

7465029 2021
682

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT DE MECANIQUE

THESE DE MAGISTER

Spécialité : Mécanique
Option : Energétique

THEME

ETUDE D'ADAPTATION
D'UNE HELICE A PAS VARIABLE
D'UN AVION LEGER
EN MATERIAUX COMPOSITES

Présenté par :
FARID LARBI

Proposé et dirigé par :
Dr Z.YOUBI

Thèse soutenue devant la commission :

Président : Dr A.HAMOUR
Examineurs : Dr M.HARHAD
Dr T.REZOUG
Dr M.MAGHRAOUI
Dr Z.YOUBI



REMERCIEMENTS

Je désire témoigner mes plus vives reconnaissances à mon promoteur, Mr Z.YOUBI ,pour ses conseils,sa compréhension et son enthousiasme qui m'ont été très encourageants et m'ont facilité l'élaboration de ce travail.

En second lieu, je tiens à remercier Mr C.KORCHI et Mr F.BENCHIKH pour leur colaboration.

J'exprime aussi mes remerciements envers tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin à ce projet, plus particulièrement:

- | | |
|--------------|----------------------------|
| - K.CHERIFI | - N.HALFAOUI |
| - K.DJIDJLI | - B.BELIMANE |
| - O.GHERBI | - M.HOUARI |
| - A.BABA-ALI | - Z.EULDJI |
| - M.MERDJ | - M.BEKKAI |
| - A.GHRIB | - Mlle S.KACIMI EL HASSANI |
| - M.DRAFLI | - Mlle N.SEMANE |
| - H.A.GUEMAT | - Mlle W.HAMOULI |

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

ma très chère mère

mon père bien aimé

mes frères, mes soeurs

tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

RESUME

Pendant longtemps, les constructeurs ont hésités avant d'adopter l'hélice à pas variable comme remède à l'hélice à pas fixe, ceci à cause de son poids et de sa complexité, mais après de long discussions sur les avantages relatifs du pas fixe et du pas variable, on a du se rendre à l'évidence qu'une faible traction au point fixe posait un handicap sérieux sur les avions à hautes performances, d'où ce qu'il fallait à ce moment là était une hélice qui aurait un bon rendement dans les deux cas extrêmes (décollage et vol en croisière). En d'autres mots, une hélice a deux pas était tout ce dont on avait besoin, ainsi on assista à la naissance de l'hélice à pas réglable en marche (petit pas et grand pas).

Le réglage de l'hélice se fait automatiquement de façon à ce que sa vitesse de rotation soit maintenue à cette valeur, peu importe l'ouverture des gaz ou des manoeuvres de l'avion.

L'objet de ce travail consiste à l'étude d'une hélice à pas variable d'avion léger en matériaux composite à haute performance, dont les différentes parties sont:

Détermination de toutes les performances de l'hélice (traction, couple, rendement, coefficients de portance et de trainée...etc).

Détermination de tous les efforts, moments et contraintes qui s'exercent sur la pale.

Le choix du matériaux composite basé sur les propriétés mécaniques a été évalué, l'époxy chargé avec la fibre de verre est destiné pour le désigne de coque, et l'époxy renforcé avec la fibre de carbone est choisie pour fabrication du tube de la pale.

Une optimisation de l'angle de calage a été obtenue pour une valeur de 19), c'est à dire nous sommes arrivés à mettre au point un code de calcul qui permet de déterminer toutes les performances, ainsi que le calcul de résistance des matériaux de l'hélice d'avion, ceci pour différentes angles de calage et du nombre de pales.

TABLE DES MATIERES

Resume	
Table des matières	
Liste des figures	
Liste des symboles	

CHAPITRE 1

1 - INTRODUCTION.....	1
-----------------------	---

CHAPITRE 2

2 - GENERALITES.....	3
2-1 Rôle d'une hélice.....	3
2-2 Définition géométrique.....	3
2-3 Définition des axes.....	3
2-4 Caractéristiques d'une section droite.....	5
2-5 Définition du pas d'une section.....	5
2-6 Différents types d'hélices.....	9
2-7 Fonctionnement aérodynamique.....	9
2-7-1 Définition.....	9
2-8 Théorie générale de l'hélice.....	13
(approche par l'analyse dimensionnelle).	
2-9 Théorie de Froude.....	17
2-10 Théorie de l'élément de pale.....	21
2-11 Fonctionnement des hélices.....	25
2-11-1 Fonctionnement en hélice tractive.....	25
2-11-2 Fonctionnement en hélice-frein.....	27
2-11-3 Fonctionnement moulinet (ou aéromoteur).....	27
2-12 Champs autour d'une hélice.....	27
2-12-1 Généralités.....	27
2-12-2 Champs moyen des vitesses et des pressions autour d'une hélice.....	27
2-12-3 Champs instantané autour d'une hélice.....	29
2-13 Théorie tourbillonnaire de l'hélice.....	31
2-13-1 Hypothèses.....	31
2-13-2 Définitions.....	31
2-14 Calcul des composantes de traction et du couple résistant.....	33

2-14-1 Hypothèses.....	33
2-14-2 Estimation des coefficients de portance et de trainée.....	35

CHAPITRE 3

3- CALCUL DES VITESSES INDUITES (méthode de HIRSCH).....	37
3-1 Hypothèses.....	37
3-2 Méthode de HIRSCH.....	40
3-2-1 Calcul des intégrales.....	51

CHAPITRE 4

4 - DETERMINATION ET INTERPRETATION DES PERFORMANCES D'UNE HELICE D'AVION DU TYPE R3000 N°1.....	56
4-1 Détermination du diamètre de l'hélice.....	56
4-2 Interprétation des résultats.....	57
4-2-1 Le point fixe.....	57
4-2-2 Vol de croisière.....	63
4-3 Conclusion.....	67

CHAPITRE 5

5- ETUDE DE LA MECANIQUE DE LA PALE.....	71
5-1 Définitions.....	71
5-2 Calcul des efforts d'origine centrifuge.....	71
5-2-1 Calcul des moments dûs aux forces centrifuges.....	74
5-2-2 Calcul du moment de torsion dû aux forces centrifuges....	75
5-2-3 Calcul du moment de flexion dû aux forces centrifuges....	77
5-3 Calcul des efforts aérodynamiques.....	78
5-3-1 Calcul des moments dûs aux forces aérodynamiques.....	80
5-3-2 Calcul du moment de torsion dû aux forces aérodynamiques.	81
5-3-3 Calcul du moment de flexion dû aux forces aérodynamiques.....	82
5-4 Calcul de la résultante des forces centrifuges et aérodynamiques.....	82
5-5 Calcul des moments de torsion résultants dûs aux forces aérodynamiques et centrifuges.....	84
5-6 Calcul des moments de flexion résultants dûs aux forces centrifuges et aérodynamiques.....	84
5-7 Etude des contraintes s'exerçant sur la pale.....	85
5-7-1 Détermination des contraintes normales.....	85
5-7-2 Détermination des contraintes de flexion.....	86

5-7-3 Détermination de la position de la fibre neutre.....	87
5-7-4 Calcul des contraintes de torsion.....	88
5-8 Calcul des déformations s'exerçant sur la pale.....	88
5-8-1 Calcul de la déformation due à la torsion.....	88
5-8-2 Calcul des déformations dues à la flexion.....	88

CHAPITRE 6

6 - CALCUL DU CENTRE DE TORSION D'UNE SECTION DE PALE EN MATERIAUX COMPOSITES.....	90
6-1 Conception de la pale.....	90
6-2 Définition.....	90
6-3 Hypothèses.....	90
6-4 Calcul des flux s'exerçant sur une section.....	90
6-5 Calcul de la rigidité de torsion.....	101

CHAPITRE 7

7 - DETERMINATION ET INTERPRETATION DES RESULTAS DE RESISTANCE DES MATERIAUX D'UNE HELICE D'AVION DU TYPE R3000 N°1.....	104
7-1 Influence de l'angle de calage sur les résultats R.D.M aux point fixe.....	104
7-2 Influence de l'angle de calage sur les résultats R.D.M en vol de croisière.....	109
7-3 Conclusion.....	116

CHAPITRE 8

8 - CONCLUSION.....	117
- BIBLIOGRAPHIE.....	118
- ANNEXES	

LISTE DES FIGURES

Figure (2-1): Définition géométrique d'une hélice.....	4
Figure (2-2): Caractéristiques d'une section droite normale à l'axe de la pale.....	6
Figure (2-3): Variation du pas en fonction de l'angle de calage....	8
Figure (2-4): Définition des repères.....	10
Figure (2-5): Définition aérodynamique d'une hélice.....	12
Figure (2-6): Etude de l'hélice en soufflerie.....	16
Figure (2-7): Variation du rendement en fonction de V/V_0	22
Figure (2-8): Représentation graphique des efforts aérodynamique auxquels est soumis l'élément de pale.....	23
Figure (2-9): Principe de fonctionnement de l'hélice.....	26
Figure (2-10): Champs moyen autour d'une hélice.....	28
Figure (2-11): Variation de la traction élémentaire le long de la pale d'hélice.....	30
Figure (2-12): Champs de vitesses induites par les tourbillons de la veine soufflée.....	32
Figure (2-13): Représentation graphique de la traction et du couple sur une tranche de pale.....	33
Figure (3-1): Evolution d'une ligne moyenne de tourbillon marginal.	38
Figure (3-2): Evolution de deux lignes moyennes de tourbillons marginaux situés sur deux pales opposées.....	41
Figure (3-3): Variation de la vitesse tangentielle induite.....	45
Figure (4-1): Variation de la vitesse induite tangentielle, le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	59
Figure (4-2): Variation de la vitesse induite axiale, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	59
Figure (4-3): Variation de la vitesse aérodynamique, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	60
Figure (4-4): Variation de l'angle d'incidence, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	60
Figure (4-5): Variation de l'angle aérodynamique, le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	61

Figure (4-6):Variation de la circulation, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	61
Figure (4-7):Variation de la traction élémentaire, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	62
Figure (4-8):Variation du couple élémentaire, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	62
Figure (4-9):Variation du coefficient de portance C_z , le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	64
Figure (4-10):Variation du coefficient de traînée, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).....	64
Figure (4-11):Variation de la vitesse induite tangentielle, le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	65
Figure (4-12):Variation de la vitesse induite axiale, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	65
Figure (4-13):Variation de la vitesse aérodynamique, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	66
Figure (4-14):Variation de l'angle d'incidence, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	66
Figure (4-15):Variation de l'angle aérodynamique, le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	68
Figure (4-16):Variation de la circulation, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	68
Figure (4-17):Variation de la traction élémentaire, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	69
Figure (4-18):Variation du couple élémentaire, le long de la pale, fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	69

Figure (4-19):Variation du coefficient de portance C_z , le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	70
Figure (4-20):Variation du coefficient de traînée, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).....	70
Figure (5-1):Représentation graphique de la force centrifuge.....	72
Figure (5-2):Représentation graphique de l'effort aérodynamique...	79
Figure (5-3):Représentation graphique des efforts globaux et des moments s'exerçant sur la pale.....	83
Figure (6-1):Vue en coupe d'une pale en matériaux composites.....	91
Figure (7-1):Variation de la résultante des forces radiales, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	105
Figure (7-2):Variation de la résultante des forces orthogonales le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	105
Figure (7-3):Variation de la résultante des forces axiales, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	106
Figure (7-4):Variation du moment de torsion résultant, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	106
Figure (7-5):Variation du moment d'avancement résultant, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	107
Figure (7-6):Variation du moment couple résultant, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	107
Figure (7-7):Variation de la déformée δ_a , le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	108
Figure (7-8):Variation de la déformée δ_b , le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	108
Figure (7-9):Variation de la déformée due a la torsion, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	110
Figure (7-10):Variation de la contrainte s'exerçant au niveau du tube, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	110

Figure (7-11):Variation de la contrainte s'exerçant au niveau de la coque, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (au point fixe).....	111
Figure (7-12):Variation de la résultante des forces radiales, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	111
Figure (7-13):Variation de la résultante des forces orthogonales le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	112
Figure (7-14):Variation de la résultante des forces axiales, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	112
Figure (7-15):Variation du moment de torsion résultant, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de de croisière).....	113
Figure (7-16):Variation du moment d'avancement résultant, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	113
Figure (7-17):Variation du moment couple résultant, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	114
Figure (7-18):Variation de la déformée δ_a , le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).	114
Figure (7-19):Variation de la déformée δ_b , le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).	115
Figure (7-20):Variation de la déformée due a la torsion, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	115
Figure (7-21):Variation de la contrainte s'exerçant au niveau du tube, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	117
Figure (7-22):Variation de la contrainte s'exerçant au niveau de la coque, le long de la pale, en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).....	117

LISTE DES SYMBOLES

l : corde locale ou profondeur
 ω : vitesse de rotation de l'hélice
V : vitesse d'avancement de l'avion
W : vitesse du profil
W₀ : vitesse aérodynamique
H : pas d'une hélice
dr : épaisseur d'un élément de pale
ds : section d'un élément de pale
 θ : angle de calage
 β : angle de direction de la vitesse \vec{W} avec le plan de rotation
i : incidence du profil
 γ : vitesse d'avancement par tour
 ϕ : angle aérodynamique
R_z : portance
R_x : trainée
R_t : traction d'hélice
R_c : effort résistant
p : nombre de pales
 η_0 : rendement théorique de la pale
P_f : puissance fournie par le moteur
 η : rendement de l'hélice
P_u : puissance utile
 τ : coefficient de traction
 α : coefficient de puissance
P : pression dynamique
 ρ : masse volumique de l'air
C_r : coefficient de la résultante aérodynamique
M : moment résultant
T : température
C_m : coefficient du moment résultant
V₀ : vitesse de l'air à l'infini amont de l'hélice
u : vitesse induite tangentielle
v : vitesse induite axiale

Γ : circulation
 C_z : coefficient de portance
 C_x : coefficient de trainée
 D : diamètre de l'hélice
 R_e : rayon extérieur de la pale
 R_o : rayon du moyeu
 Q : flux de cisaillement
 e : épaisseur
 M^t : moment de torsion
 $G.J$: rigidité de torsion
 G : module d'élasticité transversale
 F_c : force centrifuge
 $S(r)$: aire de la section considérée
 M^f : moment de flexion
 R_a : force aérodynamique
 M_r : moment de tangage
 σ_n : contrainte normale
 τ : contrainte de torsion
 $\delta\theta$: déformation
 I_M : moment d'inertie principal maximum.
 I_m : moment d'inertie principal minimum.
 I_o : moment d'inertie polaire.
 E : module d'élasticité longitudinale du matériau.
 G : module d'élasticité transversale du matériau.
 $a(r)$: déport du centre de gravité dans la section, à la distance r de l'axe de l'hélice, portée par l'axe oy .
 $b(r)$: déport du centre de gravité dans la section, à la distance r de l'axe de l'hélice, portée par l'axe oz .

INTRODUCTION

De tous les différents systèmes de propulsion, l'hélice (à pas fixe) a été la plus utilisée dans le passé, et pour de nombreux types d'avions, mais pendant longtemps, les constructeurs ont hésité avant d'adopter l'hélice à pas variable comme remède, à cause de son poids et de sa complexité, car l'hélice à pas fixe, installée sur un avion à hautes performances, aurait un pas tellement grand, donc par conséquent, des angles de calages tellement forts que certaines parties des pales rencontreraient le vent relatif sous des angles de 70° et plus; le rendement et la traction au point fixe seraient ridiculement bas et la course au décollage démesurément longue. Pour cela, les recherches menées en Europe et aux Etats-Unis portent particulièrement sur le développement des méthodes de calcul et du choix du matériau à utiliser, d'où l'objet de notre sujet qui consiste en l'étude de l'adaptation d'une hélice à pas variable d'un avion léger en matériaux composites à hautes performances.

Afin de bien mener cette étude, nous avons adopté une démarche comptant les six phases retracées succinctement:

- La première consiste à présenter d'une manière générale le principe de fonctionnement et l'étude aérodynamique de l'hélice d'avion.

- La deuxième phase se subdivise en deux parties :

- * Une partie qui consiste à déterminer toutes les performances de l'hélice (vitesse et angle aérodynamiques, angle d'incidence, traction, couple, coefficients de portance et de trainée, etc...).

- * L'autre partie consiste à déterminer, en utilisant la méthode de HIRSCH, les vitesses induites s'exerçant sur la pale de l'hélice.

- La troisième phase traite l'application sur l'hélice d'un avion léger de la société PIERRE ROBIN (R3000).

- La quatrième phase est consacrée au calcul de la résistance des matériaux où nous étudions :

- * Les efforts et les moments s'exerçant sur la pale.

- * La rigidité de torsion.

- * Les déformations et les contraintes s'exerçant sur le tube et la coque de la pale.

- L'avant dernière phase traite un exemple de calcul de la résistance des matériaux (R.D.M) d'une pale d'hélice faite en matériaux composites.

- A la dernière phase, nous présentons un organigramme global permettant de déterminer toutes les performances, ainsi que le calcul d'R.D.M d'une hélice d'avion léger en matériaux composites, ceci pour différents angles de calage et de nombre de pales.

Puis on achève notre étude par une conclusion générale.

Chapitre 2

GENERALITES:

2-1 Rôle d'une hélice :

L'hélice a pour rôle de convertir le couple produit par la puissance du moteur en force propulsive, cette hélice pouvant être installée à l'avant ou à l'arrière du moteur.

Si l'hélice est installée à l'avant, elle crée une tension sur l'arbre porte-hélice puisqu'elle tire l'avion, d'où le nom d'hélice tractive; au contraire, si l'hélice est installée à l'arrière, elle pousse l'avion vers l'avant, c'est-à-dire qu'elle agit un peu à la façon d'un réacteur qui lui aussi pousse l'avion vers l'avant, d'où le nom d'hélice propulsive.

Pour simplifier, nous parlerons dans ce qui suit de traction d'hélice pour exprimer sa force propulsive sans tenir compte de sa position vis à vis du moteur.

2-2 Définition géométrique :

Une hélice comporte essentiellement un moyeu et un ensemble de pales, celles-ci étant identiques entre elles et forment des angles égaux dans leur répartition autour du moyeu (voir fig :2-1).

2-3 Définition des axes :

On appelle :

a) Axe d'hélice (\vec{oZ}), l'axe de rotation de l'hélice (voir fig :2-1).

b) Axe de pale (\vec{oX}), l'axe de référence invariable, lié à la pale, et dont la direction est orientée du moyeu vers l'extrémité de la pale.

c) Axe (\vec{oY}), le troisième axe qui complète le trièdre direct (o,x,y,z).

d) Plan d'hélice (ou plan de rotation), celui engendré par l'axe de la pale dans sa rotation autour de l'axe de l'hélice.

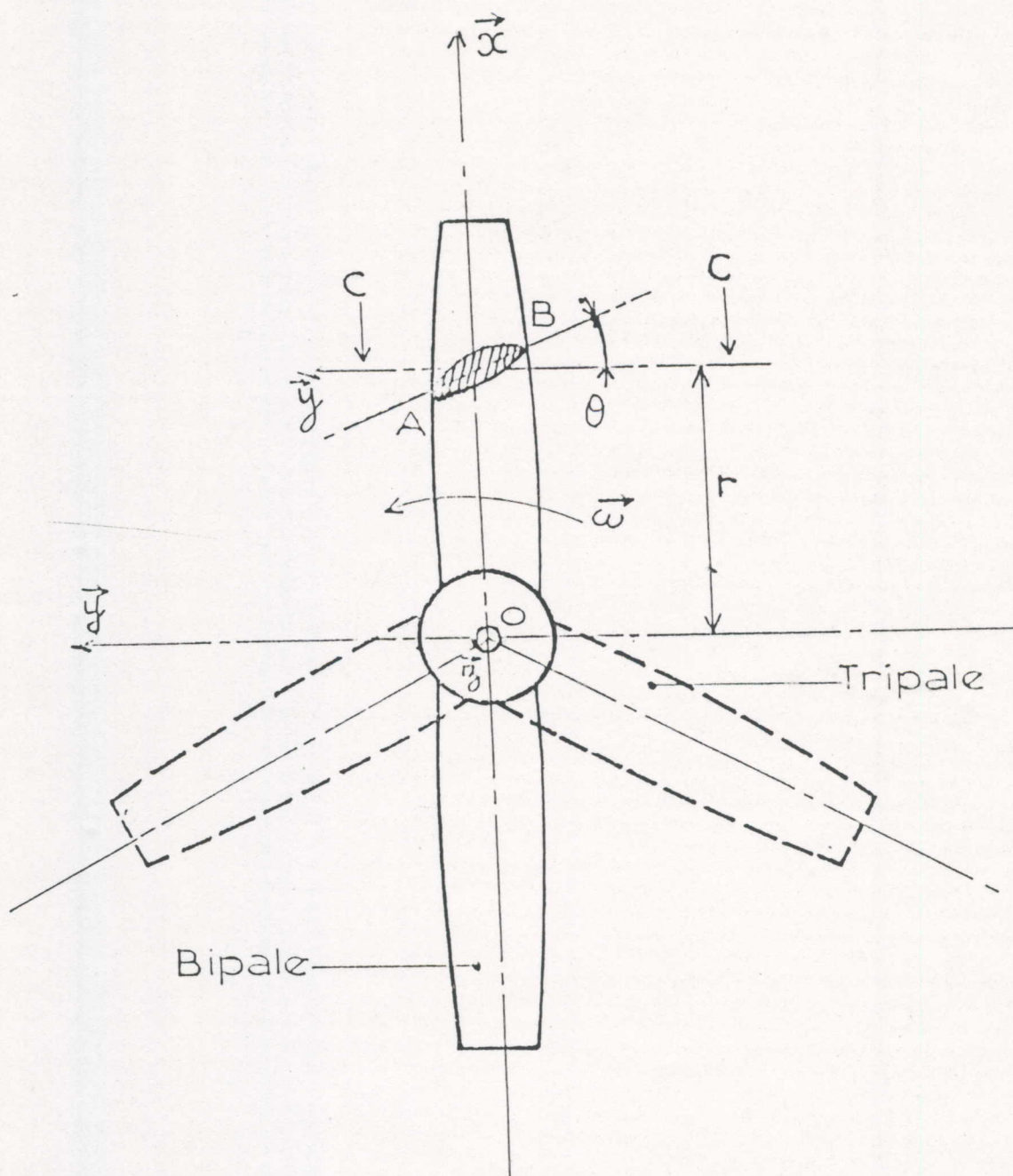


FIGURE (2-1) : DEFINITION GEOMETRIQUE D'UNE HELICE.

2-4 Caractéristiques d'une section droite :

Une section droite normale à l'axe de la pale, à une distance "r", est un profil d'aile défini par (voir fig:2-2):

- Une corde de référence AB de longueur "l" appelée profondeur ou corde locale.
- Un point A "bord d'attaque".
- Un point B "bord de fuite".
- AMB : extradados.
- ANB : intrados.
- MN : c'est le milieu des segments perpendiculaires à la corde de référence appelée squelette du profil (ou ligne moyenne).
- e : c'est la valeur maximale du segment MN, appelée épaisseur du profil.
- f (flèche maximale) : c'est la plus grande ordonnée de la ligne moyenne par rapport à AB.
- f/l : courbure relative.
- e/l : épaisseur relative.
- d/l : c'est le rapport qui définit la position de la flèche maximale.

Remarque : Pour un nombre de Machs inférieur à 1/3, les profils classiques usuels ont une épaisseur relative (e/l) qui varie de 6 à 20%, l'épaisseur maximale étant située aux environs de 1/3 de la profondeur, la courbure relative variant de 6 à 8% et d/l de 15 à 50%.

2-5 Définition du pas d'une section :

On définit le pas comme étant la distance parcourue par la section droite sur un tour d'hélice. Par exemple, si l'hélice effectue un tour complet sans se déplacer vers l'avant, la distance parcourue par la section droite est la circonférence du cercle de rayon "r", c'est à dire $[2\pi r]$, mais si de plus l'hélice se déplace vers l'avant d'une distance "H", alors la distance parcourue par cette section sera égale à l'hypoténus du triangle rectangle dont les deux autres côtés seront "2 π r" et "H".

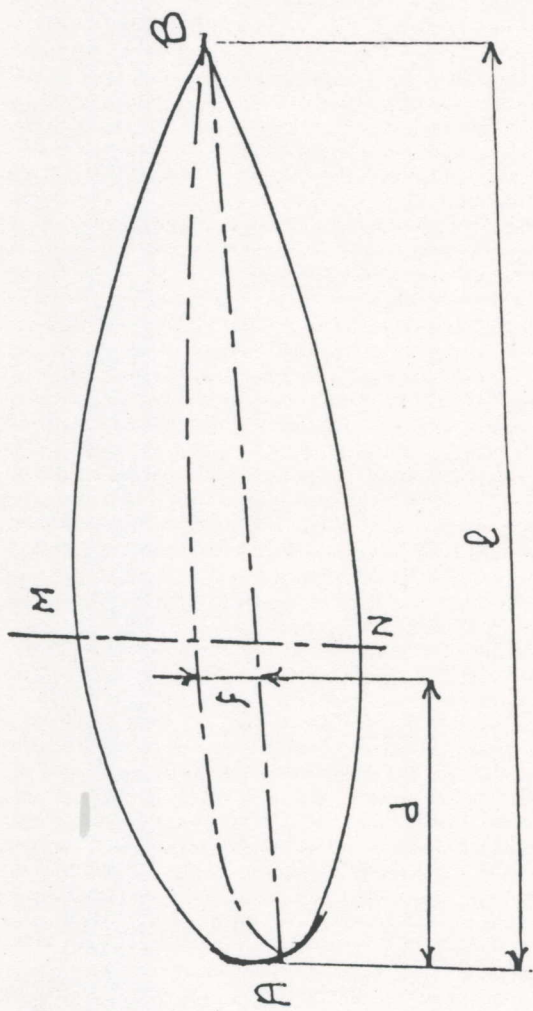
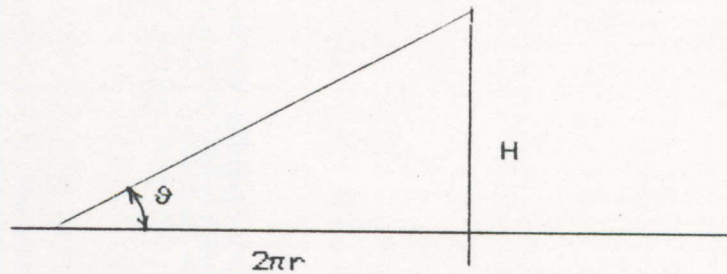


FIGURE (2-2) : CARACTERISTIQUES D'UNE SECTION DROITE NORMALE A L'AXE DE LA PALE.



Le pas d'une section a pour expression :

$$H = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \text{tg}(\theta) \quad (2-1)$$

On définit aussi le pas relatif comme étant le rapport :

$$\frac{H}{D} = \pi \cdot \frac{r}{R} \text{tg}(\theta) \quad (2-2)$$

Où $D = 2R$ est le diamètre du cercle de surface S décrit par l'extrémité de la pale.

Remarque:

- Par convention on définit le pas d'une hélice comme étant le pas de la section située à $r = 0.75 R$, appelée section de base, lieu où l'effet de traction est en général maximum.

- Si l'on modifie l'orientation de la pale d'une valeur μ qui accroît l'angle de calage, tous les calages ainsi que le pas augmentent, ce dernier varie du moyeu vers l'extrémité de la pale de la manière suivante (voir fig :2-3):

$$Y = r \cdot \text{tg}(\theta + \mu) = p \cdot \frac{\text{tg}(\mu + \theta)}{\text{tg} \theta} \quad (2-3)$$

et

$$H' = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \text{tg}(\mu + \theta) \quad (2-4)$$

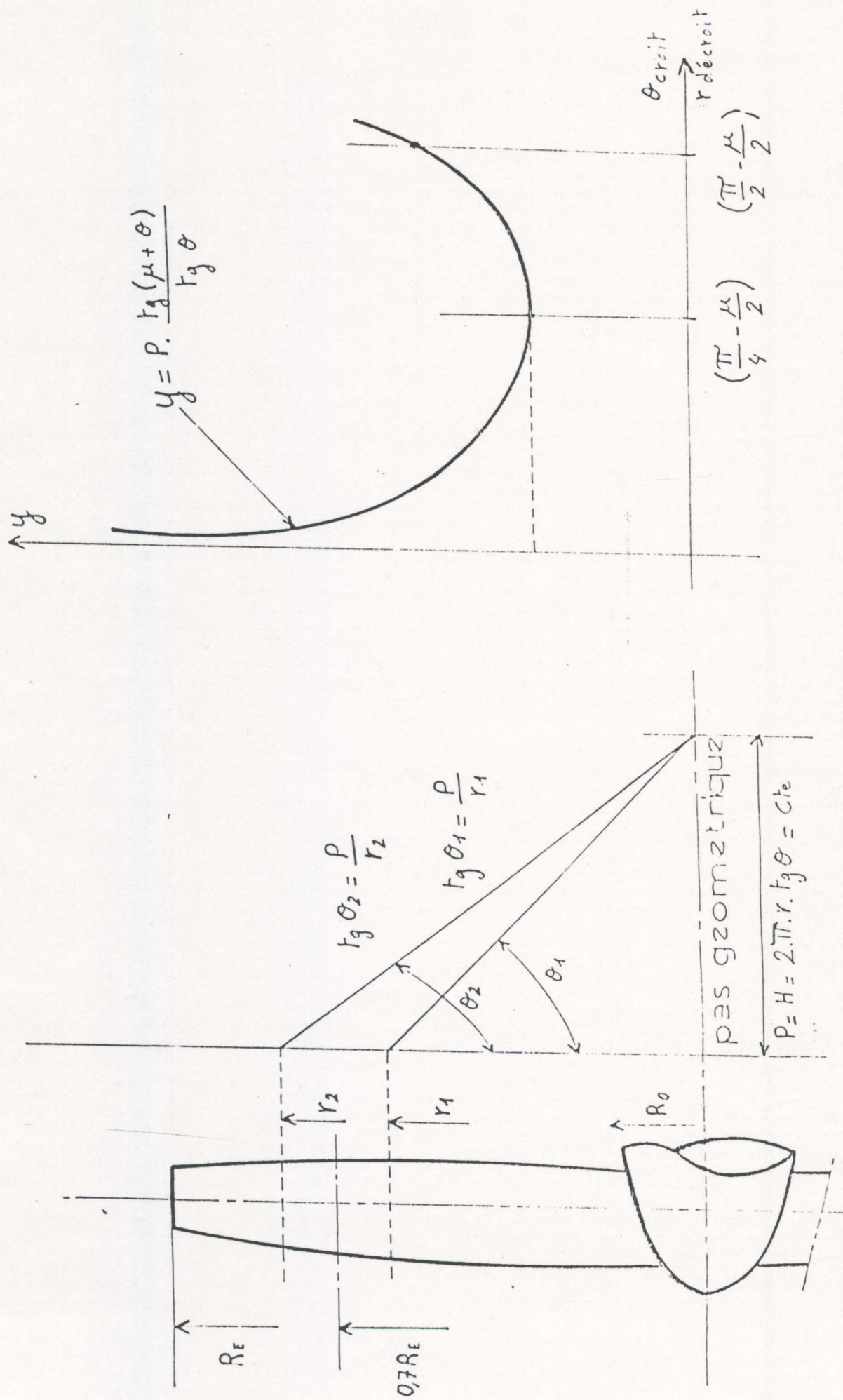


FIGURE (2-3) : VARIATION DU PAS EN FONCTION DE L'ANGLE DE CALAGE.

2-6 Différents types d'hélices :

On dit qu'une hélice est :

- à pas constant : quand toutes les sections droites ont le même pas géométrique.

Soit :

$$H = \text{Constante}$$

- à pas variable (ou à calage variable) : lorsque l'orientation de la corde de référence peut être modifiée pendant le fonctionnement de l'hélice, c'est à dire qu'il y a variation de l'angle de calage ϑ .

- à pas réglable (ou à calage réglable): lorsque l'orientation de l'angle ϑ ne peut être réglée qu'au repos.

- à pas fixe (ou à calage fixe): si la pale ne possède aucun degré de liberté par rapport au moyeu.

2-7 Fonctionnement aérodynamique :

2-7-1 Définition :

Soient :

- (o_0, x_0, y_0, z_0) le repère absolu par rapport auquel évolue l'avion.

- (o_1, x_1, y_1, z_1) le repère lié à l'avion (S_1).

- (o, x, y, z) le repère lié à l'hélice (S) (voir fig :2-4).

Puisque l'hélice subit deux mouvements (un mouvement de rotation d'axe \vec{oz} et un mouvement uniforme de translation), la vitesse d'un point M appartenant au solide (S) aura pour expression :

$\overset{o}{s_1}$ = mouvement uniforme de translation

$\overset{s}{s_1}$ = mouvement de rotation (ω) d'axe \vec{z}

$$\vec{V}_s^o(M) = \vec{V}_s^i(M) + \vec{V}_1^o(M) \quad (2-5)$$

$$\vec{V}_s^o(M) = \omega \cdot r \cdot \vec{y} + V \cdot \vec{z} \quad (2-6)$$

$$\text{avec } \omega = 2 \cdot \pi \cdot N \quad (2-7)$$

$$\vec{V}_s^o(M) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot N \vec{y} + V \cdot \vec{z} \quad (2-8)$$

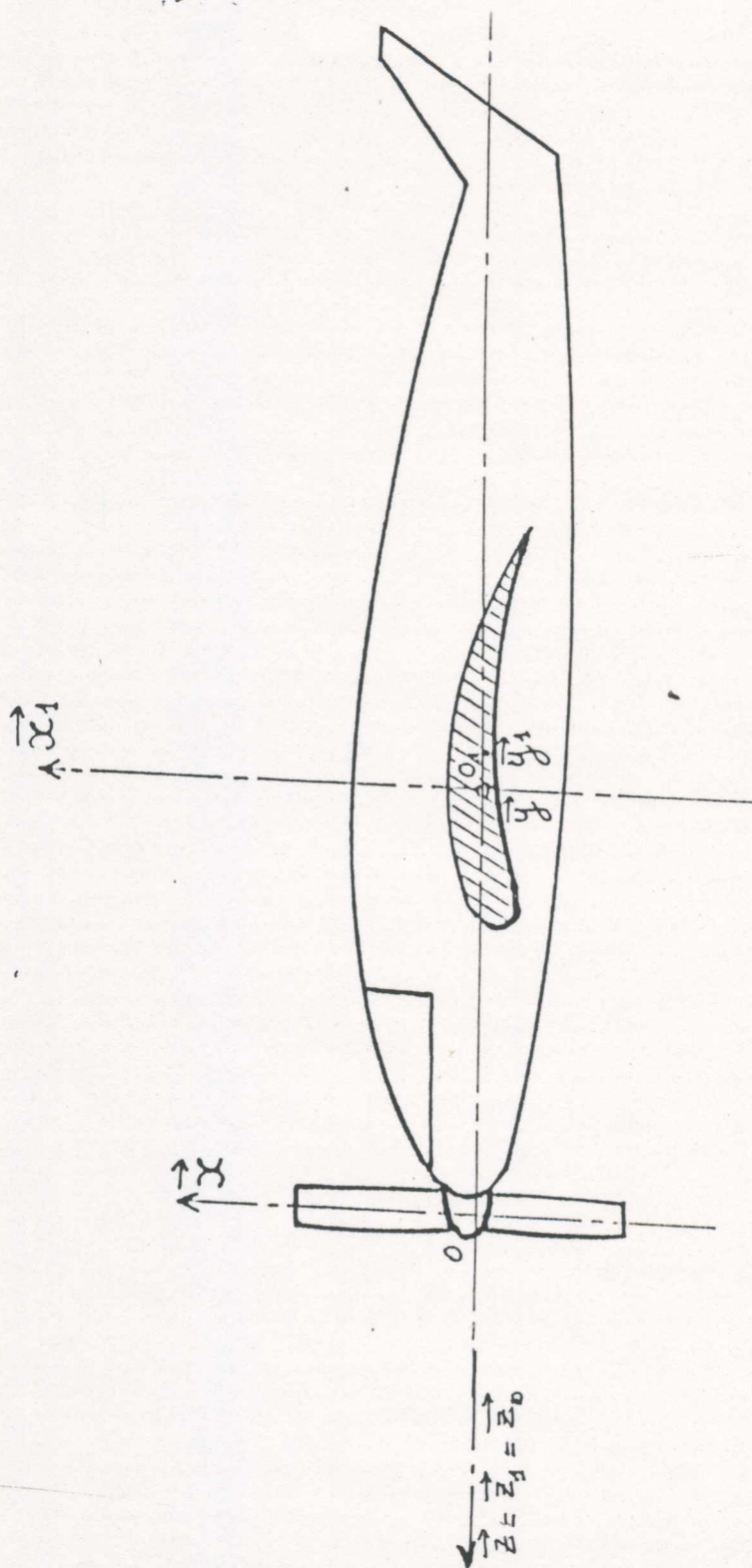


FIGURE (2-4) : DEFINITION DES REPERES.

Ainsi, la vitesse résultante du profil par rapport à l'air immobile à l'infini est définie comme suit:

$$\vec{W} = \vec{V}_s(M) = V \cdot \vec{z} + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot N \cdot \vec{y} \quad (2-9)$$

Tandis que la vitesse aérodynamique (ou vitesse relative) est définie comme étant l'opposée de la vitesse du profil $\vec{W}_0 = -\vec{W}$.

$$W_0 = -\sqrt{V^2 + (2 \cdot \pi \cdot N \cdot r)^2} \quad (2-10)$$

On appelle β l'angle de direction de la vitesse \vec{W} avec le plan de rotation (voir fig :2-5).

$$\beta = (\vec{W}, \vec{y})$$

Soit:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{V}{\omega \cdot r} = \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot N \cdot r} \quad (2-11)$$

Or on sait que l'hélice produit une traction parce que la corde de chaque partie de la pale fait un petit angle avec le vent relatif, semblable à l'angle d'attaque d'un profil d'aile, définit par :

$$i = \vartheta - \beta \quad (2-12)$$

i est appelée incidence géométrique du profil par rapport à la vitesse aérodynamique \vec{W}_0 .

$$i = \vartheta - \beta = \vartheta - \text{Arctg} \left[\frac{V}{2 \cdot \pi \cdot N \cdot r} \right] = f(\gamma) \quad (2-13)$$

Avec γ , appelé vitesse d'avancement par tour, dont l'expression est :

$$\gamma = \frac{V}{N \cdot D} = \frac{\pi \cdot r}{R} \cdot \text{tg}(\beta) \quad (2-14)$$

Mais la théorie tourbillonnaire et les résultats expérimentaux démontrent qu'il existe sur les profils des vitesses induites qui modifient la direction de la vitesse \vec{W} du profil et par suite créent une incidence effective ou incidence aérodynamique [Ref 1, page:586].

$$\text{Si: } i_{\text{effectif}} = \Delta i$$

$$\text{On a: } i' = \vartheta - \beta - \Delta i \quad (2-15)$$

$$\text{Si on pose } \phi = \beta + \Delta i \quad (2-16)$$

Avec ϕ étant l'angle aérodynamique

Donc:

$$i' = \vartheta - \phi \quad (2-17)$$

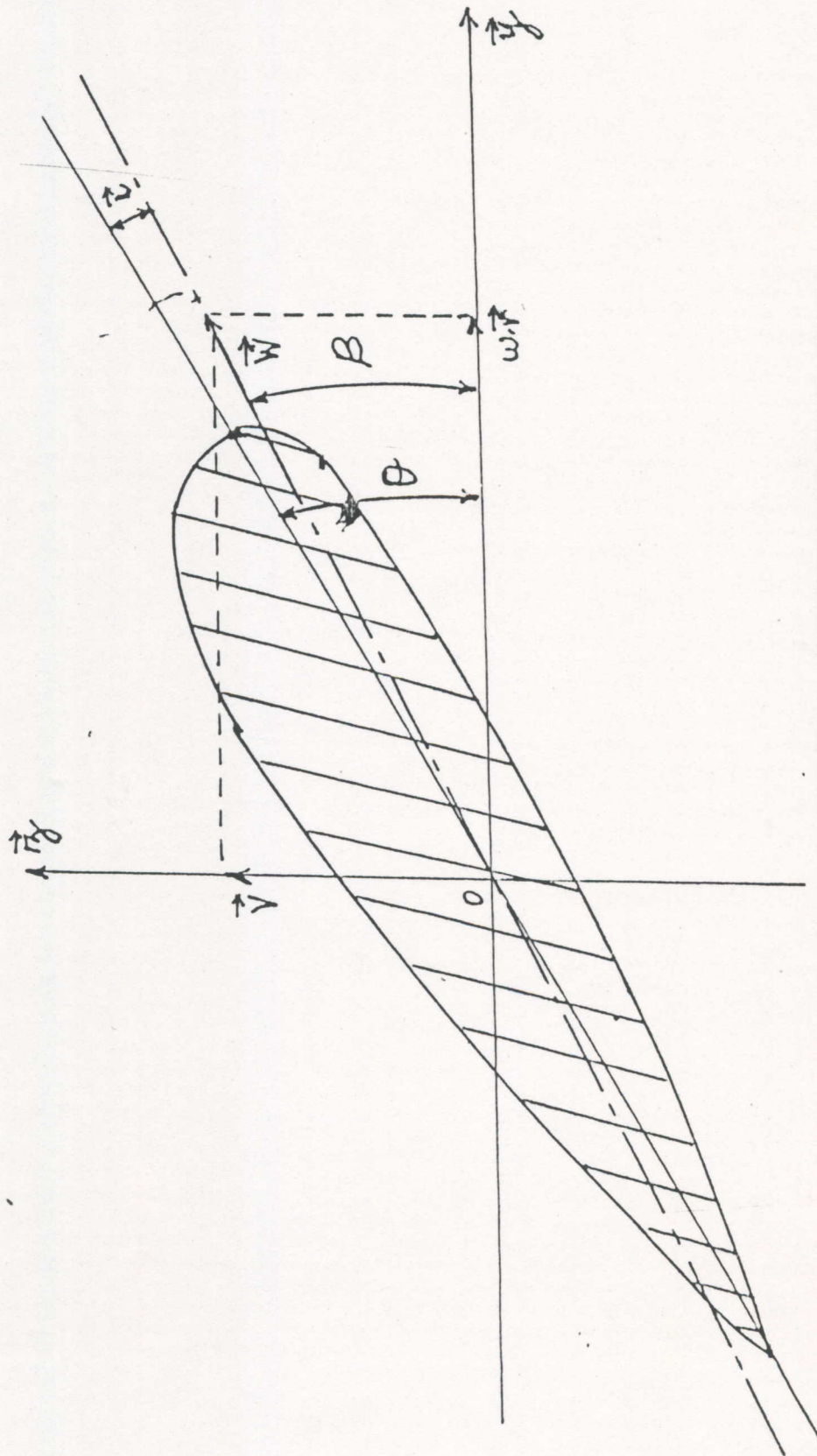


FIGURE (2-5) : DEFINITION AERODYNAMIQUE D'UNE HELICE.

Remarque : la vitesse de rotation $\omega.r \vec{x}$ croît et l'angle β décroît avec le rayon du moyeu vers l'extrémité de la pale; ϑ devra aussi décroître de manière à ce que l'incidence i' garde une valeur correcte sur chaque section de la pale.

2-8 Théorie générale de l'hélice :

(approche par l'analyse dimensionnelle):

Soient :

- P_f : puissance fournie par le moteur à l'arbre d'hélice
- η : rendement d'hélice.
- P_u , puissance utile tel que $P_u = \eta.P_f$

Le raisonnement de l'analyse dimensionnelle permet de trouver les paramètres de similitudes des hélices semblables. Nous posons par hypothèse [Ref 1, page 560]:

$$T = f(\rho, N, D, V, \vartheta) \quad (2-18)$$

$$T = K \rho^x N^y D^z V^s \vartheta^\mu \quad (2-19)$$

$$[M] [L] [T]^{-2} = [M]^x [L]^{-3x} [T]^{-y} [L]^z [L]^s [T]^{-s} \quad (2-20)$$

Avec μ sans dimension

$$[M] [L] [T]^{-2} = [M]^x [L]^{-3x+s+z} [T]^{-y-s} \quad (2-21)$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 1 = x \\ 1 = -3x + s + z \\ 2 = y + s \end{cases} \quad (2-22)$$

On remarque qu'on a un système de trois équations avec quatre inconnues (x, y, z, s) , qui pour être résout, s est supposé une variable indépendante.

D'où :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - s \\ z = 4 - s \end{cases} \quad (2-23)$$

$$T = K \rho N^{2-s} D^{4-s} V^s \vartheta^\mu \quad (2-24)$$

$$T = K \rho N^2 D^4 \left[\frac{V}{ND} \right]^s \vartheta^\mu \quad (2-25)$$

$$\tau = K \left[\frac{V}{N D} \right]^s \vartheta^\mu \quad (2-26)$$

Ainsi la traction se réduit à :

$$T = \tau \rho N^2 D^4 \quad (2-27)$$

Avec τ comme étant la quantité sans dimension appelée coefficient de traction.

$$\tau = \frac{T}{\rho \cdot N^2 \cdot D^4} \quad (2-28)$$

De la même manière pour la puissance :

$$P_f = K' \rho^x N^y D^z V^s \vartheta^\mu \quad (2-29)$$

$$[M] [L]^2 [T]^{-3} = [M]^x [L]^{-3x} [T]^{-y} [L]^z [L]^s [T]^{-s} \quad (2-30)$$

Avec μ sans dimension

$$[M] [L]^2 [T]^{-3} = [M]^x [L]^{-3x+s+z} [T]^{-y-s} \quad (2-31)$$

Toujours par identification on a :

$$\begin{cases} 1 = x \\ 2 = -3x + s + z \\ 3 = y + s \end{cases} \quad (2-32)$$

Comme précédemment on aura :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - s \\ z = 5 - s \end{cases} \quad (2-33)$$

d'où la puissance se réduit à :

$$P_f = K' \rho N^{3-s} D^{5-s} V^s \vartheta^\mu \quad (2-34)$$

$$P_f = K' \rho N^3 D^5 \left[\frac{V}{N D} \right]^s \vartheta^\mu \quad (2-35)$$

$$\text{posons } \kappa = K' \left[\frac{V}{N D} \right]^s \vartheta^\mu \quad (2-36)$$

$$P_f = \kappa \rho N^3 D^5 \quad (2-37)$$

Avec κ , une quantité sans dimension appelée coefficient de puissance.

Puisque :

$$\gamma = \frac{V}{N D}$$

D'où les coefficients τ et κ s'écrivent de la manière suivante :

$$\tau = K \gamma^3 \vartheta^4 \quad (2-38)$$

$$\kappa = K' \gamma^3 \vartheta^4 \quad (2-39)$$

On voit bien que ces deux coefficients τ et κ ne dépendent que de l'angle de calage (ϑ) et de la vitesse d'avancement (γ).

Remarque : l'égalité de γ (paramètre de similitude des hélices) implique que deux hélices semblables ont mêmes coefficients de traction et de puissance (τ, κ).

De même, nous pouvons approcher par l'analyse dimensionnelle la résultante et le moment résultant des forces aérodynamiques s'exerçant sur un élément de pale.

On suppose que :

$$R = f(\rho, l, V, \vartheta) \quad (2-40)$$

$$R = K \rho^x L^y V^z \vartheta^t \quad (2-41)$$

$$[M] [L] [T]^{-2} = [M]^x [L]^{-3x} [T]^y [L]^z [T]^{-z} \quad (2-42)$$

Avec ϑ sans dimension

$$[M] [L] [T]^{-2} = [M]^x [L]^{-3x+y+z} [T]^{-z} \quad (2-43)$$

Toujours par identification on a :

$$\begin{cases} 1 = x \\ 1 = -3x + y + z \\ 2 = z \end{cases} \quad (2-44)$$

Après résolution, on trouve :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \quad (2-45)$$

D'où la résultante se réduit à :

$$R = K \cdot \rho \cdot L^2 \cdot V^2 \cdot \vartheta^t \quad (2-46)$$

Dans le cas d'un élément de pale de longueur élémentaire dr , la surface dS est égale à $L \cdot dr$, où L est la corde locale. De plus si on introduit la notion de pression dynamique élémentaire au fluide incompressible définie par :

$$P = \rho \cdot \frac{V^2}{2} \quad (2-47)$$

On peut écrire la résultante sous la forme :

$$R = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot l \cdot V^2 \cdot C_r \quad (2-48)$$

Avec C_r : coefficient de la résultante aérodynamique, dont l'expression est:

$$C_r = 2 \cdot K \cdot \vartheta \cdot dr \quad (2-49)$$

De même pour le moment résultant :

$$M^L = f(\rho, L, V, \vartheta) \quad (2-50)$$

$$M^L = K \rho^x L^y V^z \vartheta^l \quad (2-51)$$

Avec ϑ sans dimension

D'où :

$$[M] [L]^2 [T]^{-2} = [M]^x [L]^{-3x} [L]^y [L]^z [T]^{-z} \quad (2-52)$$

$$[M] [L]^2 [T]^{-2} = [M]^x [L]^{-3x+y+z} [T]^{-z} \quad (2-53)$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} 1 = x \\ 2 = -3 \cdot x + y + z \\ 2 = z \end{cases} \quad (2-54)$$

Après résolution, on trouve :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad (2-55)$$

D'où :

$$M^L = K \cdot \rho \cdot L^3 \cdot V^2 \cdot \vartheta \quad (2-56)$$

En introduisant :

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \quad (2-57)$$

Et :

$$L^3 = L^2 \cdot dr = S \cdot l \quad (2-58)$$

$$\text{On obtient : } M^L = \frac{1}{2} \rho V^2 L^2 C_m \quad (2-59)$$

Avec C_m : coefficient de moment résultant dont l'expression est:

$$C_m = 2 \cdot K \cdot \vartheta \cdot dr \quad (2-60)$$

Remarque : les coefficients C_r et C_m sont fonction de la position du corps par rapport à la vitesse V (angle de calage et d'incidence) et de la masse volumique ρ qui varie notamment avec l'altitude et la température [Ref 2].

Si $0 < z < 11 \text{ Km}$:

$$T = 288 - 6,5.z \text{ } ^\circ\text{K} \quad (2-61)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{6,5.z}{288} \right]^{4,255} \quad (2-62)$$

Si $11 < z < 30 \text{ Km}$:

$$T = 216,5 \text{ } ^\circ\text{K} \quad (2-63)$$

$$\log \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{z - 11}{14,6} \quad (2-64)$$

Avec $\rho_0 = 1,225 \text{ Kg/m}^3$.

Ces deux dernières équations donnent la température et la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude z .

Remarque : De la théorie des hélices, sont dégagés les trois axes suivants :

- Théorie des quantités de mouvement (théorie de Froude).
- Théorie des éléments de pale.
- Théorie tourbillonnaire.

Nous étudions brièvement les deux premières pour passer, par la suite, à une étude plus précise de la théorie tourbillonnaire qui est la base des travaux de recherche actuels.

2-9 Théorie des quantités de mouvement (théorie de Froude) :

Cette théorie assimile l'hélice à un disque de surface S infiniment mince, avec la discontinuité de pression confondue avec le plan de rotation de l'hélice, ce dernier étant considéré comme fixe [Ref 1, page 566].

Soient V_0 et P_0 la vitesse et la pression statiques de l'air à l'infini amont, P_1 et P_2 les pressions statiques uniformes qui règnent sur les deux faces du disque (voir fig :2-6).

Hypothèses :

Dans cette théorie, le fluide est supposé parfait, incompressible et non pesant, aussi le mouvement moyen est supposé permanent.

Le fait que l'hélice développe une traction, implique que $P_2 > P_1$. Si d'autre part $P_1 < P_0$ et $P_2 > P_0$ (P_1 et P_2 étant respectivement les pressions sur les faces amont et aval de l'hélice), alors on assiste à une dépression sur l'extrados et

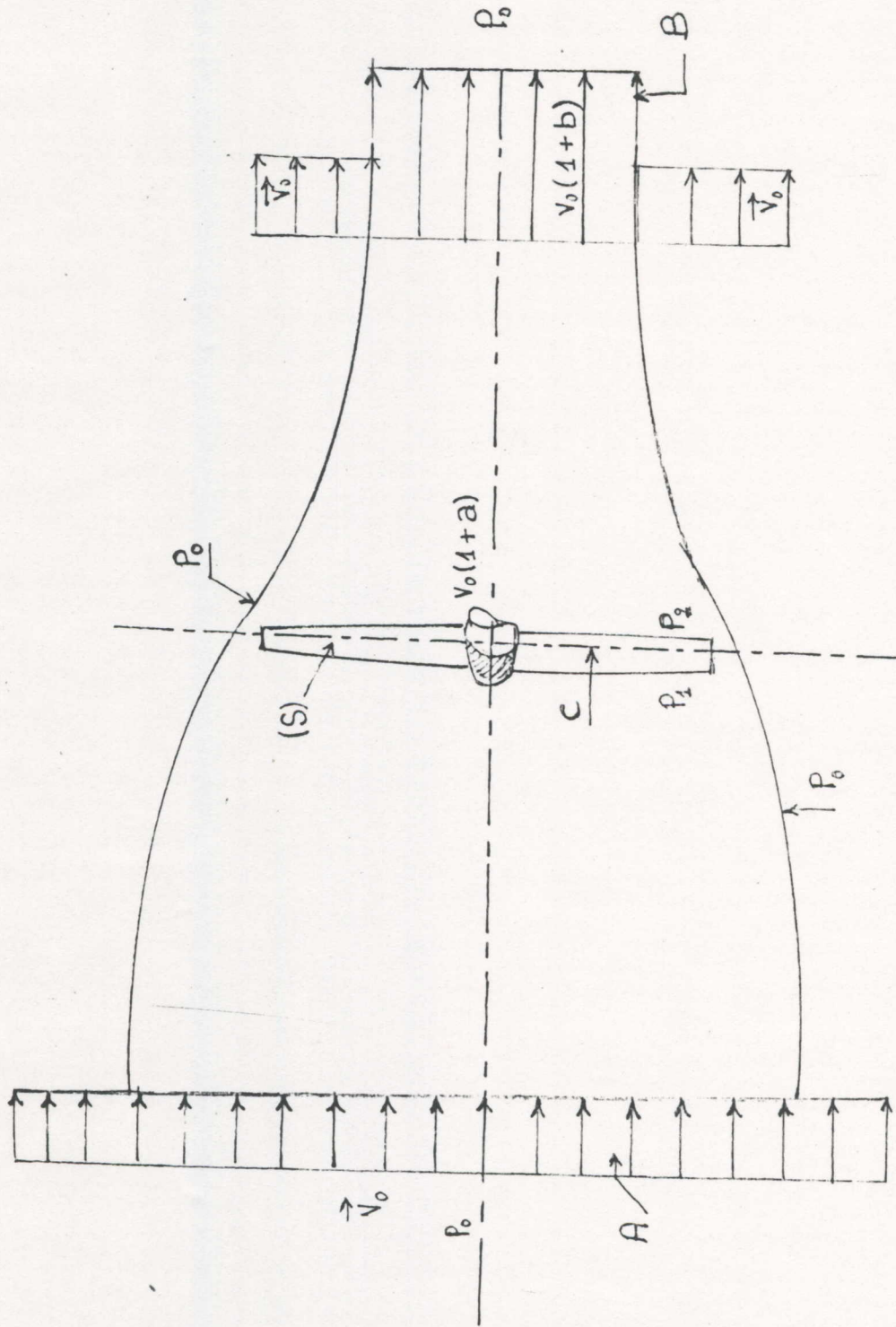


FIGURE (2-6) : ETUDE DE L'HELICE EN SOUFLERIE.

à une surpression sur l'intrados du profil de la pale en rotation dans l'air.

Par la différence de pression $P_0 - P_1$, le fluide se meut de l'infini amont vers l'aval et subit simultanément une variation de vitesse.

Si $V_0(1+a)$ est la vitesse uniforme de l'air dans le plan C, l'application du théorème de BERNOULLI donne:

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \cdot V_0^2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 (1+a)^2 \quad (2-65)$$

Comme $P_0 > P_1$, alors $a > 0$ (car l'air traverse le disque avec une vitesse accrue), du moment que le disque est infiniment mince, la vitesse n'a pas suffisamment de temps pour varier en le traversant.

Si par la suite, on désigne la vitesse à l'infini aval par $V_0(1+b)$.

L'application du théorème de BERNOULLI donnera :

$$P_2 + \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 (1+a)^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 (1+b)^2 \quad (2-66)$$

Comme $P_2 > P_0$ et $b > a$ (car la vitesse de l'air croit en aval du disque), on tire des deux équations (2-65) et (2-66) :

$$P_2 - P_1 = \rho_0 V_0^2 \cdot b \cdot \left[1 + \frac{b}{2} \right] \quad (2-67)$$

Appliquons successivement aux fluides contenus dans le volume défini ci-après le théorème des quantités de mouvement, et la masse d'air qui traverse le disque par seconde sera:

$$M = \rho_0 \cdot S \cdot V_0 \cdot (1+a) \quad (2-68)$$

La différence des quantités de mouvement de la masse M pendant le temps unité est donnée par:

$$M \cdot V_0 \cdot (1+b) - M \cdot V_0 = \Sigma F_{ext} \quad (2-69)$$

$$M \cdot V_0 \cdot b = F_p + T \quad (2-70)$$

Où :

F_p : Forces de pression dont la résultante est nulle.

T : Forces appliquées par l'hélice à l'air.

Donc :

$$T = M \cdot V_0 \cdot b = \rho_0 \cdot S \cdot V_0^2 \cdot (1+a) \cdot b \quad (2-71)$$

Appliquons maintenant le théorème de la quantité de mouvement au fluide du volume entourant étroitement le disque.

$$(P_1 - P_2) \cdot S + T = 0 \quad (2-72)$$

$$T = (P_2 - P_1) \cdot S = \rho_o \cdot V_o^2 \cdot b \cdot S \cdot \left(1 + \frac{b}{2}\right) \quad (2-73)$$

En identifiant (2-71) avec (2-73), on aura :

$$a = \frac{b}{2} \quad \longrightarrow \quad b = 2 \cdot a \quad (2-74)$$

D'où on conclue que l'accroissement de vitesse née à l'infini aval est le double de l'accroissement de vitesse dans le plan de l'hélice.

D'autre part, la puissance communiquée au fluide est:

$$P = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_o^2 \cdot (1+b)^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_o^2 \quad (2-75)$$

$$P = M \cdot V_o^2 \cdot b \cdot \left[1 + \frac{b}{2}\right] \quad (2-76)$$

En introduisant la valeur de T, la puissance peut s'écrire sous la forme :

$$P = T \cdot V_o \cdot (1+a) \quad (2-77)$$

Le rendement de l'hélice est :

$$\eta = T \cdot \frac{V_o}{P} = \frac{1}{1+a} = \frac{2}{2+b} \quad (2-78)$$

Remarque : On voit que pour V_o donnée, le rendement est d'autant plus petit que a (ou b) est grand (grande vitesse), et b est d'autant plus petit que S est grand, d'où on conclue que pour avoir des rendements élevés, il est nécessaire d'utiliser des hélices à grand diamètre.

Puisque: $T = \frac{1}{2} \cdot \rho_o \cdot V_o^2 \cdot S \cdot [(1+b)^2 - 1]$ (2-79)

Et si on pose :

$$V_s = V_o \cdot (1+b) \quad (2-80)$$

on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \cdot \rho_o \cdot V_o^2 \cdot S \cdot \left[\left(\frac{V_s}{V_o}\right)^2 - 1\right] \quad (2-81)$$

De plus, le coefficient τ s'écrit:

$$\tau = \frac{T}{\rho_o \cdot N^2 \cdot D^4} = \frac{\rho_o \cdot V_o^2 \cdot S \cdot \left[\left(\frac{V_s}{V_o}\right)^2 - 1\right]}{2 \cdot N^2 \cdot D^4} \quad (2-82)$$

Or :

$$\gamma = \frac{V_0}{N.D} \quad (2-83)$$

$$\longrightarrow \left(\frac{V_s}{V_0} \right)^2 - 1 = \frac{8.\tau}{\Pi.\gamma^2} \quad (2-84)$$

$$\left(\frac{V_s}{V_0} \right)^2 = 1 + \frac{8.\tau}{\Pi.\gamma^2} \quad (2-85)$$

Ainsi le rendement sera :

$$\eta = \frac{2}{1 + \frac{V_s}{V_0}} \quad (2-86)$$

Le rapport $\frac{V_s}{V_0}$ est appelé souffle d'une hélice, d'où on déduit la courbe $\eta = f\left(\frac{V_s}{V_0}\right)$ (voir fig :2-7).

2-10 Théorie de l'élément de pale :

Soit une tranche de pale délimitée par deux plans parallèles distants respectivement de $[r]$ et $[r+dr]$ du centre o de l'hélice, normaux à l'axe de la pale \vec{ox} . Assimilons cet élément de pale de section $[ds]$ à un élément fuselé à génératrices cylindriques parallèles à l'axe de la pale, plongé dans un écoulement de fluide (l'air), et cherchons les efforts aérodynamiques auxquels il est soumis (voir fig :2-8).

Comme l'hélice effectue simultanément un mouvement rotatif et un autre mouvement de translation vers l'avant, le vent relatif rencontre la pale sous un petit angle; celui-ci crée des forces de pression et de frottement sur toute la surface de l'élément de pale (extrados et intrados), c'est-à-dire qu'il y aurait apparition d'une portance dR_z et d'une trainée dR_x qui se réduisent à une résultante unique dR perpendiculaire à la corde de référence AB et passant par un point F appelé centre de poussée.

$$d\vec{R} = d\vec{R}_z + d\vec{R}_x \quad (2-87)$$

$d\vec{R}_z$ et $d\vec{R}_x$ sont respectivement perpendiculaires et colinéaires à la vitesse \vec{W} .

Toutefois, lorsqu'il s'agit d'une pale d'hélice, on s'occupe moins des forces perpendiculaires et parallèles à l'écoulement (portance et trainée) que de la force parallèle à l'axe de l'avion (traction) et de celle parallèle au plan de rotation (effort résistant), d'où on a leur résultante qui se décompose en traction et en effort résistant.

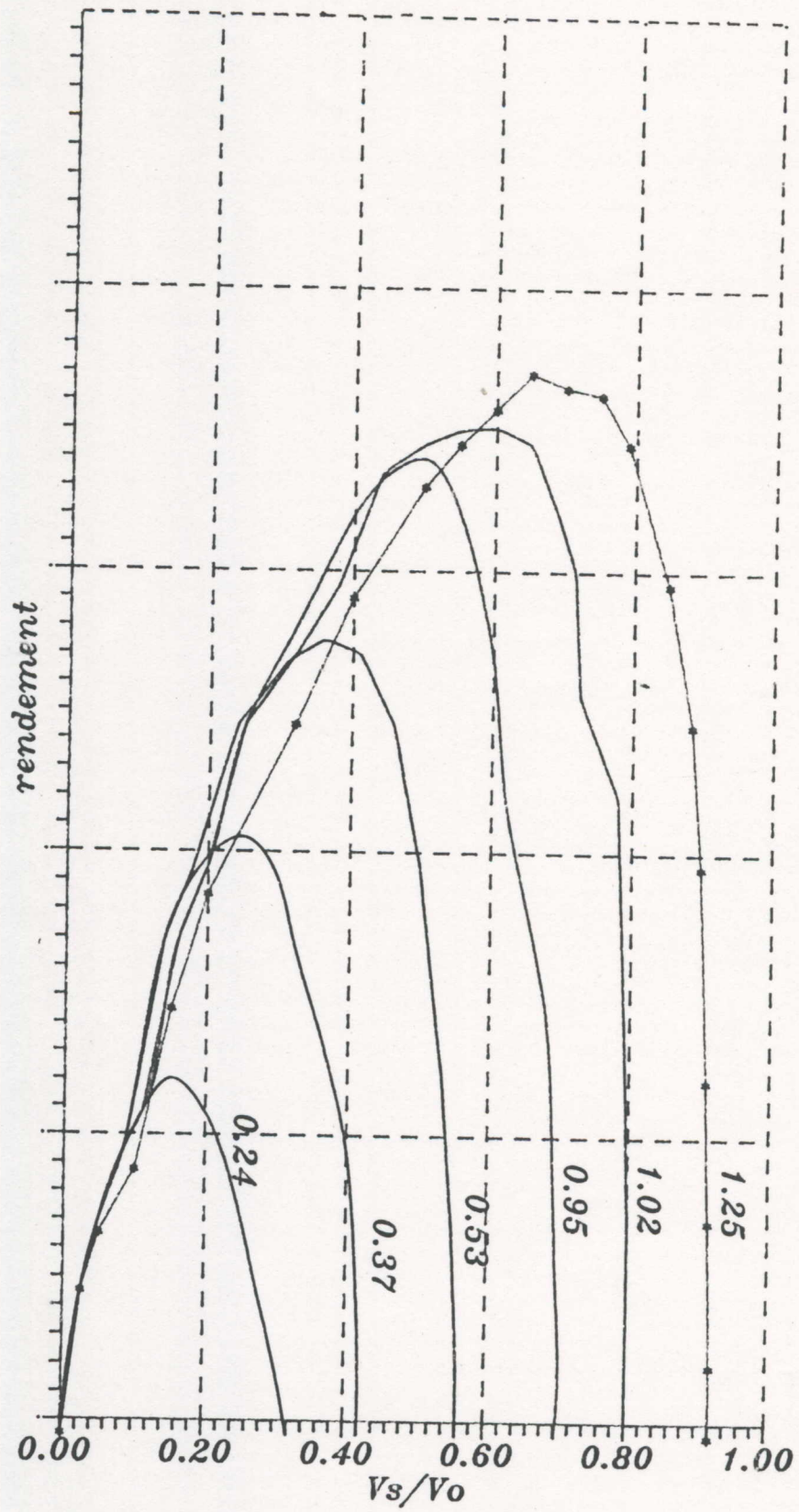


Figure (2-7): Variation du rendement en fonction de V_s/V_o

$$d\vec{R} = dR_T \vec{z} + dR_c \vec{y} \quad (2-88)$$

$d\vec{R}_T$: traction élémentaire, dirigée dans le sens de la vitesse d'avancement de l'avion.

$d\vec{R}_c$: effort élémentaire résistant, dirigé en sens inverse de la vitesse tangentielle de rotation.

D'où:

$$\begin{cases} dR_T = dR_z \cdot \cos \phi - dR_x \cdot \sin \phi \\ dR_c = dR_z \cdot \sin \phi - dR_x \cdot \cos \phi \end{cases} \quad (2-89)$$

Or l'ensemble des efforts résistants appliqués sur les pales de l'hélice, produit un couple de réaction qui s'oppose au couple et tend à faire tourner l'avion entier dans le sens contraire de la rotation de l'hélice.

$$\begin{cases} d\vec{Q} = \vec{OP} \wedge d\vec{R}_c \\ d\vec{Q} = r \cdot dR_c \vec{z} \end{cases} \quad (2-90)$$

En faisant passer la résultante $d\vec{R}$ par l'axe de pale, on doit ajouter un moment $d\vec{M}$ qui tend à faire tourner la pale autour de cet axe.

Les éléments de réductions du torseur { air \rightarrow ds } sont exprimés ainsi:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} d\vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_p \\ \left\{ \begin{array}{l} d\vec{R} \\ d\vec{M} \end{array} \right\}_{O_i} \end{cases} \quad (2-91)$$

On peut calculer les efforts élémentaires tout le long de la pale et obtenir par intégration, en partant du moyeu vers l'extrémité de la pale, la traction totale [T] de l'hélice, appelée effort propulseur, ainsi que le couple résistant total [Q] pour chaque valeur de la vitesse d'avancement γ .

$$T_R = \rho \cdot \int_{R_0}^{R_E} dR_T \quad (2-92)$$

$$Q = p \cdot \int_{R_0}^{R_E} dR_C \quad (2-93)$$

Le rendement théorique de l'élément de pale ainsi considéré est:

$$\mathfrak{Y}_0 = \frac{V \cdot dR_T}{\omega \cdot r \cdot dR_C} \quad (2-94)$$

Alors $\operatorname{tg} \beta = \frac{V}{\omega \cdot r}$ (2-95)

Donc :

$$\mathfrak{Y}_0 = \frac{dR_T}{dR_C} \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (2-96)$$

On définit ainsi le rendement total de l'hélice par :

$$\mathfrak{Y} = \frac{\int_{R_0}^{R_E} V \cdot dR_T}{\int_{R_0}^{R_E} \omega \cdot r \cdot dR_C} \quad (2-97)$$

Après intégration on obtient:

$$\mathfrak{Y} = \frac{T \cdot V}{\omega \cdot Q} \quad (2-98)$$

Remarque : En général le rendement total de l'hélice \mathfrak{Y} est inférieur au rendement théorique \mathfrak{Y}_0 , car on ne peut pas faire travailler tous les éléments de la pale d'une façon convenable.

2-11 Fonctionnement des hélices :

2-11-1 Fonctionnement en hélice tractive :

Pour une vitesse d'avancement de l'avion $V = 0$, et pour une incidence du profil donnée, la résultante dR , normale à la corde AB sera dans le cadran 1; ce sera le fonctionnement "point fixe" (voir fig :2-9). Mais quand la vitesse V croît, l'incidence i diminue et les efforts élémentaires varient en suivant le même sens, avant l'annulement de l'incidence, la résultante viendra en dR_2 et c'est ce qu'on appelle régime de traction nulle de l'élément.

2-11-2 Fonctionnement en hélice frein :

Si la vitesse V croît encore, la résultante passe dans le cadran 2 pour une incidence légèrement plus petite que zéro, elle parvient en dR_a et dR_c sera nulle; c'est le régime de "puissance nulle". Mais quand dR_c est négative, l'élément de pale engendre alors une composante de traînée et absorbe de la puissance; ceci veut dire que l'hélice fonctionne en hélice frein, En conclusion pour un fonctionnement normale en hélice frein, il faut réduire l'angle de calage δ , même en valeur négative (voir fig :2-9).

2-11-3 Fonctionnement moulinet (ou aéromoteur) :

Quand la vitesse V augmente considérablement encore , la résultante dR_a passe dans le cadran 4, l'incidence i deviendra négative ($i < 0$) alors l'élément de phase est en traction négative ($dR_c < 0; dR_a > 0$) et fournit de la puissance. Ceci veut dire que le fonctionnement est en moulinet (ou aéromoteur) (voir fig :2-9).

2-12 Champs autour d'une hélice :

2-12-1 Généralité :

En tout point M de la veine fluide créée par la rotation d'une hélice à vitesse angulaire constante, la pression et la vitesse du fluide (grandeur et direction) sont fonction du temps. Ces grandeurs physiques sont des fonctions périodiques de période $(1/pN)$.

2-12-2 Champs moyen des vitesses et des pressions autour d'une hélice:

A l'aide d'un tube de pitot double, EIFFEL (1912) a explore, les plans situés en avant et à l'arrière de l'hélice (mesure les vitesses efficaces), et a étudié le phénomène à pas constant, ceci en faisant varier la vitesse à l'infini de la veine fluide V_0 . Puis il a établi un graphique (voir fig :2-10) pour des vitesses d'avancement par tours $\gamma = V/V_0$ (V étant la vitesse locale mesurée) comprise entre 0,3 et 0,9 dans deux plans situés à 0,2 et -0,2 mètre du plan de l'hélice.

Cette expérience met en évidence la variation de la vitesse V dans le plan de l'hélice et un autre plus important en aval; mais elle montre aussi que les vitesses ne sont pas uniformes

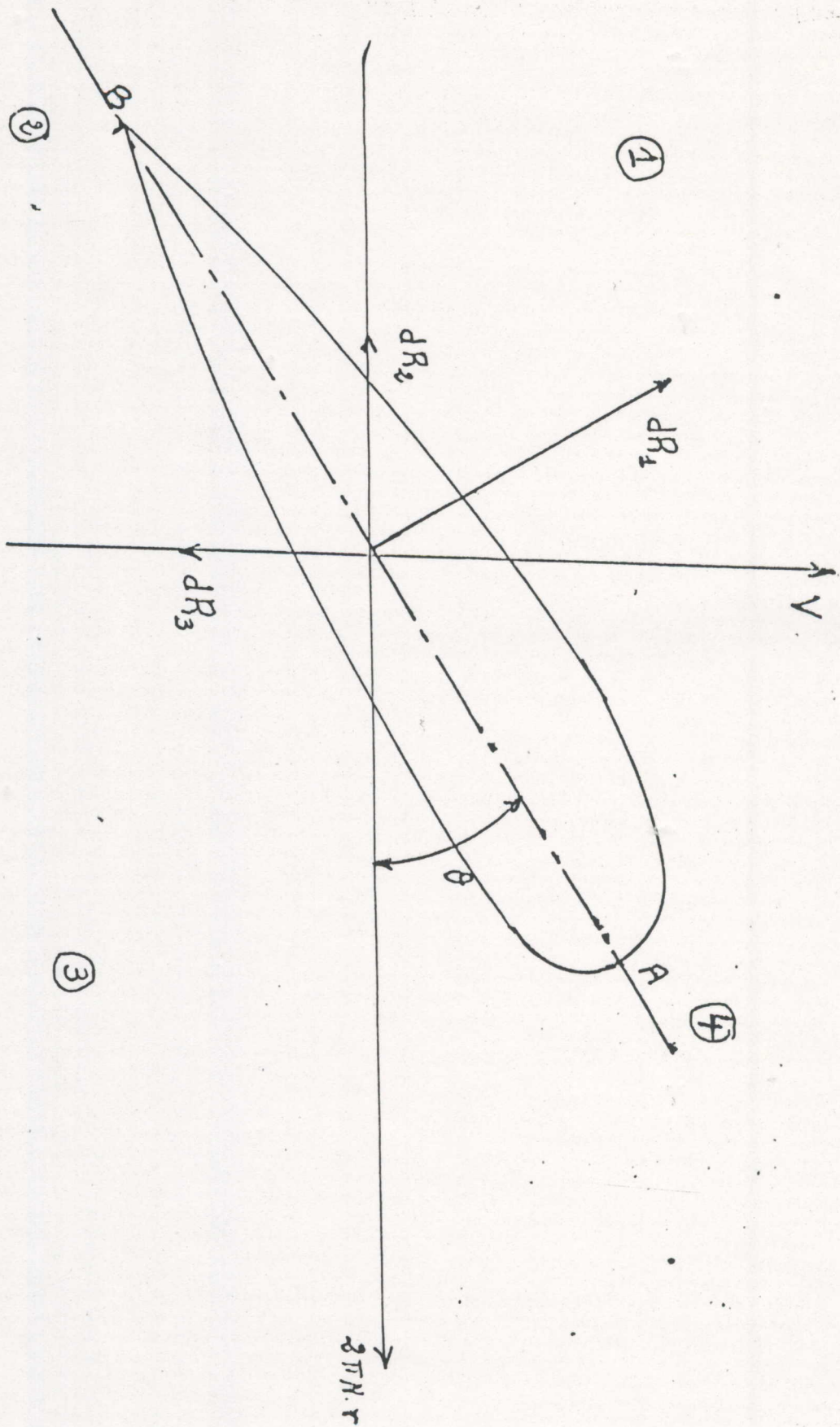


FIGURE (2-9) : PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT DE L'HELICE.

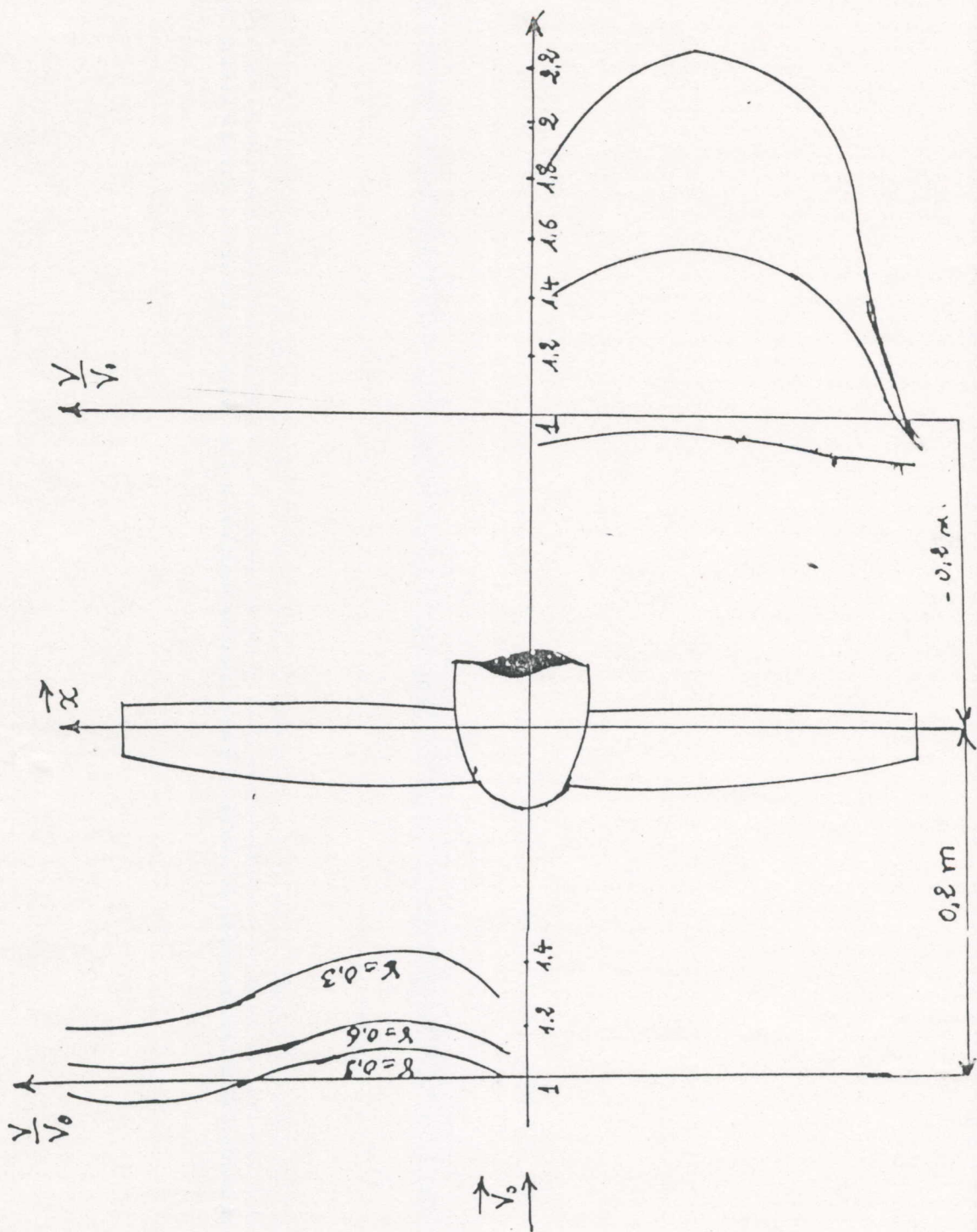


FIGURE (2-10) : CHAMPS MOYEN AROUND D'UNE HELICE.

dans une section, et est de valeur maximale au trois quart du rayon. Il est vrai que la viscosité tend à ralentir les filets à la limite de la veine soufflée et au moyeu.

FAGE et HOWARD ont fait des expériences analogues à celles de EIFFEL, qui ont confirmé les courbes de V/V_0 , ceci en mesurant les pressions (statiques et totales) à l'intérieur et à l'extérieur de la veine soufflée. Quant à la pression totale, FAGE et HOWARD la trouve constante en amont et en aval de l'hélice; elle est sensiblement constante dans la veine soufflée. Ils constatent que la limite de la veine soufflée est animée de mouvements tourbillonnaires intenses dûs aux tourbillons marginaux des extrémités de la pale, et que la veine dans son ensemble subit une torsion hélicoidale, dans le sens de rotation de l'hélice, qui diminue la vitesse de rotation. Par suite ils mettent en place sur le profil la résultante des forces normales de pressions dR_T .

En prenant les projections suivant l'axe de rotation de l'hélice, ils tracent la courbe de répartition de traction élémentaire du moyeu (R_0) vers l'extrémité de la pale (R_E). Ils montrent que la traction élémentaire est maximale à $0,8.R_E$ et qu'elle décroît très rapidement en bout de pale (voir fig:2-11).

2-12-3 Champs instantané autour d'une hélice :

D'après ce qui précède, les phénomènes dans le champs d'une hélice tournant à vitesse angulaire constante sont de période $(1/pN)$. Donc il suffit d'étudier le champs instantané sur un tour de l'hélice (trajectoires, lignes de courants,.....). J.VALENSI a abordé expérimentalement le champs instantané d'une hélice en soufflerie, ceci en faisant varier la position angulaire repérée par la phase ϕ comptée à partir d'une direction arbitraire, et au moyen de fumée émise un peu en avant du plan de rotation de l'hélice. Il met en évidence les trajectoires des particules de fumée par photos instantanées, et en déduit que les particules sont animées d'une déviation dans le sens de rotation de l'hélice, c'est à dire que les particules émises sont soumises à des composantes radiales de vitesse, faibles en amont mais grandes en aval, et variant notablement en grandeur et en signe avec la phase ϕ , aussi qu'à des composantes tangentiellles. De plus, il met en évidence le

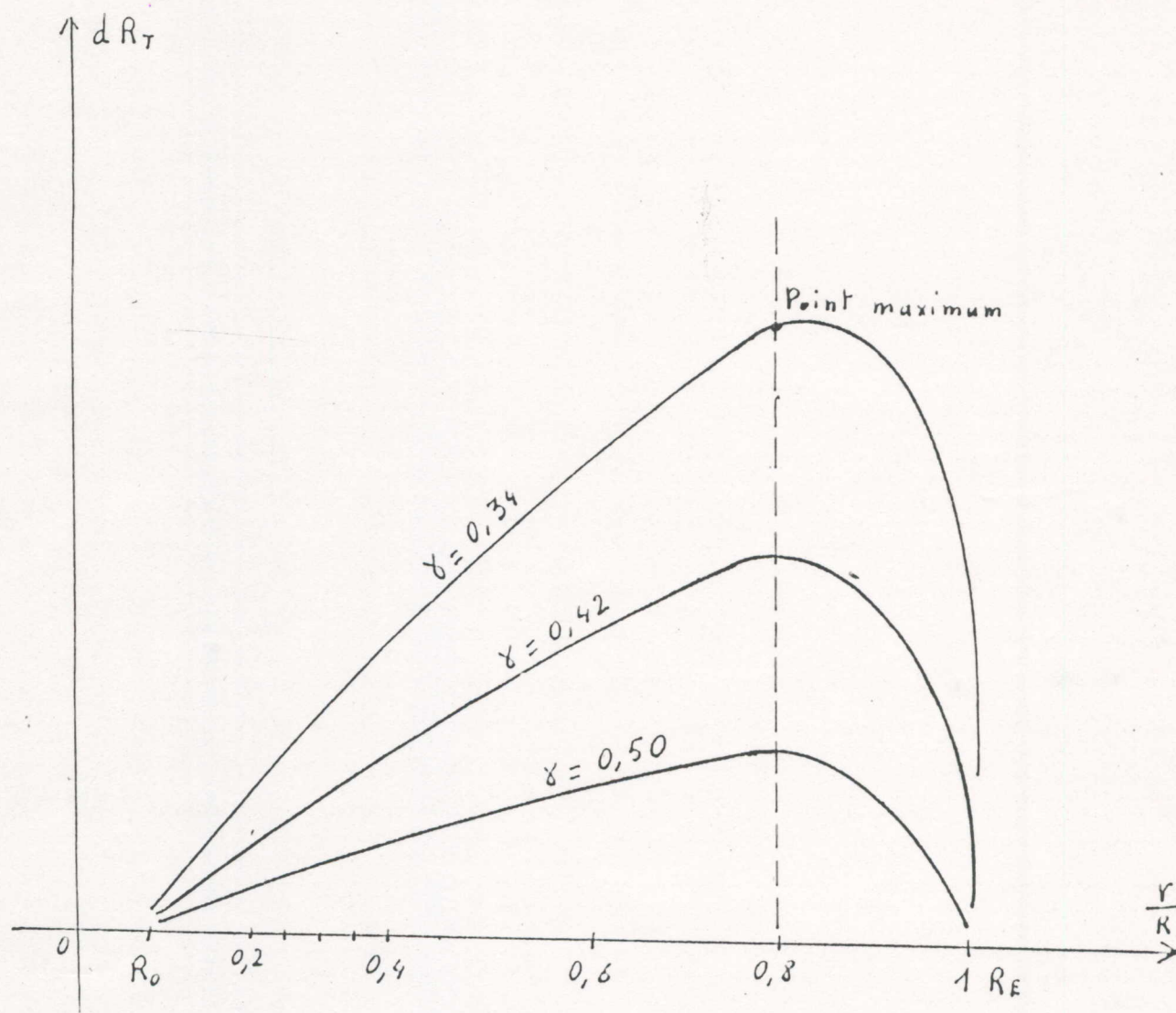


FIGURE (2-11) : VARIATION DE LA TRACTION ELEMENTAIRE
LE LONG DE LA PALE D'HELICE.

tourbillon marginal de la veine soufflée de pas V/N et les tourbillons marginaux du moyeu et de l'extrémité de la pale. Ces tourbillons créent un champ de vitesses, appelé champ de vitesses "induites" (voir fig :2-12).

2-13 Théorie tourbillonnaire de l'hélice :

L'idée d'existence de tourbillons libres et marginaux, issus de chaque pale d'hélice, revient à JOUKOWSKI (1912). Par la suite, elle a été développée par plusieurs chercheurs (PRANDTL et BETZ, GOLSTEIN et par TOUSSAIENT..); cette théorie est appliquée à la détermination rationnelle d'une hélice, sous réserve de quelques hypothèses.

2-13-1 Hypothèses [Ref.1 page 586]:

1) Chaque pale est assimilée à un tourbillon attaché, dirigé suivant l'axe de la pale (tourbillon-pale), dont l'intensité est variable le long de la pale.

2) De chaque pale est issue une nappe de tourbillons libres. Cette dernière induit des vitesses axiales, radiales et tangentiels.

3) Chaque tourbillon libre s'étend jusqu'à l'infini aval et s'enroule suivant une hélice géométrique de pas V/N .

4) La contraction du sillage est d'effet négligeable sur les valeurs des vitesses induites au point droit des pales sur l'axe de la pale \vec{ox} .

5) Le pas des lanières hélicoidales est considéré comme une constante à tous les niveaux du rayon r .

6) La circulation élémentaire $\delta\Gamma$ est nulle au pied et au bout de la pale.

7) Les lanières s'enroulent sur des cylindres pseudo-circulaires tangents aux formes de la pale

2-13-2 Définitions :

Soit:

- \vec{v} la vitesse axiale induite définie par EIFFEL qui s'ajoute à la vitesse d'avancement de l'avion, portée par l'axe \vec{oz} .

- \vec{u} la vitesse induite tangentielle tendant à faire varier le tourbillon et réduisant la vitesse de rotation, portée par l'axe \vec{oy} (voir fig :2-13).

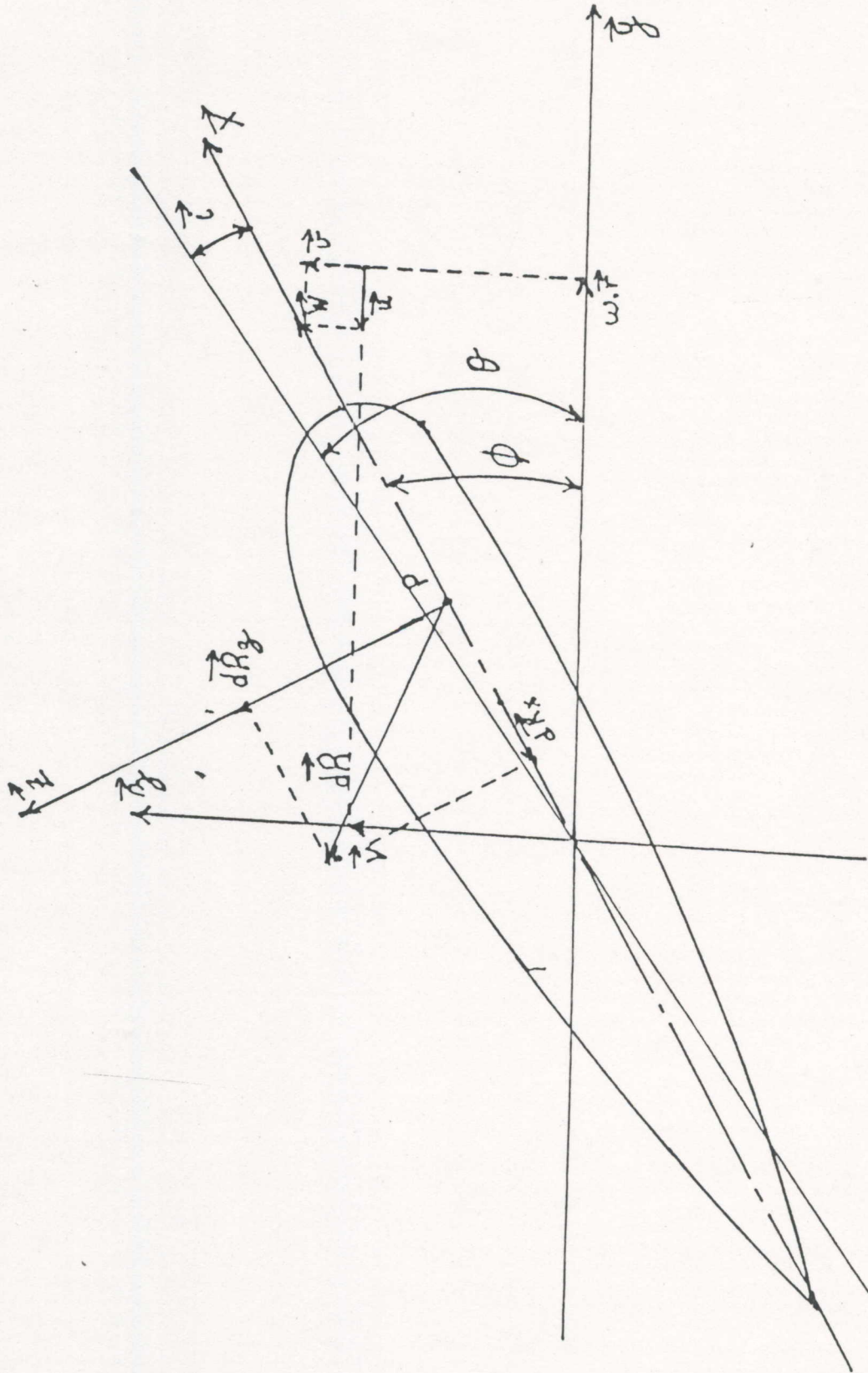


FIGURE (2-13) : REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA TRACTION ET DU COUPLE SUR UNE TRANCHE DE PALE.

La vitesse périphérique est :

$$\vec{U}' = \vec{\omega} \cdot r - \vec{u} \quad (2-99)$$

La vitesse d'avancement relative est :

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{v} \quad (2-100)$$

En supposant que les tourbillons libres sont des hélices de pas V/N , c'est-à-dire que les lignes de courants de l'écoulement relatif ne sont pas perturbées.

Ainsi la vitesse résultante W' s'écrit :

$$\vec{W}' = \vec{V}' + \vec{U}' \quad (2-101)$$

W' étant la résultante aérodynamique locale :

$$W' = \sqrt{V'^2 + U'^2} = \sqrt{(V+v)^2 + (\omega \cdot r - u)^2} \quad (2-102)$$

2-14 Calcul des composantes de traction et du couple résistant

2-14-1 Hypothèses :

Chaque profil de pale travaille comme étant un profil élémentaire isolé et plongé dans un écoulement bidimensionnel incompressible en mouvement uniforme (voir fig : 2-13).

La théorie de l'élément de pale, associée à la théorie tourbillonnaire nous donne la résultante élémentaire agissant sur le profil :

$$\vec{dR} = \begin{cases} dR_T = dR_z \cdot \cos \phi - dR_x \cdot \sin \phi \\ dR_c = dR_z \cdot \sin \phi + dR_x \cdot \cos \phi \end{cases}_{oxy} \quad (2-103)$$

Le théorème de JOUKOVSKI nous donne :

$$\begin{cases} dR = \rho \cdot W' \cdot \Gamma \cdot dr \\ \Gamma = \frac{1}{2} \cdot W' \cdot l \cdot C_z \end{cases} \quad (2-104)$$

Avec :

$$\begin{cases} dR_x = \frac{1}{2} \rho \cdot W'^2 \cdot l \cdot C_x \cdot dr \\ dR_z = \frac{1}{2} \rho \cdot W'^2 \cdot l \cdot C_z \cdot dr \end{cases} \quad (2-105)$$

Pour cette tranche de pale élémentaire, on peut donc définir sa traction élémentaire.

$$dT_R = dR_z \cdot \cos\phi - dR_x \cdot \sin\phi \quad (2-106)$$

En remplaçant dR_x et dR_z par leurs expressions, la traction élémentaire se réduit à :

$$dT_R = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2 \cdot l \cdot (C_z \cdot \cos\phi - C_x \cdot \sin\phi) \cdot dr \quad (2-107)$$

Le couple élémentaire résistant pour un élément de pale est :

$$dQ = r \cdot (dR_z \cdot \sin\phi + dR_x \cdot \cos\phi) \quad (2-108)$$

De même, en remplaçant dR_x et dR_z par leurs expressions, le couple élémentaire se réduit à :

$$dQ = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2 \cdot l \cdot r \cdot (C_z \cdot \sin\phi + C_x \cdot \cos\phi) \cdot dr \quad (2-109)$$

Avec :

$$\sin\phi = \frac{V + v}{W'} ; \quad \cos\phi = \frac{\omega \cdot r - u}{W'} ; \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{V + v}{\omega \cdot r - u} \quad (2-110)$$

Et pour la pale entière on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_R(\text{total}) = \int_{R_o}^{R_E} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2 \cdot l \cdot (C_z \cdot \cos\phi - C_x \cdot \sin\phi) \cdot dr \\ Q(\text{total}) = \int_{R_o}^{R_E} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2 \cdot l \cdot (C_z \cdot \sin\phi + C_x \cdot \cos\phi) \cdot r \cdot dr \end{array} \right. \quad (2-111)$$

D'où le rendement global :

$$\eta = \frac{V \cdot T_R(\text{total})}{\omega \cdot Q(\text{total})} \quad (2-112)$$

Remarque: Pour déterminer les forces élémentaires s'exerçant sur un élément de pale, il est nécessaire de connaître les coefficients C_z de portance et C_x de trainée, ainsi que les vitesses induites tangentielle et axiale.

2-14-2 Estimation des coefficients de portance et de trainée :

- Le coefficient C_z de portance d'une section d'hélice se déplaçant dans un fluide est défini par [Ref 11, page 46]:

$$C_z = 2 \cdot K \cdot (\alpha + \alpha_0) \quad (2-113)$$

Avec α_0 : angle de portance nulle.

Dans la théorie bidimensionnelle incompressible, le coefficient K a pour valeur Π , ceci pour tous les profils. Mais pour tenir compte de l'effet de la compressibilité, on applique la correction de Prandtl-Glauert :

$$K = \frac{\Pi}{\sqrt{1 - M_{\text{réel}}^2}} \quad (2-114)$$

Où $M_{\text{réel}}$ (Mach relatif) = $\frac{W}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}}$ (2-115)

-Par contre le coefficient de traînée est donné par [Ref 11]:

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{C_x}{C_z} \quad (2-116)$$

Remarque : le coefficient de portance et l'angle ε définissant le rapport traînée/portance sont obtenus à partir d'essais en soufflerie sur des sections similaires à celles de l'hélice. Par contre pour obtenir les vitesses induites, on utilise la méthode de HIRSCH développée ci-après.

Chapitre 3

CALCUL DES VITESSES INDUITES (METHODE DE HIRSCH) :

Dans un système d'axes de référence lié à la pale, on considère un élément \overline{dI} de lanière tourbillonnaire libre de circulation élémentaire $\delta\Gamma$, lié au point I s'échappant du rayon r d'une pale qui fait un angle de phase ϕ dans le repère xoy. L'angle ϕ peut prendre comme valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, ceci suivant le type d'hélice à utiliser (bipalée, quadripalée).

D'après l'un des théorèmes d'HELMOLTZ "cette lanière tourbillonnaire suit la ligne de courant" [Ref 3. page 134]. La vitesse d'un point M(x,y,z) appartenant à l'élément de lanière tourbillonnaire sera donnée par la loi de BIOT et SAVART.

$$\overline{dW} = - \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \frac{\overline{IM} \wedge \overline{dI}}{|\overline{IM}|^3} \quad (3-1)$$

3-1 Hypothèses:

- La contraction du sillage et de sa vitesse induite radiale est négligeable suivant l'axe \overrightarrow{Ox} .

- On suppose que cette lanière hélicoidale est de pas constant [H], tel que l'angle μ a une valeur constante :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{H} = \frac{1}{\lambda} \quad (3-2)$$

Les coordonnées du point I (voir fig: 3-1) de rayon r et d'argument μ s'écrivent :

$$\overline{OI} = \begin{cases} \alpha = r \cdot \cos(\phi + \vartheta) \\ \beta = r \cdot \sin(\phi + \vartheta) \\ \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu} [r \cdot (\phi + \vartheta) - r \cdot \phi] = \frac{r \cdot \vartheta}{\operatorname{tg} \mu} = \lambda \cdot r \cdot \vartheta \end{cases} \quad (3-3)$$

Composantes de l'élément \overline{dI} :

$$\overline{dI} = \begin{cases} d\alpha = - r \cdot \sin(\phi + \vartheta) \cdot d\vartheta \\ d\beta = r \cdot \cos(\phi + \vartheta) \cdot d\vartheta \\ d\gamma = \lambda \cdot r \cdot d\vartheta \end{cases} \quad (3-4)$$

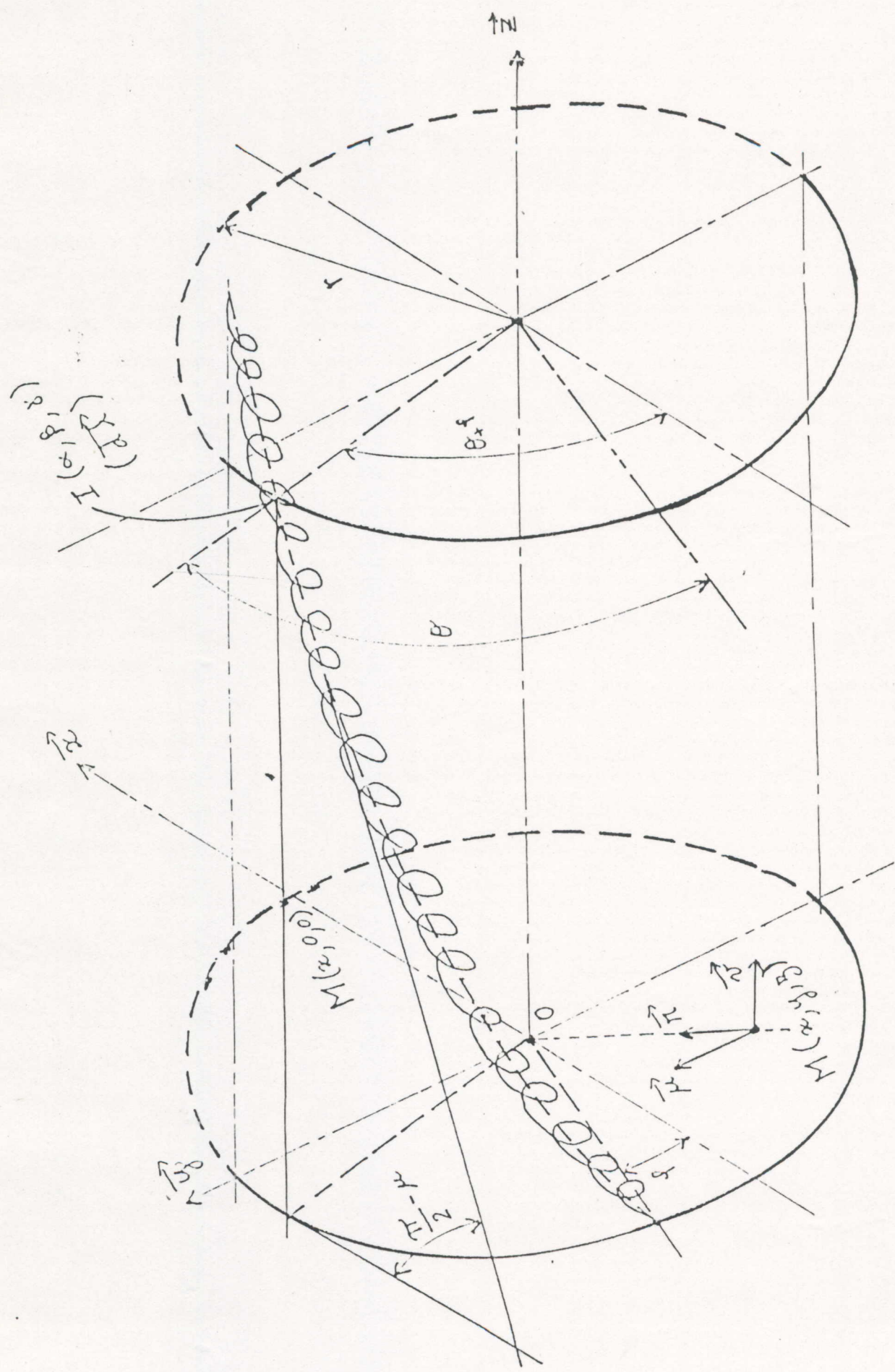


FIGURE (3-1) : EVOLUTION D'UNE LIGNE MOYENNE DE TOURBILLON MARGINAL.

composantes du vecteur \vec{IM} :

$$\vec{IM} = \begin{cases} X = x - r \cdot \cos(\phi + \vartheta) \\ Y = y - r \cdot \sin(\phi + \vartheta) \\ Z = z - \lambda \cdot r \cdot \vartheta \end{cases} \quad (3-5)$$

$$\vec{IM} \wedge \vec{dI} = \begin{cases} x - r \cdot \cos(\phi + \vartheta) \\ y - r \cdot \sin(\phi + \vartheta) \\ z - \lambda \cdot r \cdot \vartheta \end{cases} \wedge \begin{cases} - r \cdot \sin(\phi + \vartheta) \cdot d\vartheta \\ r \cdot \cos(\phi + \vartheta) \cdot d\vartheta \\ \lambda \cdot r \cdot d\vartheta \end{cases} \quad (3-6)$$

$$\vec{IM} \wedge \vec{dI} = \begin{cases} \lambda \cdot r \left[r \cdot \vartheta \cdot \cos(\phi + \vartheta) - r \cdot \sin(\phi + \vartheta) + y - \frac{z}{\lambda} \cos(\phi + \vartheta) \right] \cdot d\vartheta \\ \lambda \cdot r \left[r \cdot \vartheta \cdot \sin(\phi + \vartheta) - [x - r \cdot \cos(\phi + \vartheta)] - \frac{z}{\lambda} \sin(\phi + \vartheta) \right] \cdot d\vartheta \\ r \left[x \cdot \cos(\phi + \vartheta) - r + y \cdot \sin(\phi + \vartheta) \right] \cdot d\vartheta \end{cases} \quad (3-7)$$

$$|\vec{IM}| = \sqrt{[x - r \cdot \cos(\phi + \vartheta)]^2 + [y - r \cdot \sin(\phi + \vartheta)]^2 + [z - \lambda \cdot r \cdot \vartheta]^2} \quad (3-8)$$

Puisque nous cherchons seulement les vitesses induites le long d'une pale, nous prendrons les coordonnées du point M sur l'axe \vec{ox} , tel que ses coordonnées soient $(x, 0, 0)$.

Ainsi les équations (3-7) et (3-8) se réduisent à :

$$\vec{IM} \wedge \vec{dI} = \begin{cases} \lambda \cdot r^2 \left[\vartheta \cdot \cos(\phi + \vartheta) - \sin(\phi + \vartheta) \right] \cdot d\vartheta \\ \lambda \cdot r \left[r \cdot \vartheta \cdot \sin(\phi + \vartheta) - [x - r \cdot \cos(\phi + \vartheta)] \right] \cdot d\vartheta \\ r \left[x \cdot \cos(\phi + \vartheta) - r \right] \cdot d\vartheta \end{cases} \quad (3-9)$$

$$|\vec{IM}| = \sqrt{[x - r \cdot \cos(\phi + \vartheta)]^2 + r^2 \cdot \sin^2(\phi + \vartheta) + \lambda^2 \cdot r^2 \cdot \vartheta^2} \quad (3-10)$$

D'après la première hypothèse, la vitesse induite d'un élément de la pale s'écrit :

$$\vec{dW} = du \vec{y} + dv \vec{z} \quad (3-11)$$

Où du et dv sont deux composantes de la vitesse induite d'un élément de cette pale :

du : est appelée vitesse tangentielle induite.

dv : est appelée vitesse axiale induite .

L'application de la loi de BIOT et SAVART donne :

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{\lambda \cdot r \left[[x-r \cdot \cos(\phi+\vartheta)] - r \cdot \vartheta \cdot \sin(\phi+\vartheta) \right]}{\left[[x-r \cdot \cos(\phi+\vartheta)]^2 + r^2 \cdot \sin^2(\phi+\vartheta) + \lambda^2 \cdot r^2 \cdot \vartheta^2 \right]^{3/2}} \quad (3-12)$$

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{r \left[-x \cdot \cos(\phi+\vartheta) + r \right]}{\left[[x-r \cdot \cos(\phi+\vartheta)]^2 + r^2 \cdot \sin^2(\phi+\vartheta) + \lambda^2 \cdot r^2 \cdot \vartheta^2 \right]^{3/2}} \quad (3-13)$$

L'intégration de ces expressions des vitesses induites (axiale et tangentielle) ne peut se faire de façon analytique; de nombreux auteurs ont cherché à approximer ces expressions, à citer entre autres la méthode de HIRSCH qui interpole l'induction d'un tourbillon hélicoidal par des fonctions représentatives de l'induction de tourbillons rectilignes.

3-2 Méthode de HIRSCH :

Considérons, comme l'a fait Hirsch, deux lanières tourbillonnaires fictives s'échappant de la pale aux distances $[+r]$ et $[-r]$ confondues avec les génératrices des cylindres de rayon r , de même circulation et d'argument $(\vartheta+\phi)$. Leurs vitesses induites sont également données par la loi de Biot et Savart (voir fig: 3-2)

$$\begin{cases} \vec{d\vec{w}}_1 = - \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{\vec{IM}_1 \wedge \vec{d\vec{l}}_1}{|\vec{IM}_1|^3} \\ \vec{d\vec{w}}_2 = - \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{\vec{IM}_2 \wedge \vec{d\vec{l}}_2}{|\vec{IM}_2|^3} \end{cases} \quad (3-14)$$

$$\vec{OI}_1 = \begin{cases} \alpha_1 = r \\ \beta_1 = 0 \\ \gamma_1 = r \cdot \text{tg} \vartheta_1 \end{cases} \quad \vec{OI}_2 = \begin{cases} \alpha_2 = - r \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = - r \cdot \text{tg} \vartheta_2 \end{cases} \quad (3-15)$$

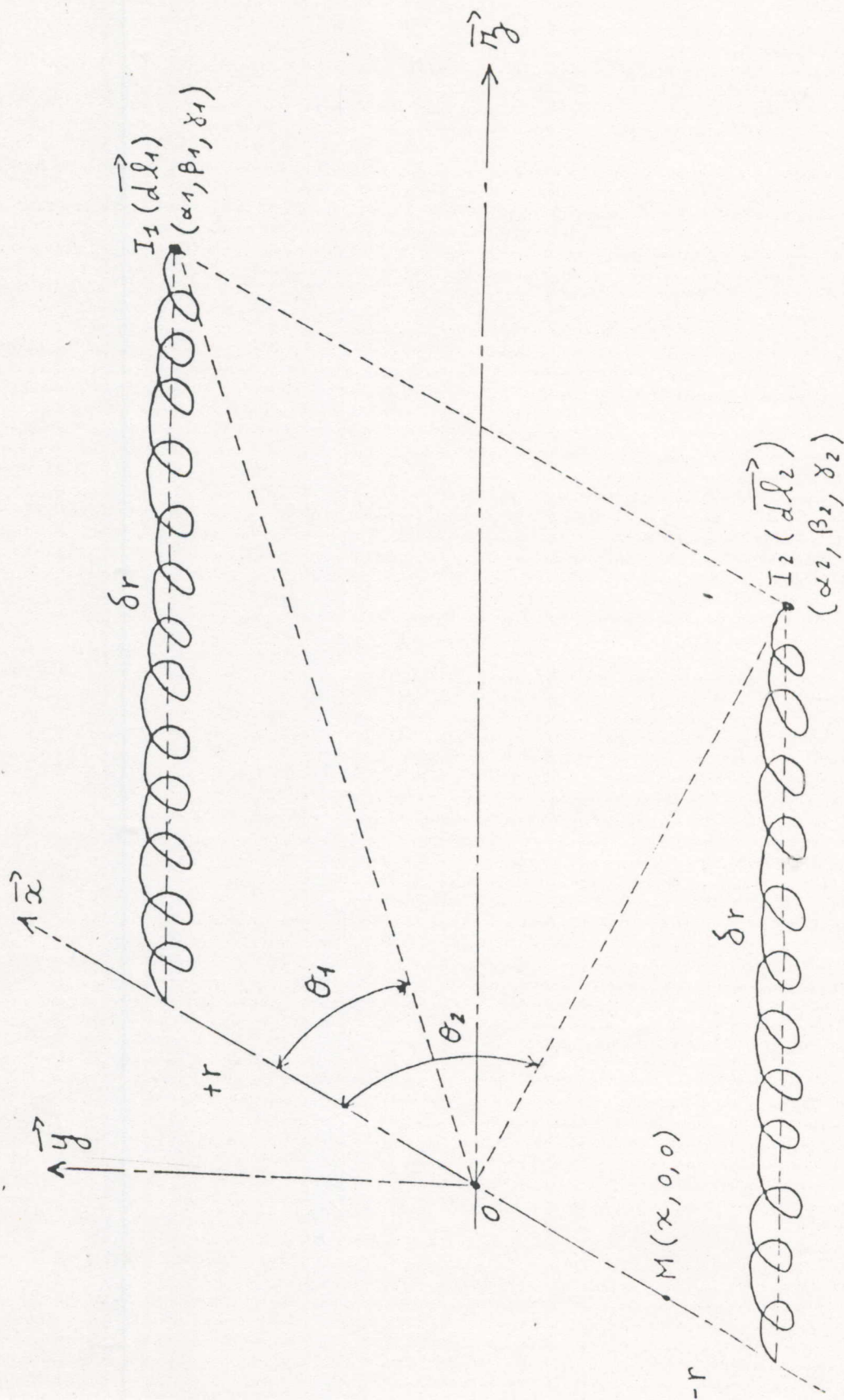


FIGURE (3-2) : EVOLUTION DE DEUX LIGNES MOYENNES DE TOURBILLONS MARGINAUX SITUES SUR DEUX PALES OPPOSEES.

$$\vec{dI}_1 = \begin{cases} d\alpha_1 = 0 \\ d\beta_1 = 0 \\ d\gamma_1 = r \frac{d\vartheta_1}{\cos^2 \vartheta_1} \end{cases} \quad \vec{dI}_2 = \begin{cases} d\alpha_2 = 0 \\ d\beta_2 = 0 \\ d\gamma_2 = -r \frac{d\vartheta_2}{\cos^2 \vartheta_2} \end{cases} \quad (3-16)$$

$$\vec{IM}_1 = \begin{cases} X_1 = x - r \\ Y_1 = 0 \\ Z_1 = -r \operatorname{tg} \vartheta_1 \end{cases} \quad \vec{IM}_2 = \begin{cases} X_2 = x + r \\ Y_2 = 0 \\ Z_2 = r \operatorname{tg} \vartheta_2 \end{cases} \quad (3-17)$$

$$\begin{cases} \vec{IM}_1 \wedge \vec{dI}_1 = - (x - r) r \frac{d\vartheta_1}{\cos^2 \vartheta_1} \vec{Y} \\ \vec{IM}_2 \wedge \vec{dI}_2 = + (x + r) r \frac{d\vartheta_2}{\cos^2 \vartheta_2} \vec{Y} \end{cases} \quad (3-18)$$

$$\begin{cases} |\vec{IM}_1| = \sqrt{(x - r)^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1} \\ |\vec{IM}_2| = \sqrt{(x + r)^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2} \end{cases} \quad (3-19)$$

En appliquant la loi de Biot et Savart, on aura :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{W}_1}{d\vartheta_1} = \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{(x - r) r}{\left[(x - r)^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1 \right]^{3/2} \cos^2 \vartheta_1} \vec{Y} \\ \frac{d\vec{W}_2}{d\vartheta_2} = - \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{(x + r) r}{\left[(x + r)^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 \right]^{3/2} \cos^2 \vartheta_2} \vec{Y} \end{cases} \quad (3-20)$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{dW_1}{d\vartheta_1} = \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{(x - r) r}{\left[(x - r)^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1 \right]^{3/2} \cos^2 \vartheta_1} \\ \frac{dW_2}{d\vartheta_2} = - \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{(x + r) r}{\left[(x + r)^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 \right]^{3/2} \cos^2 \vartheta_2} \end{cases} \quad (3-21)$$

Or d'après la deuxième hypothèse on aura :

$$\begin{aligned} \lambda r \vartheta &= r \operatorname{tg} \vartheta_1 = -r \operatorname{tg} \vartheta_2 \\ \lambda r d\vartheta &= r \frac{d\vartheta_1}{\cos^2 \vartheta_1} = -r \frac{d\vartheta_2}{\cos^2 \vartheta_2} \end{aligned} \quad (3-22)$$

En remplaçant l'équation (3-22) dans l'équation (3-21), les expressions des vitesses induites se réduisent à :

$$\begin{cases} dw_1 = \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{(x-r) \lambda r d\vartheta}{\left[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2 \right]^{3/2}} \\ dw_2 = \frac{\delta \Gamma}{4 \pi} \frac{(x+r) \lambda r d\vartheta}{\left[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2 \right]^{3/2}} \end{cases} \quad (3-23)$$

Considérons maintenant la fonction $f(\vartheta)$ ainsi formulée :

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2} \left[\frac{dw_1}{d\vartheta} + \frac{dw_2}{d\vartheta} + \cos(\varphi + \vartheta) \left[\frac{dw_1}{d\vartheta} - \frac{dw_2}{d\vartheta} \right] \right] \quad (3-24)$$

Remarque :

$$\text{si } \varphi + \vartheta = 2k\pi$$

$$f(\vartheta_0) = \frac{dw_1}{d\vartheta} = \frac{du}{d\vartheta} \Big|_{\varphi + \vartheta = 2k\pi} \quad (3-25)$$

$$\text{avec } \vartheta_0 = 2K\pi - \varphi$$

$$\text{si } \varphi + \vartheta = (2k+1)\pi$$

$$f(\vartheta_0) = \frac{dw_2}{d\vartheta} = \frac{du}{d\vartheta} \Big|_{\varphi + \vartheta = (2k+1)\pi} \quad (3-26)$$

$$\text{avec } \vartheta_0 = (2K+1)\pi - \varphi$$

Considérons encore une autre fonction $g(\vartheta)$, ceci dans les mêmes conditions que précédemment :

$$g(\vartheta) = \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{dw_1}{d\vartheta} + \frac{dw_2}{d\vartheta} - \cos(\varphi + \vartheta) \left[\frac{dw_1}{d\vartheta} - \frac{dw_2}{d\vartheta} \right] \right] \quad (3-27)$$

Remarque :

$$\text{si } \varphi + \vartheta = 2k\pi$$

$$g(\vartheta_0) = \frac{1}{\lambda} \frac{dw_1}{d\vartheta} = \frac{dv}{d\vartheta} \Big|_{\varphi + \vartheta = 2k\pi} \quad (3-28)$$

$$\text{avec } \vartheta_0 = 2K\pi - \varphi$$

$$\text{si } \varphi + \vartheta = (2k+1)\pi$$

$$g(\vartheta_0) = \frac{1}{\lambda} \frac{dw_2}{d\vartheta} = \frac{dv}{d\vartheta} \Big|_{\varphi + \vartheta = (2k+1)\pi} \quad (3-29)$$

$$\text{avec } \vartheta_0 = (2K+1)\pi - \varphi$$

Donc en tout point du tourbillon d'argument ϑ , on peut poser:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\vartheta} = f(\vartheta) + \varepsilon_u(\vartheta) \\ \frac{dv}{d\vartheta} = g(\vartheta) + \varepsilon_v(\vartheta) \end{cases} \quad (3-30)$$

Où $\varepsilon_u(\vartheta)$ et $\varepsilon_v(\vartheta)$ sont des fonctions complémentaires de $f(\vartheta)$ et de $g(\vartheta)$ dont on cherchera à évaluer les expressions approchées. Conditions imposées (voir fig: 3-3) :

$$-. \quad \phi + \vartheta = 2k\pi$$

$$\left. \frac{du}{d\vartheta} \right|_{\phi+\vartheta=2k\pi} = f(\vartheta) \Big|_{\phi+\vartheta=2k\pi} \quad (3-31)$$

$$-. \quad \phi + \vartheta = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \frac{du}{d\vartheta} \right|_{\phi+\vartheta=(2k+1) \frac{\pi}{2}} = f(\vartheta) + \varepsilon_u(\vartheta) \Big|_{\phi+\vartheta=(2k+1) \frac{\pi}{2}} \quad (3-32)$$

$$-. \quad \phi + \vartheta = k\pi$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \left[\frac{du}{d\vartheta} \right]_{\phi+\vartheta=k\pi} = \frac{d}{d\vartheta} \left[f(\vartheta) + \varepsilon_v(\vartheta) \right]_{\phi+\vartheta=k\pi} \quad (3-33)$$

D'après la première hypothèse, on tire $\varepsilon_u(\vartheta)_0 = 0$.

Appliquons la deuxième condition :

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \frac{\left[x - r \cdot \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} - \vartheta'_0 \cdot r \cdot \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \right] \lambda r}{\left[\left[x - r \cdot \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} \right]^2 + r^2 \cdot \sin^2(2k+1) \frac{\pi}{2} + \lambda^2 r^2 \vartheta_0'^2 \right]^{3/2}} \quad (3-34)$$

$$\text{Or} \quad \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\sin(2k+1) \frac{\pi}{2} = \begin{cases} +1 & ; k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ -1 & ; k = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

$$\text{Avec} \quad \vartheta'_0 = (2k+1) \frac{\pi}{2} - \phi$$

Finalemment :

$$\left. \frac{du}{d\vartheta} \right|_{\phi+\vartheta=(2k+1) \frac{\pi}{2}} = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \frac{(x \pm \vartheta'_0 r) \lambda r}{\left[x^2 + r^2 - \lambda^2 r^2 \vartheta_0'^2 \right]^{3/2}} \quad (3-35)$$

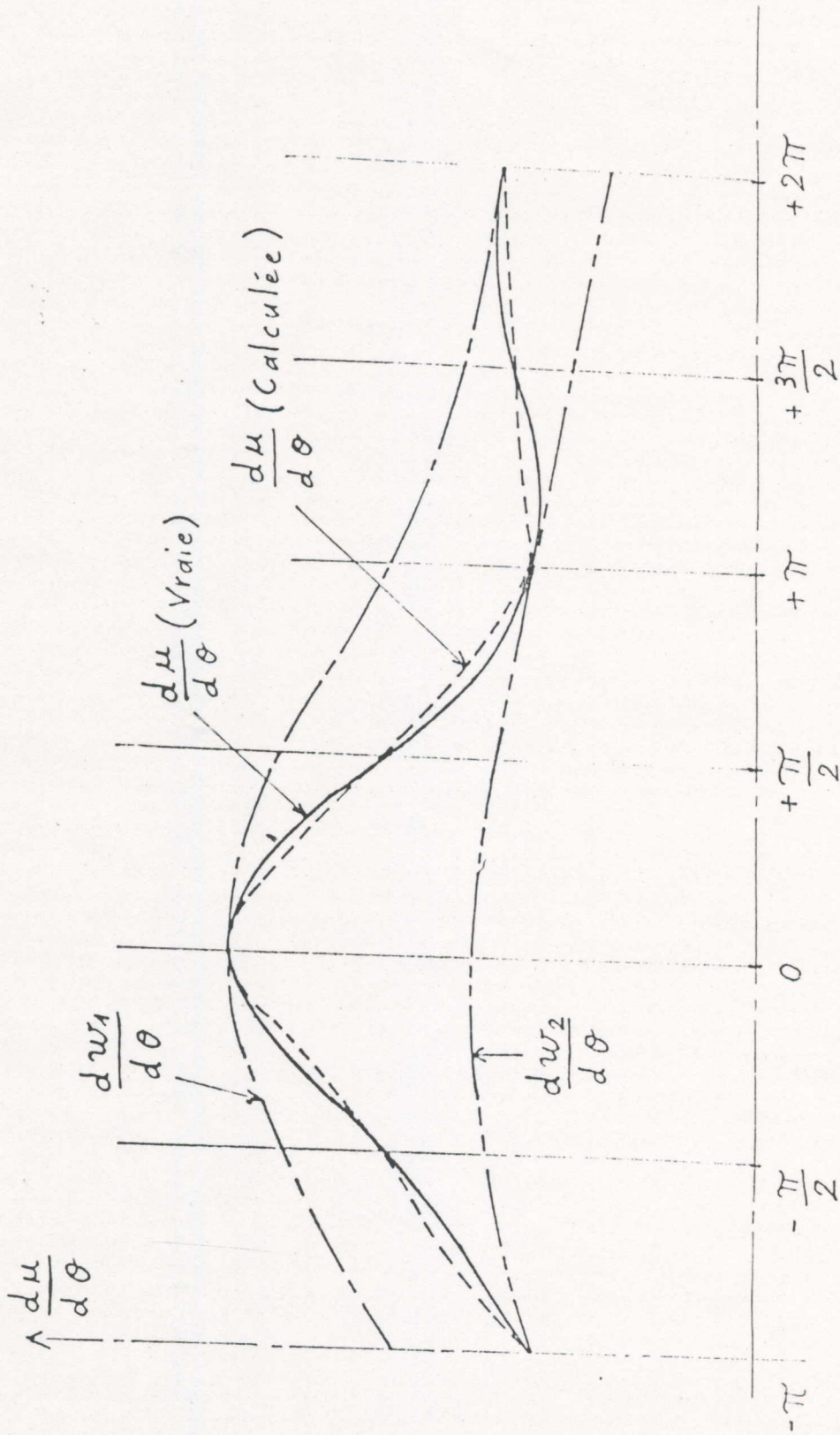


FIGURE (3-3) : VARIATION DE LA VITESSE TANGENTIELLE INDUITE.

$$f(\vartheta'_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{dW_1}{d\vartheta} + \frac{dW_2}{d\vartheta} \right]_{\varphi+\vartheta=(2k+1)\frac{\pi}{2}} \quad (3-36)$$

En remplaçant $\frac{dW_1}{d\vartheta}$ et $\frac{dW_2}{d\vartheta}$ par leurs expressions dans l'équation (3-36), on obtient :

$$f(\vartheta'_0) = \frac{1}{2} \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \left[\frac{(x-r)\lambda r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0'^2} \right]^{a/2} + \frac{(x+r)\lambda r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0'^2} \right]^{a/2} \quad (3-37)$$

Ce qui entraîne :

$$\varepsilon_{\perp}(\vartheta'_0) = \lambda r \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \left[\frac{(x + \vartheta'_0 r)}{[x^2 + r^2 - \lambda^2 r^2 \vartheta_0'^2]} \right]^{a/2} - \frac{1}{2} \left[\frac{(x-r)}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0'^2} \right]^{a/2} + \dots + \frac{(x+r)}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0'^2} \right]^{a/2} \quad (3-38)$$

En appliquant la troisième condition, nous sommes conduits à prendre $\varepsilon_{\perp}(\vartheta)$ sous la forme suivante:

$$\varepsilon_{\perp}(\vartheta) = \lambda r \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \left\{ \left[\frac{x-r \sin(\varphi+\vartheta)}{[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]} \right]^{a/2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x-r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \right]^{a/2} + \dots + \frac{x+r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \right]^{a/2} \left\} \frac{1 - \cos 2(\varphi+\vartheta)}{2} + \left\{ \frac{\vartheta r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \right]^{a/2} + \frac{\vartheta r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \right]^{a/2} + \cos(\varphi+\vartheta) \left[\frac{\vartheta r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \right]^{a/2} - \dots - \frac{\vartheta r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \right]^{a/2} \left\} \frac{\sin(2(\varphi+\vartheta))}{2} \quad (3-39)$$

Donc il reste à intégrer les termes de la forme :

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda r d\vartheta}{(X^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda r d\vartheta}{X^3 \left[1 + \frac{\lambda^2 r^2 \vartheta^2}{X^2} \right]^{3/2}} \quad (3-43)$$

On pose :

$$Y = \frac{\lambda r \vartheta}{X} \quad dY = \frac{\lambda \cdot r}{X} d\vartheta$$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\lambda r d\vartheta}{X^3 \left[1 + \frac{\lambda^2 r^2 \vartheta^2}{X^2} \right]^{3/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{X dY}{X^3 (1 + Y^2)^{3/2}} \quad (3-44)$$

On fait un autre changement de variables:

$$Y = \operatorname{tg}(t) \quad dY = - \frac{dt}{\cos^2 t} \quad (3-45)$$

D'où l'intégrale se réduit à :

$$\int_0^{\infty} \frac{X dY}{X^3 (1 + Y^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{X^2 (1 + \operatorname{tg}^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{X^2} dt \quad (3-46)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{X^2} dt = \frac{\sin t}{X^2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{X^2} \quad (3-47)$$

Finalement :

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda r d\vartheta}{(X^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2)^{3/2}} = \frac{1}{X^2} \quad (3-48)$$

Par identification on obtient :

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{d\vartheta} d\vartheta = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \left[\frac{x}{2(x^2 + r^2)} + \frac{1}{4(x-r)} + \frac{1}{4(x+r)} \right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{d\vartheta} d\vartheta = \frac{\delta\Gamma}{16\pi} \left[\frac{2x}{x^2 + r^2} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x+r} \right] \quad (3-49)$$

Et sur une tranche de pale:

$$u(x) = \frac{1}{16\pi} \int_{R_0}^{R_E} \frac{\delta\Gamma}{\delta r} \left[\frac{2x}{x^2 + r^2} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x+r} \right] dr \quad (3-50)$$

Donc la fonction vraie $\frac{du}{d\vartheta}$ est approchée par la fonction $f(\vartheta) + \varepsilon(\vartheta)$, en remplaçant $f(\vartheta)$ et $\varepsilon(\vartheta)$ par leurs expressions, la fonction vraie s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\vartheta} = & \lambda r \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{x-r}{[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} + \frac{x+r}{[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} \right\} + \dots \right. \\ & + \cos(\phi+\vartheta) \left\{ \frac{x-r}{[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} - \frac{x+r}{[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} \right\} + \dots \\ & \left. \left\{ \frac{x-r \sin(\phi+\vartheta)}{[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{x-r}{[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} + \frac{x+r}{[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} \right] \right\} \right] \\ & \frac{1-\cos(2(\phi+\vartheta))}{2} + \left\{ \frac{\vartheta r}{[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} + \frac{\vartheta r}{[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} + \dots \right. \\ & \left. \cos(\phi+\vartheta) \left[\frac{\vartheta r}{[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} - \frac{\vartheta r}{[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} \right] \right\} \frac{\sin(2(\phi+\vartheta))}{2} \end{aligned} \quad (3-40)$$

Pour avoir la valeur de la vitesse tangentielle induite, il suffit d'intégrer l'expression ci-dessus le long de la pale et le long d'une lanière hélicoidale, c'est-à-dire de $R_0 < r < R_E$ et de $0 < \vartheta < \infty$.

$$u(x) = \int_{R_0}^{R_E} \int_0^{\infty} \frac{du}{d\vartheta} d\vartheta \cdot dr \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\vartheta} = & \lambda r \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{x}{[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} + \frac{1}{4} \left[\frac{x-r}{[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x+r}{[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2]^{3/2}} \right] \right] \end{aligned} \quad (3-42)$$

Pour un nombre p de pales:

$$u(x) = \frac{p}{16\pi} \int_{R_0}^{RE} \frac{\delta\Gamma}{\delta r} \left[\frac{2x}{x^2 + r^2} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x+r} \right] dr \quad (3-51)$$

Par des calculs et des hypothèses similaires à ceux précédemment décrits, nous remplacerons seulement la fonction vraie $\frac{dv}{d\vartheta}$ par la fonction approchée (équation 3-36-b).

$$\frac{dv}{d\vartheta} = g(\vartheta) + \varepsilon_v(\vartheta)$$

Conditions imposées à $\varepsilon_v(\vartheta)$:

$$\begin{aligned} \text{si } \phi + \vartheta = (2k+1) \frac{\pi}{2} \\ \left. \frac{dv}{d\vartheta} \right|_{\phi+\vartheta=(2k+1)\frac{\pi}{2}} = g(\vartheta) + \varepsilon_v(\vartheta) \Big|_{\phi+\vartheta=(2k+1)\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (3-52)$$

$$\begin{aligned} \text{si } \phi + \vartheta = k\pi \\ \left. \frac{dv}{d\vartheta} \right|_{\phi+\vartheta=k\pi} = g(\vartheta) \Big|_{\phi+\vartheta=k\pi} \end{aligned} \quad (3-53)$$

$$\begin{aligned} \text{si } \phi + \vartheta = k\pi \\ \left. \frac{d}{d\vartheta} \left[\frac{dv}{d\vartheta} \right] \right|_{\phi+\vartheta=k\pi} = \frac{d}{d\vartheta} \left[g(\vartheta) + \varepsilon_v(\vartheta) \right] \Big|_{\phi+\vartheta=k\pi} \end{aligned} \quad (3-54)$$

Appliquons la première condition:

$$\left. \frac{dv}{d\vartheta} \right|_{(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \frac{\lambda r \left[r - x \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} \right]}{\left[\left[x - r \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} \right]^2 + r^2 \sin^2(2k+1) \frac{\pi}{2} + \lambda^2 r^2 \vartheta_o^2 \right]^{3/2}} \quad (3-55)$$

Or :

$$\begin{aligned} \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} = 0 & \quad ; k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} = \begin{cases} +1 & ; k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ -1 & ; k = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dv}{d\vartheta} \right|_{(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \frac{\lambda r^2}{\left[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_o^2 \right]^{3/2}} \quad (3-56)$$



$$g(\vartheta_0) = \frac{1}{2} \frac{\delta\Gamma}{4\pi} \left[\frac{(x+r)r d\vartheta}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0^2} \Big|^{a/2} - \frac{(x-r)r d\vartheta}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0^2} \Big|^{a/2} \right] \quad (3-57)$$

Finalemment:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v(\vartheta_0) = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} & \left[\frac{r^2}{[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0^2]} \Big|^{a/2} - \frac{1}{2} \frac{(x+r)r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0^2} \Big|^{a/2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{(x-r)r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0^2} \Big|^{a/2} \right] \frac{1 - \cos 2(\varphi + \vartheta)}{2} \quad (3-58) \end{aligned}$$

D'où la fonction approchée est :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\vartheta} = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} & \left[\frac{1}{2} \frac{(x+r)r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} - \frac{1}{2} \frac{(x-r)r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} \right. \\ & - \cos(\varphi + \vartheta) \frac{(x+r)r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} + \frac{(x-r)r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} \\ & + \left[\frac{r^2}{[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0^2]} \Big|^{a/2} - \frac{1}{2} \frac{(x+r)r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{(x-r)r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} \right] \frac{1 - \cos 2(\varphi + \vartheta)}{2} \right] \quad (3-59) \end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de la vitesse axiale induite, il suffit d'intégrer l'expression ci-dessus, c'est-à-dire l'équation (3-59), le long de la pale et le long d'une lanière hélicoidale ($R_0 < r < R_E$ et de $0 < \vartheta < \infty$).

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\vartheta} = \frac{\delta\Gamma}{4\pi} & \left[\frac{1}{4} \frac{(x+r)r}{[x+r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} - \frac{1}{4} \frac{(x-r)r}{[x-r]^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2} \Big|^{a/2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{r^2}{[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_0^2]} \Big|^{a/2} \right] \quad (3-60) \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{\delta\Gamma}{16\pi} \left[\frac{(x+r)r}{\left[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2 \right]^{3/2}} - \frac{(x-r)r}{\left[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2 \right]^{3/2}} + \frac{2r^2}{\left[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_o^2 \right]^{3/2}} \right] \quad (3-61)$$

$$dv = \frac{\delta\Gamma}{16\pi} \left[\frac{(x+r)r}{\left[(x+r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2 \right]^{3/2}} - \frac{(x-r)r}{\left[(x-r)^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta^2 \right]^{3/2}} + \frac{2r^2}{\left[x^2 + r^2 + \lambda^2 r^2 \vartheta_o^2 \right]^{3/2}} \right] d\vartheta \quad (3-62)$$

Après intégration on obtient :

$$dv = \frac{1}{16\pi} \int_{R_o}^{R_E} \frac{\delta\Gamma}{\delta r} \left[\frac{2r}{x^2 + r^2} + \frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} \right] dr \quad (3-63)$$

Et pour une hélice de p pales:

$$v(x) = \frac{p}{16\pi} \int_{R_o}^{R_E} \frac{\delta\Gamma}{dr} \left[\frac{2x}{x^2 + r^2} + \frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} \right] dr \quad (3-64)$$

3-2-1 Calcul des intégrales :

Les intégrales (3-51) et (3-64) ne peuvent être résolues d'une manière analytique, mais l'hypothèse formulée $\delta\Gamma_{RE} = \delta\Gamma_{RO} = 0$ nous met dans un cas spécial de résolution par intégration numérique discrète dite méthode de MULTHOPP [Ref 4, page 236].

On effectue un changement de variable qui tient compte implicitement des hypothèses avancées et des conditions aux limites ainsi créés.

a) Calcul de la vitesse tangentielle induite $u(x)$:

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_{R_0}^{R_E} \frac{\delta\Gamma}{\delta r} \frac{1}{x-r} dr \\ I_2 = \int_{R_0}^{R_E} \frac{\delta\Gamma}{\delta r} \frac{1}{x-r} dr \\ I_3 = \int_{R_0}^{R_E} \frac{\delta\Gamma}{\delta r} \frac{2x}{x^2+r^2} dr \end{array} \right. \quad (3-65)$$

Faisons un changement de variables :

$$\begin{aligned} x &= \frac{R_e + R_0}{2} + \frac{R_e - R_0}{2} \cos\vartheta, \quad 0 < \vartheta < \pi \\ r &= \frac{R_e + R_0}{2} + \frac{R_e - R_0}{2} \cos\phi, \quad 0 < \phi < \pi \end{aligned} \quad (3-66)$$

Suivant la formulation de MULTHROPP, la circulation s'écrit comme suit:

$$\Gamma(\vartheta) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \sin(k \cdot \phi_n) \quad (3-67)$$

avec : m étant le nombre de points de discrétisation .
 α_k étant donnée par la formule suivante:

$$\alpha_k = \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^m \Gamma(\vartheta_k) \cdot \sin(k \cdot \phi_n) \quad (3-68)$$

où :

$$\phi_n = \frac{n \cdot \pi}{m+1} \quad (3-69)$$

$$\rightarrow \Gamma(\vartheta) = \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m \Gamma(\vartheta_k) \cdot \sin(k \cdot \phi_n) \quad (3-70)$$

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\partial\Gamma}{\partial\vartheta} \frac{d\vartheta}{\frac{R_E - R_0}{2} (\cos\vartheta - \cos\phi)} \quad (3-71)$$

$$I_1 = \frac{2}{R_E - R_0} \int_0^\pi \frac{\partial\Gamma}{\partial\vartheta} \frac{d\vartheta}{(\cos\vartheta - \cos\phi)} \quad (3-72)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\vartheta} = \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^m \Gamma(\vartheta_k) \cdot \sum_{n=1}^m k \cdot \cos(k \cdot \vartheta) \cdot \sin(k \cdot \phi_n) \quad (3-73)$$

$$I_1 = \frac{2}{RE-R_0} \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^m k \cdot \Gamma(\vartheta_k) \sum_{n=1}^m \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\vartheta) \cdot \sin(k\phi_n)}{\cos\vartheta - \cos\phi_n} d\vartheta \quad (3-74)$$

$$I_1 = \frac{2}{RE-R_0} \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^m k \cdot \Gamma(\vartheta_k) \sum_{n=1}^m \sin(k\phi_n) \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\vartheta)}{\cos\vartheta - \cos\phi_n} d\vartheta \quad (3-75)$$

$$\text{or } \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\vartheta)}{\cos\vartheta - \cos\phi_n} d\vartheta = \frac{\Pi \cdot \sin(k\phi_n)}{\sin(\phi_n)} \quad (3-76)$$

$$I_1 = \frac{2}{RE-R_0} \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^m k \cdot \Gamma(\vartheta_k) \sum_{n=1}^m \frac{\Pi \cdot \sin^2(k\phi_n)}{\sin(\phi_n)} \quad (3-77)$$

La série de MULTHOPP est:

$$I_1 = b_{kk} \cdot \Gamma(\vartheta_k) - \sum_{k=n}^m b_{kn} \cdot \Gamma(\phi_n) \quad (3-78)$$

Détermination des coefficients de MULTHOPP

$$I_1 (n=k) = \frac{2}{RE-R_0} \frac{2}{m+1} K \cdot \Gamma(\vartheta_k) \frac{\Pi \cdot \sin^2(k\phi_n)}{\sin(\phi_n)} \quad (3-79)$$

$$I_1 = \frac{2 \cdot \pi}{RE-R_0} \frac{2}{m+1} \Gamma(\vartheta_k) \sum_{k=1}^m \frac{K \cdot \sin^2(k\phi_n)}{\sin(\phi_n)} \quad (3-80)$$

Or:

$$\sum_{k=1}^m \frac{K \cdot \sin^2(k\phi_n)}{\sin(\phi_n)} = \frac{(m+1)^2}{4 \cdot \sin(\phi_k)} \quad (3-81)$$

$$b_{kk} = \frac{2 \cdot \pi}{RE-R_0} \frac{2}{m+1} \frac{(m+1)^2}{4 \cdot \sin(\phi_k)} \quad (3-82)$$

$$b_{kk} = \frac{\pi}{RE-R_0} \frac{(m+1)}{\sin(\phi_k)} \quad (3-83)$$

$$b_{kn} = -\frac{2}{RE-R_0} \frac{2 \cdot \Pi}{m+1} \sum_{k=1}^m K \cdot \Gamma(\vartheta_k) \frac{\sin(k\phi_n) \cdot \sin(k\phi_n)}{\sin(\phi_n)} \quad (3-84)$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m K \frac{\sin^2(k\phi_n)}{\sin(\phi_n)} &= -\frac{(m+1) \cdot \sin(\phi_n)}{(\cos\phi_n - \cos\phi_k)^2} \left[\frac{1 - (-1)^{n-k}}{2 \cdot (m+1)} \right] \\ &= -\frac{\sin(\phi_n)}{(\cos\phi_n - \cos\phi_k)^2} \left[\frac{1 - (-1)^{n-k}}{2} \right] \end{aligned} \quad (3-85)$$

$$b_{kn} = \frac{2 \cdot \pi}{(RE - Ro) \cdot (m+1)} \frac{\sin(\phi_n) \cdot [1 - (-1)^{n-k}]}{(\cos\phi_n - \cos\phi_k)^2} \quad (3-86)$$

Pour l'intégrale $I_2 = \int_{Ro}^{RE} \frac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta} \frac{dr}{x+r}$

En intégrant par partie :

$$I_2 = \left[\Gamma \frac{1}{x+r} \right]_{Ro}^{RE} + \int_{Ro}^{RE} \Gamma \frac{dr}{x+r} \quad (3-87)$$

$$I_2 = \int_{Ro}^{RE} \Gamma \frac{dr}{x+r} = \frac{\pi \cdot (Re - Ro)}{2 \cdot (m+1)} \sum_{k=1}^m \frac{\sin(k \phi_n)}{(x_k + r_n)^2} \Gamma(\vartheta_n) \quad (3-88)$$

$$I_3 = \int_{Ro}^{RE} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \frac{2 \cdot x}{x^2 + r^2} dr = \Gamma \frac{2 \cdot x}{x^2 + r^2} \Big|_{Ro}^{RE} + \int_{Ro}^{RE} \Gamma \frac{4 \cdot x \cdot r}{(x^2 + r^2)^2} dr \quad (3-89)$$

$$I_3 = \frac{2 \cdot \pi \cdot (RE - Ro)}{(m+1)} \sum_{k=1}^m \frac{x_k \cdot r_n \cdot \sin\phi_n}{(x_k^2 + r_n^2)^2} \Gamma(\vartheta_n) \quad (3-90)$$

Finalement la vitesse tangentielle induite s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x_k) = \frac{P}{16 \cdot \pi} [I_1 + I_2 + I_3] \quad (3-91)$$

En remplaçant I_1, I_2 et I_3 par leurs expressions, la vitesse tangentielle induite peut être écrite sous la forme matricielle.

$$|u(x_k)| = [M(k,n)] |\Gamma(n)| \quad (3-92)$$

Avec comme coefficients de la matrice $M(k,n)$:

- pour $k = n$

$$M(k=n) = \frac{P}{16} (Re - Ro) \left[- \frac{m+1}{\sin\phi_k} + \frac{Re - Ro}{2} \frac{\sin\phi_n}{m+1} \left[\frac{1}{(x_k + r_n)^2} + \frac{4 \cdot x_k \cdot r_n}{(x_k^2 + r_n^2)^2} \right] \right] \quad (3-93)$$

- pour $k \neq n$

$$M(k \neq n) = \frac{P}{8 \cdot (m+1)} \frac{\sin \phi_n}{(R_e - R_o)} \left[\frac{[-1]^{n-k} - 1}{(\cos \phi_n - \cos \phi_k)^2} + \left[\frac{R_e - R_o}{2} \right]^2 \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{1}{(x_k + r_n)^2} + \frac{4 \cdot x_k \cdot r_n}{(x_k^2 + r_n^2)^2} \right] \right] \quad (3-94)$$

b) Calcul de la vitesse axiale induite :

Puisque R.HIRSCH suppose dans sa méthode simplifiée que le pas géométrique de l'hélicioïde est constant, donc on a :

$$\lambda(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad (3-95)$$

Mais
$$\lambda(x) = \frac{V + v(x)}{\omega \cdot r - u(x)} \quad (3-96)$$

D'où:
$$v(x) = \frac{\omega \cdot r - u(x)}{V + v(x)} u(x) \quad (3-97)$$

Chapitre 4DETERMINATION ET INTERPRETATION DES PERFORMANCESD'UNE HELICE D'AVION DE TYPE R3000 N°1

Pour calculer les performances d'une hélice, nous avons choisi pour modèle de comparaison un avion de la société PIERRE ROBIN (R3000 N°1) sur lequel est monté un moteur V6 dont les caractéristiques sont indiquées dans l'annexe 1, et pour type de profil, un profil N.A.C.A 16 [Ref.5].

Après une étude théorique, nous avons élaboré un programme de calcul (voir annexe 2) qui donne toutes les performances de l'hélice telles que la traction, le couple, les coefficients de traînée et de portance, etc....

Mais nous n'avons considéré, dans ce qui suit, que deux régimes de fonctionnement, le premier au point fixe et l'autre en vol de croisière, en manipulant les paramètres suivants :

- La vitesse d'avancement de l'avion.
- La vitesse de rotation de l'hélice.
- Le diamètre de l'hélice.
- L'altitude.

Remarque : Au point fixe, l'hélice tourne à une vitesse inférieure à celle correspondant à la puissance maximale du moteur.

4-1 Détermination du diamètre de l'hélice :

Les critères de choix d'un diamètre d'hélice sont :

- La hauteur libre au-dessus du sol, qui doit être suffisante pour éviter les dommages aux extrémités de l'hélice;
- L'espacement nécessaire, sur un avion multimoteur, entre les hélices et entre chaque hélice intérieure et le fuselage;
- La résistance mécanique des pales aux forces centrifuges et de flexion.
- La présence du fuselage ou d'autres corps de grandes dimensions immédiatement derrière l'hélice.
- Le rendement de l'hélice elle-même.

Si l'hélice tourne à la même vitesse que le vilebrequin du moteur, les extrémités des pales de l'hélice sont susceptibles d'atteindre ou même de dépasser la vitesse du son (environ 340 m/s). Cela se traduit par des effets de compressibilité qui provoquent une augmentation du couple résistant et une diminution de la traction, en d'autres termes, une perte de rendement. De plus, la vitesse au bout de la pale dépend non seulement de la vitesse de rotation mais aussi de la vitesse de translation de l'avion, ainsi que du diamètre de l'hélice.

Elle est donnée par:

$$W^2 = V^2 + (\pi \cdot N \cdot D)^2 \quad (2-113)$$

$$D = \frac{\sqrt{W^2 - V^2}}{N \cdot \pi} \quad (2-114)$$

Dans notre cas:

ω doit être inférieure à 340 m/s

V peut atteindre 67 m/s

N peut atteindre 54 trs/s

Donc:

$$D_{\max} = 1,346 \text{ m}$$

Pour des raisons d'encombrement, de trainée minimum et d'efforts transmis à la cellule, il est nécessaire que l'hélice soit la plus petite possible, d'où nous prendrons pour nos calculs un diamètre $D = 1.2 \text{ m}$.

4-2 Interprétation des résultats :

Les résultats obtenus sont représentés sous formes graphiques interprétant les variations des performances le long de la pale, et ceci pour plusieurs calages et pour différents nombres de pales.

4-2-1 Le point fixe:

Dans ce qui suit, la vitesse d'avancement de l'avion est nulle et la vitesse de rotation de l'hélice est fixée à 2600 tr/mn.

Les courbes des figures (4-1) et (4-2) représentent respectivement les variations des vitesses induites tangentielle et axiales qui pareillement décroissent en partant du pied vers l'extrémité de la pale, avec une légère variation sur l'intervalle $[0,3.R_0; 0,9.R_0]$ qui au delà duquel elle s'accroît. A noter que la variation de l'angle de calage est peu considérable, tandis que l'augmentation du nombre de pales entraîne le déplacement des courbes vers le bas.

Les courbes de la figure (4-3) expriment l'accroissement de la vitesse aérodynamique le long de la pale, avec une légère variation vers le bout due à l'augmentation de l'angle de calage. Tandis que l'augmentation du nombre de pales entraîne le déplacement des courbes vers le haut.

Les courbes de la figure (4-4) montrent que l'angle d'incidence croît du pied jusqu'à un certain maximum situé à $r = 0,2.R_0$, puis il décroît jusqu'à l'extrémité de la pale, et l'augmentation de l'angle de calage fait légèrement pivoter les courbes autour du point $r = 0,8.R_0$. Tandis que l'augmentation du nombre de pales fait déplacer les courbes vers le bas.

Les courbes de la figure (4-5) montrent que l'angle aérodynamique diminue du pied jusqu'à un certain minimum situé à $r = 0,8.R_0$, puis il réaccroît jusqu'à l'extrémité de la pale, et l'augmentation de l'angle de calage ainsi que celle du nombre de pales entraînent le déplacement des courbes vers le haut.

Les courbes de la figure (4-6) montrent que la circulation Γ est maximale au voisinage de $r = 0,4.R_0$ pour $p = 2$ et de $r = 0,3.R_0$ pour $p = 3$, et elle est minimale vers l'extrémité de la pale. A noter que l'augmentation de l'angle de calage fait légèrement pivoter les courbes autour des points $r = 0,8.R_0$ ($p = 2$) et $r = 0,6.R_0$ ($p = 3$), et que l'augmentation du nombre de pales fait déplacer les courbes vers le bas.

Les courbes des figures (4-7) et (4-8) montrent respectivement que le couple et la traction élémentaires sont maximum au point $r = 0,6.R_0$ pour $p = 2$ et au point $r = 0,5.R_0$ pour $p = 3$, et que l'augmentation de l'angle de calage a une faible influence sur leurs allures. Tandis que l'augmentation du nombre de pales les fait déplacer vers le bas.

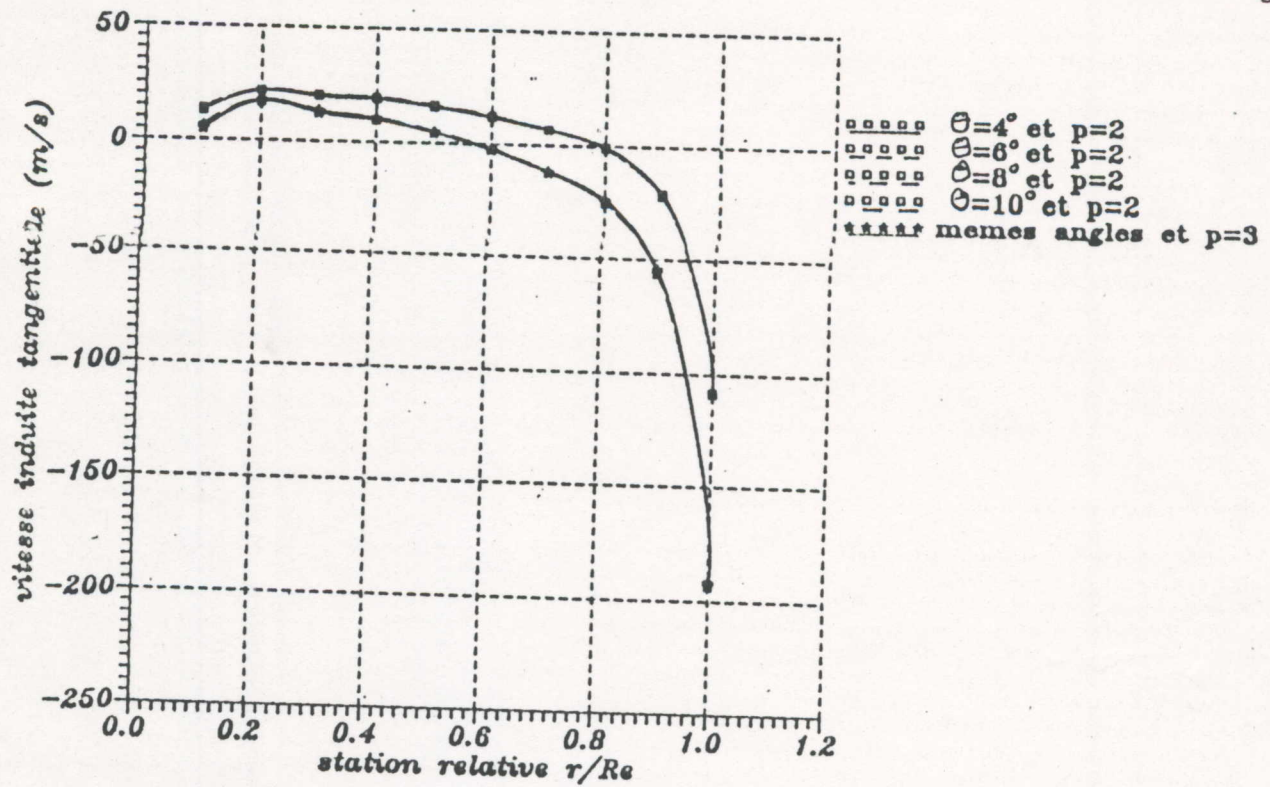


Figure (4.1): Variation de la vitesse induite tangentielle le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

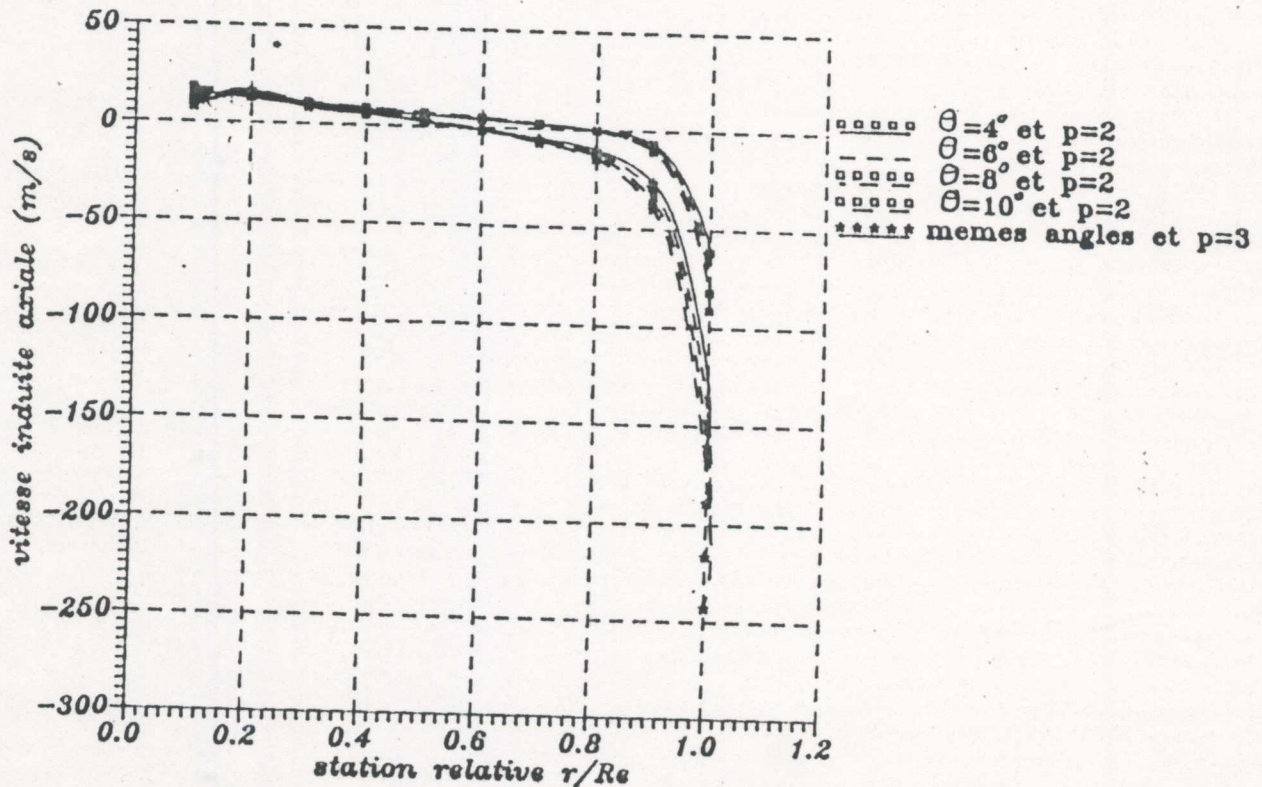


Figure (4.2): Variation de la vitesse axiale induite le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

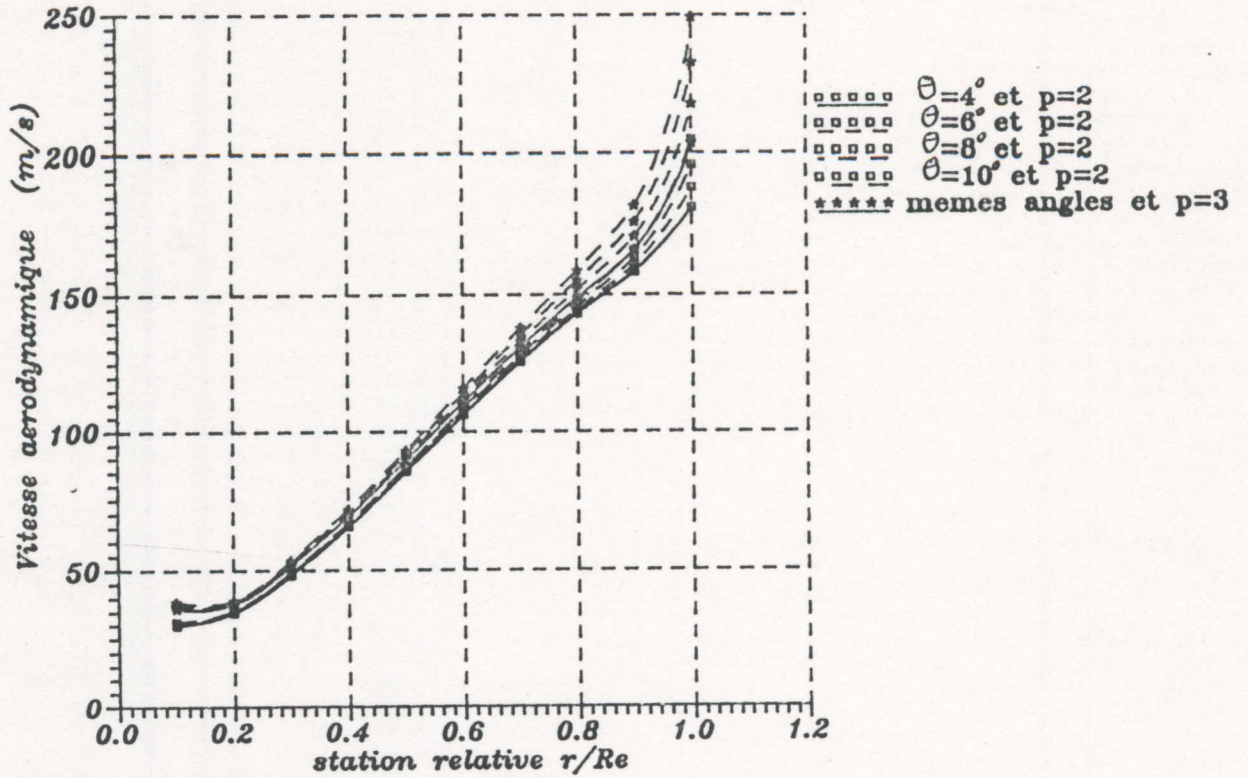


Figure (4.3): Variation de la vitesse aerodynamique le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

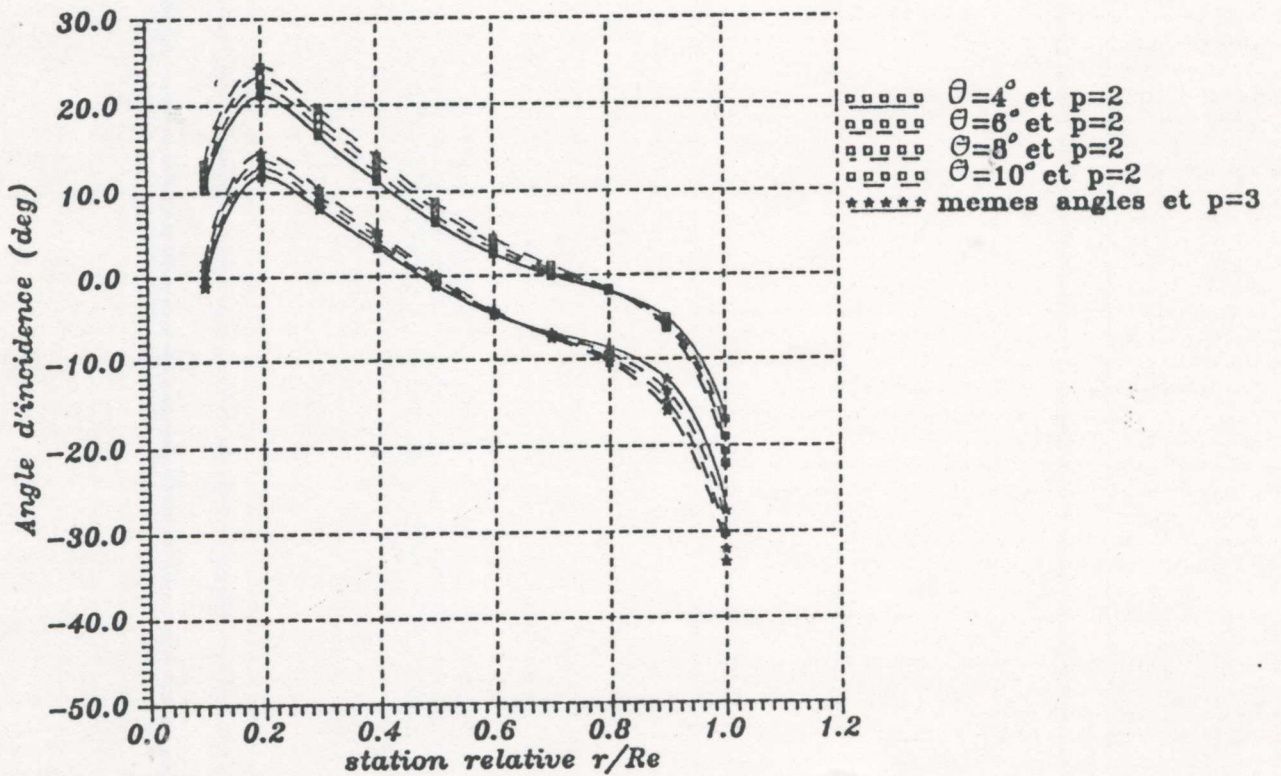


Figure (4.4): Variation de l'angle d'incidence le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

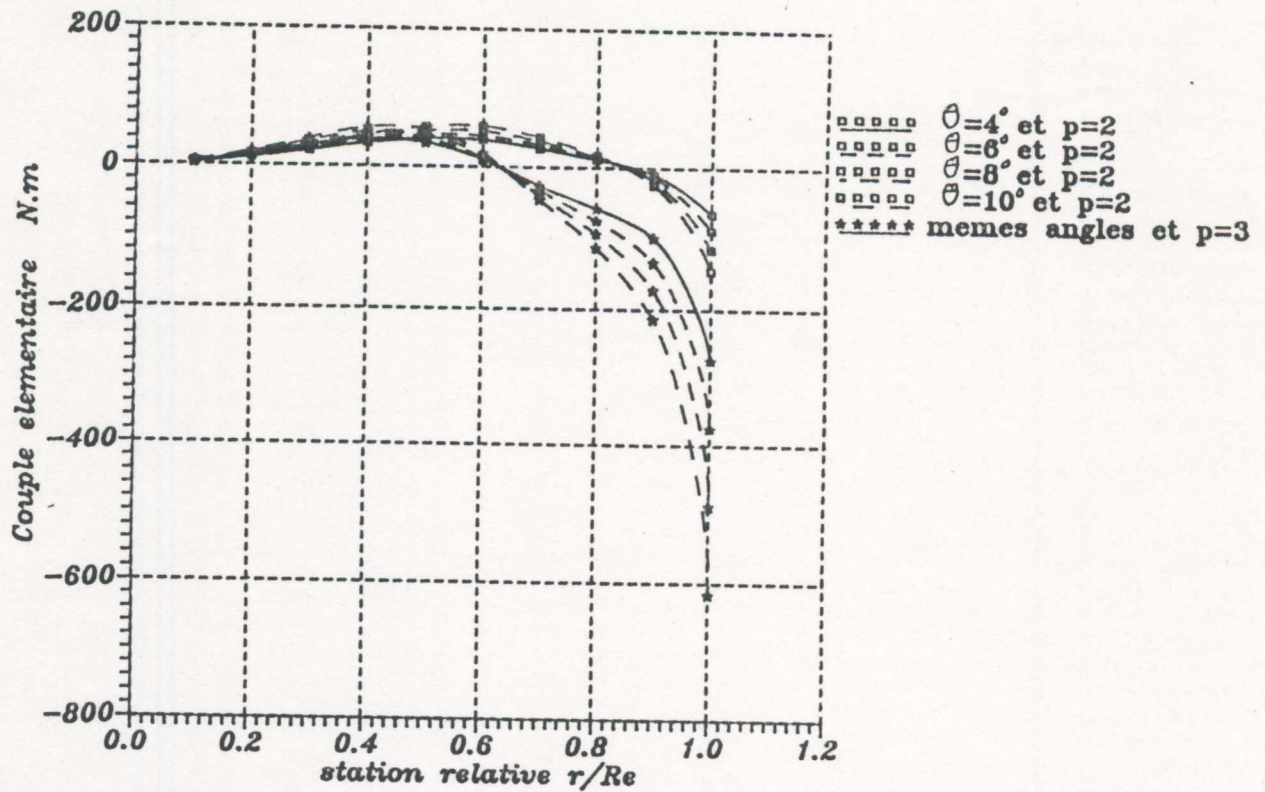


Figure (4-7): Variation du couple élémentaire le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

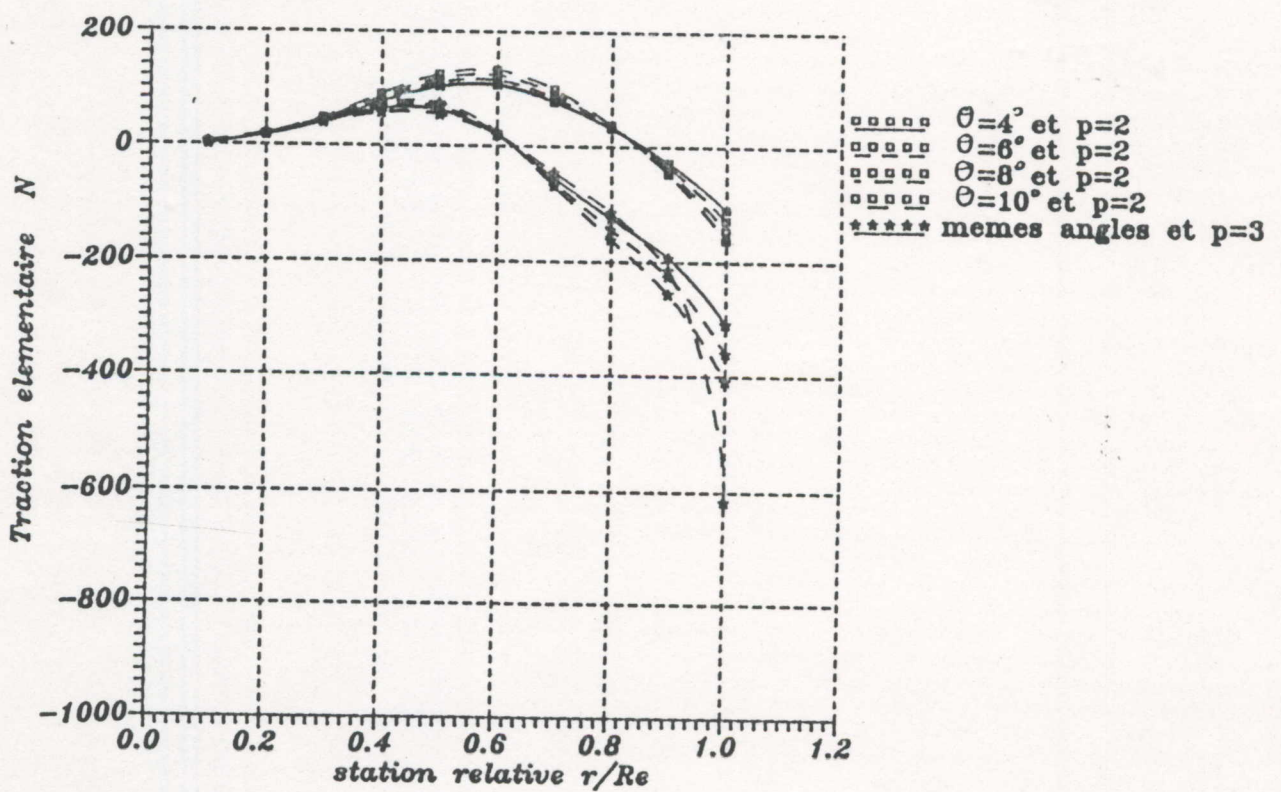


Figure (4-8): Variation de la traction élémentaire le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

Les courbes des figures (4-9) et (4-10) représentent les variations des coefficients de portance et de trainée qui sont maximum au point $r = 0,2.R_0$ et minimum vers l'extrémité de la pale. L'augmentation de l'angle de calage influe légèrement sur leurs allures, alors que l'augmentation du nombre de pales les fait déplacer vers le bas.

4-1-2 Vol de croisière :

Pour calculer les performances d'une hélice en vol de croisière, nous prendrons de nouvelles valeurs pour les paramètres ci-dessous :

- Vitesse d'avancement $V = 45$ m/s;
- Vitesse de rotation $\omega = 3100$ tr/min
- Altitude de vol $z = 1000$ m.

Les courbes de la figure (4-11) représentent la variation de la vitesse tangentielle induite, décroissante du moyeu vers l'extrémité de la pale. L'augmentation de l'angle de calage ainsi que celle du nombre de pales entraînent le déplacement des courbes vers le haut.

Les courbes de la figure (4-12) représentent l'accroissement de la vitesse axiale induite, du moyeu jusqu'à un certain maximum situé au voisinage de $r = 0,8.R_0$, suivi d'un décroissement accentué jusqu'à l'extrémité de la pale. L'augmentation de l'angle de calage ainsi que celle du nombre de pale entraînent le déplacement des courbes vers le haut.

Les courbes de la figure (4-13) montrent l'accroissement de la vitesse aérodynamique du moyeu vers l'extrémité de la pale, et la légère influence du nombre de pales sur les courbes. Par contre, l'augmentation de l'angle de calage n'a aucun effet sur leur variation.

Les courbes de la figure (4-14) représentent l'accroissement de l'angle d'incidence, du moyeu jusqu'à un certain maximum situé au voisinage de $r = 0,3.R_0$, suivi d'un décroissement jusqu'à l'extrémité de la pale. L'augmentation de l'angle de calage et celle du nombre de pale entraînent respectivement le déplacement des courbes vers le haut et vers le bas.

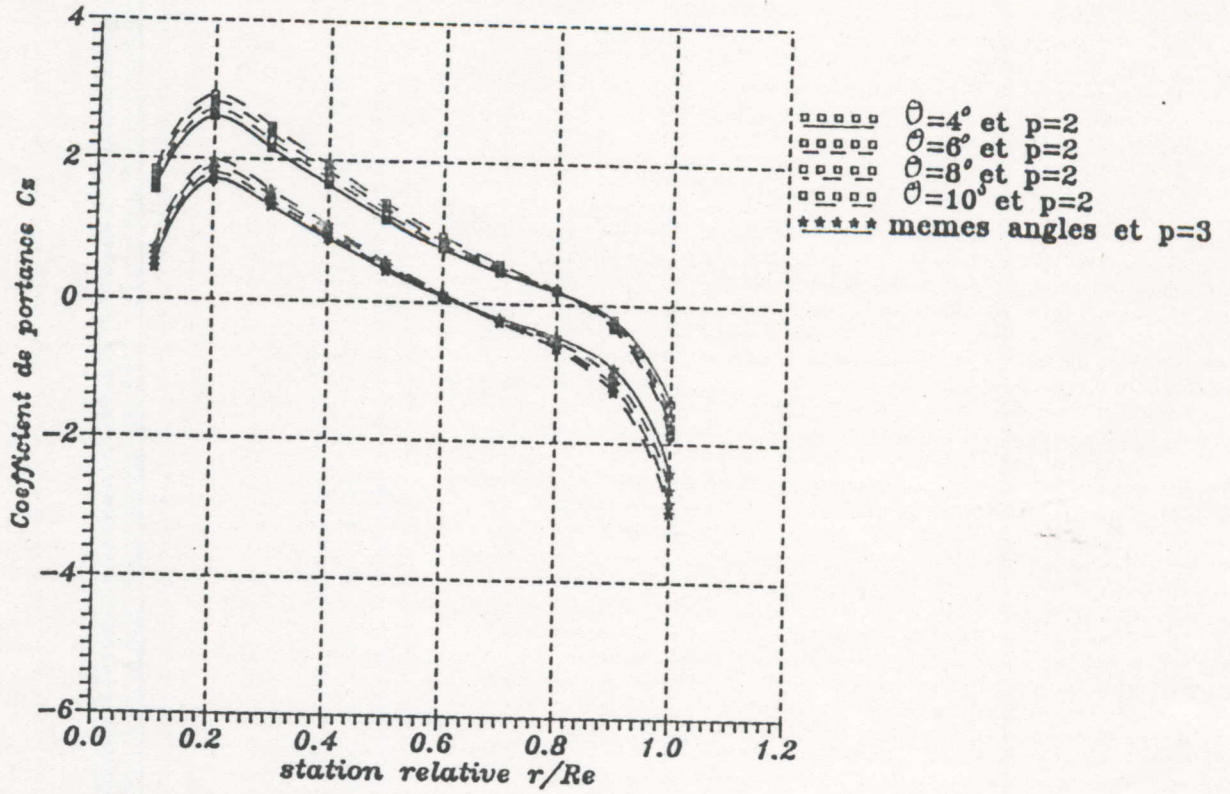


Figure (4.9): Variation du coefficient de portance C_z le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

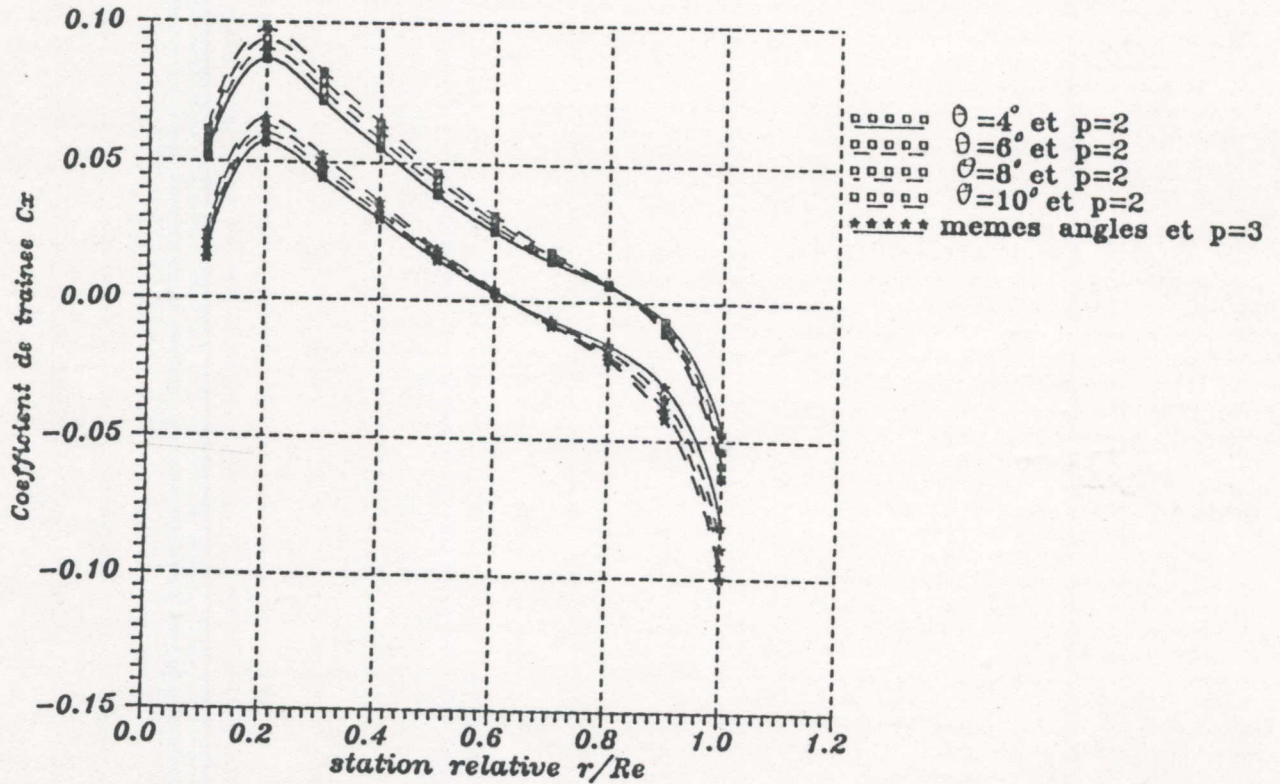


Figure (4.10): Variation du coefficient de traînée le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (au point fixe).

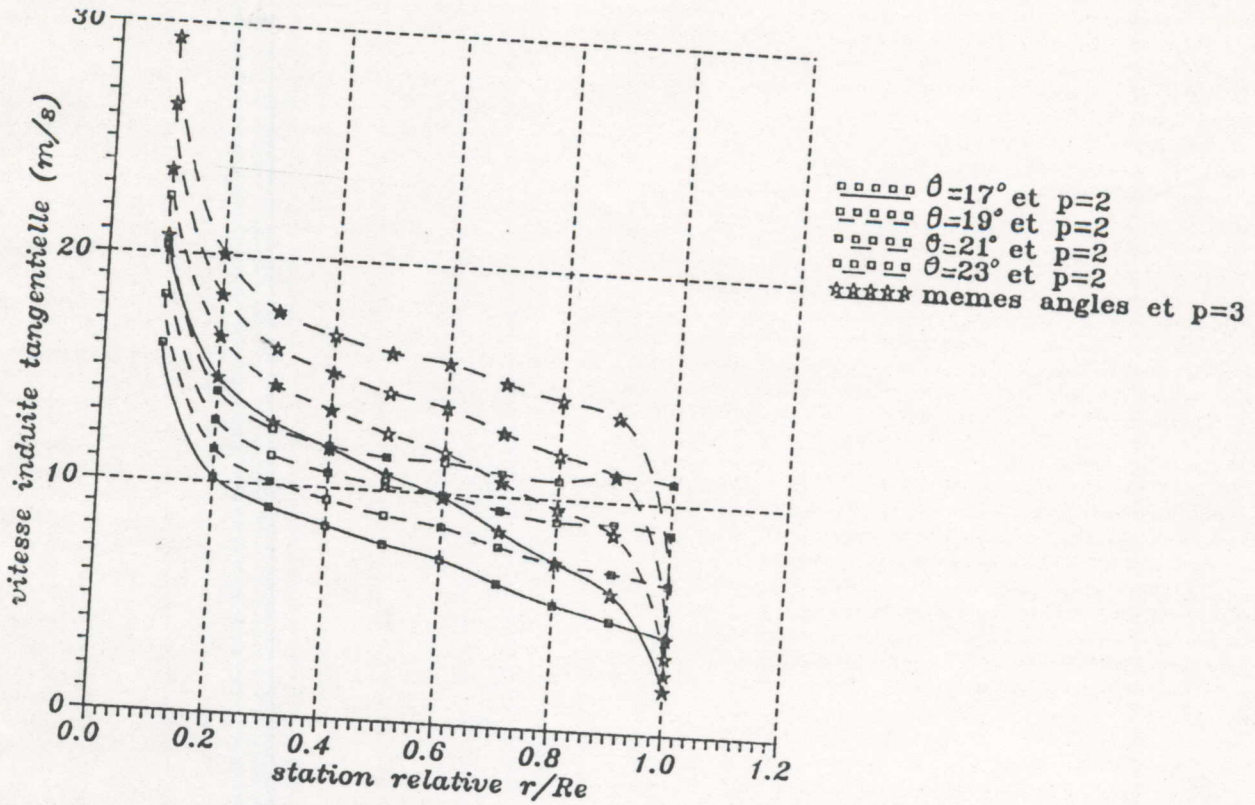


Figure (4.11): Variation de la vitesse tangentielle induite le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).

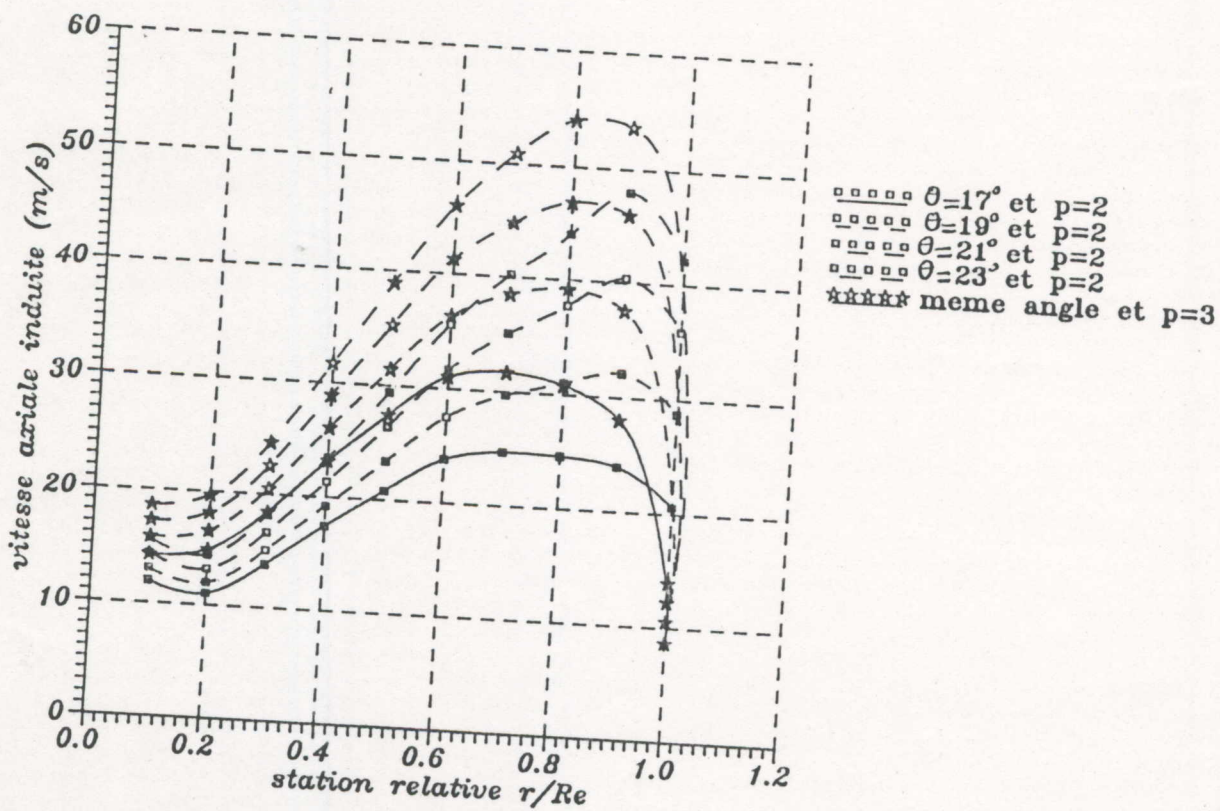


Figure (4.12): Variation de la vitesse axiale induite le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).

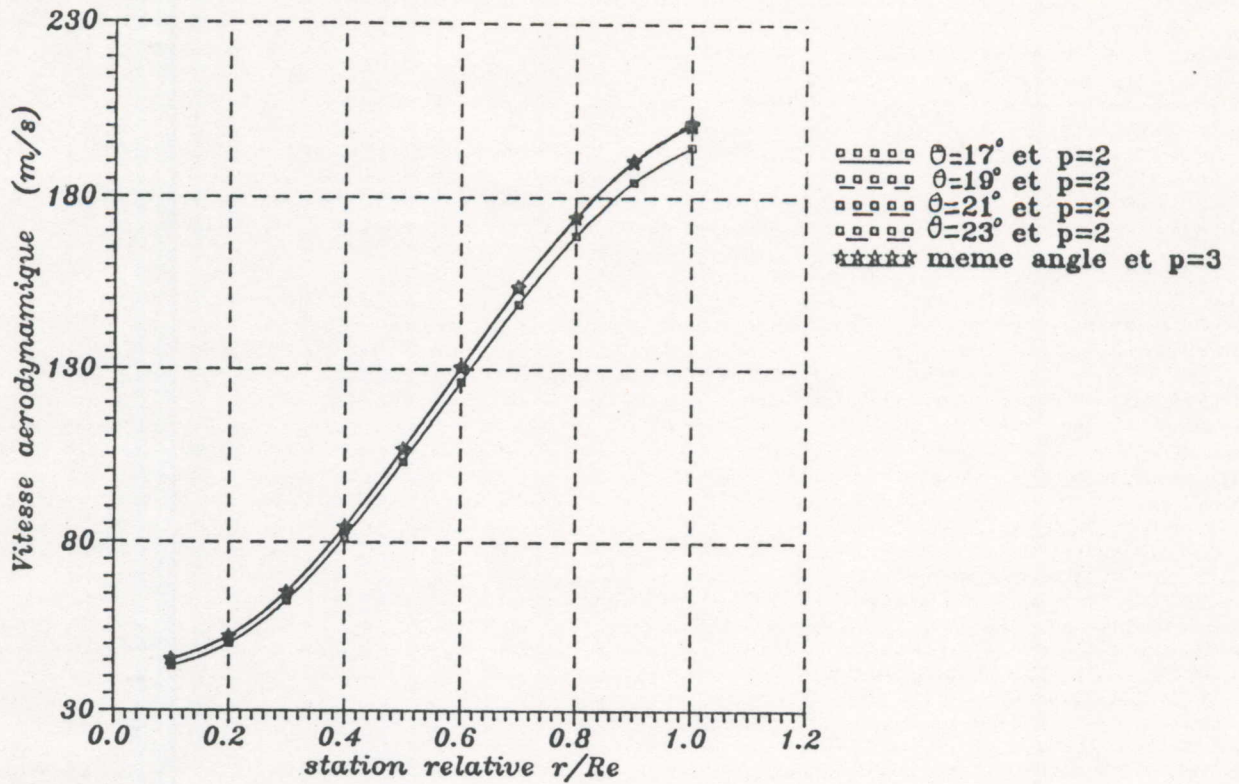


Figure (4.13): Variation de la vitesse aerodynamique le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisiere).

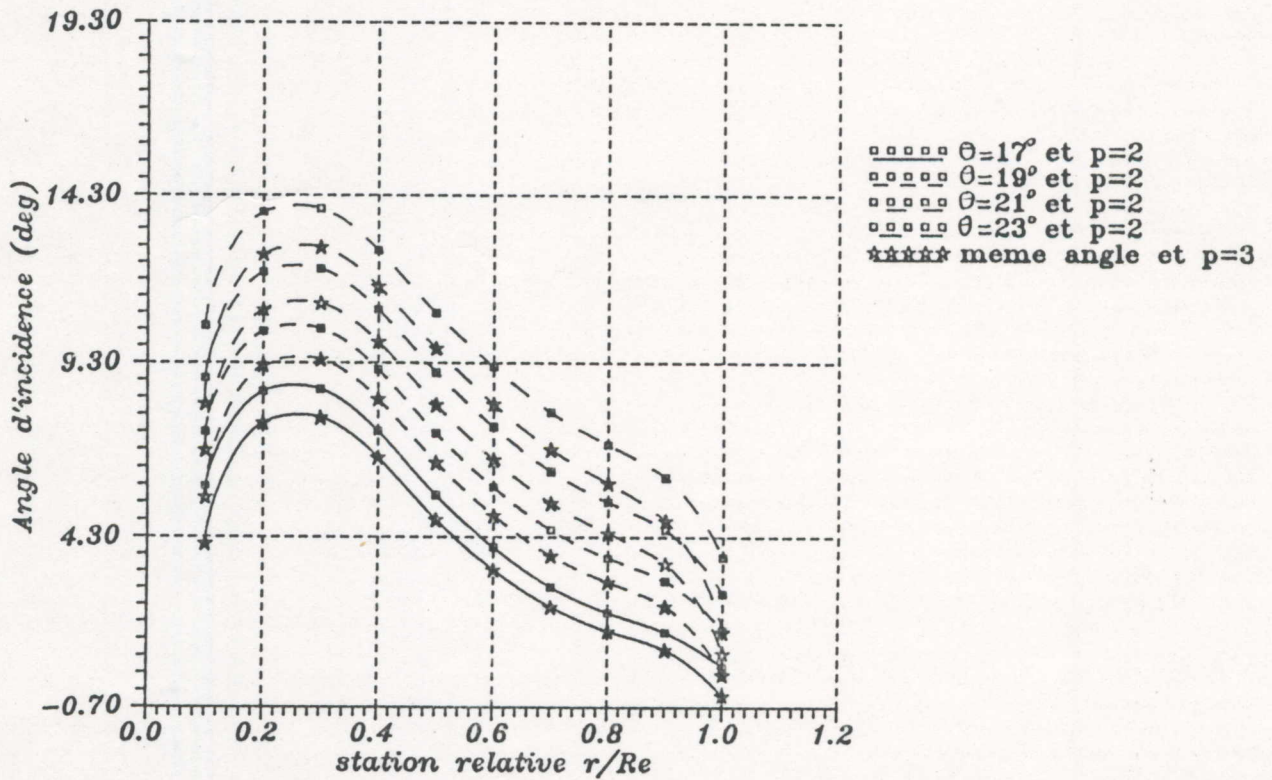


Figure (4.14): Variation de l'angle d'incidence le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisiere).

Les courbes de la figure (4-15) représentent la variation de l'angle aérodynamique, décroissante du moyeu vers l'extrémité de la pale. L'augmentation de l'angle de calage ainsi que celle du nombre de pales entraînent le déplacement des courbes vers le haut.

Les courbes de la figure (4-16) représentent l'accroissement de la circulation, du moyeu jusqu'à un certain maximum situé au voisinage de $r = 0,6.R_0$, suivi d'un décroissement jusqu'à l'extrémité de la pale. L'augmentation de l'angle de calage ainsi que celle du nombre de pale entraînent leur déplacement vers le haut.

Les courbes des figures (4-17) et (4-18) représentent respectivement l'accroissement du couple et de la traction élémentaires, du moyeu jusqu'à certains maximums situés aux voisinages de $r = 0,7.R_0$ (couple) et de $r = 0,6.R_0$ (traction), suivi d'un décroissement jusqu'à l'extrémité de la pale. L'augmentation de l'angle de calage ainsi que celle du nombre de pales entraînent leur déplacement vers le haut.

Les courbes des figures (4-19) et (4-20) montrent l'existence d'un maximum, pour les coefficients de portance et de trainée respectivement, situé au voisinage de $r = 0,3.R_0$. L'augmentation de l'angle de calage ainsi que celle du nombre de pales entraînent le déplacement des courbes vers le haut.

4-3 Conclusion:

D'après les résultats obtenus, on conclue, qu'au point fixe, l'augmentation de l'angle de calage, pour une hélice bipalée, ne peut dépasser une certaine valeur $\theta = 4^\circ$ sans nuire aux performances de l'hélice, mais l'augmentation du nombre de pales (hélice tripalée) pousse cette limite jusqu'à une valeur de $\theta = 6^\circ$, qui au-delà de laquelle, le couple résistant augmente plus que la traction, d'où une diminution du rendement de l'hélice (voir tableaux 1 et 2). Par contre, en vol de croisière, l'angle de calage peut atteindre une valeur d'environ $\theta = 19^\circ$, pour les deux types d'hélice considérés.

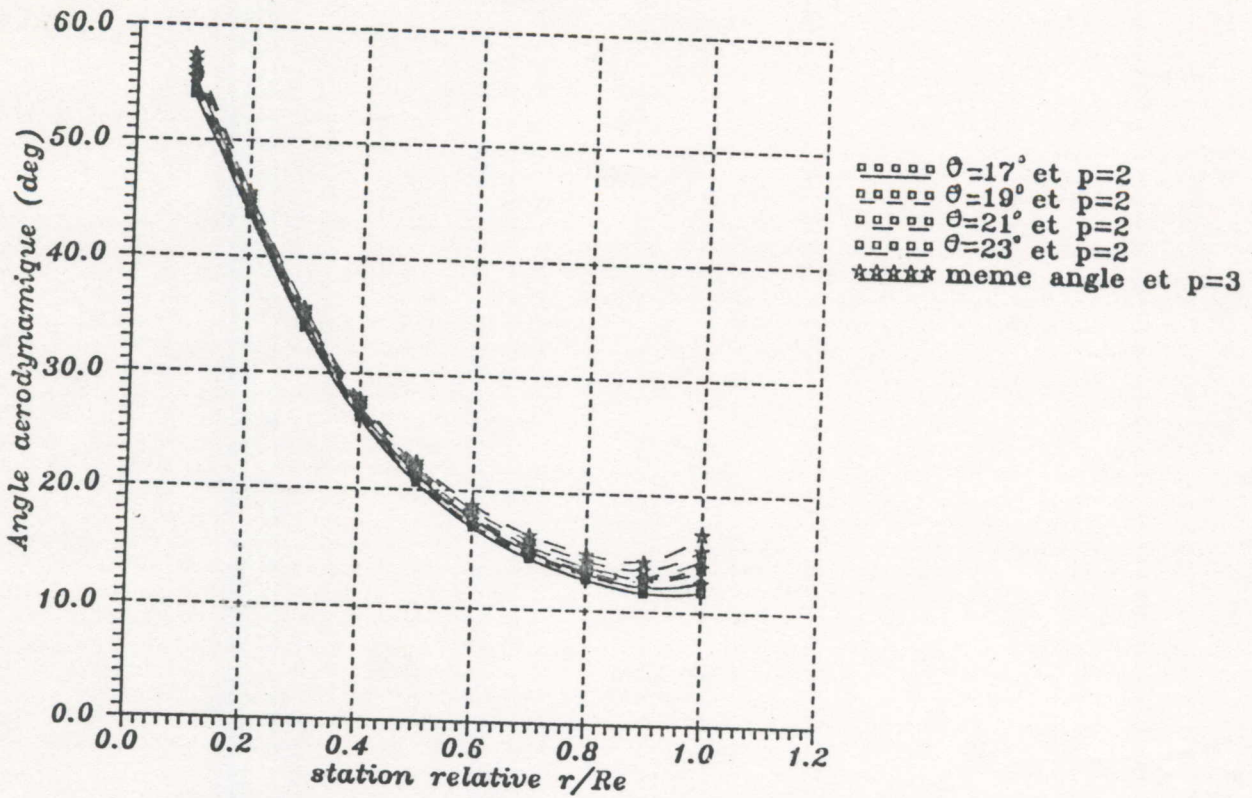


Figure (4-15): Variation de l'angle aerodynamique le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisiere).

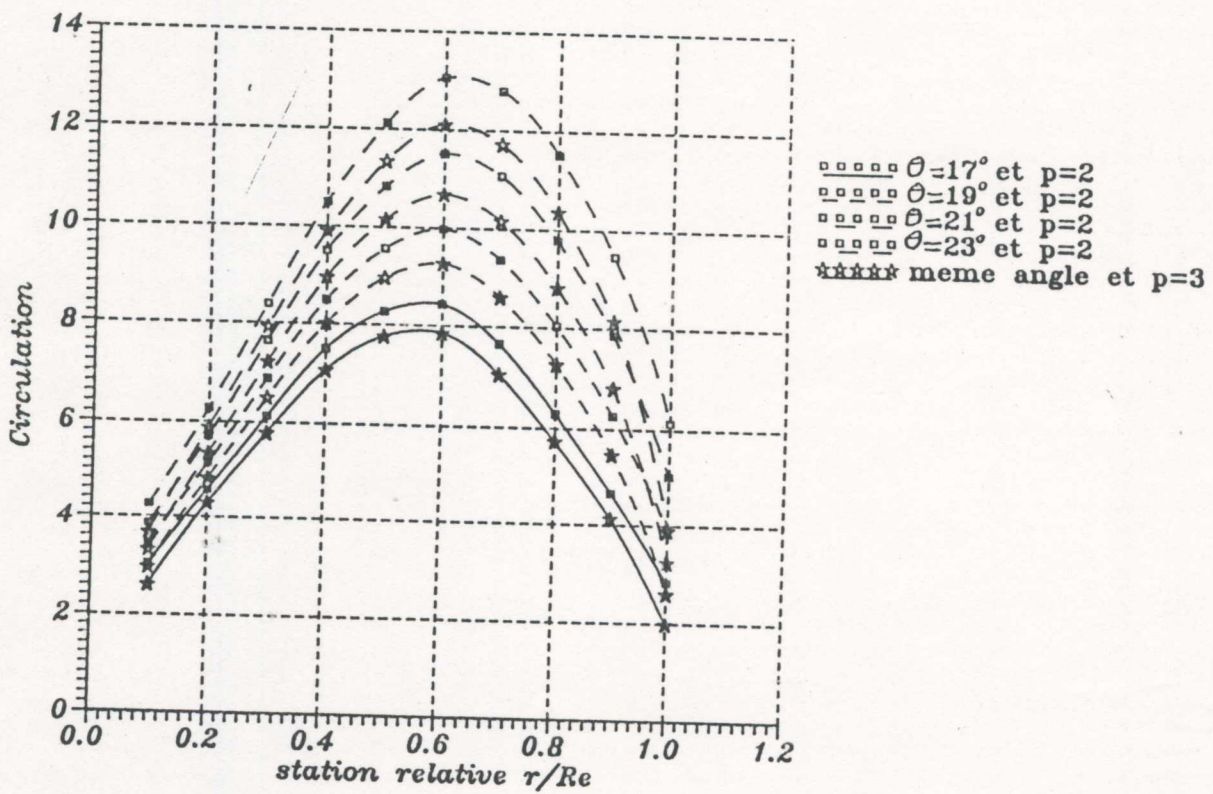


Figure (4-16): Variation de la circulation le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisiere).

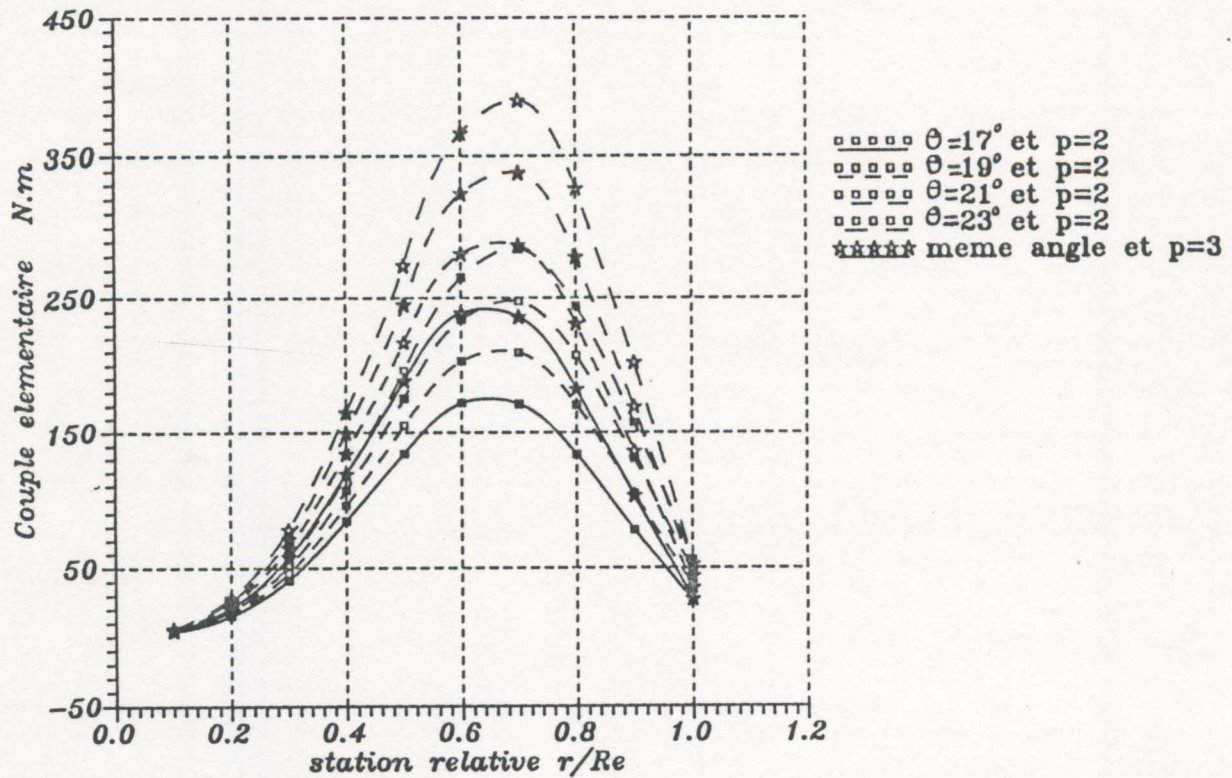


Figure (4-17): Variation du couple élémentaire le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).

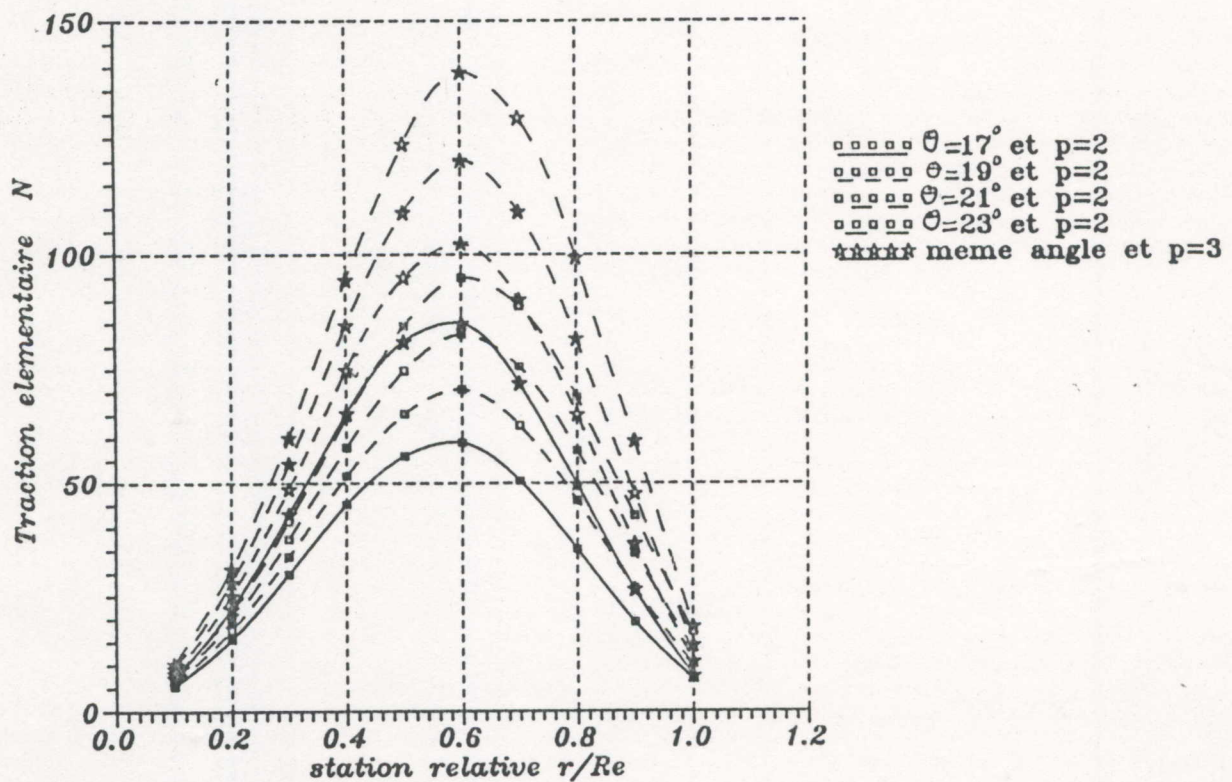


Figure (4-18): Variation de la traction élémentaire le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisière).

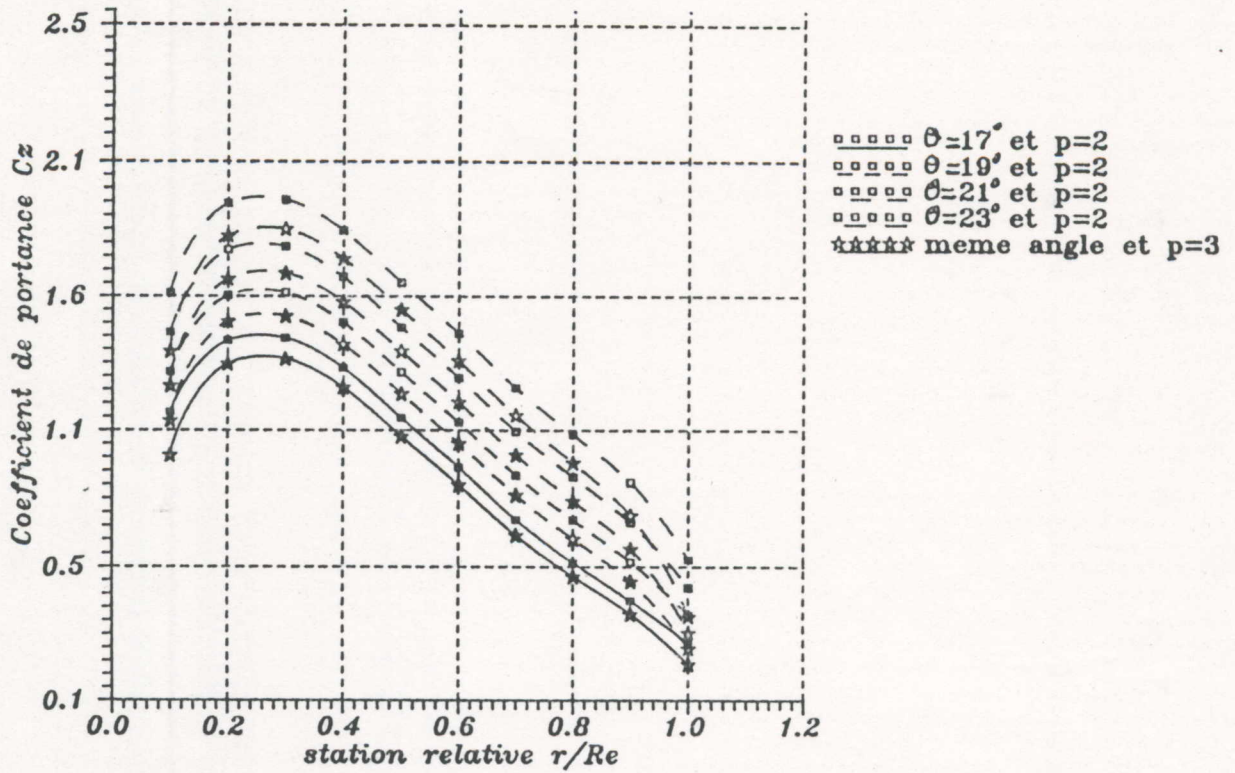


Figure (4-19): Variation du coefficient de portance C_z le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisiere).

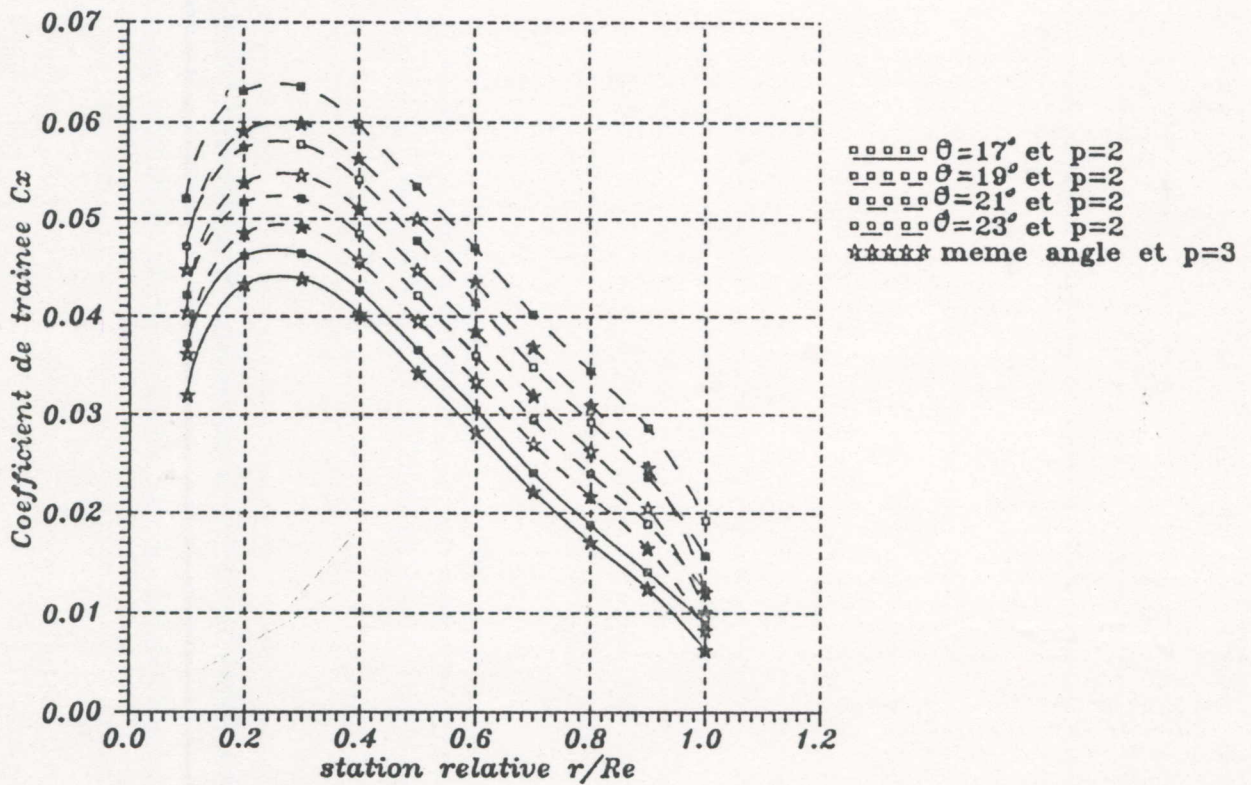


Figure (4-20): Variation du coefficient de trainee C_x le long de la pale en fonction de l'angle de calage et du nombre de pales (en vol de croisiere).

Résultat obtenue aux point fixe:

Nombre de pale	angle de calage	rendement	couple résistant totale [N]	traction totale [N]
2	4°	0.63	21	360
	6°	0.57	28	430
	8°	0.52	35	510
	10°	0.48	44	580
3	4°	0.64	29	500
	6°	0.52	39	550
	8°	0.45	48	600
	10°	0.41	57	640

TABLEAU 1 : Variation du rendement, de la traction et du couple résistant globaux en fonction de l'angle de calge et du nombre de pales (au point fixe).

Résultat obtenue en vol de croisière :

Nombre de pale	angle de calage	rendement	couple résistant totale [N]	traction totale [N]
2	17°	0.81	110	860
	19°	0.80	140	1000
	21°	0.78	160	1200
	23°	0.76	190	1400
3	17°	0.79	160	1200
	19°	0.76	190	1400
	21°	0.74	230	1700
	23°	0.72	280	1900

TABLEAU 2 : Variation du rendement, de la traction et du couple résistant globaux en fonction de l'angle de calge et du nombre de pales (en vol de croisière).

ETUDE DE LA MECANIQUE DE LA PALE

5-1 Définitions:

Nous savons que pendant la rotation de l'hélice autour de l'axe $\vec{o}z$, chacune de ses pales est soumise à trois types d'efforts:

- Effort d'origine centrifuge ou bien dynamique.
- Effort d'origine aérodynamique.
- Effort de la pesanteur

Puisque l'hélice est en matériaux composites, l'effort de la pesanteur est négligeable devant les deux autres efforts.

Une approximation habituelle, en matière de calcul de l'hélice, fait considérer l'axe d'inertie principal minimal comme étant l'axe parallèle à la corde (voir fig :5-1). Donc nous définissons les axes principaux d'inertie :

$\vec{G}y$: axe parallèle à la corde locale.

$\vec{G}z$: axe perpendiculaire à la corde locale.

$\vec{G}x$: axe parallèle à l'axe de la pale $\vec{o}x$.

5-2 Calcul des efforts d'origine centrifuge:

Soit un point M, situé au rayon [r] d'une tranche de pale, qui exerce en ce point une force centrifuge élémentaire $\vec{\delta F}_c(M)$.

$$\boxed{\vec{\delta F}_c(M) = - \vec{r}^o(M) \cdot dm} \quad (5-1)$$

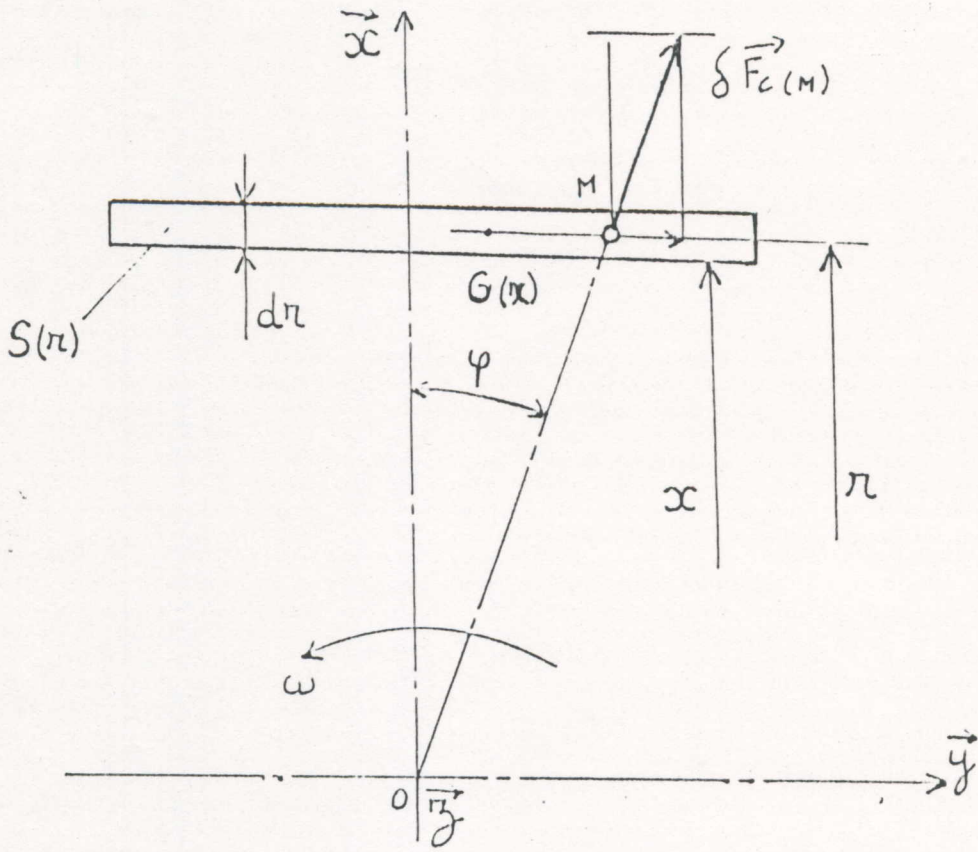
Soient: (o) un repère fixe.

(1) un repère lié à l'avion, en mouvement uniforme de translation par rapport au repère fixe.

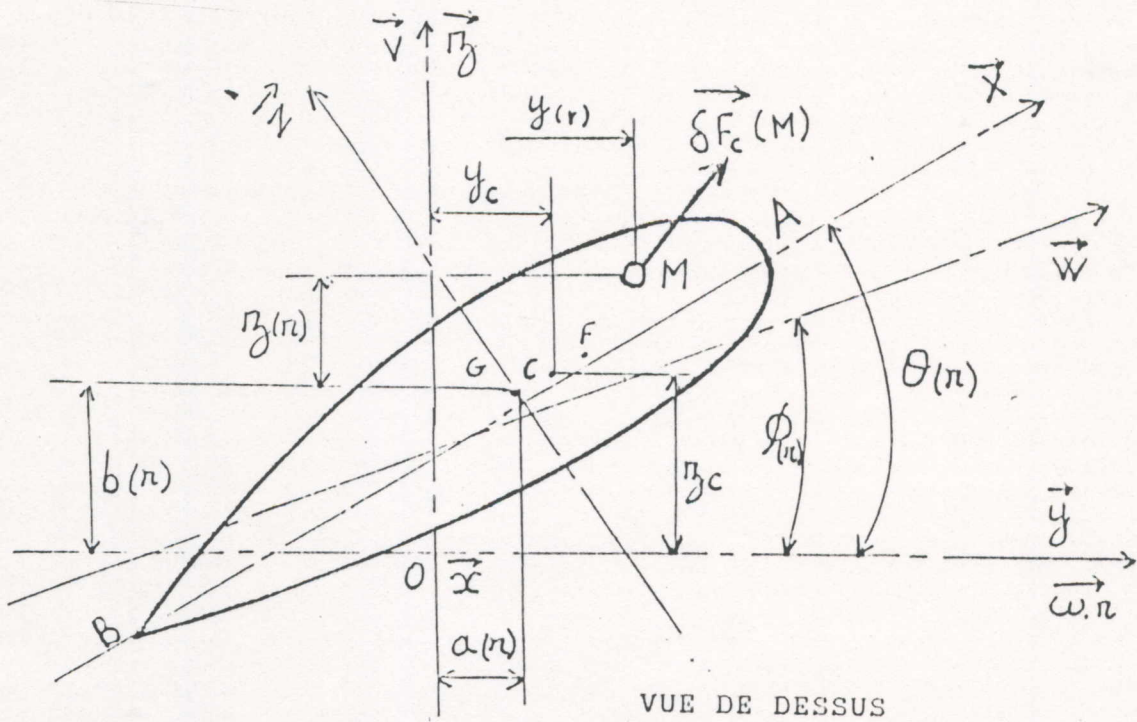
(s) le repère lié à l'avion.

$$\vec{r}^o(M) = \frac{d\vec{V}^o(M)}{dt} \quad (5-2)$$

$$\vec{V}^o(M) = \frac{d\vec{OM}_s}{dt} + \vec{\omega}^o \wedge \vec{OM} \quad (5-3)$$



VUE DE FACE .



VUE DE DESSUS

FIGURE (5-1) : REPRESENTATION GRAPHIQUE DE L'EFFORT CENTRIFUGE.

$$\vec{OM} = \begin{cases} r \\ y \\ z \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_s^O = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \omega \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad (5-4)$$

Donc:

$$\vec{\Gamma}^O(M) = \begin{cases} -\omega^2 \cdot r \\ -\omega^2 \cdot y \\ 0 \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad (5-5)$$

L'effort centrifuge élémentaire devient:

$$\vec{\delta F}_C(M) = \begin{cases} r \cdot \omega^2 \cdot dm \\ y \cdot \omega^2 \cdot dm \\ 0 \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad (5-6)$$

dm: élément de masse

$$dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot ds \cdot dr \quad (5-7)$$

Finalement:

$$\vec{\delta F}_C(M) = \begin{cases} \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot ds \cdot dr \\ \rho \cdot \omega^2 \cdot y \cdot ds \cdot dr \\ 0 \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad (5-8)$$

La force centrifuge \vec{dF}_C qui s'exerce sur la section $S(r)$.

$$\vec{dF}_C(S) = \begin{cases} \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr \int \int_S ds \\ \rho \cdot \omega^2 \cdot dr \cdot \int \int_S y \cdot ds \\ 0 \end{cases} \quad (5-9)$$

$$\text{Or :} \quad \int \int_S ds = S(r) \quad (5-10)$$

Avec $S(r)$, l'aire de la section considérée.

$$\iint_S y \cdot ds = S(r) \cdot y(G) = S(r) \cdot a(r) \quad (5-11)$$

$$\vec{dF}_c(S) = \begin{cases} \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot r \cdot dr \\ \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot a(r) \cdot dr \\ 0 \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad (5-12)$$

La force centrifuge s'exerçant sur une section distante d'une valeur x de l'axe de l'hélice :

$$\vec{F}_c(x) = \begin{cases} \int_x^{RE} \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot r \cdot dr \\ \int_x^{RE} \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot a(r) \cdot dr \\ 0 \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad (5-13)$$

Remarque : La force centrifuge se compose de deux types d'efforts :

- effort normal :

$$\int_x^{RE} \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot r \cdot dr \quad (5-14)$$

- effort tranchant :

$$\int_x^{RE} \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot a(r) \cdot dr \quad (5-15)$$

5-2-1 Calcul des moments dus aux forces centrifuges :

Le moment élémentaire $\vec{\delta M}_c(G)$, créé par la force centrifuge élémentaire $\vec{\delta F}_c(M)$ au centre de gravité G , s'écrit comme suit :

$$\vec{\delta M}_c(G) = \vec{G}(x)M(r) \wedge \vec{\delta F}_c(M) \quad (5-16)$$

Les coordonnées des différents vecteurs sont :

$$\vec{\delta F}_c(M) = \begin{cases} \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot ds \cdot dr \\ \rho \cdot \omega^2 \cdot y \cdot ds \cdot dr \\ 0 \\ \text{oxyz} \end{cases} \quad (5-17)$$

$$\vec{OM}(r) = \begin{cases} r \\ y \\ z \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{OG}(x) = \begin{cases} x \\ a(x) \\ b(x) \end{cases} \quad (5-18)$$

$$\delta \vec{M}_c(G) = \begin{cases} r-x \\ y-a(x) \\ z-b(x) \end{cases}_{\text{xyz}} \wedge \begin{cases} \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot ds \cdot dr \\ \rho \cdot \omega^2 \cdot y \cdot ds \cdot dr \\ 0 \end{cases}_{\text{xyz}} = \begin{cases} \delta M_{x_c}(G) \\ \delta M_{y_c}(G) \\ \delta M_{z_c}(G) \end{cases} \quad (5-19)$$

On remarque que la force centrifuge crée les moments élémentaires suivants :

- un moment de torsion suivant l'axe \vec{ox} : $\delta M_{x_c}(G)$
- un moment de flexion suivant l'axe \vec{oy} : $\delta M_{y_c}(G)$
- un moment de flexion suivant l'axe \vec{oz} : $\delta M_{z_c}(G)$

5-2-2 Calcul du moment de torsion dû aux forces centrifuges:

D'après le paragraphe (5-2-1), le moment de torsion $[\delta M_c^t(G)]$ dû aux forces centrifuges est la projection du moment $[\delta M_c(G)]$ sur l'axe \vec{ox} , et il est défini par:

$$\delta M_c^t(G) = (b(x) - z) \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot y \cdot ds \cdot dr \quad (5-20)$$

Après intégration de l'équation (5-20) sur toute la section ds , on obtient:

$$dM_c^t(G) = \int_s \int (b(x) - z) \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot y \cdot ds \cdot dr \quad (5-21)$$

$$\begin{aligned} dM_c^t(G) &= \int_s \int b(x) \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot y \cdot ds \cdot dr - \int_s \int z \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot y \cdot ds \cdot dr \\ &= b(x) \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot dr \cdot \int_s \int y \cdot ds - \omega^2 \cdot \rho \cdot dr \cdot \int_s \int y \cdot z \cdot ds \end{aligned} \quad (5-22)$$

Pour calculer l'intégrale $\int_s \int y \cdot z \cdot ds$, on se place dans le repère principal d'inertie du profil (G, x, y, z) , ceci en faisant apparaître les moments d'inertie principaux maximal et minimal (IM_{kr} et Im_{kr}).

Après changement de repère, on a:

$$\begin{cases} y = Y \cdot \cos\theta(x) - Z \cdot \sin\theta(x) + a(r) \\ z = Y \cdot \sin\theta(x) + Z \cdot \cos\theta(x) + b(r) \end{cases} \quad (5-23)$$

$$\iint_{\sigma} y \cdot z \cdot ds = \iint_{\sigma} [Y \cdot \cos\theta(x) - Z \cdot \sin\theta(x) + a(r)] \cdot [Y \cdot \sin\theta(x) + Z \cdot \cos\theta(x) + b(r)] \cdot dr \quad (5-24)$$

Remarque : les produits d'inertie sont nuls, car nous sommes dans le repère principal d'inertie.

Après calcul, l'intégrale se réduit à :

$$\iint_{\sigma} y \cdot z \cdot ds = \iint_{\sigma} [Y^2 - Z^2] \sin\theta(x) \cdot \cos\theta(x) + a(r) \cdot b(r) \cdot ds \quad (5-25)$$

En posant :

$$IM(r) = \iint_{\sigma} \rho \cdot Y^2 \cdot ds \quad (5-26)$$

$$Im(r) = \iint_{\sigma} \rho \cdot Z^2 \cdot ds \quad (5-27)$$

Finalement, le moment de torsion dû aux forces centrifuges sur l'ensemble de la section considérée est donné par :

$$dM_C^t(G) = \left[\rho \cdot \omega^2 \cdot a(r) \cdot S(r) \cdot [b(x) - b(r)] - \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sin 2\theta(x) \dots \right. \\ \left. \cdot [IM(r) - Im(r)] \right] \cdot dr \quad (5-28)$$

Le moment de torsion total sur chaque section de la pale est

$$M_C^t(a(x)) = \int_x^{Rc} \left[\rho \cdot \omega^2 \cdot a(r) \cdot S(r) \cdot [b(x) - b(r)] - \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sin 2\theta(x) \dots \right. \\ \left. \cdot [IM(r) - Im(r)] \right] \cdot dr \quad (5-29)$$

5-2-3 Calcul du moment de flexion dû aux forces centrifuges:

Les moments de flexion $[\delta \vec{M}_C^f(G)]$ sont les composantes de $[\delta \vec{M}_C^f(G)]$ portées par les axes \vec{o}_y et \vec{o}_z , c'est à dire :

$$\delta \vec{M}_C^f(G) = \begin{cases} 0 \\ [z-b(x)].\rho.\omega^2.r.ds.dr \\ [r-x].\rho.\omega^2.y.ds.dr - [y-ax].\rho.\omega^2.r.ds.dr \end{cases}_{\text{xyz}} \quad (5-30)$$

Les moments résultants de flexion sur une tranche de pale sont:

$$\vec{dM}_C^f(G) = \begin{cases} 0 \\ \iint_s \rho.\omega^2.[z-b(x)].r.ds.dr \\ \iint_s \rho.\omega^2.[r.a(x)-x.y]_y ds.dr \end{cases}_{\text{xyz}} \quad (5-31)$$

Or:

$$\iint_s ds = S(r) \quad (5-32)$$

$$\iint_s y.ds = y(\alpha).S(r) = S(r).a(r) \quad (5-33)$$

$$\iint_s z.ds = z(\alpha).S(r) = S(r).b(r) \quad (5-34)$$

Les moments de flexion sur une section considérée de la pale seront comme suit:

$$\vec{dM}_C^f(G) = \begin{cases} 0 \\ \rho.\omega^2.S(r).[b(r)-b(x)].r.dr \\ \rho.\omega^2.S(r).[r.a(x)-x.a(r)].dr \end{cases} \quad (5-35)$$

Les moments totaux de flexion sur chaque section considérée de la pale, à un rayon x , seront comme suit:

$$\vec{M}_C^f(G) = \begin{cases} 0 \\ RE \\ \int_x^{RE} \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot [b(r) - b(x)] \cdot r \cdot dr \\ x \\ RE \\ \int_x^{RE} \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot [r \cdot a(x) - x \cdot a(r)] \cdot dr \\ x \\ oxyz \end{cases} \quad (5-36)$$

5-3 Calcul des efforts aérodynamiques:

Soit un point P (centre de poussée) sur lequel s'exerce la résultante aérodynamique définie par (voir fig: 5-2):

$$\boxed{d\vec{R}_A = d\vec{R}_z + d\vec{R}_x} \quad (5-37)$$

$d\vec{R}_z$ est normale à la vitesse aérodynamique résultante locale $\vec{W}'(r)$ et a pour expression:

$$dR_z = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot C_z(r) \cdot dr \quad (5-38)$$

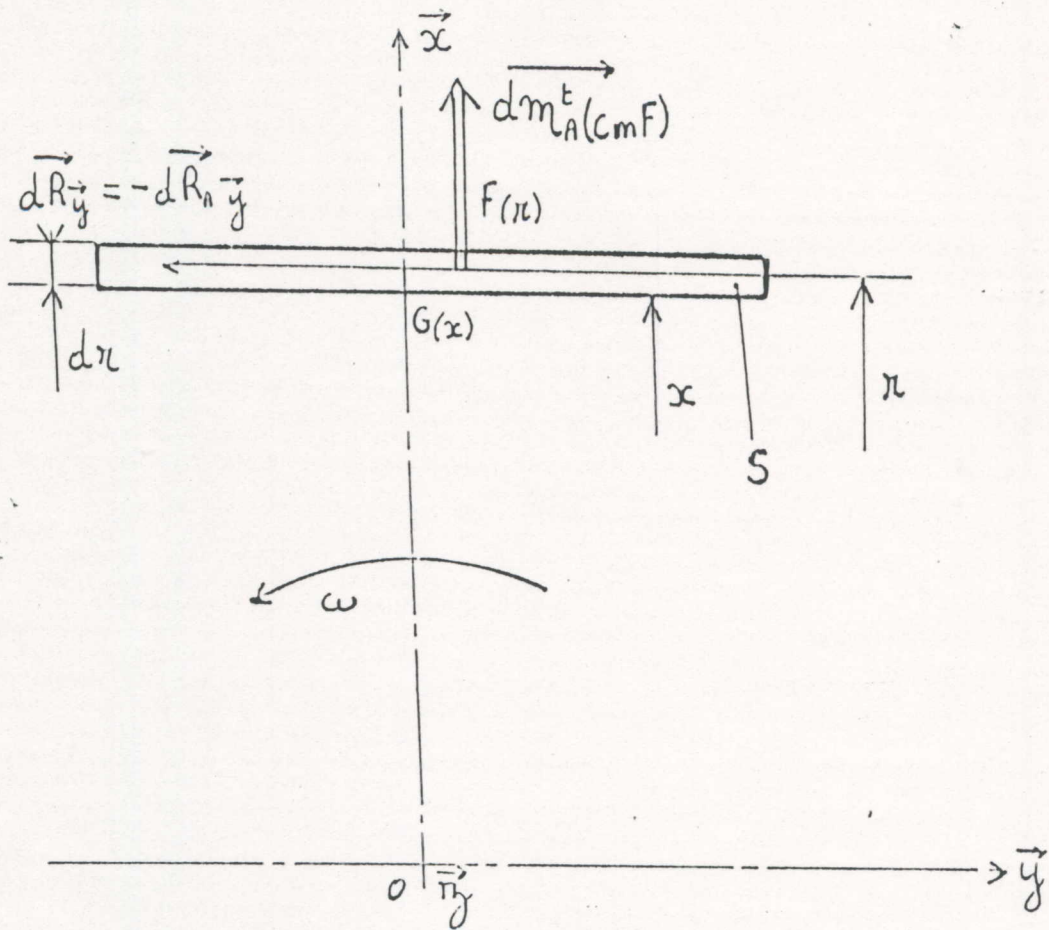
$$W'(r) = \sqrt{[V+v(r)]^2 + [\omega \cdot r - u(r)]^2} \quad (5-39)$$

$d\vec{R}_x$ est portée par l'axe de direction de la vitesse aérodynamique résultante locale $\vec{W}'(r)$ et a pour expression:

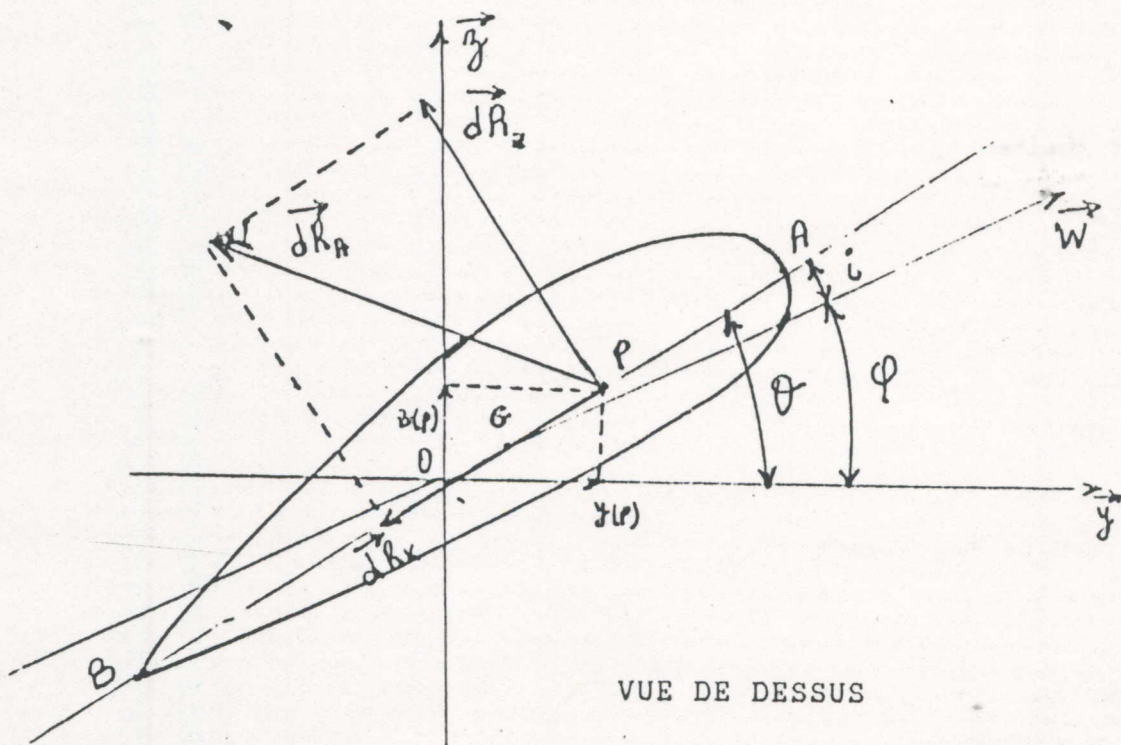
$$dR_x = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot C_x(r) \cdot dr \quad (5-40)$$

Si l'on considère l'angle $\phi(r) \hat{=} (\vec{W}'(r), oy)$ que fait la direction de $\vec{W}'(r)$ avec le plan de l'hélice, elle devient:

$$\vec{dR}_A \Big|_{oxyz} = \begin{cases} 0 \\ - [dR_z \cdot \sin\phi(r) + dR_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot dr \\ [dR_z \cdot \cos\phi(r) - dR_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot dr \end{cases} \quad (5-41)$$



VUE DE FACE



VUE DE DESSUS

FIGURE (5-2) : REPRESENTATION GRAPHIQUE DE L'EFFORT AERODYNAMIQUE.

La résultante aérodynamique s'exerçant sur une section de pale considérée sera donc:

$$\vec{R}_A(x) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{2} \int_x^{RE} \rho \cdot W^2(r) \cdot l(r) \cdot [C_z(r) \cdot \sin\phi(r) + C_x(r) \cdot \cos\phi(r)] \cdot dr \\ \frac{1}{2} \int_x^{RE} \rho \cdot W^2(r) \cdot l(r) \cdot [C_z(r) \cdot \cos\phi(r) - C_x(r) \cdot \sin\phi(r)] \cdot dr \end{cases} \quad (5-42)$$

5-3-1 Calcul des moments dûs aux forces aérodynamiques:

D'après R.HIRSH, le moment de tangage d'un profil est exprimé soit au foyer F, soit en son centre de gravité, ou au point du bord d'attaque; ils sont liés entre eux par des formules de changement de centres de moment.

Dans notre étude, le moment de tangage est exprimé par rapport au foyer F comme suit:

$$\vec{dm}_f = \frac{1}{2} \rho \cdot W^2(r) \cdot l(r) \cdot C_{mf}(r) \cdot dr \cdot \vec{x} \quad (5-43)$$

Avec: C_{mf} coefficient de moment de tangage donné par les polaires des profils.

Nous calculons maintenant le moment de torsion et les éléments de réduction au centre de gravité $G(x)$ d'une tranche de pale à un rayon x .

$$\vec{dM}_a(G) = \vec{dM}_f + \overline{G(x) \cdot P(r)} \wedge \vec{dR}_A(r) \quad (5-44)$$

$$\vec{dR}_A \Big|_{OXYZ} = \begin{cases} 0 \\ -[dR_z \cdot \sin\phi(r) + dR_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot dr \\ [dR_z \cdot \cos\phi(r) - dR_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot dr \end{cases} \quad (5-45)$$

$$\overline{G(x) \cdot P(r)} \Big|_{OXYZ} = \begin{cases} r-x \\ y(p) - a(x) \\ z(p) - b(x) \end{cases} \quad (5-46)$$

$$\vec{dM}_a(G) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot C_{mf}(r) \cdot dr \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} r-x \\ y(p)-a(x) \wedge \\ z(p)-b(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \\ - [dR_z \cdot \sin\phi(r) + dR_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot dr \\ [dR_z \cdot \cos\phi(r) - dR_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot dr \end{cases} \quad (5-47)$$

Remarque : Le moment $\vec{dM}_a(G)$ dû aux efforts aérodynamiques se décompose en deux types :

- moment de torsion $\vec{dM}_a^t(G)$.
- moment de flexion $\vec{dM}_a^f(G)$.

5-3-2 Calcul du moment de torsion dû aux forces aérodynamiques

Pour avoir le moment de torsion dû aux forces aérodynamiques, on fait la projection du moment dû aux forces aérodynamiques sur l'axe \vec{Ox} .

$$dM_a^t(G(x)) = \left[\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot C_{mf}(r) + [C_z \cdot \cos\phi(r) - C_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot [y(p) - a(x)] \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) + [C_z \cdot \sin\phi(r) + C_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot [z(p) - b(x)] \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \right] \cdot dr \quad (5-48)$$

$$dM_a^t(G(x)) = \left[\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot \left[C_{mf} + [C_z \cdot \cos\phi(r) - C_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot [y(p) - a(x)] + [C_z \cdot \sin\phi(r) + C_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot [z(p) - b(x)] \right] \right] \cdot dr \quad (5-49)$$

$$\begin{cases} y(p) = a(r) + GP(r) \cdot \cos\phi(r) \\ z(p) = b(r) + GP(r) \cdot \sin\phi(r) \end{cases} \quad (5-50)$$

Pour calculer le moment résultant, il suffit de sommer tous les moments s'exerçant sur les tranches de la pale situées au-delà du rayon x .

$$M_a^t(x) = \int_x^{RE} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot \left[C_{mf} + [C_z \cdot \cos\phi(r) - C_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot [a(r) - a(x) + GP(r) \cdot \cos\phi(r)] + [C_z \cdot \sin\phi(r) + C_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot [b(r) - b(x) + GP(r) \cdot \sin\phi(r)] \right] \cdot dr \quad (5-51)$$

Ce moment de torsion sera computed numériquement en utilisant la méthode des trapèzes (voir annexe 3).

5-3-3 Calcul des moments de flexion dus aux forces aérodynamique

Les moments de flexion dus aux forces aérodynamiques sont les composantes de $\vec{M}_a^f(x)$ sur les axes \vec{oy} et \vec{oz} .

$$d\vec{M}_a^f(x) \Big|_{\text{oxyz}} = \begin{cases} 0 \\ (x-r) \cdot [dR_z \cdot \cos\phi(r) - dR_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot dr \\ (x-r) \cdot [dR_z \cdot \sin\phi(r) + dR_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot dr \end{cases} \quad (5-52)$$

Alors le moment résultant de flexion est la somme de tous les moments des forces s'exerçant sur la partie de la pale comprise entre les rayons $r = x$ et $r = R_e$:

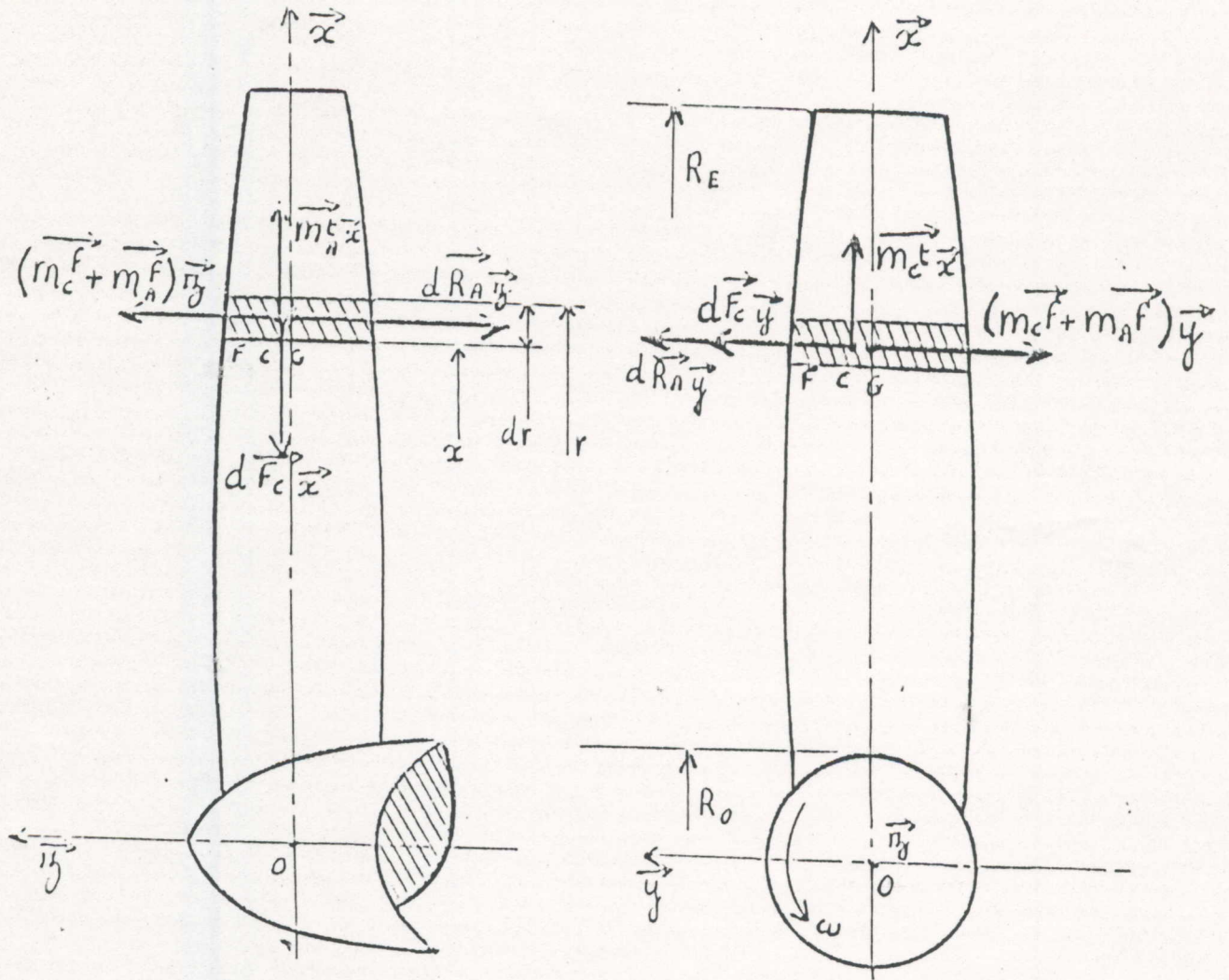
$$M_a^f(x) = \begin{cases} 0 \\ \int_x^{R_e} \frac{1}{2} \cdot (x-r) \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot [C_z \cdot \cos\phi(r) - C_x \cdot \sin\phi(r)] \cdot dr \\ \int_x^{R_e} \frac{1}{2} \cdot (x-r) \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot [C_z \cdot \sin\phi(r) + C_x \cdot \cos\phi(r)] \cdot dr \end{cases} \quad (5-53)$$

Ce moment de flexion sera aussi computed numériquement en utilisant la méthode des trapèzes.

5-4 Calcul de la résultante des forces centrifuges et aérodynamiques:

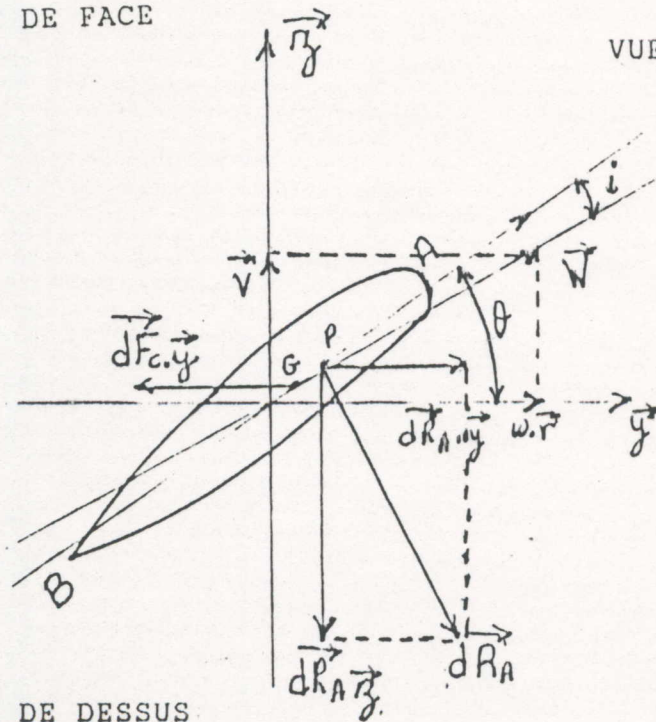
La résultante des forces centrifuges et aérodynamiques est définie comme suit (voir fig :5-3) :

$$\vec{R}_R(x) = \begin{cases} F_C(x) \vec{x} \\ [F_C(x) + R_A(x)] \vec{y} \\ R_A(x) \vec{z} \end{cases} \quad (5-54)$$



VUE DE FACE

VUE DE DROITE



VUE DE DESSUS

FIGURE (5-3) : REPRESENTATION GRAPHIQUE DES EFFORTS GLOBAUX ET DE TOUS LES MOMENTS S'EXERCANT SUR UNE TRANCHE DE PALE.

La résultante s'exergant sur la partie de la pale comprise entre les rayons $r = x$ et $r = Re$ sera alors de la forme:

$$\vec{R}_R(x) = \begin{cases} \int_x^{RE} \rho \cdot r \cdot S(r) \cdot \omega^2 \cdot dr \\ \int_x^{RE} \left[\rho \cdot S(r) \cdot \omega^2 \cdot a(r) + \frac{1}{2} \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot [C_z \sin\phi(r) + C_x \cos\phi(r)] \right] \cdot dr \\ \int_x^{RE} \frac{1}{2} \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot [C_z \cos\phi(r) + C_x \sin\phi(r)] \cdot dr \end{cases} \quad (5-55)$$

5-5 Calcul du moment résultant de torsion dû aux forces aérodynamiques et centrifuges :

$$\vec{M}_R^t(G(x)) = \begin{cases} \vec{M}_c^t(G(x)) + \vec{M}_a^t(G(x)) \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (5-56)$$

D'où $\vec{M}_R^t(G(x))$ s'exergant sur la partie de la pale comprise entre les rayons $r = x$ et $r = Re$ sera alors de la forme:

$$\vec{M}_R^t(G(x)) = \int_x^{RE} \left[\frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sin 2\phi(x) \cdot [IM(r) - Im(r)] + \rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) \cdot a(r) \dots \right. \\ \left. \cdot [b(x) - b(r)] \cdot dr + \int_x^{RE} \frac{1}{2} \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot [C_{mf} + [C_z \cos\phi(r) - C_x \sin\phi(r)] \cdot [a(r) - a(x) + GP(r) \cdot \cos\phi(r)] + [C_z \sin\phi(r) + C_x \cos\phi(r)] \cdot [b(r) - b(x) + GP(r) \cdot \sin\phi(r)] \right] \cdot dr \quad (5-57)$$

5-6 Calcul du moment résultant de flexion dû aux forces centrifuges et aérodynamiques :

Il est défini par:

$$\vec{M}_R^f(G(x)) = \begin{cases} 0 \\ M_c^t(G(x)) \vec{y} + M_a^t(G(x)) \vec{y} \\ M_c^t(G(x)) \vec{z} + M_a^t(G(x)) \vec{z} \end{cases} \quad (5-58)$$

Soit :

$$\vec{M}_R^f(x) = \begin{cases} 0 \\ \int_x^{RE} \left[\rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) + r \cdot [b(r) - b(x)] + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot (x-r) \cdot [C_z(r) \cdot \cos\phi(r) + C_x(r) \cdot \sin\phi(r)] \right] dr \\ \int_x^{RE} \left[\rho \cdot \omega^2 \cdot S(r) + [r - a(x) - x \cdot a(r)] + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W'^2(r) \cdot l(r) \cdot (x-r) \cdot [C_z(r) \cdot \sin\phi(r) + C_x(r) \cdot \cos\phi(r)] \right] dr \end{cases} \quad (5-59)$$

5-7 Etude des contraintes s'exerçant sur la pale:

5-7-1 Détermination des contraintes normales :

Par définition, la contrainte est le rapport de la force normale sur la section. Dans notre cas, elle est égale au rapport de l'effort normal de l'axe \vec{Ox} sur la section considérée de la pale.

$$\sigma_N = \frac{\vec{R}_R(x)}{S(x)} \vec{x} \quad (5-60)$$

Considérons par hypothèse que les contraintes sont uniformément réparties dans chacun des matériaux qui sont solidaires l'un l'autre et supposés de même allongement unitaire :

Donc :

$$\epsilon(x) = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_t}{E_t} \quad (5-61)$$

$$R_r = \sigma_c \cdot S_c + \sigma_t \cdot S_t \quad (5-62)$$

De l'équation (5-61), on tire :

$$\sigma_c = \frac{\sigma_t \cdot E_c}{E_t} \quad (5-63)$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_c \cdot E_t}{E_c} \quad (5-64)$$

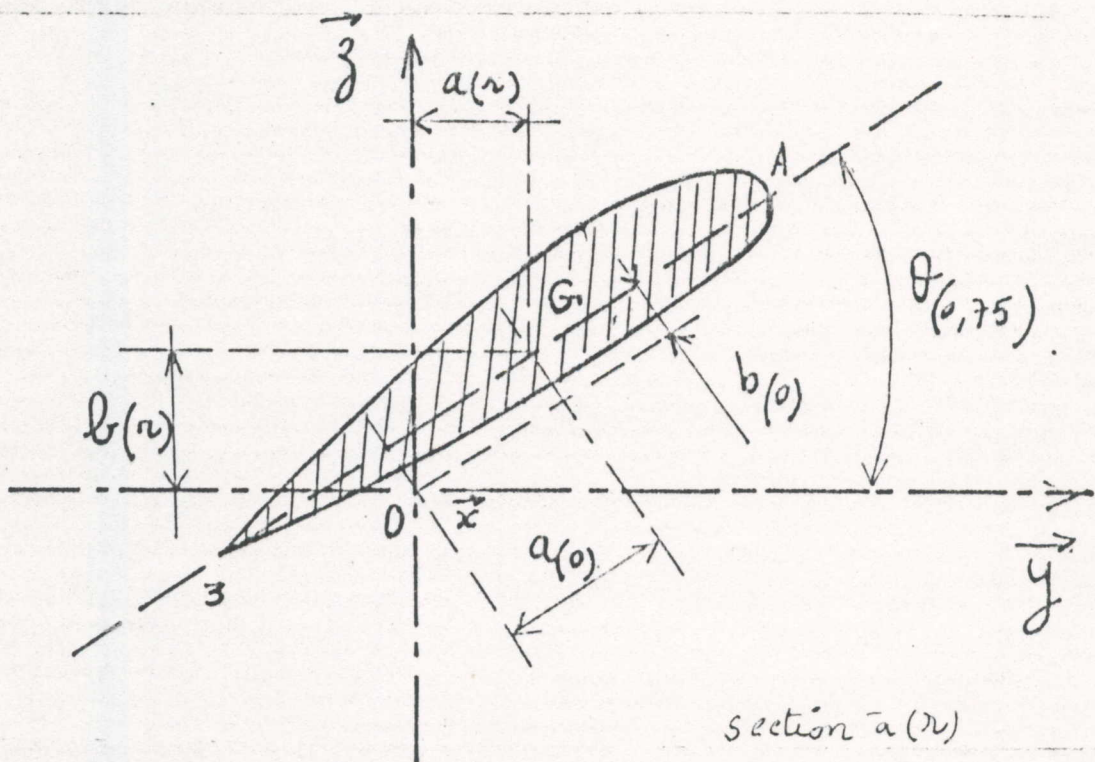
En remplaçant (5-62) dans les équations (5-63) et (5-64), on tire :

$$\sigma_c = \frac{R_r - \sigma_t \cdot S_t}{S_c} \quad (5-65)$$

DEPORTS DU CENTRE DE GRAVITE

$$a(r) = a(o) \cdot \cos \theta - b(o) \cdot \sin \theta$$

$$b(r) = a(o) \cdot \sin \theta - b(o) \cdot \cos \theta$$



$$\sigma_t = \frac{R_r - \sigma_c \cdot S_c}{S_t} \quad (5-66)$$

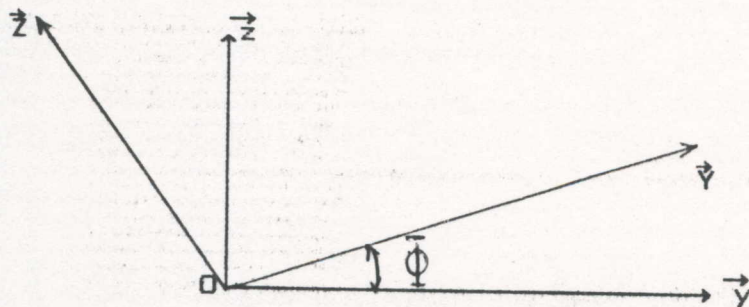
D'où :

$$\sigma_c = \frac{R_r}{S_c + \frac{E_t \cdot S_t}{E_c}} \quad (5-67)$$

$$\sigma_t = \frac{R_r}{S_t + \frac{E_c \cdot S_c}{E_t}} \quad (5-68)$$

5-7-2 Détermination des contraintes de flexion :

Puisque nous sommes dans le domaine de flexion déviée, il faudra, pour déterminer les contraintes, faire transposer les moments de flexion ainsi que les inerties de chaque section dans le repère principal d'inertie (G,x,y,z).



Suivant les axes Y et Z, nous avons:

$$\begin{cases} \vec{Y} = \cos\phi \vec{y} + \sin\phi \vec{z} \\ \vec{Z} = -\sin\phi \vec{y} + \cos\phi \vec{z} \end{cases} \quad (5-69)$$

De là, on obtient les moments résultants de flexion dûs aux efforts centrifuges et aérodynamiques par rapport aux axes principaux d'inertie:

$$\vec{M}_R^f(\alpha(x)) = \begin{cases} 0 \\ \vec{M}_R^f(\alpha(x)) [\cos\phi \vec{y} + \sin\phi \vec{z}] \\ \vec{M}_R^f(\alpha(x)) [-\sin\phi \vec{y} + \cos\phi \vec{z}] \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \vec{M}_R^f \cdot \vec{Y} \\ \vec{M}_R^f \cdot \vec{Z} \end{cases} \quad (5-70)$$

Et pour obtenir la contrainte de flexion totale, il suffit de superposer les contraintes dues aux moments de flexion dans chaque axe principal d'inertie.

$$\sigma^f = \sigma_Y^f + \sigma_Z^f \quad (5-71)$$

Où :

$$\sigma_Y^f = \frac{m_Y^f}{I_Z} \cdot Z \quad (5-72)$$

$$\sigma_Z^f = \frac{m_Z^f}{I_Y} \cdot Y \quad (5-73)$$

Tandis que la contrainte totale est la superposition des contraintes normales et des contraintes de flexion.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_Y^f + \sigma_Z^f \quad (5-74)$$

5-7-3 Détermination de la position de la fibre neutre :

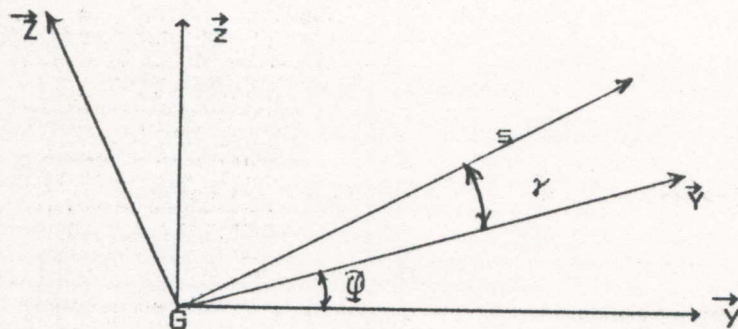
La position de la fibre neutre est définie par $\sigma = 0$

$$\sigma_N + \sigma_Y^f + \sigma_Z^f = 0 \quad (5-75)$$

$$\sigma_N + \frac{m_Y^f}{I_Z} \cdot Z - \frac{m_Z^f}{I_Y} \cdot Y = 0 \quad (5-76)$$

Or, dans une même section, σ_N , $\frac{m_Y^f}{I_Z}$ et $\frac{m_Z^f}{I_Y}$ sont des constantes.
Donc on a :

$$Z = \frac{I_Z}{M_Z^f} \left[\frac{m_Y^f}{I_Y} Y - \sigma_N \right] \quad (5-77)$$



Soit \vec{G}_s l'axe par rapport à \vec{G}_y , d'où on a :

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{m_z^f}{m_y^f} \cdot \frac{I_y}{I_z} \quad (5-78)$$

avec :

$$\gamma = (\vec{G}_s, \vec{G}_y)$$

5-7-4 Calcul des contraintes de torsion:

La contrainte de torsion est définie par:

$$\tau(x) = \frac{\vec{M}_R^L(G(x))}{I_0(x)} \cdot d \quad (5-79)$$

Avec $d =$ constante, et $I_0(x)$ le moment d'inertie polaire. La contrainte de torsion $\tau(x)$ est alors maximale pour $d = 0.5$

5-8 Calcul des déformations s'exerçant sur la pale:

5-8-1 Calcul de la déformation due à la torsion :

Pour déterminer la déformée de torsion de chaque section de pale, il suffit de résoudre l'équation de torsion suivante:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\vec{M}_R^L(G(x))}{G \cdot J} \quad (5-80)$$

$$\delta\theta = \int_{R_0}^x \frac{M_R^L(G(x))}{G \cdot J} \cdot dx \quad (5-81)$$

Les conditions aux limites nous montrent que la déformation de torsion au pied de la pale est nulle.

$$\delta\theta|_{R_0} = 0 \quad (5-82)$$

5-8-2 Calcul des déformations dues à la flexion :

Puisque les inerties de section portées par l'axe $\vec{o}\vec{x}$ sont petites comparées à celles portées par l'axe $\vec{o}\vec{z}$, nous ne tiendrons pas compte des rotations autour de $\vec{o}\vec{z}$. Autrement dit, nous négligerons le moment de flexion suivant l'axe $\vec{o}\vec{z}$. Cela revient à calculer uniquement des déformées dues aux moments de flexion portés par l'axe $\vec{o}\vec{x}$.

$$M^f(G(x)) = M_x^f \cos \theta(x) + M_z^f \sin \theta(x) \quad (5-83)$$

Soient δa et δb respectivement la flèche en rotation sur l'axe \vec{oy} et celle longitudinale sur l'axe \vec{oz} dues aux composantes du moment de flexion suivant l'axe \vec{ox} portées par les axes \vec{oy} et \vec{oz} .

$$\begin{cases} M_x^f \cdot \vec{z} = M_x^f \sin \vartheta(x) \\ M_x^f \cdot \vec{y} = M_x^f \cos \vartheta(x) \end{cases} \quad (5-84)$$

$$\frac{d^2 \delta a}{dx^2} = \frac{M_x^f \cdot \sin \vartheta(x)}{Ea \cdot I_{x(x)}} \quad (5-85)$$

$$\frac{d^2 \delta b}{dx^2} = \frac{M_x^f \cdot \cos \vartheta(x)}{Ea \cdot I(x)} \quad (5-86)$$

$I_{x(x)} = I_{m(x)}$: moment d'inertie minimum de la section.

Ea : module d'élasticité longitudinale du matériau.

Remarque: pour déterminer ces déformations, il est nécessaire de connaître la rigidité de torsion $G \cdot J$ le long de la pale (voir chapitre 6).

Chapitre 6

CALCUL DU CENTRE DE TORSION D'UNE SECTION DE PALE EN MATERIAUX COMPOSITES

6-1 Conception de la pale :

Une pale en matériaux composites est constituée

a) d'une coque qui enveloppe l'extérieur, pour lui donner une forme, cette ~~X~~ coque ayant pour rôle de résister aux efforts aérodynamiques de section (époxydes stratifiés plus des fibres de verre).

b) d'un tube qui est une véritable armature de la pale et assurant aussi la liaison à l'emplanture; celui-ci doit donc résister aux efforts de flexion et de torsion (époxydes stratifiés plus des fibres de carbone).

c) d'une mousse rigide occupant tout le reste du volume (voir fig: 6-1) et possédant comme caractéristiques, la légèreté et la rigidité locale de la section.

6-2 Définition :

Le centre de torsion d'une section S est le point C autour duquel s'effectue la rotation de torsion de la section droite considérée.

6-3 Hypothèses :

On rappelle que nous sommes dans le cas des poutres à sections droites minces, c'est à dire que la longueur de la pale est suffisamment élevée par rapport aux dimensions de la section, et d'autre part, l'épaisseur considérée est faible devant les dimensions de la section. Enfin la contrainte de cisaillement $\vec{\tau}$ est constante dans chaque épaisseur considérée [Ref 6].

6-4 Calcul des flux s'exerçant sur une section :

Nous utiliserons la théorie des flux en section fermée cloisonnée et la formule de BREDT, la coque étant supposée mince, c'est à dire:

a) la variation du flux est négligeable le long des branches 1 et 4 .

b) le flux est constant entre BB' et AA'.

c) pas de glissement entre les sections droites.

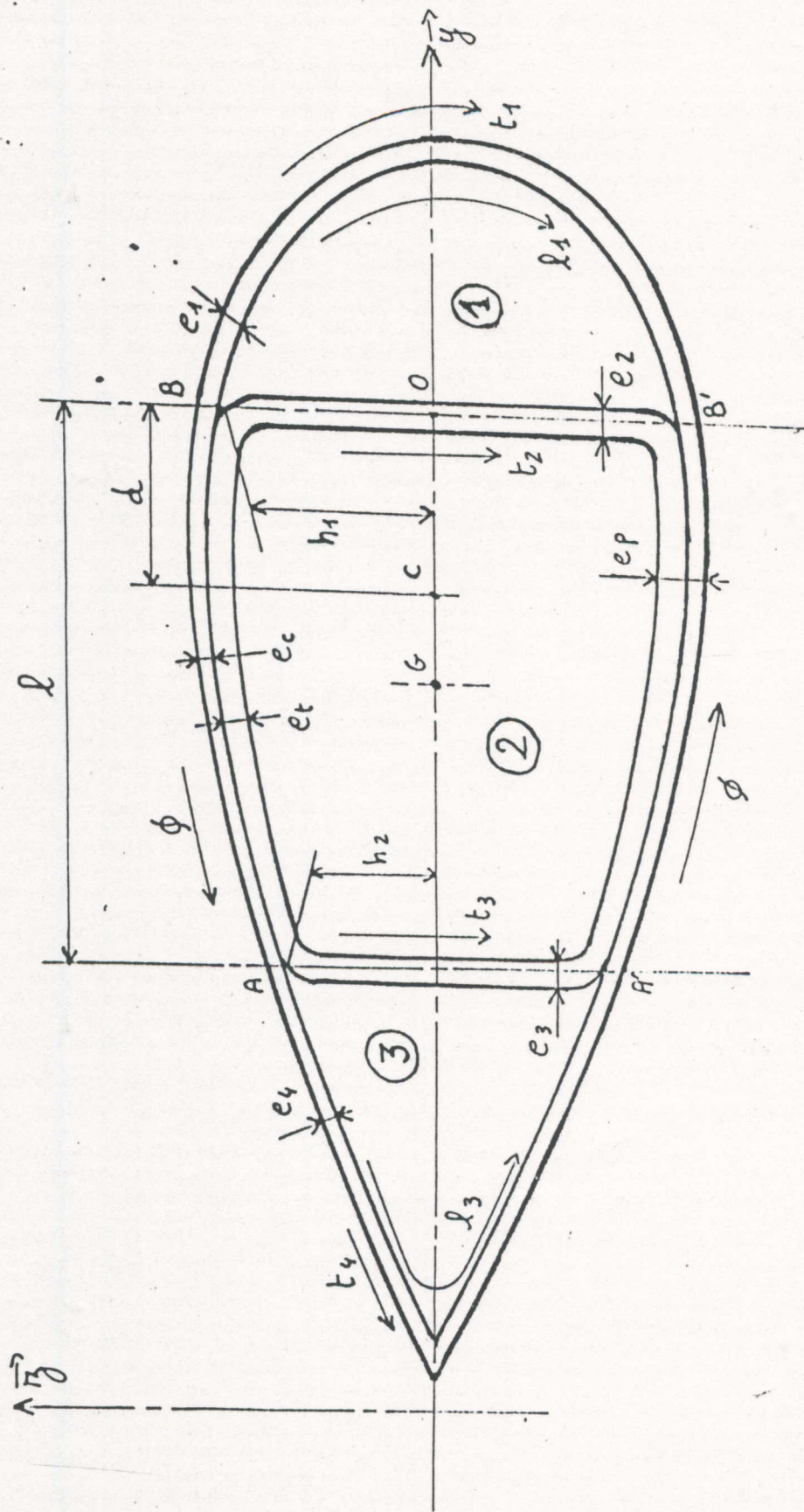


FIGURE (6-1) : VUE EN COUPE D'UNE TRANCHE DE PALE EN MATERIAUX COMPOSITES.

Donc :

$$\begin{cases} \gamma_{zx} |_t = \gamma_{zx} |_c & (a) \\ \gamma_{zy} |_t = \gamma_{zy} |_c & (b) \end{cases} \quad (6-1)$$

D'après la loi de HOOCK nous avons:

$$\begin{cases} \gamma_{zx} |_t = \frac{\tau_t}{2 G_t} & (a) \\ \gamma_{zx} |_c = \frac{\tau_c}{2 G_c} & (b) \end{cases} \quad (6-2)$$

En remplaçant les équations (6-2-a) et (6-2-b) dans l'équation (6-1-a), on aura:

$$\frac{\tau_t}{G_t} = \frac{\tau_c}{G_c} \quad (6-3)$$

$$\tau_c = \frac{G_t}{G_c} \tau_t \quad (6-4)$$

- Caractéristiques des différentes branches : tableau 1

branches	flux	longueurs	épaisseurs
1	T_1	l_1	e_1
AB, A'B'	ϕ	l_y	e_p
BB'	T_2	$2 \cdot h_1$	e_2
AA'	T_3	$2 \cdot h_2$	e_3
3	T_4	l_3	e_4

Soit un élément de section entre A et B, le flux de cisaillement sera donné par:

Mais :

$$\phi = \phi_t + \phi_c \quad (6-5)$$

$$\begin{cases} \phi_t = \tau_t \cdot e_t \\ \phi_c = \tau_c \cdot e_c \end{cases} \quad (6-6)$$

En remplaçant l'équation (6-5) dans (6-4), on obtient donc :

$$\phi = \tau_t \cdot e_t + \tau_c \cdot e_c \quad (6-7)$$

En remplaçant l'équation (6-4) dans (6-7), on obtient :

$$\phi = \tau_t \left[e_t + \frac{G_c}{G_t} e_c \right] \quad (6-8)$$

Les matériaux étant intimement liés entre eux, c'est à dire qu'il n'y a pas de glissement entre les surfaces de liaison (collage), et de ce fait, on pourra écrire:

$$\epsilon_x = \frac{E_t}{\sigma_t} = \frac{E_c}{\sigma_c} \longrightarrow \sigma_c = \frac{E_c}{E_t} \sigma_t \quad (6-9)$$

$$\phi = \phi_t + \phi_c = \sigma_t \cdot e_t + \sigma_c \cdot e_c \quad (6-10)$$

En substituant les équations (6-9) et (6-10), on obtient:

$$\phi = \sigma_t \cdot \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \right] \quad (6-11)$$

D'où l'expression de l'épaisseur équivalente e:

$$e = e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \quad (6-12)$$

Dans l'élément de pale entre A et B, on aura d'après la formule généralisée de BREDT [Ref 6]:

$$\phi_c = \phi_B - \frac{T_y \cdot A_x (D)}{E_o \cdot I_x} \quad (6-13)$$

E_t, E_c étant connus, l'expression du moment quadratique pondéré de deux matériaux intimement liés entre eux et isotropes sera de la forme :

$$I_x = \frac{1}{E_o} \sum_t \iint_{s_t} E_t \cdot y^2 ds \quad (6-14)$$

Soit:

$$I_x = \frac{1}{E_o} \iint_{s_t} E_t \cdot y^2 ds_t + \frac{1}{E_o} \iint_{s_c} E_c \cdot y^2 ds_c \quad (6-15)$$

$$\text{Or : } ds_i = e_i \cdot dx \quad (6-16)$$

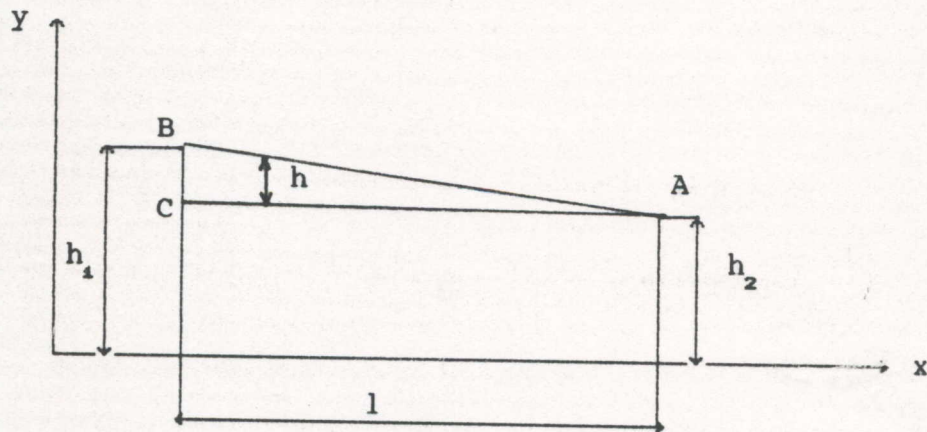
$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{E_c} \int_B^A [E_t \cdot e_t + E_c \cdot e_c] \cdot y^2 \cdot dx \quad (6-17)$$

$$I_x = 2 \cdot \frac{E_t}{E_c} \int_B^A \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} \cdot e_c \right] \cdot y^2 \cdot dx \quad (6-18)$$

$$\text{De plus : } e = e_t + \frac{E_c}{E_t} \cdot e_c$$

Avec e ne dépendant pas de la position, donc l'intégrale se réduit à :

$$\frac{E_c}{E_t} I_x = 2 \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \right] \cdot \int_B^A y^2 \cdot dx \quad (6-19)$$



Par similitude dans le triangle ABC, nous déterminerons la relation qui existe entre y et x :

$$\frac{l-x}{l} = \frac{h}{h_1 - h_2} \longrightarrow h = \frac{l-x}{l} \cdot (h_1 - h_2) \quad (6-20)$$

Or :

$$y = h_2 + h \longrightarrow y = h_2 + \frac{l-x}{l} \cdot (h_1 - h_2) \quad (6-21)$$

D'où :

$$\frac{E_o}{E_t} I_x = 2 \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \right] \cdot \int_0^l \left[h_2 + \frac{l-x}{l} \cdot (h_1 - h_2) \right]^2 dx \quad (6-22)$$

Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 \left[h_2 + \frac{1-x}{1} \cdot (h_1 - h_2) \right]^2 dx$$

$$\text{On pose: } u = h_2 + \frac{1-x}{1} \cdot (h_1 - h_2) ; du = - \frac{h_1 - h_2}{1} dx \quad (6-23)$$

$$\text{Avec : } \begin{array}{ll} x = 0 & u = h_1 \\ x = 1 & u = h_2 \end{array} \quad (6-24)$$

D'où l'intégrale deviendra :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[h_2 + \frac{1-x}{1} \cdot (h_1 - h_2) \right]^2 dx &= - \frac{1}{h_1 - h_2} \int_{h_1}^{h_2} u^2 \cdot du = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{h_2 - h_1} u^3 \Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{1}{3} [h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2] \end{aligned} \quad (6-25)$$

$$\int_0^1 \left[h_2 + \frac{1-x}{1} \cdot (h_1 - h_2) \right] dx = \frac{1}{3} l \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2) \quad (6-26)$$

Finalement :

$$\frac{E_o}{E_t} I_x = \frac{2}{3} l \left[e_t + \frac{E_c}{E} e_c \right] \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2) \quad (6-27)$$

$$\frac{E_o}{E_t} I_x = \frac{2}{3} e l (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2) \quad (6-28)$$

De la même manière, en milieu pondéré :

$$\frac{E_o}{E_t} A_x^{(D)} = \int_0^x \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \right] \cdot y \cdot dx \quad (6-29)$$

$$\frac{E_o}{E_t} A_x^{(D)} = \int_0^x \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \right] \left[h_2 + \frac{1-x}{1} \cdot (h_1 - h_2) \right] dx \quad (6-30)$$

$$\frac{E_o}{E_t} A_x^{(D)} = \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \right] \cdot \int_0^x \left[h_2 + \frac{1-x}{1} \cdot (h_1 - h_2) \right] \cdot dx \quad (6-31)$$

Cet intégrale est déjà calculé d'où :

$$\frac{E_c}{E_t} A_x^{(D)} = - \frac{1}{h_1 - h_2} \left[e_t + \frac{E_c}{E_t} e_c \right] \left[h_2 + \eta \cdot (h_1 - h_2) \right]^2 \Big|_0^\eta \quad (6-32)$$

Dans ces conditions on peut exprimer le flux dans une coupure de pale par :

$$\phi_{\varepsilon} = \phi_B - T_y \frac{A_X \langle D \rangle}{E_0 \cdot I_X} \quad (6-33)$$

$$\phi_{\varepsilon} = \phi_b - \frac{3}{4} \frac{T_y \left[(h_2^2 + \eta \cdot (h_2 - h_1))^2 - h_1^2 \right]}{(h_1 - h_2) \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} \quad (6-34)$$

Avec: $0 < \eta < 1$

On peut donc exprimer aussi :

$$\phi_a = \phi_b + \frac{3}{4} \frac{T_y \cdot (h_1 + h_2)}{(h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} \quad (6-35)$$

De plus les trois lemmes fondamentaux nous donnent :

a) Loi des noeuds :

$$\begin{cases} \phi_B + T_1 + T_2 = 0 & \text{en B} \\ \phi_{B'} + T_1 + T_2 = 0 & \text{en B'} \\ -\phi_A + T_3 + T_4 = 0 & \text{en A} \end{cases} \quad (6-36)$$

Or le profil choisi est un profil symétrique :

$$\phi_{AB} = \phi_{A'B'} \quad (6-37)$$

b) Loi des mailles

$$\int_{\Gamma} \frac{\vec{\tau}_i}{G_i} \cdot d\vec{l}_i = 0 \quad \text{puisque } \vec{T}_y \text{ est seul} \quad (6-38)$$

Sur la maille 1, on peut écrire:

$$\int_{\Gamma} \frac{\tau_i}{G_i} dl_i = \int_B^{B'} \frac{\tau_1}{G_1} dl_1 - \int_{B'}^B \frac{\tau_2}{G_2} dl_2 = 0 \quad (6-39)$$

Mais on sait que :

$$\tau_1 = \frac{T_1}{e_1} ; \quad \tau_2 = \frac{T_2}{e_2} ; \quad \int_B^{B'} dl_1 = l_1 ; \quad \int_{B'}^B dl_2 = 2 \cdot h_1 \quad (6-40)$$

De là on tire :

$$\frac{T_1 \cdot l_1}{G_c \cdot e_1} - \frac{2 \cdot h_1 \cdot T_2}{G_t \cdot e_2} = 0 \quad (6-41)$$

Sur la maille 2, on peut écrire :

$$\int \frac{\tau_l}{G_l} dl_l = \int_B^{B'} \frac{\tau_1}{G_1} dl_1 - 2 \cdot \int_B^A \frac{\tau_l}{G_l} dl - 2 \cdot \int_{A'}^A \frac{\tau_a}{G_a} dl_a = 0 \quad (6-42)$$

$$\text{Or : } \tau_a = \frac{T_a}{e_a} ; \quad \int_{A'}^A dl_a = 2 \cdot h_2 \quad (6-43)$$

D'autre part :

$$\tau_l = \frac{\phi_l}{e} ; \quad \int_B^A dl = l \quad (6-44)$$

Donc :

$$\int_B^A \frac{\tau_l}{G_l} dl = \int_B^A \frac{\phi_l}{e \cdot G_l} dl = \frac{1}{e \cdot G_l} \int_B^A \phi_l \cdot d\eta \quad (6-45)$$

$$\int_B^A \phi_l \cdot d\eta = \int_0^A \phi_b - \frac{3}{4} \frac{T_y \left[(h_2^2 + \eta \cdot (h_2 - h_1))^2 - h_1^2 \right]}{(h_1 - h_2) \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} d\eta$$

$$\int_B^A \phi_l \cdot d\eta = \phi_b - \frac{1}{4} \frac{T_y (2 \cdot h_1 + h_2)}{(h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} \quad (6-46)$$

D'où sur la maille 2, on obtient :

$$\frac{2 \cdot t_2 \cdot h_1}{G_t \cdot e_2} - \frac{2 \cdot l}{e \cdot G_t} \left[\phi_b - \frac{1}{4} \frac{T_y (2 \cdot h_1 + h_2)}{(h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} \right] - \frac{2 \cdot t_a \cdot h_2}{G_t \cdot e_a} = 0 \quad (6-47)$$

Sur la maille 3, on peut écrire :

$$\int \frac{\tau_l}{G_l} dl_l = \int_{\Delta}^{\Delta'} \frac{\tau_3}{G_1} dl_4 + \int_{\Delta'}^{\Delta} \frac{\tau_4}{G_2} dl_3 = 0 \quad (6-48)$$

$$\text{Or : } \int_{\Delta}^{\Delta'} dl_4 = 2 \cdot h_2 \quad (6-49)$$

Donc sur la maille 3, on obtient :

$$\frac{T_4 \cdot l_3}{G_l \cdot e_4} - \frac{2 \cdot T_3 \cdot h_2}{G_l \cdot e_3} = 0 \quad (6-50)$$

Finalement, on aboutit à un système de cinq équations à cinq inconnues qu'il faut résoudre .

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 + T_2 = -\phi_B \\ T_3 + T_4 = \phi_A \\ \frac{T_1 \cdot l_1}{G_l \cdot e_1} - \frac{2 \cdot T_2 \cdot l_1}{G_l \cdot e_2} = 0 \\ \frac{T_4 \cdot l_3}{G_l \cdot e_4} - \frac{2 \cdot T_3 \cdot h_2}{G_l \cdot e_3} = 0 \\ \frac{2 \cdot T \cdot h}{G_l \cdot e_2} + \frac{2 \cdot l}{G_l \cdot e'} \cdot \left[-\phi_B + \frac{T \cdot (2 \cdot h_1 + h_2)}{4 \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} \right] - \frac{2 \cdot T_3 \cdot h_2}{G_l \cdot e_3} = 0 \end{array} \right. \quad (6-51)$$

Résolution du système d'équations :

De l'équation 1, on tire

$$T_2 = -T_1 - \phi_B \quad (6-52)$$

En remplaçant dans l'équation 3, T_2 par son expression, on a :

$$\frac{T_1 \cdot l_1}{G_l \cdot e_1} + \frac{2 \cdot (T_1 + \phi_B) \cdot l_1}{G_l \cdot e_2} = 0 \quad (6-53)$$

$$\text{D'où : } T_1 = \frac{-2 \cdot \phi_B \cdot h_1}{l_1 \cdot \frac{G_l \cdot e_2}{G_l \cdot e_1} + 2 \cdot h_1} \quad (6-54)$$

On pose $e'_1 = \frac{G_c}{G_t} e_1$

$$T_1 = - \frac{2 \cdot \phi_B \cdot h_1}{\frac{l_1 \cdot e_2}{e'_1} + 2 \cdot h_1} \quad (6-55)$$

De l'équation 2 on tire :

$$T_4 = \phi_B - T_3$$

En remplaçant T_4 dans l'équation 4 par son expression :

$$\frac{(\phi_A - T_3) \cdot l_3}{G_t \cdot e_4} - \frac{2 \cdot T_3 \cdot h_2}{G_t \cdot e_3} = 0 \quad (6-56)$$

D'où

$$T_3 = \frac{\phi_A \cdot l_3}{l_3 \cdot \frac{G_t \cdot e_3}{G_c \cdot e_4} + 2 \cdot h_2} \quad (6-57)$$

De même, on pose: $e'_4 = \frac{G_c}{G_t} e_4$

$$T_3 = \frac{\phi_A \cdot l_3}{\frac{l_3 \cdot e_3}{e'_4} + 2 \cdot h_2} \quad (6-58)$$

Or: $T_4 = \phi_A - T_3$

D'où

$$T_4 = \frac{2 \cdot \phi_A \cdot h_1}{\frac{l_3 \cdot e_3}{e'_4} + 2 \cdot h_2} \quad (6-59)$$

De même pour T_2 :

$$T_2 = - (T_1 + \phi_B) = - \frac{\phi_B \cdot l_1 \cdot e_2}{2 \cdot h_1 \cdot e'_1 + e_2 \cdot l_1} \quad (6-60)$$

$$T_2 = - \frac{\phi_B \cdot l_1 \cdot e_2}{2 \cdot h_1 \cdot e'_1 + e_2 \cdot l_1} \quad (6-61)$$



En remplaçant T_2, T_3, ϕ_A par leurs expressions dans l'équation 5 du système (6-51), on tire l'expression de ϕ_B :

$$\phi_B = \frac{T_y}{4 \cdot (h_1 + h_1 \cdot h_2 + h_2)} \left[\frac{1 \cdot (2 \cdot h_1 + h_2)}{e'} + \frac{3 \cdot h_2 \cdot l_3 \cdot (h_1 + h_2)}{2 \cdot h_2 \cdot e'_4 + e_3 \cdot l_3} \right] \left[\frac{1}{\frac{-h_1 \cdot l_1}{2 \cdot h_1 \cdot e'_1 + e_2 \cdot l_1} - \frac{L}{e'} - \frac{h_2 \cdot l_3}{2 \cdot h_2 \cdot e'_4 + e_3 \cdot l_3}} \right] \quad (6-62)$$

Exprimons le moment des contraintes par rapport à O, ceci en supposant que la section 1 ne pivote pas et en admettant que T_y passe par le centre de torsion C. On écrit que $OC = d$

$$d \cdot T_y = -2 \cdot \Omega_1 \cdot T_1 + 2 \cdot \Omega_3 \cdot T_4 + 2 \cdot h_2 \cdot l \cdot \phi_A + 2 \cdot h_1 \cdot l \cdot \left[\phi_B + \frac{T_y \cdot (2 \cdot h_1 + h_2)}{4 \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} \right] \quad (6-63)$$

Avec

Ω_1 : aire de la maille 1

Ω_2 : aire de la maille 2

Ω_3 : aire de la maille 3

En remplaçant T_1, T_4 par leurs expressions, on aboutit à :

$$d \cdot T_y = -2 \cdot \Omega_1 \left[\frac{-2 \cdot \phi_B \cdot h_1}{\frac{l_1 \cdot e_2}{e'_1} + 2 \cdot h_1} \right] + 2 \cdot \Omega_3 \left[\frac{2 \cdot \phi_A \cdot h_1}{\frac{l_3 \cdot e_3}{e'_4} + 2 \cdot h_2} \right] + 2 \cdot l \cdot \phi_B \cdot (h_2 + h_1) + \frac{T_y \cdot (2 \cdot h_1 + h_2)}{2 \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} h_1 \cdot l \quad (6-64)$$

$$d = - \frac{2 \cdot \Omega_1}{T_y} \left[\frac{-2 \cdot \phi_B \cdot h_1}{\frac{l_1 \cdot e_2}{e'_1} + 2 \cdot h_1} \right] + \frac{2 \cdot \Omega_3}{T_y} \left[\frac{2 \cdot \phi_A \cdot h_1}{\frac{l_3 \cdot e_3}{e'_4} + 2 \cdot h_2} \right] + \frac{l \cdot \phi_A \cdot 2 \cdot (h_2 + h_1)}{T_y} + \frac{h_1 \cdot l \cdot (2 \cdot h_1 + h_2)}{2 \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)} \quad (6-65)$$

6- CALCUL DE LA RIGIDITE DE TORSION :

Sous l'effet de la torsion autour du centre de torsion C , la section droite subit une rotation d'ensemble .

Dans le cadre de la théorie simplifiée de la torsion des poutres de section droite mince, nous allons étudier et déterminer la rigidité de torsion [Ref 6] .

Par définition :

$$\frac{M^t}{G J} = \frac{d\vartheta}{dx} \quad (6-66)$$

Où :

m^t : moment de torsion

G J : rigidité de torsion

G : module d'élasticité transversale.

J : paramètre dépendant de la géométrie de la section

Avec :

$$M^t = 2. (T_1 . \Omega_1 - \phi . \Omega_2 - T_4 . \Omega_3) \quad (6-67)$$

Pour chaque maille, nous pouvons écrire :

$$\frac{d\vartheta_i}{dx} = \frac{1}{2. \Omega_i} \int \frac{\tau_i . dl_i}{G_i} \quad (6-68)$$

Puisqu'on a supposé que toutes les mailles subissent une même rotation, on peut donc écrire:

$$\frac{d\vartheta_i}{dx} = \frac{d\vartheta}{dx} \quad (6-69)$$

D'autre part, on sait que :

$$\tau_i = \frac{T_i}{e_i} \quad (6-70)$$

Pour la première maille :

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2. \Omega_1} \left[\int_B^{B'} \frac{T_1 . dl_1}{G_c . e_1} + \int_B^B \frac{2. (T_1 + \phi) . dl}{G_t . e_2} \right] \quad (6-71)$$

Or, les flux étant constants le long des mailles :

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2. \Omega_1} \left[\frac{T_1 . l_1}{G_c . e_1} + \frac{2. (T_1 + \phi) . h_1}{G_t . e_2} \right] \quad (6-72)$$

Pour la deuxième

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \Omega_2} \left[2 \int_A^B \frac{\tau_t \cdot dl}{G_t} + \int_{A'}^A \frac{(T_4 - \varphi) \cdot dl}{G_c \cdot e_3} - \int_B^{B'} \frac{\varphi_t \cdot T_1 \cdot dl}{G_t \cdot e_2} \right] \quad (6-73)$$

Or :

$$\tau_t = \frac{\varphi}{\frac{G_c}{G_t} e_c + e_t} = \frac{\varphi \cdot G_t}{G_c \cdot e_c + G_t \cdot e_t} \quad (6-74)$$

De même, les flux sont constants donc :

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \Omega_2} \left[- \frac{2 \varphi l}{G_c \cdot e_c + G_t \cdot e_t} + \frac{2 \cdot (T_4 - \varphi) \cdot h_2}{G_t \cdot e_3} - \frac{2 \cdot \varphi_t \cdot T_1 \cdot h_1}{G_t \cdot e_2} \right] \quad (6-75)$$

Pour la troisième maille :

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \Omega_3} \left[\int_{A'}^A \frac{(\varphi - T_4) \cdot dl}{G_t \cdot e_3} + \int_A^{A'} \frac{T_4 \cdot dl}{G_c \cdot e_4} \right] \quad (6-76)$$

Même chose que précédemment :

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \Omega_3} \left[\frac{2 \cdot h_2 \cdot (\varphi - T_4)}{G_t \cdot e_3} - \frac{T_4 \cdot l_3}{G_c \cdot e_4} \right] \quad (6-77)$$

Finalement, on obtient un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dx} \Big|_1 = \frac{1}{2 \cdot \Omega_1} \left[\frac{T_1 \cdot l_1}{G_c \cdot e_1} + \frac{2 \cdot (T_1 + \varphi) \cdot h_1}{G_t \cdot e_2} \right] \\ \frac{d\vartheta}{dx} \Big|_2 = \frac{1}{2 \cdot \Omega_2} \left[- \frac{2 \cdot \varphi \cdot l}{G_c \cdot e_c + G_t \cdot e_t} + \frac{2 \cdot (T_4 - \varphi) \cdot h_2}{G_t \cdot e_3} - \frac{2 \cdot \varphi_t \cdot T_1 \cdot h_1}{G_t \cdot e_2} \right] \\ \frac{d\vartheta}{dx} \Big|_3 = \frac{1}{2 \cdot \Omega_3} \left[\frac{2 \cdot h_2 \cdot (\varphi - T_4)}{G_t \cdot e_3} - \frac{T_4 \cdot l_3}{G_c \cdot e_4} \right] \end{cases} \quad (6-78)$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\Omega_1 \cdot G_t \cdot e_t}{h} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{G_t \cdot e_t \cdot l_1}{G_c \cdot e_c \cdot h} + 1 \\ \beta_2 = \frac{\Omega_2 \cdot G_t \cdot e_t}{h} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{2 \cdot G_t \cdot e_t \cdot l}{G_c \cdot e_c + G_t \cdot e_t} + 2 \\ \beta_3 = \frac{\Omega_3 \cdot G_t \cdot e_t}{h} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{G_t \cdot e_t \cdot l_3}{G_c \cdot e_c \cdot h} + 1 \end{array} \right. \quad (6-79)$$

D'où le système d'équations se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \beta_1 \cdot \frac{d\theta}{dx} = T_1 \cdot \alpha_1 + \phi \\ 2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{d\theta}{dx} = -T_1 - \phi \cdot \alpha_2 + T_4 \\ 2 \cdot \beta_3 \cdot \frac{d\theta}{dx} = \phi - \alpha_3 \cdot T_4 \end{array} \right. \quad (6-80)$$

Après résolution, on trouve :

$$T_1 = 2 \frac{\beta_1 \cdot (\alpha_2 \cdot \alpha_3 - 1) + \beta_2 \cdot \alpha_3 + \beta_3}{-(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3} \frac{d\theta}{dx} \quad (6-81)$$

$$\phi = 2 \frac{\alpha_1 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_3 + \beta_3) + \beta_1 \cdot \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3} \frac{d\theta}{dx} \quad (6-82)$$

$$T_4 = 2 \frac{\alpha_1 \cdot (\beta_3 \cdot \alpha_2 + \beta_2) - \beta_3 + \beta_1}{\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3} \frac{d\theta}{dx} \quad (6-83)$$

Or :

$$\frac{M^t}{G \cdot J} = \frac{d\theta}{dx} \quad (6-84)$$

$$G \cdot J \frac{d\theta}{dx} = 2 \cdot (T_1 \cdot \Omega_1 - \phi \cdot \Omega_2 - T_4 \cdot \Omega_3) \quad (6-85)$$

Après avoir remplacé T_1, T_4, ϕ par leurs expressions déterminées précédemment, on obtient :

$$G \cdot J = \frac{4}{D} \left[\beta_1 \cdot \gamma_1 + \beta_2 \cdot \gamma_2 + \beta_3 \cdot \gamma_3 \right] \quad (6-86)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \Omega_1 \cdot (\alpha_2 \cdot \alpha_3 - 1) + \Omega_2 \cdot \alpha_3 + \Omega_3 \\ \gamma_2 = \Omega_1 \cdot \alpha_1 + \Omega_2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \Omega_3 \cdot \alpha_1 \\ \gamma_3 = -\alpha_1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 - \alpha_3 \end{array} \right. \quad (6-87)$$

Chapitre 7

DETERMINATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS DE RESISTANCE DES MATERIAUX (R.D.M.) D'UNE HELICE D'AVION DU TYPE R3000 N°1

7-1 Influence de l'angle de calage sur les résultats R.D.M au point fixe :

Les courbes des figures (7-1) et (7-2) montrent la variation des forces résultantes (radiale et orthogonale) qui croissent du pied jusqu'à l'extrémité de la pale, l'augmentation de l'angle de calage n'ayant aucun effet sur la variation de la force radiale; par contre on observe une légère variation sur la force orthogonale, sur une distance r/R_0 comprise entre 0,4 et 1.

Les courbes de la figure (7-3) montrent la variation de la résultante des forces axiales qui croît du pied jusqu'à l'extrémité de la pale, où l'augmentation de l'angle de calage entraîne le déplacement de la courbe vers le haut.

Les courbes des figures (7-4) et (7-5) montrent la variation des moments de torsion et d'avancement qui croît au pied et décroît au bout de la pale, tout en passant par un maximum à $r=0,8.R_0$, et l'augmentation de l'angle de calage entraînant le déplacement de la courbe vers le haut.

Les courbes de la figure (7-6) montrent la variation du moment couple qui croît de $r=0,4.R_0$ jusqu'à un certain maximum ($r=0,6.R_0$) au delà duquel il redécroit jusqu'au bout de la pale, tout en étant pratiquement constant sur l'intervalle $[0; 0,4.R_0]$. A noter que l'augmentation de l'angle de calage entraîne une légère variation de la courbe.

Les courbes des figures (7-9), (7-8) et (7-7) montrent respectivement la variation de la déformée de torsion, et celles de δ_a et δ_b , qui ont des allures similaires. Elles croient toutes du pied jusqu'à l'extrémité de la pale avec un certain déplacement vers le haut (sur l'intervalle $[0,4.R_0; R_0]$) dû à l'augmentation de l'angle de calage.

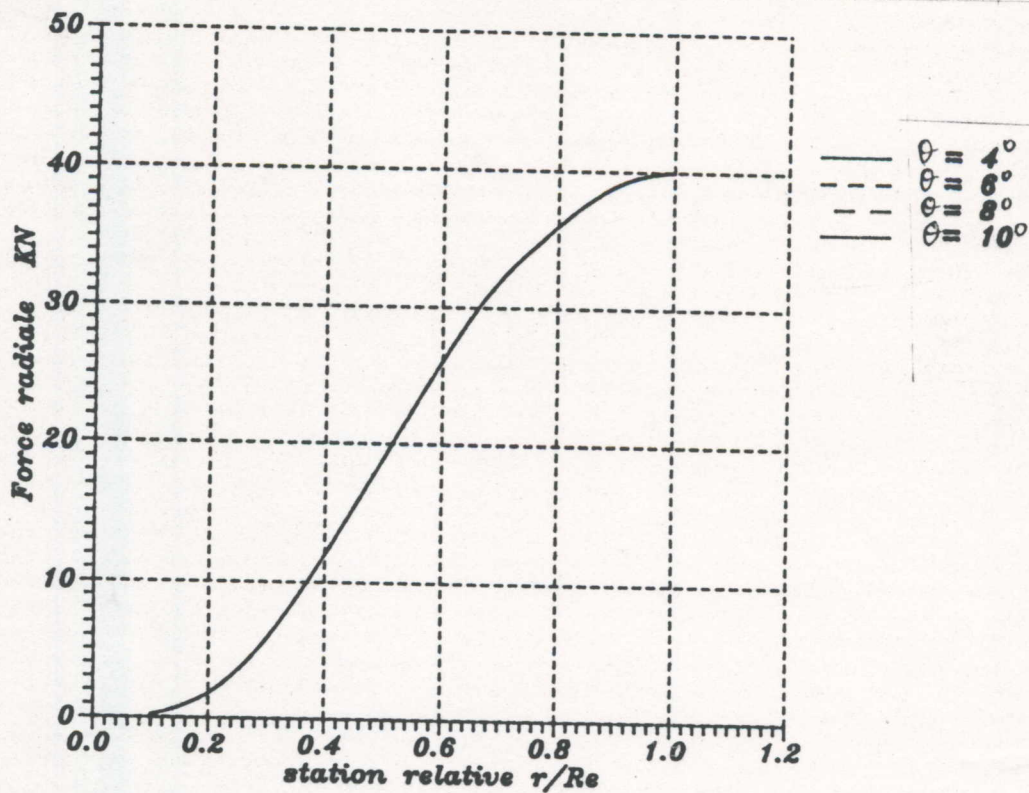


Figure (7-1): Variation de la résultante des forces radiales le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

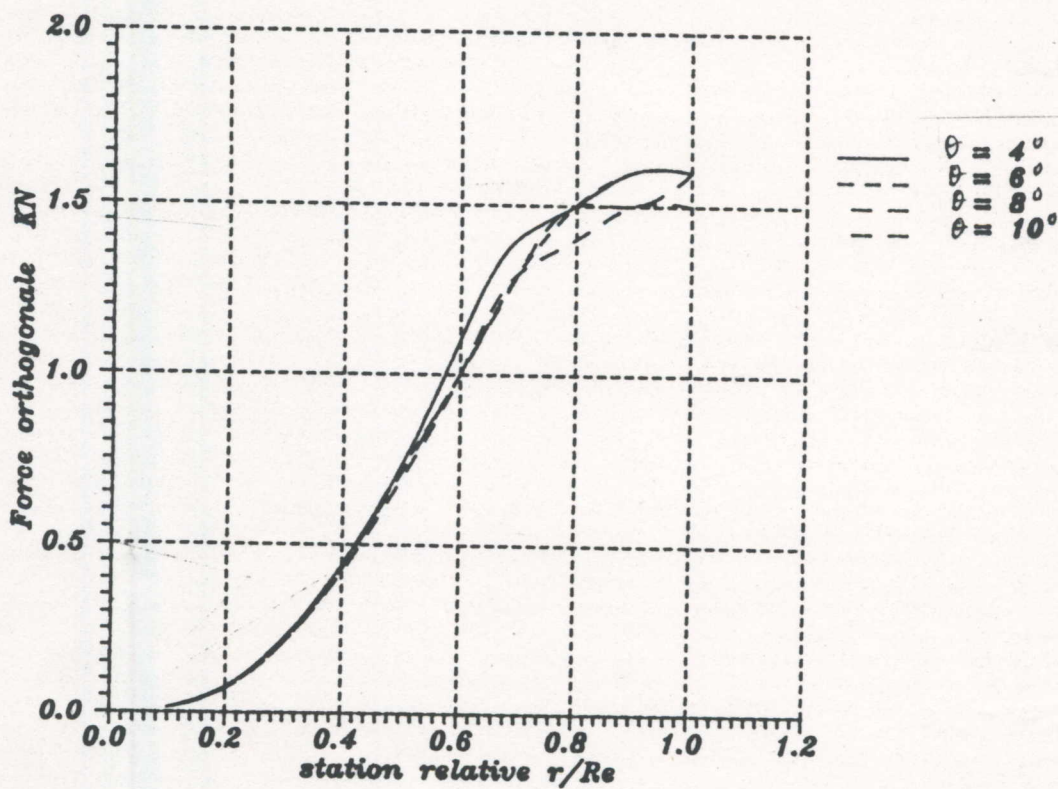


Figure (7-2): Variation de la résultante des forces orthogonales le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

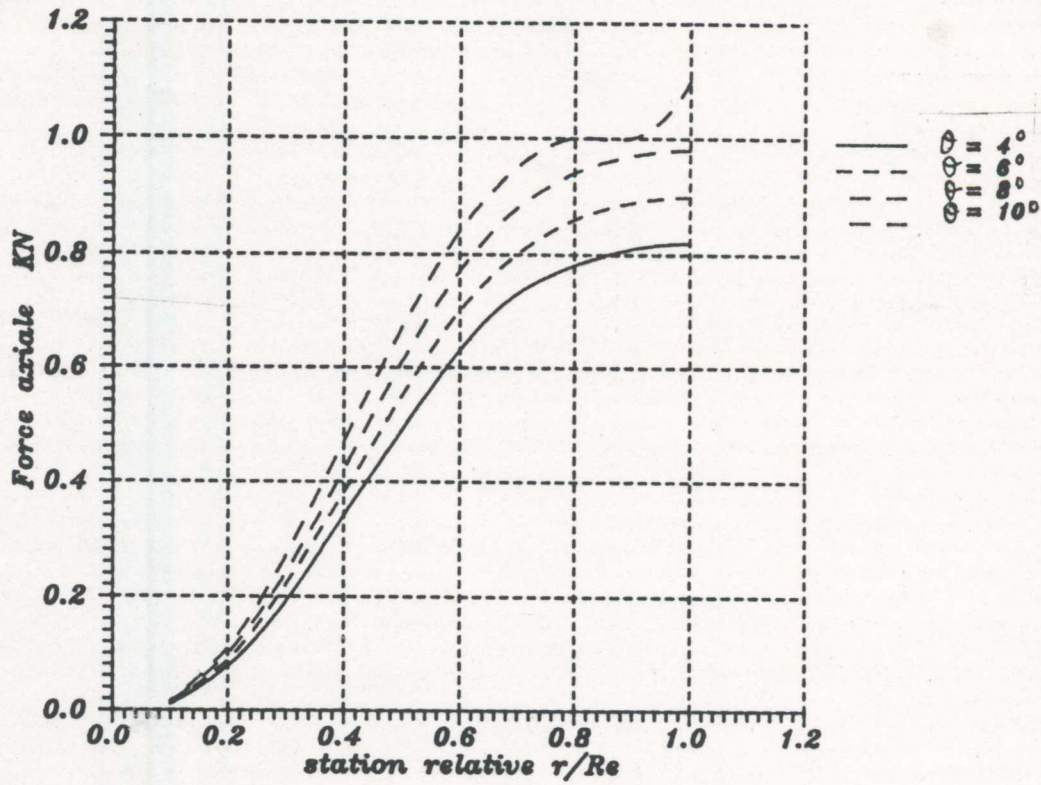


Figure (7-3): Variation de la résultante des forces axiales le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

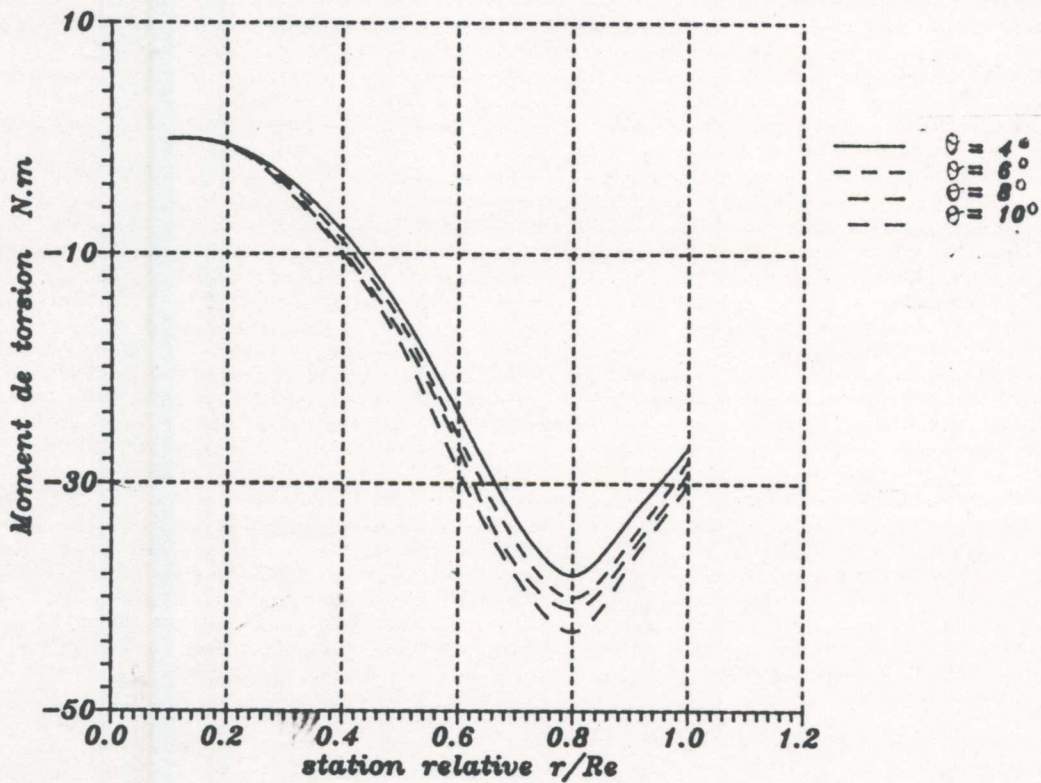


Figure (7-4): Variation du moment de torsion le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

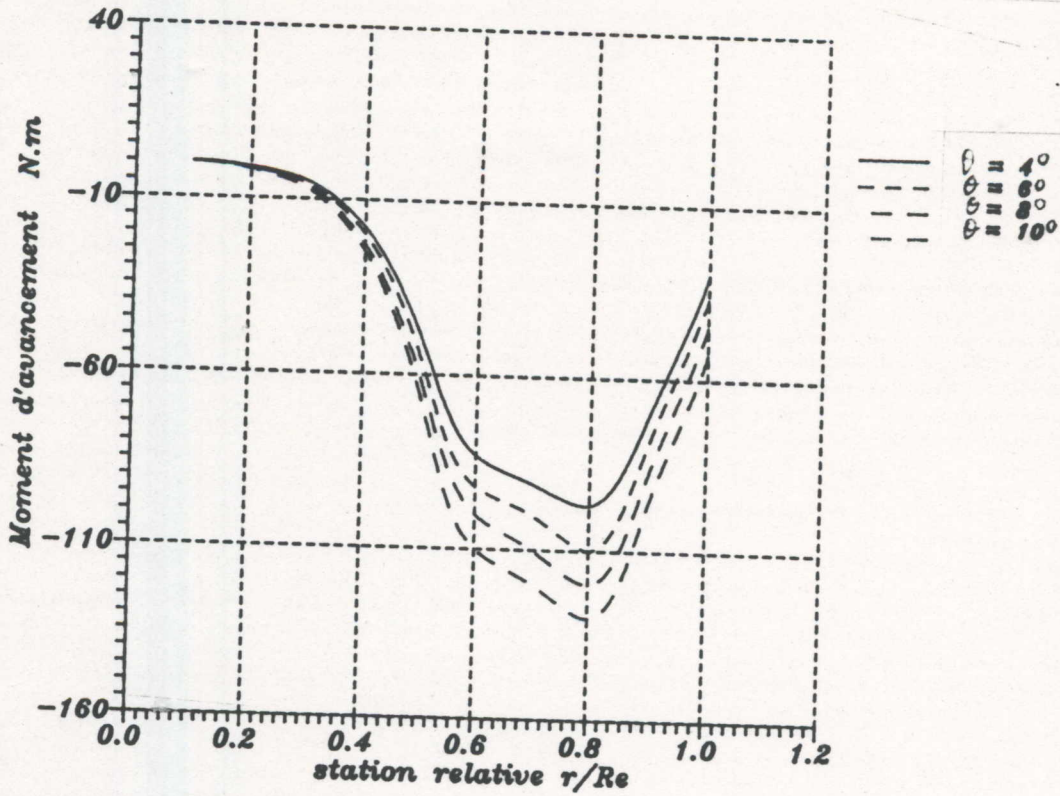


Figure (7-5): Variation du moment d'avancement le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

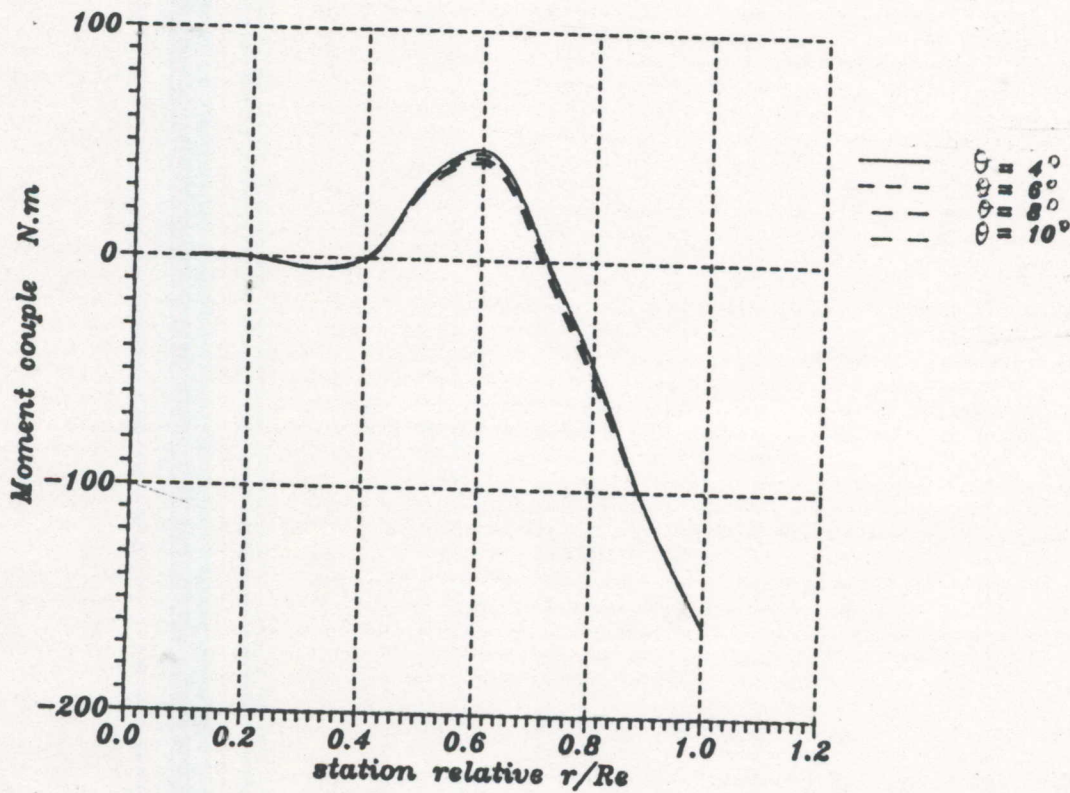


Figure (7-6): Variation du moment couple le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

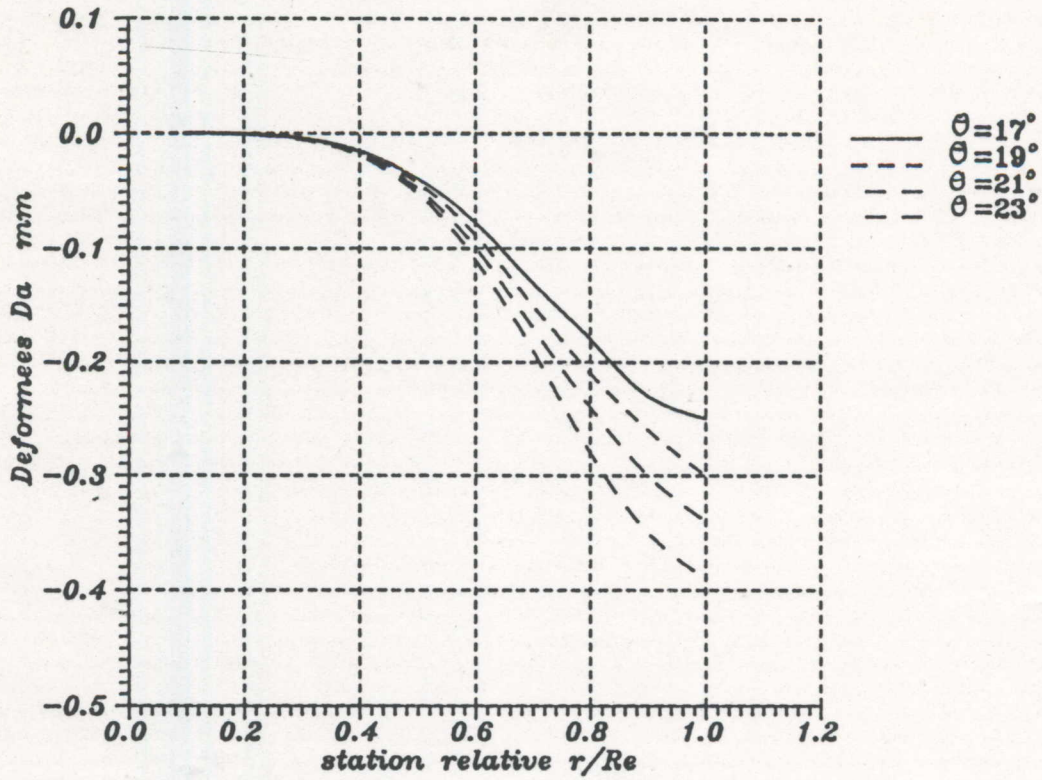


Figure (7-7): Variation de la deformee D_a le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

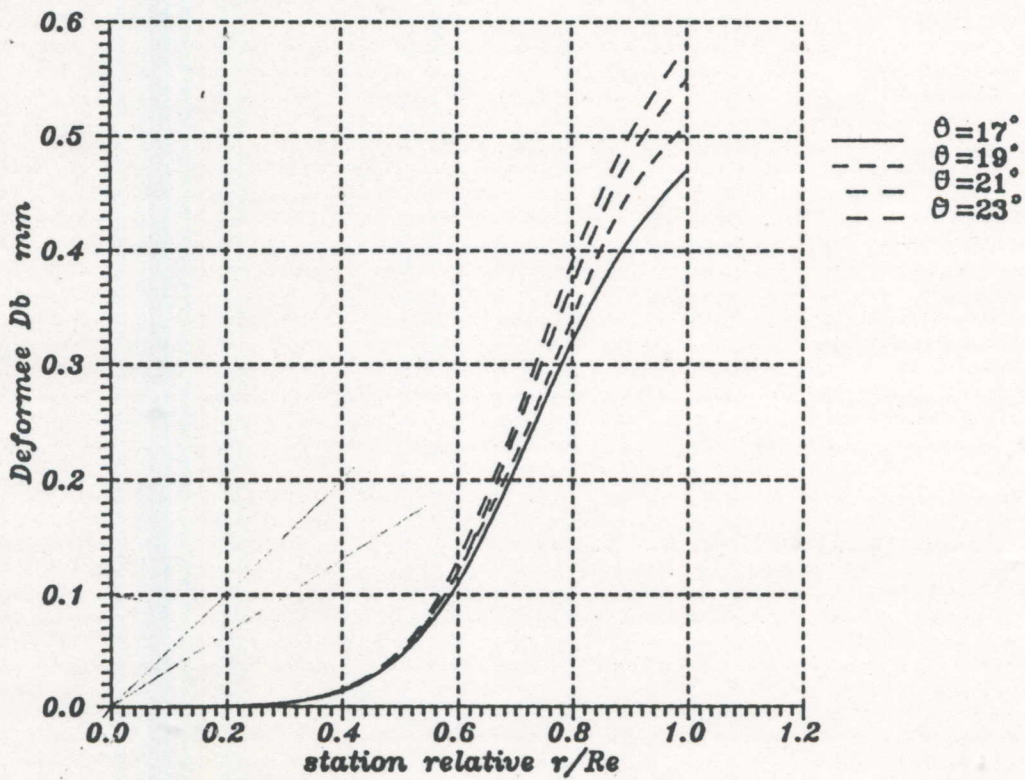


Figure (7-8): Variation de la deformee D_b le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

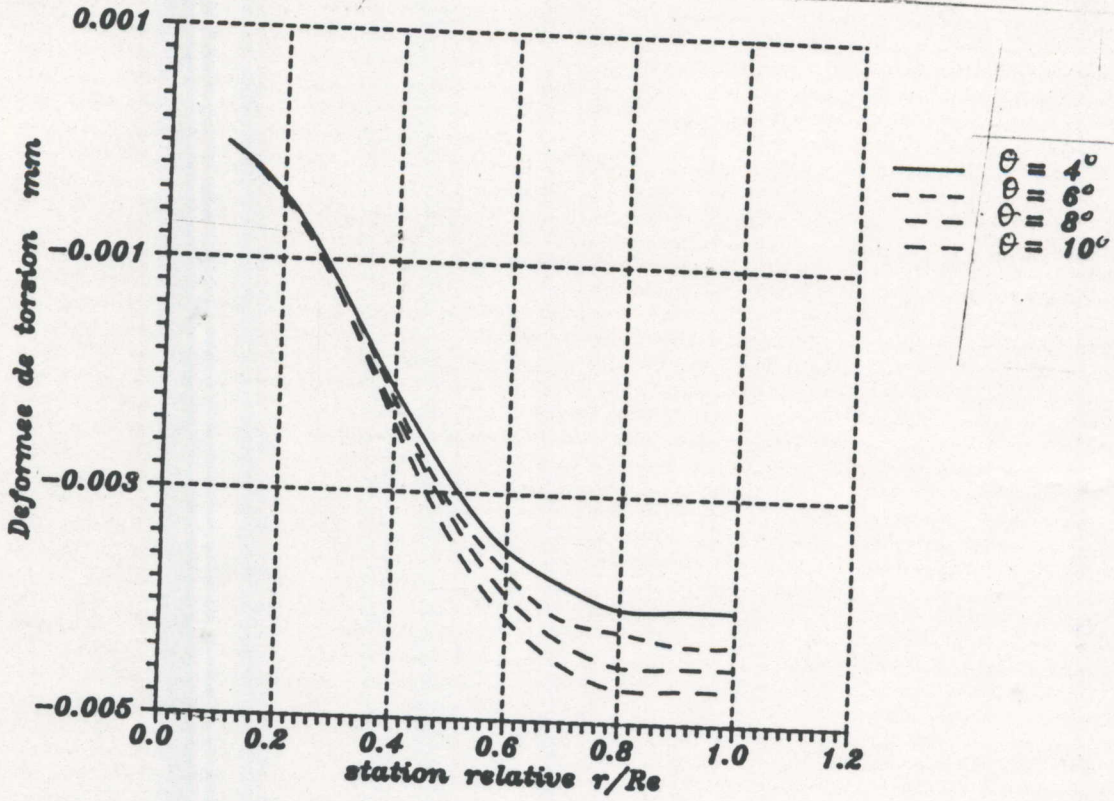


Figure (7-9): Variation de la deforme dues a la torsion le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

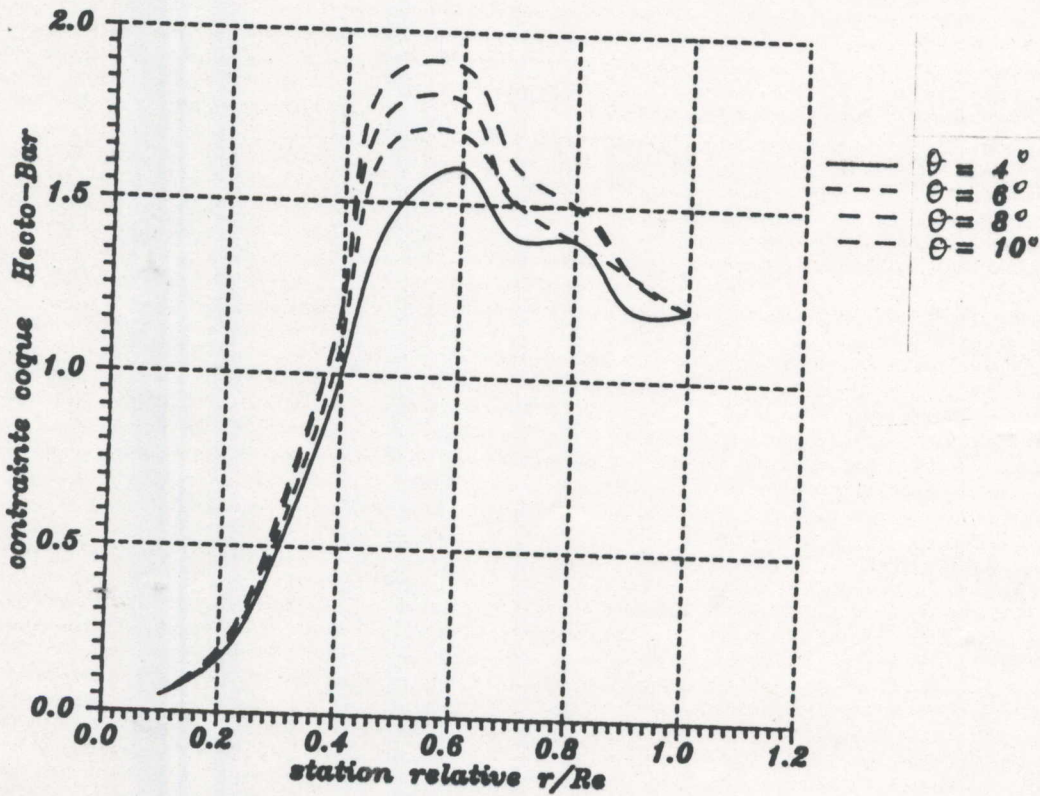


Figure (7-10): Variation de la contrainte qui s'exerce sur la coque le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

Les courbes des figures (7-10) et (7-11) montrent la variation des contraintes s'exerçant respectivement sur le tube et sur la coque. Elle croît du pied jusqu'à un certain maximum au delà duquel elle redécroit, avec un déplacement vers le haut dû à l'augmentation de l'angle de calage.

7-2 Influence de l'angle de calage sur les résultats d'R.D.M en vol de croisière:

Les courbes de la figure (7-12) varient de la même manière que celles obtenues au point fixe, seulement que sa valeur maximale passe de 40 KN à 58 KN.

Les courbes de la figure (7-13) représentent la variation des forces orthogonales qui augmentent du pied jusqu'à l'extrémité de la pale, et l'augmentation de l'angle de calage entraîne leur déplacement vers le bas.

Les courbes de la figure (7-14) représentent la variation de la résultante des forces axiales qui croît du pied jusqu'à l'extrémité de la pale, et l'augmentation de l'angle de calage entraîne leur déplacement vers le haut.

Les courbes de la figure (7-15) représentent montrent la variation du moment résultant de torsion qui croît du pied jusqu'au bout de la pale, et l'augmentation de l'angle de calage entraînent leur déplacement vers le bas.

Les courbes de la figure (7-16) représentent le décroissement du moment d'avancement sur l'intervalle $[0,3.R_e; 0,6.R_e]$ puis un accroissement jusqu'à l'extrémité de la pale, avec une allure pratiquement constante sur l'intervalle $[0; 0,3.R_e]$. Et l'augmentation de l'angle de calage entraîne leur déplacement vers le bas.

Les courbes de la figure (7-17) représentent un accroissement du moment couple sur l'intervalle $[0,3.R_e; 0,6.R_e]$ puis un décroissement jusqu'à l'extrémité de la pale, avec aussi une allure pratiquement constante sur l'intervalle $[0; 0,3.R_e]$. Et l'augmentation de l'angle de calage entraîne toujours leur déplacement vers le bas.

Les courbes des figures (7-18) et (7-19) représentent respectivement des variations croissantes des déformées δ_a et δ_b partant du pied jusqu'à l'extrémité de la pale, et l'augmentation de l'angle de calage entraîne leur déplacement vers le bas.

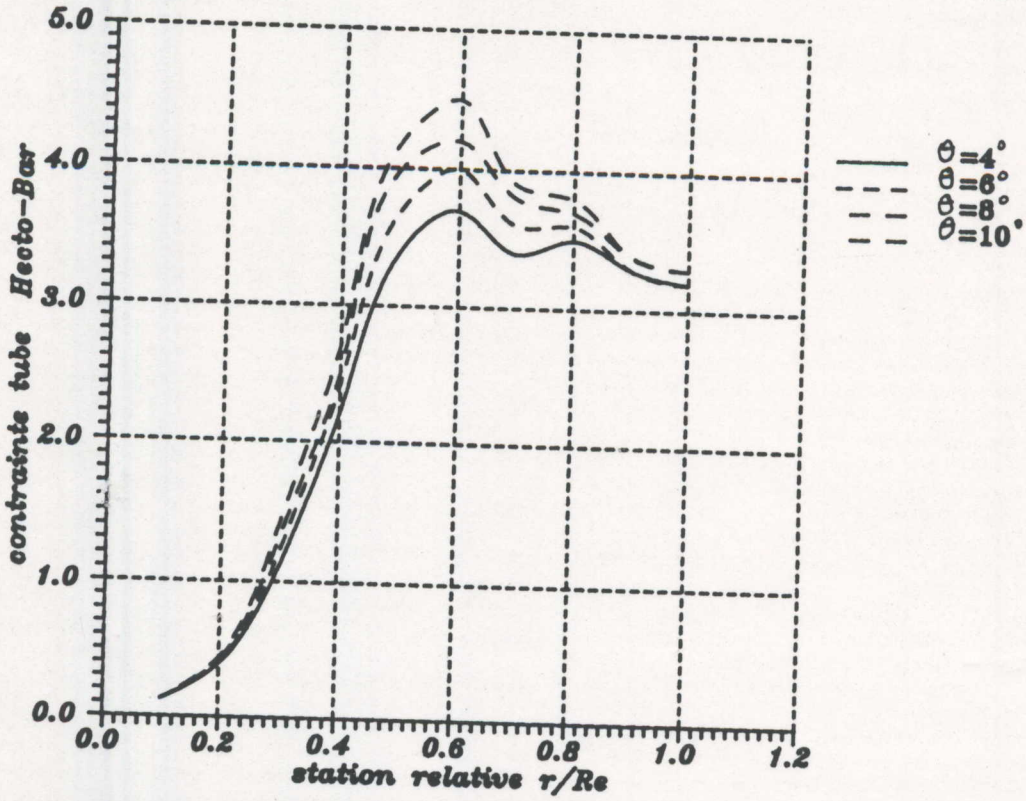


Figure (7-9): Variation de la contrainte qui s'exerce sur le tube le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

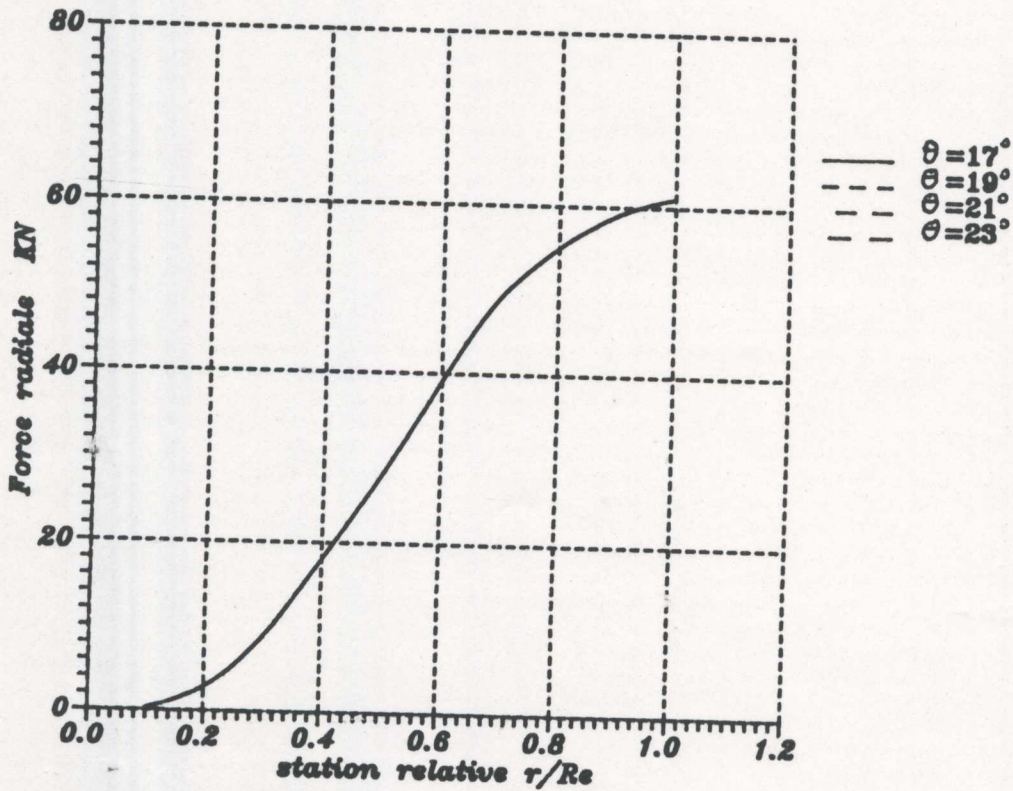


Figure (7-12): Variation de la resultante des forces radiales le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisiere).

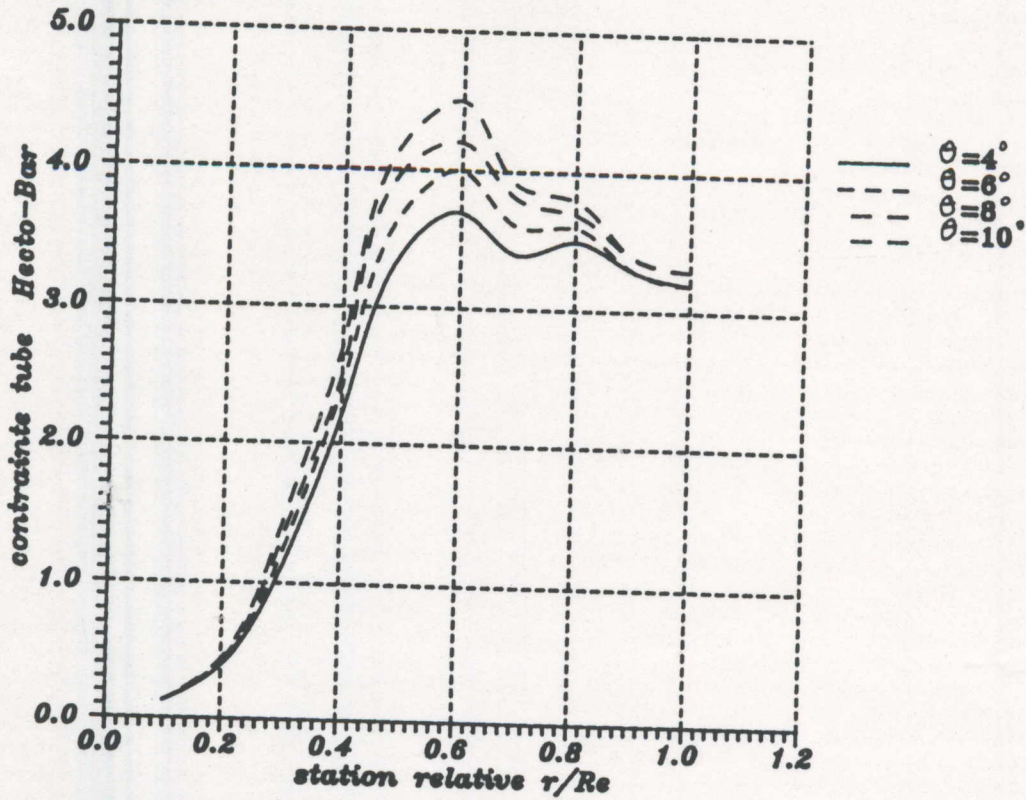


Figure (7-9): Variation de la contrainte qui s'exerce sur le tube le long de la pale en fonction de l'angle de calage (au point fixe).

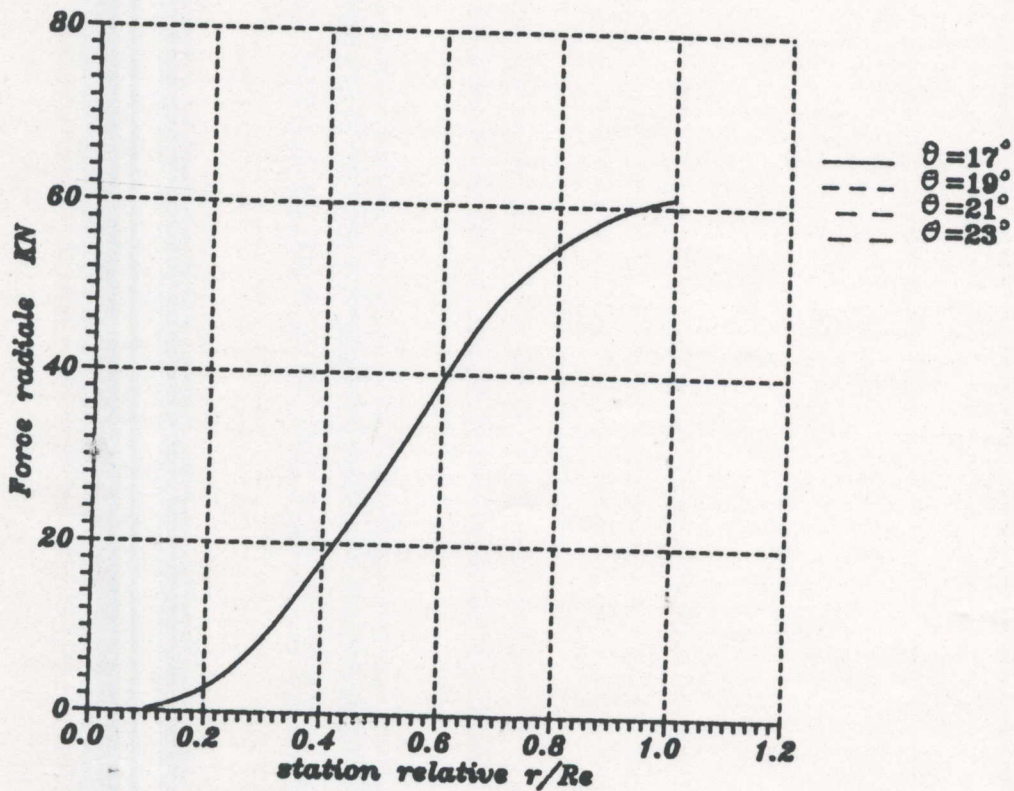


Figure (7-12): Variation de la résultante des forces radiales le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

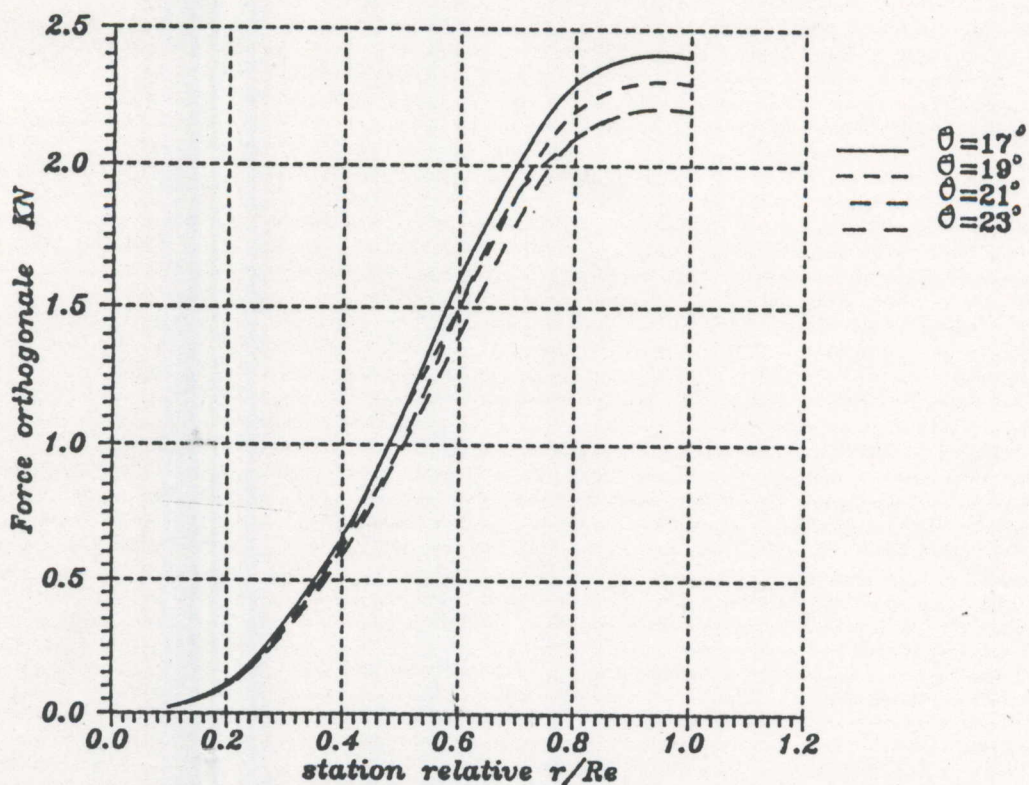


Figure (7-13): Variation de la résultante des forces orthogonales le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

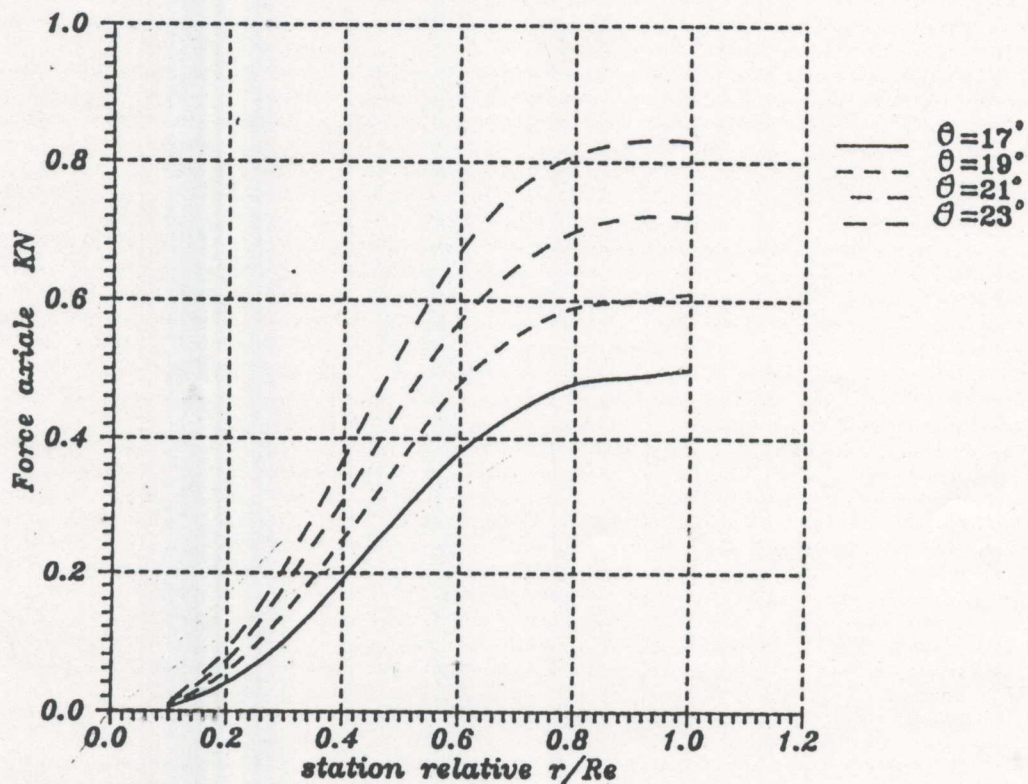


Figure (7-14): Variation de la résultante des forces axiales le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

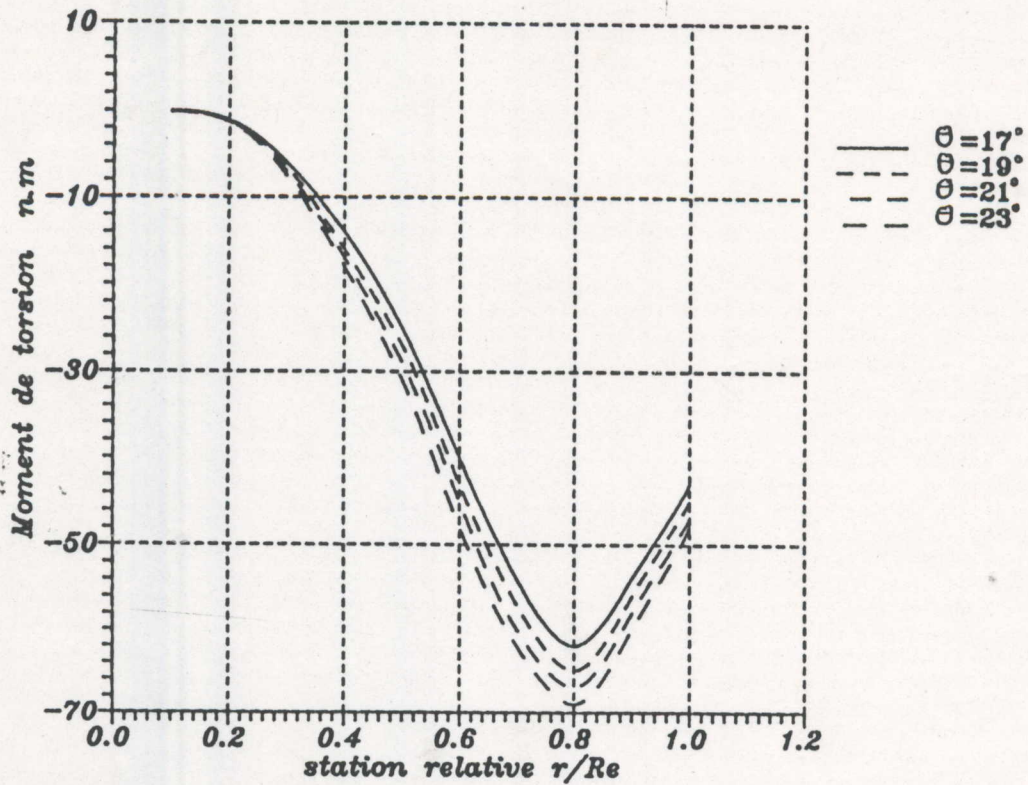


Figure (7-15): Variation du moment de torsion résultant le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

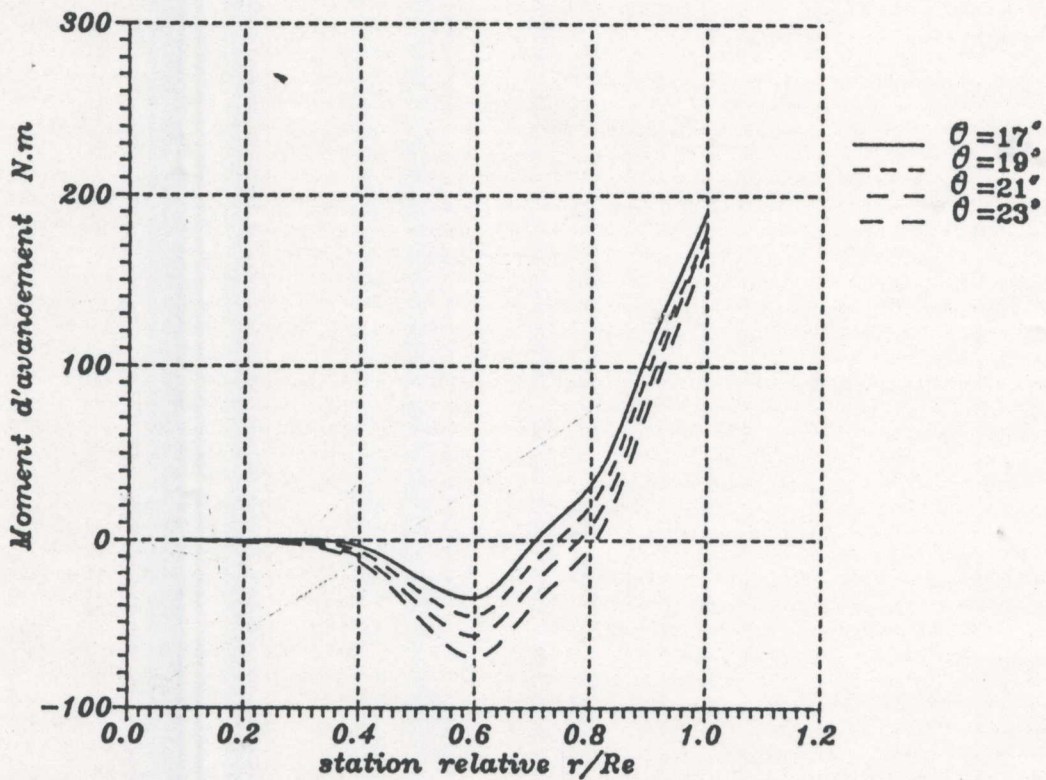


Figure (7-16): Variation du moment d'avancement résultant le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

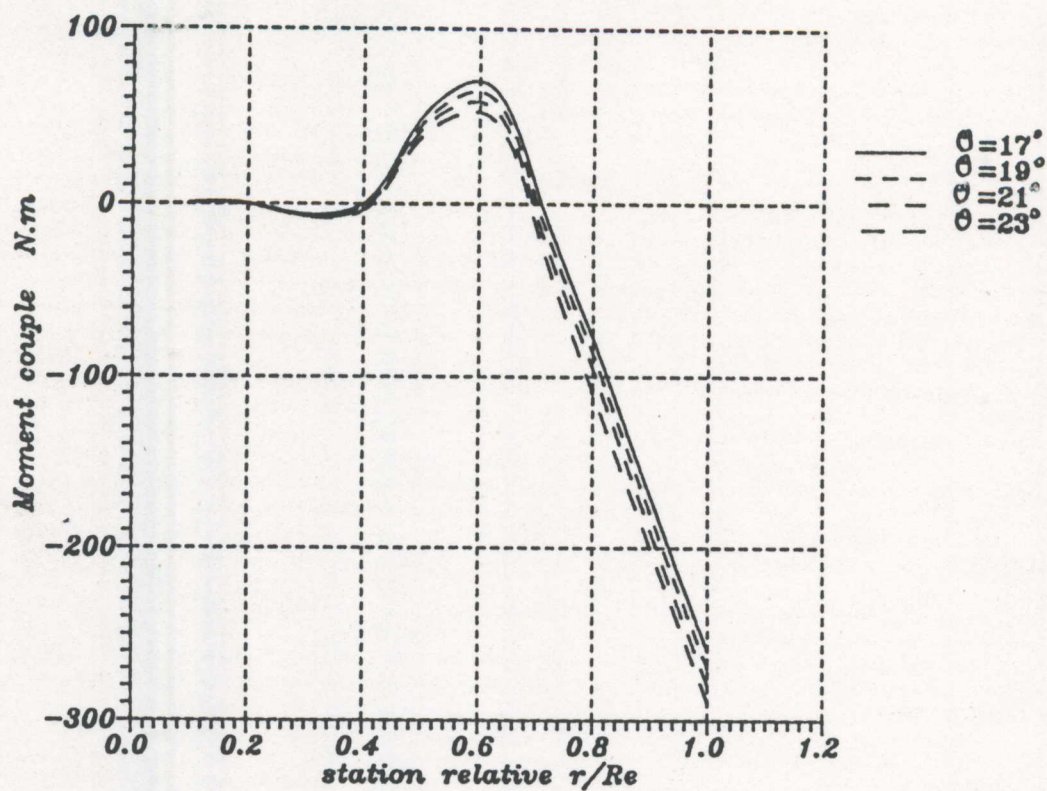


Figure (7-17): Variation du moment couple résultant le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

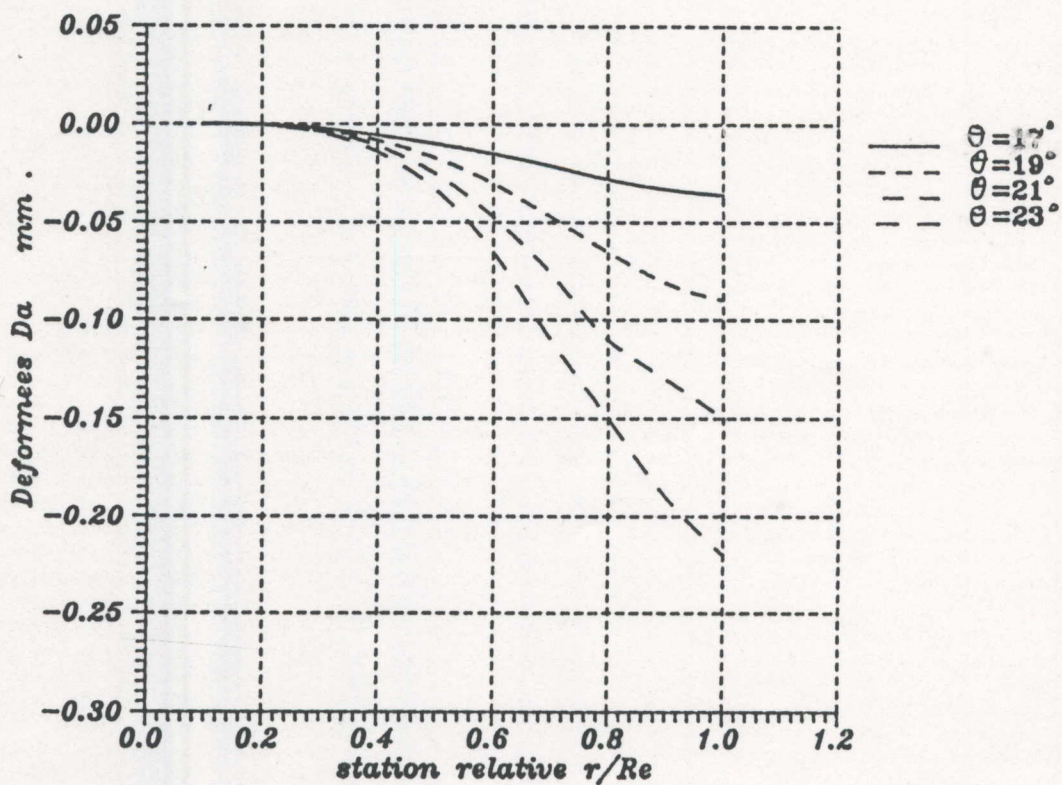


Figure (7-18): Variation de la déformée D_a le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

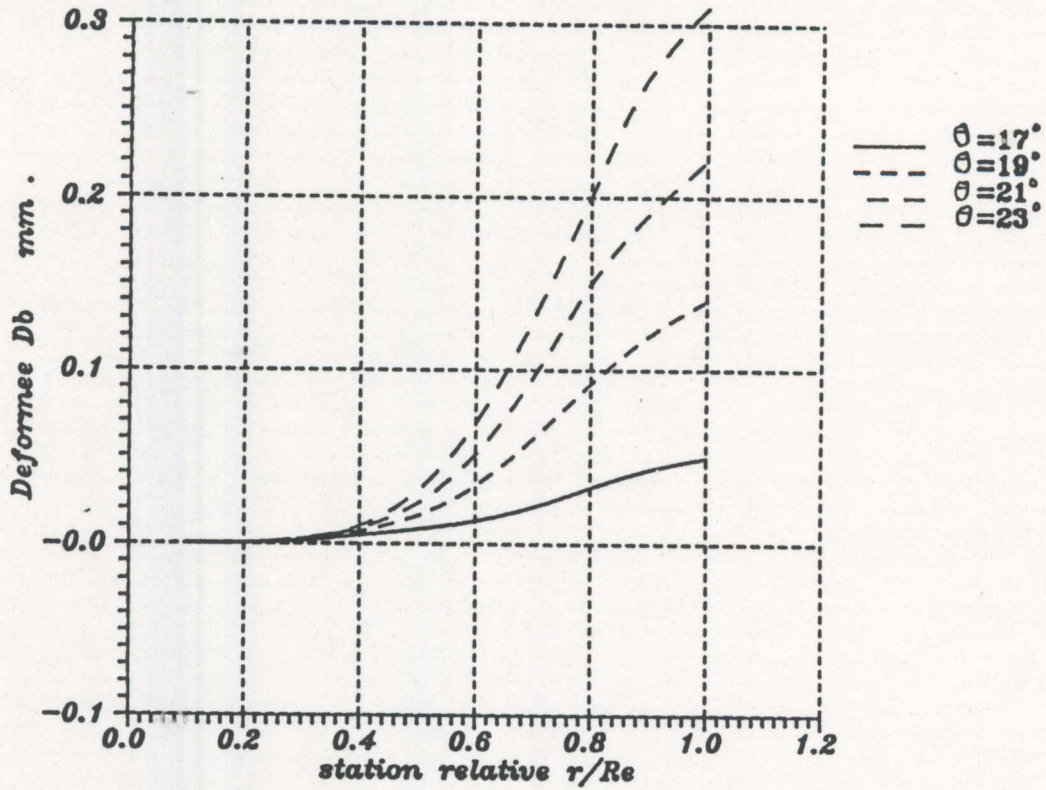


Figure (7-19): Variation de la deformation D_b le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

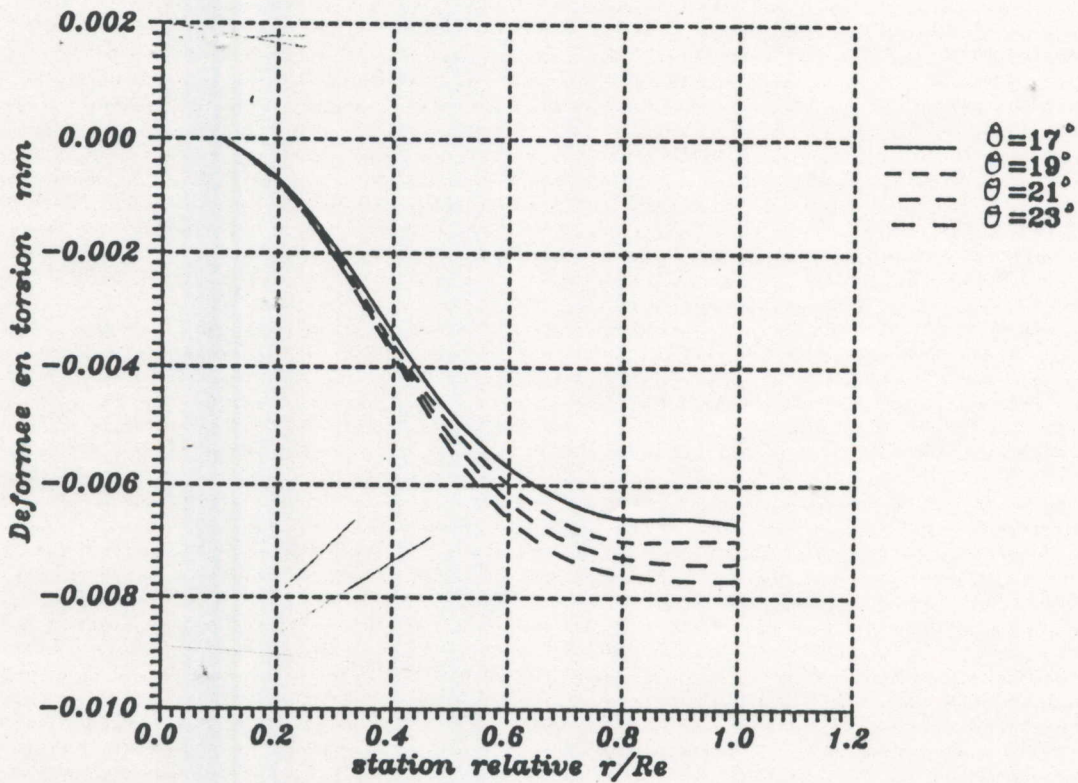


Figure (7-20): Variation de la deformation dues a la torsion le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisière).

Les courbes de la figure (7-20) représentent la variation de la déformée de torsion décroissante du pied jusqu'à l'extrémité de la pale, avec l'augmentation de l'angle de calage qui entraîne leur déplacement vers le bas.

Les courbes des figures (7-21) et (7-22) représentent respectivement les variations croissantes, du pied jusqu'à l'extrémité, des contraintes s'exerçant sur le tube et sur la coque de la pale. On constate l'existence d'un maximum ($r=0,7.R_0$) et d'un minimum ($r=0,9.R_0$). Et l'augmentation de l'angle de calage a tendance d'éliminer les deux points extrêmes.

7-3 Conclusion :

Les résultats obtenus à partir des calculs de résistance des matériaux montrent que la valeur maximale des contraintes s'exerçant sur le tube et sur la coque de la pale d'hélice diminuent lorsque la vitesse d'avancement de l'avion augmente.

On constate aussi que la contrainte maximale s'exerçant sur le tube ($\sigma = 3,5$ Hecto-bar) est inférieure à la contrainte admissible ($\sigma_{adm} = 550-585$ MPa), du matériau composite utilisé (époxyde-fibres de carbone), qui varie avec la température [Ref.7, page 695].

De même, la contrainte maximale s'exerçant sur la coque (1,6 Hecto-bar) est inférieure à la contrainte admissible ($\sigma_{adm} = 360-410$ MPa), du matériau composite utilisé (époxyde-fibres de veres), qui varie avec la température.

Ainsi, on juge de la fiabilité de notre option pour l'utilisation, dans la construction de notre hélice, des matériaux composites cités ci-dessus.

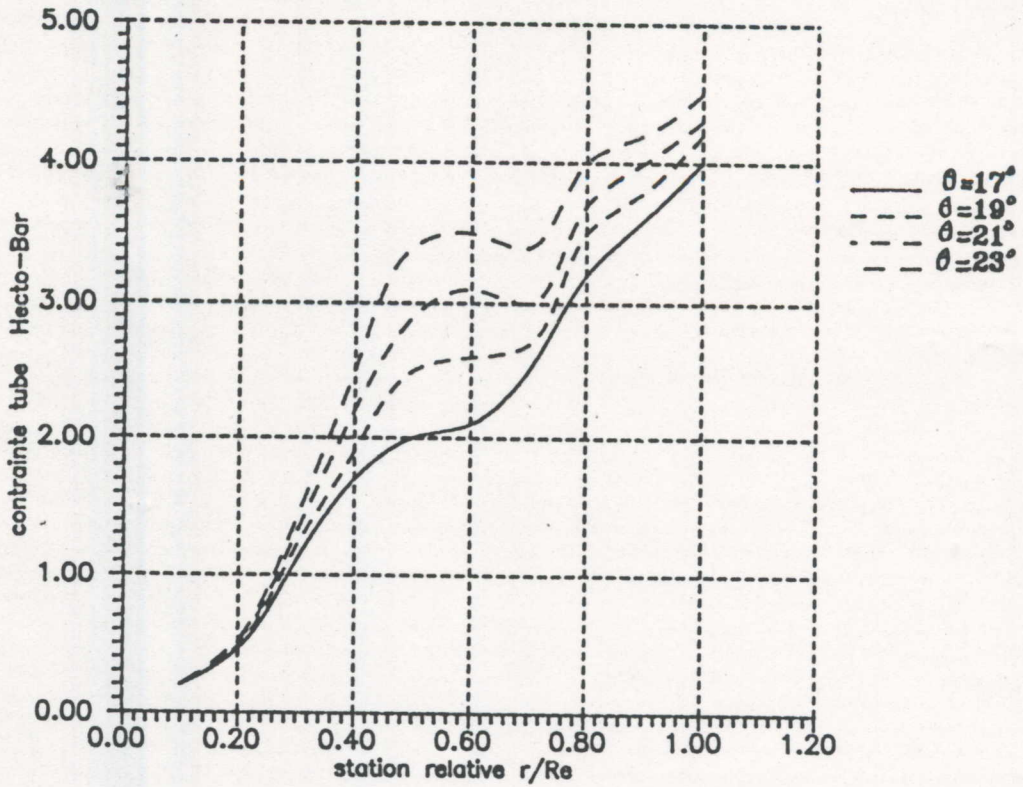


Figure (7-21): Variation de la contrainte qui s'exerce sur le tube le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisiere).

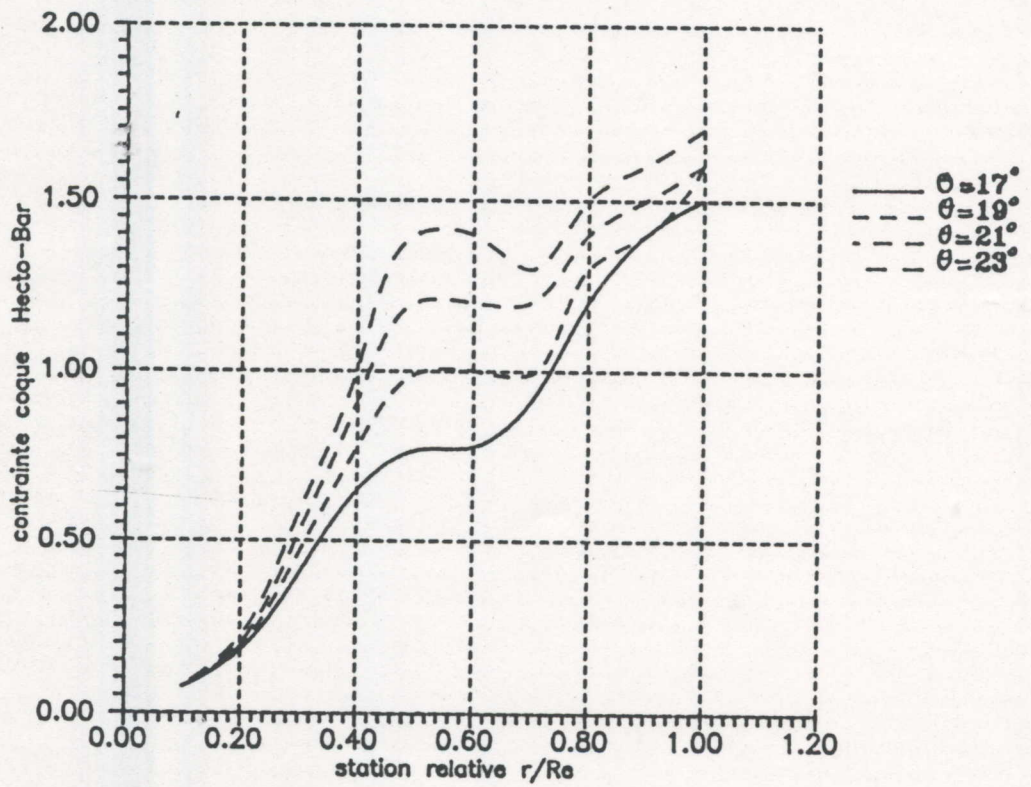


Figure (7-22): Variation de la contrainte qui s'exerce sur la coque le long de la pale en fonction de l'angle de calage (en vol de croisiere).

CONCLUSION

L'idée d'étudier les performances et le calcul de résistance des matériaux d'une hélice est dûe au dynamisme de l'équipe de recherche qui prend en charge la motorisation de l'avion léger, et pour que cette étude puisse cheminer dans de bonnes conditions, il aura fallu attendre jusqu'à 1990, pour qu'un groupe d'enseignants de l'Institut d'Aéronautique, annonce la mise en route d'un programme de réalisation d'un avion léger utilisant un moteur d'automobile.

L'étude d'adapation d'une hélice à pas variable d'un avion léger en matériaux composites montre:

En premier lieu, la détermination des performances de l'hélice (traction, couple résistant, rendement, coefficients de traînée et de portance ...etc).

En second lieu, la détermination des efforts (centrifuges et aérodynamique) qui s'exercent sur la pale, ainsi que le moment de flexion, de torsion et les contraintes qui sont appliquées au niveau de la coque et du tube.

Finalement nous sommes arrivés à conclure que l'angle de calage de la pale dépend de la vitesse d'avancement et de l'altitude de vol, car au point fixe l'angle de calage est l'ordre 4° , par contre en vol de croisière est de 19° . De plus le matériau choisi pour l'utilisation dans la construction de notre hélice a été évalué (époxy + fibres de carbone, époxy + fibres de verre).

Durant l'élaboration de ce projet, nous sommes arrivé à mettre au point un code de calcul qui permet de déterminer toutes les performances, ainsi que le calcul de résistance des matériaux de l'hélice d'avion, ceci pour différents angles de calage et de nombre de pales.

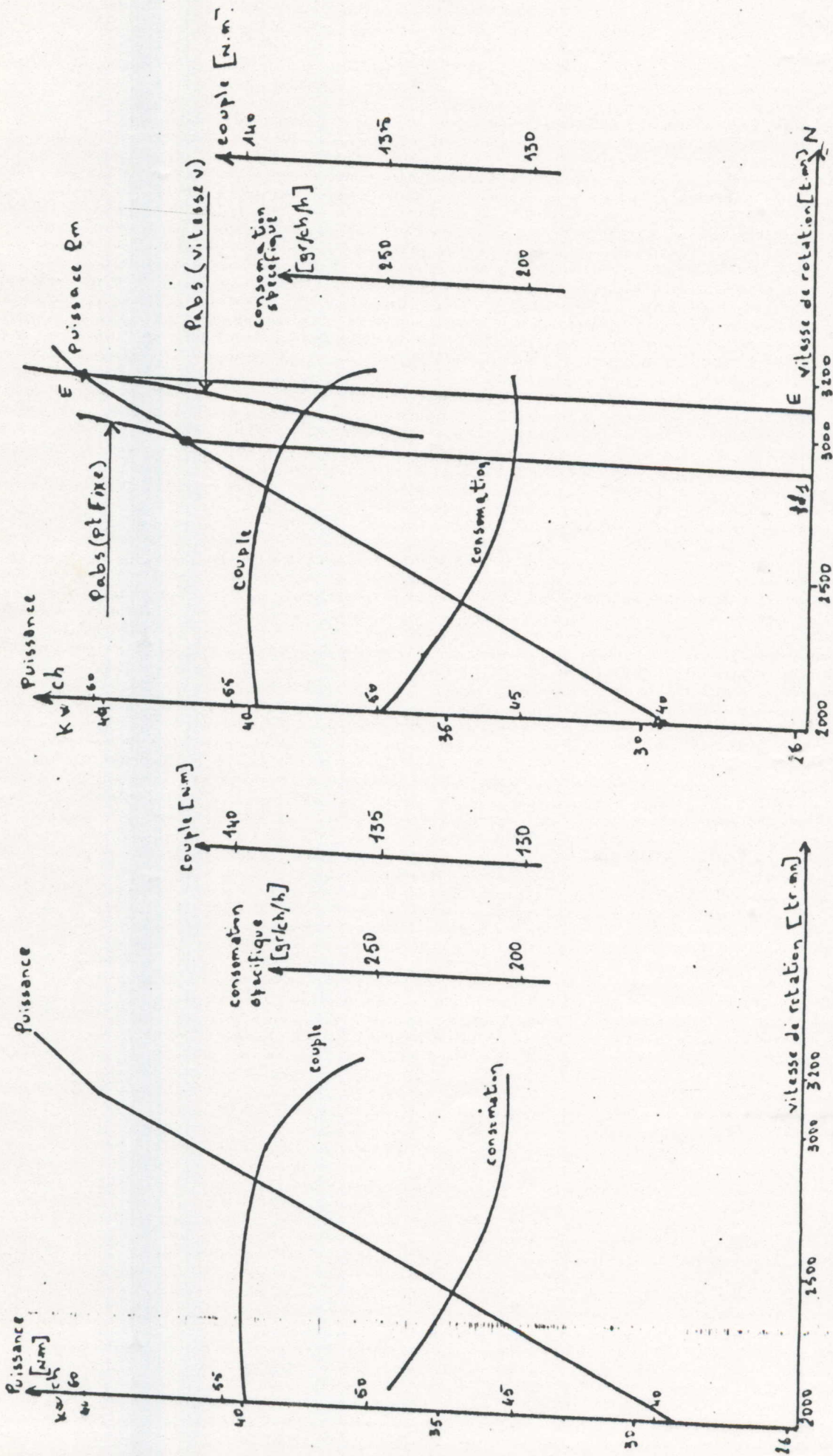
En fin, nous souhaitons que notre travail servira de support pour les Enseignants et les futures Etudiants.

BIBLIOGRAPHIE

- 1- P.REBUFFET "Aérodynamique expérimentale" (tome 1)
Librairie Benanger (Dunod 1950).
- 2- CHUAN-TAN EDWARD.CAN et J.ROSKAM "Airplane aerodynamics
and perfomance" University of Kansas (1988).
- 3- R.HIRSCH "Détermination et calcul des hélices d'avions
optima, simple et coaxiales" (tome 1).
PST.[ministère de l'air n°220 et 225 (1949)].
- 4- BISPLINGHOFF-ASCHLEY et HALFMANN "Aeroelasticity"
Addison Wesly publishing company. Inc(1957).
- 5- J.BRAYARD "Le projet de l'hélice",Ecole nationale
supérieure de techniques avancées (tomes 1,2,3 et 4),1979.
- 6- S.LAROSE "Résistance des matériaux et structures"
Eyrolles-Masson 1980 (tomes 1 et 2).
- 7- J.A.BRYDSON "Plastics-Materials",Butterworth scientific
head of the department of physical sciences and technology
(Polytechnic of North London).
- 8- A.C.KERMODE "Mécanique du vol"
Editions Eyrolles (Paris 1982).
- 9- R.OUZIAUX;J.PERRIER "Mécanique des fluides appliquée"
(tome 1) mécaniques des fluides (Dunod).
- 10- S.TIMOSHENKO et J.N.GOODIER "Théorie de l'élasticité"
Librairie polytechnique Béranger (1961).
- 11- J.P HERTEMAN "Matériaux aéronautiques"
Publié par l'école nationale supérieure d'ingénieurs de
constructions aéronautiques de Toulouse; ENCICA (1985).

- 12- J.ROUCHON "Matériaux composites aéronefs"
Publié par l'école nationale supérieure d'ingénieurs de
constructions aéronautiques de Toulouse; ENCICA (1987).
- 13- J.M.BOUSQUET "Introduction à l'aérodynamique des hélices"
Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de
l'espace (1989).
- 14- I.H.ABBOTT et E.ALBERT VON DOENHOFF "Theory of wing
sections"
- 15- T.MAUTNER and M.GILLCRIST "AIAA Papers N°92-0520"
pages 1-7. San Diego,CA 92152 (1992).
- 16- G.P.ZAITSEV and S.A.SILANT'EV " Soviet aeronautics V.D.C
629.7:539.4" (1982).
- 17- E.V.LAITONE "Performance predicting for light airplanes"
AIAA N°81-4289. University of California;Berkeley.Calif.
- 18- R.HIRSCH "Détermination théorique des caractéristiques des
rotors",Ecole nationale de l'aéronautique et de l'espace;
Toulouse (1971).
- 19- G.P.ZAITSEV and S.A.SILANT'EV "Determining the strength of
GRP airplane propeller blades" Izvestiya VUZ.Aviatsionnaya
Tekhnika.Vol 25,No 4,pp 95-99,1982.
- 20- INGE.L.RYHMING "Dynamique des fluides"
Edition ISBN-2-88074-068-1 (1985).

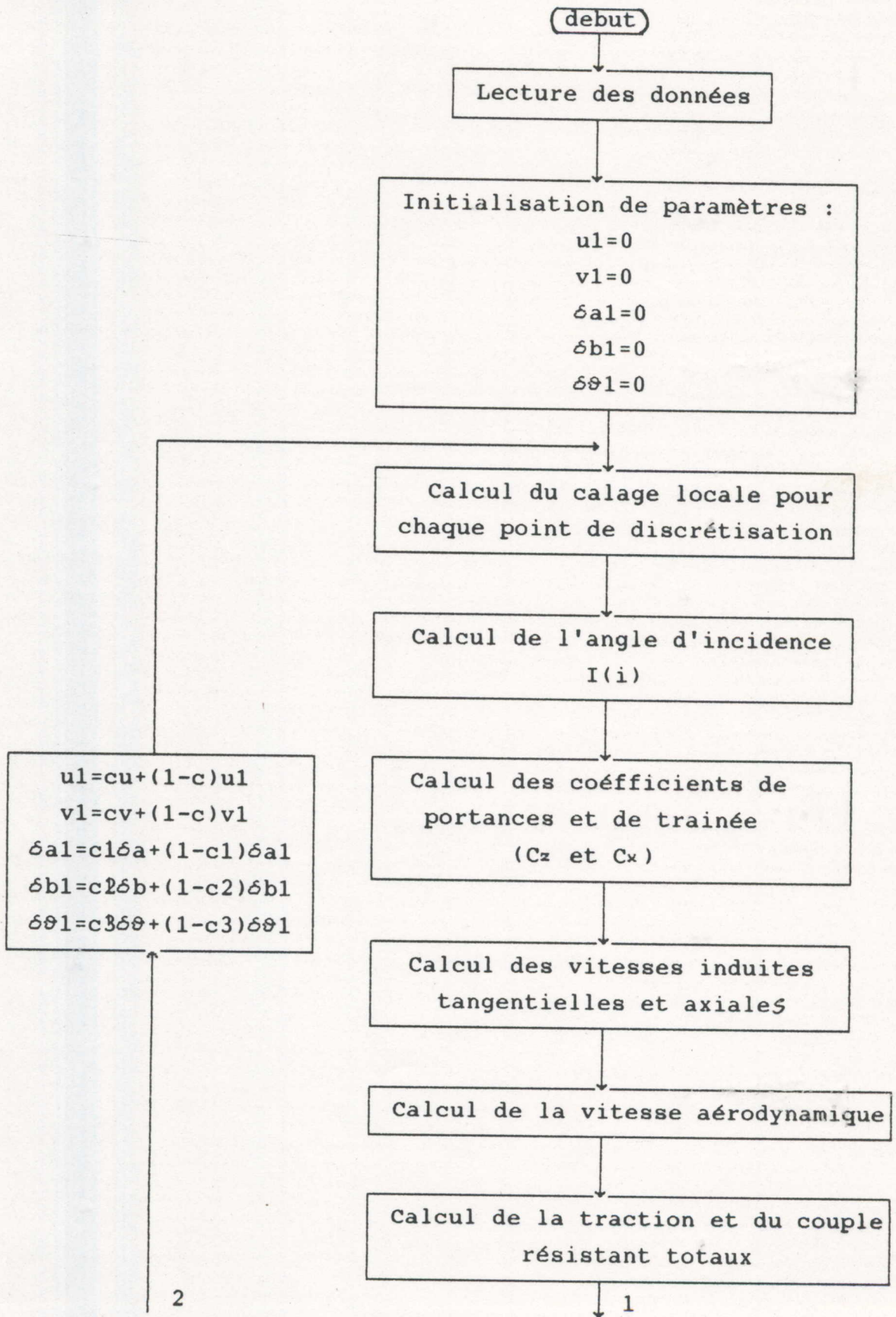
ANNEXE 1

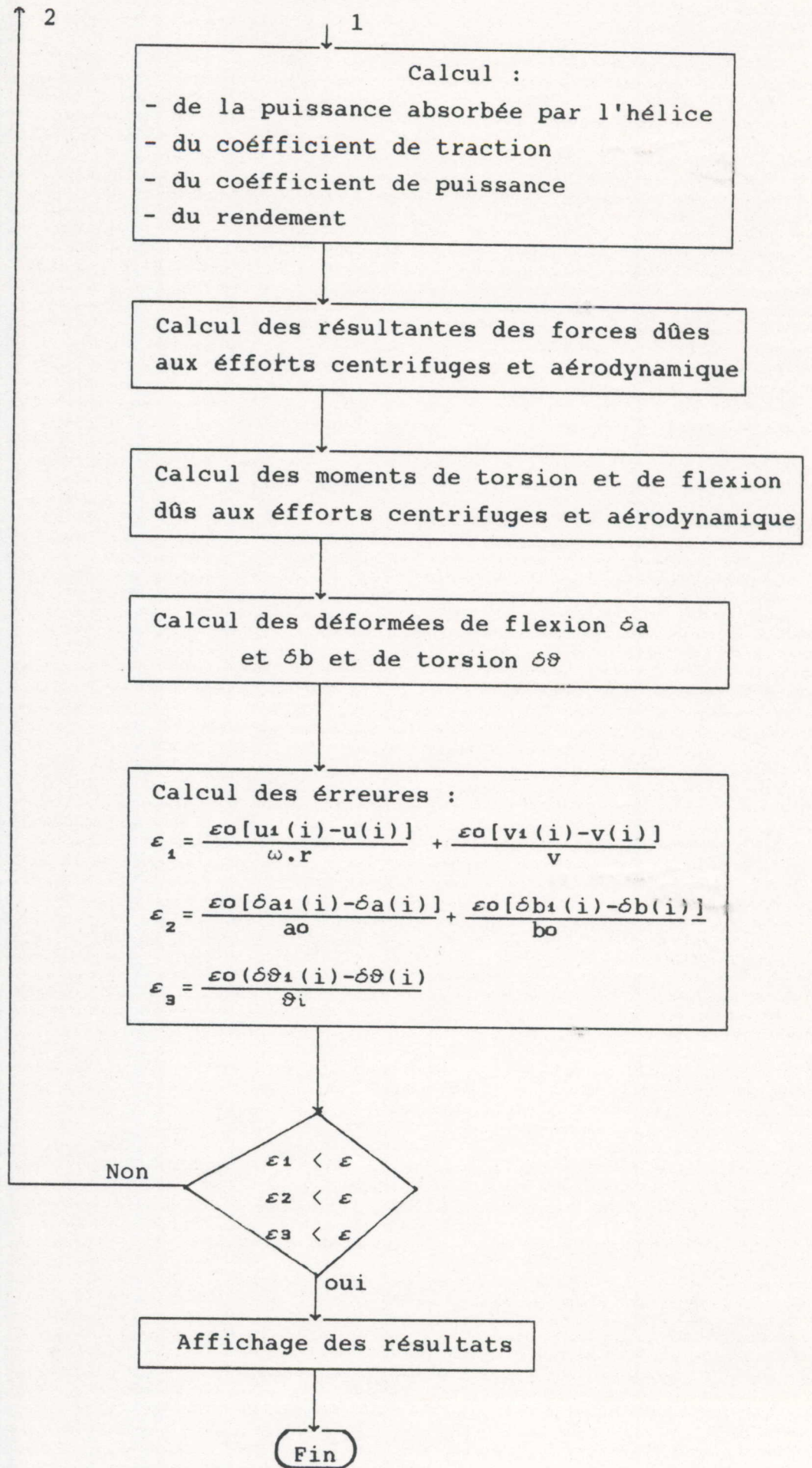


CARACTERISTIQUES DU MOTEUR V6

ANNEXE 2

ORGANIGRAMME :

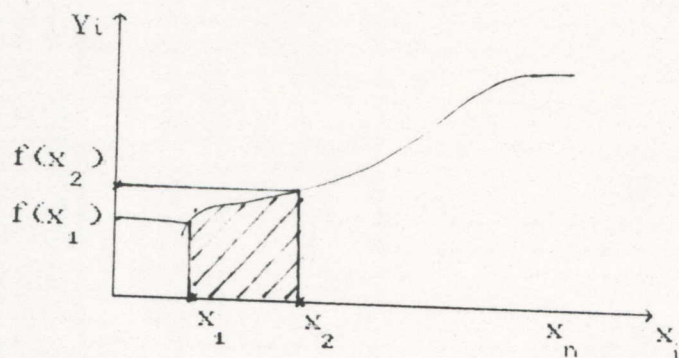




ANNEXE 3

METHODE DES TRAPEZES

Soit une fonction $Y_i = f(x_i)$



$$S = \int_{x_0}^{x_n} Y_i dx_i$$

Supposons que le pas est constant.

d'où :

$$S_1 = \Delta x_0 \cdot f(x_0) + \frac{\Delta x_0}{2} [f(x_1) - f(x_0)]$$

$$S_1 = \frac{\Delta x_0}{2} [f(x_1) + f(x_0)]$$

⋮

$$S_i = \frac{\Delta x_0}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \frac{\Delta x_0}{2} \left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \cdot f(x_{i-1}) \right]$$

Organigramme de la méthode de trapèzes :

