

32-530-6-1
تابع التدرج
POST GRADUATION

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE DE BLIDA
Institut d'Electronique

MEMOIRE DE MAGISTER

Préparé par M^{elle} DJOUADI Dahbia

Spécialité : Electronique
Option : Contrôle

Thème

**MODELISATION, STABILITE et COMMANDE DES
SYSTEMES HYBRIDES**

Application à une Ruche Apicole

Le jury est composé de :

M. A. GUESSOUM
M. H. SALHI
M. S. DJENNOUNE
M. H. REZINE
M. B. KAZED

professeur
M.C
M.C
M.C
C.C

U.S.T.B
U.S.T.B
U.M.M.T.O
E.M.P
U.S.T.B

Président
rapporteur
rapporteur
examineur
examineur



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BLIDA
Institut d'Electronique

MEMOIRE DE MAGISTER

Préparé par M^{elle} DJOUADI Dahbia

Thème

**MODELISATION, STABILITE et COMMANDE DES
SYSTEMES HYBRIDES**

Application à une Ruche Apicole

Le jury est composé de :

M. A.GUESSOUM	Professeur	U.S.T.B	Président
M. H.SALHI	M.C	U.S.T.B	rapporteur
M. S.DJENNOUNE	M.C	U.M.M.T.O	rapporteur
M. B.KAZED	C.C	U.S.T.B	examineur
M. H.REZINE	M.C	EMP	examineur

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail à :

Mes très chers parents, qui en toute occasion m'ont apporté leur soutien et leur encouragement,

Mes très chers frères, sœurs et belle sœur, en particulier Karim pour sa patience et sa disponibilité,

Mon fiancé Hakim, ses parents et toute sa famille,

Ma tante Nadia, son mari Nacer et ses deux garçons en particulier Tahar,

Tous mes amis et collègues de l'institut de biologie de l'UMMTO en particulier Naima, Nouria, Zina, sans oublier Fadhila et son enfant.

Avant propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au laboratoire de productique et de conduite des systèmes de production de l'institut d'électronique de l'université Mouloud Mammer à Tizi Ouzou sous la direction conjointe de MM. S.DJENNOUNE et H.SALHI.

A Messieurs S.DJENNOUNE et H.SALHI, j'exprime ma profonde gratitude pour leur aide efficace et précieuse qu'ils m'ont prodigué pour mener à bien ce travail. Je tiens à leur exprimer ma profonde reconnaissance pour tout ce qu'ils m'ont apporté et appris.

Je profite par la même occasion, pour remercier M.AMER YAHIA, M.SI AMMOUR, M.GUERMAH et tout le personnel du laboratoire pour m'avoir accueillie parmi eux et faciliter les conditions de travail.

Mes vifs remerciements s'adressent à M.M.L.SI AHMED qui n'a cessé de m'apporter aide et soutien lors de l'élaboration de ce mémoire.

J'exprime mes vifs remerciements aux membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger ce travail.

Je ne saurais oublier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation.

Liste des principales notations

Symbole	Désignation
\mathcal{R}	corps des réels
\mathcal{R}^n	$(\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R})$ n fois
$X_C \subseteq \mathcal{R}^n$	ensemble des états continus
X_D	ensemble des états discrets
q	état discret
$X = X_D \times X_C$	espace d'état global du système
x	vecteur d'état
$U_C \subseteq \mathcal{R}^m$	ensemble des commandes continues
U_D	ensemble des commandes discrètes
$U = U_D \times U_C$	ensemble de toutes les commandes
u	vecteur de commande
$Y_C \subseteq \mathcal{R}^p$	ensemble des sorties continues
Y_D	ensemble des sorties discrètes
$Y = Y_D \times Y_C$	ensemble de toutes les sorties
y	vecteur de sortie
$t \geq 0$	variable temps
\dot{x}	$\frac{dx}{dt}$
$\ (\cdot)\ $	norme Euclidienne de (\cdot)
A^T	transposée de la matrice A
A^{-1}	inverse de la matrice A
T	intervalle de temps
τ_i	instants de basculement
τ	ensemble des instants de basculement
ψ	fonction de transition d'état discret
f	fonction d'évolution d'état continue
h	fonction de sortie
I	ensemble des conditions initiales
m	marquage d'une place
SED	système à événements discrets
RDPD	réseau de Pétri discret
RDPC	réseau de Pétri continu
RDPH	réseau de Pétri hybride
RFC	réseau à flux continu
	réseau à flux hybride

المالخص :

الهدف من هذا البحث هو دراسة الأنظمة المهجنة . النظام المهجن هو كل نظام قادر على عرض خصائص مستمرة وغير مستمرة في آن واحد .

في المرحلة الأولى قمنا بجمع معظم المؤلفات والأبحاث المنجزة حول الأنظمة المهجنة و أنجزنا لائحة النماذج المقترحة . الدراسة المكثفة والتحليل الدقيق لهذه الأبحاث مكننا من إقتراح نموذج عام . في المرحلة الثانية قمنا بدراسة توازن بعض الأنظمة المهجنة وبعض مخططات الرقابة .

في نهاية هذا البحث , قمنا بتطبيق النتائج التي توصلنا إليها في المراحل السابقة على مثال فيزيائي والذي يتمثل في " خلية النحل " .

كلمات مفتاحية: الأنظمة المهجنة , نموذجية , توازن , رقابة .

Abstract

The main objective of this thesis is to study the modeling, the stability and the control of hybrid systems. First, we have dressed a panorama of the hybrid models proposed in literature. A general model is presented by the synthesis of these models. We studied then, the stability of a class of hybrid systems and some strategies of control.

Secondly, we applied the results of the survey realized before for the modeling and control of a bee hive by the hybrid approach. The objective of the control is to improve the level of its production.

Keywords: Hybrid systems, modeling, stability, control

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier la modélisation, la stabilité et la commande des systèmes hybrides. Dans la première phase, nous avons dressé un panorama des différents modèles hybrides proposés en littérature. La synthèse très fine de ces modèles nous a permis de présenter un modèle généralisé capable de décrire la plupart des phénomènes hybrides. Nous avons par la suite étudié la stabilité d'une classe de systèmes hybrides ainsi que quelques schémas de commande.

Dans la seconde phase, nous avons appliqué les résultats de l'étude réalisée auparavant pour la modélisation et la commande d'une ruche apicole par l'approche hybride. L'objectif de contrôle est d'augmenter sa production.

Mots clés : Systèmes hybrides, modélisation, stabilité, commande.

Table des matières

Introduction Générale	1
1. Modélisation des systèmes hybrides	3
I- Introduction.....	3
II- Différents types de systèmes hybrides.....	4
II-1 Systèmes continus commandés par ordinateur.....	4
II-2 Systèmes à aiguillage.....	5
II-3 Systèmes à effets impulsionnels.....	5
III Modélisation des systèmes hybrides par les automates hybrides.....	6
III-1 Rappel sur les automates à états finis.....	6
III-2 L'automate hybride.....	7
III-2-1 Modèle analytique.....	7
III-2-2 Modèle graphique.....	9
III-2-3 Les automates hybrides proposés en littérature.....	12
i] L'automate de Tavernini.....	12
ii] L'automate de Back-Guckenheimer-Myers.....	13
III-2-4 Interconnexion d'automates.....	13
IV Modélisation des systèmes hybrides par les systèmes à interface.....	16
IV-1 Le modèle d'Antsaklis.....	16
IV-2 Le modèle de Brockett.....	18
IV-3 Modèle à interface généralisé.....	19
V Modélisation des systèmes hybrides par les réseaux de Pétri hybrides.....	22
V-1 Le RDPD.....	22
V-2 Le RDPC.....	23
V-3 L'interface.....	24
V-3-1 Modélisation de l'aiguillage entre les champs de vecteurs.....	24
V-3-2 Les sauts continus.....	25

V-3-3 Génération d'événements.....	25
VI Modélisation des systèmes hybrides par les réseaux à flux hybrides.....	26
VI-1 Le réseau à flux continu.....	27
VI-2 Le réseau à flux hybride.....	29
VI-2-1 Influence de la partie discrète sur la partie continue.....	29
VI-2-2 Influence de la partie continue sur la partie discrète.....	30
VII Conclusion.....	31
2. Stabilité et commande des systèmes hybrides.....	33
I- Introduction.....	33
II- Stabilité des systèmes hybrides.....	33
III- Commande des systèmes hybrides utilisant la théorie de Lyapunov.....	36
IV- Stratégies de commande des systèmes hybrides à interface.....	40
IV-1 Synthèse d'une loi de contrôle.....	41
IV-1-1 Approche I.....	41
IV-1-2 Approche II.....	43
V- Conclusion.....	47
3. Application à une ruche apicole.....	48
I- Introduction.....	48
II- Présentation de la ruche.....	48
II-1 La colonie d'abeilles.....	48
II-2 L'habitation de l'abeille -la ruche-.....	49
II-3 L'alimentation des abeilles.....	49
II-4 Le nourrissage artificiel.....	50
III- Modélisation de la ruche apicole.....	50
III-1 Hypothèses de travail.....	50
III-2 Etude expérimentale.....	50
III-3 Modélisation mathématique.....	54
III-3-1 Modélisation de la ruche par un automate hybride.....	54
III-3-2 Modélisation de la ruche par les systèmes à interface.....	57
IV- Commande de la ruche par l'approche hybride.....	58
IV-1 Modélisation du contrôleur hybride.....	58
IV-1-1 Formulation du problème de commande optimale.....	60
IV-1-2 Application à la ruche.....	63
IV-1-3 Algorithme de commande.....	65
IV-1-4 Résultats de la commande.....	66
IV-2 Modélisation du système hybride global en boucle fermée.....	69

V- Conclusion.....	70
Conclusion et perspectives.....	72
Annexe A.....	74
Annexe B.....	79
Bibliographie.....	80

INTRODUCTION GENERALE

Les bénéfices financiers et les considérations de l'environnement sont parmi les raisons qui ont contribué à la poussée du niveau d'automatisation au sein des entreprises. Cette augmentation des niveaux d'automatisation et d'intégration des systèmes, a poussé les ingénieurs automaticiens à traiter des systèmes de plus en plus complexes. En même temps, les progrès technologiques récents, tels que : des ordinateurs plus rapides, des capteurs plus fiables, l'intégration de considérations du contrôle dans la conception des produits, ont rendu possible l'extension des applications pratiques des systèmes de contrôle à des systèmes qui étaient impossibles à traiter dans le passé.

La complexité est due donc à la nécessité de tenir compte de tous les aspects aussi diverses soient-ils du système à contrôler. C'est le cas des systèmes dont le comportement est caractérisé à la fois par des phénomènes de dynamique continue (grandeurs physiques évoluant de façon continue en fonction du temps) et par des phénomènes de dynamique discrète (événements survenant à des intervalles de temps réguliers ou irréguliers). Ces systèmes sont désignés sous le vocable de "Systèmes Hybrides (SH)". Afin d'illustrer ceci, citons l'exemple d'un atelier de production. L'aspect continu caractérise le comportement local d'une machine. Les grandeurs continues peuvent être la masse, le volume, la surface... etc. d'une pièce. Cet aspect est généralement étudié par l'automatique classique des systèmes continus. L'aspect discret, par contre, caractérise le comportement global de l'atelier. Là, on s'intéresse plutôt au nombre de pièces, aux stocks,... etc. dont l'évolution est souvent liée à l'ordonnancement et à la gestion des files d'attente qui est de nature discontinue. Cet aspect s'inscrit dans l'automatique des Systèmes à Événements Discrets (SED). La représentation de cet atelier par un système hybride permet de tenir compte simultanément de ces deux aspects.

Les illustrations pratiques de la notion de systèmes hybrides sont très diverses. Nous pouvons citer entre autres :

- Circuits électriques, les convertisseurs statiques en particulier, dans lesquels des éléments fonctionnent en régime continu et d'autres (thyristors, triacs, transistors de puissance... etc.) en régime de commutation.
- Systèmes de commande numérique par ordinateur des procédés continus. Dans ce cas, le ordinateur manipule des informations échantillonnées à des instants discrets, le procédé est caractérisé par des grandeurs continues évoluant dans le temps continu.

Si auparavant, l'étude des systèmes discrets et celle des systèmes continus sont faites d'une manière séparée, les travaux actuels s'orientent à définir des modèles hybrides où l'aspect continu et l'aspect discret du système apparaissent simultanément. Cependant, les directions prises actuellement sont très divergentes et diffèrent principalement de la nature des parties continue et discrète et de la structure de l'interface entre les deux parties. Pour ces systèmes hybrides, les notions aussi bien fondamentales qu'élémentaires telles que la modélisation, les concepts de contrôlabilité, de stabilité, ...etc. si bien connues pour les deux classes précédemment citées (discrets et continus), deviennent très difficiles à définir. C'est ainsi

qu'un système simple peut, sous l'effet d'événements internes ou externes, présenter des états de fonctionnement différents. Globalement, il peut présenter un comportement très complexe qui rend sa modélisation et son analyse très compliquée.

L'étude des systèmes hybrides a été introduite vers le début des années quatre-vingt-dix, [1],[2],[4],[5],[6],[11],[23],[24], et devient depuis un thème très convoité par plusieurs laboratoires de recherche. Les travaux effectués ont porté essentiellement sur le développement d'une représentation mathématique hybride de tels systèmes. Cependant, le plus grand défi est le manque d'outils mathématiques pour l'analyse, la synthèse et la conception de ces systèmes. A travers les années, plusieurs outils ont été développés pour traiter des systèmes purement continus [14],[17], ou purement discrets [9],[10],[13],[33], aucun d'eux n'est capable de répondre entièrement aux questions posées par les systèmes hybrides.

L'objectif principal de notre travail est d'étudier ces différents travaux effectués d'une part puis d'illustrer l'intérêt de la modélisation hybride dans un cas pratique. C'est ainsi que dans la première phase de notre travail, nous avons dressé, par une recherche bibliographique exhaustive, un panorama des différents modèles proposés. Un travail de synthèse a été effectué pour pouvoir les répartir en classes distinctes. La synthèse très fine de la bibliographie disponible, nous a permis de présenter un modèle à interface généralisé capable de décrire tous les phénomènes hybrides. Quelques résultats d'étude de la stabilité de certaines classes de ces systèmes sont présentés ainsi que quelques schémas de commande. Dans une seconde phase, nous avons choisi de faire une application sur un exemple pratique qui est la ruche apicole. L'application consiste à lui trouver un modèle hybride, puis atteindre des objectifs de commande préalablement définis en utilisant toujours l'approche hybride.

Ce travail est réparti en trois chapitres suivants :

- ◆ Dans le premier chapitre, la modélisation des systèmes hybrides est présentée. Nous avons distingué deux types de représentation, à savoir, une analytique, i.e. par les équations, et une graphique. Nous avons réparti les différents modèles proposés en littérature en trois classes, à savoir :
 - Une modélisation par les automates hybrides,
 - Une modélisation par les systèmes à interface,
 - Une modélisation exclusivement graphique, utilisant les réseaux de Pétri hybrides et les réseaux à flux hybrides.
- ◆ Le deuxième chapitre fera l'objet de quelques théorèmes de stabilité de certaines classes de systèmes hybrides ainsi que l'étude de quelques schémas de commande.
- ◆ Le troisième et dernier chapitre, portera sur la modélisation et la commande d'une ruche apicole par l'approche hybride. Le contrôle est sous forme d'un nourrissage artificiel des abeilles pendant l'insuffisance qualitative et quantitative de la nourriture à certaines périodes de l'année afin de les préparer pour une miellée. Les résultats de la modélisation et de la commande de la ruche par l'approche hybride seront présentés. Enfin, le contrôle est effectué pour atteindre les objectifs souhaités par l'apiculteur et vérifiés par la simulation.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

MODELISATION DES SYSTEMES HYBRIDES

I Introduction

Nous pouvons toujours se poser la question de l'intérêt de considérer une nouvelle modélisation hybride pour décrire des processus déjà étudiés dans le domaine de contrôle ; c'est une question naturelle puisque les phénomènes concernés par cette modélisation ont pour la plupart été modélisés soit d'une façon continue, soit d'une façon discrète. Il existe cependant, des raisons pour inclure les discontinuités dans les modèles de processus continus. Parmi ces raisons, nous pouvons citer :

- Il peut être intéressant d'explicitier les discontinuités du modèle où le comportement continu change d'une façon considérable.
- Les capteurs et les actionneurs qui sont d'une importance capitale en pratique et qui ont essentiellement des comportements discontinus doivent être pris en compte dans la modélisation.
- L'utilisation d'événements discrets simplifie la modélisation des systèmes à aiguillage (plusieurs modes de fonctionnement).

Nous distinguons deux types de représentation :

- Une représentation analytique basée sur des équations différentielles et sur des équations aux différences.
- Une représentation graphique fondée essentiellement sur des graphes.

L'étude de la bibliographie dont nous disposons, nous a permis de répartir les modèles proposés en littérature en trois classes de modélisation suivantes :

- Une modélisation par les automates hybrides, dans laquelle nous retrouvons les deux types de représentation.
- Une modélisation par les systèmes à interface, qui est essentiellement analytique, où une interface est utilisée pour représenter l'interaction entre la partie discrète et la partie continue.
- Une modélisation exclusivement graphique, utilisant les réseaux de Pétri hybrides et les réseaux à flux hybrides.

Avant de présenter chaque classe de modélisation, donnons d'abord les différents types de systèmes hybrides.

II Différents types de systèmes hybrides

Nous distinguons différents types de systèmes hybrides, parmi lesquels:

II-1 Systèmes continus commandés par un contrôleur discret

Cette classe est très répandue grâce au développement considérable des ordinateurs et des contrôleurs discrets. Elle consiste en un système continu commandé par un contrôleur digital (e.g. ordinateur).

Exemple 1.1

Ce système est représenté par la figure 1.1

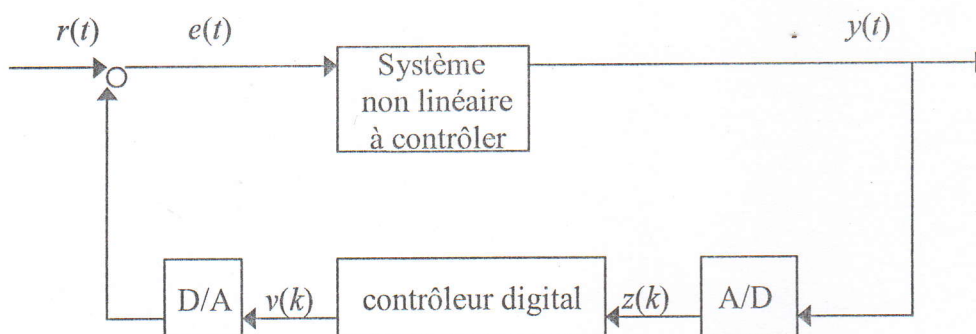


Figure 1.1 : «Système non linéaire contrôlé par un contrôleur digital »

Il peut être décrit par les équations suivantes :

Le système non linéaire est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, e, t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

Le contrôleur digital est décrit par les équations aux différences suivantes :

$$\begin{cases} u((k+1)T) = F(u(kT), z(kT)) \\ v(k) = H(u(kT)) \end{cases} \quad (1.2)$$

En général, les convertisseurs D/A(digital/analogique) et A/D(analogique/digital) sont considérés idéaux et synchronisés dans le temps (T est la période d'échantillonnage) ; en supposant aussi que $r(t)=0$, nous avons alors :

$$e(t)=v(kT)=H(u(kT)) ; z(kT)=y(kT)=h(x(kT)).$$

Le système sera donc décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, H(u(kT)), t) \\ u(k+1) = F(u(kT), h(x(kT))) \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans ce cas, la partie continue est l'état du système et la partie discrète est la commande qui est continue par morceaux (continue sur une période d'échantillonnage).

II-2 Systèmes à aiguillages

Ils constituent une classe de systèmes hybrides incluant les systèmes multimodèles et les systèmes à structures variables. Ils peuvent être décrits par des équations de la forme :

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)) ; i \in \{1, \dots, k\} \quad (1.4)$$

Tels que $x(t) \in \mathcal{X}^n$ est l'état du système, la fonction $f_i : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{X}^n$ est continue, i est choisi de telle sorte à ce qu'il y ait un nombre de changements finis en un temps fini.

Exemple 1.2

Considérons le système décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -3 \cdot x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \dot{x} = x + 50 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce système a donc deux modes de fonctionnement (deux champs de vecteurs). Le changement de modèle est conditionné par la valeur de la variable x .

II-3 Systèmes à effets impulsionsnels

Il existe une variété de systèmes qui sont sujets à des variations rapides. Dans la simulation, il convient de négliger la durée de ce changement rapide et de le représenter comme un état de saut. Le contrôle impulsionsnel est un exemple de ces systèmes. Cette classe peut être décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} dx/dt = f(x, t), & t \neq \tau_k \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k \end{cases} \quad (1.5)$$

Tels que $x \in \mathcal{X}^n$ est l'état du système, $f : \mathcal{X}^n \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{X}^n$ garantit l'existence et l'unicité de la solution du système pour des conditions initiales données, $I_k : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{X}^n$ décrit l'incrément des changements d'états aux instants appartenant à l'ensemble $E = \{\tau_1, \tau_2, \dots : \tau_1 < \tau_2 < \dots\} \subset \mathcal{R}^+$. E est donc l'ensemble des instants où les sauts se produisent.

Exemple 1.3

Soit un système à effet impulsionsnel donné par les équations suivantes et qui consiste en un système dans lequel l'état est augmenté de dix fois sa valeur chaque dix jours et, évolue suivant une équation différentielle en dehors de chaque dixième jour :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.025.t & \text{si } t \neq 10k, k \in \mathbb{N} \\ \Delta x = 10.x & \text{si } t = 10k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Il est clair que dans ce cas, $x \in \mathfrak{R}$, E est un ensemble infini de valeurs multiples de 10 et est donné par $E = \{0, 10, 20, 30, \dots\}$.

III Modélisation des systèmes hybrides par les automates hybrides

III-1 Rappel sur les automates à états finis (Discrets)

Un automate à états finis (discret), noté AEF, est défini comme un formalisme mathématique souvent utilisé pour décrire le comportement discret d'une machine [38].

Il est défini par le quintuplé :

$$A = \langle Q, \Sigma, \psi, I, F \rangle \quad (1.6)$$

où les cinq composantes ont les significations suivantes :

- $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_N\}$ est un ensemble fini d'états discrets correspondants aux états de fonctionnement de la machine.
- $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M\}$ est un ensemble de symboles qui dénotent les transitions d'état.
- ψ est la fonction qui associe à chaque état et à chaque symbole de transition un ensemble d'états; c'est la fonction de transition d'état.

$$\begin{aligned} \psi: Q \times \Sigma &\rightarrow Q' \subseteq Q \\ (q, \sigma) &\rightarrow Q' \subseteq Q \end{aligned}$$

- $I \subseteq Q$ est l'ensemble d'états initiaux.
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble d'états finaux.

L'AEF se déplace d'un état q à un état q' en acceptant un symbole σ si $\psi(q, \sigma)$ est défini et $q' \in \psi(q, \sigma)$.

Exemple 1.4 Modélisation d'un serveur à deux états

Un simple exemple d'AEF est celui d'un serveur donné par la figure suivante :

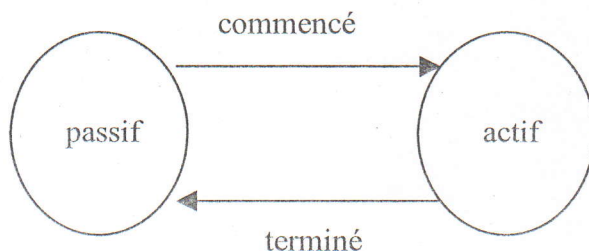


Figure 1.2 : «AEF représentant un serveur»

Le serveur est libre lorsqu'il est dans l'état passif, et il est occupé dans l'état actif.

La figure 1.2 est une représentation graphique d'un AEF à deux états discrets «actif» et «passif»; les symboles sont "commencé" et "terminé" c'est à dire $\Sigma = \{\text{commencé, terminé}\}$. La fonction de transition d'état est définie pour deux cas : $\psi(\text{passif, commencé}) = \{\text{actif}\}$ et $\psi(\text{actif, terminé}) = \{\text{passif}\}$.

Remarque

Nous pouvons attribuer, dans cet exemple, les valeurs discrètes 0 (pour l'état passif) et 1 (pour l'état actif) pour les états discrets du système.

III-2 L'automate hybride

Un automate hybride est défini comme une extension d'automate à états finis dans lequel l'évolution continue de la machine dans un état donné est prise en compte. Il manipule des variables discrètes et des variables continues. Les actions discrètes sont décrites par le changement de phases (états discrets) et les dynamiques continues par un ensemble d'équations différentielles continues. Il faut noter que dans ce type de modélisation, le contrôleur est implicite et les objectifs de commande sont formulés sous forme de phases interdites et de phases permises. Tel qu'il a été mentionné auparavant, les automates hybrides peuvent être représentés analytiquement ou graphiquement par les deux types de modèles suivants :

III-2-1 Modèle analytique

Le modèle suivant a été introduit par Alur, [1]. L'automate hybride est décrit par :

$$H = \langle X_D, X_C, \mu_1, \mu_2, \mu_3, I \rangle \quad (1.7)$$

où

- X_D est l'espace d'état discret.
- X_C est l'espace d'état continu.
- μ_1 est la fonction qui associe à chaque phase (état discret) q , une fonction continue f_q décrivant les dynamiques continues relatives à cette phase.
- μ_2 est la fonction qui associe à chaque phase q , un ensemble invariant $\mu_2(q) \subseteq X_C$. Si le système est dans un état discret q , l'état continu doit alors être dans $\mu_2(q)$, sinon, une exception sera générée.
- μ_3 est la fonction qui associe à chaque paire de phases (q, q') , une relation de transition $\mu_3(q, q') \subseteq (X_D \times X_C)$. $\mu_3(q, q')$ est une application de l'espace d'état de q vers celui de q' .
- I est l'ensemble des conditions initiales.

L'état global du système hybride est représenté par une phase discrète et un état continu. L'état peut changer, soit instantanément en présence d'événements discrets et ce en suivant les relations de transition données par μ_3 , soit d'une façon continue suivant des fonctions définies par μ_1 . L'évolution d'un système dynamique hybride dans un intervalle $T = [t_i, t_f]$ consiste en une collection (τ, q, x) qui satisfait les propriétés suivantes :

- Condition initiale : $(q(\tau_0), x(\tau_0)) \in I$
- Evolution discrète : $(q(\tau_i), x(\tau_i), q(\tau_{i+1}), x(\tau_{i+1})) \in \mu_3(q(\tau_i), q(\tau_{i+1})), \forall i$
- Evolution continue : $\forall i, \tau_i < \tau_{i+1}$ et $\forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1} [$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_q(x(t)) \\ q(t) = q(\tau_i) \\ x(t) \in \mu_2(q) \end{cases} \quad (1.8)$$

Pour illustrer ceci, considérons un système hybride à deux variables d'état continues x_1, x_2 et possédant trois phases discrètes, comme le montre la figure suivante :

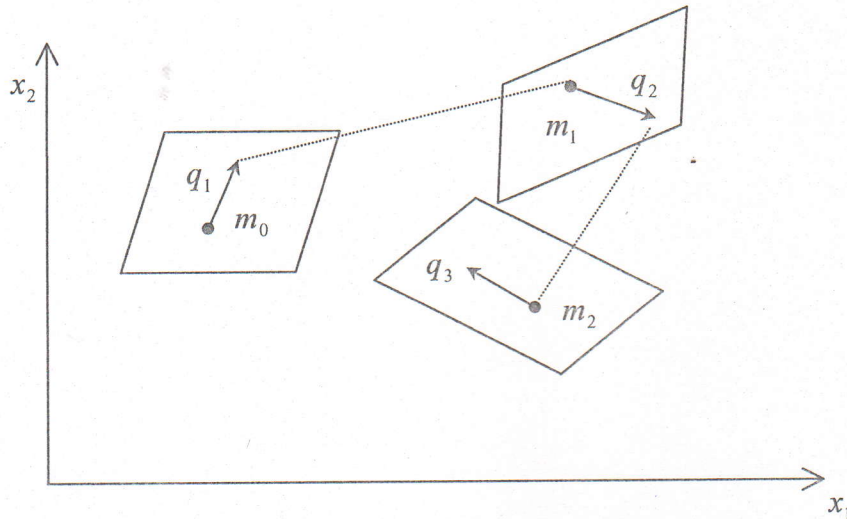


Figure 1.3 : «Exemple de système hybride»

Un tel système peut être modélisé par un automate hybride à trois états discrets (phases) q_1 , q_2 et q_3 ; à chaque phase sera associé un ensemble invariant $\mu_2(q_i)$, $i=1,2,3$, et un ensemble d'activités (fonctions) donné par $\mu_1(q_i)$, $i=1,2,3$. L'automate hybride fonctionne comme suit : Au départ, il est en phase q_1 et à l'état m_0 ($m_0=(x_{10}, x_{20})$), l'état continu change suivant la fonction $\mu_1(q_1)$. Après un certain temps, une transition se produit et l'état passe d'une façon discontinue, suivant une relation de transition donnée par $\mu_3(q_1, q_2)$, à une nouvelle phase q_2 et un nouvel état m_1 , et ainsi de suite jusqu'à atteindre l'état m_2 dans la phase q_3 .

Remarques

1. Un automate hybride est dit non déterministe si pour un état donné (q, x) , plusieurs destinations (q', x') sont possibles, et ceci peut provoquer des conflits. Certains auteurs [2],[19],[34] ont proposé quelques méthodes d'analyse relatives à des cas particuliers d'automates hybrides non déterministes pour lesquels ces conflits apparaissent (exp. : les rendre quasi-déterministes).
2. L'automate hybride est dit non bloquant si pour tout $(q,x) \in X_D \times X_C$, le système continu suit son évolution soit par un saut discret, soit en suivant une fonction continue, il n'a donc aucun point de blocage.

3. Il faut noter que nous pouvons modéliser les systèmes purement continus par un automate hybride à un seul état discret. Prenons par exemple, le système régit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) \\ x(0) = x_0 \\ x \in \mathcal{X}^n \end{cases} \quad (1.9)$$

Un tel système peut être modélisé par un automate hybride à une seule phase q à laquelle correspond $\mu_1(q)=f$, $\mu_2(q)=\mathcal{X}^n$, $\mu_3(q, q)=\{q\} \times \mathcal{X}^n$ et $I=\{x_0\}$.

4. Dans certains systèmes hybrides, la représentation de sauts discrets dans une même phase est nécessaire. Pour modéliser cela, nous associons à chacun de ces sauts un événement discret σ . Un événement σ se produit à un temps t , si et seulement si $\sigma(t) \neq \sigma(t^+)$. Prenons par exemple un système pour lequel dans une de ses phases ce genre de sauts se produit. Supposons que pour effectuer un saut, nous testons une expression booléenne formée par les variables d'état continues. Nous correspondons alors à σ la valeur 0 si cette dernière est fautive et la valeur 1 si elle est vraie. Si l'état continu passe après un événement σ , de x_1 à x_2 , le modèle sera alors donné par :

- L'espace d'état est $X' = X_D \times \{0, 1\} \times X_C$
- Les conditions initiales sont $I' = I_X \times \{0\}$
- $f'_q(q, \sigma, x, t) = f_q(q, x, t)$, $\sigma \in \{0, 1\}$, $x = x_2$ si $\sigma = 1$ et $x = x_1$ si $\sigma = 0$
- $\mu_2(q, \sigma) = \mu_2(q)$ et $\mu_3(q, \sigma, q) = \mu_3(q, q) = (\{q\} \times \mu_2(q))$.

III-2-2 Modèle graphique [22]

Si l'état discret ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il est intéressant de représenter l'automate hybride par un graphe. Nous pouvons associer un graphe à un automate hybride en usant des notions suivantes :

1. Les nœuds : le nombre de nœuds dans un graphe est équivalent au nombre de valeurs possibles de l'état discret. Les nœuds sont indexés (notés) par les valeurs des variables discrètes $q \in X_D$ auxquelles ils correspondent.
2. L'évolution continue : pour chaque nœud q , nous associons une fonction f_q décrivant l'évolution des dynamiques continues. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} f_q : X \times T &\rightarrow X_C \\ (q, x, t) &\rightarrow f_q(x, t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

3. L'ensemble invariant d'un nœud : à chaque nœud q , nous correspondons un ensemble invariant défini par : $\text{inv}(q) = \{x \in X_C / x \in \mu_2(q)\}$. Ceci implique qu'un système demeure en q si et seulement si $x \in \text{inv}(q)$.
4. Le garde de transition : à toute transition $q \rightarrow q'$, nous associons un garde qui détermine les conditions de transition. C'est généralement un ensemble d'expressions booléennes des variables d'état continues. Il est noté par $\text{En}(q, q')$.

5. Événements de transition : à la transition $q \rightarrow q'$, nous correspondons l'ensemble des valeurs données par : $\text{Res}(q, q') = \{x' \in X_C / x' \in I(q')\}$. Ceci implique qu'après un franchissement de transition émanant de (q, x) et atteignant l'état (q', x') , x' doit appartenir à l'ensemble des conditions initiales de q' .

En utilisant toutes ces notions, le graphe de l'automate hybride aura la forme suivante :

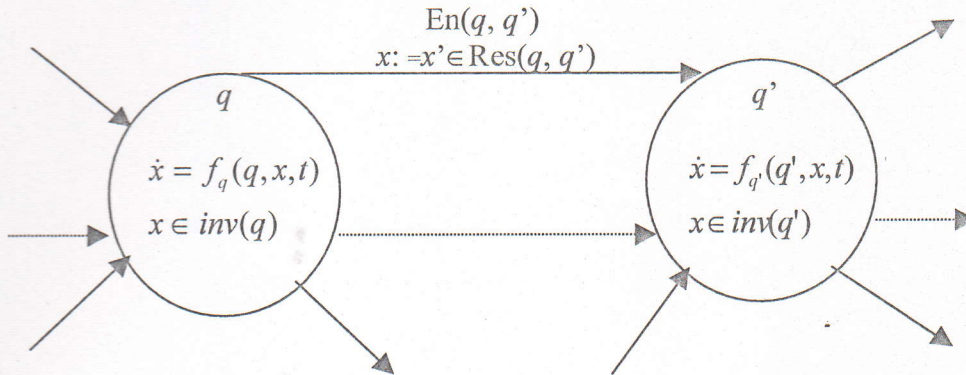


Figure 1.4 : «Exemple de graphe d'automate hybride»

Exemple 1.5 [1]

Nous considérons un thermostat qui contrôle la température d'un système de production. La variable x modélise la température du système. Le système de chauffage est à deux états *on/off* auxquels, nous associons deux variables discrètes $q_1=1$ (*on*) et $q_2=0$ (*off*). En q_1 , x suit une équation différentielle de la forme $\dot{x} = -x + 4$ et en q_2 , $\dot{x} = -x$. L'objectif de contrôle est de maintenir la température entre 1 et 3.

Le système ainsi décrit peut être représenté par le graphe suivant :

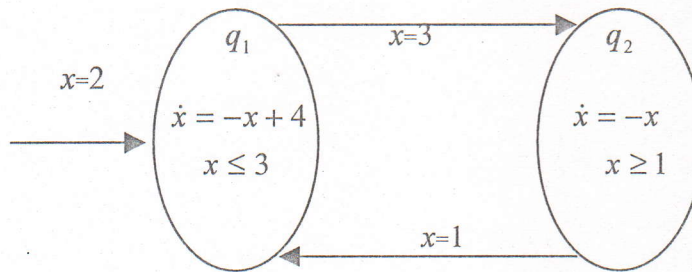


Figure 1.5 : «L'automate hybride correspondant au thermostat»

Dans ce cas :

$$\text{Inv}(q_1) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}, \text{Res}(q_1, q_2) = \{3\}, \text{En}(q_1, q_2) = \{x=3\}, \mu_1(q_1) = \dot{x} = -x + 4 ;$$

$$\text{Inv}(q_2) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}, \text{Res}(q_1, q_2) = \{1\}, \text{En}(q_1, q_2) = \{x=1\}, \mu_1(q_2) = \dot{x} = -x$$

Exemple 1.6 [1]

Considérons un réservoir d'eau dans lequel le niveau est détecté à tout instant par un capteur, qui à son tour le transmet à un contrôleur (moniteur) qui actionne une pompe à deux états

on/off. Nous supposons que lorsque la pompe est en position *off*, le niveau, diminue de deux unités par seconde ; quand elle est en position *on*, il augmente d'une unité par seconde. Supposons aussi qu'initialement le niveau d'eau vaut une unité, et la pompe est en position *on*. L'objectif du système de commande est de maintenir ce niveau entre une et douze unités. Cependant, depuis l'instant où le moniteur signale une nécessité de changement d'état de la pompe et celui dont il devient effectif, il existe un délai de deux secondes. Le moniteur doit alors signaler une mise en position *on* de la pompe avant d'atteindre le niveau un, et la position *off* avant d'atteindre douze unités.

La figure suivante est une représentation graphique de l'automate hybride correspondant au système décrit précédemment. L'automate a quatre états discrets notés q_0, q_1, q_2 et q_3 respectivement ; dans les deux premiers, la pompe est en position *on*, et dans les deux derniers, elle est en position *off*. L'horloge l est utilisée pour spécifier les délais. Lorsque le système est en q_1 ou q_3 , le signal faisant passer la pompe de *on* à *off* ou de *off* à *on* est envoyé l secondes avant.

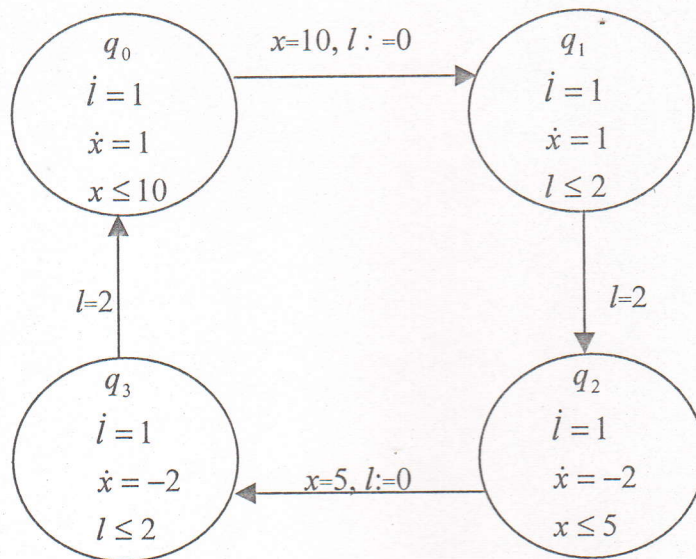


Figure 1.6 : «L'automate hybride correspondant au moniteur du niveau d'eau »

Dans ce cas :

$$\text{Inv}(q_0) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 10\}, \text{Res}(q_0, q_1) = \{(0, 10)\}, \text{En}(q_0, q_1) = \{x=10\}, \mu_1(q_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inv}(q_1) = \{l \in \mathbb{R}^+ / l \leq 2\}, \text{Res}(q_1, q_2) = \{(2, x)\}, \text{En}(q_1, q_2) = \{l=2\}, \mu_1(q_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inv}(q_2) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\}, \text{Res}(q_2, q_3) = \{(0, 5)\}, \text{En}(q_2, q_3) = \{x=5\}, \mu_1(q_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inv}(q_3) = \{l \in \mathbb{R}^+ / l \leq 2\}, \text{Res}(q_3, q_0) = \{(2, x)\}, \text{En}(q_3, q_0) = \{l=2\}, \mu_1(q_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Remarques

Dans les graphes d'automates hybrides, les transitions $q \rightarrow q$ sont permises. Des boucles sur le même nœud sont donc possibles.

III-2-3 Les automates hybrides proposés en littérature

i] L'automate de Tavernini [37]

Afin d'étudier les systèmes comportant les phénomènes d'hystérésis, Tavernini a proposé les automates hybrides dits «automates différentiels».

Un automate différentiel 'A' est le triplet (X, f, v) , où X est l'espace d'état de A, $X = \mathfrak{R}^n \times Q$, $Q = \{1, \dots, N\}$ est l'espace d'état discret de A et \mathfrak{R}^n est son espace continu ; f est un ensemble fini de familles de champs de vecteurs $f(., q) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $q \in Q$, représentant les dynamiques continues de A. $v_q : X \rightarrow Q$ est la fonction de transition discrète de A ; $v_q(.) = v(., q)$, $q \in Q$.

Il définit $I(q) = v_q^{-1}(q)$, l'ensemble des états discrets qui peuvent être atteints en une seule étape à partir de q . Il impose pour tout $q \in Q$ et tout $q' \in I(q)$, l'existence des ensembles $M_{q,q'} = v_q^{-1}(q')$; les ensembles $\partial M_{q,q'}$ sont dits «des limites d'aiguillage» de l'automate.

Il définit aussi, $M_q = \cup_{q' \in I(q)} M_{q,q'}$ et le domaine de capture de l'état q par :

$$C(q) = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid v(x, q) = q\}.$$

Les équations d'évolution sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), q(t)) \\ q(t) = v(x(t), q(t^-)) \end{cases} \quad (1.11)$$

Avec la condition initiale $(x_0, q_0) \in (\cup_{q \in Q} C(q)) \times Q$.

La notation t^- indique que l'état discret est continu à gauche par morceau. Commençons en (x_0, i) , la trajectoire d'état continu $x(.)$ évolue suivant $\dot{x} = f(x, i)$, si $x(.)$ rencontre $\partial M_{i,j}$ au temps t_1 , l'état devient alors $(x(t_1), j)$, à partir duquel le processus continu son évolution. Ceci est illustré par la figure 1.7 montrant l'évolution des trajectoires de l'état du système dans l'espace de phase. Ce modèle est noté ADT (automate différentiel de Tavernini).

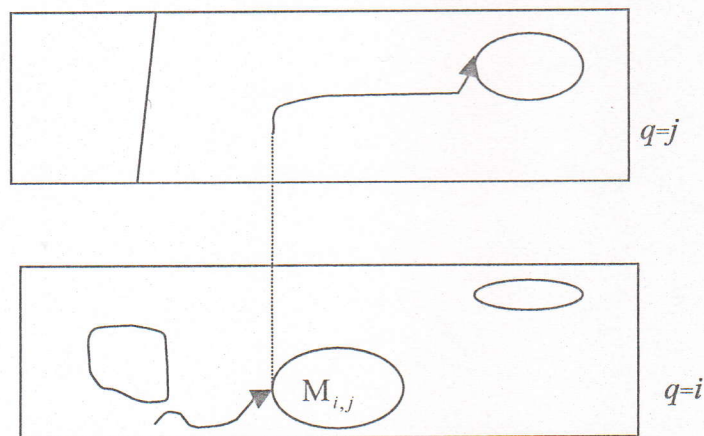


Figure 1.7 : «Schématisation des dynamiques de l'ADT»

Cet automate peut être formulé sous les notations précédentes (automate hybride) en adoptant les notations suivantes :

- $X = Q \times \mathfrak{R} = X_D \times X_C$
- $f: Q \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ devient $f: X_D \times X_C \rightarrow X_C$
- $C(q)$ représente $\mu_2(q)$
- $M_{q,q'} = \mu_3(q, q')$.

ii] L'automate de Back-Guckenheimer-Myers [5]

Ce modèle est de philosophie analogue à celle de l'ADT, il est cependant plus général puisqu'il autorise les sauts dans l'espace d'état continu (les sauts dans une même phase). L'espace d'état du modèle est $X = \cup_{q \in Q} X_q$, $Q = \{1, \dots, N\}$. Chaque X_q est un sous-ensemble de \mathfrak{R} . Il faut noter que les ensembles X_q ne sont pas forcément disjoints. Les dynamiques continues sont données par les champs de vecteur $f_q: X_q \rightarrow \mathfrak{R}$. Ces auteurs définissent aussi les ensembles U_q tels que $U_q \subset X_q$. Les dynamiques sont comme suit :

L'état démarre en $x_0 \in U_i$, il évolue suivant $\dot{x} = f_i(x)$; si $x(\cdot)$ croise ∂U_i (limite d'aiguillage) au temps t_1 , alors l'état saute instantanément à l'état $\varepsilon \in U_j$ et l'état global devient donc (ε, j) , d'ici le processus continue son évolution, comme le montre la figure 1.8. Le modèle est noté BGM.

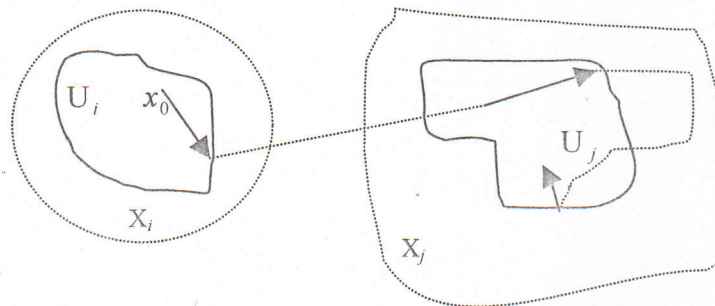


Figure 1.8 : «Exemple de dynamiques du modèle BGM »

En adoptant les notations précédentes, nous avons :

- $X = \cup X_q = X_D \times X_C$
- $x(\cdot)$ croise ∂U_i est équivalent à la génération d'événement σ . Donc, une fois que l'état croise ∂U_i , un événement σ est généré. En fonction de la valeur de ce dernier, un saut d'état dans le même état discret se produit ou un saut vers un autre état discret est provoqué.
- Les autres notations sont similaires à celles adoptées pour le modèle de Tavernini.

III-2-4 Interconnexion d'automates [22]

Les systèmes complexes sont souvent modélisés par l'interconnexion de plusieurs automates hybrides. Chacun d'eux est vu comme un sous-système utilisé pour décrire une fonctionnalité particulière du système global. Dans une interconnexion, les sorties des uns deviennent les entrées des autres. Il faut distinguer trois types d'entrées pour chaque sous-système :

- Les entrées locales : qui sont spécifiées localement par les interconnexions des sorties des différents automates hybrides (sous-systèmes) constituant le système complexe.
- Les entrées de l'environnement : sont les perturbations (les bruits ou les dynamiques qui ne sont pas modélisées) qui agissent sur le système complexe.
- Les entrées de coordination : qui sont utilisées pour la coopération avec d'autres systèmes complexes.

Ces différentes entrées peuvent être schématisées par la figure 1.9 suivante :

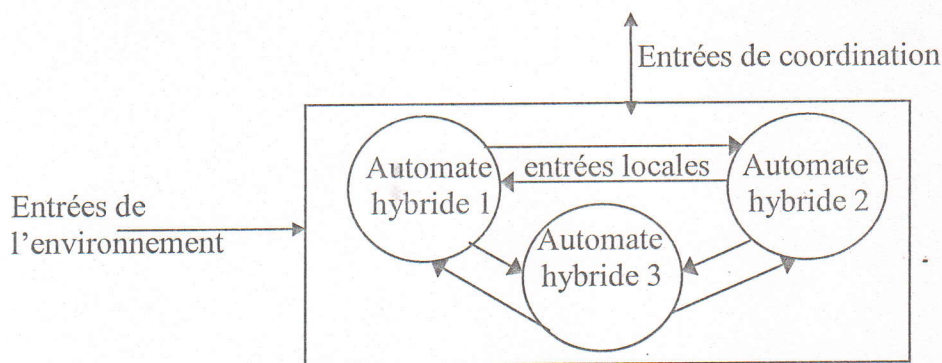


Figure 1.9 : «Exemple de schématisation d'un système complexe»

Exemple 1.7 [1] *contrôleur de la barrière du chemin de fer*

Nous voulons modéliser un système de contrôle pour la traversée d'un chemin de fer en utilisant un automate hybride. Le système est constitué de trois processus : un train, une barrière, et un contrôleur de la barrière. La variable x représente la distance du train de la barrière, \dot{x} est sa vitesse. Initialement, le train est loin de la barrière et roule à une vitesse qui varie entre 48 et 52 mètres par seconde. Quand le train s'approche de la barrière, un capteur placé à une distance de 1000 mètres de la traversée détecte le train et envoie le signal *app* au contrôleur. Il peut alors ralentir à une vitesse comprise entre 40 et 52 mètres par seconde. Si le contrôleur reçoit le signal de l'approche *app*, il exige 5 secondes pour envoyer l'ordre *baissier* à la barrière. Le délai du contrôleur est modélisé par l'horloge z . Si la barrière est ouverte, elle sera baissée de 90 degrés à 0 avec une vitesse de 20 degrés par seconde ; la position de la barrière en degré est modélisée par la variable y . Un autre capteur placé à 100 mètres après la traversée, détecte le départ du train et le signale au contrôleur par le signal *quitter*, qui après un autre délai de 5 secondes, envoie la commande *élever* à la barrière. Nous supposons que la distance entre deux trains consécutifs est au moins de 1500 mètres, alors, lorsque le capteur détecte le départ d'un train, le suivant est à au moins 1500 mètres de la traversée. Le contrôleur doit accepter les signaux *app* et *quitter* à tout instant, et la barrière doit accepter ses commandes. Nous concevons le contrôleur de telle sorte qu'un signal *quitter* est ignoré si la barrière est sur le point d'être baissée, et un signal *app* fait toujours baisser la barrière. Les trois automates hybrides qui modélisent le train, la barrière et le contrôleur sont donnés par les figures suivantes. Le système global est donc modélisé par l'interconnexion de ces trois automates.

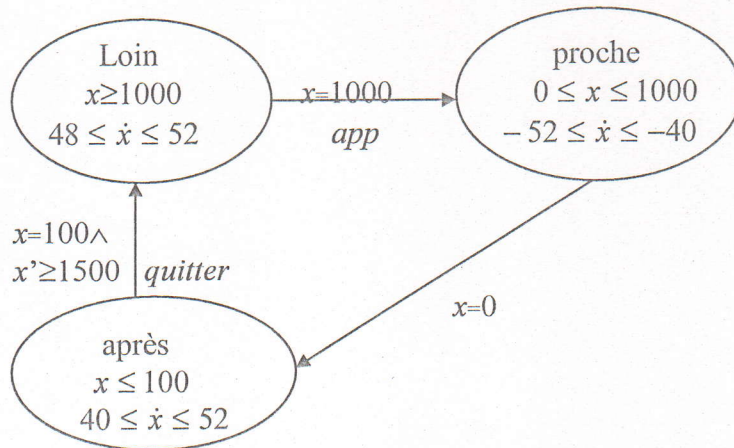


Figure 1.10 : «L'automate hybride représentant le train»

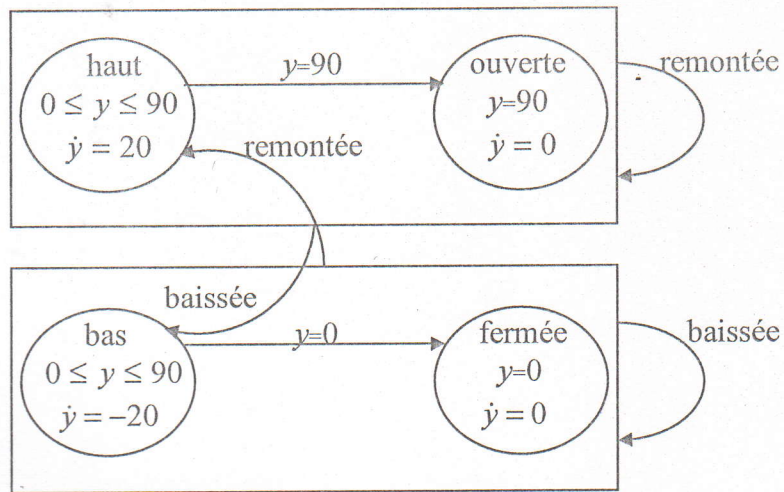


Figure 1.11 : «L'automate hybride représentant la barrière»

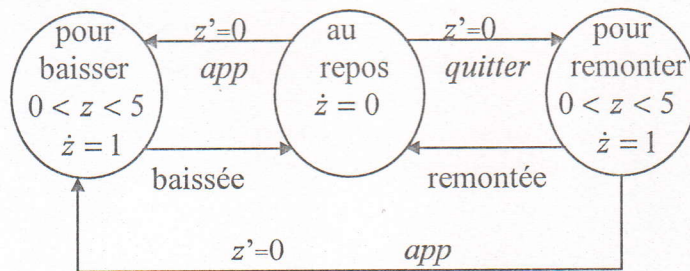


Figure 1.12 : «L'automate hybride représentant le contrôleur»

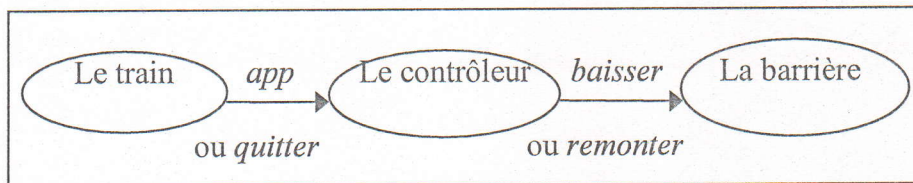


Figure 1.13 : «L'interconnexion d'automates hybrides représentant le contrôleur de la barrière d'un chemin de fer»

IV Modélisation des systèmes hybrides par les systèmes à interface

Cette modélisation est une représentation purement analytique des systèmes hybrides basée essentiellement sur un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux différences. Dans cette modélisation, le contrôleur est explicite puisqu'il est entièrement séparé du système à commander. Une interface est dans ce cas utilisée pour relier la partie discrète et la partie continue.

Nous allons présenter dans ce qui suit, les deux principaux modèles à interface proposés en littérature, ainsi qu'un modèle à interface généralisé.

IV-1 Le modèle d'Antsaklis [2]

Un modèle à interface a été proposé par Antsaklis [2]. Comme le montre la figure 1.14, ce modèle est divisé en trois parties qui sont le système continu (à contrôler), le contrôleur SED (système à événements discrets) et l'interface.

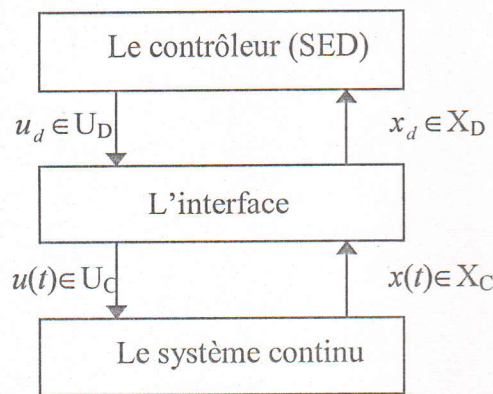


Figure 1.14 : «Le modèle à interface d'Antsaklis».

Le système continu

Il inclut toute la partie continue du système total. Il peut être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.12)$$

$x(t) \in X_C$ est l'état du système, $y(t) \in Y_C$ sa sortie et $u(t) \in U_C$ son entrée. Sans perdre de généralités, supposons que $y(t) = x(t)$.

Le contrôleur (SED)

Il est décrit par $\langle Q, X_D, U_D, \psi, \eta \rangle$ où Q est l'ensemble des états discrets, X_D est l'ensemble des événements du système, U_D est l'ensemble des commandes discrètes du contrôleur, $\psi: Q \times X_D \rightarrow X_D$ est la fonction de transition d'état et $\eta: Q \rightarrow U_D$ est la fonction de sortie.

L'action du contrôleur est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} q_i = \psi(q_{i-1}, x_{d_i}) \\ u_{d_i} = \eta(q_i) \end{cases} \quad (1.13)$$

avec $x_{d_i} \in X_D$ (c'est le i^{eme} événement du système), $q_i \in Q$, $u_{d_i} \in U_D$ (c'est la i^{eme} commande du contrôleur). L'état de transition de q_{i-1} à q_i , et la sortie du contrôleur sont générés immédiatement après la réalisation de l'événement du système x_{d_i} .

L'interface

Elle est constituée de deux transformées γ et α telles que :

- $\gamma : U_D \rightarrow \mathfrak{R}^m$ convertit chaque événement du contrôleur en un signal d'entrée pour le système continu, nous avons alors :

$$u(t) = \gamma(u_{d_i}) \quad (1.14)$$

u_{d_i} étant l'événement le plus récent. L'entrée du système est alors constante par morceaux (en escalier) qui change de valeur si l'événement du contrôleur se produit.

- $\alpha : \mathfrak{R}^n \rightarrow X_D$ est la fonction qui associe à l'espace d'état des événements discrets du système :

$$x_{d_i} = \alpha(x(t)). \quad (1.15)$$

α doit être une fonction qui réduit \mathfrak{R}^n en plusieurs régions. L'événement du système x_{d_i} n'est généré que lorsque le système rentre dans l'une de ces régions pour la première fois.

Remarques

1. Le système continu muni de son interface peut être considéré comme un système à événements discrets. Ainsi, le système contrôlé est décrit par un automate à états finis [2],[19],[35].
2. Ce modèle a été repris par Nerode et Khon [25] en utilisant un automate discret à la place du système à événement discret, l'interface est dans ce cas constituée d'un convertisseur analogique-continu et d'un convertisseur continu-analogique.

Exemple 1.8

Considérons le système donné dans l'exemple 1.5 précédent. Nous allons dans ce qui suit, montrer comment le modéliser par un système à interface. Supposons qu'initialement la température vaut 2 unités. La répartition de l'espace d'état est dans ce cas donnée par :

$$\alpha(x(t)) = \begin{cases} e_1 & x(t) \geq 3 \\ e_2 & x(t) \leq 1 \end{cases}$$

Alors, lorsque la température est supérieure ou égale à 3, l'événement du système e_1 sera généré, et reste activé jusqu'à ce que la température atteigne la valeur 1, l'événement e_2 sera

alors activé. L'interface génère deux entrées correspondant aux deux événements du contrôleur u_{d_1} et u_{d_2} comme suit :

$$\gamma(u_d(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_d(t) = u_{d_1} \\ 1 & \text{si } u_d(t) = u_{d_2} \end{cases}$$

Puisque $u(t) = \gamma(u_d(t))$, ceci veut dire que le système de chauffage sera en position *off* suivant l'événement du contrôleur u_{d_1} et l'inverse suivant l'événement du contrôleur u_{d_2} . Le contrôleur est alors un système à deux états discrets q_1 et q_2 . Il passe à l'état q_1 lorsque l'événement e_1 est reçu, se déplace vers l'état q_2 lorsque e_2 est généré. Nous notons alors, $\eta(q_1, e_1) = u_{d_1}$ et $\eta(q_2, e_2) = u_{d_2}$.

IV-2 Le modèle de Brockett [7]

Ce modèle est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), z[p]) \\ \dot{p}(t) = r(x(t), u(t), z[p]) \\ z[p] = \eta(x[t], z[p], \eta[p]) \end{cases} \quad (1.16)$$

$x(t) \in X_C \subset \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in U_C \subset \mathfrak{R}^m$, $p(t) \in \mathfrak{R}$, $v[p] \in V$, $z[p] \in Z$, $f: X_C \times U_C \times Z \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $r: X_C \times U_C \times Z \rightarrow \mathfrak{R}$ et $\eta: X_C \times Z \times V \rightarrow Z$.

V et Z sont des sous-ensembles de \mathbb{N} . La notation $[t]$ dénote la plus récente valeur de t à laquelle p devient entier. Ce type de modèle est noté MB (Modèle de Brockett). Brockett a utilisé d'une façon simultanée les commandes continues et discrètes en introduisant une "horloge" ou un "compteur" variable p . La première équation est celle des dynamiques continues et la dernière est celle des traitements symboliques du système. $u(t)$ est la commande continue exercée en temps t ; $\eta[p]$ est la $p^{\text{ème}}$ commande discrète (symbolique), elle est appliquée lorsque p passe par des valeurs entières. Les temps où p passe par des valeurs entières peuvent être vus comme des événements discrets du système dynamique hybride. La figure suivante montre les dynamiques du MB.

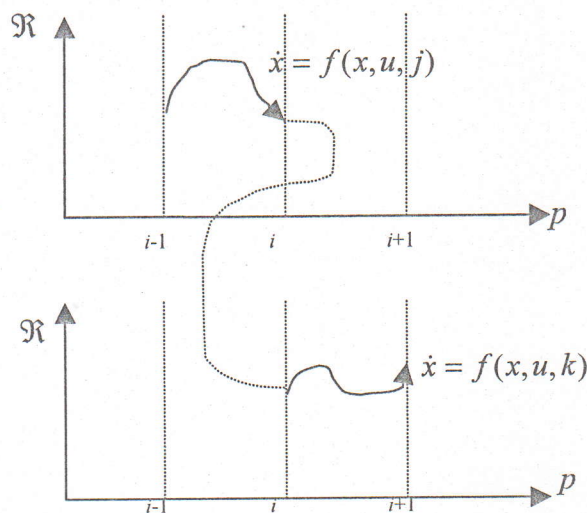


Figure 1.15 : «Exemple des dynamiques du modèle de Brockett »

Remarque $t_{[p]} = \{t \in \mathfrak{R}^+ : p(t) = [p]\}$

Remarque $t_{[p]} = \{t \in \mathcal{R}^+ : p(t) = [p]\}$

Exemple 1.9 [7] Description d'un système de contrôle d'une automobile

Cet exemple consiste en un système de conduite d'une automobile régi par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = [-a(x_2(t)) + u(t)]/[1 + z([p])] \\ \dot{p}(t) = l \\ z([p] + 1) = f(z([p]), x_1(t_{[p]}), x_2(t_{[p]})) \end{cases} \quad (1.17)$$

où $x_1, x_2 \in \mathcal{R}^n$ sont la vitesse linéaire et celle angulaire de l'engin respectivement, $u(t) \in \mathcal{R}^m$ est l'entrée externe telle que la position, le terme $a(\cdot)$ détermine la diminution de la capacité du système à produire des rotations à des vitesses angulaires élevées, $z \in \mathcal{N}$ représente le changement de la position, et $f: \mathcal{N} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{N}$ est la fonction de déplacement. La variable p représente une « horloge » ou un compteur, $l \in \mathcal{R}^+$ dépend implicitement de x_1, x_2, u et z . Ce modèle de Brockett peut être vu comme un système à interface. Il sera schématisé par les blocs donnés par la figure 1.16 suivante:

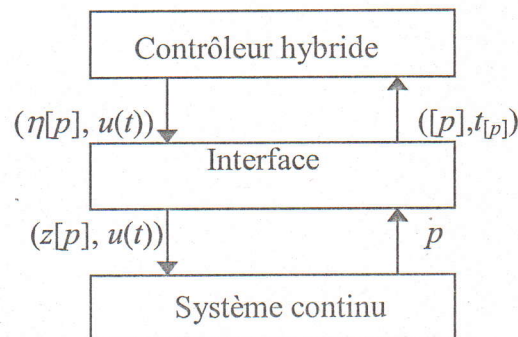


Figure 1.16 : « Le système à interface équivalent au modèle de Brockett »

Dans ce cas, l'interface a pour rôle de détecter les instants où p passe des valeurs entières. C'est donc un échantillonnage du temps qu'elle effectue en fonction des valeurs de l'horloge. Une fois que p passe par des entières, un événement est généré par l'interface et est envoyé au contrôleur qui doit, calculer en fonction de celui-ci les commandes discrète et continue correspondantes.

IV-3 Modèle à interface généralisé [29]

Le modèle à interface généralisé que nous présentons ci-dessous tient compte de toutes les particularités des deux modèles déjà exposés. C'est ainsi que ce modèle est capable de décrire l'aiguillage entre les champs de vecteurs, les sauts discontinus de l'état, l'influence de la partie discrète sur la partie continue et vice versa. Il est constitué d'un système hybride en boucle ouverte (SHBO) contrôlé par un contrôleur hybride (CH) comme le montre la figure 1.17 suivante :

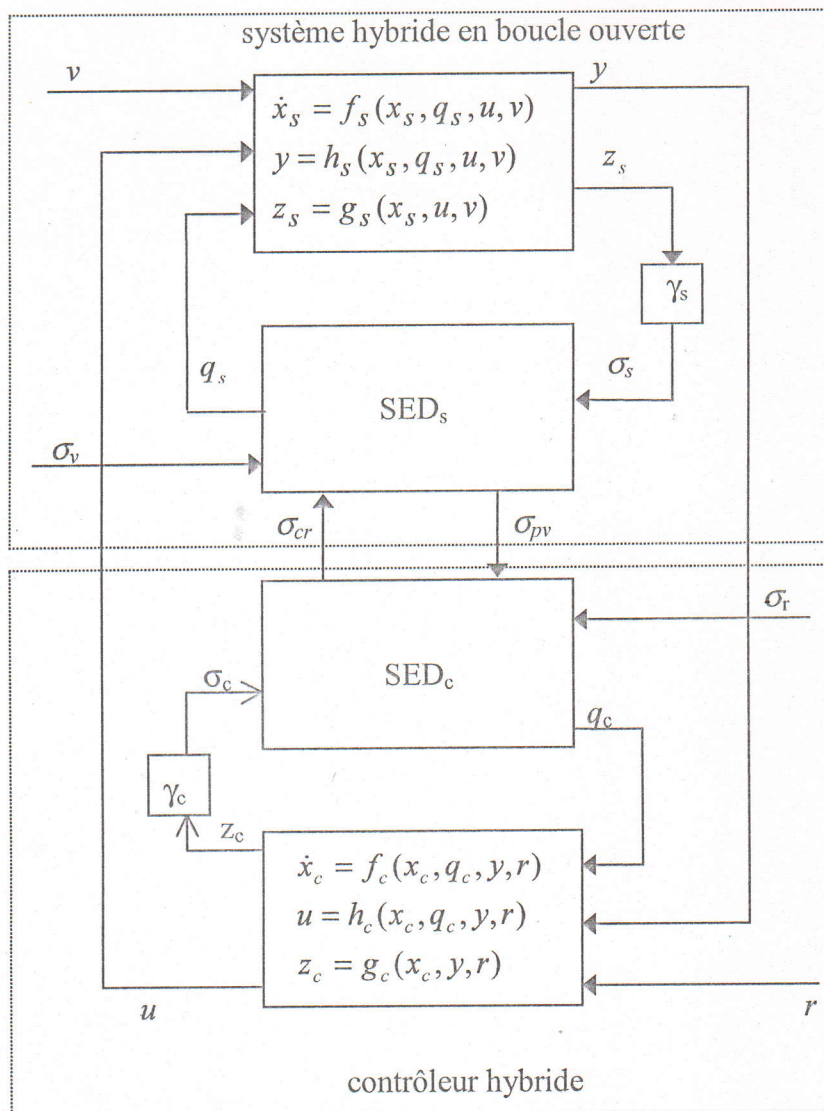


Figure 1.17 : «Schéma détaillé d'un modèle de système hybride à interface généralisé»

- Le SHBO est défini par le triplet :

$$SHBO = \langle D_{SHBO}, C_{SHBO}, I_{SHBO} \rangle. \tag{1.18}$$

a) D_{SHBO} : il représente la partie discrète du SHBO (c'est le système à événements discrets SED_s du système à contrôler) et est défini par le triplet : $D_{SHBO} = \langle Q_s, \Sigma_s, \psi_s \rangle$ qui consiste en un ensemble d'états discrets du SED_s , l'ensemble des événements d'entrée et la fonction de transition d'état respectivement.

- L'état du SED_s au temps t est $q(t) = q_i \in Q_s$ tel que $Q_s = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ où chaque $q_i \in \mathbb{R}^q$;
- Σ_s est l'ensemble des événements d'entrée, $\Sigma_s = \Sigma_s \cup \Sigma_v \cup \Sigma_{cr}$, $\sigma_s \in \Sigma_s$ est l'événement interne du système généré par le processus continu à l'aide du générateur d'événements γ_s ; $\sigma_v \in \Sigma_v$ est l'événement externe qui se produit sans influence

d'aucune dynamique modélisée, il n'est pas donc incluse dans Σ_s ; $\sigma_{cr} \in \Sigma_{cr}$ est l'événement issu de la partie discrète du contrôleur. σ_s et σ_v sont incontrôlables et σ_{cr} est contrôlable.

- La fonction de transition d'état $\psi_s: Q_s \times \Sigma_s \rightarrow Q_s$ détermine l'état suivant après un événement de $\sigma_s \in \Sigma_s$, $q(t) = \psi_s(q(t), \sigma_s)$.

- b) C_{SHBO} : décrit les dynamiques de la partie continue du SHBO et est représenté par les équations données par la figure 1.17, $x(t) \in \mathcal{X}^n$ est le vecteur d'état continu du système, $u(t) \in \mathcal{U}^m$ est le vecteur de contrôle externe et $v(t) \in \mathcal{V}^k$ est un vecteur externe de perturbations qui affectent l'état continu. La fonction f_s est supposée continue pour l'état constant $q(t)$. La sortie est $y(t) \in \mathcal{Y}^p$ est générée par la fonction h_s . La fonction g_s donne le signal $z \in Z_s \subseteq \mathcal{X}^d$ qui est l'entrée du générateur d'événements γ_s de l'interface.

Pour exprimer les sauts dans la trajectoire d'état continu, nous utilisons la fonction de transition ϕ_s telle que :

$$x(t) = \phi_s(x(t), q(t), \sigma_s) \quad (1.19)$$

Elle détermine l'état prochain après un événement $\sigma_s \in \Sigma_s$, qui a provoqué un saut dans l'espace d'état (c'est un saut dans la même phase).

- c) I_{SHBO} : c'est l'interface qui assure la génération des événements $\sigma_s \in \Sigma_s$ du système continu au SED_s, $\gamma_s: Z_s \rightarrow \Sigma_s$. Les événements se produisent pour deux raisons : - Si le système entre dans une région avec un comportement différent ; - S'il y a un saut dans l'état continu.

- Le contrôleur hybride (CH) est défini par le triplet

$$CH = \langle D_{CH}, C_{CH}, I_{CH} \rangle \quad (1.20)$$

où chaque partie est définie d'une façon identique aux éléments du SHBO. L'interaction entre les parties continues et les parties discrètes peut être utilisée pour représenter différentes sortes de comportements des systèmes hybrides.

Etant donné un SHBO, la conception d'un CH a pour but de satisfaire des spécifications pour le système hybride en boucle fermée (SHBF). En plus des buts généraux de robustesse et d'optimalité, les spécifications peuvent impliquer des restrictions sur le comportement du système en boucle fermée. Ces restrictions sont divisées en deux catégories :

- Restrictions sur la partie continue : pour les parties continues, les spécifications sont introduites sous forme d'invariants. Un invariant est considéré comme une répartition de l'espace d'état continu du SHBO.
- Restrictions sur la partie discrète : les spécifications discrètes sont introduites par un ensemble d'états interdits et autorisés pour le SED dans le but de limiter le comportement dynamique discret.

V Modélisation des systèmes hybrides par les Réseaux de Petri Hybrides

Les réseaux de Petri (RDP) sont un outil graphique d'aide à la modélisation et à l'évaluation des performances des systèmes de production. A l'origine, les réseaux de Petri modélisent les systèmes à événements discrets, ceci a donné lieu aux RDPDs. Par la suite, les RDPCs ont été développés afin de modéliser le comportement continu des systèmes de production. Récemment, Le Bail [18] a introduit les RDPHs afin de tenir compte de l'aspect hybride des systèmes de production. Les dynamiques continues sont décrites par un RDPC et les dynamiques discrètes par un RDPD. Une interface est utilisée pour relier les deux types de réseaux.

Un exemple de système de production dont le comportement est hybride, qui sera repris dans cette étude, est donné par la figure 1.18 suivante :

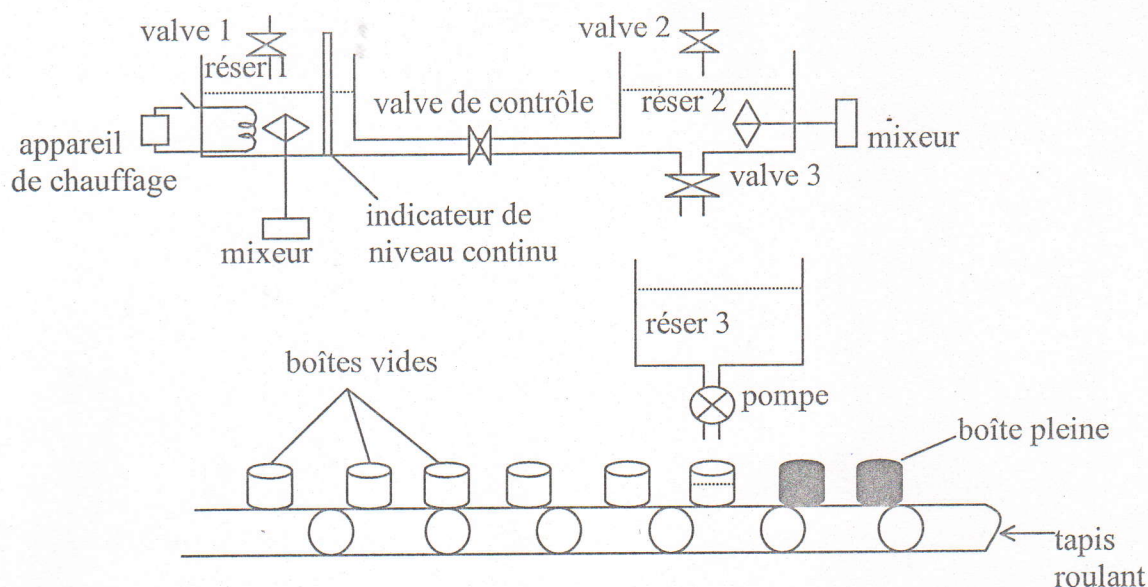


Figure 1.18 : «Exemple de processus pouvant être représenté par les RDPHs »

Il fonctionne comme suit :

Une solution est versée, à travers une valve, dans le réservoir 1 où elle est mélangée et chauffée. Le niveau de celle-ci est donné à tout instant par un indicateur de niveau continu. Une deuxième solution est versée dans le réservoir 2 à travers une autre valve. Si le niveau de cette dernière est inférieure à celui de la première solution, la valve de contrôle sera ouverte (elle sera fermée dans l'autre cas) permettant ainsi le passage de cette dernière dans le réservoir 2, où elle sera mélangée à celle du deuxième réservoir. La solution ainsi obtenue est versée dans le réservoir 3. Une pompe est alors utilisée pour remplir toute boîte vide qui lui sera juste en dessous. Chaque boîte remplie est déplacée par un tapis roulant.

Comme nous l'avons mentionné, un RDPH est constitué des trois parties suivantes :

V-1 Le RDPD

Les états d'un RDPD sont donnés par un vecteur de marquage $m(t) = m_i \in M$ tel $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ où chaque $m_i \in \mathbb{N}^n$, ceci implique que les éléments du vecteur de marquage sont des

entiers. Le changement d'état se produit lorsqu'une transition est franchie au temps τ_k , et est donné par l'équation suivante :

$$m(\tau_k) = A^d \cdot S(\tau_k^-) + m(\tau_k^-). \quad (1.21)$$

A^d est la matrice d'incidence correspondant aux poids des arcs et $S(.)$ est un vecteur dont un seul élément est non nul représentant la transition, correspondant à un événement σ_j , à franchir.

V-2 Le RDPC

Dans ce cas, au lieu de franchir les transitions à des instants donnés avec une durée nulle, il y a un franchissement continu avec un flux r qui peut être, externe généré par un signal d'entrée, ou peut aussi dépendre du vecteur de marquage continu x . L'évolution du RDPC peut être décrite par une équation différentielle non linéaire :

$$\dot{x}(t) = A^c(x(t)) \cdot r(x(t), t) ; x(t) \geq 0 \quad (1.22)$$

A^c est la matrice d'incidence correspondant aux poids continus des arcs. A cause du franchissement continu des transitions, l'espace d'état du RDPC est formé par des nombres réels et l'évolution des marquages devient une trajectoire continue. Les systèmes pour lesquels cette modélisation est recommandée sont : les systèmes à écoulement de fluide (exemple : processus de dosage et de mélange de fluides où les flux traversent plusieurs niveaux afin de subir différents traitements). Les relations entre les quantités physiques dans les systèmes à écoulement de fluide, où les dynamiques du fluide sont négligées, sont décrites par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \text{stockage} = \sum \text{flux en entrée} - \sum \text{flux en sortie}. \quad (1.23)$$

Les états correspondants au stockage peuvent être l'une des variables suivantes : les volumes, l'énergie, le poids, la concentration, ...etc. qui sont toutes des variables positives. Les places dans les RDPCs sont modélisées par des cercles doublés et les transitions par des rectangles, afin de les séparer de celles des RDPDs. Les valeurs initiales dans les RDPCs sont ignorées pour obtenir des graphes plus clairs.

Exemple de modélisation par les RDPC

Considérons les réservoirs 2 et 3 de l'exemple de la figure 1.18 précédente. Les dynamiques continues des réservoirs sont représentées par les graphes suivants (nous supposons dans ce cas que la valve de contrôle est fermée) :

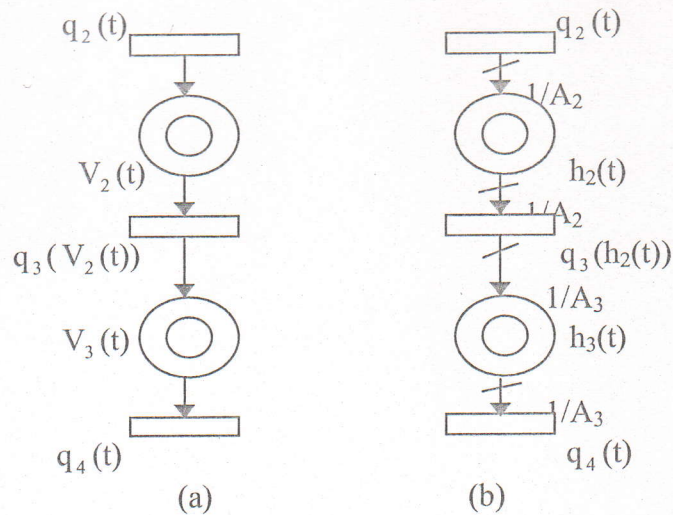


Figure 1.19 : «RDPC décrivant la balance du flux :

(a) volumes pour états, (b) niveaux pour états. »

Les équations de (b) peuvent être formulées par :

$$\begin{cases} \dot{h}_2(t) = \frac{1}{A_2} (q_2(t) - q_3(h_2(t))) \\ \dot{h}_3(t) = \frac{1}{A_3} (q_3(h_2(t)) - q_4(t)) \end{cases} \quad (1.24)$$

V-3 L'interface

L'interface est utilisée pour relier le réseau discret au réseau continu. Elle doit décrire, les changements des dynamiques continues (aiguillage entre les champs de vecteurs), les sauts d'état continu et la génération d'événements due aux limites dans l'espace d'état.

V-3-1 Modélisation de l'aiguillage entre les champs de vecteurs

Le changement brusque de vecteur est le résultat des non-linéarités dans les champs de vecteur continu. Ceci peut être modélisé par un RDPH en utilisant un élément d'aiguillage, comme le montre la figure 1.20. L'état du RDPD affecte le flux à travers une transition continue. Tel qu'il est marqué sur la figure 1.20, il n'y a aucun flux à travers la transition continue. Cependant, si la transition «activer» est franchie, P_1 sera marquée causant un écoulement de flux. Le franchissement de la transition désactiver stoppera le flux à nouveau. Les actionneurs à deux états comme les valves ou les robinets peuvent être représentés par cette structure.

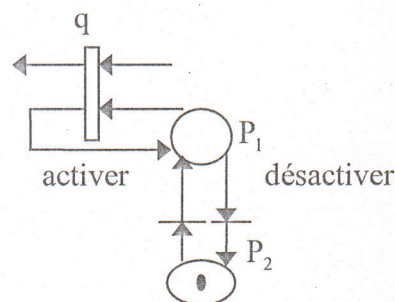


Figure 1.20 : «Structure représentant l'aiguillage entre les champs de vecteurs»

V-3-2 Les sauts continus

un saut d'état continu peut être modélisé en connectant une place continue à une transition discrète. Le poids de l'arc intermédiaire ΔX décide de l'amplitude du saut. Si une place continue est suivie par une transition discrète et une place discrète, alors le marquage discret est interprété comme une quantification (proportion) du marquage continu.

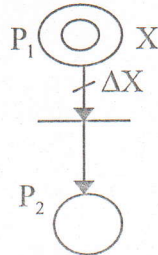


Figure 1.21 : «Représentation des sauts dans l'interface »

V-3-3 Génération d'événements

Lorsque des états continus spécifiques sont atteints, un événement qui peut affecter le comportement discret est généré.

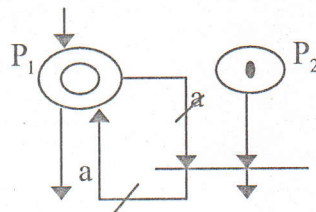


Figure 1.22 : «Structure de génération d'événements dans l'interface. »

Exemple 1.10 [29]

Le graphe ci-après est une modélisation par les RDPHs de l'exemple de la figure 1.18, par souci de clarté, nous avons omis de représenter toutes les notations des places et transitions:

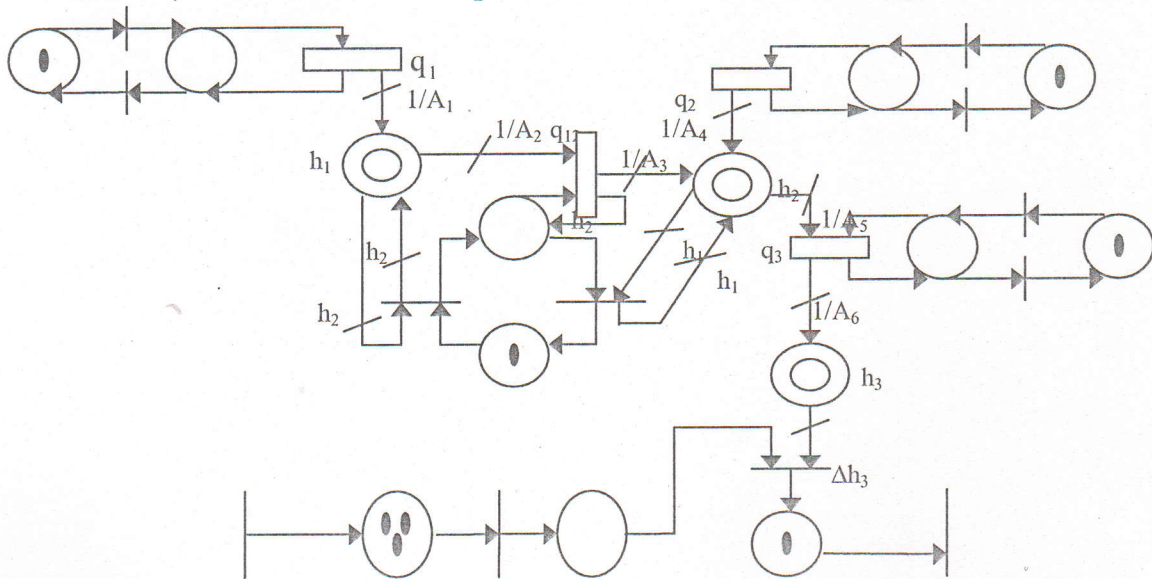


Figure 1.23 : «RDPH correspondant à l'exemple de la figure 1.18 précédente»

Les transitions continues q_1, q_{12}, q_2, q_3 sont affectées par le changement de structures. Pour modéliser la propriété de nonlinéarité physique de la valve de contrôle, il est nécessaire d'introduire la dépendance entre les valeurs (h_1, h_2) comme le montre la figure 1.23 ci-dessus.

La transition continue q_{12} est franchie lorsque le niveau du réservoir 2 est en dessous du niveau du réservoir 1, et ceci est modélisé par les arcs des places continues affectant les transitions discrètes représentant le changement d'état de la valve de contrôle. Celle-ci est donc ouverte si $h_1 \geq h_2$ et fermée dans la cas contraire.

La place continue h_3 représente le niveau du réservoir 3. La place discrète PR (position de remplissage) est à l'entrée d'une transition discrète qui sera franchie si et seulement $h_3 \geq \Delta h_3$ et PR marquée. Une fois la transition franchie, Δh_3 unités sont retirées de la hauteur h_3 . Il y a donc un saut dans le niveau du réservoir 3. Le franchissement de la transition provoque le marquage de la place BR (boîte remplie), représentant ainsi une quantification d'une valeur Δh_3 de l'état h_3 .

VI Modélisation des systèmes hybrides par les réseaux à flux hybrides

L'approche proposée est dite, réseaux à flux hybrides (RFHs); elle est basée sur la représentation graphique d'un système hybride par un ensemble de réseaux discrets et continus. Ces réseaux sont utilisés pour modéliser une large classe de systèmes hybrides non linéaires. Ces réseaux ont été introduits par FLAUS et ALLA [12].

Un exemple de système hybride, qui sera repris dans cette étude, est donné par la figure 1.24 suivante :

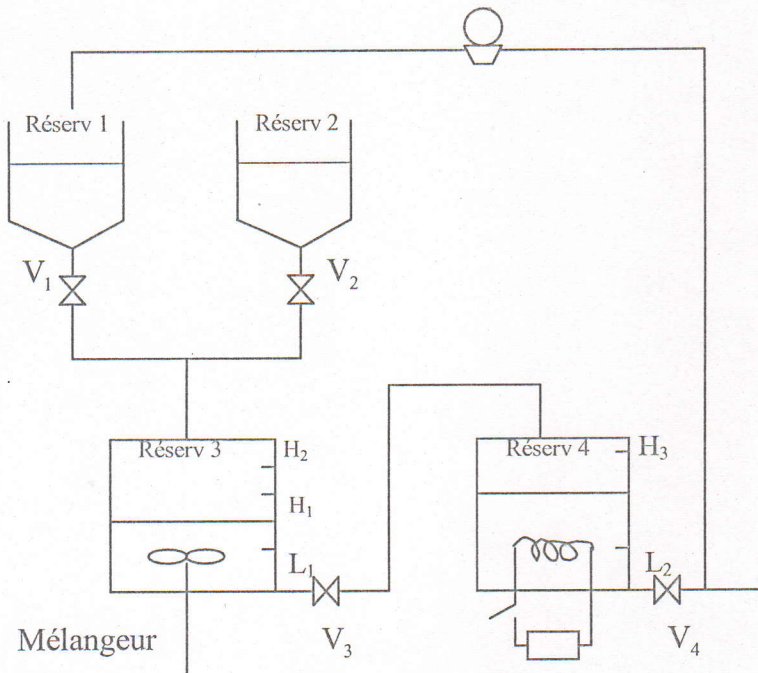


Figure 1.24 : «Exemple d'un système biochimique»

Il fonctionne comme suit :

La biomasse dans le réservoir 1 et le produit chimique dans le réservoir 2 sont mélangés dans le réservoir 3. Lorsque le mélange atteint une limite voulue, il est transféré dans le réservoir 4 où une réaction se produit durant une certaine période. Une partie du réservoir 4 est alors envoyée vers le réservoir 1 et le reste est envoyé vers l'autre partie du système.

Avant de présenter la modélisation des systèmes hybrides par les RFHs, donnons d'abord quelques définitions :

VI-1 Les réseaux à flux continus

C'est une structure graphique similaire à celle des RDPs. Dans les RFCs, les places sont utilisées pour représenter des variables extensives telles que le volume ou l'énergie dont la valeur représente le marquage de la place. Chaque place est reliée à une ou plusieurs transitions. Un RFC est défini par :

$$C = \langle P_c, T_c, I_c, O_c, \phi, X_0 \rangle \quad (1.25)$$

tels que :

- P_c est l'ensemble des places représentées graphiquement par des carrés arrondis. A chaque place est associée un nombre réel positif x qui est dit marquage ou valeur de la place. Notons par x_i le marquage de la i^{eme} place et $X(0) = X_0$ le marquage initial.
- T_c est l'ensemble des transitions représentées graphiquement par de petits rectangles.
- $I_c : P_c \times T_c \rightarrow \mathfrak{R}$ est la fonction d'entrée qui spécifie les arcs dirigés des places vers les transitions.
- $O_c : P_c \times T_c \rightarrow \mathfrak{R}$ est la fonction de sortie qui spécifie les arcs dirigés des transitions vers les places.
- $\phi : T_c \rightarrow F(\mathfrak{R}^{|P_c|}, \mathfrak{R})$ associe à chaque transition une fonction $f_i(x)$ bornée, $0 \leq f_i(x) \leq F_{\max}$, définie de $\mathfrak{R}^{|P_c|}$ dans \mathfrak{R} . Le flux à travers la transition T est proportionnel à la valeur des places d'entrée de cette transition et il est donné par :

$$rt = f_i(x) \prod_{I_c(i,t)=1} x_i \quad \text{avec} \quad 0 \leq f_i(x) \leq F_{\max}. \quad (1.26)$$

Pour une transition source, rt est le flux d'entrée.

Le flux d'entrée d'une place P_i à travers une transition T_j à laquelle la place est connectée avec un poids $O_c(i, j)$ [abréviation de $O_c(P_i, T_j)$] (cela veut dire que la place P_i est en sortie de la transition T_j) est égal à $O_c(i, j) \times rt_j$.

Le flux de sortie d'une place P_i à travers une transition T_j à laquelle elle est reliée par le poids $I_c(i, j)$ (P_i est en entrée de T_j) est égal à $I_c(i, j) \times rt_j$.

L'évolution de la valeur de la place est égale à la somme algébrique des flux d'entrée et des flux de sortie et est alors donnée par :

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{|T_c|} O_c(i, j) \cdot rt_j - \sum_{j=1}^{|T_c|} I_c(i, j) \cdot rt_j. \quad (1.27)$$

Cette définition permet de décrire plusieurs systèmes physiques.

Exemple 1.11 [12]

Pour illustrer cette notion, nous avons construit le RFC des trois premiers réservoirs, isolés, du système donné par la figure 1.24. Nous supposons dans ce cas que le flux à travers chaque valve V_1 , V_2 et V_3 est supposé proportionnel à la hauteur du liquide, et sa valeur est égale à $q_{vi} \cdot h_i$. Les poids des arcs sont égaux à 1 et le flux à travers les transitions T_j est donné par :

$$rt_i = \frac{q_{vi}}{s_i} \cdot x_i \quad (1.28)$$

Où s_i et x_i sont respectivement la surface du réservoir i et le volume du liquide dans celui-ci.

Les équations régissant l'évolution du système sont :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{q_{v3}}{s_1} x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{q_{v3}}{s_2} x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = +\frac{q_{v3}}{s_1} x_1 + \frac{q_{v3}}{s_2} x_2 - \frac{q_{v3}}{s_3} x_3 \end{cases} \quad (1.29)$$

Le RFC équivalent au système décrit ci-dessus est donné par la figure suivante:

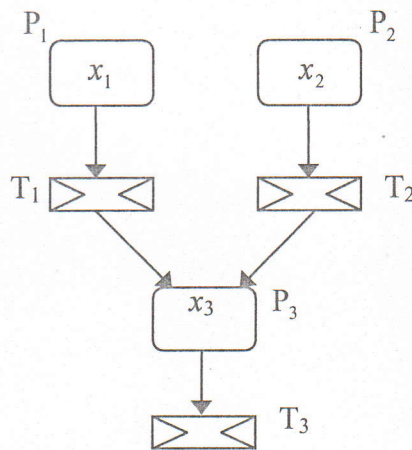


Figure 1.25 : «RFC équivalent au système de l'exemple de la figure 1.24 ».

L'équation d'état

L'évolution du marquage d'un RFC peut être écrite sous forme d'équation vectorielle. D'abord nous définissons, la matrice d'entrée D_c^- dont chaque élément d_{ij}^- est le poids de l'arc allant de P_i vers la transition T_j , la matrice de sortie D_c^+ dont chaque élément d_{ij}^+ est le poids de l'arc allant de la transition T_j vers la place P_i . L'évolution du marquage du RFC est alors donné par l'équation d'état suivante :

$$\frac{dx}{dt} = [D_c^+ - D_c^-]r(t) \quad (1.30)$$

avec

$$r(t) = \begin{bmatrix} f_1(x) \cdot \prod_{I_c(i,1) \neq 0} x_i \\ \vdots \\ f_j(x) \cdot \prod_{I_c(i,j) \neq 0} x_i \\ \vdots \\ f_{n_t}(x) \cdot \prod_{I_c(i,n_t) \neq 0} x_i \end{bmatrix}$$

VI-2 Les réseaux à flux hybrides

Pour modéliser les aspects continus et discrets d'un système hybride, nous utilisons ceux qui s'appellent les (RFH). Cet outil de modélisation est basé sur la combinaison de RFCs et de RDPDs, nous dirons que le RDPD contrôle le RFC et réciproquement.

La validation d'une transition implique que toutes les places en entrée sont non vides, l'évolution du marquage du réseau reste similaire à celui des RDPDs. Dans ce type de réseaux, deux sortes d'influences sont à distinguer, à savoir, l'influence de la partie discrète sur la partie continue et vice versa. (Ce qui constitue l'interface entre les deux parties).

VI-2-1 Influence de la partie discrète sur la partie continue

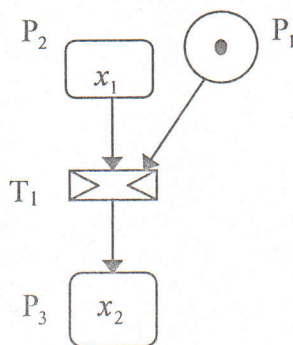


Figure 1.26 : «Influence de la partie discrète sur la partie continue »

Comme le montre la figure 1.26, l'interface entre la partie discrète et la partie continue est assurée par, le contrôle d'une transition continue par une place discrète. Le flux de la transition est alors égal à :

$$rt'_1 = m(P_1).rt_1 \quad (1.31)$$

$m(P_1)$ est le marquage de la place discrète utilisée pour le contrôle, rt_1 est le flux continu défini précédemment.

Généralement, le marquage d'une place est une variable booléenne. Si ce n'est pas le cas, il doit être noté que le flux est proportionnel au marquage.

Remarque

Le marquage de la place P_1 n'est pas modifié lorsque la transition T_1 est franchie.

VI-2-2 Influence de la partie continue sur la partie discrète

Elle est assurée par certaines conditions sur la partie continue pour valider la transition discrète. Il existe deux types d'influence :

- La première est donnée par la figure 1.27-a, où la transition T_1 est validée si $m(P_1) > 0$ et $x_2 > g(x)$.
- Le second type d'influence est donné par la figure 1.27-b, il est caractérisé par l'utilisation d'un arc inhibiteur, qui fait que la transition T_1 n'est validée que si $m(P_1) > 0$ et $x_2 < g(x)$.

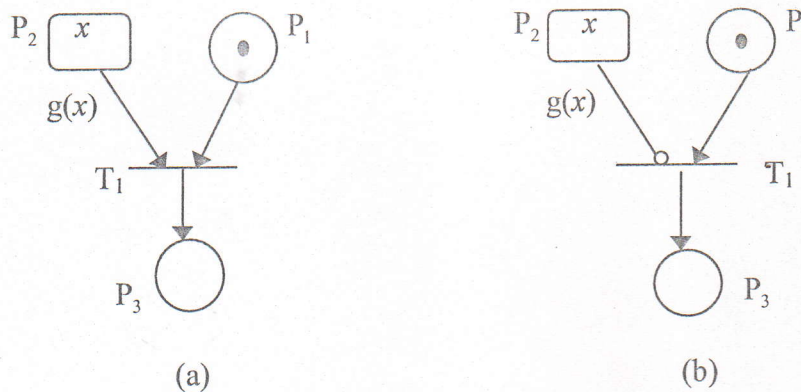


Figure 1.27 : «Influence de la partie continue sur la partie discrète »

Dans les deux cas, le franchissement de T_1 va influencer sur le marquage de P_1 (de la même façon que pour le franchissement d'une transition dans un RDP), mais ne va pas affecter le marquage (ou la valeur) de P_2 .

Un RFH est alors défini par le quintuplé

$$H = \langle C, Z, \psi_{c/d}, \psi'_{c/d}, \psi_{d/c} \rangle \quad (1.32)$$

où :

- C est le RFC défini précédemment.
- Z est le RDP.
- $\psi_{c/d} : P_c \times T_d \rightarrow \mathfrak{R}$ spécifie les transitions discrètes T_j contrôlées par une place P_i . Si $\psi_{c/d}(i, j) \neq 0$, la transition est validée si $x_i \geq \psi_{c/d}$ et si elle est validée par le reste du réseau. Si $\psi_{c/d}(i, j) = 0$, il n'y a aucun arc entre P_i et T_j .
- $\psi'_{c/d} : P_c \times T_c \rightarrow \mathfrak{R}$ spécifie les transitions T_j inhibées par P_i . si $\psi'_{c/d}(i, j) \neq 0$, la transition n'est alors validée que si $x_i \leq \psi'_{c/d}(i, j)$ et validée par le reste du réseau.
- $\psi_{d/c} : P_d \times T_c \rightarrow \{0, 1\}$ spécifie les transitions continues T_j contrôlées par la place discrète P_i . Le flux à travers la transition continue est alors égal, comme expliqué ci-dessus, au produit du marquage de la place discrète par le flux continu. (Nous supposons ici que le marquage d'une place discrète est une variable booléenne).

Exemple 1.12 [12]

Le système donné par la figure 1.24 peut être modélisé par le RFH donné par la figure 1.28. Les places P_4 et P_5 ne doivent pas être vides pour entamer le processus. Dans ce RFH, P_1 est associée à l'état des deux valves V_1 et V_2 (ouvertes ou fermées en même temps), P_2 correspond à V_3 et P_3 à V_4 . Le marquage de l'une de ces places est équivalent à l'ouverture de la valve à laquelle elle correspond.

Les places continues P_4, P_5, P_6 et P_7 sont associées aux réservoirs 1, 2, 3 et 4 respectivement. P_8 correspond au reste du système.

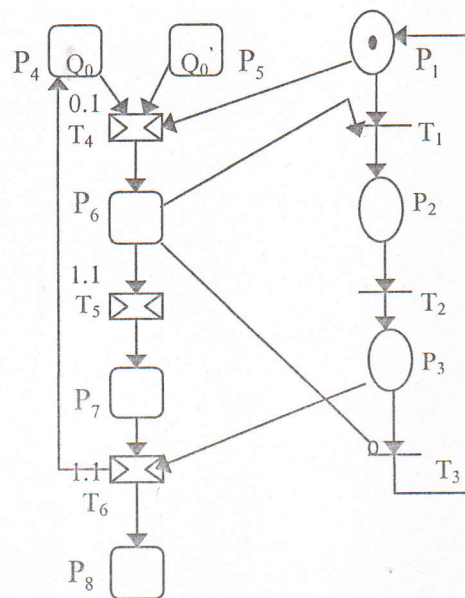


Figure 1.28 : «Le réseau à flux hybride correspondant au système biochimique »

VII- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dressé un panorama des diverses modélisations de systèmes hybrides proposées dans la littérature. Nous avons distingué deux types de représentation à savoir, une représentation analytique, et une autre graphique. Nous avons pu répartir les modèles présentés en trois classes différentes qui sont :

- Les modèles à automates hybrides utilisant les deux types de représentation. Des exemples d'illustration pour chacune d'elles ont été proposés. Dans ce type de modèle, le contrôleur et l'interface entre la partie discrète et continue sont implicites et sont juste décrits par un ensemble de phases permises et de phases interdites.
- Les modèles à interface qui sont essentiellement basés sur la représentation analytique et utilisant une interface pour relier la partie continue à la partie discrète. Dans ce type de modèle, le contrôleur est explicite puisqu'il est séparé du système à commander. C'est le modèle le plus utilisé par les automaticiens (contrôleurs) pour la commande des systèmes hybrides. Nous avons présenté deux types de modèles à interface très répandus en

littérature et qui sont : le modèle d'Antsaklis et le modèle de Brockett. La synthèse de la bibliographie disponible nous a permis de présenter un modèle à interface généralisé capable de décrire tous les phénomènes hybrides.

- Les modèles graphiques utilisant un ensemble de réseaux de Pétri hybrides ou un ensemble de réseaux à flux hybrides. Pour chaque type de réseaux des exemples d'illustration ont été présentés.

En prenant compte d'une façon simultanée aussi bien des dynamiques continues que des dynamiques discrètes, la modélisation hybride donne lieu à une représentation mathématique plus complète du système et permet ainsi une meilleure compréhension de l'évolution de l'état. Cette forme de modélisation a permis d'unifier les représentations de tous les systèmes dont le comportement continu est assujéti à des événements discrets en allant du système continu commandé par un ordinateur numérique aux systèmes à structure variable,... etc. Cette modélisation donne aussi, sur le plan théorique, des issues nouvelles pour les problèmes d'analyse par la redéfinition des propriétés classiques telles que stabilité, contrôlabilité, et pour les problèmes de commande en élaborant des stratégies de contrôle plus appropriées. Ces deux derniers points (stabilité et commande) feront l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 2

STABILITE ET COMMANDE DES SYSTEMES HYBRIDES

I- Introduction

La description des systèmes exhibant simultanément des comportements continus et discrets par des modèles hybrides trouve son intérêt dans l'analyse des propriétés qualitatives de ce système et dans la mise en œuvre d'une stratégie de commande. L'une des propriétés fondamentale est la stabilité. En effet, la stabilité constitue une phase importante dans la synthèse d'une loi de commande, aussi bien que dans l'analyse des comportements dynamiques du système en boucle fermée. L'objet de ce chapitre est d'une part d'aborder, du moins pour une certaine classe des systèmes hybrides, l'étude de la stabilité et d'autre part de présenter quelques schémas de stratégies de commande proposés par différents auteurs.

II Stabilité des systèmes hybrides

Il est bien connu que pour les systèmes non linéaires ou linéaires de nature continue ou discrète, la seconde méthode de Lyapunov a été et restera l'une des méthodes la plus efficace pour l'étude de la stabilité (cf. Annexe). Il est donc tout à fait naturel de penser à élargir cette méthode aux systèmes hybrides. Malgré les fondements topologiques (définitions générales de la stabilité, notions d'invariants, etc.) introduits par Anthony N. Michel et al.[24],[40], il semble que la généralisation des résultats de stabilité acquis dans le cas des systèmes continus ou discrets n'est pas tout à fait évidente. D'ailleurs, dans le cas général de modèles hybrides, le problème reste entièrement ouvert. Néanmoins, quelques résultats intéressants ont été obtenus pour une certaine classe des systèmes hybrides. Nous allons essayer de présenter les résultats que nous avons jugés importants. La classe des systèmes privilégiée est décrite par les équations d'état suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), q(t)) \\ q(t) = \psi(x(t), q(t^-)) \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette classe englobe l'ensemble des systèmes à aiguillage schématisés par la figure 2.1 ci-dessous. Le paramètre d'aiguillage q peut représenter le résultat d'une stratégie de commande.

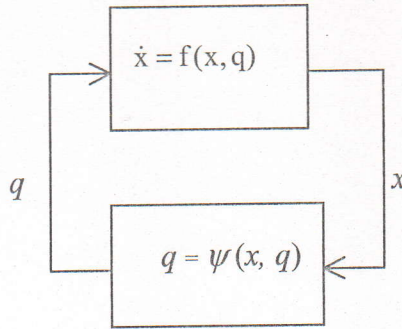


Figure 2.1 : «Systèmes à aiguillage »

La fonction ψ permet de définir un ensemble S_{ij} donné par :

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n / q_j = \psi(x, q_i)\} \tag{2.2}$$

Cet ensemble est en général donné sous forme d'équation $S(x)=0$ qui constitue une hypersurface (ij) . Dès que l'état x atteint cette hypersurface (ij) , la transition de q_i vers q_j a lieu. Chaque champ de vecteur $f(x, q_i), q_i \in Q$ est associé à une région $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$. La région Ω_i indique l'espace d'état autorisé (possible) pour l'évolution de l'état du système suivant la fonction $\dot{x} = f(x, q_i), q_i \in Q$. Parmi les raisons de restriction de $\dot{x} = f(x, q_i)$ à une région spécifique Ω_i , nous pouvons citer:

- $f(x, q_i)$ est le résultat de la conception d'un contrôleur local spécifique à la région Ω_i , et différents contrôleurs sont spécifiques à différentes régions.
- La fonction $f(x, q_i)$ est acceptable uniquement dans la région Ω_i .

Remarque

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \mathbb{R}^n ; \exists i, j, i \neq j \text{ tel que } \Omega_i \cap \Omega_j \neq \Phi$$

Nous considérons les hypothèses suivantes:

- les S_j sont données
- la trajectoire $x(t)$ évolue, d'un état initial $(x_0, q_0) \in I$, suivant l'équation (2.1)
- l'origine est l'unique point d'équilibre
- l'espace d'état hybride $X = \mathbb{R} \times Q$ est réparti en l régions disjointes $\tilde{\Omega}_i, i=1, \dots, l$. Dans chaque région $\tilde{\Omega}_i, i=1, \dots, l$, une fonction V_i est utilisée pour mesurer l'énergie du système hybride.

L'ensemble $\tilde{\Omega}_i^x \subseteq \mathbb{R}^n$ désigne la partie continue de $\tilde{\Omega}_i$. $\tilde{\Omega}_{ij}$ est l'ensemble des états continus pour lesquels la trajectoire $x(t)$, émanant de l'état initial $(x_0, q_0) \in I$, passe de $\tilde{\Omega}_i$ à $\tilde{\Omega}_j$ au temps t , cela veut dire que $x(t^-) \in \tilde{\Omega}_i$ et $x(t) \in \tilde{\Omega}_j$.

Théorème 3.1 [30]

S'il existe des fonctions scalaires $V_i : \tilde{\Omega}_i^x \rightarrow \mathfrak{R}$, chaque $V_i(x)$ étant différentiable pour tout $x \in \tilde{\Omega}_i^x$, $i=1, \dots, l$, et s'il existe des fonctions de classe k , $\alpha_i : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ et $\beta_i : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ telles que :

- $\forall x \in \tilde{\Omega}_i^x, \alpha_i(\|x\|) \leq V_i(x) \leq \beta_i(\|x\|), \quad i=1, \dots, l.$
- $\forall (x, q) \in \tilde{\Omega}_i, \dot{V}_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, l.$
- $\forall x \in \tilde{\Omega}_i, V(x) \leq V_i(x), \quad i=1, \dots, l; j=1, \dots, l.$

alors le point d'équilibre 0 est stable au sens de Lyapunov.

Remarque

Une fonction $\alpha : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ est dite de classe K si

$$\alpha(0)=0; \alpha(x)>0 \quad \forall x>0 \quad \text{et} \quad \alpha(x_1) \leq \alpha(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

Pour la stabilité asymptotique, nous avons le résultat suivant:

Théorème 3.2 [32]

S'il existe des fonctions scalaires $V_i : \tilde{\Omega}_i^x \rightarrow \mathfrak{R}$, chaque $V_i(x)$ étant différentiable pour tout $x \in \tilde{\Omega}_i^x$, $i=1, \dots, l$, et s'il existe des fonctions de classe k , $\alpha_i : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$, $\beta_i : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ et $\gamma_i : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ telles que :

- $\forall x \in \tilde{\Omega}_i^x, \alpha_i(\|x\|) \leq V_i(x) \leq \beta_i(\|x\|), \quad i=1, \dots, l.$
- $\forall (x, q) \in \tilde{\Omega}_i, \dot{V}_i(x) \leq -\gamma_i(\|x\|), \quad i=1, \dots, l.$
- $\forall x \in \tilde{\Omega}_i, V(x) \leq V_i(x), \quad i=1, \dots, l; j=1, \dots, l.$

Alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Pour la stabilité exponentielle, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.3 [30]

S'il existe des fonctions scalaires $V_i : \tilde{\Omega}_i^x \rightarrow \mathfrak{R}$, telles que chaque $V_i(x)$ est différentiable en x , pour tout $x \in \tilde{\Omega}_i^x$, $i=1, \dots, l$ et s'ils existent des nombres réels positifs α_i , β_i , γ_i , et un nombre naturel s tels que:

- $\forall x \in \tilde{\Omega}_i, \alpha_i \|x\|^s \leq V_i(x) \leq \beta_i \|x\|^s, \quad i=1, \dots, l.$
- $\forall (x, q) \in \tilde{\Omega}_i, \dot{V}_i(x) \leq -\gamma_i \|x\|^s, \quad i=1, \dots, l.$
- $\forall x \in \tilde{\Omega}_i, V(x) \leq V_i(x), \quad i=1, \dots, l; j=1, \dots, l.$

alors le point d'équilibre 0 est exponentiellement stable.

III Commande des systèmes hybrides utilisant la théorie de Lyapunov

Nous allons exploiter la notion de fonctions de Lyapunov afin d'élaborer des lois de commande stabilisant le système en boucle fermée. Plus précisément, nous allons déterminer les fonctions d'aiguillage ψ en vue de stabiliser le système.

Soit donc une fonction scalaire V_i correspondant à Ω_i , différentiable dans cette région et ayant une dérivée $\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \cdot f(x, q_i)$. Une des méthodes possibles pour calculer $\psi(x, q_i)$

est de vérifier la condition $\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \cdot f(x, q_i) \leq -\gamma_i \|x\|^s$ dans $\Omega_i, \gamma_i > 0, i=1, \dots, N$.

Cela veut dire que pour chaque région Ω_i , il doit exister une fonction $V_i(x)$, qui stabilise exponentiellement le système. Le résultat est formulé par le théorème suivant:

Théorème 3.4 [30]

Supposons que pour chaque paire $(f(., q_i), \Omega_i)$, il existe une fonction scalaire V_i , différentiable en x , pour tout $x \in \Omega_i, i=1, \dots, N$ qui satisfait :

- $\forall x \in \Omega_i, \alpha_i \|x\|^s \leq V_i(x) \leq \beta_i \|x\|^s, \quad \alpha_i > 0, \beta_i > 0, \quad i=1, \dots, N.$
- $\forall x \in \Omega_i, \dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f(x, q_i) \leq -\gamma_i \|x\|^s, \quad \gamma_i > 0, \quad i=1, \dots, N.$
- Chaque changement de vecteur de $f(., q_i)$ se produit dans $x \in \bar{S}_{ij}$, où \bar{S}_{ij} est définie par :

$$\bar{S}_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n / x \in \Omega_i, x \in \Omega_j, V(x) \leq V_i(x)\}.$$

Alors le système est exponentiellement stable.

Ce théorème est utilisé pour construire les ensembles d'aiguillage \bar{S}_{ij} qui garantissent la stabilité en boucle fermée du système. Ces ensembles \bar{S}_{ij} sont vus comme des régions d'aiguillage acceptables.

Exemple 2.1 [32]

Considérons un système ayant deux champs de vecteurs autorisés dans \mathfrak{R}^2 , et qui sont :

$$f(x, q_1) = \begin{bmatrix} -x_1 - 10x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ 100x_1 - x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f(x, q_2) = \begin{bmatrix} -x_1 + 100x_2 - 0.1e^{4\sin(x_1)}x_1 \\ -10x_1 - x_2 - 2e^{4\sin(x_1)}x_2 \end{bmatrix}$$

l'objectif de contrôle est de trouver des fonctions scalaires et une stratégie d'aiguillage pour que le système soit stable en boucle fermée.

Considérons les deux fonctions de Lyapunov : $V_i(x) = x^T \cdot P_i \cdot x$, $i=1,2$, avec :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10 & -0.05 \\ -0.05 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.005 \\ 0.005 & 10 \end{bmatrix}$$

$$V_1(x) = 10x_1^2 - 0.1x_1x_2 + x_2^2 \quad \text{et} \quad V_2(x) = x_1^2 + 0.01x_1x_2 + 10x_2^2$$

Nous pouvons démontrer facilement que ces deux fonctions vérifient les inégalités suivantes :

$$0.99\|x\|_2^2 \leq V_1 \leq 10.1\|x\|_2^2 \quad \text{et} \quad 0.99\|x\|_2^2 \leq V_2 \leq 10.1\|x\|_2^2 \rightarrow \text{condition 1 du théorème 3.3.}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1(x) = -20x_1^4 - 2x_2^4 - 20x_1^2 - 2x_2^2 + 0.2x_1^3x_2 + 0.2x_1x_2^3 - 22x_1^2x_2^2 + 0.2x_1x_2 \leq -0.99\|x\|_2^2 \\ \dot{V}_2(x) = -(2 + 0.2e^{4\sin(x_1)})x_1^2 - (40e^{4\sin(x_1)} + 19)x_2^2 - (0.001e^{4\sin(x_1)} + 200.01)x_1x_2 \leq -2.09\|x\|_2^2 \end{cases}$$

→ condition 2 du théorème 3.3.

En utilisant la stratégie d'aiguillage donnée par le théorème 3.3, nous obtenons les ensembles d'aiguillage suivants :

$$\begin{aligned} \bar{S}_{12} &= \{x \in \mathfrak{R}^2 / V_2(x) \leq V_1(x)\} = \{x \in \mathfrak{R}^2 / x_1^2 + 0.01x_1x_2 + 10x_2^2 \leq 10x_1^2 - 0.1x_1x_2 + x_2^2\} \\ &= \{x \in \mathfrak{R}^2 / -9x_1^2 + 0.11x_1x_2 + 9x_2^2 \leq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{21} &= \{x \in \mathfrak{R}^2 / V_1(x) \leq V_2(x)\} = \{x \in \mathfrak{R}^2 / 10x_1^2 - 0.1x_1x_2 + x_2^2 \leq x_1^2 + 0.01x_1x_2 + 10x_2^2\} \\ &= \{x \in \mathfrak{R}^2 / -9x_1^2 + 0.11x_1x_2 + 9x_2^2 \geq 0\} \end{aligned}$$

Cela veut dire que pour que le système soit stable en boucle fermée, il faut que les aiguillages entre les champs de vecteurs soient faits en respectant les surfaces \bar{S}_{12} et \bar{S}_{21} .

Les résultats de simulation de cet exemple sont donnés par la figure 2.2 et 2.3 suivantes. Elles montrent bien que le système est stable, en utilisant ces ensembles d'aiguillage, et est instable dans le cas contraire.

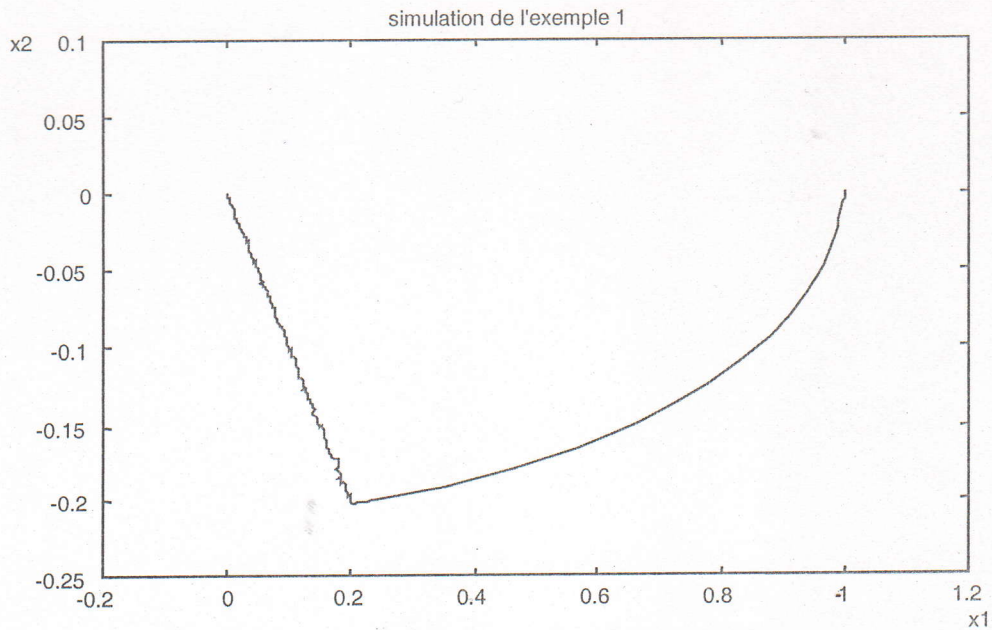


Figure 2.2 : «Simulation de l'exemple 2.1 en utilisant les ensembles d'aiguillage »

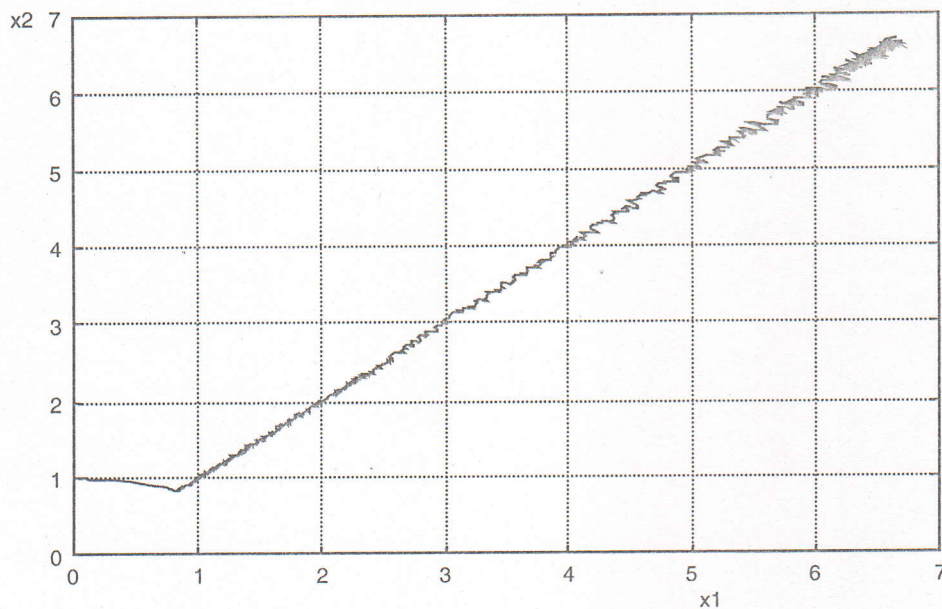


Figure 2.3 : «Cas où les ensembles d'aiguillage ne sont pas respectés»

Il existe d'autres stratégies d'aiguillage, parmi lesquelles :

1. Stratégie d'aiguillage minimal : dans ce cas, il faut choisir le vecteur auquel est associée la plus petite fonction $V_i(x)$, $i=1, \dots, N$. Chaque aiguillage de $f(\cdot, q_i)$ à $f(\cdot, q_j)$ se produit lorsque leurs fonctions scalaires correspondantes sont égales, i.e. $V_i(x) = V_j(x)$.

2. Stratégie de projection minimale : cette méthode consiste à choisir un vecteur tel que la trajectoire approche le point d'équilibre. Pour un point spécifique $x \in \mathfrak{X}^n$, il faut choisir le vecteur suivant le critère :

$$f(x, q) = \arg \min_{f(x, q_i) \in F_x} x^T f(x, q_i) \quad (2.3)$$

$F_x = \{f(x, q_i) / f(x, q_i) \text{ est autorisé dans } \Omega_i\}$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour que le système soit stable en boucle fermée lorsque cette stratégie de projection minimale est utilisée.

Théorème 3.5 [30]

Si pour tout état x , il existe un champ de vecteur $f(x, q_i)$ tel que $x^T f(x, q_i)$ est négatif ou nul, alors le système est stable en boucle fermée en utilisant la stratégie de projection minimale.

Si de plus pour tout x , il existe γ_i positif (indépendant de x) et il existe $f(x, q_i)$ tel que $x^T f(x, q_i) \leq -1/2\gamma_i \|x\|^s$, alors l'origine est exponentiellement stable en utilisant cette stratégie.

Exemple 2.2 [30]

Considérons le système constitué par les deux champs de vecteur suivants :

$$A(q_1) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A(q_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(x, q_1) = A(q_1).x \Rightarrow f(x, q_1) = \begin{bmatrix} -x_1 + 5x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x, q_2) = A(q_2).x \Rightarrow f(x, q_2) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -5x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$- \quad x^T . f(x, q_1) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -x_1 + 5x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = -x_1^2 + 5x_1x_2 - x_2^2, \quad \text{si } x_1x_2 \leq 0 \Rightarrow x^T . f(x, q_1) \leq 0$$

Donc $f(x, q_1)$ doit être utilisé dans la région où $x_1 . x_2 \leq 0$.

$$- \quad x^T . f(x, q_2) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -x_1 \\ -5x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -x_1^2 - 5x_1x_2 - x_2^2, \quad \text{si } x_1x_2 > 0 \Rightarrow x^T . f(x, q_2) < 0$$

Donc $f(x, q_2)$ doit être utilisé dans la région où $x_1 . x_2 > 0$.

Les résultats de simulation de cet exemple sont donnés par la figure 2.4 suivante :

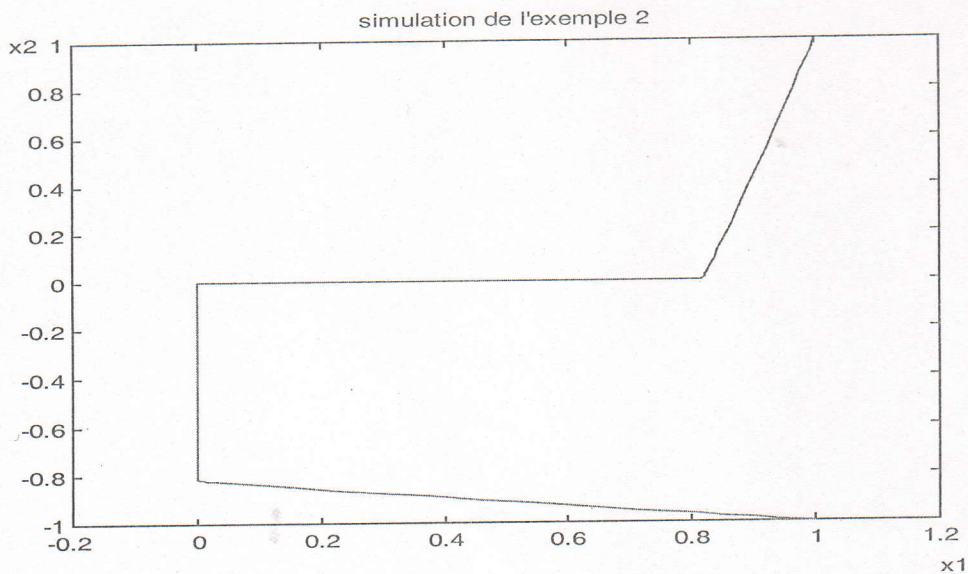


Figure 2.4 : «Simulation de l'exemple 2.2 pour les deux conditions initiales $[1 \ 1]$ et $[1 \ -1]$ »

Remarque

Les conditions du théorème 3.4 peuvent être vérifiées par des méthodes données dans [32].

IV Stratégies de commande des systèmes hybrides à interfaces

Les systèmes concernés par ce qui va suivre sont ceux constitués d'un système hybride en boucle ouverte (B.O) et d'un contrôleur (superviseur) discret en boucle fermée (B.F). Les commandes discrètes issues du superviseur sont souvent fonction des informations discrètes et continues de la boucle de retour.

Etant donné un modèle en B.O et une spécification pour le comportement en B.F., l'objectif est d'obtenir un superviseur qui satisfait tous les buts de contrôle en B.F. Les spécifications introduisent généralement des restrictions sur les dynamiques du système. L'objectif du superviseur est alors de restreindre le comportement du système en respectant les spécifications de commande. Ces spécifications sont divisées en deux classes pour un système hybride, une pour la partie continue et l'autre pour la partie discrète.

a- Spécifications pour la partie continue

Dans la partie continue, les spécifications sont supposées introduites sous forme de contraintes sur l'état, impliquant que le vecteur $x(t)$ est contraint à rester dans une région désirée. Une contrainte d'état peut être donc considérée comme définissant une répartition de l'espace d'état. Une spécification / contrainte d'état a la forme $\rho(x) > 0$.

b- Spécifications pour la partie discrète

Elles sont faites en introduisant un ensemble d'états autorisés Q_A et / ou un ensemble d'états interdits Q_I . Des états marqués sont utilisés pour déterminer les points de départ et d'arrivée dans une séquence ou un ensemble de transition de phases ; les états interdits sont introduits

pour limiter le comportement dynamique discret. En utilisant les états autorisés et interdits, des transitions d'états désirées et interdites peuvent être ainsi spécifiées.

IV-1 Synthèse d'une loi de contrôle

En général, dans les systèmes à événements discrets, l'espace d'état est un ensemble fini, alors l'analyse et la synthèse sont souvent basées sur l'approche qui consiste à tester tous les cas (exp. : analyse des RDPs basée sur le graphe d'évolution). Bien que l'espace d'état continu soit infini, nous allons pouvoir montrer que cette approche peut être utilisée pour la synthèse d'un contrôleur. La raison est que les entrées du système continu prennent seulement un nombre fini de valeurs constantes dépendant de la phase active.

Deux approches principales vont être discutées ; la première est reliée à la synthèse d'un superviseur pour le contrôle d'un système purement discret (SED), cela veut dire que le système hybride en (B.O) est transformé en un système à événements discrets ; la troisième est basée sur la détermination d'une trajectoire d'état continue qui satisfait les contraintes imposées au système, et ce en un temps optimal.

IV-1-1 Approche I transformation en un problème de contrôle supervisé d'un SED

L'idée de cette approche est de remplacer le modèle hybride du système par un SED pur. Ce modèle décrit le système hybride à travers ses contraintes continues. Un superviseur est alors synthétisé pour le nouveau système en utilisant les techniques de synthèse de contrôleur pour les SEDs [9], [10] et [13]. L'objectif est toujours de satisfaire les spécifications continues en usant de ce modèle abstrait. Cette technique a été utilisée par plusieurs auteurs [2],[19],[20],[21].

En utilisant cette approche I, le système global peut être alors schématisé par la figure suivante :

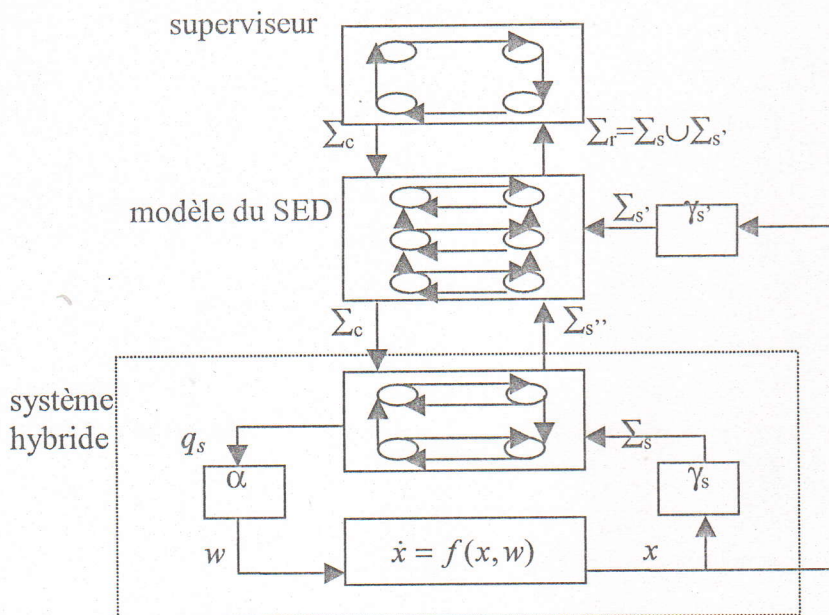


Figure 2.5 : «Schématisation de l'approche I»

a) Le SED

Ce SED est modélisé par le quadruplé

$$\langle Q_d, \Sigma_d, \psi_d, \gamma_s \rangle,$$

dont les composantes sont respectivement, l'espace d'état discret du SED, l'ensemble des événements d'entrée du système, la fonction de transition d'états et le générateur d'événement. l'ensemble des événements d'entrée $\Sigma_d = \Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_s'$, contenant ainsi les événements de spécification relatifs à chaque région Σ_s' , les événements de contrôle Σ_c et $\Sigma_s' \subseteq \Sigma_s$.

Par conséquent, seule une partie de Σ_s est contenue dans le SED. Ceci nous donne une liberté de n'inclure que les modes physiques qui sont d'un intérêt pour la synthèse du contrôleur. Il se peut que certaines spécifications de contrôle impliquent des restrictions comme le fait que certains modes physiques de la partie continue ne seront jamais activés dans le système en boucle fermée ; il n'y a alors aucune raison de les inclure dans le SED. Cependant, toutes les phases associées aux différentes entrées de contrôle reliées à l'ensemble des événements de Σ_c doivent être incluses dans le SED.

b) Le contrôleur

Les spécifications discrètes, pour le comportement désiré du SED, basées sur les spécifications des contraintes d'état continues, donnent directement un superviseur défini par :

$$S = \langle Q_c, \Sigma_d, \psi_c \rangle$$

Q_c est l'ensemble des états discrets du superviseur, Σ_d est l'ensemble des événements du contrôleur et ψ_c est la fonction de transition d'état.

Exemple 2.3 [32]

Pour une simple illustration, considérons un système de contrôle de niveau d'eau d'un réservoir (voir figure 2.6) par deux vannes à deux états discrets (*on/off*) (elles constituent les entrées de commande). Trois régions peuvent être distinguées correspondant aux niveaux bas, moyen (milieu) et haut. L'objectif est de maintenir le niveau d'eau au milieu. Les spécifications sont alors : $\Sigma_s = \{\text{bas, moyen, haut}\}$; les événements de contrôle sont : $\Sigma_c = \{o_v, f_v\}$ (o_v : ouvrir la vanne et f_v : la fermer). Deux modes physiques sont à distinguer : $\Sigma_s = \{\text{au dessous}_h, \text{au dessus}_h\}$.

Le changement du mode physique n'est d'aucun intérêt pour le contrôleur, alors $\Sigma_s' = \Phi$. Une spécification pour le superviseur peut être basée sur le SED. Dans ce modèle, la vanne est autorisée à s'ouvrir et à se fermer dans les trois cas. Dans les spécifications, o_v est seulement autorisée au niveau bas, f_v au niveau haut, et au milieu, il garde son état précédent (s'il était ouvert, il va rester ouvert jusqu'à atteindre le niveau haut, et s'il était fermé, il va rester fermé jusqu'à atteindre l'état bas). Ces spécifications peuvent être considérées comme un superviseur. Il peut être réduit à un système à quatre états incluant les événements ordonnés suivants : (haut, f_v), (bas, o_v), (milieu, o_v), (milieu, f_v).

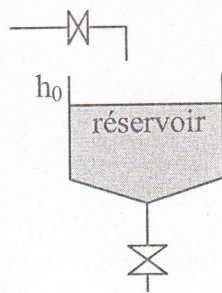


Figure 2.6 : «Système de contrôle du niveau d'eau »

Remarques

- Des capteurs discrets ou continus à prédiction sur les valeurs mesurées telles que $h > h_0$, sont introduits pour respecter les contraintes d'état spécifiques. Ces signaux booléens donnent directement l'événement du générateur γ_s pour la spécification d'événements dans Σ_s . Lorsque l'événement du générateur est connu, la synthèse d'événements discrets du superviseur est souvent intuitive. Une telle approche n'utilise pas le comportement continu du système. Dans plusieurs cas, il fonctionne correctement. Dans le cas où la répartition des régions et l'événement du générateur sont basés sur les dynamiques du système hybride, le problème devient difficile. Lemmon dans [19] a présenté une méthode on-line pour l'identification d'événements basée sur les sous-espaces invariants / sous-espaces définis par les contraintes d'état.
- Une autre difficulté est que le SED devienne non déterministe, dans le sens qu'une action du contrôleur peut donner lieu à plus d'une spécification d'événement. Dans ce cas, nous ne pouvons pas savoir pour un événement discret donné du modèle du système, quels sont les événements qui vont se produire. En réalité, ceci dépend de la région spécifique où l'état continu se trouve. Ceci indique qu'une répartition plus précise de l'espace d'état peut résoudre le problème. Antsaklis dans [2] aussi discuté ce problème. Il a introduit des conditions pour qu'il soit quasi-déterministe.

IV-1-3 Approche II Synthèse d'un superviseur à temps optimal

Des contrôleurs continus sont souvent déterminés par une procédure d'optimisation dans laquelle nous minimisons la distance quadratique avec la région prédéfini. Dans les systèmes hybrides où les commandes changent dans un ensemble fini de valeurs constantes, ce type de critère cause plusieurs aiguillages entre les différentes valeurs des entrées. Le meilleur critère est d'utiliser les spécifications continues exprimées sous forme de contraintes sur le système, mais ici avec une condition supplémentaire d'atteindre un état final spécifique $x_f \in X_C$ à partir d'un état initial $x_0 \in X_C$ le plus rapidement possible.

Pour un processus hybride arbitraire, il est souvent difficile de résoudre ce type de problème de contrôle en temps optimal. Cependant, pour le cas spécifique de processus intégrateurs, une solution optimale peut être obtenue en utilisant l'algorithme proposé par Pettersson [31]. L'évolution de l'état d'un processus intégrateur, décrivant généralement une variation de flux ou un changement de température, est donnée par l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = w_j, \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (2.4)$$

$x \in \mathcal{X}^n$, $w_j \in W = \{w_1, \dots, w_l\}$. W est un ensemble de l vecteurs de contrôle.

Exemple 2.4 Exemple de processus intégrateur

Considérons le processus donné par la figure suivante :

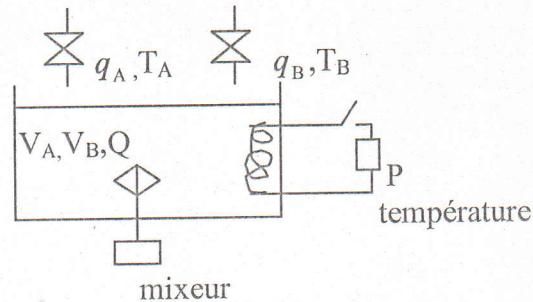


Figure 2.7 : «Système décrit par des processus intégrateurs »

Nous distinguons trois signaux d'entrée au réservoir, deux différents flux d'entrée q_A et q_B et un système de chauffage P . Chacune de ces entrées est commandée par un actionneur à deux états (*on/off*). Les états du système sont choisis comme volumes partiels V_A , V_B et l'enthalpie Q . Les équations qui décrivent l'évolution du système lorsque tous les actionneurs sont ouverts sont :

$$\begin{cases} \dot{V}_A = q_A \\ \dot{V}_B = q_B \\ \dot{Q} = \alpha \cdot q_A + \beta \cdot q_B + P \end{cases} \quad (2.5)$$

$\alpha = c_p \rho T_A$, $\beta = c_p \rho T_B$, c_p est la capacité de chauffage spécifique, ρ est la densité, T_A et T_B sont les températures des flux respectifs q_A et q_B . Nous obtenons alors le processus intégrateur suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ \dot{V}_B \\ \dot{Q} \end{bmatrix} = w_j, \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (2.6)$$

Les vecteurs de contrôle sont donnés par les différentes combinaisons des deux états des valves.

Synthèse d'une loi de contrôle

Etant donné un état initial et un état final, le problème est de choisir un vecteur de W au temps t_k et de décider combien de temps doit-il rester actif avant qu'un autre soit choisi au temps t_{k+1} . La sélection doit être faite de telle sorte à obtenir une solution optimale et qu'aucune contrainte ne soit négligée. En intégrant l'équation (2.4), les états finaux qui peuvent être atteints à partir d'un état initial x_0 peuvent être exprimés par :

$$x_f = \sum_{i=1}^l \tau_i \omega_i + x_0 \quad (2.7)$$

Chaque $\tau_i \geq 0$ représente le temps total correspondant au vecteur de contrôle $w_i \in W$ qui est actif. Ceci implique que pour les processus intégrateurs en général, la solution optimale n'est pas unique puisque l'opération d'addition est commutative et la solution n'est pas affectée par l'ordre spécifique d'addition.

Pour résoudre ceci, nous posons $b = x - x_0$, $A = [w_1 \dots w_l]$, $\tau = [\tau_1 \dots \tau_l]^T$, $C^T = [1 \dots 1]$ où les dimensions de b , A , τ et C sont $n \times 1$, $n \times l$, $l \times 1$ et $l \times 1$ respectivement. Le problème peut alors être formulé comme suit :

$$\text{Min } C^T \tau$$

$$\text{Lorsque } \begin{cases} A\tau = b \\ \tau \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Une condition nécessaire pour l'existence d'une solution générale pour le problème et que A soit de rang n . Ceci signifie qu'il doit y avoir au moins n vecteurs de contrôle linéairement indépendants. Si un minimum fini existe pour $C^T \tau$, alors une solution optimale est obtenue lorsque $(l-n)$ des variables τ , $i=1, \dots, l$ sont nulles. Puisque n des l vecteurs de contrôle sont utilisés pour obtenir une solution optimale, ces vecteurs sont dits «vecteurs de contrôle du temps optimal» et ils appartiennent à W_{opt} . Chaque $\tau \geq 0$ représente le temps total correspondant au vecteur de contrôle $w \in W$ qui est autorisé à être actif. Le temps optimal total est donné par :

$$t^* = \sum_{i=1}^n \tau_i \quad (2.9)$$

Stratégie d'aiguillage

Lorsque aucune contrainte d'état n'est considérée, il y a un libre choix entre les vecteurs de contrôle. Cependant, si les contraintes sont considérées, ceci va affecter la séquence des vecteurs de contrôle et parfois le nombre d'aiguillages. Généralement, il n'est pas facile de sélectionner un ordre spécifique pour les vecteurs de contrôle afin de minimiser le nombre d'aiguillages et les difficultés augmentent avec l'ordre du système. La meilleure solution est celle qui évite d'atteindre les contraintes d'état. Lorsque nous choisissons le prochain vecteur de contrôle, quand une contrainte est atteinte ou lorsque le temps τ_i s'est écoulé, l'hierarchie suivante doit être respectée :

- Choisir le prochain vecteur w telle qu'aucune contrainte ne soit atteinte avant l'écoulement du temps τ .
- Choisir celui qui a le plus long chemin vers la contrainte d'état sans qu'il aboutisse à un point de blocage ;

Si aucun vecteur n'est trouvé en utilisant cette stratégie, nous devons choisir le vecteur qui pointe vers un point de blocage mais il faut le changer avant d'atteindre ce point. Cette hiérarchie sera répétée jusqu'à ce que l'état final soit atteint et alors une loi de contrôle du temps optimal est trouvée.

Exemple 2.5 [32]

Nous allons dans ce qui suit illustrer l'algorithme introduit précédemment, en l'appliquant sur l'exemple suivant. Considérons donc le processus intégrateur suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = w_j, \quad t \leq t < t_{+1}$$

Les trois vecteurs de contrôle sont les suivants :

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'état initial est $(x_{10}, x_{20}) = (1, 1)$ et l'état final est $(x_{1f}, x_{2f}) = (4, 4)$ avec la contrainte d'état globale $0 \leq x \leq 6$. En résolvant le problème d'optimisation ci-dessus, les vecteurs w_1 et w_2 sont obtenus. Les deux vecteurs seront activés pendant $\tau_1=5$ et $\tau_2=2$ unités de temps respectivement.

La figure 2.8a montre les différents vecteurs de contrôle possibles, ensemble avec les conditions initiales et finales. Tandis que la figure 2.8b, montre la trajectoire optimale et la stratégie d'aiguillage.

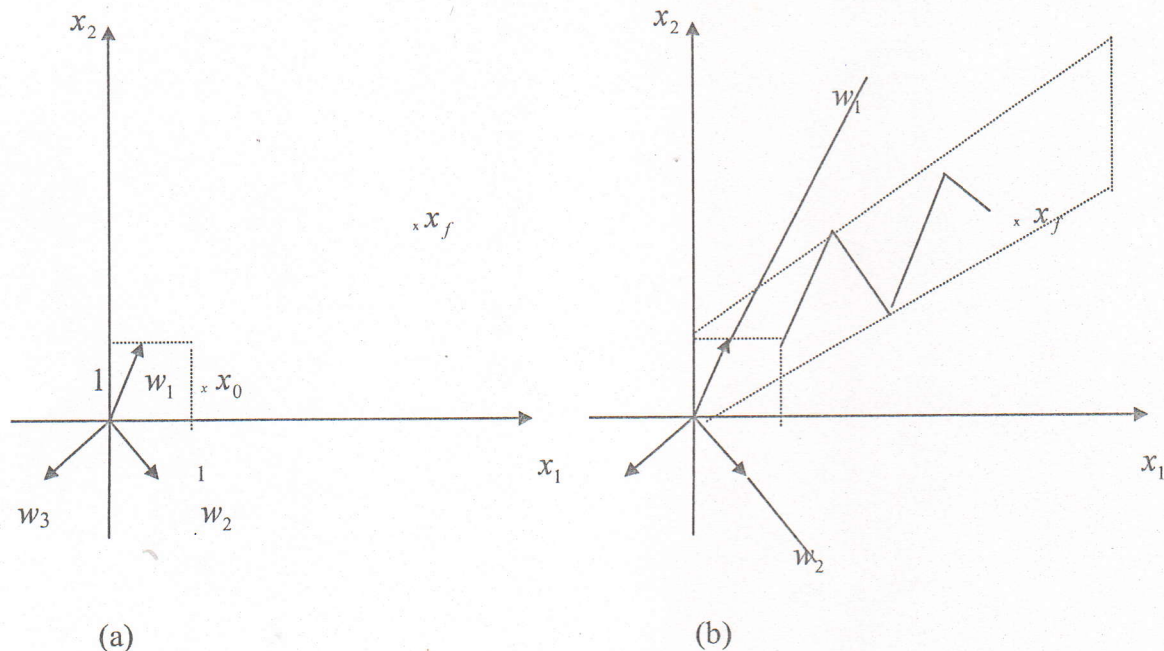


Figure 2.8 : « (a) : vecteurs de contrôle et conditions initiales et finales.
(b) : trajectoire optimale et stratégie d'aiguillage »

V- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques résultats relatifs à l'étude de la stabilité d'une classe de systèmes hybrides qui est celle des systèmes à aiguillage décrit par une équation d'état fonction de l'événement discret. Ces résultats sont obtenus par l'extension de la seconde méthode de Lyapunov aux systèmes hybrides. Le choix et la détermination des différentes fonctions de Lyapunov relatives aux événements discrets reste, à notre avis, un inconvénient majeur surtout quand le nombre d'événements devient important.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons étudié quelques schémas de commande de systèmes hybrides. Comme pour l'étude de la stabilité, ces schémas sont restrictifs à des classes particulières de systèmes hybrides. Des exemples numériques sont à chaque fois donnés.

CHAPITRE 3

APPLICATION A UNE RUCHE APICOLE

I- Introduction

Les systèmes gouvernables englobent non seulement la totalité des domaines de la technologie, mais aussi les systèmes biologiques et naturels tels que la ruche apicole. En effet, la société d'abeilles, qui depuis l'antiquité n'a cessé d'être un objet inépuisable de recherche, peut être commandée par l'apiculteur. Ce dernier doit toujours assurer à ses abeilles le maintien de leur force et la constitution de leurs réserves alimentaires pour avoir un rendement optimal.

Dans cet ordre d'idée vient se placer notre contribution, avec le présent travail, en proposant un calendrier d'intervention pour l'apiculteur, en précisant les quantités de nourriture correspondantes à chaque date, que celui-ci doit apporter à ses abeilles, en vue de maintenir leur nombre à un niveau suffisamment élevé, pour assurer une production importante par la suite. Pour accomplir cet objectif, il est impératif de déterminer un modèle mathématique représentatif de la ruche. Pour cela, nous utilisons le modèle linéaire pour sa représentation.

Avant de présenter notre modèle hybride, présentons d'abord la ruche apicole.

II Présentation de la ruche [3],[8],[15],[33]

II-1 La colonie d'abeilles

Une colonie d'abeilles est une sorte de grande famille dans laquelle, frères et sœurs entourent leur mère, et entretiennent entre eux des relations qui maintiennent, dans un nid très complexe, une structure permettant la survie indéfinie du groupe, alors que les individus n'ont qu'une vie éphémère. Cette colonie est constituée de :

a) La reine

Ame de la ruche, la reine est la mère de toutes les abeilles de la colonie. Elle est unique et elle peut pondre en période d'activité jusqu'à 3.000 œufs par jour.

b) Les ouvrières

Elles constituent la partie la plus importante de la colonie, qui peut contenir de 10.000 jusqu'à 80.000 et même dépasser cent mille individus. Elles s'occupent de nourrir la colonie, de nettoyer la ruche, de fabriquer la cire, de consolider le nid, rafraîchir ou réchauffer la ruche à l'aide de leurs ailes, ...etc.

c) Les mâles

Ils proviennent des œufs non fécondés, leur rôle est de féconder la reine, acte qui, une fois réussit, leur coûtera la vie.

II-2 L'habitation de l'abeille - la ruche -

Les abeilles livrées à elles-mêmes, se réfugient dans des abris naturels : des arbres creux, des toits, des saillies de roche, ...etc. Pour les utiliser à des fins économiques, l'homme a entrepris d'installer, à proximité de ces emplacements naturels, un abri plus perfectionné et plus accueillant pour les abeilles. Ce genre d'emplacement est appelé «une ruche».

a) La force de la population et la capacité de la ruche

Plus la ruche est remplie d'abeilles, mieux celles-ci accumulent le miel. Cette même population logée dans une ruche trop grande, produira moins de miel mais plus de couvain. D'autre part, une ruche trop restreinte conduira cette population à un essaimage inévitable. Par conséquent, la taille de la ruche doit être proportionnelle à celle de la population.

b) L'essaimage naturel

C'est le déplacement d'un certain nombre d'abeilles à la suite de la reine, qu'elle soit vierge ou fécondée, vers un nouveau domicile plus hospitalier.

II-3 L'alimentation des abeilles

Le développement normal des abeilles et le maintien de leur force, nécessite une quantité importante de nourriture. Elles ont toujours besoin de provisions de nectar, de pollen et d'eau.

a) Le nectar

Le nectar que les abeilles viennent butiner sur les fleurs, constitue la matière première de la majorité des miels.

b) Le pollen

L'organe mâle de la fleur est récolté par les abeilles durant presque toute l'année. Il constitue, avec le miel, la base de la nourriture des larves et des jeunes abeilles. C'est pourquoi le pollen est appelé «le pain des abeilles».

c) L'eau

La colonie en fait une grande consommation surtout lorsqu'elle a du couvain à soigner.



II-4 Le nourrissage artificiel

Selon les besoins et les buts visés par l'apiculteur, il existe essentiellement deux types de nourrissage :

- Le nourrissage spéculatif (ou stimulant) : a pour but de donner un coup de fouet aux colonies, et à exciter prématurément la ponte de la reine avant la grande miellée.
- Le nourrissage intensif : sert à compléter les provisions jugées insuffisantes, soit avant l'hiver, soit après celui-ci.

a) Les produits de remplacement

Les meilleurs aliments d'une colonie sont toujours le miel et le pollen. Généralement, l'apiculteur préfère consommer ces produits plutôt que de les donner aux abeilles. Il a donc recourt à des produits de remplacement tels que :

- Le sirop (sucre dilué dans l'eau) à la place du miel
- La farine de soja déshuilée ou le lait écrémé en poudre au lieu du pollen.

III- Modélisation hybride de la ruche apicole

III-1 Hypothèses de travail

Vu sa complexité, la ruche ne peut être modélisée qu'après avoir formulé certaines hypothèses simplificatrices et réalistes, les hypothèses suivantes sont à considérer pour simplifier notre modèle :

- Jeune reine sélectionnée
- Traitement systématique de toutes les maladies
- Lutte contre l'essaimage naturel
- Abondance de l'eau au sein ou au voisinage de la ruche
- L'eau utilisée par les abeilles n'est pas modélisée
- La gelée royale n'est pas modélisée
- Production de miel, pollen et cire uniquement
- Corps de ruche battie
- Abondance de matières premières au voisinage de la ruche
- Climat tempéré

III-2 Etude expérimentale

La ruche d'abeilles est considérée comme un système entrées-sorties (une boîte noire), schématisé par la figure 3.1 suivante :

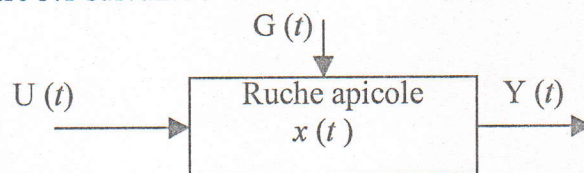


Figure 3.1 : «Schéma d'une ruche apicole »

$x(t)$ est le vecteur d'état du système qui comprend les quatre variables d'état suivantes:

$x_1(t)$: nombre d'abeilles en milliers

$x_2(t)$: quantité de miel en kilogrammes

$x_3(t)$: quantité de pollen en kilogrammes

$x_4(t)$: quantité de cire en kilogrammes

$Y(t)$: est le vecteur des sorties au nombre de trois qui sont les quantités de miel, de pollen et de cire.

$U(t)$: vecteur des entrées commande à travers le nourrisseur, constitué du sirop (u_2) et de la farine (u_3).

$G(t)$: vecteur des perturbations sur le système constitué du nectar (g_2) et du pollen (g_3) récoltés par les butineuses.

Le relevé des mesures des variables d'état ainsi que des entrées g_2 et g_3 pour un système autonome ($u_2 = u_3 = 0$) a été effectuée durant l'année 1992. Ces mesures ont été recueillies dans la région de la MITIDJA où la flore est essentiellement basée sur les fleurs d'orangers et les fleurs sauvages. Ces données diffèrent d'une région à une autre et elles sont très approximatives vu la procédure d'estimation suivie c'est à dire:

$x_1 = (\text{nombre de cadres couverts d'abeilles}) * (3000 \text{ abeilles})$

$x_2 = (\text{nombre de cadres sans couvain}) * (2\text{kg}) + (\text{nombre de cadres avec couvain}) * (1\text{kg})$

$x_3 = (\text{nombre de cadres contenant du pain d'abeilles}) * (0.4\text{kg})$

$x_4(t) = (\text{quantité de cire récoltée}) * (0.1\text{kg})$

En plus, afin de ne pas perturber la colonie, ces mesures ont été prises tous les 10 jours.

Le tableau 3.1 résume les données recueillies et les figures ci-dessous illustrent leur variation.

T(jours)	$x_1(t)$ (kg)	$x_2(t)$ (kg)	$x_3(t)$ (kg)	$x_4(t)$ (kg)	$g_2(t)$ (kg/j)	$g_3(t)$ (kg/j)
0	10	10	0.25	1	0.01	0.01
10	10	10	0.25	1	0.05	0.02
20	10	10	0.25	1	0.10	0.04
30	13	10	0.25	1	0.15	0.06
40	20	10	0.5	1	0.25	0.09
50	26	10	0.75	1	0.35	0.14
60	36	10	1.25	1	0.5	0.2
70	46	13	2.25	1.25	0.7	0.3
80	56	17	3.25	1.5	1.05	0.3
90	73	20	5	2.25	1.5	0.3
100	100	25	5	3	1.5	0.3
110	100	32	5	3	1.5	0.3
120	100	50	5	3	1.5	0.3
130	100	50	5	3	1.05	0.2
140	100	40	4	3	0.65	0.12
150	93	30	3	3	0.2	0.02
160	75	26.5	2.75	3	0.1	0.01
170	60	25	2.6	3	0.4	0.06
180	50	25	2.5	3	0.85	0.15
190	55	33.5	2.8	3.08	1.55	0.28
200	67	47.5	3.2	3.15	2	0.19
210	80	60	3.5	3.25	1.15	0.05
220	80	60	3.5	3.25	0.13	0.02
230	70	53.5	2.85	3.25	0.07	0.02
240	59	46	2.25	3.25	0.05	0.01
250	47	37	1.85	3.25	0.04	0.01
260	42	28.5	1.5	3.25	0.04	0.01
270	37	21.5	1.12	3.25	0.03	0.01
280	31	15	0.8	3.25	0.03	0.01
290	26	11	0.55	3.25	0.03	0.01
300	20	7.5	0.45	3.25	0.03	0.01
310	18.3	7	0.4	3.25	0.03	0.01
320	16.7	6.5	0.38	3.25	0.03	0.01
330	15	5.5	0.35	3.25	0.03	0.01
340	13.3	5.3	0.3	3.25	0.03	0.01
350	11.7	5	0.28	3.25	0.03	0.01
360	10	5	0.25	3.25	0.03	0.01

TABLEAU 3.1 : «Données expérimentales durant une année »

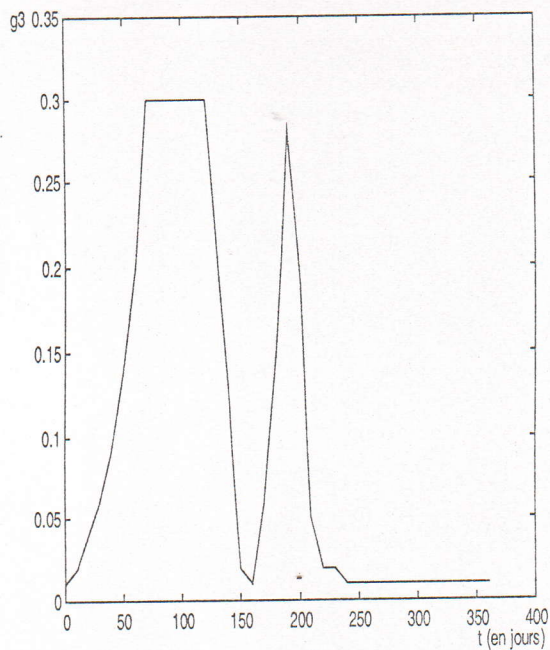
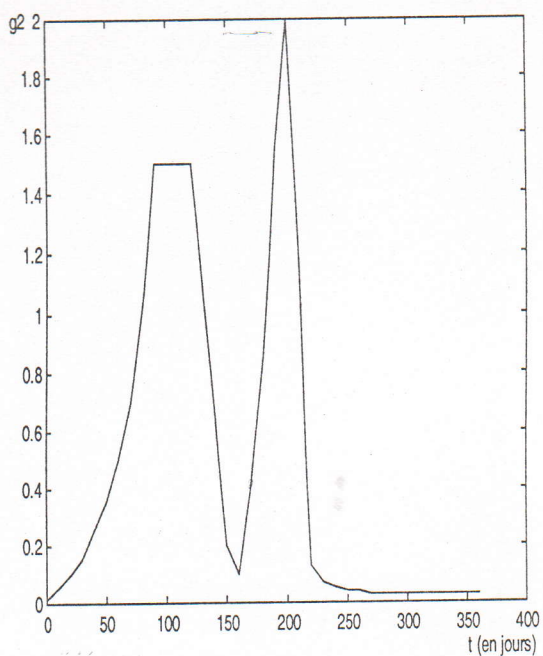


Figure 3.5 : «Graphe des entrées en kg/jours »

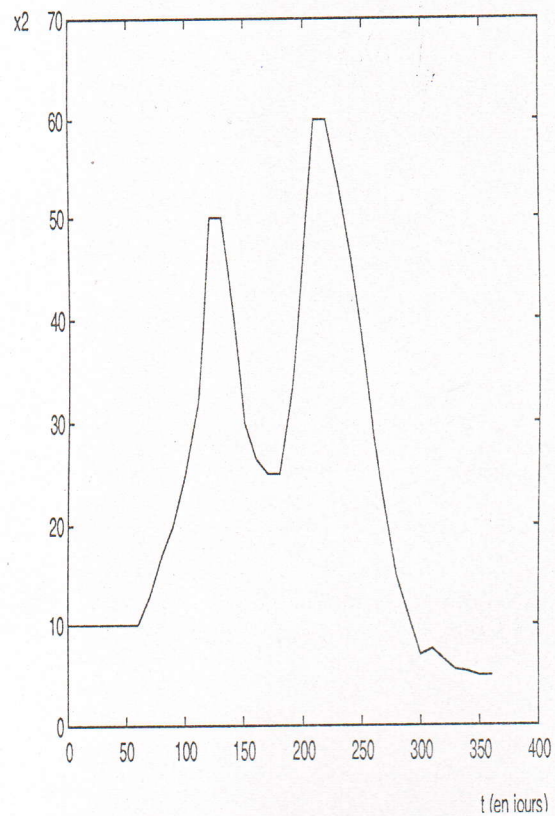
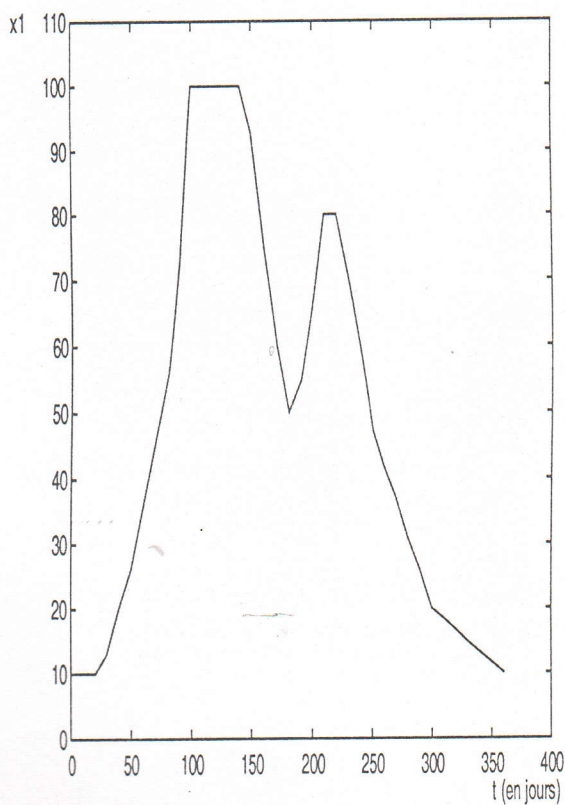
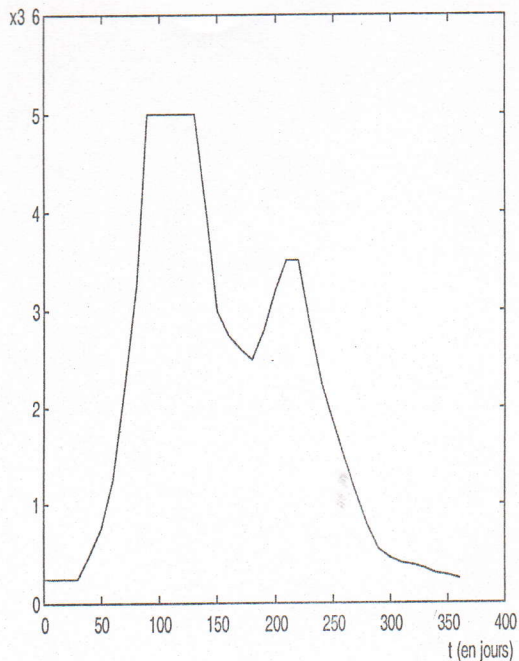
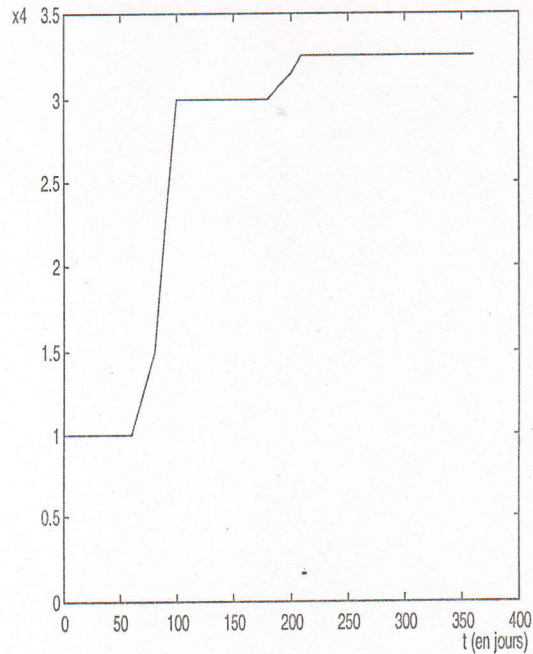


Figure 3.6 : «Graphe de l'état x_1 en milliers d'abeilles»

Figure 3.7 : «Graphe de x_2 en kg»

Figure 3.6 : «Graphe de l'état x_3 »Figure 3.7 : «Graphe de x_4 »

III-3 Modélisation mathématique

Après analyse des données expérimentales, nous avons remarqué que les dynamiques du système changent d'une façon brusque. Ceci est dû à l'effet d'événements discrets agissant sur le système. Nous avons remarqué aussi que ces changements interviennent à des moments précis sur toute l'année considérée (365 jours). Ceci nous a poussé à répartir l'espace d'état en plusieurs régions. Nous avons défini ainsi plusieurs phases et nous avons associé un modèle à chacune d'elles. Le passage d'une phase à une autre est conditionné par l'état d'une horloge qui est dans notre cas tout simplement le temps réel. Cette répartition a donné lieu à un modèle hybride composé de six modèles différents M_i , $i=1,6$. Les instants de commutation sont (en jours) $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = 60$, $\tau_3 = 140$, $\tau_4 = 180$, $\tau_5 = 240$, $\tau_6 = 365$. Notre choix s'est porté, pour toutes les phases, sur le modèle linéaire.

Le modèle ainsi défini se comporte comme un automate hybride, pour lequel nous allons définir les phases et les transitions, et peut aussi être vu comme appartenant au modèle de Brockett autonome (les commandes sont nulles) où l'horloge p représente ici le temps et au lieu de tester le passage de p par des valeurs entières, nous testons son passage par les temps de basculement définis ci-dessus.

III-3-1 Modélisation de la ruche par un automate hybride

La répartition de l'espace d'état faite ci-dessus pour la ruche apicole, nous permet de modéliser cette dernière par un automate hybride défini par :

$$H = \langle X_D, X_C, \mu_1, \mu_2, \mu_3, I \rangle$$

Tels que :

- X_D est l'espace d'état discret, formé dans ce cas par six variables discrètes $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ associées à chacune des six phases définies précédemment.
- X_C est l'espace d'état continu, qui est pour chacune des six phases, incluse ou égal à \mathfrak{R}^5 (il y a quatre variables d'état et l'horloge l).
- μ_1 définit la fonction associée à chaque phase $q_i, i=1, \dots, 6$. (Exemple : $\mu_1(q_1) = f_1(q_1, x)$).
- μ_2 associe à chaque phase, un ensemble invariant $\mu_2(q) \subseteq \mathfrak{R}^+$. Dans notre cas, les ensembles invariants sont définis, pour chacune des six phases, par les valeurs du temps.
- μ_3 est la fonction qui associe à chaque paire de phases (q, q') , une relation de transition $\mu_3(q, q') \subseteq (X_D \times X_C)$.
- I est l'ensemble des conditions initiales.

Tel qu'il est défini, cet automate peut être représenté graphiquement par :

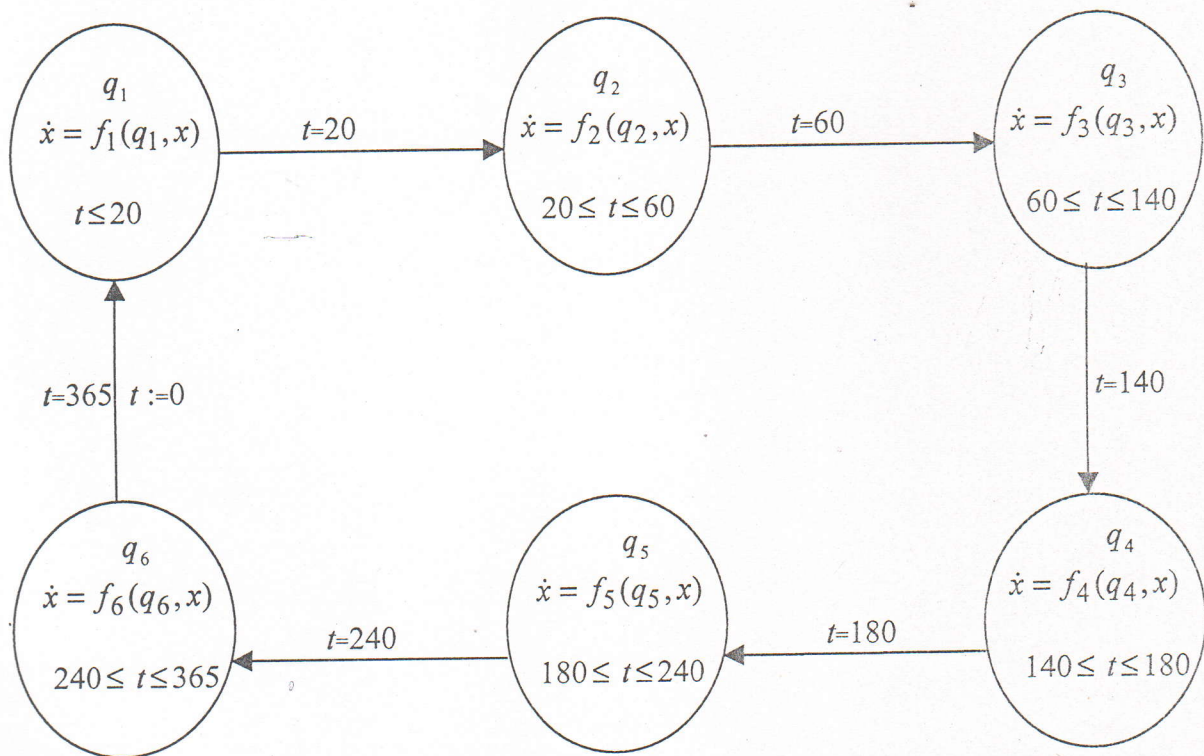


Figure 3.8 : «Modèle graphique de l'automate hybride associé à la ruche apicole»

Pour cet automate hybride, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}(q_1) &= \{t \in \mathfrak{R} / 0 \leq t \leq 20\}, \text{Res}(q_1, q_2) = (x, 20), \text{En}(q_1, q_2) = \{t=20\}, \mu_1(q_1) = \dot{x} = f_1(q_1, x); \\
 \text{Inv}(q_2) &= \{t \in \mathfrak{R} / 20 \leq t \leq 60\}, \text{Res}(q_2, q_3) = (x, 60), \text{En}(q_2, q_3) = \{t=60\}, \mu_1(q_2) = \dot{x} = f_2(q_2, x); \\
 \text{Inv}(q_3) &= \{t \in \mathfrak{R} / 60 \leq t \leq 140\}, \text{Res}(q_3, q_4) = (x, 140), \text{En}(q_3, q_4) = \{t=140\}, \mu_1(q_3) = \dot{x} = f_3(q_3, x); \\
 \text{Inv}(q_4) &= \{t \in \mathfrak{R} / 140 \leq t \leq 180\}, \text{Res}(q_4, q_5) = (x, 180), \text{En}(q_4, q_5) = \{t=180\}, \mu_1(q_4) = \dot{x} = f_4(q_4, x); \\
 \text{Inv}(q_5) &= \{t \in \mathfrak{R} / 180 \leq t \leq 240\}, \text{Res}(q_5, q_6) = (x, 240), \text{En}(q_5, q_6) = \{t=240\}, \mu_1(q_5) = \dot{x} = f_5(q_5, x); \\
 \text{Inv}(q_6) &= \{t \in \mathfrak{R} / 240 \leq t \leq 365\}, \text{Res}(q_6, q_1) = (x, 365), \text{En}(q_6, q_1) = \{t=365\}, \mu_1(q_6) = \dot{x} = f_6(q_6, x);
 \end{aligned}$$

Chaque modèle, ou fonction f_i , $i=1, \dots, 6$, est décrit par le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{j=1}^4 x_j a_{1j} + \beta_1 \cdot g_1(t) \\ \dot{x}_2 = \sum_{j=1}^4 x_j a_{2j} + \beta_2 \cdot g_2(t) \\ \dot{x}_3 = \sum_{j=1}^4 x_j a_{3j} + \beta_3 \cdot g_3(t) \\ \dot{x}_4 = \sum_{j=1}^4 x_j a_{4j} + \beta_4 \cdot g_4(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $\beta_1 = \beta_4 = 0$ (puisque $g_1(t) = g_4(t) = 0$).

L'identification des six modèles se fait sur la base des relevés de mesure donnés par le tableau 3.1. La méthode utilisée pour l'estimation des paramètres est celle des moindres carrés (nous rappelons que le modèle choisi est non linéaire en x mais linéaire par rapport aux paramètres). Pour rechercher les coefficients du modèle, nous approximons la dérivée de l'état par :

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (3.2)$$

$t = k \times 10$, $k=0, \dots, 36$; $h=10$ jours (puisque les données sont recueillies chaque dix jours). Il s'agit donc de résoudre le système :

$$A \times B = M \quad (3.3)$$

Avec

$A = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]$ (pour chaque valeur de $t = k \times 10$, $k=0, \dots, 36$)

B : est la matrice des coefficients recherchés.

M : est le vecteur des dérivées numériques en chaque $t = k \times 10$, $k=0, \dots, 36$.

La matrice A ainsi formée est singulière d'où A^{-1} est indéfinie (c'est une matrice dégénérée). Cependant, il existe des méthodes qui permettent de pallier à ce problème. Parmi ces techniques, nous distinguons la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) qui consiste à réduire une matrice quelconque à une forme diagonale, en la pré-multipliant et post-multipliant par des matrices orthogonales [16]. Cette méthode permet d'obtenir une approximation optimale de l'inverse au sens des moindres carrés. En décomposant A en valeurs singulières ($A = U^T S V$), nous obtenons l'approximation de A^{-1} donné par :

$$B = V S^{-1} U^T M \quad (3.4)$$

Une fois le modèle établi, nous procédons à une simulation numérique par résolution du système (3.1), puis nous comparons les résultats de simulation aux relevés expérimentaux. Ces deux étapes (identification et simulation) sont répétées pour chacune des six régions définies précédemment. Les valeurs numériques des coefficients de chacun des six modèles

(fonctions) sont données en Annexe (B). Les résultats de simulation comparés aux relevés expérimentaux, sur toute l'année, sont donnés par la figure 3.9 suivante :

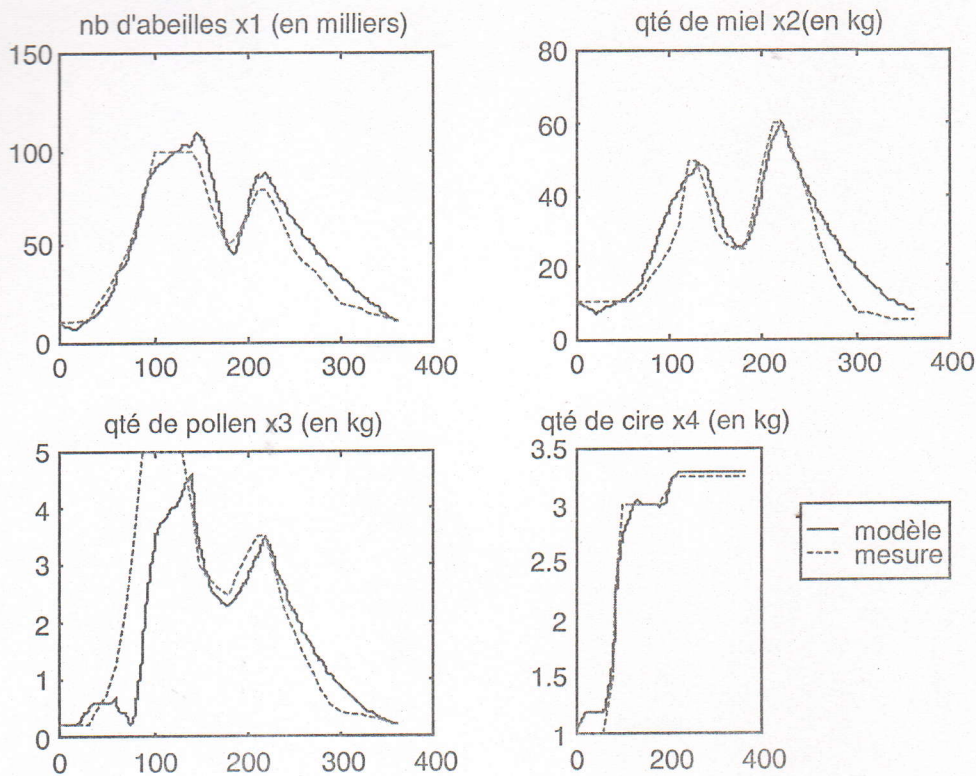


Figure 3.9 : «Réponses du modèle superposées aux données expérimentales »

Contrairement aux résultats obtenus en considérant un modèle unique sur toute l'année, ou un modèle pour chaque semestre [3],[16] l'approche hybride a permis de mieux représenter la ruche. Il est à noter que le modèle ainsi obtenu est le résultat d'une interpolation linéaire entre les mesures, ce qui a permis d'augmenter le nombre de données et d'affiner ainsi les modèles.

Remarque

Il est à noter que durant les essais d'identification, les modèles de Lotka-Volterra et bilinéaire ont été utilisés (donnés ci-dessous), mais après comparaison, notre choix s'est porté sur le modèle linéaire car il est le plus représentatif.

Modèle de Lotka-Volterra : $\dot{x}_i = x_i(a_i + \sum_{j=1}^4 a_{ij} \cdot x_j) + \beta_i \cdot g_i$, $g_1(t) = g_2(t) = 0$.

Modèle bilinéaire : $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^4 x_i(a_{ij} + \sum_{k=j}^4 b_{jk} \cdot x_k) + \beta_i \cdot g_i$, $g_1(t) = g_2(t) = 0$.

III-3-2 Modélisation de la ruche par les systèmes à interface

Comme nous l'avons déjà mentionné, cette ruche peut être vue comme appartenant au modèle de Brockett autonome. Il s'agit donc d'un système hybride en boucle ouverte appartenant à la

classe des modèles à aiguillage. Nous pouvons, par conséquent, la modéliser par un système à interface comme suit :

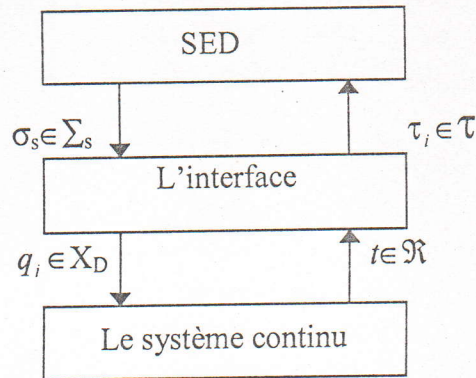


Figure 3.4 : «Modèle à interface associé à la ruche»

$\mathcal{T} = \{\tau_i, i=1, \dots, 6\}$ est l'ensemble des instants de basculement de modèle.

Le système continu est dans ce cas régi par plusieurs modèles, c'est donc un système multimodèles. Le passage d'un modèle à un autre est conditionné par l'état de l'horloge t qui est envoyée d'une façon continue vers l'interface; celle-ci la compare aux temps de basculement. Une fois que t est identique à $\tau_i, i=1, \dots, 6$, le système à événements discrets (SED) envoie un événement vers l'interface, qui lui-même choisit le $q_i, i=1, \dots, 6$, par conséquent le modèle, qui doit décrire le système continu..

IV Commande de la ruche par l'approche hybride

Nous proposons de contrôler la ruche durant les périodes où il y a un manque en provisions afin d'augmenter sa production. Les périodes où les apiculteurs interviennent généralement sont : [Janvier, février], [juin, juillet] et [septembre, octobre] [8],[15],[27],[33]. L'objectif est d'atteindre un état désiré tout en minimisant l'écart et le coût de la commande. Nous envisageons dans ce qui suit, d'utiliser un automate hybride constitué d'un ensemble de contrôleurs dont chacun est spécifique à une période d'intervention. Pour chacune d'elles (périodes d'intervention), un problème de commande optimale sera formulé. Cette technique de commande est inspirée de l'idée de l'approche I présenté dans le chapitre 2.

IV-1 Modélisation du contrôleur hybride

Tel qu'il a été décrit, le contrôleur utilisé pour commander la ruche en B.F est un système hybride puisqu'il est à structure variable (modèle variable), il appartient donc à la classe des systèmes à aiguillage. Il peut être alors modélisé par un automate hybride (tel qu'il a été fait pour le modèle de la ruche en B.O). Ce dernier est composé de quatre états discrets (phases) q_1, q_2, q_3, q_4 . Dans chaque phase, un modèle continu est considéré.

Cet automate hybride peut être représenté graphiquement par la figure suivante :

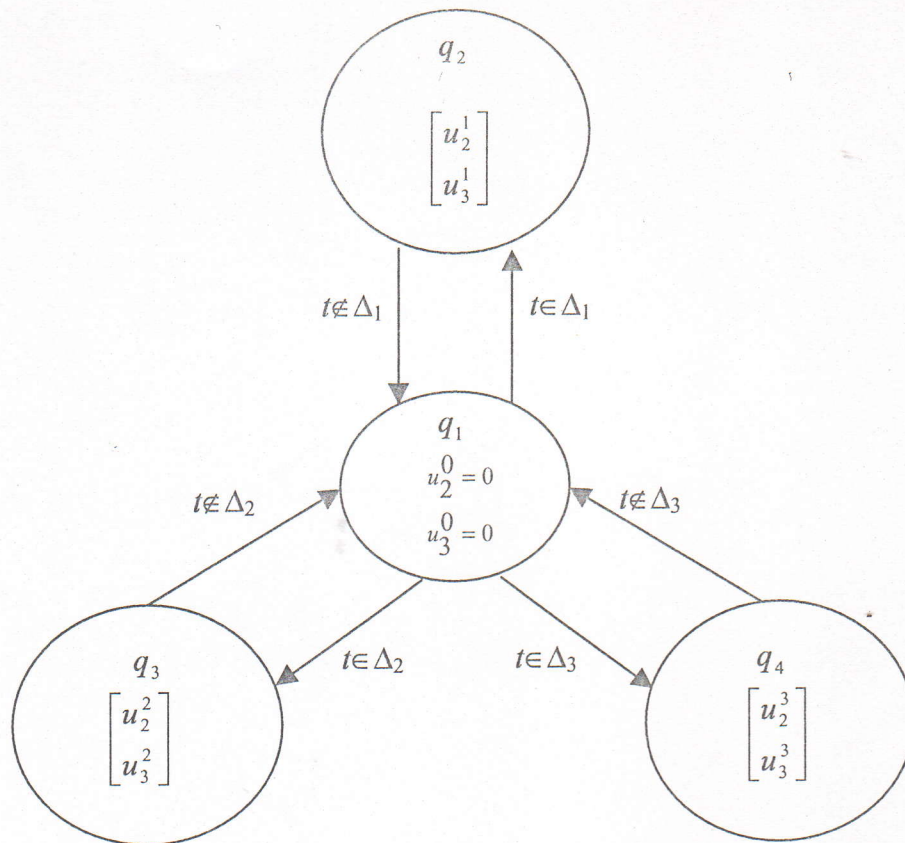


Figure 3.11 : «graphe de l'automate hybride correspondant au contrôleur de la ruche»

Remarque

Nous noterons par u , le vecteur $\begin{bmatrix} u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix}$, $i = 0, \dots, 3$.

Dans ce cas, nous avons:

$$\text{Inv}(q_1) = \{t \in \mathfrak{R} / (t \notin \Delta_1) \wedge (t \notin \Delta_2) \wedge (t \notin \Delta_3)\}, \text{Res}(q_1, q_2) = (u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0), \text{En}(q_1, q_2) = \{t \in \Delta_1\},$$

$$\mu_1(q_1) = \begin{bmatrix} u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Inv}(q_2) = \{t \in \mathfrak{R} / t \in \Delta_1\}, \text{Res}(q_2, q_1) = (u, 60), \text{En}(q_2, q_1) = \{t \notin \Delta_1\}, \mu_1(q_2) = \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix};$$

$$\text{Inv}(q_3) = \{t \in \mathfrak{R} / t \in \Delta_2\}, \text{Res}(q_3, q_1) = (u, 140), \text{En}(q_3, q_1) = \{t \notin \Delta_2\}, \mu_1(q_3) = \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix};$$

$$\text{Inv}(q_4) = \{t \in \mathfrak{R} / t \in \Delta_3\}, \text{Res}(q_4, q_1) = (u, 240), \text{En}(q_4, q_1) = \{t \notin \Delta_3\}, \mu_1(q_4) = \begin{bmatrix} u_2^3 \\ u_3^3 \end{bmatrix};$$

Remarque

Ce contrôleur peut aussi être modélisé par un système à interface.

IV-1-1 Formulation du problème de commande optimale

Avant de formuler le problème de commande optimale qui sera utilisé pour calculer les commandes à appliquer pendant chaque période d'intervention, nous allons le formuler pour le cas général.

Soit un système décrit par :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) ; i=1, \dots, n \Rightarrow \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) ; x \in X_{ad}, u \in U_{ad}, t \in T_{ad}.$$

X_{ad} : est l'ensemble d'états admissibles ;

U_{ad} : est l'ensemble des commandes admissibles ;

T_{ad} : est le domaine temporel admissible.

L'ensemble admissible est donc décrit par : $X_{ad} \times U_{ad} \times T_{ad}$.

D'une manière générale le critère à minimiser est :

$$I = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (3.5)$$

L et S sont des fonctions scalaires. $S(x(t_f), t_f)$ représente le coût de l'écart final par rapport à leurs valeurs désirées, L est une fonction des écarts pendant le transitoire.

Il est à noter que dans notre cas, nous sommes confrontés à un problème de commande optimale des systèmes non linéaires en l'absence de contraintes d'inégalités sur l'état et la commande.

Nous supposons dans ce cas : $X_{ad} = \mathfrak{R}^n$, $U_{ad} = \mathfrak{R}^m$, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

En faisant appel aux calculs des variations, nous réduisons ce problème à celui de Lagrange avec des contraintes d'égalité :

$$S(x(t_f), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{dS(x(t), t)}{dt} \right) dt + S(x(t_0), t_0) \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow I = \int_{t_0}^{t_f} \left(L(x(t), u(t), t) + \frac{ds(x, t)}{dt} \right) dt + S(x(t_0), t_0)$$

$$\Rightarrow I = \int_{t_0}^{t_f} \left(L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \right) dt + \underbrace{S(x(t_0), t_0)}_{\text{fixe}}$$

La commande qui minimise I , minimisera I' donné par :

$$I' = \int_{t_0}^{t_f} \left(L(x, u, t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \right) dt \quad (3.7)$$

Pour minimiser cette fonctionnelle, nous utilisons la méthode des paramètres de Lagrange. Ces paramètres sont n fonctions du temps λ_i associées aux n équations $\lambda_i (f_i(x, u, t) - \dot{x}_i) = 0$;

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} I' &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(x, u, t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i(x, u, t) - \dot{x}_i) \right\} dt \\ \Rightarrow I'' &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(x, u, t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \lambda^T(t) \cdot f(x, u, t) - \lambda^T(t) \cdot \dot{x} \right\} dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nous appelons $F(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t)$, l'intégrant de I'' .

- La première équation d'Euler-Lagrange relative à l'état est :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] = 0 \quad (3.9)$$

Si u^* est la commande optimale correspondant au vecteur d'état optimal $x^*(t)$ et au vecteur d'état adjoint optimal $\lambda^*(t)$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ L(x^*, u^*, t) + \left[\frac{\partial S(x^*, t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}^* + \frac{\partial S(x^*, t)}{\partial t} + \lambda^{*T} \cdot f(x^*, u^*, t) - \lambda^* \cdot \dot{x}^* \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial S(x^*, t)}{\partial x} - \lambda^{*T} \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left\{ L(x^*, u^*, t) + \lambda^{*T} \cdot f(x^*, u^*, t) \right\} + \frac{\partial^2 S(x^*, t)}{\partial x^2} \dot{x}^* + \frac{\partial^2 S(x^*, t)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 S(x^*, t)}{\partial x^2} \dot{x}^* + \dot{\lambda}^T &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\lambda}^* &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ L(x^*, u^*, t) + \lambda^{*T} \cdot f(x^*, u^*, t) \right\} - \frac{\partial^2 S(x^*, t)}{\partial t \partial x} \end{aligned} \quad (3.10)$$

- La deuxième équation d'Euler-Lagrange est relative à la commande :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right] = 0 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left\{ L(x^*, u^*, t) + \frac{\partial S(x^*, t)}{\partial x} \cdot \dot{x}^* + \frac{\partial S(x^*, t)}{\partial t} + \lambda^{*T} \cdot f(x^*, u^*, t) - \lambda^* \cdot \dot{x}^* \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \underbrace{\left\{ L(x^*, u^*, t) + \lambda^{*T} \cdot f(x^*, u^*, t) \right\}}_H &= 0 \end{aligned}$$

considérons la fonction scalaire $H(x, u, \lambda, t)$ définie par :

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T \cdot f(x, u, t) \quad (3.12)$$

Cette fonction est dite l'Hamiltonien. Les dérivées de l'Hamiltonien par rapport aux vecteurs $\lambda(t)$ et $x(t)$ sont respectivement les dérivées du vecteur d'état et du vecteur adjoint.

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (3.13)$$

Ces équations sont dites canoniques.

Nous avons de plus :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (3.14)$$

Cette dernière permet de calculer u^* .

Le système d'équation (3.13) correspond donc aux états du système et aux équations du système adjoint. Ces équations sont couplées et forment ensemble un système différentiel de $2n$ équations du premier ordre. L'expression (3.14) conduit à un système de m équations. La solution optimale u^*, x^*, λ^* correspondant au minimum du critère (3.8), donc du critère (3.5), est la solution du système d'équations défini par (3.13) et (3.14), sur tout l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$.

Si nous arrivons à obtenir, par voie numérique ou analytique, une solution u du système d'équations (3.13), (3.14), il s'agit de savoir si cette solution est optimale, car pour le moment, elle ne satisfait que les conditions nécessaires ; le problème est donc de déterminer les conditions suffisantes.

La théorie du calcul des variations montre que pour que u^* soit le minimum d'une fonctionnelle, il suffit que :

1. La solution u^* satisfasse l'équation d'Euler-Lagrange.
2. La condition de Legendre-Clebsch (correspondant au minimum dans notre cas) soit satisfaite.
3. $\delta^2 I$ doit être définie positive.

La première condition est évidemment satisfaite puisque les équations (3.13) et (3.14) ont été établies à partir des équations d'Euler-Lagrange. La deuxième condition peut être explicitée comme suit :

$$\frac{\partial^2 H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial u^2} > 0 \quad (3.15)$$

IV-1-2 Application à la ruche

Notre ruche commandée est régit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{j=1}^4 a_{1j} \cdot x_j \\ \dot{x}_2 = \sum_{j=1}^4 a_{2j} \cdot x_j + \beta_1 \cdot u_2(t) \\ \dot{x}_3 = \sum_{j=1}^4 a_{3j} \cdot x_j + \beta_2 \cdot u_3(t) \\ \dot{x}_4 = \sum_{j=1}^4 a_{4j} \cdot x_j \end{cases} \quad (3.16)$$

Il faut noter que dans ce cas, u_2 et u_3 sont superposées aux entrées perturbatrices g_2 et g_3 . Il faut noter que durant les périodes où le système est autonome, ces entrées sont considérées proportionnelles au nombre des abeilles (puisque celui-ci est modifié sous l'effet du contrôle).

Nous nous proposons donc de déterminer les commandes optimales (u_2^*, u_3^*) , pour chaque période d'intervention, qui fassent passer la ruche d'un état initial donné $x(t_0)$ à un état final $x(t_f)$ voisin d'un état désiré x_d en minimisant le critère suivant :

$$I = 1/2 [x(t_f) - x_d]^T G [x(t_f) - x_d] + 1/2 \int_{t_0}^{t_f} \{ [x(t) - x_d]^T \cdot Q \cdot [x(t) - x_d] + U^T P U \} dt \quad (3.17)$$

Où $x(t_f) = [x_1(t_f) \ x_2(t_f) \ x_3(t_f) \ x_4(t_f)]^T$ et $x_d = [x_{d1} \ x_{d2} \ x_{d3} \ x_{d4}]^T$ représentent l'état final atteint et l'état désiré respectivement.

G, Q et P sont des matrices de pondération symétriques. Les deux premiers termes du critère (3.17) sont relatifs à l'écart final entre l'état désiré et l'état effectivement atteint ; le terme intégral correspond à la limitation en régime transitoire des valeurs absolues de l'état et de la commande.

Pour obtenir la solution optimale, calculons conformément à (3.12) l'Hamiltonien :

$$H = 1/2 q_1 (x_1 - x_{d1})^2 + 1/2 q_2 (x_2 - x_{d2})^2 + 1/2 q_3 (x_3 - x_{d3})^2 + 1/2 q_4 (x_4 - x_{d4})^2 + 1/2 p_1 u_2^2 + 1/2 p_2 u_3^2 + 1/2 (\lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 \dot{x}_2 + \lambda_3 \dot{x}_3 + \lambda_4 \dot{x}_4) \quad (3.18)$$

à partir duquel nous établissons le système adjoint conformément à (3.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -q_1(x_1 - x_{d1}) - \lambda_1 \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} - \lambda_3 \cdot \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} - \lambda_4 \cdot \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_1} \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -q_2(x_2 - x_{d2}) - \lambda_1 \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} - \lambda_3 \cdot \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} - \lambda_4 \cdot \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_2} \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -q_3(x_3 - x_{d3}) - \lambda_1 \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} - \lambda_2 \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} - \lambda_3 \cdot \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} - \lambda_4 \cdot \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_3} \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = -q_4(x_4 - x_{d4}) - \lambda_1 \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_4} - \lambda_2 \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_4} - \lambda_3 \cdot \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_4} - \lambda_4 \cdot \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Les commandes optimales sont données, conformément à (3.14), par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow p_1 u_2 + \beta_1 \lambda_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -\frac{\beta_1}{p_1} \lambda_2 \\ \frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \Rightarrow p_2 u_3 + \beta_2 \lambda_3 = 0 \Rightarrow u_3 = -\frac{\beta_2}{p_2} \lambda_3 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Donc, pour chaque phase (période d'intervention), les commandes optimales sont données par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2^i = -\frac{\beta_1^i}{p_1^i} \lambda_2^i \\ u_3^i = -\frac{\beta_2^i}{p_2^i} \lambda_3^i \end{array} \right. \quad i = 1, 2, 3$$

En reportant cette expression dans (3.16) et (3.19), nous obtenons un système différentiel dans lequel la commande n'intervient pas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \beta_1 \cdot \left(-\frac{\beta_1}{p_1} \lambda_2\right) \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \beta_2 \cdot \left(-\frac{\beta_2}{p_2} \lambda_3\right) \\ \dot{x}_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \\ \dot{\lambda}_1 = -q_1(x_1 - x_{d1}) - a_{11}\lambda_1 - a_{21}\lambda_2 - a_{31}\lambda_3 - a_{41}\lambda_4 \\ \dot{\lambda}_2 = -q_2(x_2 - x_{d2}) - a_{12}\lambda_1 - a_{22}\lambda_2 - a_{32}\lambda_3 - a_{42}\lambda_4 \\ \dot{\lambda}_3 = -q_3(x_3 - x_{d3}) - a_{13}\lambda_1 - a_{23}\lambda_2 - a_{33}\lambda_3 - a_{43}\lambda_4 \\ \dot{\lambda}_4 = -q_4(x_4 - x_{d4}) - a_{14}\lambda_1 - a_{24}\lambda_2 - a_{34}\lambda_3 - a_{44}\lambda_4 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

L'état initial $x(t_0)$, t_0 , et t_f sont supposés connus. Il ne s'agit pas ici d'un problème aux deux bouts classique puisque les conditions finales ne sont connues exactement ni sur l'état ni sur le vecteur adjoint. Une méthode de résolution consiste à traiter le problème d'une façon itérative sur les conditions initiales $\lambda_i(t_0)$, par minimisation d'un critère d'erreur de la forme :

$$E(t_f) = (\lambda_1 - g_1(t) \cdot (x_1(t_f) - x_{d1}))^2 + (\lambda_{12} - g_2(t) \cdot (x_2(t_f) - x_{d12}))^2 + (\lambda_{13} - g_3(t) \cdot (x_3(t_f) - x_{d3}))^2 + (\lambda_{14} - g_4(t) \cdot (x_4(t_f) - x_{d4}))^2$$

jusqu'à l'obtention d'une valeur satisfaisant la condition $E(t_f) \leq \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ caractérise la précision imposée sur le résultat final. L'organigramme de calcul numérique est représenté sur la figure suivante.

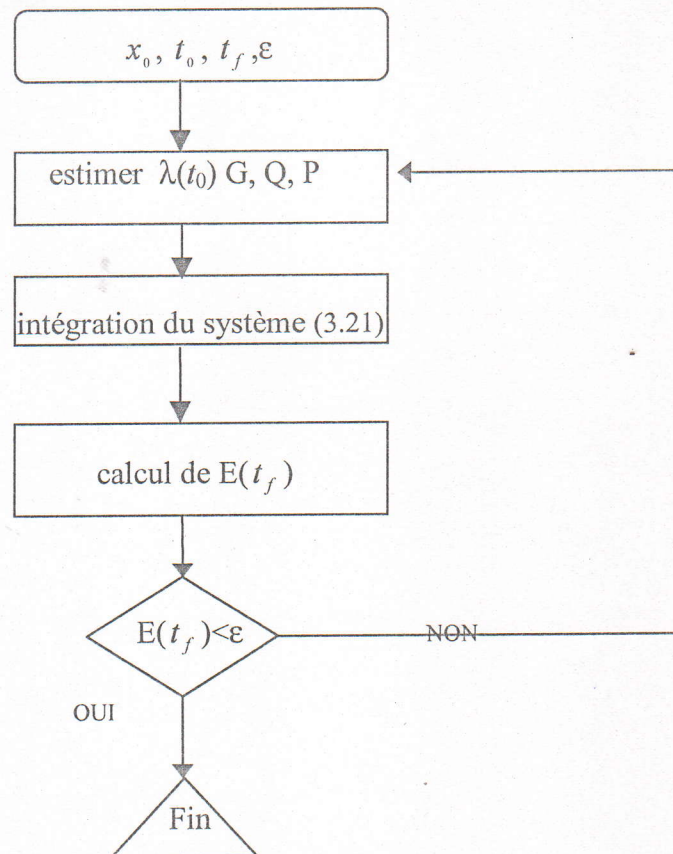


Figure 3.12 : «Organigramme de commande »

IV-1-3 Algorithme de commande hybride

Notons par Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 les périodes d'intervention [janvier - février], [juin - juillet] et [septembre - octobre] respectivement.

La stratégie de commande de la ruche est illustrée par les séquences suivantes :

- 1- Introduire les objectifs de commande (les états désirés) et les périodes d'intervention Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 .
- 2- Introduire les temps de basculement des modèles ($\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$, et τ_6).
- 3- Si $t \notin \Delta_i (i=1,3)$

faire

$$u_2 = u_3 = 0,$$

aller à 4.

Sinon

faire

Tant que $\tau_{j-1} < t \leq \tau_j$ ($j=1,6$) calculer les commandes u_2^j et u_3^j données par les équations (3.15) et (3.16) en utilisant le modèle M_j

fait

fait

4- Fin

IV-1-4 Résultats de la commande

Nous résumons dans le tableau ci-dessous, les principaux résultats de la commande par période d'intervention. Il faut noter que les valeurs des éléments des matrices G, Q et P ont été fixées après plusieurs essais de simulation.

Périodes D'intervention	Première période	Deuxième période	Troisième période
X_0	[10 10 0.25 1]	[105.8 52.14 5.92 2.98]	[84.12 44.41 3.28 1.18]
X_d	[30 12 1 1.2]	[70 25 2 1.15]	[29 15 2.5 1.15]
P	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 99999 & 0 \\ 0 & 99999 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 29910 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix}$
G	$\begin{bmatrix} 3200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1044 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3130 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3421 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2471 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2980 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1346 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2419 \end{bmatrix}$
Q	$\begin{bmatrix} 2850 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$X(t_f)$	[30.86 12.1 1.12 1.15]	[70.56 26.93 2.13 1.18]	[29.77 15.63 2.49 1.18]
L'erreur finale $E(t_f)$	1.56×10^{-4}	10^{-5}	2.8×10^{-4}

TABEAU 3.2 : «Résultats de la commande sur chaque période d'intervention »

Les résultats de simulation par période d'intervention sont donnés par les figures 3.13, 3.14 et 3.15. La figure 3.16 illustre le comportement de la ruche commandée sur toute l'année.

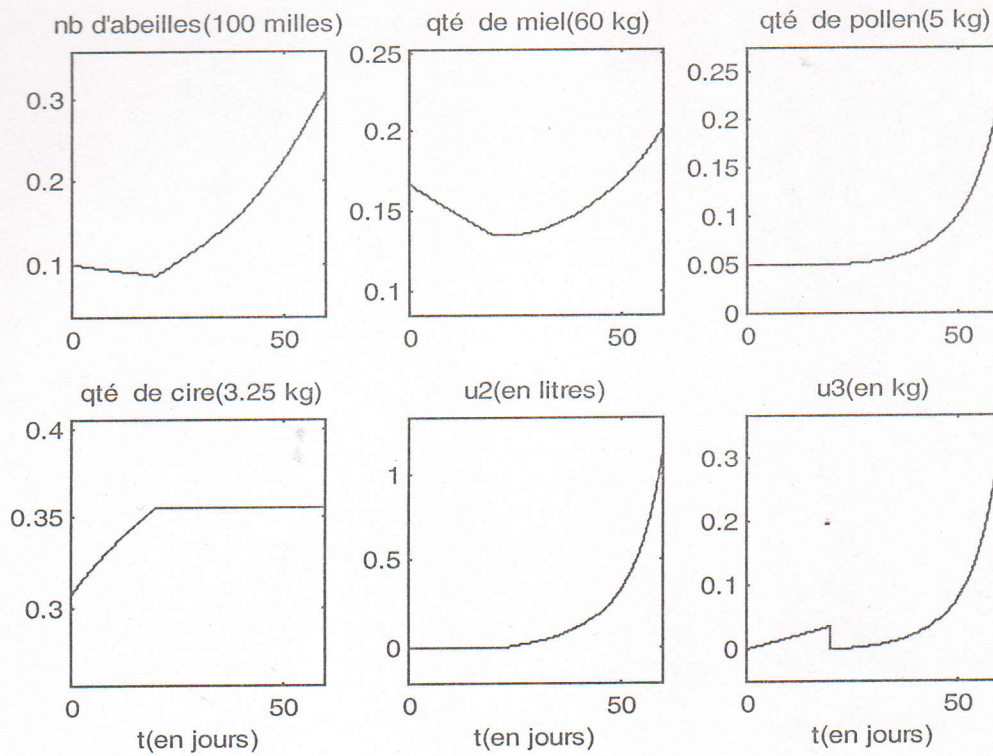


Figure 3.13 : « commande de la ruche sur la première période »

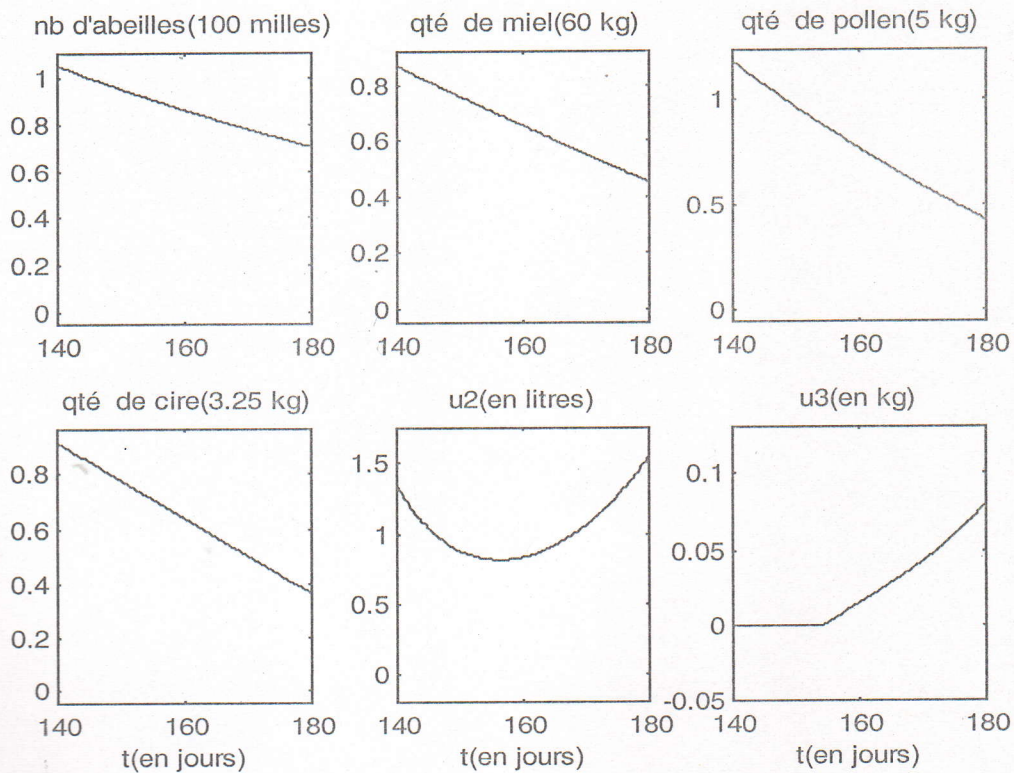


Figure 3.14 : « commande de la ruche sur la deuxième période »

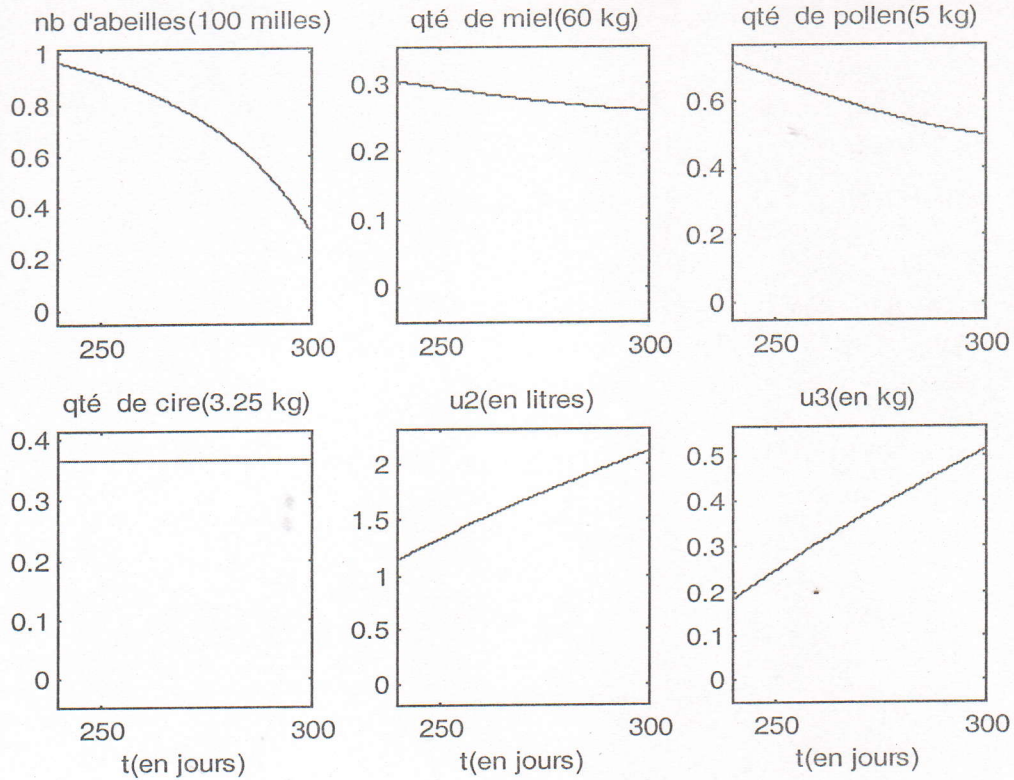


Figure 3.15 : « commande de la ruche sur la troisième période »

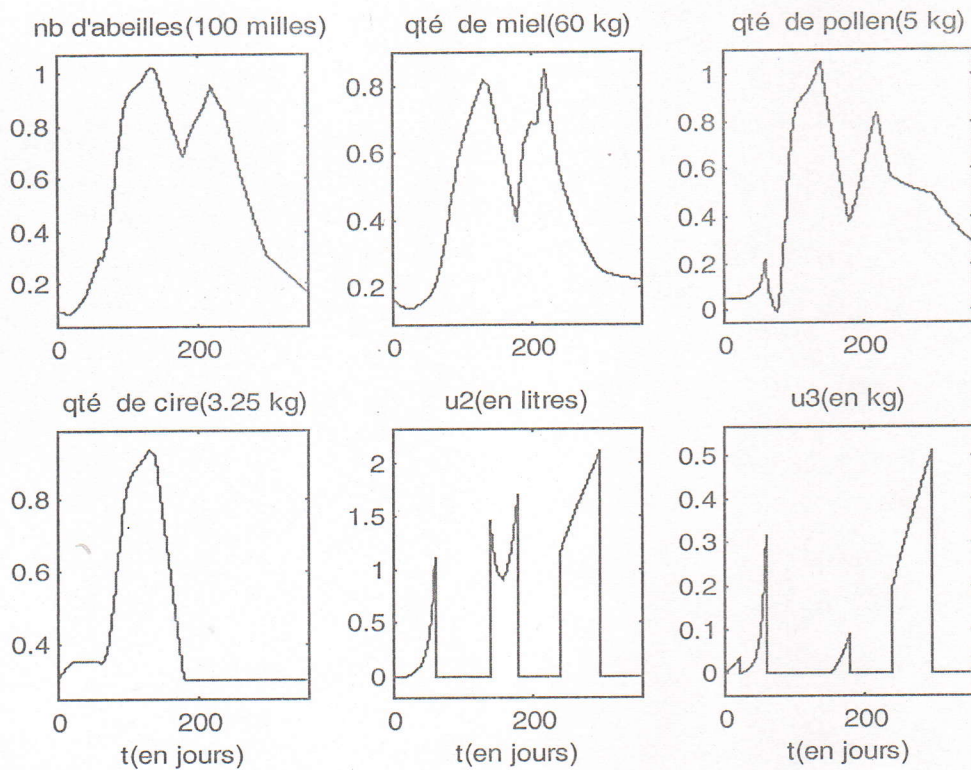


Figure 3.16 : «Commande de la ruche sur toute l'année»

Nous remarquons que sur chaque période, le vecteur d'état final est voisin de celui désiré. Quelques faibles écarts sont cependant observables. Nous les avons réduits au maximum tout

en assurant des valeurs de commandes correctes. Il s'agit donc de réaliser un compromis entre l'écart de la valeur finale par rapport à la valeur désirée, et les valeurs raisonnables du vecteur de commande. Ainsi, comme le montrent les figures 3.13, 3.14 et 3.15, les amplitudes de la commande sont acceptables comparées à celles obtenues par les études précédentes [3].

Nous pouvons montrer facilement que les conditions suffisantes d'optimalité sont vérifiées si les matrices G, Q et P sont au moins définies positives.

IV-2 Modélisation du système hybride global en boucle fermée

Le système global est donc formé par un système hybride en boucle ouverte commandé par un contrôleur hybride en boucle fermée. Le contrôleur est hybride, puisqu'il est multimodèles (peut être modélisé par un automate hybride). Il peut être donc représenté par le modèle à interface généralisé. Ce modèle est schématisé par la figure 3.17. Ce système fonctionne donc comme suit :

Emanant de l'état initial (0,0), le système évolue suivant la fonction f_i , γ_s compare à chaque instant t , la valeur de l aux instants de basculement τ_i , et teste son appartenance aux périodes d'intervention Δ_i . Ces deux cas se présentent alors :

1. Si t est égal à l'une de ces valeurs de basculement mais n'appartient pas aux domaines d'intervention, un événement est généré par γ_s et est envoyé vers l'interface du système en B.O. Cette dernière provoque un aiguillage du modèle (de fonction) en changeant la valeur de q , et génère un événement σ_{pv} qui informe le contrôleur du changement du modèle du système à contrôler. Les commandes du contrôleur dans ce cas sont nulles.
2. Si de plus, t appartient à l'une des périodes d'intervention, la partie continue du contrôleur génère un événement z_c à son interface invitant celle-ci à envoyer l'état discret q_c qui permet de déterminer le modèle du contrôleur à utiliser. En fonction de ce dernier et du modèle du système en B.O, le contrôleur calcule les commandes optimales à envoyer à l'entrée du système.

Ce système ainsi décrit peut être schématisé par la figure suivante :

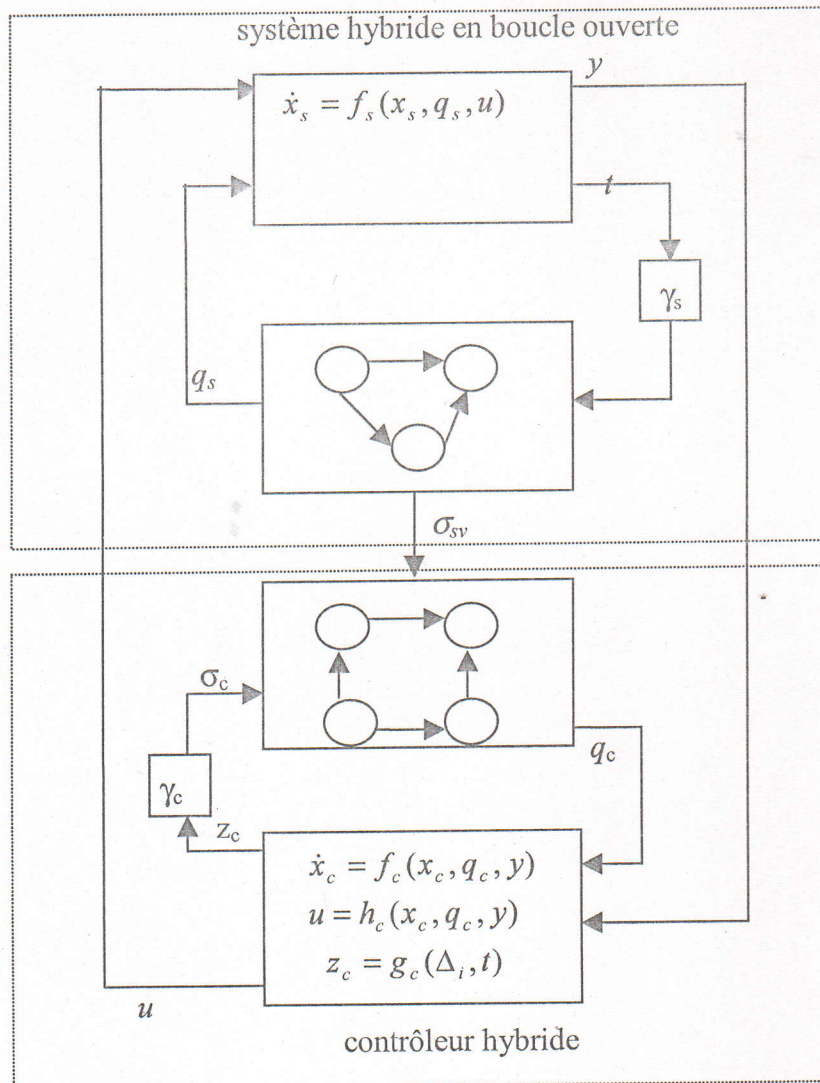


Figure 3.17 : «schéma détaillé du modèle de la ruche commandée»

Remarque

Le système global peut être vu comme une interconnexion de deux automates hybrides. L'un représentant la ruche apicole et l'autre son contrôleur.

V Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé l'étude présentée dans les chapitres précédents pour modéliser et contrôler une ruche apicole ayant déjà fait l'objet de plusieurs études auparavant. L'objectif postulé est l'augmentation de la production de cette ruche. Pour l'accomplir, un nourrissage en matières nutritives est nécessaire.

Nous avons tout d'abord établi un modèle mathématique hybride (composé de six modèles linéaires) très représentatif de cette ruche en utilisant les données mesurées durant l'année 1992. La comparaison des résultats obtenus par ce modèle hybride avec ceux d'un seul

modèle sur toute l'année ou avec un modèle par semestre [3],[16], confirme la nécessité de modéliser cette ruche avec ce modèle hybride.

A l'aide du modèle hybride obtenu, nous avons formulé un problème de commande optimale permettant de calculer les commandes nécessaires pour atteindre des objectifs de contrôle prédéfinis.

Les résultats des simulations démontrent avec certitude qu'une récolte assez conséquente peut être obtenue si la colonie d'abeilles est nourrie convenablement. Ces résultats sont très satisfaisants et ouvrent des perspectives pour d'autres études.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de la modélisation, de la stabilité et de la commande des systèmes hybrides tout en réalisant une application sur un exemple pratique qui est la ruche apicole.

Dans un premier lieu, nous avons dressé un panorama des différents modèles proposés en littérature. La synthèse très fine de la bibliographie disponible nous a permis de répartir ces modèles en trois grandes classes et de définir deux types de représentation, analytique et graphique. Les trois classes de modélisation établies sont :

- Une modélisation par les automates hybrides, dans laquelle nous retrouvons les deux types de représentation.
- Une modélisation par les systèmes à interface, qui est essentiellement analytique, où une interface est utilisée pour représenter l'interaction entre la partie discrète et la partie continue.
- Une modélisation exclusivement graphique, utilisant les réseaux de Pétri hybrides et les réseaux à flux hybrides.

Des exemples d'illustration ont été présentés pour chaque classe de modélisation.

Nous avons par la suite étudié la stabilité d'une classe de système hybrides en utilisant la seconde méthode de Lyapunov (méthode directe).

Pour le problème de commande, nous avons exploité la notion de fonctions de Lyapunov afin d'élaborer des lois de commande stabilisant le système en boucle fermée. Dans ce cadre là, deux stratégies de contrôle, pour un système constitué d'un ensemble de champs de vecteurs nonlinéaires, stabilisant le système en boucle fermée ont été présentées.

Dans ce même chapitre (chapitre 2), quelques schémas de commande pour les systèmes à interface, constitués d'un système hybride en boucle ouverte et d'un contrôleur discret en boucle fermée, ont été étudiés. Deux approches ont été présentées, à savoir :

- Une première approche qui consiste à transformer le problème en un système de contrôle d'un (SED).
- Une seconde approche qui consiste en une commande en un temps optimal.

Dans la troisième partie de notre travail, nous avons appliqué l'étude réalisée auparavant pour la modélisation et la commande d'une ruche apicole ayant fait l'objet de plusieurs études antérieures. La répartition de l'espace d'état de la ruche, basée sur l'analyse des données expérimentales recueillies en 1992 dans la région de la Mitidja, a donné lieu à six périodes différentes. Pour chacune d'elles (régions), un modèle bilinéaire a été associé. Le modèle ainsi défini est un modèle hybride, appartenant à la classe de systèmes à aiguillage ; nous avons pu la modéliser par un automate hybride et par un système à interface. En comparant les résultats de notre modèle hybride à ceux obtenus précédemment, par un seul modèle sur toute l'année ou ceux obtenus à partir d'un modèle par semestre, nous concluons que l'approche hybride a permis de mieux représenter cette ruche apicole. Néanmoins, en superposant les sorties de notre modèle avec les données expérimentales, nous avons remarqué certains faibles écarts qui, à notre avis, peuvent être réduits en augmentant le nombre de données recueillies sur toute l'année pour affiner les modèles et en identifiant la nature des événements responsables des changements brusques de modèle.

En s'inspirant du schéma de commande donné par la première approche (donné dans le chapitre 2) et en utilisant le modèle hybride établi, nous avons conçu un contrôleur hybride constitué d'un ensemble de contrôleurs continus dont chacun est spécifique à une période d'intervention, pour augmenter la production de la ruche. L'objectif postulé, dans chaque phase, est d'atteindre un état désiré tout en minimisant l'écart et le coût de la commande, ce qui revient donc à formuler un problème de commande optimale pour déterminer les commandes appropriées. L'analyse des résultats obtenus nous a permis de conclure que les objectifs prédéfinis ont été atteints avec une marge d'erreur raisonnable. Les résultats de cette commande hybride sont par conséquent satisfaisants et peuvent être améliorés en améliorant le modèle hybride représentant la ruche. Il faut noter aussi que la commande de la ruche suivant la valeur de l'état et non par période d'intervention est une perspective très intéressante.

Finalement, vu que l'étude des systèmes hybrides est un domaine très récent, nous souhaitons que notre investigation constituera une base de référence pour le lancement d'autres travaux de recherche tels que :

- Elaboration d'un modèle unifié regroupant tous les modèles énoncés dans ce mémoire,
- Développement d'une théorie d'analyse qualitative des systèmes hybrides (notion de point d'équilibre, stabilité, contrôlabilité, observabilité, transfert entrée/sortie, ...etc.),
- Développement de logiciels de simulation des systèmes hybrides,
- Application de ces outils à l'élaboration d'autres schémas de commande des systèmes hybrides.

Annexe A

ANNEXE DU CHAPITRE 2

Stabilité des systèmes dynamiques

Les définitions de stabilité sont nombreuses. Nous rappelons, ici, celles que nous utilisons dans le mémoire. Nous présentons essentiellement la stabilité des systèmes dynamiques continus.

Considérons un système dynamique représenté par l'équation :

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (\text{A.1})$$

$x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $t \in \mathfrak{R}$, $f : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ est une fonction continue. Nous supposons que, pour toute condition initiale x^0 , l'équation différentielle (A.1) possède une solution unique $x(t) = \Phi(t, t_0, x^0)$. Ceci revient à supposer que la fonction continue f satisfait la condition de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, \hat{x})\| \leq \mathfrak{L}_f \|x - \hat{x}\| \quad (\text{A.2})$$

où \mathfrak{L}_f est la constante de Lipschitz.

Définition A.1

$x_e \in \mathfrak{R}^n$ est point d'équilibre de (A.1) au temps t^* si

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \geq t^* \quad (\text{A.3})$$

Définition A.2

Un point d'équilibre x_e est dit isolé s'il existe $r > 0$ tel que la sphère $B(x_e, r) \subset \mathfrak{R}^n$, de centre x_e et de rayon r , ne contient aucun point d'équilibre autre que x_e .

Si x_e est différent de zéro, nous pouvons, par le changement de variable $\hat{x} = x - x_e$, se ramener à un point d'équilibre situé à l'origine de l'espace d'état. Aussi, nous supposons que l'origine $x_e = 0$ est un point d'équilibre isolé de (A.1).

Définition A.3

L'origine $x_e = 0$ est un point d'équilibre isolé stable de (A.1) si pour chaque $\mu > 0$ et quelque soit $t_0 \in \mathfrak{R}$, il existe $\delta(\mu, t_0)$ tel que si $\|x^0\| < \delta(\mu, t_0)$, alors

$$\|\Phi(t, t_0, x^0)\| < \mu, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{A.4})$$

Définition A.4

Le point d'équilibre $x_e = 0$ de (A.1) est asymptotiquement stable si

- (i) il est stable et
- (ii) pour chaque $t_0 \geq 0$, il existe $\eta(t_0)$ tel que si $\|x^0\| < \eta$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0, x^0) = 0$$

L'ensemble de tous les $x^0 \in \mathfrak{X}^n$ tel que $\Phi(t, t_0, x^0) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ est appelé *domaine d'attraction* du point d'équilibre x_e . Si pour (A.1), la condition (ii) est vraie, alors le point d'équilibre x_e est dit *attractif*.

Définition A.5

Le point d'équilibre $x_e = 0$ de (A.1) est uniformément asymptotiquement stable si

- (i) il est stable et
- (ii) on peut trouver δ_0 tel que, pour chaque $\mu > 0$, il existe $T(\mu) > 0$, indépendant de t_0 tel que si $\|x^0\| < \delta_0$, alors

$$\|\Phi(t, t_0, x^0)\| < \mu, \quad \forall t \geq t_0 + T(\mu).$$

La condition (ii) revient à dire qu'il existe δ_0 tel que si $\|x^0\| < \delta_0$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t + t_0, t_0, x^0) = 0 \quad (\text{A.5})$$

uniformément en (t_0, x^0) pour $t_0 \geq 0$.

Définition A.6

Le point d'équilibre $x_e = 0$ de (A.1) est dit *exponentiellement stable* s'il existe $\alpha > 0$ et si, pour chaque $\mu > 0$, il existe $\delta(\mu) > 0$ tel que si pour toute condition initiale $\|x^0\| < \delta(\mu)$, alors

$$\|\Phi(t, t_0, x^0)\| \leq \mu e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

pour $t_0 \geq 0$.

Remarque A.1

α est appelé *degrés de la stabilité exponentielle*

Définition A.7

Le point d'équilibre $x_e=0$ de (A.1) est instable s'il n'est pas stable. C'est à dire pour une condition initiale x^0 prise au voisinage de $x_e=0$ correspond une solution non bornée ($\|\Phi(t, t_0, x^0)\|$ tend vers l'infini).

Remarque A.2

Pour les systèmes temps-invariant (la fonction f ne dépend pas explicitement du temps), la stabilité (asymptotique) au sens de la définition A.4 est équivalente à la stabilité (asymptotique) uniforme.

Remarque A.3

Si les conditions données par les définitions ci-dessus sont vraies pour $\|x^0\|$ aussi grand qu'on veut, alors la stabilité (asymptotique) est dite stabilité (asymptotique) globale.

Nous allons maintenant donner les principaux théorèmes de stabilité utilisant la seconde méthode (directe) de Lyapunov. Cette méthode est basée sur l'existence d'une fonction continue $V(t, x) : \mathcal{R}^+ \times D_x \subset \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ appelée *fonction de Lyapunov* qui doit vérifier certaines propriétés que nous donnons ci-dessous.

Définition A.8

Une fonction continue $w : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ (resp. $D_x \rightarrow \mathcal{R}$) est positive définie si

- (i) $w(0)=0$ et
- (ii) $w(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ (resp. $0 < \|x\| \leq r$ où $r > 0$ est un nombre quelconque)

Définition A.9

Une fonction continue $w : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ (resp. $D_x \rightarrow \mathcal{R}$) est négative définie si $-w$ est positive définie

Remarque A.4

Si dans les deux définitions ci-dessus $w \geq 0$ (resp. $0 \geq w$), alors w positive (resp. négative) semi-définie.

Définition A.10

Une fonction $V : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^+ \times D_x \rightarrow \mathcal{R}$) est positive (semi) définie s'il existe une fonction positive (semi) définie $w : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ (resp. $D_x \rightarrow \mathcal{R}$) telle que :

- (i) $V(0)=0$ et
- (ii) $V(x) \geq w(x) \quad \forall x \in B(r), \quad r > 0.$

Remarque A.5

$V(x)$ est négative (semi) définie s'il existe une fonction w négative (semi) définie telle que $V(0)=0$ et $V(x) \leq w(x)$.

Théorème A.1

Le point d'équilibre $x = 0$ de (A.1) est stable au sens de Lyapunov, s'il existe une fonction continûment différentiable positive définie $V(t, x)$ telle que sa dérivée $\dot{V}(t, x)$ par rapport au temps t est négative semi définie.

Théorème A.2

Le point d'équilibre $x = 0$ de (A.1) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction continûment différentiable positive définie $V(t, x)$ telle que sa dérivée $\dot{V}(t, x)$ est négative définie.

Théorème A.3

Le point d'équilibre $x = 0$ de (A.1) est exponentiellement stable, s'il existe une fonction $V(t, x)$ telle que sa dérivée $\dot{V}(t, x)$ et des constantes positives c_1 , c_2 et c_3 telles que

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 \quad (\text{A.7})$$

pour tout $t \in \mathfrak{R}^+$ et pour tout $x \in B(r)$, $r > 0$.

Dans les théorèmes ci-dessus, nous avons considéré l'existence d'une fonction $V(t, x)$ vérifiant certaines propriétés dans son domaine de définition $\mathfrak{R}^+ \times B(r) \in \mathfrak{R}^n$. Dans le cas où ces propriétés sont vérifiées pour tout $x \in \mathfrak{R}^n$ alors, dans les conclusions des théorèmes (A.1) (A.2) et (A.3), il s'agit de stabilité globale. Pour les systèmes temps-invariant, la fonction de Lyapunov ne dépend pas du temps t et s'écrit simplement $V(x)$.

Les conditions énoncées dans les théorèmes (A.1) (A.2) et (A.3) ne sont que suffisantes. Les conditions nécessaires sont énoncées par le théorème réciproque (*converse theorem*) [].

Théorème A.4

Si f et f_x sont continues sur $\mathfrak{R}^+ \times B(r)$ et si le point d'équilibre $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable, il existe alors une fonction de Lyapunov $V(t, x)$ de classe C^1 sur $\mathfrak{R}^+ \times B(r_1)$, $r_1 > 0$ telle que

$$\dot{V}(t, x) \leq w(x) \quad (\text{A.8})$$

$$|V(t, x)| \leq \Psi(\|x\|) \quad (\text{A.9})$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in B(r_1)$; $w(x)$ est une fonction négative définie et $\Psi(\|x\|)$ est une fonction de classe K .

Remarque A.6

Dans le cas où le point d'équilibre $x = 0$ est uniformément exponentiellement stable, alors il existe une fonction $V(t,x)$ vérifiant les relations (A.6) et (A.7).

Cas des systèmes linéaires continus

Considérons le système linéaire continu temps-invariant

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) \quad (\text{A.10})$$

Théorème A.5

le point d'équilibre $x = 0$ de (A.10) est stable si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelles négatives et si les valeurs propres à parties réelles nulles sont des zéros simples du polynôme caractéristique de A .

Théorème A.6

le point d'équilibre $x = 0$ de (A.10) est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à parties réelles strictement négatives.

Remarque A.7

Lorsque la matrice A possède des valeurs propres à partie réelle strictement négative, alors la matrice A est dite de Hurwitz.

ANNEXE B

ANNEXE DU CHAPITRE 3

Tableau des valeurs des coefficients des différents modèles de la ruche apicole

	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 4	Modèle 5	Modèle 6
a_{11}	-0.0029	0.0266	0.0544	-0.0377	-0.3251	0.0038
a_{12}	-0.0026	0.0121	0.1135	0.2742	0.3791	-0.018
a_{13}	-10^{-4}	0.00004	-1.5753	-0.1297	0.3747	0.0017
a_{14}	0.018	0.0001	-1.2243	-2.2074	0.3906	-0.0735
a_{21}	-0.002	0.0027	-0.01	-0.0142	-0.0622	-0.0125
a_{22}	-0.0012	0.0026	0.0077	-0.015	0.0638	0.0051
a_{23}	0	-0.00001	-0.2514	0.0244	0.1319	-0.00007
a_{24}	-0.0003	0.00003	0.3357	0.3673	0.1424	0.0044
a_{31}	0	0.0035	0.0207	-0.00006	-0.00001	-0.0006
a_{32}	0	-0.0025	-0.0004	-0.0079	0.00002	-0.00011
a_{33}	0	0.00005	-0.1513	0.0036	0.00024	-0.00003
a_{34}	0	-0.00003	-0.4314	0.0624	0.00024	0.0008
a_{41}	10^{-4}	0	0.0027	0	-0.0046	0
a_{42}	$-2 \cdot 10^{-4}$	0	0.0013	0	0.0046	0
a_{43}	10^{-4}	0	-0.0347	0	0.0094	0
a_{44}	$4 \cdot 10^{-4}$	0	-0.0715	0	0.0099	0
β_1	0.00001	-0.0052	0.8013	-0.0127	1.038	-0.0003
β_2	-0.0046	-0.0002	-1.671	-0.0001	0.000018	0.000018

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.Alur, C.Courcoubetis, T.A.Henzinger et P.H.Ho, «*Hybrid automata : an algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems*», in R.L. Grossman, A.Nerode, A.P.Ravn et H.Rishel, editors, «Hybrid Systems», lect. N. in comp.sci. 736, pages 209-229. Springer verlag, 1993.
- [2] P.J.Antsaklis, J.A.Stiver et M.Lemmon, «*Hybrid system modeling and autonomous control systems*», in R.L. Grossman, A.Nerode, A.P.Ravn et H.Rishel, editors, «Hybrid Systems», lect. N. in comp.sci. 736, pages 366-392. Springer verlag, 1993.
- [3] M.Belgrade et H.Bouhadjar, «*Etude du problème non linéaire de la commande optimale, application à une ruche apicole* », mémoire de fin d'études en recherche opérationnelle, Institut de mathématiques, université de Blida, 1998.
- [4] M.S.Branicky, «*Stability of switched and hybrid systems*», Tech.Rep.LIDS-P-2214, Lab.for Information and Decision Systems, MIT, Nov.1993.
- [5] M.S.Branicky, «*Universal computation and other capabilities of hybrid and continuous dynamical systems*», *theoretical computer science, special issue on hybrid systems*, 138 : 1 (1995),
- [6] M.S.Branicky et S.K.Mitter, «*Algorithms for Optimal Hybrid Control*», *Proceedings of the 34th conference on Decision and Control, New Orleans, LA-December 1995*, PP.2661 – 2666.
- [7] R.W.Brockett, «*Hybrid models for motion control systems*», in H.L.Trentelman and J.C.Willems, eds. , *Essays in control : perspectives in the theory and its applications*, Boston, 1993.
- [8] A.Caillas, «*le rucher de rapport*», C.A 1974, Paris.
- [9] X.Cao, Y.Ho, «*Models of discrete event dynamic systems* », *IEEE Control Systems Magazine*, pp.69-76, June 1990.
- [10] C.Cassabdras, P.Ramadge, «*Toward a control theory for discrete event systems*», *IEEE Control Systems Magazine*, pp.66-68, June 1990.
- [11] A.Chombart, J.M.Flaus et H.Alla, «*Hybrid Dynamic Systems Modeling*», *European control Conference*, 1-4 July 1997.
- [12] J.M.Flaus et H.Alla, «*Structural analysis of hybrid systems modelled by hybrid flow nets*», *European Control Conference*, 1-4 July 1997.
- [13] M.Heymann, «*Concurrency and discrete event control*», *IEEE Control Systems Magazine*, 10 : 4, pp.103-112, 1990.

- [14] M.W.Hirsch, S.Smale, «*Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*», Academic press, San Diego, 1974.
- [15] ITPE, «*Nourrissement artificiel*», ministère de l'agriculture 1994.
- [16] L.Koutchouk et S.Yaich Achour, «*Modélisation d'une ruche apicole*», mémoire de fin d'études en recherche opérationnelle, institut de mathématiques, université de Blida, 1993.
- [17] B.B.Kuo, «*Automatic control systems*», third edition, Prentice-hall, INC, Englewood cliffs, New Jersey, 1975.
- [18] J.Le Bail, H.Alla et R.David, «hybrid petri nets », in *European Control Conference*, pages 1472-1477, Grenoble, France, 1991.
- [19] M.Lemmon, J.A.Stiver et P.J.Antsaklis, «*Event identification and intelligent hybrid control*», In R.L. Grossman, A.Nerode, A.P.Ravn et H.Rishel, editors, «*Hybrid Systems*», lect. N. in comp.sci. 736, pages 268-296. Springer verlag, 1993.
- [20] M.Lemmon et C.Bett, «Hybrid Control System Design Using Robust Linear Control Agents», *Proceedings of the 34th conference on Decision and Control, New Orleans, LA-December 1995*, pp. 2688 – 2693.
- [21] Z.Li, Y.Shi et X.Xu, «Suboptimal control of a class of hybrid dynamic systems», *from the fourth international conference on control, automation, robotics and vision (ICARCV'96)*, Singapore, 3-6 December, 1996, PP 124-182.
- [22] J.Lygeros, «*Hierarchical, hybrid control of large scale systems*», a dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering.-Electrical Engineering and computer sciences in the graduate division of the University of California at Berkeley, 1996.
- [23] Z.Manna et A.Pnueli, «*Verifying hybrid systems*», In R.L. Grossman, A.Nerode, A.P.Ravn et H.Rishel, editors, «*Hybrid Systems*», lect. N. in comp.sci. 736, pages 4-35. Springer verlag, 1993.
- [24] A.N.Michel et L.Hou, «Modeling and qualitative theory for general hybrid dynamical and control systems », *IFAC- IFIP- IMACS conference*, PP. 173-181.
- [25] A. Nerode et W.Khon, «*Models for hybrid systems*». In R.L. Grossman, A.Nerode, A.P.Ravn et H.Rishel, editors, «*Theory of hybrid systems*», pages 317-356. Springer verlag, 1993.
- [26] T.Niinomi, B.Krogh et Jose E. R. Cury, «Synthesis of Supervisory Controllers for Hybrid Systems Based on Approximating Automata», *Proceedings of the 34th conference on Decision and Control, New Orleans, LA-December 1995*, PP 1461-1466.
- [27] M.Oubatti, «*Identification et contrôle des systèmes dynamiques par les réseaux de neurones. Application à une ruche apicole* », thèse de magister, institut d'électronique, université de Blida, 1996.

- [28] K.M.Passino, «Modeling and analysis of hybrid systems : examples», *proc. Of Int. Symp. Of intelligent control*, 13-15 août 1991, Virginia.
- [29] S.Pettersson, B.Lennartson, «Hybrid modelling focused on hybrid Petri nets», *accepted at 2nd European Workshop on Real-time and Hybrid systems*, Grenoble, France, June 1995.
- [30] S.Pettersson, «Stability and robustness for hybrid systems», *CDC '96, Kobe*, décembre 1996.
- [31] S.Pettersson, B.Lennartson, «Time optimal control for a class of hybrid systems», *in Proc.of 3rd European Control Conference*, pages 2054-2059, Rome, 1995.
- [32] S.Pettersson, « *Analysis and design of hybrid systems* », Thesis for the degree of PhD, Control of Engineering Laboratory, department of signals and systems, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- [33] P.J.Prost, «*Apiculture*», edition J.Baillière 1987, Paris.
- [34] P.Ramadge, W.M.Wonham, «The control of discrete event systems », *Proceedings of the IEEE*, vol.77, No.1, pp. 81-89, January 1989.
- [35] J.A.Stiver, P.J.Antsaklis, and M.D.Lemmon, «Hybrid Control System Design Based On Nature Invariants», *Proceedings of the 34th conference on Decision and Control, New Orleans, LA-December1995*, pp. 1451-1460.
- [36] J.A.Stiver et P.J.Antsaklis, «Modeling and analysis of hybrid control systems», *Proceedings of the 31st conference on Decision and Control*, December 1993, PP 3748-3750.
- [37] L.Tavernini, «*Differential automata and their discrete simulators* », *nonlinear analysis, theory, methods and applications*, 11 (1987) 665-683.
- [38] M.Titus, «*control synthesis for batch processes*», PhD thesis, Control Eng. Lab, Chalmers Univ. Of Techn., Göteborg, Sweden, 1995.
- [39] H.Ye, A.N. Michel et L.Hou, «Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems», *Proceedings of the 34th conference on Decision and Control, New Orleans, LA-December1995*, PP. 2679 – 2684.
- [40] H.Ye, A.N.Michel et P.J. Antsaklis, «A General Model for The Qualitative Analysis of Hybrid Dynamical Systems» *Proceedings of the 34th conference on Decision and Control, New Orleans, LA-December1995*, PP. 1473-1477.

Re	Δp (mm d'eau)				
	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7
53,122	24	25	27,5	28	29,5
54,375	26,5	27	29,5	30	31,5
56,535	29	28,5	33	33	35
57,533	30,5	31	34,5	35	37
58,564	32	32,5	36	36,5	39,5

Tableau n° 4-7. Variation de la perte de charge singulière en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de chicanes ($\alpha=90^\circ$, Config.C1)

Re	Te(°C)	Ts(°C)	Tx(°C)	Tp(°C)	Nu
35348	97,4	69,5	94,6	59,3	285,6
42019	90,2	68,2	88	56	293,2
47769	87,9	67	87	55,5	307,2
45115	84,4	65	82,4	53,2	313,7
50423	80,7	63	79,8	51,9	325,3
52635	77,9	66,5	78,8	50,4	344,8

Tableau n° 4.8.a Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

(N=3, $\alpha = 90^\circ$, S/D=5.71, configuration .C1 et P= 640W)

Re	Te(°C)	Ts(°C)	Tx(°C)	Tp(°C)	Nu
35348	100,1	67,5	87,6	55,8	369,3
42019	94,4	66	87,2	55,6	388,5
47769	89,2	64	82,4	53,2	398,7
45115	83,1	60,5	77,4	50,2	407,3
50423	79,2	58,5	74,6	49,3	417,8
52635	76,8	57	73,2	48,6	435,2

Tableau n° 4.8.b Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

(N=3, $\alpha = 120^\circ$, S/D=5.71, configuration .C1 et P= 640W)

Re	Te(°C)	Ts(°C)	Tx(°C)	Tp(°C)	Nu
35348	93,5	66	81,6	52,8	342,9
42019	87,6	64	78,8	51,4	367,4
47769	82,8	61	76,6	50,3	381,6
45115	77,6	58,5	72,4	48,2	394,7
50423	72,5	55,5	69,6	46,8	399,2
52635	70,2	53,5	67,4	45,7	411,5

Tableau n° 4.8.c Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

(N=3, $\alpha = 150^\circ$, S/D= 5.71 configuration .C1 et P= 640W)

Re	Nu		
	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 150^\circ$
35348	285,6	369,3	342,9
42019	293,2	388,5	367,4
45115	307,8	398,7	381,6
47769	313,7	407,3	394,7
50423	325,3	417,8	399,2
52635	344,8	435,2	411,5

Tableau n° 4.8 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différents angles d'ouvertures (N=3, S/D=5.71, configuration.C1 et P= 640W)

Re	Nu		
	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 150^\circ$
35348	343,2	371,6	369,8
42019	350,1	398,9	373,7
45115	360,1	418,8	381,4
47769	377,4	432,6	401,5
50423	389,9	455	427,6
52635	398,5	480,7	452,4

Tableau n°4.9 Variation du nombre de Nusseltmoyen en fonction du nombre de Reynolds pour différents angles d'ouvertures (N=3, S/D=5.71 configuration.C2et P= 640W)

Re	Te	Ts	Tm	Tp	Nu
35348	105,6	73	93,6	59,3	343,2
42019	96,4	70,5	90	57	350,1
45115	93,5	69,5	87,6	55,8	360,6
47769	89,6	66,5	83,8	53,9	377,4
50423	85,3	64	82	53	389,9
52635	81,9	62,5	78,2	31,6	398,5

Tableau n°4.9.a Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

(N=3, $\alpha = 90^\circ$, S/D= 5.71, configuration .C2 et P= 640W)

Re	Te	Ts	Tm	Tp	Nu
35348	94,8	65	83,6	55,8	371,6
42019	88,6	64	79,4	51,2	398,9
45115	84,1	61	77	50	418,8
47769	80,2	58,2	72	48,5	432,6
50423	74,8	55	69,2	47,1	455
52635	78,8	50,5	97,4	46,2	480,7

Tableau n°4.9.b Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

(N=3, $\alpha = 120^\circ$, S/D=5.71, configuration .C2 et P= 640W)

Re	Te	Ts	Tm	Tp	Nu
35348	86,4	63,5	77,2	50,6	369,8
42019	79,7	59	73,4	48,7	373,7
47769	75,1	56,5	70,6	47,3	381,4
45115	70,6	53,5	65,6	44,8	401,5
50423	65,2	51	59	41,5	427,6
52635	61,3	49,2	54,6	39,3	452,4

Tableau n° 4.9.c Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

(N=3, $\alpha = 150^\circ$, S/D=5.71, configuration .C2 et P= 640W)

Re	Te	Ts	Tm	Tp	Nu
35348	86,1	55	83,2	54,2	260,5
42019	79,5	62,5	80	52,5	271,4
45115	76,4	60,5	76,8	50,9	285,4
47769	72,8	58	73,4	49,2	296,9
50423	69,1	56,5	65,6	45,3	314
52635	66,8	55	63,2	44,1	342,5

Tableau n° 4.11.a Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds
(N=3, $\alpha = 120^\circ$, S/D=4.28, configuration .C2 et P= 640W)

Re	Te	Ts	Tm	Tp	Nu
35384	98,6	67,5	86	55,5	388,7
42019	89,8	63,8	81,5	53	416,3
45115	87,1	62	77	51	444,2
47769	82,5	59,2	73,6	49,3	484,4
50423	79,4	57	71	48	503,3
52635	76,6	55,3	67,6	46,3	543,6

Tableau n°4.1.b Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds
(N=3, $\alpha = 120^\circ$, S/D=7.14, configuration .C2 et P= 640W)

Re	Nu		
	S/D = 4,28	S/D = 5,71	S/D = 7,14
35384	260,5	371,6	388,7
42019	271,4	398,9	416,3
45115	285,4	418,8	444,2
47769	296,9	432,6	484,4
50423	314	455	503,3
52635	342,5	480,7	543,6

Tableau n° 4.11 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différents arrangements géométriques
(N=3, S/D=5.71, configuration .C2 et P= 640W)

Re	N U					
	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7
35,384	324,5	371,6	367,7	388,5	378,9	398,2
42,019	357,5	398,9	375,6	426,4	407,4	432,4
45,115	378	418,8	393,5	440,2	435	468,2
47,769	388,1	442,6	409,9	466,5	447,2	485,4
50,423	425,1	455	448,9	493,9	462,9	500,7
52,635	457	496,8	486,6	526,7	496,4	569,5

Tableau n° 4.12 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de chicane ($S/D=1.64$, $\alpha=120^\circ$, configuration .C2 et $P= 640W$)

Re	Te(°C)	Ts(°C)	Tx(°C)	Tp(°C)	Nu
35384	56,9	52,5	53	38,5	124,3
42019	53,4	48,5	50,8	37,4	125,7
45115	48,9	45,5	49,2	36,6	142
47769	46,9	44	44,8	34,4	150,1
50423	45,8	43	43,4	33,7	160,9
52635	44,4	41,5	43	33,7	189,3

Tableau n° 4.13.a Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds ($N=0$, et $P= 640W$)

Re	N u	
	N=0	N=7 *
35,384	124,3	463,4
42,019	125,7	492,8
45,115	142	511,8
47,769	150,1	538,7
50,423	160,9	565
52,635	189,3	596,2

Tableau n°4.13 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds (*, $N=7$, $\alpha= 120^\circ$, configuration .C2, ordre décroissant et $P= 640W$)

Re	N U					
	P=640 w	P=529 w	P=297,6 w	P=190,5 w	P=84,7 w	P=60 w
35384	463,4	328,8	307,4	267,7	197,6	116,1
42019	492,8	353,4	312,4	278,7	202,2	120,3
45115	511,8	368,6	322	288,2	213,1	129,6
47769	538,7	395,9	330,4	293,8	222,7	136,2
50423	565	413,2	347,3	312	238,8	134,8
52635	596,2	451,6	365,2	329,5	256,7	162,6

Tableau n° 4.14 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds pour différents puissances de chauffe (N=7, $\alpha=120^\circ$, configuration .C2, ordre décroissant)

BIBLIOGRAPHIE.

REFERENCES

- [1] Prandtl
M. A. PORTIER; Mécanique de fluides et transfert de chaleur par convection.
- [2] Prandtl - VAN KARMAN
N.A.C.A. T.H 611 1931.
- [3] VAN KARMAN
Trans A.S.N.E. 61-705 1939.
- [4] DEISSLER
Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers.
NADA Report 1210 1955.
- [5] HATTON - DURANBY
The effect of axially varying and unsymmetrical boundary conditions on heat transfer with turbulent flow between parallel plates
- [6] Siegel et Sparun
Comparison of turbulent heat transfer results for uniform wall heat flux and uniform temperature.
J. H. T. C82, 152 1962.
- [7] Sleicher - TRIBUS
Heat transfer in a pipe with turbulent flow and arbitrary wall temperature distribution.
TRANS, AM. SOC. MECH. ENGRS 79
789 - 797 1957.
- [8] WOTTER et TRIBUS
A solution to the turbulent Gneutz problem fully developed and entry region heat transfer rates.
CHEM, ENGRS. SC - VOL 27, P 2013 - 2093 1977.
- [9] JOHNSON et Hamarty
Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe.
CHEM, ENGRS, SC Vol 17, P 807 - 870 1962.
- [10] [[2], [3], , [9]] cité par M. KERMIA (Thèse de Magister)
Transfert de chaleur et de masse entre deux plaques pleines parallèles humidifiées sous l'effet d'un écoulement d'air turbulent.
U.S.T.H.B. Juin, 1985.
- [11] F. KREITH
Transmission de chaleur et thermodynamique.

- [12] **M. ZOUGGAR**
Determination du coefficient de transfert de chaleur en convection naturelle et forcée d'une plaque plane munie d'ailettes.
Mémoire de fin d'étude U.S.T.B. 1991.
- [13] **S. A. IDEM, C, JUNG**
Performance of air to water copper finned tube heat exchangers at moderately low air side.
Reynolds numbers. including effects of baffles.
- [14] **B. W. WEBB**
Conjugate heat transfer in a channel with staggered ribs.
T. M. Liou, J. J. HWANG
Turbulent heat transfer augmentation and friction in a periodic fully developed channel flows.
Journal of heat transfer Vol - 114 February, 1992.
- [15] **Y. M. Zhang**
J. C. Han. , Augmented heat transfer in a square channels with parallel crossed, and V - shaped angled ribs.
Journal of heat transfer Vol - 113 August, 1991.
- [16] **R. T. KUKREJA**
Local heat / mass transfer distribution in a square channel with fully and V - shaped ribs.
- [17] **M. AIT-OUMESSAOU**
Etude des paramètres influents sur les performances des échangeurs à tubes de fumée.
Mémoire de fin d'études, U.S.T.H.B. 1993.
- [18] **M. A. FORTIER**
Mécanique des fluides et transfert de chaleur et de masse par convection.
Paris VI, 1975.
- [19] **M. Giot**
Phénomènes de transfert fluide-chaleur- masse.
Edition CIACO, 1989.
- [20] **M. F. SANANES**
Mécaniques des fluides réels.
C.N.R.S. 1972.
- [21] **M. Roland SCHIESTEL**
Modélisation et simulation des écoulements turbulents
Edition Hermès - Paris 1993

PUBLICATION ET COMMUNICATION DES RESULTATS

(Manifestations Scientifiques)

1. " Effects of baffles configuration and position on the global exchange Coefficient in the smoke pipes of boilers".

Par : M. ZAHZAM et A. LAMECHE

(First international thermal energy congress)

Marrakesh, Marocco, June 1993.

2. "Influence de la géométrie interne des faisceaux tubulaires sur les performances des échangeurs industriels".

Par M. ZAHZAM et A. LAMECHE

(1ère Journées d'études de Mécanique)

Chlef, Algérie Décembre 1993

3" Influence de la géométrie interne des faisceaux tubulaires sur les performances et le dimensionnement des échangeurs industriels."

Par M. ZAHZAM et A. LAMECHE

(12ème colloque sur les applications techniques de la mécanique)

Université Mc Gill, Montréal, Canada, Juin 1994