

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des sciences**

**Département de physique**

**MEMOIRE DE MAGISTER**

en physique

Spécialité : Physique Théorique

**METHODE DE NIKIFOROV UVAROV APPLIQUEE AUX CAS DE  
POTENTIELS PT-SYMETRIQUES**

Par

ARAB Louiza

**Devant le jury composé de :**

<b>S. Boukraa</b>	<b>Professeur, U de Blida</b>	<b>Président</b>
<b>R. Khelifi</b>	<b>Maître de conférences A, U de Blida</b>	<b>Examineur</b>
<b>S.A. Yahiaoui</b>	<b>Maître de conférences B, U de Blida</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Bentaiba</b>	<b>Professeur, U de Blida</b>	<b>Rapporteur</b>

**Blida, Mai 2012**



## RESUME

Le formalisme de la mécanique quantique  $PT$  symétrique est basée sur les Hamiltoniens complexes, qui ne sont pas hermitiens mais invariants sous la symétrie  $PT$ , ces Hamiltoniens ont un spectre d'énergie réel et positif.

Le calcul analytique exact de spectre d'énergie et de la fonction d'onde correspondante de ces Hamiltoniens nécessite des méthodes analytiques, parmi lesquelles une méthode fondée à la fois sur des principes physiques et le calcul exact connu sous le nom : méthode de Nikiforov Uvarov. Cette méthode permet de réduire les équations différentielles du second ordre aux équations différentielles du type hypergéométrique, cette dernière admet comme solution particulière des fonctions spéciales fondées sur la relation de Rodrigues pour les polynômes orthogonaux classiques (polynômes de Jacobi, de Laguerre, d'Hermite).

Ce travail a pour but, d'une part, de résoudre les équations de Schrödinger unidimensionnelles relative aux potentiels  $PT$  symétriques par la méthode de Nikiforov Uvarov et d'autre part, de prouver la réalité et la positivité du spectre d'énergie.

## ABSTRACT

The formalism of the  $PT$  symmetric quantum mechanics is based upon the complex Hamiltoniens non Hermitian but invariant under the  $PT$  symmetry, these Hamiltoniens have a real and positive energy spectrum.

The exact analytic calculation of energy spectrum and the wave function corresponding of these Hamiltoniens is not quite, what requires analytic methods, among which a method founded at a time on physical principles and the exact calculation known under the name: method of Nikiforov Uvarov. This method permits to reduce the differential equations of the second order to generalized equations of hypergéométric type, this last admits like particular solution of the special functions founded on the relation of Rodrigues for the classic orthogonal polynomials (polynomials of Jacobi, Laguerre, Hermite).

On the one hand, this work has for goal, to solve the one dimensional Schrödinger equations of the potential symmetrical  $PT$  by the method of Nikiforov Uvarov and on the other hand, to prove the reality and the positivity of the energy spectra.

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au laboratoire de physique théorique et interactions rayonnement-matière (*LPTHIRM*) du département de physique, faculté des sciences de l'université Saad DAHLAB de Blida, sous la direction du professeur Mustapha BENTAIBA, que je ne pourrai jamais remercier suffisamment, pour avoir dirigé mon travail avec une grande efficacité,

Je remercie particulièrement :

Mr. S. Boukraa	Professeur. U.S.D. Blida
Mr. R. Khelifi	M.C.A. U.S.D. Blida
Mr. S-A. Yahiaoui	M.C.B. U.S.D. Blida

Pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail et de composer le jury.

Mes sincères remerciements à Mr. S-A. Yahiaoui pour son aide et son encouragement.

Enfin, je ne saurais assez remercier toute ma famille, plus particulièrement mon père et ma mère qui m'ont toujours encouragé, madame Haddad pour son soutien.

Je dédie ce travail à :

Mes frères : Mohamed, Hamid, Samir, Mebarek, Alla Eddine et Khier Eddine.

Mes sœurs : Malika, Hadda et la petite Amel.

Toutes mes amies.

## TABLE DES MATIERES

RESUME.....	2
REMERCIEMENTS.....	5
TABLE DES MATIERES.....	6
INTRODUCTION.....	7
1. LA MECANIQUE QUANTIQUE $PT$ -SYMETRIQUE	
1.1. Hamiltoniens non hermitiens $PT$ - symétriques.....	13
1.2. Réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $PT$ symétrique.....	15
1.3. Produit scalaire des Hamiltoniens $PT$ symétriques.....	15
1.4. Pseudo-herméticité .....	17
2. LA METHODE DE NIKIFOROV UVAROV	
2.1. Introduction .....	19
2.2. La méthode de Nikiforov Uvarov (NU).....	20
2.3. Recherche du spectre d'énergie et des fonctions d'ondes relatifs aux différentes formes de potentiel de Woods saxon plus Rosen-Morse.....	34
2.4. Recherche du spectre d'énergie et des fonctions d'ondes relatifs aux différentes formes de potentiel de Woods saxon.....	47
2.5. Recherche du spectre d'énergie et des fonctions d'onde relatifs aux différentes formes de potentiel de Rosen-Morse .....	50
3. APPLICATION DE LA METHODE DE NIKIFOROV UVAROV AU POTENTIEL DE SCARF II	
3.1. Introduction .....	53
3.2. Recherche du spectre d'énergie et des fonctions d'onde relatifs au potentiel de Scarf II.....	54
CONCLUSION.....	62
REFERENCES.....	64

## INTRODUCTION

La mécanique quantique est un outil fondamental pour décrire et étudier des phénomènes physiques à une échelle microscopique, là où les lois de la mécanique classique cessent d'être valables.

La mécanique quantique est une théorie physique qui a pris naissance vers la fin du 19<sup>ème</sup> siècle et le début du 20<sup>ème</sup> siècle et cela grâce aux idées de quantification de l'énergie. Les travaux effectués en 1900 par Planck sur le rayonnement du corps noir à l'équilibre thermique, une cavité chauffée qui émet un rayonnement électromagnétique (lumière) instantanément absorbé par les parois, pour rendre compte du spectre lumineux par le calcul théorique des échanges d'énergie d'émission et d'absorption. Planck a proposé l'hypothèse de quanta, de telle sorte que ces échanges sont discontinus et proportionnels aux fréquences du rayonnement lumineux [1], c'est-à-dire que l'énergie n'est pas émise de manière continue, mais par paquets. Le modèle du corps noir alors permit à Planck de découvrir la quantification des interactions électromagnétiques qui fut l'un des fondements de la physique quantique. Puis en 1905, Einstein réinvestit les résultats de Planck pour étudier l'effet photoélectrique, et conclut que la lumière se comportait à la fois comme une onde et un flux de particules. L'effet photoélectrique a donc fourni une confirmation simple de l'hypothèse des quanta de M. Planck à la suite d'un raisonnement thermodynamique dans lequel il a donné aux probabilités un sens physique (celui de fréquence d'états pour un système). Einstein fut amené à considérer que ce ne sont pas seulement les échanges d'énergie qui sont discontinus, mais l'énergie du rayonnement lumineux elle-même [2]. Il montra que cette énergie est proportionnelle à la fréquence de l'onde lumineuse :  $E = h\nu$ . Cela donnait immédiatement l'explication de l'effet photoélectrique observé 20 ans auparavant par Hertz. En s'appuyant sur l'idée de Planck, Einstein a pu expliquer quelques phénomènes tels que le rayonnement du corps noir, l'effet photoélectrique. Le premier exemple expérimental de quantification de l'énergie remonte à l'observation, en 1885, des raies de Balmer lors de la luminescence d'atome d'hydrogène. Ainsi, par la suite, et au fil

des années, les idées commencent à se développer de plus en plus pour donner naissance à de nouvelles théories telles que : la théorie de Bohr de l'atome d'hydrogène, la théorie des quanta, qui est basée aussi sur les améliorations introduites par Sommerfeld sur le modèle de Bohr en 1916.

En 1926, Heisenberg a proposé d'abandonner la notion de trajectoire c'est-à-dire la formulation hamiltonienne [3] du système et il a pu démontrer que les règles de quantification pouvaient être obtenues par des équations séparables si les énergies étaient définies comme les valeurs propres de l'opérateur Hamiltonien. Cette idée d'introduire des opérateurs pour quantifier le mouvement d'un système, repose aussi sur la formulation hamiltonienne du problème mécanique, connue sous le nom de quantification canonique [4]. Cette méthode de quantification des champs a été introduite par Dirac en 1927 pour l'électrodynamique quantique [5]. Elle consiste à partir d'un champ classique tel que le champ électromagnétique, à le considérer comme un système physique et à remplacer les grandeurs classiques décrivant l'état du champ par un état quantique et des observables de la physique quantique. On aboutit naturellement à la conclusion que l'énergie du champ est quantifiée, et chaque quantum représente une particule.

Schrödinger introduit le concept de fonction d'onde, où il stipule que l'état d'un système est décrit par une fonction d'onde dont l'évolution dans le temps est régie par l'équation de Schrödinger pour une particule non relativiste suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$$

où  $\Delta$  est le laplacien,  $m$  la masse d'une particule,  $\hbar$  constante de Planck,  $V(x)$  le potentiel d'une particule, et  $\psi(x, t)$  la fonction d'onde.

Sous cette forme on voit que l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles faisant intervenir des opérateurs linéaires, ce qui permet d'écrire la solution générale comme la somme des solutions particulières. L'équation est dans la grande majorité des cas trop compliquée pour admettre une solution analytique.

Le premier grand succès de Schrödinger a été de démontrer que les solutions stationnaires de l'atome d'hydrogène et de l'oscillateur harmonique [6] n'existaient que pour des valeurs quantifiées de l'énergie, et que ses valeurs correspondaient bien aux résultats trouvés par les règles de Bohr-Sommerfeld pour l'atome d'hydrogène et aux résultats de Heisenberg



pour l'oscillateur harmonique. Bien que les formulations soient apparemment très différentes, de Heisenberg et de Schrödinger, cependant il est possible d'établir le lien entre les deux formulations.

La seule interprétation simple de la fonction d'onde consiste à adopter le point de vue probabiliste : c'est-à-dire, si une particule est décrite par une fonction d'onde  $\psi(x, t)$ , la probabilité de la trouver au point  $x$  et à l'instant  $t$  est égale au module carré de cette fonction  $|\psi(x, t)|^2$ . Cette interprétation physique de la fonction d'onde a été donnée par Max Born en 1926.

Les niveaux d'énergies d'une particule correspondant aux états stationnaires sont donnés par l'équation aux valeurs propres suivantes:

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

où  $H$  est l'opérateur Hamiltonien,  $E$  est l'énergie et  $\psi(x)$  la fonction d'onde correspondante. Selon la forme de l'interaction, les solutions physiques peuvent être de deux natures différentes. Les solutions étendues dans l'espace, c'est-à-dire qui ne s'annulent qu'à l'infini, représentent les états de diffusion et sont associées à des énergies appartenant au spectre continu de la particule. Par contre, les solutions localisées dans l'espace, c'est-à-dire qui s'annulent à l'extérieur d'un domaine fermé et borné, représentent les états liés [3, 6] et correspondent à des énergies discrètes appartenant au spectre quantifié. Un système physique peut avoir uniquement des états de diffusion ou uniquement des états liés comme il peut avoir les deux à la fois.

En mécanique quantique les systèmes physiques sont décrits par des Hamiltoniens Hermitiens dont les valeurs propres sont réelles. Ces dernières années des Hamiltoniens non Hermitiens dont le spectre est réel et positif, ont été étudiés. Ces Hamiltoniens sont invariants par la réflexion de l'espace  $P$  et le renversement du temps  $T$ . C'est le formalisme de la mécanique quantique  $PT$  symétrique [7-14].

Plus tard, dans un développement important de Mostafazadeh [15-22], il a été démontré que le concept de  $PT$  symétrie est enraciné dans la théorie de la pseudo Hermécticité.

Depuis l'introduction de l'équation fondamentale de la mécanique quantique par Schrödinger, on n'a pas cessé d'essayer de lui trouver des méthodes de résolution adéquates. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : les méthodes numériques et les méthodes analytiques. Les méthodes numériques ont prouvé qu'elles sont

de puissants et fructueux outils pouvant décrire les systèmes physiques les plus compliqués. Cependant, les méthodes analytiques, aussi puissantes que les précédentes, offrent en plus l'avantage d'être basées sur des principes physiques.

Dans ce mémoire nous présentons la méthode de Nikiforov Uvarov [23-29], cette méthode est basée sur la réduction des équations différentielles linéaires du second ordre aux équations généralisées du type hypergéométriques. Elle permet d'obtenir des solutions analytiques exactes en termes de fonctions spéciales orthogonales [23,30], ainsi que le spectre d'énergie du système physique considéré.

L'objet de ce mémoire est d'appliquer la méthode de Nikiforov Uvarov pour résoudre l'équation de Schrödinger unidimensionnelle, dans le cas des Hamiltoniens complexes  $PT$  symétrique, pour déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes.

Dans le chapitre 1, nous donnons une brève présentation de la nouvelle théorie quantique  $PT$  symétrique s'appliquant aux Hamiltoniens non Hermitiens. Elle concerne les Hamiltoniens qui sont invariants par la réflexion de l'espace  $P$  et le renversement du temps  $T$ . Cette théorie a été principalement développée par Bender et ses collaborateurs [7-14]. Ces Hamiltoniens ont un spectre en énergie réel et positif, possédant un produit scalaire défini positif pour lequel la norme  $CPT$  des états est positive et l'évolution temporelle est unitaire. Mostafazadeh a présenté [15] une alternative à la mécanique quantique conventionnelle, dans laquelle les Hamiltoniens non Hermitiens sont pseudo hermitiens dont les valeurs propres sont réelles. Le but de ce nouveau concept est de trouver une relation mathématique entre un Hamiltonien hermitien  $h$  et un Hamiltonien pseudo hermitien  $H$ .

Le chapitre 2 contient une présentation détaillée de la méthode de Nikiforov Uvarov [23-29], où nous donnons les principes essentiels de la méthode de Nikiforov Uvarov, c'est à dire les équations de base relatives à cette méthode, qui permet de déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes. Et, nous démontrons comment cette méthode s'applique aux différentes formes de potentiel de Woods-Saxon [31-34], aux différentes formes de potentiel Rosen Morse plus le potentiel de Woods-Saxon [35] et aux différentes formes de potentiel de Rosen-Morse[36].

Dans le chapitre 3, nous appliquons la méthode de Nikiforov Uvarov [23] au potentiel de Scarf hyperbolique  $PT$  – symétrique pour la détermination des valeurs propres de l'énergie et les fonctions propres correspondantes. Les résultats obtenus seront comparés à ceux donnés dans littérature [37].

Ce travail est finalisé par une conclusion générale et des perspectives dans ce domaine.

## CHAPITRE 01

### LA MECANIQUE QUANTIQUE $PT$ -SYMETRIQUE

Il est bien connu en mécanique quantique que les systèmes physiques sont décrits par des Hamiltoniens hermétiques dont les valeurs propres sont réelles. Cependant, il existe des classes d'Hamiltoniens non hermitiens dont les valeurs propres sont réelles. Ces Hamiltoniens vérifient la condition d'être invariants sous les opérations combinées de réflexion de parité  $P$  et de renversement du temps  $T$ . Cette double opération est appelée  $PT$  symétrie [7-14]. Ces dernières années les Hamiltoniens  $PT$  symétriques ont fait l'objet d'un grand intérêt en mécanique quantique [38-41]. Ces Hamiltoniens apparaissent en physique statistique, biologie des populations [42] et en physique de l'état solide [43].

Par définition, les Hamiltoniens à symétrie  $PT$  sont invariants aux réflexions de l'espace et de renversement du temps tel que  $PTH(PT)^{-1} = PTHPT = H$  :

$$\begin{aligned}
 \text{Réflexion d'espace} \quad PpP^{-1} &= -p, \quad PxP^{-1} = -x, \\
 \text{renversement du temps} \quad TpT^{-1} &= -p, \quad TxT^{-1} = x, \quad TiT^{-1} = -i.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

En terme de parties réelle et imaginaire des opérateurs  $x$  et  $p$ ,  $x = \text{Re } x + i\text{Im } x$  et  $p = \text{Re } p + i\text{Im } p$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 \text{Réflexion d'espace} \quad P: \quad \text{Re } x &\rightarrow -\text{Re } x, \quad \text{Im } x \rightarrow -\text{Im } x, \\
 &\text{Re } p \rightarrow -\text{Re } p, \quad \text{Im } p \rightarrow -\text{Im } p, \\
 \text{renversement du temps} \quad T: \quad \text{Re } x &\rightarrow \text{Re } x, \quad \text{Im } x \rightarrow -\text{Im } x, \\
 &\text{Re } p \rightarrow -\text{Re } p, \quad \text{Im } p \rightarrow \text{Im } p.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

où  $p$  et  $x$  représentent respectivement les opérateurs d'impulsion et de position.

### **I.1. Hamiltoniens non hermitiens $PT$ symétriques :**

Bender et Boettcher [8] ont étudié des Hamiltoniens non hermitiens de la forme :

$$H = p^2 + x^2(ix)^\varepsilon, \quad (1.3)$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre réel, ces Hamiltoniens sont invariants sous la transformation simultanée de parité  $P$  et de renversement du temps  $T$ , c'est-à-dire qu'ils commutent avec l'opérateur  $PT$ .

Bender et Boettcher ont prouvé que cette classe d'Hamiltoniens possède un spectre réel et positif uniquement pour  $\varepsilon \geq 0$ , pour les valeurs négatives de  $\varepsilon$ , le spectre est complexe et l'Hamiltonien (1.3) se réduit à celui d'un oscillateur harmonique dans le cas où  $\varepsilon = 0$ . Et ils ont vérifié numériquement que les fonctions propres de l'Hamiltonien (1.3) sont les fonctions propres de l'opérateur  $PT$  pour  $\varepsilon \geq 0$ , dans ce cas la  $PT$  symétrie est non brisée. Cependant, pour  $\varepsilon < 0$  la symétrie  $PT$  de l'Hamiltonien est spontanément brisée, les fonctions propres de l'Hamiltonien ne sont pas fonctions propres de l'opérateur  $PT$  et le spectre d'énergie est complexe et une transition de phase survient pour  $\varepsilon = 0$ .

#### **I.1.2. Niveaux d'énergie de l'Hamiltonien (1.3)**

Le spectre de l'Hamiltonien (1.3) est obtenu en résolvant l'équation de Schrödinger associée :

$$-\psi''(x) + [x^2(ix)^\varepsilon - E]\psi(x) = 0, \quad (1.4)$$

La figure 1.1 montre les niveaux d'énergie de l'Hamiltonien (1.3) en fonction du paramètre réel  $\varepsilon$ .

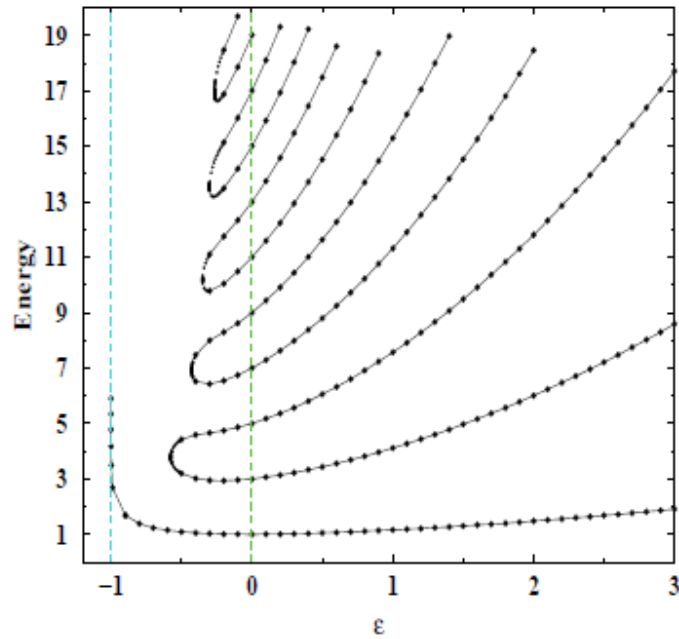


Figure (1.1) : les niveaux d'énergie de l'Hamiltonien  $H = p^2 + x^2(ix)^\varepsilon$  en fonction du paramètre  $\varepsilon$ , d'après [8].

La figure 1.1 montre trois cas différents en fonction du paramètre  $\varepsilon$  :

- a) pour  $\varepsilon \geq 0$ , le spectre est réel et positif, pour  $\varepsilon = 0$  correspond aux niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique.
- b) Pour  $-1 < \varepsilon < 0$ , il y a un nombre fini de valeurs propres réelles et positives et un nombre infini de paires de valeurs propres complexes. Lorsque  $\varepsilon$  décroît de 0 à  $-1$ , le nombre de valeurs propres décroît, quand  $\varepsilon \leq -0.57793$  la seule valeur propre restante est l'énergie de l'état lié.
- c) Pour  $\varepsilon < -1$ , le spectre ne comporte plus de valeurs propres réelles.

L'étude sur l'Hamiltonien (1.3) a été généralisée à la théorie quantique des champs. Dans le système de champ scalaire, où le Lagrangien est  $PT$  symétrique défini par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\phi^2(i\phi)^\varepsilon \quad ((g, \varepsilon) \geq 0),$$

où  $\varepsilon$  et  $g$  sont des paramètres réels, l'Hamiltonien de cette théorie est non hermitien. Cependant le spectre est réel.

### **I.2. Réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $PT$ symétrique**

La réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien  $PT$  symétrique est une conséquence de la non brisure de la symétrie  $PT$ , qui signifie que les fonctions propres de  $H$  sont simultanément fonctions propres de  $PT$ . Les fonctions propres de  $H$  ne sont pas fonctions propres de  $PT$ , pour montrer cela, notons que les valeurs propres de l'opérateur  $PT$  sont de la forme  $e^{i\theta}$  ( $\theta$  est réel). Et effet, si  $\Psi$  fonction propre de l'opérateur  $PT$  correspond à la valeur propre  $\lambda$ , alors

$$PT\Psi = \lambda\Psi, \quad (1.5)$$

où  $(PT)^2 = 1$ , en appliquant  $PT$  à gauche sur les deux membres de l'équation aux valeurs propres (1.5), on obtient  $\lambda^*\lambda = 1$ , donc  $\lambda = e^{i\theta}$ . Nous supposons  $\Psi$  fonction propre de  $H$  de la valeur propre  $E$  et  $\Psi$  aussi fonction propre de  $PT$ , l'équation aux valeurs propres est comme suit :

$$H\Psi = E\Psi, \quad (1.6)$$

en faisant agir  $PT$  sur l'équation aux valeurs propres (1.6), nous trouvons que  $E$  est réel :  $E = E^*$

### **I.3. Produit scalaire des Hamiltoniens $PT$ symétriques**

La question qui se pose est de savoir si les Hamiltoniens possédant une symétrie  $PT$  non brisée, et dont le spectre est entièrement réel et positif, permettent de savoir si les fonctions propres de tels Hamiltoniens peuvent engendrer des espaces de Hilbert munis de produits scalaires conduisant à des normes positives.

pour  $\varepsilon \geq 0$ , l'Hamiltonien (1.3) possède une symétrie  $PT$  non brisée donc les fonctions propres  $\psi_n(x)$  sont simultanément fonctions propres de l'opérateur  $PT$  :  $PT\psi_n(x) = \psi_n^*(-x) = \psi_n(x)$ .

Ces fonctions propres forment un système complet, elles vérifient la relation de fermeture suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi_n(x) \psi_n(y) = \delta(x - y). \quad (1.7)$$

Notons que le facteur  $(-1)^n$  dans la somme n'apparaît pas dans la mécanique quantique conventionnelle.

Le produit scalaire est construit à partir de l'opérateur  $PT$ , de deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  quelconques :

$$(f, g) \equiv \int_c dx [PTf(x)] g(x), \quad (1.8)$$

où  $PTf(x) = [f(-x)]^*$  et l'intégrale est effectuée le long du contour dans le plan complexe. Notons que le produit scalaire associé à la norme  $(f, f)$  est indépendant de la phase de  $f(x)$  et il est conservé dans le temps. Les fonctions propres  $\phi_m(x)$  et  $\phi_n(x)$  de l'Hamiltonien (1.3) vérifient la relation suivante :

$$(\phi_n(x), \phi_m(x)) = (-1)^n \delta_{nm}, \quad (1.9)$$

Une alternance de signe de la norme de ces fonctions propres apparaît. Il a été vérifié numériquement avec une très bonne précision [7], que ce résultat est apparemment vrai pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$ .

Pour résoudre le problème de norme négative, Bender [7] a montré que tous les Hamiltoniens  $PT$  symétriques dont la symétrie n'est pas brisée, possèdent une autre symétrie engendrée par un nouvel opérateur linéaire dénoté  $C$  est appelé opérateur conjugaison de charge. Cet opérateur satisfait donc,

$$[H, C] = [C, PT] = 0, \quad (1.10)$$

ce qui donne

$$[H, CPT] = 0. \quad (1.11)$$



L'opérateur  $C$  est représenté dans l'espace de configuration par :

$$C(x) = \sum_n \phi_n(x) \phi_n(y). \quad (1.12)$$

Le carré de l'opérateur  $C$  est égal à l'opérateur unité ( $C^2 = 1$ ). Ainsi les valeurs propres de  $C$  sont  $\pm 1$ . L'action de  $C$  sur les fonctions propres de  $H$  est donnée par :

$$C\phi_n(x) = (-1)^n \phi_n(x). \quad (1.13)$$

### **1.3.1. Produit scalaire $CPT$ .**

Nous définissons un nouveau produit scalaire à partir du produit des trois opérateurs  $C$ ,  $P$  et  $T$  dénoté  $CPT$  qui a une norme définie positive.

$$\langle f | g \rangle = \int_C dx [CPTf(x)] g(x). \quad (1.14)$$

Le fait que  $H$  commute avec  $PT$  et avec  $CPT$  donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) [CPT\phi_n(y)] = \delta(x - y). \quad (1.15)$$

Le produit scalaire  $CPT$  est défini maintenant positif, il est défini à partir des fonctions propres  $\phi_n(x)$  de l'Hamiltonien  $H$  du système.

### **1.4. Pseudo-Herméiticité :**

Mostafazadeh a montré dans une série de travaux [15-22] que tout Hamiltonien  $PT$  symétrique  $H$  qui agit sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est pseudo-hermitien, s'il existe un opérateur linéaire hermitien  $\eta$ , ainsi,  $H$  et son adjoint  $H^+$  sont reliés par

$$H^+ = \eta H \eta^{-1}, \quad (1.16)$$

où  $\eta$  est appelé opérateur métrique.

D'autre part, parmi l'infinité de l'opérateur métrique  $\eta$  satisfait cette condition, il y a un opérateur  $\eta_+$  qui est utilisé pour construire un produit scalaire défini positif

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_+ := \langle \cdot | \eta_+ \cdot \rangle, \quad (1.17)$$

où l'Hamiltonien  $H$  et son adjoint  $H^+$  sont reliés par

$$H^+ = \eta_+ H \eta_+^{-1}. \quad (1.18)$$

Mostafazadeh [19] a montré aussi à partir d'un Hamiltonien hermitien  $h$ , on peut définir un Hamiltonien pseudo hermitien  $H$  par la relation :

$$h = \eta_+^{1/2} H \eta_+^{-1/2}, \quad (1.19)$$

Ainsi, le passage de la mécanique quantique conventionnelle à la mécanique quantique pseudo-hermitienne par la définition d'une métrique dans l'espace de Hilbert est muni d'un produit scalaire positif.

## CHAPITRE 02

### LA METHODE DE NIKIFOROV UVAROV (NU)

#### II .1.Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles, qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système physique ; elle a la forme :  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$  où  $H$  est l'opérateur Hamiltonien (associé à l'énergie totale) du système considéré. Celui-ci est la somme des opérateurs d'énergie cinétique et potentielle  $H(\vec{r}, t) = T + V(\vec{r}, t)$ . L'opérateur Hamiltonien dépend donc du temps si les potentiels dépendent eux-mêmes explicitement du temps. Lorsque l'opérateur  $H$  est en fonction du temps, on résout l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Par contre, si l'Hamiltonien ne dépend pas du temps, on est ramené par séparation des variables spatiale et temporelle à une équation aux valeurs propres, appelée équation de Schrödinger stationnaire. Ces solutions pour quelques potentiels ont une application importante dans la physique atomique, nucléaire, physique des hautes énergies, physique des particules. Pour résoudre ce type de problème, plusieurs méthodes existent, notamment la méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) [23-29]. Cette dernière nous donne une solution exacte des valeurs propres d'énergie, et les fonctions d'onde correspondantes. Il y a eu plusieurs applications qui ne se sont pas basées que sur l'équation de Schrödinger avec quelques potentiels connus comme le potentiel de Hulthén [24], potentiel de Morse [25], mais aussi sur les équations de Klein Gordon [26,27] et de Dirac [27].

Les fonctions spéciales [23,30] apparaissent dans les solutions de plusieurs problèmes de mécanique quantique relativiste et non-relativiste, où les équations différentielles dont les solutions sont les fonctions spéciales, peuvent être résolues en utilisant la méthode de

Nikiforov Uvarov [23]. Cette méthode a été développée pour construire les solutions des équations différentielles linéaires du deuxième ordre général qui sont des polynômes orthogonaux spéciaux [23,30]. C'est bien connu que toute équation de Schrödinger peut être écrite comme équation différentielle linéaire de deuxième ordre. Par conséquent, pour appliquer la méthode de Nikiforov Uvarov [23], on écrit l'équation de Schrödinger sous forme d'une équation différentielle généralisée du type hypergéométrique :

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0. \quad (2.1)$$

dans laquelle  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et  $\tilde{\tau}$  un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. On rencontre des équations de ce type en résolvant les équations de Laplace et d'Helmholtz en coordonnées curvilignes par séparation des variables, dans les problèmes fondamentaux de la mécanique quantique, mouvement d'une particule dans un champ à symétrie sphérique, oscillateur harmonique, la recherche des solutions d'équation de Schrödinger[24,25], de Klein –Gordon [26,27] et de Dirac[28] et pour le potentiel coulombien, mouvement d'une particule dans un champ électrique ou magnétique homogène etc. L'équation (2.1) apparaît également dans un bon nombre de problèmes, tels que les modèles de la physique atomique, moléculaire et nucléaire liés à l'étude des processus de diffusion, d'interaction des neutrons avec les noyaux lourds, à l'analyse du spectre de rotation des équations de Schrödinger aux potentiels de Morse [25], de Pöschl-Teller de Woods-Saxon [33,34], de Kratzer [44]. Les équations du type (2.1) admettent comme solutions particulières des fonctions spéciales appartenant aux classes suivantes : polynômes orthogonaux classiques [23] (polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite), fonctions sphériques, fonctions cylindriques, fonctions hypergéométriques. Ces fonctions sont souvent appelées fonctions spéciales [23,30] de la physique mathématique.

## **II.2. La méthode de Nikiforov -Uvarov (NU)**

La Méthode de Nikiforov Uvarov [23] a été développée par Nikiforov et Uvarov (Méthode de NU). Elle est basée sur la réduction des équations différentielles du deuxième ordre à une équation généralisée du type hypergéométrique [30]. Dans cette méthode, pour chaque potentiel l'équation de Schrödinger peut être transformée en une équation différentielle hypergéométrique grâce à un changement de variable bien

déterminé, les solutions de l'équation hypergéométrique sont des polynômes orthogonaux classiques qui sont utilisés pour trouver les fonctions d'onde.

### II.2.1. Polynômes hypergéométriques

La nature des coefficients dans une équation différentielle peut renseigner sur celle de ses solutions particulières. Nous considérons que la nature des coefficients dans l'équation (2.1) sont des polynômes, il est évident qu'on ne peut pas se douter qu'elle admette des solutions polynômiales.

L'équation (2.1) peut être résolue de la façon suivante : tout d'abord, il convient de faire le changement suivant  $\psi(s) = \Phi(s)\mathcal{Y}(s)$ . Ce changement permet d'une part, de mettre l'équation (2.1) sous une forme plus simple, qui se prête mieux à la résolution c'est-à-dire, pour trouver le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes, et d'autre part, pour montrer que l'équation (2.1) est de type hypergéométrique. L'équation (2.1) devient ;

$$\mathcal{Y}''(s) + \left( \frac{2\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \right) \mathcal{Y}'(s) + \left( \frac{\Phi''(s)}{\Phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)\Phi'(s)}{\sigma(s)\Phi(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \right) \mathcal{Y}(s) = 0, \quad (2.2)$$

la fonction  $\Phi(s)$  est définie par l'équation suivante :

$$\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}, \quad (2.3)$$

où  $\pi(s)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Nous dérivons l'équation (2.3), nous obtenons,

$$\frac{\Phi''(s)}{\Phi(s)} = \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} \right)^2 + \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} \right)' = \left( \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)^2 + \left( \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)', \quad (2.4)$$

l'équation (2.2) devient donc :

$$\sigma(s)\mathcal{Y}''(s) + (2\pi(s) + \tilde{\tau}(s))\mathcal{Y}'(s) + \left( \frac{\pi^2(s) - \pi(s)(\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)) + \tilde{\sigma}(s)}{\sigma(s)} + \pi'(s) \right) \mathcal{Y}(s). \quad (2.5)$$

Nous remarquons dans l'équation (2.5) que le coefficient de  $\mathcal{Y}'(s)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 et le coefficient de  $\mathcal{Y}(s)$  est constant. L'équation (2.5) est réécrite sous la forme :

$$\sigma(s)\mathcal{Y}''(s) + \tau(s)\mathcal{Y}'(s) + \lambda\mathcal{Y}(s) = 0, \quad (2.6)$$

avec

$$\tau(s) = 2\pi(s) + \tilde{\tau}(s) \quad (2.7)$$

et

$$\lambda = K + \pi'(s), \quad (2.8)$$

et

$$K = \frac{\pi^2(s) - \pi(s)(\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)) + \tilde{\sigma}(s)}{\sigma(s)}, \quad (2.9)$$

où  $\tau(s)$  est un polynôme de premier degré.

L'équation (2.6) est une équation du type hypergéométrique, et ses solutions sont des fonctions de type hypergéométrique. L'équation (2.1) est appelée donc équation généralisée de type hypergéométrique. L'équation (2.6) est donc de même type que (2.1). Nous trouvons de cette façon la classe des transformations qui laissent inchangé le type de l'équation : ce sont les transformations qu'on fait subir à (2.1) en opérant le changement  $\psi(s) = \Phi(s)\mathcal{Y}(s)$ , où la fonction  $\Phi(s)$  vérifie l'équation (2.3), quelque soit le polynôme du premier degré  $\pi(s)$ .

Pour définir le polynôme  $\pi(s)$  et la constante  $K$ , nous réécrivons l'équation (2.9) sous la forme :

$$\pi^2(s) + \pi(s)(\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)) + \tilde{\sigma}(s) - K\sigma(s) = 0, \quad (2.10)$$

La solution de la dernière équation est le polynôme  $\pi(s)$  donné par l'équation du second degré suivante :

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K \sigma(s)}. \quad (2.11)$$

Nous remarquons que  $\pi(s)$  est un polynôme du premier degré, donc le polynôme du second degré sous la racine doit être le carré d'un polynôme. C'est-à-dire nous annulons le discriminant du polynôme sous la racine. Nous obtenons alors la constante  $K$  qui peut prendre deux valeurs. Après avoir déterminé les deux valeurs de  $K$ , nous calculons le polynôme  $\pi(s)$  par la formule (2.11). Nous trouvons que le polynôme  $\pi(s)$  peut se mettre sous quatre formes différentes.

### **II.2.3. Les valeurs propres de l'équation du type hypergéométrique**

Pour trouver l'expression qui nous permet de déterminer les valeurs propres de l'équation du type hypergéométrique, nous partons du fait remarquable que l'équation du type hypergéométrique (2.6) admet une telle propriété fondamentale, que les dérivées des solutions de cette équation satisfont à leur tour une équation du type hypergéométrique. Pour prouver cela, nous dérivons les deux membres de l'équation (2.6), nous obtenons

$$\sigma(s)\mathcal{Y}'''(s) + (\sigma'(s) + \tau(s))\mathcal{Y}''(s) + (\tau'(s) + \lambda)\mathcal{Y}'(s) = 0, \quad (2.12)$$

on pose  $u_1(s) = \mathcal{Y}'(s)$  où  $\mathcal{Y}'(s)$  est la dérivée première de la fonction  $\mathcal{Y}(s)$  par rapport à  $s$ .

ce qui implique  $u_1'(s) = \mathcal{Y}''(s)$  et  $u_1''(s) = \mathcal{Y}'''(s)$ .

Ce qui conduit à l'équation hypergéométrique pour  $u_1(s) = \mathcal{Y}'(s)$  :

$$\sigma(s)u_1''(s) + \tau_1(s)u_1'(s) + \eta_1 u_1(s) = 0, \quad (2.13)$$

où

$$\tau_1(s) = \tau(s) + \sigma'(s), \quad (2.14)$$

et

$$\eta_1 = \lambda + \tau'(s). \quad (2.15)$$

Nous remarquons que  $\tau_1(s)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, et que  $\eta_1$  ne dépend pas de  $s$ , c'est-à-dire  $\eta_1$  est constant. L'équation (2.13) est une équation du type hypergéométrique. Inversement, si  $u_1(s)$  satisfait l'équation (2.13) alors la fonction  $\mathcal{Y}(s)$  est définie comme suit :

$$\mathcal{Y}(s) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(s)u_1'(s) + \tau(s)u_1(s)], \quad (2.16)$$

Nous montrons que la fonction  $\mathcal{Y}(s)$  obtenue par cette formule vérifie l'équation (2.6) et que sa dérivée se confond avec  $u_1(s)$ . C'est-à-dire nous avons prouvé que la dérivée de l'équation du type hypergéométrique satisfait à son tour à une équation du type hypergéométrique (2.13).

Pour déterminer l'expression qui nous permet de déterminer le spectre d'énergie, nous continuons la dérivation de l'équation (2.6) et nous dérivons les deux membres de l'équation (2.6) deux fois, nous obtenons :

$$\sigma(s)\mathcal{Y}''''(s) + (2\sigma'(s) + \tau(s))\mathcal{Y}'''(s) + (\sigma''(s) + 2\tau'(s) + \lambda)\mathcal{Y}''(s) = 0. \quad (2.17)$$

Avec  $\tau''(s) = 0$ ,  $\sigma(s)$  est un polynôme de premier degré.

On pose :  $u_2(s) = \mathcal{Y}''(s)$ ,

ce qui implique  $u_2'(s) = \mathcal{Y}'''(s)$  et  $u_2''(s) = \mathcal{Y}''''(s)$ ,

et nous obtenons l'équation hypergéométrique suivante pour  $u_2(s) = \mathcal{Y}''(s)$  :

$$\sigma(s)u_2''(s) + \tau_2(s)u_2'(s) + \eta_2u_2(s) = 0, \quad (2.18)$$

où

$$\tau_2(s) = \tau(s) + 2\sigma'(s), \quad (2.19)$$

et

$$\eta_2 = \lambda + 2\tau'(s) + \sigma''(s), \quad (2.20)$$



Nous remarquons que  $\tau_2(s)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, et que  $\eta_2$  ne dépend pas de  $s$ , c'est-à-dire,  $\eta_2$  est constant. Nous dérivons les deux membres de l'équation (2.6) trois fois, nous obtenons

$$\sigma(s)\mathcal{Y}''''''(s) + (2\sigma'(s) + \tau(s))\mathcal{Y}''''(s) + (\sigma''(s) + 2\tau'(s) + \lambda)\mathcal{Y}''''(s) = 0, \quad (2.21)$$

avec  $\sigma'''(s) = 0$ .

On pose :  $u_3(s) = \mathcal{Y}'''(s)$ ,

ce qui implique  $u_3'(s) = \mathcal{Y}''''(s)$  et  $u_3''(s) = \mathcal{Y}''''''(s)$ .

Nous obtenons une équation du type hypergéométrique pour  $u_3(s) = \mathcal{Y}'''(s)$  :

$$\sigma(s)u_3''(s) + \tau_3(s)u_3'(s) + \eta_3u_3(s) = 0, \quad (2.22)$$

où

$$\tau_3(s) = \tau(s) + 3\sigma'(s), \quad (2.23)$$

et

$$\eta_3 = \lambda + 3\tau'(s) + 3\sigma'(s), \quad (2.24)$$

$\tau_3(s)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, et que  $\eta_3$  ne dépend pas de  $s$  c'est-à-dire,  $\eta_3$  est constant.

De la même manière, nous dérivons l'équation (2.6)  $n$  fois, nous obtenons l'équation hypergéométrique ci-dessous pour  $u_n(s) = \mathcal{Y}^n(s)$  ( $\mathcal{Y}^{(n)}(s)$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $\mathcal{Y}(s)$  par rapport à  $s$ ) :

$$\sigma(s)u_n''(s) + \tau_n(s)u_n'(s) + \eta_nu_n(s) = 0, \quad (2.25)$$

dans laquelle

$$\tau_n(s) = \tau(s) + n\sigma'(s), \quad (2.26)$$

et

$$\eta_n = \lambda + n\tau'(s) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \quad (2.27)$$

où  $\tau_n(s)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, et que  $\eta_n$  ne dépend pas de  $s$  c'est-à-dire,  $\eta_n$  est une constante.

Si nous posons :

$$u_{n+1}(s) = u'_n(s), \quad (2.28)$$

implique que  $u''_n(s) = u'_{n+1}(s)$ .

L'équation (2.25) devient :

$$\sigma(s)u'_{n+1}(s) + \tau_n(s)u_{n+1}(s) + \eta_n u_n(s) = 0, n = 0,1,2, \dots \quad (2.29)$$

Ce qui nous donne :

$$u_n(s) = -\frac{1}{\eta_n} [\sigma(s)u'_{n+1}(s) + \tau_n(s)u_{n+1}(s)]. \quad (2.30)$$

Grâce à la propriété de l'équation (2.6) : les dérivées des solutions de l'équation du type hypergéométrique satisfont à leur tour une équation du type hypergéométrique. Cette propriété nous permet de construire une famille particulière de solutions de (2.6) correspondant à une valeur donnée des valeurs déterminées de  $\lambda$ . En effet, lorsque  $\eta_n = 0$  l'équation (2.25) admet une solution particulière qui est  $u_n(s) = \text{constante}$ , étant donné que  $u_n(s) = \mathcal{Y}^{(n)}(s)$  ( $\mathcal{Y}^{(n)}(s)$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $\mathcal{Y}(s)$  par rapport à la variable  $s$ ) cela permet de réécrire l'équation (2.27) sous la forme:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad (n = 0,1,2, \dots). \quad (2.31)$$

Ce qui permet de déterminer les niveaux d'énergie  $E_n$ , connaissant les polynômes  $\sigma(s)$ ,  $\tau(s)$  et la constante  $\lambda$ .

L'équation hypergéométrique admet une solution particulière  $\mathcal{Y}(s) = \mathcal{Y}_n(s)$ , qui est un polynôme de degré  $n$ . Ces solutions sont appelées des polynômes hypergéométriques. Pour

trouver ces polynômes hypergéométriques explicitement, nous multiplions l'équation (2.6) et (2.25) par la fonction  $\rho(s)$  et  $\rho_n(s)$  respectivement, nous obtenons les deux équations suivantes :

$$(\sigma\rho\mathcal{Y}'(s))' + \lambda\rho\mathcal{Y}(s) = 0, \quad (2.32)$$

$$(\sigma\rho_n u_n')' + \eta_n \rho_n u_n = 0, \quad (2.33)$$

où les fonctions  $\rho(s)$  et  $\rho_n(s)$  vérifient respectivement les équations différentielles suivantes :

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho, \quad (2.34)$$

et

$$(\sigma\rho_n)' = \tau_n \rho_n. \quad (2.35)$$

En utilisant l'équation (2.26) et les équations (2.34) et (2.35), on obtient :

$$\frac{(\sigma\rho_n)'}{\rho_n} = \frac{(\sigma\rho)'}{\rho} + n\sigma', \quad (2.36)$$

Nous simplifions cette dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{\rho'_n}{\rho_n} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{n\sigma'}{\sigma}. \quad (2.37)$$

Le calcul de l'intégrale de la dernière équation par rapport à la variable  $s$  donne l'expression suivante de la fonction de poids  $\rho_n(s)$  :

$$\rho_n(s) = \sigma^n(s)\rho(s), \quad (2.38)$$

ce qui conduit à :

$$\rho_{n+1}(s) = \sigma(s)\rho_n(s), \quad (2.39)$$

Puisque  $u_n(s) = \mathcal{Y}^{(n)}(s)$  est constante,  $u_{n+1}(s) = u'_n(s)$  et  $\rho_{n+1}(s) = \sigma(s)\rho_n(s)$ , on peut réécrire l'équation (2.33) sous la forme récurrentielle :

$$\rho_n u_n = -\frac{1}{\eta_n} (\rho_{n+1} u_{n+1})'. \quad (2.40)$$

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0(s) = \mathcal{Y}^{(0)}(s) \equiv \mathcal{Y}(s)$  et  $\rho \equiv \rho_0$ , l'équation (2.40) devient

$$\begin{aligned} \rho(s)\mathcal{Y}(s) &\equiv \rho_0 u_0 = -\frac{1}{\eta_0} (\rho_1 u_1)' = \left(-\frac{1}{\eta_0}\right) \left(-\frac{1}{\eta_1}\right) (\rho_2 u_2)'' \dots \\ &= \frac{1}{A_n} \frac{d^n}{ds^n} [\rho_n(s)u_n(s)], \end{aligned} \quad (2.41)$$

où

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \eta_k, A_0 = 1. \quad (2.42)$$

Si la fonction  $\mathcal{Y}(s)$  est un polynôme de degré  $n$  c'est-à-dire,  $\mathcal{Y}(s) \equiv \mathcal{Y}_n(s)$ , alors, nous obtenons de l'équation (2.41) la formule suivante pour  $\mathcal{Y}_n(s)$

$$\mathcal{Y}_n(s) = \frac{1}{\rho(s)A_n} \frac{d^n}{ds^n} [\rho_n(s)u_n(s)], \quad (2.43)$$

on a  $u_n(s) = \mathcal{Y}^{(n)}(s)$  est constante et  $\rho_n(s) = \sigma^n(s)\rho(s)$ . L'équation (2.43) devient :

$$\mathcal{Y}_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)], \quad (2.44)$$

où  $B_n = \frac{\mathcal{Y}^{(n)}(s)}{A_n}$  est constante,  $A_n$  est définie par l'équation (2.42) et où la fonction  $\rho(s)$  vérifie l'équation différentielle (2.34).

Les polynômes  $\mathcal{Y}_n(s)$  correspondant aux valeurs propres données par l'équation (2.31), sont orthogonaux sur l'intervalle  $]a, b[$  par rapport au poids  $\rho(s)$ . La relation (2.44) est appelée formule de Rodrigues, du nom de son auteur qui l'a établi en 1814, pour un cas particulier des polynômes du type hypergéométrique.

### II.2.4. Classification des polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes du type hypergéométrique  $\mathcal{Y}_n(s)$ , sont les solutions de l'équation (2.6), données par la formule de Rodrigues (2.44) dans laquelle la fonction  $\rho(s)$  vérifie l'équation différentielle (2.34). En résolvant cette dernière, nous obtenons trois formes possibles de la fonction  $\rho(s)$  en fonction du degré du polynôme  $\sigma(s)$ .

$$\rho(s) = \begin{cases} (1-s)^\alpha(1+s)^\beta; & \sigma(s) = 1-s^2, \\ s^\alpha e^{-s}; & \sigma(s) = s, \\ e^{-s^2}; & \sigma(s) = 1. \end{cases} \quad (2.45)$$

Suivant la forme de la fonction  $\sigma(s)$ , nous obtenons les systèmes suivants pour les polynômes :

1) Pour  $\sigma(s) = 1-s^2$  et  $\rho(s) = (1-s)^\alpha(1+s)^\beta$ , l'équation (2.34) donne  $\tau(s) = -(\alpha + \beta + 2)s + \beta - \alpha$ . Les polynômes correspondants  $\mathcal{Y}_n(s)$  avec  $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$  sont dits polynômes de Jacobi [23,45] et se symbolisent par  $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ . D'après la formule de Rodrigues (2.44), nous obtenons:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(s) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} \frac{d^n}{ds^n} [(1-s)^{n+\alpha} (1+s)^{n+\beta}]. \quad (2.46)$$

où les polynômes de Jacobi vérifient ces conditions supplémentaires  $\rho(s) > 0$  et  $\sigma(s) > 0$  sur l'intervalle  $]-1, +1[$  et  $\alpha > -1, \beta > -1$ .

Les cas spéciaux et importants des polynômes de Jacobi sont :

a) Pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$  correspondent aux polynômes de Legendre qui se notent  $P_n(s) = P_n^{(0,0)}(s)$ .

b) Les polynômes de Tchébychev de 1<sup>re</sup> espèce :

$$T_n(s) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(s), \quad (2.47)$$

$$\text{où } (1/2)_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{2} + n - 1 \right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})},$$

avec  $(k)_n$ ,  $(k = 1/2)$  est le symbole de Pochhammer.

et  $\Gamma(\frac{1}{2} + n)$  est la fonction gamma.

Les polynômes de Tchébychev de 2<sup>é</sup> espèce :

$$U_n(s) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2, 1/2)}(s). \quad (2.48)$$

$$\text{où } (3/2)_n = \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) \cdots \left( \frac{3}{2} + n - 1 \right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + n)}{\Gamma(\frac{3}{2})}.$$

c) Les polynômes de Gegenbauer

$$C_n(s) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1)_n} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(s), \quad (2.49)$$

$$\text{où } (\lambda+1)_n = (\lambda+1)(\lambda+1+1) \cdots (\lambda+1+n-1) = \frac{\Gamma(\lambda+1+n)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

2) Pour  $\sigma(s) = s$  et  $\rho(s) = s^\alpha e^{-s}$ , l'équation (2.34) donne  $\tau(s) = -s + \alpha + 1$ . Les polynômes  $\mathcal{Y}_n(s)$  avec  $B_n = \frac{1}{n!}$  sont dits polynômes de Laguerre [23,45] et sont symbolisés par  $L_n^\alpha(s)$  :

$$L_n^\alpha(s) = \frac{1}{n!} e^s s^{-\alpha} \frac{d^n}{ds^n} [s^{n+\alpha} e^{-s}], \quad (2.50)$$

où les polynômes de Laguerre vérifient ces conditions supplémentaires  $\rho(s) > 0$  et  $\sigma(s) > 0$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et  $\alpha > -1$ .

3) Pour  $\sigma(s) = 1$  et  $\rho(s) = e^{-s^2}$ , en résolvant l'équation (2.34), nous obtenons  $\tau(s) = -2s$ . Les polynômes  $\mathcal{Y}_n(s)$  avec  $B_n = (-1)^n$  s'appellent polynômes d'Hermitte [23,45] et s'écrivent :

$$H_n = (-1)^n e^{+s^2} \frac{d^n}{ds^n} (e^{-s^2}). \quad (2.51)$$

où les polynômes d'Hermite vérifient ces conditions supplémentaires :  $\rho(s) > 0$  et  $\sigma(s) > 0$  sur l'intervalle  $] -\infty, +\infty[$ .

### **II.2.5. Quelques propriétés des polynômes orthogonaux classiques**

- Propriété d'orthogonalité : les solutions polynômiales de l'équation (2.6) admettent la propriété d'orthogonalité. Pour l'obtenir, nous écrivons l'équation (2.32) pour  $\mathcal{Y}_n(s)$  et  $\mathcal{Y}_m(s)$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\sigma(s)\rho(s)\mathcal{Y}'_n(s))' + \lambda_n\rho(s)\mathcal{Y}_n(s) &= 0, \\ (\sigma(s)\rho(s)\mathcal{Y}'_m(s))' + \lambda_m\rho(s)\mathcal{Y}_m(s) &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nous multiplions la première équation par  $\mathcal{Y}_m(s)$  et la seconde par  $\mathcal{Y}_n(s)$ , nous prenons la différence entre les deux équations obtenues et nous intégrons le résultat de  $a$  à  $b$  pour arriver à la relation suivante:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \mathcal{Y}_m(s)\mathcal{Y}_n(s)\rho(s)ds = \sigma(s)\rho(s)W[\mathcal{Y}_m(s), \mathcal{Y}_n(s)]_a^b, \quad (2.53)$$

$$\text{où } W(\mathcal{Y}_m(s), \mathcal{Y}_n(s)) = \mathcal{Y}_m(s)\mathcal{Y}'_n(s) - \mathcal{Y}'_m(s)\mathcal{Y}_n(s).$$

Pour certaines constantes  $a$  et  $b$ , le deuxième membre de l'égalité obtenu s'annule, vu que le Wronskien  $W[\mathcal{Y}_m(s), \mathcal{Y}_n(s)]_a^b$  est un polynôme en  $s$ . Nous avons donc lorsque  $\lambda_n \neq \lambda_m$  : les polynômes du type hypergéométrique  $\mathcal{Y}_n(s)$  correspondant aux différentes valeurs de  $\lambda_n$  qui sont orthogonaux sur l'intervalle  $]a, b[$  par rapport au poids  $\rho(s)$  c'est-à-dire:

$$\int_a^b \mathcal{Y}_n(s)\mathcal{Y}_m(s)\rho(s)ds = 0 \quad n \neq m. \quad (2.54)$$

Remarque : la condition  $\lambda_n \neq \lambda_m$  peut être substituée par  $n \neq m$ .

- Unicité d'un système de polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné c'est-à-dire, pour qu'un intervalle  $]a, b[$  et un poids  $\rho(s)$  donnés, suffisent pour définir ces polynômes.
- On peut toujours mettre un polynôme quelconque  $q_n(s)$  sous forme d'une combinaison linéaire de polynômes orthogonaux  $\mathcal{Y}_k(s)$  ( $k = 0.1.2 \dots n$ ) :

$$q_n(s) = \sum_{k=0}^n C_{kn} \mathcal{Y}_k(s), \quad (2.55)$$

Nous calculons les coefficients  $C_{kn}$  à l'aide de la propriété d'orthogonalité (2.54), par la formule

$$C_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b q_n(s) \mathcal{Y}_k(s) \rho(s) ds, \quad (2.56)$$

où  $d_k^2$  est le carré de la norme donné par :

$$d_k^2 = \int_a^b \mathcal{Y}_k^2(s) \rho(s) ds. \quad (2.57)$$

- On peut définir par la relation de récurrence le polynôme  $\mathcal{Y}_n(s)$  à partir des polynômes  $\mathcal{Y}_{n+1}(s)$  et  $\mathcal{Y}_{n-1}(s)$ .

$$s \mathcal{Y}_n(s) = \alpha_n \mathcal{Y}_{n+1}(s) + \beta_n \mathcal{Y}_n(s) + \gamma_n \mathcal{Y}_{n-1}(s), \quad (2.58)$$

où  $\alpha_n, \beta_n$  et  $\gamma_n$  sont des constantes.

En posant,

$$d_n^2 = \int_a^b \mathcal{Y}_n^2(s) \rho(s) ds, \quad (2.59)$$

Pour calculer le carré de la norme, nous écrivons le polynôme  $\mathcal{Y}_n(s)$  sous la forme :

$$\mathcal{Y}_n(s) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots \quad (2.60)$$

où  $a_n \neq 0$ , et défini par :



$$a_n = \frac{A_{nm}B_n}{n!} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left( \tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma'' \right), \quad (2.61)$$

où  $A_{nm} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}$ . On remplace  $n$  par  $m$  dans l'équation (2.42), on obtient la constante  $A_m$ . La relation de Rodrigues (2.44) nous permet de réécrire le carré de la norme sous la forme :

$$d_n^2 = B_n \int_a^b \mathcal{Y}_n(s) \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)] ds, \quad (2.62)$$

nous intégrons  $n$  fois par parties cette dernière équation, nous obtenons :

$$d_n^2 = (-1)^n n! a_n B_n \int_a^b \sigma^n(s)\rho(s) ds. \quad (2.63)$$

pour  $n = 1$ , le carré de la norme  $d_1^2$  s'écrit comme suit:

$$d_1^2 = -a_1 B_1 \int_a^b \sigma(s)\rho(s) ds, \quad (2.64)$$

ce qui implique,

$$d_1^2 = -B_1^2 \tau'(s) \int_a^b \sigma(s)\rho(s) ds, \quad (2.65)$$

dans la dernière équation  $\sigma(s)$ ,  $\rho(s)$  et  $d_1^2$  sont supérieurs à zéro pour  $s \in ]a, b[$ , on doit avoir donc  $\tau'(s)$  inférieur à zéro.

Dans la formule de Rodrigues (2.44), pour  $n = 1$  on obtient  $\mathcal{Y}_1(s) = \frac{B_1}{\rho(s)} \frac{d}{ds} [\sigma(s)\rho(s)]$  et qui donne  $\mathcal{Y}_1(s) = B_1 \tau(s)$ , ce qui implique que le polynôme  $\tau(s)$  admet une racine sur l'intervalle  $]a, b[$ .

Nous avons trouvé que le polynôme  $\tau(s)$  admet une dérivée négative et admet une racine sur l'intervalle  $]a, b[$ , ces deux conditions nous permettent de choisir le polynôme  $\pi(s)$  donné par la formule (2.11).

En résumé, la méthode de Nikiforov Uvarov [23] est une méthode de résolution des équations différentielles de deuxième ordre concernant les états liés du spectre d'énergie discret dans le cas où il est possible de réduire ces équations aux équations différentielles du type hypergéométrique généralisé (équation (2.1)), l'énergie intervient comme paramètre dans les coefficients de (2.1). Il convient de faire le changement  $\psi(s) = \Phi(s)\mathcal{Y}(s)$  pour obtenir une équation du type hypergéométrique (équation (2.6)) en procédant de façon que le polynôme  $\tau(s)$  admette sur l'intervalle  $]a, b[$  une dérivée négative et une racine. Cette condition nous permet de trouver le polynôme  $\pi(s)$  par l'équation (2.11) puis  $\Phi(s)$ ,  $\tau(s)$ ,  $\lambda$ , et  $\rho(s)$  à l'aide des équations (2.3), (2.7), (2.8) et (2.34) respectivement. Nous calculons les valeurs propres de l'énergie à partir de l'équation (2.31). Les fonctions propres  $\psi(s)$  sont le produit de deux fonctions  $\mathcal{Y}_n(s)$  et  $\Phi(s)$  :  $\mathcal{Y}_n(s)$  sont des polynômes de degré  $n$  orthogonaux sur l'intervalle  $]a, b[$  par rapport au poids  $\rho(s)$ . Ces polynômes sont obtenus par la formule de Rodrigues. La fonction  $\Phi(s)$  est obtenue à l'aide de l'équation (2.3). Les solutions des équations initiales (l'équation de Schrödinger, Dirac ou autre) pour les états liés sont soumises à des restrictions supplémentaires, qui se traduisent généralement par les conditions imposées aux solutions de l'équation (2.1) : la fonction d'onde doit être bornée et de carré intégrable sur l'intervalle  $]a, b[$ .

Nous avons exposé la méthode de Nikiforov Uvarov [23], qui nous permet de résoudre les équations différentielles de deuxième ordre concernant les états du spectre d'énergie discret dans le cas où il est possible de réduire ces équations aux équations différentielles du type hypergéométrique. Nous proposons maintenant la résolution de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle aux différentes formes de potentiel de Woods saxon plus Rosen-Morse [29, 35,36].

### **II .3. Recherche du spectre d'énergie et des fonctions d'onde relatifs au potentiel de Woods saxon plus le potentiel de Rosen-Morse**

Les problèmes de mécanique quantique à une dimension ont une importance en physique dans le domaine de la physique du solide ou de l'électronique. Parmi les potentiels les plus utilisés on cite le potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen-Morse [35].

le potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen-Morse est donné par [35].

$$V(x) = -V_1 \frac{e^{-2\alpha x}}{1 + qe^{-2\alpha x}} + V_2 \frac{e^{-4\alpha x}}{(1 + qe^{-2\alpha x})^2} - V_3 \operatorname{sech}_q^2(\alpha x) - V_4 \tanh_q(\alpha x), \quad (2.66)$$

où  $V_1, V_2, V_3, V_4, \alpha$  et  $q$  sont des paramètres réels,  $q$  est un paramètre de déformation et les fonctions hyperboliques particulières sont définies comme:

$$\sinh_q x = \frac{e^x - qe^{-x}}{2}, \quad (2.67)$$

$$\cosh_q x = \frac{e^x + qe^{-x}}{2}, \quad (2.68)$$

et

$$\tanh_q x = \frac{\sinh_q x}{\cosh_q x}. \quad (2.69)$$

On résoud l'équation de Schrödinger à une dimension par la méthode de Nikiforov Uvarov pour le potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen-Morse :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left( E + V_1 \frac{e^{-2\alpha x}}{1 + qe^{-2\alpha x}} - V_2 \frac{e^{-4\alpha x}}{(1 + qe^{-2\alpha x})^2} + V_3 \operatorname{sech}_q^2(\alpha x) + V_4 \tanh_q(\alpha x) \right) \psi(x) = 0, \quad (2.70)$$

Notons qu'il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre en  $x$ . Les états physiques sont ceux qui correspondent à des solutions pour lesquelles la fonction  $\psi(x)$  est normalisable sur tout l'espace de définition de  $V(x)$ .

Afin de ramener l'équation de Schrödinger unidimensionnelle à une équation du type hypergéométrique, on fait le changement de variable suivant :

$$s = e^{-2\alpha x}, \quad (2.71)$$

Le changement de variable (2.71) donne,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -2\alpha s \frac{d\psi(s)}{ds}, \quad (2.72)$$

et

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = 4\alpha^2 s^2 \frac{d^2\psi(s)}{ds^2} + 4\alpha^2 s \frac{d\psi(s)}{ds}. \quad (2.73)$$

Nous insérons l'équation (2.71), (2.72) et (2.73) dans l'équation (2.70), nous obtenons l'équation de Schrödinger suivante en fonction de la nouvelle variable :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi(s)}{ds^2} + \frac{(1-qs)}{s(1-qs)} \frac{d\psi(s)}{ds} \\ + \frac{1}{[s(1-qs)]^2} [-\{q^2(\varepsilon - \beta_4) - q(\beta_1 - 2q\beta_4) + \beta_2\}s^2 \\ + \{2q(\varepsilon - \beta_4) - (\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3)\}s - (\varepsilon - \beta_4)]\psi(s) = 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

où

$$\varepsilon = \frac{-E}{4\alpha^2} > 0; E < 0 \quad ; \beta_i = \frac{V_i}{4\alpha^2} (> 0), i = 1,2,3,4. \quad (2.75)$$

L'équation (2.74) est une équation du type hypergéométrique. Nous comparons donc, l'équation (2.74) avec l'équation (2.1) (équation du type hypergéométrique), nous obtenons les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} \sigma(s) = s(1-qs) \quad ; \tilde{\tau}(s) = 1-qs \quad ; \\ \tilde{\delta}(s) = -\{q^2(\varepsilon - \beta_4) - q(\beta_1 - 2q\beta_4) + \beta_2\}s^2 + \\ + \{2q(\varepsilon - \beta_4) - (\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3)\}s - (\varepsilon - \beta_4), \end{aligned} \quad (2.76)$$

En substituant ces polynômes dans l'expression de  $\pi(s)$  (2.11), on obtient

$$\pi(s) = \frac{-qs}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{As^2 + Bs + C}, \quad (2.77)$$

où

$$A = q^2 + 4q^2(\varepsilon - \beta_4) - 4q(\beta_1 - 2q\beta_4) + 4\beta_2 - 4Kq,$$

$$B = -\{8q(\varepsilon - \beta_4) - 4(\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3) - 4K\},$$

et

$$C = 4(\varepsilon - \beta_4).$$

Nous calculons la constante  $K$  à partir de la condition où l'expression sous le radical admet des racines multiples, nous obtenons :

$$K = -(\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3) + \mu q \sqrt{\varepsilon - \beta_4} P, \quad (2.78)$$

où

$$P = \sqrt{1 + \frac{16\beta_3}{q} + \frac{4\beta_2}{q^2}} = \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}. \quad (2.79)$$

et  $\mu = +1, -1$ .

Le polynôme  $\pi(s)$  prend alors l'une des formes possibles suivantes :

$$\pi(s) = \frac{-qs}{2} \pm \frac{1}{2} [(2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P)qs - 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4}], \quad (2.80)$$

Il convient de choisir celle qui assure à la fonction  $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$  d'avoir une dérivée négative, la fonction  $\tau(s)$  devient :

$$\tau(s) = 1 + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - [2 + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P]qs. \quad (2.81)$$

sa dérivée est négative et de la forme :

$$\tau'(s) = -[2 + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P]q. \quad (2.82)$$

Ce qui nous donne,

$$\pi(s) = \frac{-qs}{2} - \frac{1}{2} [(2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P)qs - 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4}], \quad (2.83)$$

et,

$$K = -(\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3) + \mu q \sqrt{\varepsilon - \beta_4} P. \quad (2.84)$$

Nous obtenons les valeurs propres de l'énergie à partir de l'équation (2.8) et (2.31) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lambda_n &= -n[2 + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P]q + n(n+1)q, \\ \lambda &= -(\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3) + \mu q\sqrt{\varepsilon - \beta_4} P - \frac{q}{2} - \frac{q}{2}(2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P),\end{aligned}\quad (2.85)$$

puisque  $\lambda = \lambda_n$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned}n[2 + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P]q + n(n+1)q &= \\ &= -(\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3) + \mu q\sqrt{\varepsilon - \beta_4} P - \frac{q}{2} - \frac{q}{2}(2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} - \mu P),\end{aligned}\quad (2.86)$$

ce que implique

$$\begin{aligned}(2n+1 - \mu P)\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + n(n+1) + \frac{1}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\mu P &= \\ &= -\frac{\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3}{q}.\end{aligned}\quad (2.87)$$

En multipliant la dernière équation par 4 et en remplaçant  $4n(n+1) + 2 - 4\left(n + \frac{1}{2}\right)\mu P$  par  $(2n+1 - \mu P)^2 + 1 - P^2$ , nous obtenons alors,

$$4(2n+1 - \mu P)\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + (2n+1 - \mu P)^2 = -\frac{4(\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3)}{q} - 1 + P^2. \quad (2.88)$$

Nous substituons  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  et  $P$  par leurs expressions (2.75) et (2.79) dans l'équation (2.88) où  $\varepsilon = \frac{-E}{4\alpha^2}$ , nous obtenons l'expression du spectre d'énergie pour le potentiel de Woods Saxon plus le potentiel de Rosen- Morse suivante:

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{4} \left[ \left( 2n+1 - \mu \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} \right) - \frac{\frac{V_2}{q^2\alpha^2} - \frac{V_1 - 2qV_4}{q\alpha^2}}{\left( 2n+1 - \mu \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} \right)} \right]^2 - V_4. \quad (2.89)$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots, q \geq 1$ .

Ainsi l'équation (2.86) peut être réécrite comme suit,

$$(2n + 1 - \mu P)\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + n(n + 1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2n + 1 - \mu P)(2n + 1) - \frac{1}{2}(2n + 1)^2 = -\frac{\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3}{q}, \quad (2.90)$$

ce que implique,

$$(2n + 1 - \mu P)\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + n(n + 1) + \frac{1}{2}(2n + 1 - \mu P)(2n + 1) = n(n + 1) - \frac{\beta_1 - 2q\beta_4 + 4\beta_3}{q}. \quad (2.91)$$

On obtient une autre expression du spectre d'énergie pour le potentiel de Woods Saxon plus le potentiel de Rosen- Morse:

$$E_n = -4\alpha^2 \left[ \frac{2n + 1}{2} - \frac{n(n + 1) - \frac{V_1 - 2qV_4 + 4V_3}{4q\alpha^2}}{2n + 1 - \mu\sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}} \right]^2 - V_4, \quad (2.92)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, q \geq 1.$$

$n$  est le nombre quantique principal qui décrit la quantification pour les états d'énergie liés.

La fonction d'onde s'écrit sous la forme :

$$\psi_n(s) = A_n \Phi(s) \mathcal{Y}_n(s). \quad (2.93)$$

où  $A_n$  est une constante de normalisation satisfaisant la condition suivante :

$$\int_0^1 |\psi_n(s)|^2 ds = 1. \quad (2.94)$$

La fonction d'onde  $\psi(s)$  est un produit de deux fonctions indépendantes  $\Phi(s)$  et  $\mathcal{Y}_n(s)$  pour trouver la première fonction on remplace l'expression du polynôme  $\pi(s)$  (2.83) et de  $\sigma(s)$  (2.76) dans l'équation (2.3) et en intégrant par rapport à la variable  $s$ , on obtient l'intégrale suivante :

$$\int \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds = \int \left[ \frac{-\frac{1}{2}q(1-\mu P)}{1-qs} + \frac{\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}{s} \right] ds, \quad (2.95)$$

ce qui donne,

$$\Phi(s) = s^{\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}(1-qs)^{\frac{1}{2}(1-\mu P)}. \quad (2.96)$$

Pour trouver la deuxième fonction  $\mathcal{Y}_n(s)$ , on utilise la formule de Rodrigues (2.44), après avoir remplacé le polynôme  $\sigma(s)$ , on obtient l'expression suivante :

$$\mathcal{Y}_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [(1-s^2)^{-\mu P} \rho(s)]. \quad (2.97)$$

où  $C_n$  est la constante de normalisation.

et  $\rho(s)$  fonction de poids obtenue par l'équation (2.34), ce qui nous donne l'intégrale suivante:

$$\int \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} ds = \int \left[ \frac{\mu P q}{1-qs} + \frac{2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}{s} \right] ds. \quad (2.98)$$

Finalement,

$$\rho(s) = s^{2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}(1-qs)^{-\mu P}. \quad (2.99)$$

Les fonctions propres  $\mathcal{Y}_n(s)$  s'écrivent alors :

$$\mathcal{Y}_n(s) = C_n s^{-2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}(1-qs)^{\mu P} \frac{d^n}{ds^n} \left[ s^{n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}(1-qs)^{n-\mu P} \right]. \quad (2.100)$$

On multiplie et on divise la première partie de la dernière équation par  $(2q)^{-2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}2^{\mu P}$  et on multiplie et on divise la deuxième partie par  $(2q)^{n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}2^{n-\mu P}$ , on obtient :



$$\mathcal{Y}_n(s) = C_n(2q)^{-2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}s^{-2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}2^{\mu P}(1-qs)^{\mu P} \times \frac{d^n}{ds^n} \left[ (2q)^{n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}s^{n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}2^{n-\mu P}(1-qs)^{n-\mu P} \right], \quad (2.101)$$

ce qui permet de réécrire l'expression de  $\mathcal{Y}_n(s)$  comme suit:

$$\mathcal{Y}_n(s) = C_n[1 - (1 - 2qs)]^{-2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}[1 + (1 - 2qs)]^{\mu P} \times \frac{d^n}{ds^n} \left[ [1 - (1 - 2qs)]^{n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}}(1 + (1 - 2qs))^{n-\mu P} \right]. \quad (2.102)$$

L'expression de la fonction  $\mathcal{Y}_n(s)$  prend la forme

$$\mathcal{Y}_n(s) \equiv P_n^{(2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}, -\mu P)}(1 - 2qs). \quad (2.103)$$

où

$P_n^{(2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}, -\mu P)}(1 - 2qs)$  est le Polynôme de Jacobi,

$$\text{avec} \quad P = \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}.$$

La fonction d'onde prend alors la forme suivante:

$$\psi_n(s) = A_n s^{\sqrt{\varepsilon-\frac{V_4}{4\alpha^2}}} (1-2qs)^{\frac{1}{2}\left(1-\mu\sqrt{1+\frac{4V_3}{q\alpha^2}+\frac{V_2}{q^2\alpha^2}}\right)} P_n^{(2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}, -\mu\sqrt{1+\frac{4V_3}{q\alpha^2}+\frac{V_2}{q^2\alpha^2}})}(1-2qs), \quad (2.104)$$

où  $A_n$  est la constante de normalisation obtenue par la condition (2.94) qui donne :

$$\int_0^1 A_n^2 s^{2\sqrt{\varepsilon-\frac{V_4}{4\alpha^2}}} (1-2qs)^{1-\mu\sqrt{1+\frac{4V_3}{q\alpha^2}+\frac{V_2}{q^2\alpha^2}}} P_n^{(2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}, -\mu\sqrt{1+\frac{4V_3}{q\alpha^2}+\frac{V_2}{q^2\alpha^2}})}(1-2qs) \times P_n^{(2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}, -\mu\sqrt{1+\frac{4V_3}{q\alpha^2}+\frac{V_2}{q^2\alpha^2}})}(1-2qs) ds = 1, \quad (2.105)$$

Nous avons les deux formes différentes de Polynômes de Jacobi [30,45] :

$$P_n^{(c,d)}(x) = \frac{\Gamma(n+c+1)}{n! \Gamma(n+c+d+1)} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{\Gamma(n+c+d+r+1)}{\Gamma(r+c+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^r, \quad (2.106)$$

et,

$$P_n^{(c,d)}(x) = 2^{-n} \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n+c}{p} \binom{n+d}{n-p} (1-x)^{n-p} (1+x)^p, \quad (2.107)$$

où,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}. \quad (2.108)$$

Par l'équation (2.106) et (2.107), nous obtenons respectivement

$$P_n^{(2c,2d)}(1-2qs) = (-1)^n \Gamma(n+2c+1) \Gamma(n+2d+1) \times \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p q^{n-p} s^{n-p} (1-qs)^p}{p!(n-p)! \Gamma(p+2d+1) \Gamma(n+2c-p+1)}, \quad (2.109)$$

et,

$$P_n^{(2c,2d)}(1-2qs) = \frac{\Gamma(n+2c+1)}{\Gamma(n+2c+2d+1)} \times \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r q^r \Gamma(n+2c+2d+r+1)}{r!(n-r)! \Gamma(r+2c+1)} s^r. \quad (2.110)$$

Nous remplaçons les équations (2.109) et (2.110) dans l'équation (2.105), nous obtenons :

$$1 = A_n^2 (-1)^n \frac{[\Gamma(n+2c+1)]^2 \Gamma(n+2d+1)}{\Gamma(n+2c+2d+1)} \times \sum_{p,r=0}^n \frac{(-1)^{p+r} q^{n-p+r} \Gamma(n+2c+2d+r+1)}{p! r! (n-p)! (n-r)! \Gamma(p+2d+1)} \left\{ \frac{I_{nq}(p,r)}{\Gamma(r+2c+1) \Gamma(n+2c-p+1)} \right\}, \quad (2.111)$$

où,

$$I_{nq}(p, r) = \int_0^1 s^{n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}+r-p} (1-qs)^{p-\mu P+1} ds, \quad (2.112)$$

et,

$$c = \sqrt{\varepsilon - \beta_4}, \quad d = -\frac{1}{2}\mu P, \quad P = \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}. \quad (2.113)$$

On utilise l'intégrale suivante de la fonction hypergéométrique [45]

$$\int_0^1 s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} (1-qs)^{-b} = {}_2F_1(a, b; c; q) \times \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}. \quad (2.114)$$

À condition que le  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a)$  et  $|\arg(1-q)| < \pi$ ,

$$\int_0^1 s^{a-1} (1-qs)^{-b} = \frac{{}_2F_1(a, b; a+1; q)}{a}. \quad (2.115)$$

Nous remplaçons l'intégrale (2.114) dans (2.112), où  $a = n + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + r - p + 1$  et  $-b = p - \mu P + 1$ , nous obtenons :

$$I_{nq}(p, r) = \frac{1}{(n + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + r - p + 1)} \times {}_2F_1(n + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + r - p + 1, p - \mu P + 1; n + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + r - p + 2, q). \quad (2.116)$$

où  ${}_2F_1(a)$  est une fonction hypergéométrique.

### **II .3.1. Cas d'Hamiltonien non hermitien $PT$ symétrique**

Dans ce cas, nous choisissons les paramètres de potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen- Morse  $V_1, V_2, V_3, V_4$  et  $q$  purement réels et nous remplaçons  $\alpha$  par

$i\alpha$ , nous utilisons les relations trigonométriques le potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen- Morse devient complexe sous la forme:

$$V(x) = V_R(x) + iV_I(x)$$

où  $V_R(x)$  la partie réelle et  $V_I(x)$  la partie imaginaire.

$$V(x) = \frac{1}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)^2} [A_1 + B_1] + \frac{i \sin 2\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)^2} [A_2 + B_2], \quad (117)$$

où

$$A_1 = -V_1(\cos 2\alpha x + q)(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x) + V_2(q^2 + 2q \cos 2\alpha x + \cos 4\alpha x),$$

$$B_1 = -4V_3(2q + (q^2 + 1) \cos 2\alpha x) - V_4(1 - q^2)(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x),$$

$$A_2 = V_1(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x) - 2V_2(q + \cos 2\alpha x),$$

et

$$B_2 = -4V_3(q^2 - 1) - 2qV_4(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x).$$

Nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$  dans l'expression du spectre d'énergie (2.92), nous obtenons un spectre d'énergie réel et positif du potentiel complexe (potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen-Morse) dont l'Hamiltonien est non hermitien  $PT$  symétrique, sous la forme suivante :

$$E_n = 4\alpha^2 \left[ \frac{2n + 1}{2} - \frac{n(n + 1) + \frac{V_1 - 2qV_4 + 4V_3}{4q\alpha^2}}{2n + 1 - \mu \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}} \right]^2 - V_4, \quad (2.118)$$

où  $q \geq 1$ .

et,

$$n < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_1 - 2qV_4}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} + \frac{\mu}{2} \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} - \frac{1}{2}.$$

Pour déterminer les fonctions d'onde correspondantes, nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$  dans l'équation (2.104), nous obtenons :

$$\psi_n(s) = B_n s^{\sqrt{\varepsilon - \beta_4}} (1 - 2qs)^{\frac{1}{2} \left( 1 - \mu \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} \right)} P_n \left( 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4}, -\mu \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} \right) (1 - 2qs), \quad (2.119)$$

où  $B_n$  est la constante de normalisation obtenue par (2.94).

Nous utilisons les équations (2.109) et (2.110), nous obtenons

$$1 = B_n^2 (-1)^n \frac{[\Gamma(n + 2c + 1)]^2 \Gamma(n + 2d + 1)}{\Gamma(n + 2c + 2d + 1)} \times \sum_{p,r=0}^n \frac{(-1)^{p+r} q^{n-p+r} \Gamma(n + 2c + 2d + r + 1)}{p! r! (n-p)! (n-r)! \Gamma(p + 2d + 1)} \left\{ \frac{I_{nq}(p, r)}{\Gamma(r + 2c + 1) \Gamma(n + 2c - p + 1)} \right\}, \quad (2.120)$$

avec

$$I_{nq}(p, r) = \frac{1}{(n + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + r - p + 1)} \times {}_2F_1(n + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + r - p + 1, \mu P - p - 1; n + 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + r - p + 2, q), \quad (2.121)$$

où

$$c = \sqrt{\varepsilon - \beta_4}, \quad d = -\frac{1}{2} \mu P, \quad P = \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}. \quad (2.122)$$

### **II.3.2. Cas d'Hamiltonien non hermitien non $PT$ symétrique**

Dans ce cas, nous choisissons les paramètres de potentiels de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen- Morse  $V_2, V_4$  sont réels et  $V_1, V_3, q$  et  $\alpha$  purement complexes c'est à dire nous remplaçons  $V_1$  par  $iV_1$ ,  $V_3$  par  $iV_3$ ,  $q$  par  $iq$  et  $\alpha$  par  $i\alpha$ , le potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen- Morse prend la forme suivante :

$$V(x) = V_R(x) + iV_I(x),$$

$$V(x) = \frac{1}{(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x)^2} [A + B] + \frac{i}{(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x)^2} [C + D], \quad (2.123)$$

où

$$A = -V_1(\sin 2\alpha x + q)(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x) - V_2(q^2 + 2q \sin 2\alpha x - \cos 4\alpha x),$$

$$B = -4V_3(2q + (1 + q^2) \sin 2\alpha x) - V_4(1 - q^2)(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x),$$

$$C = -V_1 \cos 2\alpha x (1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x) - V_2(2q \cos 2\alpha x + \sin 4\alpha x),$$

et

$$D = -4V_3(1 - q^2) \cos 2\alpha x + 2qV_4 \cos 2\alpha x (1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x).$$

Nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$ ,  $V_1$  par  $iV_1$ ,  $V_3$  par  $iV_3$  et  $q$  par  $iq$  dans l'expression du spectre d'énergie (2.92), nous obtenons le spectre d'énergie du potentiel complexe (potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen-Morse) dont l'Hamiltonien est non hermitien et non  $PT$  symétrique, sous la forme suivante [35]:

$$E_n = 4\alpha^2 \left[ \frac{2n+1}{2} - \frac{n(n+1) + \frac{V_1 - 2qV_4 + 4V_3}{4q\alpha^2}}{2n+1 - \mu \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}} \right]^2 - V_4, \quad (2.124)$$

où  $q \geq 1$ ,

et,

$$n < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_1 - 2qV_4}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} + \frac{\mu}{2} \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} - \frac{1}{2}.$$

Nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$ ,  $V_1$  par  $iV_1$ ,  $V_3$  par  $iV_3$  et  $q$  par  $iq$  dans l'équation (2.104), nous obtenons les fonctions d'onde correspondantes au spectre d'énergie (2.124):

$$\psi_n(s) = C_n s^{\sqrt{\varepsilon - \beta_4}} (1 - 2qs)^{\frac{1}{2} \left( 1 - \mu \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} \right)} P_n^{(2\sqrt{\varepsilon - \beta_4}, -\mu \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}})} (1 - 2qs), \quad (2.125)$$

où  $C_n$  est une constante de normalisation obtenue par (2.94), nous utilisons les équations (2.109) et (2.110). Nous obtenons :

$$1 = C_n^2 (-1)^n \frac{[\Gamma(n+2c+1)]^2 \Gamma(n+2d+1)}{\Gamma(n+2c+2d+1)} \times$$

$$\sum_{p,r=0}^n \frac{(-1)^{p+r} q^{n-p+r} \Gamma(n+2c+2d+r+1)}{p! r! (n-p)! (n-r)! \Gamma(p+2d+1)} \left\{ \frac{I_{nq}(p,r)}{\Gamma(r+2c+1) \Gamma(n+2c-p+1)} \right\}, \quad (2.126)$$

où

$$I_{nq}(p,r) = \frac{1}{(n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}+r-p+1)} \times$$

$${}_2F_1(n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}+r-p+1, \mu P - p - 1; n+2\sqrt{\varepsilon-\beta_4}+r-p+2, q), \quad (2.127)$$

et

$$c = \sqrt{\varepsilon - \beta_4}, \quad d = -\frac{1}{2} \mu P, \quad P = \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2} + \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}. \quad (2.128)$$

#### **II.4. Potentiel de Woods-Saxon**

Les interactions des neutrons avec les noyaux lourds sont décrites par les potentiels nucléaires et par le champ Coulombien. Le potentiel nucléaire est amené habituellement à la forme de potentiel de Wood Saxon qui est un des potentiels importants dans la physique nucléaire.

Lorsque  $V_3 = V_4 = 0$ , le potentiel de Woods-Saxon plus Rosen-Morse (2.66) se réduit au potentiel de Woods-Saxon [29,31-34] :

$$V(x) = -V_1 \frac{e^{-2ax}}{1 + qe^{-2ax}} + V_2 \frac{e^{-4ax}}{(1 + qe^{-2ax})^2}, \quad (2.129)$$

Pour  $\mu = 1$ , nous obtenons par l'équation (2.89) le spectre d'énergie de potentiel de Wood Saxon de l'état lié suivant:

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{4} \left[ \left( 2n + 1 - \sqrt{1 + \frac{V_2}{q^2 \alpha^2}} \right) - \frac{V_2 - qV_1}{q^2 \alpha^2 \left( 2n + 1 - \sqrt{1 + \frac{V_2}{q^2 \alpha^2}} \right)} \right]^2. \quad (2.130)$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots, q \geq 1$ .

Nous obtenons les fonctions d'onde correspondantes au spectre d'énergie (2.130) à l'aide de l'équation (2.104), sous la forme suivante :

$$\psi_n(s) = D_n s^{\sqrt{\varepsilon}} (1 - 2qs)^{\frac{1}{2} \left( 1 - \mu \sqrt{1 + \frac{V_2}{q^2 \alpha^2}} \right)} P_n^{\left( 2\sqrt{\varepsilon}, -\mu \sqrt{1 + \frac{V_2}{q^2 \alpha^2}} \right)} (1 - 2qs), \quad (2.131)$$

où  $D_n$  est la constante de normalisation qui satisfait la condition (2.94). Nous utilisons les équations (2.109) et (2.110), pour obtenir

$$1 = D_n^2 (-1)^n \frac{[\Gamma(n + 2c + 1)]^2 \Gamma(n + 2d + 1)}{\Gamma(n + 2c + 2d + 1)} \times \sum_{p,r=0}^n \frac{(-1)^{p+r} q^{n-p+r} \Gamma(n + 2c + 2d + r + 1)}{p! r! (n-p)! (n-r)! \Gamma(p + 2d + 1)} \left\{ \frac{I_{nq}(p, r)}{\Gamma(r + 2c + 1) \Gamma(n + 2c - p + 1)} \right\}, \quad (2.132)$$

avec

$$I_{nq}(p, r) = \frac{1}{(n + 2\sqrt{\varepsilon} + r - p + 1)} \times {}_2F_1(n + 2\sqrt{\varepsilon} + r - p + 1, \mu P - p - 1; n + 2\sqrt{\varepsilon} + r - p + 2, q), \quad (2.133)$$

où

$$c = \sqrt{\varepsilon}, \quad d = -\frac{1}{2} \mu P, \quad P = \sqrt{1 - \frac{V_2}{q^2 \alpha^2}}, \quad (2.134)$$

et  ${}_2F_1$  est une fonction hyperbolique.



### II .4.1.Premier exemple de Potentiel de Woods-Saxon complexe

Pour obtenir des formes différentes du potentiel de Woods-Saxon complexe, nous prenons au moins un des paramètres purement imaginaire, nous choisissons donc dans ce premier exemple de potentiel de Woods-Saxon le paramètre  $\alpha$  purement imaginaire c'est-à-dire nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$  et les paramètres  $V_1, V_2$  et  $q$  restent réels et nous utilisons les relations trigonométriques, nous obtenons

$$V(x) = V_R(x) + iV_I(x),$$

où

$$\begin{aligned} V_R(x) &= \left[ -V_1 \frac{\cos 2\alpha x + q}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)} + V_2 \frac{q^2 + 2q \cos 2\alpha x + \cos 4\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)^2} \right] \\ V_I(x) &= \left[ V_1 \frac{\sin 2\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)} - V_2 \frac{2q \sin 2\alpha x + \sin 4\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.135)$$

l'Hamiltonien dans ce cas est  $PT$  symétrique.

Nous obtenons le spectre d'énergie du potentiel complexe de Woods-Saxon à l'aide de l'équation (2.130) où nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$ , le spectre d'énergie (2.130) devient :

$$E_n = \frac{\alpha^2}{4} \left[ \left( 2n + 1 - \sqrt{1 - \frac{V_2}{q^2 \alpha^2}} \right) - \frac{qV_1 - V_2}{q^2 \alpha^2 \left( 2n + 1 - \sqrt{1 - \frac{V_2}{q^2 \alpha^2}} \right)} \right]^2. \quad (2.136)$$

Notons que le spectre d'énergie (2.136) est réel et positif si :

$$n = 0, 1, \dots < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_1}{q\alpha^2} - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}} - \frac{1}{2},$$

et si  $V_2 \leq q^2 \alpha^2$ .

### II .4.2.Deuxième exemple de Potentiel de Woods-Saxon complexe

Nous remplaçons dans cet exemple les paramètres :  $\alpha$  par  $i\alpha$ ,  $V_1$  par  $iV_1$  et  $q$  et  $V_2$  sont réels, le potentiel de Woods-Saxon devient

$$V(x) = -iV_1 \frac{e^{-2i\alpha x}}{1 + qe^{-2i\alpha x}} + V_2 \frac{e^{-4i\alpha x}}{(1 + qe^{-2i\alpha x})^2}, \quad (2.137)$$

Dans ce cas l'Hamiltonien est non  $PT$  symétrique. Le spectre d'énergie est obtenu à l'aide de l'équation (2.130), où nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$  et  $V_1$  par  $iV_1$ . Nous obtenons un spectre d'énergie complexe de la forme suivante :

$$E_n = 4\alpha^2 \left[ \frac{2n+1}{2} - \frac{n(n+1) + i \frac{V_1}{4q\alpha^2}}{2n+1 - \mu \sqrt{1 - \frac{V_2}{q^2\alpha^2}}} \right]^2, \quad (2.138)$$

### II .5. Potentiel de Rosen-Morse

Lorsque  $V_1 = V_2 = 0$  le potentiel de Woods-Saxon plus le potentiel de Rosen-Morse (2.66) se réduisent au potentiel de Rosen-Morse [36] :

$$V(x) = -V_3 \operatorname{sech}_q^2(\alpha x) - V_4 \tanh_q(\alpha x), \quad (2.139)$$

Le spectre d'énergie (2.89) dans ce cas devient

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{4} \left( 2n+1 + \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right)^2 - \frac{V_4^2}{\alpha^2} \left( 2n+1 + \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right)^{-2}. \quad (2.140)$$

où  $n$  est le nombre quantique principal qui décrit la quantification pour les états d'énergie liés et  $n \geq 0, q \geq 1, \mu = -1$ .

Les fonctions d'onde correspondantes sont obtenues par l'équation (2.104) où nous annulons  $V_1$  et  $V_2$ , nous obtenons :

$$\psi_n(s) = L_n s^{\sqrt{\varepsilon - \beta_4}} (1 - qs)^{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right)} P_n \left( 2\sqrt{\varepsilon - \beta_4} + \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right) (1 - 2qs), \quad (2.141)$$

où  $L_n$  constante de normalisation obtenu par la condition de normalisation (2.94) qui donne

$$1 = L_n^2 (-1)^n \frac{[\Gamma(n+2c+1)]^2 \Gamma(n+2d+1)}{\Gamma(n+2c+2d+1)} \times \sum_{p,r=0}^n \frac{(-1)^{p+r} q^{n-p+r} \Gamma(n+2c+2d+r+1)}{p! r! (n-p)! (n-r)! \Gamma(p+2d+1)} \left\{ \frac{I_{nq}(p,r)}{\Gamma(r+2c+1) \Gamma(n+2c-p+1)} \right\}, \quad (2.142)$$

où

$$I_{nq}(p,r) = \frac{1}{(n+2\sqrt{\varepsilon}+r-p+1)} \times {}_2F_1(n+2\sqrt{\varepsilon}+r-p+1, \mu P - p - 1; n+2\sqrt{\varepsilon}+r-p+2, q), \quad (2.143)$$

et

$$c = \sqrt{\varepsilon}, \quad d = \frac{1}{2} \mu P, \quad P = -\sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2}}. \quad (2.144)$$

### II .5. 1. Premier exemple de Potentiel de Rosen-Morse complexe

Pour obtenir de différentes formes de potentiel de Rosen-Morse complexe, nous prenons au moins un des paramètres purement imaginaire ; nous remplaçons dans ce premier exemple de potentiel de Rosen-Morse généralisé  $\alpha$  par  $i\alpha$  et  $V_3, V_4$  restent réels. L'Hamiltonien dans ce cas est  $PT$  symétrique. Nous utilisons les relations trigonométriques, le potentiel de Rosen-Morse prend la forme suivante :

$$V(x) = V_R(x) + iV_I(x),$$

où

$$V_R(x) = -4V_3 \frac{2q + (q^2 + 1) \cos 2\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)^2} - V_4 \frac{1 - q^2}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)},$$

$$V_I(x) = -4V_3 \frac{(q^2 - 1) \sin 2\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)^2} - V_4 \frac{2q \sin 2\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \cos 2\alpha x)}. \quad (2.144)$$

Nous remplaçons  $\alpha$  par  $i\alpha$  dans l'équation (2.140), nous obtenons le spectre d'énergie relatif au potentiel de Rosen-Morse complexe suivant :

$$E_n = \frac{\alpha^2}{4} \left( 2n + 1 + \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right)^2 + \frac{V_4^2}{\alpha^2} \left( 2n + 1 + \sqrt{1 - \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right)^{-2}. \quad (2.145)$$

où  $n \geq 0, q \geq 1$ .

Le spectre d'énergie (2.145) est réel et positif.

### **II .5. 2. Deuxième exemple de Potentiel de Rosen-Morse complexe**

Nous remplaçons dans l'expression de Rosen-Morse (2.139)  $V_3$  par  $iV_3$ ,  $\alpha$  par  $i\alpha$  et  $q$  par  $iq$  et  $V_4$  reste réel. Nous utilisons les relations trigonométriques, le Potentiel de Rosen-Morse devient complexe c'est à dire :

$$V(x) = V_R(x) + iV_I(x),$$

où  $V_R(x)$  la partie réel et  $V_I(x)$  la partie imaginaire, telle que

$$\begin{aligned} V_R(x) &= -4V_3 \frac{(1 + q^2) \sin 2\alpha x + 2q}{(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x)^2} - V_4 \frac{1 - q^2}{(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x)}, \\ V_I(x) &= -4V_3 \frac{(1 - q^2) \cos 2\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x)^2} + V_4 \frac{2q \cos 2\alpha x}{(1 + q^2 + 2q \sin 2\alpha x)}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

l'Hamiltonien dans ce cas est non  $PT$  symétrique.

Dans le cas où nous prenons les paramètres  $V_3, \alpha$  et  $q$  purement imaginaire et le paramètre  $V_4$  réel, le spectre d'énergie (2.140) devient :

$$E_n = \frac{\alpha^2}{4} \left( 2n + 1 - \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right)^2 - \frac{V_4^2}{\alpha^2} \left( 2n + 1 - \sqrt{1 + \frac{4V_3}{q\alpha^2}} \right)^{-2}. \quad (2.147)$$

où  $n \geq 0$ .

le spectre d'énergie (2.147) de potentiel de Rosen Morse est réel [35].

**CHAPITRE 03**

**APPLICATION DE LA METHODE DE NIKIFOROV UVAROV**

**AU POTENTIEL DE SCARF II**

**III. 1. Introduction**

Le potentiel de Scarf I (ou potentiel trigonométrique) est transformé en potentiel appelé potentiel de Scarf II (ou potentiel hyperbolique) [46]. Le potentiel de Scarf trigonométrique tient compte d'un nombre infini des niveaux d'énergie d'états liés. Les niveaux d'énergie de potentiel de Scarf hyperbolique sont finis [46].

Nous proposons dans ce mémoire, l'application de la méthode de Nikiforov Uvarov au potentiel de Scarf II  $PT$  symétrique donné sous la forme suivante [37,47].

$$V(x) = -V_1 \operatorname{sech}^2 x - iV_2 \operatorname{sech} x \tanh x \quad V_1 > 0, V_2 \neq 0. \quad (3.1)$$

où  $V_1$  et  $V_2$  sont des paramètres réels.

Il peut aussi s'écrire sous la forme :

$$V(x) = -V_1 \frac{1}{\cosh^2 x} - iV_2 \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}, \quad (3.2)$$

Le spectre d'énergie est obtenu en résolvant l'équation aux valeurs propres associées :

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x) = 0, \quad (3.3)$$

### III.2. Recherche du spectre d'énergie et des fonctions d'onde relatifs au potentiel de Scarf II

Pour appliquer la Méthode de Nikiforov Uvarov, nous faisons le changement de la variable indépendante  $s = i \sinh x$ . Ce changement nous permet de ramener l'équation de Schrödinger unidimensionnelle à une équation généralisée du type hypergéométrique avec la nouvelle variable  $s$ .

Pour simplifier les calculs, nous nous plaçons dans le système des unités atomiques :

$$2m = \hbar^2 = 1.$$

l'équation de Schrödinger prend alors la forme:

$$-(1 - s^2) \frac{d^2\psi(s)}{ds^2} + s \frac{d\psi(s)}{ds} + \left[ E + V_1 \frac{1}{1 - s^2} + V_2 \frac{s}{1 - s^2} \right] \psi(s) = 0, \quad (3.4)$$

ce qui implique :

$$\psi''(s) - \frac{s}{1 - s^2} \psi'(s) + \frac{1}{(1 - s^2)^2} [E s^2 - V_2 s - E - V_1] \psi(s) = 0, \quad (3.5)$$

ce qui permet de réécrire l'équation de Schrödinger :

$$\psi''(s) - \frac{s}{1 - s^2} \psi'(s) + \frac{1}{(1 - s^2)^2} [-\varepsilon^2 s^2 - V_2 s + \varepsilon^2 - V_1] \psi(s) = 0. \quad (3.6)$$

où nous avons considéré

$$-\varepsilon^2 = E. \quad (3.7)$$

L'équation (3.6) est une équation généralisée du type hypergéométrique avec :

$$\sigma(s) = 1 - s^2 \quad ; \quad \tilde{\tau}(s) = -s \quad ; \quad \tilde{\sigma}(s) = -\varepsilon^2 s^2 - V_2 s + \varepsilon^2 - V_1, \quad (3.8)$$

Nous remplaçons ces polynômes dans l'expression du polynôme  $\pi(s)$  (2.11), nous obtenons :

$$\pi(s) = \frac{-s}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 4\varepsilon^2 - 4K)s^2 + 4V_2 s - 4(\varepsilon^2 - V_1 - K)}, \quad (3.9)$$

Nous calculons la constante  $K$  à partir de la condition où l'expression sous le radical admet des racines multiples. Le polynôme  $\pi(s)$  prend alors l'une des formes possibles suivantes :

$$\pi(s) = \begin{cases} \frac{-s}{2} \pm \frac{1}{2} [(\sqrt{A} - \sqrt{B})s + \sqrt{A} + \sqrt{B}] & \text{pour } K = \varepsilon^2 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{AB} \\ \frac{-s}{2} \pm \frac{1}{2} [(\sqrt{A} + \sqrt{B})s + \sqrt{A} - \sqrt{B}] & \text{pour } K = \varepsilon^2 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{AB} \end{cases}, \quad (3.10)$$

où

$$A = \frac{1}{4} + V_1 + V_2, \quad (3.11)$$

$$B = \frac{1}{4} + V_1 - V_2, \quad (3.12)$$

Nous choisissons parmi les quatre formes obtenues de polynôme  $\pi(s)$  celle qui assure à la fonction  $\tau(s)$  d'admettre une dérivée négative et une racine sur l'intervalle  $]-1, +1[$ . Ces conditions sont vérifiées donc par la fonction,

$$\tau(s)\tau(s) = -2s - (\sqrt{A} + \sqrt{B})s + \sqrt{A} - \sqrt{B}, \quad (3.13)$$

ce qui correspond à

$$\pi(s) = \frac{-s}{2} - \frac{1}{2} [(\sqrt{A} + \sqrt{B})s + \sqrt{A} - \sqrt{B}], \quad (3.14)$$

et

$$K = \varepsilon^2 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{AB}, \quad (3.15)$$

### **III.2.1. Recherche des valeurs propres de l'énergie**

Les valeurs propres de l'énergie vont être déduites à l'aide de l'équation (2.32), nous obtenons :

$$\lambda = \varepsilon^2 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{AB} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{A} + \sqrt{B}), \quad (3.16)$$

et

$$\lambda_n = -n(-2 - \sqrt{A} - \sqrt{B}) + n(n-1), \quad (3.17)$$

Puisque  $\lambda = \lambda_n$ , nous avons donc,

$$\varepsilon^2 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{AB} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = -n(-2 - \sqrt{A} - \sqrt{B}) + n(n-1), \quad (3.18)$$

Nous déduisons alors l'expression de  $\varepsilon^2$  :

$$\varepsilon^2 = \left( n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{A} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{B} \right)^2, \quad (3.19)$$

à condition :

$$A = \frac{1}{4} + V_1 + V_2 \Rightarrow \sqrt{A} = \mp \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2},$$

$$B = \frac{1}{4} + V_1 - V_2 \Rightarrow \sqrt{B} = \mp \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2},$$

en posant

$$p = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{t}{2} \quad (3.20)$$

et

$$q = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{r}{2} \quad (3.21)$$

où  $t = \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2}$  ;  $r = \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2}$ .

Nous pouvons reformuler l'expression de  $\varepsilon^2$  par :

$$\varepsilon^2 = (n - p - q)^2. \quad (3.22)$$



Nous obtenons alors le spectre d'énergie suivant :

$$E_n = -\varepsilon^2 = -(n - p - q)^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots < \left(\frac{t + r - 1}{2}\right). \quad (3.23)$$

Ce qui signifie que le nombre des valeurs propres de l'énergie est toujours fini. Nous avons considéré un potentiel unidimensionnel, son Hamiltonien est non Hermitien et  $PT$  symétrique. Cet Hamiltonien a un spectre d'énergie discret réel selon les constantes de couplage de la partie réelle et imaginaire du potentiel c'est-à-dire  $V_1$  et  $V_2$ , puisque  $V_1 > 0$ , deux cas apparaissent pour  $V_2$  réel :

- Pour  $|V_2| \leq \frac{1}{4} + V_1$  :

Dans ce cas  $p$  et  $q$  sont réels, on obtient un spectre d'énergie réel de la forme :

$$E_n = - \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \pm \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} \right) \right)^2. \quad (3.24)$$

\* Pour  $0 < V_2 \leq \frac{1}{4} + V_1$ , nous choisissons  $+\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2}$  et  $\pm\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2}$  pour obtenir  $p + q > 0$ . Nous employons ces notations dans l'équation (3.24), nous obtenons un spectre d'énergie réel :

$$E_n = - \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} \right)^2. \quad (3.25)$$

\* Cependant, si  $-\frac{1}{4} - V_1 < V_2 < 0$ , nous choisissons  $\pm\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2}$  et  $+\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2}$  pour obtenir  $p + q > 0$ . Nous employons ces notations dans l'équation (3.24), nous obtenons un spectre d'énergie réel :

$$E_n = - \left( n + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} \right)^2. \quad (3.26)$$

- Pour  $|V_2| > \frac{1}{4} + V_1$  :

$p$  est réel mais  $q$  est complexe, on obtient un spectre d'énergie complexe, dans les deux cas suivants :

- \* Pour  $V_2 > \frac{1}{4} + V_1$ , nous choisissons  $+\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2}$  et  $\pm\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2}$ , d'où  $E_n$  est complexe.

$$E_n = -\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} \mp i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2}\right)^2. \quad (3.27)$$

- \* Pour  $V_2 < -\frac{1}{4} - V_1$ , nous choisissons  $\pm\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2}$  et  $+\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2}$ , d'où  $E_n$  est complexe.

$$E_n = -\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} \mp i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2}\right)^2. \quad (3.28)$$

### **III .2.2.Recherche des fonctions d'onde**

Les fonctions d'onde correspondantes aux énergies  $E_n$  :

$$\psi_n(s) = C_n \phi(s) \mathcal{Y}_n(s). \quad (3.29)$$

où  $C_n$  est une constante de normalisation. La fonction  $\psi_n(s)$  est le produit de deux fonctions indépendantes  $\phi(s)$  et  $\mathcal{Y}_n(s)$ . Pour calculer la première fonction  $\phi(s)$ , en substituant le polynôme  $\sigma(s)$  (3.8) et le polynôme  $\pi(s)$  (3.12) dans l'équation (2.3) et en résolvant l'équation différentielle de premier ordre, on obtient

$$\phi(s) = (1 - s^2)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}(\sqrt{A} + \sqrt{B}) (1 - s)^{-\frac{1}{4}(\sqrt{A} - \sqrt{B})} (1 + s)^{\frac{1}{4}(\sqrt{A} - \sqrt{B})}, \quad (3.30)$$

Pour trouver la deuxième fonction  $\mathcal{Y}_n(s)$ , nous calculons d'abord la fonction de poids par l'équation (2.35) et nous résolvons l'équation différentielle de premier ordre, nous obtenons la fonction de poids suivante :

$$\rho(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}(\sqrt{A}+\sqrt{B})} (1 - s)^{-\frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B})} (1 + s)^{\frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B})}. \quad (3.31)$$

Insérons ensuite l'expression (3.31) dans la formule de Rodrigues (2.45), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_n(s) &= C_n (1 - s)^{\frac{1}{2}(\sqrt{A}+\sqrt{B}) + \frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B})} (1 + s)^{\frac{1}{2}(\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B})} \times \\ &\quad \times \frac{d^n}{ds^n} \left[ (1 - s)^{n - \frac{1}{2}(\sqrt{A}+\sqrt{B}) - \frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B})} (1 + s)^{n - \frac{1}{2}(\sqrt{A}+\sqrt{B}) + \frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B})} \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $C_n$  est la constante de normalisation.

En simplifiant cette dernière équation, nous obtenons :

$$\mathcal{Y}_n(s) = C_n (1 - s)^{2p + \frac{1}{2}} (1 + s)^{2q + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{ds^n} \left[ (1 - s)^{n - 2p - \frac{1}{2}} (1 + s)^{n - 2q - \frac{1}{2}} \right], \quad (3.33)$$

Nous écrivons les fonctions propres  $\mathcal{Y}_n(s)$  sous la forme

$$\mathcal{Y}_n(s) \equiv P_n^{-2p - \frac{1}{2}, -2q - \frac{1}{2}}(s), \quad (3.34)$$

où,

$P_n^{(-2p - \frac{1}{2}, -2q - \frac{1}{2})}(s)$  est le polynôme de Jacobi.

Les fonctions propres  $\psi_n(s)$  s'écrivent alors :

$$\psi_n(s) = C_n (1 - s)^{-p} (1 + s)^{-q} P_n^{-2p - \frac{1}{2}, -2q - \frac{1}{2}}(s), \quad (3.35)$$

ou en fonction de  $x$  :

$$\psi_n(x) = C_n (1 - i \sinh x)^{\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1}{4}} (1 + i \sinh x)^{\frac{\beta+1}{2} + \frac{1}{4}} P_n^{(\alpha, \beta)}(i \sinh x), \quad (3.36)$$

on multiplie et on divise la dernière équation par  $2^{\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1}{4}} 2^{\frac{\beta+1}{2} + \frac{1}{4}}$ , on obtient,

$$\psi_n(x) = C_n 2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2} + \frac{1}{2}} \left( \frac{1 - i \sinh x}{2} \right)^{\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1}{4}} \left( \frac{1 + i \sinh x}{2} \right)^{\frac{\beta+1}{2} + \frac{1}{4}} P_n^{(\alpha, \beta)}(i \sinh x), \quad (3.37)$$

où,

$$\alpha = -2p - \frac{1}{2}, \beta = -2q - \frac{1}{2}, \quad (3.38)$$

Pour déterminer la constante  $C_n$ , on réduit l'équation généralisée du type hypergéométrique (3.6) à une équation différentielle du type hypergéométrique (2.6), on obtient :

$$(1 - s^2)y_n''(s) + [\alpha - \beta - (\alpha + \beta + 2)s]y_n'(s) + n(n + \alpha + \beta + 1)y_n(s) = 0, \quad (3.39)$$

où  $\alpha = \sqrt{A}$  et  $\beta = \sqrt{B}$ .

Nous faisons le changement  $s = 1 - 2z$ , l'équation (3.39) devient :

$$2z(1 - z)y_n''(z) + [\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)z]y_n'(z) - \alpha_1\beta_1y_n(z) = 0, \quad (3.40)$$

Dans laquelle  $\alpha_1 = -n$ ,  $\beta_1 = n + \alpha + \beta + 1$ ,  $\gamma_1 = \alpha + 1$ . L'équation (3.40) est une équation du type hypergéométrique. Cette équation admet comme solution particulière polynomiale, la fonction :

$$y_n(z) = C_1 F\left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \frac{1-z}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-z}{2}\right)^{1-\gamma_1} F\left(\alpha_1 - \gamma_1 + 1, \beta_1 - \gamma_1 + 1, 2 - \gamma_1, \frac{1-z}{2}\right),$$

lorsque  $s \rightarrow -1$ ,  $z \rightarrow 1$ ,  $\frac{1-z}{2} \rightarrow 0$  donc  $C_2 = 0$ .

La solution de l'équation du type hypergéométrique prend la forme suivante :

$$y_n(z) = C_1 F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1-z}{2}\right), \quad (3.41)$$

où  $F\left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \frac{1-z}{2}\right)$  est une fonction hypergéométrique.

En utilisant la relation entre les fonctions hypergéométriques et les polynômes de Jacobi [23,46] :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1-z}{2}\right), \quad (3.42)$$

Nous avons trouvé  $\mathcal{Y}_n(s) \equiv P_n^{(\alpha, \beta)}(s)$  (l'équation (3.34)),

ou en fonction de  $z$  :  $\mathcal{Y}_n(z) \equiv P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ .

en conséquence, les fonctions d'onde  $\mathcal{Y}_n(z)$  (l'équation (3.41)), s'écrivent alors comme suit :

$$\mathcal{Y}_n(z) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1 - z}{2}\right), \quad (3.43)$$

Par analogie avec les fonctions  $\mathcal{Y}_n(z)$  (3.43), écrivons les fonctions d'onde  $\psi_n(z)$  (3.29) comme suit :

$$\psi_n(z) = \frac{\Gamma\left(n - 2p + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(-2p + \frac{1}{2}\right)} 2^{-p} 2^{-q} (z)^{-p} (1 - z)^{-q} P_n^{\left(-2p - \frac{1}{2}, -2q - \frac{1}{2}\right)}(z), \quad (3.44)$$

ou en fonction de  $s$  :

$$\psi_n(s) = \frac{\Gamma\left(n - 2p + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(-2p + \frac{1}{2}\right)} (1 - s)^{-p} (1 + s)^{-q} P_n^{\left(-2p - \frac{1}{2}, -2q - \frac{1}{2}\right)}(s), \quad (3.45)$$

où  $\Gamma\left(n - 2p + \frac{1}{2}\right)$  et  $\Gamma\left(-2p + \frac{1}{2}\right)$  sont les fonctions gamma.

La constante de normalisation  $C_n$  de la fonction  $\psi_n(s)$  est obtenue en fonction de la fonction gamma.

Le spectre d'énergie est trouvé réel, les fonctions d'onde correspondantes  $\psi_n(s)$  sont en fonction de polynôme de Jacobi. Nos résultats sont comparables à [37].

## CONCLUSION

Une nouvelle théorie quantique s'applique aux Hamiltoniens non Hermitiens. Elle concerne les Hamiltoniens qui sont invariants par la réflexion de l'espace  $P$  et le renversement du temps  $T$ . Cette théorie a été principalement développée par Bender et ses collaborateurs [7-14]. L'avantage et l'intérêt de ce type d'Hamiltoniens ont un spectre en énergie réel et positif, possédant un produit scalaire défini positif pour lequel la norme  $CPT$  des états est positive et l'évolution temporelle est unitaire.

Mostafazadeh a présenté [15] une alternative à la mécanique quantique conventionnelle, dans laquelle les Hamiltoniens non Hermitiens sont pseudo hermitiens dont les valeurs propres sont réelles. Le but de ce nouveau concept est de trouver une relation mathématique entre un Hamiltonien hermitien  $h$  et un Hamiltonien pseudo hermitien  $H$ .

Dans ce mémoire nous avons présenté une méthode de résolution de l'équation de Schrödinger pour des systèmes stationnaires unidimensionnels, et nous nous sommes intéressé tout particulièrement aux cas de potentiels  $PT$  symétriques, dans le but de déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes.

Cette méthode est appelée la méthode de Nikiforov Uvarov [23]. Après avoir exprimé les équations de base de cette méthode, nous avons résolu l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension relative aux différentes formes de potentiel de Woods Saxon plus le potentiel de Rosen Morse, aux différentes formes de potentiel de Woods Saxon et aux différentes formes de potentiel de Rosen Morse. Ces potentiels dépendent d'un paramètre réel de déformation  $q \geq 1$ . Nous avons résolu l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension dans le cas des Hamiltoniens hermétiques et non hermitiens,  $PT$  et non  $PT$  symétrique, et nous déduisons que cette méthode s'applique de la même manière que pour les Hamiltoniens hermitiens. Les valeurs propres d'énergie pour le potentiel de Woods Saxon plus le potentiel de Rosen Morse, pour le potentiel de Woods Saxon et pour le potentiel de Rosen Morse ont été présentées séparément. Pour les

Hamiltoniens hermitiens les spectres d'énergie sont trouvés réels, pour les Hamiltoniens non hermitiens  $PT$  symétriques les spectres d'énergie sont trouvés réels et positifs.

Nous avons appliqué cette méthode au potentiel de Scarf II unidimensionnel invariant sous la transformation simultanée de la réflexion de l'espace ( $P$ ) et de l'inversion du temps ( $T$ ) dans le but de déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes. Le spectre d'énergie est trouvé réel pour  $|V_2| \leq \frac{1}{4} + V_1$ , et les fonctions d'onde sont trouvées en fonction de polynôme de Jacobi. Nos résultats sont en accord avec ceux obtenus par d'autres auteurs [37].

Nous pouvons conclure, en tenant compte d'autres travaux, ayant appliqué la méthode de Nikiforov Uvarov pour d'autres potentiels [48-50], que cette dernière est une méthode analytique efficace permettant d'obtenir le spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondante, seulement dans le cas où le polynôme  $\tau(s)$  admet une dérivée négative et une racine sur l'intervalle  $]a, b[$ .

Comme perspective, il serait intéressant d'appliquer cette méthode dans d'autres cas de potentiels complexes dont les Hamiltoniens sont  $PT$  symétriques, pour le calcul des énergies des états liés ou excités et les fonctions d'onde correspondantes.

## REFERENCES

- [1] M. Planck, Initiation à la physique (1941).
- [2] A. Einstein et L. Infeld, l'évolution des idées en physique (1936).
- [3] L. Landau, E. Lifshitz, Mécanique, Tome I, Edition MIR, Moscou, 1982.
- [4] L. Landau, E. Lifshitz, Mécanique quantique, Tome III, Edition MIR, Moscou, 1980.
- [5] L. Landau, E. Lifshitz, Mécanique relativiste, Tome IV, Edition MIR, Moscou, 1989.
- [6] Cohen-Tannoudji, C. C. Diu. B. F. Laloë, Mécanique quantique, Tome I et II, Edition Hermann, Paris, 1973.
- [7] C.M. Bender, Phys. Rev. **46** 277 (2005).
- [8] C.M. Bender, S.Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80** 5243 (1998).
- [9] C.M. Bender, K.A. Milton, Phys. Rev. D **57** 3595 (1998).
- [10] C.M. Bender, D.C. Brody, H. F. Jones, Phys. Rev. Lett. **89** 270401 (2002).
- [11] C. M. Bender, S. Boettcher, J. Phys A: Math. Gen. **A31**, L273 (1998).
- [12] C.M. Bender, S. Boettcher, PN Meisinger, J. Math. Phys. **40** 2210 (1999).
- [13] C. M. Bender, Droje C. Brody , H. F. Jones, Am. J. Phys. **71** 1095 (2003).
- [14] C. M. Bender, H. F. Jones. Phys. Lett. A. **328** 2(2004) .
- [15] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43** 205 (2002).
- [16] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43** 2814 (2002).
- [17] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43** 3944-3951 (2002).
- [18] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **44** 974-989 (2003).



- [19] A. Mostafazadeh, J. Phys. A **38** 3213 (2005).
- [20] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **45** 932-946 (2004).
- [21] A. Mostafazadeh, Phys. Lett. A **17** 1973 (2002).
- [22] A. Mostafazadeh, Czech. J. Phys. **56** 919 (2006).
- [23] A. F. Nikiforov, V.B. Uvarov, Fonctions spéciales de la physique mathématique, Editions Mir, 1983.
- [24] H. Egrifes. R. Sever, Phys. Lett. A **344**. 117 (2005).
- [25] C. Berkdemir, J. Han, Chem. Phys. Lett. **409** 203 (2005).
- [26] C. Berkdemir, Am. J. Phys. **75** 81 (2007).
- [27] C. Berkdemir, A. Berkdemir, R. Sever, J. Phys. A: Math. Gen. **39** 13455 (2006).
- [28] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, (New York, 1972).
- [29] S. M. Ikhdair, R. Sever, Int. J. Phys **16** 218 (2007).
- [30] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, Formulas and Theorems for the special functions of Mathematical Physics, third ed., Springer, Berlin, 1966
- [31] C. Berkdemir, A. Berkdemir, R. Sever. J. Math. Chem. **43** 944 (2008).
- [32] C. Berkdemir, A. Berkdemir, R. Sever. Phys. Rev. C **72** 027001 (2005).
- [33] B. Gonul, K. Koksal, Phys. Scr. **76** 565 (2007).
- [34] S.M, Ikhdair. R. Sever. Int. J. Theo. Phys. **46** 1643 (2007).
- [35] Sanjib Meyur, S. Debnath. J. Phys .587 (2010).
- [36] C. S. Jia, S. C. Li, Y. Li, L. T. Sun, Phys. Lett. A **300** 115 (2002).
- [37] B. Bagchi, C. Quesne. J. Phys. A: Math. Théor. **43** 305301 (2010).
- [38] M. Bentaiba, L. Chetouani, T.F. Hammann, Z. Naturforsch. A **47** 1013 (1992).

- [39] M. Bentaiba, L. Chetouani, T.F. Hammann, Phys. Lett. A **198** 433 (1994).
- [40] S–A.Yahiaoui, O.Cherroud, M.Bentaiba, J.Math.Phys.**48** 113503 (2007).
- [41] M. Bentaiba, L. Chetouani, A. Mazouz, Phys. Lett. A **295** 13 (2002).
- [42] D. R. Nelson, N. M. Shnerb, Phys. Rev. E **58** 1383 (1998).
- [43] N. Hatano, D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **77** 570 (1996), Phys. Rev. B **56** 8651 (1997).
- [44] S.M. Ikhdair, R.Sever, arXiv: quant-ph/070308v1(2007).
- [45] I. S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, New York (1963).
- [46] D. E. Alvarez-Castillo, M. Kirchbach, arXiv: quant-ph/0603122v4 (2008).
- [47] B. Bagchi, C. Quesne, Phys. Lett. A **300** 18 (2002).
- [48] D.Agboola .Phys. Lett. A. **27** 040301 (2010).
- [49] S, M.Ikhdair, R. Sever, J. Phys A. Math, Theor **44** 355301 (2011).
- [50] M. Aktas, J. Math. Chem **49** 1831 (2011).