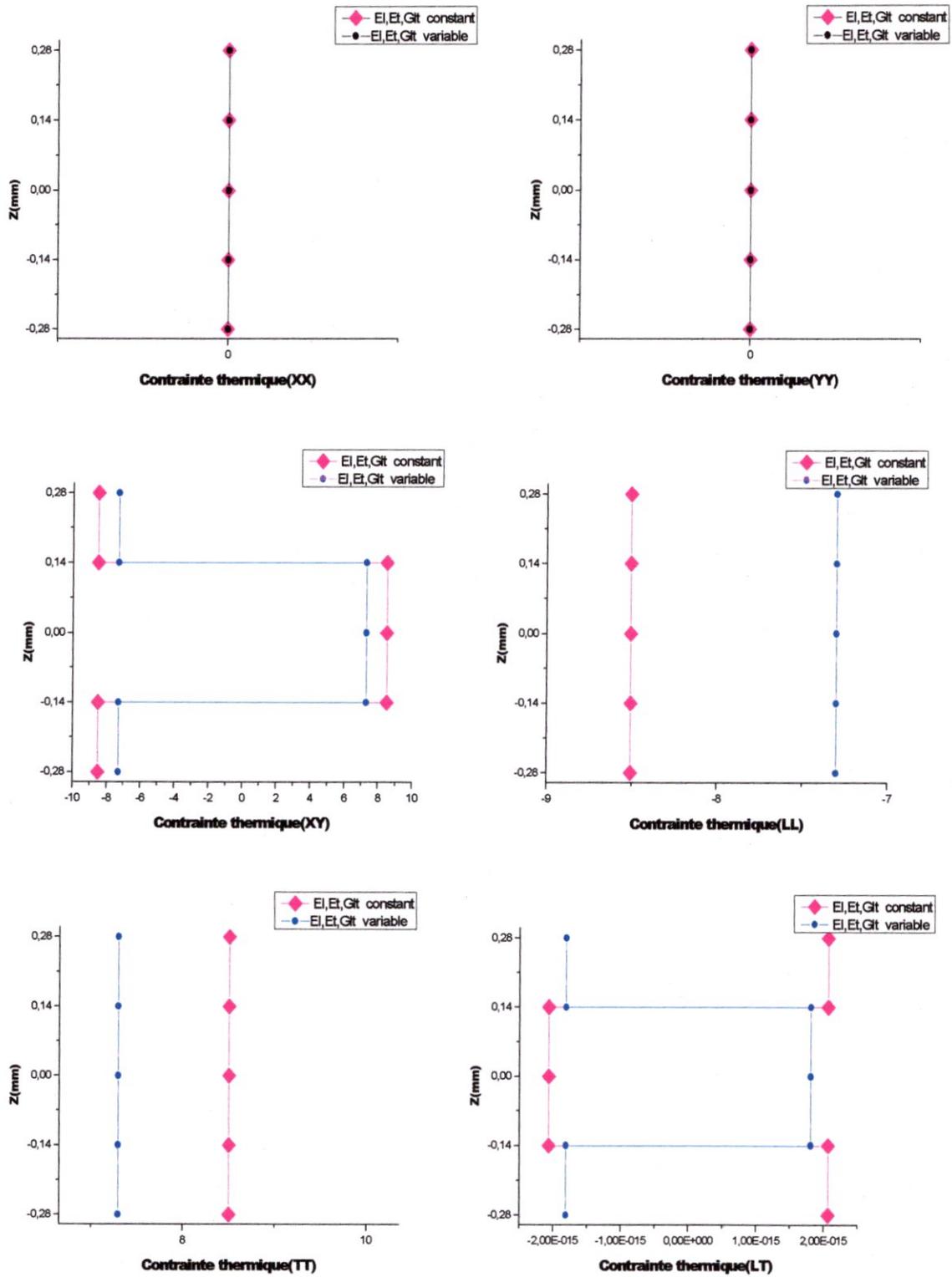


Fig.IV.38 : Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°]
 Pour $T_{opr}=80^{\circ}c$.

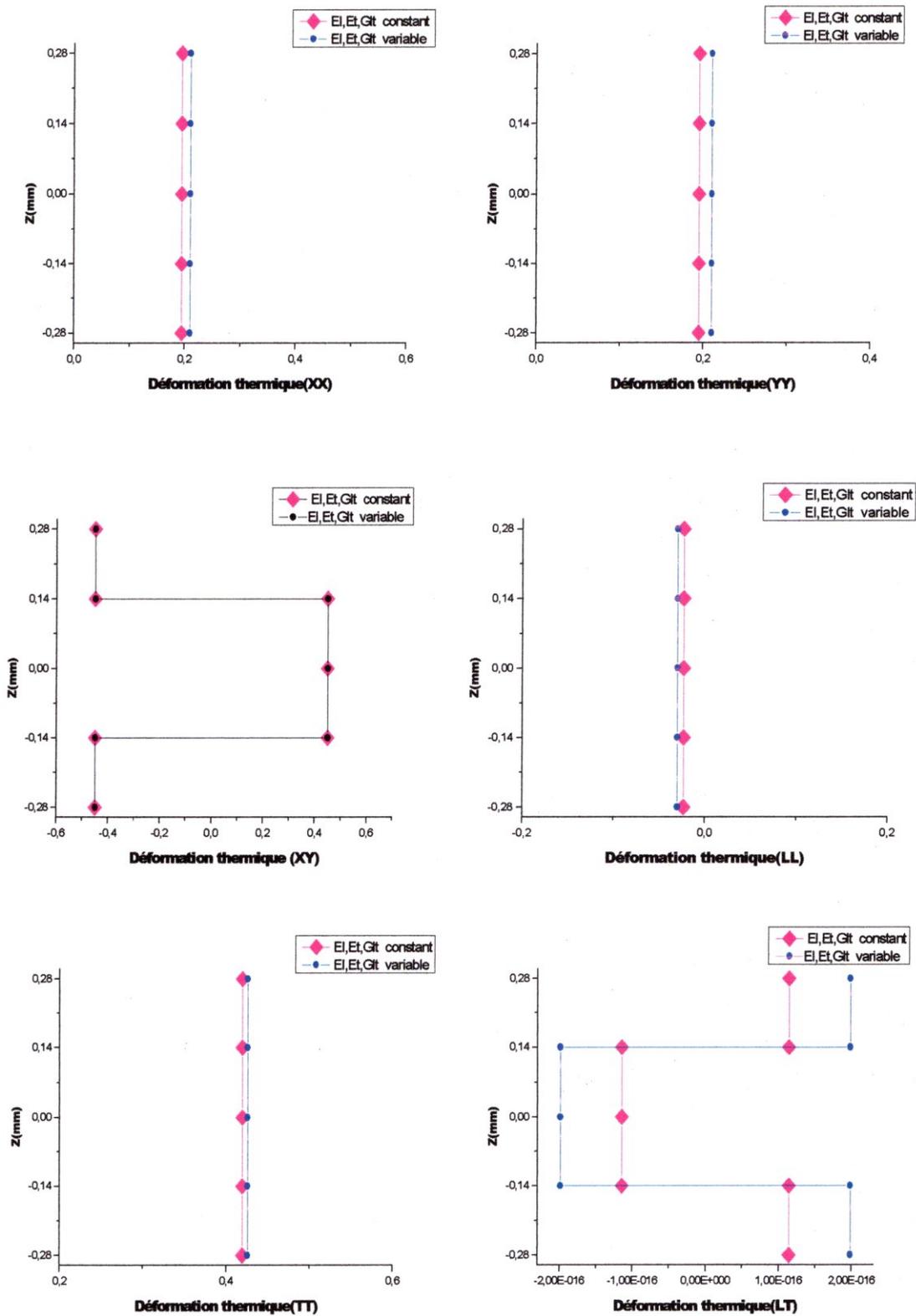


Fig.IV.39: Déformations thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/45°/45°] Pour $T_{op}=100^{\circ}C$.

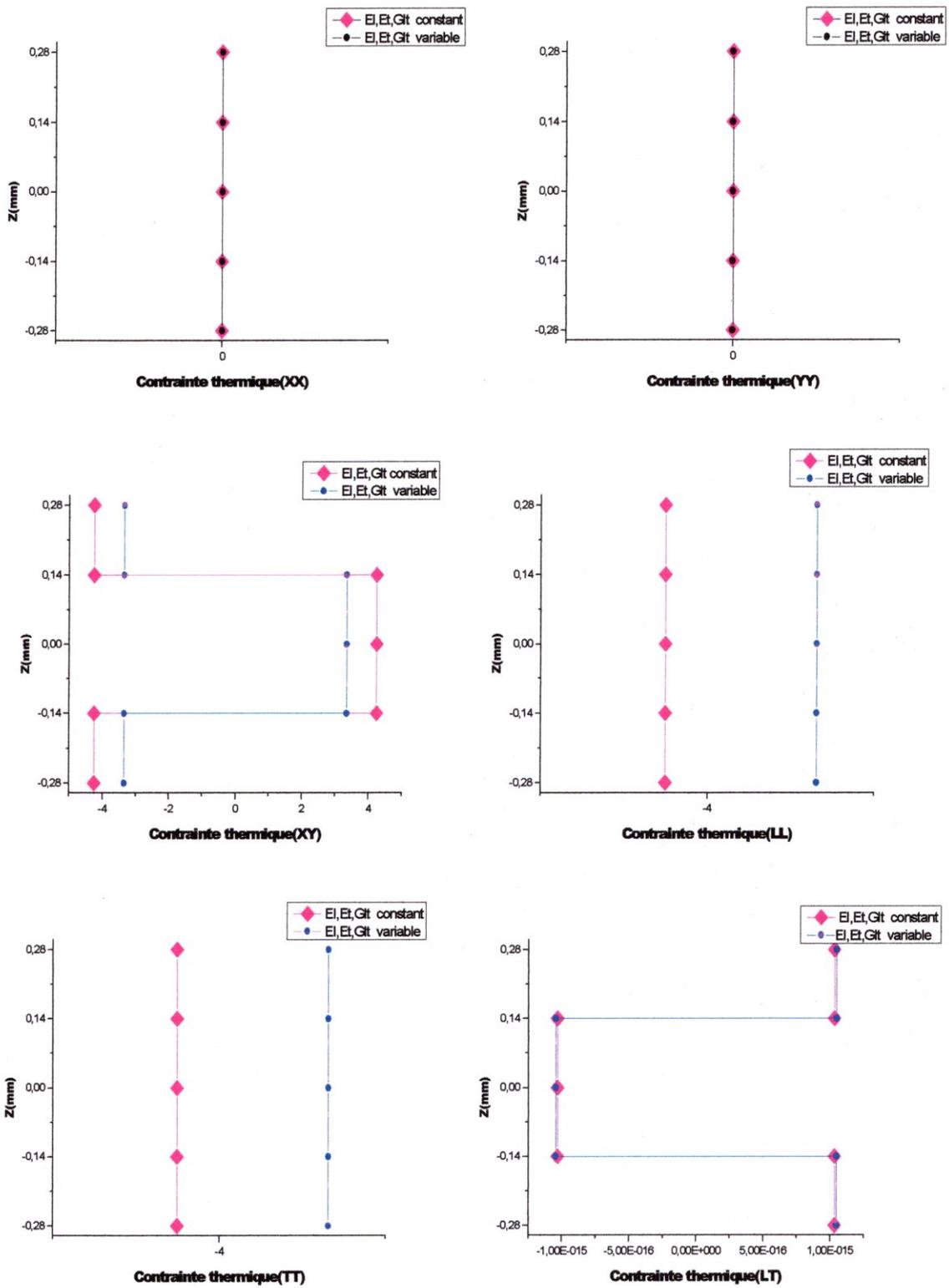


Fig.IV.40: Contraintes thermiques pour le T300/5208 du stratifié [45°/-45°/-45°/45°] Pour $T_{opr}=100^{\circ}C$.

a) Interprétation des résultats :

Afin de faire une bonne analyse des résultats, nous les résumons dans un tableau comme suit :

I	Graphite époxyde	T _p	T	ΔT	σ_L %	σ_T %	σ_{LT} %
1	[45/-45/-45/45] El,Et,Gl,t,v lt <i>Constants</i>	120°C	20°C	- 100°C	1.417	14.565	5.25E-15
2	[45/-45/-45/45]	120°C	40°C	- 80°C	1.134	11.65	6.07E-15
3	[45/-45/-45/45]	120°C	60°C	- 60°C	0.8506	8.739	5.98E-15
4	[45/-45/-45/45]	120°C	80°C	- 40°C	0.567	5.826	3.02E-15
5	[45/-45/-45/45]	120°C	100°C	- 20°C	0.283	2.913	1.51E-15
II	Graphite époxyde	T _g	T _{opr}	T*	σ_L %	σ_T %	σ_{LT} %
1	[45/-45/-45/45] El,Et,Gl,t,vlt <i>Variables</i>	160°C	20°C	1.014493	1.41	14.44	1.997E-14
2	[45/-45/-45/45]	160°C	40°C	0.8695652	1.105	12.733	4.545E-15
3	[45/-45/-45/45]	160°C	60°C	0.7246377	0.799	10.694	1.684E-15
4	[45/-45/-45/45]	160°C	80°C	0.5797101	0.508	8.167	4.352E-15
5	[45/-45/-45/45]	160°C	100°C	0.4347826	0.238	4.846	3.251E-15

Tableau (IV.2) : Contraintes Thermiques du Modèle de Tsai.

I	Graphite époxyde	T _p	T	σ_{Lmax}	σ_{Tmax}	σ_{LTmax}
1	[45/-45/-45/45] El,Et,Glt,v lt <i>Constants</i>	120°C	60°C	12.7598	12.7598	4.0716E-15
2	[45/-45/-45/45]	120°C	80°C	8.5066	8.5066	2.0665E-15
3	[45/-45/-45/45]	120°C	100°C	4.2533	4.2533	1.0332E-15
II	Graphite époxyde	T _g	T _{opr}	σ_{Lmax}	σ_{Tmax}	σ_{LTmax}
1	[45/-45/-45/45] El,Et,Glt,vlt <i>Variables</i>	160°C	60°C	11.6851	11.6851	857.35E-15
2	[45/-45/-45/45]	160°C	80°C	7.3005	7.3005	1.8117E-15
3	[45/-45/-45/45]	160°C	100°C	3.3435	3.3435	1.0448E-15

Tableau (IV.3) : Contraintes Thermiques Maximales.

On remarque que plus la température augmente, plus on a réduction des propriétés mécaniques, de plus les contraintes thermiques transversales diminuent ainsi que les contraintes thermiques longitudinales.

Pour de faibles températures, la prise en compte du vieillissement thermique dans les propriétés mécaniques n'est pas très significatif à $T_{opr} = 20^{\circ}\text{C}$. A partir de $T_{opr} = 40^{\circ}\text{C}$, l'effet est visible, et plus la température augmente, plus l'écart entre le modèle utilisé et les propriétés données est importants.

On remarque que plus la température augmente, plus les déformations thermiques longitudinales et transversales augmentent, ceci est du à la diminution de la rigidité avec la température, donc le matériau se déforme plus.

Les propriétés dominantes dans la dégradation sont celles de la matrice. La chute des propriétés fragilise le composite

Conclusion

L'analyse générale développée à partir de l'équation de la thermoélasticité à travers l'épaisseur pour les stratifiés composites minces symétriques a révélé que les contraintes résiduelles sont non négligeable et doivent être prise en considération lors de l'analyse prévisionnelle.

Le cas pour deux températures de post cuisson différentes a montré des résultats de contraintes différentes. Donc les propriétés de la matrice sont dominantes dans le comportement thermoélastique.

Les propriétés dominantes dans le vieillissement sont celles de la matrice. La chute des propriétés fragilise le composite, l'augmentation de température entraîne une chute de la durabilité.

Nous avons relié par ce travail le comportement macroscopique des matériaux composites à matrice polymère aux propriétés micromécaniques de leurs constituants (fibres, matrice) en tenant compte explicitement de l'évolution de la température à l'échelle microstructurale. Les résultats montrent que ceux ci présentaient une différence nette lors du non prise en compte du vieillissement thermique à l'échelle micro analytique à des températures élevées.

Cette synergie ouvre des perspectives concernant les études de thermoélasticité sur les structures composites ainsi que sur leurs optimisations.

En perspective future d'autres modèles micro analytique peuvent être étudiés, comparés et raffinés afin de proposer un modèle fiable capable de remplacer l'investigation expérimentale du vieillissement thermoélastique.

Bibliographie

- [1]. J.-M. BERTHELOT, « *Matériaux Composites* » (Comportement mécanique et analyse des Structures) Institut universitaire de technologie, Université du Maine, Le Mans et institut supérieur des matériaux du Mans (1992).
- [2]. D.GAY « *Matériaux Composites* », 3^{ème} édition, édition Hermès (1997).
- [3]. VINSON J.R, SIERAKOWSKI R.L, « *The Behavior of Composed Structures of Composite Materials* », Martinus Nijhoff Publishers, member of the Kluwer Academic Publishers Group Dordrecht Boston (Lancaster 1986).
- [4]. STEPHEN W. TSAI, H. THOMAS HAHN, « *Introduction to composite materials* », technomic publishing, Pennsylvania (1980).
- [5]. S. DA MOTA SILVA , H. DUMONTET , C. HAUVILLER, P. KANOUTE R.RIBEIRO, « *Hygro-Thermal Transient Analysis for Highly Stable Structures* », CMS Conference Report The Twelfth International Conference on Composite Materials ICCM-12 Paris, France 5-9 July 1999 .
- [6] L.W. CHEN & L.Y. CHEN, « *Thermal deformation and stress analysis of composite laminated plates by finite element method* », computer & structures vol.35.n°1, pp. 41-49, (1990).
- [7] A.TOUNSI, E. ADDA, Z, SERIER, « *Analyse des contraintes hygrothermiques transitoires à l'intérieur des plaques composites stratifiées dans le cas d'un environnement cyclique* », proceedings, JNM Blida pp 6, Mai 2000
- [8]. Z. SEREIR, E.A. Adda-Bedia & A. TOUNSI « *Effect of temperature on the hygrothermal behaviour of unidirectional laminated plates with asymmetrical environmental conditions* » Composite Structures, Volume 72, Issue 3, March 2006, Pages 383-392.
- [9]. J. JEDIDI, F. JACQUEMIN & A. VAUTRIN « *Design of accelerated hygrothermal cycles on polymer matrix composites in the case of a supersonic aircraft* » Composite Structures, Volume 68, Issue 4, May 2005, Pages 429-437.

ANNEXES

Annexe A

Soit :

$$= \begin{bmatrix} 1448,07 & 305,52 & 193,03 \\ 305,52 & 651,40 & 193,03 \\ 193,03 & 193,03 & 366,70 \end{bmatrix} \text{ N.m}$$

6. Equation constitutive du stratifié

En combinant les résultats précédents, l'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 296,35 \cdot 10^6 & 49,676 \cdot 10^6 & 27,576 \cdot 10^6 & 198,75 \cdot 10^3 & -60,87 \cdot 10^3 & -68,94 \cdot 10^3 \\ 49,676 \cdot 10^6 & 112,51 \cdot 10^6 & 27,576 \cdot 10^6 & -60,87 \cdot 10^3 & -77,01 \cdot 10^3 & -68,94 \cdot 10^3 \\ 27,576 \cdot 10^6 & 27,576 \cdot 10^6 & 61,147 \cdot 10^6 & -68,94 \cdot 10^3 & -68,94 \cdot 10^3 & -60,87 \cdot 10^3 \\ 198,75 \cdot 10^3 & -60,87 \cdot 10^3 & -68,94 \cdot 10^3 & 305,52 & 193,03 & 193,03 \\ -60,87 \cdot 10^3 & -77,01 \cdot 10^3 & -68,94 \cdot 10^3 & 305,52 & 651,40 & 193,03 \\ -68,94 \cdot 10^3 & -68,94 \cdot 10^3 & -60,87 \cdot 10^3 & 193,03 & 193,03 & 366,70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Exemple 14.4.3.2

Nous considérons maintenant le stratifié de la figure 14.3, constitué de quatre couches unidirectionnelles de mêmes propriétés :

$$E_L = 38 \text{ GPa} \quad E_T = 9 \text{ GPa} \quad G_{LT} = 3,6 \text{ GPa} \quad \nu_{LT} = 0,32$$

Les épaisseurs et les orientations des couches sont indiquées sur la figure 14.3. Notons que ce stratifié est dit antisymétrique (chapitre 15) :

- les épaisseurs des couches sont symétriques;
- les orientations des couches sont antisymétriques.

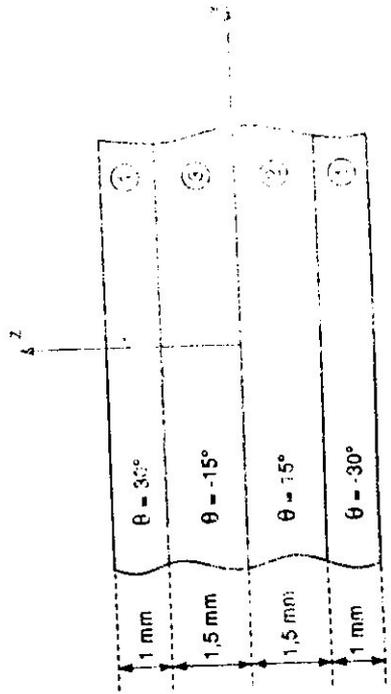


Figure 14.3 Stratifié à quatre couches de même épaisseur

1. Matrices de rigidité dans les axes principaux

$$Q_{11} = 38,945 \text{ GPa} \quad Q_{12} = 2,952 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = 9,224 \text{ GPa} \quad Q_{66} = 3,6 \text{ GPa}$$

2. Matrices de rigidité de chaque couche exprimées dans les axes du stratifié

Couche 1 à -30°

$$Q_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 26,290 & 8,176 & -9,451 \\ 8,176 & 11,429 & -3,418 \\ -9,451 & -3,418 & 8,825 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

Couche 2 à 15°

$$Q_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 35,212 & 4,693 & 6,732 \\ 4,693 & 9,473 & 0,699 \\ 6,732 & 0,699 & 5,342 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

Couche 3 à -15°

$$Q_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 35,212 & 4,693 & -6,732 \\ 4,693 & 9,473 & -0,699 \\ -6,732 & -0,699 & 5,342 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

Couche 4 à 30°

$$Q_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 26,290 & 8,176 & 9,451 \\ 8,176 & 11,429 & 3,418 \\ 9,451 & 3,418 & 8,825 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

3. Matrices A, B et D

$$A_{ij} = (Q_{ij})_{-30} + (Q_{ij})_{30} + 1,5 [(Q_{ij})_{15} + (Q_{ij})_{-15}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 158,22 & 30,432 & 0 \\ 30,432 & 51,277 & 0 \\ 0 & 0 & 33,674 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} [(2,5)^2 - (1,5)^2] [(Q_{ij})_{30} - (Q_{ij})_{-30}] + \frac{1}{2} (1,5)^2 [(Q_{ij})_{15} - (Q_{ij})_{-15}]$$

$$- 2 [(Q_{ij})_{30} - (Q_{ij})_{-30}] + 1,125 [(Q_{ij})_{15} - (Q_{ij})_{-15}]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 22,659 & 12,101 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} [(2,5)^3 - (1,5)^3] [(Q_{ij})_{30} + (Q_{ij})_{-30}] + \frac{1}{3} (1,5)^3 [(Q_{ij})_{-15} + (Q_{ij})_{15}]$$

$$= \frac{1}{3} [12,25 (Q_{ij+30} + Q_{ij-30}) + 3,375 (Q_{ij+15} + Q_{ij-15})]$$

$$D = \begin{bmatrix} 293,93 & 77,332 & 0 \\ 77,332 & 114,65 & 0 \\ 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix} \text{ N.m}$$

4. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 158,22 \cdot 10^6 & 30,432 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22,659 \cdot 10^3 \\ 30,432 \cdot 10^6 & 51,277 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12,101 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & 33,676 \cdot 10^6 & 22,659 \cdot 10^3 & 12,101 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22,659 \cdot 10^3 & 293,93 & 77,332 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,101 \cdot 10^3 & 77,332 & 114,65 & 0 & 0 \\ 22,659 \cdot 10^3 & 12,101 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix}$$

Exemple 14.4.3.3

L'influence de l'alternance des couches peut être illustrée en considérant le stratifié de la figure 14.4, obtenu en intervertissant les couches 15° et -30° du stratifié (figure 14.3) de l'exemple précédent.

$$A_{ij} = (Q_{ij})_{-30} + (Q_{ij})_{30} + 1,5 [(Q_{ij})_{15} + (Q_{ij})_{-15}]$$

La matrice A est inchangée par rapport à l'empilement [-30°/15°/-15°/30°].

$$B_{ij} = \frac{1}{2} [1 - (2,5)^2] (Q_{ij})_{15} - \frac{1}{2} (1,5)^2 (Q_{ij})_{-30} + \frac{1}{2} (1,5)^2 (Q_{ij})_{-15} + \frac{1}{2} [(2,5)^2 - (1,5)^2] (Q_{ij})_{30}$$

$$\text{Soit : } B = \begin{bmatrix} -13,384 & 5,2247 & -1,6154 \\ 5,2247 & 2,9342 & 5,9258 \\ -1,6154 & 5,9258 & 5,2247 \end{bmatrix} 10^3 \text{ N.m}^{-1}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} [(2,5)^3 - 1] (Q_{ij})_{15} + \frac{1}{3} (Q_{ij})_{-30} + \frac{1}{3} (1,5)^3 (Q_{ij})_{-15} + \frac{1}{3} [(2,5)^3 - (1,5)^3] (Q_{ij})_{30}$$

$$\text{Soit : } D = \begin{bmatrix} 327,38 & 64,271 & 60,686 \\ 64,271 & 107,32 & 15,438 \\ 60,686 & 15,438 & 71,025 \end{bmatrix} \text{ N.m}$$

Le changement d'alternance des couches garde inchangée la matrice membrane A, alors qu'il modifie les matrices de flexion-torsion et de couplage.

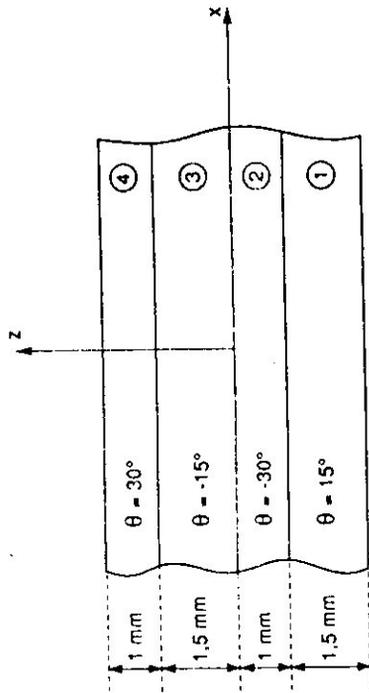


Figure 14.4. Stratifié à quatre couches de l'exemple 14.4.3.3

14.5 DÉTERMINATION DES DÉFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

14.5.1 Problème à résoudre

L'équation constitutive (14.29) exprime les résultantes en membrane N_x, N_y, N_z et les moments de flexion-torsion M_x, M_y, M_z en fonction des déformations en membrane $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ et des courbures $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$. Les problèmes de conception des structures en matériaux composites nécessitent de résoudre le problème inverse : connaissant les résultantes en membrane et les moments, trouver les déformations en membrane et les courbures, puis les contraintes.

14.5.2 Déformations en membrane et courbures

L'expression (14.30) peut être écrite en séparant la matrice N des résultantes en membrane et la matrice M_f des moments :

$$N = A \epsilon_m + B \kappa \quad (14.34)$$

$$M_f = B \epsilon_m + D \kappa \quad (14.35)$$

De la première relation, nous pouvons extraire les déformations en membrane, soit :

$$\epsilon_m = A^{-1} N - A^{-1} B \kappa \quad (14.36)$$

et en reportant dans (14.35), la matrice des moments s'écrit :

$$M_f = B A^{-1} N + (D - B A^{-1} B) \kappa \quad (14.37)$$

Les expressions (14.36) et (14.37) peuvent être réécrites sous une forme semi-inversée :

$$\epsilon_m = A^* N + B^* \kappa \tag{14.38}$$

$$M_f = C^* N + D^* \kappa \tag{14.39}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \epsilon_m \\ -M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \kappa \end{bmatrix} \tag{14.40}$$

avec

$$\begin{aligned} A^* &= A^{-1} \\ B^* &= -A^{-1} B \\ C^* &= B A^{-1} = (-B^*)^T \\ D^* &= D - B A^{-1} B = D + B B^* \end{aligned} \tag{14.41}$$

Dans le cas général, les matrices A^* et D^* sont symétriques, alors que la matrice B^* ne l'est pas.

De l'expression (14.39), nous tirons :

$$\kappa = D^{*-1} M_f - D^{*-1} C^* N \tag{14.42}$$

et en reportant dans (14.38) :

$$\epsilon_m = (A^* - B^* D^{*-1} C^*) N + B^* D^{*-1} M_f \tag{14.43}$$

Les deux dernières équations peuvent être regroupées pour obtenir la matrice inverse de l'équation constitutive des stratifiés, soit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} \tag{14.44}$$

avec

$$\begin{aligned} A^* &= A^* - B^* D^{*-1} C^* = A^* + B^* D^{*-1} B^{*T} \\ B^* &= B^* D^{*-1} = -D^{*-1} C^* = D^{*-1} B^{*T} \\ C^* &= -D^{*-1} C^* = B^{*T} \\ D^* &= D^{*-1} \end{aligned} \tag{14.45}$$

La forme inverse de l'équation constitutive est écrite (14.44) sous une forme analogue à la forme (14.30). Elle fait intervenir des inversions sur des sous-matrices 3×3 de la forme directe. La matrice de rigidité inverse peut également être obtenue par inversion directe de la matrice de rigidité introduite en (14.29).

14.5.3 Champ des déformations

Le champ des déformations au point (x, y, z) est ensuite déterminé à partir des déformations en membrane et des courbures à l'aide de l'expression (14.14) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Compte tenu des hypothèses faites (schéma du 1^{er} degré), les déformations ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et γ_{xy} varient linéairement dans l'épaisseur du stratifié.

Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation θ par rapport aux axes du stratifié (figure 11.1) s'obtiennent ensuite à partir de la relation générale (6.41) de changement de base. Dans le cas présent, ces relations sont limitées à trois déformations. Les déformations dans la couche k , et rapportées aux axes principaux (L, T, T') de cette couche, s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k = T \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{14.46}$$

avec

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \tag{14.47}$$

14.5.4 Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche k sont ensuite obtenues par l'une des équations (14.19) ou (14.20). Par exemple :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q_{ij} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k$$

Les contraintes, exprimées par rapport aux axes principaux de la couche, se calculent ensuite soit en effectuant un changement de base sur les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} , soit directement à partir des déformations ϵ_L , ϵ_T , γ_{LT} dans les axes principaux.

Par changement de base, l'expression est obtenue à partir de la relation générale (5.44). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = T^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k \quad (14.48)$$

$$\text{avec } T^T = T(-\theta)^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (14.49)$$

A partir des déformations dans les axes principaux, les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} E_L & & \\ & E_T & \\ & & E_{LT} \end{bmatrix}_k \quad (14.50)$$

14.5.5 Exemple

Les efforts imposés à une structure en stratifié sont tels qu'ils se réduisent en un point à des résultantes de membrane N_x, N_y, N_{xy} (figure 14.5). Déterminer au point considéré :

1. les déformations en membrane et les courbures ;
 2. les déformations dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;
 3. les contraintes dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;
- dans le cas où le stratifié est celui de l'exemple 14.4.3.3 (figure 14.4), et les valeurs des résultantes de membrane sont : $N_x = 1\,000 \text{ N/mm}$; $N_y = 500 \text{ N/mm}$; $N_{xy} = 250 \text{ N/mm}$.

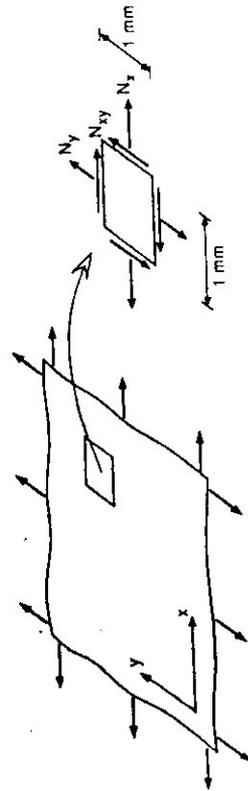


Figure 14.5 Efforts de membrane exercés en un point d'un stratifié

1. Déformations en membrane et courbures

Compte tenu des résultats établis dans l'exemple 14.4.3.3, l'équation constitutive s'écrit :

$$10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 158.22 \cdot 10^6 & 30.432 \cdot 10^6 & 0 & -13.384 \cdot 10^3 & 5.2247 \cdot 10^3 \\ 0.25 & 30.432 \cdot 10^6 & 51.277 \cdot 10^6 & 0 & 5.2247 \cdot 10^3 & 2.934 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 33.674 \cdot 10^6 & -1.6154 \cdot 10^3 & 5.9258 \cdot 10^3 \\ 0 & -13.384 \cdot 10^3 & 5.2247 \cdot 10^3 & -1.6154 \cdot 10^3 & 327.38 & 64.271 \\ 0 & 5.2247 \cdot 10^3 & 2.934 \cdot 10^3 & 5.9258 \cdot 10^3 & 64.271 & 107.32 \\ 0 & -1.6154 \cdot 10^3 & 5.9258 \cdot 10^3 & 5.2247 \cdot 10^3 & 60.686 & 15.438 \\ & & & & & 71.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Par inversion directe ou par blocs, l'équation inverse s'écrit :

$$10^{-3} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.207 & -4.322 & 0.069 & 0.415 \cdot 10^3 & -0.525 \cdot 10^3 & 0.279 \cdot 10^3 \\ -4.322 & 22.297 & 0.279 & -0.187 \cdot 10^3 & -0.942 \cdot 10^3 & -1.810 \cdot 10^3 \\ 0.069 & 0.279 & 30.508 & 1.032 \cdot 10^3 & -1.92 \cdot 10^3 & -2.730 \cdot 10^3 \\ 0.415 \cdot 10^3 & -0.187 \cdot 10^3 & 1.032 \cdot 10^3 & 4.052 \cdot 10^6 & -2.058 \cdot 10^6 & -3.065 \cdot 10^6 \\ -0.525 \cdot 10^3 & -0.942 \cdot 10^3 & -1.92 \cdot 10^3 & -2.058 \cdot 10^6 & 10.747 \cdot 10^6 & -0.445 \cdot 10^6 \\ 0.279 \cdot 10^3 & -1.810 \cdot 10^3 & -2.730 \cdot 10^3 & -3.065 \cdot 10^6 & -0.445 \cdot 10^6 & 17.15 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où les déformations en membrane et courbures :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^0 &= 5.064 \cdot 10^{-3} & \kappa_x &= 0.580 \\ \epsilon_{yy}^0 &= 6.897 \cdot 10^{-3} & \kappa_y &= 1.027 \\ \gamma_{xy}^0 &= 7.836 \cdot 10^{-3} & \kappa_{xy} &= -1.309 \end{aligned}$$

Dans l'équation inverse ci-dessus, nous noterons que la matrice inverse est symétrique, comme la matrice de rigidité de l'équation constitutive. Il en est de même des matrices-blocs A' et D' . Par contre, les matrices-blocs C' et B' (transposées l'une de l'autre) ne sont pas symétriques.

2. Déformations dans les couches

Les déformations rapportées aux axes (x,y) de référence sont (relation (14.14)) exprimées suivant :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,064 \\ 6,897 \\ 7,836 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,580 \\ -1,027 \\ -1,309 \end{bmatrix} z$$

Les variations des déformations ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et γ_{xy} en fonction de z sont reportées sur la figure 14.6.

Les déformations dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche, sont ensuite obtenues à partir de la relation (14.46). Soit pour la couche k :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k z$$

avec

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{T} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{T} est la matrice définie en (14.47). Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 8,914 \\ 3,045 \\ 5,505 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} -0,388 \\ -0,058 \\ -2,046 \end{bmatrix} z \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 2,129 \\ 9,831 \\ 2,330 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,745 \\ -1,192 \\ 0,737 \end{bmatrix} z \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 7,145 \\ 4,815 \\ 7,702 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,145 \\ -0,592 \\ -1,937 \end{bmatrix} z \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 3,227 \\ 8,733 \\ 5,869 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,799 \\ -1,246 \\ -0,330 \end{bmatrix} z \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}$$

D'où les relations donnant ϵ_L , ϵ_T , γ_{LT} en fonction de z :

$$\begin{aligned} -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm} : & \quad \epsilon_L = 7,145 \cdot 10^{-3} + 0,145 z \\ & \quad \epsilon_T = 4,815 \cdot 10^{-3} - 0,592 z \\ & \quad \gamma_{LT} = 7,702 \cdot 10^{-3} - 1,937 z \\ -1 \text{ mm} \leq z \leq 0 : & \quad \epsilon_L = 2,129 \cdot 10^{-3} + 0,745 z \\ & \quad \epsilon_T = 9,831 \cdot 10^{-3} - 1,192 z \\ & \quad \gamma_{LT} = 2,33 \cdot 10^{-3} + 0,737 z \end{aligned}$$

14.5 Détermination des déformations et des contraintes

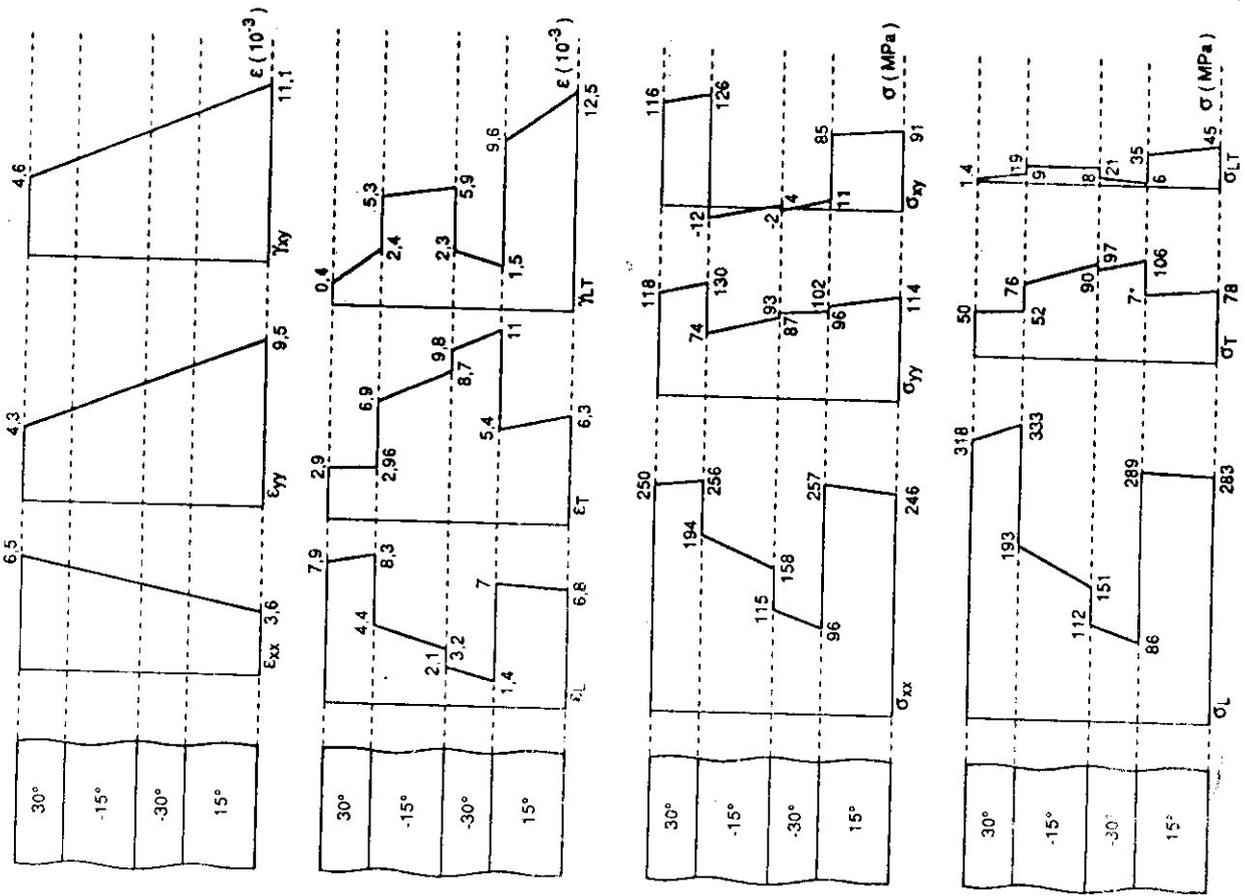


Figure 14.6. Contraintes et déformations dans l'épaisseur du stratifié

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm} & -1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm} \\
 \varepsilon_L &= 3,227 \cdot 10^{-3} + 0,799 z & \varepsilon_L &= 8,914 \cdot 10^{-3} + 0,388 z \\
 \varepsilon_T &= 8,733 \cdot 10^{-3} - 1,246 z & \varepsilon_T &= 3,046 \cdot 10^{-3} - 0,058 z \\
 \gamma_{LT} &= 5,869 \cdot 10^{-3} - 0,330 z & \gamma_{LT} &= 5,505 \cdot 10^{-3} - 2,946 z
 \end{aligned}$$

Les variations de ε_L , ε_T , γ_{LT} dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

3. Contraintes dans les couches

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes de référence (x,y), s'écrivent ((14.19) ou (14.20)) suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \mathbf{A}_{1k} + \mathbf{B}_{1k} z$$

avec

$$\mathbf{A}_{1k} = \mathbf{Q}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0}^0 \\ \varepsilon_{y0}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{1k} = \mathbf{Q}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{Q}_k sont les matrices de rigidité des couches déterminées dans l'exemple 14.4.3.2. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{30^\circ} &= \begin{bmatrix} 263,564 \\ 147,009 \\ 140,579 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5522,83 \\ -11467,79 \\ -9580,17 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-30^\circ} &= \begin{bmatrix} 115,451 \\ 93,440 \\ -2,284 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19217,67 \\ -2519,78 \\ -13520,26 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0 \\
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{15^\circ} &= \begin{bmatrix} 263,411 \\ 94,571 \\ 80,758 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6785,75 \\ -7919,24 \\ -3805,83 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-15^\circ} &= \begin{bmatrix} 157,918 \\ 83,622 \\ 2,951 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24407,03 \\ -6090,45 \\ -10176,80 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Les variations des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche considérée, sont ensuite déterminées à partir de la relation (14.48). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{2k} + \mathbf{B}_{2k} z$$

avec

$$\mathbf{A}_{2k} = \mathbf{T}^T \mathbf{A}_{1k} \quad \mathbf{B}_{2k} = \mathbf{T}^T \mathbf{B}_{1k}$$

où \mathbf{T}^T est la matrice définie en (14.49). Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} &= \begin{bmatrix} 112,681 \\ 297,893 \\ 120,759 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1287,61 \\ -18278,22 \\ -2215,84 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} &= \begin{bmatrix} 107,970 \\ 100,921 \\ -10,673 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2074,42 \\ 14623,47 \\ -16172,72 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0 \\
 \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} &= \begin{bmatrix} 211,722 \\ 146,260 \\ 112,149 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7703,62 \\ -8837,11 \\ 380,30 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1,5 \text{ mm} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} &= \begin{bmatrix} 154,417 \\ 87,124 \\ -16,018 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17275,69 \\ 1040,89 \\ -16437,74 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Les variations de σ_L , σ_T et σ_{LT} dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.



Annexe B

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} + \epsilon_{33} \\ \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} + \gamma_{32} \end{bmatrix} \quad (25.19)$$

L'équation constitutive s'obtient ensuite en combinant l'expression précédente avec les relations de définitions (13.17) et (15.19) des résultantes et des moments. Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ \bar{B}_{16} & \bar{B}_{26} & \bar{B}_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0^0 \\ \epsilon_0^0 \\ \gamma_0^0 \\ \kappa_0 \\ \kappa_0 \\ \kappa_0 \end{bmatrix} \quad (25.20)$$

où les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} sont les coefficients de rigidité du stratifié exprimés par les relations (14.31) à (14.33), et en intégrant les résultantes et moments dus aux phénomènes de dilatation, définis par :

$$(N_x^*, M_x^*) = \sum_{k=1}^{n_k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{11} \epsilon_0^0 + Q_{12} \epsilon_0^0 + Q_{16} \gamma_0^0) (1-z) dz$$

$$(N_y^*, M_y^*) = \sum_{k=1}^{n_k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{12} \epsilon_0^0 + Q_{22} \epsilon_0^0 + Q_{26} \gamma_0^0) (1-z) dz \quad (25.21)$$

$$(N_{xy}^*, M_{xy}^*) = \sum_{k=1}^{n_k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{16} \epsilon_0^0 + Q_{26} \epsilon_0^0 + Q_{66} \gamma_0^0) (1-z) dz$$

Les déformations $(\epsilon_0^0, \epsilon_0^0, \gamma_0^0)$ dans chaque couche sont exprimées en fonction des dilatations $(\epsilon_{11}^0, \epsilon_{22}^0)$, rapportées aux axes principaux de la couche, par la

25.3. Equations du comportement d'un stratifié

relation (25.17). Les dilatations $(\epsilon_{11}^0, \epsilon_{22}^0)$ s'expriment elles-mêmes par des relations du type (25.1) et (25.2).

L'équation constitutive (25.20) tenant compte des phénomènes de dilatation diffère de l'équation constitutive (14.29) de la théorie classique initiale, par l'adjonction des résultantes et des moments dus aux phénomènes thermiques, à l'absorption d'agents de gonflement, etc.

Les contraintes de dilatation (thermiques, hygrothermiques, etc.) exprimées dans la relation (25.19) sont induites lorsque les conditions de température, d'hygrométrie, etc. du stratifié diffèrent de l'état où le stratifié est libre de toutes contraintes hygrothermiques. Ces contraintes ne sont pas en fait induites par la seule dilatation (ou la contraction) hygrothermique du stratifié, mais résultent à la fois des phénomènes de dilatation et du fait que le stratifié n'est pas libre de se dilater ou de se contracter. En effet, aucune force ou moment résultant n'est induit dans le stratifié par effet hygrothermique, lorsque celui-ci est totalement libre de se déformer en membrane, en flexion et en torsion. Toutefois, chaque couche du stratifié influence la dilatation ou contraction des couches voisines, du fait de propriétés mécaniques et hygrothermiques différentes. Les couches ne sont alors plus libres de se déformer. Les contraintes hygrothermiques dans chaque couche résultent donc des restrictions imposées à leurs déformations par les couches voisines.

Les contraintes thermiques induites lors du refroidissement des stratifiés, après une mise en œuvre en température, sont pratiquement inévitables. Dans certains cas, ces contraintes, appelées contraintes résiduelles, peuvent être suffisamment élevées pour modifier les caractéristiques à la rupture des stratifiés. Il est alors nécessaire de les prendre en compte lors de la conception des structures en stratifiés. Dans la pratique, la matrice a un coefficient de dilatation thermique supérieur à celui de la fibre, produisant une compression radiale des fibres à l'interface fibre-matrice. Cette compression permet un transfert des charges de la matrice aux fibres par cisaillement, même en l'absence d'une bonne adhérence fibre-matrice.

25.3.2 Exemples

25.3.2.1 Calcul des contraintes d'origine thermique

Nous considérons le cas d'un stratifié croisé symétrique constitué (figure 25.1) de 3 couches unidirectionnelles, de 1 mm d'épaisseur, de caractéristiques mécaniques :

$$E_L = 45 \text{ GPa} \quad E_T = 10 \text{ GPa} \quad \nu_{LT} = 0,31 \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa} \quad (25.22)$$

et de coefficients de dilatation thermique :

$$\alpha_L = 5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad \alpha_T = 20 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad (25.23)$$

La polymérisation du stratifié a été effectuée à une température de 120 °C. Nous voulons déterminer les contraintes résiduelles à la température d'utilisation de 30 °C.

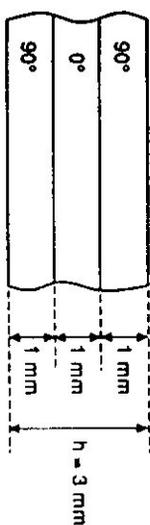


Figure 25.1 Stratifié croisé symétrique

Rapportées aux axes principaux des couches, les constantes de rigidité des couches sont (11,52) :

$$Q_{11} = 45,982 \text{ GPa} \quad Q_{12} = 3,168 \text{ GPa} \quad Q_{16} = 0$$

$$Q_{22} = 10,218 \text{ GPa} \quad Q_{26} = 0 \quad Q_{66} = 4,5 \text{ GPa}$$

Les matrices de rigidité des couches s'expriment alors suivant :

$$Q_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad Q_{90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

La relation (25.17) permet d'exprimer les déformations d'origine thermique dans la couche à 0° :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^i \\ \epsilon_{yy}^i \\ \gamma_{xy}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ \alpha_T \end{bmatrix} \Delta T$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^i \\ \epsilon_{yy}^i \\ \gamma_{xy}^i \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.24)$$

De même, pour les couches à 90° :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^i \\ \epsilon_{yy}^i \\ \gamma_{xy}^i \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} \alpha_T \Delta T \\ \alpha_L \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.25)$$

Les résultantes d'origine thermique, déduites des relations (25.21), s'écrivent :

$$N_x^* = [(Q_{11} + 2Q_{12}) \alpha_L + (2Q_{22} + Q_{12}) \alpha_T] \frac{h}{3} \Delta T$$

$$N_y^* = [(Q_{22} + 2Q_{12}) \alpha_T + (2Q_{11} + Q_{12}) \alpha_L] \frac{h}{3} \Delta T \quad (25.26)$$

$$N_{xy}^* = 0 \text{ (dû à } Q_{16} = Q_{26} = 0 \text{ et } \gamma_{xy}^i = 0)$$

Les moments sont nuls du fait de la symétrie du stratifié :

$$M_x^* = M_y^* = M_{xy}^* = 0$$

L'application numérique conduit à :

$$N_x^* = 733,7 \Delta T \quad N_y^* = 806,7 \Delta T$$

Les déformations et courbures sont déterminées en reportant les résultantes et moments dans l'équation constitutive (25.20) qui s'écrit en l'absence d'actions mécaniques exercées sur le stratifié :

$$\begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (25.27)$$

Soit :

$$N_x^* = A_{11} \epsilon_{xx}^0 + A_{12} \epsilon_{yy}^0$$

$$N_y^* = A_{12} \epsilon_{xx}^0 + A_{22} \epsilon_{yy}^0$$

$$\gamma_{xy}^0 = 0$$

$$\kappa_x = \kappa_y = \kappa_{xy} = 0$$

Nous en déduisons les déformations du plan moyen :

$$\epsilon_{xx}^0 = A_{11}^{-1} N_x^* + A_{12}^{-1} N_y^*$$

$$\epsilon_{yy}^0 = A_{12}^{-1} N_x^* + A_{22}^{-1} N_y^*$$

avec

$$A_{11}^{-1} = \frac{A_{22}}{\Delta} \quad A_{12}^{-1} = -\frac{A_{12}}{\Delta}$$

$$A_{22}^{-1} = \frac{A_{11}}{\Delta} \quad \Delta = A_{11} A_{22} - A_{12}^2$$

Les coefficients de rigidité du stratifié s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (Q_{11} + 2Q_{22}) \frac{h}{3} = 66,418 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ A_{12} &= 3Q_{12} \frac{h}{3} = 9,504 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ A_{22} &= (Q_{22} + 2Q_{11}) \frac{h}{3} = 102,18 \cdot 10^6 \text{ N/m} \end{aligned} \quad (25.30)$$

D'où :

$$\begin{aligned} A_{11} &= 15,259 \cdot 10^{-9} \text{ m/N} \\ A_{12} &= -1,4193 \cdot 10^{-9} \text{ m/N} \\ A_{22} &= 9,919 \cdot 10^{-9} \text{ m/N} \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\epsilon_x^0 = 10,05 \cdot 10^{-6} \Delta T \quad \epsilon_y^0 = 6,96 \cdot 10^{-6} \Delta T \quad (25.31)$$

Les contraintes dans les couches sont ensuite déterminées à partir de la relation (25.18). Pour la couche à 0° :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 - \alpha_L \Delta T \\ \epsilon_y^0 - \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.32)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} (\epsilon_x^0 - \alpha_L \Delta T) + Q_{12} (\epsilon_y^0 - \alpha_T \Delta T) \\ Q_{12} (\epsilon_x^0 - \alpha_L \Delta T) + Q_{22} (\epsilon_y^0 - \alpha_T \Delta T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.33)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 190,9 \cdot 10^3 \Delta T \\ -117,2 \cdot 10^3 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour les couches à 90° :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} (\epsilon_x^0 - \alpha_T \Delta T) + Q_{12} (\epsilon_y^0 - \alpha_L \Delta T) \\ Q_{12} (\epsilon_x^0 - \alpha_L \Delta T) + Q_{11} (\epsilon_y^0 - \alpha_T \Delta T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.34)$$

25.3 Equations du comportement d'un stratifié

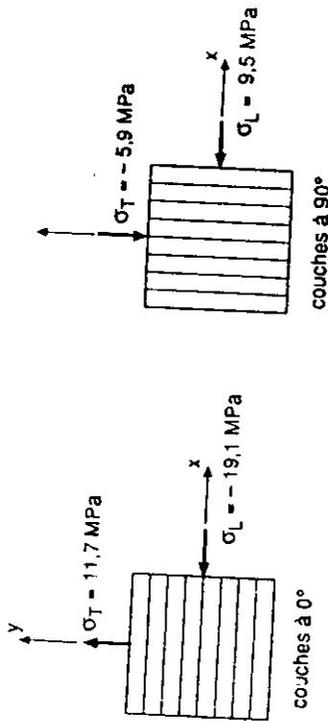


Figure 25.2 Contraintes d'origine thermique dans les couches du stratifié de la figure 25.1

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -95,5 \cdot 10^3 \Delta T \\ 58,6 \cdot 10^3 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.35)$$

Pour la variation de température considérée : $\Delta T = -100^\circ\text{C}$, les valeurs des contraintes sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} -19,1 \text{ MPa} \\ 11,7 \text{ MPa} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 9,6 \text{ MPa} \\ -5,9 \text{ MPa} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.36)$$

L'état des contraintes d'origine thermique est schématisé sur la figure 25.2. Il est à noter que la contrainte dans la couche à 0° atteint la valeur de 11,7 MPa dans la direction transverse aux fibres, soit de l'ordre du quart au tiers de la contrainte à la rupture dans cette direction. Il apparaît ainsi que les contraintes d'origine thermique, liées au mode de mise en œuvre : polymérisation à une température plus élevée que la température d'utilisation, doivent être prises en compte lors de certains dimensionnements.

25.3.2.2 Dilataion thermique d'un stratifié équilibré symétrique

Dans le cas d'une couche rapportée à des axes (x,y) faisant un angle θ avec la direction L (figure 25.3), les déformations d'origine thermique s'écrivent (25.17)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \end{bmatrix} \quad (25.37)$$

ملخص

إن التطور الجاري في المواد المركبة حديثاً في ما يخص صناعة الطائرات و الصناعات الفضائية، يستوجب المعرفة العالية و الشاملة لكيفية تأثير القوى الحرارية بالإضافة إلى القوى الميكانيكية على الهياكل المصنوعة من المواد التي ذكرناها سابقاً. هذه الدراسة مخصصة بالدرجة الأولى لتقييم و تكييف عامل القوى الحراروميكانيكية على طبقات هذا النوع من المعادن. مع العلم أن دراستنا تمت بوضع مدونة حساب مرفقة ببيان تحليلي.

Abstract

The development in using the composites materials in the aeronautics and aerospace construction, require a large comprehension and knowledge on the thermo-elastic structure behaviour and phenomenon. This study is based on the evolution and modelling of the temperature effects on composites. The study is accomplished analytically and numerically.

Résumé

Le développement des matériaux composites dans la construction aéronautique et aérospatiale, nécessite une bonne compréhension du phénomène thermoélastique sur la structure. Cette étude est axée sur la modélisation des effets de température sur les composites. L'étude est accomplie analytiquement et numériquement.