

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT D'ELECTRONIQUE

THESE DE MAGISTER

SPECIALITE ELECTRONIQUE

Option : c o n t r ô l e

Thème

**ROBUSTESSE ET TEMPS DE
CONVERGENCE D'ALGORITHMES
ADAPTATIFS AVEC MODELE DE
REFERENCE**

PAR

BENCHERCHALI Mohamed Amine

Présentée devant le jury : Mr : A. GUESSOUM
Mr : A. BELKHROUF
Mr : K. AMOUR
Mr : H. BENCHOUBANE
Mr : D. AMRANI

Président
Examinateur
" "
Rapporteur
Invité

BLIDA , ALGERIE

1995



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUEUNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT D'ELECTRONIQUE**THESE DE MAGISTER****SPECIALITE ELECTRONIQUE***Option : c o n t r ô l e***Thème****ROBUSTESSE ET TEMPS DE
CONVERGENCE D'ALGORITHMES
ADAPTATIFS AVEC MODELE DE
REFERENCE**

PAR

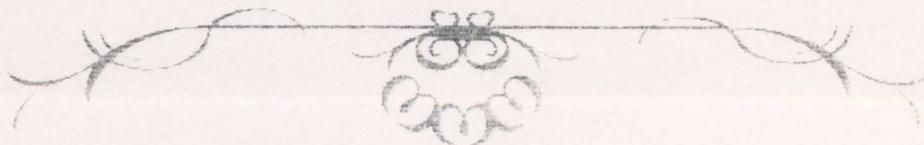
BENCHERCHALI Mohamed Amine

Présentée devant le jury : Mr : A. GUESSOUM
Mr : A. BELKHROUF
Mr : K. AMOUR
Mr : H. BENCHOUBANE
Mr : D. AMRANI

Président
Examineur
"
Rapporteur
Invité

BLIDA , ALGERIE

1995



DEDICACES

*A mon PÈRE , à ma MÈRE , à mon très regretté
Oncle Abderrahmane*

*Lequel de nous , tenté depuis l'enfance par le songe causé par
la magie de continents mystérieux , contemplation béate d'un ciel où
un léger nuage permettait d'espérer un peu de pluie , n'a pas prié pour
inscrire son nom sur l'album du temps afin de traverser les âges ?*

*Ma famille qui subissait (heureusement pas trop souvent)
les méfaits dûs aux travaux de recherche de nature assez
stochastiques pour laquelle extraordinaire quelle soit , m'a comblé ne
pourrais et ne serais jamais oubliée .*

*Cette thèse lui étant dédiée , scellera par la marque d'une encre
indélébile non seulement l'amour que je lui porte mais aussi son
passage merveilleux dans ma fantastique petite histoire .*

J'en rends grâce à DIEU

REMERCIEMENTS

Je remercie très vivement tous les membres du jury de cette thèse .

Ces derniers se tournent avec adresse particulière vers Monsieur H.BENCHOUBANE mon directeur de thèse , Maître de conférence à l'Institut d'Electronique de Blida , qui à non seulement dirigé mes travaux mais aussi pour son mérite d'avoir soutenu une logique de travail ayant abouti à la cristallisation de mes espérances par des résultats concrets . Ma reconnaissance lui étant destinée sera sans fin .

Monsieur A.GUESSOUM , Directeur de la postgraduation et de la recherche de l'Institut d'Electronique qui a accepté de présider le jury de cette thèse .

Monsieur A.BELKHEROUF , maître de conférence à l'Institut d'Aéronautique de l'Université de Blida qui me fait l'honneur de participer au jury .

Monsieur K.AMOUR , maître de conférence à l'Institut d'Electronique de l'Université de Blida pour sa collaboration éclairée dans l'examen de cette thèse .

Monsieur D.AMRANI , Maître assistant à l'Institut d'Electronique de l'Université de Blida , d'avoir accepté d'être membre invité du jury .

J'aimerais remercier H.SALHI pour son aide dans la mise à ma disposition de toute sa documentation , témoignage de ses encouragements .

Merci aussi à Messieurs L.CHIKHI , M.BOUNEKHLA , H.MELIANI , Z.A.BENSELAMA , A.FERDJOUNI , M.AIDJA , M.FERDJOUNI , M.DERBAL , H.OULDROUIS , R.DJOUAHER , M.EL-BEY , M.EL-MOHRI , K.FERDJANI , K.SOUKAL , A.BOUNEMRI , Y.CHORFA , M.BENSEBTI qui pour la plupart ont , sans le savoir cristallisés les voeux de cette thèse avec les mots pour rire et surtout avec leur grande sagesse .

Un grand merci à quatre amis particuliers et franchement singuliers puisque faisant partie de ma famille affective , M^{lle} F-Z.ZEMIRLI , M^r D.BABA-AISSA , M^r R.BELHADI et M^r A.EDDAIKRA qui ont spontanément donnés une âme à mes travaux .

3.6	: Application aux systèmes non linéaires	34
3.6.1	: Méthode de LYAPUNOV	34
3.6.2	: Chemin analytique	35
3.6.3	: Application de la méthode directe de LYAPUNOV	36
3.7	: Recherche de fonctions de LYAPUNOV quadratiques pour l'élaboration d'une loi adaptative de commande à partir de la méthode directe dans le cas M.R.A.C	37
3.7.1	: Cas de l'hypothèse 3.3.1	38
3.7.2	: Cas où $d(x_s, t)$ n'est pas décomposable en fonction des états x_s	40
3.8	: Systèmes décrits par des formes canoniques : dérivation de l'algorithme M.C.S	41
3.8.1	: Systèmes S.I.S.O	41
3.8.2	: Méthode d'obtention d'une commande à action proportionnelle + intégrale	46
3.9	: Stratégie de synthèse d'un contrôleur minimal (cas M.C.S)	48
3.10	: Stratégie d'hyperstabilité	49
3.10.1	: Position du problème	49
3.10.2	: Notion de systèmes linéaires associés	49
3.11	: Matrices et fonctions de transfert positives réelles	50
3.12	: Critère de POPOV	51
3.13	: Inégalité de POPOV (théorème d'hyperstabilité)	51
3.14	: Résolution de l'intégrale de POPOV (cas M.C.S)	52
3.14.1	: Systèmes S.I.S.O	52
3.14.2	: Cas de l'hypothèse 3.3.1 (Systèmes S.I.S.O)	53

CHAPITRE IV : COMMANDE ADAPTATIVE MULTIVARIABLE - GENERALISATION AUX SYSTEMES CANONIQUES	56
4.1 : Méthode des fonctions de LYAPUNOV	69
CHAPITRE V : ROBUSTESSE DES ALGORITHMES DE COMMANDES EN PRESENCE DE DYNAMIQUES NON LINEAIRES , DE PERTURBATIONS OU DE VARIATIONS PARAMETRIQUES	76
5.1 : Systèmes S.I.S.O	78
5.1.1 : Majoration de la norme de l'erreur dynamique $X(t)$	79
5.1.2 : Majoration de la norme du gain dynamique $K(t)$	79
5.2 : Preuve d'existence de limites pour les normes dynamiques respectives de l'erreur et du gain d'adaptation	81
5.2.1 : Cas de non linéarité pure sans manifestation de perturbations externes	81
5.2.2.1 : Systèmes S.I.S.O	81
5.2.2 : Majoration de la dérivé (5-26)	84
5.2.3 : Majoration de $\ X_e\ $ et $\ K\ $	86
5.2.3.1 : Borne supérieure de $\ X_e\ $	86
5.2.3.2 : Borne supérieure de $\ K\ $	86
5.3 : Limite des normes dans le cas de variations paramétriques	87
5.3.1 : Cas de variations paramétriques lentes	89
5.3.2 : cas de variations paramétriques quelconques	89
5.4 : Généralisation au cas multivariable	90
5.4.1 : Majoration de $\ X_e\ $ et $\ K\ $	92
5.4.2 : Cas de perturbations paramétriques	93

5.5	: Simulations et interprétations	98
5.5.1	: Cas du bras manipulateur	98
5.5.2	: Cas de la plateforme de réservoirs	103
CHAPITRE VI	: ROBUSTESSE DE L'ALGORITHME M.C.S DANS LE CAS DES MODIFICATIONS σ ET ϵ	111
6.1	: Systèmes S.I.S.O	111
6.1.1	: Cas de la modification σ	111
6.2	: Systèmes M.I.M.O	115
6.2.1	: Cas de la modification σ	116
6.3	: Cas de la modification ϵ	121
6.3.1	: Cas S.I.S.O	121
6.3.2	: Cas M.I.M.O	122
6.4	: Discussion	124
6.4.1	: Systèmes S.I.S.O	124
6.4.1.1	: Cas de la modification σ (recherche d'une condition de pondération)	125
6.4.1.2	: Cas de la modification ϵ (recherche d'une condition de limite)	127
6.5	: Systèmes M.I.M.O	130
6.6	: Cas de perturbations paramétriques	133
6.6.1	: Cas de la modification σ	133
6.6.2	: Cas de la modification ϵ	133
6.7	: Simulation et interprétations	133
CHAPITRE VII	: ESTIMATION ANALYTIQUE D'UN TEMPS DE REPONSE	149
7.1	: Recherche analytique d'un temps de réponse (pour les Systèmes S.I.S.O)	149

7.1.1 : Cas de la modification σ	149
7.1.1.1 : Absence de perturbations paramétriques	150
7.1.1.2 : Présence de perturbations paramétriques	151
7.2 : Vérification par simulations	156
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	163
BIBLIOGRAPHIE	169
ANNEXES	175

INTRODUCTION

La théorie des systèmes adaptatifs a commencé à se développer, il y a plus de vingt ans environ. De nombreux problèmes ont été abordés et résolus laissant toutefois, un grand nombre ouverts.

Les travaux concernant les systèmes adaptatifs s'intensifièrent au milieu et à la fin des années soixante dix, comme en témoignent la plupart des publications.

Des systèmes continus, le champ d'investigation s'étendit aux systèmes discrets représentés par des équations aux différences. Des algorithmes adaptatifs discrets sont alors développés, tant pour l'identification, l'observation d'état que pour la commande de systèmes discrets. La prise en compte de certaines dynamiques et la modélisation de perturbations soulevèrent de nouveaux problèmes. De nouvelles méthodes d'analyse sont alors développées.

Le problème de la commande adaptative multivariable est resté longtemps à l'écart des préoccupations des spécialistes de l'adaptatif puisque depuis seulement quelques années ce sujet constitue un axe important de développement avec son approche par matrices de transfert ou d'état.

Les premiers travaux relatifs à la commande adaptative des systèmes multivariables remontent approximativement vers le milieu des années 1970 (Monopoly et Hsing (1975)) avec apparition dans la littérature d'un ensemble de travaux relatifs à ce sujet, vers la fin de ces mêmes années.

L'approche fondamentale dans cette littérature faisant ressortir la manière d'aborder le problème de la commande multivariable comme une observation généralisée d'un problème monovariable.

Le constat effectué durant le parcours de thèse était que la mise en oeuvre de bons schémas de commande adaptative multivariable nécessitait d'abord pensée multivariable avant pensée adaptative.

Les résultats furent immédiats puisqu'ils portaient sur l'étude des propriétés structurelles des systèmes multivariables, le développement de paramétrisations permettant de réaliser à la fois une bonne commande et une possible identification quand les paramètres sont inconnus ou non.

Afin d'en rendre la lecture plus aisée , une partie non négligeable de cette thèse introduira l'aperçu des méthodes d'analyse et de synthèse d'un système adaptatif pour un type donné de schéma de commande . Ceci pour permettre à un régulateur performant , de fonctionner dans des conditions étendues d'opérations .

Ce travail prenant pour support d'études , les travaux de publications du directeur de thèse M^r H.BENCHOUBENE , sur la méthode M.C.S s'articulera approximativement autour de quatre axes de travaux principaux , eux - mêmes partagés en chapitres .

Le premier axes s'attachera à présenter les notions de bases relative aux techniques de synthèses de lois de commandes dans les cas S.I.S.O et M.I.M.O .

Le second pivotera essentiellement autour de la commande adaptative des systèmes multivariables .

Le troisième s'orientera vers le coeur du problème de convergence et de stabilité lors de l'induction de coefficients de pondérations statiques ou dynamiques soulever par le contexte des modifications σ et e .

Le dernier enfin , s'attachera à discuter le profils de systèmes ayant fait l'objet de simulation à des fins d'études comparatives avec la théorie .

CHAPITRE

I - HISTORIQUE DE LA COMMANDE ADAPTATIVE

La recherche de performances élevées voire optimales passe par la réalisation de systèmes complexes, entendu par là de systèmes constitués d'un grand nombre de composants élémentaires interconnectés les uns aux autres suivant une structure déterminée.

Il est clair dans ce contexte que le recours à certaines méthodes de mathématiques appliquées est absolument indispensable.

Par le passé, ont été développées " empiriquement " des réalisations très heureuses de " systèmes " au sens actuel du terme. La clepsydre, par exemple, apparemment inventée par le mécanicien grec KTESIBIOS au III^e siècle avant J.C et perfectionnée par les arabes au IX^e siècle, est une belle illustration d'une régulation par contre réaction, de même que de nombreux mécanismes ingénieux développés pendant la révolution industrielle, tel le régulateur à boules de WATT.

Cependant, mis à part quelques rares efforts d'analyses mathématiques (J.C Maxwell en 1869, Routh en 1877), il a fallu attendre le XX^e siècle et pratiquement les années 30 pour voir se développer des techniques mathématiques permettant de faire le projet de systèmes complexes satisfaisants, en particulier stables et peu sensibles aux variations des composants, à l'occasion d'études des circuits électroniques à tubes indispensables aux télécommunications à longue distance (Black, Bode, Nyquist).

La deuxième guerre mondiale apportant son lot de nécessités dans la réalisation de systèmes de commande d'armes à hautes performances jointe à l'évolution des techniques de l'électronique a conduit au développement tant aux U.S.A qu'en ex U.R.S.S à ce qu'il convient d'appeler aujourd'hui " La théorie classique des asservissements ". C'est vers cette époque aussi que la notion de Feedback était reconnue comme un concept scientifique fondamental (Wiener dans son ouvrage " Cybernetics ").

Après la pause qui suivit la fin de la guerre, un renouveau d'intérêts et de recherches pour des méthodes mathématiques plus puissantes a conduit au début des années 60 à la théorie de la commande optimale, du filtrage statistique, de la commande adaptative, des variables d'états ...etc.

Ces recherches ont été suscitées par des besoins mathématiques nouveaux, non satisfaits par la théorie des asservissements : conquête spatiale, économie, trafic urbain, processus industriels complexes, contrôle de l'environnement.

D'autres types de problèmes de nature essentiellement discrète ou numérique apparurent aussi au cours de la première moitié du siècle, telle la commutation automatique des réseaux téléphoniques ou la réalisation de systèmes connus depuis sous le nom d'automatismes à séquences (ou automatismes numériques). Les technologies correspondantes pouvant être variées, mais la première fut le relais électromagnétique.

Ces problèmes entraînent des études mathématiques appliquées de natures algébriques initialisées par SHANON (1937).

Il faut signaler l'histoire très récente de l'automatisation des moyens de calculs et du traitement de l'information, les techniques mises en oeuvre étant très proches de celles des automatismes numériques.

Bien que les premières machines à calculer remontent au XVII^e siècle (SCHICKARD, PASCAL, LEIBNIZ) ou plus récemment à C. Babbage (1850) et V. Bush (1925), c'est au cours des années 40 que les efforts conjoints de mathématiciens (Von. Neumann) et d'ingénieurs électroniciens ont abouti au premier calculateur électronique universel (E.N.I.A.C., construit de 1943 à 1946 à l'université de Pensylvanie).

Une dizaine d'années plus tard, en 1958, les calculateurs électroniques avaient fait de tels progrès qu'ils pouvaient pour la première fois être utilisés en ambiance industrielle dans le contrôle de processus : l'ère de l'automation venait de s'ouvrir.

Les questions de stabilité revêtent une importance évidente en matière de synthèse des systèmes ou de commandes .

Elles ne vont certes pas jusqu'à consister l'essentiel du problème des asservissements , qui est un problème de performances et de précisions . Néanmoins , la stabilité est une condition nécessaire , presque toujours impérative pour la recherche d'un bon fonctionnement des procédés et des équipements de commande y afférents .

Dans la conception classique des systèmes invariants dans le temps la priorité est donnée à la détermination des paramètres d'un contrôleur pour lesquels les pôles de la fonction de transfert décrivant le système , restent dans un certain demi plan complexe .

Les conditions de stabilités , une fois précisées , les paramètres du contrôleur sont définis de manière à satisfaire des critères d'exploitations très étroits pour des spécifications données afin éventuellement de les optimiser .

Cette technique présente l'inconvénient de supposer à priori une connaissance complète des paramètres du site devant être géré , ceci pour des types de signaux d'entrée bien définis . Ce qui n'est malheureusement pas toujours le cas .

Ainsi se pose l'interrogation naturelle de la méthodologie à employer lorsque les paramètres d'un système sont soit inconnus , bruités , variant avec le temps...etc .

En effet comme tout système voit son comportement dépendre d'un schéma précis de commande indépendamment de l'environnement , rendre rigide les paramètres du contrôleur revient à perturber ce dernier dans ses performances au point d'entraîner le système vers des situations dynamiques imprévisibles souvent même catastrophiques .

Le problème est d'autant plus ardu et accru dans le cadre d'un ajustement des paramètres lorsque l'ensemble des caractéristiques décrivant le système sont non-linéaires ou non modelées .

Ainsi , la problématique du maintien des pôles des systèmes variant avec le temps dans un certain domaine du plan complexe doit être reformulée .

Ces indications introduisent le besoin de développer alors des procédures convenables de lois de commandes permettant de garantir certains niveaux de performances aux systèmes , malgré la présence d'incertitude structurée (erreurs paramétriques) ou non (variation sur des comportements entrée-sortie) dues à la nature de l'environnement dans lequel il est opéré .

Le mécanisme capable de rendre le système insensible aux changements ou du moins de les réduire explicitement ou implicitement doit être conçu de manière à voir ses paramètres s'ajuster automatiquement , fonctions des circonstances , perturbations incluses , afin de s'adapter au fur et à mesure à l'évolution des grandeurs caractérisant le processus dans son milieu pour le maintenir de tâches bien spécifiques définies par l'utilisateur .

Le type de commande associé à ce genre de mécanisme est appelée commande adaptative.

Le concept d'adaptation donc traduit l'étymologie du mot par :

" conformité de changement face à de nouvelles circonstances " .

La théorie des systèmes adaptatifs a commencé à se développer , il y a trente ans environs . De nombreux problèmes ont été abordés et résolus . Toutefois , un grand nombre reste ouvert , qu'ils aient été appréhendés ou non . De plus , il peut être vérifié aisément que l'aboutissement de travaux de recherches sur des points particuliers , engendre plus de questions nouvelles qu'il n'apporte de réponses aux problèmes posés .

Il en est ainsi pour l'étude des systèmes adaptatifs . Les premiers travaux apparus dans la littérature traitaient des systèmes linéaires continus déterministes invariants dans le temps .

Des techniques d'analyse et de synthèse pour les systèmes de commande adaptative sont alors développées . Parmi les approches les plus connues et utilisées peuvent être

citées entre autres celles utilisant les fonctions de Lyapunov (Monopoly (1974) , Lûders et Narendra (1974)) ainsi que celles fondées sur la théorie de l'hyperstabilité et les concepts de positivité (Landau (1974) , (1979)) .

Les résultats obtenus montrèrent la convergence asymptotique de " l'erreur d'adaptation " vers zéro . Cette dernière pilote un mécanisme d'adaptation dans lequel interviennent certaines variables soumises hypothèses (relativement) restrictives .

A titre d'exemple , parmi les schémas adaptatifs figure l'hypothèse de limite ou bien , celle liée à la connaissance à priori sur le système dans des problèmes de commande (signe du gain statique , ordre du système , nombre de degré de liberté etc...) .

Les travaux concernant les systèmes adaptatifs s'intensifièrent au milieu et à la fin des années soixante dix comme en témoignent la plupart des publications .

Des systèmes continus , le champ d'investigation s'étendit aux systèmes discrets représentés par des équations aux différences .

Des algorithmes adaptatifs discrets sont alors développés , tant pour l'identification , l'observation d'états que pour la commande

La prise en compte et la modélisation de perturbations de type stochastique permis la découverte d'horizons jusque là inconnus par de nouvelles méthodes d'analyses .

Pour ne citer que quelques unes , la méthode dite de l'équation différentielle ordinaire (Ljung (1977)) aidait à la résolution de problèmes de stabilité locale et de convergence paramétrique .

La stabilité globale ayant été supposée résolue , de nombreuses méthodes faisant appel aux techniques de martingales (Goodwin , Ramadge et caines (1981) par exemple) résolvent le problème de stabilité globale .

Dans un contexte déterministe , des lemmes techniques sont proposés (Goodwin , Ramadge et Caines (1980) , Edgart (1979) , Narendra , Lin et Valavani (1980) , Fuchs (1980)) qui permettent de prouver la limite bornée des

signaux intervenant dans l'algorithme et la convergence de l'erreur d'adaptation vers zéro .

Tous ces travaux et ces résultats trouvèrent une certaine émulation en incitant un grand nombre de chercheurs à mettre au point des profils de calculs garantissant des propriétés de stabilités ou d'extrémas plus fines si certaines conditions n'étaient pas réunies .

En effet le fossé entre l'automatique théorique et la pratique industrielle se trouvait dans la difficulté d'intégrer le facteur de " robustesse " dans les problèmes de commandes .

Ce terme étant d'ailleurs souvent utilisé de façon très imprécise puisque parfois confondu avec la notion de faible sensibilité aux erreurs de modélisation .

Les mécanismes pouvant engendrer des états d'instabilité dans des structures de systèmes évoluant en milieu bruité (perturbation , non linéarité) et/ou parasité , lorsque les effets de certaines dynamiques sont non modelées , ont fait l'objet d'analyses approfondies en consacrant à la " stabilité robuste " différentes approches tout en induisant des définitions plus subtiles au concept de " robustesse " .

Ce vocable restant " flou " tant qu'il n'a pas été précisé le mode de description des incertitudes (structurées ou non) et le type de performance considéré afin de réduire ou minimiser certains écarts .

Aussi dans le domaine du contrôle adaptatif des systèmes avec modèle de référence , la conservation des résultats de stabilité ou d'extrémas quand des conditions idéales ne sont plus réunies (entendu par là , absence de perturbation , de parasite , de non linéarité , méconnaissance de l'ordre du système , etc...) affecte au concept de robustesse le sens de " garantie d'une large région d'attraction focalisant toutes les trajectoires (caractérisant ou décrivant le processus) dans laquelle ces dernières restent non seulement bornées pendant que toute erreur (d'état) converge vers un ensemble infinitésimal " .

La dimension de cette région d'attraction dépendant de la vitesse des perturbations ou des parasites ou toute autre dynamique en haute fréquence (Narendra et Al , 1971) ,

(Edgart , Rohrs , Ioannou et Peterson , (1980))
devoilèrent certaines causes d'instabilités et
proposèrent des lois adaptatives modifiées les en
empêchant .

L'idée de base de toutes ces modifications étant
d'éliminer des sièges d'instabilité par limitation des
gains d'adaptation par exemple , de neutraliser toutes
variations des paramètres par élimination des actions
intégrales .

Cependant , les outils de bases étant différents et les
résultats analytiques en ayant établis la validité de
leur limites , rendent difficilement comparables les
procédures d'études .

II - PRESENTATION ET MODELISATION DYNAMIQUE DES SYSTEMES

II.1 : INTRODUCTION A LA POSITION DU PROBLEME

Les récents résultats locaux ou globaux obtenus en matière de robustesse d'un contrôle adaptatif (Peterson et Narendra , 1982 ; Riedle et Kokotovic , 1984 ; Ioannou et Tsakalis , 1986 ; De Larminat , 1986 ; Kreisselmeier et Anderson 1986 ; Narendra et Annaswamy , 1986 ; Anderson et Al. , 1986 ; Kosut et Al. , 1987 ; Ioannou et Sun , 1988) ont non seulement améliorés la compréhension du comportement adaptatif en présence de modélisation , d'incertitudes structurées ou non , de parasites , de perturbations ou de phénomènes de pointes (bursting phénomène) mais engendrerent une dynamique d'interrogations , d'importances cruciales vis à vis des résultats induits par l'introduction des lois adaptatives modifiées (Hsu et Costa , 1987 ; Anderson et Al. , 1986 ; Mareels et Bitmead , 1985) dont l'idée maîtresse était de parer à toute manifestation d'instabilité par élimination de l'action intégrale de la boucle .

En effet , les tentatives de conception de contrôleurs adaptatifs " robustes " pouvant gérer des systèmes à paramètres inconnus et/ou perturbés passe inmanquablement et généralement par deux approches .

- La première s'interessant à modifier les lois d'adaptations de manière à ce que l'ensemble du système (différentiel) laisse apparaître des solutions bornées en présences de perturbations où variations paramétriques bornées .

- La seconde tenant compte du type et du genre d'excitation à introduire en rapport avec un certain signal devant siéger dans la boucle d'adaptation .

Ces nouvelles lois traitées dans [5] , [15] , [25] , assurent que toutes solutions (signal) sera bornée en présence de perturbations où variations paramétriques bornées même si , le signal de référence n'excite pas le système de façon continue et requière un besoin d'informations moindre concernant la description du procédé et les perturbations y aférentes [19] , [30] , [45] .

Quoi qu'il en soit , si le signal d'entrée de référence excite de manière continue le système tout en présentant un spectre d'amplitude et de fréquence important , alors dans

le plus idéal des cas , l'équation de l'erreur sera exponentiellement stable contrairement à dans [10] , [12] , [20] où il est montré qu'une modification adéquate des lois d'adaptations , conduit à la stabilité robuste , même pour une classe de systèmes aux dynamiques non modelées ou inconnues .

L'introduction de la modification σ (appelée facteur d'oubli) dans les lois adaptatives pour les systèmes continus et variant dans le temps était faite de manière à améliorer la robustesse des procédés face à des dynamiques non modelées et des perturbations bornées .

Cette introduction certes importante , engendrait des effets indésirables comme par exemple , l'apparition excessive de pics souvent intermittants au niveau de l'erreur de poursuite et de sortie , donnant à l'utilisateur , l'impression d'un bon comportement du système pendant que ce dernier évolue vers une complète " instabilité " au bout d'une longue période de fonctionnement .

De même qu'intuitivement , la loi de modification - e s'identifie à une zone approchée de zone morte dans le cas où l'erreur de sortie convergerait vers zéro .

Cependant quand certaines perturbations externes sont présentes , cette dernière ne tend plus vers zéro et les dynamiques générées dans l'ensemble du système adaptatif sont qualitativement différentes vis à vis de la modification σ . Plusieurs publications ayant été faites dans ce sujet dans [55] , traitent des avantages des lois modifiées e par rapport à σ [18] , [21] , [12] .

Dans ce contexte , le travail valorisé dans cette thèse présente une étude de commande adaptative de position d'une classe de systèmes non linéaires caractérisés par leur aspects technologiques d'une part et mathématiques d'autre part .

L'aspect technologique introduit les thèmes du sujet par la présentation des systèmes à étudiés , qui sont :

A - Un bras manipulateur (classe 1 à deux degrés de libertés)

B - Une plateforme de commande hydraulique de deux réservoirs couplés .

L'aspect mathématique présentera la méthodologie employée pour l'atteinte d'une modélisation conforme aux domaine des variables d'états et dont la description propre aux systèmes non linéaires s'associe à la classe d'équations de la forme :

$$\dot{X}_s = A_s X_s + B_s u + D$$

Dans le cas particulier du bras manipulateur , cette dernière s'obtiendra à partir des équations de Lagrange . (Les équations décrivant la plateforme hydraulique ont faites l'objet d'utilisation directe à partir d'une publication fournie par le directeur de thèse)

Afin d'étudier l'influence sur les systèmes des effets de variations d'ordre paramétriques décrites par les structures différentielles telles que :

$$\dot{X}_s = \left[A_s + \Delta A_s \right] X_s + \left[B_s + \Delta B_s \right] u + D$$

ou de perturbations extérieures , de manière à ce que :

$$\dot{X}_s = A_s X_s + B_s u + D + d_{ext}$$

sur ladite commande de position et ce vis à vis des modifications σ et e , il à été développé une stratégie de calculs basée sur les théories de stabilité de Lyapunov et de l'hyperstabilité de Popov , permettant la " justification " de la robustesse des algorithmes de commande et ce à travers les études de convergence des différentes grandeurs mises en jeux (gains , erreurs , temps de réponses , etc ...) dans les lois d'adaptations .

Aussi , dans un premier volet , une attention particulière est réservée au support mathématique ayant permis la construction de l'édifice théorique pour mettre en valeur :

- I - la modélisation des systèmes ,
- II - la synthèse des algorithmes pour :
 - a - la commande M.R.A.C
 - b - la commande M.C.S

dans les cas S.I.S.O et M.I.M.O

III - les preuves d'extrémas (ou convergences) des signaux intervenant dans les algorithmes d'adaptation dans les cas S.I.S.O et M.I.M.O pour les différentes modifications au niveau de l'algorithme M.C.S , afin d'en justifier la robustesse .

IV - de la recherche analytique d'un temps de convergence (temps mis par le système pour réagir à la consigne) pour le même ordre de modifications dans le cas M.C.S .

V - de la simulation pour conformité des résultats prédit .

L'influence des variations paramétriques et des perturbations extérieures lentes ou rapides consacrera à la commande M.C.S le deuxième volet analytique quand à la classe de systèmes décrit par des équations de la forme :

$$\dot{X}_s = \left[A_s + \Delta A_s \right] X_s + \left[B_s + \Delta B_s \right] u + D + \Delta D$$

où la même stratégie de mise en valeur des preuves d'extrémas , de recherche analytique de temps de convergence ainsi que de la simulation des résultats s'est reprise .

Les tests et preuves de robustesses sont déduit non seulement à partir des résultats théoriques mais sont appréciés par simulation grâce aux logiciels Matlab et Simnon .

Le dernier volet de ce mémoire , signera par une conclusion

générale les résultats obtenus en ouvrant la porte de recommandations futures .

En résumé , cette thèse présente une méthode de calcul originale permettant de prouver la robustesse d'algorithmes d'adaptations pour une large classe de systèmes différentiels de la forme :

$$\dot{X}_s = \left[A_s + \Delta A_s \right] X_s + \left[B_s + \Delta B_s \right] u + D + \Delta D + D_{ext}$$

dans le cas des modifications α et e .

L'élaboration des calculs s'étant faite à partir d'un support de publication du directeur de thèse traitant de la commande M.C.S , il est précisé que les démonstrations élaborées supposaient :

- l'accessibilité des états des systèmes à la mesure ,
- inconnues , mais bornées :
 - les paramètres internes des systèmes ,
 - les non linéarités ,
 - les perturbations ,
 - les variations paramétriques

II.2 : PRESENTATION ET MODELISATION DES SYSTEMES

2.2.1 : Introduction

Entrant dans la vaste configuration des techniques industrielles en matière de robotique , les manipulateurs présentés par Leigois et Dombre en 1979 , Coiffet en 1983 , virent leurs classification étendue par Stoten en 1989 .

En effet , répertoriés conformément à des aptitudes pour l'exercice (à travers leurs possibilité d'orientation vers un positionnement donné) précis d'une tâche (ex : usinage de pièces mécaniques) , les manipulateurs (assemblage de mécanismes articulés) décrit par des structures géométriques particulières , sont conçus de manière à évoluer dans un environnement interactif

(ex : manipulation d'objets posés sur une table sans faire abstraction de ladite table) .

Cela est rendu possible grâce à des articulations (ou joints) dont le nombre dépendra des combinaisons de translations et de rotations garantissant une mobilité certaine , fonction des degrés de libertés envisagés . On parlera alors de manipulateurs flexibles .

Présentés par les constructeurs comme prismatiques (liaisons représentant des translations) ou de révolutions (rotations), les manipulateurs sont classés selon les architectures données en figure (1) .

Durant le parcours de thèse , une version de manipulateur classe 1 , composé de deux bras planaires , assurant deux degrés de libertés , verra lors de la déduction du modèle dynamique poser les suppositions ci - après :

Dans un premier temps , vue la complexité du problème traité , sont pris en compte :

- a - la rigidité des bras (absence d'élasticité) ,
- b - les frictions de natures linéaires et visqueuses ,
- c - la non considération des mouvements relatifs des centres de rotations ,
- d - les effets supposés négligeables des masses des joints ,
- e - les signaux de commandes appliqués aux moteurs proportionnels aux rapports Forces / Moments ,
- f - les gains unitaires des transducteurs dont les composantes dynamiques sont supposées sans effets .

Le deuxième temps observera l'établissement des équations du mouvement à partir des moments de forces en présences , à savoir :

- 1 - les forces de pesanteur ,
- 2 - forces originaires du mouvement des bras :
 - a - forces inertielles (proportionnelles aux accélérations)

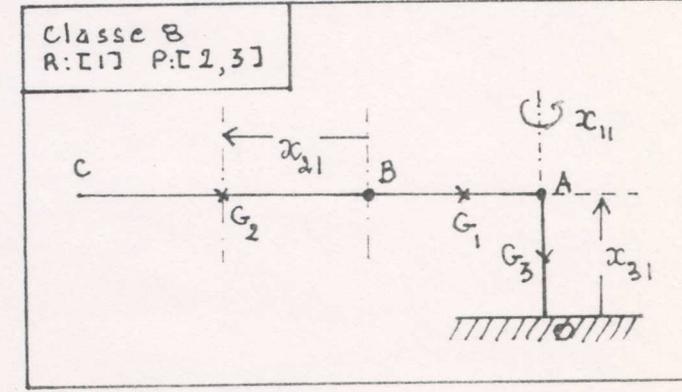
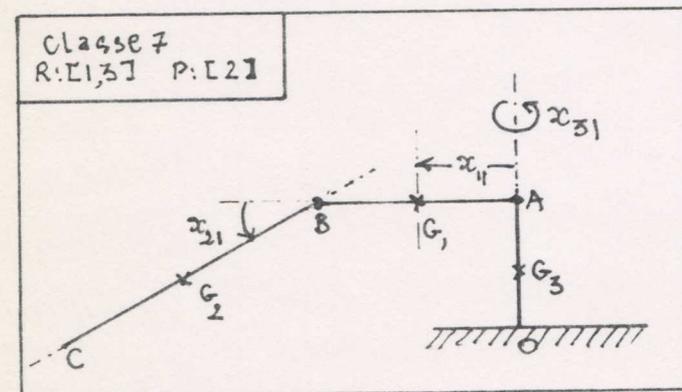
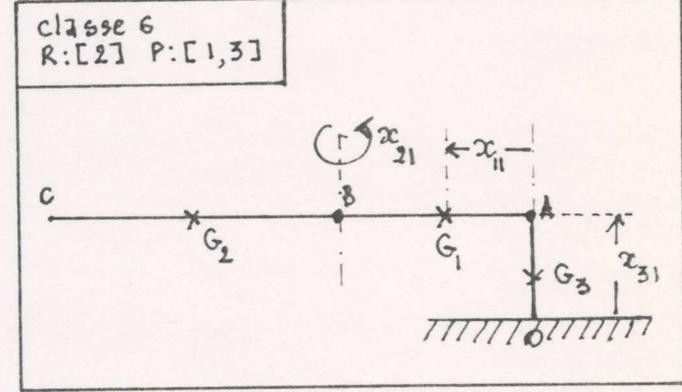
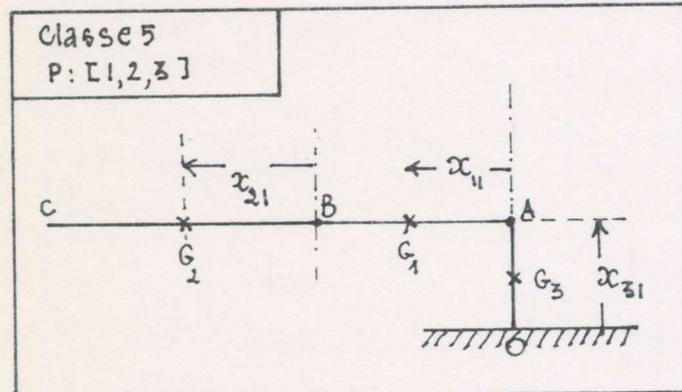
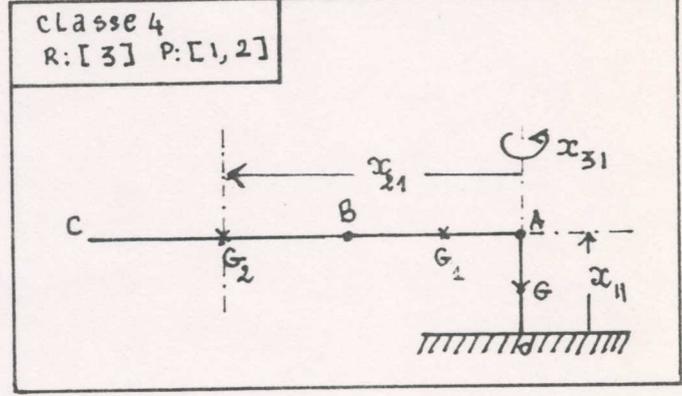
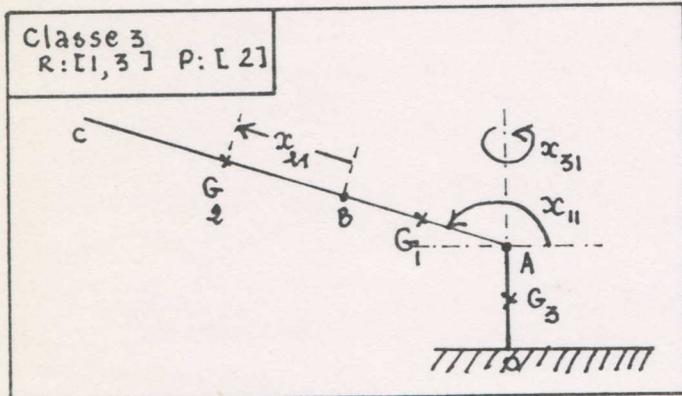
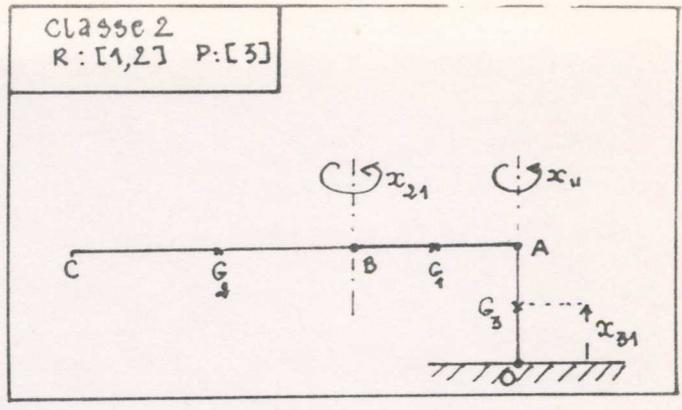
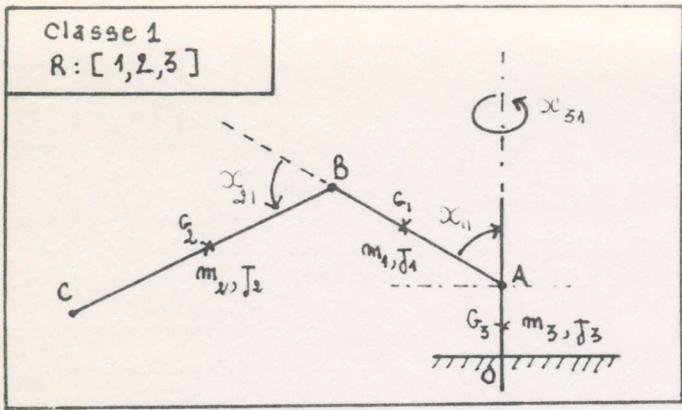


Figure - 1

β - forces centrifuges (proportionnelles aux carrés des vitesses)

γ - forces issues du couplage des différents segments , présentées comme force de Coriolis (proportionnelles aux produits des vitesses d'articulations différentes) .

2.2.2 : Le manipulateur classe 1

Les robots manipulateurs s'insèrent parmi les exemples devenus courants d'une classe de systèmes aux dynamiques non linéaires et à trajectoires contrôlables .

Leur commandes , assujetties à la complexité de leurs structures , induisent de véritables défis à relever quand aux problèmes de leur contrôle surtout , depuis que les approches linéaires ne sont plus en mesure d'assurer des applications aisées .

La recherche d'une écriture mathématique réunissant l'ensemble des caractères dynamiques conformes au mieux avec la réalité du système physique , passe inmanquablement par l'utilisation de formalismes classiques comme ceux de Newton - Euler , Lagrange , Kane ou d'autres .

En effet , une stratégie des plus utilisée associe au principe de conservation et de transformation de l'énergie , les équations de Lagrange .

Aussi , pour une structure quelconque composant un système mécanique , le Lagrangien s'exprime en terme d'énergie cinétique $T(q , \dot{q})$ et potentielle $P(q)$ par :

$$L(\dot{q} , q) = T(q , \dot{q}) - P(q) \quad (2-1)$$

Le couple (q , \dot{q}) traduisant les champs de vecteurs respectifs généralisés de positions (linéaires ou angulaires) et de vitesses .

Les équations du mouvement seront données par la forme différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] + \frac{\partial L}{\partial q} + \mu'(t) = \mu(t) \quad (2-2)$$

avec $\mu(t) \equiv$ ensemble des champs de forces (ou moments de forces) extérieures généralisées à appliquer en différents points du systèmes pour que ces derniers aient des mouvements entretenus .

avec $\dot{\mu}(t) \equiv$ moments d'origines non potentiels généralisées .

$$\dot{\mu}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \quad (2-3)$$

Φ : fonction dissipative de Rayleigh , caractérisant les forces d'origines visqueuses .

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{q}^T \phi \dot{q} \quad \phi : \text{Matrice positive semie définie} \quad (2-4)$$

En traduisant l'énergie cinétique par l'écriture :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad M(q) : \text{Matrice d'inertie positive définie} \quad (2-5)$$

et en faisant le bilan sommable des énergies potentielles dûes :

- aux phénomènes gravitationnels (pesanteur , notés $U_G(q)$)

- aux phénomènes élastiques (notés $U_E(q)$)

Il vient pour $U_G(q)$ et $U_E(q)$ que : $P(q) = U_G(q) + U_E(q)$

dont les structures sont régies par :

$$G(q) = - \frac{\partial U_G(q)}{\partial q} \quad U_E(q) = \frac{1}{2} q^T K q \quad (2-6)$$

K : matrice de rigidité ou d'élasticité des joints .

Finalement , en substituant dans (2-2) les expressions du Lagrangien et la fonction de Rayleigh , il apparaît que :

$$M(q) \ddot{q} + \left[M(q) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \dot{q}^T M(q) \right\} \right] \dot{q} + G(q) + K q + C \dot{q} = \mu \quad (2-7)$$

En posant :

$$C(q, \dot{q}) = M(\dot{q}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \dot{q}^T M(q) \right\} + C \quad (2-8)$$

Il vient par (2-7) , la forme générale :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + K q = \mu \quad (2-9)$$

Dans le cas d'un système dynamique contenant " n " liaisons rigide de masses m et de longueur L jumelées ou couplées par " n " articulations (ou joints) [cas du présent robot manipulateur] où il est tenu compte des hypothèses précédentes , l'équation (2-9) s'écrira pour K = 0 (absence de rigidité des joints) :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \mu \quad (2-10)$$

Comme au niveau de chaque joint existe une transmission de type électromécanique , le moment moteur actionnant le système est défini par l'expression :

$$\mu = T u \quad (2-11)$$

justifiant ainsi la condition " f " de 2.2.1 .

u : vecteur de commande généralisé appliqué au articulations .

T : matrice gain des transducteurs .

Il apparaît sous forme fondamentale la relation générale suivante :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = T u \quad (2-12)$$

Les matrices M(q) et C(q, \dot{q}) présente la décomposition :

$$M(q) = M_0 + \Delta M(q) \quad (2-13)$$

$$C(q, \dot{q}) = C_0 + \Delta C(q, \dot{q}) \quad (2-14)$$

M , C et $\Delta M(q)$ et $\Delta C(q, \dot{q})$ décrivent respectivement les parties linéaires et non linéaire de $M(q)$ et $C(q, \dot{q})$.

La multiplication des équations (2-13) - (2-14) par M^{-1} produit la transformation :

$$M_o^{-1} M(q) \ddot{q} + M_o^{-1} C(q, \dot{q}) \dot{q} + M_o^{-1} G(q) = M_o^{-1} T u \quad (2-15)$$

$$\text{or} \quad M_o^{-1} M(q) = I + M_o^{-1} \Delta M(q) \quad (2-16)$$

$$\text{et} \quad M_o^{-1} C(q, \dot{q}) = M_o^{-1} C_o + M_o^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \quad (2-17)$$

injectés dans (2-15), il apparaît que :

$$\left[I + M_o^{-1} \Delta M(q) \right] \ddot{q} + \left[M_o^{-1} C_o + M_o^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} + M_o^{-1} G(q) = M_o^{-1} T u$$

le regroupement de même nature des termes assure que :

$$\ddot{q} = - M_o^{-1} C_o \dot{q} + M_o^{-1} T u - M_o^{-1} \Delta M(q) \ddot{q} - M_o^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \dot{q} - M_o^{-1} G(q) \quad (2-18)$$

Soit alors le changement de variable suivant :

$$A = - M_o^{-1} C_o, \quad B = M_o^{-1} T$$

$$d = - M_o^{-1} \Delta M(q) \ddot{q} - M_o^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \dot{q} - M_o^{-1} G(q) \quad (2-19)$$

L'équation (2-18) est réduite à l'écriture :

$$\ddot{q} = A \dot{q} + B u + d \quad (2-20)$$

A des fins de programmation, l'expression de la non linéarité " d " doit être développée. Cette dernière s'obtient par injection de (2-20) dans (2-19).

En effet, il vient que :

$$d = - M_o^{-1} \Delta M(q) \left[A \dot{q} + B u + d \right] - M_o^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \dot{q} - M_o^{-1} G(q)$$

aussi :

$$d = - M_0^{-1} \Delta M(q) \left[A \dot{q} + B u \right] - M_0^{-1} \Delta M(q) d - M_0^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \dot{q} - M_0^{-1} G(q)$$

soit alors :

$$\left[I + M_0^{-1} \Delta M(q) \right] d = - M_0^{-1} \Delta M(q) \left[A \dot{q} + B u \right] - M_0^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \dot{q} - M_0^{-1} G(q)$$

cependant $I + M_0^{-1} \Delta M(q) = M_0^{-1} M(q)$, alors :

$$M_0^{-1} M(q) d = - M_0^{-1} \Delta M(q) \left[A \dot{q} + B u \right] - M_0^{-1} \Delta C(q, \dot{q}) \dot{q} - M_0^{-1} G(q)$$

enfin ,

$$d = - M(q)^{-1} \left[\Delta M(q) \left[A \dot{q} + B u \right] + \Delta C(q, \dot{q}) \dot{q} + M_0^{-1} G(q) \right]$$

en posant :

$$\delta A(q, \dot{q}) = - M(q)^{-1} \left[\Delta M(q) A + \Delta C(q, \dot{q}) \right] \quad (2-21)$$

$$\delta B(q) = - M(q)^{-1} \Delta M(q) B \quad (2-22)$$

$$\delta d(q) = - M(q)^{-1} M_0^{-1} G(q) \quad (2-23)$$

La non linéarité " d " se traduira par :

$$d = \delta A(q, \dot{q}) \dot{q} + \delta B(q) u + \delta d(q) \quad (2-24)$$

Afin d'atteindre les formes matricielles canoniques ,
nécessité est faire appel à l'expression (2-20) .
Développée , elle laisse apparaître l'écriture ci après :

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k + d_i \quad (2-25)$$

Soit a_{ij}^* un nombre tel , que : $a_{ij}^* = 0 \quad \forall (i,j) \in \{1, n\}$

Il est évident que :

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^* q_j + \dot{q}_i \quad (2-26)$$

Si de plus , il est définit deux nombre $a_{ij}^\#$ et b_{ik}^* vérifiant :

$$a_{ij}^\# = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad b_{ik}^* = 0 \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, n\} \\ \forall j \in \{1, m\} \end{cases}$$

alors , nécessairement $\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^\# \dot{q}_j$

Des résultats précédents , il est déduit que :

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^* q_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}^\# \dot{q}_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}^* u_k \quad (2-27)$$

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^* \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}^\# \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}^* \dot{u}_k + d_i \quad (2-28)$$

Soient X_j , α_{ij} , β_{ij} les vecteurs définis par :

$$X_j^T = [q_j \mid \dot{q}_j] \quad \dim X_j = 2 \times 1$$

$$\alpha_{ij}^T = [a_{ij}^* \mid a_{ij}^\#] = [0 \mid a_{ij}^\#] \quad \dim \alpha_{ij} = 1 \times 2$$

$$\beta_{ij}^T = [a_{ij}^* \mid a_{ij}^\#] = [0 \mid a_{ij}^\#] \quad \dim \beta_{ij} = 1 \times 2$$

Les équations (2-27) et (2-28) deviennent :

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^T X_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}^* u_k \quad (2-29)$$

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^T X_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k + d_i \quad (2-30)$$

Soit alors définies les matrices blocs suivantes :

$$A^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^T \\ \beta_{ij}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}^* & a_{ij}^\# \\ a_{ij}^* & a_{ij} \end{bmatrix} ; \quad B^{(i,k)} = \begin{bmatrix} b_{ik}^* \\ b_{ik} \end{bmatrix}$$

il est évident que la structure de ces dernières présente les architectures ci dessous :

$$A^{(i,j)} = \begin{bmatrix} 0 & a_{ij}^\# \\ 0 & a_{ij} \end{bmatrix} ; \quad B^{(i,k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{ik} \end{bmatrix} ; \quad D^{(i,i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_i \end{bmatrix}$$

$$\dim A^{(i,j)} = 2 \times 2 ; \quad \dim B^{(i,k)} = 2 \times 1 ; \quad \dim D_i = 2 \times 1$$

Les équations décrites par (2-29) et (2-30) se réduisent à :

$$\dot{X}_i = \sum_{k=1}^m A^{(i,k)} X_k + \sum_{k=1}^m B^{(i,k)} u_k + d_i \quad (2-31)$$

Le développement ligne par ligne de l'équation (2-31) incite l'élaboration des grandeurs qui suivent :

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1,1)} & A^{(1,j)} & A^{(1,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{(i,1)} & A^{(i,j)} & A^{(i,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{(m,1)} & A^{(m,j)} & A^{(m,m)} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ x_{m2} \end{bmatrix}$$

$(i, j) \in \{1, \dots, m\}$

avec :

$$A^{(i,j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{bmatrix} \text{ pour } i \neq j \quad \text{et} \quad A^{(i,i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_{ii} \end{bmatrix} \text{ pour } i=j$$

$$B = \begin{bmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,j)} & B^{(1,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^{(i,1)} & B^{(i,j)} & B^{(i,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B^{(m,1)} & B^{(m,j)} & B^{(m,m)} \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} D^{(1,1)} \\ \vdots \\ D^{(i,i)} \\ \vdots \\ D^{(m,m)} \end{bmatrix}$$

$$B^{(i,j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{ij} \end{bmatrix} ; \quad D^{(i,i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_i \end{bmatrix}$$

L'équation (8-22) peut être représentée par :

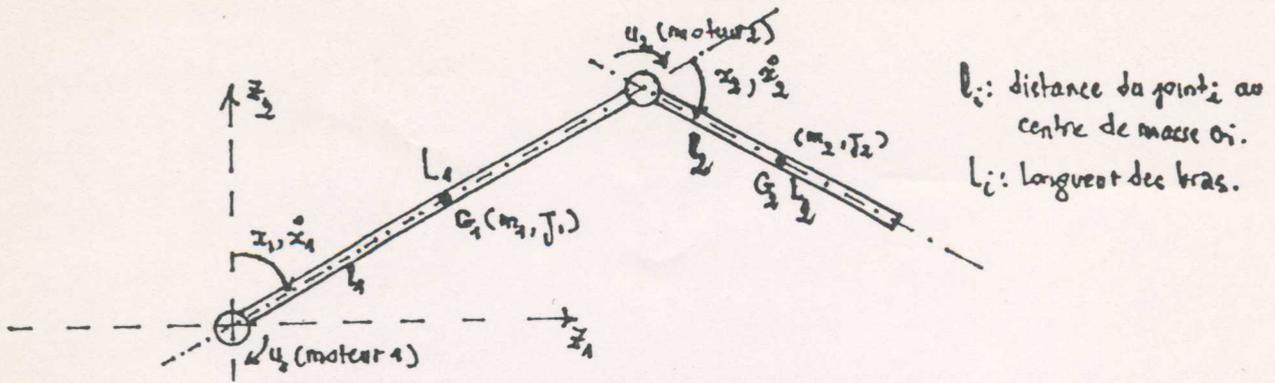
$$\dot{X} = A X + B u + d \quad (2-32)$$

II.3 : APPLICATIONS

II.3.1 : Bras manipulateur de classe 1

De configuration générale donnée en figure ci dessous , le bras manipulateur composé de deux segments actionnés par servomoteur , est décrit conformément à la nomenclature utilisée . Régit par l'équation d'état donné en (2-32) , le système physique est décrit par :

$$\dot{X}_s = A_s X_s + B_s u + d \quad (2-33)$$



Configuration générale du bras manipulateur
classe 1 à deux degrés de libertés

$X_{Si}^T = [X_{S(i1)}, X_{S(i2)}]$: vecteur généralisé position et vitesse angulaire.

$\dot{X}_{Si}^T = [\dot{X}_{S(i1)}, \dot{X}_{S(i2)}]$: vecteur accélération angulaire.

J_i : moment d'inertie du bras.

C_i : Coefficient de frottement visqueux.

K_i : gain de l'ensemble moteur/amplificateur i .

u_i : commande du moteur i .

m_i : masse du bras i .

g : accélération de la pesanteur.

Les matrices des paramètres sont régies par la structure :

$$A_S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{S(12)}^{11} & 0 & a_{S(12)}^{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{S(12)}^{21} & 0 & a_{S(12)}^{22} \end{vmatrix} \quad B_S = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_{S(11)}^{11} & b_{S(11)}^{12} \\ 0 & 0 \\ b_{S(11)}^{21} & b_{S(11)}^{22} \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} 0 \\ d_1 \\ 0 \\ d_2 \end{vmatrix}$$

$$j_1^* = j_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2$$

$$j_{x_2} = j_2 + m_2 l_2^2$$

$$a_{S(12)}^{11} = -a_{S(12)}^{21} = -\frac{c_1}{j_1^*} ; a_{S(12)}^{12} = \frac{c_2}{j_1^*} ; a_{S(12)}^{22} = -a_{S(12)}^{12} - \frac{c_2}{j_{x_2}}$$

$$b_{S(11)}^{11} = -b_{S(11)}^{21} = \frac{k_1}{j_1^*} ; b_{S(11)}^{12} = -\frac{k_2}{j_1^*} ; b_{S(11)}^{22} = -b_{S(11)}^{12} + \frac{k_2}{j_{x_2}}$$

$$d_1 = \frac{f_2 - f_1}{j_1^*} \quad d_2 = -d_1 - \frac{f_2}{j_{x_2}}$$

$$f_1 = (2 m_2 L_1 l_2 \cos x_2) \ddot{x}_1 + (m_2 L_1 l_2 \cos x_2) \ddot{x}_2 - (m_2 L_1 l_2 \sin x_2) \dot{x}_2^2 - (2 m_2 L_1 l_2 \sin x_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \left[(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin x_1 + m_2 l_2 \sin(x_1 + x_2) \right] g$$

$$f_2 = (m_2 L_1 l_2 \cos x_2) \ddot{x}_1 + (m_2 L_1 l_2 \sin x_2) \dot{x}_1^2 - \left[m_2 l_2 \sin(x_1 + x_2) \right] g$$

Les valeurs numériques décrivant les paramètres du système physique sont telles que :

$$\begin{aligned} m_1 &= 2.53 \text{ Kg} & m_2 &= 0.426 \text{ Kg} \\ j_1 &= 0.606 \text{ Kg m}^2 & j_2 &= 0.268 \text{ Kg m}^2 \\ j_1^* &= 0.746 \text{ Kg m}^2 & j_{x_2} &= 0.272 \text{ Kg m}^2 \\ l_1 &= 0.201 \text{ m} & l_2 &= 0.092 \text{ m} \\ L_1 &= L_2 = 0.3 \text{ m} \end{aligned}$$

II.3.2 : Plateforme de réservoirs couplés

Le système considéré est donné en figure ci après .

Le procédé est basé autour de deux réservoirs interconnectés. L'ensemble moteurs bidirectionnels - valves est utilisé pour pomper l'eau de manière à contrôler les niveaux de liquides dans chaque réservoir par la mesure de leur hauteur grâce à des détecteurs de capacités

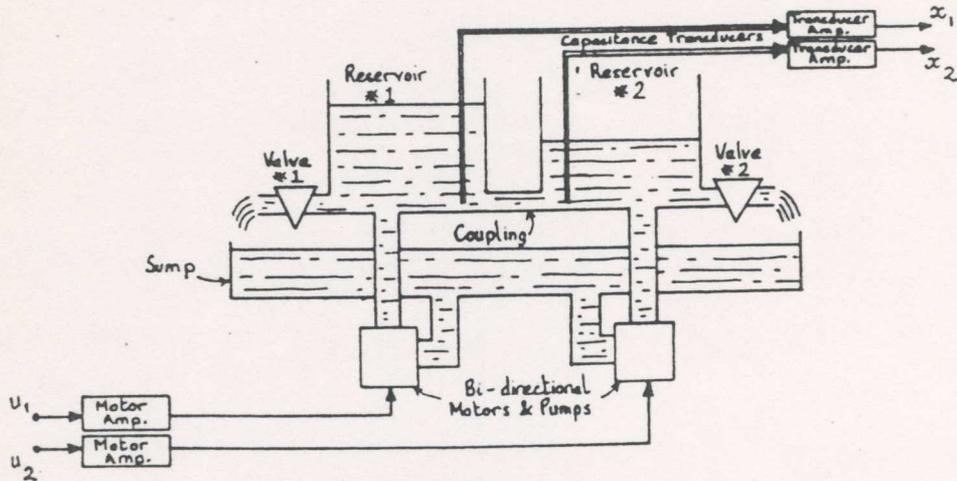


Figure Multivariable reservoir rig.

III - METHODE DE SYNTHESE D'UN ALGORITHME ADAPTATIF

III.1 : INTRODUCTION

Introduit par THURIN en 1936 , puis approfondi par R . KALMAN , la théorie des systèmes s'appuyant sur la notion du concept d'état , venait de naître .
En effet , la détermination d'une structure contrôle - commande , passant par des équations propres de la physique - mathématique , aboutit pour toute description d'un système au moyen de variables dites d'état , à la forme différentielle ci - dessous :

$$\dot{X}_s(t) = A_s X_s(t) + B_s u(t) + d(X_s, t) \quad (3-1)$$

$$A_s \in \mathbb{R}^{N \times N} ; B_s \in \mathbb{R}^{N \times M} ; X_s(t) \in \mathbb{R}^N ; u(t) \in \mathbb{R}^M ; d(X_s, t) \in \mathbb{R}^N$$

Le couple matriciel [A_s , B_s] supposé constant , décrira la dynamique linéaire du processus tandis que le champ vectoriel $d(X_s, t)$ traduira le bilan des comportements bornés de toute non linéarité , perturbations incluses .

III.2 : COMMANDE ADAPTATIVE AVEC MODELE DE REFERENCE (M.R.A.C)

Le principe de la commande est relativement simple . Commander un procédé dont on connaît la structure mais dont les paramètres le sont peu ou mal , ou variables dans le temps revient , à réaliser à l'aide d'un mécanisme le calcul d'une loi de commande pour assurer la convergence asymptotique d'une certaine erreur vers zéro , cette dernière choisie selon l'intérêt du manipulateur assurera le pilotage du dit mécanisme .

La possibilité de calcul de la loi de commande à partir des paramètres du régulateur fait appel aux méthodes

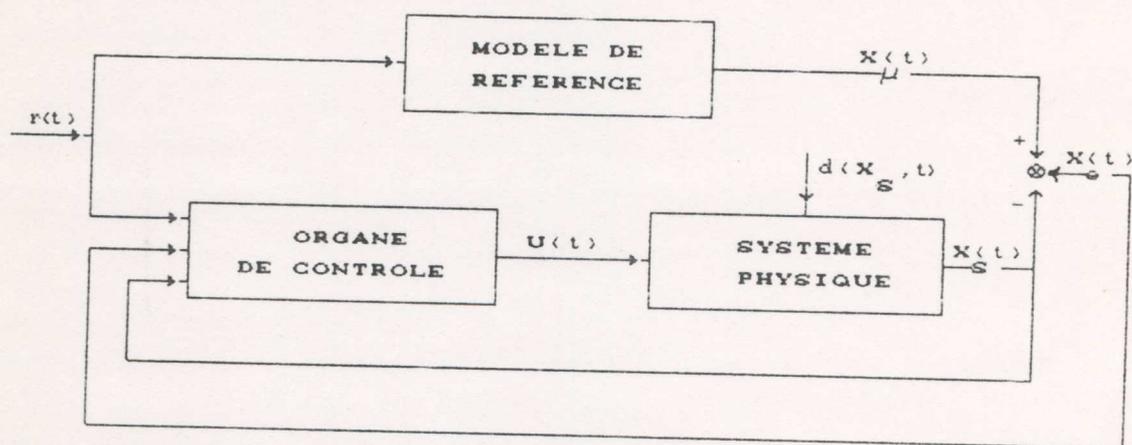
d'estimations selon des schémas définis comme direct ou indirect .
 Cependant , quelquesoit le schéma de commande utilisé , le système global (procédé + loi de commande + mécanisme d'adaptation) reste très complexe à étudier puisque généralement non linéaire , à paramètres perturbés et variables dans le temps .

Pour analyser et synthétiser de tels schémas , il est nécessaire de développer des techniques d'analyse et de synthèse permettant de prouver les résultats de convergence (d'erreur ou de paramètres) et de stabilité (bornitudes des signaux de toutes les variables intervenant dans le schéma fonctionnel global) .

Différents schémas types destinés à l'ajustement d'une loi de commande afin que la dynamique d'un processus suive certains critères de performances existent .

L'option (M.R.A.C) , " commande adaptative avec modèle de référence " , sélection du thème de recherche représenta l'articulation principale d'étude .

Un schéma fonctionnel de cette technique , présenté à cet effet en FIG.1 , fut proposé par WHITACKER en 1958 . Les premières et réelles applications n'ayant vues le jour qu'à partir des années soixante dix .



(FIG. 1)
 CONFIGURATION D'UN CONTROLLEUR ADAPTATIF
 POUR LA POURSUITE D'UN MODELE

3.2.1 : ASPECT ANALYTIQUE

Afin d'assurer l'atteinte de performances convenables dans le cours d'un processus, l'utilisateur inscrit dans une structure analytique idéale (le modèle mathématique de référence), les objectifs désirés .

$$\dot{X}_{\mu}(t) = A_{\mu} X_{\mu}(t) + B_{\mu} r(t) \quad (3-2)$$

$$A_{\mu} \in \mathbb{R}^{N \times N} ; B_{\mu} \in \mathbb{R}^{N \times M} ; X_{\mu}(t) \in \mathbb{R}^N ; r(t) \in \mathbb{R}^M$$

L'accès hypothétique à la mesure des états, autorise la définition d'une nouvelle grandeur de sortie : l'erreur dynamique de pilotage et de poursuite . Construite conformément au schéma de la figure (1), elle s'associe à l'équation :

$$X_{\circ}(t) = X_{\mu}(t) - X_{s}(t) \quad X_{\circ} \in \mathbb{R}^N \quad (3-3)$$

La dérivée de (3-3) par rapport au temps, autorise par combinaison de (3-1) et (3-2), l'écriture :

$$\dot{X}_{\circ}(t) = A_{\mu} X_{\circ}(t) + (A_{\mu} - A_{s}) X_{s}(t) + B_{\mu} r(t) - d(X_{s}, t) - B_{s} u(t) \quad (3-4)$$

En posant :

$$\theta^{*T} = \left[A_{s} - A_{\mu} \parallel - B_{\mu} \right] \quad \theta^{*T} \in \mathbb{R}^{N \times (N+M)} \quad (3-5)$$

$$W^T = \left[X_{s}^T \parallel r^T \right] \quad W^T \in \mathbb{R}^{N \times (N+M)} \quad (3-6)$$

L'équation (3-4) se réduira alors, à :

$$\dot{X}_{\circ}(t) = A_{\mu} X_{\circ}(t) - I_N F \quad I_N \in \mathbb{R}^{N \times N} ; F \in \mathbb{R}^N \quad (3-7)$$

où

$$F = \theta^{*T} W(t) + B_{s} u(t) + d(X_{s}, t) \quad (3-8)$$

avec θ^{*T} et $W(t)$, les marques respectives de la matrice des paramètres d'erreur et de l'état de sortie, augmentés du système

REMARQUE : La garantie aux états du modèle d'une poursuite fidèle par ceux du système malgré les non linéarités, passe par l'examen concomitant de deux contraintes.

a) La vérification des conditions d'ERZBERGER énoncées comme suit :

$$\begin{aligned} (I_{(n \times n)} - B_s^\dagger B_s) (A_s - A_\mu) &= O_{(n \times n)} & (3-9) \\ (I_{(n \times n)} - B_s^\dagger B_s) B_\mu &= O_{(n \times m)} & (3-10) \\ B_s^\dagger &= (B_s^T B_s)^{-1} B_s & (3-11) \end{aligned}$$

b) La validation, qu'en régime permanent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad (3-12)$$

III.3 : FORME D'UNE COMMANDE EN MILIEU NON LINEAIRE

- L'ampleur considérable du champ d'investigation des systèmes, à nécessité pour en aborder l'étude, le confort au domaine particulier lié à la stratégie du choix des formes de commande à appliquer dans un environnement non linéaire soumis à des variations de types paramétriques ou des perturbations.
- Pour ce faire, le présent paragraphe cerner la méthodologie employée au développement justifié d'une forme de commande.

3.3.1 : Hypothèse d'écriture, du terme $dX_s(t)$, fonction des états X_s du système

Cette hypothèse suppose le développement de la forme :

$$dX_s(t) = \delta A_s \cdot X_s(t) \quad (3-13)$$

$$\text{avec } dX_s(t) \neq 0 \text{ si } X_s(t) \neq 0$$

Le terme δA_s étant observé sous l'angle d'une variation paramétrique de la matrice A_s .

$$\text{aussi, } \dim A_s = \dim \delta A_s$$

$$\text{En posant : } \delta \theta^T = \begin{bmatrix} \delta A_s & | & 0 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

$$\text{il vient : } dX_s(t) = d(W,t) = \delta \theta^T W^T(t) \quad (3-15)$$

L'équation (3-8) s'identifiera alors à :

$$F = \Delta \theta^T W(t) + B_s u(t) \quad (3-16)$$

avec comme matrice $\Delta \theta^T$ égale à :

$$\Delta \theta^T = \theta^{*T} + \delta \theta^T \quad (3-17)$$

Les égalités (3-16) et (3-17) traduisent les comportements non linéaires et les grandeurs non modelées, en termes de variations paramétriques autour d'une position d'équilibre θ^* .

L'objectif recherché dans le contrôle du système, réside dans la manipulation de la fonction " F " pour satisfaire la condition (3-12).

Aussi le cadre d'un régime permanent impose la vérification pour l'erreur dynamique, que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{X}_e(t) = 0 \quad (3-18)$$

(3-16) , entraîne que $\lim_{t \rightarrow \infty} F = 0 \rightarrow \Delta\theta^T W + B_s u(t) = 0$

et ,
$$u(t) = -B_s^\dagger \Delta\theta^T W(t) \quad (3-19)$$

B_s^\dagger introduisant la matrice pseudo inverse gauche de B_s .

REMARQUE : En posant $K^T = -B_s^\dagger \Delta\theta^T$, il vient :

$$u(t) = K^T(t) W(t) \quad (3-20)$$

aussi :

- 1- Le résultat (3-20) accuse le profil même d'un contrôle conventionnel à contre réaction .
- 2- Fonction du temps , la matrice des gains ajustables $K(t)$ dépend de paramètres inconnus .
- 3- La condition définie en (3-12) induit pour le cadre d'un régime permanent que :

si $\lim_{t \rightarrow \infty} X_s(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} X_\mu(t) = r(t)$

CONCLUSION :

La présence (ou l'absence) d'un environnement non linéaire nécessite , afin de satisfaire la contrainte (1-11) , une commande par retour d'état .
Cependant , les changements liés à :

- 1 - la limitation des matériels ,
- 2 - l'imperfection d'une réalisation ,
- 3 - l'ommission même de par l'auteur d'un projet des caractéristiques essentielles ou accidentelles du procédé qui , en plus des perturbations , viennent se superposer aux paramètres du système en

introduisant des variations non mesurables , inconnues et variant dans le temps , affectant les performances du mécanisme de commande à contre réaction font que l'idée d'utilisation d'un régulateur à paramètres fixes , soit totalement rejetée .

En effet , comme tout système voit son comportement dépendre d'un schéma précis de commande indépendamment des modifications de l'environnement , rendre rigide les paramètres du régulateur , revient à perturber ce dernier dans ses performances au point d'entraîner le système vers des situations imprévisibles souvent même catastrophiques .

Un contrôleur devant gérer l'information à partir d'un site non linéaire doit être conçu de manière à voir ses paramètres s'ajuster automatiquement , fonction des circonstances perturbations incluses , afin de s'adapter au fur et à mesure à l'évolution des grandeurs caractérisant le processus , dans son environnement .

Inséré dans une chaîne de montage , ce contrôleur se verra redresser des comportements infidèles , en imposant au système une discipline de poursuite stricte tout en étant assujéti aux volontés d'un cahier de charge .

Ce dernier dit " contrôleur adaptatif " fait l'objet d'étude adéquate afin que la réponse du système suive au mieux celle du modèle en dépit des perturbations .

Aussi , les questions de stabilité revêtant une importance évidente en matière de commande , ne constitueront point l'essentiel du problème posé dans la synthèse de lois de contrôle qui est un problème de performances , de précision . Néanmoins , la stabilité est une condition nécessaire , si ce n'est impérative , pour le fonctionnement correct des systèmes .

Le paragraphe qui suit , expose et traite les bases de la question en insistant sur les méthodes ayant faites l'objet d'application dans le cadre du sujet .

Aussi la vocation de ce dernier n'est pas de faire une revue exhaustive de ce qui existe déjà dans la littérature s'agissant de techniques d'analyse et de

synthèse de loi de commande . Certaines approches ou méthodes cependant seront plus détaillées que d'autres car couramment utilisées , du moins dans le parcours de thèse .

L'approche par les fonctions de Lyapunov à été développée et principalement utilisée dans les systèmes adaptatifs avec modèles de référence . En effet de tels procédés ont été étudiés par Narendra et Kudva , 1974 ; Lüders et Narendra , 1974 ; Monopoly , 1974 ; pour l'identification , l'estimation où la commande adaptative .

Le problème de la convergence des paramètres d'un système est reformulé de façon équivalente en termes de problèmes de stabilité asymptotique d'un ensemble d'équations d'erreurs différentielles dans un cadre purement continu . Cet ensemble d'équations représentant le schéma global (procédé à identifier ou à commander + loi d'adaptation) . Une fonction candidate est choisie alors pour cet ensemble d'équations pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité asymptotique pour le système quand la loi d'adaptation paramétrique présente une forme convenable . Cette approche , seule , ne permet pas de résoudre le problème de stabilité globale (problème d'extrémums) de toutes les variables présentes dans l'algorithme d'adaptation .

III.4 : NOTION DE STABILITE

3.4.1 : Introduction

Physiquement parlant , un système est dit *stable* relativement à une trajectoire si , déplacé de sa position d'équilibre , il tend à y revenir ; *instable* , s'il s'en écarte davantage .

L'apparence claire de cette énonciation , se perd lorsque d'autres types , moins familiers de systèmes , sont rencontrés .

Obligation est de donner à la stabilité , une formulation plus précise .

3.4.2 : Stabilité et stabilité asymptotique au sens de Lyapunov .

Un système décrit par l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x} , t) \quad (3-21)$$

tel que $f(\underline{0}, t) = \underline{0} \quad \forall t > 0$

est stable au sens de Lyapunov (ou L - stable)
si :

(i) $\forall t > t_0, \forall \epsilon, \exists \eta$ tel que $\| \underline{X}(t_0) \| < \eta \Rightarrow \| \underline{X}(t) \| < \epsilon$

Un système qui n'est pas L - stable est dit instable .

(ii) de plus , si : $\exists R$ tel que $\| \underline{X}(t_0) \| < R \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \| \underline{X}(t) \| \rightarrow 0$
le système est dit asymptotiquement stable (ou L -
asymptotiquement stable)

III.5 : STABILITE D'UN REGIME PERIODIQUE

Soit une oscillation $\underline{X} = \underline{X}_T(t)$ d'un système .

Si , après perturbation , le système reprend la même oscillation avec la même loi de vitesse , le régime périodique est dit stable .

Plus précisément : $\forall t > t_0 \geq 0, \forall \epsilon, \exists \eta$ tel que , si :

$$\| \underline{X}(t_0) - \underline{X}_T(t_0) \| < \eta \Rightarrow \| \underline{X}(t) - \underline{X}_T(t) \| < \epsilon$$

de plus , si : $\lim_{t \rightarrow \infty} \| \underline{X}(t) - \underline{X}_T(t) \| \rightarrow 0$

la stabilité est dite asymptotique .

Définition

Une stabilité est dite *globale* si l'étude , restreinte aux valeurs prises par les variables dans un problème donné , fait que le système analysé reste stable .

Elle devient *locale* si la stabilité de la position d'équilibre est garantie sans préjuger du domaine dans lequel le problème est cerné . Elle est une condition nécessaire , mais non suffisante , de la stabilité globale .

A - Remarque R(1)

Le véritable domaine de stabilité est un domaine de conditions initiales , alors qu'en parlant de la stabilité locale il est fait allusion aux valeurs des variables .

D'une manière générale , un champ de conditions initiales présente plus d'intérêt pratique qu'un domaine de valeurs possibles des variables , mais est cependant , plus difficile à obtenir .

B - Remarque R(2)

Les notions de stabilité locale ou globale et de domaine de stabilité s'appliquent également aux oscillations .

III.6 - APPLICATION AUX SYSTEMES NON - LINEAIRES

Pour un système linéaire , la stabilité locale définie dans le voisinage immédiat du point d'équilibre est équivalente à la stabilité globale . Ce n'est pas nécessairement vrai dans le cas non linéaire car , même si

le système est stable pour de petits écarts autour de l'équilibre , l'instabilité sans apport de contraintes extérieures , peut se manifester .

Aussi , est - il nécessaire de développer des méthodes permettant d'estimer la zone dans laquelle la stabilité peut être garantie sachant que la réalité , présente un visage totalement différent lorsque des exigences réelles liées aux comportements non linéaires , se manifestent .

3.6.1 : Méthode de Lyapunov

La méthode de LYAPUNOV reste la seule approche générale permettant de tester la stabilité d'un système différentiel quelconque , de la forme :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x} , t) \quad (3-22)$$

sans avoir à calculer analytiquement \underline{f} (à supposer que cela soit possible !) ou numériquement l'ensemble des trajectoires .

L'idée originale de cette méthode prend ses racines en mécanique où le concept d'énergie totale intervient pour l'analyse de la stabilité d'un système .

La généralisation de cette idée consiste à chercher à mettre en évidence pour un système , une fonction (scalaire dérivable) $V(\underline{x} , t)$ dite de Lyapunov , devant être positive au sens précis suivant :

$$V(\underline{0}, t) = 0$$

$$\forall t \geq 0 \quad \lambda(\|\underline{x}\|) \leq V(\underline{x}, t) \leq \mu(\|\underline{x}\|)$$

où $\lambda(\cdot)$ et $\mu(\cdot)$ sont des fonctions de classes K, à savoir continues, monotones non décroissantes, nulles à l'origine et positives ailleurs, augmentant indéfiniment avec leur argument (sans être une norme, $V(\underline{x}, t)$ est néanmoins une « bonne mesure » de la distance de \underline{x} à l'origine grâce à ses caractéristiques).

C'est alors par l'analyse des variations d'une telle fonction de Lyapunov qu'il devient possible de déduire, la région de stabilité, la loi d'action de la commande permettant de l'atteindre, ainsi que l'estimation analytique du temps de réaction ou de réponse du système.

3.6.2 : Chemin analytique

Soit considéré la dérivée \dot{V} de V le long des trajectoires du système et les deux théorèmes suivants (sous entendu que la notation V s'identifie à $V(\underline{x}, t)$):

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V(\underline{x}, t) = \mathbf{V}_x^T \cdot \underline{f} + V_t \quad (3-23)$$

où $\mathbf{V}_x = \nabla V$ et $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$

Théorème I : S'il existe une fonction de Lyapunov V dont la dérivée \dot{V} est négative pour tout (\underline{x}, t) , alors le système est L - stable.

Théorème II : S'il existe une fonction de Lyapunov V dont la dérivée \dot{V} vérifie pour tout (\underline{x}, t) que :

$$V(\underline{x}, t) < -\gamma(\|\underline{x}\|) \leq 0, \quad (3-24)$$

où $\gamma(\cdot)$ est une fonction de classe K, alors le système est L - asymptotiquement stable.

Malheureusement , dans de nombreux cas , il peut être difficile de mettre en évidence une fonction de Lyapunov de dérivée négative au sens de (3-24) . Aussi , le théorème suivant est - il très souvent employé .

Théorème III : S'il existe une fonction de Lyapunov V dont la dérivée \dot{V} soit négative , alors les trajectoires convergent vers Γ , ensemble invariant maximum contenu dans l'ensemble E des point \underline{x} où $V = 0$.

NB : Cet ensemble invariant Γ pour l'équation différentielle (3-20) est tel que quelquesoit la condition initiale dans Γ , la trajectoire totale est dans Γ .

3.6.3 : Application de la méthode directe de Lyapunov

Il n'y a , comme toujours en matière non linéaire , aucune règle générale permettant de trouver une fonction de Lyapunov pour n'importe quel système .

Selon le problème posé , il est essayé une fonction (ou plusieurs) de forme donnée que le choix parmi telle où telle , peut ne pas donner de résultats obligatoirement équivalents .

Toutefois , le type de fonctions construite restera cependant , lié à une classe de systèmes .

Enfin , comme l'impossibilité de trouver des fonctions de Lyapunov peut se produire , il n'est pas exclu d'en découvrir d'autres par des chemins différents .

NB : Trois grandes approches sont possibles pour trouver des fonctions de Lyapunov :

1) Chercher une fonction V de type donné , parmi les principales utilisées , par exemple :

a) Fonction quadratique des variables (Lyapunov) :

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$$

où P est une matrice symétrique ;

b) Fonction quadratique des seconds membres des équations (2 - 2) du système (Krasovskij) :

$$V(\underline{x}) = \underline{f}^T P \underline{f}$$

c) Fonction quadratique plus intégrale (Lur'e)

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x} + \int_0^x g(u) du$$

où $g(u)$ est une fonction assujettie à certaines contraintes .

2) Partir de la dérivée \dot{V} pour remonter vers la fonction V (ce procédé permet notamment la construction de façon systématique des fonctions de Lyapunov pour systèmes linéaires) .

3) Partir du gradient ∇V (méthode du gradient variable) .

REMARQUE RC(3) :

Il faut bien comprendre que la méthode directe de Lyapunov permet d'étudier la stabilité globale mais ne saurait en donner que des conditions suffisantes .

Cela doit être en un double sens .

1) Comme toute étude de stabilité globale , la méthode garantit la stabilité dans un certain domaine qui est intérieur au domaine de stabilité proprement dit . En ce sens , elle conduit à une condition suffisante dans l'espace des variables .

2) Lorsque l'influence sur la stabilité de paramètres entrant dans les équations du système est étudiée , la méthode permettra d'affirmer pour telles valeurs des dits paramètres , la stabilité ; mais lorsque pour d'autres valeurs , la preuve de la stabilité devient impossible en se fondant sur elle , cela ne veut pas nécessairement dire que le système est instable pour ces dites valeurs .

En ce sens , la méthode directe de Lyapunov conduit à des conditions de stabilité suffisantes dans l'espace des paramètres .

III.7 : RECHERCHE DE FONCTIONS DE LYAPUNOV QUADRATIQUES POUR L'ELABORATION D'UNE LOI ADAPTATIVE DE COMMANDE A PARTIR DE LA METHODE DIRECTE DANS LA CAS MRAC .

L'objet dans ce paragraphe est d'établir , pour une

commande donnée , une méthode de synthèse de lois de contrôles pour qu'un profil d'actions , proportionnelles , intégrales ou dérivés réalise un suivi réel et fidèle des états du modèle par ceux du système pour une quelconque forme de consigne donnée .

3.7.1 : Cas de l'Hypothèse 3.3.1

La structure quadratique choisie répond à :

$$V (X_e , Z) = \frac{1}{2} [X_e^T P X_e + \alpha^{-1} \text{tr}(Z^T Z)] \quad (3-25)$$

où α est une constante positive arbitraire spécifiant le gain statique et Z une grandeur construite à partir des équations (3-16) , (3-17) et (3-20) spécifiant que :

$$F = Z^T W \quad (3-26)$$

avec $Z^T = \Delta \theta^T + B_s K^T \quad (3-27)$

La fonction (3-25) est bien positive au sens de Lyapunov et il est clair que sa dérivé par rapport au temps soit donnée par :

$$\dot{V} = - X_e^T Q X_e + \alpha^{-1} \text{tr}(\dot{Z}^T Z) - X_e^T P Z^T W \quad (3-28)$$

avec Q satisfaisant à l'équation de Lyapunov

$$- Q = A_s^T P + P A_s \quad (3-29)$$

Si alors Q est telle que :

- $Q \geq 0$: le système (3-7) est L - stable (théorème 1)
- $Q \geq \gamma I$ avec $\gamma > 0$: le système (3-7) est L - asymptotiquement stable (théorème 2)

La méthode test pour résoudre l'équation de Lyapunov est de :

- i) prendre une matrice Q quelconque définie positive (Q = I par exemple) ,
- ii) résoudre l'équation de Lyapunov (3-29) (linéaire en P) ,
- iii) tester si la matrice P obtenue est définie positive , en évaluant la positivité des mineurs principaux de P , ou par une méthode numérique plus efficace .

Comme , $X_{\circ}^T P Z^T W = \text{tr}(W X_{\circ}^T P Z^T)$ et $\text{tr}(\dot{Z}^T Z) = \text{tr}(\dot{Z} Z^T)$

la relation (3-28) s'écrira alors :

$$\dot{V} = - X_{\circ}^T Q X_{\circ} + \text{tr} [(W X_{\circ}^T P + \alpha^{-1} \dot{Z})^T Z]$$

Une condition suffisante pour que $\dot{V} < 0$ est que : $\text{tr} [\dots] = 0$.

Cette dernière étant , une loi d'adaptation apparaît sous la forme :

$$\dot{Z}^T = \alpha P X_{\circ} W^T \quad (3-30)$$

$$\text{mais } Z^T = \Delta\theta^T + B_S K^T \Rightarrow \dot{Z} = \dot{\Delta\theta}^T + B_S \dot{K}^T \quad (3-31)$$

Le résultat (3-31) fait ressortir la difficulté de résolution de (3-30) , équation dépendante de paramètres inconnus . Cependant , si ces derniers venaient à varier relativement à la dynamique du processus lentement dans le temps , alors la possibilité de dire que la dérivé de $\Delta\theta$ reste nulle devient manifeste.

aussi , $B_S \dot{K}^T = \alpha P X_{\circ} W^T$

et donc que :

$$\dot{K}^T = \alpha B_S^{\dagger} P X_{\circ} W^T \quad (3-32)$$

L'action de la commande ayant été choisie du type intégrale , il vient que :

$$K^T = \int \alpha B_S^T P X_e W^T dt \quad (3-33)$$

et assure bien la stabilité globale du système , puisque :

$$\dot{V} = - X_e^T Q X_e < 0$$

3.7.2 : Cas où $d(X_e, t)$ n'est pas décomposable en fonction des états X_e .

La fonction de Lyapunov est redéfinie par :

$$V(X_e, \theta) = \frac{1}{2} [X_e^T P X_e + \alpha^{-1} \text{tr}(\theta^T \theta)] \quad (3-34)$$

où $\theta^T = \theta^{*T} + B_S K^T \quad (3-35)$

avec comme dérivée par rapport au temps , l'équation :

$$\dot{V} = - X_e^T Q X_e - X_e^T P d + \alpha^{-1} \text{tr}(\dot{\theta}^T \theta) - X_e^T P \theta^T W \quad (3-36)$$

Q et P satisfont à l'équation de Lyapunov (3-29) .

comme : $X_e^T P \theta^T W = \text{tr}(W X_e^T P \theta^T)$ et $\text{tr}(\dot{\theta}^T \theta) = \text{tr}(\dot{\theta} \theta^T)$

L'expression (3-36) se réécrit :

$$\dot{V} = - X_e^T Q X_e + \text{tr} [(W X_e^T P + \alpha^{-1} \dot{\theta})^T \theta] - X_e^T P d \quad (3-37)$$

Afin de forcer la négativité de la dérivée , il convient d'annuler la trace . Cette opération permet d'écrire que :

$$\dot{\theta}^T = \alpha P X_e W^T \quad (3-38)$$

Tenant compte de (3-35) , il est vérifié que :

$$\dot{K}^T = \alpha B_S^T P X_e W^T \quad (3-39)$$

et

$$\dot{V} = - X_e^T Q X_e - X_e^T P d$$

(3-40)

III.8 : SYSTEMES DECRIT PAR DES FORMES CANONIQUES :
DERIVATION DE L'ALGORITHME MCS

3.8.1 : Systemes S.I.S.O

Les matrices des paramètres d'un procédé et de son modèle mathématique , sous forme canonique , s'écrivent :

$$A_{\pi} = \begin{bmatrix} 0_{(N-1) \times 1} & I_{(N-1) \times (N-1)} \\ \dots & \dots \\ a_{\pi(N,1)} & \dots & a_{\pi(N,p)} & \dots & a_{\pi(N,N)} \end{bmatrix} \quad 1 \leq p \leq N$$

$$; \quad B_{\pi} = \begin{bmatrix} 0_{(N-1) \times 1} \\ \dots \\ b_{\pi(N,1)} \end{bmatrix}$$

L'indice " π " prenant indifféremment les valeurs respectives " s " ou " μ " selon qu'il s'agisse de désigner le système ou son modèle mathématique associé .

L'erreur dynamique donnée par (3-7) , s'appuie autour des expressions fondamentales suivantes :

$$\dot{X}_e(t) = A_{\mu} X_e(t) - I_N F \quad \text{avec} \quad F = \theta^{*T} W(t) + B_s u(t) + d(X_s, t)$$

Ainsi , pour la commande définie en (3-20) :

$$F = \theta^T W + d(X_s, t) \tag{3-41}$$

avec $\theta^T = \theta^{*T} + B_s K^T \tag{3-42}$

Traduite sous forme compacte , l'équation (3-41) manifeste que :

$$\theta^T = \begin{bmatrix} \phi & \dots & \psi \end{bmatrix} \tag{3-43}$$

où ϕ et ψ sont des matrices telles que :

$$\phi = B_S K_X + A_S - A_\mu \quad (3-44)$$

$$\psi = B_S K_R - B_\mu \quad (3-45)$$

dont leur structure est telle que :

$$\phi = \begin{bmatrix} O_{(N-1) \times N} \\ \dots \\ \phi_{(N,1)} \dots \phi_{(N,p)} \dots \phi_{(N,N)} \end{bmatrix}_{1 \leq p \leq N} \quad \psi = \begin{bmatrix} O_{(N-1) \times 1} \\ \dots \\ \psi_{(N,1)} \end{bmatrix}$$

Les éléments $\phi_{(N,p)}$ $p \in [1, N]$ et $\psi_{(N,1)}$ se déduisent des équations (3-43) et (3-44) par :

$$\phi_{(N,p)} = b_{S(N,1)} K_{X(1,p)} + a_{S(N,p)} - a_{\mu(N,p)} \quad (3-46)$$

$$\psi_{(N,1)} = b_{S(N,1)} K_{R(1,1)} - b_{\mu(N,1)} \quad (3-47)$$

Pour rendre souple la manipulation des matrices et de leurs éléments, il est opéré le changement de variable ci - après :

$$\forall \pi = (s, \mu)$$

$$a_{\pi(N,p)} = a_{\pi(1,p)} \quad (3-48)$$

$$b_{\pi(N,1)} = b_{\pi(1,1)} \quad (3-49)$$

Ce qui permet d'écrire que :

$$\phi_{(N,p)} = \phi_{(1,p)} = b_{S(1,1)} K_{X(1,p)} + a_{S(1,p)} - a_{\mu(1,p)} \quad (3-50)$$

$$\psi_{(N,1)} = \psi_{(1,1)} = b_{S(1,1)} K_{R(1,1)} - b_{\mu(1,1)} \quad (3-51)$$

Ces transformations agissent sur la matrice des paramètres augmentés de manière que cette dernière présente l'architecture intéressante suivante :

$$\theta^T = \left[\begin{array}{c} O_{(N-1) \times (N+1)} \\ \hline \theta_{(1,1)} \quad \dots \quad \theta_{(1,j)} \quad \dots \quad \theta_{(1,N+1)} \end{array} \right]_{1 \leq j \leq (N+1)} \quad (3-52)$$

Soit θ^T le vecteur construit d'éléments de la dernière ligne de la matrice θ^T :

$$\theta^T = \left[\theta_{(1,1)} \parallel \dots \parallel \theta_{(1,j)} \parallel \dots \parallel \theta_{(1,N+1)} \right]_{1 \leq j \leq (N+1)} \quad (3-53)$$

où les éléments $\theta_{(1,j)} \forall j \in [1, N+1]$ sont tels que :

$$\theta_{(1,j)} = \begin{cases} \phi_{(1,j)} & \text{pour } 1 \leq j \leq N \\ \psi_{(1,j)} & \text{pour } n < j \leq (N+1) \end{cases} \quad (3-54)$$

il devient évident que :

$$A) \quad \theta^T = \left[\begin{array}{c} O_{(n-1) \times (n+1)} \\ \hline \theta^T \end{array} \right] \quad (3-55)$$

$$B) \quad \alpha^{-1} \text{tr}(\theta^T \theta) = \alpha^{-1} \theta^T \theta \quad (3-56)$$

Les transformations précédentes permettent d'écrire :

$$\text{VC } X_e, \theta) = \text{VC } X_e, \theta) \quad (3-57)$$

où

$$V(X_e, \theta) = \frac{1}{2} \left[X_e^T P X_e + \alpha^{-1} \theta^T \theta \right] \quad (3-58)$$

L'équation (3-57) dérivée par rapport au temps, donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X_e, \theta) &= \frac{1}{2} \left[\dot{X}_e^T P X_e + X_e^T P \dot{X}_e + \alpha^{-1} \dot{\theta}^T \theta + \alpha^{-1} \theta^T \dot{\theta} \right] \\ &= -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d + \alpha^{-1} \dot{\theta}^T \theta - X_e^T P \theta^T W \end{aligned} \quad (3-59)$$

Soit à évaluer les expressions ci - après :

$$S = X_e^T P \theta^T W \quad (3-60)$$

$$S' = X_e^T P d \quad (3-61)$$

La matrice P étant telle, que :

$$P = \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{P_{1,1}} & \cdots & \boxed{P_{1,2}} & \cdots & \boxed{P_{1,j}} & \cdots & \boxed{P_{1,N-1}} & \cdots & \boxed{P_{1,N}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{P_{N,1}} & \cdots & \boxed{P_{N,2}} & \cdots & \boxed{P_{N,j}} & \cdots & \boxed{P_{N,N-1}} & \cdots & \boxed{P_{N,N}} \end{array} \right] \quad (3-62)$$

$\underbrace{\quad}_{P_1} \quad \underbrace{\quad}_{P_2} \quad \underbrace{\quad}_{P_j} \quad \underbrace{\quad}_{P_{N-1}} \quad \underbrace{\quad}_{P_N}$

que la forme compacte traduit par :

$$P = \left[P_1 \parallel P_2 \parallel \cdots \parallel P_j \parallel \cdots \parallel P_{N-1} \parallel P_N \right]_{1 \leq j \leq N} \quad (3-63)$$

Chaque vecteur $\parallel P_j \parallel$ est construit d'éléments correspondant à la colonne " j " de la matrice " P " .

Comme le produit $\theta^T W$ donne :

$$\theta^T W = \left[\begin{array}{c} 0_{(n-1) \times 1} \\ \cdots \\ \theta^T W \end{array} \right] \quad (3-64)$$

Il est remarquable que pour S, il vienne :

$$S = X_e^T P \theta^T W = X_e^T P_N \theta^T W = X_e^T P_N W^T \theta = X_e^T W P_N^T \theta = W^T X_e P_N^T \theta$$

L'expression (3-59) sera alors égale à :

$$\dot{V}(X_e, \theta) = -X_e^T Q X_e - X_e^T P d + \left[\alpha^{-1} \dot{\theta}^T - W^T X_e P_N^T \right] \theta \quad (3-65)$$

Une loi d'adaptation se déduit par l'annulation de la quantité entre crochets. Aussi,

$$\dot{\theta}^T = \alpha W^T X_e P_N^T$$

en posant $\omega^T = (X_e^T P_N) W^T$, il apparaît alors :

$$\dot{\theta}^T = \alpha \omega^T \quad (3-66)$$

La perturbation ou la non linéarité " d " étant de la forme :

$$d = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ \dots \\ d_{(1,1)} \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

il se vérifie que : $S' = X_e^T P d = (X_e^T P_N) d_{(1,1)}$

aussi,
$$\dot{V}(X_e, \theta) = -X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} \quad (3-68)$$

CONCLUSION : L'équation (3-66) montre que les paramètres du système agissent sur l'action intégrale de la commande puisque la loi d'adaptation de même type donne :

$$\vartheta^T = \alpha \int \omega^T dt + \vartheta_{(0)}^T \quad (3-69)$$

avec $\vartheta_{(0)}^T$: paramètres d'erreur à l'origine des temps .

comme $\vartheta^T = b_{P(1,1)} K^T + \vartheta^{*T}$ alors :

$$K^T = \frac{\alpha}{b_{P(1,1)}} \left[\int \omega^T dt + \vartheta_{(0)}^T \right] \quad (3-70)$$

3.8.2 : Méthode d'obtention d'une commande à action proportionnelle + intégrale .

Soit alors la fonction $V(X_e, \vartheta, \omega)$ telle que :

$$V(X_e, \vartheta, \omega) = \frac{1}{2} \left[X_e^T P X_e + \frac{(\vartheta - \beta \omega)^T (\vartheta - \beta \omega)}{\alpha} \right] \quad (3-71)$$

Afin de rendre plus souple l'écriture précédente , il est posé :

$$M = \frac{1}{2} \left[X_e^T P X_e \right] \quad (3-72)$$

$$N = \frac{1}{2\alpha} \left[(\vartheta - \beta \omega)^T (\vartheta - \beta \omega) \right] \quad (3-73)$$

L'équation (3-71) s'écrira alors :

$$V(X_e, \vartheta, \omega) = M + N$$

que la dérivée par rapport au temps induit :

$$\dot{V}(X_e, \vartheta, \omega) = \dot{M} + \dot{N}$$

avec :

$$\dot{M} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d - (X_e^T P_N) \omega^T \vartheta$$

$$\dot{N} = \frac{1}{\alpha} \left[\dot{\vartheta}^T \vartheta - \beta \dot{\omega}^T \vartheta - \beta \dot{\vartheta}^T \omega + \beta^2 \dot{\omega}^T \omega \right]$$

En regroupant les termes de même nature, il apparaît que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d - \frac{1}{\alpha} \left[\alpha \omega^T - \dot{\vartheta}^T + \beta \dot{\omega}^T \right] \vartheta + \frac{\beta}{\alpha} \left[\beta \dot{\omega}^T - \dot{\vartheta}^T \right] \omega$$

pour que la dérivée \dot{V} soit négative, le procès d'annulation de l'encadré doit être de mise.

L'effet déduit conduit à une loi d'adaptation définie par :

$$\dot{\vartheta}^T = \beta \dot{\omega}^T + \alpha \omega \quad (3-74)$$

et donc que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d - \beta \omega^T \omega \quad (3-75)$$

L'intégration de (3-74) donne :

$$\vartheta^T = \left[\alpha \int \omega^T dt \right] + \beta \omega^T + \vartheta_{(0)} \quad (3-76)$$

ϑ , dépendant des paramètres du système.

CONCLUSION :

L'intérêt de rechercher des fonctions de Lyapunov , à permis de satisfaire à un type souhaitée de commande évoluant dans un environnement dépendant de paramètres supposés inconnus du système .

III.9 : STRATEGIE DE SYNTHESE D'UN CONTROLEUR MINIMAL (CAS MCS)

Afin de confirmer la volonté d'indépendance de ces derniers , il doit être opéré le changement de variable suivant , dans l'expression (3-70) afin que :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha b_{S_{(1,1)}} > 0 \\ \beta &= \beta b_{S_{(1,1)}} > 0\end{aligned}\quad (3-77)$$

Les développements des résultats obtenus en (3.8.2) manifestent alors , que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (3-78)$$

$$\text{où : } \dot{V}_1 = -\frac{1}{\alpha b_{S_{(1,1)}}} \left[\alpha b_{S_{(1,1)}} \omega - \dot{\theta}^T + \beta b_{S_{(1,1)}} \dot{\omega}^T \right] \theta \quad (3-79)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{\beta}{\alpha} \left[\beta b_{S_{(1,1)}} \dot{\omega}^T - \dot{\theta}^T \right] \omega \quad (3-80)$$

Les mêmes opérations de calculs pour maintenir \dot{V} négative font que la nouvelle loi d'adaptation soit indépendantedes paramètres du système . Aussi ,

$$\dot{K}^T = \alpha \omega^T + \beta \dot{\omega}^T \quad (3-81)$$

en conséquence :

$$K^T = \int \alpha \omega^T dt + \beta \omega^T + K_{(0)} \quad (3-82)$$

Cette technique introduit la méthode M.C.S .

III.10 : STRATEGIE D'HYPERSTABILITE

3.10.1 : Position du problème

Lorsqu'un système contient un (ou des) organes non linéaire indépendant de la fréquence de caractéristique univoque :

$$\Omega = f(x) \quad (3-83)$$

Le problème posé , consiste à trouver des conditions auxquelles doit satisfaire la partie linéaire pour posséder une stabilité asymptotique illimitée appelée << condition du secteur >> .

3.10.2 : Notion de systèmes linéaires associés

Il existe de nombreuses méthodes dites de linéarisation permettant , lorsqu'elles s'appliquent , de déduire la stabilité d'un système non linéaire

$$\dot{x} = f(x,t) \quad (3-84)$$

de propriétés d'un système linéaire associé .

i) La linéarisation locale , qui consiste à écrire (3-84) sous la forme

$$\dot{x} = F(t) + q(x,t) \quad (3-85)$$

où

$$q(x,t) = O(\|x\|) \quad (3-86)$$

Il est alors possible de déduire de la stabilité de $F(t)$, la stabilité de (3-84) (Lyapunov) . Cette méthode ne conduisant malheureusement qu'à des résultats locaux .

ii) L'isolement des non - linéarités , qui s'applique lorsque le système (3-84) peut s'écrire sur la forme d'un système linéaire avec retour non linéaire :

$$\dot{x} = A x + B u \quad (3-87)$$

$$y = C x + D u \quad (3-88)$$

$$u = - \Phi(y, t) \quad (3-89)$$

Sous des hypothèses très larges sur la non - linéarité , il est possible de déduire à partir de propriétés particulières de la partie linéaire (3-87) - (3-88) la stabilité globale de (3-84) . (critère de Popov et critère du cercle) . Ces résultats étant globaux , présentent de très intéressantes applications .

III.11 : Matrices et fonctions de transfert positives réelles

Définition 3.11.1 (caractère p.r.) : La matrice de transfert $m \times m$ $H(s)$ est positive réelle si et seulement si :

$$\operatorname{Re} H(s) \geq 0 \quad (*) \quad \text{pour } \operatorname{Re} s \geq 0 \quad (3-90)$$

(*) $\operatorname{Re} H(s) \geq 0$ signifie que $\operatorname{Re} H(s) + [\operatorname{Re} H(s)]^T$ est non négative définie .

Définition 3.11.2 (caractère p.r.) : La matrice de transfert $m \times m$ $H(s)$ est positive réelle si et seulement si :

- i) A est stable ,
- ii) $S(s) = H(s) + H^T(-s)$ est un spectre , c'est à dire $S(j\omega) \geq 0$ pour tout ω réel .

Théorème 3.11.1 : (lemme p.r ou lemme de Yakubovich - Popov - Kalman) :

La matrice de transfert $H(s) = D + C (s I - A)^{-1} B$ du système (3-87) et (3-88) complètement commandable et complètement observable est p.r si et seulement s'il existe des matrices P , Q (symétriques) et S telles que :

$$\begin{cases} A^T P + P A = - Q \\ C^T - P B = S \\ P > 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{avec } R = D + D^T \quad (3-91)$$



III.12 : Critère de Popov .

Théorème 3.11.2 : S'il est possible d'isoler pour le système non linéaire décrit par les équations (3-87) à (3-89) les non linéarité $\phi(\cdot)$, alors quel que soit le retour non linéaire tel que :

$$u^T y \leq 0 \quad (3-92)$$

Le système (3-87) - (3-89) est L - asymptotiquement stable .

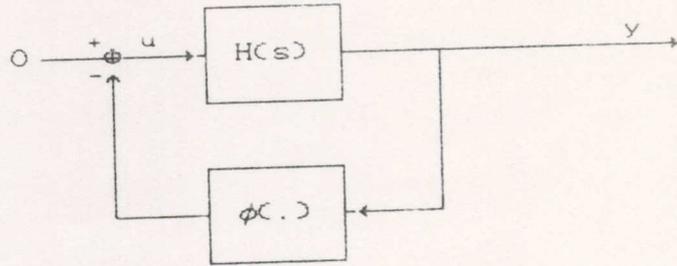


fig 3-2 : Système linéaire à retour non linéaire .

III.13 : INEGALITE DE POPOV (théorème d'hyperstabilité)

Théorème 3.11.3 : Une condition nécessaire et suffisante pour que le système décrit par les équations (3-87) à (3-89) soit hyperstable est que la fonction de transfert soit strictement positive réelle et que les entrées - sorties du bloc non-linéaire satisfassent à l'inégalité de Popov :

$$\int_{t_2}^{t_1} y^T \phi \, d\tau \geq -\gamma_0^2 \quad \forall \quad 0 < t_1 < t_2 \quad (3-93)$$

γ_0^2 : constante positive indépendante du temps

III.14 : RESOLUTION DE L'INTEGRALE DE POPOV (cas M.C.S)

3.14.1 : Systemes S.I.S.O

L'erreur dynamique vérifiant :

$$\dot{X}_{\ominus}(t) = A_{\mu} X_{\ominus}(t) - I_N F \quad (3-94)$$

où $F = \theta^T W(t) + d(X_S, t)$

$$\theta^T = \theta^{*T} + B_S K^T$$

La comparaison avec les équations (3-87) - (3-89) autorise le choix (méthode M.C.S) ci après :

$$B \equiv I_N, \quad \phi \equiv -F$$

Par conséquent la stabilité absolue de (3-94) s'obtient par application de la théorie d'hyperstabilité et du critère de POPOV au bloc non linéaire équivalent en boucle fermée au schéma de la figure ci - dessous :

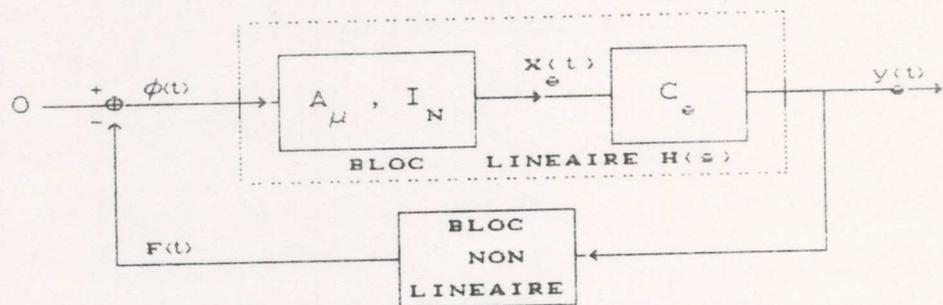


fig 3-3

Aussi le système sera hyperstable si pour l'erreur de sortie augmentée $y_{\ominus}(t)$ telle que :

$$Y_{\ominus}(t) = C X_{\ominus}(t) \quad (3-95)$$

il est satisfait pour la condition de positivité réelle de $H(s)$ définie par :

$$H(s)^T = C (s I_N - A_\mu)$$

1) le théorème (3.11.1) [lemme de Yakubovich - Popov - Kalman]

Traduisant qu'il existe deux matrices symétriques positives définies P et Q telles que :

$$A^T P + P A = - Q \quad (3.96)$$

$$C_e = P \quad (3.97)$$

2) l'inégalité de Popov

$$\int_{t_1}^{t_2} y_e^T(t) F(t) dt \geq - \gamma^2$$

3.14.2 : Cas de l'Hypothèse 3.3.1 (Système S.I.S.O)

La formulation (3-13) régissant la forme des non linéairités, postule que :

$$d(x_s, t) = \delta \theta^T W(t)$$

Ce qui introduit pour F que :

$$F = \left\{ \theta^* + \delta \theta + K B_s^T \right\}^T W$$

par conséquent :

$$y_e^T F = y_e^T \left\{ \theta^* + \delta \theta + K B_s^T \right\}^T W$$

Les formes matricielles données en (3-44) et (3-45) imposent :

$$= Y_{e(1,N)} \left\{ b_{s(1,1)} K^T + \delta \theta^T + \theta^{*T} \right\} W$$

$$= b_{S(1,1)} Y_{e(1,N)} W^T \left\{ K + \frac{\delta\theta + \theta^*}{b_{S(1,1)}} \right\}$$

En choisissant $C_e = P$, l'inégalité (3-93) aboutit à :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} b_{S(1,1)} Y_{e(1,N)} W^T \left[K(t) + \frac{\Delta\theta}{b_{S(1,1)}} \right] \quad (3-98)$$

Une manière de forcer le système à l'obéissance d'une action du type proportionnelle et intégrale, est d'appliquer les résultats de l'annexe (3). Aussi, comme

$$Y_{e(1,N)} W^T = (P_N^T X_e) W^T = \omega^T \quad (3-99)$$

En posant :

$$f(t) = \left[K(t) + \frac{\Delta\theta}{b_{S(1,1)}} \right] \quad (3-100)$$

Une variation lente des paramètres du système entrainerait d'une part :

$$\Delta\theta \equiv 0$$

et d'autre part que :

$$\left[\dot{f}(t) \right]^T = \alpha \omega^T + \beta \dot{\omega}^T$$

Nécessairement alors :

$$\dot{K}^T(t) = \alpha \omega^T + \beta \dot{\omega}^T \quad (3-101)$$

et qu'en définitive :

$$K^T(t) = \int \alpha \omega^T dt + \beta \omega^T \quad (3-102)$$

Résultat bien établi dans le cadre de la théorie de Lyapunov .

IV - COMMANDE ADAPTATIVE MULTIVARIABLE GENERALISATION AUX SYSTEMES CANONIQUES

Le problème multivariable , plus actuel fait l'objet d'importants thèmes de recherches .
Néanmoins , l'étude présentée se limitera à une extension du cas S I S O .

Les structures analytiques caractérisant les paramètres inconnus du procédé ainsi que connus , du modèle mathématique associé , sont représentées dans l'espace des phases , par des matrices partitionnées en blocs , dont le nombre et la dimension dépendent respectivement , de l'ordre et du nombre de degrés de liberté associés au système .

Les théories de stabilités de LYAPUNOV et de l'hyperstabilité de POPOV justifieront l'accès plus étendu de synthèse , des lois d'adaptations propre au thème de recherche investi .

De ce fait , un chemin analytique précis quand à son élaboration , puisque testé dans les opérations de simulations , est - il proposé .

Si, $(N, n_{\nu}^{(i,j)})$ et $(M, m_{\nu}^{(i,j)})$ sont les données traduisant la dimension d'une matrice et d'un bloc de coordonnées (i, j) la composant $\forall \nu = (i, j) \in [1, M]$, alors chaque couple de valeurs, respectivement s'associant à un ordre et à un degré de liberté doit vérifier les égalités :

$$N = \sum_{i=1}^M n_i^{(i,j)} = \sum_{j=1}^M n_j^{(i,j)} \quad (4-1)$$

$$M = \sum_{i=1}^M m_i^{(i,j)} = \sum_{j=1}^M m_j^{(i,j)} \quad (4-2)$$

$$\forall (i, j) \in [1, M]$$

Comme les images physiques du procédé et de son modèle mathématique, que le traitement de leur commandes s'expriment à travers des matrices représentatives des états et des entrées du système, il est possible de présenter ces dernières à l'aide des formes partitionnées ci-dessous :

$$A_{\pi} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_{\pi}^{(1,1)} & A_{\pi}^{(1,j)} & A_{\pi}^{(1,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{\pi}^{(i,1)} & A_{\pi}^{(i,j)} & A_{\pi}^{(i,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{\pi}^{(M,1)} & A_{\pi}^{(M,j)} & A_{\pi}^{(M,M)} \\ \hline \end{array} \quad (4-3)$$

$$B_{\pi} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_{\pi}^{(1,1)} & B_{\pi}^{(1,j)} & B_{\pi}^{(1,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{\pi}^{(i,1)} & B_{\pi}^{(i,j)} & B_{\pi}^{(i,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{\pi}^{(M,1)} & B_{\pi}^{(M,j)} & B_{\pi}^{(M,M)} \\ \hline \end{array} \quad (4-4)$$

" π " prenant les valeurs indicielles définies au (II.5.1) .

De même , la matrice incluant les non-linéarités , les perturbations ou une quelconque grandeur dépendante du temps , verra sa structure blocs dans la représentation suivante :

$$D = \begin{array}{|c|} \hline D^{(1,1)} \\ \hline \vdots \\ \hline D^{(i,1)} \\ \hline \vdots \\ \hline D^{(M,1)} \\ \hline \end{array} \quad (4-5)$$

Comme les blocs $A_{\pi}^{(i,j)}$, $B_{\pi}^{(i,j)}$ et $D^{(i,1)}$ se confondent avec les architectures canoniques , les procédés (ou les modèles) modulés par les contraintes ci - dessous ont particularisés l'étude qui suit :

$$\boxed{n_i^{(i,j)} = n_j^{(i,j)} = n_i = n_j} \quad \boxed{m_i^{(i,j)} = m_j^{(i,j)} = m_i = m_j} \quad (4-6)$$

$$\forall (i, j) \in [1, M]$$

Aussi , chaque bloc voit sa dimension se plier aux formulations ci - après :

$$\forall (i, j) \in [1, M]$$

$$\dim A_{\pi}^{(i,j)} = n_i^{(i,j)} \times n_j^{(i,j)} = (n_i \times n_j)^{(i,j)} = n_i \times n_j$$

$$\dim B_{\pi}^{(i,j)} = n_i^{(i,j)} \times m_j^{(i,j)} = (n_i \times m_j)^{(i,j)} = n_i \times m_j$$

$$\dim D^{(i,1)} = n_i^{(i,j)} \times 1$$

Le traitement des équations (4-1) et (4-2) permet de définir l'ordre et le nombre de degré de liberté associé à un bloc de coordonnées donné .

En effet , l'équation (4-1) définit l'ordre total du système , comme résultante d'ordres de sous systèmes dont la décomposition se traduit par :

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_M$$

L'aire de chaque sous système ayant une dimension égale à celle d'un bloc , permet de poser : $n_i = n$

aussi ; $N = n M \Rightarrow \boxed{n = \frac{N}{M}} \quad (4-7)$

De même pour le nombre de degrés de libertés associé au système , l'équation (4-2) postule que :

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_M$$

En choisissant , $m_i = m \quad \forall i \in [1, M]$ il vient que :

$$M = m M \Rightarrow m = \frac{M}{M} = 1 \quad (4-8)$$

En définitive , les blocs du système physique et de son modèle mathématique répondrons aux formes générales ci - dessous :

1 - pour $i = j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$A_s^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n_i-1) \times 1} & I_{(n_i-1) \times (n_i-1)} \\ \hline a_s^{(i,i)} & a_s^{(i,i)} \\ a_s^{(n_i,1)} & \dots & a_s^{(n_i,k)} & \dots & a_s^{(n_i,n_i)} \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-9)$$

$$A_\mu^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n_i-1) \times 1} & I_{(n_i-1) \times (n_i-1)} \\ \hline a_\mu^{(i,i)} & a_\mu^{(i,i)} \\ a_\mu^{(n_i,1)} & \dots & a_\mu^{(n_i,k)} & \dots & a_\mu^{(n_i,n_i)} \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-10)$$

$$B_s^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \hline b_{s(n_i,1)}^{(i,i)} \end{array} \right] \quad (4-11)$$

$$B_\mu^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \hline b_{\mu(n_i,1)}^{(i,i)} \end{array} \right] \quad (4-12)$$

2 - pour $i \neq j \quad \forall (i, j) \in [1, m]$

$$A_s^{(i,j)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times n_i} \\ \hline a_{s(n_i,1)}^{(i,j)} \dots a_{s(n_i,k)}^{(i,j)} \dots a_{s(n_i,n_i)}^{(i,j)} \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-13)$$

$$A_\mu^{(i,j)} = \left[\begin{array}{c} 0_{n_i \times n_i} \end{array} \right] \quad (4-14)$$

$$B_s^{(i,j)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \hline b_{s(n_i,1)}^{(i,j)} \end{array} \right] \quad (4-15)$$

$$B_\mu^{(i,j)} = \left[\begin{array}{c} 0_{n_i \times 1} \end{array} \right] \quad (4-16)$$

3 - $\forall i \in [1, m]$

$$D^{(i,1)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \hline D_{(n_i,1)}^{(i,1)} \end{array} \right] \quad (4-17)$$

Les transformations ci - dessous , adoptées pour les paramètres respectifs du système et de son modèle ont été étendus aux perturbations et non linéarités .

$$a_{\pi}^{(i,j)}(n_i, k) = a_{\pi}^{(i,j)}(m_i, k)$$

$$b_{\pi}^{(i,j)}(n_i, 1) = b_{\pi}^{(i,j)}(m_i, 1)$$

$$d_{(n_i, 1)}^{(i, 1)} = d_{(m_i, 1)}^{(i, 1)}$$

En effet , au vu des écritures précédentes , il apparait que :

1 - pour $i = j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$A_s^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n_i-1) \times 1} & I_{(n_i-1) \times (n_i-1)} \\ \hline a_{s(m_i, 1)}^{(i,i)} \dots a_{s(m_i, k)}^{(i,i)} \dots a_{s(m_i, n_i)}^{(i,i)} & \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-18)$$

$$A_{\mu}^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n_i-1) \times 1} & I_{(n_i-1) \times (n_i-1)} \\ \hline a_{\mu(m_i, 1)}^{(i,i)} \dots a_{\mu(m_i, k)}^{(i,i)} \dots a_{\mu(m_i, n_i)}^{(i,i)} & \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-19)$$

$$B_s^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \hline b_{s(m_i, 1)}^{(i,i)} \end{array} \right] \quad (4-20)$$

$$B_{\mu}^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \hline b_{\mu(m_i, 1)}^{(i,i)} \end{array} \right] \quad (4-21)$$

2 - pour $i \neq j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$A_s^{(i,j)} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n_i-1) \times n_j} \\ \hline a_{s(m_i, 1)}^{(i,j)} \dots a_{s(m_i, k)}^{(i,j)} \dots a_{s(m_i, n_i)}^{(i,j)} & \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-22)$$

$$B_{\mu}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \dots \\ b_{\mu}^{(i,j)} \\ \dots \\ 0_{(m_i,1)} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

les matrices $A_{\mu}^{(i,j)}$ et $B_{\mu}^{(i,j)}$ étant nulles .

3 - Pour $i \in [1, M]$

$$D^{(i,1)} = \begin{bmatrix} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \dots \\ D^{(i,1)} \\ \dots \\ 0_{(m_i,1)} \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

REMARQUES : A des fins souples de manipulation , certaines démonstration ont été élaborées dans une perspective manuscrite pour obtenir ce qui suit .

A - La matrice K des gains ajustables définie en (1-18) s'écrit :

$$K^T = \begin{bmatrix} K_x & \dots & K_R \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

Aussi , s'impose - t - elle par son architectures bloc :

$$K^T = \begin{bmatrix} K_1^T \\ \dots \\ K_i^T \\ \dots \\ K_M^T \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq M \quad (4-26)$$

où l'élément K_i^T représente l' $i^{\text{ème}}$ ligne composée des termes de la matrice K^T . Ce dernier est tel , que :

$$K_i^T = \left[K^{(i,1)} \parallel \dots \parallel K^{(i,r)} \parallel \dots \parallel K^{(i,N)} \right] \quad (4-27)$$

$1 \leq r \leq N$

La partition de coordonnée (i, r) satisfait l'écriture :

$$\forall \quad 1 \leq i \leq M$$

$$[K^{(i,r)}] = \begin{cases} [K_{X(m_i,1)}^{(i,r)} \parallel \dots \parallel K_{X(m_i,k)}^{(i,r)} \parallel \dots \parallel K_{X(m_i,n_i)}^{(i,r)}] & \text{Si } \begin{cases} 1 \leq r \leq M \\ 1 \leq k \leq n_i \end{cases} \\ [K_{R(m_i,1)}^{(i,r-M)}] & \text{Si } M < r \leq N \end{cases} \quad (4-28)$$

B - La structure de la matrice d'entrée B_S du système permet d'affirmer la décomposition suivante :

$$B_S = B_S^* + B_S^\#$$

où B_S^* est définie par :

$$B_S^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_S^{*(1,1)} & B_S^{*(1,j)} & B_S^{*(1,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_S^{*(i,1)} & B_S^{*(i,j)} & B_S^{*(i,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_S^{*(M,1)} & B_S^{*(M,j)} & B_S^{*(M,M)} \\ \hline \end{array} \quad (4-29)$$

et $B_S^\#$:

$$B_S^\# = \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_S^{\#(1,1)} & B_S^{\#(1,j)} & B_S^{\#(1,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_S^{\#(i,1)} & B_S^{\#(i,j)} & B_S^{\#(i,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_S^{\#(M,1)} & B_S^{\#(M,j)} & B_S^{\#(M,M)} \\ \hline \end{array} \quad (4-30)$$

Chaque bloc vérifie :

1) pour $i \neq j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\mathbb{B}_S^{*(i,j)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i-1) \times 1} \\ b_{S(m_i,1)}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}_S^{\#(i,j)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i-1) \times 1} \\ b_{S(m_i,1)}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

2) pour $i = j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\mathbb{B}_S^{*(i,i)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i-1) \times 1} \\ b_{S(m_i,1)}^{*(i,i)} \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}_S^{\#(i,i)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i-1) \times 1} \\ b_{S(m_i,1)}^{*(i,i)} \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

Ces opérations permettant un nouveau développement de la matrice des paramètres augmentés (2-23), assurent que :

$$\begin{aligned} \theta^T &= \mathbb{B}_S K^T + \theta^{*T} = (\mathbb{B}_S^* + \mathbb{B}_S^{\#}) K^T + \theta^{*T} \\ &= \mathbb{B}_S^* K^T + \mathbb{B}_S^{\#} K^T + \theta^{*T} \end{aligned} \quad (4-33)$$

d'après (2-21), $F(t) = \theta^T W(t) + D(t)$. Aussi,

$$= \mathbb{B}_S^* K^T W + \mathbb{B}_S^{\#} K^T W + \theta^{*T} W + D \quad (4-34)$$

en posant : $D^{\#} = \mathbb{B}_S^{\#} K^T W$, il vient :

$$F(t) = \mathbb{B}_S^* K^T W + \theta^{*T} W + D^{\#} + D \quad (4-35)$$

En choisissant $d(t) = D^{\#} + D$ il devient manifeste que :

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{B}_S^* K^T W + \theta^{*T} W + d \\ &= \vartheta^T W + d \end{aligned} \quad (4-36)$$

où $\vartheta^T = \mathbb{B}_S^* K^T + \theta^{*T} \quad (4-37)$

La structure matricielle de $D^\#$ étant identique à D , impose pour la résultante "d" la représentation :

$$d = \begin{bmatrix} d^{(1,1)} \\ \vdots \\ d^{(i,1)} \\ \vdots \\ d^{(M,1)} \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

comme $d = D^\# + D$ alors $d^{(i,1)} = D^{\#(i,1)} + D^{(i,1)}$

où les $d^{(i,1)}$ sont égaux à :

$$d^{(i,1)} = \begin{bmatrix} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ d_{(m_i,1)}^{(i,1)} \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

où

$$d_{(m_i,1)}^{(i,1)} = b_{s_{(m_i,1)}}^{(i,m-i+1)} K_{(M-i+1)}^T W + D_{(m_i,1)}^{(i,1)} \quad (4-40)$$

Conséquences : La matrice des paramètres augmentés se partitionnera comme suit :

$$\vartheta^T = \begin{bmatrix} \vartheta^{(1,1)} & \vartheta^{(1,r)} & \vartheta^{(1,N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vartheta^{(i,1)} & \vartheta^{(i,r)} & \vartheta^{(i,N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vartheta^{(M,1)} & \vartheta^{(M,r)} & \vartheta^{(M,N)} \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

$1 \leq i \leq M$
 $1 \leq r \leq N$

et respectant l'organisation ci - après .

A - Si $1 \leq r \leq M$

1) Alors , pour $i = r$

$$g^{(i,i)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times n_i} \\ \hline g_{(m_i,1)}^{(i,i)} \dots g_{(m_i,k)}^{(i,i)} \dots g_{(m_i,n_i)}^{(i,i)} \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-42)$$

2) pour $i \neq r$

$$g^{(i,r)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times n_i} \\ \hline g_{(m_i,1)}^{(i,r)} \dots g_{(m_i,k)}^{(i,r)} \dots g_{(m_i,n_i)}^{(i,r)} \end{array} \right]_{1 \leq k \leq n_i} \quad (4-43)$$

$$g_{(n_i,k)}^{(i,r)} = g_{(m_i,k)}^{(i,r)} = \phi_{(n_i,k)}^{(i,r)} = \phi_{(m_i,k)}^{(i,r)} \quad (4-44)$$

$$g_{(n_i,k)}^{(i,r)} = b_{s_{(m_i,1)}}^{(i,i)} K_{x_{(m_i,k)}}^{(i,r)} + a_{s_{(m_i,k)}}^{(i,r)} - a_{\mu_{(m_i,k)}}^{(i,r)} \quad (4-45)$$

B - Si $M < r \leq N$

Alors $\forall i \in [1, M]$,

$$g^{(i,r)} = \left[\begin{array}{c} 0_{(n_i-1) \times 1} \\ \hline g_{(m_i,1)}^{(i,r)} \end{array} \right] \quad (4-46)$$

$$\vartheta_{(n_i,1)}^{(i,r)} = \vartheta_{(m_i,1)}^{(i,r)} = \psi_{(n_i,1)}^{(i,r-M)} = \psi_{(m_i,1)}^{(i,r-M)} \quad (4-47)$$

$$\vartheta_{(m_i,1)}^{(i,r)} = b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} K_{r(m_i,1)}^{(i,r-M)} - b_{\mu(m_i,1)}^{(i,r-M)} \quad (4-48)$$

Finalement la matrice des paramètres augmentés vérifiera la structure :

$$\vartheta^T = \begin{array}{|c|} \hline 0_{(m_1-1) \times (N+M)} \\ \hline \vartheta_1^T \\ \hline \cdot \\ \hline 0_{(m_i-1) \times (N+M)} \\ \hline \vartheta_i^T \\ \hline \cdot \\ \hline 0_{(m_M-1) \times (N+M)} \\ \hline \vartheta_M^T \\ \hline \end{array} \quad 1 \leq i \leq M \quad (4-49)$$

ϑ_i^T étant l' $i^{\text{ème}}$ élément construit à partir de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice ϑ^T . Ce dernier étant un vecteur, son expression au travers d'une structure bloc, manifeste que :

$$\vartheta_i^T = \left[\vartheta^{(i,1)} \parallel \dots \parallel \vartheta^{(i,r)} \parallel \dots \parallel \vartheta^{(i,N)} \right] \quad (4-50)$$

$\forall \quad 1 \leq i \leq M \quad \text{et} \quad i \leq r \leq N$

ou les blocs vectoriels $\parallel \vartheta^{(i,r)} \parallel$ vérifient :

$$\parallel \vartheta^{(i,r)} \parallel = \begin{cases} \left[\vartheta_{X(m_i,1)}^{(i,r)} \parallel \dots \parallel \vartheta_{X(m_i,p)}^{(i,r)} \parallel \dots \parallel \vartheta_{X(m_i,n_i)}^{(i,r)} \right] & \text{Si } \begin{cases} i \leq r \leq m \\ i \leq p \leq n_i^{(i,r)} \end{cases} \\ \left[\vartheta_{R(m_i,1)}^{(i,r-m)} \right] & \text{Si } m < r \leq n \end{cases} \quad (4-51)$$

avec :

$$\vartheta_{X(m_i, p)}^{(i, r)} = b_{S(m_i, 1)}^{(i, i)} K_{X(m_i, p)}^{(i, r)} + \vartheta_{X(m_i, p)}^{*(i, r)} \quad (4-52)$$

où

$$\vartheta_{X(m_i, p)}^{*(i, r)} = a_{S(m_i, p)}^{(i, r)} - a_{\mu(m_i, p)}^{(i, r)} \quad (4-53)$$

et

$$\vartheta_{R(m_i, 1)}^{(i, r-M)} = b_{S(m_i, 1)}^{(i, i)} K_{R(m_i, 1)}^{(i, r-M)} + \vartheta_{R(m_i, 1)}^{*(i, r-M)} \quad (4-54)$$

où

$$\vartheta_{R(m_i, 1)}^{*(i, r-M)} = - b_{M(m_i, 1)}^{(i, r-M)} \quad (4-56)$$

METHODE DES FONCTIONS DE LYAPUNOV

Soit $V(X_e, K_i, t)$ la fonction scalaire arbitraire définie par :

$$V = \frac{1}{2} X_e^T P X_e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{1}{\alpha_i} b_{P(m_i,1)}^{(i,i)} \left[K_i - \beta_i \omega_i \right]^T \left[K_i - \beta_i \omega_i \right] \quad (4-57)$$

K_i étant l' $i^{\text{ème}}$ ligne des gains augmentés de la matrice K .

et où
$$\omega_i^T = (X_e^T P_{2..i}) W^T \quad (4-58)$$

La dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P) D - X_e^T P \Theta^T W + \Delta \quad (4-59)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\alpha_i} b_{P(m_i,1)}^{(i,i)} \left[\dot{K}_i - \beta_i \dot{\omega}_i \right]^T \left[K_i - \beta_i \omega_i \right] \quad (4-60)$$

comme :

$$\Theta^T W = \begin{array}{|c} \hline 0_{(n_1-1) \times (N+M)} \\ \hline \Theta_1^T W \\ \hline \cdot \\ \hline 0_{(n_i-1) \times (N+M)} \\ \hline \Theta_i^T W \\ \hline \cdot \\ \hline 0_{(n_M-1) \times (N+M)} \\ \hline \Theta_M^T W \\ \hline \end{array} \quad 1 \leq i \leq M \quad (4-60)$$

$$\text{et } P = \left[\begin{array}{c} \| P_1 \| \dots \| P_r \| \dots \| P_N \| \end{array} \right] \quad 1 \leq r \leq N$$

$\| P_r \|$ présentant la $r^{\text{ème}}$ colonne de la matrice " P " .

Il est déduit alors , que :

$$X_e^T P \vartheta^T W = \sum_{i=1}^M \left[X_e^T P_{2,i} \right] \left[\vartheta_i^T W \right] \quad (4-61)$$

comme $\omega_i^T = \langle X_e^T P_{2,i} \rangle W^T$, il vient :

$$X_e^T P \vartheta^T W = \sum_{i=1}^M \omega_i^T \vartheta_i = \sum_{i=1}^M \vartheta_i^T \omega_i \quad (4-62)$$

$$\text{or , } \quad \vartheta_i^T = b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} K_i^T + \vartheta_i^{*T} \quad (4-63)$$

$$\text{où } \vartheta_i^{*T} = \left[\vartheta^{*(i,1)} \parallel \dots \parallel \vartheta^{*(i,r)} \parallel \dots \parallel \vartheta^{*(i,N)} \right] \quad (4-64)$$

$$\forall 1 \leq i \leq M$$

dont les blocs $\parallel \vartheta^{*(i,r)} \parallel$ vérifient la structure :

$$\parallel \vartheta^{*(i,r)} \parallel = \begin{cases} \left[\vartheta_{X(m_i,1)}^{*(i,r)} \parallel \dots \parallel \vartheta_{X(m_i,p)}^{*(i,r)} \parallel \dots \parallel \vartheta_{X(m_i,n_i)}^{*(i,r)} \right] & \text{Si } \begin{cases} 1 \leq r \leq M \\ 1 \leq p \leq n_i^{(i,r)} \end{cases} \\ \left[\vartheta_{R(m_i,1)}^{*(i,r-M)} \right] & \text{Si } M < r \leq N \end{cases} \quad (4-65)$$

En définitive ,

$$X_e^T P \vartheta^T W = \sum_{i=1}^M \omega_i^T \vartheta_i = \sum_{i=1}^M b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} \omega_i^T K_i + \sum_{i=1}^M \omega_i^T \vartheta_i^* \quad (4-66)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov se réécrit de manière à ce que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P) d + \dot{V}_1 \quad (4-67)$$

où \dot{V}_1 et \dot{V}_2 sont tels , que :

$$\dot{V}_1 = - \sum_{i=1}^M \frac{\beta_i}{\alpha_i} b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} \left[\dot{K}_i - \beta_i \dot{\omega}_i \right]^T \omega_i - \sum_{i=1}^M \omega_i^T \vartheta_i^* + \dot{V}_2 \quad (4-68)$$

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\alpha_i} b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} \left\{ \dot{K}_i - \beta_i \dot{\omega}_i - \alpha_i \omega_i \right\}^T K_i \quad (4-69)$$

Une loi d'adaptation , pour chaque degré de liberté s'obtient en annulant l'expression (4-69) . Aussi , $\forall i \in [1, M]$

$$\dot{K}_i^T = \beta_i \dot{\omega}_i^T + \alpha_i \omega_i^T \quad (4-70)$$

Ce qui réduit la dérivée \dot{V} à :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P) d - \sum_{i=1}^M \omega_i^T \vartheta_i^* - \sum_{i=1}^M \beta_i b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} \omega_i^T \omega_i \quad (4-71)$$

Soit le changement de variable caractérisant :

a) les vecteurs augmentés ω et ϑ^* .

$$\omega^T = \left[\omega_1^T \mid \omega_2^T \mid \dots \mid \omega_i^T \mid \dots \mid \omega_M^T \right] \quad 1 \leq i \leq M \quad (4-72)$$

$$\vartheta^{*T} = \left[\vartheta_1^{*T} \mid \vartheta_2^{*T} \mid \dots \mid \vartheta_i^{*T} \mid \dots \mid \vartheta_M^{*T} \right] \quad 1 \leq i \leq M \quad (4-73)$$

$$(\omega, \vartheta) \in \mathbb{R}^{M(N+M)}$$

b) La matrice d'entrées :

$$B_S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_S^{(1,1)} & B_S^{(1,j)} & B_S^{(1,M)} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline B_S^{(i,1)} & B_S^{(i,j)} & B_S^{(i,M)} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline B_S^{(i,M)} & B_S^{(M,j)} & B_S^{(M,M)} \\ \hline \end{array} \quad 1 \leq i \leq M \quad (4-74)$$

Chaque bloc vérifie :

1) pour $i = j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$B_S^{(i,i)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & b_{S(m_i,1)}^{(i,i)} \\ \hline \end{array} \quad (N+M) \times (N+M) \quad (4-75)$$

2) pour $i \neq j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$B_S^{(i,j)} = \begin{bmatrix} 0_{(N+M) \times (N+M)} \end{bmatrix}$$

c) Les matrices des gains statiques :

$$\alpha = \begin{array}{c|c|c} \alpha^{(1,1)} & \alpha^{(1,j)} & \alpha^{(1,M)} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(i,1)} & \alpha^{(i,j)} & \alpha^{(i,M)} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(i,M)} & \alpha^{(M,j)} & \alpha^{(M,M)} \end{array} \quad (4-76)$$

$1 \leq i \leq M$

$$\beta = \begin{array}{c|c|c} \beta^{(1,1)} & \beta^{(1,j)} & \beta^{(1,M)} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \beta^{(i,1)} & \beta^{(i,j)} & \beta^{(i,M)} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \beta^{(i,M)} & \beta^{(M,j)} & \beta^{(M,M)} \end{array} \quad (4-77)$$

$1 \leq i \leq M$

Chaque bloc vérifie :

1) pour $i = j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\alpha^{(i,i)} = \begin{array}{c|c|c} \alpha_{(i)} & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{(i)} & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_{(i)} \end{array} \quad (4-78)$$

$M(N+M) \times M(N+M)$

$$\beta^{(i,i)} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{(i)} & & & 0 & & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & & & \beta_{(i)} & & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & & & 0 & & \beta_{(i)} \end{array} \right] \end{array} \quad (4-79)$$

$M(N+M) \times M(N+M)$

2) pour $i \neq j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\alpha^{(i,j)} = \left[\begin{array}{c} 0_{M(N+M) \times M(N+M)} \end{array} \right] \quad \beta^{(i,j)} = \left[\begin{array}{c} 0_{M(N+M) \times M(N+M)} \end{array} \right]$$

Il est évident que :

$$\sum_{i=1}^M \omega_i^T \vartheta_i^* = \omega^T \vartheta^* = \vartheta^{*T} \omega \quad (4-80)$$

avec :

$$\sum_{i=1}^M \left[\begin{array}{c} \beta_i \ b_{S(m_i, 1)}^{(i,i)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \omega_i^T \ \omega_i \end{array} \right] = \omega^T \left[\begin{array}{c} \mathbb{B}_S \ \beta \end{array} \right] \omega = \omega^T \left[\begin{array}{c} \beta \ \mathbb{B}_S \end{array} \right] \omega \quad (4-81)$$

En définitive :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - \langle X_e^T P \rangle d - \omega^T \vartheta^* - \omega^T \left[\begin{array}{c} \mathbb{B}_S \ \beta \end{array} \right] \omega \quad (4-82)$$

En posant $H = \left[\begin{array}{c} \mathbb{B}_S \ \beta \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \beta \ \mathbb{B}_S \end{array} \right]$, il vient :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P) d - \omega^T \theta^* - \omega^T H \omega \quad (4-83)$$

$$\dim H = M(N+M) \times M(N+M)$$

REMARQUE :

La construction d'un vecteur " gains dynamiques augmentés " K permet d'écrire que :

$$K^T = \left[K_1^T \parallel \dots \parallel K_i^T \parallel \dots \parallel K_M^T \right] \quad (4-84)$$

$$\text{où } \dim K^T = 1 \times M(N+M) \quad \forall 1 \leq i \leq M$$

aussi , si

$$V = \frac{1}{2} X_e^T P X_e + \frac{1}{2} (K - \beta \omega)^T B_p \alpha^{-1} (K - \beta \omega) \quad (4-85)$$

où α^{-1} est la matrice inverse des gains statiques α .

La loi adaptative généralisée présentera alors l'allure :

$$\dot{K}^T = \alpha \omega^T + \beta \dot{\omega}^T \quad (4-86)$$

V - ROBUSTESSE DES ALGORITHMES DE COMMANDES EN PRESENCE DE DYNAMIQUES NON LINEAIRES, DE PERTURBATIONS OU DE VARIATIONS PARAMETRIQUES

La notion de robustesse d'un schéma de commande n'a à priori de sens que s'il est parlé d'une propriété particulière d'aptitude (ie stabilité ,, performance , rapport sortie / entrée) de ladite commande à supporter , vis à vis d'une effet perturbateur spécifique (ie méconnaissance de la structure du système à commander , entrées perturbatrices , bruits de mesures , etc .) , des tâches sans manifestations de " fatigues " ou d'altérations dans le maintient de performances définies par l'utilisateur .

Certaines combinaisons sont possibles et ne conduisent pas aux mêmes conclusions .

Par exemple , pour les systèmes continus , certaines commandes à grand gains sont robustes pour la stabilité vis à vis d'erreurs de modélisations paramétriques et de perturbations bornées . Elles conduisent cependant à une dégradation importante du rapport sortie / entrée en présence de bruits ainsi qu'à l'instabilité du système lorsque certaines dynamiques sont négligées ou lorsqu'il existe un faible retard dans la commande .

L'intérêt de la présente thèse porte entre autre sur l'appréciation de la robustesse de la stabilité d'une classe de systèmes à base de schéma de commande adaptative .

Le problème pour déterminer la robustesse d'une stabilité d'un algorithme de commande obtenu à partir d'un modèle souvent << simplifié >> du procédé peut - être énoncée de la façon suivante :

" Est ce que la classe des erreurs de modélisation pour laquelle la classe de systèmes en boucle fermé reste stable contient des erreurs de modélisations raisonnables pour le procédé ? "

Si sont disponibles :

- 1 - une caractérisation adéquate de l'incertitude sur le procédé ,
- 2 - une technique d'analyse qui permet de quantifier l'effet des erreurs de modélisation sur la stabilité , il peut être alors donné une réponse .

Différentes approches ont été proposées pour obtenir une représentation des erreurs de modélisations qui soient à la fois simples et suffisamment générale pour reproduire une grande variété de comportements du procédé .

La simplicité de la représentation devient une propriété fondamentale pour l'utilisation des outils d'analyses et de conceptions habituelles quand les hypothèses de linéarités ne sont plus transcendantes .

La théorie de la commande adaptative suit une de ces approches . En particulier , si le procédé est supposé linéaire ou non et que l'incertitude sur ce dernier reste fondamentalement limitée à une méconnaissance de valeurs des paramètres , par exemple .

Des résultats théoriques très importants concernant les propriétés de différents schémas de commandes adaptatives ont été obtenus [] , [] , [] , dans ce cadre avec généralisation importante aux procédés non linéaires .

Il peut être distingué deux philosophies différentes d'analyse de la robustesse des systèmes : approches algébriques ou topologiques .

Dans la première , étant donné un régulateur fixe , il est cherché une définition de tous les procédés ayant une structure algébrique pouvant être stabilisée par ce dit régulateur .

Par contraste , avec la formulation algébrique , une approche topologique du même problème peut être prise , sous couvert d'une définition convenable de voisinage .

Ces techniques , grossièrement appelées " techniques fréquentielles " , ont eut un énorme succès , dû principalement au fait qu'elles permettent une

interprétation facile de l'erreur de modélisation en terme d'incertitudes structurées ou non .

L'algorithme de synthèse d'un contrôleur minimal (M.C.S) ayant fait l'objet d'investigations théoriques et pratiques récentes (STOTEN , 1990 ; STOTEN et BENCHOUBANE , 1990 ; STOTEN et HODGSON , 1991 ; BENCHOUBANE et STOTEN , 1992) a montré son efficacité dans les stratégies de contrôle en présence de paramètres inconnus , de dynamiques non linéaires et de perturbations externes .

Dans ce contexte , la preuve de son efficacité est développée en termes de limites à travers une stratégie théorique basée sur les techniques de synthèse de fonctions de Lyapunov en utilisant la méthode directe .

Aussi , le but de ce chapitre est d'introduire un environnement analytique orienté vers la recherche d'extrémums de variables particulières .

V.1 : SYSTEMES S. I. S. O

fonction de Lyapunov choisie , s'associe à l'écriture :

$$V = \frac{1}{2} \left[X_e^T P X_e + \frac{1}{\alpha} b_{S(1,1)} (K - \beta \omega)^T (K - \beta \omega) \right]$$

(5-1)

Soient V_1 et V_2 deux fonctions scalaires quadratiques

définies positives , satisfaisant à :

$$V_1 = \frac{1}{2} X_e^T P X_e \quad (5-2)$$

$$V_2 = \frac{1}{2 \alpha} b_{S(1,1)} (K - \beta \omega)^T (K - \beta \omega) \quad (5-3)$$

Il est évident que : $V = V_1 + V_2$ ($V \geq 0$) (5-4)

aussi , $V_1 \leq V$ et $V_2 \leq V$

5.1.1 : Majoration de la norme de l'erreur dynamique $X_e(t)$

L'équation (5-1) définie pour V_1 les valeurs extrêmes :

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(P) \| X_e \|^2 \leq V_1 \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(P) \| X_e \|^2$$

aussi est - il déduit que :

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(P) \| X_e \|^2 + V_2 \leq V \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(P) \| X_e \|^2 + V_2$$

En conséquence , il devient possible de majorer $\| X_e \|^2$ par :

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(P) \| X_e \|^2 \leq V$$

aussi :

$$\| X_e \|^2 \leq \left[\frac{2V}{\lambda_{\min}(P)} \right]^{1/2} \quad (5-5)$$

5.1.2 : Majoration de la norme du gain dynamique $K(t)$

L'inégalité de Shwartz traduit que :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n$$

$$\| \|X\| - \|Y\| \| \leq \|X \pm Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad (5-6)$$

donc d'après (5-3) ,

$$V_2 \leq \frac{1}{2\alpha} b_{S_{(1,1)}} \|K - \beta \omega\|^2$$

L'inégalité (5-6) introduit pour $\|K - \beta\omega\|$, que :

$$\|K\| - \|\beta\omega\| \leq \|K - \beta\omega\| \leq \|K\| + \|\beta\omega\|$$

$\beta > 0$ induit que :

$$\|K\| - \beta \|\omega\| \leq \|K - \beta\omega\| \leq \|K\| + \beta \|\omega\|$$

d'où :

$$\left[\|K\| - \beta \|\omega\| \right]^2 \leq \|K - \beta\omega\|^2 \leq \left[\|K\| + \beta \|\omega\| \right]^2$$

Conséquences :

$$\frac{1}{2\alpha} b_{S_{(1,1)}} \left[\|K\| - \beta \|\omega\| \right]^2 \leq V_2 \leq \frac{1}{2\alpha} b_{S_{(1,1)}} \left[\|K\| + \beta \|\omega\| \right]^2 < V$$

et donc :

$$\|K\| - \beta \|\omega\| \leq \left[\frac{2\alpha V}{b_{S_{(1,1)}}} \right]^{(1/2)} \quad (5-7)$$

Comme $\omega = (X_{\theta}^T P_N) W^T$ alors $\|\omega\| \leq \lambda_{\max}(P_N) \|X_{\theta}\| \|W\|$ (5-8)

avec $\|w\|^2 = \|X_s\|^2 + \|r\|^2$ et $X_s = X_\mu - X_e$

L'inégalité de Shwartz vérifie que :

$$\|X_s\| = \|X_\mu - X_e\| \leq \|X_\mu\| + \|X_e\|$$

Cependant $\|X_\mu\| \leq k \|r\|$ aussi, $\|X_s\| \leq \|X_e\| + k \|r\|$
 $k > 0$

Ce qui montre que :

$$\|w\|^2 \leq \left[\|X_e\| + k \|r\| \right]^2 + \|r\|^2 \quad (5-9)$$

Finalement,

$$\|w\| \leq \lambda_{\max}(\mathcal{P}) \|X_e\| \left[\left[\|X_e\| + k \|r\| \right]^2 + \|r\|^2 \right]^{1/2} \quad (5-10)$$

$$\text{et donc que } \|w\| \leq \lambda_{\max}(\mathcal{P}) \|X_e\| \left[\|X_e\| + k \|r\| \right]$$

L'idée de recherche à partir d'expressions analytiques de majoration des normes de l'erreur dynamique et du gain permettra de justifier pour l'existence de relation entre les fonctions de Lyapunov et leur propres dérivés des résultats fondamentaux.

V.2 : PREUVE D'EXISTENCE DE LIMITES POUR LES NORMES DYNAMIQUES RESPECTIVES DE L'ERREUR ET DU GAIN D'ADAPTATION.

5.2.1 : Cas de non linéarités pures sans manifestation de perturbations externes.

5.1.2.1 : Systèmes S.I.S.O

L'erreur dynamique associée au système adaptatif vérifiant pour $X_e = X_\mu - X_s$ que :

$$X_{\theta} = A_{\mu} X_{\theta} - I_N F \quad (5-11)$$

$$F = \theta^T W + d \quad (5-12)$$

$$\theta^T = B_S K^T + \theta^{*T} \quad (5-13)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_X & \vdots & K_R \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

$$W^T = \begin{bmatrix} X_S^T & \vdots & r^T \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

présente pour la d'adaptation :

$$\dot{K}^T = \beta \dot{\omega}^T + \alpha \omega^T \quad (5-15)$$

avec $\omega^T = (X_{\theta}^T P_N) W^T \quad (5-16)$

une dérivé par rapport au temps d'après (5-1) égale à :

$$\dot{V}(X_{\theta}, K) = \frac{1}{2} X_{\theta}^T Q X_{\theta} - (X_{\theta}^T P_N) d_{(1,1)} - \dot{V}_0 \quad (5-17)$$

où $\dot{V}_0 = \beta b_{S_{(1,1)}} \omega^T \omega + \omega^T \theta^{*T} \quad (5-18)$

L'équation (5-18) suggère une expression quadratique de la forme :

$$\dot{V}_0 = \beta b_{P_{(1,1)}} (\omega + F)^T (\omega + F) + G^T G \quad (5-19)$$

où les grandeurs F et G sont des fonction vectorielles à rechercher . Le développement de (5-19) conduit à :

$$\dot{V}_0 = \beta b_{S_{(1,1)}} \omega^T \omega + 2 \beta b_{S_{(1,1)}} \omega F^T + \beta b_{S_{(1,1)}} F^T F + G^T G \quad (5-20)$$

L'identification de l'équation (5-18) avec (5-20) permet de déduire que :

$$1 : \theta^* = 2 \beta b_{S(1,1)} F \quad (5-21)$$

$$2 : \beta b_{S(1,1)} F^T F + G^T G = 0 \quad (5-22)$$

(5-21) implique que :

$$F = \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} \quad (5-23)$$

injecté dans (5-22) , il vient :

$$G^T G = - \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4\beta b_{S(1,1)}} \quad (5-24)$$

En définitive d'après (5-18) :

$$\dot{V}_o = \beta b_{S(1,1)} \left(\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} \right)^T \left(\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} \right) - \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4\beta b_{S(1,1)}} \quad (5-25)$$

et l'expression de la dérivé (5-25) introduira que :

$$\dot{V} = - \frac{1}{2} X_o^T Q X_o - (X_o^T P) d_{(1,1)} + \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4\beta b_{S(1,1)}} + \dot{W}_o \quad (5-26)$$

avec \dot{W}_o égal à :

$$\dot{W}_o = -\beta b_{s(1,1)} \left[\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{s(1,1)}} \right]^T \left[\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{s(1,1)}} \right] \quad (5-27)$$

5.2.2 : Majoration de (5-26)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lambda_{\max}(Q) \|X_e\|^2 &< -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e < -\frac{1}{2} \lambda_{\max}(Q) \|X_e\|^2 \\ &< - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} < \sqrt{\lambda_{\max}(P)} \|d_{(1,1)}\| \|X_e\| \\ \dot{W}_o &< 0 \\ \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{s(1,1)}} &\leq \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{s(1,1)}} \end{aligned}$$

En faisant la somme , il vient que :

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\max}(Q) \|X_e\|^2 + \sqrt{\lambda_{\max}(P)} \|d_{(1,1)}\| \|X_e\| + \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{s(1,1)}} \quad (5-28)$$

comme $\|X_e\| \leq \left[\frac{2V}{\lambda_{\min}(P)} \right]^{1/2}$, injectée dans (5-28) fait que :

$$\dot{V} \leq -\eta V + \gamma V^{(1/2)} + \lambda$$

où $\eta = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}$; $\gamma = \left[\frac{2 \lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \right] \|d_{(1,1)}\|$; $\lambda = \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{s(1,1)}}$

NB : \mathbb{P} étant une matrice diagonale (car Q diagonale choisie arbitrairement dans la résolution de l'équation de Lyapunov) fait que : $\lambda(\mathcal{P}) = \lambda(P)^2$ puisque $\mathcal{P} = \mathbb{P}_N^T \mathbb{P}_N$

Une condition suffisante de négation semi définie pour V est que le deuxième membre de l'inégalité soit nul . Aussi ,

$$\boxed{-\eta V + \gamma V^{(1/2)} + \lambda = 0} \quad (5-29)$$

en effet , le discriminant positif étant égal à :

$$\Delta = \gamma^2 + 4 \lambda \eta = \gamma^2 \left[1 + \frac{4 \lambda \eta}{\gamma^2} \right] \quad (5-30)$$

introduit les racines :

$$V_{1,2}^{(1/2)} = \frac{\gamma \mp \Delta^{(1/2)}}{2 \eta} \quad (5-31)$$

(5-31) devant être semi définie positive , fait que l'expression retenue vérifie que :

$$V^{(1/2)} = \frac{\gamma + \Delta^{(1/2)}}{2 \eta} \quad (5-32)$$

traduisant que :

$$\boxed{V^{(1/2)} = \frac{\gamma}{2 \eta} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 \lambda \eta}{\gamma^2}} \right]} \quad (5-33)$$

Ce développement assure que :

$$\sqrt{V} = \left[\frac{\lambda(\mathcal{P})_{\max} \lambda(\mathcal{P})_{\min}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\|d_{(1,1)}\|}{\lambda(\mathcal{Q})_{\min}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda(\mathcal{Q})_{\min} \theta^{*T} \theta^*}{2 \beta \lambda(\mathcal{P})_{\max}^2 \|d_{(1,1)}\|^2 b_{S_{(1,1)}}}} \right] \quad (5-34)$$

5.2.3 : Majoration de $\|X_e\|$ et $\|K\|$

5.2.3.1 : Borne supérieure de $\|X_e\|$

comme \mathcal{P} est une matrice diagonale

$$\text{alors } \lambda(\mathcal{P})_{\max} = \max \lambda(\mathcal{P}) = \lambda(\mathcal{P}^2)_{\max} = \lambda(\mathcal{P})_{\max}^2 \quad [\mathcal{P} = \mathcal{P}_N^T \mathcal{P}_N]$$

Aussi , tenant compte de (5-5) , il apparaît que :

$$\|X_e\| = \frac{\lambda(\mathcal{P})_{\max}}{\lambda(\mathcal{Q})_{\min}} \|d_{(1,1)}\| \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda(\mathcal{Q})_{\min} \theta^{*T} \theta^*}{2 \beta \lambda(\mathcal{P})_{\max}^2 \|d_{(1,1)}\|^2 b_{S_{(1,1)}}}} \right] \quad (5-35)$$

5.2.3.2 : Borne supérieure de $\|K\|$

La structure de l'équations (5-7) atteste que :

$$\text{pour } \|\omega\| \leq \lambda(\mathcal{P})_{\max} \|X_e\| \left[\left[\|X_e\| + k \|r\| \right]^2 + \|r\|^2 \right]^{1/2} \quad (5-36)$$

$$\|K\| \leq \left\{ \beta \|\omega\| + \left[\frac{2 \alpha V}{b_{S_{(1,1)}}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5-37)$$

Comme $\|X_e\|$ est bornée puisque V est bornée , alors $\|\omega\|$ est donc $\|K\|$ l'est .

REMARQUES :

- Les maximas des normes ne sont bornés que si les perturbations le sont .
- La norme maximale de l'erreur dynamique inversement proportionnelle à la racine carré du gain d'adaptation statique α où β , présente une valeur minimale lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.

$$\min \left\{ \| X_e \| \right\} = 2 \frac{\lambda_{\max}(CP)}{\lambda_{\min}(m'n)} \| d_{(1,1)} \| \quad (5-40)$$

mais devient nulle si absence de non linéarité ou de perturbations .

- La norme maximale du gain dynamique augmentant proportionnellement avec la racine carré de α semble présenter un extrémum théoriquement infini lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.
- La vitesse des dynamiques non linéaires $\| d_{(1,1)} \|$ peut être quelconque , puisqu'il doit être tenu compte uniquement de leur amplitudes .
- Dans le cas d'une présence de perturbations externes , la forme des résultats obtenus restent invariante , puisqu'il suffira seulement de poser à travers un changement de variable que :

$$d_{(1,1)} = d_{(1,1)} + p_{(1,1)}^{ext} \quad (5-41)$$

et donc que : $\| d_{(1,1)} \| = \| d_{(1,1)} + p_{(1,1)}^{ext} \| \quad (5-42)$

V.3 : LIMITE DES NORMES DANS LE CAS DE VARIATIONS PARAMETRIQUES

Soit à considérer toujours dans le cas S.I.S.O , les systèmes physiques décrit par l'équation :

$$\dot{X}_s = (A_s + \Delta A_s) X_s + (B_s + \Delta B_s) u + d(X_s, t) \quad (5-43)$$

Le modèle mathématique supposé invariant vérifiera la structure :

$$\dot{X}_\mu = A_\mu X_\mu + B_\mu r \quad (5-44)$$

La commande étant de la forme $u = K^T \dot{W}$ (5-45)

Ainsi que l'erreur dynamique :

$$X_e = X_\mu - X_s \quad (5-46)$$

Il vient que :

$$\dot{X}_e(t) = A_\mu X_e(t) - (\theta^* + \delta\theta^*)^T W(t) - (B_s + \Delta B_s) K^T W(t) - d(X_s, t) \quad (5-47)$$

$$\text{avec } \delta\theta^T = \begin{bmatrix} \Delta A_s & | & 0 \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

En choisissant :

$$V = \frac{1}{2} \left[X_e^T P X_e + \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} b_{s(1,1)} + \Delta b_{s(1,1)} \end{bmatrix} (K - \beta \omega)^T (K - \beta \omega) \right] \quad (5-49)$$

Il vient pour la même loi d'adaptation (5-15) que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} + \dot{\Delta V}_o \quad (5-50)$$

$$\dot{\Delta V}_o = -\beta \begin{bmatrix} b_{s(1,1)} + \Delta b_{s(1,1)} \end{bmatrix} \omega^T \omega - \omega^T \left[\theta^* + \delta\theta^* \right] + \frac{\dot{\Delta b}_s}{2\alpha} (K - \beta \omega)^T (K - \beta \omega) \quad (5-51)$$

$$\text{où } \dot{\Delta b}_s \equiv \dot{\Delta b}_{s(1,1)}$$

5.3.1 : Cas de variations paramétriques lentes

Dans cette situation $\dot{\Delta b}_{s(1,1)} \equiv \dot{\Delta b}_{s(1,1)} \equiv 0 \Rightarrow \Delta b_{s(1,1)} \approx \text{cste} \quad \forall \Delta A_s$

aussi, s'induit - il que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} - \beta \left[b_{s(1,1)} + \Delta b_{s(1,1)} \right] \omega^T \omega - \omega^T \left[\theta^* + \delta \theta^* \right] \quad (5-52)$$

Comparée à (5-26), il vient :

$$\| X_e \| = \frac{\lambda(CP)_{\max}}{\lambda(CQ)_{\min}} \| d_{(1,1)} \| \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda(CQ)_{\min} \xi^{*T} \xi^*}{2 \beta \lambda(CP)_{\max}^2 \| d_{(1,1)} \|^2 b_{s(1,1)}^*}} \right] \quad (5-53)$$

$$\text{avec, } \xi^* = \theta^* + \delta \theta^*$$

$$b_{s(1,1)}^* = b_{s(1,1)} + \Delta b_{s(1,1)}$$

5.3.2 : Cas de variations paramétriques quelconques

Il suffira de reprendre l'équation (5-43) et remplacer la quantité $(K - \beta \omega)^T (K - \beta \omega)$ en fonction de V , cette dernière étant donnée par (5-49). Par conséquent

$$(K - \beta \omega)^T (K - \beta \omega) = \frac{2 \alpha}{b_{s(1,1)} + \Delta b_{s(1,1)}} \left[V - X_e^T P X_e \right] \quad (5-54)$$

Injectée dans (5-43), il apparaît ce qui suit :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} - \beta \left[b_{s(1,1)} + \Delta b_{s(1,1)} \right] \omega^T \omega - \omega^T \left[\theta^* + \delta \theta^* \right] \quad (5-55)$$

expression identique à (5-52) .

En définitive , l'erreur dynamique et le gain d'adaptation restent bornés quelquesoient les vitesses de variations paramétriques , des perturbations où de non linéarités si toutefois ces dernières restent bornées .

V.4 : GENERALISATION AU CAS MULTIVARIABLE

Le problème multivariable nécessite la reprise de la fonction de Lyapunov définie en (4-85) . Aussi ,

$$V = \frac{1}{2} X_e^T P X_e + \frac{1}{2} (K - \beta \omega)^T B_s^* \alpha^{-1} (K - \beta \omega) \quad (5-56)$$

α , β et B_s^* caractérisent les matrices associées respectivement aux gains intégrals et proportionnels ainsi qu'aux paramètres formés des blocs diagonaux principaux de la matrice B_s^* .

La loi d'adaptation définie par :

$$\dot{K}^T = \alpha \omega^T + \beta \dot{\omega}^T \quad (5-57)$$

La dérivée de (5-59) donne lieu à l'écriture :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d - \omega^T \theta^* - \omega^T H \omega$$

(5.58)

$$\text{Soit } \dot{V}_o = \omega^T \theta^* + \omega^T H \omega \quad (5-59)$$

$$\text{avec } H = \beta B_s^* = B_s^* \beta \quad (5-60)$$

Il est clair que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d + \dot{V}_0 \quad (5-61)$$

Identique au cas S.I.S.O , l'expression \dot{V}_0 revêt une forme quadratique évoluant selon le profil φ - après :

$$\dot{V}_0 = (\omega + F)^T H (\omega + F) + L^T L \quad (5-62)$$

Les grandeurs vectorielles F et L étant à définir , le développement de (5.62) donne lieu à l'écriture :

$$\dot{V}_0 = \omega^T H \omega + 2 \omega^T H F + F^T H F + L^T L \quad (5-63)$$

L'identification avec l'équation (5.58) autorise :

$$A = 2 H F = \theta^*$$

$$B = F^T H F + L^T L = 0 \rightarrow L^T L = -F^T H F$$

- A -

comme $H = H^T$, alors :

$$F = \frac{1}{2} H^{-1} \theta^*$$

(5-64)

- B -

L'injection de (6.39) , fait apparaître que :

$$L^T L = -\frac{1}{4} \theta^{*T} H^{-1} \theta^* \quad (5-65)$$

En résumé, l'expression (5-59) ramenée à la forme (5-62) se réécrit comme suit :

$$\dot{V}_0 = \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* \right]^T H \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* \right] - \frac{1}{4} \theta^{*T} H^{-1} \theta^*$$

La dérivée (5.61) épousera le contour analytique final suivant :

$$\dot{V} = - \frac{1}{2} X_0^T Q X_0 - X_0^T P d + \frac{1}{4} \theta^{*T} H^{-1} \theta^* - \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* \right]^T H \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* \right] \quad (5-66)$$

5.4.1 : Majoration de $\|X_0\|$ et $\|K\|$

Identiquement au cas S.I.S.O

$$\|X_0\| \leq \left[\frac{2V}{\lambda_{\min}(P)} \right]^{1/2} \quad (5-66)$$

$$\|K\| \leq \|\beta\| \|\omega\| + \left[2 \lambda_{\max}(M) V \right]^{1/2} \quad (5-67)$$

$\lambda_{\max}(M)$: valeur propre associée à la matrice $M = B_s \alpha^{-1}$

Les conséquences sont telles que :

$$\dot{V} \leq - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|X_0\|^2 + \sqrt{\lambda_{\max}(P)} \|d\| \|X_0\| + \lambda_{\max}(H^{-1}) \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4} \quad (5-68)$$

$\lambda_{\max}(H^{-1})$: valeur propre associée à $(\beta B_s)^{-1}$

Opérant toujours de la même manière que dans le cas S.I.S.O à savoir remplacer $\| X_e \|$ par son expression en fonction de V , il vient :

$$\dot{V} \leq -\eta V + \gamma V^{(1/2)} + \lambda' \quad (5-69)$$

$$\text{où } \eta = \frac{\lambda(CQ)_{\min}}{\lambda(P)_{\min}} ; \gamma = \left[\sqrt{\frac{2 \lambda(CQ)_{\max}}{\lambda(P)_{\min}}} \right] \|d\| ; \lambda' = \frac{\lambda(CH^{-1})_{\max}}{4} \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4} \quad (5-70)$$

Le résultat est immédiat, puisqu'une condition suffisante de (5-70) d'être négative semie définie est que le deuxième membre de l'inégalité soit nul. La stratégie de calcul étant identique au cas S.I.S.O. Il sera donc seulement opéré un changement de variable afin d'évoluer vers une généralisation.

Donc,

$$\| X_e \| = \frac{\lambda(CQ)_{\max}}{\lambda(CQ)_{\min}} \|d\| \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda(CH^{-1})_{\max} \lambda(CQ)_{\min} \theta^{*T} \theta^*}{2 \lambda(CQ)_{\max}^2 \|d\|^2}} \right] \quad (5-71)$$

5.4.2 : Cas de perturbations paramétriques

Dans le cas où le système est décrit par l'équation :

$$\dot{X}_s = (A_s + \Delta A_s) X_s + (B_s + \Delta B_s) u + d(X_s, t) \quad (5-72)$$

avec :

$$\Delta A_s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \Delta A_s^{(1,1)} & \Delta A_s^{(1,j)} & \Delta A_s^{(1,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \Delta A_s^{(i,1)} & \Delta A_s^{(i,j)} & \Delta A_s^{(i,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \Delta A_s^{(M,1)} & \Delta A_s^{(M,j)} & \Delta A_s^{(M,M)} \\ \hline \end{array} \quad (5-73)$$

$$\Delta B_S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \Delta B_S^{(1,1)} & \Delta B_S^{(1,j)} & \Delta B_S^{(1,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \Delta B_S^{(i,1)} & \Delta B_S^{(i,j)} & \Delta B_S^{(i,M)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \Delta B_S^{(M,1)} & \Delta B_S^{(M,j)} & \Delta B_S^{(M,M)} \\ \hline \end{array} \quad (5-74)$$

1 - pour $i \neq j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\Delta A_S^{(i,j)} = \begin{array}{|c|} \hline O_{(n_i-1) \times n_i} \\ \hline \Delta a_{S(n_i,1)}^{(i,j)} \dots \Delta a_{S(n_i,k)}^{(i,j)} \dots \Delta a_{S(n_i,n_i)}^{(i,j)} \\ \hline \end{array} \quad 1 \leq k \leq n_i \quad (5-75)$$

1 - pour $i = j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\Delta A_S^{(i,i)} = \begin{array}{|c|} \hline O_{(n_i-1) \times n_i} \\ \hline \Delta a_{S(n_i,1)}^{(i,i)} \dots \Delta a_{S(n_i,k)}^{(i,i)} \dots \Delta a_{S(n_i,n_i)}^{(i,i)} \\ \hline \end{array} \quad 1 \leq k \leq n_i \quad (5-76)$$

B - La structure de la matrice d'entrée ΔB_S du système permet d'affirmer la même décomposition, à savoir que :

$$\Delta B_S = \Delta B_S^* + \Delta B_S^\# \quad (5-77)$$

ΔB_S^* étant définie par :

$$\Delta B_S^* = \begin{bmatrix} \Delta B_S^{*(1,1)} & \Delta B_S^{*(1,j)} & \Delta B_S^{*(1,M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta B_S^{*(l,1)} & \Delta B_S^{*(l,j)} & \Delta B_S^{*(l,M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta B_S^{*(M,1)} & \Delta B_S^{*(M,j)} & \Delta B_S^{*(M,M)} \end{bmatrix} \quad (5-78)$$

et $\Delta B_S^\#$:

$$\Delta B_S^\# = \begin{bmatrix} \Delta B_S^{\#(1,1)} & \Delta B_S^{\#(1,j)} & \Delta B_S^{\#(1,M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta B_S^{\#(l,1)} & \Delta B_S^{\#(l,j)} & \Delta B_S^{\#(l,M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta B_S^{\#(M,1)} & \Delta B_S^{\#(M,j)} & \Delta B_S^{\#(M,M)} \end{bmatrix} \quad (5-79)$$

Chaque bloc vérifie :

1) pour $i \neq j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\Delta B_S^{*(i,j)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i-1) \times 1} \\ \Delta b_{S(m_i,1)}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad \Delta B_S^{\#(i,j)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i-1) \times 1} \\ \Delta b_{S(m_i,1)}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (5-80)$$

2) pour $i = j \quad \forall (i, j) \in [1, M]$

$$\Delta B_S^{*(i,i)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i-1) \times 1} \\ \Delta b_{S(m_i,1)}^{*(i,i)} \end{bmatrix} \quad \Delta B_S^{\#(i,i)} = \begin{bmatrix} O_{(n_i) \times 1} \end{bmatrix} \quad (5-81)$$

Ces opérations permettant un nouveau développement de la matrice des paramètres augmentés (2-23), assurent que :

$$\theta^T = \left[\mathbb{B}_s + \Delta\mathbb{B}_s \right] K^T + \left[\theta^* + \Delta\theta^* \right]^T \quad (5-82)$$

comme $\mathbb{B}_s = \mathbb{B}_s^* + \mathbb{B}_s^\#$, $\Delta\mathbb{B}_s = \Delta\mathbb{B}_s^* + \Delta\mathbb{B}_s^\#$ et $\theta_o^* = \theta^* + \Delta\theta^*$

et que d'après (2-21), $F(t) = \theta^T W(t) + D$. Aussi

$$F(t) = \mathbb{B}_{s_1} K^T W + \mathbb{B}_{s_2} K^T W + \theta_o^{*T} W + D \quad (5-83)$$

$$\text{où } \mathbb{B}_{s_1} = \mathbb{B}_s^* + \Delta\mathbb{B}_s^* \text{ et } \mathbb{B}_{s_2} = \mathbb{B}_s^\# + \Delta\mathbb{B}_s^\# \quad (5-84)$$

en posant $D^\# = \mathbb{B}_{s_2} K^T W$

il vient que : $F(t) = \mathbb{B}_{s_1}^* K^T W + \theta_o^{*T} W + D^\# + D \quad (5-85)$

En choisissant $d(t) = D^\# + D$ il devient manifeste que :

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{B}_{s_1}^* K^T W + \theta_o^{*T} W + d \\ &= \theta^T W + d \end{aligned} \quad (5-86)$$

où $\theta^T = \mathbb{B}_{s_1}^* K^T + \theta_o^{*T} \quad (5-87)$

La structure matricielle de $D^\#$ étant identique à D , impose pour la résultante " d " la représentation :

$$d = \begin{array}{|c} d^{(1,1)} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ d^{(l,1)} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ d^{(M,1)} \end{array} \quad (5-88)$$

comme $d = D^\# + D$ alors $d^{(i,1)} = D^{\#(i,1)} + D^{(i,1)}$ (5-89)

Finalement le résultat est immédiat par application des équation (5-48) et (5-50)

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2\alpha} \frac{\lambda(CQ)}{\max} \|X_0\|^2 + \sqrt{\frac{\lambda(CP)}{\max}} \|d\| \|X_0\| + \frac{\lambda(M^{-1})}{\max} \frac{(\theta^* + \Delta\theta^*)^T (\theta^* + \Delta\theta^*)}{4} \quad (5-90)$$

$\lambda(M^{-1})_{\max}$: valeur propre associée à l'inverse de la matrice βB_{s_1} définie en (5-84)

qui se résume donc par :

$$\dot{V} \leq -\eta' V + \gamma' V^{(1/2)} + \lambda'' \quad (5-91)$$

$$\eta' = \frac{\lambda(CQ)_{\min}}{\lambda(CP)_{\min}} ; \gamma' = \left[\frac{2 \lambda(CP)_{\max}}{\lambda(CP)_{\min}} \right] \|d\| ; \lambda'' = \lambda(M^{-1})_{\max} \frac{(\theta^* + \Delta\theta^*)^T (\theta^* + \Delta\theta^*)}{4}$$

Les normes de l'erreur dynamique est du gain vérifieront que :

$$\|X_0\| = \frac{\lambda(CP)_{\max}}{\lambda(CQ)_{\min}} \|d\| \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda(M^{-1})_{\max} \lambda(CQ)_{\min} \theta_0^{*T} \theta_0^*}{2 \lambda(CP)_{\max}^2 \|d\|^2}} \right] \quad (5-92)$$

avec θ_0 , le vecteur constitué de tous les éléments des dernières lignes de chaque blocs de la matrice : $\theta_0^* = \theta^* + \Delta\theta^*$

$$\|K\| \leq \|\beta\| \|\omega\| + \left[2 \lambda(M)_{\max} V \right]^{1/2} \quad (5-93)$$

avec $\lambda(M)_{\max}$ la valeur propre associée à la matrice $M = \alpha^{-1} B_{s_1}$

V.5 : SIMULATIONS ET INTERPRETATIONS

5.5.1 : Cas du bras manipulateur

Les matrices des paramètres présentent les structures numériques suivantes :

1 - Pour le système physique :

$$A_s = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12.5 & 0 & 2.43 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 0 & -9.08 \end{vmatrix} \quad B_s = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3.74 & -2.33 \\ 0 & 0 \\ -3.74 & 8.73 \end{vmatrix} \quad (5-94)$$

2 - Pour le modèle analytique de référence de la forme :

$$\dot{X}_\mu = A_\mu X_\mu + B_\mu r \quad (5-95)$$

Un ordre imposé par celui du système physique faisant que ce dernier est choisi de même degré (degré 2) et structure bloc que le système, sauf que parfaitement découplé. Aussi s'associera-t-il à la forme architecturale suivant :

$$A_\mu = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{\mu(11)}^{11} & a_{\mu(12)}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{\mu(11)}^{22} & a_{\mu(12)}^{22} \end{vmatrix} \quad B_\mu = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_{\mu(11)}^{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{\mu(11)}^{22} \end{vmatrix} \quad (5-96)$$

Identifié à un système du deuxième ordre tel que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{\mu(i1)} \\ \dot{x}_{\mu(i2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{n(i1)}^{(ii)} & -2\xi\omega_{n(i2)}^{(ii)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mu(i1)} \\ x_{\mu(i2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{n(ii)}^2 \end{bmatrix} r \quad (5-97)$$

Le choix de la pulsation naturelle, assujettie au coefficient d'amortissement ξ et au temps de réponse t_s , sera telle que:

$$\xi \omega_{n(ik)}^{(ii)} t_s = 4 \text{ rd} \quad k = 1, 2$$

Afin d'éviter des oscillations gênantes, le coefficient ξ est pris égal à 1. Aussi,

$$\omega_n = \frac{4}{t_s} \quad (5-98)$$

Les matrices du modèle mathématique présenterons les valeurs ci - après, à savoir :

$$A_{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \end{bmatrix} \quad B_{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \quad (5-99)$$

comme θ^* vérifie : $\theta^{*T} = [A_s - A_{\mu} \mid -B_{\mu}]$, alors :

$$\theta^{*T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -4.5 & 0 & 2.43 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 16 & -1.08 & 0 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1^{*T} \\ 0 \\ \theta_2^{*T} \end{bmatrix} \quad (5-100)$$

$$\text{ou} \quad \theta_1^{*T} = [16 \mid -4.5 \mid 0 \mid 2.43 \mid -16 \mid 0] \quad (5-101)$$

$$\text{et} \quad \theta_2^{*T} = [0 \mid 12.5 \mid 16 \mid -1.08 \mid 0 \mid -16] \quad (5-102)$$

$$\theta^{*T} = [16 \mid -4.5 \mid 0 \mid 2.43 \mid -16 \mid 0 \mid 0 \mid 12.5 \mid 16 \mid -1.08 \mid 0 \mid -16] \quad (5-103)$$

La matrice des gains dynamiques s'associe conformément aux équations (4-25) - (4-28), à :

$$K = \begin{bmatrix} K_1^T \\ K_2^T \end{bmatrix} \quad (5-104)$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c|c|c} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} \\ \hline K^{21} & K^{22} & K^{23} & K^{24} \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow K_1^T \\ \leftarrow K_2^T \end{array} \quad (5-105)$$

$$K = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} K^{11} & K^{11} & K^{12} & K^{12} & K^{11} & K^{12} \\ X_{11} & X_{12} & X_{11} & X_{12} & R_{11} & R_{11} \\ \hline K^{21} & K^{21} & K^{22} & K^{22} & K^{21} & K^{22} \\ X_{11} & X_{12} & X_{11} & X_{12} & R_{11} & R_{11} \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow K_1^T \\ \leftarrow K_2^T \end{array} \quad (5-106)$$

Le vecteur gains dynamiques s'associe à :

$$K^T = \left[\begin{array}{c} K_1^T \\ K_2^T \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} K^{11} & K^{11} & K^{12} & K^{12} & K^{11} & K^{12} & K^{21} & K^{21} & K^{22} & K^{22} & K^{21} & K^{22} \\ X_{11} & X_{12} & X_{11} & X_{12} & R_{11} & R_{11} & X_{11} & X_{12} & X_{11} & X_{12} & R_{11} & R_{11} \end{array} \right] \quad (5-107)$$

Comme $B_S = B_S^* + B_S^\#$

$$B_S = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline b^{11} & b^{12} \\ S(11) & S(11) \\ \hline 0 & 0 \\ \hline b^{21} & b^{22} \\ S(11) & S(11) \end{array} \right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline b^{11} & 0 \\ S(11) & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & b^{22} \\ S(11) & 0 \end{array} \right]}_{B_S^*} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & b^{12} \\ S(11) & S(11) \\ \hline 0 & 0 \\ \hline b^{21} & 0 \\ S(11) & 0 \end{array} \right]}_{B_S^\#} \quad (5-108)$$

relativement à (4-33), $F = \theta^T W + D = B_S K^T W + \theta^{*T} W + D$

$$= B_S^* K^T W + \theta^{*T} W + D^\# + D$$

$$= B_S^* K^T W + \theta^{*T} W + d$$

$$d = D^\# + D$$



$$D^{\#} = \mathbb{B}_S^{\#} K^T W = \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & b_{S(11)}^{12} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline b_{S(11)}^{21} & 0 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} K_{X11}^{11} & K_{X12}^{11} & K_{X11}^{12} & K_{X12}^{12} & K_{R11}^{11} & K_{R11}^{12} & & \\ \hline K_{X11}^{21} & K_{X12}^{21} & K_{X11}^{22} & K_{X12}^{22} & K_{R11}^{21} & K_{R11}^{22} & & \\ \hline & & & & & & X & \\ \hline & & & & & & S & \\ \hline & & & & & & r & \end{array} \right] \begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix} \quad (5-109)$$

$$D^{\#} = \mathbb{B}_S^{\#} K^T W = \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline D_1^{\#} = b_{S(11)}^{12} K_{22}^T W & \\ \hline 0 & \\ \hline D_2^{\#} = b_{S(11)}^{21} K_{11}^T W & \end{array} \quad (5-110)$$

LA MATRICE REGROUPEANT TOUTES LES NON LINÉARITÉS EST TELLE QUE :

$$d = D^{\#} + D = \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline d_1 = b_{S(11)}^{12} K_{22}^T W + D_1 & \\ \hline 0 & \\ \hline d_2 = b_{S(11)}^{21} K_{11}^T W + D_2 & \end{array} \quad (5-111)$$

La matrice Q étant choisie diagonale est telle que :

$$Q = \begin{array}{c|c|c|c} 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (5-112)$$

La résolution de l'équation de Lyapunov donne pour P, que :

$$P = \begin{array}{c|c|c|c} 3.8125 & 0.2812 & 0 & 0 \\ \hline 0.2813 & 0.0977 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3.8125 & 0.2812 \\ \hline 0 & 0 & 0.2813 & 0.0977 \\ \hline L P_1 & L P_2 & L P_3 & L P_4 \end{array} \quad (5-113)$$

$$X_{\theta}^T P d = \left[\begin{array}{cc|cc} X_{\theta 11} & X_{\theta 11} & X_{\theta 21} & X_{\theta 21} \\ X_{\theta 11} & X_{\theta 12} & X_{\theta 11} & X_{\theta 12} \end{array} \right] \left| \begin{array}{cc|cc} 3.8125 & 0.2812 & 0 & 0 \\ 0.2813 & 0.0977 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3.8125 & 0.2812 \\ 0 & 0 & 0.2813 & 0.0977 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ d_1 \\ 0 \\ d_2 \end{array} \right| \quad (5-114)$$

$$X_{\theta}^T P d = \left[\begin{array}{cc|cc} X_{\theta 11} & X_{\theta 11} & X_{\theta 21} & X_{\theta 21} \\ X_{\theta 11} & X_{\theta 12} & X_{\theta 11} & X_{\theta 12} \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} 0.2812 \\ 0.0977 \\ \hline 0.2812 \\ 0.0977 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} d_1 \\ d_1 \\ \hline d_2 \\ d_2 \end{array} \right| = X_{\theta}^T P D \quad (5-115)$$

$$P = \left| \begin{array}{cc|cc} 0.2812 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0977 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.2812 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0977 \end{array} \right| \quad (5-116)$$

$$D = \left[\begin{array}{cc|cc} d_1 & d_1 & d_2 & d_2 \end{array} \right]$$

$$\lambda_{\min}(P) = 0.0970$$

$$\lambda_{\max}(P) = 0.2812$$

$$\lambda_{\min}(P^2) = 0.0094$$

$$\lambda_{\max}(P^2) = 0.0791$$

$$\lambda_{\min}(Q) = 1$$

$$\lambda_{\max}(Q) = 9$$

5.5.2 : Cas de la plateforme de réservoirs

La représentation dans l'espace d'état de l'évolution du niveau du liquide du procédé est donnée par la forme différentielle :

$$\dot{X}_s(t) = A_s X_s(t) + B_s u(t) \quad (5-117)$$

avec $X_s^T = [X_{s1} \ X_{s2}]$ et $u^T = [u_1 \ u_2]$

Les matrices des paramètres se présentent sous formes numériques par :

$$A_s = \begin{vmatrix} -0.02265 & 0.01735 \\ 0.01735 & -0.02265 \end{vmatrix} \quad B_s = \begin{vmatrix} -0.0167 & 0 \\ 0 & -0.0167 \end{vmatrix} \quad (5-118)$$

Le choix du modèle mathématique de référence tenant compte des limitations du système en boucle ouverte présente des sorties ayant des temps de réponses élevés sans dépassement. Parfaitement découplées les matrices A_μ et B_μ satisfaisant les conditions d'Erzberger sont données par :

$$A_\mu = -0.04 I \quad \text{et} \quad B_\mu = -A_\mu$$

I : matrice identité

La matrice Q ayant été choisie arbitrairement égale à I, la solution P de l'équation de Lyapunov vérifie que :

$$P = 12.5 I \quad (5-119)$$

L'erreur augmentée ayant été calculée différemment dans les cas MRAC et MCS à faite l'objet du support analytique ci - après :

CAS MRAC : $y_e = B_S^T P X_e = C X_e$ où $C = B_S^T P = 0.2088 I$ (5-120)

CAS MCS : $y_e = P X_e = C X_e$ où $C = P = 12.5 I$ (5-121)

interprétation des résultats

Planches 1 et 2 : Ces deux planches montrent l'historique évolutif des normes de interprétées comme suit :

- l'erreur diminue quand α et β augmentent ,
- le temps de réponse diminue quand α et β augmentent ,
- le gain d'adaptation dynamique , reste constant pour un rapport constant des gains statiques α et β . Cependant , il est à remarquer qu'à partir d'une valeur critique de α et β , ce dernier subit un nouveau palier rendant le système (particulièrement les commandes) sensible aux bruits , d'où augmentation relativement bornée de l'erreur de poursuite et apparition de suroscillations.

PLANCHES 3 et 4 : cas de perturbations externes lentes

Système M.R.A.C :

- faible erreur de poursuite (diminuant avec augmentation des gains statiques α et β) ,
- stabilité plus longue à être atteinte ,
- augmentation de la norme du gain dynamique quand α et β augmentent ,
- l'amplitude des commandes devient importante quand α et β augmentent .

Système M.C.S

- erreur de poursuite plus petite que dans le cas M.R.A.C ,
- stabilité plus rapide que M.R.A.C ,
- commande équivalente que dans le cas M.R.A.C

Cas de perturbations externes rapides

Système M.R.A.C :

- faible erreur de poursuite quand α et β augmentent ,
- stabilité relativement lente ; imposant aux commandes des amplitudes importantes dues à des excitations de dynamiques élevées

Système M.C.S :

- faible erreur de poursuite (diminuant avec augmentation des gains statiques α et β) ,
- stabilité plus lente ,
- augmentation de la norme du gain dynamique quand α et β augmentent ,
- amplitude importante des commandes quand α et β augmentent et apparition de suroscillations .

Planche 5 :

Dans le cas de perturbations paramétriques introduites comme variations des moments de frictions , les preuves de robustesses des algorithmes M.R.A.C ou M.C.S sont vérifiées puisque les erreurs de poursuite faibles et les gains d'adaptations restent bornés . Cependant , l'apparition de régimes transitoires élevés imposent aux commandes des variations d'amplitudes plus ou moins accentuées avec apparition de pics excessifs risquant d'exciter des dynamiques non modelées et pouvant donc conduire à une dégradation importante des commandes .

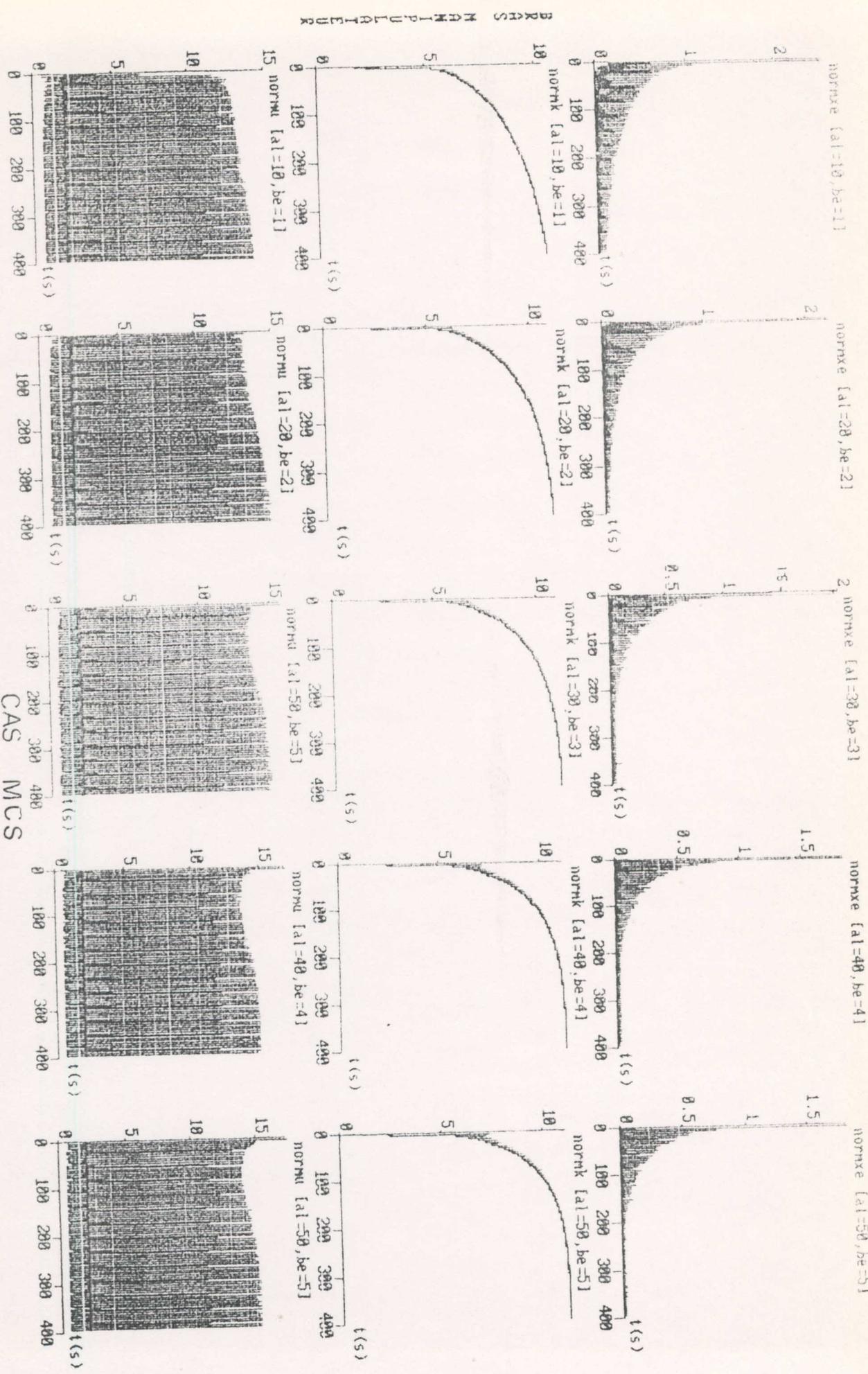


PLANCHE 1 : Evolution des normes de l'erreur, du gain et de la
 commande dynamique, fonction des gains statiques α et β .
 Rapport α / β constant. Système non perturbé.

BRUNS MANN I P U L A I E R K

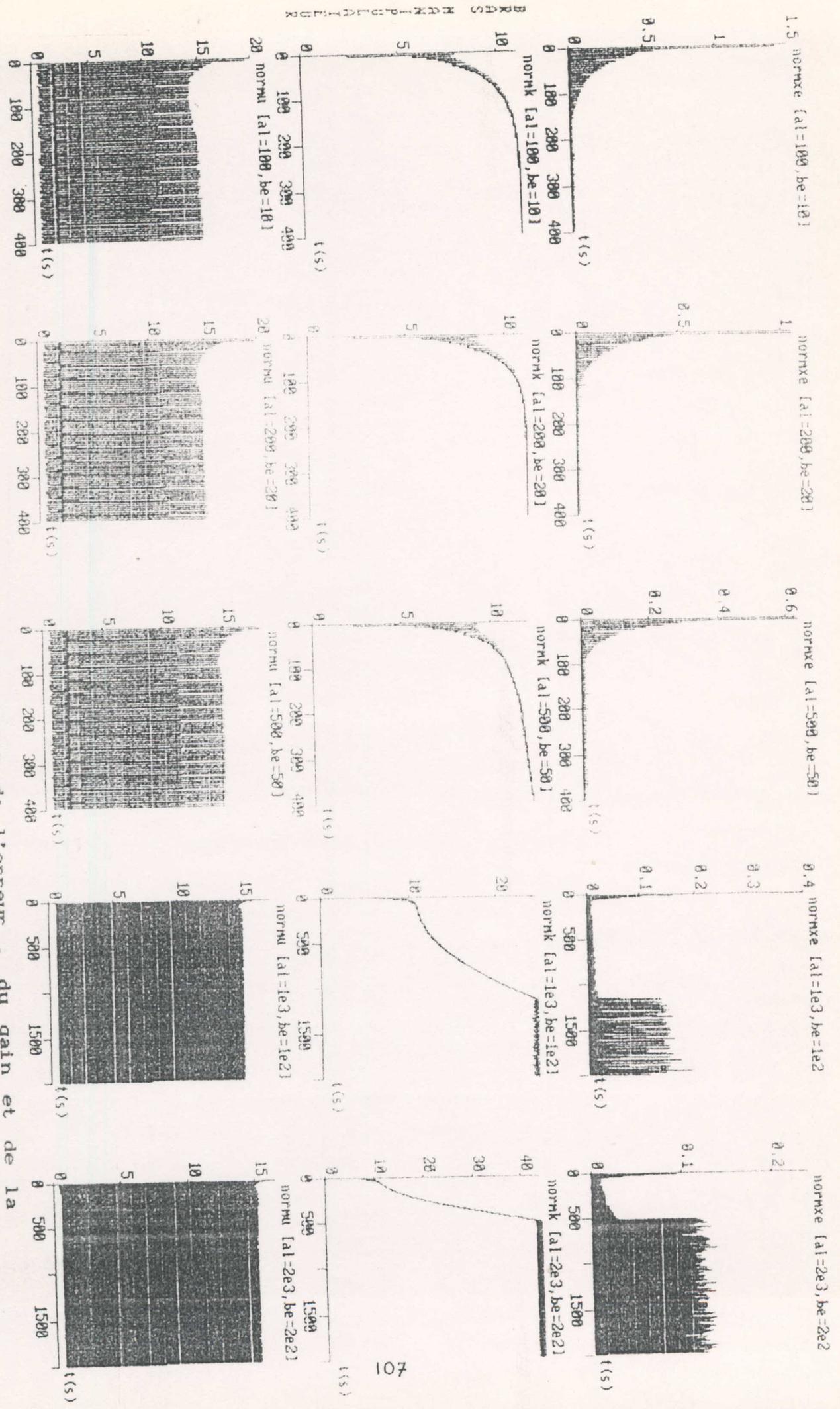


PLANCHE 2 : Evolution des normes de l'erreur, du gain et de la
 commande dynamique, fonction des gains statiques α et β .
 Rapport α / β constant. Système non perturbé.

BRAS MANIPULATEUR

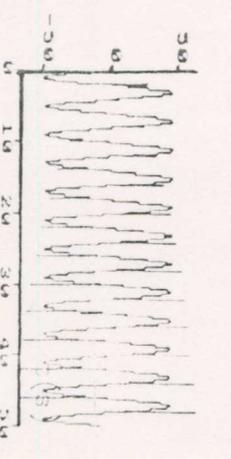
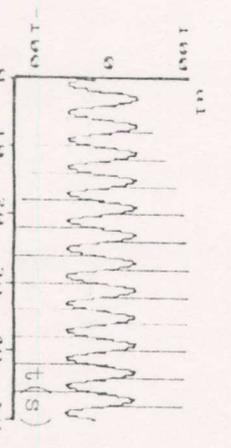
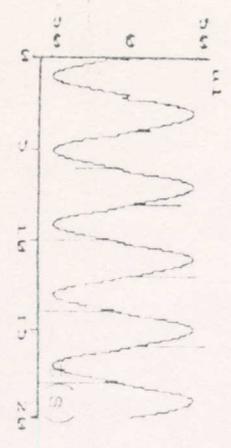
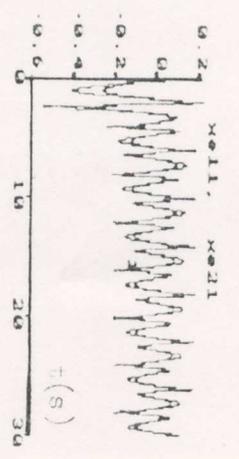
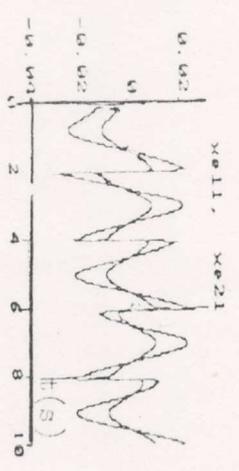
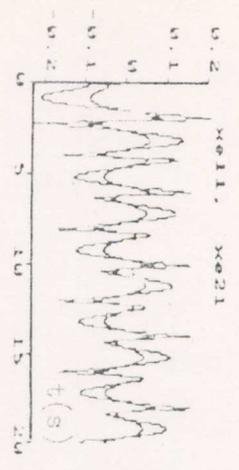
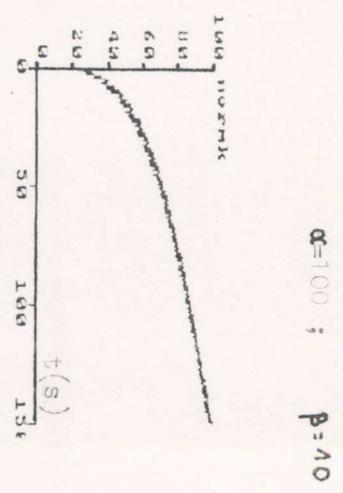
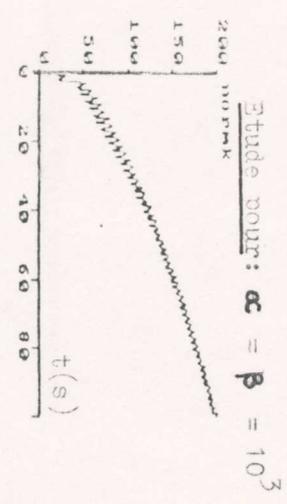
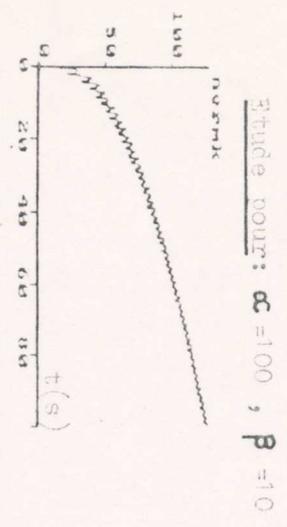


PLANCHE 3 : Evolution comparative de la norme du gain, de l'erreur et de la commande dynamique, fonction des gains statiques α et β dans le cas M.R.A.C et M.C.S. Système soumis à perturbations extérieures

$f_{p_{ext}} = 100 \text{ rd/s}$

$f_{p_{ext}} = 0.25 \text{ Hz}$

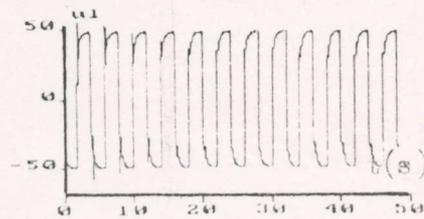
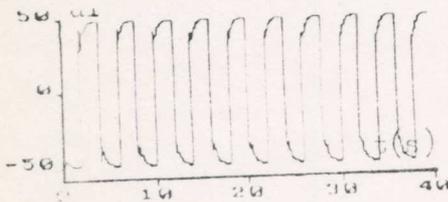
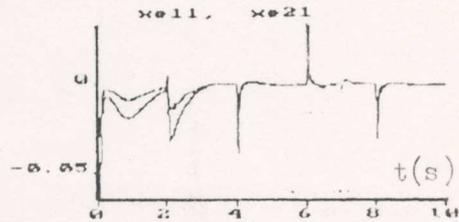
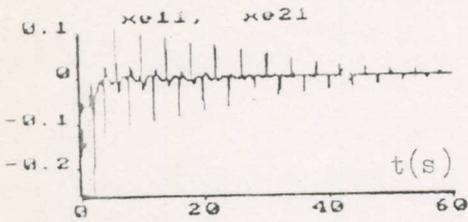
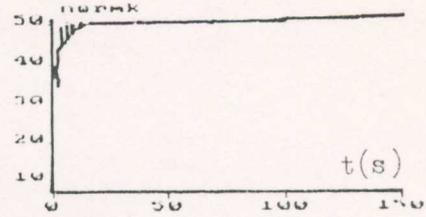
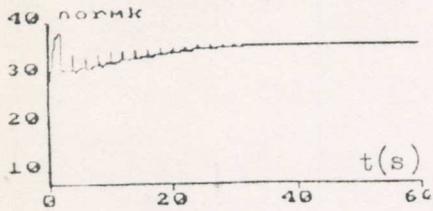
LANCHE 4 : Evolution comparative de la norme du gain , del'erreur et de la commande dynamique , fonction des gains statiques α et β dans le cas M.R.A.C et M.C.S . Systeme soumis à perturbations extérieures rapides .

$P_{ext} = 100 \text{ rd/s}$. $f_{p_{ext}} = 0.25 \text{ Hz}$

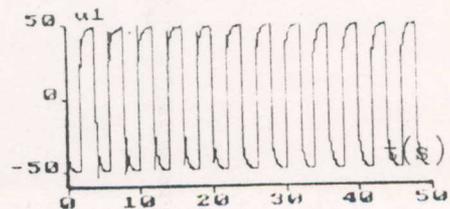
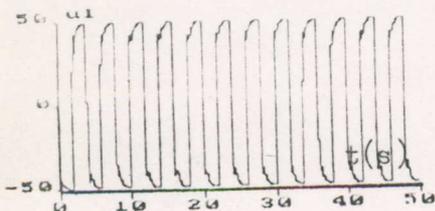
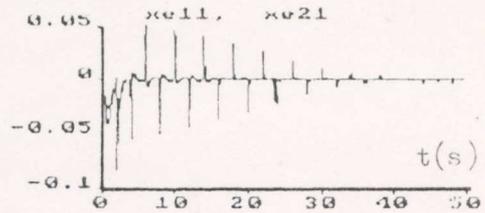
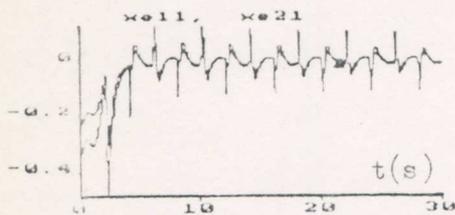
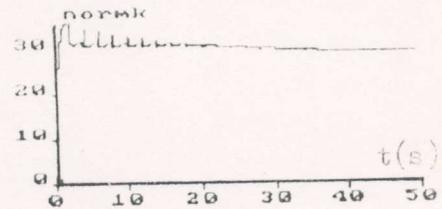
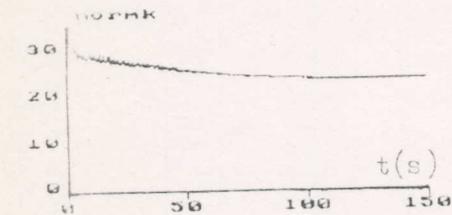
Etude pour: $\alpha = 100, \beta = 10$

cas MRAC

Etude pour: $\alpha = \beta = 10^3$

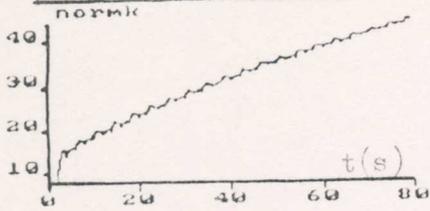


cas MCS

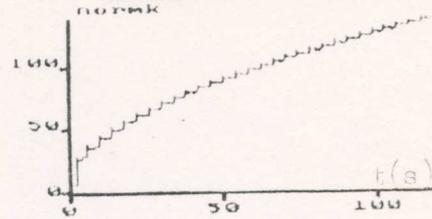


CAS MRAC : $\alpha = 100$; $\beta = 10$; $\delta C = 20\text{Nms}$
 $f_{\delta C} = 0,25\text{Hz}$

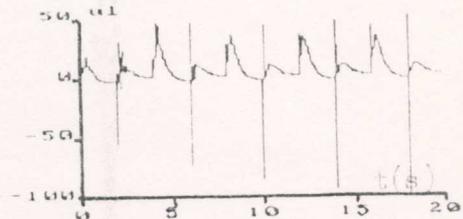
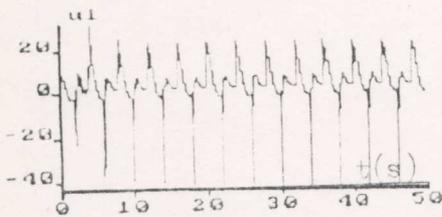
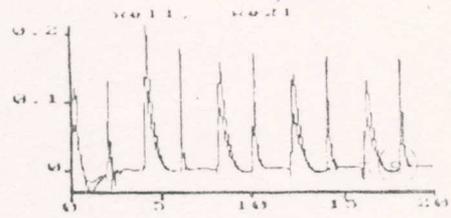
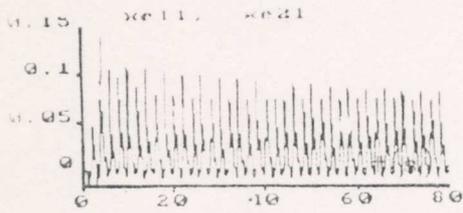
Variations lentes



Variations rapides



PERTURBATIONS PARAMETRIQUES



CAS MCS

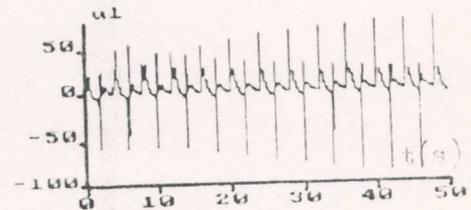
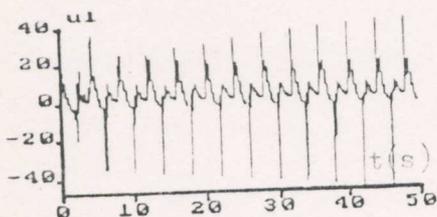
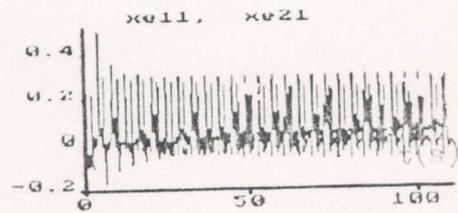
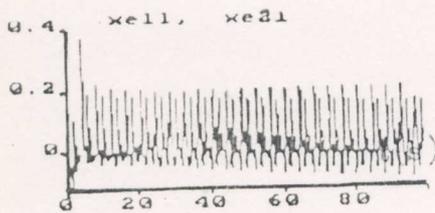
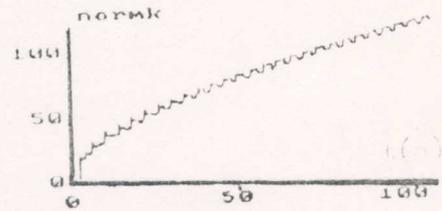
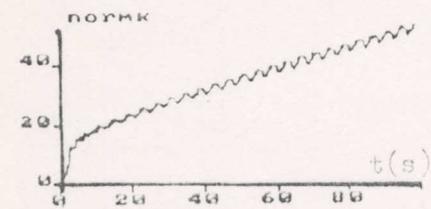


PLANCHE 5 : Variations des moments de frottement

**VI - ROBUSTESSE DE L'ALGORITHME MCS DANS
LE CAS DES MODIFICATIONS σ ET e**

VI.1 : SYSTEMES S.I.S.O

La fonction de Lyapunov choisie , étant de la forme :

$$V = \frac{1}{2} \left[X_e^T P X_e + \frac{1}{\alpha} b_{S(1,1)} (K - \beta \omega)^T (K - \beta \omega) \right] \quad (6-1)$$

6.1.1 : Cas de la modification σ

La loi d'adaptation modifiée vérifie :

$$\dot{K}^T = \beta \dot{\omega}^T + \alpha \omega^T - \sigma K^T \quad (6-2)$$

La dérivé par rapport au temps de (6.1) donne :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} - \dot{V}_o \quad (6-3)$$

avec

$$\dot{V}_o = \beta b_{S(1,1)} \omega^T \dot{\omega} + \omega^T \dot{\theta}^* + \frac{\sigma}{\alpha} b_{S(1,1)} K^T K - \frac{\sigma}{\alpha} \beta b_{S(1,1)} \omega^T K \quad (6-4)$$

(6-4) suggère une forme quadratique du type :

$$\dot{V}_o = \beta b_{P(1,1)} (\omega + \Omega)^T (\omega + \Omega) + \Gamma^T \Gamma \quad (6-5)$$

Ω et Γ étant des fonctions vectorielles à rechercher. Le développement de (6-5) laisse apparaître que :

$$\dot{V}_o = \beta b_{s(1,1)} \omega^T \omega + 2 \beta b_{s(1,1)} \omega \Omega^T + \beta b_{s(1,1)} \Omega^T \Omega + \Gamma^T \Gamma \quad (6-6)$$

L'identification des équations (6-4) et (6-6) permet de déduire que :

- A -

$$\vartheta^* - \sigma \beta \frac{b_{s(1,1)}}{\alpha} K = 2 \beta b_{s(1,1)} \Omega$$

et donc d'écrire que :

$$\Omega = \frac{\vartheta^*}{2\beta b_{s(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \quad (6-7)$$

Le produit scalaire vérifiant :

$$\Omega^T \Omega = \left[\frac{\vartheta^*}{2\beta b_{s(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right]^T \left[\frac{\vartheta^*}{2\beta b_{s(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right]$$

fait apparaître que :

$$\Omega^T \Omega = \frac{\vartheta^{*T} \vartheta^*}{4 \beta^2 b_{s(1,1)}^2} - \frac{\sigma}{2 \alpha \beta b_{s(1,1)}} K^T \vartheta^* + \left[\frac{\sigma}{2 \alpha} \right]^2 K^T K \quad (6-8)$$

De plus ,

$$\Gamma^T \Gamma + \beta b_{S(1,1)} \Omega^T \Omega = \frac{\sigma}{2\alpha} b_{S(1,1)} K^T K \quad (6-9)$$

L'injection de (6-8) dans (6-9) donne :

$$\Gamma^T \Gamma = - \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S(1,1)}} + \frac{\sigma}{2\alpha} K^T \theta^* + \frac{\sigma}{\alpha} b_{S(1,1)} K^T K - \frac{\beta}{4\alpha} b_{S(1,1)} \sigma^2 K^T K \quad (6-10)$$

L'expression (6-4) réarrangée , présentera l'aspect suivant :

$$\dot{V}_o = \beta b_{S(1,1)} \left(\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right)^T \left(\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right) - \dot{\psi}_o \quad (6-11)$$

où $\dot{\psi}_o$ est décrit par :

$$\dot{\psi}_o = \frac{\sigma}{\alpha} b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\beta \sigma}{4\alpha} - 1 \right\} K^T K - \frac{\sigma}{2\alpha} K^T \theta^* + \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S(1,1)}} \quad (6-12)$$

Les mêmes opérations précédentes sont reprises puisque l'équation (6-12) présente une structure quadratique .

En effet ,

$$\dot{\psi}_o = \frac{\sigma}{\alpha} b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\beta \sigma}{4\alpha} - 1 \right\} \left[K + \mathcal{K} \right]^T \left[K + \mathcal{K} \right] + L^T L \quad (6-13)$$

Soit le changement de variable $\mu = \frac{\sigma}{\alpha} b_{S_{(1,1)}} \left\{ \frac{\beta \sigma}{4 \alpha} - 1 \right\}$ (6-14)

Il est évident que le développement de (6-22) donne ,

$$\dot{\psi}_0 = \mu K^T K + 2 \mu K^T \bar{K} + \mu \bar{K}^T \bar{K} + L^T L \quad (6-15)$$

et que l'identification des expressions (6-15) et (6-12) montre que :

$$\bar{K} = - \left[\frac{\theta^*}{4 b_{S_{(1,1)}} \left\{ \frac{\beta \sigma}{4 \alpha} - 1 \right\}} \right] \quad (6-16)$$

de plus :

$$L^T L = \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S_{(1,1)}}} - \frac{\sigma \theta^{*T} \theta^*}{16 \alpha b_{S_{(1,1)}} \left\{ \frac{\beta \sigma}{4 \alpha} - 1 \right\}}$$

En posant $\sigma_0 = \frac{4 \alpha}{\beta}$ comme constante remarquable , il apparait que :

$$L^T L = - \left[\frac{\sigma_0}{\sigma - \sigma_0} \right] \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S_{(1,1)}}} \quad (6-17)$$

La dérivé (6-13) de la fonction de Lyapunov (6-1) présente la configuration finale ci - dessous :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} + \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} \right] \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S_{(1,1)}}} + \dot{W}_0 \quad (6-18)$$

avec \dot{W}_0 égal à : $\dot{W}_0 = \dot{W}_1 + \dot{W}_2$

où, \dot{W}_1 et \dot{W}_2 vérifient :

$$\dot{W}_1 = -\beta b_{S(1,1)} \left[\omega + \frac{\vartheta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right]^T \left[\omega + \frac{\vartheta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right] \quad (6-19)$$

$$\dot{W}_2 = \mu \left[K - \frac{\vartheta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right\}} \right]^T \left[K - \frac{\vartheta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right\}} \right] \quad (6-20)$$

avec μ égal à :

$$\mu = \frac{\sigma}{\alpha} b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right\} \quad (6-21)$$

VI.2 : SYSTEMES M.I.M.O

Le problème multivariable nécessite la reprise de la fonction de Lyapunov définie en (4-85). Aussi,

$$V = \frac{1}{2} X_e^T P X_e + \frac{1}{2} (K - \beta \omega)^T B_S^* \alpha^{-1} (K - \beta \omega) \quad (6-22)$$

α , β et B_S^* caractérisent les matrices associées respectivement aux gains intégrals et proportionnels ainsi qu'aux paramètres formés des blocs diagonaux de la matrice B_S .

6.2.1 : Cas de la modification σ .

La loi d'adaptation définie par (4-86) est modifiée de telle sorte que :

$$\dot{K}^T = \alpha \omega^T + \beta \dot{\omega}^T - \sigma K^T \quad (6-23)$$

La dérivée de (6-22) donne lieu à l'écriture :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d - \omega^T \vartheta^* - \omega^T H \omega - K^T \sigma \alpha^{-1} B_S^* K + K^T \sigma \alpha^{-1} H \omega \quad (6-24)$$

Soit
$$\dot{V}_o = \omega^T \vartheta^* + \omega^T H \omega + K^T \sigma \alpha^{-1} B_S^* K - K^T \sigma \alpha^{-1} H \omega \quad (6-25)$$

avec $H = \beta B_S^* = B_S^* \beta$

Le résultat (6.25) restructuré se présentera sous l'allure :

$$\dot{V}_o = \omega^T \left[\vartheta^* - H^T \alpha^{-1} \sigma K \right] + \omega^T H \omega + K^T \sigma \alpha^{-1} B_S^* K \quad (6-26)$$

Il est clair alors que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d - \dot{V}_o \quad (6-27)$$

Identique au cas S.I.S.O , l'expression (6.27) revêt une forme quadratique dont l'esquisse évolue selon le profil ci - dessous :

$$\dot{V}_o = (\omega + F)^T H (\omega + F) + L^T L \quad (6-28)$$

Les grandeurs vectorielles F et L étant à définir , le développement de (6.28) donne lieu à :

$$\dot{V}_o = \omega^T H \omega + 2 \omega^T H F + F^T H F + L^T L \quad (6-29)$$

L'identification avec l'équation (6.25) autorise :

$$A = 2 H F = \vartheta^* - H^T \alpha^{-1} \sigma K$$

$$B = F^T H F + L^T L = K^T \sigma \alpha^{-1} B_S^* K \rightarrow L^T L = - F^T H F + K^T \sigma \alpha^{-1} B_S^* K$$

- A -

$$F = \frac{1}{2} H^{-1} \left[\vartheta^* - H^T \alpha^{-1} \sigma K \right]$$

comme $H = H^T$, alors :

$$F = \frac{1}{2} H^{-1} \vartheta^* - \frac{1}{2} \alpha^{-1} \sigma K$$

(6-30)

- B -

L'injection de (6.30), fait apparaître que :

$$L^T L = - \frac{1}{4} \vartheta^{*T} H^{-1} \vartheta^* - K^T \sigma \alpha^{-1} \left[\frac{1}{4} \sigma \alpha^{-1} H - B_S^* \right] K + \frac{1}{2} K^T \alpha^{-1} \sigma \vartheta^*$$

dont la configuration finale est assuré par l'équation :

$$L^T L = - \frac{1}{4} \vartheta^{*T} H^{-1} \vartheta^* - K^T \sigma \alpha^{-1} \left[\sigma \sigma_o^{-1} - \mathbb{I} \right] B_S^* K + \frac{1}{2} K^T \alpha^{-1} \sigma \vartheta^* \quad (6-31)$$

Ce dernier résultat de nature quadratique se particularise dans son aspect. Aussi est-il présenté sous le visage suivant :

$$L^T L = (K + \tilde{K})^T \sigma \alpha^{-1} \left[\sigma \sigma_o^{-1} - \mathbb{I} \right] B_S^* (K + \tilde{K}) + \tilde{L}^T \tilde{L}$$

Si M est une matrice vérifiant :

$$M = \sigma \alpha^{-1} \begin{bmatrix} \sigma & \sigma^{-1} & -0 \\ & & \end{bmatrix} B_S^* \quad (6-32)$$

avec $\sigma_0 = 4 \alpha \beta^{-1}$

Alors : $L^T L = (K + \tilde{K})^T M (K + \tilde{K}) + \tilde{L}^T \tilde{L} \quad (6-33)$

Le développement de cette dernière assure que :

$$L^T L = K^T M K + 2 K^T M \tilde{K} + \tilde{K}^T M \tilde{K} + \tilde{L}^T \tilde{L} \quad (6-34)$$

L'identification de (6.34) avec (6.31) conduit à :

$$C = 2 M \tilde{K} = \frac{1}{2} \alpha^{-1} \sigma \vartheta^*$$

$$D = \tilde{K}^T M \tilde{K} + \tilde{L}^T \tilde{L} = -\frac{1}{4} \vartheta^{*T} H^{-1} \vartheta^*$$

En vertu de (C) ,

$$\tilde{K} = \frac{1}{4} M^{-1} \alpha^{-1} \sigma \vartheta^* \quad (6-35)$$

où l'écriture éclatée montre que :

$$\tilde{K} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sigma & \sigma^{-1} & -0 \\ & & \end{bmatrix}^{-1} B_S^{*-1} \vartheta^* \quad (6-36)$$

(D) impose : $\tilde{L}^T \tilde{L} = -\frac{1}{4} \vartheta^{*T} H^{-1} \vartheta^* - \tilde{K}^T M \tilde{K} \quad (6-37)$

Aussi , l'injection de (6.45) dans (6.46) donne lieu à :

$$\tilde{\underline{L}}^T \tilde{\underline{L}} = -\frac{1}{4} \vartheta^{*T} H^{-1} \vartheta^* - \frac{1}{16} \vartheta^{*T} \alpha^{-2} \sigma^2 M^{-1} \vartheta^*$$

Remplacer M par son expression , revient à écrire :

$$\tilde{\underline{L}}^T \tilde{\underline{L}} = -\frac{1}{4} \vartheta^{*T} H^{-1} \vartheta^* + \frac{1}{16} \vartheta^{*T} \alpha^{-1} \sigma \left[\sigma \sigma_o^{-1} - \varnothing \right]^{-1} B_s^{*-1} \vartheta^*$$

$$\tilde{\underline{L}}^T \tilde{\underline{L}} = -\frac{1}{4} \vartheta^{*T} H^{-1} \vartheta^* + \frac{1}{16} \vartheta^{*T} \alpha^{-1} \sigma \left[\frac{1}{4} \sigma \alpha^{-1} - \beta^{-1} \right]^{-1} H^{-1} \vartheta^*$$

$$\tilde{\underline{L}}^T \tilde{\underline{L}} = -\frac{1}{4} \vartheta^{*T} \left[\varnothing - \sigma \left[\sigma - \sigma_o \right]^{-1} \right] H^{-1} \vartheta^* \quad (6-38)$$

La matrice identité présentée sous la forme suivante :

$$\varnothing = \left[\sigma - \sigma_o \right] \left[\sigma - \sigma_o \right]^{-1}$$

permet de transformer (6.47) de la façon qui suit .

$$\begin{aligned} \left[\varnothing - \sigma \left[\sigma - \sigma_o \right]^{-1} \right] &= \left[\left[\sigma - \sigma_o \right] \left[\sigma - \sigma_o \right]^{-1} - \sigma \left[\sigma - \sigma_o \right]^{-1} \right] \\ &= -\sigma_o \left[\sigma - \sigma_o \right]^{-1} \end{aligned}$$

Ce qui conduit en fin de compte , à :

$$\tilde{\underline{L}}^T \tilde{\underline{L}} = -\frac{1}{4} \vartheta^{*T} \sigma_o \left[\sigma - \sigma_o \right]^{-1} H^{-1} \vartheta^* \quad (6-39)$$

En résumé :

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* - \frac{1}{2} \alpha^{-1} \sigma K \right]^T H \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* - \frac{1}{2} \alpha^{-1} \sigma K \right] \\ & + \\ & \left[K - \alpha \left[\sigma - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \theta^* \right]^T M \left[K - \alpha \left[\sigma - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \theta^* \right] \\ & - \\ & \frac{1}{4} \theta^{*T} \sigma_0 \left[\sigma - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \theta^* \end{aligned}$$

La dérivée (6.33) épousera le contour analytique final suivant :

$$\dot{V} = - \frac{1}{2} X_0^T Q X_0 - X_0^T P d + \frac{1}{4} \theta^{*T} \sigma_0 \left[\sigma - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \theta^* + \dot{W}_0 \quad (6-40)$$

avec \dot{W}_0 égal à : $\dot{W}_0 = \dot{W}_1 + \dot{W}_2$

où , \dot{W}_1 et \dot{W}_2 vérifient :

$$\dot{W}_1 = - \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* - \frac{1}{2} \alpha^{-1} \sigma K \right]^T H \left[\omega + \frac{1}{2} H^{-1} \theta^* - \frac{1}{2} \alpha^{-1} \sigma K \right] \quad (6-41)$$

$$\dot{W}_2 = \left[K - \alpha \left[\sigma - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \theta^* \right]^T M \left[K - \alpha \left[\sigma - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \theta^* \right]$$

$$\dot{W}_2 = \left[K - \frac{1}{4} \left[\sigma \quad \sigma_0 - 1 \right]^{-1} B_S^{*-1} \theta^* \right]^T M \left[K - \frac{1}{4} \left[\sigma \quad \sigma_0 - 1 \right]^{-1} B_S^{*-1} \theta^* \right] \quad (6-42)$$

VI.3 : Cas de la modification e .

La variable de pondération σ étant une grandeur constante et arbitraire est remplacée par une norme, celle de l'erreur dynamique .

Les lois d'adaptations des cas S.I.S.O et M.I.M.O, s'en voient alors modifiées dans l'opération du changement de variable çï après :

$$\sigma = \| X_e \| \quad (6-43)$$

Le cas S.I.S.O, traduira que :

$$\dot{K}^T = \beta \dot{\omega}^T + \alpha \omega^T - \| X_e \| K^T \quad (6-44)$$

Tandis que le cas M.I.M.O s'interprètera par :

$$\dot{K}^T = \beta \dot{\omega}^T + \alpha \omega^T - \| X_e \| K^T \quad (6-45)$$

Ce changement de variable transforme uniquement la texture et non la structure des fonctions dérivées de Lyapunov . Aussi, est-il intéressant de présenter les résultats aux niveau de leur formes .

6.3.1 : Cas S.I.S.O

La dérivé (6-13) de la fonction de Lyapunov (6-1) présentera la structure suivante :

$$\dot{V}_e = \frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} + \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \| X_e \|} \right] \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S(1,1)}} + \dot{W}_e \quad (6-46)$$

avec \dot{W}_e égal à : $\dot{W}_e = \dot{W}_{e1} + \dot{W}_{e2}$

où, \dot{W}_{e1} et \dot{W}_{e2} vérifient :

$$\dot{W}_{e1} = -\beta b_{S(1,1)} \begin{bmatrix} \omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} & -\frac{\|X_e\|_K}{2\alpha} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} & -\frac{\|X_e\|_K}{2\alpha} \end{bmatrix} \quad (6-47)$$

$$\dot{W}_{e2} = \mu_e \begin{bmatrix} K - \frac{\theta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\|X_e\|}{\sigma_0} - 1 \right\}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K - \frac{\theta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\|X_e\|}{\sigma_0} - 1 \right\}} \end{bmatrix} \quad (6-48)$$

avec μ_e égal à :

$$\mu_e = \frac{\|X_e\|}{\alpha} b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\|X_e\|}{\sigma_0} - 1 \right\} \quad (6-49)$$

6.3.2 : Cas M.I.M.O

Identiquement au cas S.I.S0, la dérivée (6.24) présentera le contour analytique suivant où la norme de l'erreur dynamique doit être comprise en terme de matrice de même dimension que σ_0 :

$$\|X_e\| = I_{N(N+M)} \|X_e\| \quad (I : \text{matrice identité})$$

$$\dot{V}_e = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d + \frac{1}{4} \theta^{*T} \sigma_0 \left[\|X_e\| - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \theta^* + \dot{W}_e \quad (6-50)$$

avec \dot{W}_e égal à : $\dot{W}_e = \dot{W}_{e1} + \dot{W}_{e2}$

où, \dot{W}_{e1} et \dot{W}_{e2} vérifient :

$$\dot{W}_{e1} = - \left[\omega + \frac{1}{2\mu} H^{-1} \vartheta^* - \frac{1}{2\mu} \alpha^{-1} \| X_e \| K \right]^T H \left[\omega + \frac{1}{2\mu} H^{-1} \vartheta^* - \frac{1}{2\mu} \alpha^{-1} \| X_e \| K \right] \quad (6-51)$$

$$\dot{W}_{e2} = \left[K - \alpha \left[\| X_e \| - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \vartheta^* \right]^T M_e \left[K - \alpha \left[\| X_e \| - \sigma_0 \right]^{-1} H^{-1} \vartheta^* \right]$$

$$\dot{W}_{e2} = \left[K - \frac{1}{4} \left[\| X_e \| \sigma_0^{-1} - 1 \right]^{-1} B_s^{-1} \vartheta^* \right]^T M_e \left[K - \frac{1}{4} \left[\| X_e \| \sigma_0^{-1} - 1 \right]^{-1} B_s^{-1} \vartheta^* \right] \quad (6-52)$$

avec M_e égal à :

$$M_e = \| X_e \| \alpha^{-1} \left[\| X_e \| \sigma_0^{-1} - 1 \right] B_s$$

VI.4 : DISCUSSION

Il s'agit dans ce paragraphe d'établir les différents changements pouvant s'opérer au niveau des normes de l'erreur et du gain dynamique, si changement il y a, afin de montrer par justification analytique les limites extrémales atteintes par les dites normes dans le cas des modifications σ et e .

6.4.1 : SYSTEMES S.I.S.O

La dérivé de la fonction de Lyapunov définie en (6-29) étant conforme à :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X_e^T Q X_e - (X_e^T P_N) d_{(1,1)} + \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} \right] \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S(1,1)}} + \dot{W}_0 \quad (6-53)$$

où \dot{W}_0 est égal à : $\dot{W}_0 = \dot{W}_1 + \dot{W}_2$ avec \dot{W}_1 et \dot{W}_2 vérifiant :

$$\dot{W}_1 = -\beta b_{S(1,1)} \left[\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right]^T \left[\omega + \frac{\theta^*}{2\beta b_{S(1,1)}} - \frac{\sigma}{2\alpha} K \right] \quad (6-54)$$

$$\dot{W}_2 = \mu \left[K - \frac{\theta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right\}} \right]^T \left[K - \frac{\theta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right\}} \right] \quad (6-55)$$

$$\text{où } \mu = \frac{\sigma}{\alpha} b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right\} \quad (6-56)$$

6.4.1.1 : Cas de la modification σ (Recherche d'une condition de pondération) .

Une condition suffisante de stabilité postule pour une condition de négativité de (6-63) (théorème de Lyapunov) . Aussi , convient - il de prendre :

$$\dot{W}_1 \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{W}_2 \leq 0$$

mais d'après (6-65) , $\dot{W}_2 \leq 0$ si $\mu \leq 0$.

La situation naissante fait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma - 1 \\ \sigma \end{array} \right\} \leq 0 \rightarrow \boxed{\sigma \leq \sigma_0} \quad (6-57)$$

(6-67) introduit donc une pondération de σ caractérisée par :

$$\boxed{0 < \sigma \leq \sigma_{\max} = \sigma_0} \quad (6-58)$$

La prise en compte de ce résultat induit la majoration de l'équation (6-63) par :

$$\boxed{\dot{V} \leq -\eta V + \gamma V^{(1/2)} + \lambda} \quad (6-59)$$

$$\text{où } \eta = \frac{\lambda(Q)_{\min}}{\lambda(P)_{\min}} ; \gamma = \left[\frac{2 \lambda(Q)_{\max}}{\lambda(P)_{\min}} \right] \|d\| ; \lambda = \left\{ \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} \right\} \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{s(1,1)}}$$

Une condition suffisante de négation semie définie pour \dot{V} est :

$$\boxed{-\eta V + \gamma V^{(1/2)} + \lambda = 0} \quad (6-60)$$

en effet , le discriminant étant positif et égal à :

$$\Delta = \gamma^2 + 4 \lambda \eta \quad (6-61)$$

et se réécrivant comme suit ,

$$\Delta = \gamma^2 \left[1 + \frac{4 \lambda \eta}{\gamma^2} \right] \quad (6-62)$$

introduit les racines :

$$V_{1,2}^{(1/2)} = \frac{-\gamma \pm \Delta^{(1/2)}}{-2\eta} \quad (6-63)$$

La valeur du rayon de convergence maximum dans lequel la dérivé reste semie définie négative est :

$$\boxed{V^{(1/2)} = \frac{\gamma + \Delta^{(1/2)}}{2\eta}} \quad (6-64)$$

L'équation (6-74) traduisant que :

$$V^{(1/2)} = \frac{\gamma}{2\eta} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 \lambda \eta}{\gamma^2}} \right] \quad (6-65)$$

Assure le développement de (6-75) par l'écriture :

$$\boxed{\sqrt{V} = \left[\frac{\lambda(Q)_{\max} \lambda(P)_{\min}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\|d\|}{\lambda(Q)_{\min}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda(Q)_{\min}}{2\lambda(Q)_{\max}} \left\{ \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} \right\} \frac{\vartheta^{*T} \vartheta^*}{\beta \|d\|^2 b_{s_{(1,1)}}}} \right]} \quad (6-66)$$

P étant choisie matrice diagonale et $\|d\| = \|d_{(1,1)}\|$
 alors $\lambda_{\max}(P) = \max \lambda(P) = \lambda_{\max}(P^2) = \lambda_{\max}(P)^2$ $[P = P_N P_N^T]$

Aussi ,

$$\|X_e\| = \left[2 \frac{\lambda(P)_{\max}}{\lambda(P)_{\min}} \|d\| \right]^{1/2} + \sqrt{1 + \frac{\lambda(P)_{\min}}{2\lambda(P)_{\max}} \left\{ \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} \right\} \frac{\vartheta^{*T} \vartheta^*}{\beta \|d\|^2 b_{s(1,1)}}} \quad (6-67)$$

Comme la structure des équations (6-5) , (6-7) et (6-10) atteste que :

$$\|X_e\| \leq \left[\frac{2V}{\lambda(P)_{\min}} \right]^{1/2} \quad (6-68)$$

$$\|\omega\| \leq \lambda_{\max}(P) \|X_e\| \left[\left[\|X_e\| + k \|r\| \right]^2 + \|r\|^2 \right]^{1/2} \quad (6-69)$$

$$\|K\| \leq \left\{ \beta \|\omega\| + \left[\frac{2\alpha V}{b_{s(1,1)}} \right]^{1/2} \right\} \quad (6-70)$$

6.4.1.2 : Cas de la modification e (Recherche d'une condition de limite) .

Les règles de stabilité , préservant la stratégie de maintien des conditions de négativités semie définies de la dérivé de la fonction de Lyapunov introduites au niveau du paragraphe VI.1 font que pour l'équation (6-53) , il est constaté que :

$$\dot{W}_{e1} = -\beta b_{s(1,1)} \begin{bmatrix} \omega + \frac{\vartheta^*}{2\beta b_{s(1,1)}} & -\frac{\|X_e\| \|K\|}{2\alpha} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \omega + \frac{\vartheta^*}{2\beta b_{s(1,1)}} & -\frac{\|X_e\| \|K\|}{2\alpha} \end{bmatrix} \leq 0$$

La négativité de \dot{W}_{e2} étant sujette au signe de μ_e , introduit une nouvelle condition de pondération sur σ_o , donc sur α et β .

En effet, comme

$$\mu_e = \frac{\alpha}{\alpha} b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\|X_o\|}{\sigma_o} - 1 \right\}$$

l'induction $\dot{W}_{e2} \leq 0$ ne peut se produire que si et seulement si, $\mu_e \leq 0$. Aussi, le résultat étant immédiat fait introduire la condition de pondération sur σ_o à savoir, que :

$$\mu_e \leq 0 \rightarrow \frac{\|X_o\|}{\sigma_o} \leq 1 \rightarrow \boxed{\|X_o\| \leq \sigma_o} \quad (6-71)$$

Automatiquement,

$$\dot{W}_{e2} = \mu_e \left[K - \frac{\theta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\|X_o\|}{\sigma_o} - 1 \right\}} \right]^T \left[K - \frac{\theta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\|X_o\|}{\sigma_o} - 1 \right\}} \right] \leq 0$$

Le problème se ramenant, d'après le résultat (6-45), à l'étude d'une négativité de la dérivé, introduit l'écriture suivante :

$$\dot{V}_e \leq \frac{1}{2} X_e^T Q X_e - X_e^T P d + \left[\frac{\sigma_o}{\sigma_o - \|X_o\|} \right] \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{S(1,1)}} \quad (6-72)$$

Une condition suffisante, majorant (-20) à :

$$\dot{V}_e \leq -\eta_e \|X_e\|^2 - \gamma_e \|X_e\| + \left\{ \frac{\sigma_o}{\sigma_o - \|X_e\|} \right\} \lambda_e \quad (6-73)$$

où $\eta_e = \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{Q})}{2}$; $\gamma_e = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{P})} \|d\|$; $\lambda_e = \frac{\theta^{*T} \theta^*}{4 \beta b_{s(4,1)}}$

autorise la négativité de \dot{V}_e , si :

$$-\eta_e \|X_e\|^2 - \gamma_e \|X_e\| + \left\{ \frac{\sigma_o}{\sigma_o - \|X_e\|} \right\} \lambda_e = 0 \quad (6-74)$$

Réduite au même dénominateur puis ordonnée, il apparaît que :

$$\eta_e \|X_e\|^3 - \left\{ \sigma_o \eta_e - \gamma_e \right\} \|X_e\|^2 + \gamma_e \sigma_o \|X_e\| + \sigma_o \lambda_e = 0 \quad (6-75)$$

Afin de se conformer aux grandeurs définies en annexe (2), l'équation (6-85) est réécrite de manière à ce que :

$$\|X_e\|^3 + a_1 \|X_e\|^2 + a_2 \|X_e\| + a_3 = 0 \quad (6-76)$$

où $a_1 = - \left\{ \sigma_o - \frac{\gamma_e}{\eta_e} \right\}$, $a_2 = \frac{\sigma_o \gamma_e}{\eta_e}$, $a_3 = \frac{\sigma_o \lambda_e}{\eta_e}$

Si les perturbations sont bornées, les coefficients a_i le seront entraînant la bornitude des solutions de (6-86). Comme toute norme est réelle, le discriminant ne peut être que négatif, les

calculs sont simplifiés puisque la résolution trigonométrique (annexe (2)) est utilisée . Trois solutions analytique sont possibles :

$$\| X_{\circ} \|_1 = 2 \sqrt{-Q} \cos \left(\frac{1}{3} \Theta \right) - \frac{1}{3} a_1 \quad (6-77)$$

$$\| X_{\circ} \|_2 = 2 \sqrt{-Q} \cos \left(\frac{1}{3} \Theta + 2 \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{3} a_1 \quad (6-78)$$

$$\| X_{\circ} \|_3 = 2 \sqrt{-Q} \cos \left(\frac{1}{3} \Theta + 4 \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{3} a_1 \quad (6-79)$$

$$\text{avec } \cos \left(\Theta \right) = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}} \quad (6-80)$$

Les coefficients Q et R étant représentés par :

$$Q = \frac{1}{9} \left\{ 3 \frac{\sigma_{\circ} \gamma_{\circ}}{\eta_{\circ}} - \left\{ \sigma_{\circ} - \frac{\gamma_{\circ}}{\eta_{\circ}} \right\}^2 \right\} \quad (6-81)$$

$$R = \frac{1}{54} \left\{ -9 \frac{\sigma_{\circ} \gamma_{\circ}}{\eta_{\circ}} \left\{ \sigma_{\circ} - \frac{\gamma_{\circ}}{\eta_{\circ}} \right\} - 27 \frac{\sigma_{\circ} \lambda_{\circ}}{\eta_{\circ}} + 2 \left\{ \sigma_{\circ} - \frac{\gamma_{\circ}}{\eta_{\circ}} \right\}^3 \right\} \quad (6-82)$$

La justification de la bornitude de la norme des gains d'adaptation devient évidente , puisqu'il s'agit de reprendre les équations de (6-78) à (6-80) , de remplacer l'erreur dynamique par son expression et de résoudre , une dernière fois l'équation (6-83) .

VI.5 : SYSTEMES M.I.M.O

L'intérêt d'étendre le problème monovariante au cas multivariable verrais une généralisation conforme aux résultats précédents par changement adéquat de variables . Cette possibilité étant , il est introduit , pour les formes canoniques , le présent paragraphe .

NB : Les transformations opérées au niveau du chapitre (IV) s'associent aux relations établies en (4-38), (4-50), (4-72), (4-73) et (4-84). Aussi, à titre de rappel sont-elles reformulées.

$$\omega^T = \left[\omega_1^T \parallel \omega_2^T \parallel \dots \parallel \omega_i^T \parallel \dots \parallel \omega_M^T \right]_{1 \leq i \leq M}$$

$$\vartheta^T = \left[\vartheta_1^T \parallel \vartheta_2^T \parallel \dots \parallel \vartheta_i^T \parallel \dots \parallel \vartheta_M^T \right]_{1 \leq i \leq M}$$

$$\vartheta^{*T} = \left[\vartheta_1^{*T} \parallel \vartheta_2^{*T} \parallel \dots \parallel \vartheta_i^{*T} \parallel \dots \parallel \vartheta_M^{*T} \right]_{1 \leq i \leq M}$$

$$K^T = \left[K_1^T \parallel \dots \parallel K_i^T \parallel \dots \parallel K_M^T \right]_{1 \leq i \leq M}$$

$$(\omega , \vartheta , \vartheta^* , K) \in \mathbb{R}^{M(N+M)}$$

$$d = D^\# + D$$

Le résultat passant par l'injection des relations ci-dessus dans le cas S.I.S.O, confirme la généralisation du passage monovarié vers le cas multivarié.

CONCLUSION :

- Les maxima des normes ne sont bornés que si les perturbations le sont.
- La norme maximale de l'erreur dynamique inversement proportionnelle à la racine carrée du gain d'adaptation statique α , présente une valeur minimale lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.

$$\min \left\{ \| X_e \| \right\} = \left[2 \frac{\lambda_{CPD}_{\max}}{\lambda_{CQD}_{\min}} \right]^{1/2} \| d \|$$

- La norme maximale du gain dynamique augmentant proportionnellement avec la racine carrée de α , présente un extrémum théoriquement infini lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.

- La condition de pondération $\sigma \leq \sigma_0$, introduit l'approximation :

$$\left\{ \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} \right\} = \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}} \right\} = \left\{ 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\}^{-1} \approx 1 + \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

aussi ,

$$\|X_e\| \approx \left[2 \frac{\lambda(CP)_{\max}}{\lambda(CQ)_{\min}} \right]^{1/2} \|d\| \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda(CQ)_{\min} \theta^{*T} \theta^*}{2\beta\lambda(CP)_{\max} \|d\|^2 b_{S(1,1)}} + \frac{\lambda(CQ)_{\min} \theta^{*T} \theta^* \sigma}{2\beta\lambda(CP)_{\max} \|d\|^2 b_{S(1,1)}}} \right]$$

interprète l'augmentation de la norme de l'erreur lorsque σ augmente .

- Enfin , d'après (6-25) , comme $k^T k = \|k\|^2$ avec :

$$k = - \left[\frac{\theta^*}{4 b_{S(1,1)} \left\{ \frac{\beta \sigma}{4 \alpha} - 1 \right\}} \right]$$

$$\|k\| = \|K\|_{\max} = \frac{\sqrt{\theta^{*T} \theta^*}}{4 b_{S(1,1)} \left\| \frac{\beta \sigma}{4 \alpha} - 1 \right\|}$$

- Le gain d'adaptation inversement proportionnel à σ , diminue lorsque σ augmente .

VI.6 : CAS DES PERTURBATIONS PARAMETRIQUES

Il suffit de se rapprocher du chapitre (V) et d'opérer les transformations adéquates , à savoir :

$$\theta^* = \theta^* + \Delta\theta^*$$

$$\beta b_{S(1,1)} \equiv \beta B_{S_1} \quad \text{où} \quad B_{S_1} = B_{S_1}^* + \Delta B_{S_1}^*$$

6.6.1 : Cas de la modification σ :

$$\|X_e\| = \left[2 \frac{\lambda(CP)_{\max}}{\lambda(CQ)_{\min}} \right]^{1/2} \|d\| \left[1 + \sqrt{1 + \Gamma \frac{\lambda(H^{-1})_{\max} \lambda(CQ)_{\min} \theta_o^{*T} \theta_o^*}{2 \lambda(CP)_{\max}^2 \|d\|^2}} \right]$$

avec θ_o , le vecteur constitué de tous les éléments des dernières lignes de chaque blocs de la matrice : $\theta_o^* = \theta^* + \Delta\theta^*$

$$\text{où } \Gamma = \left\{ \frac{\sigma_o}{\sigma_o - \sigma} \right\} \quad \text{et } H = \beta B_{S_1}$$

6.6.2 : Cas de la modification e

Il suffit d'adopter le même changement de variable et de se référer aux équations allant de (6-87) à (6-89) .

VI.7 : SIMULATIONS ET INTERPRETATIONS

PLANCHES 6 ET 7 : Prédit par la théorie , la modification σ manifestera deux actions essentiels :

- 1 - Destructeur de l'action intégrale (donc de la précision) et par conséquent de la robustesse de la stabilité ,
- 2 - Augmentation rapide du temps de convergence quand l'effet de σ augmente .

Il est à remarquer que malgré que l'erreur de sortie reste bornée, les amplitudes atteintes par cette dernière prend des dimensions importante quand σ augmente suggérant un comportement proportionnel entre la norme de l'erreur dynamique et σ , contrairement à la norme des gains, où ce dernier semble varier en $1/\sigma^n$ (n étant un exposant à évaluer).

Il est à noter que la limite prédite analytiquement traitant la valeur de σ comme :

$$0 < \sigma < \sigma_0 = 4 \frac{\alpha}{\beta}$$

vérifiée dans le cadre d'étude prouve bien que

$$\text{pour } \frac{\alpha}{\beta} = 10, \sigma < 40$$

aussi, bien que le système reste stable, l'erreur reste constante même pour $\sigma > \sigma_0$ au

détriment de la destruction de la commande quand σ augmente.

Ainsi est justifiée la conformité des résultats prédits avec ceux simulés.

PLANCHE 8 et 9 :

Même analyse que planche 6 et 7 en constatant toutefois qu'un rapport $[\alpha / \beta = 100]$ plus important augmente la norme des gains et de la commande tout en induisant une diminution plus accentuée de l'erreur d'adaptation que dans le cas $[\alpha / \beta = 10]$.

PLANCHE 10 et 11 : observation et constat identique au planche 8 et 9.

PLANCHE 12 :

cas M.R.A.C :

Stabilité atteinte plus rapidement quand σ augmente, erreur de sortie plus importante avec commande relativement constante.

cas M.C.S : même conclusion que dans le cas M.R.A.C avec cependant erreur plus importante de poursuite.

PLANCHE 13 :

cas M.R.A.C :

- Erreur de sortie plus importante que dans le cas sans modification σ ,
- Convergence des normes de l'erreur et du gain dynamique plus rapide lorsque σ augmente, suggérant une proportionnalité inverse entre le temps de réponse et la modification introduite,
- Importantes amplitude des commandes quand σ augmente, dues à l'excitations de dynamiques non modelées de l'ensemble système + commande + loi d'adaptation, indépendamment des perturbations.

cas M.C.S :

Même conclusion que dans le cas M.R.A.C, sauf qu'augmentation de l'erreur.

PLANCHE 14 :

cas M.R.A.C :

Même conclusion que dans le cas M.R.A.C sans perturbations en plus de la converge rapide vers la stabilité.

cas M.C.S :

Résultats pratiquement identiques au cas M.R.A.C sauf que temps de convergence plus lent.

PLANCHE 15 :

cas M.R.A.C et M.C.S :

- Norme des gains très importante par rapport aux cas précédents sauf que cette dernière diminue quand σ augmente,
- Amplitude de la norme dynamique augmente quand σ augmente,
- Amplitude moyenne des commandes.

PLANCHE 16 :

- Bonne poursuite du modèle avec convergence plus rapide que sans modification σ où e ,
- Diminution de l'erreur quand α et β augmentent (bonne prédiction théorique),

- Norme des gains dynamiques plus importante lorsque α et β augmentent avec mêmes remarques que planche 1 et 2 ,

PLANCHE 17 :

Cas de perturbations extérieures :

cas M.C.S :

1 - perturbations rapides

Faible amplitude des commandes ,
erreur de sortie bornée mais non
nulle en régime permanent ,
stabilité atteinte rapidement ,

2 -- perturbations lentes

Convergence plus rapide des normes
donc vers la stabilité , commandes
franches avec importantes
amplitudes et manifestations de
suroscillations au niveau des
normes dues à excitations de
dynamiques non modelées .

cas de perturbations paramétriques :

cas M.C.S :

1 - perturbations paramétriques lentes

Bonne poursuite du modèle avec
faible mais bornée erreur de
poursuite et amplitude de commande.
Cependant , convergence plus lente
que dans le cas d'absence de
perturbations paramétriques .

2 - perturbations paramétriques rapides

Bonne poursuite du modèle ,
cependant erreur dynamique plus
élevée que le cas lent ,

Stabilité atteinte plus rapidement
avec amplitude de commandes plus
importante .

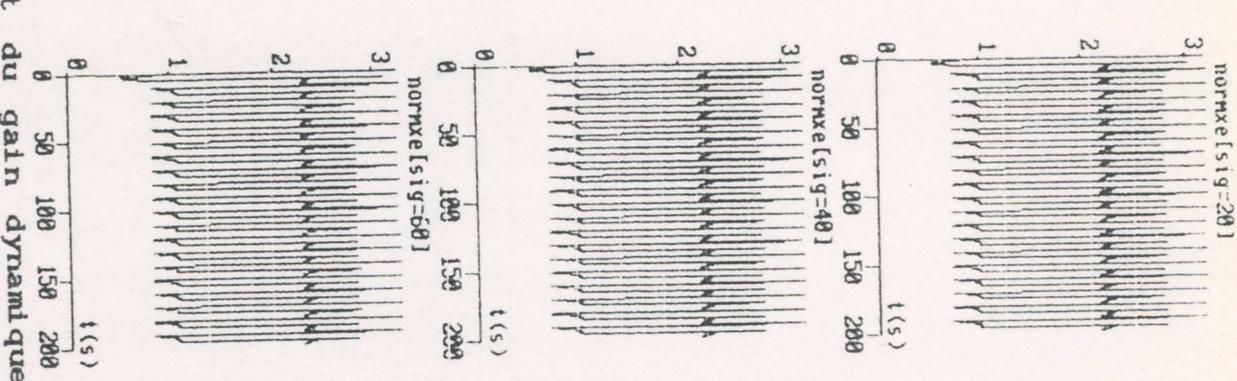
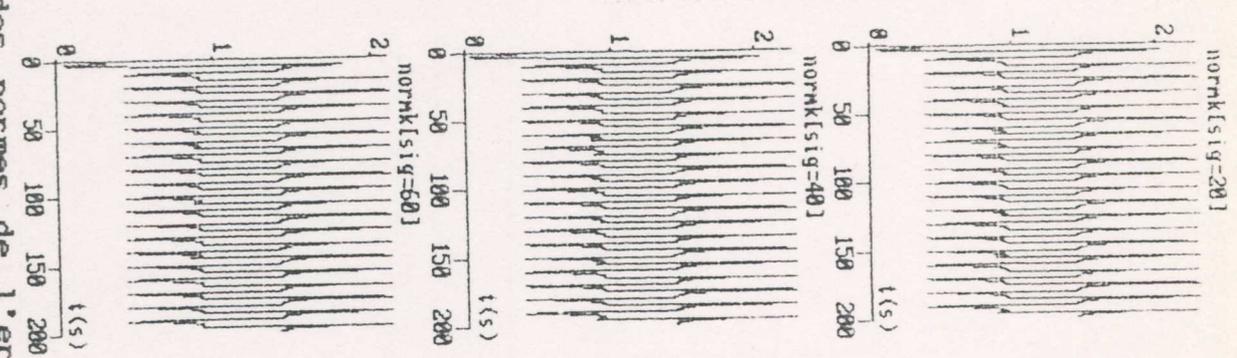
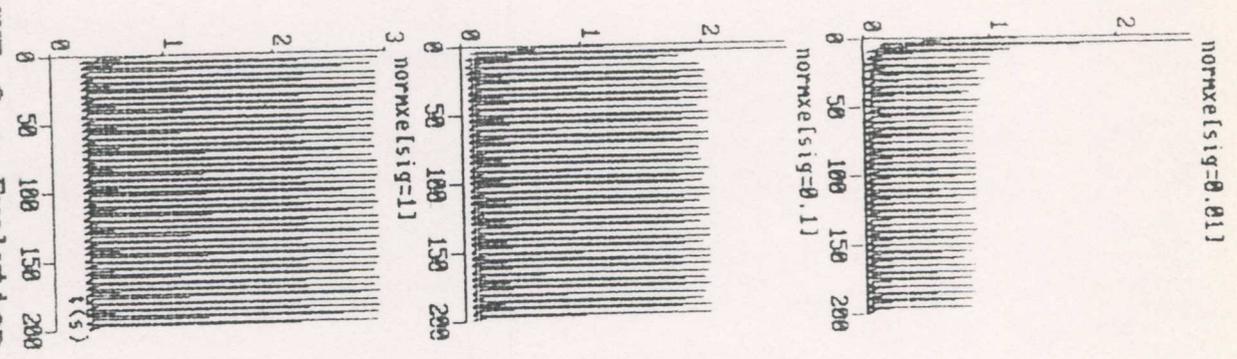
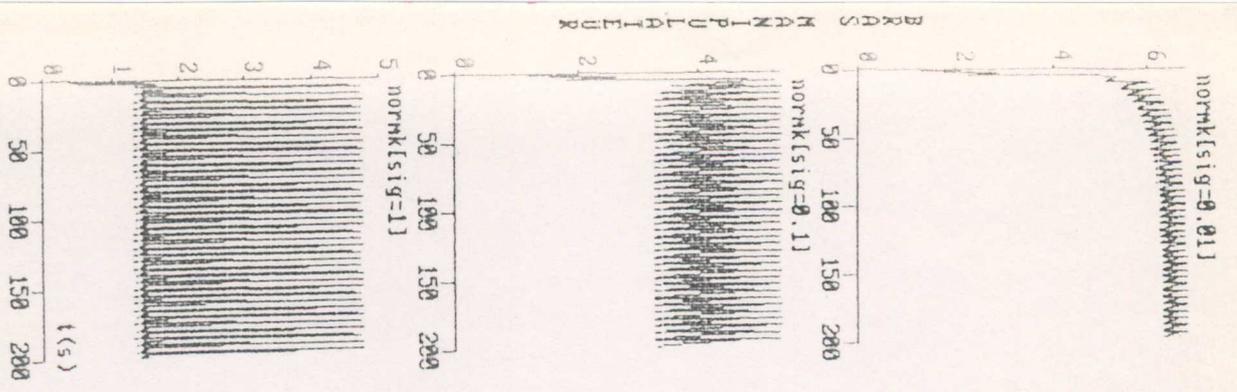


PLANCHE 6 : Evolution des normes de l'erreur et du gain dynamique
 fonction de σ . Gains statiques α et β fixes.
 $\alpha = 10$, $\beta = 1$. Système non perturbé.

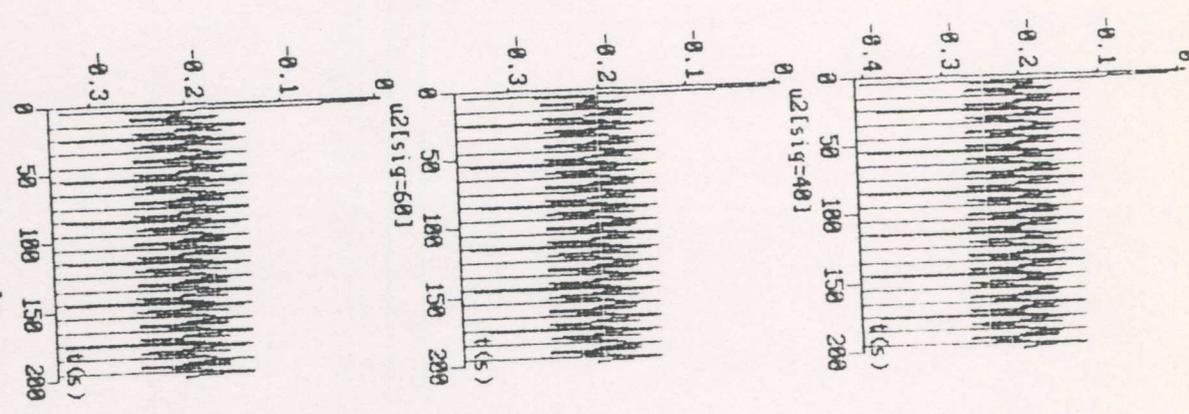
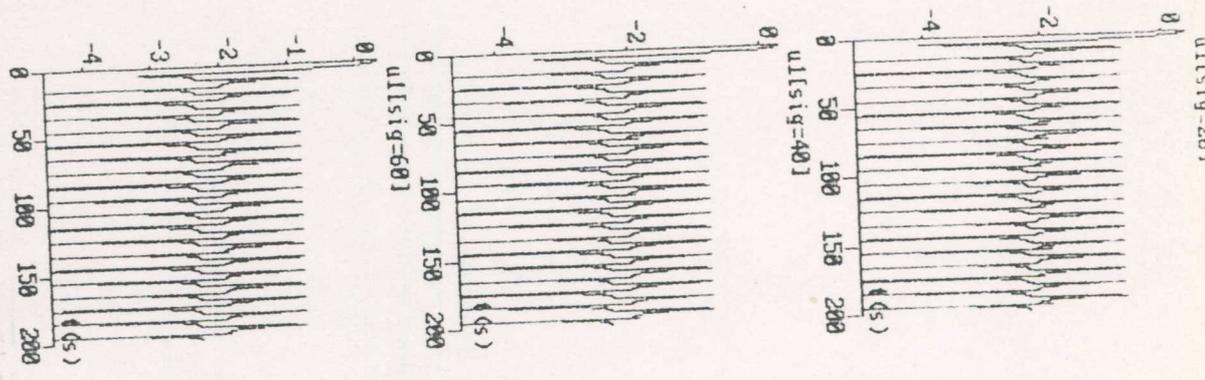
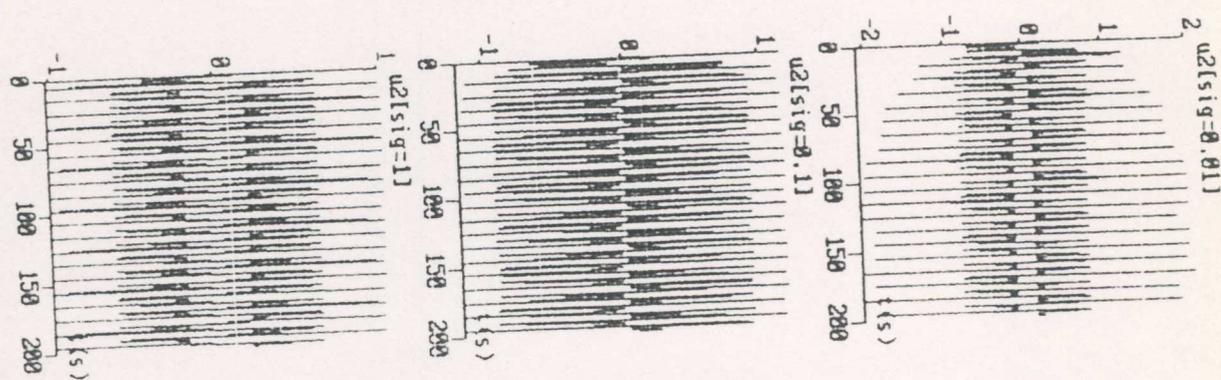
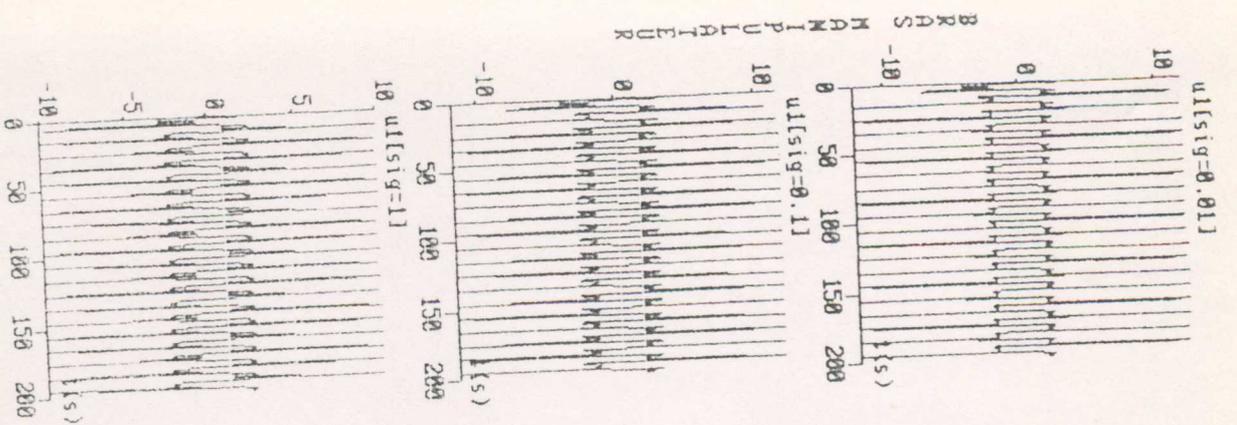


PLANCHE 7 : Evolution des normes des commandes dynamiques fonction de α et β fixes .
 $\alpha = 10$, $\beta = 1$. Système non perturbé .

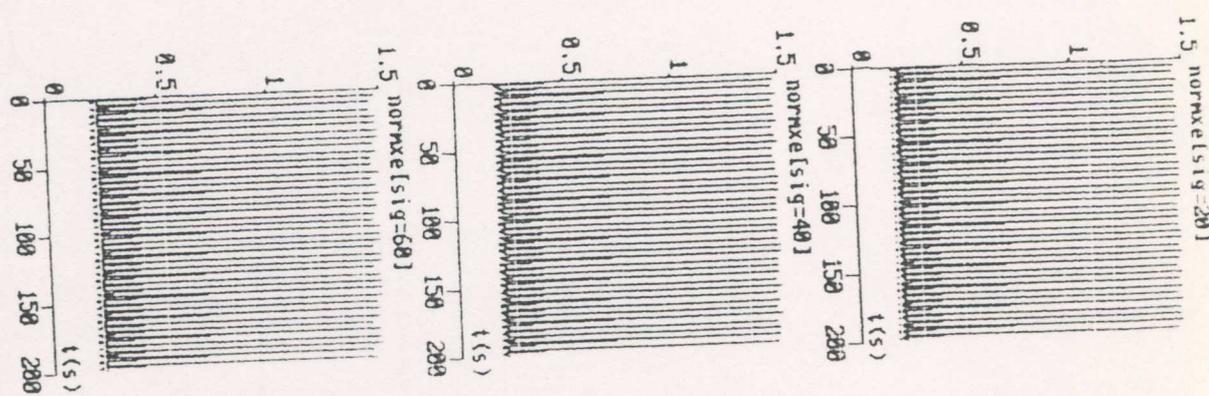
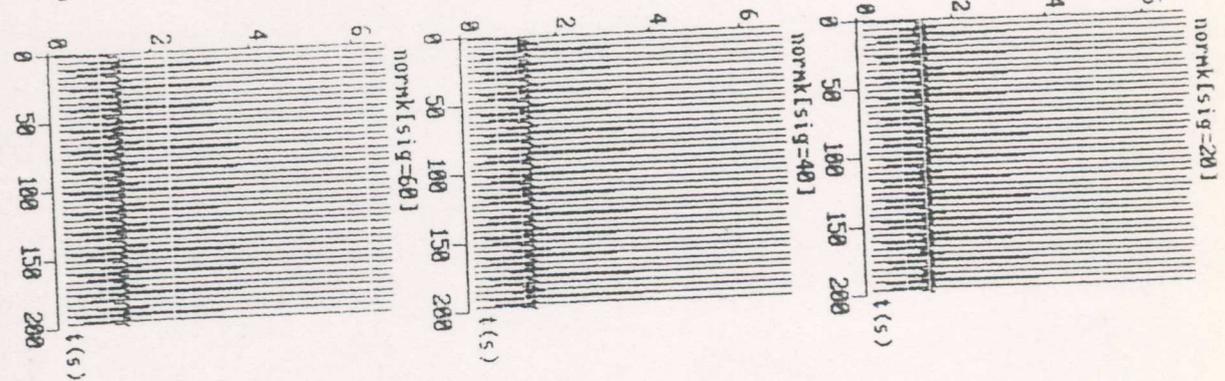
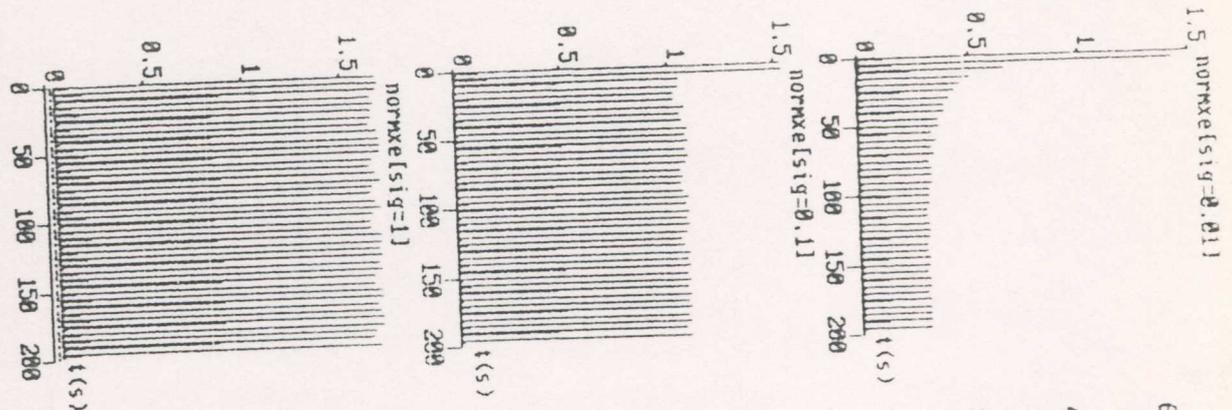
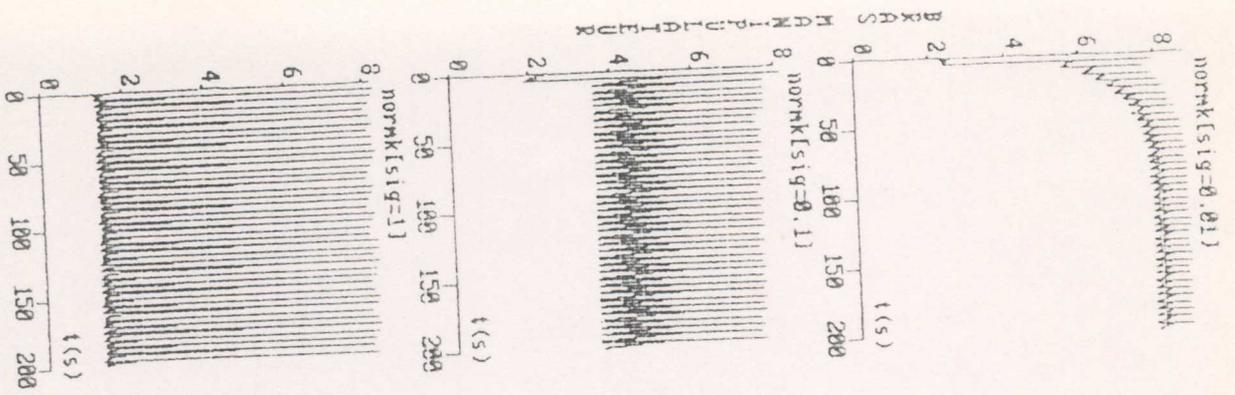


PLANCHE 8 : Evolution des normes de l'erreur et du gain dynamique
 fonction de σ . Gains statiques α et β fixes .
 $\alpha = 100$, $\beta = 10$. Système non perturbé .

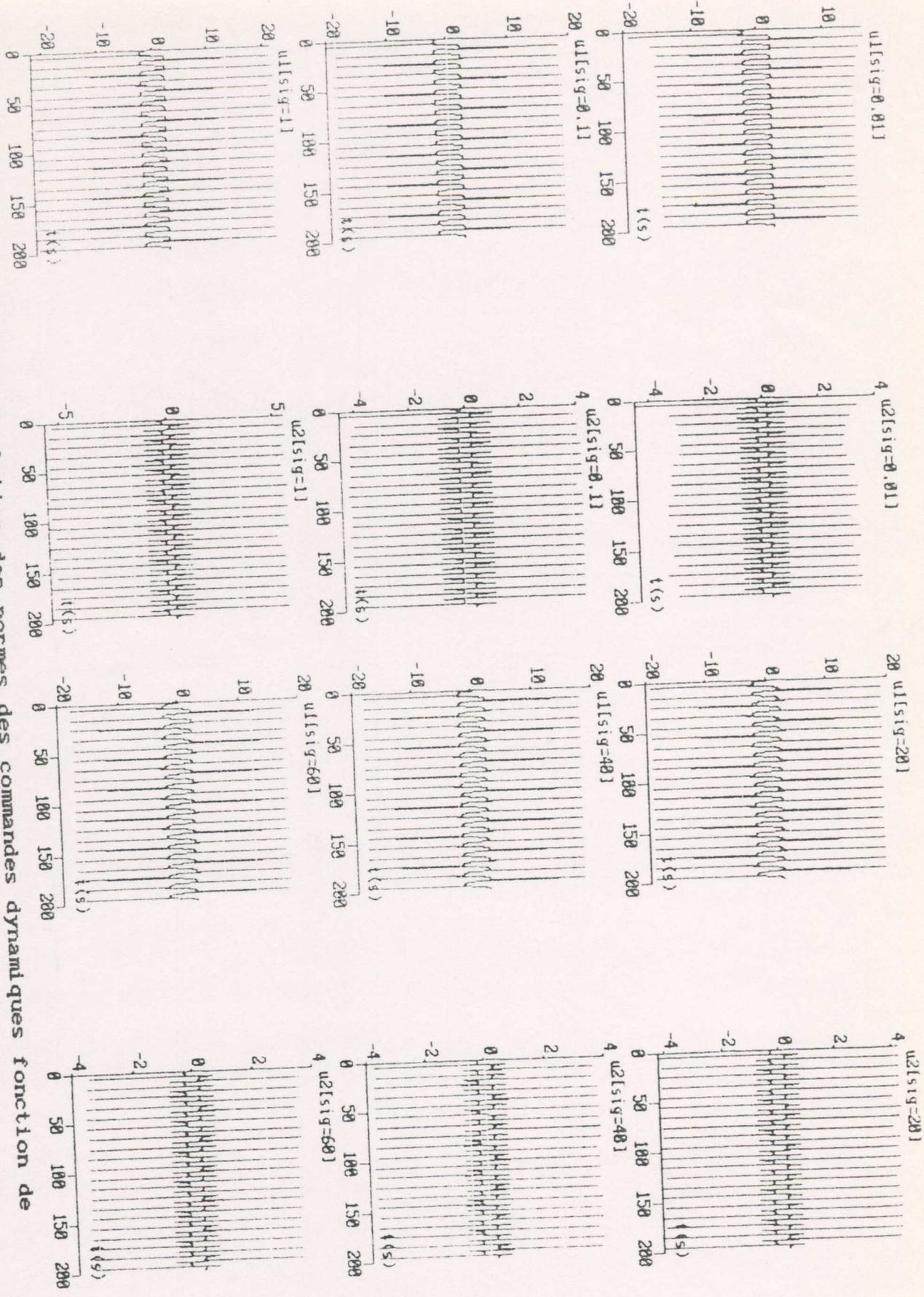


PLANCHE 9 : Evolution des normes des commandes dynamiques fonction de α et β fixes .
 $\alpha = 100$, $\beta = 10$. Système non perturbé .

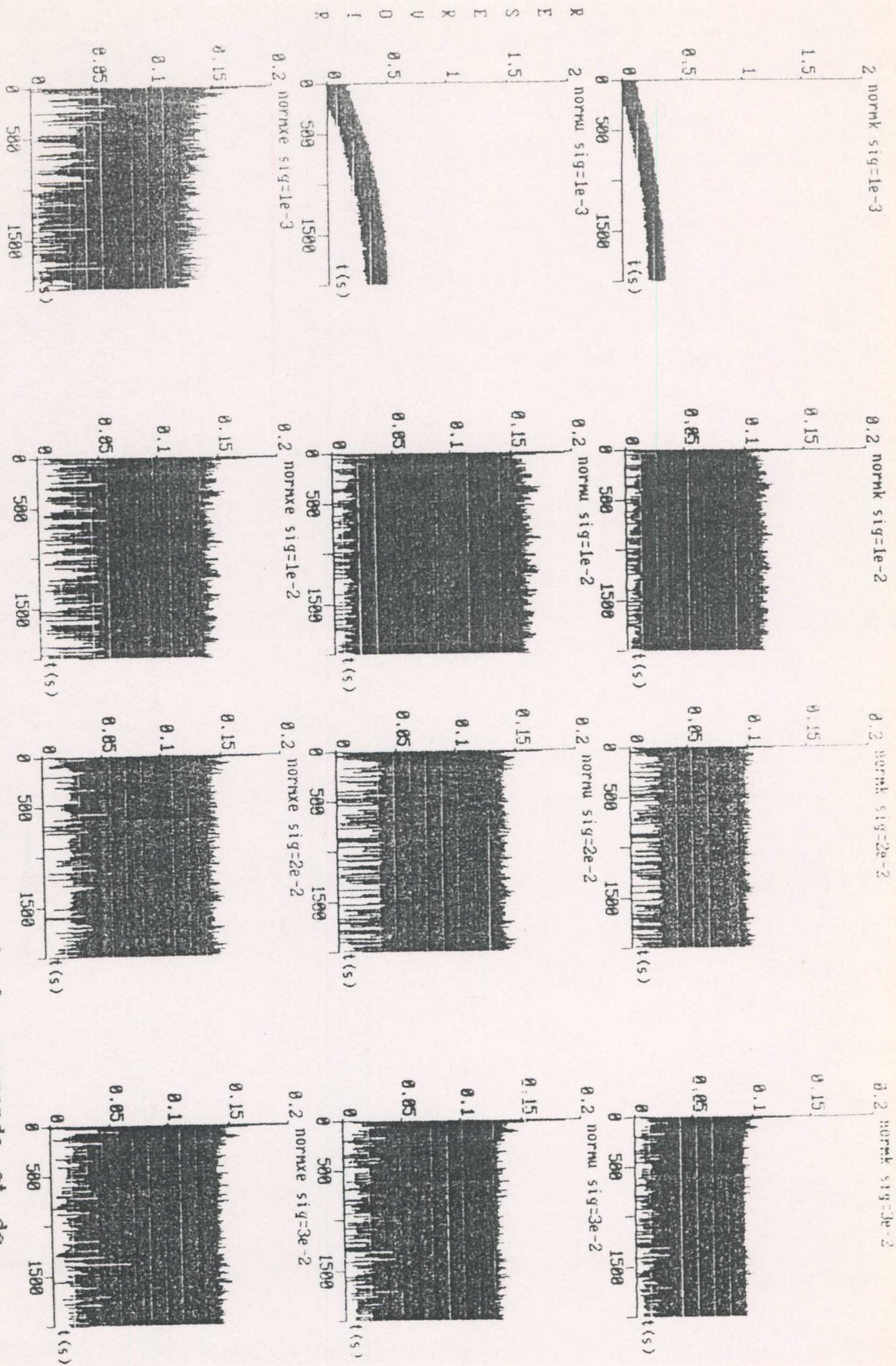


PLANCHE 10 : Evolution des normes du gain , de la commande et de l'erreur dynamique fonction de σ . Gains statiques α et β fixes .
 $\alpha = 0.003$, $\beta = 0.03$. Systeme non perturbé .

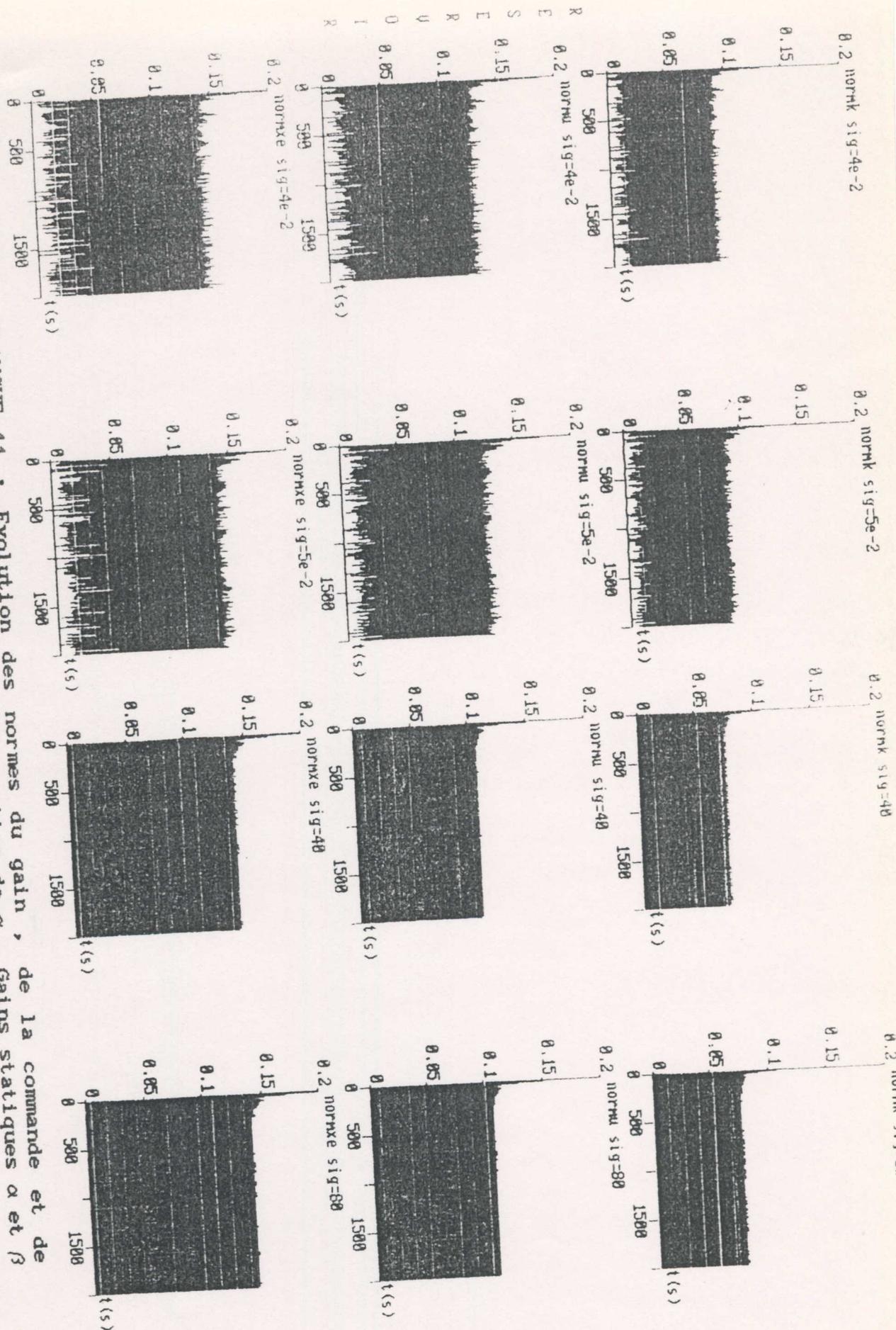
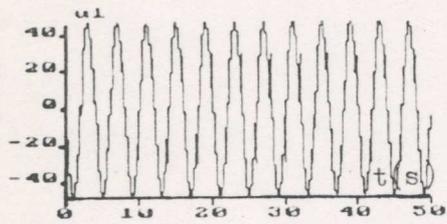
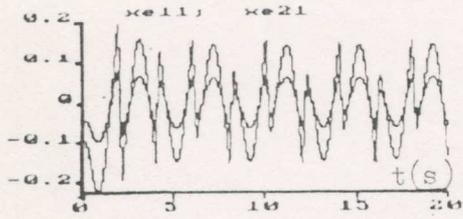
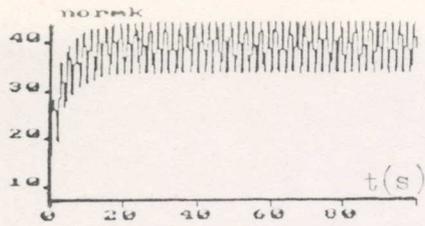
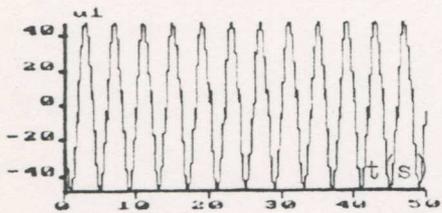
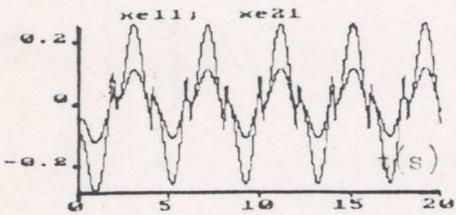
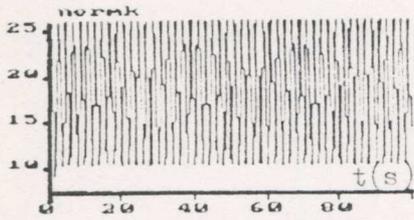


PLANCHE 11 : Evolution des normes du gain , de la commande et de l'erreur dynamique fonction de σ . Gains statiques α et β fixes .
 $\alpha = 0.003$, $\beta = 0.03$. Système non perturbé .

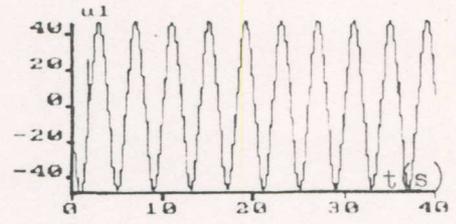
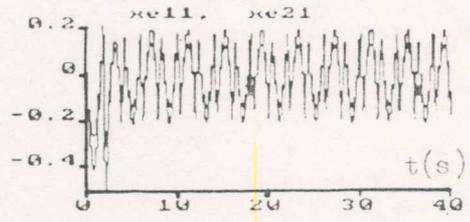
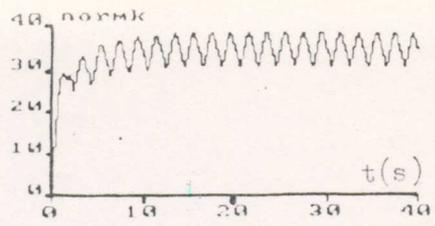
Cas MRAC



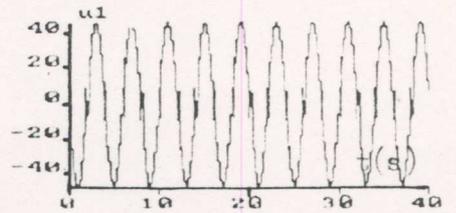
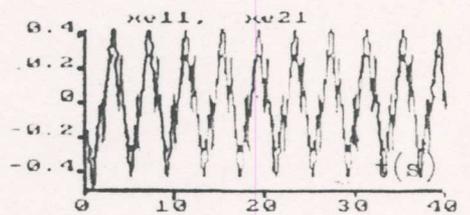
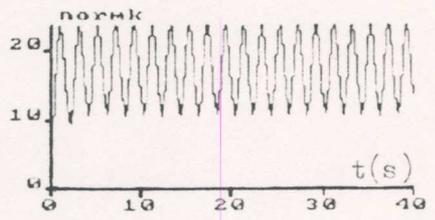
B K A S
M A N I P U L A T I O N N E U R



Cas MCS



$\nu = 0.1$



$\nu = 1$

PLANCHE 12: Perturbations Externes Lentes. Présentation comparative de k , $X_{e,j}$, U_1 . Gains statiques fixes $\alpha = 100, \beta = 10, \nu$ variable. $f_{d_{ext}} = 0.25 \text{ Hz}$

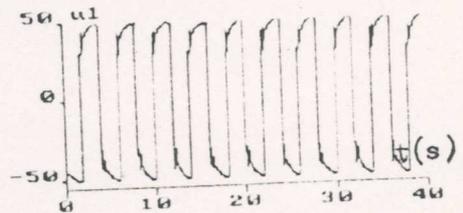
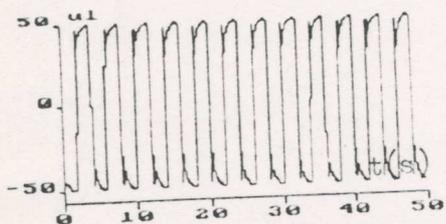
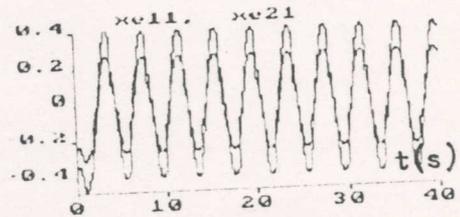
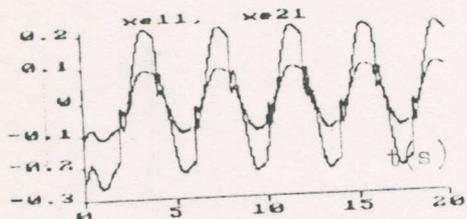
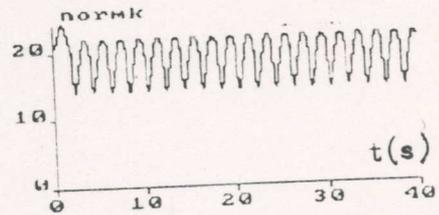
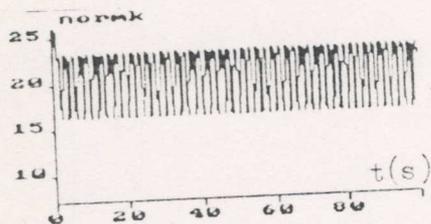
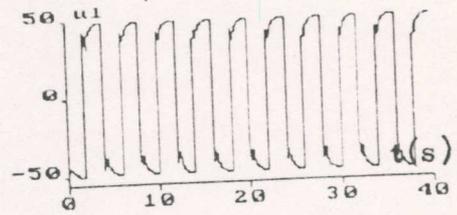
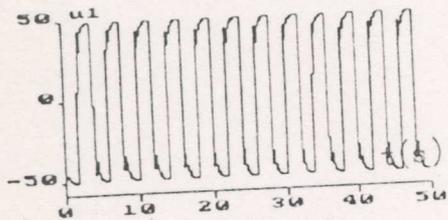
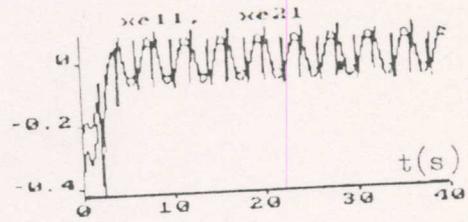
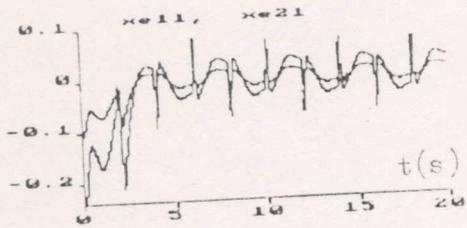
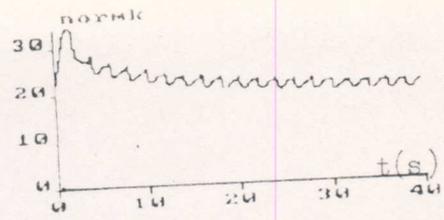
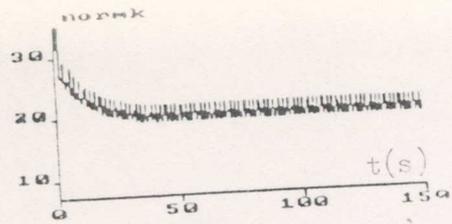
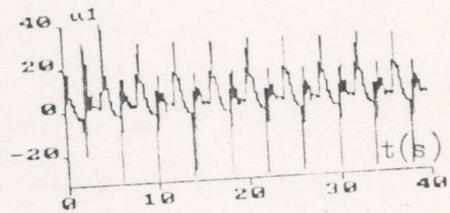
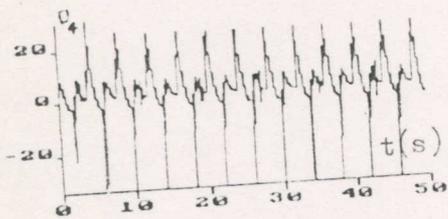
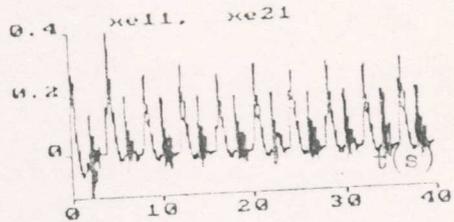
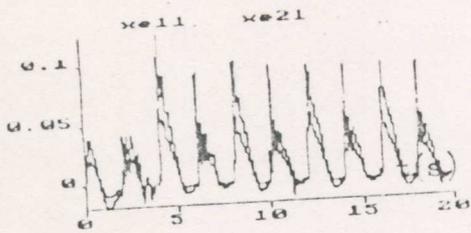
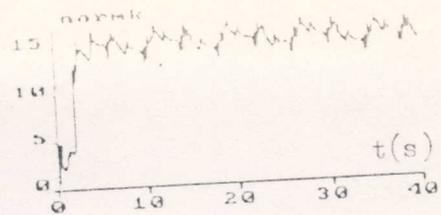
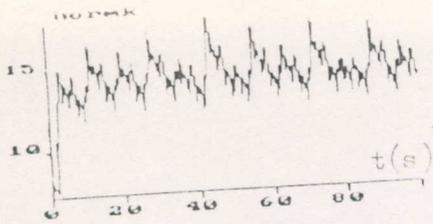


PLANCHE 13 : Perturbations externes rapides . Présentation comparative de $\|K\|$, X_e , U_1 .

Gains statiques fixes . σ variable
 $\alpha = 100$, $\beta = 10$, $P_{ext} = 100$ rd/s, $f_{P_{ext}} = 0.25$ Hz

Cas M.R.A.C



ANALYSE DE LA STABILITE

ANALYSE DE LA STABILITE

Cas MCS

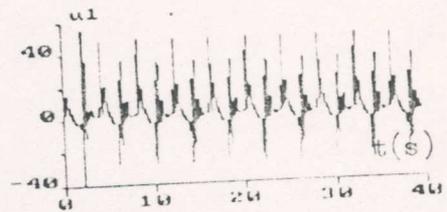
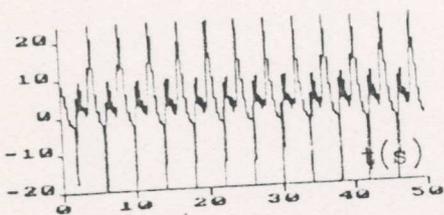
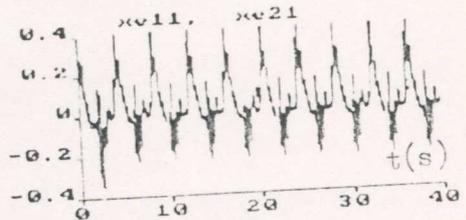
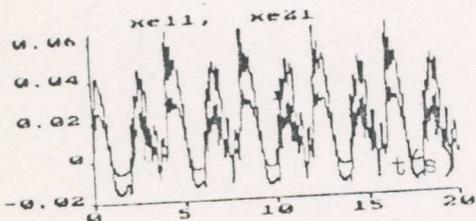
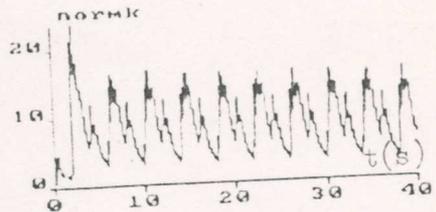
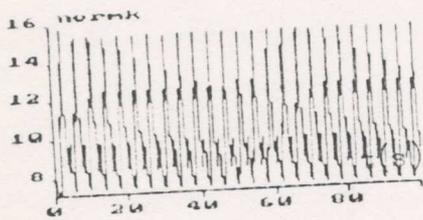
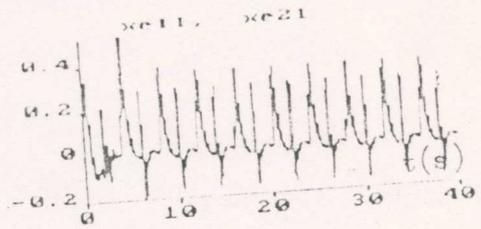
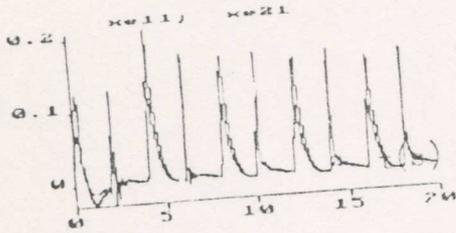
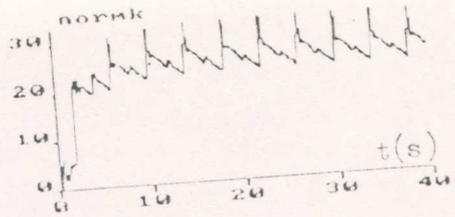
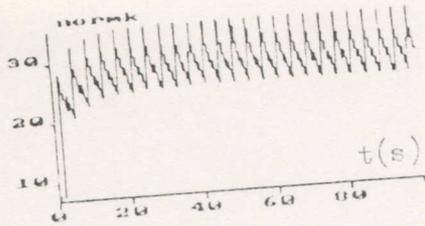
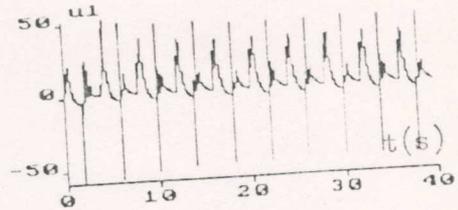


PLANCHE 14 : Perturbations paramétriques des moments de frictions avec variations lentes . Présentation comparative des normes . Gains statiques fixes . σ variable .
 $\alpha = 100$, $\beta = 10$, $P_{\delta C} = 100$ rd/s , $f_{\delta C} = 0.25$ Hz

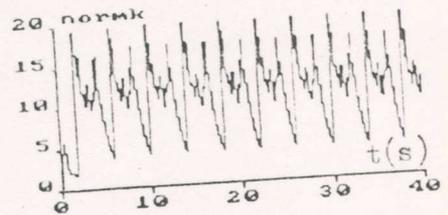
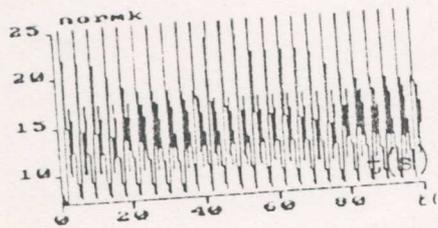
CAS M.R.A.C



SIGNALS MEASURED IN THE LOOP



CAS M.C.S



SIGNALS MEASURED IN THE LOOP

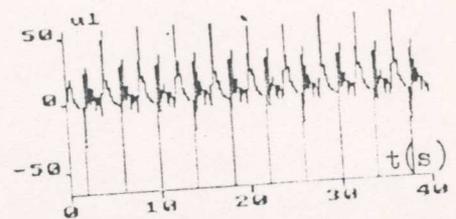
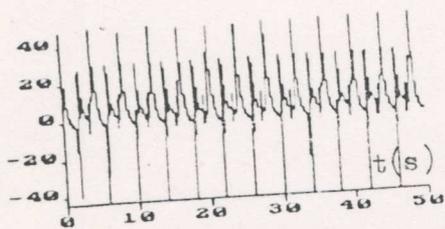
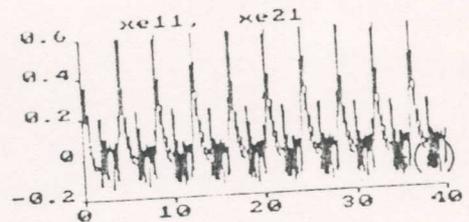
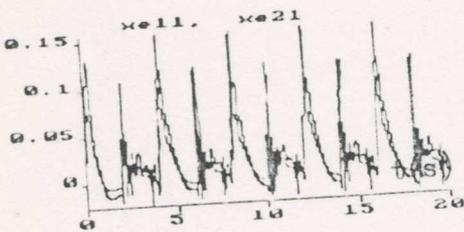


PLANCHE 15 : Perturbations paramétriques des moments de frictions avec variations rapides . Présentation comparative des normes . Gains statiques fixes . σ variable .
 $\alpha = 100$, $\beta = 10$, $P_{\delta C} = 100$ rd/s , $f_{\delta C} = 0.25$ Hz

B R A S M A N I P U L A T E U R D A M S L E C A S D E L A M O D I F I C A T I O N e

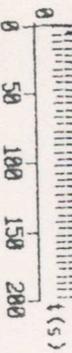
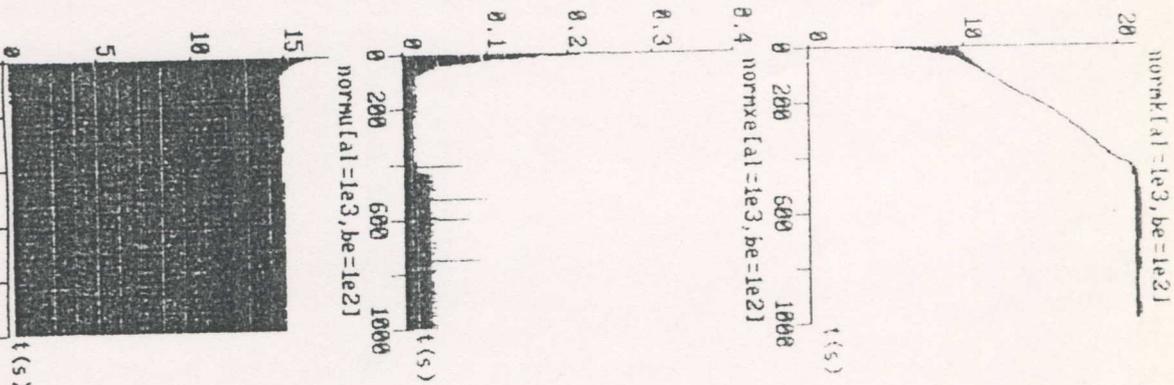
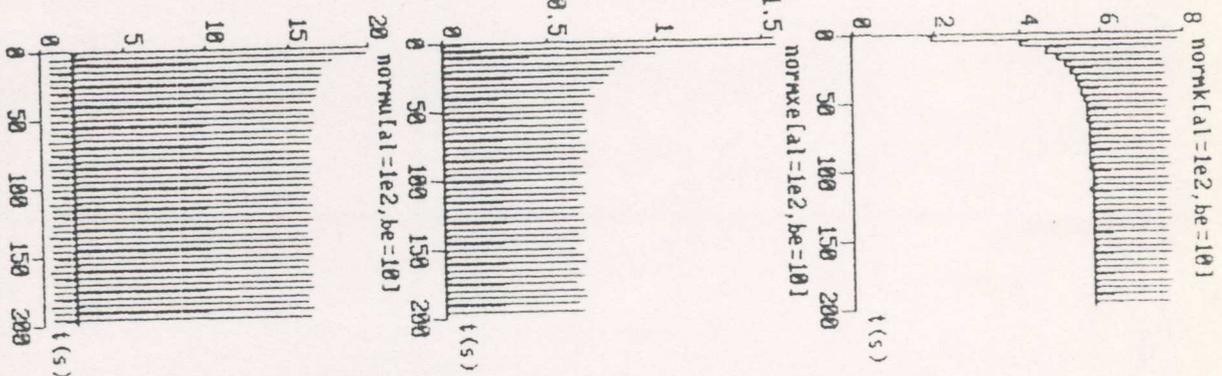
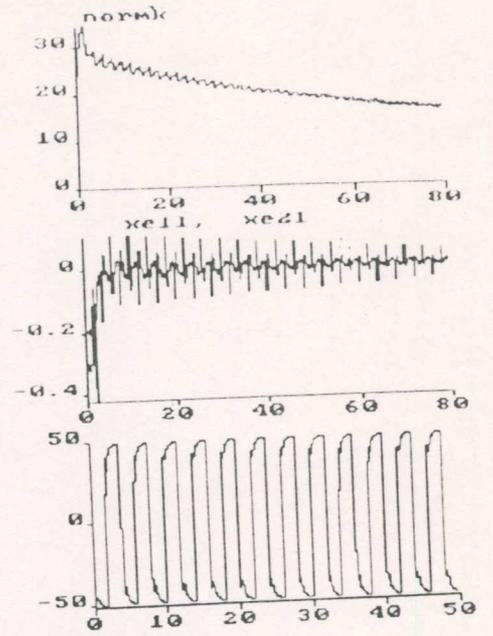
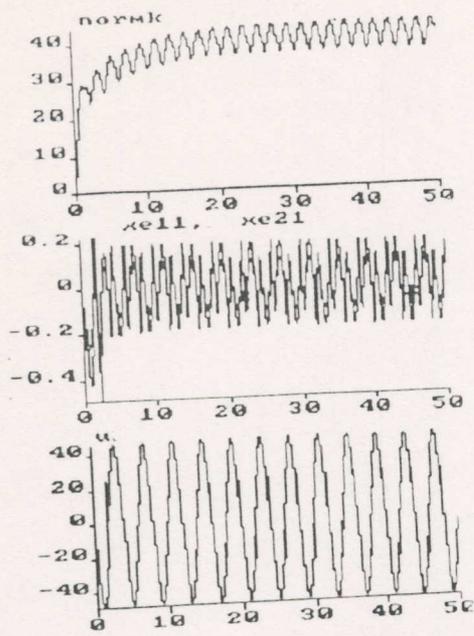


PLANCHE 16 : Evolution des normes du gain, de l'erreur et de la commande dynamique fonction des gains statiques α et β dans le cas de la modification e. Système non perturbé.

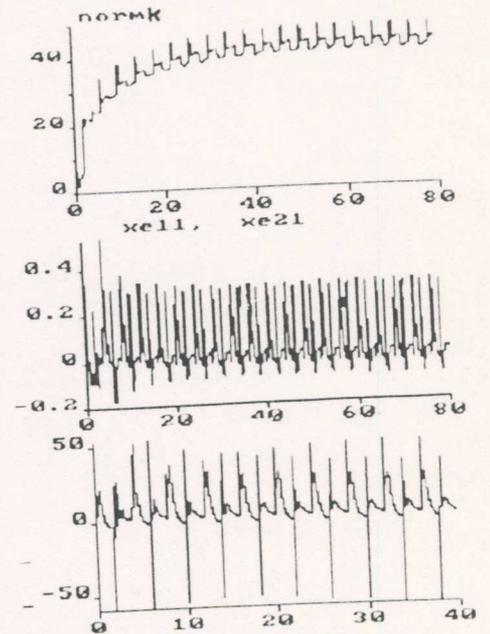
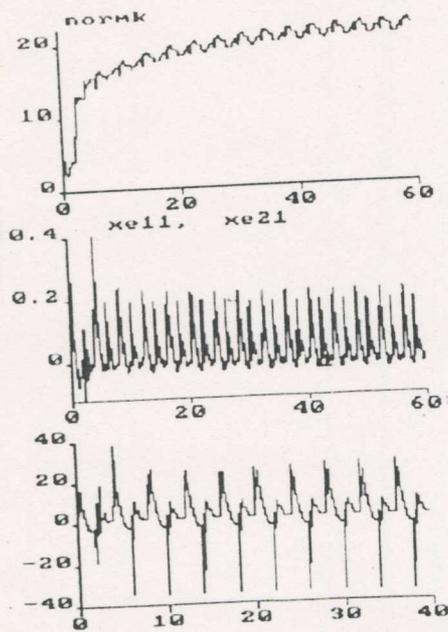
MCS avec modification e



perturbation extérieure

lente

rapide



variation des frictions

PLANCHE 17 : Perturbations d'ordre extérieures et paramétrique
Présentation comparative dans les cas lents et rapides
Gains statiques α et β fixes.

$$P_{ext} = 100 \text{rd/s}, f_{P_{ext}} = 0.25 \text{Hz} \quad P_{\delta C} = 100 \text{rd/s}, f_{\delta C} = 0.25 \text{Hz}$$

VII : ESTIMATION ANALYTIQUE D'UN TEMPS DE REPONSE

VII.1 : RECHERCHE ANALYTIQUE D'UN TEMPS DE REPONSE

7.1 : Systemes S.I.S.O

La méthode classique d'estimation pour un système physique d'un temps de réaction, s'appuie sur la possibilité d'écriture d'une relation entre la dérivé de Lyapunov avec sa propre fonction.

S'inspirant de fondements énergétique, la fonction de Lyapunov décrit un bilan << mécanique >> total ou son équivalent, à mettre en jeux dans la fourniture d'un travail.

La dérivé, interprète cinématique, renseignera sur la rapidité de conversion de ladite énergie en " mouvement " tout en induisant une dimension temporelle à son équation horaire.

7.1.1 : Cas de la modification σ

A - Première méthode

Il ressort de l'équation différentielle (6-46) que :

$$\frac{dV}{-\eta V + \gamma V^{(1/2)} + \lambda} \leq dt \quad (7-1)$$

Soit alors la transformation $x = V^{(1/2)}$,
proposant pour l'équation
l'écriture suivant :

$$\frac{2x dx}{-\eta x^2 + \gamma x + \lambda} \leq dt \quad (7-2)$$

$$\int \frac{2x dx}{-\eta x^2 + \gamma x + \lambda} \leq \int dt \quad (7-3)$$

La solution générale de (7-3) est donnée en annexe (5)

En vertu de l'inégalité (7-3) , il vient que :

$$-\frac{1}{2\eta} \ln(-\eta x^2 + \gamma x + \lambda) + \frac{\gamma}{2\eta\sqrt{\gamma^2 + 4\eta\lambda}} \ln \frac{2\eta x + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\eta\lambda}}{2\eta x + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\eta\lambda}} \leq t \quad (7-4)$$

La solution en " x " , fortement non linéaire n'ayant pas de formulation explicite précise à pu être approchée par :

$$-\frac{1}{2\eta} \left[1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 4\eta\lambda}} \right] \ln(-\eta x^2 + \gamma x + \lambda) \leq t \quad (7-5)$$

impliquant que :

$$-\eta x^2 + \gamma x + \lambda \leq C e^{-(t/\tau)} \quad (7-6)$$

et donc que

$$\dot{V} \leq C e^{-(t/\tau)} \quad (7-8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0 \quad (7-9)$$

de plus le temps de réponse vérifie :

$$\tau_1 \approx \frac{1}{2\eta} \left[1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 4\eta\lambda}} \right] \quad (7-10)$$

7.1.1.1 : ABSENCE DE PERTURBATIONS PARAMETRIQUES

- En l'absence de perturbation (ou de non linéarité) , donc en faisant $\gamma = 0$, le temps de réaction du système est minimum et vaut :

$$\tau_1^{\min} \approx \frac{1}{2\eta} \quad (7-11)$$

- Dans le cas $\gamma \neq 0$ et $\|\gamma\| < M$ (M : majorant), il devient possible d'augmenter : soit $\sigma_0 \left[= \frac{4\alpha}{\beta} \right]$ donc α pour minimiser τ soit augmenter σ .

7.1.1.2 : PRESENCE DE PERTURBATIONS PARAMETRIQUES

Le cas de perturbations paramétriques $\theta^* = \theta^* + \Delta\theta^*$ introduit des extrémums (diminutions ou augmentations) temporels évoluant selon le sens de variation du signe de $\Delta\theta^*$. Aussi,

$$\tau_1' \approx \frac{1}{2\eta} \left[1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 4\eta\lambda'}} \right] \quad (7-12)$$

avec
$$\lambda' = \frac{\sigma_0}{\sigma - \sigma_0} \frac{(\theta^* + \Delta\theta^*)^T (\theta^* + \Delta\theta^*)}{4\beta b_{s(1,1)}} \quad (7-13)$$

B - Deuxième méthode

Etant donné la loi d'adaptation :

$$\dot{K}^T = \alpha \omega^T + \beta \dot{\omega}^T - \sigma K^T$$

Il est évident que :

$$K = \beta \omega + \int \left[\alpha \omega - \sigma K \right] dt \quad (7-14)$$

La norme, membre à membre donne :

$$\|K\| = \left\| \beta \omega + \int \left[\alpha \omega - \sigma K \right] dt \right\| \quad (7-15)$$

Or , en vertu de l'inégalité de Shwartz

$$\left\| \beta \omega + \int [\alpha \omega - \sigma K] dt \right\| \leq \left\| \beta \omega \right\| + \left\| \int [\alpha \omega - \sigma K] dt \right\| \quad (7-16)$$

En conséquence ,

$$\| K \| \leq \| \beta \omega \| + \int \left\| [\alpha \omega - \sigma K] dt \right\| \quad (7-17)$$

$$\int \left\| [\alpha \omega - \sigma K] dt \right\| \leq \int \left\| [\alpha \omega - \sigma K] dt \right\| \leq \int [\| \alpha \omega \| + \| \sigma K \|] dt \quad (7-18)$$

α , β , σ étant positifs , entraînent que :

$$\| K \| \leq \beta \| \omega \| + \int [\alpha \| \omega \| + \sigma \| K \|] dt \quad (7-19)$$

Cependant ,

$$\| K \| \leq \left\{ \beta \| \omega \| + \left[\frac{2 \alpha V}{b_{s(1,1)}} \right]^{1/2} \right\} \quad (7-20)$$

Injecté dans (7-19) , il vient que :

$$\| K \| \leq \beta \| \omega \| + \int \left[(\alpha + \beta \sigma) \| \omega \| + \sigma \sqrt{\frac{2 \alpha V}{b_{s(1,1)}}} \right] dt \quad (7-21)$$

L'identification entre les équations (7-20) et (7-21) , justifie que :

$$\int \left[(\alpha + \beta \sigma) \| \omega \| + \sigma \sqrt{\frac{2 \alpha V}{b_{s(1,1)}}} \right] dt = \sqrt{\frac{2 \alpha V}{b_{s(1,1)}}}$$

Faisant agir l'opérateur de dérivation dans les

deux membres , il est établit que :

$$\left(\alpha + \beta \sigma \right) \| \omega \| + \sigma \sqrt{\frac{2 \alpha V}{b_{s(1,1)}}} = \left[\sqrt{\frac{2 \alpha}{b_{s(1,1)}}} \frac{V}{\sqrt{V}} \right] \quad (7-22)$$

En définitive ,

$$\left[\frac{2 \alpha}{b_{s(1,1)}} V \right]^{\frac{1}{2}} \leq (\alpha + \beta \sigma) \left[\frac{2 \lambda(CP)_{\max}^2}{\lambda(CP)_{\min}} V \right]^{\frac{1}{2}} \left[aV + b[V]^{\frac{1}{2}} + c \right]^{\frac{1}{2}} + \sigma \left[\frac{2 \alpha}{b_{s(1,1)}} V \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7-23)$$

avec $a = \frac{2}{\lambda(CP)_{\min}}$; $b = \left[\frac{8}{\lambda(CP)_{\min}} \right]^{\frac{1}{2}}$; $c = 2 \| r \|^2$ (7-24)

L'équation (7-23) , irrationnelle se résoudre selon la méthode proposée en annexe (1) . En effet , moyennant transformation , il vient :

$$\frac{\left[\frac{2 \alpha}{b_{s(1,1)}} \right]^{\frac{1}{2}} dV}{\dots} \leq dt$$

$$V \left[(\alpha + \beta \sigma) \left[\frac{2 \lambda(CP)_{\max}^2}{\lambda(CP)_{\min}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[aV + b[V]^{\frac{1}{2}} + c \right]^{\frac{1}{2}} + \sigma \left[\frac{2 \alpha}{b_{s(1,1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

soit que :

$$\frac{dV}{V \left[(\alpha + \beta \sigma) \left[\frac{\lambda(CP)_{\max}^2 b_{s(1,1)}}{\lambda(CP)_{\min} a} \right]^{\frac{1}{2}} \left[aV + b[V]^{\frac{1}{2}} + c \right]^{\frac{1}{2}} + \sigma \right]} \leq dt \quad (7-25)$$

Posant :

$$a_1 = (\alpha + \beta \sigma) \left[\frac{\lambda(P)_{\max}^2 b_{(1,1)}}{\lambda(P)_{\min} \alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7-26)$$

$$b_1 = \sigma (\alpha + \beta \sigma) \left[\frac{\lambda(P)_{\max}^2 b_{(1,1)}}{\lambda(P)_{\min} \alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7-27)$$

Soit alors à résoudre :

$$\frac{dV}{V \left[a_1 \left[aV + b \left[V \right]^{\frac{1}{2}} + c \right]^{\frac{1}{2}} + b_1 \right]} \leq dt \quad (7-28)$$

L'équation (7-28) pouvant être approximée par :

$$\frac{dV}{a_1 V \left[aV + b \left[V \right]^{\frac{1}{2}} + c \right]^{\frac{1}{2}}} \leq dt \quad (7-29)$$

Faisant la substitution : $x^2 = V$, il vient :

$$\frac{2 dx}{x \left[a x^2 + b x + c \right]^{\frac{1}{2}}} \leq a_1 dt \quad (7-30)$$

L'intégration de (7-30) donne :

$$-\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ln} \left[\frac{2\sqrt{c} \sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right] \stackrel{1}{=} a_1 dt \quad (7-31)$$

Il est déduit alors la constante de temps du système :

$$\tau_2 = \frac{1}{a_1 \sqrt{c}} \approx \frac{1}{(\alpha + \beta \sigma) \| r \|} \left[\frac{\lambda(\mathcal{P})_{\min}^2 \alpha}{2 \lambda(\mathcal{P})_{\max} b_{s_{(1,1)}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7-32)$$

Conclusion :

- Le temps de montée est inversement proportionnel à $\sqrt{\alpha}$,
- Le coefficient de pondération σ accélère au même titre que le gain statique α , la convergence du processus,
- La vitesse de convergence est inversement proportionnelle à la norme de la consigne,

NB : Dans le cadre des simulations, la solution finale choisie a été une combinaison linéaire des deux méthodes pour laquelle la constante de temps du système était considérée comme la moyenne des constantes τ_1 et τ_2 .

Ce qui a pour effet :

$$\tau = \tau_{\text{moy}} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \quad (7-33)$$

VII.2 : VERIFICATIONS PAR SIMULATIONS .

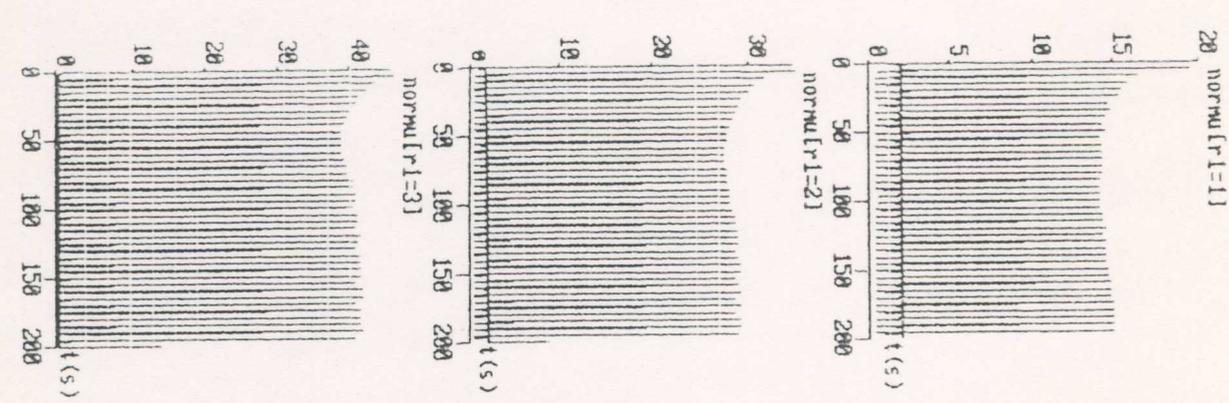
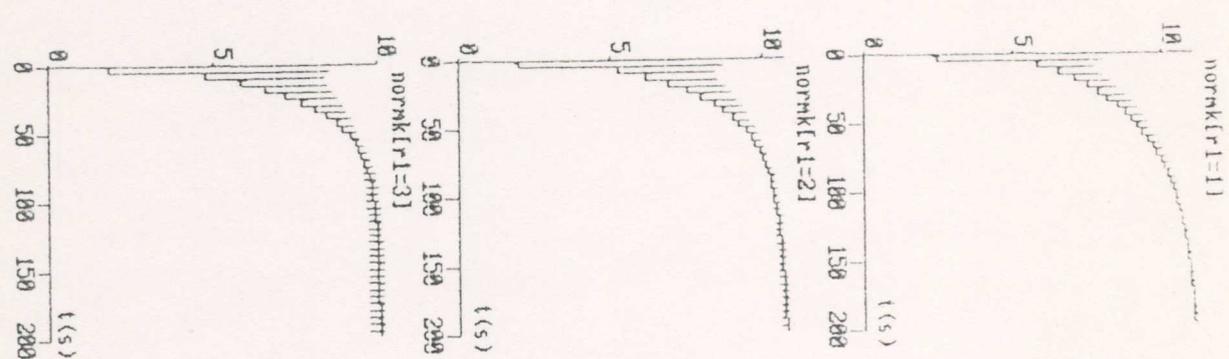
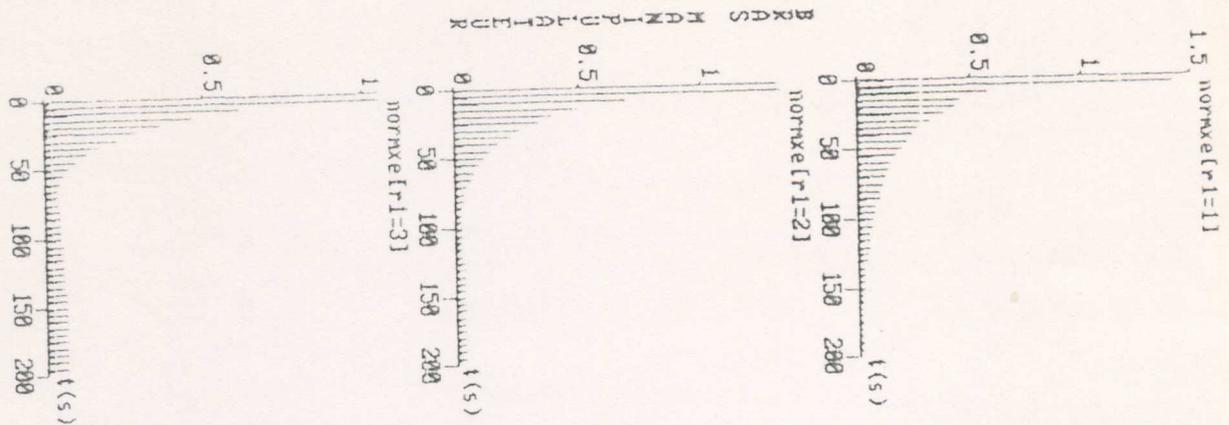


PLANCHE 19 : Evolution des normes de l'erreur , du gain et de la commandes dynamique fonction de la consigne .

RESUME DE LA PRESENTATION

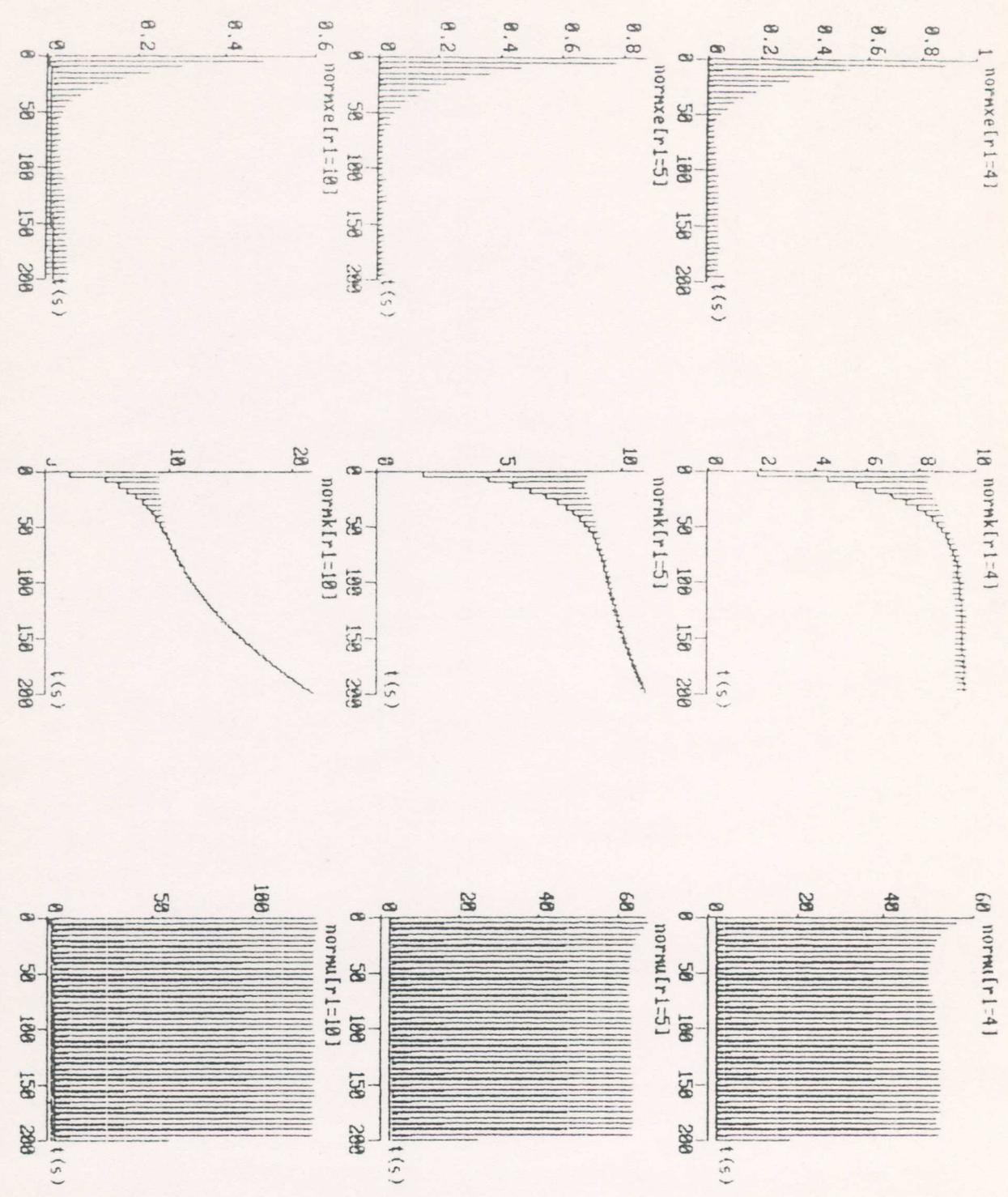


PLANCHE 20 : Evolution des normes de l'erreur , du gain et de la commande dynamique fonction de la consigne (suite) .

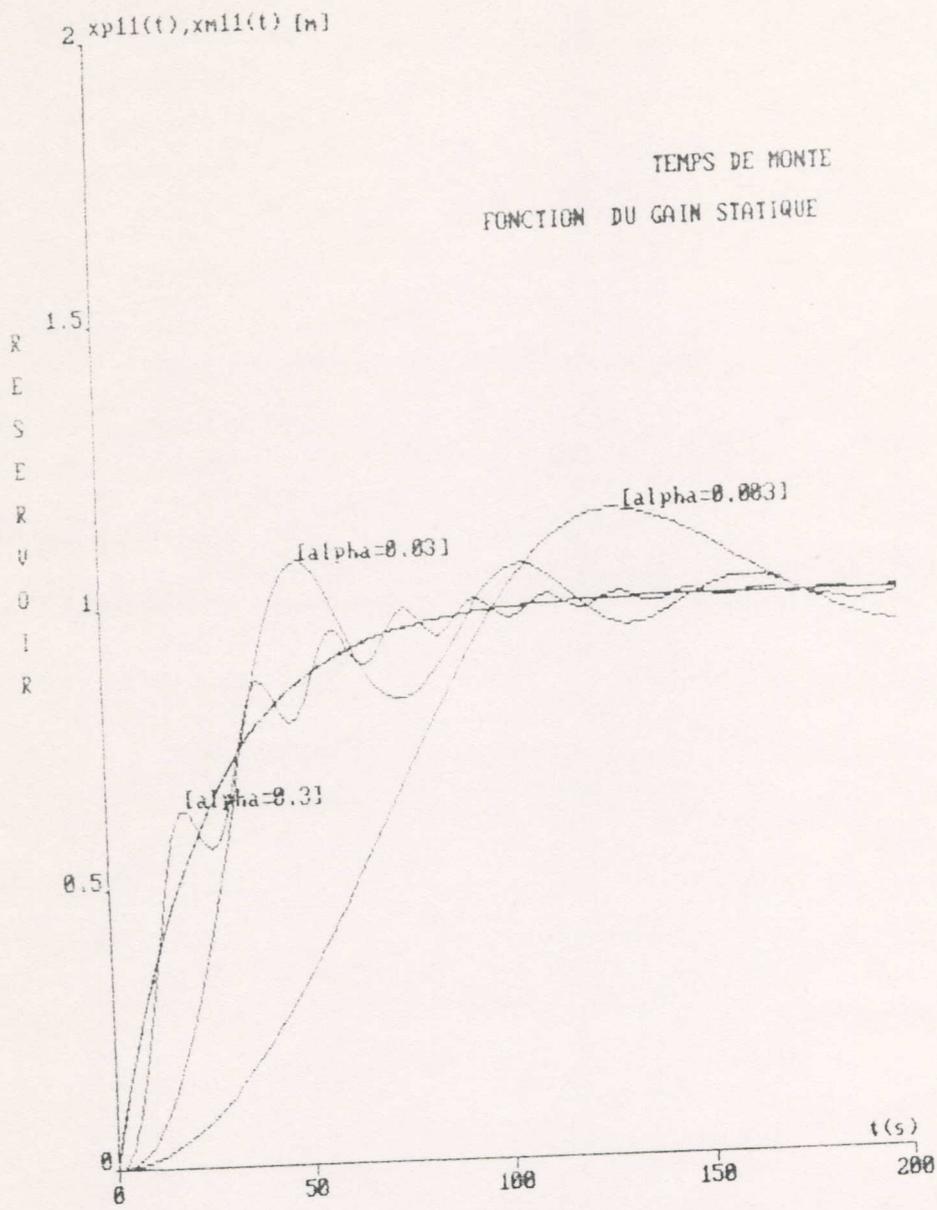
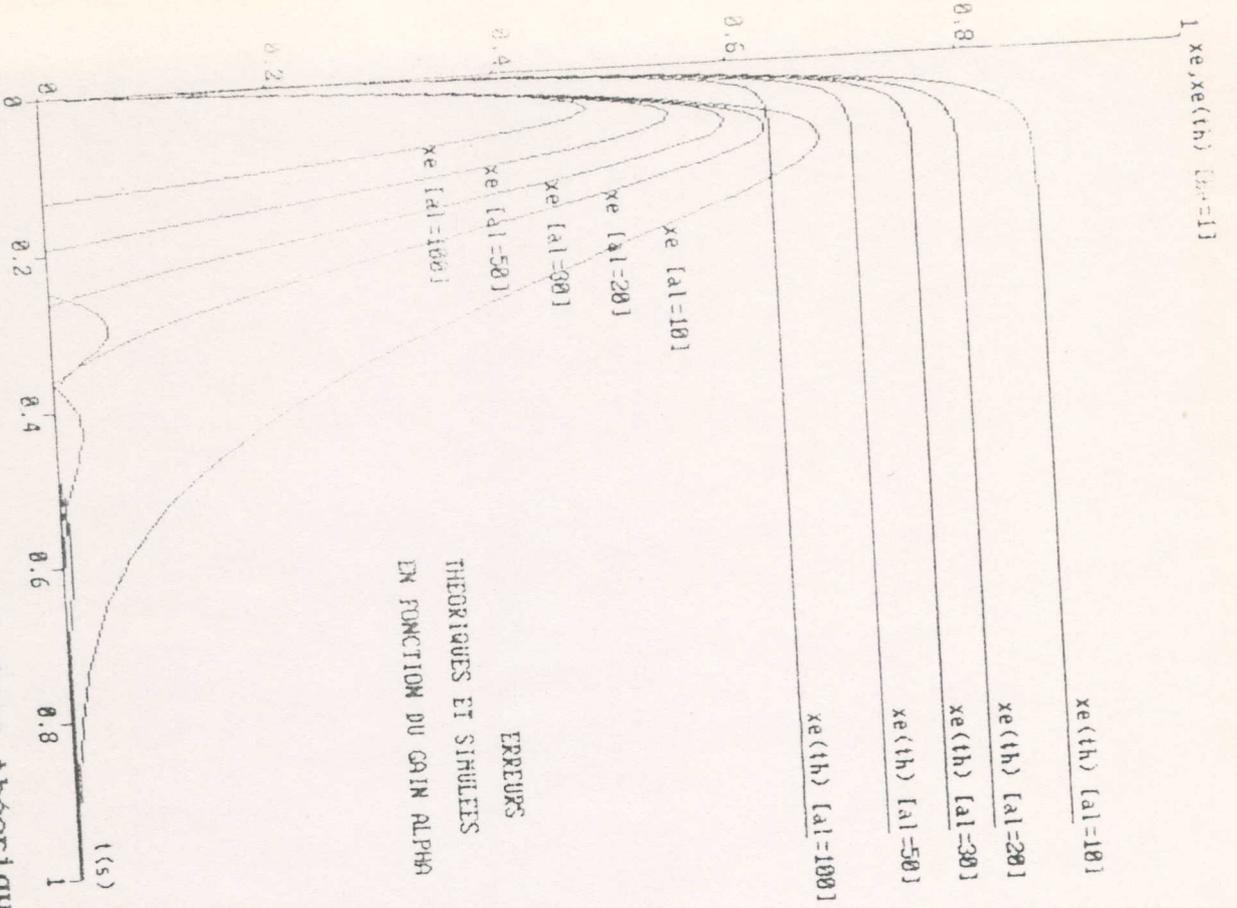
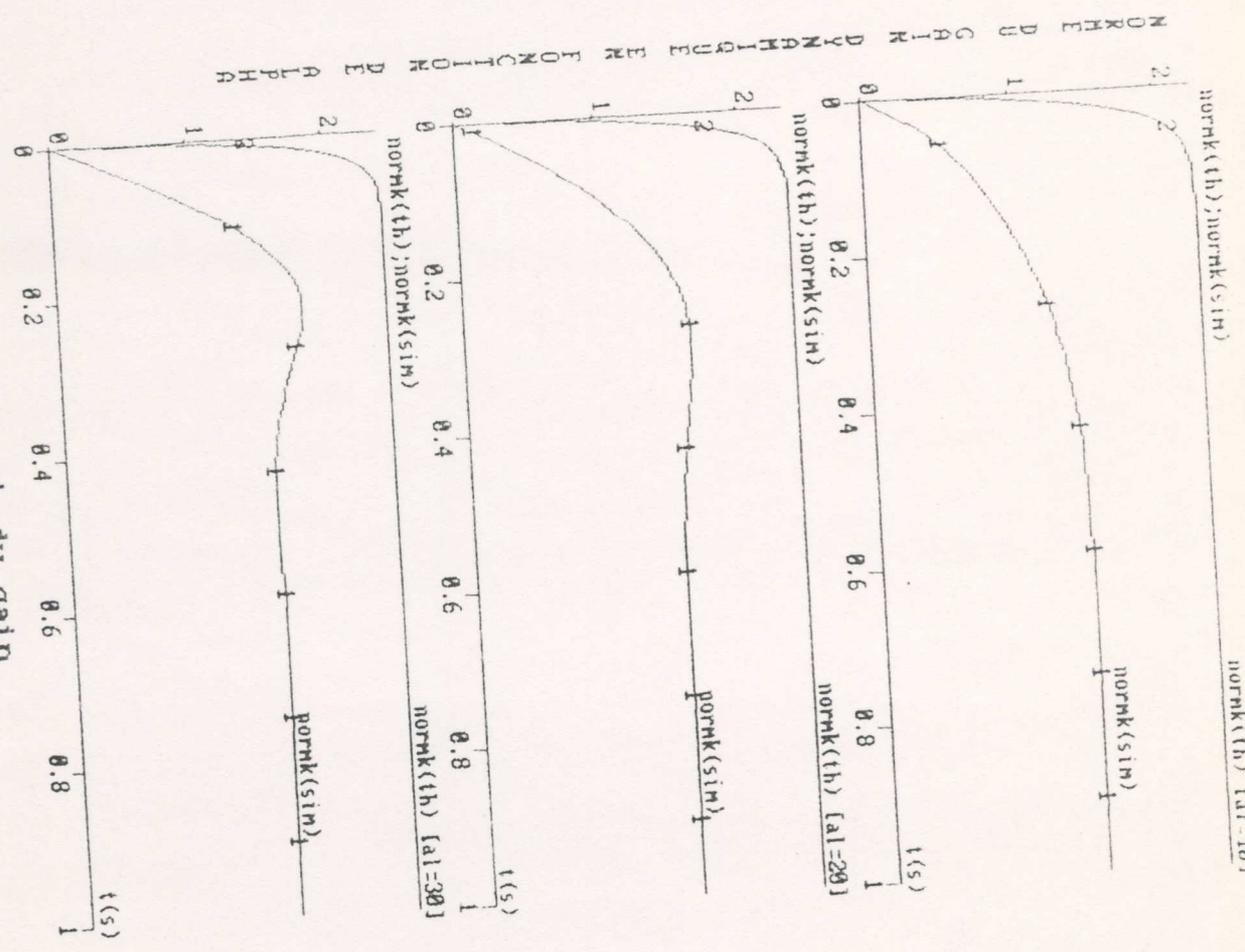


PLANCHE 21 : Evolution des états du système par rapport au modèle analytique de référence , fonction du gain statique α



THEORIQUES ET SIMULEES
EN FONCTION DU GAIN ALPHA

PLANCHE 22 : Maximas théoriques et simulés des erreurs et du gain dynamique fonction du gain statique α .



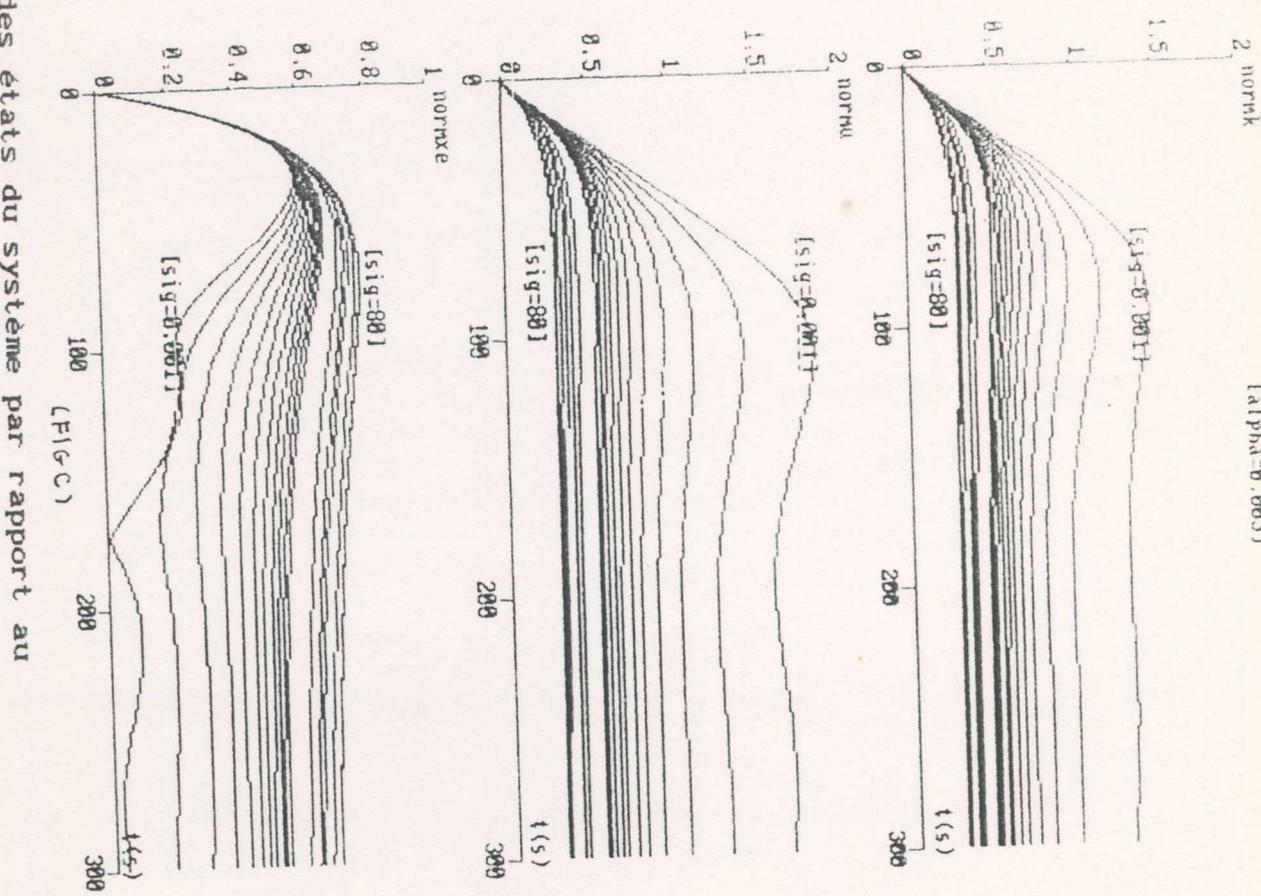
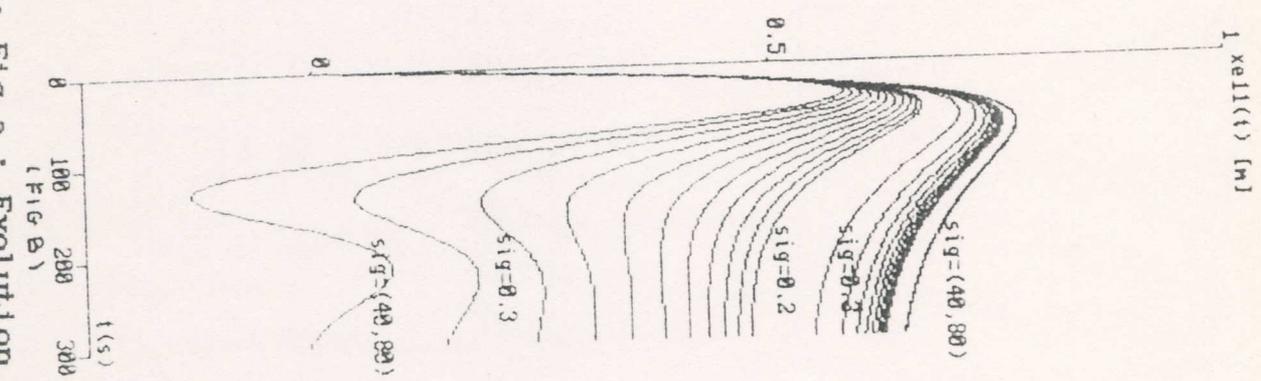
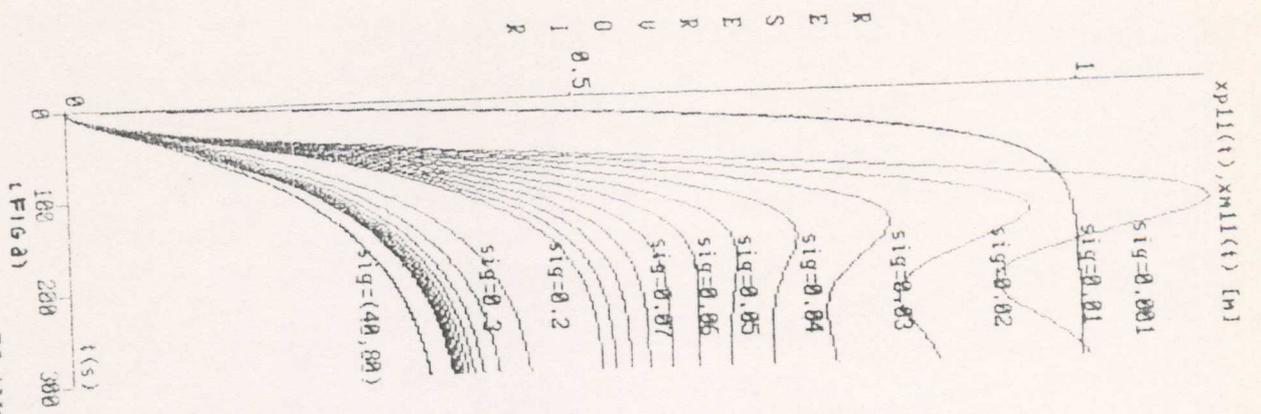


PLANCHE 23 : Fig a : Evolution des états du système par rapport au modèle analytique, fonction de σ .

Fig b : Evolution de l'erreur dynamique fonction de σ

Fig c : Evolution des normes du gain, de la commande et de l'erreur, fonction de σ .

Preuve simulée d'existence de valeur limite de $\sigma = \frac{4\alpha}{\beta}$

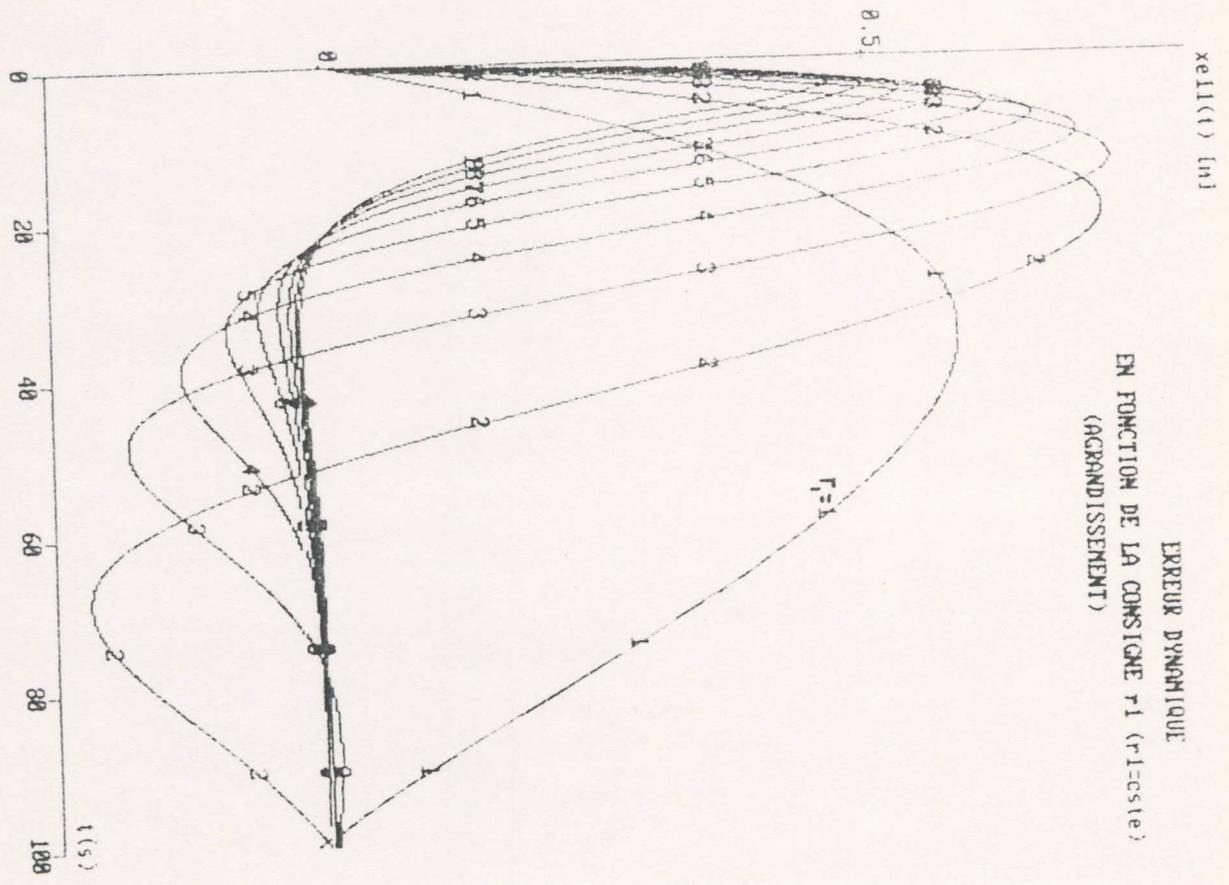
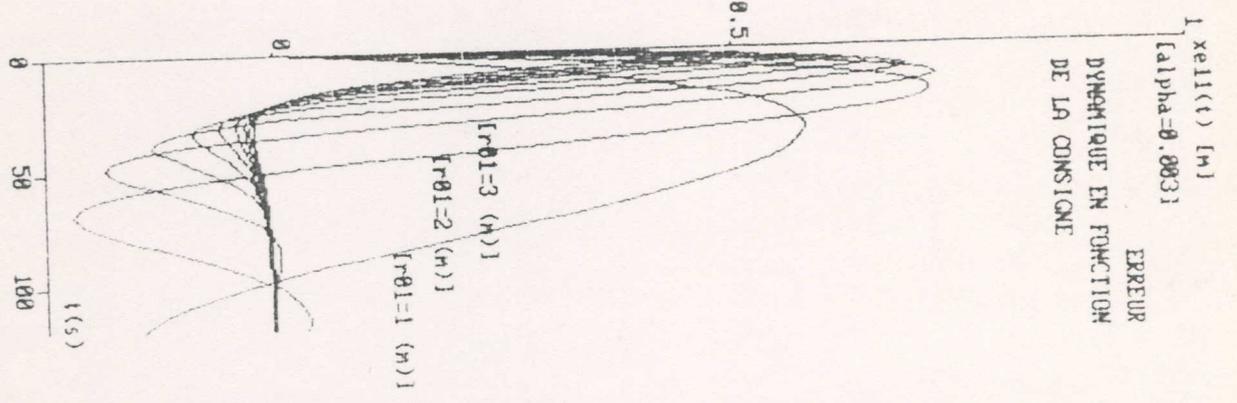
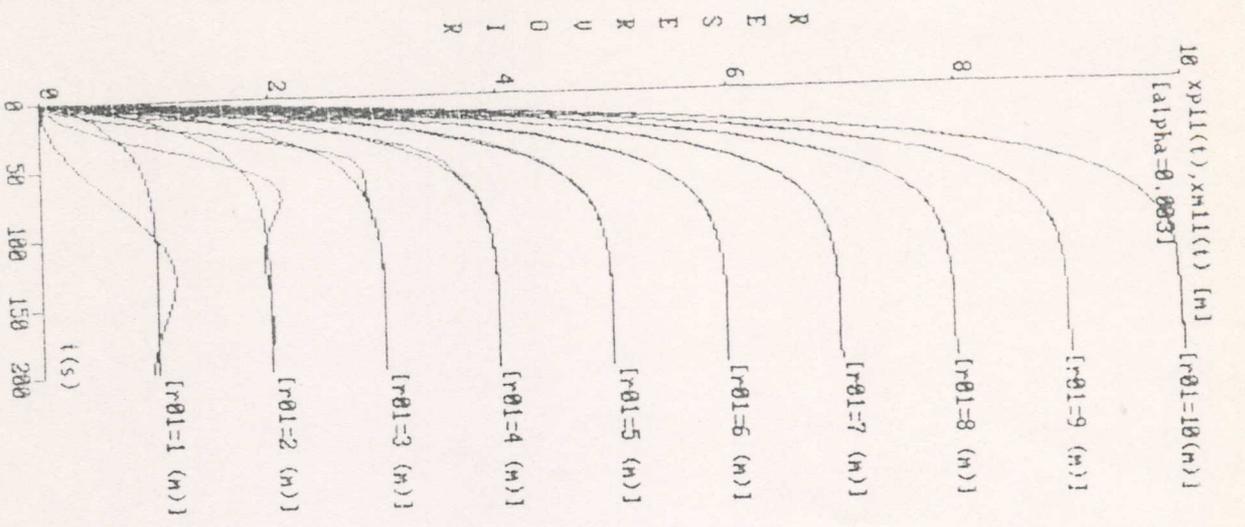


PLANCHE 24 : Evolutions respectives des états du système par rapport au modèle, de l'erreur dynamique, fonction de la consigne de référence.

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au début du parcours de thèse, il était question d'étude des systèmes à partir des résultats de simulations, sans aucun support ou approfondissement théorique, limitant le travail à un simple constat plutôt qu'une analyse.

La nécessité d'avoir entamé un horizon théorique, comportait de grands risques, surtout qu'aucune ligne de conduite pour la prédiction des résultats simulés, n'était définie par le cahier de charge.

Ces difficultés engendrèrent, force de lois, l'élaboration indispensable de relations analytiques permettant de comprendre les résultats simulés.

Le passage le plus délicat, s'articulait autour de la conception de la trame de calculs, permettant de généraliser l'étude des systèmes S.I.S.O. vers les structures M.I.M.O., qui n'étaient pas évidentes.

Le recours à la méthode des fonctions de LYAPOUNOV relevait d'une stratégie nécessaire parce que la mieux assimilée. Cependant la possibilité de sentir avec relatives justice et justesse les comportements à venir des systèmes était réelle puisque l'estimation par exemple du temps de leurs convergence devenait manifeste.

Le travail présenté dans cette thèse traitant l'étude des systèmes adaptatifs, consacrait au problème de synthèse des algorithmes de commandes pour les procédés monovariabiles la première grande partie, après un rappel des différentes techniques et approches utilisées dans l'analyse et/ou la synthèse de schémas de commande usuels. L'algorithme découlant directement de la structure de la loi de commande utilisée quand les paramètres du procédé sont inconnus et que ses états accessibles.

Il existe en réalité deux types de schémas adaptatifs, le type direct quand les paramètres du régulateur sont directement estimés par un algorithme d'estimation (cas de la présente thèse) et le type indirect quand les paramètres du régulateur sont directement calculés à partir des paramètres estimés du procédé. La voie reste donc ouverte pour une étude d'extrêmes et de convergence.

Il serait intéressant de limiter l'énergie sur les entrées par pondération des commandes à partir de critères spécifiques propres aux problèmes de recherche opérationnelle.

Les problèmes liés à la stabilité sont assez compliqués dans les schémas de commandes adaptatives .

En effet tous les schémas sans exception , qu'ils soient de type direct ou indirect , font ressortir une condition de stabilisabilité du système étudié .

Cette stabilisabilité étant généralement obtenue par imposition d'une convergence asymptotique des paramètres estimés s'il est opéré une méthode d'identification vers les paramètres du procédé .

Il serait alors souhaitable d'avoir des expressions analytiques pour implémentation ceci pour les différentes grandeurs intervenant dans les algorithmes d'adaptation .

L'évolution de la commande adaptative multivariable induite par la généralisation simple et directe du cas monovariable pour les structures de types canoniques doit être un support d'hypothèse pour n'importe quelle type de structure.

La conclusion la plus évidente , faisant ressortir les démonstrations de stabilité globales , se résume dans la comparaison entre le tracé des résultats théoriques prédits avec ceux obtenus par simulation (Temps de réponse en fonction de la consigne, Temps de réponse en fonction du gain statique α et enfin évolution de l'erreur en fonction de la modification σ) .

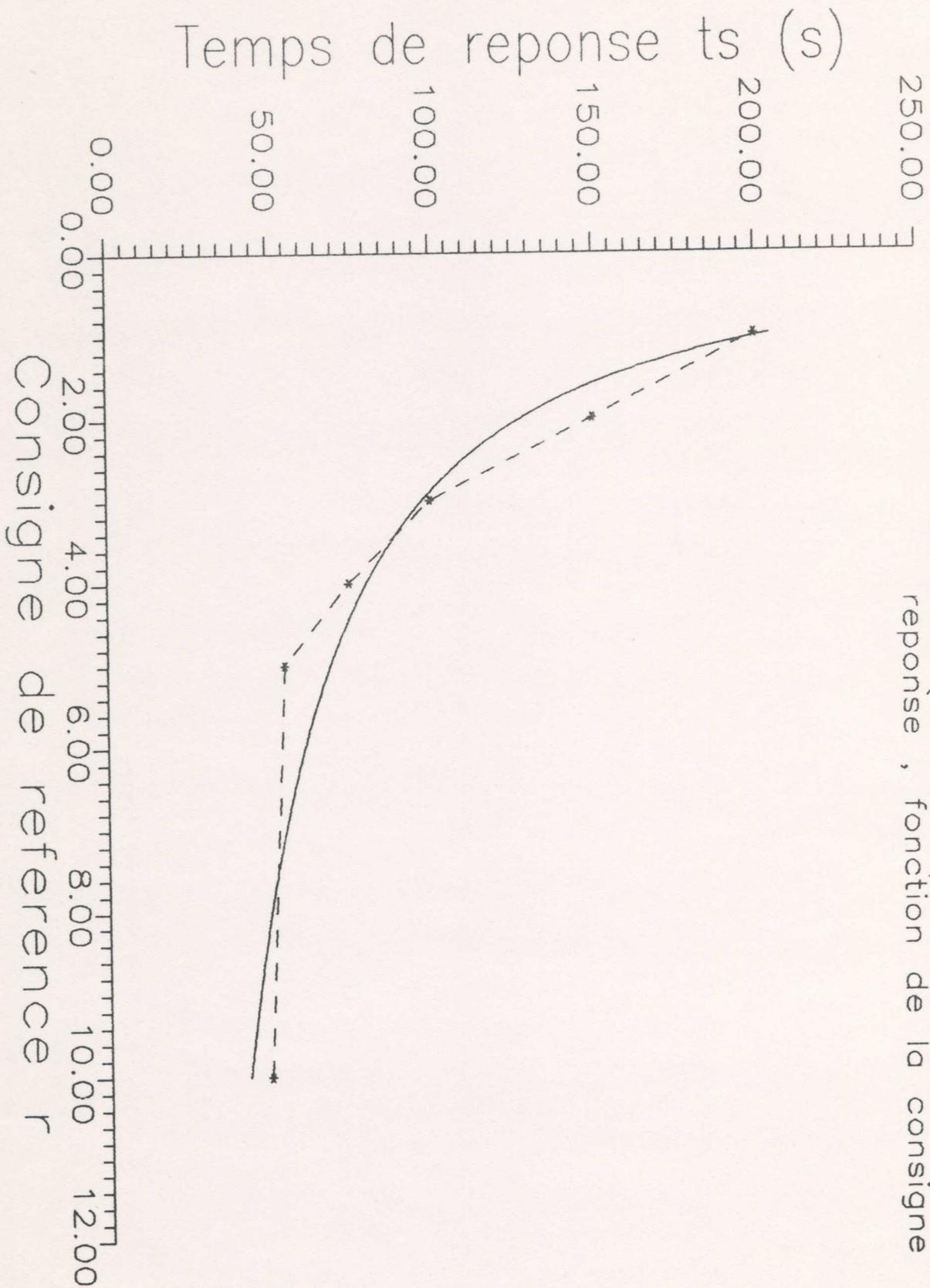
Beaucoup de travail reste à faire pour la commande adaptative multivariable , à savoir, une amélioration de la stratégie d'étude (Stratégie de POPOV , étude par les fonctions de transferts , etc...) pour comprendre de manière plus fine , le comportement des systèmes .

Ainsi sont laissées ouvertes les questions de stabilités , de temps de convergence , d'extrêmes des différentes grandeurs intervenant dans les algorithmes de commandes pour permettre si possible , à l'aide de l'outil mathématique la naissance d'expressions analytiques (continues ou discrètes) convenables dans les cas déterministes ou non .

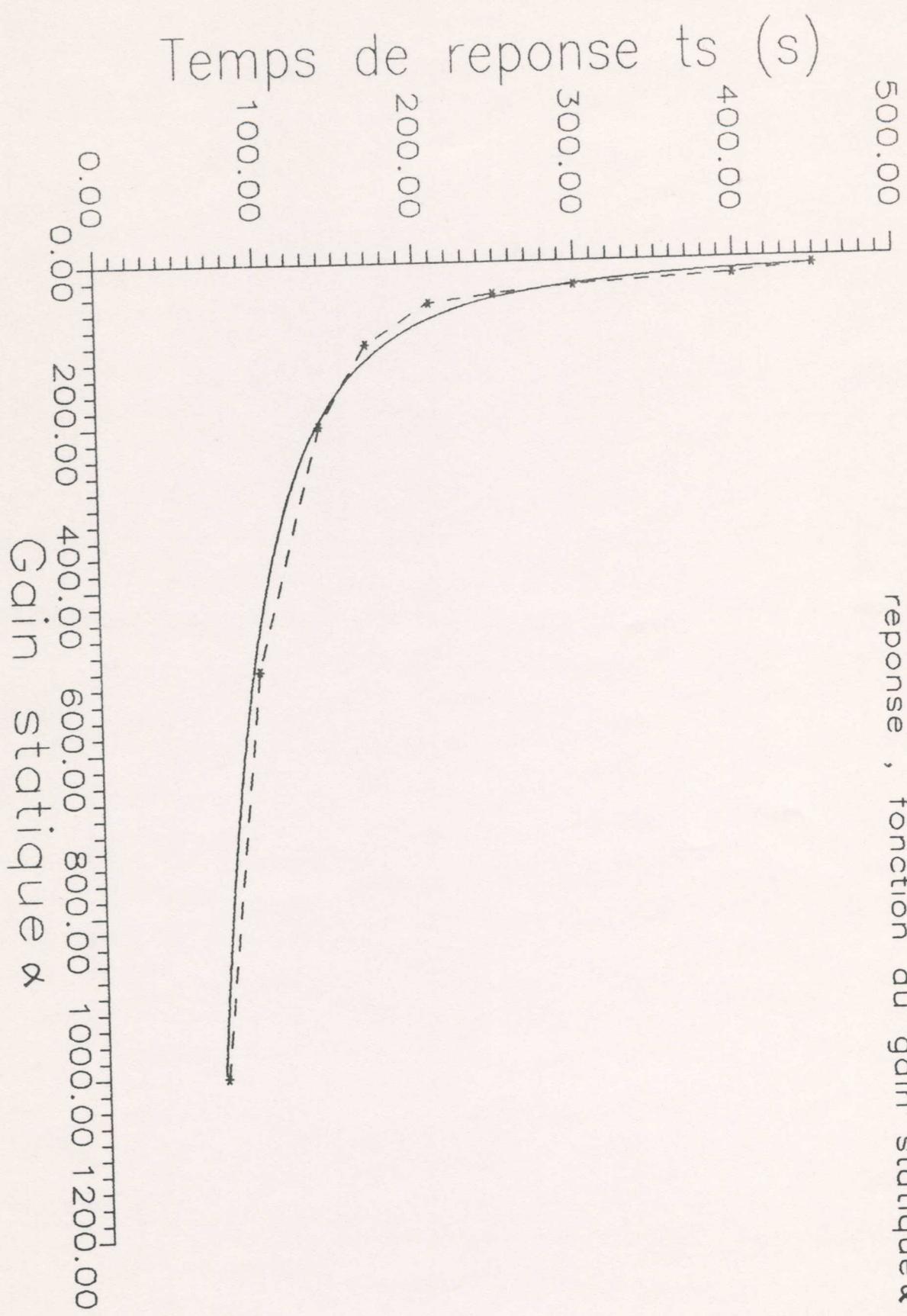
L'étude par les méthodes d'identifications , avec horizon d'optimalité, verrait une application intéressante des systèmes à paramètres inconnus variants ou non dans le temps avec accessibilité partielle ou totale des états .

Aussi la remise en question des résultats doit être nécessaire .

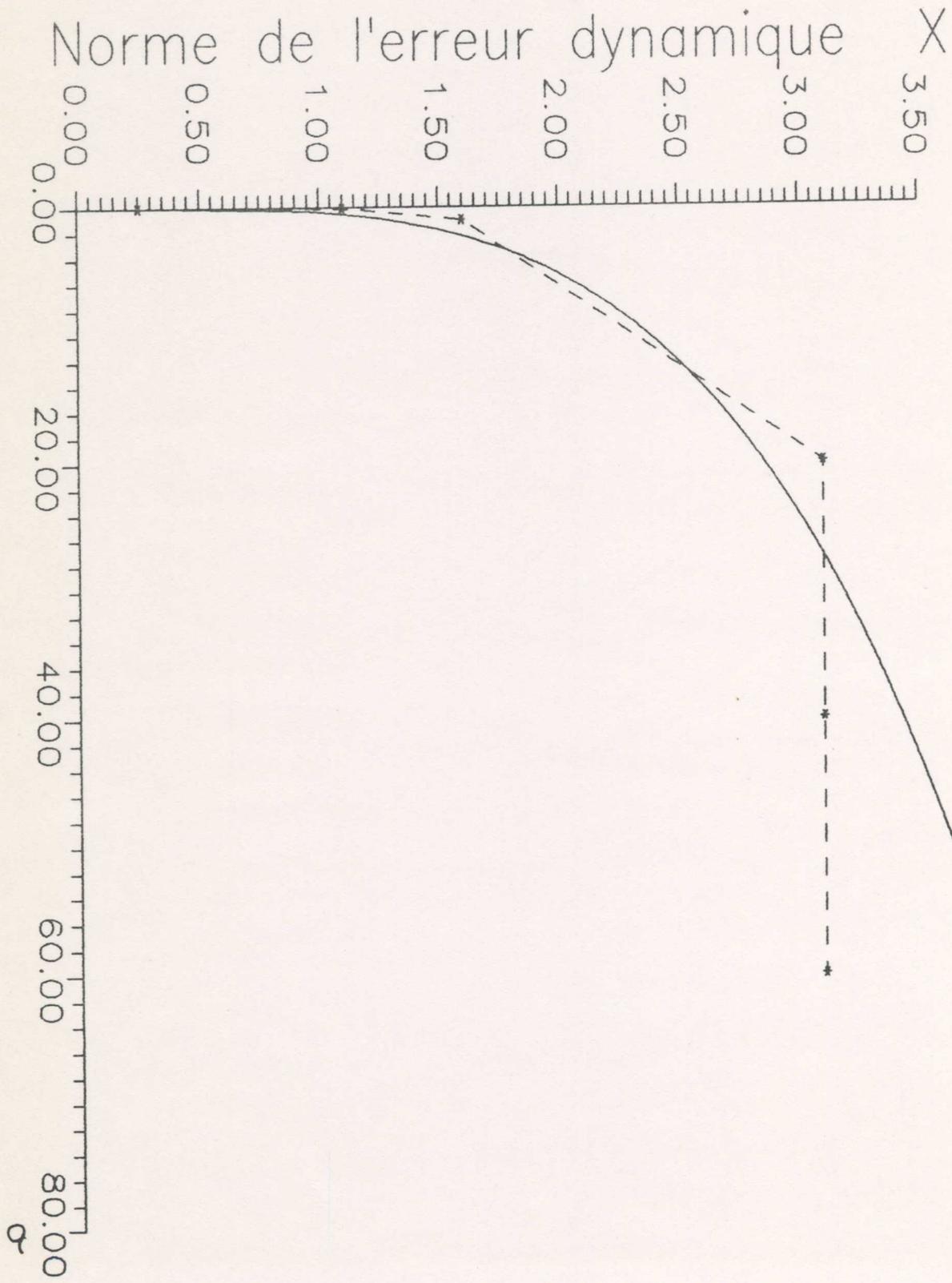
Comparaison theorique (courbe continue) et
simulee (courbe pointillee) du temps de
reponse , fonction de la consigne



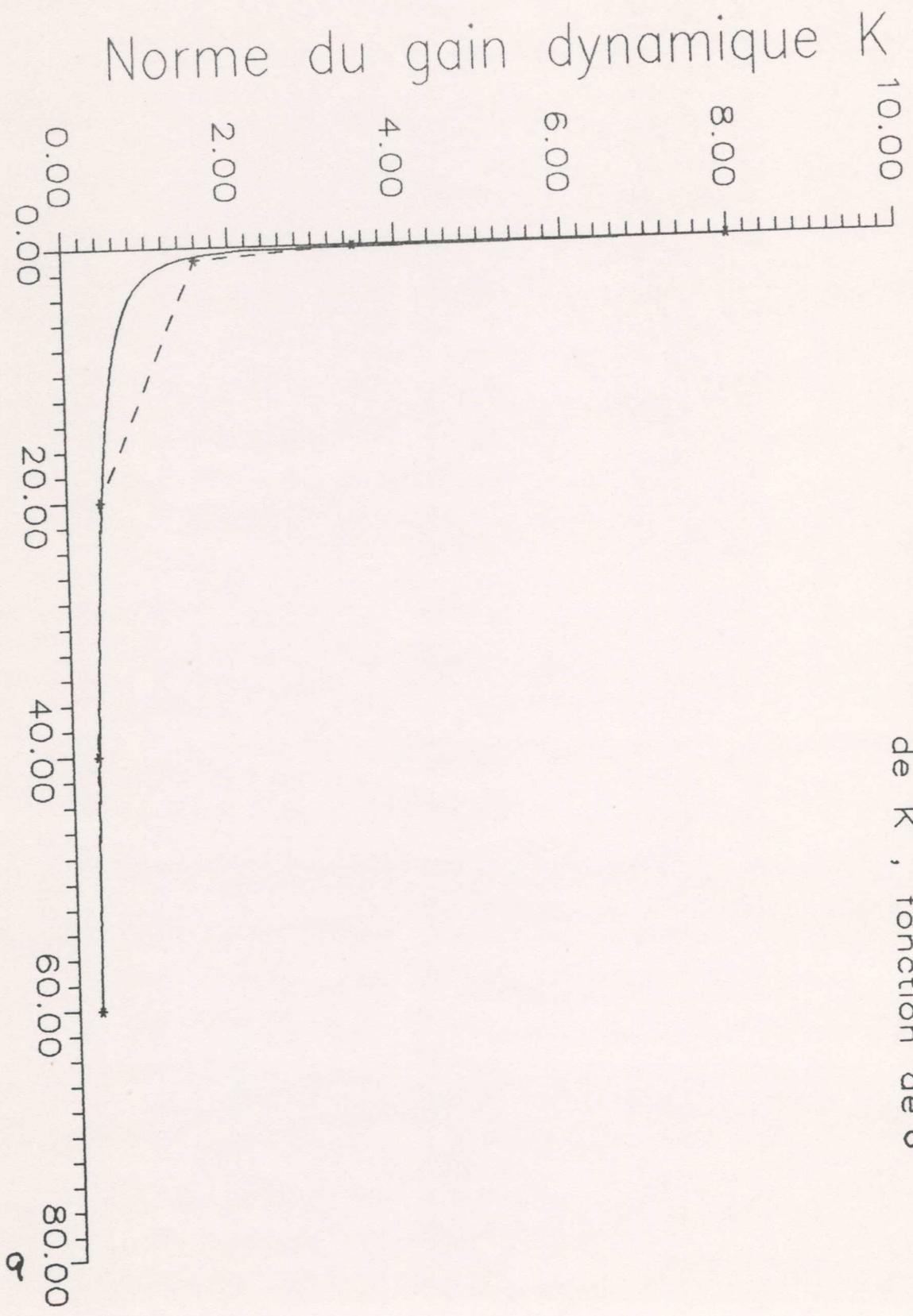
Comparison theorique (courbe continue) et
 simulee (courbe pointillee) du temps de
 reponse , fonction du gain statique α



Comparaison theorique (courbe continue) et
 simulee (courbe pointillee) de norme
 de X , fonction de σ



Comparaison theorique (courbe continue) et
simulee (courbe pointillee) de norme
de K , fonction de σ



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] K. J. ASTROM , H. ELMQVIST , T. SCHONTHAL
 " SIMNON : User's Guide for MS-DOS Computers "
 Departement of Automatic Control , Lund Institute of
 Technology .
- [2] K. J. ASTROM , U. BORISSON , L. LJUNG , B. WITTENMARK (1977)
 " Theory and applications of self tuning regulators "
 Automatica , vol. 13 , 457 - 476
- [3] K. J. ASTROM , B. WITTENMARK (1973)
 " On self tuning regulators "
 Automatica , vol. 9 , 195 - 199
- [4] K. J. ASTROM , B. WITTENMARK (1980)
 " Self tuning controllers based on pole zero placement "
 Proceeding IEE , vol. 127 , 120 - 130
- [5] K. J. ASTROM , B. WITTENMARK (1989)
 " Adaptive Control " .
 Addison - Wesley . Publishing company .
- [6] S. BAI , F. M. A. SALAM (1988)
 " Disturbance generated bifurcation in a prototype adaptive
 system with e - modification law "
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.33 , N°10 ,
 pp.979-984 .
- [7] R. L. BUTCHART , B. SHACKCLOTH (1965)
 " Synthesis of model reference adaptive control system by
 Lyapunov's second method " .
 Pro. IFAC Symp. on adaptive Control .
 Teddington , England , pp. 144 - 152 .
- [8] W. C. CHAN , I. BAR - KANA (1990)
 "Simplified adaptive control for cart - pole "
 Drexel University , Philadelphia , PA 19104 , IASTED .
- [9] M. CHIH , BOR-SENCHEN (1986)
 " Adaptive controller with desired pole/zero assignement .
 IEEE Transaction on Automatic Control
- [10] M. CHRISTIAN (1989)
 " Structure de commande adaptative "
 Technique de l'ingenieur automatique

- [11] M. DAS , R. CRISTI (1990)
 " Robustness of an Adaptive Pole Placement Algorithm in the Presence of Bounded Disturbances and Slow Time Variation of Parameters "
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.35 , N°6 , pp.752-756 .
- [12] K.B. DJEZZAR (1990)
 " Etude de divers schémas de commande adaptative . Application en robotique " .
 Thèse de Magister en Electronique , U.S.T.H.B .
- [13] P. DENEVE
 Mécanique Ed. Ellipses .
- [14] L. DUGARD (1980)
 " Analyse des systèmes adaptatifs avec modèle de référence dans un environnement stochastique " .
 Thèse DI , INPG , Grenoble .
- [15] L. DUGARD (1984)
 " Commande adaptative des systèmes linéaires multivariables " .
 Thèse DI , INPG , Grenoble .
- [16] F. GHORBEL , J. H. HUNG , M. W. SPONG (1989)
 " Adaptive Control of Flexible - Joint Manipulator "
 IEEE Control Systems , vol 9 , N°7 , pp.9-13 .
- [17] W. -G HWANG , W. E. SCHMITENDORF (1984)
 " Robust Stabilizability for a Class of Transfer Functions "
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.29 , N°9 , pp.794-802 .
- [18] A. ISIDORI , J. W. GRIZZLE (1988)
 " Fixed modes and non linear non interacting control with stability "
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.33 , N°10 , pp.907-914 .
- [19] P. V. KOKOTOVIC , P. A. IOANNOU (1984)
 " Robust redesign of adaptive control " .
 IEEE Transaction on Automatic Control , Vol.29 , pp.202-211 .
- [20] P. V. KOKOTOVIC , P. A. IOANNOU (1984)
 " Instability Analysis and improvement of robustness of adaptive control " .
 IEEE Transaction on Automatic Control , Vol.20 , pp.583-594 .

- [21] R.E.KALMAN , J.E.BERTMAN (1960)
 " Control systems analysis via the « second method » of Lyapunov " .
 Journal of basic engineering ASME , JUNE .
- [22] I.D.LANDAU (1969)
 " A hyperstability criterion for model reference adaptive control system " .
 IEEE Transaction on Automatic Control , Vol.14 , pp.552-555 .
- [23] A.J.LAUB , W.F.ARNOLD (1984)
 " Controllability and observability criteria for multivariable linear second order model " .
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.29 , N° 2 , pp.163-164 .
- [24] K.Y.LIM , M.ESLAMI (1997)
 " Robust Adaptive Controller Designs for Robot Manipulator Systems " .
 IEEE Robotics and Automation , Vol.3 , N°1 , pp.54-66 .
- [25] J.Y.S.LUH , M.W.WALTER , R.P.C.PAUL (1980)
 " Resolved acceleration control of mechanical manipulator " .
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.25 , N°3 , pp.468-473 .
- [26] R.K.MILLER , A.N.MICHEL (1990)
 " An Invariance Theorem With Application to Adaptive Control " .
 Transactions on Automatic control , Vol.35 , N°6 , pp.744-749
- [27] R.V.MONOPOLI (1965)
 " Syntjesis Technique Employing the Direct Method " .
 Research and Development Dept.Speidel Corporation .
 Warwick , R.I.
- [28] A.S.MORSE (1980)
 " Global stability of parameter - adaptive control system " .
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.25 , N°3 , pp.433-439 .

- [29] K. S. NARENDRA , L. S. VALAVANI (1978)
 " Stable adaptive controller design - direct control "
 IEEE Transactions on Automatic control ,Vol.23 , N°4 ,
 pp.570-583 .
- [30] K. S. NARENDRA , Y. H. LIN , L. S. VALAVANI (1980)
 " Stable adaptive controller design , part II : proof of
 stability " .
 IEEE Transactions on Automatic control ,Vol.25 , N°3 ,
 pp.440-448 .
- [31] K. S. NARENDRA , A. M. ANNASWAMY (1987)
 " A new adaptive law for robust adaptive control without
 persistent excitation " .
 IEEE Transactions on Automatic control ,Vol.32 ,pp.134-145 .
- [32] K. S. NARENDRA , ANURADHA , A. M. ANNASWAMY (1989)
 " Stable Adaptive Systems " .
 Pentice - Hall Internal Editions .
- [33] P. C. PARKS (1966)
 " Lyapunov redesign of model reference adaptive control
 system " .
 IEEE Transactions on Automatic control ,Vol.11 ,pp.362-367 .
- [34] V. M. POPOV (1973)
 " L'hyperstabilité des systèmes automatiques " .
 Ed .Dunod
- [35] M. RIVOIRE
 Cours d'automatique .
- [36] J. J. E. SLOTINE , W. LI (1988)
 " Adaptive manipulator control : a case study "
 IEEE Transactions on Automatic control ,Vol.33 , N° 11 ,
 pp.995-1003 .
- [37] J. J. E. SLOTINE (1988)
 " Putting Physics in Control - the Example of Robotics "
 IEEE Control Systems , Vol.8 , N° 6 , pp.12-18 .
- [38] M. W. SPONG , R. ORTEGA , R. KELLY (1990)
 " Comments on Adaptive Manipulator Control : A Case Study "
 IEEE Transactions on Automatic control ,Vol.35 , N°6 ,
 pp.761-762 .
- [39] D. P. STOTEN (1990) .
 " Model reference adaptative control of manipulators " .
 Research studies press Ltd . Tauntin , UK .

- [40] D.P.STOTEN , H.BENCHOUBANE (1990) .
 " Empirical studies of an MRAC algorithm with minimal controller synthesis " .
 Int . J . Control , Vol.51 , N°4 , pp. 823 - 849 .
- [41] D.P.STOTEN , H.BENCHOUBANE (1990) .
 " Robustness of minimal controller synthesis algorithm " .
 Int . J . Control , Vol.51 , N°4 , pp. 851 - 861 .
- [42] D.P.STOTEN , S.P.HODGSON (1991)
 " Comparative implementation studies of the minimal control synthesis algorithm on a class 1 manipulator " .
 Journal of systems and control engineering , IMECHE , Vol.205 pp. 23 - 33 .
- [43] S.STERLCOV (1978)
 Mécanique . Ed MIR . MOSCOU
- [44] L.M.SWEET , M.C.GOOD (1985)
 " Redefinition of the Robot Motion - Control Problem " .
 IEEE Control Systems , vol 5 , N°3 , pp.18-25 .
- [45] K.THOMAS (1980)
 " Linear systems " .
 Prentice Hall .
- [46] M.TOMIZUKA (1988)
 " On relaxation of SPR condition in parallel MRAS - continuous time case " .
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.33 , N°10 , pp.976-979 .
- [47] P.TOMEI (1990)
 " An Observer for Flexible Joint Robots " .
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.35 , N°6 , pp.739-744 .
- [48] I.TROCH (1988)
 " Solving the discrete lyapunov equation using the solution of the corresponding continuous lyapunov equation and vice versa " .
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.33 , N°10 , pp.944-946 .
- [49] K.S.TSAKALIS , P.A.IOANNOU (1990)
 " A New Indirect Adaptive Control Scheme for the Time Varing Plant " .
 IEEE Transactions on Automatic control , Vol.35 , N°6 , pp.697-705 .

- [50] M. VUKOBRATOVIC , N. KIRCANSKI (1985)
" An Approach to Adaptive Control of the Robotic Manipulator " .
Automatica , Vol.21 , N°6 , pp.639 - 647 .
- [51] B. E. YDSTIE , R. W. H. SARGENT (1986)
" Convergence and Stability Properties of an Adaptive Regulator with Variable Forgetting Factor " .
Automatica , Vol.22 , N°6 , pp.749 - 751 .
- [52] K. F. YUNG , I. POSTLETHWAITE (1985)
" Robustness with Simultaneous Pole and Zero Movement across $j\omega$ - Axis " .
Automatica , Vol.21 , N°4 , pp.433 - 444 .

ANNEXES

ANNEXE (1)

INTEGRATION DE FONCTIONS IRRATIONNELLES

INTEGRALES DU TYPE $\int R (x , \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Il n'est pas toujours possible d'exprimer l'intégrale d'une fonction irrationnelle quelconque à l'aide de fonctions élémentaires.

Aussi, est-il présenté dans ce paragraphe une forme de fonctions irrationnelles souvent rencontrée et dont les intégrales sont ramenées par changements de variable appropriés à des fonctions rationnelles connues pouvant être aisément intégrées.

Ces dernières ayant faites l'objet de calculs complexes dans l'estimation du temps de réactions des systèmes.

Considérons l'intégrale définie ou non de la forme :

$$\int R (x , \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx , \quad (1)$$

où $a \neq 0$.

Cette intégrale peut être ramenée à celle d'une fonction rationnelle par les substitutions de variables d'Euler. Ces substitutions s'articulent comme suit :

1 - Première substitution d'Euler.

Si $a > 0$, on pose :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x + y$$

il s'induit alors le développement ci - dessous :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + y^2 \pm 2\sqrt{a} xy$$

La variable " x " est définie alors comme une fonction rationnelle de " y " , avec l'écriture :

$$x = \frac{y^2 - c}{b \mp 2y\sqrt{a}}$$

La dérivée " dx " est aussi une fonction rationnelle de " y " , par conséquent :

$$dx = \mp \left[\frac{2y^2\sqrt{a} + 2yb + 2c\sqrt{a}}{(b \mp 2y\sqrt{a})^2} \right] dy$$

et

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x + y = \sqrt{a} \left[\frac{y^2 - c}{b \mp 2y\sqrt{a}} \right] + y$$

La fonction $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ est bien ramenée à une fonction rationnelle de " y " .

Puisque $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, x et dx s'expriment par des fonctions rationnelles de " y " , l'intégrale (1) est donc celle d'une fonction rationnelle de " y " .

2 - Deuxième substitution d'Euler .

Si $c > 0$, nous posons que :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy \pm \sqrt{c} ;$$

Il est évident que :

$$ax^2 + bx + c = x^2y^2 \pm 2xy\sqrt{c} + c$$

d'où :

$$x = \frac{b \mp 2y\sqrt{c}}{y^2 - a}$$

avec :

$$dx = \frac{\pm 2a\sqrt{c} - 2by}{[y^2 - a]} dy$$

Puisque dx et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ s'expriment également par des fonctions rationnelles de " y " , alors en substituant les valeurs de x , $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ et de dx en fonction de " y " dans l'intégrale $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ on ramène cette dernière à l'intégrale d'une fonction rationnelle de " y " .

3 - Troisième substitution d'Euler .

Soient α et β les racines réelles du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Posons :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha) y$$

Comme $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, il vient :

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha) y ,$$

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 y^2 ,$$

$$a(x - \beta) = (x - \alpha) y^2 ;$$

" x " s'exprime alors par une fonction rationnelle de " y " :

$$x = \frac{a\beta - \alpha y^2}{a - y^2}$$

Etant donné que dx et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sont également des fonctions rationnelles de " y " , l'intégrale considérée se ramène par conséquent , à celle d'une fonction rationnelle de " y " .

REMARQUES :

I - Le changement de variable indiqué dans la troisième substitution peut être appliqué non seulement quand $a < 0$, mais aussi quand $a > 0$ si seulement le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles.

II - Remarquons que les substitutions de variables d'Euler indiquées aux cas 1 et 3 suffisent pour que l'intégrale (1) soit ramenée à celle d'une fonction rationnelle.

En effet, considérons le trinôme $ax^2 + bx + c$.

Si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, les racines sont alors réelles, et nous sommes donc en présence du cas 3. Si par contre $\Delta \leq 0$, nous avons dans ce cas :

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} \left[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2) \right]$$

et, par conséquent, le signe du trinôme coïncide avec celui de a .

Pour que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ soit réel, il faut que le trinôme soit positif et, partant, que $a > 0$. Nous sommes donc en présence du premier cas.

ANNEXE (2)

RESOLUTION D'EQUATION ALGEBRIQUE

Polynome du troisième ordre : $X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3 = 0$ (A₂.1)

Soient Q , R , S , T des nombres réels vérifiant :

$$Q = \frac{3 a_2 - a_1^2}{9} \quad , \quad R = \frac{9 a_1 a_2 - 27 a_3 - 2 a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad , \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Alors , l'équation (A₂.1) a pour solution :

$$\begin{cases} X_1 = S + T - \frac{1}{3} a_1 \\ X_2 = -\frac{1}{2} (S + T) - \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{2} i \sqrt{3} (S - T) \\ X_3 = -\frac{1}{2} (S + T) - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{2} i \sqrt{3} (S - T) \end{cases}$$

Si $D = Q^3 + R^2$ caractérise le discriminant et si les coefficients a_1 , a_2 , a_3 sont réels , alors :

- (i) une racine est réelle et les deux autres complexes conjugués si $D > 0$
- (ii) les trois racines sont réelles et au moins deux sont égales si $D = 0$
- (iii) toutes les racines sont réelles distinctes si $D < 0$.

Dans le cas $D < 0$, des simplifications de calculs s'introduisent en utilisant la résolution trigonométrique suivante :

$$\text{si } D < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 2 \sqrt{-Q} \cos \left(\frac{1}{3} \Theta \right) - \frac{1}{3} a_1 \\ X_2 = 2 \sqrt{-Q} \cos \left(\frac{1}{3} \Theta + 2 \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{3} a_1 \\ X_3 = 2 \sqrt{-Q} \cos \left(\frac{1}{3} \Theta + 4 \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{3} a_1 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \cos (\Theta) = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$$

Il est aisé alors de vérifier :

$$X_1 + X_2 + X_3 = -a_1$$

$$X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_1 = a_2$$

$$X_1 X_2 X_3 = -a_3$$

X_1 , X_2 , X_3 désignant les trois racines .

ANNEXE (3)

1 - Propriété de produit scalaire

$$X^T G Y = Y^T G X = \text{tr} (G Y X^T)$$

avec $G = G^T$

où (X , Y) sont des vecteurs de même dimensions et G une matrice de taille appropriée , symétrique .

2 - Propriété de la trace d'une matrice

$$\dim A = \dim B \quad \rightarrow \quad \text{tr} (A^T . B) = \text{tr} (B^T . A)$$

3 - Résolution de l'inégalité de POPOV (cas vectoriel)

$$\int_{t_1}^{t_2} F^T(t) M \dot{F}(t) dt = \frac{1}{2} \left[\| F(t_2) \|_{M}^2 - \| F(t_1) \|_{M}^2 \right] \geq - \frac{1}{2} \| F(t_1) \|_{M}^2$$

avec : $\| F(t_i) \|_{M}^2 = F^T(t_i) M F(t_i) \quad i = 1 , 2 \quad \text{et} \quad M = M^T$

où $\dot{F}(t) = \frac{dF(t)}{dt}$

Ce résultat restant invariant dans le cas scalaire , puisque même si $M \equiv 1$,

$$\int_{t_1}^{t_2} F^T(t) \dot{F}(t) dt = \frac{1}{2} \left[\| F(t_2) \|^2 - \| F(t_1) \|^2 \right] \geq - \frac{1}{2} \| F(t_1) \|^2$$

ANNEXE (4)

RESOLUTION DE L'INTEGRALE DU TYPE : $I = \int \frac{(m x + n)}{a x^2 + b x + c} dx$

Soit un polynome $P(x)$ tel que :

$$P(x) = a x^2 + b x + c$$

pouvant être mis sous la forme :

$$P(x) = a (x + x_0) (x + x'_0)$$

Si x_0 et x'_0 sont les racines de ce dernier égales à :

$$x'_0 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_0 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

alors :

$$P(x) = \frac{1}{4a} \left[2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right] \left[2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right]$$

de plus $I = \int \frac{(m x + n)}{a x^2 + b x + c} dx = \frac{m}{2a} \operatorname{Ln}(a x^2 + b x + c) + I_1$

avec

$$I_1 = \left[n - \frac{m b}{2a} \right] \int \frac{dx}{a x^2 + b x + c}$$

$$I = \frac{m}{2a} \ln \left[a (x + x_0) (x + x'_0) \right] + \frac{\left[n - \frac{mb}{2a} \right]}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \operatorname{Ln} \left[\frac{x + x'_0}{x + x_0} \right]$$

Dans le cas particulier où $m = 2$ et $n = 0$,

$$I = \frac{1}{a} \ln \left[a (x + x_0) (x + x'_0) \right] - \frac{b}{a\sqrt{b^2 - 4ac}} \operatorname{Ln} \left[\frac{x + x'_0}{x + x_0} \right]$$

ANNEXE (5)

BORNE MAXIMALE DE LA NORME DES ETATS D'UN SYSTEME

DIFFERENTIEL DU DEUXIEME ORDRE

Un système du deuxième ordre est généralement décrit par la forme canonique ci - après .

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_{\mu(i1)} \\ \dot{x}_{\mu(i2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{n(i2)}^{(ii)} & -2\xi\omega_{n(i2)}^{(ii)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\mu(i1)} \\ x_{\mu(i2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \omega_{n(ii)}^2 \end{vmatrix} r \quad (A5-1)$$

dont les solutions vérifient :

$$x_{\mu(i1)} = \left\{ 1 - \frac{\omega_{n(i2)}^{(ii)}}{\omega_{d(i1)}^{(ii)}} e^{-\alpha t} \sin \left[\omega_{d(i1)}^{(ii)} t + \Phi \right] \right\} \frac{r}{\omega_{n(i1)}^{(ii)}} \quad (A5-2)$$

$$\omega_{d(i1)}^{(ii)} = \omega_{n(i2)}^{(ii)} \sqrt{1 - \xi^2} \quad (A5-3)$$

$$\alpha = \xi \omega_{n(i2)}^{(ii)} \quad (A5-4)$$

$$\Phi = \text{Arcos } \xi \quad (A5-5)$$

$$x_{\mu(i2)} = \frac{\omega_{n(i2)}^{(ii)2}}{\omega_{d(i1)}^{(ii)}} r e^{-\alpha t} \sin \left[\omega_{d(i1)}^{(ii)} t \right] \quad (A5-6)$$

La majoration de (A5-2) et (A5-6) passe par la majoration des fonctions sinus et exponentielle . Aussi , il est possible d'affirmer que :

$$x_{\mu(i_1)} \approx \left\{ 1 + \frac{\omega_{n(i_1)}^{(ii)}}{\omega_{d(i_1)}^{(ii)}} \right\} \frac{r}{\omega_{n(i_1)}^{(ii)2}} \quad (A5-7)$$

et que

$$x_{\mu(i_2)} \approx \frac{\omega_{n(i_1)}^{(ii)2}}{\omega_{d(i_1)}^{(ii)}} r \quad (A5-8)$$

En définissant la norme de $x_{\mu} = \begin{vmatrix} x_{\mu(i_1)} \\ x_{\mu(i_2)} \end{vmatrix}$ égale à :

$$\| x_{\mu} \| = \left[x_{\mu(i_1)}^2 + x_{\mu(i_2)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (A5-9)$$

il apparaît que :

$$\| x_{\mu} \| \leq k r \quad (A5-10)$$

où

$$k = \left[\frac{1}{\omega_{n(i_1)}^{(ii)4}} \left\{ 1 + \frac{\omega_{n(i_1)}^{(ii)}}{\omega_{d(i_1)}^{(ii)}} \right\}^2 + \frac{\omega_{n(i_1)}^{(ii)4}}{\omega_{d(i_1)}^{(ii)2}} \right]^{\frac{1}{2}} r \quad (A5-11)$$

NOTATIONS

- t : Temps
- t_s : Temps de montée
- $X_S(t)$: Vecteur d'état , signal de sortie du système
- $X_\mu(t)$: Vecteur d'état , signal de sortie du modèle
- $X_e(t)$: Vecteur erreur d'état de sortie = $X_\mu(t) - X_S(t)$
- $Y_e(t)$: Vecteur erreur augmentée d'état de sortie = $C_e X_e(t)$
- $r(t)$: Vecteur signal d'entrée de référence du modèle
- $u(t)$: Vecteur signal d'entrée de commande du système
- A_S : Matrice des paramètres du système
- B_S : Matrice d'entrée du système
- A_μ : Matrice des paramètres du modèle
- B_μ : Matrice d'entrée du modèle
- B_S^\dagger : Matrice pseudo - inverse gauche de B_S
- C_e : Matrice d'erreur de sortie
- P : Matrice définie positive , solution de
l'équation de LYAPUNOV : $A_\mu^T P + P A_\mu = - Q$
- Q : Matrice définie positive arbitraire
- α : Gain statique d'une action intégrale
- β : Gain statique d'une action proportionnelle
- $\lambda_{\min}(\cdot)$: Valeur propre minimale de (\cdot)
- $\lambda_{\max}(\cdot)$: Valeur propre maximale de (\cdot)
- n : Ordre du système
- m : Nombre de degré de liberté du système

$n^{(i,j)}$: Ordre d'un bloc du système

$m^{(i,j)}$: Nombre de degré de liberté d'un bloc du système

K_x : Matrice du gain intégral + proportionnel de la chaîne directe

K_R : Matrice gain intégral + proportionnel de la chaîne de la chaîne de retour

θ : Matrice des paramètres d'erreur

d : Vecteur non linéarités + perturbations

$\|(\cdot)\|$: Norme euclidienne de (\cdot)

RESUME

Le travail présenté dans cette thèse concerne l'étude des schémas de commandes adaptatives pour une classe de systèmes non linéaires avec modèle de référence .

Dans la première partie sont présentés quelques méthodes d'analyses et de synthèse de schémas de commandes pour les systèmes monovariabiles avec polarisation vers les systèmes S.I.S.O (Single Input - Single Output) à structures canoniques .

Dans la deuxième partie , l'intérêt est porté vers la comande adaptative des systèmes non linéaires multivariabiles , traitant en particulier les lois de commandes pour les différentes modifications σ et e à des fins de calculs de convergence de grandeurs caractéristiques telles que l'erreur et le gain dynamique afin de déduire le temps de réponse .

Il est utilisé alors une technique de découplage au niveau de la matrice d'entrée du système dans le cas multivariable permettant de considérer les termes de couplages comme des structures non linéaires ayant autorisées l'extension du cas S.I.S.O vers le cas M.I.M.O (Multi Input - Multi output) .

Mots - clés : Commande adaptative , Systèmes non linéaires , Multivariabiles , Déterministes , Stabilité , Convergence .

ABSTRACT

This work concerns the analysis of adaptive control schemes for non linear systems with a reference model .

The first part of the study deals with somme analysis and synthesis methods .

Adaptive control schemes for monovariable systems is also added .

The second part deals with adaptive control for multivariable non linear systems .

In particular , control laws for " σ " and " e " modication are presented . These are used for the amplitude of feedback error and gain calculations . This help finding the responce time of the system .

This results obtained used a decoupling technique for the input matrix . The coupling terms are considered as an non linear structure . This permits the extension of the monovariabiles case to the multivariable one .

Key - words : Adaptative Control , Non linear Systems , Multivariable systems , Déterministics , Stability , Convergence .