

# **UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département d'Aéronautique

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

En Aéronautique

Spécialité : Aéronautique

Étude de la déformation d'une goutte non chargée sous  
champ électrique continu et uniforme par la méthode des petites  
perturbations

Par

**AMAR Aida**

Devant le jury composé de :

S. BERGHEUL	Maître de conférences A, U. de Blida	S. Président
S. BOUKRAA	Professeur A, U. de Blida	Examineur
R. HAOUI	Maître de conférences A, U.S.T.H.B.	Examineur
T. REZOUG	Maître de conférences A, U. de Blida	Rapporteur
A. BENSELAMA	Docteur A,U. Joseph Fourier, France	Co-Rapporteur

Blida, juin 2011

<b>NOMENCLATURE</b> .....	3
RÉSUMÉ.....	7
ABSTRACT .....	8
ملخص .....	9
REMERCIEMENTS.....	10
LISTE DES FIGURES.....	11
INTRODUCTION GENERALE .....	13
CHAPITRE 1 :.....	15
GÉNÉRALITÉS.....	15
1.1 Introduction .....	15
1.2 La microfluidique discrète .....	15
1.3 Polarisation de la matière .....	17
1.3.1 Polarisation électronique, ionique et d'orientation .....	17
1.3.2 Polarisation interfaciale (et effet Maxwell-Wagner).....	21
1.3.3 Conclusion.....	22
1.4 Les phénomènes électrohydrodynamiques .....	22
1.4.1 La diélectrophorèse (DEP) .....	23
1.4.2 L'électrodéformation .....	23
1.4.3 L'électro-osmose .....	24
1.4.4 L'électrothermique .....	25
1.4.5 L'électrorotation .....	26
1.4.6 L'électrophorèse .....	27
1.4.7 L'électromouillage.....	28
1.4.8 L'électrostriction.....	29
CHAPITRE 2 :.....	31
MODÈLE MATHÉMATIQUE GÉNÉRALE.....	31
2.1 Inventaire des forces mises en jeu.....	31
2.1.1 Les forces électriques.....	31
2.1.2 Les forces hydrodynamiques.....	35
2.2 Formulation générale des phénomènes électriques .....	39

2.2.1 Equations de Maxwell.....	40
CHAPITRE 3 .....	41
LA MÉTHODE GÉNÉRALE DES PETITES PERTURBATIONS .....	41
3.1 Généralités .....	41
3.1.1 Histoire .....	41
3.1.2 Convergence de la série perturbative .....	41
3.2 L'application de la méthode de perturbation par Taylor pour une goutte sphérique avec écoulement sous champ uniforme :.....	42
CHAPITRE 4 : APPLICATION DE LA MÉTHODE DES PETITES PERTURBATIONS POUR UNE GOUTTE SOUS CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME .....	50
4.1 hypothèses du problème.....	51
4.2 Configuration d'étude.....	51
4.3 Equations générales .....	52
4.3.1 Equations électriques .....	52
4.3.2 Conditions aux limites sur le champ électrique .....	53
4.3.3 Equations hydrodynamiques .....	54
4.3.4 Conditions aux limites sur le champ hydrodynamique .....	54
4.4 Solutions analytiques générales pour la configuration 2D-axisymétrique ....	56
4.4.1 Solution analytique générale associée au champ électrique .....	56
4.4.2 Solution analytique générale associée au champ hydrodynamique .....	57
4.5 La méthode de perturbation du domaine .....	60
4.5.1 La formulation .....	61
4.5.2 Perturbation au premier ordre.....	64
4.6 Calcul de la normale en 1ier ordre : .....	74
4.7 Perturbation au 2ème ordre : .....	77
CONCLUSION .....	80
ANNEXE A.....	81
ANNEXE B.....	<b>ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.</b>
BIBLIOGRAPHIE .....	86

# NOMENCLATURE

## ABREVIATIONS

*EHD* : Électrohydrodynamiques

*DEP* : Diélectrophorèse

## NOTATIONS LATINES

$A_n^{(k)}$ ,  $B_n^{(k)}$ ,  $C_n^{(k)}$ ,  $D_n^{(k)}$  : des coefficients a déterminés par application des conditions limite hydrodynamique.

$\frac{a}{b}$  : l'ellipticité .

$B$  : L'induction magnétique.

$Ca$  : Coefficient  $\left( Ca = \frac{\gamma}{\rho^{(e)} U^* r_0} \right)$

$D$  : Le champ électrique de déplacement.

$\frac{D}{Dt}$  : La dérivée particulaire  $\left( \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right)$ .

$E_0$  : Le champ électrique externe.

$E_d$  : Le champ électrique dipolaire.

$E^{(i)}$  : Le champ électrique crée dans le fluide  $\Omega^{(i)}$

$E^{(e)}$  : Le champ électrique crée dans le fluide  $\Omega^{(e)}$

$E_r$  : Le champ électrique radial.

$E_\theta$  : Le champ électrique tangentiel.

$\bar{p}$ ,  $\bar{U}$ ,  $h$ ,  $\bar{r}$ ,  $\bar{E}$  : la pression, la vitesse, la courbure, le rayon, le champs électrique sans dimensions.

$F^{Coulomb}$  : La force de Coulomb.

$f_s^{\text{hydrodynamique}}$  : la densité surfacique des forces hydrodynamiques de pression et de viscosité.

$f_s^{\text{électrique}}$  : La force électrique de surface.

$F_s^\gamma$  : La force de surface.

$F^{[k]}(\theta)$  : une fonction qui détermine la forme de la goutte .

$f_{v,i}^{\text{coulomb}}$  : La densité de la force de Coulomb.

$f_{v,i}^{\text{électrostriction}}$  : La densité de force d'électrostriction.

$f_{v,i}^{\text{électrique}}$  : La densité de la force électrique

$f_{v,i}^{\text{inertie}}$  : La densité volumique de la force d'inertie.

$f_{v,i}^{\text{gravité}}$  : la densité volumique de la force de gravité.

$g$  : La gravité.

$G_n^{(k)}, H_n^{(k)}$  : des coefficients a déterminés par application des conditions limite électrique.

$H$  : La courbure a l'interface.

$I$  : La matrice identité.

$j$  : La densité du courant électrique.

$J_n^{[k]} \quad n \in \mathbb{N}$  : des constantes à déterminer.

$\langle K(\theta), L(\theta) \rangle$  : des fonctions quelconques dont l'argument est l'azimut  $\theta$ .

$M$  : Le rapport des permittivités  $\left( M = \frac{\epsilon^{(i)}}{\epsilon^{(e)}} \right)$ .

$n^{(e)}, n^{(i)}$  : La normale à l'interface extérieure au fluide (e) (resp. fluide (i)).

$n^{[1]}$  : la composante de vecteur normale d'ordre 1.

$[n.T^{\text{électrique}}]$  : Le saut de tenseur de Maxwell

$\left( [n.T^{\text{électrique}}] = n^{(e)}.T^{\text{électrique}(e)} + n^{(i)}.T^{\text{électrique}(i)} \right)$ .

$p$  : La pression.

$p^{\text{modifié}}$  : La pression modifiée.

$P_n$  : polynome de legendre d'ordre  $n$

$Q$  : La charge électrique.

$q_v$  : La densité volumique des charges électriques.

$q_s$  : La densité surfacique des charges électriques.

$r$  : Le rayon de la goutte.

$r_0$  : Le rayon initial de la goutte (sans effet du champ électrique).

Re : Nombre de Reynolds.

$S$  : Le rapport des conductivités  $\left( S = \frac{\sigma^{(i)}}{\sigma^{(e)}} \right)$ .

$\vec{t}$  : le vecteur tangent unitaire.

$T$  : La température.

$T^{électrique}$  : Le tenseur de Maxwell.

$T^{électrique}$  : Tenseur des Contraintes électriques  $\left( T^{électrique} = \varepsilon \left\{ EE - \frac{1}{2} (E.E) I \right\} \right)$

$T_{r,\theta}^{électrique}$  : La contrainte tangentielle.

$\vec{T}$  : le vecteur tangent à la courbe.

$u$  : La vitesse.

$u_t$  : La vitesse tangentielle.

$u_n$  : La vitesse normale.

$V^{(k)}$  ( $k = i, e$ ) : Le potentiel électrique et l'exposant ( $i$ ) (respectivement ( $e$ )) sont associées au fluide  $\Omega(i)$  (respectivement  $\Omega(e)$ ).

$V^{(i)[2]}$  : la 2ème dérivé de potentiel électrique.

$W$  : Le travail.

$Wei(\theta)$  : la fonction de pondération associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Wei}$ .

## NOTATIONS GRECQUES

$\varepsilon_0$  : La permittivité du vide.

$\varepsilon$  : La permittivité absolue qui caractérise le diélectrique.

$\epsilon_r$  : La permittivité diélectrique relative.

$\epsilon^k$  : L'amplitude de la perturbation.

$\phi$  : potentiel de vitesse.

$\rho$  : La masse volumique du fluide.

$\sigma$  : La conductivité électrique.

$\nabla$  : L'opérateur gradient.

$\nabla_s$  : la projection de l'opérateur  $\nabla$  (gradient) sur le plan tangent à

L'interface

$\lambda$  : Le rapport des viscosités  $\left( \lambda = \rho^{(i)} / \rho^{(e)} \right)$ .

$\alpha$  : Coefficient  $\left( \alpha = \frac{\epsilon^{(e)} V^{*2}}{\rho^{(e)} U^{*2} r_0^2} \right)$ .

$\mu$  : La viscosité dynamique.

$\Pi^{hyd}$  : Tenseur des Contraintes hydrodynamiques

$\left( \Pi^{hydrodynamique} = -pI + \mu \left( \nabla u + (\nabla u)^t \right) \right)$ .

$\gamma$  : La tension de surface.

$\Delta S$  : La variation de la surface.

$\psi$  : La fonction de courant.

$\omega$  : Le champ tourbillonnaire ( $\omega = \nabla \times u$ ).

$\chi$  : La susceptibilité électrique.

$\delta_{m,n}$  : symbole de kronecker  $\left( \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2 & n = m \\ 2m+1 & n = m \end{cases} \right)$

## Résumé

Pour prédire la déformation des gouttes d'encre sous champ électrique dans les imprimantes, les méthodes analytiques semblent les plus à même de répondre à ces exigences si toutefois le traitement s'y prête à coût raisonnable.

La méthode choisie est la méthode des petites perturbations pour répondre à ce genre de problème.

Le système composé de fluides non miscibles est soumis à un champ électrique continu et uniforme. Les effets de flottabilité sont négligés. L'écoulement permanent à faible vitesse s'évanouit loin de la goutte. Bien que non linéaires, la déformation de la goutte considérée par rapport à la forme sphérique initiale (en l'absence de champ électrique) est suffisamment faible pour que l'hypothèse des petites perturbations reste valable.

Par cette méthode, nous avons réussi à trouver la courbe qui relie la déformation de la goutte à l'intensité du champ électrique appliqué et ce en fonction des rapports de conductivité électrique, de permittivité, de masse volumique et de viscosité dynamique des fluides mis en jeu.

Enfin on a pu comparer la courbe avec de celle trouvée par Taylor [30].

Les résultats montrent un bon accord également pour des petites déformations.

**Mots-clé** : Electrohydrodynamique ; Méthode des petites perturbations ; Méthode du Tenseur de Maxwell ; suivi d'interface mobile

## ABSTRACT

To predict the deformation of the drops of ink under electric field in the printers the analytical methods seem most capable to answer these requirements if however the treatment lends itself to it to reasonable cost.

The selected method is the method of the small disturbances to answer this kind of problem.

The system made up of no miscible fluids is subjected to a continuous and uniform electric field. The effects of buoyancy are neglected. The permanent flow at low speed disappears far from the drop. Although nonlinear, the deformation of the drop considered compared to the initial spherical form (in the electric absence of field) is sufficiently weak so that the assumption of the small disturbances remains valid.

By this method, we succeeded in finding the curve which connects the deformation of the drop to the intensity of the electric field applied and this according to the reports/ratios of electric conductivity, permittivity, density and dynamic viscosity of the fluids brought into play.

In end one could not compare the curve with that found by Taylor [30].The results also show a good agreement for small deformations.

**Key words:** Electrohydrodynamic; Method of the small disturbances; Méthode of the Tensor of Maxwell; mobile follow-up of interface

## ملخص

للتنبؤ تشوه قطرات الحبر في الحقل الكهربائي في الطابعات أساليب التحليل يبدو أكثر قدرة على تلبية هذه الاحتياجات ولكن ، إذا كان العلاج يفسح المجال لتكلفة معقولة. اختيار الأسلوب هو الأسلوب الاضطرابات الصغيرة التي تستجيب لهذا النوع من المشاكل. ويتألف النظام من سوائل قابلة للامتزاج تخضع لحقل كهربائي مستمر وموحد. تهمل الآثار الطفو. تدفق مستمر من سرعة منخفضة يختفي بعيدا عن الهبوط. على الرغم من أن تشوه غير الخطية من الانخفاض في المشاهدة بالنسبة لتشكيل كروية الأولي (في غياب الحقل الكهربائي) منخفضة بما فيه الكفاية على افتراض أن الاضطرابات الصغيرة صالحة.

بهذه الطريقة ، تمكنا من العثور على المنحنى الذي يربط تشوه الانخفاض في قوة الحقل الكهربائي التطبيقية واستنادا إلى تقارير من التوصيل الكهربائي ، والسماحة ، والكثافة واللزوجة الديناميكية للسوائل في خميس في نهاية واحدة ومقارنة مع منحنى التي وجدت من قبل تايلور [30] ، وتظهر النتائج أيضا إلى اتفاق جيد للالتشوهات الصغيرة.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu, ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la force, la foi, le courage et la volonté afin de réaliser ce mémoire, sans oublier mes très chers parents.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude a mes directeurs de mémoire, Mr Tahar REZOUG, Maitre de conférences au département d'aéronautique et monsieur Adel Mustapha BENSELAMA , Ingénieur de l'Institut National d'Aéronautique de Blida et Docteur à l'Université Joseph Fourier de m'avoir confié ce travail et me faire bénéficier de ses qualités scientifiques et pour les conseils qu'ils m'ont prodigué.

J'exprime aussi ma profonde gratitude a Mr Salah BOUKRAA, Professeur au département d'aéronautique et directeur de département a l'U.S.D.B, qui m'a aidé beaucoup pour la réalisation de mon travail et qui a accepté d'être mon examinateur de mémoire.

J'exprime aussi ma profonde gratitude a Mr bergheul qui a accepté d'être mon directeur de mémoire.

J'exprime mes vifs remerciements, à Mr safoui abdsamed, Docteur d'état au département de math a marrakech , pour ses conseils éclairés.

Mes grands remerciements vont aussi pour les autres membres de jury qui m'ont honoré d'avoir accepté et consacré de leur temps pour examiner mon travail

Je remercie aussi tous les membres de ma famille, notamment mes parents , mes sœur ,mes frère qui m'ont soutenu. Je ne saurais dire si j'aurai pu finir un jour mes études sans leur aide précieuse et leur soutien moral. Merci pour toutes vos leçons de la vie qui me servent aujourd'hui de repères

Par ailleurs ,je suis très reconnaissant envers premièrement tous mes amis et mes collègues .

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Les phénomènes électrohydrodynamiques induits par polarisation de la matière.....	16
Figure 1.2 : Effet de polarisation électronique d'un atome.....	18
Figure 1.3 : L'application d'un champ électrique sur une goutte provoque sa déformation .....	24
Figure 1.4 : L'application d'un champ électrique tangentiel à une interface provoque la migration des ions de la double couche électrique et un cisaillement dans le fluide .....	25
Figure 1.5 : Un courant électrique engendre l'échauffement du liquide diélectrique de faible conduction qui à son tour modifie localement la permittivité électrique. Une force électrique prend naissance et un écoulement est instauré.....	26
Figure1.6 : (a) Un champ électrique tournant est engendré entre quatre électrodes par application d'une tension sinusoïdale avec un déphasage de 90°. (b) Selon l'angle de phase entre la polarisation induite P et le champ électrique, le couple agit sur la particule en co- ou anti-champ. Pour le cas indiqué ici, la particule tourne à contre sens du champ électrique.....	27
Figure 1.7 : Electrophorèse de particules chargées par application d'un champ électrique.....	28
Figure1.8 :Déplacement d'une goutte dans un système EWOD .....	28
Figure1.9 :L'attraction non homogène qui s'exerce sur une molécule.....	30
Figure 2.1:force électrique appliquée a une interface entre deux fluides .....	34
Figure 2.2 : Une goutte de fluide (composée d'un grand nombre de molécules) suspendue dans un gaz .....	39
Figure 3.1 : Une goutte sphérique de rayon $r_0$ occupe la région (i) et est immergée dans un liquide qui occupe la région (e).....	43
Figure 3.2 : Une goutte axisymétrique conductrice portée à un potentiel $V_0$ à une distance $a_0$ d'une électrode plane portée au potentiel 0.....	47
Figure 4.1 : Goutte soumise à un champ électrique. De rayon initial $r_0$ , tel que $r_0 \ll L$ , la goutte se déforme .....	52
Figure4.2 : Principe de la méthode de perturbation du champ électro hydrodynamique .....	60

Figure 4.3 : Variations du champ électrique d'équilibre, calculé par Taylor et par la méthode des perturbations, en fonction de l'ellipticité.....73

## INTRODUCTION GENERALE

L'impact de goutte est un phénomène que l'on rencontre dans différents secteurs comme en industrie automobile (injection de carburant sous forme d'aérosol dans les moteurs, projection de peinture en fines gouttelettes, mais également comportement des pare-brise sous la pluie, etc.), ou en industrie aéronautique (givrage des ailes d'avion), ou encore en industrie métallurgique (refroidissement par projection d'aérosol sur des plaques de tôle, etc.), dans l'agriculture (épandage de fertilisants et de pesticides), ou dans le domaine biotechnologies (le traitement d'échantillons biologiques nécessite souvent la manipulation d'objets biologiques de taille inférieure à la dizaine de microns tels que des cellules biologiques, des nanoparticules solides (particules de latex ayant des fonctions biologiques spécifiques) ou des gouttes de solution biologique plongées dans un liquide non miscible (huile)) et encore dans l'industrie bureautique (imprimantes à jet d'encre).

Et donc nombreuses études [30] ont été consacrées pour analyser et comprendre ce phénomène.

C'est dans ce contexte qu'il a été défini cette étude de la déformation d'une goutte non chargée sous champ électrique continu et uniforme par la méthode des petites perturbations.

En effet le contrôle de la taille et la vitesse des gouttes injectées – dans les dispositifs appelés « Drop on demand » – impose la connaissance de la réponse de ces dernières à la sollicitation électrique. Il est donc essentiel de prédire ce comportement de manière aussi fine et fiable que possible.

Les méthodes analytiques semblent les plus à même de répondre à ces exigences si toutefois le traitement s'y prête à coût raisonnable.

Pour cela dans la démarche générale de notre étude de la déformation d'une goutte non chargée sous champ électrique continue et uniforme nous avons opté pour la méthode des petites perturbations [18].

La structure de notre étude se compose de 4 principaux chapitres:

Le premier chapitre expose les principaux phénomènes EHD(électrohydrodynamiques) que l'on rencontre et situe le contexte EHD dans lequel nous nous plaçons dans le présent mémoire, à savoir la DEP(diélectrophorèse) sur particules plus ou moins déformables.

Dans le deuxième chapitre nous détaillons les modèles mathématiques électrique et hydrodynamique. Dans un but de pédagogie, de clarté et d'accessibilité, nous avons préféré déduire les équations en partant d'arguments plus en amont. Pour chaque hypothèse simplificatrice émise, nous avons apporté une justification appropriée.

Ensuite, dans le troisième chapitre nous présentons la méthode des petites perturbations et l'application de cette méthode par Taylor.

En fin ,dans le quatrième chapitre nous présentons l'application de la méthode pour une goutte de fluide non miscibles (dont l'interface n'agit sur l'écoulement qu'à travers la tension de surface) sous l'effet d'un champ électrique, les solution analytique électrique et hydrodynamique et le résultat du champs électrique de premier ordre , la courbe de la Variations du champ électrique d'équilibre calculée par Taylor et par la méthode des perturbations en fonction de l'ellipticité et à la fin de ce chapitre nous abordons le calcul de 2ème ordre où nous sommes parvenu à trouver le vecteur normale d'ordre 1 et ensuite la solution analytique électrique .

# CHAPITRE 1 :

## GENERALITES

### 1.1 Introduction

Dans un soucis de clarification des phénomènes connexes à notre étude, il est pensable de présenter dans un premier temps les microfluidiques discrètes (d'échantillons inférieurs à la centaine de microlitre) ,suivra ensuite la polarisation de la goutte et pour terminer la présentation des différents phénomènes EHD.

### 1.2 La microfluidique discrète

Les applications ici visées concernent plus particulièrement les microsystèmes en gouttes ; elles mettent en jeu une microfluidique dite discrète par rapport à la microfluidique continue des microcanaux. Les très faibles volumes autorisent la manipulation du liquide directement sous forme de goutte, supprimant le microcanal du (micro)composant. Le transport des gouttes peut être obtenu par des champs électriques [1], leur brassage par effet Marangoni [2]( les phénomènes de transport de matière le long d'une interface sous l'effet d'un gradient de tension superficielle), leur mélange avec un réactif par électrocoalescence de gouttes [3]. On admettra que les gouttes de tampon ainsi que le liquide (en général une huile minérale) dans lequel elles sont plongées sont non miscibles.

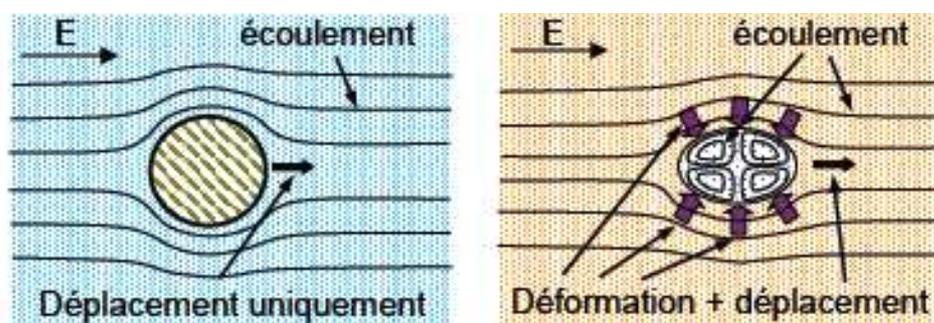
Les autres objets, dans le domaine de la biologie, qui seront étudiés, à savoir les cellules et les particules de latex, sont habituellement plongés dans une solution liquide (le tampon biologique) dont la composition permet de garantir un environnement biochimique spécifique à chaque application. D'une manière générale, retenons que le tampon biologique est une solution aqueuse (à base d'eau), contenant de nombreux ions à concentration fixée. Il est assimilé à un électrolyte. Outre la manipulation du tampon biologique dans le microsystème, il est parfois nécessaire d'en extraire, filtrer et trier les objets biologiques qu'il contient. Nous définissons ainsi le terme générique « particule » pour désigner une goutte de tampon, une cellule biologique ou encore une particule de latex. Le champ électrique, par le biais du phénomène de diélectrophorèse (DEP), dont le

rôle central sera évoqué plus loin, permet d'assurer ces fonctions en évitant le contact mécanique avec la particule, l'utilisation de filtres mécaniques et autres ne sont pas envisageables. La prédiction du comportement d'une telle particule sous champ électrique est par conséquent déterminante pour concevoir des microsystèmes performants. L'expérimentation, à ces petites échelles, est difficile, et le recours à la simulation numérique est aujourd'hui envisageable en raison de la précision des méthodes numériques d'une part, et des performances des ordinateurs d'autre part.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est donc opportun de présenter de façon approfondie les phénomènes physiques qui interviennent dans les microsystèmes à concevoir. Leur recensement (paragraphe 1.4), ainsi que le rappel des fondements permettant de les interpréter (paragraphe 1.3), à savoir la polarisation de la matière, sont des étapes essentielles pour espérer tirer du modèle des informations fiables. Il devient notamment possible de connaître les limites de fonctionnement pour chacune des options technologiques qui seront retenues.

Dans ce mémoire le domaine physique est celui de l'EHD.

D'une manière générale, l'EHD désigne l'ensemble des phénomènes physiques associés au mouvement des fluides sous l'effet d'un champ électrique. Le principal mécanisme de déplacement des particules solides ou liquides est la DEP (voir figure 1.1). Dans les microsystèmes, les particules, qu'elles soient solides ou liquides, sont toujours plongées dans une phase liquide. Aussi, seuls les liquides seront considérés dans notre étude à l'exclusion des gaz.



**Figure 1.1. Les phénomènes électrohydrodynamiques induits par polarisation de la matière. A gauche, une particule non déformable (cellule biologique où particule synthétique) immergée dans un tampon, se déplace par DEP. A droite, une goutte se déforme par effet EHD en plus de son déplacement par DEP.**

La mise en oeuvre de la DEP est accompagnée d'autres phénomènes EHD (voir paragraphe 1.4) qui peuvent avoir des actions antagonistes au déplacement par DEP (électro-osmose, électrothermique, etc.).

### 1.3 Polarisation de la matière

La polarisation affecte aussi bien les liquides, les solides que les gaz. Sont donc concernés tous les échantillons à traiter : ce sont soit des solutions aqueuses contenant des particules solides (latex) ou des cellules biologiques supposées indéformables, soit des huiles contenant des gouttes de solution aqueuse (on parle alors de suspensions).

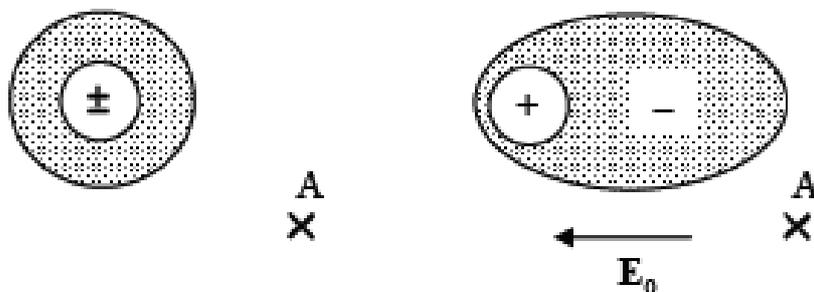
Il semble important de s'attarder sur l'origine de cet état afin que le lecteur dispose des éléments nécessaires pour comprendre certains des phénomènes électrohydrodynamiques (EHD) présentés dans le paragraphe 1.4.

#### 1.3.1 Polarisation électronique, ionique et d'orientation

La matière est constituée de molécules. Les molécules sont formées d'atomes constitués d'un noyau chargé positivement  $+Q$  et d'un nuage électronique chargé négativement, de charge totale  $-Q$ . Si le barycentre des charges négatives coïncide avec le barycentre des charges positives, la molécule est dite apolaire (cas des molécules symétriques comme  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ) et le champ électrique créé par ces deux types de charges en un point A, situé à une distance grande devant la dimension de la molécule, est nul.

Les charges électriques sont désignées comme libres lorsque, sous l'action d'un champ électrique externe, elles se déplacent librement dans le matériau, comme si elles se trouvaient dans le vide. Les charges mobiles dans un matériau conducteur (les électrons) réagissent si facilement à la présence d'un champ électrique externe, aussi petit soit-il, qu'elles peuvent être considérées comme libres. Le déplacement des charges libres s'effectue jusqu'à atteindre un état d'équilibre où elles ne subissent plus aucune force. Ce nouvel état d'équilibre se traduit par l'apparition de charges induites à la surface du conducteur. Dans les diélectriques (ou isolants), les charges sont en revanche très peu mobiles. Les électrons sont « liés » aux atomes et voient leur déplacement, sous l'action d'un champ électrique externe  $E_0$ , limité à des distances de l'ordre des distances moléculaires. Sous l'effet de la force de Coulomb  $F^{\text{Coulomb}}$  (voir chapitre 2), le

nuage électronique se déforme. Le barycentre des charges négatives ne coïncide plus avec celui des charges positives localisé au centre du noyau (voir figure 1.2). D'un point de vue électrique, l'atome devient équivalent à un dipôle électrique (voir chapitre 2). Le champ électrique créé en A par le dipôle n'est plus nul ; il se superpose au champ électrique externe.



**Figure 1.2. Effet de polarisation électronique d'un atome : les centres de charges positives et négatives se séparent sous l'effet du champ électrique appliqué**

Au niveau des atomes, on appelle polarisation électronique ce déplacement du nuage électronique par rapport au noyau. D'autres types de polarisation peuvent exister selon la structure de la matière concernée. Dans les diélectriques solides cristallins (par exemple NaCl), c'est le déplacement mutuel des ions qui est à l'origine de la polarisation désignée alors par *polarisation ionique*. La *polarisation d'orientation* se manifeste dans le cas des molécules non symétriques ( $\text{H}_2\text{O}$ , HCl, CO...), qualifiées de polaires, où le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives du fait de la structure même de la molécule. Ces molécules possèdent un moment dipolaire permanent qui, en l'absence de champ électrique externe et à cause de l'agitation thermique, est orienté de façon aléatoire dans le matériau. L'orientation statistique des moments dipolaires permanents dans la direction du champ électrique appliqué constitue le phénomène de polarisation d'orientation ou *dipolaire*. Cet alignement, toujours perturbé par l'agitation thermique et donc fortement dépendant de la température, augmente avec l'intensité du champ électrique appliqué. La polarisation organisationnelle nécessite que les dipôles permanents disposent d'une certaine mobilité dans la matière et elle se rencontre plus fréquemment dans les gaz et les

liquides. L'eau, liquide polaire, est particulièrement affectée par ce type de polarisation.

L'alignement des dipôles dans les diélectriques polaires est un phénomène qui laisse prévoir un effet de saturation qui apparaît lorsque tous les dipôles sont orientés alors que l'intensité du champ appliqué continue à être augmentée. Par la suite, on admettra que les intensités des champs électriques utilisés sont telles que la saturation, se traduisant par des propriétés diélectriques non linéaires, n'est pas atteinte.

Si l'intensité du champ électrique externe est suffisamment grande pour provoquer l'arrachement d'électrons dans le diélectrique, celui-ci se comporte alors comme un conducteur et il se produit le phénomène de claquage. La valeur maximale du champ électrique admis par un diélectrique sans qu'il y ait claquage s'appelle *rigidité électrique*. Nous verrons que les intensités de champ électrique utilisées dans nos microsystemes pour faire de la diélectrophorèse sont d'un ordre de grandeur plus faible (environ  $10^6$  V/m) que les rigidités électriques des matériaux diélectriques utilisés (environ 108 V/m). Le phénomène de claquage dégrade les propriétés diélectriques du matériau et doit donc être évité en prenant garde à rester en deçà de la rigidité électrique.

Les dipôles créent en tout point de l'espace (et en tout point du diélectrique lui-même) un champ électrique dipolaire  $E_d$  qui se superpose au champ appliqué  $E_0$ . l'hypothèse simplificatrice où le champ externe  $E_0$  est supposé grand devant le champ dipolaire  $E_d$  est souvent, mais pas toujours, fondée. Cette hypothèse permet de simplifier fortement les configurations à simuler puisque, pour le calcul du champ électrique, la présence des particules diélectriques, sur lesquelles nous cherchons à connaître la force diélectrophorétique appliquée, est négligée.

Les différents types de polarisation cités ci-dessus peuvent intervenir simultanément dans un même diélectrique. Leur contribution à la polarisation totale peut être limitée notamment dans le cas où le champ électrique appliqué est alternatif. Par exemple, la polarisation d'orientation n'arrive plus à s'établir lorsque la fréquence est trop élevée.

L'alignement des dipôles dans le champ électrique s'effectue suite à un mouvement de rotation des dipôles. Du fait d'une inertie due au frottement avec

les autres molécules du matériau, ce mouvement de rotation prend du retard par rapport aux variations trop rapides du champ électrique. C'est le phénomène de relaxation diélectrique. Par exemple, l'eau qui a une permittivité relative à température ambiante d'environ 80, voit celle-ci chuter à la valeur de 1.77 au-dessus de  $10^{10}$  Hz [4]

Les fréquences étudiées dans notre travail étant inférieures à  $10^8$  Hz, les phénomènes de relaxation diélectrique dans les solutions aqueuses sont négligeables. Les polarisations électronique et ionique, quant à elles, dépendent peu de la fréquence. L'hypothèse suivant laquelle les permittivités électriques sont indépendantes de la fréquence sera donc retenue tout au long de ce mémoire.

Si le point de vue microscopique permet de comprendre les différents mécanismes de polarisation de la matière, le point de vue macroscopique permet d'établir des modèles simples pour représenter le comportement global de la matière. La polarisation, qu'elle soit issue simplement d'un des trois types de polarisation cités ci-dessus ou une combinaison, est caractérisée par le vecteur *polarisation* noté  $P$  (ou moment dipolaire par unité de volume du matériau diélectrique) qui, pour des diélectriques homogènes, isotropes et linéaires est tel que :

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0)E \quad (1.1)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide et  $\varepsilon$  la permittivité absolue qui caractérise le diélectrique.

On peut définir la permittivité diélectrique relative (ou constante diélectrique)  $\varepsilon_r$  par la relation :

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon \quad (1.2)$$

La distinction entre un diélectrique et un conducteur repose, en fait, sur le nombre de charges libres qu'il contient. A température normale, un bon diélectrique contient des électrons libres, en relativement petit nombre mais suffisamment pour provoquer une certaine conduction électrique. Un diélectrique peut être considéré comme un mauvais conducteur et, en plus de sa permittivité électrique  $\varepsilon$ , sera caractérisé par une conductivité électrique  $\sigma$ .

Dans le cas où le champ électrique appliqué est alternatif de pulsation  $\omega$ , le diélectrique est caractérisé par une combinaison de  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , appelée la conductivité complexe :

$$\bar{\sigma} = \sigma + i\omega\varepsilon \quad (1.3)$$

Ainsi, le diélectrique est dominé par sa conductivité  $\sigma$  pour les faibles fréquences ( $\varepsilon\omega \ll \sigma$ ) Et par sa permittivité  $\varepsilon$  pour les hautes fréquences ( $\varepsilon\omega \gg \sigma$ ).

### 1.3.2 Polarisation interfaciale (et effet Maxwell-Wagner)

Le phénomène de polarisation interfaciale, étudié par Maxwell et Wagner, apparaît lorsque plusieurs diélectriques sont mis en présence. Leurs interfaces vont jouer un rôle particulier dans le phénomène de polarisation. Supposons que ces diélectriques sont caractérisés par des permittivités et des conductivités électriques différentes. D'une manière générale, un milieu hétérogène, constitué de plusieurs de ces diélectriques, présentera une permittivité électrique globale qui devient dépendante de la fréquence : on parle alors de dispersion diélectrique interfaciale[5]. Cette dépendance fréquentielle est la conséquence de l'accumulation de charges à l'interface entre les diélectriques et plus précisément de leur répartition non homogène le long de cette interface. En général, le phénomène de polarisation interfaciale est dominant lorsqu'un des milieux diélectriques est de petites dimensions par rapport aux autres et qu'il possède une conductivité électrique bien plus faible que celle des autres. Ce cas de figure est typiquement celui rencontré avec les particules de latex ou les cellules biologiques en milieu aqueux. De plus, la présence de nombreux ions dans le tampon aqueux (électrolyte) apporte une spécificité de par la double couche qui se crée autour de la particule. En effet, les ions présents dans le tampon aqueux sont attirés par les charges opposées accumulées en surface de la particule du fait de sa polarisation. Il se forme ainsi, autour de la particule, un nuage de contre-ions (double couche) qui, sous l'effet du champ électrique, se déplacent et contribuent à augmenter fortement la polarisation de la particule associée à cette atmosphère ionique.

La double couche étant de très faible épaisseur (quelques nanomètres), le phénomène de polarisation interfaciale peut être intégré dans une contribution surfacique à la conductivité électrique équivalente de la particule qui, dans le cas

de particules de latex dans un environnement électrolytique donné, possède une conductivité de volume qui est quasiment nulle [6].

Ainsi, pour les cellules biologiques, les mesures de leurs propriétés électriques étant faites en présence du tampon, nous pouvons supposer, en première approximation, que les phénomènes de polarisation interfaciale sont pris en compte au travers de ces mesures [5].

Concernant les gouttes, celles-ci dans nos études sont des gouttes d'eau plus ou moins conductrices plongées dans de l'huile. La particule est donc ici toujours plus conductrice que son milieu extérieur et le phénomène de polarisation interfaciale est négligeable. Il y a toutefois polarisation de la couche diffuse dans un cas à l'extérieur, dans l'autre cas à l'intérieur. Dans ce dernier cas, les phénomènes de déplacement électrocinétique sont négligeables. Dans le cas de gouttes d'huile plongées en tampon aqueux, il faudrait alors, comme pour les particules de latex et les cellules biologiques, tenir compte de l'effet de polarisation interfaciale au travers d'une conductivité de surface de la goutte.

### 1.3.3 Conclusion

En résumé, un champ électrique appliqué à une substance diélectrique, polarise celle-ci, soit en y induisant des dipôles électriques dans le cas des substances non polaires, soit en provoquant l'alignement des dipôles permanents dans le cas des diélectriques polaires. Nous ferons l'hypothèse que les domaines de fréquences et d'intensités de champ électrique utilisés dans nos applications permettent d'éviter les phénomènes de claquage. L'effet de polarisation interfaciale (effet Maxwell-Wagner) est pris en compte au travers des valeurs conductivités des particules issues de mesures expérimentales. La prise en compte du caractère faiblement conducteur des diélectriques en présence rend la polarisation dépendant de la fréquence.

### 1.4 Les phénomènes électrohydrodynamiques

Bien que la liste des phénomènes EHD soit longue, recensons ici les plus connus.

#### 1.4.1 La diélectrophorèse (DEP)

La DEP est le déplacement sous champ électrique de la matière polarisée. La non uniformité du champ électrique appliqué est une condition nécessaire et ce phénomène est de plus en plus utilisé dans les microsystèmes pour manipuler sans contact mécanique des particules ou pour déplacer des gouttes [7]. La DEP se caractérise par deux points : *i*) elle concerne autant la matière neutre (cellules biologiques, gouttes) que chargée (particules de latex fonctionnalisées), solide (particules de latex) ou liquide (gouttes de tampon biologique), *ii*) les champs électriques sont alternatifs, ce qui diminue les réactions électrochimiques aux électrodes. La particule se déplace soit vers le champ le plus fort (la diélectrophorèse est dite alors positive) soit repoussée vers le champ le plus faible (auquel cas la diélectrophorèse est dite négative). Nous verrons que, le cas échéant, le passage d'un régime de DEP à l'autre dépend, pour une particule et un liquide donnés, uniquement de la fréquence du champ électrique appliqué.

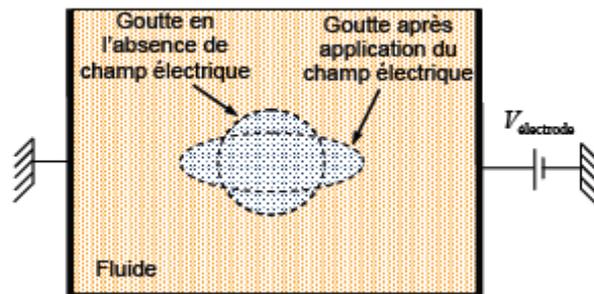
La force diélectrophorétique est proportionnelle au volume de la particule et au gradient du champ électrique qui lui est appliqué. Un champ fortement variable dans l'espace ainsi que de grosses particules sont des situations favorables à l'obtention de forces DEP capables de déplacer les particules malgré l'existence de nombreuses forces antagonistes. Parmi elles, nous trouvons l'agitation thermique, la force de frottement due à la viscosité du liquide extérieur, et surtout l'entraînement par l'écoulement du fluide dont l'origine se trouve aussi dans le champ électrique appliqué (phénomènes EHD secondaires).

Une multitude de configurations d'électrodes ont été étudiées pour des applications diverses. Déplacement et tri de cellules [8], dispenseurs de nanogouttes (de quelques nanolitres) [9] sont des exemples d'applications bien maîtrisées aujourd'hui.

#### 1.4.2 L'électrodéformation

Un deuxième phénomène que nous considérons dans nos modèles est la déformation des interfaces fluide-fluide sous l'effet d'un champ électrique appliqué (voir figure 1.3). Si nous souhaitons déplacer des gouttes par DEP, le champ électrique appliqué, non uniforme et alternatif, va induire la déformation de leur interface. D'une forme initialement sphérique.

La déformation engendrée par le champ électrique provient de l'équilibre local entre les forces électriques, les forces capillaires et les forces hydrodynamiques. Pour de fortes déformations, les instabilités qui apparaissent provoquent la rupture des gouttes. Ceci s'avère gênant si l'on désire extraire ces gouttes avec un minimum de contamination par le fluide extérieur. La prévision de la déformation de ces gouttes, afin d'estimer les conditions d'instabilités, est donc cruciale dans la conception des microsystèmes.



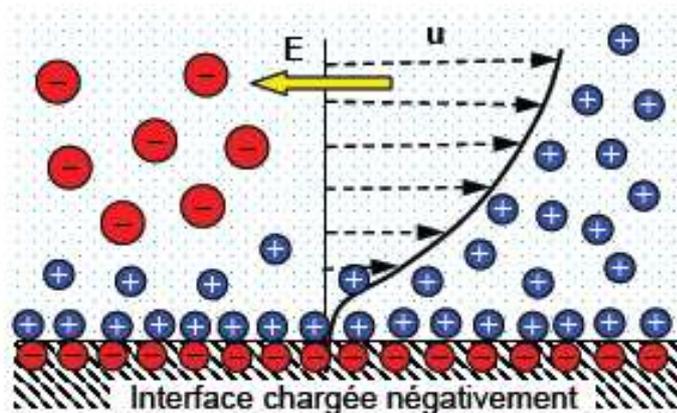
**Figure 1.3. L'application d'un champ électrique sur une goutte provoque sa déformation.**

#### 1.4.3 L'électro-osmose

L'électro-osmose est la conséquence de la formation d'une double couche électrique à la surface des électrodes. L'existence d'une composante du champ électrique parallèle à cette surface a comme effet de provoquer le mouvement liquide qui engendre un cisaillement aux électrodes. D'un point de vue microscopique, c'est le déplacement des ions de cette double couche sous l'effet de la force de Coulomb, qui entraîne le liquide et le met en mouvement. En effet, considérons le cas simple d'une interface plane chargée négativement, par exemple. Parallèlement à cette surface, on applique un champ électrique dans le liquide. Le fait de la présence même de l'interface, une anisotropie sur la distribution des espèces chimiques de l'électrolyte se produit provoquant une anisotropie sur le champ électrique et les forces qui s'exercent en permanence sur ces mêmes espèces. Ces forces s'exercent de manière différentielle sur les espèces d'ions. Les ions positifs se rapprochent de l'interface par exemple et donc des ions négatifs apparaissent de l'autre côté de l'interface (voir figure 1.4). Soumis au champ électrique imposé, ces ions migrent entraînant par là même le liquide dans lequel ils baignent. Le liquide est donc mis en mouvement sous l'effet

de l'entraînement dû à la migration des ions formant la double couche. La mise en mouvement par électro-osmose est certainement un des phénomènes EHD secondaires le plus perturbateur lorsque l'on souhaite manipuler des particules par DEP dans les microsystèmes. En effet, les vitesses obtenues sont souvent suffisantes pour qu'un effet d'entraînement des particules par le mouvement du liquide soit observé [10].

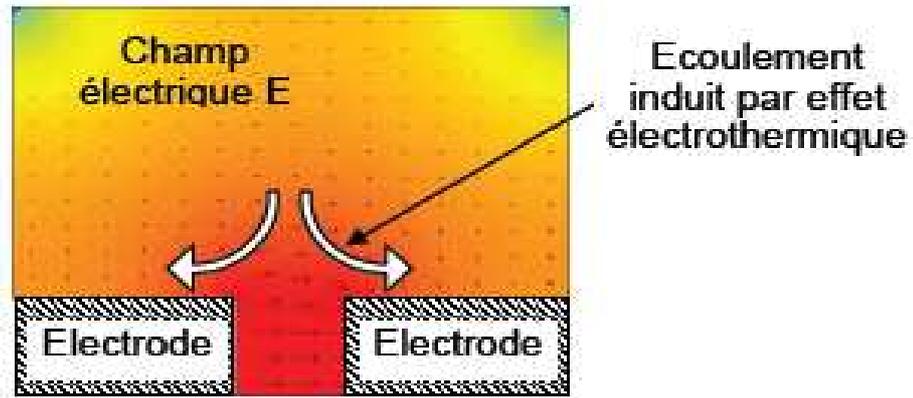
L'électro-osmose peut cependant être atténuée en adaptant la fréquence du champ électrique d'une part et en déposant une couche d'isolant électrique sur les électrodes d'autre part. Nous n'avons pas intégré ce phénomène dans notre modèle.



**Figure 1.4. L'application d'un champ électrique tangentiel à une interface provoque la migration des ions de la double couche électrique et un cisaillement dans le fluide.**

#### 1.4.4 L'électrothermique

L'électrothermique résulte des variations des propriétés électriques du liquide (conductivité et permittivité électriques) avec la température. L'échauffement dû à l'effet Joule, fait apparaître des gradients de température engendrant des gradients de permittivité et conductivité. Ces gradients de propriétés électriques créent des forces de volume et entraînent le liquide (voir figure 1.5). Notons que l'électrothermique se distingue de la convection naturelle où les variations de la masse volumique avec la température sont à l'origine du mouvement du fluide.

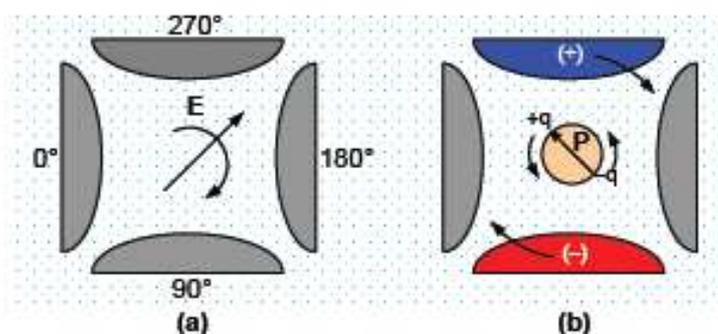


**Figure 1.5. Un courant électrique engendre l'échauffement du liquide diélectrique de faible conduction qui à son tour modifie localement la permittivité électrique. Une force électrique prend naissance et un écoulement est instauré.**

L'utilisation d'électrodes isolées électriquement (recouvertes par une couche de  $\text{SiO}_2$  par exemple) est une condition favorable à la minimisation du phénomène de chauffage par effet Joule que nous négligerons .

#### 1.4.5 L'électrorotation

Si l'on soumet une particule immergée dans un fluide à un champ électrique une distribution de charges à l'interface et donc un moment dipolaire équivalent s'établissent. Le temps d'établissement (et d'évanouissement) de l'orientation du moment dipolaire électrique équivalent dans la direction du champ appliqué est fini si bien que si l'on fait varier brusquement la direction du champ électrique, un déphasage apparaît entre le champ électrique et le moment dipolaire. La particule subit alors un couple qui tend à la faire tourner pour réaliser cet alignement : c'est l'électrorotation. Afin d'entretenir cette rotation, le champ électrique doit changer de direction en permanence (il est alors dit *champ tournant*), comme indiqué par la figure 1.6.



**Figure 1.6. (a) Un champ électrique tournant est engendré entre quatre électrodes par application d'une tension sinusoïdale avec un déphasage de  $90^\circ$ . (b) Selon l'angle de phase entre la polarisation induite  $P$  et le champ électrique, le couple agit sur la particule en co- ou anti-champ. Pour le cas indiqué ici, la particule tourne à contre sens du champ électrique.**

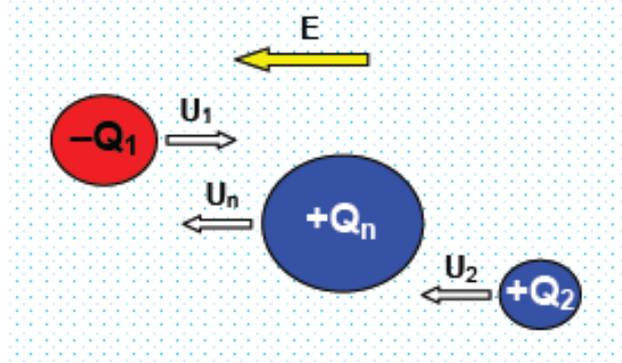
Notons que l'électrorotation est un phénomène qui peut être observé en champ électrique uniforme.

Les configurations qui nous intéressent n'utilisent pas de champs électriques tournants, les phénomènes d'électrorotation ne sont donc pas pris en compte dans nos modèles.

#### 1.4.6 L'électrophorèse

L'électrophorèse est une méthode largement utilisée en biologie pour séparer des molécules chargées par migration différentielle sous l'action d'un champ électrique (figure 1.7). La force appliquée est la force de Coulomb (voir chapitre 2). Le sens de déplacement des particules dépend du sens du champ électrique appliqué.

Les particules vont subir une force de Coulomb qui s'inverse avec le champ électrique et globalement la particule aura un mouvement oscillant autour d'une position fixe. L'électrophorèse sera donc négligée dans nos modèles bien que les particules de latex possèdent en général une charge non nulle.

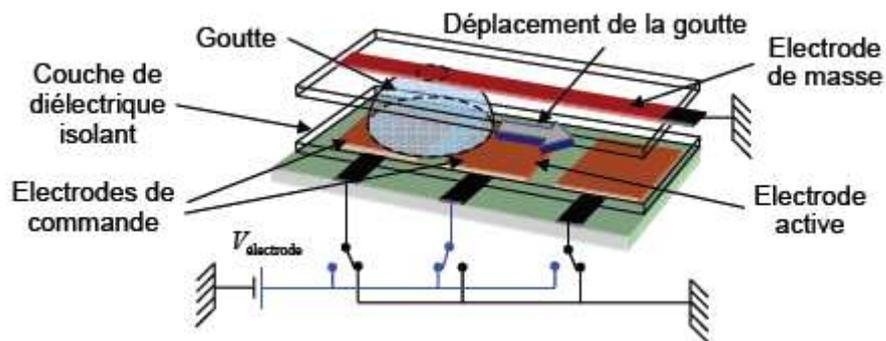


**Figure 1.7. Electrophorèse de particules chargées par application d'un champ électrique.**

#### 1.4.7 L'électromouillage

Les premiers systèmes EWOD (Electrowetting On Dielectric) mettent en jeu une goutte en contact avec une électrode posée (sans contact électrique) sur une électrode plane, comme indiqué par la figure 1.8., L'électrode plane est reliée à une électrode filaire. Le dépôt d'une couche isolante sur l'électrode plane permet d'imposer un champ électrique continu ou de faible fréquence (de 100 Hz à 10 kHz) suffisamment intense pour faire varier l'angle de contact apparent de la goutte [11]. Les applications de ces systèmes concernent principalement l'optique où la goutte joue le rôle de lentille à focale variable.

Des systèmes dérivés sont ensuite apparus, dans lesquels le déplacement de la goutte sur l'électrode est recherché (voir figure 1.8).



**Figure 1.8. Déplacement d'une goutte dans un système EWOD.**

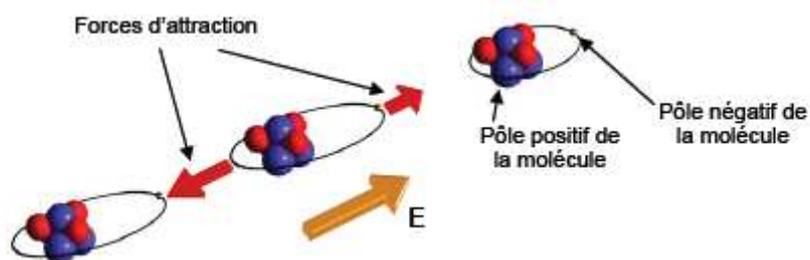
De nombreux travaux plus théoriques ont attribué ce déplacement à la variation de mouillabilité de la goutte. Cette hypothèse a été remise en question par plusieurs auteurs en particulier Jones [12] qui attribua ce phénomène à l'existence de

forces de volume, dues à la polarisation de l'eau et à la non uniformité du champ électrique appliqué ; le phénomène EWOD serait alors identique au phénomène de diélectrophorèse cité ci-dessus. Par définition, l'électromouillage n'opère que si la goutte est posée sur une paroi initialement hydrophobe (non mouillante) et qui devient hydrophile (mouillante) lorsqu'elle est soumise au champ électrique. Cependant, la goutte (conductrice) doit aussi être en contact permanent avec une électrode pour que l'électromouillage soit effectif (dans ce cas, la goutte arrive à être propulsée à une vitesse de plusieurs millimètres par seconde).

#### 1.4.8 L'électrostriction

Un phénomène sous-jacent à la polarisation d'un milieu soumis à un champ électrique est l'interaction mutuelle qui se produit quand les dipôles électriques (molécules polarisées) s'alignent dans la direction du champ. L'attraction des pôles opposés de ces dipôles provoque la contraction du milieu parallèlement au champ électrique appliqué (voir figure 1.9). Ce rétrécissement de la matière sous champ électrique est appelée électrostriction. A la différence du phénomène piézoélectrique (effort mécanique engendré par l'application d'un champ électrique et réciproquement) qui est spécifique à un type restreint de cristaux, l'électrostriction est un phénomène qui concerne tous les milieux diélectriques.

L'attraction des dipôles électriques est proportionnelle à trois facteurs. Elle est proportionnelle à l'intensité du champ électrique, à la polarisation des molécules et la proximité des molécules les unes aux autres. Si cette attraction est homogène, c'est-à-dire, si les molécules s'attirent partout avec la même intensité, il est évident que la résultante de ces attractions sur une molécule est nulle. Si en revanche cette attraction varie dans l'espace alors une force se crée suite à la contraction non homogène du milieu ; l'électrostriction induit aussi un déplacement de la matière.



**Figure 1.9. L'attraction non homogène qui s'exerce sur une molécule entraîne son déplacement vers les régions où cette attraction est la plus prononcée. Pour alléger la représentation, une molécule monoatomique est utilisée dans l'illustration.**

## CHAPITRE 2 :

### MODELE MATHEMATIQUE GENERALE

Nous présentons maintenant les différentes forces électriques et hydrodynamiques mises en jeu. Nous distinguerons ainsi les forces qui s'exercent en volume et celles qui s'exercent aux interfaces (sections 2.1). Après présentation des équations de Maxwell, des hypothèses simplificatrices sont émises (section 2.2). Ces hypothèses seront détaillées dans le cadre des applications considérées dans ce mémoire.

#### 2.1 Inventaire des forces mises en jeu

l'hypothèse qui consiste à considérer les milieux comme continus reste admissible. Tous les développements relatifs à la mécanique de ces fluides seront effectués sur cette base.

Dans ce cadre, l'interaction entre matière et champ électrique se modélise par l'intermédiaire de plusieurs forces à savoir.

##### 2.1.1 Les forces électriques

###### 2.1.1.1 Les forces électriques de volume

L'application d'un champ électrique dans une domaine homogène donné engendre, en tout point, une densité de force électrique (ou force électrique volumique), qui figure comme un terme source spécifique dans l'équation locale de quantité de mouvement étendue à tout le domaine. Cette force comprend trois composantes fondamentales.

###### 2.1.1.1.1 La force de Coulomb

En fonction de leur signe, deux charges électriques ponctuelles  $Q_1$  et  $Q_2$  disposées dans le vide l'une à proximité de l'autre s'attirent ou se repoussent. Cette force électrique est proportionnelle aux charges électriques et inversement proportionnelle au carré de la  $\|r\|$  Qui les sépare. La loi qui exprime la force de Coulomb est :

$$\vec{F}_i^{coulomb} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\|r\|^2} \vec{e}_i \quad (2.1)$$

Où  $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$  F/m est la permittivité du vide et  $e_i = r_i / \|r\|$  un vecteur unitaire porté par la droite qui relie les deux charges. Loi de Coulomb est valable aussi bien à l'échelle atomique ( $\text{\AA}$ ) qu'à l'échelle macroscopique (km) Dans le cas où le milieu est autre que le vide, la forme de cette force similaire à (2.1) s'écrit :

$$\vec{F}_i^{coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{\|r\|^2} \vec{e}_i \quad (2.2)$$

Où  $\varepsilon$  est la permittivité du milieu précisée dans le paragraphe suivant. Le terme  $Q_1 e_i / 4\pi\varepsilon_0 \|r\|^2$  est regroupé en une seule entité appelée champ électrique  $E$  .

Ces considérations permettent de se rattacher à une définition élémentaire de la force de Coulomb car habituellement, le champ électrique  $E$  est défini de façon beaucoup plus générale : nous le considérons comme une donnée sur tout le domaine considéré. Soit  $q_v$  la densité volumique des charges électriques, la densité de la force de Coulomb s'écrit alors :

$$\vec{f}_{v,i}^{coulomb} = q_v \vec{E}_i \quad (2.3)$$

#### 2.1.1.1.2 La force d'électrostriction

La déformation d'un élément fluide provoquée par l'attraction des molécules qui se polarisent sous l'effet du champ électrique appliqué est appelée électrostriction. La polarisation d'un matériau augmente à mesure que l'excentricité des barycentres des charges liées positives et négatives augmente par l'application du champ électrique.

La polarisabilité d'un matériau est caractérisée par sa susceptibilité électrique  $\chi$  , La susceptibilité électrique d'un diélectrique est toujours positive. Souvent, on admet une loi linéaire entre la polarisation d'un diélectrique et le champ électrique appliqué . Le facteur de linéarité est donné par la quantité  $\varepsilon_0 \chi$  , où  $\varepsilon_0$  n'est autre que la permittivité du vide. Par définition, la quantité  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \chi$  est la permittivité du diélectrique considéré. Si cette permittivité est grande comparée à la permittivité du vide, le matériau sera très polarisable (l'eau par exemple). Si cette permittivité est proche de celle du vide (les huiles par exemple) le matériau ne sera que faiblement polarisable.

Puisque la polarisation est liée au champ électrique qui l'engendre, l'inversion du champ électrique, qui entraîne l'inversion de polarisation, ne modifie pas la déformation subie. Si le champ électrique est uniforme, alors la résultante des forces d'électrostriction sur

le champ électrique est uniforme, alors la résultante des forces d'électrostriction sur l'élément fluide est nulle. L'expression de la densité de force d'électrostriction est donnée par (la sommation s'opère sur les indices répétés) [13].

$$f_{v,i}^{electrostriction} = \frac{1}{2} \partial_i \left( E_k E_k \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{T=Cte} \rho \right) \quad (2.4)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $T$  la température. Parce que la force d'électrostriction s'écrit sous la forme d'un gradient, elle est souvent assimilée à une Pression supplémentaire.

### 2.1.1.1.3 La force diélectrique

La troisième force électrique qui est susceptible de s'appliquer est la force diélectrique. Cette dernière, appelée force de Korteweg-Helmholtz [14], se manifeste lorsqu'une variation spatiale de la polarisabilité de l'élément fluide se produit. La variation dans l'espace de la permittivité électrique peut être due soit à une non homogénéité du même matériau (soumis à un gradient thermique par exemple) soit à la coexistence de plusieurs matériaux (ou phases) homogènes. Ce dernier cas où la permittivité subit un saut sera considéré dans le paragraphe 2.1.1.2 La forme de la densité de force diélectrique correspondant au premier cas est donnée dans ce paragraphe.

Le point de départ des deux cas (variation de la permittivité au sein du même matériau ou de plusieurs matériaux) est le tenseur de Maxwell  $\mathbf{T}^{electrique}$  défini par :

$$\mathbf{T}^{electrique} = \varepsilon \left( \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{I} \right) + \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{T=Cte} \rho \mathbf{I} \quad (2.5)$$

En intégrant la force d'électrostriction à la pression, comme mentionné plus haut, l'expression (2.5) se réduit à la forme standard suivante :

$$\mathbf{T}^{electrique} = \varepsilon \left( \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{I} \right) \quad (2.6)$$

La densité de la force électrique est calculée par, [15],

$$f_{v,i}^{electrique} = \nabla \cdot \mathbf{T}^{electrique} \quad (2.7)$$

L'expression de la force électrique se déduit, selon [16] (formule 3.49) et [13], par :

$$f_{v,i}^{electrostriction} = \frac{1}{2} E_k E_k (\partial_i \varepsilon) + \rho E_i \quad (2.8)$$

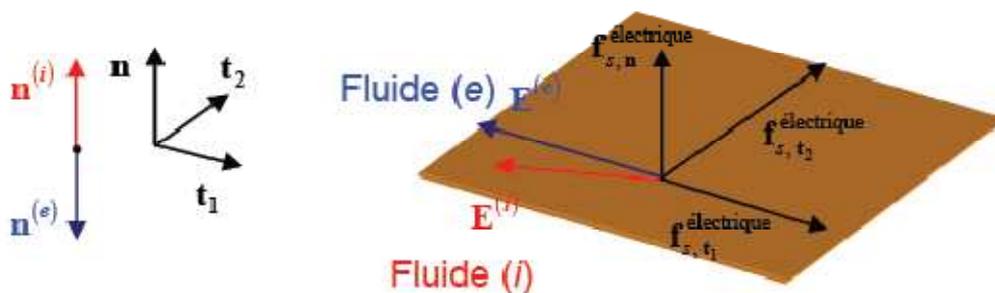
Où  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . On voit ainsi que la densité de la force électrique, telle que donnée par (2.7), inclut la force de Coulomb, à laquelle elle se réduit si la permittivité  $\varepsilon$  du milieu est uniforme. C'est le premier terme de la force électrique (2.8) que l'on appelle force diélectrique.

### 2.1.1.2 Les forces électriques de surface : les interfaces fluide–fluide

Abordons le cas évoqué plus haut où il se produit, d'un domaine à un autre, non pas une variation continue mais un saut de permittivité. C'est le cas, notamment, des interfaces qui séparent deux fluides diélectriques non miscibles. Alors, il n'est plus possible de définir pour des points situés sur ces interfaces des bilans locaux qui fassent intervenir des forces volumiques continues. A la place, on introduit des bilans locaux à partir des forces qui s'exercent sur un élément d'interface d'aire unité, de part et d'autre de l'interface. Ces contraintes relatives à chaque milieu apparaissent sous la forme d'un saut :

$$f_s^{électrique} = n^{(e)} \cdot T^{électrique(e)} + n^{(i)} \cdot T^{électrique(i)} = n \cdot (T^{électrique(i)} - T^{électrique(e)}) \quad (2.9)$$

$n^{(e)}$  (resp.  $n^{(i)}$ ) est la normale à l'interface extérieure au fluide (e) (resp. fluide (i)) et l'on choisit de définir arbitrairement  $n = n^{(i)}$  (voir figure 2.1).



**Figure 2.1** force électrique appliquée a une interface entre deux fluides.

Pour des questions de concision pour la suite, on introduit la notation  $[ \ ]$  définie par:

$$[ n \cdot T^{électrique} ] = n^{(e)} \cdot T^{électrique(e)} + n^{(i)} \cdot T^{électrique(i)} \quad (2.10)$$

Après projection de (2.9) sur la normale  $n$  et les vecteurs tangents  $t_\alpha (\alpha=1,2)$ , a l'interface, on trouve :

$$f_s^{\text{électrique}} \cdot n = \left[ \varepsilon^{(i)} E_n^{(i)} E_n^{(i)} - \varepsilon^{(e)} E_n^{(e)} E_n^{(e)} - (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) (E_{t1}^2 + E_{t2}^2) \right] / 2 \quad (2.11)$$

$$f_s^{\text{électrique}} \cdot t_\alpha = (\varepsilon^{(i)} E_n^{(i)} - \varepsilon^{(e)} E_n^{(e)}) E_{t_\alpha} = q_s E_{t_\alpha}, (\alpha=1,2) \quad (2.12)$$

Si nous considérons un objet immergé dans un fluide non miscible, alors l'interface, qui sépare les deux milieux, sera fermée. Par définition, si l'objet est rigide (auquel cas il est appelé particule), aucune déformation ne se produit. Les contraintes électriques, telles que données par (2.11), (2.12), ont néanmoins, après intégration sur la surface, un effet global sur la particule. C'est dans ce sens que l'on appelle force électrophorétique et force diélectrophorétique et les forces résultant de la contribution de toutes les contraintes de Coulomb et celles purement diélectriques, respectivement, sur la particule.

En outre, si l'objet est susceptible de se déformer (c'est le cas notamment des gouttes de fluide), au déplacement induit par la force résultante s'ajoutent une déformation due principalement aux contraintes qui s'exercent sur la normale à l'interface.

## 2.1.2 Les forces hydrodynamiques

Pour un objet immergé dans un fluide, les forces électriques s'équilibrent, dans les bilans locaux volumique ou surfacique, avec les forces hydrodynamiques. Les forces hydrodynamiques se subdivisent en quatre classes : les forces d'inertie, les forces de pression, les forces visqueuses et la tension de surface..

### 2.1.2.1 Les forces hydrodynamiques de volume

#### 2.1.2.1.1 Les forces d'inertie

L'expression de la densité volumique de la force d'inertie est classiquement donnée Par :

$$f_{v,i}^{\text{inertie}} = \rho \frac{Du_i}{Dt} \quad (2.13)$$

Où le symbole  $\frac{D}{Dt}$  représente la dérivée particulaire définie par :

$$\frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) \quad (2.14)$$

### 2.1.2.1.2 Les forces de pression

A échelle microscopique, la pression se traduit, pour les fluides, par l'intensité et le nombre de chocs que reçoit une surface par unité de temps. Ces collisions se produisent naturellement par le mouvement aléatoire (brownien) des molécules du fluide. La somme de cette pression et de la pression associée à l'électrostriction est appelée pression modifiée, soit :

$$p^{\text{modifiée}} = p + \frac{1}{2} E_k E_k \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{T=Cte} \rho \quad (2.15)$$

### 2.1.2.1.3 Les forces visqueuses

Pour un fluide newtonien isovolume (incompressible par effet de pression et Indilatable par effet de température), la force de pression ainsi que la force de viscosité Peuvent être rassemblées sous le terme d'une divergence d'un tenseur, appelé tenseur des Contraintes  $\Pi$ , soit :

$$\Pi = -pI + \mu \left( \nabla u + (\nabla u)^t \right) \quad (2.16)$$

Où  $p$  est la pression et  $\mu$  la viscosité dynamique et l'exposant  $t$  indique le tenseur transposé.

La densité de la force volumique associée à ces termes s'écrit :

$$f_v^{\text{hydrodynamique}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 u = -\nabla p - \mu \nabla \times \omega \quad (2.17)$$

On observe que les forces visqueuses disparaissent si l'écoulement est supposé Irrotationnel.

### 2.1.2.1.4 La force de gravité

L'expression de la densité volumique de la force de gravité est donnée par :

$$f_{v,i}^{\text{gravité}} = \rho g_i \quad (2.18)$$

où  $g$  est l'accélération de la gravité supposée constante.

### 2.1.2.2 Les forces hydrodynamiques de surface

A l'image du traitement effectué au paragraphe 2.1.1.2, la densité surfacique des forces hydrodynamiques de pression et de viscosité est également obtenue par le saut normal à l'interface du tenseur des contraintes  $\Pi$  :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} = \mathbf{n} \cdot (\Pi^{(i)} - \Pi^{(e)}) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} = [\mathbf{n} \cdot \Pi] \quad (2.20)$$

Après projection de cette équation sur la normale  $\mathbf{n}$ , on trouve :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{n} = \left[ \mathbf{n} \cdot \left( -pI + \mu \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \right) \right) \right] \cdot \mathbf{n} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{n} = \left[ \mathbf{n} \cdot \left( -pI + 2\mu \nabla \mathbf{u} + \mu \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} \right) \right] \cdot \mathbf{n} \quad (2.22)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est le champ tourbillonnaire :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.23)$$

Soit lorsque les écoulements sont irrotationnels :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{n} = -p^{(i)} + p^{(e)} + 2\mu^{(i)} \left( \mathbf{n}^{(i)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(i)} \right) \cdot \mathbf{n} - 2\mu^{(e)} \left( \mathbf{n}^{(e)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (2.24)$$

A la différence de l'équation volumique (2.17), l'équation surfacique (2.24) montre que les forces visqueuses ne disparaissent pas complètement si l'écoulement est supposé irrotationnel. On constate donc que l'irrotationnalité n'implique aucunement l'absence d'effets visqueux. Il sera donc justifié d'étudier certains effets visqueux avec les modèles irrotationnels qui seront utilisés plus loin. En revanche, ces effets ne seront que partiels et ne peuvent prendre en compte le cisaillement.

Si l'on projette, en revanche (2.20) selon les vecteurs tangents à l'interface  $\mathbf{t}_\alpha (\alpha = 1, 2)$  on obtient :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{t}_\alpha = \left[ \mathbf{n} \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \right) \right] \cdot \mathbf{t}_\alpha, \alpha = 1, 2 \quad (2.25)$$

soit si les écoulements sont irrotationnels :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{t}_\alpha = 2\mu^{(i)} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{t}_\alpha - 2\mu^{(e)} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \cdot \mathbf{t}_\alpha, \alpha = 1, 2 \quad (2.26)$$

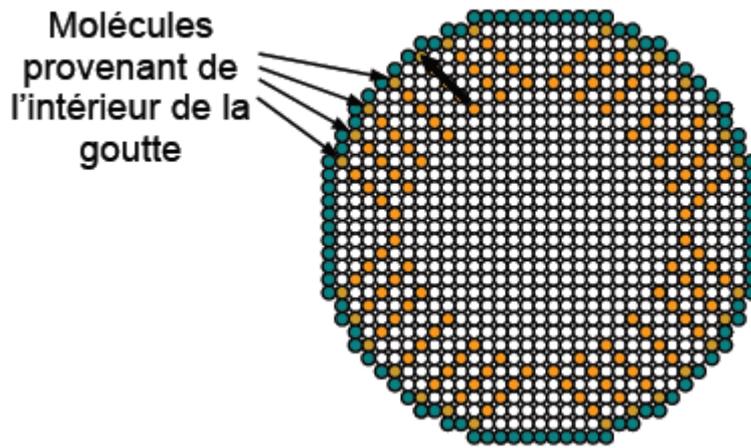
➤ La tension de surface

Pour aborder cette force, il est instructif d'examiner le comportement microscopique sous-jacent. A l'intérieur d'un fluide, chaque molécule est entourée de toutes parts par d'autres molécules. Elle est soumise à des interactions, forces attractives dites de cohésion moléculaire, dont la somme est nulle si la symétrie sphérique est respectée. A la surface du fluide, la somme de ces interactions est non nulle. Déformer un objet fluide revient à modifier le rapport entre son volume, constant dans notre cas (fluide isovolume), et l'aire de sa surface. L'énergie dépensée pour augmenter, par exemple, l'aire d'un objet fluide correspond à celle qui est nécessaire pour amener les molécules de l'intérieur vers la surface. En effet, l'aire de la surface ne peut s'accroître qu'aux dépens des molécules qui viennent de l'intérieur (comme illustré par la figure 2.2).

Pour augmenter cette aire, il faut donc fournir du travail entraînant une variation de l'énergie de l'objet. La grande mobilité des molécules dans les fluides, due à la faiblesse des forces de cohésion, permet une répartition homogène du travail fourni. On peut donc admettre que le travail  $W$  de déformation soit proportionnel à la quantité de molécules ramenées à la surface, c'est-à-dire à la variation même  $\Delta S$  de l'aire  $S$  de la surface :

$$W = \gamma \Delta S \quad (2.27)$$

Le facteur  $\gamma$  est un facteur de proportionnalité. Selon le principe des moindres actions, les configurations habituelles d'équilibre correspondent aux états d'énergie minimum et donc les surfaces d'équilibre des fluides doivent être de surfaces à aire minimale. En utilisant la théorie générale des membranes élastiques, Young a proposé d'assimiler l'interface entre deux fluides à une membrane infiniment mince, tendue, de manière que la force exercée sur un élément de ligne située sur l'interface soit perpendiculaire à cet élément et proportionnelle à sa longueur par le facteur  $\gamma$ . Ce facteur ne dépend que de la nature chimique et de la température des deux fluides en présence. Ceci est, par définition, la tension interfaciale d'un fluide en contact de l'autre, appelée *tension de surface*  $\gamma$



**Figure 2.2 Une goutte de fluide (composée d'un grand nombre de molécules) suspendue dans un gaz. Lors de la déformation de la surface de cette goutte (qui entraîne une variation de son aire) des molécules sont ramenées de l'intérieur de la goutte vers cette surface moyennant une quantité d'énergie dépensée.**

Plusieurs facteurs peuvent influencer de manière perceptible la tension de surface tels la présence dans les fluides d'agents chimiques appelés *tensio-actifs* (ou surfactants en anglais) ou la variation de la température.

Dans le cas général où la tension de surface varie le long de l'interface, la force de surface  $F_s^\gamma$  qui lui est associée possède des composantes normale et tangentielle données par :

$$F_s^\gamma \cdot n = \gamma \mathcal{N}_s \cdot n \quad (2.28)$$

$$F_s^\gamma \cdot t_\alpha = -\nabla_s \gamma \cdot t_\alpha, \alpha = 1, 2 \quad (2.29)$$

Le symbole  $\nabla_s$  est la projection de l'opérateur  $\nabla$  (gradient) sur le plan tangent à

L'interface, soit :

$$\nabla_s = (\mathbf{I} - nn) \cdot \nabla \quad (2.30)$$

## 2.2 Formulation générale des phénomènes électriques

Seront d'abord présentées les équations de l'électromagnétisme sous leur forme la plus générale. Les hypothèses simplificatrices qui entrent dans le cadre des problèmes de microsystemes à traiter ayant été définies, il sera possible de spécifier les nouvelles équations en tenant compte de ces hypothèses. Enfin, les différentes conditions aux limites associées au problème électrique seront précisées.

### 2.2.1 Equations de Maxwell

Pour un diélectrique quelconque, les équations de Maxwell sont les suivantes, [16,17],

1. L'induction magnétique  $B$  est solénoïdale (conservation du flux ou encore, insécabilité des pôle magnétiques Nord et Sud), c'est-à-dire qu'il obéit à la relation :

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.31)$$

2. La loi de Lenz (ou de Faraday) d'induction électromagnétique, qui corrèle la génération du champ électrique (ou de la force électromotrice) à la variation de l'induction magnétique, s'écrit :

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.32)$$

3. La loi de Gauss, exprimant la conservation du flux du champ déplacement électrique  $D$  à travers une surface fermée dû aux charges électriques libres que cette surface renferme, s'écrit sous forme locale :

$$\nabla \cdot D = q \quad (2.33)$$

Où  $q$  est la densité volumique des charges électriques libres.

4. Le théorème d'Ampère, reliant le champ magnétique au courant électrique qui l'engendre, s'exprime sous la forme différentielle suivante :

$$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.34)$$

où  $H$  est le champ magnétique et  $j$  la densité du courant électrique.

## CHAPITRE 3 :

### LA METHODE GENERALE DES PETITES PERTURBATIONS

La théorie des perturbations est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique  $(E_\lambda)$  dépendante d'un paramètre  $\lambda$  lorsque la solution de l'équation  $(E_0)$ , correspondant à la valeur  $\lambda=0$ , est connue exactement. L'équation mathématique  $(E_\lambda)$  peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation  $(E_\lambda)$  sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre  $\lambda$ , cette solution approchée étant supposé être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre  $\lambda$  est plus « petite ».

#### 3.1 Généralités

##### 3.1.1 Histoire

Dès le début du xviii<sup>e</sup> siècle, la théorie des perturbations a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste .

La méthode a par ailleurs été par la suite utilisée au xxe siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs perturbative.

##### 3.1.2 Convergence de la série perturbative

La recherche de la solution approchée de l'équation  $(E_\lambda)$  sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre  $\lambda$  ; pose le problème de la *convergence* de cette série. Ce problème a été réglé pour l'astronomie par Poincaré en 1892 : la « série » de perturbation doit être comprise mathématiquement comme un développement asymptotique au voisinage de zéro, et non comme une série ordinaire convergente uniformément.

Pour illustrer ,les deux visions possibles des astronomes par rapport à celle des géomètres on considérons les deux séries suivantes :

$$\frac{1000^n}{n!} \quad \text{et} \quad : \quad \frac{n!}{1000^n}$$

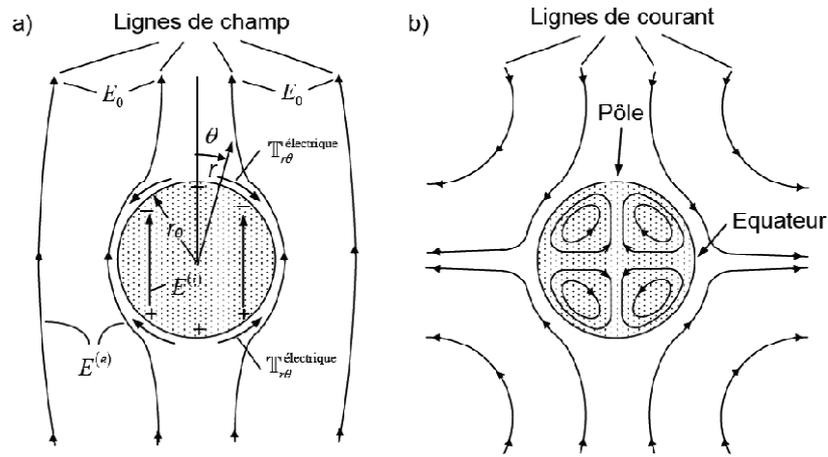
Les géomètres voient la convergence comme celle de la première série contrairement à celle des astronomes qui voient celle de la deuxième série

Les deux approches sont bonnes,la première est plutôt porte sur l'aspect théorique,la seconde sur l'aspect numérique.

Pour la présente étude,on a adopté la demande qui consiste à traiter plutôt l'aspect théorique [18].

### 3.2 L'application de la méthode de perturbation par Taylor pour une goutte sphérique avec écoulement sous champ uniforme :

Dans le cas général de deux fluides de conductivité finie, l'écoulement, à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte, doit être pris en compte. La conductivité de la goutte est supposée différente de celle du liquide extérieur et les deux fluides sont visqueux. Melcher et Taylor [19] ont étudié ce problème avec l'hypothèse de la goutte est sphérique. Le champ électrique et l'écoulement sont supposés respecter la symétrie axiale.Ces auteurs ont effectué un développement analytique assez simple en se plaçant dans un système de coordonnées sphériques comme indiqué par la figure 3.3.a.



**Figure 3.1. Une goutte sphérique de rayon  $r_0$  occupe la région (i) et est immergée dans un liquide qui occupe la région (e).**

a) le champ électrique continu appliqué  $E_0$  est uniforme loin de la sphère et la répartition des charges électriques à l'interface correspond au cas où la conductivité du liquide extérieur est plus grande que celle de la goutte. En interaction avec le champ électrique, ces charges créent une contrainte tangentielle  $T_{r,\theta}^{électrique}$ .

b) Caractéristiques de l'écoulement induit par le champ électrique.

En régime permanent, la continuité de la densité du courant  $j$  qui traverse l'interface doit être vérifiée, soit :

$$\sigma^{(i)} E_n^{(i)} = \sigma^{(e)} E_n^{(e)} \quad (3.1)$$

Le saut de la conductivité électrique  $\frac{\sigma^{(e)}}{\sigma^{(i)}}$  détermine le saut de la composante normale du champ Électrique  $E_n$  à l'interface :

$$E_n^{(i)} - E_n^{(e)} = \left( \frac{\sigma^{(e)}}{\sigma^{(i)}} - 1 \right) E_n^{(e)} \quad (3.2)$$

Dans le cas général où les temps électriques de relaxation  $\tau_e$  ( $\tau_e = \varepsilon / \sigma$ ) de la goutte et du liquide extérieur sont différents, ce saut implique une discontinuité de la composante normale  $D_n$  du vecteur déplacement électrique :

$$[n.D] = \varepsilon^{(i)} E_n^{(i)} - \varepsilon^{(e)} E_n^{(e)} = \sigma^{(e)} \left( \frac{\varepsilon^{(i)}}{\sigma^{(i)}} - \frac{\varepsilon^{(e)}}{\sigma^{(e)}} \right) E_n^{(e)} \neq 0 \quad (3.3)$$

qui correspond, d'après le théorème de Gauss (équation (2.33) du chapitre 2), à une densité surfacique de charges  $q_s$  à l'interface. Cette distribution engendre une force de Coulomb tangentielle s'il existe une composante tangentielle du champ électrique (équation (2.12) du chapitre 2). Sous l'effet de la viscosité, les fluides, à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur de la goutte, se mettent en mouvement comme indiqué par la figure 3.3.b.

La partie électrique est décrite par l'équation de Laplace pour le potentiel électrique :

$$\nabla^2 V^{(k)} = 0, k = i, e \quad (3.4)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} E^{(e)}(r) \rightarrow E_0 & \|r\| \rightarrow +\infty \\ V^{(i)}(r)|_{\|r\|=r_0} = V^{(e)}(r)|_{\|r\|=r_0} \\ \sigma^{(e)} E_n^{(e)}(r)|_{\|r\|=r_0} = \sigma^{(i)} E_n^{(i)}(r)|_{\|r\|=r_0} \end{cases} \quad (3.5)$$

En supposant la densité du courant électrique dû au transport des charges à l'interface par l'écoulement faible devant la densité du courant électrique dû à la conduction des fluides sous-jacents, la solution classique de ce système proposée est :

$$V^{(i)} = -\frac{3}{2+S} E_0 r \cos \theta \quad (3.6)$$

$$V^{(e)} = -E_0 \cos \theta \left( r + \frac{1-S}{2+S} \frac{r_0^3}{r^2} \right) \quad (3.7)$$

Où  $S = \sigma^{(i)} / \sigma^{(e)}$  et le champ électrique en coordonnées sphérique est :

$$E = \frac{\partial V}{\partial r} i_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} i_\theta \quad (3.8)$$

D'un autre côté, la partie hydrodynamique est décrite par l'équation de conservation de la masse et l'équation de Navier-Stokes dont il convient de rappeler les expressions dans le cas d'écoulements incompressibles :

$$\nabla \cdot u^{(k)} = 0, k = i, e \quad (3.9)$$

$$\rho^{(k)} \left( \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + u^{(k)} \cdot \nabla u^{(k)} \right) = -\nabla p^{(k)} + \mu^{(k)} \nabla^2 u^{(k)}, k = i, e \quad (3.10)$$

En dénotant  $U$  la vitesse et  $L$  la longueur caractéristiques de l'écoulement, respectivement, et en gardant les mêmes notations entre les variables dimensionnelles et adimensionnelles, alors l'équation (3.10) devient :

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + u^{(k)} \cdot \nabla u^{(k)} = -\nabla p^{(k)} + \frac{1}{\text{Re}^{(k)}} \nabla^2 u^{(k)} \quad (3.11)$$

où le nombre de Reynolds  $\text{Re}^{(k)}$  s'écrit :

$$\text{Re}^{(k)} = \frac{\rho^{(k)} U L}{\mu^{(k)}} \quad (3.12)$$

En régime permanent et à faible nombre de Reynolds, les termes d'inertie deviennent négligeables devant les autres termes, ce qui conduit à l'équation de Stokes :

$$\nabla p^{(k)} = \frac{1}{\text{Re}^{(k)}} \nabla^2 u^{(k)} \quad (3.13)$$

Les conditions aux limites associées à (3.13) sont :

$$\|u^{(e)}\|(r) \rightarrow 0 \quad \|r\| \rightarrow +\infty \quad (3.14)$$

$$n \cdot u^{(e)}(r) \Big|_{\|r\|=r_0} = n \cdot u^{(i)}(r) \Big|_{\|r\|=r_0} = 0 \quad (3.15)$$

$$t \cdot u^{(e)}(r) \Big|_{\|r\|=r_0} = t \cdot u^{(i)}(r) \Big|_{\|r\|=r_0} \quad (3.16)$$

$$n \cdot (\Pi^{(e)} - \Pi^{(i)}) \Big|_{\|r\|=r_0} + n \cdot (\mathbf{T}^{(e)\text{électrique}} - \mathbf{T}^{(i)\text{électrique}}) \Big|_{\|r\|=r_0} = 2H \gamma n \quad (3.17)$$

où  $n$  et  $t$  sont les vecteurs normal et tangent à l'interface, respectivement.  $2H$ , la courbure totale de l'interface au point courant, est donnée par  $2H = -\nabla_s \cdot n$ , où  $\nabla_s$  représente la projection normale de l'opérateur  $\nabla$  (nabla) sur le plan tangent à l'interface.

Dans la configuration axisymétrique, il est approprié de définir une fonction de courant  $\psi$  telle que [20] :

$$u^{(k)} = \nabla \times \left( \frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} i_\phi \right) \quad (3.18)$$

En prenant le rotationnel de (3.13) puis en introduisant (3.18), nous obtenons les équations suivantes à résoudre :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi^{(k)} = 0 \quad (3.19)$$

En examinant la condition aux limites (3.17), on déduit que pour obtenir l'équilibre entre les composantes tangentielles des contraintes hydrodynamiques et électriques, pour tout angle  $\theta$ , il est nécessaire que  $\psi / \sin \theta$  possède une dépendance en  $\theta$  analogue à celle du terme  $\Gamma_{r\theta}^{electrique}$  (qui varie en  $\sin \theta \cos \theta$ ). La forme suggérée de  $\psi$  est la suivante :

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (3.20)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (3.19), Melcher et Taylor ont obtenu une équation pour  $f$  dont la solution est de la forme :

$$f(r) = r^n \quad (3.21)$$

avec  $n = -2, 0, 3$  ou  $5$ . En appliquant la condition (3.14) et en imposant la régularité de  $\psi^{(i)}$  en  $r = 0$ , ces auteurs ont déduit :

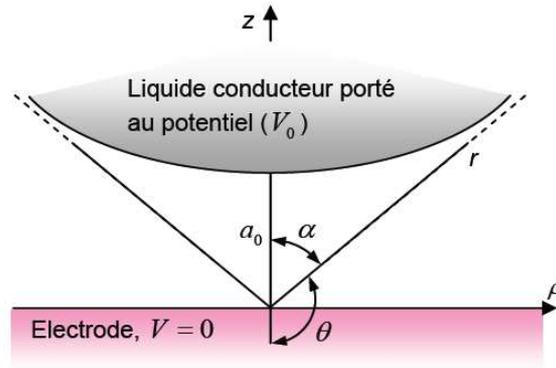
$$\psi^{(i)} = (Cr_0^{-1}r^3 + Dr_0^{-3}r^5) \sin \theta \cos \theta \quad (3.22)$$

$$\psi^{(e)} = (Ar_0^4r^{-2} + Br_0^2) \sin \theta \cos \theta \quad (3.23)$$

Où les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont entièrement déterminées par les conditions aux limites (3.15), (3.16) et (3.17) :

$$A = -B = C = -D = U \quad (3.24)$$

$U$  est la vitesse à l'équateur (voir la figure 3.2). L'équilibre des contraintes à l'interface de la Goutte  $r = r_0$  implique :



**Figure 3.2. Une goutte axisymétrique conductrice portée à un potentiel  $V_0$  à une distance  $a_0$  d'une électrode plane portée au potentiel 0.**

$$T_{rr}^{(i)\text{électrique}} - T_{rr}^{(e)\text{électrique}} + \Pi_{rr}^{(i)} - \Pi_{rr}^{(e)} = C \quad (3.25)$$

$$T_{r\theta}^{(i)\text{électrique}} - T_{r\theta}^{(e)\text{électrique}} + \Pi_{r\theta}^{(i)} - \Pi_{r\theta}^{(e)} = 0 \quad (3.26)$$

Ce qui conduit finalement à :

$$\frac{9E_0^2}{2(2+S)} \left( \varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)} + \left[ \varepsilon^{(e)} (S^2 + 1) - 2\varepsilon^{(i)} \right] \cos^2 \theta \right) + \frac{U}{r_0} \left( 5\mu^{(e)} + 3\mu^{(i)} \right) (1 - 3\cos^2 \theta) = C \quad (3.27)$$

$$\frac{-9E_0^2}{2(2+S)} \left( \varepsilon^{(e)} S - \varepsilon^{(i)} \right) (2 \cos \theta \sin \theta) - 10 \frac{U}{r_0} \left( \mu^{(e)} + \mu^{(i)} \right) \cos \theta \sin \theta = 0 \quad (3.28)$$

La constante  $C$  est donnée par :

$$C = \Delta p - \frac{2\gamma}{r_0} \quad (3.29)$$

qui exprime la différence entre la pression à l'intérieur de la goutte et la contrainte associée à la pression capillaire. Pour que l'équilibre soit assuré sur toute l'interface (sphérique), il faut et il suffit que le coefficient de  $\cos^2 \theta$  dans (3.27) et celui de  $\cos \theta \sin \theta$  dans (3.28) soient nuls. Ceci conduit aux deux relations entre le rapport des permittivités  $P = \varepsilon^{(i)} / \varepsilon^{(e)}$ , le rapport des conductivités  $S = \sigma^{(i)} / \sigma^{(e)}$  et celui des viscosités  $M = \mu^{(i)} / \mu^{(e)}$ , ainsi que la vitesse  $U$  et l'intensité du champ électrique appliqué :

$$U = - \frac{9\varepsilon^{(e)} E_0^2 r_0 (S - P)}{10(2+S)^2 (\mu^{(i)} + \mu^{(e)})} \quad (3.30)$$

$$\frac{S^2 - 2P + 1}{S - P} + \frac{3}{5} \left( \frac{3M + 2}{M + 1} \right) = 0 \quad (3.31)$$

Si deux fluides sont tels que la relation (3.31) entre  $S$ ,  $P$  et  $M$  est vérifiée, alors l'équilibre de la forme sphérique est assuré, indépendamment de l'intensité du champ électrique appliqué.

Comme  $U$  est déterminé par (3.30), nous pouvons examiner la consistance du modèle, dont une des hypothèses est que l'écoulement est à faible nombre de Reynolds. Pour une goutte d'eau ( $r_0 = 1\text{cm}$ ,  $\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$ ) dans de l'huile ( $\sigma = 10^{-10} \text{ S/m}$ ), nous obtenons dans un champ de 10 kV/cm les nombres de Reynolds  $Re^{(i)} = 0.1$  et  $Re^{(e)} = 0.01$ . Nous vérifions *a posteriori* que le régime hydrodynamique est bien à faible nombre de Reynolds.

Pour voir quelle forme prendrait la goutte lorsque la condition sur  $S$ ,  $P$  et  $M$  est légèrement différente de (3.31), on ajoute un terme de contrainte normale supplémentaire  $C' \cos^2 \theta$  qui permettra de conserver la condition d'équilibre des contraintes (3.27) :

$$\begin{aligned} & \frac{9E_0^2}{2(2+S)} \left( \varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)} + \left[ \varepsilon^{(e)} (S^2 + 1) - 2\varepsilon^{(i)} \right] \cos^2 \theta \right) \\ & + \frac{U}{r_0} (5\mu^{(e)} + 3\mu^{(i)}) (1 - 3\cos^2 \theta) + C' \cos^2 \theta = C \end{aligned} \quad (3.32)$$

$C'$  est positif si la force ajoutée est dirigée vers l'intérieur de la goutte. Les équations

(3.28) et (3.32) ne sont satisfaites que dans la condition suivante :

$$C' = \frac{9E_0^2 \varepsilon^{(e)}}{2(2+S)} \left( S^2 - 2P + 1 + 3(S-P) \left( \frac{3M+2}{5M+5} \right) \right) \quad (3.33)$$

Puisque dans (3.33) la quantité devant les parenthèses est positive, le signe de la force supplémentaire a le signe de l'expression :

$$\Delta(S, P, M) = S^2 - 2P + 1 + 3(S-P) \left( \frac{3M+2}{5M+5} \right) \quad (3.34)$$

qui discrimine les différentes formes possibles que la goutte prend. Si est positif, la goutte est allongée sous l'effet du champ électrique, alors que s'il est négatif, la goutte est

aplatie. Si  $\Delta = 0$ , on retrouve la condition de sphéricité de la goutte (3.31). Il convient de noter que la nature de la forme de la goutte (allongée ou aplatie) est indépendante du champ électrique appliqué  $E_0$ .

Par cet artifice, Melcher et Taylor arrivent ainsi à déterminer la tendance qu'a une goutte initialement sphérique à s'aplatir ou à s'allonger. Cette condition reste toutefois qualitative.

## CHAPITRE 4 :

### APPLICATION DE LA METHODE DES PETITES PERTURBATIONS POUR UNE GOUTTE SOUS CHAMP ELECTRIQUE UNIFORME

Pour aller au-delà de ce qu'avaient fait Melcher et Taylor comme d'écrit dans le chapitre précédant pour prédire les déformations de gouttes, il faut utiliser des méthodes plus générales. Une première idée consiste à utiliser la méthode de petites perturbations au cas linéaire et l'étendre ensuite au cas non linéaire.

Nous avons donc utilisé la méthode de petites perturbations par des développements analytiques en vue de déterminer, la relation qui relie la déformation d'une goutte au champ électrique qui lui est appliqué. En partant d'une forme *initiale* donnée de la goutte, des approximations de proche en proche de la forme sont recherchées. En pratique, nous prenons la sphère comme forme initiale de la goutte (solution en l'absence de champ électrique). On définit un paramètre caractérisant l'écart à la forme initiale. Ce paramètre doit rester faible pour que la méthode soit valable. Toutes les autres variables, champ électrique et champ de vitesse, sont ensuite calculées en fonction de ce paramètre.

Les travaux de Melcher et Taylor s'inscrivent, de par la définition de la méthode de perturbations, comme une étude à l'ordre 0 de la déformation de gouttes ; en effet ces auteurs prennent *a priori* un champ électrique et hydrodynamique issus d'une forme sphérique qui créent à leur tour des contraintes ne déformant pas la goutte.

Plusieurs travaux, qui utilisent la méthode des petites perturbations, ont été réalisés dans le passé pour étudier la stabilité des gouttes autour de différents états d'équilibre.

Tsamopoulos et Brown [21] ont examiné la stabilité de gouttes immergées dans un fluide passif (qui ne manifeste qu'une pression uniforme) et la stabilité de bulles immergées dans un fluide en mouvement par la méthode des petites perturbations. Leurs développements sont effectués jusqu'au deuxième ordre. Les écoulements qu'ils

considèrent sont irrotationnels. Dans un autre travail, [22], ils ajoutent aux effets hydrodynamiques la contribution du champ électrique sur des gouttes chargées.

Les équations valables uniquement en écoulement irrotationnel intègrent correctement l'équilibre des forces normales à l'interface. Il est donc utile d'étendre ce travail aux ordres supérieurs pour prédire les formes d'équilibre de manière plus précise en fonction des différentes propriétés électriques et hydrodynamiques de la goutte et du fluide extérieur.

Les développements analytiques présentés en chapitre 4 utilisent la technique de perturbation de Poincaré [23]. La forme de goutte est supposée définie par l'équation  $r = F(\theta)$

#### 4.1 hypothèses du problème

On se place dans le cas de la déformation d'une goutte de fluide diélectrique avec faiblement conducteur plongée dans un liquide diélectrique avec pertes. La goutte est non chargée. Le système composé de fluides non miscibles est soumis à un champ électrique uniforme. L'écoulement permanent à faible vitesse s'évanouit loin de la goutte. Bien que non linéaires, les déformations de la goutte, considérées par rapport à la forme sphérique, sont suffisamment faibles pour que l'hypothèse des petites perturbations soit valable.

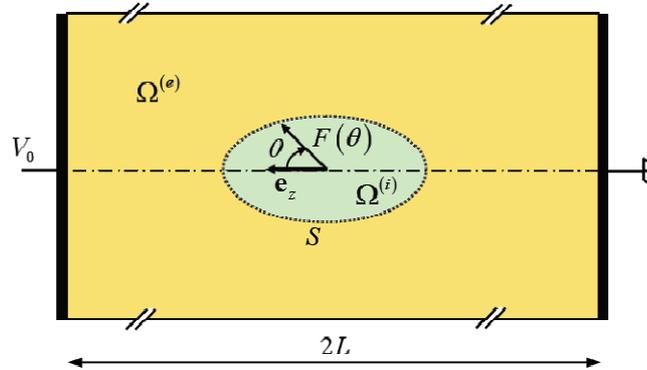
L'hypothèse d'écoulement à faible vitesse a deux conséquences. (i) d'une part, le courant électrique dû à l'effet de conduction électrique sera largement prépondérant devant l'effet du transport des porteurs de charges par advection. Le problème électrique sera donc traité dans le cadre électrostatique. Ce fait permet de découpler le problème électrique du problème hydrodynamique. D'ailleurs, la logique de résolution du problème électrique puis l'injection des contraintes électriques dans le problème hydrodynamique sera respectée le long de cette partie. (ii) d'autre part, le problème hydrodynamique sera traité dans le cadre des écoulements rampants, dont les solutions générales, pour une configuration à symétrie de révolution, sont connues.

#### 4.2 Configuration d'étude

La configuration illustrée par la figure 4.1 représente une goutte immergée dans un fluide. Le rayon initial de la goutte est noté  $r_0$ . Les deux fluides sont newtoniens. L'on note le fluide intérieur  $\Omega_{(i)}$  et le fluide extérieur  $\Omega_{(e)}$ . Les grandeurs physiques dont

l'exposant est  $(i)$  (respectivement  $(e)$ ) sont associées au fluide  $\Omega(i)$  (respectivement  $\Omega(e)$ ).

Les deux fluides sont séparés par une interface  $S$ .



**Figure 4. 1. Goutte soumise à un champ électrique. De rayon initial  $r_0$ , tel que  $r_0 \ll L$ , la goutte se déforme.**

A cause de la symétrie de révolution de la configuration choisie, l'interface  $S$  est définie, pour une faible distorsion relativement à la forme sphérique initiale, par la relation suivante :

$$r = F(\theta) \quad (4.1)$$

### 4.3 Equations générales

#### 4.3.1 Equations électriques

Les équations qui régissent la distribution du champ électrique  $E^{(k)}$  ( $k= i,e$ ) sont Données dans ce qui suit.

Si le champ électrique  $E^{(k)}$  est supposé découplé du champ magnétique, il dérive d'un potentiel  $V^{(k)}$  tel que :

$$E^{(k)} = -\nabla V^{(k)} \quad (4.2)$$

En l'absence de charges spatiales libres, la deuxième équation de Maxwell, exprimant la conservation du courant électrique, s'écrit :

$$\nabla \cdot J^{(k)} = 0 \quad (4.3)$$

Où  $J^{(k)}$  est la densité de courant donnée, dans le cas où le fluide  $k$  est un diélectrique isotrope et linéaire de conductivité  $\sigma^{(k)}$ , par la relation constitutive suivante :

$$J^{(k)} = \sigma^{(k)} E^{(k)} \quad (4.4)$$

La combinaison de (4.2),(4.3) et de (4.4) implique l'équation de Laplace pour le potentiel électrique du fluide  $k$  :

$$\nabla^2 V^{(k)} = 0 \quad (4.5)$$

#### 4.3.2 Conditions aux limites sur le champ électrique

Les conditions suivantes sont assignées aux potentiels électriques :

1- Loin de la goutte, l'influence de la perturbation électrique due à la goutte est nulle,

soit :

$$E^{(e)} \rightarrow E_0 \quad \text{quand} \quad \|r\| \rightarrow +\infty \quad (4.6)$$

2-Champ électrique fini au centre la goutte :

$$E^{(i)} \text{ fini quand } \|r\| \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

3-Continuité du potentiel électrique à travers l'interface  $S$  :

$$V^{(i)} \Big|_s = V^{(e)} \Big|_s \quad (4.8)$$

4-Le saut du vecteur déplacement électrique à travers l'interface  $S$  (ou la loi de Gauss intégrale) s'écrit sous la forme intégrale locale :

$$\varepsilon^{(i)} \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} \Big|_s - \varepsilon^{(e)} \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n} \Big|_s = q_s \quad (4.9)$$

Avec  $\varepsilon^{(i)}$  (resp.  $\varepsilon^{(e)}$ ) la permittivité électrique du fluide  $\Omega^{(i)}$  (resp.  $\Omega^{(e)}$ ) et  $q_s$  la densité

Surfacique des charges électriques libres à l'interface  $S$ .

5-Conservation de la densité de courant à travers l'interface :

$$\sigma^{(i)} \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} \Big|_s - \sigma^{(e)} \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n} \Big|_s = 0 \quad (4.10)$$

6-Le potentiel électrique, étant défini à une constante additive près, est pris égal à 0 à L'électrode mise à la masse, ce qui implique :

$$V^{(e)} = 0 \quad \text{Pour} \quad r.e_z = -L \quad (4.11)$$

Le respect de la neutralité électrique de la goutte implique la condition globale suivante :

$$\int_s q_s dS = 0 \quad (4.12)$$

#### 4.3.3 Equations hydrodynamiques

Les équations auxquelles obéissent un écoulement incompressible rampant dans chaque fluide  $k$  sont l'équation de continuité et les équations de Stokes qui s'écrivent comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(k)} = 0 \quad (4.13)$$

$$\nabla p^{(k)} = \frac{1}{\text{Re}^{(k)}} \nabla^2 \mathbf{u}^{(k)} \quad (4.14)$$

#### 4.3.4 Conditions aux limites sur le champ hydrodynamique

Les conditions aux limites que doivent vérifier le fluide extérieur ( $e$ ) et intérieur ( $i$ ) sont :

1- Annulation de la vitesse loin de la goutte, soit :

$$\mathbf{u}^{(e)} \rightarrow 0 \quad \text{Quand} \quad \|r\| \rightarrow +\infty \quad (4.15)$$

2-Continuité de la vitesse tangentielle à l'interface  $S$  :

$$\mathbf{u}_\tau^{(i)} \Big|_s = \mathbf{u}_\tau^{(e)} \Big|_s \quad (4.16)$$

3-Interface en état d'équilibre (elle ne bouge pas). Ceci implique la nullité des vitesses normales à l'interface :

$$\mathbf{u}_n^{(e)} \Big|_s = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u}_n^{(i)} \Big|_s = 0 \quad (4.18)$$

4-Pas de translation possible de la goutte :

$$\mathbf{u}^{(i)} \Big|_{r=0} = 0 \quad (4.19)$$

5-Equilibre des contraintes EHD à l'interface  $S$  :

Le bilan des forces interfacial s'écrit :

$$\sum F = 0 \quad (4.20)$$

Ce qui se traduit par :

$$\left[ n \cdot \Pi^{hydrodynamique} \right] + \left[ n \cdot T^{électrique} \right] + (\nabla_s \cdot n) \gamma n = 0 \quad (4.21)$$

En explicitant la contribution hydrodynamique, électrique et la définition de la courbure et des quantités entre crochets [ ], on trouve :

$$\begin{aligned} & \left\{ -p^{(i)} I + \mu^{(i)} \left( \nabla u^{(i)} + (\nabla u^{(i)})^t \right) \right\} \cdot n^{(i)} + \left\{ -p^{(e)} I + \mu^{(e)} \left( \nabla u^{(e)} + (\nabla u^{(e)})^t \right) \right\} \cdot n^{(e)} + \\ & \varepsilon^{(i)} \left\{ E^{(i)} E^{(i)} - \frac{1}{2} (E^{(i)} \cdot E^{(i)}) I \right\} \cdot n^{(i)} + \varepsilon^{(e)} \left\{ E^{(e)} E^{(e)} - \frac{1}{2} (E^{(e)} \cdot E^{(e)}) I \right\} \cdot n^{(e)} - 2H \gamma n = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

En prenant comme noté au paravent :  $n = n^{(i)} = -n^{(e)}$  (donc la normale sortante du milieu intérieur (i) vers le milieu extérieur (e)), cette égalité devient :

$$\begin{aligned} & \left\{ -p^{(i)} I + \mu^{(i)} \left( \nabla u^{(i)} + (\nabla u^{(i)})^t \right) \right\} \cdot n - \left\{ -p^{(e)} I + \mu^{(e)} \left( \nabla u^{(e)} + (\nabla u^{(e)})^t \right) \right\} \cdot n + \\ & \varepsilon^{(i)} \left\{ E^{(i)} E^{(i)} - \frac{1}{2} (E^{(i)} \cdot E^{(i)}) I \right\} \cdot n - \varepsilon^{(e)} \left\{ E^{(e)} E^{(e)} - \frac{1}{2} (E^{(e)} \cdot E^{(e)}) I \right\} \cdot n - 2H \gamma n = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pour mettre cette équation sous forme adimensionnelle on introduit un rayon  $r_0$ , une échelle de vitesse de référence  $U^*$  et un potentiel électrique de référence  $V^*$ .

Enfin, on définit une valeur caractéristique  $p^*$  (la pression de référence) de la pression par :

$$p^* = \rho U^{*2} \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p^* \bar{p} = \rho U^{*2} \bar{p} \\ U = U^* \bar{U} \\ H = \frac{h}{r_0} \\ r = r_0 \bar{r} \\ E = \frac{V^*}{r_0} \bar{E} \end{array} \right. \quad (4.25)$$

On pose alors :

Où les quantités  $\bar{p}$ ,  $\bar{U}$ ,  $h$ ,  $\bar{r}$ ,  $\bar{E}$  sont donc sans dimension.

Le système (4.23) peut alors être transformé en un système d'équations où n'interviennent que des quantités sans dimension et après division par  $\rho^{(e)}U^{*2}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & \lambda \left\{ -\bar{p}^{(i)} I + \frac{1}{\text{Re}^{(i)}} \left( \nabla \bar{u}^{(i)} + \left( \nabla \bar{u}^{(i)} \right)^t \right) \right\} . n - \left\{ -\bar{p}^{(e)} I + \frac{1}{\text{Re}^{(e)}} \left( \nabla \bar{u}^{(e)} + \left( \nabla \bar{u}^{(e)} \right)^t \right) \right\} . n + \\ & M \alpha \left\{ \bar{E}^{(i)} \bar{E}^{(i)} - \frac{1}{2} \left( \bar{E}^{(i)} . \bar{E}^{(i)} \right) I \right\} . n - \alpha \left\{ \bar{E}^{(e)} \bar{E}^{(e)} - \frac{1}{2} \left( \bar{E}^{(e)} . \bar{E}^{(e)} \right) I \right\} . n = 2hCa.n \end{aligned} \quad (4.26)$$

Avec :

$$\lambda = \frac{\rho^{(i)}}{\rho^{(e)}}, M = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}, \alpha = \frac{\varepsilon^{(e)} V^{*2}}{\rho^{(e)} U^{*2} r_0^2}, Ca = \frac{\gamma}{\rho^{(e)} U^{*2} r_0}$$

En prenant le produit scalaire on s'obtient l'équation normale et tangentielle respectivement :

1. la projection normale du bilan de quantité de mouvement à l'interface est :

$$\bar{p}^{(e)} - \lambda \bar{p}^{(i)} + 2 \left( \frac{\lambda}{\text{Re}^{(i)}} \frac{\partial \bar{u}_r^{(i)}}{\partial r} - \frac{1}{\text{Re}^{(e)}} \frac{\partial \bar{u}_r^{(e)}}{\partial r} \right) + \frac{M \alpha}{2} \left( \bar{E}_r^{(i)2} - \bar{E}_\theta^{(i)2} \right) - \frac{\alpha}{2} \left( \bar{E}_r^{(e)2} - \bar{E}_\theta^{(e)2} \right) = 2hCa \quad (4.27)$$

2. la projection tangentielle du bilan de quantité de mouvement à l'interface est :

$$\frac{\lambda}{\text{Re}^{(i)}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(i)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\text{Re}^{(e)}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(e)}}{\partial r} \right) + M \alpha \left( \bar{E}_r^{(i)} \bar{E}_\theta \right) - \alpha \left( \bar{E}_r^{(e)} \bar{E}_\theta \right) = 0 \quad (4.28)$$

➤ Conservation du volume de la goutte (équation de continuité (4-1) écrite sous forme intégrale) :

$$\int_{\nu} F^3(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad (4.29)$$

#### 4.4 Solutions analytiques générales pour la configuration 2D-axisymétrique

Toutes les équations présentées dans la sous-section précédente sont reprises dans le Cas particulier d'une symétrie de révolution. Les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  sont utilisées pour cette fin. A cause de la symétrie de révolution, aucune dépendance du méridien  $\phi$  n'est retenue.

##### 4.4.1 Solution analytique générale associée au champ électrique

En configuration axisymétrique, la solution générale de l'équation (4.5) s'écrit :

$$V^{(k)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( G_n^{(k)} r^n + \frac{H_n^{(k)}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (4.30)$$

Les coefficients  $G_n^{(k)}$  et  $H_n^{(k)}$  sont déterminés par application des conditions (4.6) à (4.12) et  $P_n$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ .

Les conditions (4.6) et (4.7) impliquent donc les formes des potentiels Électriques suivantes:

$$V^{(e)} = G_0^{(e)} P_0(\cos \theta) + G_1^{(e)} r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{H_n^{(e)}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (4.31)$$

$$V^{(i)} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n^{(i)} r^n P_n(\cos \theta) \quad (4.32)$$

En notant au passage que :

$$G_1^{(e)} = -E_0 \quad (4.33)$$

Par dérivation du potentiel électrique, l'expression du champ électrique est déduite :

$$E_r^{(e)} = G_1^{(e)} P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(n+1)H_n^{(e)}}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (4.34)$$

$$E_\theta^{(e)} = G_1^{(e)} \sin \theta + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nH_n^{(e)}}{r^{n+2}} \frac{P_{n-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_n(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (4.35)$$

$$E_r^{(i)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} G_n^{(i)} n r^{n-1} P_n(\cos \theta) \quad (3.36)$$

$$E_\theta^{(i)} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n^{(i)} n r^{n-1} \frac{P_{n-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_n(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (4.37)$$

#### 4.4.2 Solution analytique générale associée au champ hydrodynamique

Dans une configuration à symétrie de révolution, la définition d'une combinaison d'un Potentiel hydrodynamique permet de simplifier le problème hydrodynamique à résoudre[20]. Ce potentiel est défini par :

$$u^{(k)} = \nabla \times (\psi^{(k)} (\nabla \phi)) \quad (4.38)$$

Nous nous assurons, par cette définition, de satisfaire à l'équation locale de continuité (4.13). Ce potentiel étant défini à une fonction harmonique près, on lui impose de satisfaire de plus à la relation suivante

$$\nabla \cdot (\psi^{(k)} (\nabla \phi)) = 0 \quad (4.39)$$

Or, le gradient de  $\phi$  est donné par :

$$\nabla \phi = \frac{1}{r \sin \theta} i_\phi \quad (4.40)$$

Ce qui implique :

$$\psi = \psi(r, \theta) \quad (4.41)$$

et que :

$$u^{(k)} = \nabla \times \left( \frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} i_\phi \right) \quad (4.42)$$

Par développement, on trouve que les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$\begin{cases} u_r^{(k)} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \theta} \\ u_\theta^{(k)} = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial r} \end{cases} \quad (4.43)$$

En remplaçant la vitesse par son expression (4.42) dans l'équation de Stokes (4.14), nous obtenons :

$$\nabla p^{(k)} = \frac{1}{\text{Re}^{(k)}} \nabla^2 \left( \nabla \times \left( \frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} i_\phi \right) \right) \quad (4.44)$$

Le rotationnel de l'équation (4.43) permet d'obtenir l'équation vectorielle suivante :

$$\nabla^2 \left( \nabla \left( \frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} i_\phi \right) \right) = 0 \quad (4.45)$$

Cette équation est équivalente au système scalaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} D^2 (\psi^{(k)}) = -\omega^{(k)} \\ \frac{1}{r \sin \theta} D^2 (r \sin \theta \omega^{(k)}) = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Où :

$$D^2 = r \sin \theta \left( \nabla^2 \left( \frac{\quad}{r \sin \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\quad}{r \sin \theta} \right)$$

Et  $\omega^{(k)}$  la composante méridional de la vorticité, soit :

$$\omega^{(k)} \mathbf{i}_\phi = \nabla \times \mathbf{u}^{(k)} \quad (4.47)$$

On démontre, [10], que la solution générale du système d'équations (4.45) s'écrit sous la forme (en omettant l'exposant  $k$  pour une meilleure lisibilité) :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n r^{n+3} + B_n r^{n+1} + C_n r^{2-n} + D_n r^{-n}) \left( \frac{P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)}{2n+1} \right) \quad (4.48)$$

Et :

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((4n+6)A_n r^{n+1} + (-4n+2)C_n r^{-n}) \left( \frac{P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)}{2n+1} \right) \quad (4.49)$$

$P_n$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ . Symboliquement, nous avons noté  $P_{-1}(\cos \theta) = 1$

Le champ de pression se déduit immédiatement par l'expression :

$$P(r, \theta) = \frac{1}{\text{Re}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n(n+1)(2n+1)r^{n+1} \sin \theta} \left( (4n+6)(n+1)A_n r^{2n+1} - n(-4n+2)C_n \right) \times \left[ -(n-1)P_{n-2}(\cos \theta) + (n-1)\cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) + (n+1)(P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \quad (4.50)$$

Pour avoir une pression finie au sein de l'écoulement nous sommes tenu de prendre :

$$A_0^{(i)} = A_0^{(e)} = 0 \quad (4.51)$$

En substituant  $\psi$  par son expression (4.48) dans les relations (4.43), l'on

obtient les expressions des composantes radiale et azimutale de la vitesse :

$$u_r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{r^{-n-2}}{\sin^2 \theta} \left[ -(n-1)P_{n-2}(\cos \theta) + (n-1)\cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) + \right. \\ \left. (n+1)(P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \times (A_n r^{2n+3} + B_n r^{2n+1} + C_n r^2 + D_n) \quad (4.52)$$

Et:

$$u_\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{r^{-n-1}}{\sin \theta} \left[ P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta) \right] \times \\ \times \left[ (n+1)B_n r^{2n} + (n+3)A_n r^{2(n+1)} - (n-2)C_n r - \frac{nD_n}{r} \right] \quad (4.53)$$

La prise en compte des conditions (4.15) et (4.19) implique les formes suivantes du champ de vitesse :

$$u_r^{(e)} = -\frac{B_0^{(e)}}{r} - \frac{D_0^{(e)}}{r^2} - \frac{C_1^{(e)}}{r} \cos \theta - \frac{D_1^{(e)}}{r^3} \cos \theta \\ + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{C_n^{(e)}}{r^n} + \frac{D_n^{(e)}}{r^{n+2}} \right) \times \left[ -(n-1)P_{n-2}(\cos \theta) + (n-1)\cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) + \right. \\ \left. (n+1)(P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \quad (4.54)$$

$$u_\theta^{(e)} = \frac{B_0^{(e)}}{r} \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)\sin \theta} \left[ P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta) \right] \left( \frac{(n-2)C_n^{(e)}}{r^n} + \frac{nD_n^{(e)}}{r^{n+2}} \right) \quad (4.55)$$

$$u_r^{(i)} = -A_0^{(i)} r - A_1^{(i)} r^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left( A_n^{(i)} r^{n+1} + B_n^{(i)} r^{n-1} \right) \times \\ \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ -(n-1)P_{n-2}(\cos \theta) + (n-1)\cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) + \right. \\ \left. (n+1)(P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \quad (4.56)$$

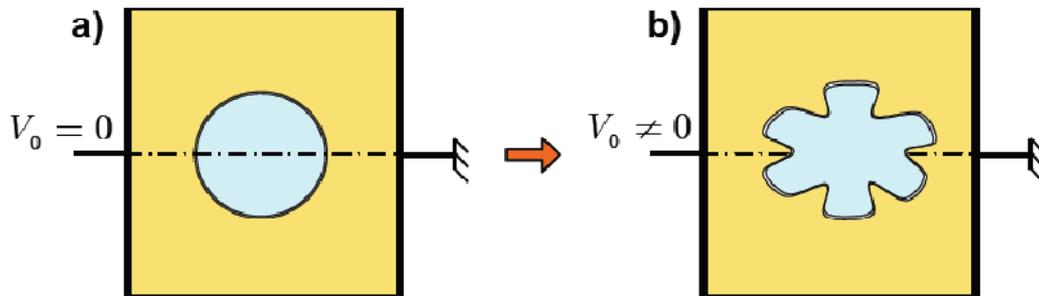
Et:

$$u_\theta^{(i)} = 3A_0^{(i)} r \tan \frac{\theta}{2} + 2A_1^{(i)} \sin \theta r^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)\sin \theta} \left[ (n+3)A_n^{(i)} r^{n+1} + (n+1)B_n^{(i)} r^{n-1} \right] \times \\ \times (P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)) \quad (4.57)$$

#### 4.5 La méthode de perturbation du domaine

La méthode de perturbation du domaine a été initialement présentée par Joseph (1973) [24]. Elle a été utilisée pour la résolution d'un problème de déformation d'une goutte d'eau en écoulement irrotationnel. Cette méthode est cependant très générale. Elle se base sur des approximations (corrections) successives de la solution du problème

donné partant d'un problème « proche » dont la solution est connue. En clair, on démarre, pour notre problème, de la configuration représentée par la figure 3.2, où la différence de potentiel est nulle et aucun écoulement ne se produit.



**Figure 4.2 Principe de la méthode de perturbation du champ électrohydrodynamique.**

**a) champ au repos (solution triviale du problème). b) perturbation du champ par application d'une différence de potentiel.**

Ce champ EHD implique une forme sphérique de la goutte. L'on procède ensuite à une déformation imposée de cette goutte (qui physiquement est l'effet) et l'on va trouver la distribution du champ EHD qui a provoqué (a été la cause de) cette déformation. Ceci

Suppose implicitement, l'unicité de ce champ a déformation arrêtée.

#### 4.5.1 La formulation

##### 4.5.1.1 Développement en séries de puissances

Les six quantités qui vont être perturbées sont les suivantes : le champ hydrodynamique et électrique de chaque fluide, la forme de la goutte et le champ électrique imposé au loin. Ces perturbations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \psi^{(e)} \\ \psi^{(i)} \\ V^{(e)} \\ V^{(i)} \\ F \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{E}^k}{k!} \begin{pmatrix} \psi^{(e)[k]} \\ \psi^{(i)[k]} \\ V^{(e)[k]} \\ V^{(i)[k]} \\ F^{[k]} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$-\mathcal{E}$  est la grandeur qui caractérise l'amplitude de la perturbation, elle sera définie plus loin.

-L'exposant [k] indique l'ordre auquel la perturbation est évaluée. Pour plus de commodité, L'on défini aussi la perturbation d'une quantité subordonné, à savoir.

$$q_{libre}^{(s)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} q_{libre}^{(s)[k]}$$

Le travail qui « reste » à accomplir est de corrélér les perturbations les unes aux autres (et Notamment le champ appliqué  $E_o$  à la forme de la goutte  $F^{[k]}$ ). La récursivité exige la Résolution du problème à l'ordre 1 (rappelons que l'ordre 0 est la solution triviale nulle, Puisque, par définition, une perturbation nulle lui est associée) avant de pouvoir entamer le Problème d'ordre 2, puis les problèmes d'ordres supérieurs, les uns suite aux autres. D'autre part, remarquons que les solutions électriques et hydrodynamiques s'écrivent Comme des combinaisons linéaires de polynômes de Legendre de première espèce Uniquement. Aussi, pour homogénéiser le traitement général du problème, l'on recherchera la fonction d'aspect  $F^{[k]}$  à l'ordre  $k$  sous la forme :

$$F^{[k]}(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{[k]} P_n(\cos \theta) \quad (4.59)$$

Où  $J_n^{[k]}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont des constantes à déterminer.

Finalement, si l'on introduit les expressions des potentiels électriques et hydrodynamiques (4.30) et (4.48) dans la relation (4.58), on trouve que :

$$\begin{pmatrix} A_n^{(f)} \\ B_n^{(f)} \\ C_n^{(f)} \\ D_n^{(f)} \\ G_n^{(f)} \\ H_n^{(f)} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \begin{pmatrix} A_n^{(f)[k]} \\ B_n^{(f)[k]} \\ C_n^{(f)[k]} \\ D_n^{(f)[k]} \\ G_n^{(f)[k]} \\ H_n^{(f)[k]} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

où  $(f) = (i)$  ou  $(e)$  .

En conséquence, l'injection de la forme (4.58) des solutions dans les conditions (4.6), (4.8) à (4.12), (4.16) à (4.21) et (4.30) puis l'arrangement de ces dernières en puissances de  $\varepsilon$  permet de générer les problèmes de perturbations sous-jacents à résoudre de manière récursive.

#### 4.5.1.2 Forme choisie pour la perturbation

La forme que proposent Looss et Joseph, 1990 [13\_bis] (voir aussi par similitude, Achard et Georgescu, 1999 [14\_bis]), pour la définition du paramètre de perturbation  $\varepsilon$  est donnée par la projection orthogonale de la fonction d'aspect  $F(\theta)$  sur le polynôme de Legendre d'ordre 2, soit :

$$\frac{2}{5}\varepsilon = \int_0^{\pi} F(\theta)P_2(\cos\theta)\sin\theta d\theta \quad (4.61)$$

#### 4.5. 1.3 Quelques contraintes additionnelles

Précisons, avant de poursuivre, une notation dont nous aurons à utiliser fréquemment par la suite. Il s'agit du produit scalaire suivant :

$$\langle K(\theta), L(\theta) \rangle_{Wei} = \int_0^{\pi} K(\theta)L(\theta)Wei(\theta)\sin\theta d\theta \quad (4.62)$$

où les K et L sont des fonctions quelconques dont l'argument est l'azimut  $\theta$ . La fonction Wei est la fonction de pondération associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Wei}$ . Elle sera définie de manière à simplifier le calcul de cette projection, comme on le verra plus loin. Ce Produit sera utilisé dans les projections opérées dans tout ce qui suit.

Par ailleurs, la fonction d'aspect est définie de manière implicite de manière à ce que les différentes conditions aux limites (sur le champ électrohydrodynamique) soient Vérifiées. Cependant, à cause de la spécificité du problème à traiter, des considérations globales (telles la conservation du volume (4.29) et la symétrie équatoriale du problème à traiter, ainsi que la définition même du paramètre de perturbation  $\varepsilon$ ) doivent être prises en compte par la fonction d'aspect  $F(\theta)$ . Aussi, si l'on introduit

l'expression (4.59) dans cette définition, l'on obtient immédiatement le résultat

Suivant :

$$\begin{cases} J_2^{[k]} = 0, si & k \neq 1 \\ J_2^{[1]} = 1 \end{cases} \quad (4.63)$$

D'autre part, la condition de symétrie implique que :

$$\forall \theta \in [0, \pi], F(\theta) = F(\pi - \theta) \quad (4.64)$$

Ceci doit être satisfait à chaque ordre de  $\varepsilon$ , d'où l'égalité :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{[k]} P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{[k]} P_n(-\cos \theta) \quad (4.65)$$

Par projection de cette égalité sur la fonction  $P_m(\cos \theta)$ , avec la fonction poids

$\sin \theta$ , l'on obtient le résultat suivant :

$$J_m^{[k]} = (-1)^m J_m^{[k]}, k = 0, 1, 2, \dots etc \quad (4.66)$$

ce qui n'est manifestement vrai, si  $m$  est impair, que lorsque  $J_m^{[k]} = 0$ . Finalement, la

fonction de forme s'écrit :

$$F^{[k]}(\theta) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{+\infty} J_{2n}^{[k]} P_{2n}(\cos \theta), \text{ si } k \neq 1 \quad (4.67)$$

Et:

$$F^{[1]}(\theta) = P_2(\cos \theta) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{+\infty} J_{2n}^{[1]} P_{2n}(\cos \theta) \quad (4.68)$$

## 4.5.2 Perturbation au premier ordre

### 4.5.2.1 Solution exacte au problème électrique

Sur l'interface, les relations (3.9) et (3.10) s'écrivent, respectivement, au premier ordre :

$$\varepsilon^{(i)} \left( \nabla V^{(i)[0]} \cdot n^{[1]} + \nabla V^{(i)[1]} \cdot n^{[0]} \right) - \varepsilon^{(e)} \left( \nabla V^{(e)[0]} \cdot n^{[1]} + \nabla V^{(e)[1]} \cdot n^{[0]} \right) = q_s^{[1]} \quad (4.69)$$

$$\sigma^{(i)} \left( \nabla V^{(i)[0]} \cdot n^{[1]} + \nabla V^{(i)[1]} \cdot n^{[0]} \right) - \sigma^{(e)} \left( \nabla V^{(e)[0]} \cdot n^{[1]} + \nabla V^{(e)[1]} \cdot n^{[0]} \right) = 0 \quad (4.70)$$

Pour  $\eta = 1$  et  $0 \leq \theta \leq \pi$ , or les champs électriques à l'ordre 0 sont nuls, ce qui simplifie

(4.69) et (4.70) en :

$$\varepsilon^{(i)} \nabla V^{(i)[1]} \cdot n^{[0]} - \varepsilon^{(e)} \nabla V^{(e)[1]} \cdot n^{[0]} = q_s^{[1]} \quad (4.71)$$

$$\sigma^{(i)} \nabla V^{(i)[1]} \cdot n^{[0]} - \sigma^{(e)} \nabla V^{(e)[1]} \cdot n^{[0]} = 0 \quad (4.72)$$

La condition (4.8) se traduit au premier ordre aussi par,  $\eta = 1$  et  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$$V^{(e)[1]} = V^{(i)[1]} \quad (4.73)$$

1. Si l'on remplace  $L$  par l'équation (4.73) (membre à membre) dans le produit (4.62) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $Wei(\theta) = 1$ , alors, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & G_0^{(e)[1]} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,0} + G_1^{(e)[1]} F^{[0]} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^{n+1}} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n} \\ & = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^n \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.74)$$

2. Si l'on remplace  $L$  par l'équation (4.72) (membre à membre) dans le produit (4.62) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $Wei(\theta) = \sin \theta$ , alors l'on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & -\sigma^{(i)} \left\{ -\sum_{n=1}^{+\infty} n (F^{[0]})^{n-1} \delta_{m,n} G_n^{(i)[1]} \right\} + \sigma^{(e)} \left\{ -G_1^{(e)[1]} \delta_{m,1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(F^{[0]})^{n+2}} \delta_{m,n} H_n^{(e)[1]} \right\} = 0 \\ & m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.75)$$

3. La condition (4.6), implique aussi que :

$$G_1^{(e)[1]} = -E_0^{[1]} \quad (4.76)$$

Après arrangement et résolution, l'on obtient les solutions suivantes du système ainsi posé :

$$V^{(i)[1]} = G_0^{(e)[1]} P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \frac{3}{2+S} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta) \quad (4.77)$$

$$V^{(e)[1]} = G_0^{(e)[1]} P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta) - (F^{[0]}) \frac{E_0^{[1]}}{\eta^2} \frac{1-S}{2+S} P_1(\cos \theta) \quad (4.78)$$

Ou:

$$S = \sigma^{(i)} / \sigma^{(e)} \quad (4.79)$$

Le potentiel électrique est défini à une constante additive près. Pour le déterminer de manière univoque, et supprimer ainsi tout arbitraire, l'on choisi d'affecter un potentiel nul

à l'électrode de masse. Si cette dernière se situe à une distance  $L$  du centre de la goutte ( $\theta = 0, \cos \theta = 1$ ), alors cette condition se traduit par :

$$G_0^{(e)[1]} = LE_0^{[1]} \quad (4.80)$$

Finalement, les potentiels s'écrivent sous la forme :

$$V^{(i)[1]}(\eta, \theta) = LE_0^{[1]}P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \frac{3}{2+S} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta), 0 \leq \eta \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.81)$$

$$V^{(e)[1]}(\eta, \theta) = LE_0^{[1]}P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta) - \left(F^{[0]}\right) \frac{E_0^{[1]}}{\eta^2} \frac{1-S}{2+S} P_1(\cos \theta) \quad (4.82)$$

$$, 0 \leq \eta \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Connaissant cette formule:

$$\begin{aligned} E^{(i)[1]} &= -\frac{\partial V^{(i)[1]}}{\partial r} \vec{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V^{(i)[1]}}{\partial \theta} \vec{i}_\theta \\ E^{(e)[1]} &= -\frac{\partial V^{(e)[1]}}{\partial r} \vec{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V^{(e)[1]}}{\partial \theta} \vec{i}_\theta \end{aligned} \quad (4.83)$$

On déduit le champ électrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(i)[1]} &= \begin{pmatrix} E_r^{(i)[1]} \\ E_\theta^{(i)[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^{[1]} \frac{3}{2+s} \cos \theta \\ -E_0^{[1]} \frac{3}{2+s} \sin \theta \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}^{(e)[1]} &= \begin{pmatrix} E_r^{(e)[1]} \\ E_\theta^{(e)[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^{[1]} \frac{3s}{2+s} \cos \theta \\ -E_0^{[1]} \frac{3}{2+s} \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.84)$$

L'on vérifie que la condition (4.29), qui s'écrit au premier ordre sous la forme :

$$\int_0^\pi q_s^{[1]} F^{[0]} \sin \theta d\theta = 0 \quad (4.85)$$

Est systématiquement satisfaite par les solutions trouvées.

#### 4.5.2.2 Solution exacte du problème hydrodynamique

Puisque l'on dispose désormais du champ électrique, l'on peut calculer les efforts Appliqués à l'écoulement qui s'en suivent et résoudre le problème EHD. Ceci est l'objectif De cette section.

1.Si l'on remplace  $L$  par l'équation (4.16) (membre à membre) dans le produit (4.62) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $Wei(\theta) = \sin \theta$ , alors l'on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{B_0^{(e)[1]}}{F^{[0]}}(\delta_{0,m} - \delta_{1,m}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)}(\delta_{n+1,m} - \delta_{n-1,m}) \left( \frac{(n-2)}{(F^{[0]})^n} C_n^{(e)[1]} + n \frac{D_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^{n+2}} \right) \\ & = 3A_0^{(i)[1]} F^{[0]}(\delta_{0,m} - \delta_{1,m}) + 2A_1^{(i)[1]} \frac{2}{3}(\delta_{0,m} - \delta_{2,m}) \\ & + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)}(\delta_{n+1,m} - \delta_{n-1,m}) \left( (n+3)A_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^{n+1} + (n+1)B_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^{n-1} \right) \\ & m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.86}$$

2.Si l'on remplace  $L$  par l'équation (4.17) (membre à membre) dans le produit (4.62) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $Wei(\theta) = \sin^2 \theta$ , alors l'on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{B_0^{(e)[1]}}{F^{[0]}} - \frac{D_0^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2} \right) \frac{2}{3}(\delta_{0,m} - \delta_{2,m}) - \left( \frac{C_1^{(e)[1]}}{F^{[0]}} + \frac{D_1^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^3} \right) \frac{2}{5}(\delta_{1,m} - \delta_{3,m}) \\ & + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)} \left( \frac{C_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^n} + \frac{D_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^{n+2}} \right) \times \\ & \left[ -\frac{n(n-1)}{(2n-1)} \delta_{n-2,m} + \frac{2(2n+1)(n^2+n-1)}{(2n-1)(2n+3)} \delta_{n,m} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \delta_{n+2,m} \right] = 0, \\ & m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.87}$$

3. Un traitement équivalent à l'équation (4.18) avec  $Wei(\theta) = \sin^2 \theta$  donne :

$$\begin{aligned} & \left( -A_0^{(i)[1]} F^{[0]} - A_1^{(i)[1]} (F^{[0]})^2 \right) \frac{2}{3}(\delta_{0,m} - \delta_{2,m}) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)} \left( A_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^{n+1} + B_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^{n-1} \right) \times \\ & \left[ \left( (1-n) + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{n-2,m} + \left( \frac{n(n-1)}{2n-1} + (n+1) - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{n,m} + \left( \frac{-(n+1)(n+2)}{(2n+3)} \right) \delta_{n+2,m} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

4- Et pour la projection normale, à l'interface S, du bilan de quantité de Mouvement (équation 4.21) au 1<sup>ier</sup> ordre devient :

$$\bar{p}^{(e)[1]} - \lambda \bar{p}^{(i)[1]} + 2 \frac{\lambda}{\text{Re}^{(i)}} \frac{\partial \bar{u}_r^{(i)[1]}}{\partial r} - 2 \frac{1}{\text{Re}^{(e)}} \frac{\partial \bar{u}_r^{(e)[1]}}{\partial r} + \frac{M\alpha}{2} \left( \bar{E}_r^{(i)^2} - \bar{E}_\theta^{(i)^2} \right) - \frac{\alpha}{2} \left( \bar{E}_r^{(e)^2} - \bar{E}_\theta^{(e)^2} \right) = 2hCa \quad (4.89)$$

Tell que :

$$2H\gamma = \frac{Ca}{(n+2)(n-1)} \sum_{n=2}^{+\infty} J_n^{[1]} P_n \quad [18] \quad (4.90)$$

- Si l'on remplace  $L$  par l'équation (4.89) (membre à membre) dans le produit (4.62) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $We_i(\theta) = \sin^2 \theta$ , alors l'on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_e^{(e)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n(n+1)(2n+1) \left( F^{[0]} \right)^{n+1}} \left( -n(-4n+2) C_n^{(e)[1]} \right) \times \\ & \left[ \left( (1-n) + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{n-2,m} + \left( \frac{n(n-1)}{2n-1} + (n+1) - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{n,m} + \left( \frac{-(n+1)(n+2)}{(2n+3)} \right) \delta_{n+2,m} \right] \\ & - \frac{\lambda}{R_e^{(i)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n(n+1)(2n+1) \left( F^{[0]} \right)^{n+1}} \left( (4n+6)(n+1) A_n^{(i)[1]} \left( F^{[0]} \right)^{2n+1} \right) \times \\ & \left[ \left( (1-n) + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{n-2,m} + \left( \frac{n(n-1)}{2n-1} + (n+1) - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{n,m} + \left( \frac{-(n+1)(n+2)}{(2n+3)} \right) \delta_{n+2,m} \right] \\ & + \frac{2\lambda}{\text{Re}^{(i)}} \left\{ \frac{2}{3} (\delta_{0,m} - \delta_{2,m}) \left( -A_0^{(i)[1]} - 2A_1^{(i)[1]} F^{[0]} \right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left( (n+1) A_n^{(i)[1]} \left( F^{[0]} \right)^n + (n-1) B_n^{(i)[1]} \left( F^{[0]} \right)^{n-2} \right) \times \right. \\ & \left. \left[ \left( (1-n) + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{n-2,m} + \left( \frac{n(n-1)}{2n-1} + (n+1) - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{n,m} + \left( \frac{-(n+1)(n+2)}{(2n+3)} \right) \delta_{n+2,m} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\text{Re}^{(e)}} \left\{ \frac{2}{3} (\delta_{0,m} - \delta_{2,m}) \left( \frac{B_0^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2} + 2 \frac{D_0^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^3} \right) + \frac{2}{5} (\delta_{3,m} - \delta_{1,m}) \left( \frac{C_1^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2} + 3 \frac{D_1^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^4} \right) \right. \\
& + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left( -n \frac{C_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^{n+1}} - (n+2) \frac{D_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^{n+3}} \right) \times \\
& \left[ \left( (1-n) + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{n-2,m} + \left( \frac{n(n-1)}{2n-1} + (n+1) - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{n,m} + \left( \frac{-(n+1)(n+2)}{(2n+3)} \right) \delta_{n+2,m} \right] \Big\} \\
& + \frac{M\alpha}{2} (E_0^{[1]})^2 \frac{9}{(2+S)^2} \left[ \frac{6}{7} \delta_{2,m} - \frac{16}{35} \delta_{4,m} - \frac{14}{35} \delta_{0,m} \right] - \frac{\alpha}{2} (E_0^{[1]})^2 \left\{ \left( \frac{3S}{2+S} \right)^2 \left[ \frac{10}{105} \delta_{2,m} - \frac{8}{35} \delta_{4,m} + \frac{14}{105} \delta_{0,m} \right] \right. \\
& \left. - \frac{9}{(2+S)^2} \left[ \frac{56}{105} \delta_{0,m} + \frac{8}{35} \delta_{4,m} - \frac{16}{21} \delta_{2,m} \right] \right\} \\
& = Ca \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)} J_n^{[1]} \left[ \left( \frac{-n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \right) \delta_{n-2,m} + \left( 1 - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)} \right) \delta_{n,m} \right. \\
& \left. - \left( \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \right) \delta_{n+2,m} \right] \\
& m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.91}$$

5- Et pour la projection tangentielle, à l'interface S, du bilan de quantité de Mouvement ) au 1<sup>ier</sup> ordre devient:

$$\frac{\lambda}{\text{Re}^{(i)}} \left( \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(i)[1]}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(i)[1]}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\text{Re}^{(e)}} \left( \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(e)[1]}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(e)[1]}}{\partial \theta} \right) + M\alpha \left( \bar{E}_r^{(i)[1]} \bar{E}_\theta^{[1]} \right) - \alpha \left( \bar{E}_r^{(e)[1]} \bar{E}_\theta^{[1]} \right) = 0 \tag{4.92}$$

- Si l'on remplace  $L$  par l'équation (4.92) (membre à membre) dans le produit (3.56) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $Wei(\theta) = \sin^3 \theta$ , alors l'on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{\text{Re}^{(i)}} \left\{ 3A_0^{(i)[1]} \left[ \frac{2}{3} (\delta_{0,m} - \delta_{2,m}) + \frac{2}{5} (\delta_{3,m} - \delta_{1,m}) \right] + \right. \\
& \left. 4F^{[0]} A_1^{(i)[1]} \left[ \frac{8}{15} \delta_{0,m} - \frac{16}{21} \delta_{2,m} + \frac{8}{35} \delta_{4,m} \right] \right\} \\
& - \frac{\lambda}{\text{Re}^{(i)}} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-(n+1)}{2n+1} (F^{[0]})^{n-2} \left( (n+3) A_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^2 + (n-1) B_n^{(i)[1]} \right) \\
& \left[ \delta_{n-1,m} - \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} (\delta_{n-3,m} - \delta_{n-1,m}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2m^2+2m-1}{(2m+3)(2m-1)}(\delta_{n-1,m}-\delta_{n+1,m})-\frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)}(\delta_{n+1,m}-\delta_{n+3,m})-\delta_{n+1,m} \\
& +\frac{\lambda}{\operatorname{Re}^{(i)}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-1}{2n+1}\left(A_n^{(i)[1]}(F^{[0]})^n+B_n^{(i)[1]}(F^{[0]})^{n-2}\right) \\
& \left[2(n-1)\left(\frac{m+1}{2m+3}\delta_{n-3,m}+\frac{m}{2m-1}\delta_{n-1,m}\right)+\right. \\
& 2(1-n)\left(\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)}\delta_{n-3,m}+\frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)}\delta_{n-1,m}+\frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)}\delta_{n+1,m}\right) \\
& -2(n+1)\left(\frac{m+1}{2m+3}\delta_{n-1,m}+\frac{m}{2m-1}\delta_{n+1,m}\right)+ \\
& \left.2(n+1)\left(\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)}\delta_{n-1,m}+\frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)}\delta_{n+1,m}+\frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)}\delta_{n+3,m}\right)\right] \\
& +\frac{\lambda}{\operatorname{Re}^{(i)}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-1}{2n+1}\left(A_n^{(i)[1]}(F^{[0]})^n+B_n^{(i)[1]}(F^{[0]})^{n-2}\right)\left[\left(\frac{(m+1)(m+2)^2}{(2m+3)}\delta_{n-3,m}+\frac{m^2(m-1)}{(2m-1)}\delta_{n-1,m}\right)\right. \\
& \left.+(1-n)\left(\delta_{n-1,m}-\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)}\delta_{n-3,m}-\frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)}\delta_{n-1,m}-\frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)}\delta_{n+1,m}\right)\right. \\
& \left.+\left(\frac{m^2(m-1)}{2m-1}\delta_{n+1,m}-\frac{(m+1)(m+2)^2}{(2m+3)}\delta_{n-1,m}\right)+\frac{n(n-1)^2}{2n-1}\left(\frac{m+1}{2m+3}\right)(\delta_{n-1,m}-\delta_{n-3,m})\right. \\
& \left.+\frac{n(n-1)^2}{2n-1}\left(\frac{m}{2m-1}\right)(\delta_{n+1,m}-\delta_{n-1,m})+\right. \\
& \left.(n+1)\left(\delta_{n+1,m}-\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)}\delta_{n-1,m}-\frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)}\delta_{n+1,m}\right.\right. \\
& \left.\left.-\frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)}\delta_{n+3,m}\right)-\frac{(n+1)^2(n+2)}{2n+3}\left(\frac{m+1}{2m+3}(\delta_{n+1,m}-\delta_{n-1,m})+\frac{m}{2m-1}(\delta_{n+3,m}-\delta_{n+1,m})\right)\right] \\
& \frac{-1}{\operatorname{Re}^{(e)}}\left\{\frac{-B_0^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2}\left[\frac{2}{3}(\delta_{0,m}-\delta_{2,m})+\frac{2}{5}(\delta_{3,m}-\delta_{1,m})\right]\right\}+ \\
& \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(F^{[0]})^{-n-3}}{2n+1}\left((n-2)C_n^{(e)[1]}(F^{[0]})^2+(n+2)D_n^{(e)[1]}\right) \\
& \left[\delta_{n-1,m}-\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)}(\delta_{n-3,m}-\delta_{n-1,m})-\frac{2m^2+2m-1}{(2m+3)(2m-1)}(\delta_{n-1,m}-\delta_{n+1,m})\right. \\
& \left.-\frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)}(\delta_{n+1,m}-\delta_{n+3,m})-\delta_{n+1,m}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{\operatorname{Re}^{(e)} F^{[0]}} \left\{ \frac{C_1^{(e)[1]}}{(F^{[0]})} \left[ \frac{8}{15} \delta_{0,m} - \frac{16}{21} \delta_{2,m} + \frac{8}{35} \delta_{4,m} \right] + \frac{D_1^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2} \left[ \frac{8}{15} \delta_{0,m} - \frac{16}{21} \delta_{2,m} + \frac{8}{35} \delta_{4,m} \right] + \right. \\
& \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left( C_n^{(e)[1]} (F^{[0]})^{-n} + D_n^{(e)[1]} (F^{[0]})^{-n-2} \right) \left[ 2(n-1) \left( \frac{m+1}{2m+3} \delta_{n-3,m} + \frac{m}{2m-1} \delta_{n-1,m} \right) + \right. \\
& 2(1-n) \left( \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \delta_{n-3,m} + \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} \delta_{n-1,m} + \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{n+1,m} \right) \\
& \left. - 2(n+1) \left( \frac{m+1}{2m+3} \delta_{n-1,m} + \frac{m}{2m-1} \delta_{n+1,m} \right) + \right. \\
& \left. 2(n+1) \left( \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \delta_{n-1,m} + \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} \delta_{n+1,m} + \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{n+3,m} \right) \right] \\
& + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left( C_n^{(e)[1]} (F^{[0]})^{-n} + D_n^{(e)[1]} (F^{[0]})^{-n-2} \right) \left[ \left( \frac{(m+1)(m+2)^2}{(2m+3)} \delta_{n-3,m} + \frac{m^2(m-1)}{(2m-1)} \delta_{n-1,m} \right) \right. \\
& \left. + (1-n) \left( \delta_{n-1,m} - \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \delta_{n-3,m} - \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} \delta_{n-1,m} - \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{n+1,m} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{m^2(m-1)}{2m-1} \delta_{n+1,m} - \frac{(m+1)(m+2)^2}{(2m+3)} \delta_{n-1,m} \right) + \frac{n(n-1)^2}{2n-1} \left( \frac{m+1}{2m+3} \right) (\delta_{n-1,m} - \delta_{n-3,m}) \right. \\
& \left. + \frac{n(n-1)^2}{2n-1} \left( \frac{m}{2m-1} \right) (\delta_{n+1,m} - \delta_{n-1,m}) + (n+1) \left( \delta_{n+1,m} - \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \delta_{n-1,m} - \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} \delta_{n+1,m} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{n+3,m} \right) - \frac{(n+1)^2(n+2)}{2n+3} \left( \frac{m+1}{2m+3} (\delta_{n+1,m} - \delta_{n-1,m}) + \frac{m}{2m-1} (\delta_{n+3,m} - \delta_{n+1,m}) \right) \right] \left. \right\} \\
& + M \alpha \left( - \left( E_0^{[1]} \right)^2 \frac{1}{(2+s)^2} \left[ \frac{8}{7} \delta_{5,m} - \frac{112}{35} \delta_{3,m} + \frac{72}{35} \delta_{1,m} \right] \right) - \\
& \alpha \left( - \left( E_0^{[1]} \right)^2 \frac{s}{(2+s)^2} \left[ \frac{8}{7} \delta_{5,m} - \frac{112}{35} \delta_{3,m} + \frac{72}{35} \delta_{1,m} \right] \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Après résolution de ce système d'équations par maple, on obtient la forme des potentiels Hydrodynamiques suivante :

$$\psi^{(i)[1]}(\eta, \theta) = \varpi (F^{[0]})^5 \left( \eta - \tilde{\eta} \right) \left( -P_1(\cos \theta) + P_3(\cos \theta) \right) \tag{4.94}$$

$$\psi^{(e)[1]}(\eta, \theta) = \bar{\omega} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) (-P_2(\cos \theta) + P_4(\cos \theta)) \quad (4.95)$$

Ou:

$$\bar{\omega} = \frac{9E_0^2 r_0^2}{35} \frac{\varepsilon^{(e)}}{\mu^{(i)} + \mu^{(e)}} \frac{(S - P)}{(2 + S)^2} \quad (4.96)$$

ET:

$$P = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}} \quad (4.97)$$

#### 4.5.2.2 Solution pour la fonction d'aspect et le champ électrique appliqué

La fonction d'aspect est définie par l'équilibre des forces normales à l'interface (4.91). Après avoir calculé les potentiels électriques et hydrodynamiques, puis Injection dans (4.91), on trouve que :

$$J_n^{[1]} = 0, n \neq 2 \quad (4.98)$$

Ce qui permet d'écrire l'expression de la fonction de forme à l'ordre 1 sous la forme :

$$F^{[1]}(r, \theta) = P_2(\cos \theta) \quad (4.99)$$

Finalement, la fonction d'aspect totale s'écrit :

$$F(\theta) = F^{[0]} + \varepsilon F^{[1]} = r_0 + \varepsilon P_2(\cos \theta) \quad (4.100)$$

Et l'expression du champ électrique  $E_0$  en fonction du paramètre de perturbation  $\varepsilon$  :

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\gamma}{\varepsilon^{(e)} r_0^2 \left(\frac{3}{2+S}\right)^2 \left[\frac{1}{3}(S^2 - 2P + 1) + \frac{(S - P)(2 + 3M)}{5(1 + M)}\right]}} \varepsilon \quad (4.101)$$

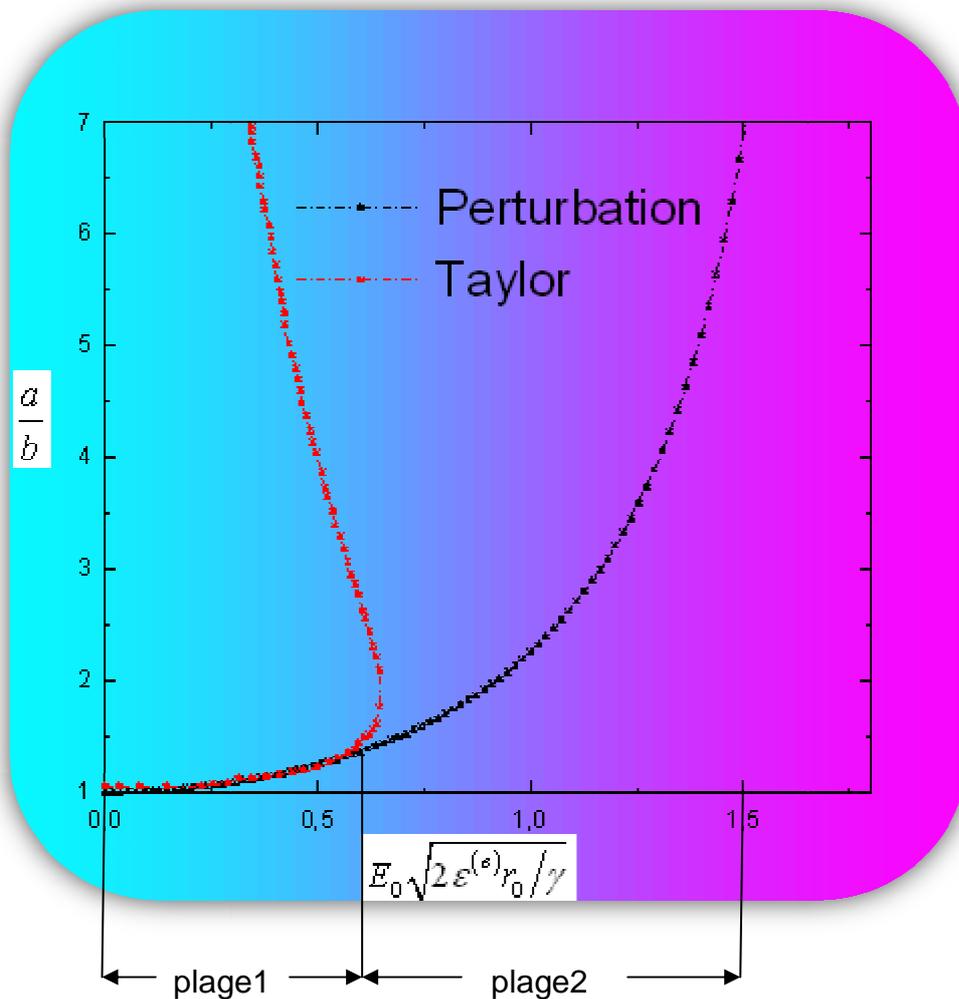
Où :

$$M = \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \quad (4.102)$$

A partir de l'expression (4.100), on peut tirer l'expression de l'ellipticité en fonction Du paramètre  $\varepsilon$  :

Ce résultat est le couronnement des développements mathématique lourd mais nécessaire basées sur le système d'équation electro-hydrodynamique, la relation qu' on a trouvé est plus générale que celle proposée par Taylor par ce que le travail fait par Taylor s'incrine de par la définition de la méthode de perturbation comme une étude d'ordre 0 par contre notre travail est atteint jusqu'au 1<sup>ier</sup> ordre pour avoir une meilleur résultat d'exploitation, mais cette relation reste astreinte aux faibles déformations

$\left(\frac{\varepsilon}{r_0} \ll 1\right)$  En effet, si l'on trace la courbe de variation de l'ellipticité de la goutte en équilibre en fonction du champ électrique appliqué on trouve (figure 4.3) :



**Figure 4.3. Variations du champ électrique d'équilibre, calculé par Taylor et par la méthode des perturbations, en fonction de l'ellipticité.**

Cette figure montre que les deux courbes se rejoignent si la déformation est faible (plage1), mais l'écart augmente considérablement dès que la déformation devient grande (plage2). On pourra avoir donc différentes formes du champ d'équilibre de la goutte à partir de rapport d'ellipticité en fonction des paramètres physico-électriques de

l'encre et l'air et de champ électrique appliqué pour la plage 1 compris entre 0 et 0.7 du champ électrique d'équilibre mais à cause de la non disponibilité de ces propriétés physico-électriques des deux fluides (concurrence industrielle), cette évolution n'a pas pu être obtenue.

Une étude complémentaire est nécessaire pour étudier la variation de l'éllipticité en fonction du champ électrique appliqué, qui lui-même en fonction des paramètres physico-électriques des deux fluides qui donnera une meilleur exploitation du résultat dans la zone linéaire (plage1) du fonctionnement normal.

Pour cela il serait souhaitable d'avoir un rapport de  $a/b$  proportionnel à  $E_0$  pour une plage plus étendue (plage 1+plage2)

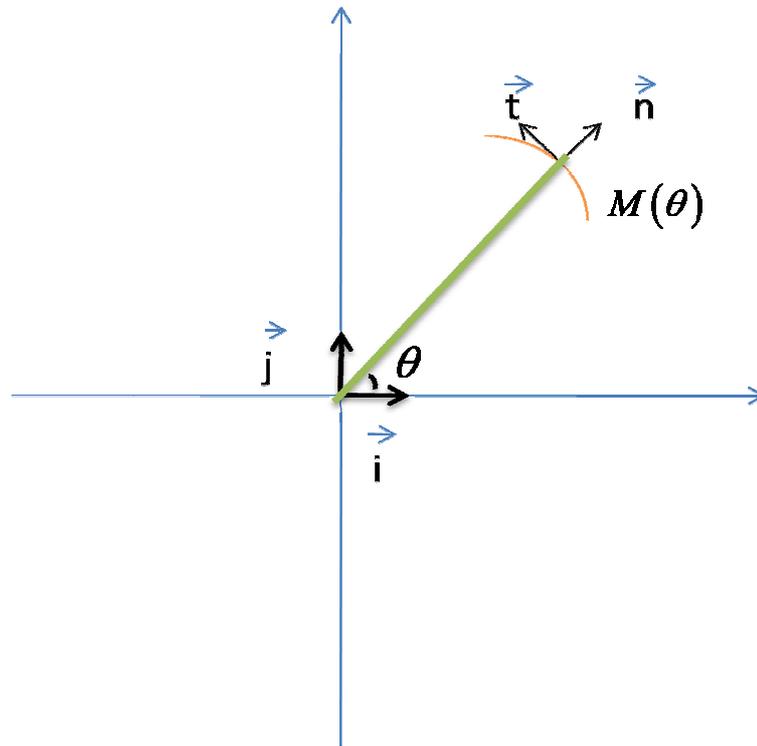
Il est donc évident que le développement au premier ordre de la perturbation n'est pas suffisant pour décrire correctement la déformation d'une goutte proche de la rupture sous champ électrique. les développements d'ordres supérieurs, qui nécessitent un effort calculatoire considérable dépassent le cadre de ce magister .

Cependant un développement de 2ème ordre pour le problème électrique a été fait, ce qui pourrait donner une meilleure précision du champ électrique.

Pour la solution de problème électrique de 2ème ordre un développement lourd a été entamé et présenté ci-dessous:

#### 4.6 Calcul de la normale en 1ier ordre :

Soit  $\wp$  une courbe plane d'équation  $r = r(\theta)$  en cordonne polaire



On'a  $M(\theta) = r(\theta)\vec{i}_r$  tel que:  $\vec{n} = \vec{i}_r$ ,  $\vec{i}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$

-le vecteur tangent à la courbe est  $\vec{T} = \frac{\partial OM}{\partial \theta}$

$$\vec{T} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r(\theta)\vec{i}_r \right) = \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_r + r(\theta)\vec{i}_\theta \quad \text{Tel que : } \vec{i}_\theta = \frac{\partial \vec{i}_r}{\partial \theta}$$

-le vecteur tangent unitaire est  $\vec{t} = \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|}$  et  $\|\vec{T}\| = \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}$

$$\text{Donc } \vec{t} \text{ devient: } \vec{t} = \frac{r'(\theta)\vec{i}_r + r(\theta)\vec{i}_\theta}{\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}}$$

$$\text{soit : } \cos\alpha = \frac{r'(\theta)}{\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}}, \sin\alpha = \frac{r(\theta)}{\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}}$$

Et donc  $\vec{t}$  devient :  $\vec{t} = \cos\alpha\vec{i}_r + \sin\alpha\vec{i}_\theta$

Le vecteur unitaire orthogonal à  $\vec{t}$  est :

$$\vec{u} = -\sin\alpha\vec{i}_r + \cos\alpha\vec{i}_\theta$$

De telle sorte que  $\det(\vec{t}, \vec{u}) = 1$

Comme pour l'interface nous avons l'habitude de prendre pour normale la normale

sortante nous avons :  $\vec{n} = -\vec{u} = \sin \alpha \vec{i}_r - \cos \alpha \vec{i}_\theta$

-on résume nous avons :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}} \left[ r'(\theta) \vec{i}_r + r(\theta) \vec{i}_\theta \right]$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}} \left[ r(\theta) \vec{i}_r - r'(\theta) \vec{i}_\theta \right]$$

Puisque a l'interface on'a  $r(\theta) = F(\theta)$  donc :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(F'(\theta))^2 + (F(\theta))^2}} \left[ F'(\theta) \vec{i}_r + F(\theta) \vec{i}_\theta \right]$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(F'(\theta))^2 + (F(\theta))^2}} \left[ F(\theta) \vec{i}_r - F'(\theta) \vec{i}_\theta \right]$$

Et comme:

$$\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} = \varepsilon \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial F^{[2]}(\theta)}{\partial \theta}$$

Au 2ème ordre  $(F(\theta))^2$  et  $\left( \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} \right)^2$  donne :

$$(F(\theta))^2 = r_0^2 + 2r_0 \varepsilon F^{[1]}(\theta) + \varepsilon^2 \left( F^{[1]}(\theta) \right)^2 + r_0 \varepsilon^2 F^{[2]}(\theta) + \dots$$

$$\left( \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \dots$$

$$\sqrt{(F'(\theta))^2 + (F(\theta))^2} = \sqrt{r_0^2 + 2r_0 \varepsilon F^{[1]}(\theta) + \varepsilon^2 \left[ \left( F^{[1]}(\theta) \right)^2 + r_0 F^{[2]}(\theta) + \left( \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}$$

$$= r_0 \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon F^{[1]}(\theta)}{r_0} + \dots} \Rightarrow \frac{1}{r_0} \left[ 1 + \frac{2\varepsilon}{r_0} F^{[1]}(\theta) + \dots \right]$$

Et comme  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$  et nous avons besoin de développement de  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  uniquement a l'ordre 1 donc :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 + (F^{[1]}(\theta))^2}} = \frac{1}{r_0} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{r_0} F^{[1]}(\theta) \right]$$

Dou:

$$\vec{t} = \frac{1}{r_0} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{r_0} F^{[1]}(\theta) \right] \left[ \varepsilon \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_r + (r_0 + \varepsilon F^{[1]}(\theta)) \vec{i}_\theta \right]$$

$$\vec{t} = \frac{1}{r_0} \left[ r_0 \vec{i}_\theta + \varepsilon \left( \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_r + F^{[1]}(\theta) \vec{i}_\theta - F^{[1]}(\theta) \vec{i}_\theta \right) \right]$$

$$\vec{t} = \vec{i}_\theta + \varepsilon \left[ \frac{1}{r_0} \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_r \right], \quad \vec{t} = \vec{i}_\theta + \varepsilon t^{[1]}$$

Par identification  $t^{[1]} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_r$

De la même façon :

$$\vec{n} = \frac{1}{r_0} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{r_0} F^{[1]}(\theta) \right] \left[ (r_0 + \varepsilon F^{[1]}(\theta)) \vec{i}_r - \varepsilon \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_\theta \right]$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{i}_r - \varepsilon \left[ \frac{1}{r_0} \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_\theta \right] \quad \text{Et } \vec{n} = \vec{i}_r + \varepsilon n^{[1]}$$

Par identification :

$$n^{[1]} = \frac{-1}{r_0} \frac{\partial F^{[1]}(\theta)}{\partial \theta} \vec{i}_\theta \tag{4.106}$$

#### 4.7 Perturbation au 2ème ordre :

Sur l'interface, la relation (3.10) s'écrit au 2ème ordre :

$$\sigma^{(i)} \left( \frac{1}{2} .n^{[0]} .\nabla V^{(i)[2]} + n^{[1]} .\nabla V^{(i)[1]} \right) - \sigma^{(e)} \left( \frac{1}{2} .n^{[0]} .\nabla V^{(e)[2]} + n^{[1]} .\nabla V^{(e)[1]} \right) = 0 \tag{4.107}$$

La condition (3.8) se traduit au premier ordre aussi par,  $\eta = 1$  et  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$$V^{(e)[2]} = V^{(i)[2]} \tag{4.108}$$

Tel que:

$$V^{(e)[2]} = G_0^{(e)[2]} P_0(\cos \theta) + G_1^{(e)[2]} r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{H_n^{(k)[2]}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

ET

$$V^{(i)[2]} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n^{(i)[2]} r^n P_n(\cos \theta)$$

1. Si l'on remplace  $L$  par l'équation (2) (membre à membre) dans le produit (3.56) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $Wei(\theta) = 1$ , alors, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & G_0^{(e)[2]} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,0} + G_1^{(e)[2]} F^{[0]} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n^{(e)[2]}}{(F^{[0]})^{n+1}} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n} \\ & = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n^{(i)[2]} (F^{[0]})^n \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.109)$$

2. Si l'on remplace  $L$  par l'équation (1) (membre à membre) dans le produit(3.56) et  $K$  par  $P_m(\cos \theta)$ , avec  $Wei(\theta) = 1$ , alors l'on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \sigma^{(i)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n (F^{[0]})^{n-1} \delta_{m,n} G_n^{(i)[2]} + \frac{1}{F^{[0]}} \frac{9}{2+S} E_0^{[1]} \frac{2}{5} (\delta_{m,1} - \delta_{m,3}) \right\} = \\ & \sigma^{(e)} \left\{ \frac{1}{2} G_1^{(e)[2]} \delta_{m,1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(n+1)}{(F^{[0]})^{n+2}} \delta_{m,n} H_n^{(e)[2]} + \frac{1}{F^{[0]}} \frac{9}{2+S} E_0^{[1]} \frac{2}{5} (\delta_{m,1} - \delta_{m,3}) \right\} \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

La condition (3.6), implique aussi que :

$$G_1^{(e)[2]} = -E_0^{[2]} \quad (4.111)$$

Après arrangement et résolution, l'on obtient les solutions suivantes du système ainsi

Posé :

$$\begin{aligned} V_i^{[2]} &= \left( E_0^{[2]} L - \frac{H_1^{(e)[2]}}{L^2} - \frac{H_3^{(e)[2]}}{L^4} \right) P_0 + G_1^{(i)[2]} r P_1 + G_3^{(i)[2]} r^3 P_3 \\ V_e^{[2]} &= \left( E_0^{[2]} L - \frac{H_1^{(e)[2]}}{L^2} - \frac{H_3^{(e)[2]}}{L^4} \right) P_0 - E_0^{[2]} r P_1 + \frac{H_1^{(e)[2]}}{r^2} P_1 + \frac{H_3^{(e)[2]}}{r^4} P_3 \end{aligned} \quad (4.112)$$

Tel que :

$$G_1^{(i)[2]} = -\frac{3}{5} \frac{10E_0^{[2]}r_0 + 5r_0E_0^{[2]}S - 12E_0^{[1]} + 12SE_0^{[2]}}{(S^2 + 4S + 4)r_0}$$

$$G_3^{(i)[2]} = \frac{36E_0^{[1]}(S-1)}{5r_0^3(3S^2 + 10S + 8)}$$

$$H_1^{(e)[2]} = \frac{-1}{5} \frac{r_0^2(10E_0^{[2]}r_0 - 5r_0E_0^{[2]}S - 36E_0^{[1]} + 36SE_0^{[1]} - 5E_0^{[2]}r_0S^2)}{S^2 + 4S + 4}$$

$$H_3^{(e)[2]} = \frac{36E_0^{[1]}(S-1)r_0^4}{5(3S^2 + 10S + 8)}$$

## CONCLUSION

L'objectif de cette étude est de trouver la courbe qui relie la déformation (ou un paramètre auquel elle dépend) de la goutte à l'intensité du champ électrique appliqué en fonction des rapports de conductivité électrique, de permittivité, de masse volumique et de viscosité dynamique des fluides mis en jeu pour prédire le mouvement et la déformation de particules sous champ électrique uniforme dans des applications telles que les imprimantes .

Afin d'étudier le phénomène de déformation des gouttes sous l'effet d'un champ électrique uniforme, nous avons choisi de modéliser les déformations pures d'une goutte de liquide non miscible en utilisant des développements mathématiques lourds d'ordre 1 par la méthode des petites perturbations, après résolution des système d'équations par Maple nous avons réussi à trouver la courbe qui relie le rapport d'ellipticité  $\left(\frac{a}{b}\right)$  à l'intensité du champ électrique appliqué en fonction des différents paramètres physiques et électriques et enfin comparer notre courbe avec celle trouvée par Taylor.

Les deux courbes concordent parfaitement pour les petites déformations contrairement aux grandes déformations, nous en déduisons que le développement au premier ordre est envisageable uniquement pour les petites déformations, et si nous voulons suivre la goutte jusqu'à la rupture nous devrions faire un développement d'ordre supérieur à 1 afin de prédire correctement son comportement

En perspectives et afin de prendre en compte les grandes déformations, un calcul d'ordre supérieur à 1 s'impose, il est à noter que ce calcul est à la fois lourd et très gourmand en temps de calcul ce qui dépasse le cadre de notre étude.

## Annexe A

1-Les formules utilisées :

$$P_0 = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

(Ann3.1-1)

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

Tell que :  $x = \cos \theta$

2-La dérivé d'un polynôme de Legendre :

On' a :

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n \quad (\text{Ann3.1-2})$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_n = \frac{1}{2n+1} [P'_{n+1} - P'_{n-1}] \quad (\text{Ann3.1-3})$$

Et :

$$(2n+1)(x^2-1)P'_n = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1})$$

D'où :

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{n(n+1)}{(2n+1)(x^2-1)} (P_{n+1} - P_{n-1}) \quad (\text{Ann3.1-4})$$

$$\frac{\partial P_{n+1}}{\partial x} = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(x^2-1)} (P_{n+2} - P_n) \quad (\text{Ann3.1-5})$$

$$\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} = \frac{n(n-1)}{(2n-1)(x^2-1)} (P_n - P_{n-2}) \quad (\text{Ann3.1-6})$$

$$\frac{\partial P_{n-2}}{\partial x} = \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-3)(x^2-1)} (P_{n-1} - P_{n-3}) \quad (\text{Ann3.1-7})$$

$$xP_n = \frac{n}{2n+1} P_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} \quad (\text{Ann3.1-8})$$

$$xP_{n-1} = \frac{n-1}{2n-1} P_{n-2} + \frac{n}{2n-1} P_n \quad (\text{Ann3.1-9})$$

$$xP_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} P_n + \frac{n+2}{2n+3} P_{n+2} \quad (\text{Ann3.1-10})$$

$$x^2 P_n = \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2} + \frac{2n^2+2n-1}{(2n-1)(2n+3)} P_n + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+1)} P_{n+2} \quad (\text{Ann3.1-11})$$

$$x^2 P_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)} P_{n-3} + \frac{2n^2-2n-1}{(2n-3)(2n+1)} P_{n-1} + \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n+1} \quad (\text{Ann3.1-12})$$

$$x^2 P_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n-1} + \frac{2n^2+6n+3}{(2n+1)(2n+5)} P_{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} P_{n+3} \quad (\text{Ann3.1-13})$$

$$x^3 P_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} P_{n-3} + \frac{6n^4-3n^3-12n^2+6n}{(2n-3)(2n+1)(2n+3)(2n-1)} P_{n-1} + \frac{6n^4-27n^3-33n^2+3n-9}{(2n-1)(2n+1)(2n+5)(2n+3)} P_{n+1} \\ + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} P_{n+3}$$

(Ann3.1-14)

3-Quelle que résultat des calculs d'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} P_m \sin^2 \theta dx = 2\delta_{0,m} - \frac{4}{15}\delta_{2,m} - \frac{2}{9}\delta_{4,m} \quad (\text{Ann3.1-15})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{n-2} P_m dx = \frac{2}{2n-3}\delta_{n-2,m} \quad (\text{Ann3.1-16})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{n-1} P_m \cos \theta dx = \frac{2(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\delta_{n-2,m} + \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}\delta_{n,m} \quad (\text{Ann3.1-17})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{n+1} P_m \cos \theta dx = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\delta_{n,m} + \frac{2(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\delta_{n+2,m} \quad (\text{Ann3.1-18})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m \cos \theta \sin^2 \theta dx = \frac{4}{15}\delta_{1,m} - \frac{4}{35}\delta_{3,m} \quad (\text{Ann3.1-19})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m \cos^2 \theta \sin^2 \theta dx = \frac{-20}{175}\delta_{2,m} + \frac{28}{105}\delta_{0,m} - \frac{10}{315}\delta_{4,m} \quad (\text{Ann3.1-20})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m \cos \theta \sin^3 \theta dx = \frac{6}{15}(\delta_{1,m} + \delta_{3,m}) \quad (\text{Ann3.1-21})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{n-2} P_m \sin \theta dx = \delta_{n-2,m} \quad (\text{Ann3.1-22})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n P_m \sin \theta dx = \delta_{n,m} \quad (\text{Ann3.1-23})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{n-1} P_m \cos \theta \sin \theta dx = \frac{n-1}{2n-1}\delta_{n-2,m} + \frac{n}{2n-1}\delta_{n,m} \quad (\text{Ann3.1-24})$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{n+1} P_m \cos \theta \sin \theta dx = \frac{n+1}{2n+3}\delta_{n,m} + \frac{n+2}{2n+3}\delta_{n+2,m} \quad (\text{Ann3.1-25})$$

## Annexe B

### 1-Solution de l'équation de Laplace en symétrie de Révolution

Soit l'équation de Laplace suivante à résoudre :

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{Ann3.2-1})$$

Où  $\psi$  est la fonction scalaire que l'on cherche à déterminer.

En coordonnées sphériques, l'équation (Ann3.2-1) s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad (\text{Ann3.2-2})$$

Si l'on observe la symétrie axiale, c'est-à-dire si :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{Ann3.2-3})$$

alors l'équation (Ann3.2-2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{Ann3.2-4})$$

On effectue maintenant la séparation des variables. Pour ce faire, on suppose que la solution s'écrit sous la forme :

$$\psi = R(r) \times \Theta(\theta) \quad (\text{Ann3.2-5})$$

que l'on introduit dans (Ann3.2-4). Ceci implique les deux équations suivantes :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) \quad (\text{Ann3.2-6})$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \quad (\text{Ann3.2-7})$$

où  $l$  est un paramètre entier indépendant de  $r$  et de  $\theta$ .

La solution de l'équation (Ann3.2-6) prend la forme simple suivante :

$$R_l(r) = c_{1,l} r^{-(l+1)} + c_{2,l} r^l \quad (\text{Ann3.2-8})$$

Tandis que l'équation (Ann3.2-7) est résolue par développement en série infinie.

L'identification des coefficients des puissances croissantes de  $\theta$  (plus précisément de  $\cos \theta$ ) implique la forme suivante de la solution :

$$\Theta_l(x) = P_l(x) \quad (\text{Ann3.2-9})$$

Ou :

$$x = \cos \theta \quad (\text{Ann3.2-10})$$

et  $P_l(x)$  est le polynôme de Legendre normalisé d'ordre  $l$ . Il est défini par :

$$P_l(x) = c_{3,l} \begin{cases} y_1(x) \text{ si } l \text{ pair} \\ y_2(x) \text{ si } l \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{Ann3.2-11})$$

Ou :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(l-2n+2)\dots(l-2)l][(l+1)(l+3)\dots]}{(2n)} x^{2n} \quad (\text{Ann3.2-12})$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(l-2n+2)\dots(l-3)(l-1)][(l+2)(l+4)\dots(l+2n)]}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{Ann3.2-13})$$

La solution générale de l'équation de Laplace sera la somme de toutes ces fonctions particulières,  $R_l(r) \times P_l(\cos \theta)$ , soit :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} (c_{1,l} r^{-(l+1)} + c_{2,l} r^l) P_l(\cos \theta) \quad (\text{Ann3.2-14})$$

Les coefficients qui interviennent dans (Ann3.2-8) et (Ann3.2-11) sont déduits des conditions aux limites associées à l'équation différentielle (Ann3.2-1).

Dans le cas où  $\psi$  est le potentiel électrique qu'on cherche à calculer, l'unique solution qui garantit l'uniformité du champ à l'infini est celle qui comprend un terme en  $\cos \theta$ , soit Celle qui correspond à  $l = 1$  :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left( c_{1,l} \frac{1}{r^{l+1}} + c_{2,l} r^l \right) \cos \theta \quad (\text{Ann3.2-15})$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Fouillet, Y. and Achard, J.-L., Microfluidique discrète et biotechnologie, *Compte rendu de Physique*, 2004, No. 5, pp 577-588.
- [2] Pham, P., Modélisation d'un dispositif de diagnostic moléculaire ultrasensible : étapes de concentration de nanoparticules superparamagnétiques et hybridation d'oligonucléotides sur support fonctionnalisé par micropompe Marangoni, Thèse de Doctorat, Ec. doct. Mécanique des Fluides et Transferts, INP de Grenoble, 2001
- [3] Fuchs, O. Fouillet, Y. et Achard, J.-L., Coalescence de micro-gouttes assistée par des forces électriques, *Congrès de Microfluidique de la Société Hydrotechnique de France*, pp 37-46, 3-5, Décembre 2002, Toulouse
- [4] Glarum, S.H. Dielectric relaxation of polar liquids, *J. Chem. Phys.*, 1960, vol.33, pp 1371
- [5] Pethig, R., *Dielectric and electronic properties of biological materials*, John Wiley and Sons, Ltd, 1979
- [6] Green, N.G. and Morgan H., Dielectrophoretic investigations of submicrometers latex spheres, *J. Phys. D: Applied Physics*, 1997, vol. 30 pp 2626-2633
- [7] Jones, T.B., *Electromechanics of particles*, Cambridge University Press, 1995
- [8] Fuhr, G., Positioning and manipulation of cells and microparticles using miniaturized electric field traps and travelling waves, *Sensors and Materials*, JP, 1995, vol 7, n°2, 131-146
- [9] Jones, T.B., Dispensing picoliter droplets using dielectrophoretic (DEP) microactuation, *Microscale Thermophysical Engineering*, 2004, vol. 8, pp 271-283
- [10] Green, N. G., Ramos, A., Gonzalez, A., Morgan, H. and Castellanos, A., Fluid flow induced by non-uniform AC electric fields in electrolytes on

- microelectrodes III: Observation of streamlines and numerical simulation,  
Physical Review E, 2002, 66(026305),225
- [11] Berge, B., Electrocapillarité et mouillage de films isolants par l'eau, C.R. Acad. Sci. Paris, 1993, III 317 p. 157-163
- [12] Jones, T.B., An electromechanical interpretation of electrowetting, Journal of Micromech. Microeng., 2005, vol. 15, pp 1184-1187
- [13] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Electrodynamics of continuous media, Pergamon Press, Oxford, 1960, section 15
- [14] Carin, M., Barthès-Biesel, D., Edwards-Lévy, F., Postel, C. and Andrei, D.C., Compression of biocompatible liquid-filled HSA-alginate capsules: determination of the membrane mechanical properties, Biotechnology and Bioengineering Journal, 2003, vol. 82, No. 2, pp 207-212
- [15] Lundgaard, L.E., Berg, G., Pederson, A. and Nilsen, P.J., Electrocoalescence of water drop pairs in oil, Proceedings of the 14th International Conference on Dielectric Liquids, 2002, Austria, July 7-12th, 2002
- [16] Castellanos, A., Electrohydrodynamics, Springer-Verlag Series, 1998
- [17] Maxwell, J.C., A treatise on electricity and magnetism, vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 1998
- [18] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie\\_des\\_perturbations](http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_perturbations)
- [19] Melcher, J.R. and Taylor, G.I., Electrohydrodynamics: A review of the role of interfacial shear stresses, Annual Review of Fluid Mechanics, 1969, vol. 1, pp 111-146
- [20] Happel, J. and Brenner, H., Low Reynolds number hydrodynamics, Martinus Nijhoff Publishers, 1986
- [21] Tsamopoulos, J. and Brown, R.A., Nonlinear oscillations of inviscid drops and

bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 127, pp 519-537

[22] Tsamopoulos, J. and Brown, R.A., Resonant oscillations of inviscid charged drops, *Journal of Fluid Mechanics*, 1984, vol. 147, pp 373-395

[23] Viswanath, D., The Lindstedt-Poincaré technique as an algorithm for computing periodic orbits, *SIAM Review*, 2001, vol. 43, No. 3, pp 478-495

[24] Ingber, M.S. and Kempka, S.N., A Galerkin implementation of the generalized Helmholtz decomposition for vorticity formulations, *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 169, pp 215-237

[25] Benselama, A.M., Modélisation numérique du comportement d'une particule sous champ électrique dans les microsystèmes : de la déformation au déplacement, Thèse de Doctorat, Grenoble 2005 (principalement chapitre 2 et Annexe 5.2)

[26] Joseph, D.D., Domain perturbations: the higher order theory of infinitesimal water waves, *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 1973, vol. 51, pp 295-303

[27] Grigor'ev, A.I. and Shiryayeva, S.O., Capillary oscillations of a charged droplet of viscous fluid with finite conductivity, *Fluid Dynamics*, 1997, vol. 32, No.5, pp 704-713

[28] Shiryayeva, S.O., Capillary oscillations of a charged viscous spheroidal droplet, *Technical Physics*, 1998, vol. 43, No. 4, pp 366-372

[29] Shiryayeva, S.O., Koromyslov, V.A. and Grigor'ev, O.A., Reduction in the critical conditions for instability of a highly charged droplet moving relative to a medium, *Technical Physics Letters*, 1998, vol. 24, No. 7, pp 523-524

[30] 'Disintegration of Water Drops in an Electric Field by Geoffrey Taylor' *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 280, No. 1382 (Jul. 28, 1964), pp. 383-397 Published by: The Royal Society.