T.D. N° 1

RAPPEL MATHEMATIQUE

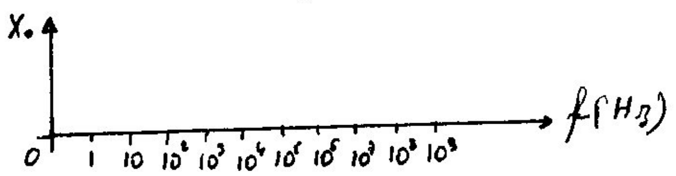
I Equations aux dimensions:

Toute grandeur physique s'exprimera en $M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} A^{\delta}$ où
M représente la masse (et non pas les mètres !!!)
L représente la longueur
T représente le temps
A représente l'intensité

Exemple: Quelle est la dimension d'une Force?
Réponse: Du moment que toutes les forces (gravitationnelle, de raideur, de frottement, d'inertie, de Coulomb ...) ont même dimension, il suffit de chercher l'expression la plus simple d'une Force à savoir $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ d'où $[F] = M \cdot L T^{-2}$.

Règle 1:
On ne peut ajouter (ou retrancher) que des quantités de m̂ dimension
Autrement dit, une équation $a + b + c = d + e$ est dite homogène si a, b, c, d et e ont même dimension.

Regle 2:
Les fonctions transcendantes (sin, cos, tg, arc sin, sh, arg th, Log, e ...) sont sans unité, et sans dimension.
Remarque: Un angle n'a pas de dimension $[\theta] = M^0 L^0 T^0 = 1$
C'est-à-dire que
$\sin\alpha$; $\operatorname{Log}\beta$; e^{λ} n'ont de sens que si α, β et γ sont sans dimension.
Exception faite pour les graphes. Dans le but de tracer certaines courbes dont l'echelle est trop exigue ou trop large, on utilise l'echelle logarithmique ou semi-logarithmique.
Ex: la frequence varie de 1 à 10^9. Donc on prendra une échelle semi-Logarithmique.



Exercice N°1
Verifier l'homogeneité des équations suivantes.

① $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

② $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

③ $mg - Kx_0 - Kx + F(t) = m\ddot{x}$

④ $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = F_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$

⑤ $(J + mr^2)\ddot{\theta} + \beta L^2\dot{\theta} + (kl^2 + mgl)\theta = F_0 \cos\omega t$

RAPPEL MATHEMATIQUE (suite)

Résolution des équations differentielles linéaires du second ordre

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \sin \omega t$$

1 Equation différentielle homogène (i.e. sans 2nd membre)

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (1)$$

Il est à noter que pour les problèmes de vibrations, le point au-dessus d'une lettre ($\dot{x}$) désigne la dérivée par rapport au temps exclusivement.

Posons $x = A e^{rt}$

l'équation (1) devient alors $(ar^2 + br + c) A e^{rt} = 0$

ce qui revient à $ar^2 + br + c = 0$ appelée équation caractéristique

$\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$: 2 racines réelles $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
- si $\Delta = 0$: 1 racine double $r = -\dfrac{b}{2a}$; $x = (A + Bt)e^{rt}$.
- si $\Delta < 0$: 2 racines complexes $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$; $x = A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$.

• cas particulier : $b = 0$

$$a\ddot{x} + cx = 0$$

$\ddot{x} + \dfrac{c}{a} x = 0$: forme canonique.

si a et c de même signe : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ donc $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ où $\omega_0^2 = \dfrac{c}{a}$

si a et c de signes differents : $\ddot{x} - \alpha^2 x = 0$ donc $x = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$ où $-\alpha^2 = \dfrac{c}{a}$

Remarque : Dans le cas où a et c sont de même signe, la solution peut s'écrire sous differentes formes.

$$x = \begin{cases} A e^{j\omega_0 t} + B e^{-j\omega_0 t} & \text{dans } \mathbb{C} \\ X_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi)} & \text{dans } \mathbb{C} \\ A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t & \text{dans } \mathbb{R} \\ X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) & \text{dans } \mathbb{R} \\ K \sin(\omega_0 t + \varphi) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Rappel : $e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$

B/ Equation différentielle avec 2^{nd} membre

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \cos\omega t$$

solution générale : x
solution homogène : x_H, qui ne dépend que du 1^{er} membre
solution particulière : x_p, qui ne dépend que du 2^{nd} membre.

$$x = x_H + x_p$$

$$x_H = \begin{cases} Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ (A + Bt)e^{rt} & \text{si } \Delta = 0 \\ Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi_1) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

$x_p = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où X_0 et φ à déterminer par identification

ou $x_p = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ A et B à déterminer par identification

*** cas particulier $b = 0$**

$$a\ddot{x} + cx = F_0 \sin\omega t$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin\omega t \quad \text{(si a et c sont de même signe)}$$

d'où $x_H = K\cos(\omega_0 t + \varphi')$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$

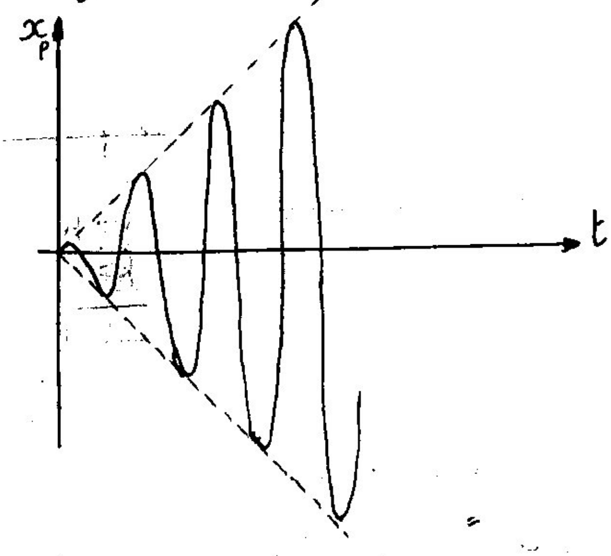
$$x_p = \begin{cases} X_0 \sin(\omega t + \varphi) & \text{si } j\omega \text{ n'est pas racine de l'équation caract.} \\ X_0 t \sin(\omega t + \varphi) & \text{si } j\omega \text{ est racine de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

Donc en résumé :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \sin\omega t \Longrightarrow x = \begin{cases} K\sin(\omega_0 t + \varphi') + X_0 \sin(\omega t + \varphi) & \text{si } \omega \neq \omega_0 \\ K\sin(\omega_0 t + \varphi') + X_0 t \sin(\omega t + \varphi) & \text{si } \omega = \omega_0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} - \alpha^2 x = F_0 \sin\omega t \Longrightarrow x = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t} + X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

dans le cas ②, on observe le phénomène de résonance, car lorsque t augmente, l'amplitude de x tend vers l'infini



$$x_p = X_0 t \sin(\omega t + \varphi)$$

Exemples (1)

Résoudre :

a/ $\ddot{x} + 14x = 0$

b/ $\ddot{x} - 4x = 0$

c/ $\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = 0$

d/ $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$

e/ $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$

f/ $\ddot{x} - 4x = 2\sin 2t$

g/ $\ddot{x} + 4x = 2\cos 3t$

h/ $\ddot{x} + 4x = 2\cos 2t$

i/ $\ddot{x} - 4x = 2\cos 3t$

Réponses:

$x = K\sin(\sqrt{14}\,t + \varphi)$

$x = Ae^{2t} + Be^{-2t}$

$x = Ae^{-t} + Be^{-5t}$

$x = (A + Bt)e^{-3t}$

$x = Ae^{-2t}\cos(3t + \varphi)$

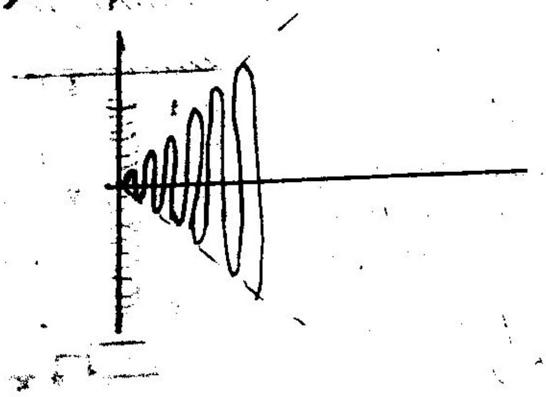
$x = Ae^{2t} + Be^{-2t} - \frac{1}{4}\sin 2t$

$x = K\sin(2t + \varphi') + X_0\cos(3t + \varphi)$ avec $X_0 =$

$x = K\sin(2t + \varphi') + X_0 t\cos 2t$

$x = Ae^{2t} + Be^{-2t} + X_0\cos(3t + \varphi)$ avec $X_0 = -\frac{2}{13}$

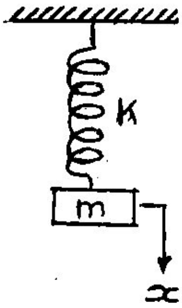
h) $x_p = X_0 t \cos 2t$



Oscillations libres et non amorties (1d.d.l)

Exercice N°1

Soit le systeme oscillatoire suivant.



1°/ Déterminer l'équation differentielle du mouvement par

a/ la méthode de la relation Fondamentale de la dynamique

b/ la méthode du Lagrangien

c/ la méthode de la conservation d'énergie (Rayleigh)

2°/ En déduire l'équation horaire du mouvement sachant que $x(0) = 5\,cm$ et $\dot{x}(0) = 0$

Exercice N°2

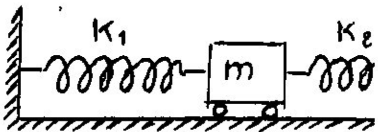


Fig a

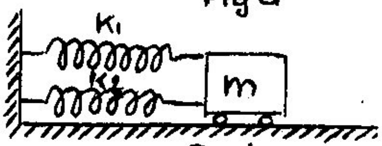


Fig b

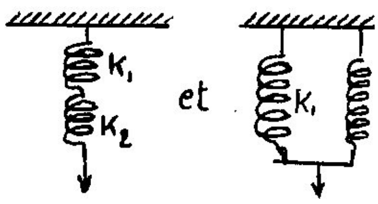
Pour le systeme oscillant de la figure a, les 2 ressorts K_1 et K_2 sont-ils en serie ou en parallèle ?

Determiner les equations differentielles des mouvements des 2 systemes ci-contre.

Que pouvez-vous en déduire ?

Determiner la période des oscillations

Exercice N°3

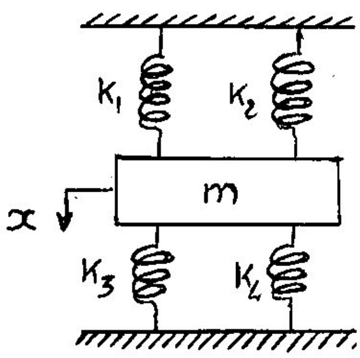


A/ Quelle est la constante de raideur du ressort K équivalent à 2 ressorts montés en série ?

B/ Même question pour 2 ressorts montés en parallèle.

Comparer $K_{équ}$ à K_1 et K_2 dans les 2 cas.

Exercice N°4



Soit le systéme oscillant ci-contre où la masse effectue un mouvement suivant la verticale. Determiner

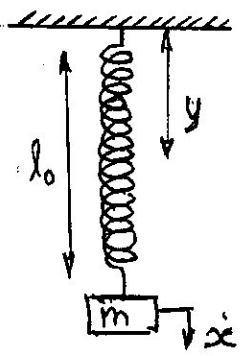
1/ L'equation differentielle du mouvement

2/ L'équation horaire des oscillations

3/ La pulsation propre de ce système

4/ Verifier l'homogeneité (equation aux dimensions) de l'expression de la periode

Exercice N°5

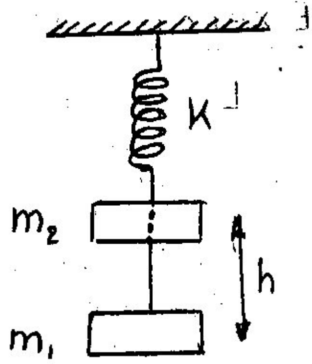


On suppose que le ressort a une masse non négligeable m_s, répartie de façon homogène le long du ressort. La masse lineique du ressort est donc $\mu = m_s / l_0$. Calculer la nouvelle periode T des oscillations.

On supposera que la vitesse d'une spire varie linéairement avec $\dot{x}$ $(\dot{y} = a\dot{x})$

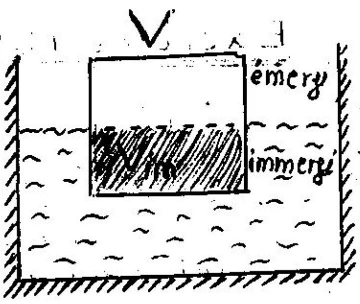
xercice N°6

Soit une masse m_1 accrochée à un ressort par un fil inextensible qui passe à travers le centre d'une masse m_2 trouée. Cette masse m_2 tombe en chute libre sur m_1 qui était au repos (immobile). Le choc étant mou, trouvez la fréquence des oscillations en précisant la référence du mouvement.



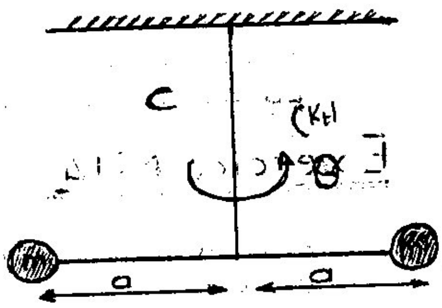
xercice N°7

Un glaçon parallélépipède de masse m, de hauteur L, de base S et de densité ρ' flotte sur l'eau ($\rho = 1$)
Sachant que la poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps immergé est $\vec{P}_A = -\rho V_{im} \vec{g}$ où V_{im} est le volume immergé,
1/ déterminer le volume immergé du glaçon à l'équilibre statique. ($\rho' = 0{,}9$ et $\rho = 1$).
2/ On enfonce le glaçon d'une quantité x_0 par rapport à sa position d'équilibre statique puis on le lâche. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mvt



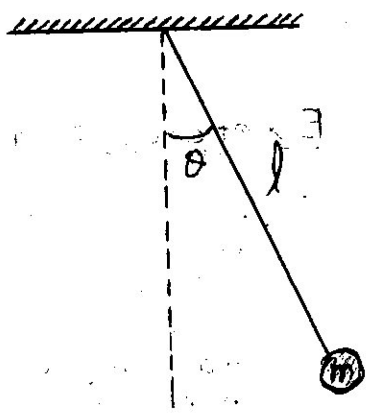
Exercice N°8

Soit le pendule de torsion suivant.
1/ Déterminer l'équation différentielle du mouvement par 2 méthodes différentes
2/ Donner l'équation horaire du mouvement sous les 5 formes équivalentes.
3/ Déterminer les constantes des équations horaires sachant que $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ et $\dot{\theta}(0) = 0$



Exercice N°9 (cours)

Soit le pendule harmonique suivant.
On écarte la masse de la verticale d'une quantité θ_0 puis on la lâche.
1/ Déterminer l'équation différentielle du mouvement par 2 méthodes différentes.
(On ne procède à aucune approximation).
2/ A quelle condition l'oscillation sera-t-elle harmonique (équa. diff. linéaire).
3/ Quelle est, dans ce cas, l'équation des oscillation sachant qu'à $t = 0$, $\theta(0) = \pi/3$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

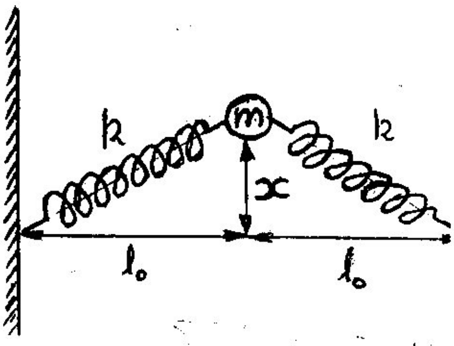


xercice N°10

Un pendule harmonique simple bat la seconde (c'est-à-dire que sa période est égale à 1 s). De combien doit-on faire varier sa longueur (préciser si c'est augmenter ou diminuer), pour qu'il retarde d'une minute par jour.

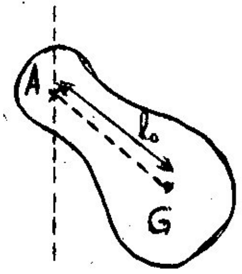
Exercice N° 11.

L'oscillateur ci-contre est composé de deux ressorts identiques de même raideur K et d'une masse m. Sachant que la longueur d'un ressort à la position horizontale (qui est la position d'équilibre statique en m temps) est l_0, trouver l'équation différentielle du mouvement de m. On suppose que m se déplace sur l'axe vertical. Quelle est le type de ces oscillations?



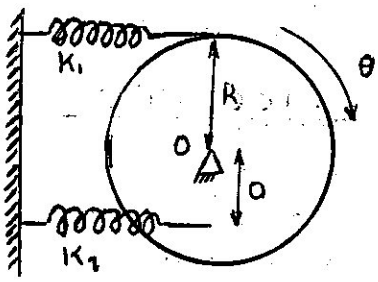
Exercice N° 12:

Trouver l'équation différentielle du mvt d'un pendule quelconque constitué par un solide de masse m, mobile autour d'un axe horizontal passant par un pt A différent de son centre de gravité G.



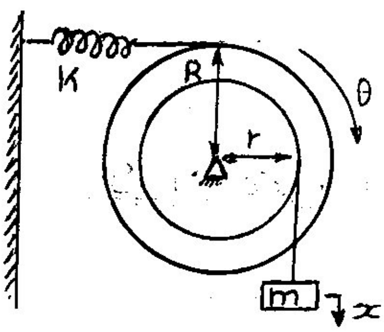
Exercice N° 13: +

Soit le système oscillant ci-contre où la poulie est fixée en son centre et est libre de rotation autour de O. Trouver l'équation différentielle du mouvement et en déduire la fréquence propre des oscillations. La poulie est supposée pleine.



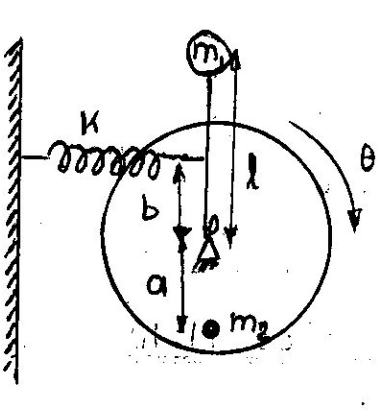
Exercice N° 14: +

Soit le montage mécanique constitué de deux poulies pleines solidaires (collées) de même centre O et de rayons R et r.
1/ Trouver l'équation différentielle du mvt.
2/ En déduire l'équation horaires du mvt du système en précisant la période des oscillations. ($J = \frac{1}{2} MR^2$)



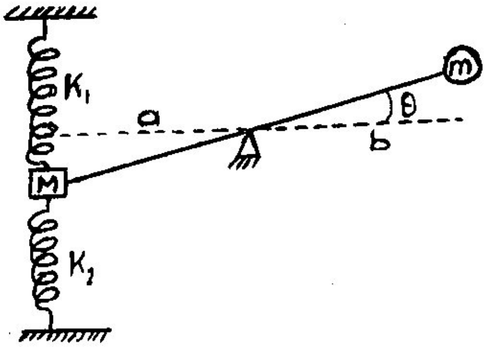
Exercice N° 15:

Dans le schéma ci-contre, la poulie (M, R) est fixée en son centre O. Une tige sans masse de longueur l, et collée à la poulie, porte en son extrémité une masse m_1. Une autre masse m_2 est rivetée (collée) sur la partie inférieure de la poulie
1/ Déterminer l'équation diff. du mvt (θ faible)
2/ A quelle condition aura-t-on des oscillations
3/ Dans les 2 cas (condition satisfaite ou non) déterminer les équations horaires du mvt.
On suppose la poulie pleine; le système était à l'équilibre à la position verticale.



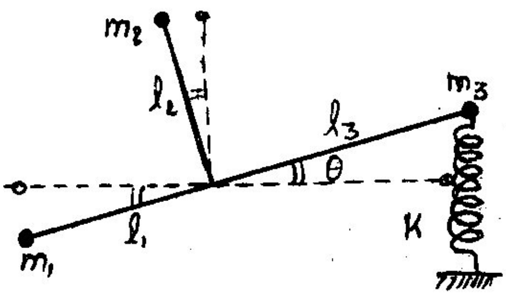
Exercice N° 16 :

Soit un fléau, système pouvant balancer autour d'un appui fixe O. Les 2 tiges ont une longueur de a et b ($a + b = l$) et ont respectivement des masses M et m accrochées à leur extrémité. En supposant qu'à l'équilibre, la barre était horizontale, trouver l'équation différentielle du mouvement et en déduire sa fréquence propre f_0.



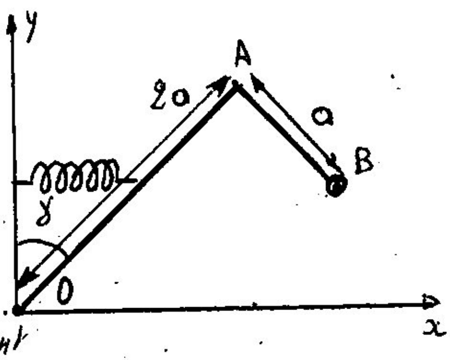
Exercice N° 17 :

Soit le système ci-contre constitué de 3 bras rigidement liés et tournant dans le plan de la figure autour de O.
A l'équilibre, le bras l_2 est vertical.
1) Déterminer l'équation différentielle du mvt en considérant de faibles oscillations.
2) Quelle est la condition d'oscillations.
3) Donner dans les 2 cas (condition vérifiée ou non vérifiée) l'équation horaire du mvt.



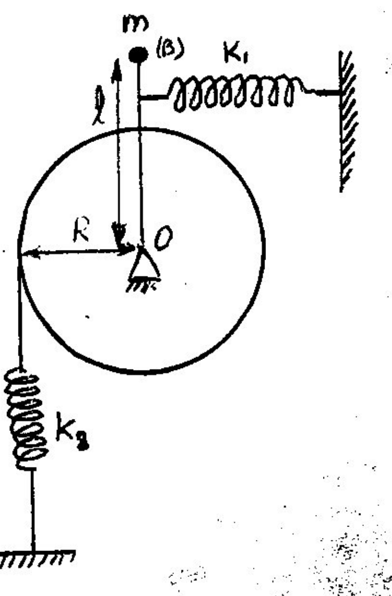
Exercice N° 18 :

Le système ci-contre est constitué de 2 tiges rigides sans masse OA et OB perpendiculaires entre elles, d'une masse ponctuelle m solidaire à la tige AB, et d'un ressort K s'appliquant au point M milieu de la tige AB.
A l'équilibre statique, OA fait un angle γ avec la verticale. On abaisse OA de $\frac{\pi}{3}$ de sa position initiale puis on la lâche sans vit. initiale.
Déterminer l'équation horaire du mouvement de ce système.
En déduire la période des oscillations.



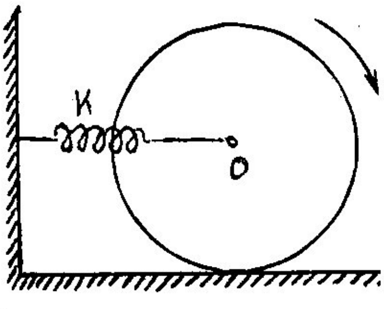
Exercice N° 19

Soit le système mécanique composé d'une poulie pleine de masse M et de rayon R, pouvant pivoter librement autour de son centre fixe O. Une masse m est suspendue sur une tige OB de masse négligeable.
A l'équilibre la tige OB était verticale.
Déterminer
1) L'équation différentielle du mouvement
2) La condition pour qu'il y ait des oscillations
3) Dans les 2 cas (condition vérifiée et condition non vérifiée) déterminer l'équation horaire du mvt.



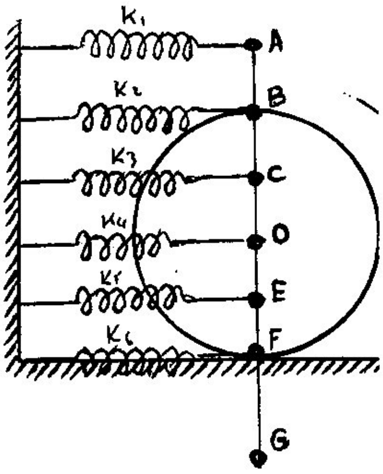
Exercice N°20

Soit la poulie pleine ci-contre de masse M et de rayon R, assujettie à un mouvement sur le sol où elle peut rouler sans glisser (exemple : la roue d'une voiture qui en tournant avance en même temps).
Trouver l'équation différentielle du mvt pour θ faible



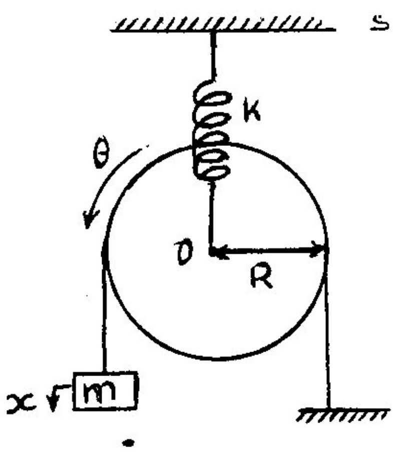
Exercice 21 :

Soit la même poulie que précédemment, de masse M et de rayon R pouvant tourner sans glisser sur le sol. Une tige de masse négligeable et passant par le centre O est collée sur la surface de cette roue.
On suppose des masses ponctuelles aux points A, B, C, O, E, F et G tel que $AB = a$, $OC = c$; $OE = e$; $OG = l$ et $OB = OF = R$.
Déterminer les énergies cinétiques et potentielles pour θ faible



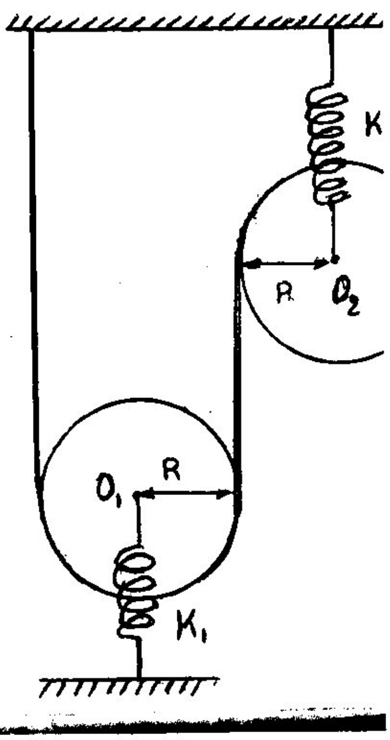
Exercice N°22

La poulie ci-contre supposée pleine, de masse M et de rayon R est accrochée au support S à travers un ressort de constante de raideur K.
Le système étant à la position d'équilibre statique, on donne une impulsion initiale à m.
Déterminer l'équation différentielle du mvt, en déduire son équation horaire.

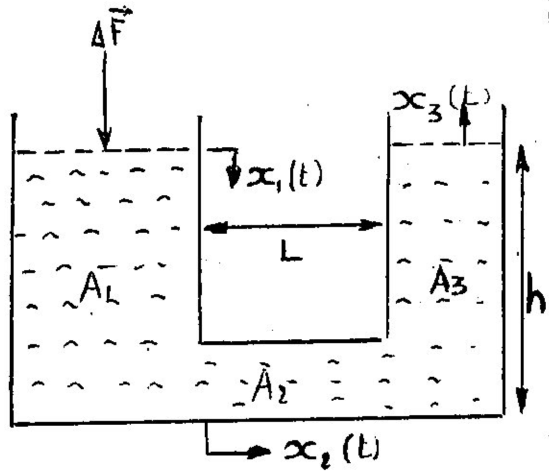


Exercice N°23

Le système ci-contre est composé de 2 poulies pleines de centres O_1 et O_2 respectivement. Ces 2 roues sont connectées par un fil inextensible, de telle sorte, qu'après avoir reçu une impulsion initiale en un point quelconque du système, O_1 et O_2 oscilleront verticalement seulement.
En négligeant les masses des 2 poulies, (sinon ce sera un système à 2 degrés de liberté), déterminer l'équation différentielle du mouvement du système. En déduire son équation horaire.

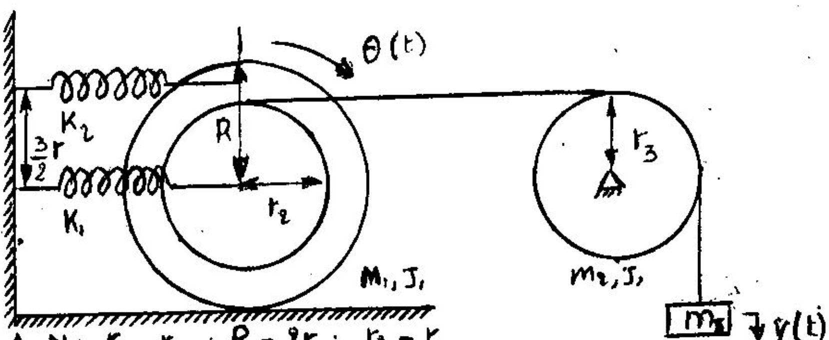


Exercice N°24



Un système hydraulique est composé de 2 bassins reliés par un conduit comme le montre la figure ci-contre. Le liquide contenu est de densité ρ et de hauteur h à l'équilibre. Les sections transversales des 2 bassins et du conduit sont respectivement A_1, A_2 et A_3. En négligeant les frottements du liquide avec les parois, trouver la pulsation propre des oscillations sous l'effet d'une impulsion initiale ΔF.

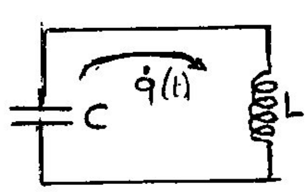
Exercice N°25



La première poulie (M_1, J_1) roule sans glisser sur le sol, tandis que la seconde poulie peut pivoter librement autour de son centre fixe O. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en précisant sa pulsation propre. A.N: $r_3 = r$; $R = 2r$; $r_2 = r$

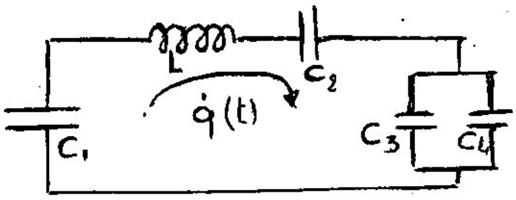
(suite des données voir solution)

Exercice N°26



Un circuit électrique est constitué d'une inductance L et d'un condensateur C. On injecte une charge initiale Q_0 et on l'abandonne à lui-même. Déterminer l'équation différentielle de $q(t)$. En déduire la fréquence des oscillations électriques du circuit.

Exercice N°27



Soit le circuit électrique ci-contre constitué d'éléments passifs (self et capacité). Évidemment aucun courant ne circule dans cette maille avant qu'on n'injecte une tension initiale V_0 et une charge électrique Q_0 dans ce circuit.

Un courant $i(t) = \dot{q}(t)$ circulera donc dans cette maille.

1) Déterminer l'équation différentielle de la charge $q(t)$ en utilisant la loi de Kirchoff.

2) En déduire l'expression littérale de la période des oscillations électriques à l'intérieur de cette maille.

3) Donnez le schéma simplifié de cette boucle

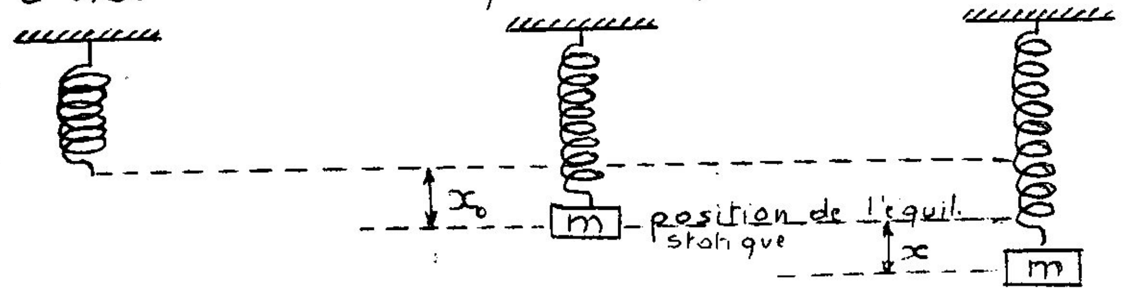
4) Quel est le montage mécanique équivalent.

Solutions : Oscillations libres et non amorties

Exercice N°1

1/ Méthode de la relation fondamentale de la dynamique

état ① à vide — état ② : repos, équilibre statique — état ③ : mouvement, équilibre dynamique



à l'équilibre statique :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{T_0} = \vec{0}$$
$$mg - kx_0 = 0$$
$$\text{d'où } mg = kx_0$$

à l'équilibre dynamique

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma}$$
$$\vec{T_0} + \vec{P} + \vec{T} = m\ddot{\vec{x}}$$
$$-kx_0 + mg - kx = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{car } mg - kx_0 = 0$$

$m\ddot{x} + kx = 0$ ou encore sous la forme canonique, l'équation devient
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

A chaque deformation Δl de la longueur du ressort, apparaitra une force de rappel qui aura tendance à ramener le système à sa position d'équilibre statique $F = -K\Delta l$ (Loi de Hookes)

2/ Méthode du Lagrangien :

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ (mouvement de translation)

$$U = -\int_0^x (\Sigma F)\, dx = -\int_0^x (-kx - kx_0 + mg)\, dx = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - mgx + C$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + kx_0 x - mgx + C$$

Condition d'équilibre : l'équilibre statique est atteint à $x = 0$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \Rightarrow kx_0 - mg = 0 \quad \text{d'où } U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$L = T - U \quad ; \quad L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Longrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

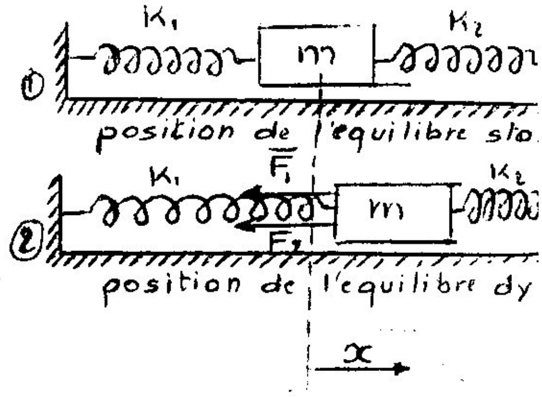
3/ Méthode de la conservation d'énergie totale (Rayleigh)

Le système étant conservatif (pas de pertes ni de dissipation d'énergie) $E = T + U = C^{te}$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad ; \quad \frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

d'où équation différentielle du mvt : $m\ddot{x} + Kx = 0$

Exercice N°2



2 ressorts sont en parallèle sont 2 ressorts qui, sous l'effet de une force commune, subissent toujours la même deformation.

a/ étude dynamique

Dans le cas ① : équilibre statique : repos ; la position de m determinera la référence $x = 0$. Bien sûr $\Sigma \vec{F} = 0$, cette fois-le poids de m est compensé par la réaction verticale $\vec{R}$

Dans le cas ② : equilibre dynamique : (au cours du mvt)

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma} \implies -k_1 x - k_2 x = m\ddot{x}$$

Les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont parallèles : Le ressort K_1 a tendance à ramener m à sa position $x=0$ en tirant vers la gauche, le res K_2 aura tendance à ramener m à sa position $x=0$ en pousson la gauche. D'ou $m\ddot{x} + 2kx = 0$ ou $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec ω_0 :

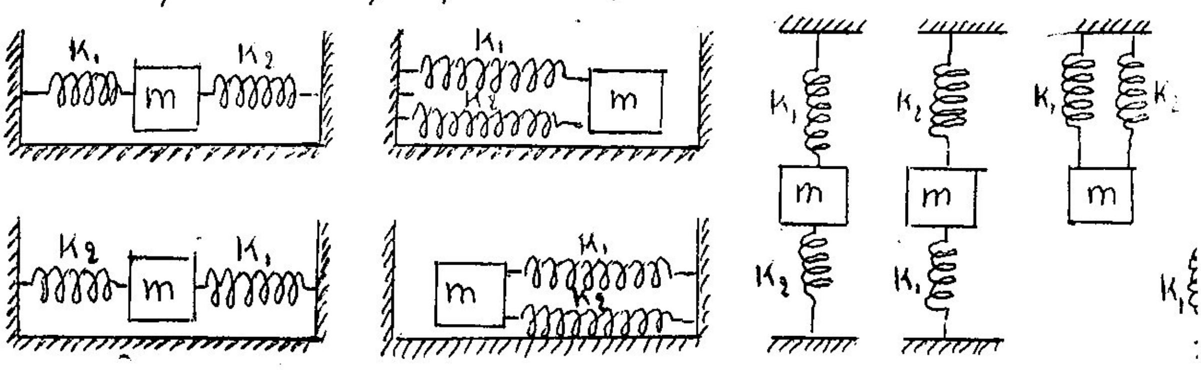
b/ étude energétique (Lagrange)

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \\ U &= \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 \end{aligned}\right\} L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2$$

L'équation differentielle du mvt est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies m\ddot{x} + 2kx = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

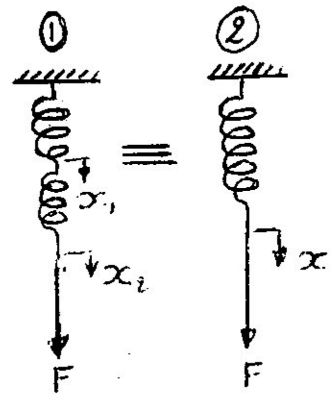
On remarque donc qu'on aurait eu les mêmes oscillations et la même pulsation que pour les systemes suivants



Exercice N° 3 :

1/ Constante de raideur équivalente à k_1 et k_2 en série :

Les systemes ① et ② sont dits équivalents, si sous l'effet d'une même force F, ils produisent le même allongement x



systeme ① système ②

$$x_1 + x_2 = x$$

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k}$$

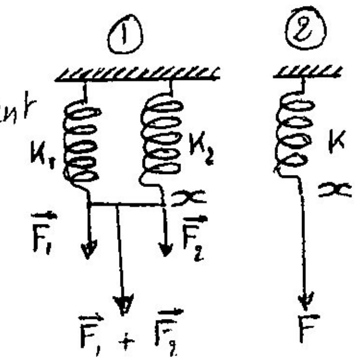
d'ou $\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ ou $\boxed{K_{eq} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}}$

Generalisation

La constante de raideur équivalente à n ressorts montés en serie est telle que : K_{eq} $\frac{1}{K_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$

2/ Constante de raideur équivalente à k_1 et k_2 en parallèle :

Les systemes ① et ② sont dits équivalents, si sous l'effet de la même force F, ils produisent le même allongement.



système ① systeme ②

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{F}$$

$$-k_1 x - k_2 x = -K x$$

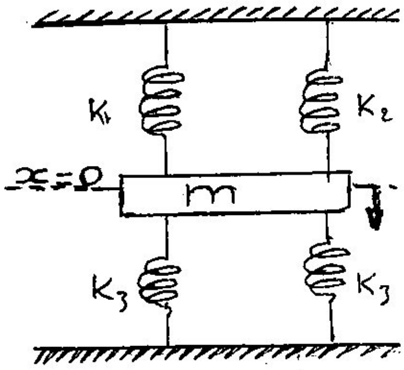
$$K = k_1 + k_2$$

$$\boxed{K_{eq} = k_1 + k_2}$$

Remarque :

- Lorsqu'on met 2 ressorts k_1 et k_2 en serie, la constante de raideur équivalente k_{eq} sera plus petite que la plus petite entre k_1 et k_2
  Exemple : $k_1 = 4\,N/m$; $k_2 = 10\,N/m \Rightarrow k_{eq} < 4\,N/m$
  Donc on affaiblit un ressort K lorsqu'on lui ajoute un 2[e] ressort k'
- Lorsqu'on met 2 ressorts k_1 et k_2 en parallèle, la constante de raideur équivalente sera plus grande que la plus grande entre k_1 et k_2
  Exemple : $k_1 = 4\,N/m$; $k_2 = 10\,N/m \Rightarrow k_{eq} > 10\,N/m$

Exercice N°4



La référence (la position $x=0$) est la position d'équilibre statique (au repos). Donc le poids $\vec{P}$ est toujours compensé dans ce cas-là.

a/ méthode dynamique (Newton)

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \quad \text{(relation fondamentale de la dynamiq}$$

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = m\ddot{\vec{x}}$$

$$-k_1x - k_2x - k_3x - k_4x = m\ddot{x}$$

où $m\ddot{x} + (k_1+k_2+k_3+k_4)x = 0$: équation différentielle du mvt.

où encore l'équation différentielle du mvt sous la forme co

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{m}}$ pulsation pr

l'équation horaire du mouvement sera donc.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ou} \quad x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{m}}\, t + \varphi\right)$$

b/ méthode énergétique (Lagrange)

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^2 + \frac{1}{2}k_3x^2 + \frac{1}{2}k_4x^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3+k_4)x^2$$

L'équation différentielle du mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{c.à.d} \quad m\ddot{x} + (k_1+k_2+k_3+k_4)x = 0$$

forme canonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{m}}$

Equation horaire $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2+k_3+k_4}}$

Equation aux dimensions

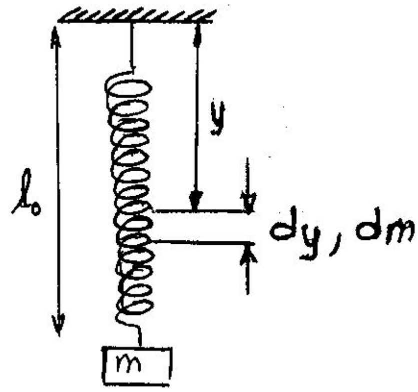
Dimension de K : $\vec{F} = -Kx \Rightarrow [K] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{MLT^{-2}}{L} = M$

Dimension de T : [T]

$[T] \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{M}{MT^{-2}}}$ vérifiée $\Rightarrow$ homogène

Exercice N: 5

Dans cet exercice, le ressort n'a plus de masse négligeable, mais une masse m_s totale répartie linéairement le long des spires. Donc la masse linéique du ressort est $\mu = \frac{m_s}{l}$ [kg/m]



T_m : énergie cinétique de la masse

T_r : énergie cinétique totale du ressort.

$T = T_m + T_r$

si μ est la masse linéique du ressort, donc :

$dT_r = \frac{1}{2}\, dm \cdot v_y^2$ (v_y étant la vitesse de la spire "y")

$dm = \mu\, dy$

D'autre part, si la vitesse des spires varie linéairement de 0 à $\dot{x}$,

donc $\left.\begin{array}{l} v_y\,(y=0) = 0 \\ v_y\,(y=l_0) = \dot{x} \end{array}\right\}\ v(y) = \frac{\dot{x}}{l}\, y$

d'où $dT_r = \frac{1}{2}\mu\, dy\, v^2_{(y)}$ en remplaçant $v(y)$ par sa valeur

$$dT_r = \frac{1}{2}\mu \frac{\dot{x}^2}{l^2} y^2\, dy$$

l'énergie cinétique totale du ressort sera donc

$$T_r = \int_0^l dT_r = \int_0^l \frac{1}{2}\mu \frac{\dot{x}^2}{l^2} y^2\, dy = \frac{1}{6}\mu\, l\, \dot{x}^2 = \frac{1}{6} m_s \dot{x}^2$$

donc $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m_s \dot{x}^2$

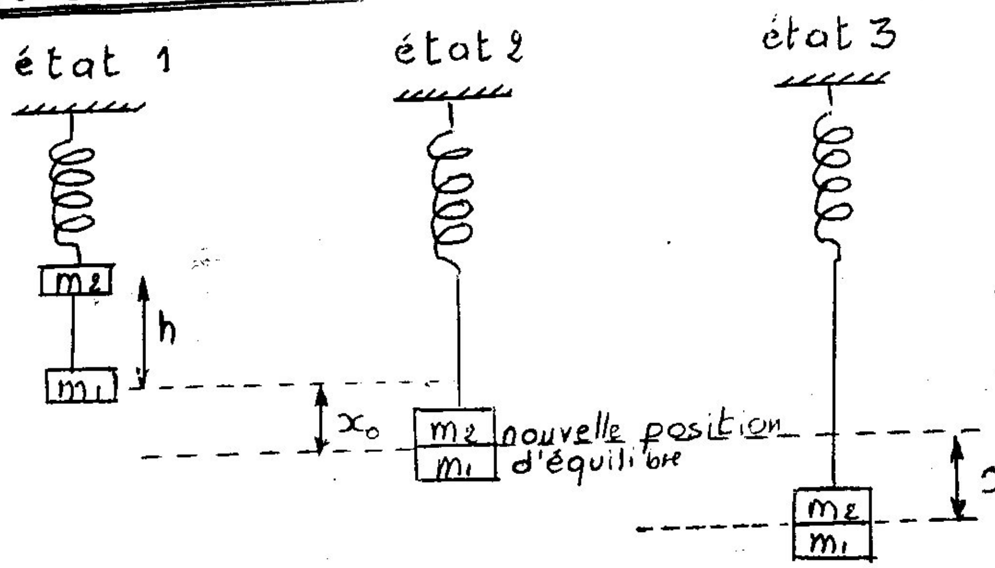
$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

l'équation différentielle du mvt est donc

$$\ddot{x} + \frac{k}{m + \frac{m_s}{3}}\, x = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}}}$$

On remarque que lorsqu'on prend en considération la masse du ressort, ω_0 diminue c-à-d que la période T augmente

Exercice N°6



$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2$

$U = \frac{1}{2} k x_1^2$

1ère étape : Calcul de la vitesse avec laquelle m_2 tombe sur m_1 : V_0

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 V_0^2 \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gh}$$

2ème étape : Calcul de la vitesse initiale V que va avoir l'ensemble m_1 et

car le système m_1+m_2 se comporte comme si le mouvement

demarre avec $\dot{x}(0) = V$

Choc mou : conservation de la quantité de mouvement p.

choc élastique : conservation de p et celle de l'énergie ciné. T

$$m_2 V_0 + m_1 . 0 = (m_1+m_2) V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1+m_2} V_0 \quad \text{ou} \quad V = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$$

Donc le nouveau système oscillatoire (m_1+m_2) de l'état ② aura une vitesse initiale $\dot{x}(0) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$

le nouvel axe de référence (ou la nouvelle position d'équilibre) sera X_0 telle que $k X_0 = m_2 g$ ou $X_0 = \frac{m_2 g}{k}$

le système va osciller, autour de X_0, d'une grandeur

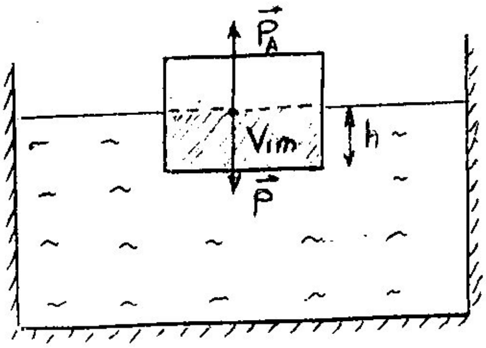
$$x_1 = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \\ \dot{x}_1(0) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh} = A\omega_0 \end{cases} \quad ; \text{comme } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$$

d'où $\boxed{A = \frac{m_1}{\sqrt{m_1+m_2}}\sqrt{\frac{2gh}{k}}}$

Exercice N°7

1°/ Etude de l'équilibre statique (repos)



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P_A} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\rho V_{im} g = \rho' V g \quad (\text{car } m = \rho V)$$

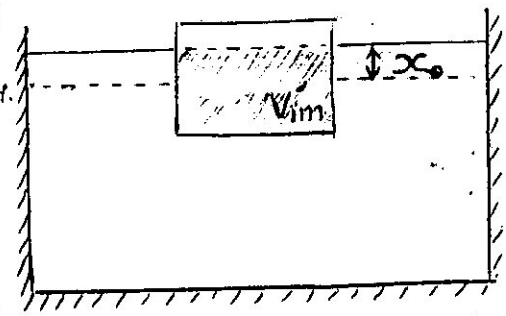
$$\text{d'où} \quad V_{im} = \frac{\rho'}{\rho} V$$

où ρ' : densité du glaçon ; Vim : volume immergé

ρ : densité de l'eau ; V : volume totale du glaçon

2°/ Etude de l'équilibre dynamique (mouvement)

Le glaçon s'est abaissé d'une quantité x par rapport à la position d'équilibre statique.



$$\sum \vec{F} = m \ddot{x}$$

$$\vec{P_A} + \vec{P} = m \ddot{x}$$

$$-\rho (V_{im} + Sx) g + \rho' V g = \rho' V \ddot{x}$$

$$-\rho V_{im} g - \rho S x g + \rho' V g = \rho' V \ddot{x}$$

Or auparavant nous avions établi que $\rho V_{im} g = \rho' V g$ (repos)

L'équation se résume donc à

$$\rho' V \ddot{x} + \rho S g x = 0$$

ou encore $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{\rho S g}{\rho' V} = \frac{\rho g}{\rho' L}$

L'équation horaire du mouvement est donc

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Conditions Initiales

$x(0) = X_0$; $A \cos\varphi = X_0$

$\dot{x}(0) = 0$; $-\omega_0 A \sin\varphi = 0$

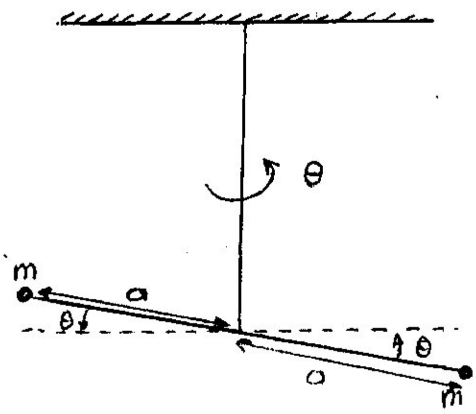
$$\Longrightarrow \begin{cases} A = X_0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{x(t) = X_0 \cos \sqrt{\frac{\rho g}{\rho' L}}\, t}$$

cice N°8

Methode de la R.F.D



$\vec{\mathcal{M}} = J\ddot{\vec{\theta}}$ (où $J = J_m + J_m = ma^2 + ma^2$)

$: \theta = 2ma^2\ddot{\theta}$ C : constante de torsion

$+ \omega_0^2 \theta = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{2ma^2}{c}}$

Méthode énergétique

$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (2ma^2)\dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2} C \theta^2$ Energie potentielle de torsion

$= T - U \Rightarrow L = ma^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} C \theta^2$

équation differentielle du mouvement est donnée par :

$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2ma^2}{c}}$

équation horaire du mouvement doit être une solution réelle.

$$\theta = \begin{cases} K\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{\pi}{3} \cos\sqrt{\frac{2ma^2}{c}}\, t \\ K' \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \end{cases}$$

rcice N° 10

our un pendule simple $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ou $l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$

our que le pendule batte la seconde il faut que $l = 0,2485m$

pour que le pendule retarde $T \nearrow$ donc $l \nearrow$.

faut rallonger la longueur du pendule de Δl tel que.

si $T = 1s$ alors $l = 0,2485m$. Pour que le pendule retarde d'une minute par jour, il faut une periode T'

$T' = T + \frac{1}{24 \times 60} = 1,000693\, s$

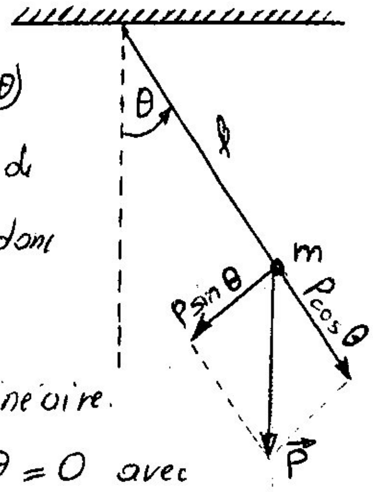
onc la longueur sera $l' = \frac{gT'^2}{4\pi^2}$ ou $l' = 0,24883\, m$

l faudra rallonger le pendule de $\boxed{\Delta l = 0,34\, mm}$

Exercice N: 9

1°/ Méthode de la relation fondamentale de la dynamique

$\sum \vec{\mathcal{M}} = J\ddot{\vec{\theta}}$ (mouvement de rotation)



$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$ ($\mathcal{M}_{poids} = -mgl\sin\theta$)

Le moment du poids étant un moment de rappel, s'oppose toujours au mouvement, donc son signe est toujours négatif.

donc $\ddot{\theta} + g/l \sin\theta = 0$ équa. diff. non linéaire.

si θ est faible $\sin\theta \simeq \theta$ et $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec

$\omega_0^2 = \sqrt{g/l}$

2°/ Méthode du Lagrangien

$T = \frac{1}{2} J\ddot{\theta}^2$

$U = mgy = -mgl\cos\theta$

d'où $L = T - U = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$

L'équation différentielle du mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow J\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

3°/ Méthode de Rayleigh

$E = T + U = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$

$E_{totale} = C^{te} \Leftrightarrow$ conservation de l'energie totale

$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow J\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

4°/ Equation horaire

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pour θ faible

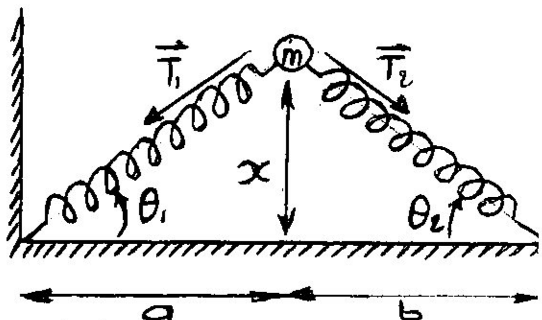
donc $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Conditions Initiales.

$$\left.\begin{aligned} \theta(0) &= \frac{\pi}{3} \\ \dot{\theta}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{3}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}$$

Exercice N°11

La masse m oscille verticalement seulement, et à l'equilibre, les 2 ressorts étaient horizontaux. Pour cela il faut que m soit très faible.



1ère méthode : Relation Fondamentale de la dynamique

$\Sigma \vec{F} = m \vec{\gamma}$; par projection sur l'axe vertical passant par m

$\vec{T_1} + \vec{T_2} = m \ddot{x}$ donne $T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = m\ddot{x}$

ou encore $-k_1 \Delta x_1 . \sin\theta_1 - k_2 \Delta x_2 \sin\theta_2 = m\ddot{x}$

allongement du ressort k_1 : $\Delta x_1 = \sqrt{a^2 + x^2} - a$

allongement du ressort k_2 : $\Delta x_2 = \sqrt{b^2 + x^2} - b$

les angles θ_1 et θ_2 sont tels que : $\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\sin\theta_2 = \frac{}{\sqrt{b}}$

d'où l'équation differentielle du mouvement **non** linéaire

$$\boxed{m\ddot{x} + k_1\left(\sqrt{a^2+x^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + k_2\left(\sqrt{b^2+x^2} - b\right)\frac{x}{\sqrt{b^2+}}}$$

2ème méthode : Lagrangien

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$U = \frac{1}{2} k_1 (\Delta x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\Delta x_2)^2$.

comme $\Delta x_1 = \sqrt{a^2+x^2} - a$ et $\Delta x_2 = \sqrt{b^2+x^2} -$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k_1\left(\sqrt{a^2+x^2} - a\right)^2 - \frac{1}{2} k_2\left(\sqrt{b^2+x^2} - b\right)^2$$

l'équation differentielle du mouvement est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x}$

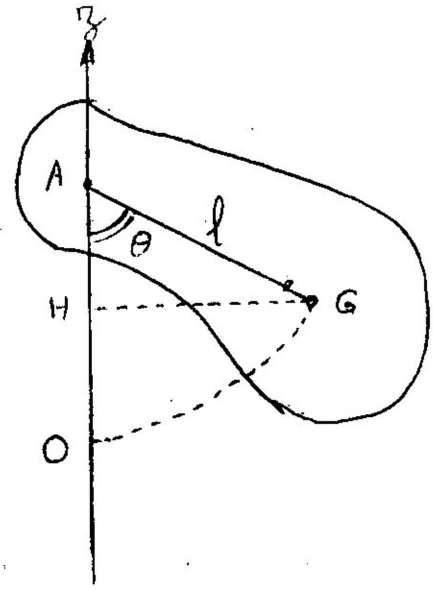
c'est à-dire

$$\boxed{m\ddot{x} + k_1\left(\sqrt{a^2+x^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + k_2\left(\sqrt{b^2+x^2} - b\right)\frac{x}{\sqrt{b^2+}}}$$

mouvement non harmonique - équation differentielle non lineaire

(m est supposée être un point de soudure par exemple.

Exercice N° 12



Corps solide de masse m, mobile autour d'un axe horizontal $\vec{\Delta}$ passant par un point A different de son centre de gravité G.
Designons par l la distance de G à l'axe Δ et par J le moment d'inertie du solide par rapport à $\vec{\Delta}$.

A l'équilibre G se trouve en O.
Soit θ l'angle formé par AO et AG à l'instant t.
Dans cette position, le pendule a une énergie potentielle

$$U(\theta) = mgl(1-\cos\theta) = -mgl\cos\theta + C \qquad (*)$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$$

$$L(\theta) = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - C$$

L'équation differentielle du mouvement est donc donnée par,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

c'est-à-dire $J\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

En posant $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$, l'équation du mouvement devient.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

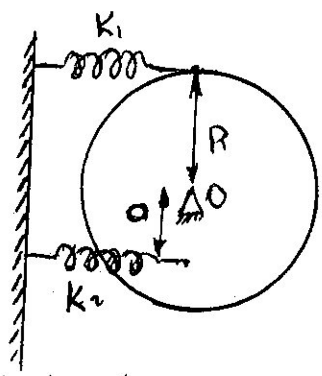
C'est une équation differentielle non lineaire car le potentiel $U(\theta)$ donné ci-dessus n'est pas parabolique.

Neammoins, dans le cas de faibles oscillations $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation differentielle du mouvement devient alors

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\theta = 0}$$

Exercice N°13

La poulie effectue un mouvement de rotation autour de O fixe.



$T = T_{rot} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} = \frac{1}{2} K_1 (R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (a\theta)^2$

$L = T - U = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K_1 (R\theta)^2 - \frac{1}{2} K_2 (a\theta)^2$

L'équation différentielle du mouvement est donnée par:

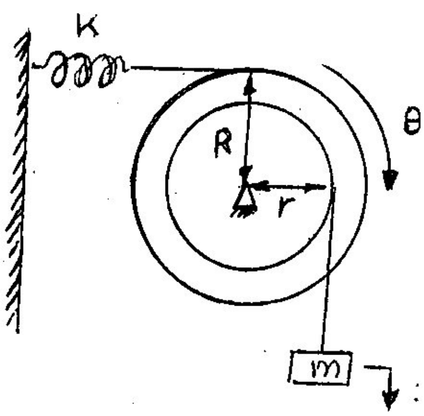
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow J\ddot{\theta} + (K_1 R^2 + K_2 a^2)\theta = 0$$

ou $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 R^2 + K_2 a^2}{J}}$ et $\theta = A \cos$

si la roue est pleine (disque) $J = \frac{1}{2} MR^2$

si la roue est creuse (anneau, jante) $J = MR^2$

Exercice N°14



$T = T_M + T_m$; $T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$U = \frac{1}{2} K X^2$ Attention $X \neq x$

Le système ayant un seul degré de liberté, on doit exprimer x en f^r de θ (ou l'inverse)

donc $x = r\theta$ et $X = R\theta$

$L = T - U = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K R^2 \theta^2$

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow (J + mr^2)\ddot{\theta} + K R^2 \theta = 0$$

ou $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K R^2}{J + m r^2}}$ et $\theta = \theta_0 \cos(\omega$

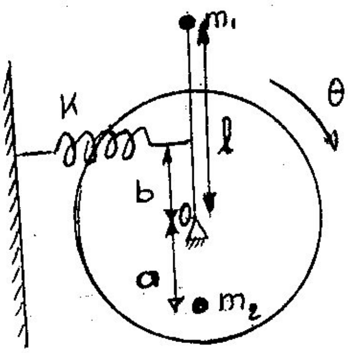
La période sera $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$; $T = 2\pi \sqrt{\frac{J + mr^2}{K R^2}}$

Remarque:

si $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$: on obtient une équation de forces M

si $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$: on obtient une équation de moments ML^2

xercice N° 15:



La poulie pleine ($J_p = \frac{MR^2}{2}$) peut pivoter autour de O.

$T = T_p + T_{m_1} + T_{m_2}$

$T = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 a^2 \dot{\theta}^2$

$T = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l^2 + m_2 a^2 \right) \dot{\theta}^2$

Sachant qu'à l'equilibre statique la tige était verticale.

$U = U_K + U_{m_1} + U_{m_2}$

Nous avons, bien sûr, plusieurs possibilités pour le choix du referentiel de l'énergie potentielle. On prendra $U = mgy$ et y sera calculée par rapport à O : référentiel de l'énergie potentielle du poids.

$U = \frac{1}{2} K (\text{allong})^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2$ (pour θ faible on a:)

$U = \frac{1}{2} K b^2 \theta^2 + m_1 g l \cos\theta - m_2 g a \cos\theta$

d'où $L = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l^2 + m_2 a^2 \right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K b^2 \theta^2 - (m_1 g l - m_2 g a) \cos\theta$.

l'équation différentielle du mouvement est donnée pour θ faible

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l^2 + m_2 a^2\right)\ddot{\theta} + (Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a)\theta = 0$

où plus simplement $J_t \ddot{\theta} + (Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a)\theta = 0$

Le terme $Kb^2 - m_1 g l + m_2 g l$ peut être positif ou négatif : donc 2 cas à étudier

$\star$ si $Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a > 0$ donc $\omega_0^2 = \frac{Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a}{J_t}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$; $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ oscillations harmoniques

$\star\star$ si $Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a < 0$ donc $-\alpha^2 = \frac{Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a}{J_t}$

$\ddot{\theta} - \alpha^2 \theta = 0$; $\theta = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$ pas d'oscillations.

Donc la condition d'oscillation était $Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a > 0$

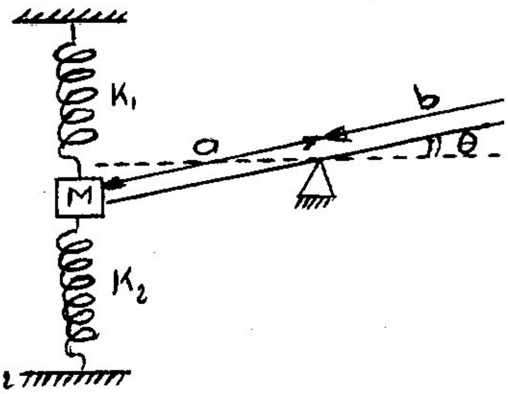
Il est utile de rappeler que dans le cas

$\star$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a}{J_t}}$

$\star\star$: $\alpha = \sqrt{-\frac{Kb^2 - m_1 g l + m_2 g a}{J_t}}$

Exercice N°16

A l'équilibre statique, la barre était horizontale. Si la tige $(a+b=l)$ est de masse négligeable, alors:



$T = T_M + T_m = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} = \frac{1}{2} K_1 a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 b^2 \theta^2$

$L = \frac{1}{2}\left(M a^2 + m b^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(K_1 a^2 + K_2 b^2\right)\theta^2$

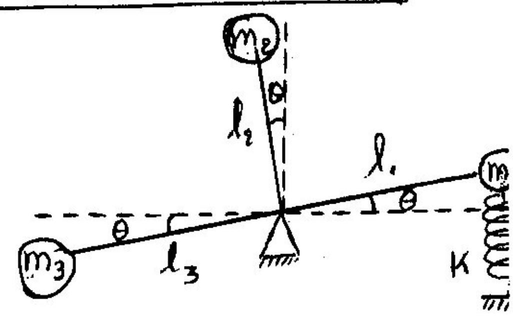
La barre était horizontale à l'équilibre donc U_m et U_M sont compens-

l'équation differentielle du mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \left(M a^2 + m b^2\right)\ddot{\theta} + \left(K_1 a^2 + K_2 b^2\right)\theta = 0$$

ou $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_1 a^2 + K_2 b^2}{M a^2 + m b^2}}}$

Exercice N°17:



$T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3}$

$T = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l^2 + m_3 l^2\right)\dot{\theta}^2$

$U = \frac{1}{2} K_1 (l_1 \theta)^2 + m_2 g l_2 \cos\theta$

U_{m_1} et U_{m_3} compensés car à l'équilibre, la barre était horizontale.

$L = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l^2 + m_3 l^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K l_1^2 \theta^2 - m_2 g l_2 \cos\theta$ $\quad$ θ fai

l'équation differentielle du mouvement est donnée par:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow J_t \ddot{\theta} + \left(K l_1^2 - m_2 g l_2\right)\theta = 0 \quad (J_t = m_1 l_1^2 + m_2$$

* si $K l_1^2 - m_2 g l_2 > 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K l_1^2 - m_2 g}{J_t}}$

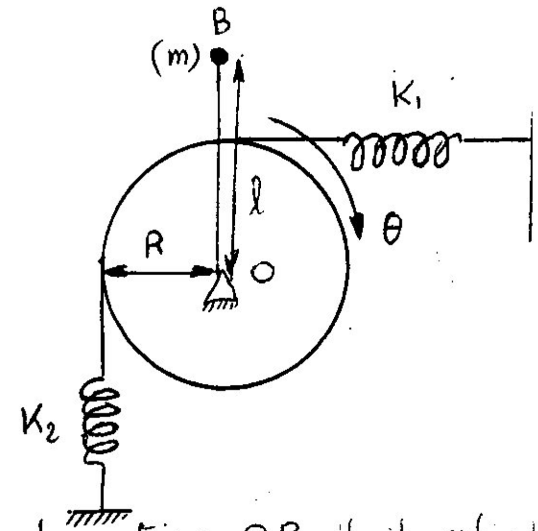
et $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ equation horaire oscillatoire

** si $K l_1^2 - m_2 g l_2 < 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} - \alpha^2 \theta = 0$ avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{m_2 g l_2 - K}{J_t}}$

et $\theta = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$ non oscillatoire.

Donc condition d'oscillations: $\boxed{K l_1^2 - m_2 g l_2 > 0}$

Exercice N°19



$T = T_{roue} + T_m$

$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

Si la poulie est pleine $J = \frac{MR^2}{2}$

$T = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} + m l^2 \right) \dot{\theta}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_m$

Comme à l'équilibre statique, la tige OB était verticale

$U = \frac{1}{2} K_1 (R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta)^2 + mgl\cos\theta$

$L = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} + m l^2 \right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (K_1 + K_2) R^2 \theta^2 - mgl\cos\theta$

l'équation différentielle du mouvement est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

où $\boxed{\left(\frac{MR^2}{2} + m l^2 \right) \ddot{\theta} + \left(K_1 R^2 + K_2 R^2 - mgl \right) \theta = 0}$ *

1^er cas

si $K_1 R^2 + K_2 R^2 - mgl > 0$; alors l'équation(*) s'écrit

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_1 R^2 + K_2 R^2 - mgl}{MR^2/2 + m l^2}}$

dans ce cas $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ mvt oscillatoire

2^e cas

si $K_1 R^2 + K_2 R^2 - mgl < 0$; alors l'équation(*) s'écrit

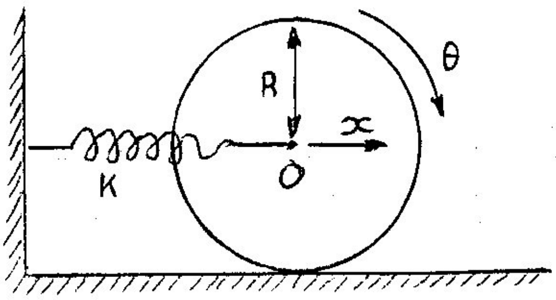
$\ddot{\theta} - \alpha^2 \theta = 0$ avec $\alpha = \sqrt{- \dfrac{K_1 R^2 + K_2 R^2 - mgl}{MR^2/2 + m l^2}}$

dans ce cas $\theta = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$ mvt non oscillatoire

Donc la condition d'oscillation est $K_1 R^2 + K_2 R^2 - mgl > 0$.

Exercice N° 20

La poulie pleine ci-contre est de masse M et de rayon R. Le symbole du sol hachuré à lui seul signifie que la poulie roule sans glisser sur le sol, c'est-à-dire que la poulie effectuera en même temps un mouvement de translation et de rotation.



Calcul de l'énergie cinétique de la poulie

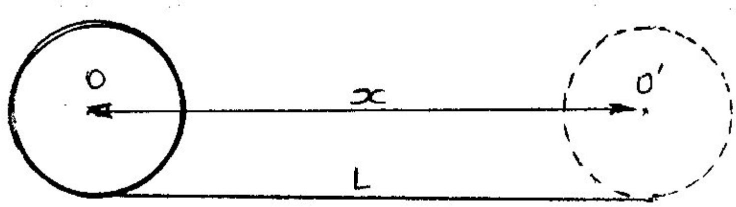
$$T = T_{translation} + T_{rotation}$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

J étant le moment d'inertie $J = \frac{MR^2}{2}$

Lorsque la poulie tourne d'un angle θ, son centre O avance d'une quantité $x = R\theta$

Demonstration.



Supposons qu'une roue est recouverte d'un pneu defectueux qui reste collé sur le sol à chaque qu'elle tourne de θ.

Quand la roue fera un tour complet ($\theta = 2\pi$) le pneu sera completement collé par terre. Donc

si la roue tourne de $2\pi \longrightarrow L = 2\pi R$

" " " " " $\theta \longrightarrow L = x = \frac{2\pi R . \theta}{2\pi} = R\theta$

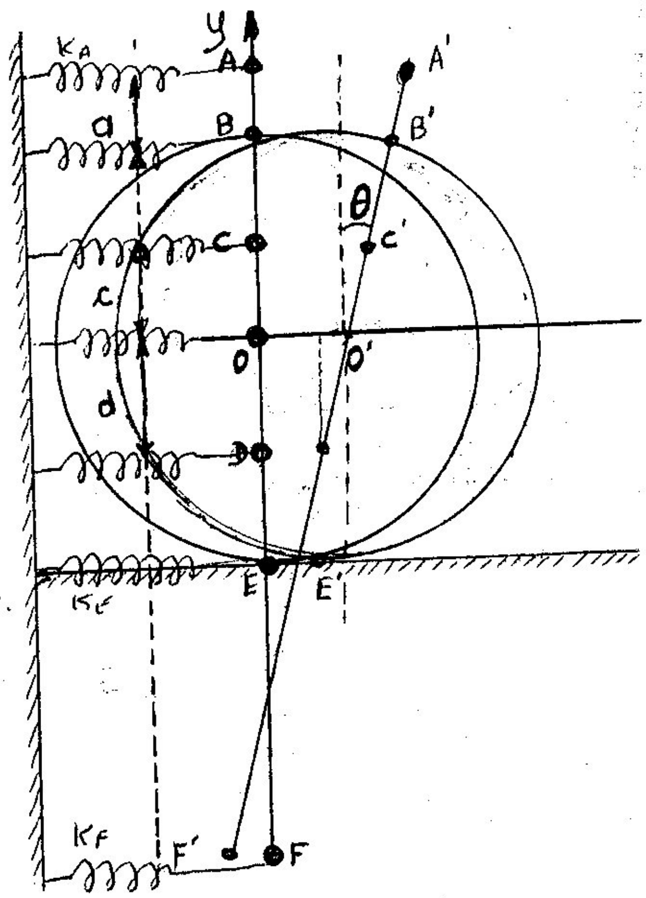
$$T = \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} MR^2\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K (R\theta)^2$$

l'equation differentielle du mvt est donc $\frac{3}{2} MR^2\ddot{\theta} + KR^2\theta = 0$

ou $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{3M}}$; $\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2K}{3M}}\, t + \varphi\right)$

Exercice N° 21 :*



$AB = a$; $OC = c$; $OD = d$; $OF = l$

La poulie roule sans glisser donc

$T_{poulie} = \frac{3}{4} M R^2$ (poulie pleine).

Prenons un repere cartesien dont l'origine O est le centre de la poulie à l'equilibre statique.

La poulie en bleu à $t = 0$

La poulie en rouge : à t quelconque.

Commençons par le pt A.

De A à A' le mouvement n'est ni translation ni rotation.

Donc $T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2$

En coordonnées cartesiennes $v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$

$$A' \begin{cases} x_A = OO' + (R+a)\sin\theta = R\theta + (R+a)\sin\theta \\ y_A = (R+a)\cos\theta \end{cases} \qquad \vec{v}_A \begin{cases} \dot{x}_A = R\dot{\theta} + (R+a)(\\ \dot{y}_A = -(R+a)\dot{\theta} \end{cases}$$

d'où $v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$;

$$v_A^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \underline{2R(R+a)\dot{\theta}\cos\theta} + (R+a)^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + (R+a)^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$= \dot{\theta}^2\left[R^2 + 2R(R+a)\cos\theta + (R+a)^2\right]$$ si θ faible $2R(R+a)\cos\theta = 2$

$v_A^2 = \dot{\theta}^2\left[R + (R+a)\right]^2$ ou $v_A^2 = (2R+a)^2\dot{\theta}^2$; $v_A^2 = (EA)^2\dot{\theta}^2$

Tout se passe donc comme si le point E était le centre de rotation si θ est faible (centre instantanne de rotation).

Le raisonnement precedent nous donnera par récurrence :

$v_A^2 = (EA)\dot{\theta}^2 = (2R+a)\dot{\theta}^2$

$v_B^2 = (EB)^2\dot{\theta}^2 = (2R)^2\dot{\theta}^2$

$v_C^2 = (EC)^2\dot{\theta}^2 = (R+c)^2\dot{\theta}^2$

$v_O^2 = (EO)^2\dot{\theta}^2 = R^2\dot{\theta}^2$

$v_D^2 = (ED)^2\dot{\theta}^2 = (R-d)^2\dot{\theta}^2$

$v_E^2 = (EE)^2\dot{\theta}^2 = 0$ lorsque θ est faible, E et E' sont pratiquement

$v_F^2 = (EF)^2\dot{\theta}^2 = (l-R)^2\dot{\theta}^2$

Coordonnées cartésiennes : Energies potentielles de m : Energie potentielles de K.

$x_A = R\theta + (R+a)\sin\theta$	$U_{mA} = m_A g y_A$	$U_{KA} = \frac{1}{2} K x_A^2$
$y_A = (R+a)\cos\theta$	$= m_A g (R+a)\cos\theta$	$\simeq \frac{1}{2} K (2R+a)^2 \theta^2$
$x_B = R\theta + R\sin\theta$	$U_{mB} = m_B g y_B$	$U_{KB} = \frac{1}{2} K x_B^2$
$y_B = R\cos\theta$	$= m_B g R\cos\theta$	$\simeq \frac{1}{2} K (2R)^2 \theta^2$
$x_C = R\theta + e\sin\theta$	$U_{mC} = m_C g y_C$	$U_{KC} = \frac{1}{2} K x_C^2$
$y_C = e\cos\theta$	$= m_C g e\cos\theta$	$\simeq \frac{1}{2} K (R+e)^2 \theta^2$
$x_O = R\theta$	$U_{mO} = m_O g y_O$	$U_{KO} = \frac{1}{2} K x_O^2$
$y_O = 0$	$= 0$	$\simeq \frac{1}{2} K R^2 \theta^2$
$x_D = R\theta - d\sin\theta$	$U_{mD} = m_D g y_D$	$U_{KD} = \frac{1}{2} K x_D^2$
$y_D = -d\cos\theta$	$= -mg\,d\cos\theta$	$= \frac{1}{2} K (R-d)^2 \theta^2$
$x_E = R\theta - R\sin\theta$	$U_{mE} = m_E g y_E$	$U_{KE} = \frac{1}{2} K x_E^2$
$y_E = -R\cos\theta$	$= -mg R\cos\theta$	$\simeq 0$
$x_F = R\theta - l\sin\theta$	$U_{mF} = m_F g y_F$	$U_{KF} \simeq \frac{1}{2} K x_F^2$
$y_F = -l\cos\theta$	$= -mg\,l\cos\theta$	$= \frac{1}{2} K (R-l)^2 \theta^2$

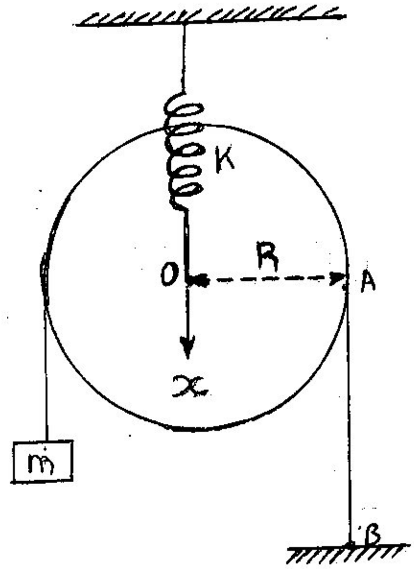
résumé

$$T = T_{poulie} + \Sigma T_{m_i}$$
$$= \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + \Sigma \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$ sachant que $v_M^2 = EM^2 \dot{\theta}^2 \ \forall M$

$$U = \Sigma U_{m_i} + \Sigma U_{K_i}$$
$$= \Sigma m g y_i + \Sigma \frac{1}{2} K_i x_i^2$$

$$L = T - U$$

Exercice N°22



La poulie est pleine : $J = \frac{MR^2}{2}$

Lorsque le point O se translate verticalement, la poulie effectuera un mouvement de translation et de rotation aussi.

Lorsque O s'abaisse d'une quantité x ; la masse m s'abaissera de la même quantité x augmentée de la rotation de la poulie $R\theta$.

$$x_m = x_o + R\theta \Rightarrow x_m = 2R\theta.$$

$$T = T_{poulie} + T_m$$

$$T = T_{transl} + T_{rot} + T_m$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(2R\dot{\theta})^2 \quad \text{comme } x = R\theta \text{ et } J = \frac{MR^2}{2}$$

$$T = \left(\frac{3}{4}M + 2m\right)R^2\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + 4m\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

L'equation differentielle du mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

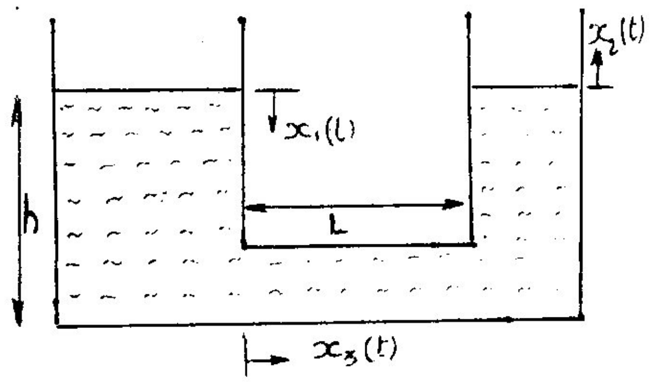
c-à-d $$\boxed{\left(\frac{3}{2}M + 4m\right)R^2\ddot{\theta} + KR^2\theta = 0}$$

ou $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\frac{3}{2}M + 4m}}$

Autre méthode : On aurait pu démontré que $x_m = 2R\theta$ et $x_o = R\theta$, en supposant un mur (appui vertical) sur le tronçon AB, et en appliquant les résultats de l'exercice N°21 ($x_B = 2R\theta$ et $x_0 = R$
x

Exercice N° 24

Etat d'équilibre statique ①



Etat d'équilibre dynamique : équival

②

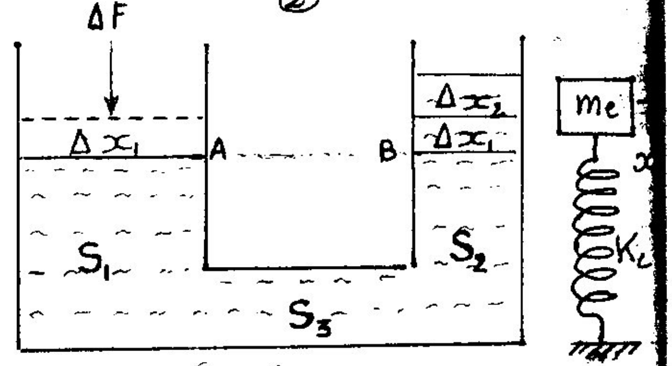


Fig 2

Les sections transversales des bassins et du conduit étant S_1, S_3 et S_2

Volume du liquide déplacé par rapport à ① :

$$V = S_1 . x_1 = S_2 x_2 = S_3 x_3$$

d'où $x_2 = \frac{S_1}{S_2} x_1$; $x_3 = \frac{S_1}{S_3} x_1$ et $\dot{x}_2 = \frac{S_1}{S_2} \dot{x}_1$; $\dot{x}_3 = \frac{S_1}{S_3} \dot{x}$

· Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2$$

$$= \frac{1}{2} (S_1 h \rho) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} (S_2 h \rho) \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} (S_3 h \rho) \dot{x}_3^2$$

$$= \frac{1}{2} S_1 h \rho \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} S_2 h \rho \left(\frac{S_1}{S_2} \dot{x}_1\right)^2 + \frac{1}{2} S_3 h \rho \left(\frac{S_1}{S_3} \dot{x}_1\right)^2$$

d'où $$T = \frac{1}{2} S_1 h \rho \left(1 + \frac{S_1}{S_2} + \frac{L}{h} . \frac{S_1}{S_3}\right) \dot{x}_1^2$$

qu'on peut écrire

$$T = \frac{1}{2} m_e \dot{x}_1^2 \quad \text{avec} \quad m_e = S_1 h \rho \left(1 + \frac{S_1}{S_2} + \frac{L}{h} . \frac{S_1}{S_3}\right)$$

Energie potentielle

Pour déterminer l'énergie potentielle de ce système, on cherchera la constante de raideur équivalente K_e. Pour cela, on supposera qu'une force ΔF est appliquée sur la partie gauche du système, correspondant à $x_1(t)$. Sur l'autre bassin, ~~le liquide~~ s'élèvera d'une quantité équivalente à Δx_2 comme le montre la Figure 2.

Les points A et B sont sur la même horizontale donc les pressions en ces points, seront égales.

$$P_1 = P_2$$

c.à.d: $\dfrac{\Delta F}{S_1} = \dfrac{(\Delta x_1 + \Delta x_2) S_2 \rho g}{S_2}$

comme $\Delta x_2 = \Delta x_1 \dfrac{S_1}{S_2}$, en remplaçant, on a:

$$\Delta F = \left(\Delta x_1 + \Delta x_1 \frac{S_1}{S_2}\right) S_1 \rho g$$

d'où la constante de raideur équivalente Ke sera:

$$K_e = \frac{\Delta F}{\Delta x_1} \Longrightarrow K_e = \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) S_1 \rho g$$

d'où l'energie potentielle correspondante sera:

$$U = \frac{1}{2} K_e x_1^2$$

ou encore $U = \dfrac{1}{2} S_1 \rho g \left(1 + \dfrac{S_1}{S_2}\right) x_1^2$

Le lagrangien d'un systeme étant $L = T - U = \frac{1}{2} m_e \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} K_e x^2$

$$L = \frac{1}{2} S_1 h \rho \left(1 + \frac{S_1}{S_2} + \frac{L}{h} \frac{S_1}{S_2}\right) \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} S_1 \rho g \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) x_1^2$$

l'équation differentielle du mouvement étant $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$

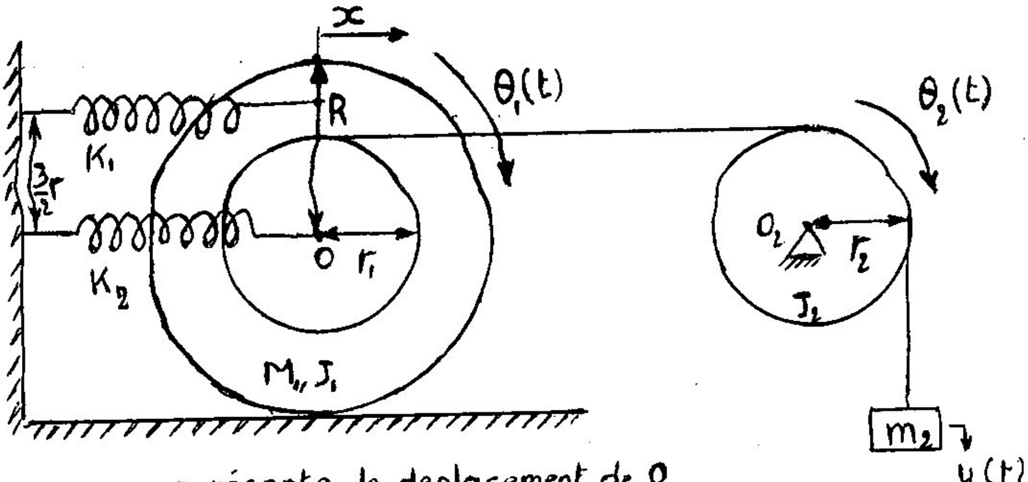
$$S_1 h \rho \left(1 + \frac{S_1}{S_2} + \frac{L}{h} \cdot \frac{S_1}{S_2}\right) \ddot{x}_1 + S_1 \rho g \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) x_1 = 0$$

ou encore sous la forme canonique $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g\,(1 + S_1/S_2)}{h\,(1 + S_1/S_2) + L \cdot S_1/S_3}}}$

Une augmentation de L conduit à une diminution de ω_0, de même si $S_3 \nearrow \Rightarrow \omega_0 \nearrow$. En resumé $\omega_0 \searrow$ si on utilise un conduit plus long et plus fin ce qui conduit à une periode d'oscillations plus grande · mvt lent.

Exercice N° 25



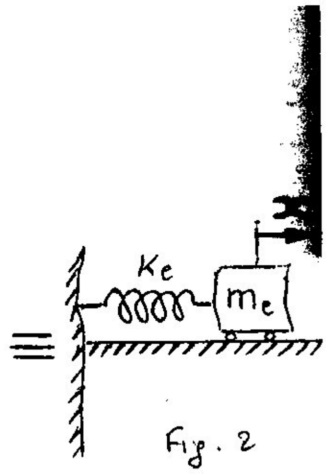


Fig. 2

x représente le deplacement de O.

La premiere poulie (M, J) roule sans glisser sur le sol (centre O,

La deuxieme poulie de centre fixe O_2, peut pivoter autour de ce de.

Il est demandé :

1/ L'equation differentielle du mouvement du systeme en fonction de

2/ La constante de raideur Ke et la masse me du system equivalent

---

C'est un systeme à un degré de liberté donc on peut exprimer tous les deplacements en fonction de x : déplacement de O.

$y(t) = r_2\,\theta_2$; $x(t) = R\,\theta_1$; $\theta_2(t) = \frac{1}{r_2}\left(x + r_1\,\theta_1\right)$

ou encore $\theta_2(t) = \frac{1}{r_2}\left(x + \frac{r_1}{R}\,x\right)$

Données du texte (omises)

$K_1 = \frac{16}{49}K$ $\quad J_1 = 4mr^2$ $\quad M_1 = m$

$K_2 = K$ $\quad J_2 = \frac{4}{9}mr^2$ $\quad m_2 = \frac{4}{9}m$

$r_2 = r$ $\quad R = 2r$ $\quad r_1 = r$

En remplaçant, on obtient.

$y = \frac{3}{2}x$; $\theta_2 = \frac{3}{2r}x$ et $\theta_1 = \frac{x}{2r}$

Energie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$$ en remplaçant

$$T = \frac{1}{2} (4m) \dot{x}^2$$ donc dans le schema equivalent $m_e = 4m$.

Energie potentielle du système

$$U = \frac{1}{2} K_1 (x + \frac{3}{2} r\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 x^2$$ en remplaçant

$$U = \frac{1}{2} (2K) x^2$$. toujours, dans le schema equivalent $K_e = 2K$

L'equation differentielle du mvt

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} (4m) \dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2} (2K) x^2 \end{array}\right\} \quad 4m\ddot{x} + 2kx = 0$$

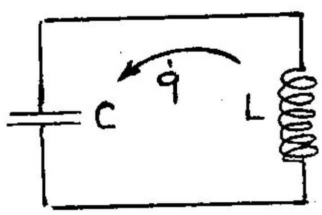
ou $2m\ddot{x} + kx = 0$; $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

avec la pulsation propre du systeme étant

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m_e = 4m \\ K_e = 2K \end{cases}$$

ercice N° 26

Evidemment, pour qu'il y ait circulation d'électrons, il faudrait injecter une tension (une impulsion plutôt) aux bornes de C à t=0



Loi de Kirchoff.

$$\sum V_i = 0$$

$$V_L + V_c = 0$$

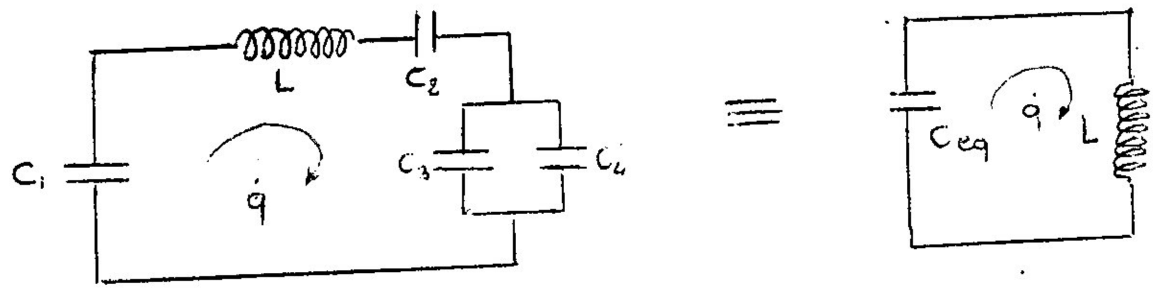
$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$ equation differentielle de la charge Q,

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ou $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ [Hz)

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Q_0 et φ seront determinés par les conditions initiales

Exercice N° 27



Posons $C_{34} = C_3 + C_4$ capacité equivalente à $C_3 // C_4$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{34}}$$ où encore

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_{34}}{C_1 C_2 + C_2 C_{34} + C_1 C_{34}}$$ ou $$C_{eq} = \frac{C_1 C_2 (C_3 + C_4)}{C_1 C_2 + (C_3 + C_4)(C_1 +}$$

L'équations aux mailles nous permet d'ecrire

$$V_L + V_C = 0 \quad \text{où} \quad L\ddot{q} + \frac{q}{C_{eq}} = 0$$

sous la forme canonique:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C_{eq}}}$$

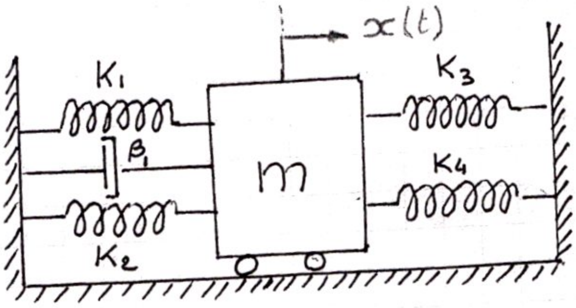
L'equation de la charge sera donc

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$ où Q_0 et φ a determin

en utilisant les conditions initiales.

Oscillations libres et amorties

Exercice N°31 :

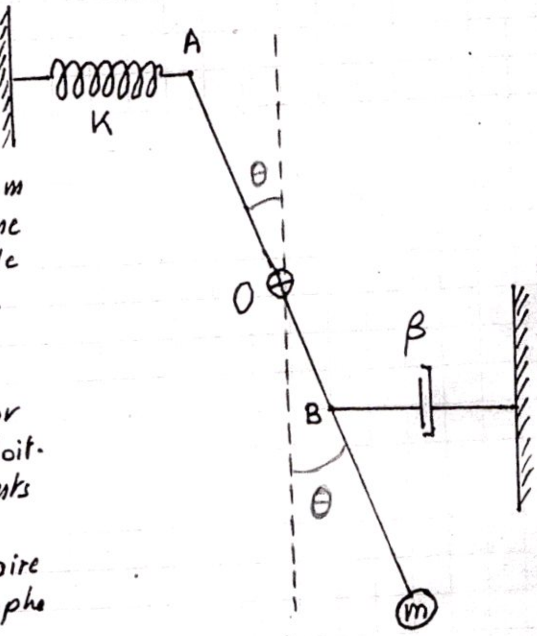


Soit le système mécanique de la figure ci-contre. (Ajouter β_2 entre K_3 et K_4).

1/ Déterminer l'équation différentielle du mouvements par 2 méthodes différentes.

2/ A quelle condition, le mouvement sera-t-il oscillatoire ? Quelle sera dans ce cas l'expression littérale de la periode ?

Exercice N°32 :



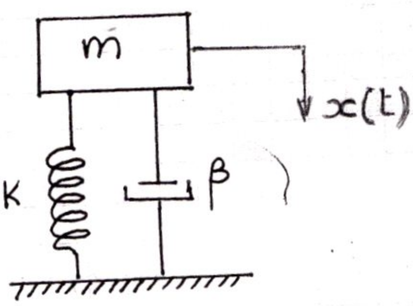
Dans le système meconique ci-contre, la tige, de masse négligéable, peut pivoter autour du point O fixe. Avant, le début du mouvement, la tige vide, etait verticale, on accroche alors, une masse m au bout de la barre. On écarte le systeme de sa position d'equilibre statique et on le lâche. On donne OA = a ; OB = b ; Om = l.

1°/ Determiner le lagrangien du systeme, ainsi que sa dissipation D.

2°/ On veut amortir au maximum le retour de la barre vers la verticale. Comment doit-on alors choisir les constantes des elements du systeme ?

3°/ Determiner dans ce cas, l'équation horaire du mouvement ainsi que l'allure du graphe $\theta = f(t)$.

Exercice N°33 :



Une masse m repose sur un ressort K en parallele avec un amortisseur de coefficient de frottement β. On designe par x, la dénivelation de la masse m par rapport à sa position d'equilibre statique.

Determiner

a/ l'equation differentielle du mouvement.

b/ le coefficient d'amortissement λ

c/ la pulsation propre du systeme

d/ le decrement logarithmique

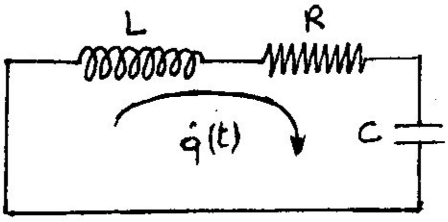
e/ la pulsation du mouvement

f/ la periode du mouvement

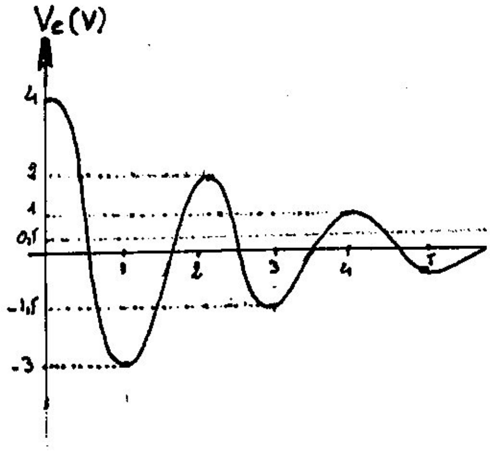
g/ l'équation horaire du mouvement sachant qu'à $x(0) = 8$ et $\dot{x}(0) = 0$

A.N: $m = 2kg$; $\beta = 4\ N/ms^{-1}$; $K = 3\ N/m$.

Exercice N°: 34

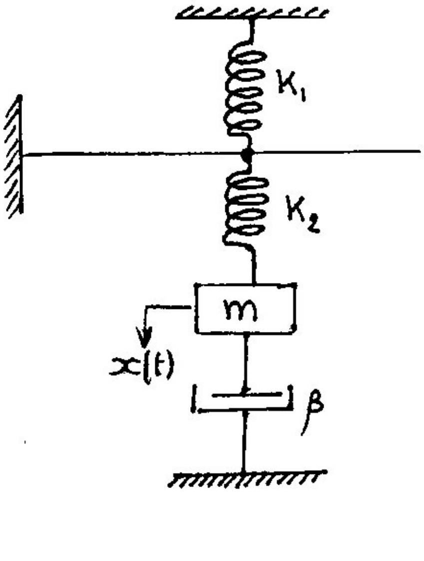


La tension électrique aux bornes d'un condensoteur C d'un circuit R.L.C. série donne le graphe ci-contre.
On prendra $C = 1\,\mu F$



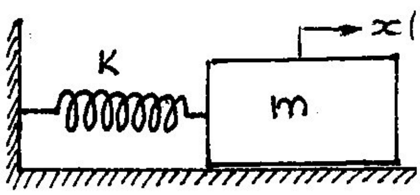
Determiner graphiquement:
1/ le decrément logarithmique δ
2/ la pseudo-période T
3/ le coefficient d'amortissement λ
4/ la pulsation amortie ω_a
5/ la pulsation propre ω_0
6/ l'équation horaire $q(t)$.

Exercice N°: 35 :



Soit le système mécanique ci-contre, representé par 2 ressorts k_1 et k_2 soudés en O. Une corde de longueur $2L$ passe par ce point O (on peut supposer qu'elle est attachée en ce point O. On suppose que la tension de la corde T_0 reste constante au cours du mouvement. En supposant de faibles mouvements et $k_1 = 2K$; $k_2 = 4K$; $\beta = \sqrt{8Km}$ et $T_0 = kL$
Déterminer
1. le schema simplifie de ce montage en déterminant Ke (Kequivalent)
2. L'équation differentielle du mouvement.
3. l'équation horaire de x sachant $x(0) = A_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

Exercice N°: 36



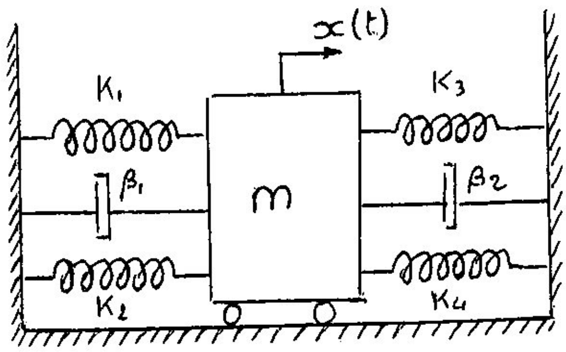
Etude des frottements solide et visqueux :
La masse m repose sur le sol et peut se translater horizontalement. A $t = 0$, la masse m est écartée de 9,5cm de sa position d'equilibre statique.

A/ Frottement solide
Le coefficient de frottement solide de la masse M sur le plan est $f = 0,1$.
1. Donner le graphe de la force de frottement $F(t)$
2. Quelle est l'équation differentielle du mouvement. Tracer le graphe $x($
3. Au bout de combien de temps la masse s'arrêtera-t-elle ?

B/ Frottement visqueux : sol graissé $\vec{F} = -\beta\vec{v}$ avec $\beta = 0,2\ N/ms^{-1}$
4/ Determiner $x(t)$
5/ En supposant la masse arrêtée lorsque son amplitude est inférieu
au bout de combien de temps, la masse m s'arrêtera-t-elle ?

Solutions: Systèmes Amortis

:ercice N° 31



On suppose que la masse m peut se déplacer (parallèlement à elle-même) horizontalement autour de sa position d'équilibre statique.

a/ méthode dynamique.

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$$

$$-K_1 x - \beta_1 \dot{x} - K_2 x - K_3 x - \beta_2 \dot{x} - K_4 x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + (\beta_1 + \beta_2)\dot{x} + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)x = 0$$

ou encore $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

avec $\lambda = \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{m}}$

b/ méthode énergétique.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2} K_2 x^2 + \frac{1}{2} K_3 x^2 + \frac{1}{2} K_4 x^2$$

$$L = T - U$$

$$D = \frac{1}{2}\beta_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\beta_2 \dot{x}^2$$

L'équation differentielle du mouvement est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \Rightarrow m\ddot{x} + (\beta_1 + \beta_2)\dot{x} + (K_1 + K_2 + K_3 + K_4)x = 0$$

On n'aura des oscillations que si $\Delta' < 0$ c-à-d $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$

ou encore $\lambda < \omega_0 \Rightarrow \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{m} < \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{m}}$

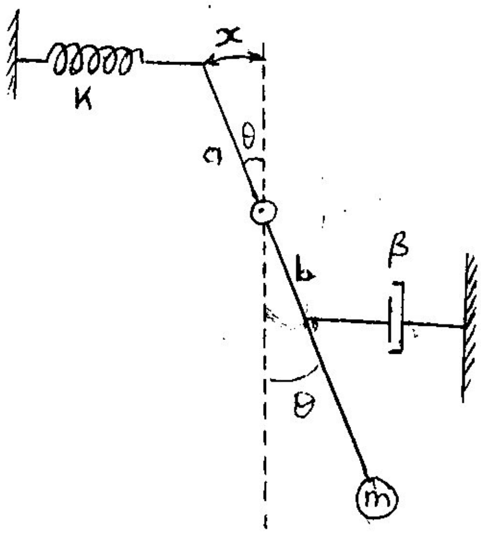
L'équation horaire sera dans ce cas

$$x(t) = A\, e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t + \varphi\right)$$

avec une période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_a} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$

Exercice N°32

A l'équilibre statique, la barre vide était verticale, on lui accroche alors une masse située à une longueur l du point de rotation O.



1°/ méthode énergétique

$$T = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} K x^2 + m g y$$

$$U = \frac{1}{2} K (a\theta)^2 - m g l \cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K a^2\theta^2 + mgl \cos\theta$$

$$D = \frac{1}{2} \beta v^2 = \frac{1}{2} \beta b^2 \dot{\theta}^2$$

L'équation différentielle du mouvement est donnée par:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$ si on assume θ faible $\sin\theta \simeq \theta$

ce qui donne $m l^2 \ddot{\theta} + \beta b^2 \dot{\theta} + (Ka^2 + mgl)\theta = 0$

ou encore $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\begin{cases} \lambda = \dfrac{\beta b^2}{m l^2} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{Ka^2 + mgl}{ml^2}} \end{cases}$

2°/ On veut amortir au maximum le retour de la barre vers la verticale, donc le régime doit être hypercritique.

$$\Delta' > 0 \Longrightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$$

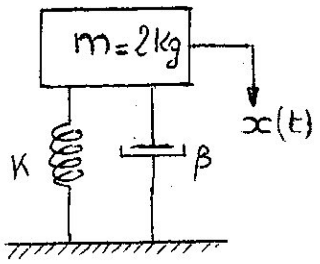
ou encore $\left(\dfrac{\beta b^2}{m l^2}\right)^2 > \dfrac{Ka^2 + mgl}{ml^2}$

Dans ce cas $\theta(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$

avec $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

$\theta(t)$ tend très lentement vers la position d'équilibre sans osciller.

Exercice N° 33:



$\beta = 4\ N/ms^{-1}$ et $K = 3\ N/m$

On peut exprimer les unités de ces 2 grandeurs autrement ; d'une manière plus simplifiée en utilisant l'équation aux dimensions (voir "rappel mathématique").

$\vec{F} = -\beta\,\vec{v} \Rightarrow [\beta] = \dfrac{[F]}{[v]}$; $[\beta] = \dfrac{M L T^{-2}}{L T^{-1}} = M T^{-1}$

donc l'unité de β est N/ms^{-1} ou mieux encore $\beta = 4\ kg/s$

De même $\vec{F} = -K\vec{x} \Rightarrow [K] = \dfrac{[F]}{[x]} = \dfrac{M L T^{-2}}{L} = M T^{-2}$.

donc l'unité de K est N/m ou mieux encore $K = 3\ kg/s^2$

1/ Equation differentielle du mouvement

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = 0$ où $2\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$

avec : coefficient d'amortissement $\lambda = \dfrac{\beta}{2m}$; $\lambda = 1\ s^{-1}$

et : pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$; $\omega_0 = 1,2247\ rad/s$

2/ Decrement logarithmique δ

$\delta = \lambda T$; $\delta = \dfrac{2\pi\,.\,\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$; $\delta = 8,881$

3/ Pulsation du mouvement.

La pulsation du mouvement est $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$; $\omega_a = 0,707\ rad/s$

4/ Equation horaire

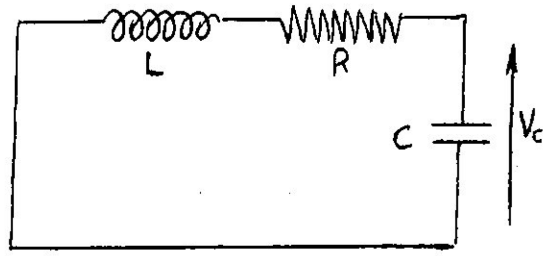
$x(t) = A\,e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

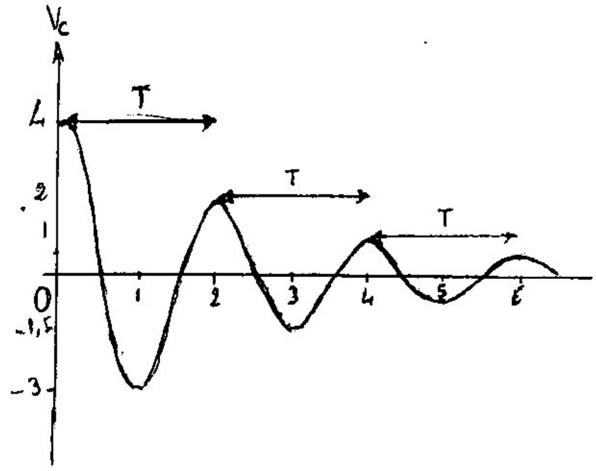
$x(t) = A\,e^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t + \varphi\right)$

$x(t) = A\,e^{-t}\cos(0,707\,t + \varphi)$

où A et φ seront à déterminer en utilisant les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

Exercice N° 34





Loi de Kirchoff

$$V_L + V_R + V_C = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{comme } i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/_C = 0$$ ou encore sous la forme canoniqu

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

avec $\begin{cases} \text{coefficient d'amortissement } \lambda = R/_{2L} \quad [s^{-1}] \\ \text{pulsation propre } \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \quad [rad/s] \end{cases}$

1°/ Décrément logorithmique

$\delta = Ln\dfrac{A_i}{A_{i+1}}$ par exemple $\delta = Ln\dfrac{A_0}{A_1} = Ln\dfrac{4}{2} = 0{,}693$

2°/ Pseudo-periode : $T = 2\,ms$; $T = 2.10^{-3}s$

3°/ Coefficient d'amortissement $\lambda = \dfrac{\delta}{T}$; $\lambda = 346{,}5\ s^{-1}$

4°/ Pulsation amortie ω_a

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_a} \Rightarrow \omega_a = \dfrac{2\pi}{2.10^{-3}}$; $\omega_a = 3141\ rad/s$

5°/ Pulsation propre ω_0

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \lambda^2}$

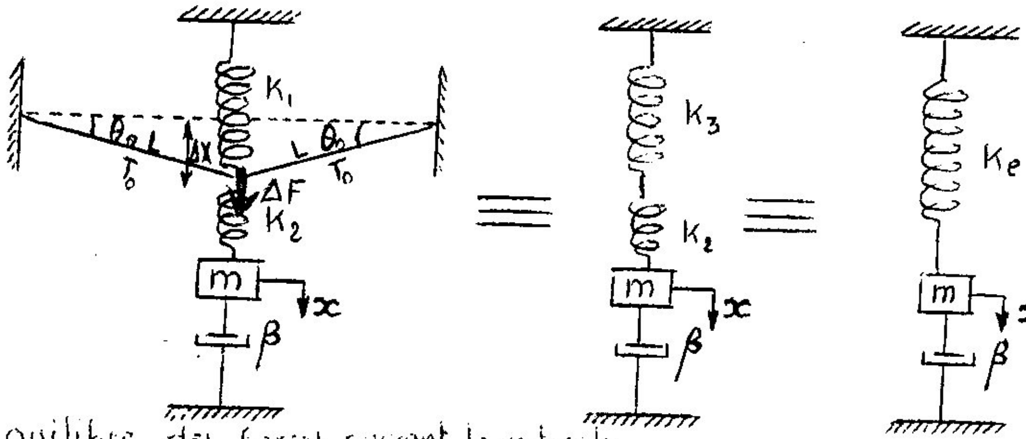
$\omega_0 = 3156\ rad/s$

6°/ Equation horaire $x(t)$

$x(t) = A\,e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

$\boxed{x(t) = 4\,e^{-346t}\cos 3141t}$ $A = 4V$

Exercice N°35:



quilibre des forces suivant la verticale:

$$\Delta F = K_1 \Delta X + T_0 \sin\theta_0 + T_0 \sin\theta_0 \quad \text{ou} \quad \Delta F = k_1 \Delta x + 2 T_0 \frac{\Delta x}{L}$$

on en déduit alors la constante de raideur équivalente K_3

$$K_3 = \frac{\Delta F}{\Delta x} = K_1 + \frac{2T_0}{L} = 4K$$

a constante de raideur K_e equivalente à K_3 en serie avec K_2 vaut

$$K_e = \frac{K_2 \cdot K_3}{K_2 + K_3} = \frac{4K \cdot 4K}{4K + 4K} = 2K$$

équation differentielle du mouvement $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + K_e x = 0$ devient

$$\ddot{x} + \sqrt{8\frac{K}{m}}\,\dot{x} + 2\frac{K}{m}\,x = 0$$

$$\text{ou} \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ave} \begin{cases} \lambda = \sqrt{2\frac{k}{m}} \\ \omega_0 = \sqrt{2\frac{K}{m}} \end{cases}$$

$\lambda = \omega_0 \Rightarrow \Delta = 0$: regime critique

$$x = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}$$

$$\begin{matrix} \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = A_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A = A_0 \\ B = A_0\lambda \end{cases}$$

ci l'equation horaire du mouvement represente mouvement critique tel que

$$\boxed{x(t) = A_0\left(1 + \sqrt{2\frac{k}{m}}\,t\right) e^{-\sqrt{2k/m}\,t}}$$

Exercice N° 36

A/ Frottement solide

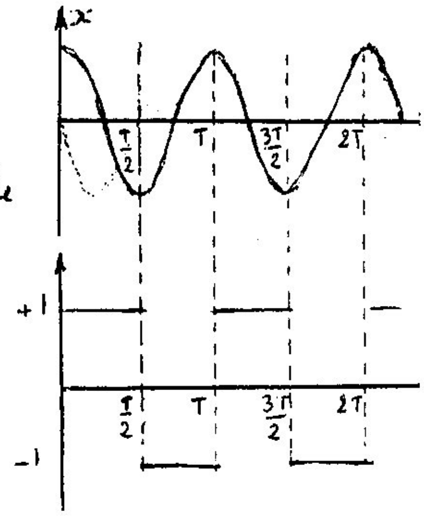
La force de frottement sec est constante et opposée au mouvement.

Son module est $|\vec{F}_f| = f.|\vec{R}|$; $|\vec{R}|$ reaction du plan horizontal

donc $|\vec{R}| = |m\vec{g}| = 10\,N$ comme $f = 0{,}1$ donc $F_f = 1\,N$

En absence de frottement $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\,rd/s$

$x(0) = 9{,}5$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent $x(t) = 9{,}5\cos 10t$



La force de frottement $F(t)$ est constante ($1N$)

et s'oppose toujours au mouvement.

$F(t)$ changera de signe à chaque demi-periode

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{5}$

$0 < t < T/2$; $\dot{x} < 0$ donc $F_f = +1N > 0$

$\frac{T}{2} < t < T$; $\dot{x} > 0$ donc $F_f = -1N < 0$

2. L'equation differentielle du mvt de mvt:

$m\ddot{x} + Kx = F$ avec $F = \pm 1N$ suivant t.

∗ si $0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}$ $\quad m\ddot{x} + K\left(x - \frac{F_f}{k}\right) = 0$

$x - \frac{F_f}{k} = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ donc $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_f}{k}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 9{,}5 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x_1(t) = \left(9{,}5 - \frac{F_f}{k}\right)\cos(10t) + \frac{F_f}{k}}$$

∗ si $\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant T$ $\quad m\ddot{x} + Kx = -F_f \Rightarrow m\ddot{x} + K\left(x + \frac{F_f}{k}\right)$

d'où $x + \frac{F_f}{k} = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{F_f}{k}$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(T/2) = 0 \\ x_2(T/2) = x_1(T/2) = -9{,}5 + \frac{2F}{k} \end{array}\right\} \text{ equation de continuité}$$

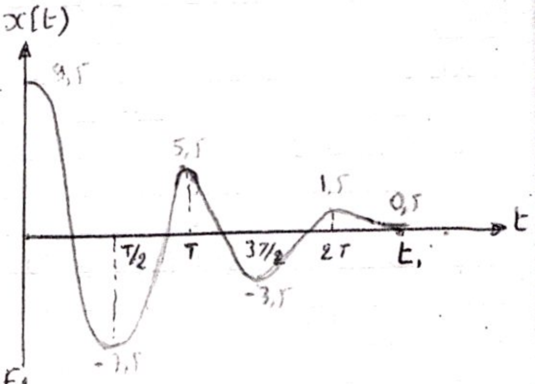
$$\boxed{x_2(t) = \left(9{,}5 - \frac{3F_f}{k}\right)\cos 10t - \frac{F_f}{k}}$$

par récurence si

$\frac{(n-1)}{2} T \leq t \leq \frac{n}{2} T$ et connaissant $x(t = \frac{n-1}{2} T)$ de l'intervalle precedent, on obtient:

$$x(t) = \left[9,5 - \frac{(2n-1) F_f}{K} \right] \cos \omega_0 t + (-1)^{n+1} \frac{F_f}{K}$$

Comme $\frac{F_f}{K} = 1cm$ $\quad x(t) = (10,5 - 2n) \cos \omega_0 t + (-1)^{n+1}$ en cm



3/ Nous remarquons qu'aprés chaque periode, l'amplitude diminue de 4 cm. L'amplitude max étant de 9,5 cm, la masse ne peut effectüer 3 periodes. Le systeme s'arrêtera à $2T < t_1 < 3T$. Pour cela, 2 conditions doivent être satisfaites $\dot{x}(0) = 0$ et $F_K < F_f$

Considerons la region $2T \leq t \leq 5T/2$: $n = 5$

donc $\quad x(t) = 0,5 \cos \omega_0 t + 1$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 \cdot 0,5 \sin \omega_0 t = 0 \Rightarrow \omega_0 t = n\pi \; ; \; t = \frac{nT}{2}$$

avec $n = 5$ on obtient $t = 5\frac{T}{2}$

Au temps $t = 5\frac{T}{2}$, la vitesse est nulle et l'allongement $x(5\frac{T}{2}) = 0,5 cm$

La force de rappel est $|F_K| = Kx = 0,5 N < F_f$.

La masse s'arrête à $t = \frac{5T}{2} = 5\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow$ à $t_1 = 1,57 s$

La masse s'arrête à 0,5 cm de sa position d'équilibre statique.

B/ Frottement visqueux

Dans le cas d'un frottement visqueux, l'équation différentielle qui régit le systeme est:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\begin{cases} \text{coefficient d'amortissement } \lambda = \beta/2m \\ \text{pulsation propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$

On rappelle que le coefficient de frottement visqueux est β tel que $F_\beta = -\beta \dot{x}$ pour les faibles vitesses donc $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

avec $\begin{cases} \lambda = 0,1\ s^{-1} \\ \omega_0 = 10\ rad/s \end{cases}$

Le mouvement sera pseudo-periodique si $\lambda < \omega_0$

Dans ce cas l'équation horaire du mouvement est

$$x(t) = A\ e^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\ t + \varphi)$$

$x(0) = 9,5\ cm$

$\dot{x}(0) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} A = 9,5 \\ \varphi = 0 \end{cases}$

d'où $x(t) = 9,5\ e^{-\lambda t} \cos \omega_0 t + \varphi$

5/ $9,5\ e^{-0,1 t} \leq 0,1 \Rightarrow t \geq 45,5 s$

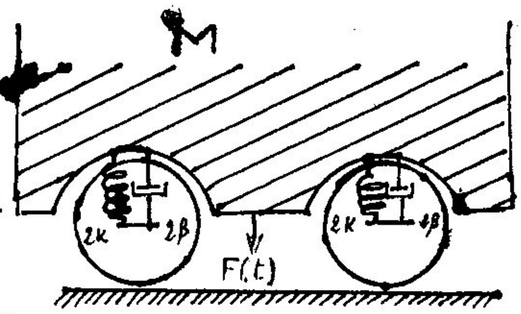
Avec un frottement visqueux la masse s'arrête au bout de 45,5 s, alors qu'en frottement sec elle s'arrête au bout de 1,57 s.

Oscillations Forcées

ercice N°50: à faire

Le châssis d'une voiture repose sur les essieux des roues à travers les ressorts $2K$ et les amortisseurs 2β. Le moteur en marche provoque une force extérieure verticale de la forme $F(t) = F_0 \cos\omega t$

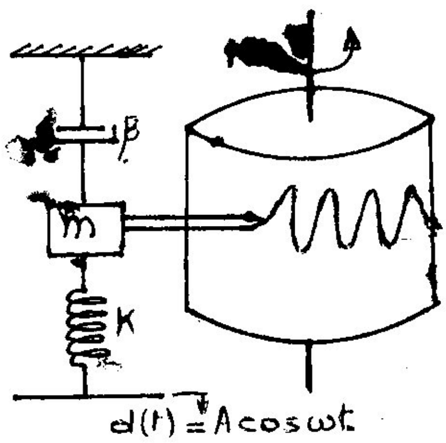
1/ Faire un schema simplifié du montage.
2/ Etablir l'équation differentielle du mvt de M.
3/ En déduire l'équation horaire. Tracer le graphe $X_0 = f(\omega)$. Comment doit être la vitesse du moteur au ralenti (ω_{min}) pour éviter la résonance ?



ercice N°51 à faire

Un séismographe est un appareil qui sert à tracer le mouvement du sol. Mais comme les amplitudes du mouvement des vibrations terrestres sont souvent très faibles, on doit les amplifier pour mieux les enregistrer.

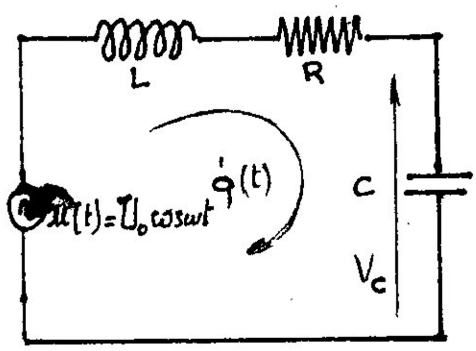
1/ Etablir l'équation differentielle du mvt de m.
2/ Comment doit-on choisir m, β et K pour que ce système soit un amplificateur de vibrations ! (C'est-à-dire $X_0 \gg A$).



ercice N°52 : à faire

Soit le montage electrique ci-contre:

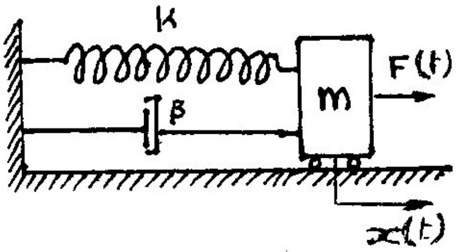
1/ Etablir l'équation de la maille en fonction de $q(t)$
2/ En déduire le graphe $V_c = f(t)$. Quelle sera la pulsation de V_c !
3/ Preciser la variation de l'amplitude V_0 de V_c en fonction de ω. Faire un graphe.
4°/ Determiner la bande passante B



ercice N°53 :

Le schéma ci-contre peut symboliser le mouvement du tympan (m) de l'oreille humaine.

1°/ Determiner l'équation horaire du mvt de m.
2°/ Calculer l'expression de la pulsation de resonance ω_r
3/ Trouver l'expression de l'amplitude X_{0max} à la résonance.
4/ Comment varie l'amplitude X_{0max} quand λ croit ?
5/ En déduire la condition pour qu'il y ait le phénomène de résonance.

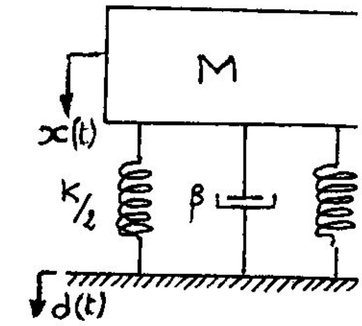


Exercice N°54

Le système mécanique ci-contre represente un étouffeur de vibrations. La masse M repose sur un support D assujetti à un déplacement vertical forcé $d(t) = A\cos\omega t$. La masse M subit alors des vibrations re-presentés par le degré de liberté $x(t)$

1/ Determiner l'équation horaire de la masse M

2/ Comment doit-on choisir les constantes du système pour que ce dernier soit un étouffeur de vibrations ?



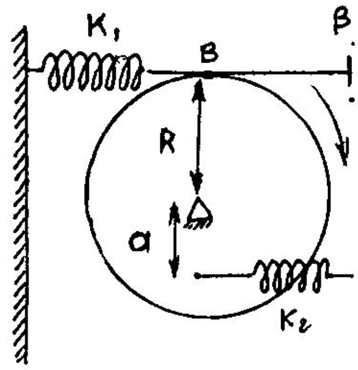
Exercice N°55

Dans le montage oscillant, la poulie pleine, de masse M et de rayon R peut pivoter autour de son centre fixe O. L'extrémité D du ressort K_2 subit un déplacement forcé horizontal d'une grandeur $d(t) = A\cos\omega t$.

1°/ Etablir l'équation differentielle du mouvem^t

2°/ En déduire son équation horaire $\theta(t)$.

3°/ Determiner l'expression littérale de ω pour que la poulie pivote avec une amplitude θ_0 maximale

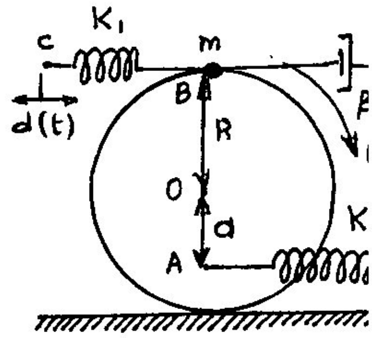


Exercice N°56

Soit le système mécanique ci-contre où la poulie pleine de masse M et de rayon R peut rouler sans glisser sur le sol. Au point B est fixée une masse m qui était sur la verticale passant par O à l'équilibre statique. Le point C subit alors un déplacement horizontal forcé représenté par $d(t) = A\cos\omega t$.

1°/ Etablir l'équation differentielle du mouvement.

2°/ En déduire la variation de l'amplitude θ_0 et de la phase φ en fonction de ω.



Exercice N°57

Dans la figure ci-contre, le disque est plein, de rayon R et de masse M. A l'équilibre, la tige de longueur L est suivant la verticale.

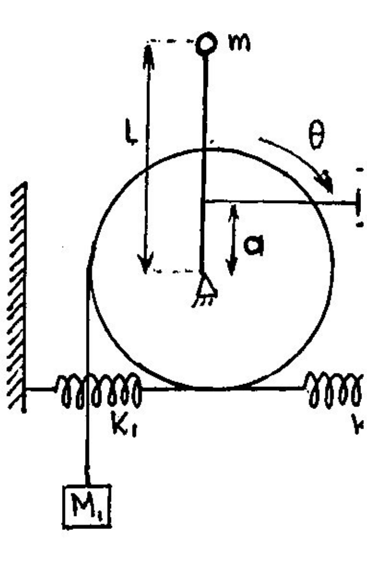
1°/ Déterminer le lagrangien du système.

2°/ Trouver l'équation differentielle du mouvement.

3°/ En déduire l'expression de β_{crit}.

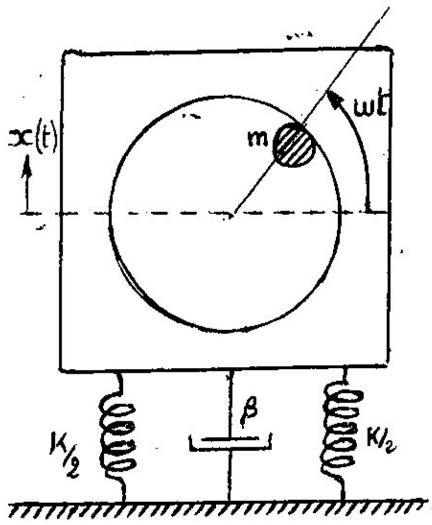
4°/ Determiner l'équation horaire dans le cas où le mouvement est oscillatoire.

5°/ On applique une force $F(t) = F_0 \sin\omega t$ à la masse m suivant l'horizontale. Déterminer la nouvelle équation différentielle du mouve-ment ainsi que son équation horaire $\theta(t)$.



rcice N° 58

Le système ci-contre représente les vibrations occasionnés par certains appareils ou machines tournantes (exemple : la machine à laver). Les oscillations dues essentiellement à la force centrifuge sont souvent nuisibles et détériorent rapidement le bon fonctionnement de ces machines. Pour parer à ce probleme, on installe des "supports de moteur" en caoutchouc jouant le rôle de ressorts en parallèle avec un amortisseur β. M étant la masse du tambour vide et m la masse du linge mouillé.



1) Etablir l'équation horaire du mouvement $x(t)$.
2) En déduire la variation de l'amplitude X_0 du mouvement en fonction de la vitesse de rotation ω.
3) Tracer sur un même repère $X_0(\omega)$ pour différentes valeur de β
4) Calculer l'amplitude de la force transmise au sol à la résonance.
5) En déduire deux possibilités pour que la transmission des vibrations au sol soient étouffées au maximum.

rcice N° 59

A. Un circuit RLC série est formé d'une resistance $R = 100\,\Omega$, d'une inductance $L = 10^{-3}\,H$ et d'un condensateur $C = 10^{-3}\,\mu F$, initialement chargé sous une tension de 100 volts. Le courant initial étant nul, on ferme l'interrupteur à $t = 0$.

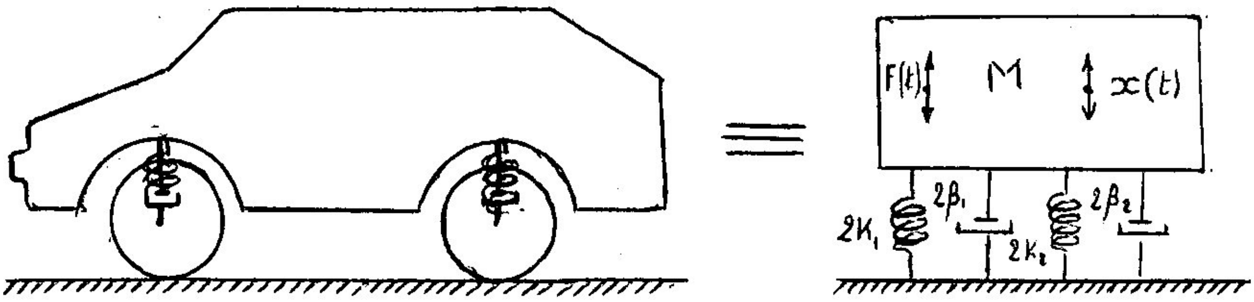
1) Le courant est-il oscillatoire ? Si oui, quelle est alors la fréquence d'oscillation
2) Quelle est l'expression de la tension aux bornes du condensateur V_c. Calculer son amplitude après 5 oscillations

B. Le circuit précédent est raccordé à une source de tension $u(t) = 2\cos\omega t$. On demande :

1) Etablir l'équation différentielle de la charge $q(t)$ circulant dans la maille.
2) Expression et graphe de V_c en fonction de ω.
3) le facteur de qualité du circuit et l'amplitude de $V_c(\omega)$ à la résonance.
4) Calculer la variation $I(\omega)$ du courant. Tracer la courbe ; en déduire l'amplitude du courant à la à la résonance.

Solutions : Oscillations Forcées

Exercice N°50 :



a/ Methode dynamique

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{F}_{2K_1} + \vec{F}_{2\beta_1} + \vec{F}_{2K_2} + \vec{F}_{2\beta_2} + \vec{F}_{ext} = m\vec{\ddot{x}}$$

$$-2K_1 x - 2\beta_1 \dot{x} - 2K_2 x - 2\beta_2 \dot{x} + F_{ext} = m\ddot{x}$$

d'où l'equation differentielle du mvt

$$m\ddot{x} + (2\beta_1 + 2\beta_2)\dot{x} + (2K_1 + 2K_2)x = F_{ext}$$

$$m\ddot{x} + 2(\beta_1 + \beta_2)\dot{x} + 2(K_1 + K_2)x = F_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$$

b/ Methode energetique

$$T = \tfrac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$U = \tfrac{1}{2}(2K_1)x^2 + \tfrac{1}{2}2K_2 x^2$$

$$L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 - (K_1 + K_2)x^2$$

$$D = \frac{1}{2}(2\beta_1 + 2\beta_2)\dot{x}^2$$

$$W_{ext} = F_{ext} \cdot x$$

L'equa. diff. du mvt est donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial x}$$

Par les 2 méthodes, on retrouve la même equa. diff. du mvt

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t \quad ; \beta_t = 2\beta_1 + 2\beta_2 \; ; \; K_t = 2K_1 + 2K_2$$

avec $\lambda = \dfrac{\beta_t}{2M}$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_t}{M}}$; $f_0 = \dfrac{F_0}{M}$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{j\omega t} \quad \text{donc } \mathbb{C}$$

$x = x_H + x_p$; regime transitoire $x_H \neq 0$

$x = x_p = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$; regime permanent $x_H = 0$

il en decoule par identification

$$X_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

avec $x = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2\lambda\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

Donc en résumé

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$ aura pour solution

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\lambda\omega}{-\omega^2+\omega_0^2}\right)$$

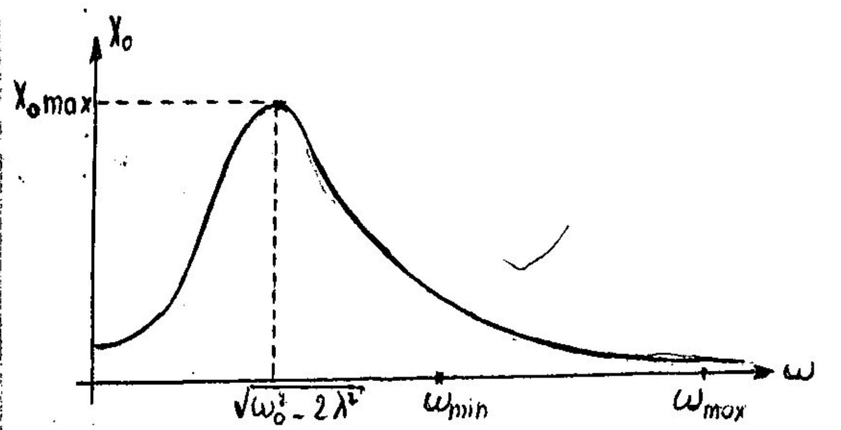
On remarque dans les oscillations forcées que l'amplitude X_0 du mouvement, n'est plus une constante comme dans les systèmes libres, mais dépend de ω.

L'amplitude X_0 des secousses verticales de la voiture dépend donc de la vitesse de rotation ω du moteur.

Etudions alors la fonction $X_0 = f(\omega)$.

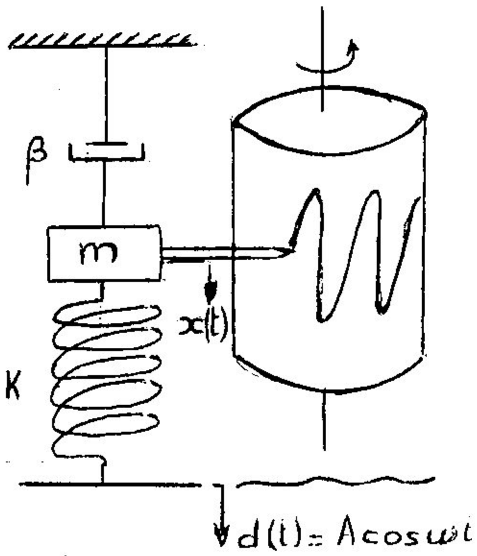
C'est une fonction toujours positive qui admet un maximum lorsque $\frac{dX_0}{d\omega} = 0 \Longrightarrow \left[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]' = 0$

donc $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_r$ (pulsation de résonance)



La vitesse d'un moteur de voiture varie de ω_{min} (vitesse du ralenti) à ω_{max}.
La vitesse du ralenti ω_{min} est fixée à $\simeq 960$ tr/min pour toutes les voitures.
Par contre ω_{max} dépend de la puissance de la voiture (5000 — 8000 tr/min)
Donc on choisira $\omega_{min} > \omega_r$. De cette manière, plus on accélère plus les secousses verticales ($x(t)$) diminue. De l'autre côté, ω_{min} ne doit pas être trop élevée : gaspillage de carburant + échauffement.
Le compromis a été fixé donc à 960 tr/min

Exercice 51 :



Le support du bas est assujetti à un deplacement forcé _ Exemple : la dolle du 1er étage vibre, cela est tout à fait normal à condition que ce mouvement ne depasse pas un certain seuil.

A l'echelle réelle, il est très difficile d'etudier ce mouvement presque invisible à l'œil nu. Pour cela, on imagine le systeme ci-contre qui aura pour rôle d'amplifier et d'enregistrer les secousses de la dalle sur papier millimetre (cylindre tournant)

a/ methode dynamique (NEWTON)

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{F}_K + \vec{F}_\beta = m\vec{\gamma}$$

$$-K(x-d) - \beta(\dot{x}-0) = +\ \ddot{x}$$

J'ai l'equa. diff. du mvt de m

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = Kd$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = KA\cos\omega t$$

ou $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\omega_0^2 A}_{f_0}\cos\omega t$

donc $x = X_0\cos(\omega t + \varphi)$

b/ méthode energetique (LAGRANGE)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}K(x-d)^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K(x-d)^2$$

$$D = \frac{1}{2}\beta(\Delta v)^2 = \frac{1}{2}\beta\dot{x}^2$$

$$W_{ext} = F_{ext}\cdot x = 0$$

L'equa. diff. du mvt de m est donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} - [-K(x-d)] = -\beta\dot{x}$$

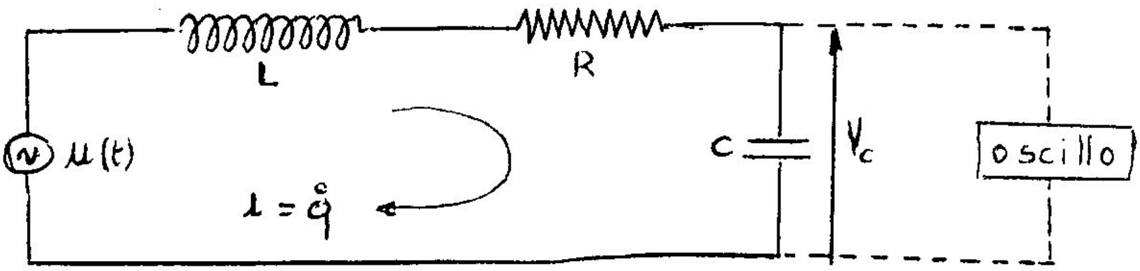
avec $X_0 = \dfrac{\omega_0^2 A}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$ et $\varphi = -\operatorname{arctg}\dfrac{2\lambda\omega}{-\omega^2+\omega_0^2}$

Ce systeme sera amplificateur de vibrations si $x(t)$, le mvt du crayon, est tres tres grand par rapport à $d(t)$, mouvement réel de la dalle

ie $X_0 \gg A \implies \dfrac{\omega_0^2 A}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2}} \gg A$

c'est-à-dire $\boxed{2\omega_0^2 \gg \omega^2 + 4\lambda^2}$

Exercice 52 :



La maille R.L.C est alimentée par un G.B.F $u(t) = U_0 \cos\omega t$

Loi des mailles : $\Sigma u_i = 0$ ou encore

$$u_L + u_R + u_c = u(t)$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + q/C = U_0 \cos\omega t \quad \left(\text{comme } i = \frac{dq}{dt}\right)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U_0 \cos\omega t \quad \text{ou encore}$$

$$\ddot{q} + 2\lambda q + \omega_0^2 q = u_0 \cos\omega t$$

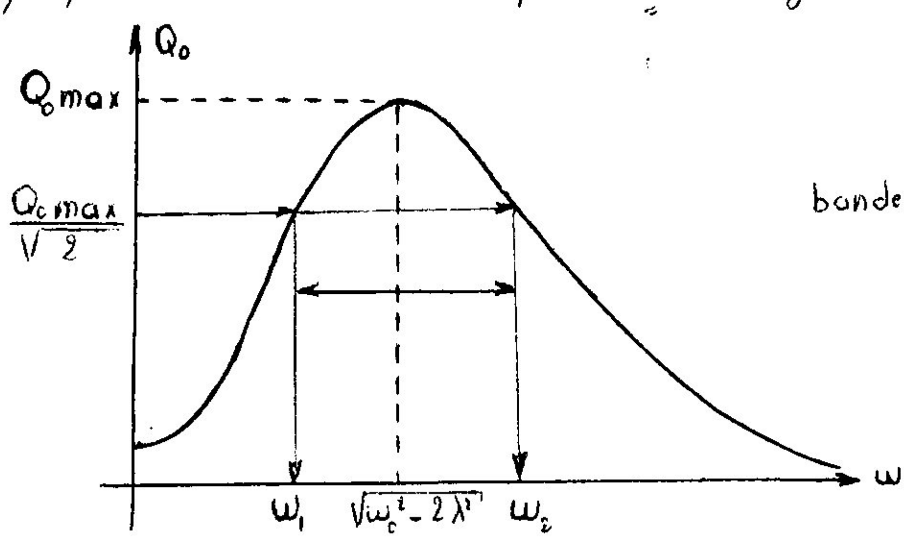
avec $\lambda = \frac{R}{2L}$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $u_0 = \frac{U_0}{L}$

La solution de cette équation différentielle sera donc

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \begin{cases} Q_0 = \dfrac{u_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \\ \varphi = -\operatorname{arctg} \dfrac{2\lambda\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \end{cases}$$

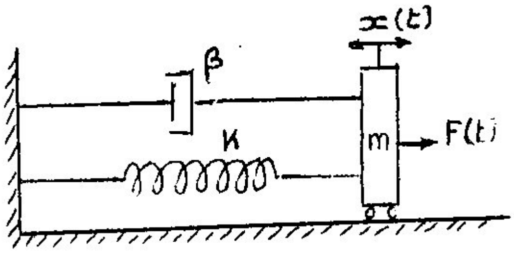
et $V_c = \frac{q}{C} = \frac{Q_0}{C}\cos(\omega t + \varphi)$

La fréquence lue à l'oscilloscope sera donc égale à celle du GBF : ω.



$$\boxed{B_{(rad/s)} = \omega_2 - \omega_1}$$ par définition

Exercice 53



A la suite de vibrations sonores, (variations sinusoïdales de la pression d'air) le tympan (m) subit des oscillations forcées. $\vec{\Sigma} F = m \vec{\gamma}$

$-Kx - \beta\dot{x} + F_{ext} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = F_0 \cos\omega t$

ou encore $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$

donc $x = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$

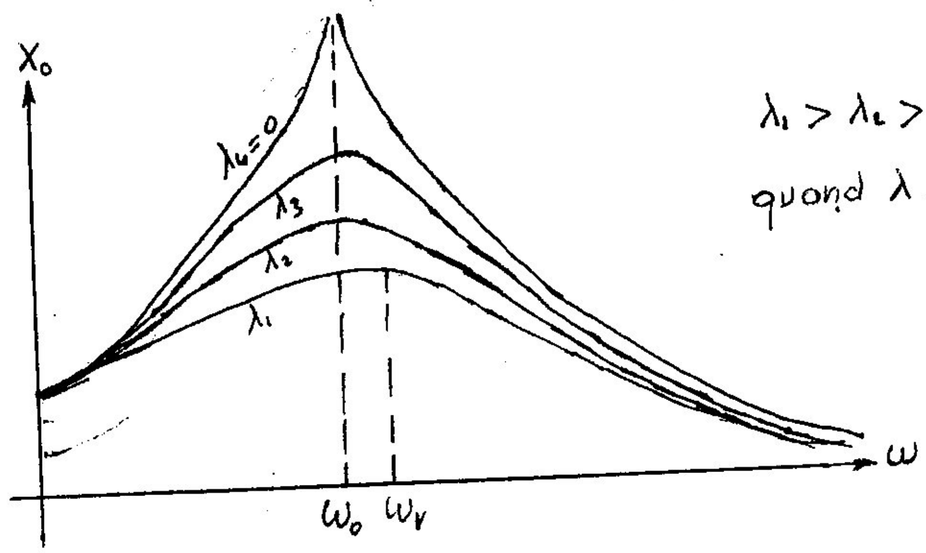
avec $\begin{cases} X_0 = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \\ \varphi = -\operatorname{arctg} \dfrac{2\lambda\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \end{cases}$

L'amplitude X_0 du mouvement du tympan devient maximale lorsque $\dfrac{dX_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]' = 0$

c'est-à-dire à $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_r$.

L'amplitude X_{0max} est alors égale à $X_0(\omega = \omega_r)$ ou

$X_{0max} = X_0\left(\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}\right) = \dfrac{f_0}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$



$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$

quand $\lambda \nearrow$ $\begin{cases} \omega_r \longrightarrow \omega_0 \\ X_0 \longrightarrow \infty \end{cases}$

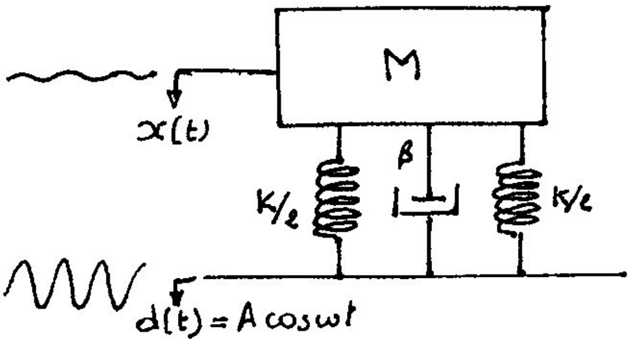
Le phénomène de résonance existe à condition que $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ existe

c'est-à-dire résonance si $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$; ou $\lambda < \lambda_{max}$

où $\lambda_{max} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. Au delà de $\lambda = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$; il n'y aura plus de résonance.

Exercice 54

Dans ce probleme, la masse M repose sur un support oscillant verticalement. Le rôle des ressorts et amortisseurs est d'étouffer les vibrations transmises du sol.



Le procédé est utilisé lors de la construction des gratte-ciel.
Si le sol vibre d'une amplitude de 2 cm, le rôle de β et K est d'étouffer ces secousses pour que la masse ne vibre que de 2mm.
Comment doit-on choisir alors les valeurs M; β et K

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow -\frac{K}{2}(x-d) - \beta(\dot{x}-\dot{d}) - K(x-d) = m\ddot{x}$$

ou encore $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = Kd + \beta\dot{d}$ avec $d = A\cos\omega t$

ou bien $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = Kd + \beta\dot{d}$ avec $d = Ae^{j\omega t}$

alors $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 + 2\lambda j\omega)Ae^{j\omega t} \Rightarrow x = X_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$

$$(-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega_0^2)X_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = (\omega_0^2 + 2\lambda j\omega)Ae^{j\omega t}$$

comme $a + jb = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{b}{a}}$

$$\sqrt{(-\omega^2+\omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{2\lambda\omega}{-\omega^2+\omega_0^2}} X_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = (\omega_0^2 + 2\lambda j\omega)Ae^{j\omega t}$$

$$\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{2\lambda\omega}{-\omega^2+\omega_0^2}} X_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = \sqrt{\omega_0^4+4\lambda^2\omega^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2}} Ae^{j\omega t}$$

2 nombres complexes égaux $\Rightarrow$ modules égaux et phases égales

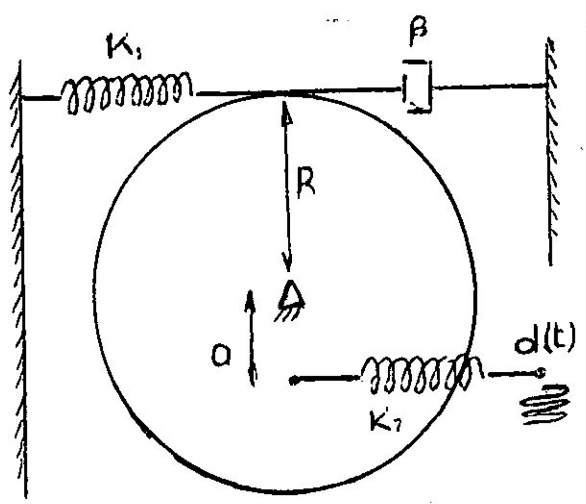
$$X_0 = A\sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \quad \text{et } \varphi = \mathrm{arctg}\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2} - \mathrm{arctg}\frac{2\lambda\omega}{-\omega^2+\omega_0^2}$$

le système sera étouffeur de vibrations si $X_0 \ll A$

C'est-à-dire si $\boxed{\omega_0 \ll \frac{\omega}{\sqrt{2}}}$

Exactement le même principe est appliqué aux voitures, pour que les vibrations au niveau des roues sur une piste, ne se transmettent pas au c

Exercice 55 :



Poulie pleine : $J = \frac{1}{2} MR^2$

$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$

$U = \frac{1}{2} K_1 (0 - R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (a\theta - d)^2$

$D = \frac{1}{2} \beta (\Delta v)^2 = \frac{1}{2} \beta (R\dot{\theta} - 0)^2$

$W_{ext} = \mathcal{M}_{ext} \cdot \theta = 0$

l'equation diff. du mvt est.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial \theta}$$

avec $L = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K_1 (R\theta)^2 - \frac{1}{2} K_2 (a\theta - d)^2$

ce qui donne l'equation differentielle du mouvement

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + \beta R^2 \dot{\theta} + (K_1 R^2 + K_2 a^2)\theta = K_2 a d$$

ou $\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + \beta R^2 \dot{\theta} + (K_1 R^2 + K_2 a^2)\theta = K_2 a A \cos\omega t$

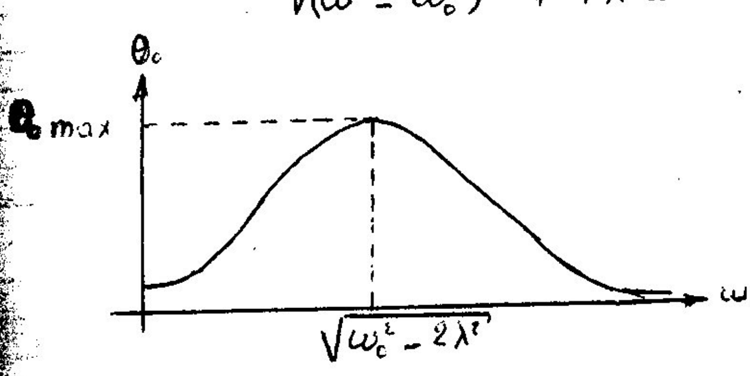
ou encore $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = m_0 \cos\omega t$

avec $\lambda = \frac{\beta}{M}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 R^2 + K_2 a^2}{MR^2/2}}$ et $m_0 = \frac{2K_2 a A}{MR^2}$

l'equation horaire du mouvement de la poulie sera donc :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\theta_0 = \frac{2K_2 a A / MR^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$ et $\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2\lambda\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}$

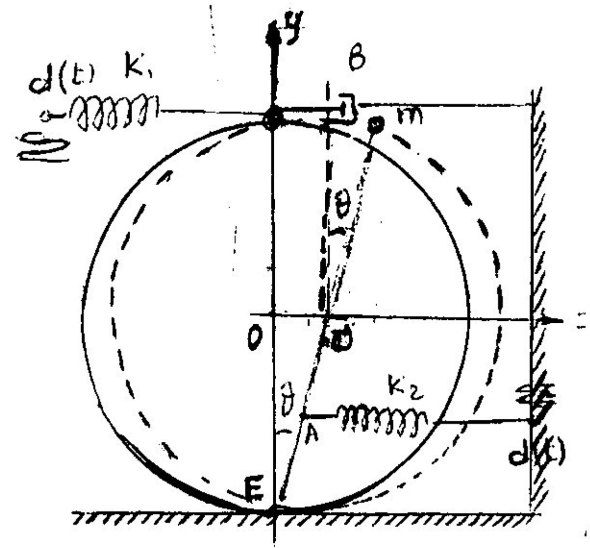


L'amplitude du mouvement de la poulie atteindra un maximum (résonance) lorsque

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\frac{2(K_1 R^2 + K_2 a^2)}{MR^2} - 2\left(\frac{\beta}{M}\right)^2}}$$

Exercice 56

La poulie roule sans glisser (Ref. Exercice 21). Donc elle effectuera un mouvement de translation + rotation.



Poulie pleine $J = \frac{MR^2}{2}$

$T_p = T_{transl} + T_{rot}$

$T = \frac{1}{2} M \dot{X}_0^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} MR^2\dot{\theta}^2$

Pour les autres points, tout se passe comme si le point E était le centre de rotation.

Mais pour l'energie potentielle la reference sera l'horizontale passant par O, car à ce niveau la variation de U est nulle.

$$T = T_p + T_m = \frac{3}{4} MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (2R)^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 (d - 2R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left[(R-a)\theta - 0\right]^2 + mgy$$

l'ordonnée y est calculée ds le repere xOy : $y = R\cos\theta$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} MR^2 + 4mR^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K_1 (2R\theta - d)^2 - \frac{1}{2} K_2 (R-a)^2\theta^2 - mgR\cos\theta$$

$$D = \frac{1}{2}\beta(\Delta v)^2 = \frac{1}{2}\beta(2R\dot{\theta} - 0)^2$$

$$W_{ext} = F_{ext} \cdot x = 0$$

L'equation differentielle du mvt de la poulie est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial \theta}$$

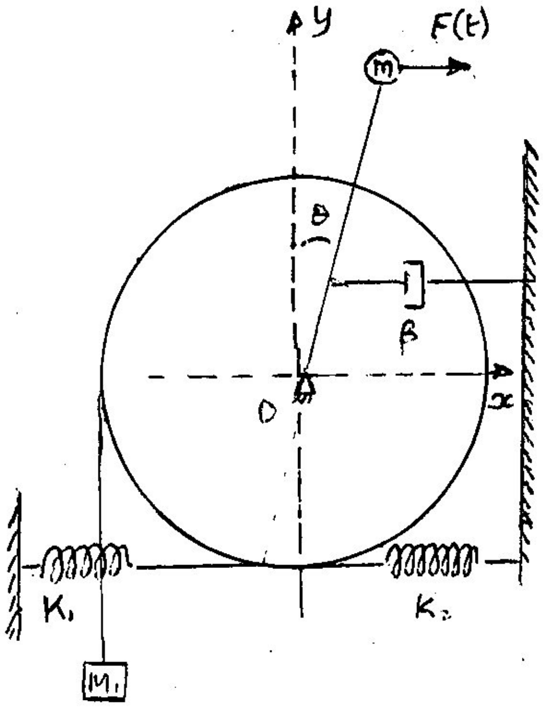
ou $\left(\frac{3}{2} MR^2 + 4mR^2\right)\ddot{\theta} + 4\beta R^2\dot{\theta} + \left(4K_1R^2 + K_2(R-a)^2 - mgR\right)\theta = 2$

ou $\quad \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = m_0 \cos\omega t$

et $\quad \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ pour θ_0 m

avec $\quad \theta_0 = \dfrac{m_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$

xercice 57



$T = T_p + T_m + T_{M_1}$

$T = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} M_1 (R\dot\theta)^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + mgy$

$U = \frac{1}{2} K_1 (R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta)^2 + mgl\cos\theta$

$D = \frac{1}{2}\beta(\Delta v)^2 = \frac{1}{2}\beta(a\dot\theta - 0)^2$

l'equation differentielle du mvt :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta}$$

ou encore :

$$\underbrace{\left(\frac{MR^2}{2} + ml^2 + M_1 R^2\right)}_{J_t}\ddot\theta + \beta a^2\dot\theta + (K_1R^2 + K_2R^2 - mgl)\theta = 0$$

ou encore sous la forme canonique $\ddot\theta + 2\lambda\dot\theta + \omega_0^2\theta = 0$

avec $\lambda = \frac{\beta a^2}{2 \times J_t}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1R^2 + K_2R^2 - mgl}{J_t}}$

/ β critique a lieu lorsque $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{crit} = \sqrt{\frac{K_1R^2 + K_2R^2 - mgl}{J_t}}$

/ Si le mouvement est oscillation, alors $\Delta < 0$ donc $\lambda < \omega_0$

Dans ce cas $\theta = \theta_0 e^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t + \varphi\right)$

/ On ajoute $F(t) = F_0 \sin\omega t$ horizontalement sur m. Dans ce cas

$W_{ext} = F_{ext}.\, x = M_{ext}.\, \theta = F_{ext}.\, l.\, \theta$

L'equa. diff. du mvt est donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \theta} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial \theta}$

$$J_t\ddot\theta + \beta a^2\dot\theta + (K_1R^2 + K_2R^2 - mgl)\theta = F_0 l \sin\omega t$$

equation horaire du mouvement de la poulie est donc

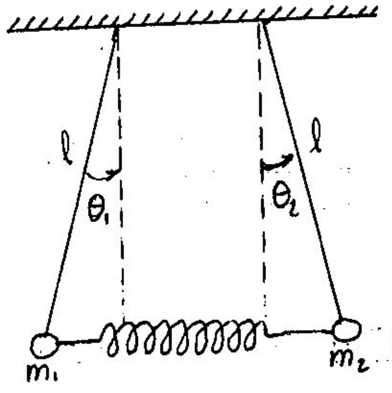
$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

rec $\theta_0 = \frac{F_0 l / J_t}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$ et $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{2\lambda\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}$

OSCILLATIONS LIBRES A DEUX D.D.L

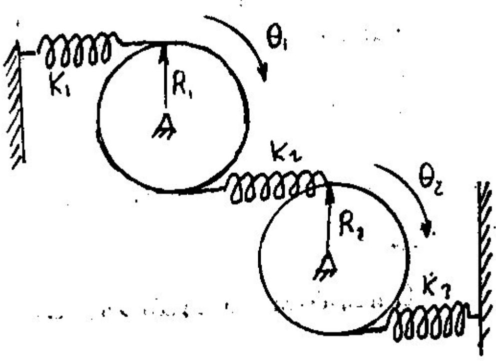
Exercice N°60

Soient deux pendules couplés par un ressort de constante de raideur K. A l'équilibre, les 2 tiges étaient verticales. En supposant de faibles mouvements dans un plan vertical, déterminer le lagrangien du système puis en déduire, les équations différentielles du mouv^t des 2 barres.
Trouver alors les équations horaires de θ_1 et θ_2



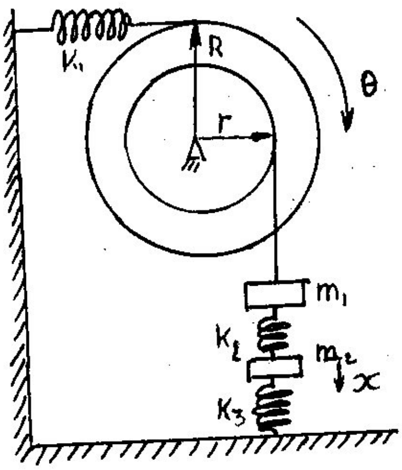
Exercice N°61

Soient 2 poulies fixées en leurs centres respectivement O_1 et O_2. Les 2 poulies sont pleines, de rayon R_1 et R_2, et de masses M_1 et M_2.
1°/ Déterminer les équations differentielles des mouvements des poulies
2°/ En deduire les équations horaires des deux poulies en supposant pour cette question $K_1 = K_2 = K_3 = K$ et les 2 poulies identiques.



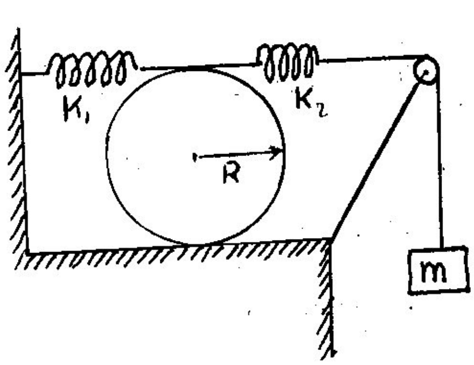
Exercice N°62

Soit le système mecanique ci-contre composé d'une poulie fixée en son centre O, formé de 2 disques collés l'un sur l'autre. Le moment d'inertie de l'ensemble est supposé $J = MR^2/2$.
Les masses m_1 et m_2 effectuent un mouvement vertical seulement.
1°/ Determiner les équations differentielles du mouvement du système : $\theta(t)$ et $x(t)$
2°/ En déduire les équations horaires du mvt lorsque $J = m_1 r^2$; $m_1 = m$; $m_2 = 2m$; $R = r\sqrt{2}$
$K_1 = K_2 = K$ et enfin $K_3 = K$



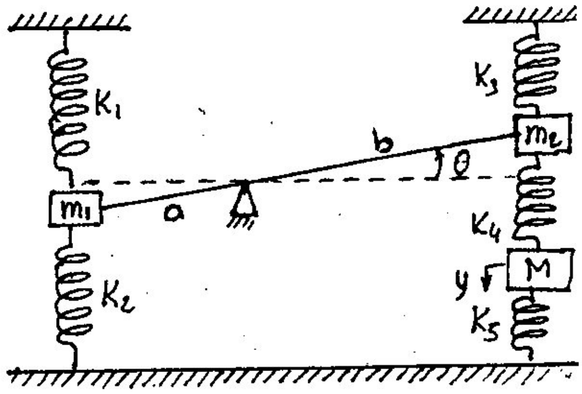
Exercice N°63

Dans le système mecanique, la poulie vide roule sans glisser sur le sol. En supposant de faibles mouvements θ de la poulie et x de la masse m. On demande:
1°/ Les equations differentielles régissant le mouvement du système.
2°/ En déduire les équations horaires quand $m = \frac{M}{4}$.



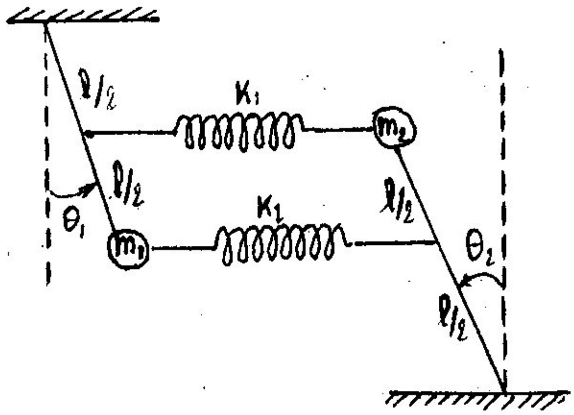
Exercice N°64

Soit le systeme mécanique ci-contre où la tige sans masse et de longueur $a+b$, peut pivoter autour du point fixe O.
A l'équilibre, la barre était horizontale.
1/ Déterminer les équa. diff. du mvt.
2/ Sachant que $m_1 = m_2 = M/5$ et $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K$; $K_5 = 9K$ et $b = 2a$, determiner les équations horaires du mouvement de la barre ainsi que celui de la masse M.



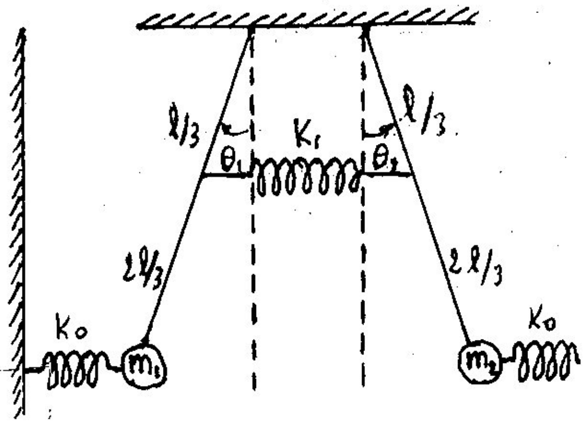
Exercice N°65

Soit le systeme mecanique ci-contre où les 2 tiges sans masse peuvent pivoter dans le plan vertical seulement. A l'équilibre, les 2 tiges étaient verticales. En supposant de faibles mvts, déterminer
1°/ les équations differentielles du mvt.
2°/ les équations des modes sachant que $K_1 = K_2 = K$ et $m_1 = m_2 = m$
Preciser les valeurs des pulsations propres.
Conditions d'oscillations.



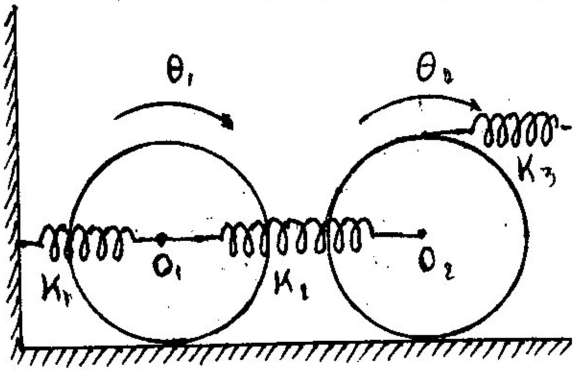
Exercice N°66

Soit le systeme oscillant ci-contre, constitué de 2 tiges sans masse, reliées par 3 ressorts. A l'équilibre les 2 barres étaient verticales.
Sachant que $m_1 = m_2$, déterminer:
1°/ les équations differentielles du mvt.
2°/ les expressions litterales des pulsations propres du systeme.
3°/ Les rapports des amplitudes des 2 mvt.



Exercice N°67

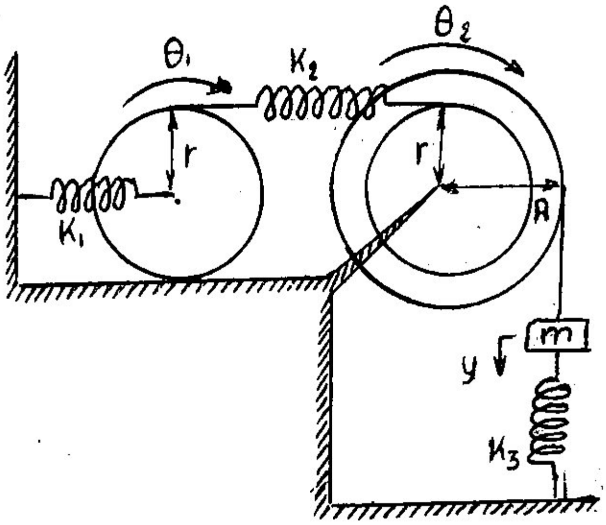
Soient 2 poulies pleines (M_1, R_1) et (M_2, R_2) pouvant rouler sans glisser sur le sol. En supposant de faibles mouvements, déterminer les équations differentielles régissant le mouvement du systeme.
Sachant que $J_1 = J_2 = \frac{MR^2}{2}$; $K_1 = K_2 = K$ et $K_3 = K/4$, déterminer les équations horaires des mouvements des 2 poulies en précisant les frequences propres.



...ercice N° 68

Soient deux poulies vides (M_1, r) et (M_2, R) ... reliées par un ressort K_2, et pouvant rou... sans glisser sur le sol. En supposant de faibles mouvements autour de la position d'équilibre, déterminer:

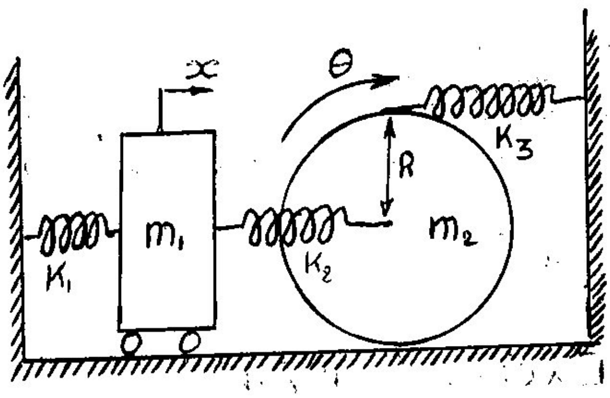
- le lagrangien du système.
- En déduire les expressions litterales des fréquences propres en considerant $J_1 = J_2 = Mr^2$; $M_1 = M_2$; $K_1 = K_2 = K_3 = K$ ... $R = 2r$ et finalement $M = 4m$.



...ercice N° 69

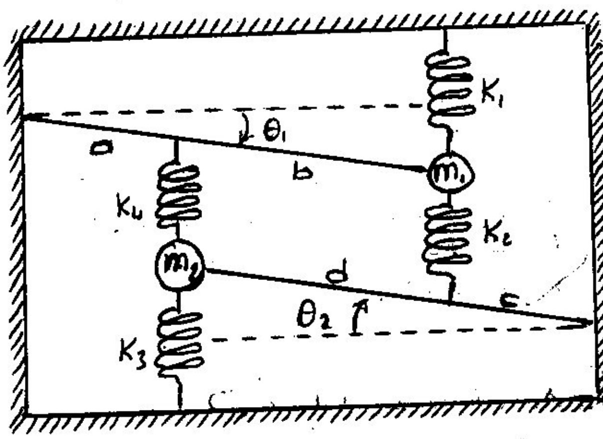
Soit une poulie pleine (M, R) pouvant ...rouler sans glisser sur le sol, reliée à ... à travers le ressort K_2.
En supposant de faibles mouvements autour de la position d'équilibre, on demande

- les équations differentielles du mvt.
- les équations horaires sachant que $m_1 = m$; $m_2 = m/3$; $K_2 = K_3$; $K_1 = 9K$; $J = \frac{MR^2}{2}$



...ercice N° 70

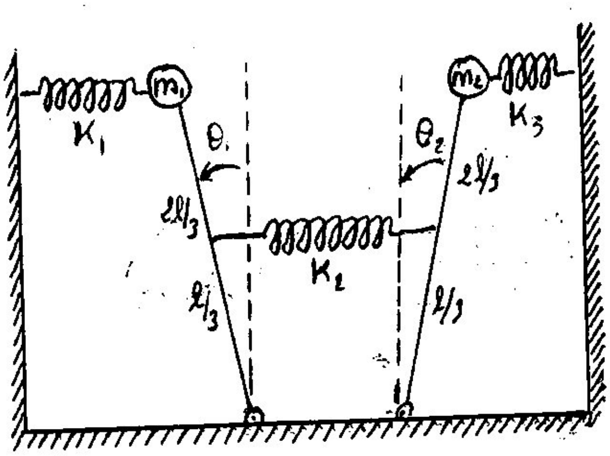
Deux barres sans masses, encastrées en O_1 et O_2 à travers des articulations, et pouvant pivoter librement autour de l'horizontale, sont couplées comme l'indique le schema ci-contre:
Déterminer le lagrangien du systeme puis en déduire les équations differentielles régissant le mouvement des 2 barres (initialement horizontales à l'équilibre).



...ercice N° 71 :

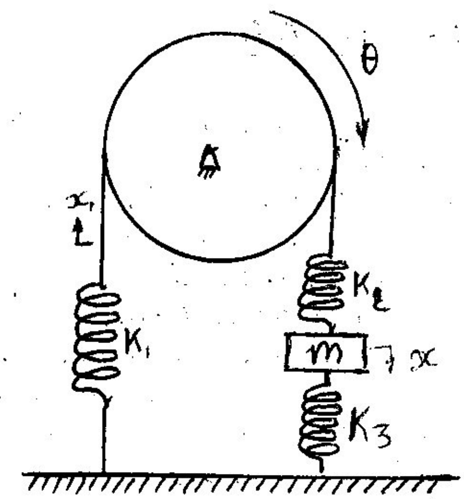
Soit le systeme mecanique ci-contre, ... les 2 tiges sans masse et de longueur ... peuvent se déplacer sur le plan vertical. À l'équilibre, les 2 barres étaient verticales. Déterminer:

- les équations differentielles du mvt.
- la condition d'oscillations
- les équations horaires du mouvement des 2 tiges dans le cas où la condition précédente est réalisée.



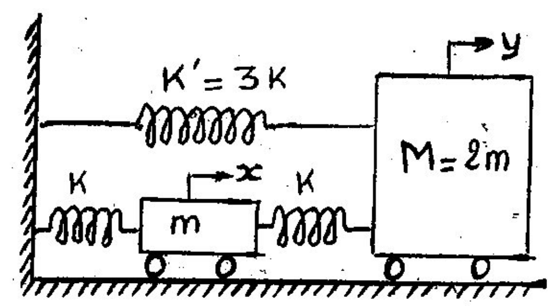
Exercice N°72

Soit une poulie pleine de masse M et de rayon R, fixée en son centre O, et pouvant pivoter librement autour de ce point. On la relie à m comme le montre le schema ci-contre.
1°/ Déterminer le lagrangien du système.
2°/ En deduire les équations différentielles regissant le mouvement de ce système.



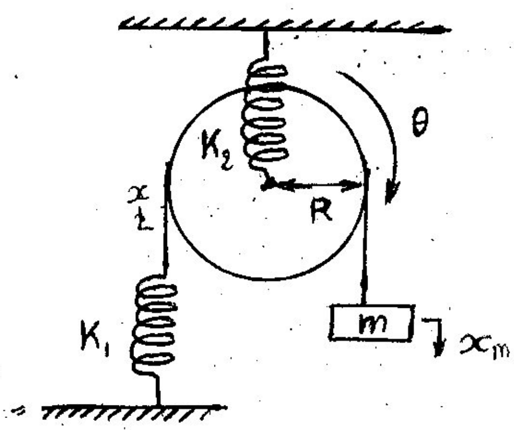
Exercice 73

Soit le systeme mecanique ci-contre
1°/ Determiner les equations differentielles du mouvement des 2 chariots en considérant M, m, K et K'
2°/ En utilisant les données d'équivalence mentionnées sur le schema, determiner les frequences propres du systeme donné i.e pour $K' = 3K$ et $M = 2m$



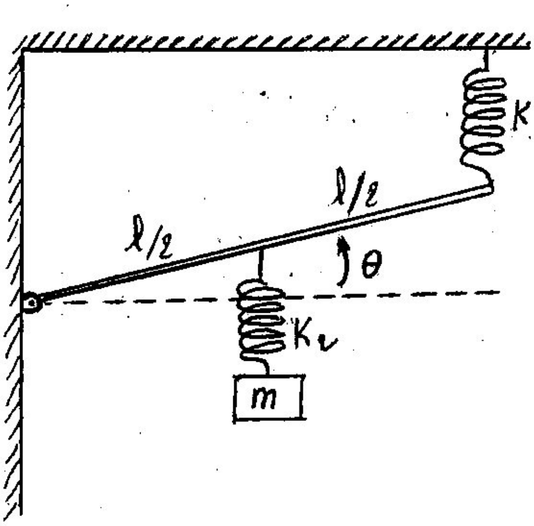
Exercice N°74

On considere une poulie (M, R) pleine accrochée à un support fixe à travers le ressort K_2. Le système ainsi monté provoquera donc à la poulie un mvt de translation et de rotation.
1°/ Déterminer le lagrangien du mvt
2°/ En déduire les équations différentielles régissant le mouvement de ce systeme. Pulsation propre pour $J = mR^2$; $k_1 = k_2$

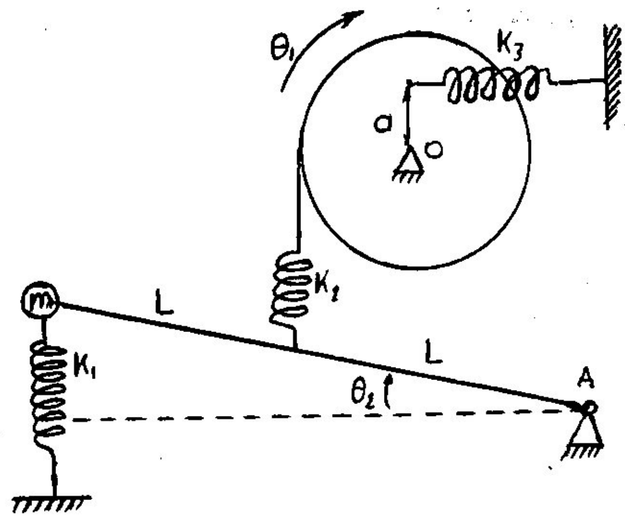


Exercice N°75

Soit une barre de longueur l et de masse M encastrée en O par une articulation et pouvant pivoter autour de l'axe horizontal qui represente la position d'équilibre. ($J = ML^2/3$).
1°/ En posant $y = l\theta$, déterminer les équations differentielles du mouvement.
2°/ Sachant que $K_1 = K$; $K_2 = 4K$; $M = 3m$ determiner les équations horaires
3°/ Préciser les équations des modes composant le mouvement du systeme.



Exercice 76

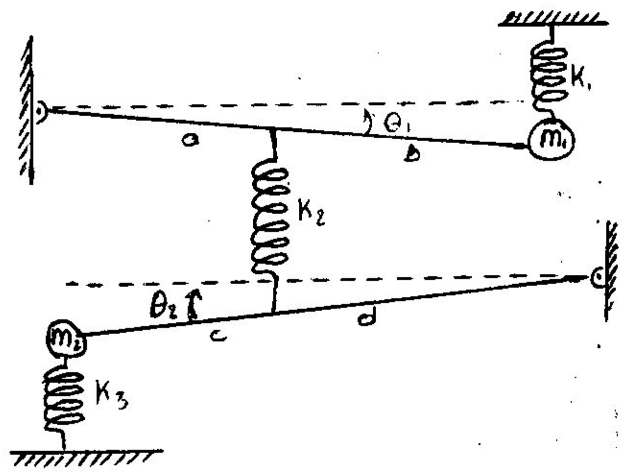


Soit le système oscillant ci-contre où la poulie pleine de rayon R et de masse M peut tourner autour de son centre fixe O. La barre de longueur 2L et sans masse est reliée à une articulation au point A.

1/ Determiner les équations differentielles du mouvement.

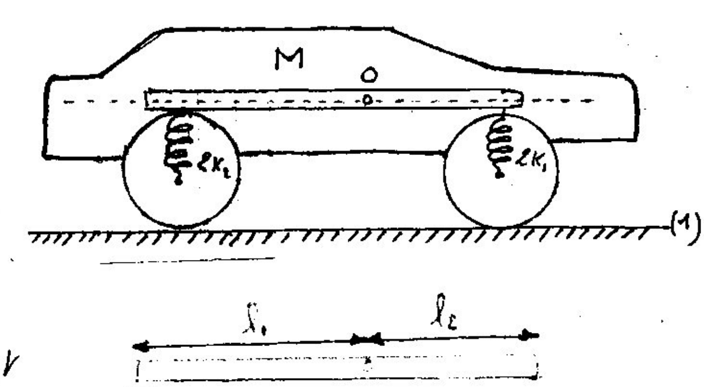
2/ Sachant que $L = R = 2a$; $M_2 = 2m$ $m_1 = m$; $K_1 = K_2 = K$ et $K_3 = 4K$, déterminer les equations horaires.

Exercice 77.



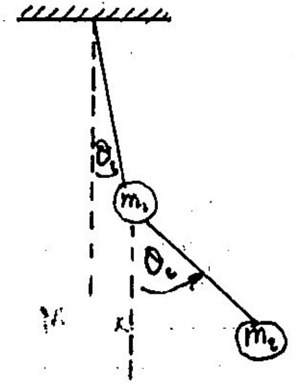
Le montage mécanique ci-contre est formé de 2 barres, sans masse de longueurs $(a+b)$ et $(c+d)$ respectivement. Des articulations à leur extremité leur permettent un mvt de rotation Autour de l'horizontale. A l'équilibre $\theta_1 = \theta_2 = 0$ (statique). Determiner le lagrangien du systeme ainsi formé, puis en déduire les equations differentielles du mouvement.

Exercice 78

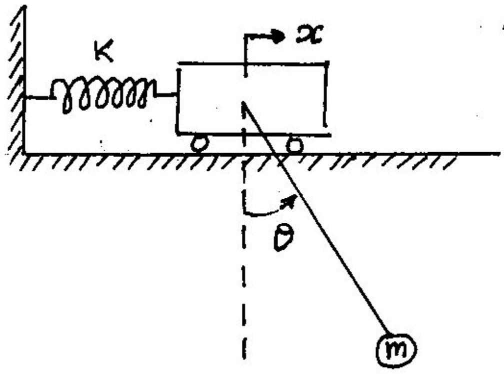


Le schema ci-contre represente une voiture de masse M et de centre de gravité O, assimilée à une barre (schema 2) de même masse.
La voiture repose sur un support fixe à travers les 2 ressorts avants $(2K_1)$ et les 2 ressorts derrieres $(2K_2)$. Elle aura un mouvement de translation verticale (pompage) et un mouvement de rotation autour de O (rangage).
Remarque : Choix des 2 degrés de liberté (x, θ) ou (x_1, x_2)
Quel est le lagrangien du systeme et en deduire les équations differentielles régissant le mouvement de l'ensemble.

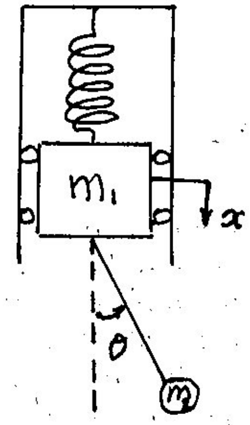
Exercice 79 (mouvements relatifs) ou couplage par inertie



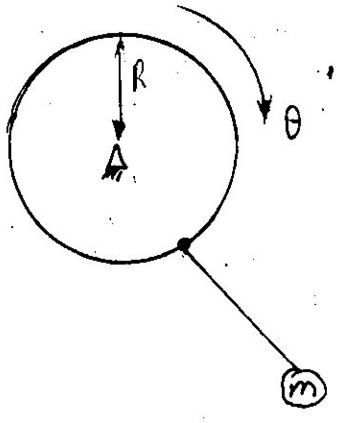
Exercice 80



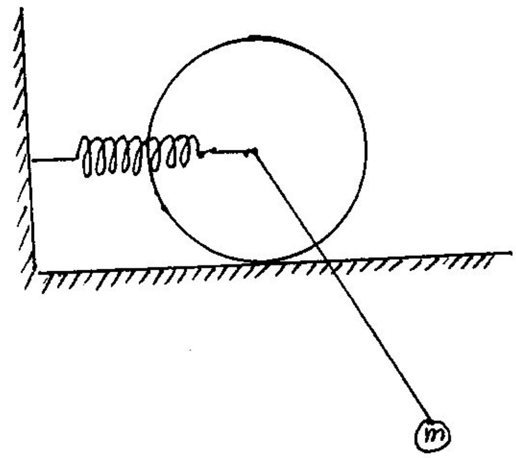
Exercice 81



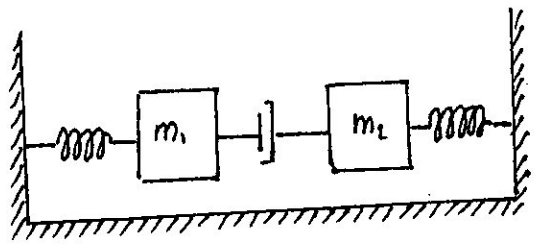
Exercice 82

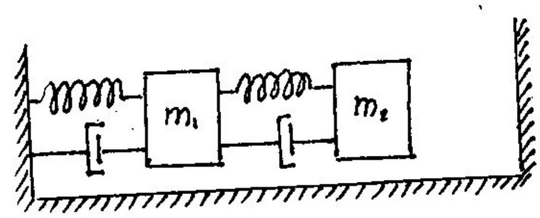


Exercice 83 (couplage par inertie)

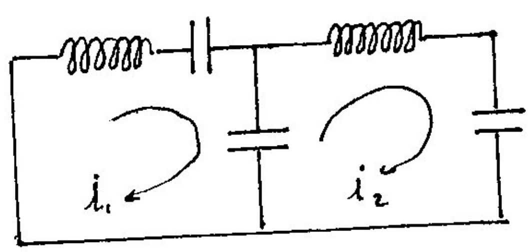


Exercice 84 (couplage par frottement)

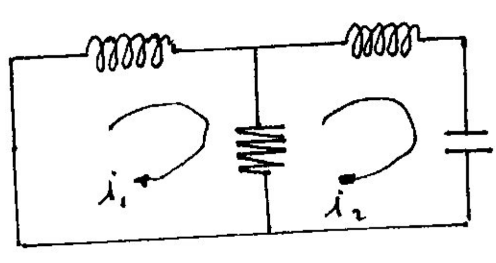




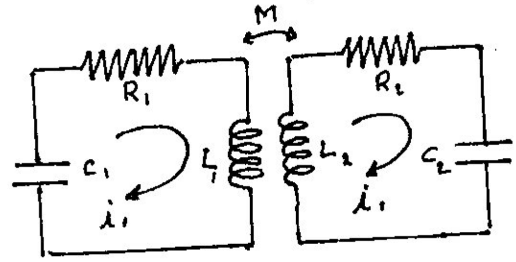
Exercice 85 couplage par capacité C



Exercice 86 couplage par resistance R

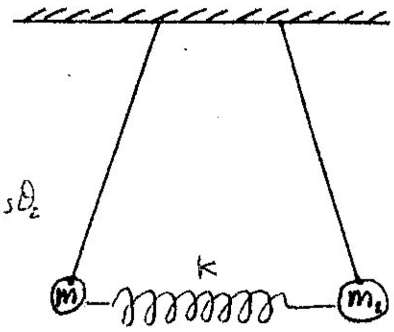


Exercice 87 couplage par inductance L (ou par mutuelle M)



Solutions : Systemes libres à 2 d.d.l

ercice 60



$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$

$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2$

$U = \frac{1}{2} K (l\theta_1 - l\theta_2)^2 - m_1 g l \cos\theta_1 - m_2 g l \cos\theta_2$

$L = T - U$

$L = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} K l^2 (\theta_1 - \theta_2)^2 + m_1 g l \cos\theta_1 + m_2 g l \cos\theta_2$

En considerant θ_1 et θ_2 faibles, les équations differentielles du mouvement sont données par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + (K l^2 + m_1 g l)\theta_1 - K l^2 \theta_2 = 0 \\ &m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + (K l^2 + m_2 g l)\theta_2 - K l^2 \theta_1 = 0 \end{aligned}\right.$$

ou encore
$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{K}{m_1} + \frac{g}{l}\right)\theta_1 - \frac{K}{m_1}\theta_2 = 0 \\ &\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{K}{m_2} + \frac{g}{l}\right)\theta_2 - \frac{K}{m_2}\theta_1 = 0 \end{aligned}\right.$$

En considerant $m_1 = m_2$, pour pouvoir résoudre ce systeme

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0 \\ &\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta_2 - \frac{K}{m}\theta_1 = 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 = -\left(\frac{K}{m} + g/l\right)\theta_1 + \frac{K}{m}\theta_2 \\ &\ddot{\theta}_2 = -\left(\frac{K}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta_2 + \frac{K}{m}\theta_1 \end{aligned}\right.$$

'est un systeme d'équations differentielles du 2^{nd} ordre à deux egrés de liberté. Pour le résoudre, on adoptera la méthode ctrielle (valeurs propres et vecteurs propres) qui a l'avantage d'être acilement programmable. C'est une méthode de 5 étapes.

étape : Détermination de la matrice A :

$$\begin{aligned} &_1 = -\left(\frac{K}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta_1 + \frac{K}{m}\theta_2 \\ &_2 = -\left(\frac{K}{m} + g/l\right)\theta_2 + \frac{K}{m}\theta_1 \end{aligned} \; ; \; \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{K}{m} - \frac{g}{l} & \frac{K}{m} \\ \frac{K}{m} & -\frac{K}{m} - \frac{g}{l} \end{bmatrix}$$

étape : Détermination des valeurs propres λ_1 et λ_2

r trouver les valeurs propres, il suffit de resoudre l'équation

$t(A - \lambda I) = 0$; I étant la matrice unité.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\frac{k}{m}-\frac{g}{\ell}-\lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m}-\frac{g}{\ell}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(-\frac{k}{m}-\frac{g}{\ell}-\lambda\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)^2=0 \Rightarrow \left(-\frac{k}{m}-\frac{g}{\ell}-\lambda+\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{m}-\frac{g}{\ell}-\lambda-\frac{k}{m}\right)=$$

Quand le systeme est symetrique, on doit toujours profiter de $A^2-B^2=(A+B)(A-B)=0$. D'où on obtient

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -g/\ell = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 &= -g/\ell - \frac{2k}{m} = -\omega_2^2 \end{aligned}\right\} \text{ On verifie que } \Sigma\lambda_i = \Sigma a_{ii}$$

<u>3e étape : Recherche des vecteurs propres $\vec{V}_1 \Big|_{\beta_1}^{\alpha_1}$ et $\vec{V}_2 \Big|_{\beta_2}^{\alpha_2}$</u>

$\star$ Resoudre $\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{k}{m}\alpha_1+\frac{k}{m}\beta_1=0 \\ \frac{k}{m}\alpha_1-\frac{k}{m}\beta_1=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 \Big\| \begin{matrix}\alpha_1=1\\ \beta_1=1\end{matrix}$

$\star$ Resoudre $\left[A-\lambda_2 I\right]\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{m}\alpha_2+\frac{k}{m}\beta_2=0 \\ \frac{k}{m}\alpha_2+\frac{k}{m}\beta_2=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_2 \Big| \begin{matrix}\alpha_2=1\\ \beta_2=-1\end{matrix}$

<u>4e étape : Résolution du systeme (Σ) dans la base propre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$</u>

Le même systeme (Σ) s'écrit dans la base propre, comme suit

$$\begin{cases} \ddot{\Psi}_1 = \lambda_1 \Psi_1 \\ \ddot{\Psi}_2 = \lambda_2 \Psi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\Psi}_1 + \frac{g}{\ell}\Psi_1 = 0 \\ \ddot{\Psi}_2 + \left(\frac{g}{\ell}+\frac{2k}{m}\right)\Psi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_1 = A\cos\left(\sqrt{g/\ell}\, t+\varphi_1\right) \\ \Psi_2 = B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}+\frac{2k}{m}}\, t+\varphi_2\right) \end{cases}$$

<u>5e étape : Retour à l'ancienne base (θ_1, θ_2)</u>

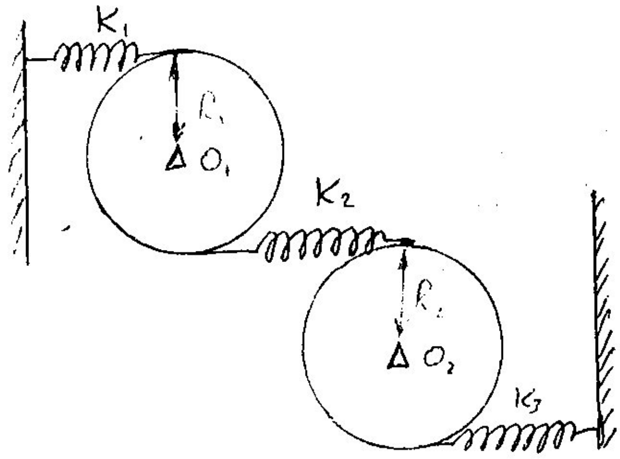
$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 \\ \theta_2 = \beta_1\Psi_1 + \beta_2\Psi_1 \end{cases}$$

dans notre systeme cela donne

$$\begin{cases} \theta_1 = A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ \theta_2 = \beta_1 A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + \beta_2 B\cos(\omega_2 t+\varphi_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = A\cos\left(\sqrt{g/\ell}\, t+\varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}+g/\ell}\, t+\varphi_2\right) \\ \theta_2 = A\cos\left(\sqrt{g/\ell}\, t+\varphi_1\right) - B\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}+g/\ell}\, t+\varphi_2\right) \end{cases}$$

Exercice 61



Les 2 poulies (M_1, R_1) et (M_2, R_2) sont fixées en leurs centres respectivement O_1 et O_2, donc elles n'ont que des rotations.

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1 R_1^2}{2}\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M_2 R_2^2}{2}\right)\dot{\theta}_2^2$$

$$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3}$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 (R_1\theta_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (R_1\theta_1 - R_2\theta_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (R_1\theta_2)^2$$

$$L = T - U$$

Les equations differentielles du mvt sont données par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{M_1 R_1^2}{2}\ddot{\theta}_1 + (K_1 + K_2) R^2\theta_1 - K_2 R_1 R_2 \theta_2 = 0 \\ \frac{M_2 R_2^2}{2}\ddot{\theta}_2 + (K_2 + K_3) R^2\theta_2 - K_2 R_1 R_2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

Sachant que $K_1 = K_2 = K_3 = K$; $R_1 = R_2$; $M_1 = M_2 = 2m$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{2K}{m}\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{2K}{m}\theta_2 - \frac{K}{m}\theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2K}{m} & \frac{K}{m} \\ \frac{K}{m} & -\frac{2K}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{2K}{m} - \lambda\right) - \left(\frac{K}{m}\right)^2 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{3K}{m} = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\frac{K}{m} = -\omega_2^2 \end{cases}$$

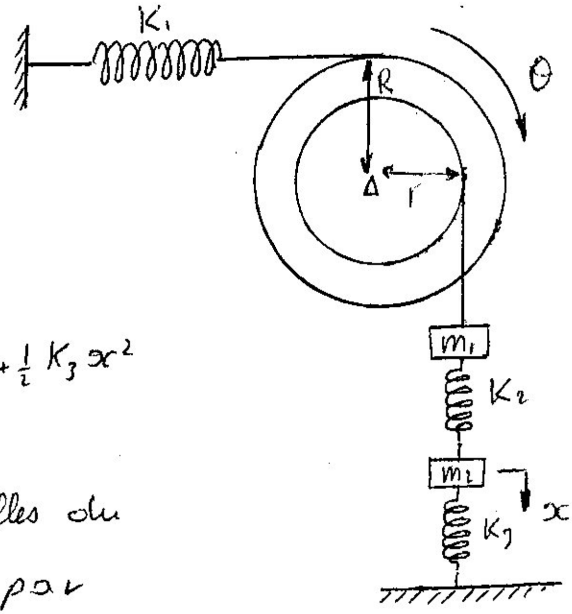
si $\lambda = \lambda_1$; $\left|A - \lambda_1 I\right|\begin{vmatrix}\alpha_1 \\ \beta_1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 \begin{vmatrix}\alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1\end{vmatrix}$

$\lambda = \lambda_2$; $\left|A - \lambda_2 I\right|\begin{vmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{V}_2 \begin{vmatrix}\alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 1\end{vmatrix}$

$$\begin{cases} \theta_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2 = \beta_1 A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta_2 B\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = A\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\, t + \varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\, t + \varphi_2\right) \\ \theta_2 = -A\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\, t + \varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\, t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Exercice 62



$T = T_{poulie} + T_{m_1} + T_{m_2}$

$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 (r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

$T = \frac{1}{2} (J + m r^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3}$

$U = \frac{1}{2} K_1 (R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (r\theta - x)^2 + \frac{1}{2} K_3 x^2$

$L = T - U$

Les équations différentielles du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 & : \text{somme de moments } (ML^2T^{-2}) \quad (\text{moments}) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & : \text{somme de forces } (MLT^{-2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (J + m_1 r^2)\ddot{\theta} + (K_1 R^2 + K_2 r^2)\theta - K_2 r x = 0 \\ m_2 \ddot{x} + (K_2 + K_3) x - K_2 r \theta = 0 \end{cases}$$

Equations horaires du mvt lorsque $J = mr^2$; $m_1 = m$; $m_2 = 2$

$R = r\sqrt{2}$, $K_1 = K_2 = K$ et $K_3 = 2K$

$$\begin{cases} 2mr^2 \ddot{\theta} + 3Kr^2\theta - Krx = 0 \\ 2m \ddot{x} + 3Kx - Kr\theta = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3K}{2m} & +\frac{K}{2r \dots} \\ \frac{Kr}{2} & -\frac{3}{\dots} \end{bmatrix}$$

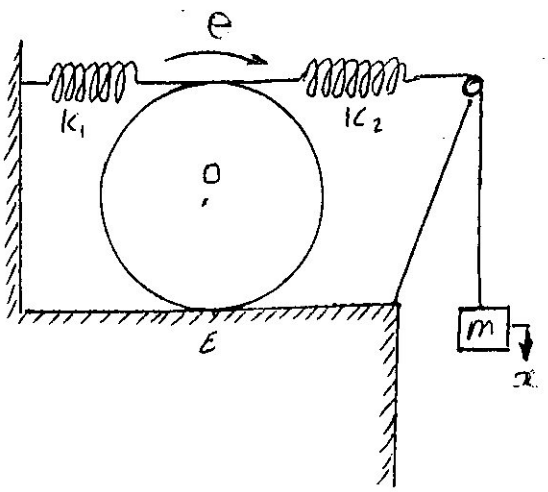
* valeurs propres : $\det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2K}{m} = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\frac{K}{m} = -\omega_2^2 \end{cases}$

* vecteurs propres : $\lambda_1 \longrightarrow V_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -r \end{vmatrix}$; $\lambda_2 \longrightarrow V_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 2r \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} \theta = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x = \beta_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta_2 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

ou
$$\begin{cases} \theta = A \cos\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\, t + \varphi_1\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \varphi_2\right) \\ x = -rA \cos\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\, t + \varphi_1\right) + 2rB \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Exercice 63



La poulie vide (M, R) roule sans glisser sur le sol donc elle aura un mouvement de rotation et de translation ; pour tous les autres points de la poulie tout se passe comme si E était le centre de rotation pour θ faible. $(J = MR^2\dot{\theta}^2)$

$$T = T_{poulie} + T_m \quad ; \quad T_p = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2}M\dot{X}_0^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = MR^2\dot{\theta}^2$$

$$T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}K_1(2R\theta)^2 + \frac{1}{2}K_2(2R\theta - x)^2$$

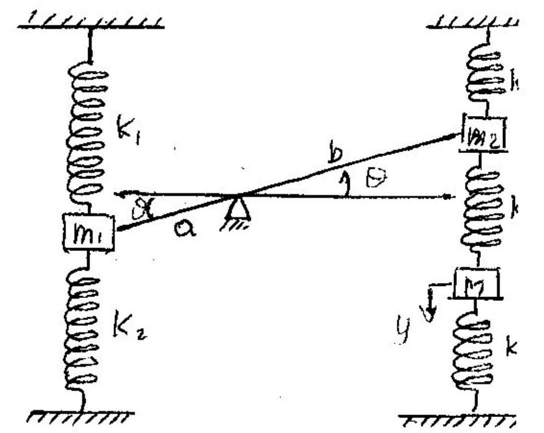
$$L = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K_1(2R\theta)^2 - \frac{1}{2}K_2(2R\theta - x)^2$$

Les équations différentielles du mvt sont données par :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2MR^2\ddot{\theta} + (4K_1 + 4K_2)R^2\theta - 2RK_2x = 0 \\ m\ddot{x} + K_2x - 2K_2R\theta = 0 \end{cases}$$

Exercice 64

A l'équilibre, la barre $(a+b)$ était à la position verticale



$$T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_M$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 a^2 + m_2 b^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

$$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3} + U_{K_4} + U_{K_5}$$

$$U = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_3 (b\theta)^2 + \frac{1}{2} K_4 (b\theta - y)^2 + \frac{1}{2} K_5 y^2$$

$$L = T - U$$

Les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{somme de forces } MLT^{-2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \text{somme de moment } ML^2T^{-2} = 0$$

$$\begin{cases} M\ddot{y} + (K_5 + K_4) y - K_4 b \theta = 0 \\ (m_1 a^2 + m_2 b^2)\ddot{\theta} + \left[(K_1 + K_2) a^2 + (K_3 + K_4) b^2\right]\theta - K_4 b y = 0 \end{cases}$$

② Sachant que $m_1 = m_2 = \frac{M}{5}$; $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K$; $K_5 = 9K$ et $b = 2a$

$$\begin{cases} M\ddot{y} + 10Ky - 2Ka\theta = 0 \\ Ma^2\ddot{\theta} + 10Ka^2\theta - 2Kay = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{10K}{M} & \frac{2Ka}{M} \\ \frac{2K}{Ma} & -\frac{10K}{a} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{8K}{M} = -\omega_1^2 \Rightarrow \vec{V}_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1/a \end{vmatrix} \\ \lambda_2 = -\frac{12K}{M} = -\omega_2^2 \Rightarrow \vec{V}_2 \begin{vmatrix} 1 \\ -1/a \end{vmatrix} \end{cases}$$

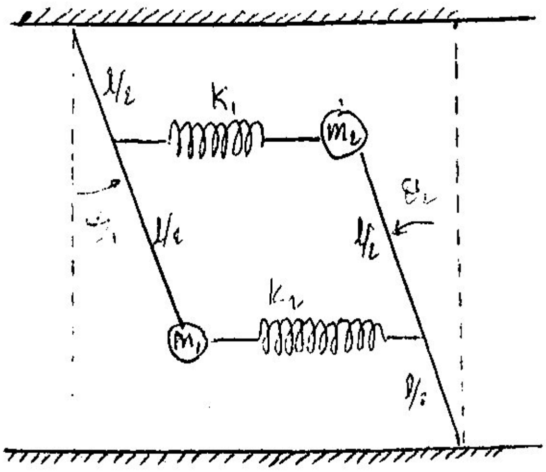
d'où

$$y = A\cos(\omega_{01} t + \varphi_1) + B\cos(\omega_{02} t + \varphi_2)$$

$$\theta = \frac{A}{a}\cos(\omega_{01} t + \varphi_1) + \frac{B}{a}\cos(\omega_{02} t + \varphi_2)$$

Exercice 65

A l'équilibre les 2 barres étaient à la verticale. On remarque que le moment du poids m_2 ne sera pas un moment de rappel. De ce fait ; il n'y aura d'oscillation que si une certaine condition dependant de m, sera réalisée



$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_{m_1} + U_{m_2}$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{l}{2} \theta_1 - l\theta_2 \right)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(l\theta_1 - \frac{l}{2} \theta_2 \right)^2 - m_1 g l \cos\theta_1 + m_2 g l \cos\theta_2$$

$L = T - U$, en remplaçant

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 l^2 \left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_2\right)^2 - \frac{1}{2} K_2 l^2 \left(\theta_1 - \frac{\theta_2}{2}\right)^2 + mgl\cos\theta_1 - m_2 gl\cos\theta_2$$

Les équations différentielles du mouvement sont données par

1)
$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{K_1}{4m_1} + \frac{K_2}{m_2} + \frac{g}{l} \right) \theta_1 - \frac{K_1 + K_2}{2m_1} \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{K_1}{m_2} + \frac{K_2}{4m_2} - \frac{g}{l} \right) \theta_2 - \frac{K_1 + K_2}{2m_2} \theta_1 = 0 \end{cases}$$

2) Si $K_1 = K_2 = K$ et $m_1 = m_2 = m$

$$\ddot{\theta}_1 + \theta_1 \left(\frac{5K}{4m} + \frac{g}{l} \right) - \frac{K}{m} \theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \theta_2 \left(\frac{5K}{4m} - \frac{g}{l} \right) - \frac{K}{m} \theta_1 = 0$$

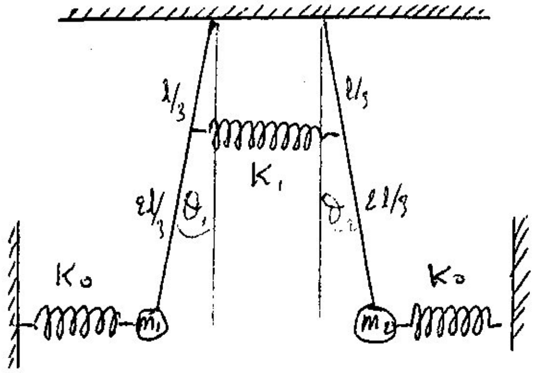
$$\det (A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{5K}{m} + \sqrt{\frac{K^2}{m^2} + \frac{g^2}{l^2}} \\ \lambda_2 = -\frac{5K}{m} - \sqrt{\frac{K^2}{m^2} + g^2/l^2} \end{cases}$$

λ_1 sera assimilé à $-\omega_1^2$ si et seulement $-\frac{5K}{m} + \sqrt{\frac{K^2}{m^2} + \frac{g^2}{l^2}} < 0$

Dans ce cas-là seulement : $\lambda_1 = -\omega_1^2$ et $\lambda_2 = -\omega_2^2$

$$\begin{cases} \theta_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2 = \beta_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta_2 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Exercice 66



$$T = T_{m_1} + T_{m_2}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$U = U_{K_0} + U_{K_1} + U_{K_0} + U_{m_1} + U_{m_2}$$

A l'equilibre, les 2 barres étaient supposés à la position verticale :

$$U = \frac{1}{2} K_0 l^2 \theta_1^2 + \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{l}{3} \theta_1 - \frac{l}{3} \theta_2 \right)^2 + \frac{1}{2} K_0 l^2 \theta_2^2 + m_1 g l \cos\theta_1 + m_2 g l \cos\theta_2$$

$$L = T - U$$

Les equations differentielles du mouvement sont données par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow \text{somme de moments } ML^2T^{-2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \text{somme de moments } ML^2T^{-2}$$

$$\begin{cases} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + \left(K_0 l^2 + \frac{K_1}{9} l^2 + mgl\right)\theta_1 - K_1 \frac{l^2}{9} \theta_2 = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + \left(K_0 l^2 + \frac{K_1}{9} l^2 + mgl\right)\theta_2 - \frac{K_1}{9} l^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{K_0}{m} + \frac{K_1}{9m} + g/l\right) & +\frac{K_1}{9m} \\ \frac{K_1}{9m} & -\left(\frac{K_0}{m} + \frac{K_1}{9m} + \frac{g}{l}\right) \end{bmatrix}$$

<u>Valeurs propres λ_1 et λ_2</u>

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{K_0}{m} - \frac{2K}{m} - g/l = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\frac{K_0}{m} - g/l = -\omega_2^2 \end{cases}$$

<u>Vecteurs propres $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$</u> $\quad \vec{V_1} \begin{vmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \end{vmatrix}$ et $\vec{V_2} \begin{vmatrix} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = -1 \end{vmatrix}$

Les equations horaires sont donc

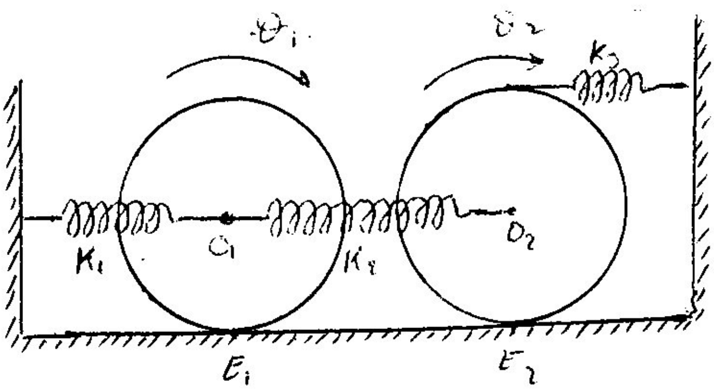
$$\theta_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta_2 = \beta_1 A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta_2 B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Exercice 67

les 2 poulies pleines roulent sans glisser sur le sol.

Donc rotation + translation. Pour les ressorts, tout se passe comme si le centre de rotation était le point de contact de la poulie avec le sol. (E_1 et E_2)



$$T = T_{rot1} + T_{trans1} + T_{rot2} + T_{trans2}$$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_{01}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_{02}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (J_1 + MR^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (J_2 + MR^2)\dot{\theta}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 (R\theta_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta_1 - R\theta_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (2R)^2 \theta_2$$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} M_1 R^2\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} M_2 R^2\right)\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 R^2 \theta^2 - \frac{1}{2} K_2 R(\theta_1 - \theta_2)^2 + 2K_3 R^2 \theta_2^2$$

les equations differentielles sont données par.

$$\begin{matrix} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} M_1 R^2 \ddot{\theta}_1 + (K_1 + K_2) R^2 \theta_1 - K_2 R^2 \theta_2 = 0 \\ \frac{3}{2} M_2 R^2 \ddot{\theta}_2 + (K_2 + 4K_3) R^2 \theta_2 - K_1 R^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

Sachant que $M_1 = M_2$; $K_1 = K_2 = K$ et $K_3 = K/4$, ce qui se simplifie à :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{4K}{3m}\theta_1 - \frac{2K}{3m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{4K}{3m}\theta_1 - \frac{2K}{m}\theta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta_1 = -\frac{4}{3}\frac{K}{m}\theta_1 + \frac{2K}{3m}\theta_2 \\ \theta_2 = +\frac{2K}{m}\theta_2 - \frac{4K}{3m}\theta_1 \end{cases}$$

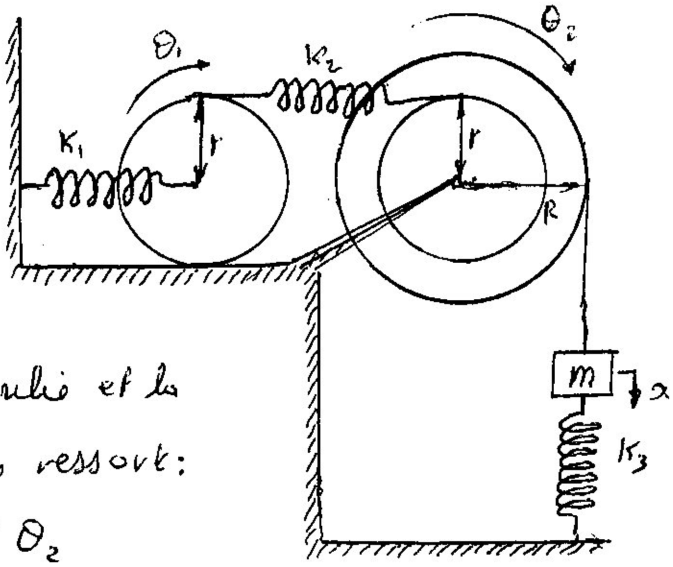
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}\frac{K}{3m} & \frac{2K}{3m} \\ \frac{2K}{m} & -\frac{4}{3}\frac{K}{m} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2K}{m} \Longrightarrow \vec{V}_1 \left| \begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1 \end{matrix} \right. \\ \lambda_2 = -\frac{2K}{3m} \Longrightarrow \vec{V}_2 \left| \begin{matrix} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = +1 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

d'où finalement, les équations horaires du mouvement

$$\theta_1 = A\cos\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\,t + \varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{2K}{3m}}\,t + \varphi_2\right)$$

$$\theta_2 = -A\cos\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\,t + \varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{2K}{3m}}\,t + \varphi_2\right)$$

Exercice 68.



Entre la premiere poulie et la seconde, est fixé le ressort K_2 : donc θ_1 et θ_2 representent 2 d.d.l.
Par contre entre la 2^e poulie et la masse m ; il n'existe aucun ressort : même d.d.l $\Rightarrow x = R\,\theta_2$

$$T = T_{p_1} + T_{p_2} + T_m$$

$$T = \frac{1}{2}\left(J_1 + m_1 r_1^2\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 (r_1 \theta_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(2 r \theta_1 - r \theta_2\right)^2 + \frac{1}{2} K_3 (R\theta_2)^2$$

$$L = T - U$$

Les equations differentielles du mouvement sont données par
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\left(J_1 + m_1 r_1^2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(K_1 r^2 + 4 K_2 r^2\right)\theta_1 - 2 r^2 \theta_2 = 0$$

$$\left(J_2 + m R^2\right)\ddot{\theta}_2 + \left(K_2 r^2 + K_3 R^2\right)\theta_2 - 2 r^2 \theta_1 = 0$$

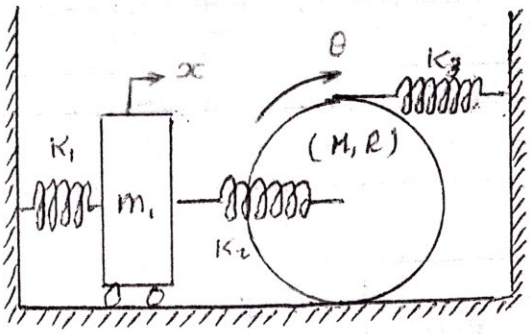
2/ Sachant que $J_1 = m_1 r^2$; $J_2 = M R^2$, $K_1 = K_2 = K_3 = K$, $R = 2r$; $M =$

Le systeme se reduit à

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \dfrac{5}{2}\dfrac{K}{m}\theta_1 - \dfrac{K}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \dfrac{5}{2}\dfrac{K}{m}\theta_2 - \dfrac{K}{m}\theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{K}{M} = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\dfrac{7}{2}\dfrac{K}{M} = -\omega_2^2 \end{cases}$$

xercice 69

La poulie est supposée pleine pour la 2ᵉ question seulement.



Elle roule sur le sol sans glisser donc $T_p = T_{trans} + T_{rot}$.

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \\ U = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2} K_2 (x - R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_3 (2R)^2 \theta^2 \end{cases}$$

Les equations differentielles du mvt sont données par.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (J + MR^2)\ddot{\theta} + (K_2 R^2 + 4K_3 R^2)\theta - K_2 R x = 0 \\ m_1 \ddot{x} + (K_1 + K_2) x - K_2 R \theta = 0 \end{cases}$$

Sachant que $m_1 = m$; $M_2 = \frac{m}{3}$; $K_2 = K_3 = K$; $K_1 = 9K$; $J = \frac{MR^2}{2}$

les equations deviennent

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} + 5KR^2 - KRx = 0 \\ m \ddot{x} + 10Kx - KR\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{10K}{m}\theta - \frac{K}{mR} x = 0 \\ \ddot{x} + \frac{10K}{m} x - \frac{KR}{m} \theta = 0 \end{cases}$$

En annulant det $(A - \lambda I)$; on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{k}{m}(10 + \sqrt{2}) = -\omega_1^2 \Longrightarrow \vec{V_1} \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{R} \quad -R\sqrt{2} \end{vmatrix} \\ \lambda_2 = -\frac{k}{m}(10 - \sqrt{2}) = -\omega_2^2 \Longrightarrow \vec{V_2} \begin{vmatrix} 1 \\ +\frac{\sqrt{2}}{R} \quad R\sqrt{2} \end{vmatrix} \end{cases}$$

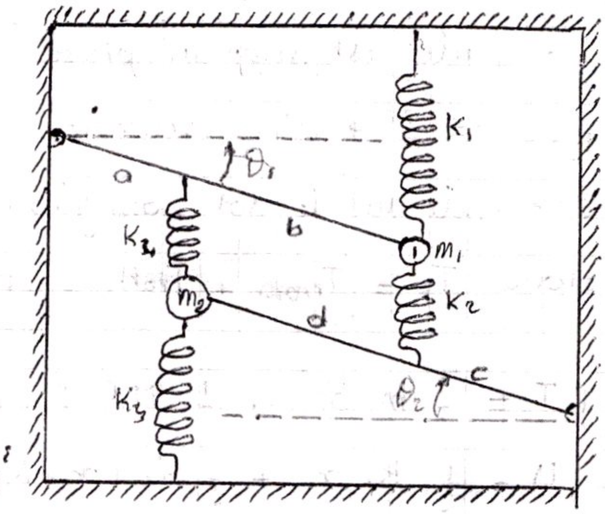
Dans la base propre

$$\begin{cases} \ddot{\Psi} = \lambda_1 \Psi \\ \ddot{X} = \lambda_2 X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}(10 + \sqrt{2})}\, t + \varphi_1\right) \\ X = B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}(10 - \sqrt{2})}\, t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Retour à l'ancienne base

$$\begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ X \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \alpha_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{R} A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{R} B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Exercice 70



Les 2 tiges de longueur respectivement $a+b$ et $c+d$ sont de masses negligeables, donc les moments d'inertie seront respectivement :

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 (a+b)^2 \text{ et } J_2 = \frac{1}{2} m_2 (c+d)^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (a+b)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (c+d)^2 \theta_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (a+b)^2 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \left[(a+b)\theta_1 - c\theta_2\right]^2 + \frac{1}{2} k_3 (c+d)^2 \theta_2^2 + \frac{1}{2} k_4 \left[(c+d)\theta_2 - a\theta_1\right]^2$$

$$L = T - U$$

Les equations differentielles du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

En derivant L, on obtient

$$\begin{cases} m_1 (a+b)^2 \ddot{\theta}_1 + \left[(K_1 + K_2)(a+b)^2 + K_4 a^2\right]\theta_1 - \left[K_4 a (c+d) + K_2 c (a+b)\right]\theta_2 = 0 \\ m_2 (c+d)^2 \ddot{\theta}_2 + \left[(K_3 + K_4)(c+d)^2 + K_2 c^2\right]\theta_2 - \left[K_4 a (c+d) + K_2 c (a+b)\right]\theta_1 = 0 \end{cases}$$

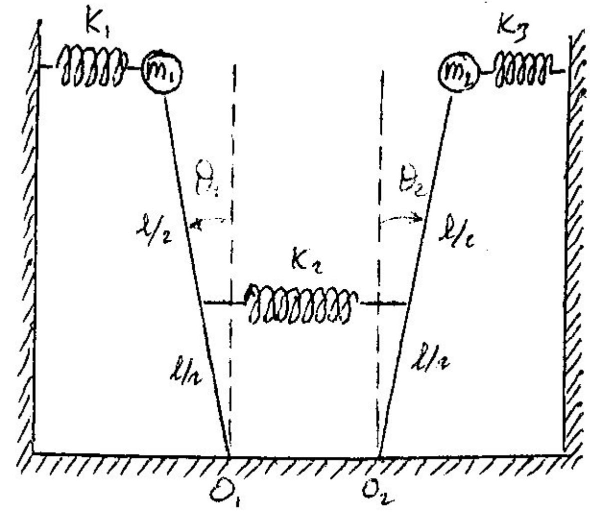
Texte : $a = b = c = d = \frac{l}{2}$; $K_i = K$, les equations deviennent $(m_1 = m_2$

$$\begin{cases} m l^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{9}{4} K l^2 \theta_1 - K l^2 \theta_2 = 0 \\ m l^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{9}{4} K l^2 \theta_2 - K l^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{9}{4} \frac{K}{m} \theta_1 - \frac{K}{m} \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{9}{4} \frac{K}{m} \theta_2 - \frac{K}{m} \theta_1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 71



$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (l\theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (l\theta_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l}{2}\theta_1 - \frac{l}{2}\theta_2\right)^2 + U_{m_1} + U_{m_2}$$

Les barres étaient supposées verticales à l'equilibre statique.

la condition d'equilibre donne donc

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ U = \frac{1}{2} k_1 (l\theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l}{2}\theta_1 - \frac{l}{2}\theta_2\right)^2 + \frac{1}{2} k_3 (l\theta_2)^2 + m_1 g l \cos\theta_1 + m_2 g l \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + \left(k_1 l^2 + k_2 \frac{l^2}{4} - m_1 g l\right)\theta_1 - k_2 \frac{l^2}{4} = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + \left(k_3 l^2 + k_2 \frac{l^2}{4} - m_2 g l\right)\theta_2 - k_2 \frac{l^2}{4} = 0 \end{cases}$$

2°/ Sachant que $m_1 = m_2 = m$; $k_1 = k_3 = k$; $k_2 = 4k$, on obtient

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{l}\right)\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{l}\right)\theta_2 - \frac{k}{m}\theta_1 = 0 \end{cases} , \quad \begin{vmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{2k}{m} + g/l & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} + \frac{g}{l} \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{3k}{m} + g/l \\ \lambda_2 = -\frac{k}{m} + g/l \end{cases}$$

On ne pourra avoir des pulsations propres ω_1 et ω_2

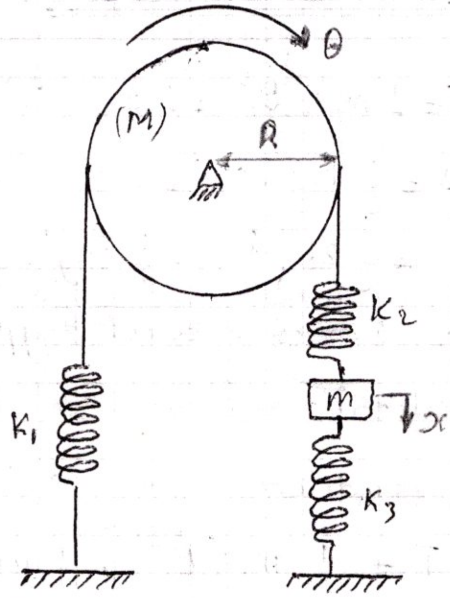
que si $\lambda_1 = -\frac{3k}{m} + \frac{g}{l} = -\omega_1^2$

$\lambda_2 = -\frac{k}{m} + g/l = -\omega_2^2$

Ce qui revient à $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ donc $\frac{k}{m} > g/l$

Condition d'oscillations $\frac{k}{m} > g/l$

Exercice 72



La poulie pleine de masse M et de rayon R est fixée en son centre O.

Donc le moment d'inertie sera

$$J_p = \frac{MR^2}{2}$$

$$T = T_p + T_m$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 (R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta - x)^2 + \frac{1}{2} K_3 x^2$$

$$L = T - U.$$

Les equations differentielles du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + (K_1R^2 + K_2R^2)\theta - K_2 R x = 0 \\ m\ddot{x} + (K_2 + K_3)x - K_2 R\theta = 0 \end{cases}$$

Données du texte: $\frac{M}{2} = m$; $K_1 = K_2 = K_3$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{2K}{m}\theta - \frac{K}{mR} x = 0 \\ \ddot{x} + 2\frac{K}{m} x - \frac{K}{m} R\theta = 0 \end{cases} ; \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2K}{m} & +\frac{K}{mR} \\ \frac{KR}{m} & -2\frac{K}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

<u>Valeurs propres λ_1 et λ_2</u>

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -\frac{2K}{m} - \lambda & \frac{K}{mR} \\ \frac{KR}{m} & -\lambda - \frac{2K}{m} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{k}{m} = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\frac{3k}{m} = -\omega_2^2 \end{cases}$$

Vecteurs propres: $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow \vec{V_1} \begin{vmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = R \end{vmatrix}$, $\lambda = \lambda_2 \Rightarrow \vec{V_2} \begin{vmatrix} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = -R \end{vmatrix}$

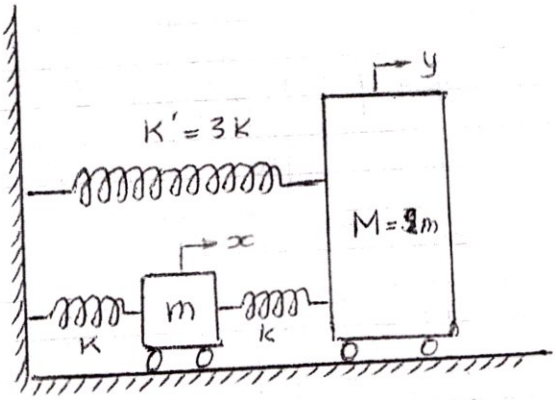
Finalement

$$\begin{cases} \theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \\ x = RA\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) - RB\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Exercice 73

1°/ Equations differentielles

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2Kx - Ky = 0 \\ M\ddot{y} + (K+K')y - Kx = 0 \end{cases}$$



2°/ $\begin{cases} m\ddot{x} + 2Kx - Ky = 0 \\ 2m\ddot{y} + 4Ky - Kx = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2Kx - Ky = 0 \\ 2m\ddot{y} + 4Ky - Kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2K}{m} & +\frac{K}{m} \\ +\frac{2K}{4m} & -\frac{2K}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Valeurs propres λ_1 et λ_2

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -\frac{2K}{m} - \lambda & \frac{K}{m} \\ \frac{K}{2m} & -\frac{2K}{m} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(-\frac{2K}{m} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{K}{m\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{K}{m}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\frac{K}{m}\left(2 - \sqrt{2}\right) = -\omega_2^2 \end{cases}$$

Ces valeurs propres representent l'opposé des carrés des pulsations propres

Vecteurs propres $\vec{V_1}\Big|\begin{smallmatrix}\alpha_1 \\ \beta_1\end{smallmatrix}$ et $\vec{V_2}\Big|\begin{smallmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{smallmatrix}$:

* si $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow \left[A - \lambda_1 I\right] \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 + \frac{\beta_1}{1} = 0 \\ \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_1} \begin{vmatrix} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$

* si $\lambda = \lambda_2 \Rightarrow \left|A - \lambda_2 I\right| \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 + \frac{\beta_2}{1} = 0 \\ \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_2} \begin{vmatrix} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$

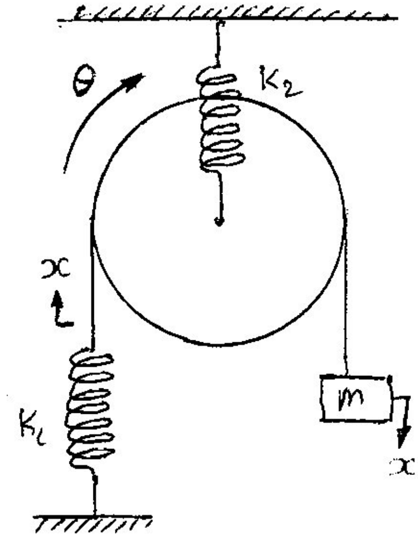
d'où les équations horaires finales

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y = \beta_1 A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta_2 B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\, t + \varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}\left(2 - \sqrt{2}\right)}\, t + \varphi_2\right) \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\, t + \varphi_1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} B\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}\left(2 - \sqrt{2}\right)}\, t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Exercice 74



$$T = T_P + T_m$$

$$T_P = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 = m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} m \dot{x}_m^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x} + 2R\dot{\theta}\right)^2$$

d'où $T = mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + 2R\dot{\theta})^2$

$$U = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta)^2$$

$$L = T - U$$

Les equations diff. du mvt sont données par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2mR^2\ddot{\theta} + 2mR\ddot{x} + 4mR^2\ddot{\theta} + k_2 R^2\theta = 0 \\ m\ddot{x} + 2mR\ddot{\theta} + k_1 x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6mR\ddot{\theta} + 2m\ddot{x} + k_2 R\theta = 0 \\ m\ddot{x} + 2mR\ddot{\theta} + kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6m}{k} & -\frac{2m}{kR} \\ -\frac{2mR}{k} & -\frac{m}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

ou encore $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \left(\frac{2m^2}{k^2}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{m}{k} & \frac{2m}{kR} \\ \frac{2mR}{k} & -\frac{6m}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$

finalement $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{2m} & \frac{k}{mR} \\ \frac{kR}{m} & -\frac{3k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{k}{2m} & \frac{k}{mR} \\ \frac{kR}{m} & -\frac{3k}{m} \end{bmatrix}.$

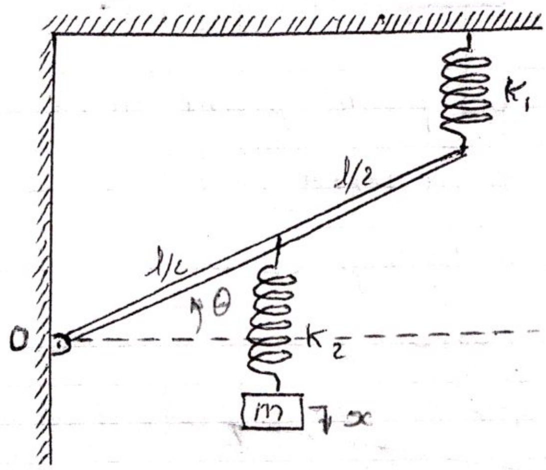
Valeurs propres λ_i telles que $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\left(-\frac{k}{2m} - \lambda\right)\left(-\frac{3k}{m} - \lambda\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{7k}{2m}\lambda + \frac{k^2}{2m^2} = 0$$

d'où $\begin{cases} \lambda_1 = -\left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}\right)\frac{k}{m} = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\left(\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}\right)\frac{k}{m} = -\omega_2^2 \end{cases}$

Exercice 75



Dans ce montage, nous n'avons pas de masse ponctuelle fixée à l'extremité de la barre, par contre cette dernière à une masse M repartie de manière homogène sur sa longueur. Elle est encastrée en O donc $J = \frac{M l^2}{3}$

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = U_{K_1} + U_{K_2} = \frac{1}{2} K_1 (l\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{l}{2}\theta - x\right)^2$$

Les equations differentielles du mouvement sont données par:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{M l^2}{3}\ddot{\theta} + \left(K_1 l^2 + K_2 \frac{l^2}{4}\right)\theta - K_2 \frac{l}{2} x = 0 \\ m\ddot{x} + K_2 x - K_2 \frac{l}{2}\theta = 0 \end{cases}$$

2) Sachant que $K_2 = 4K$, $K_1 = K$ et $M = 3m$, on aboutit à

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2\frac{K}{m}\theta - 2\frac{K}{ml}x = 0 \\ \ddot{x} + 4\frac{K}{m}x - 2\frac{K}{m}l\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2K}{m} & +\frac{2K}{ml} \\ +\frac{2Kl}{m} & -\frac{4K}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$; en developpant
$$\lambda_1 = -(3+\sqrt{5})\frac{k}{m} = -\omega_1^2$$
$$\lambda_2 = -(3-\sqrt{5})\frac{k}{m} = -\omega_2^2$$

Vecteurs propres $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

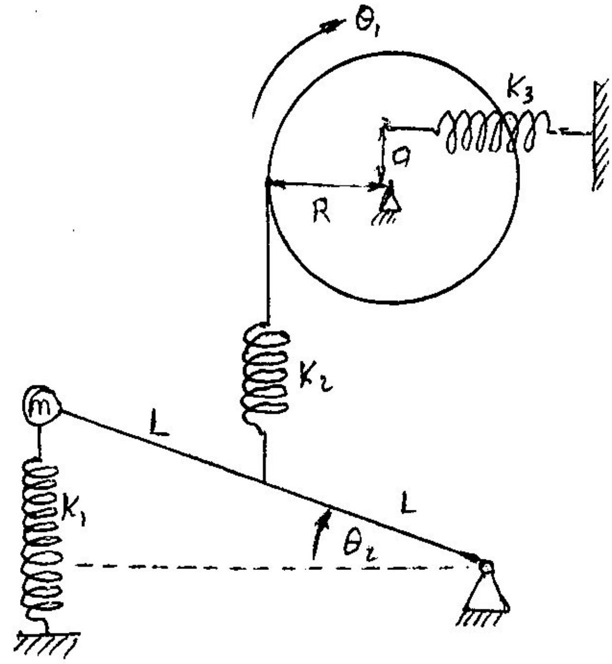
- $\lambda = \lambda_1 = -(3+\sqrt{5})\frac{k}{m}$; $[A - \lambda_1 I]\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V_1} \left| \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} l \end{array} \right.$

- $\lambda = \lambda_2 = -(3-\sqrt{5})\frac{k}{m}$; $[A - \lambda_2 I]\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V_2} \left| \begin{array}{l} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} l \end{array} \right.$

d'où

$$\begin{cases} \theta = A\cos\left(\sqrt{(3+\sqrt{5})\cdot\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) + B\cos\left(\sqrt{(3-\sqrt{5})\frac{k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \\ x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} l A \cos\left(\sqrt{(3+\sqrt{5})\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) - \frac{1-\sqrt{5}}{2} l B \cos\left(\sqrt{(3-\sqrt{5})\frac{k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Exercice 76*



La poulie pleine de rayon R et de centre fixe O est couplé à la tige 2L au moyen d'un ressort ; donc les 2 mouvements (de la poulie et de la tige) seront représentés par 2 degrés de libertés θ_1 et θ_2.

poulie pleine : $J = \frac{MR^2}{2}$

d'où

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m (2L) \dot{\theta}_2^2 \\ U = \frac{1}{2} K_1 (2L)^2 \theta_2^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta_1 - L\theta_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (a\theta_1)^2 \end{cases}$$

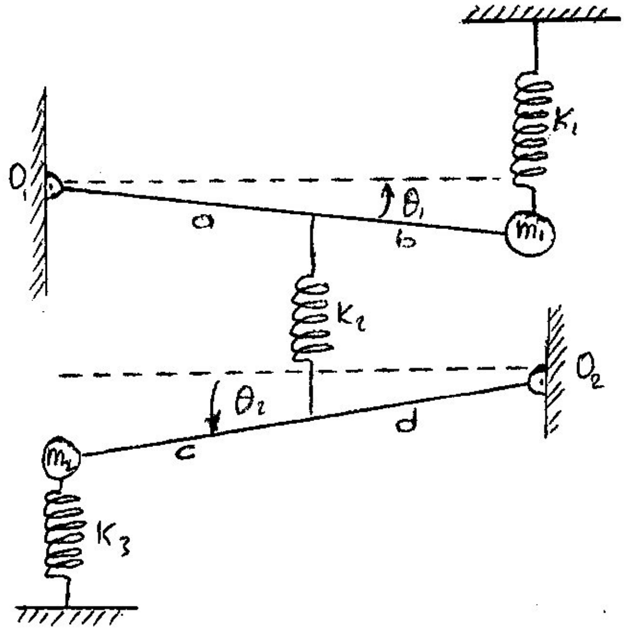
$$L = T - U$$

Les équations différentielles du mouvement sont données par

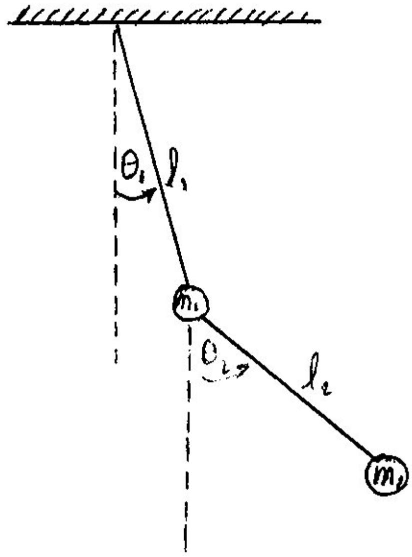
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta}_1 + (K_2 R^2 + K_3 a^2)\theta_1 - K_2 RL \\ 4mL^2 \ddot{\theta}_2 + (4K_1 L^2 + K_2 L^2)\theta_2 - K_2 RL\theta \end{cases}$$

2°/ Sachant que : $M = 2m$; $R = L = 2a$; $K_1 = K_2 = K$; $K_3 = 4K$

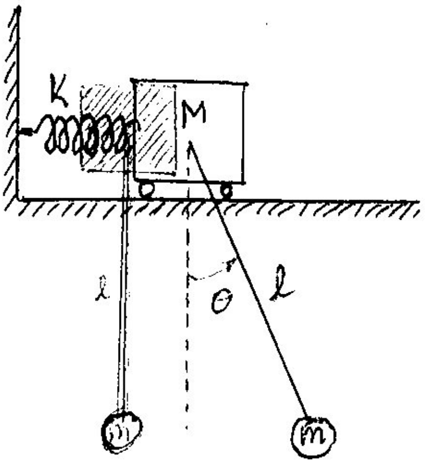
Exercice 77



:xercice 79



Exercice 80

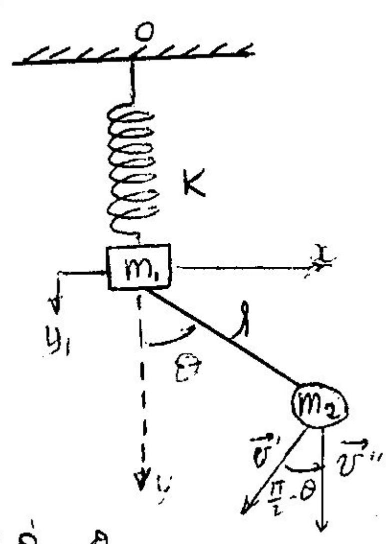


Exercice 81 (*)

$T = T_{m_1} + T_{m_2}$

$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2$ (translation seulement)

$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ (mouvement quelconque)



1ère méthode pour le calcul de v_2

Coordonnées cartésiennes

$m_1 \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ y_1 = y_1 \end{pmatrix}$ d'où $v_1 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix}$

$m_2 \begin{pmatrix} x_2 = l \sin\theta \\ y_2 = y_1 - l\cos\theta \end{pmatrix}$ d'où $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} \dot{x}_2 = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$

En remplaçant $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$

$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + \dot{y}_1^2 + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta - 2\dot{y}_1 l \dot{\theta}\sin\theta \right)$

$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 - m_2 \dot{y}_1 l \dot{\theta} \sin\theta$

2e méthode pour le calcul de v_2

$\vec{v}_{m_2/0} = \vec{v}_{m_2/m_1} + \vec{v}_{m_1/0}$

$\vec{v}_2 = l\vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{y}}_1$ (l'angle que forment $l\vec{\dot{\theta}}$ et $\vec{\dot{y}}_1$ est $\frac{\pi}{2} - \theta$)

donc $v_2^2 = l^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}_1^2 + 2 l \dot{y}_1 \dot{\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

On retrouve bien le même resultat que precedemment

$U = \frac{1}{2} K y^2 - m_2 g l \cos\theta$

d'où $L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 - m_2 \dot{y}_1 l \dot{\theta}\sin\theta - \frac{1}{2} K y^2 + m_2 g l \cos\theta$

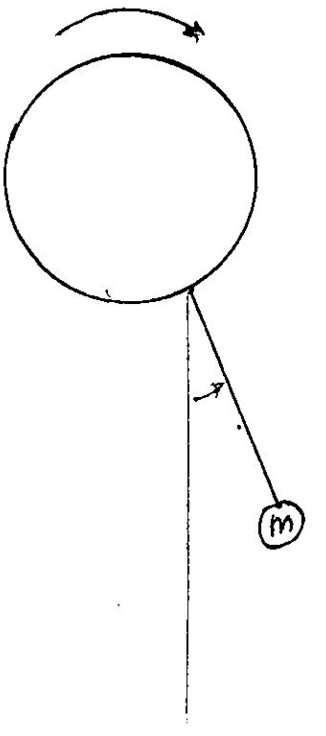
Les équations différentielles du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 - m_2 l \ddot{\theta}\sin\theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \cos\theta + Ky = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta} - 2m_2 l \ddot{y} \sin\theta - m_2 2 l \dot{y}_1 \dot{\theta}\cos\theta + m_2 g l \sin\theta = 0 \end{cases}$$

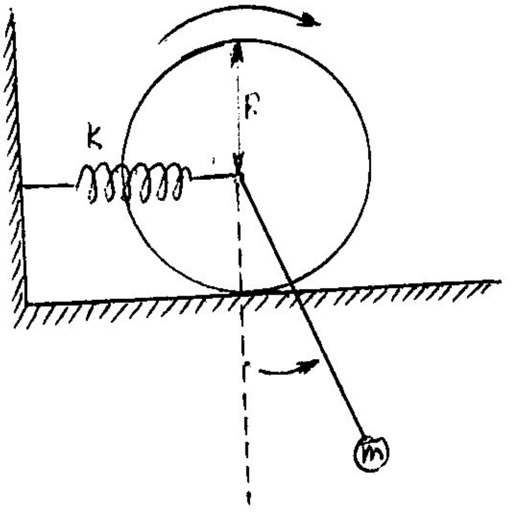
c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 - m_2 l \ddot{\theta}\sin\theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \cos\theta + Ky = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta} - 2m_2 l \ddot{y}\sin\theta - 2m_2 l \dot{y}_1 \dot{\theta}\cos\theta + m_2 g l \sin\theta = 0 \end{cases}$$

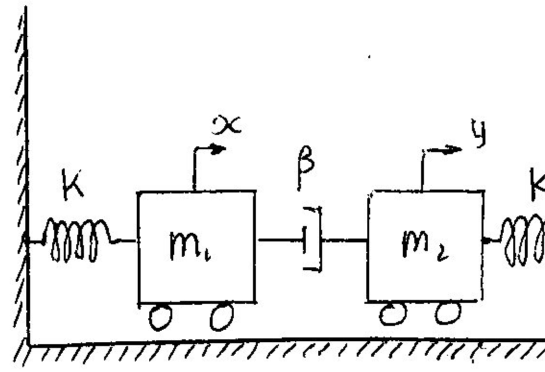
Exercice 82



ercice 83

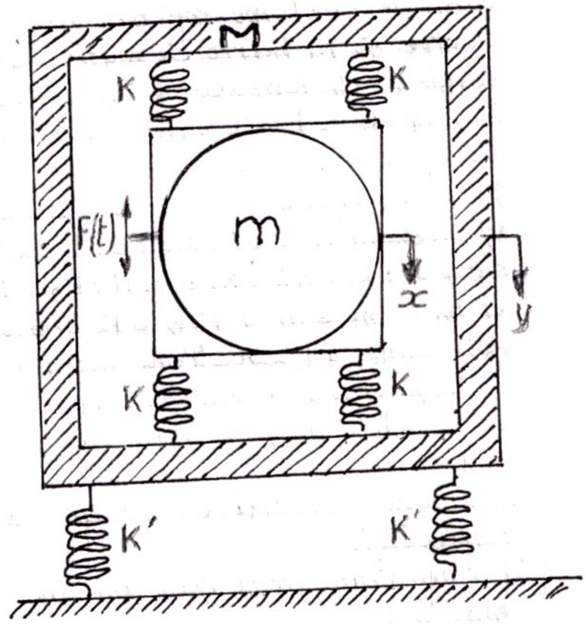


Exercice 84



OSCILLATIONS FORCEES A 2 d.d.l

Exercice 90



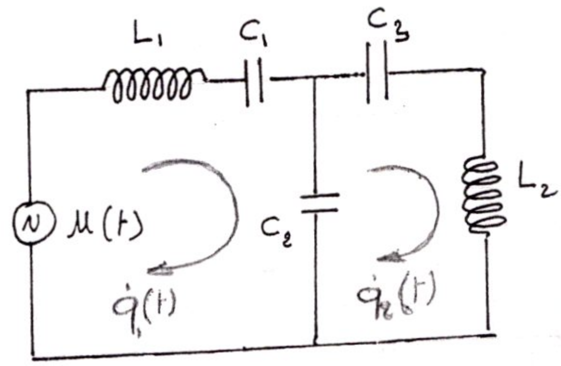
Le système mécanique ci-contre représente une machine à laver constituée d'un tambour m et d'un chassis M. Le moteur, en tournant à une vitesse angulaire ω provoque sur le tambour une force verticale $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

1°/ Etablir les équations differentielles du mouvement du système.

2°/ En déduire les equations horaires $x(t)$ et $y(t)$: pour simplifier les calculs, on prendra $2K = K'$ et $M = 2m$.

3°/ On voudrait maintenir m fixe (donc $x(t) = 0$) et un mouvement y minimum (celui du chassis). Quelle pulsation du moteur ω doit-on choisir ? (Pulsation d'anti-résonance).

Exercice 91



Soit le circuit electrique ci-contre alimenté par $u(t) = U_0 \cos \omega t$.

1°/ Etablir les équations aux mailles.

2°/ En déduire les formes de $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

3°/ Préciser les amplitudes de q_1 et q_2 sachant que $L_1 = L_2 = L$; $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

4°/ Comment doit-on choisir la fréquence ω du G.B.F pour que :

a/ le courant soit infini dans les 2 mailles (circuit résonateur)

b/ le courant soit nul dans la 1ère maille (circuit bouchon)

Exercice 92 :

Préciser les valeurs des pulsations de résonance ωr_1 et ωr_2 des exercices résolus precedemment (serie : oscillations Libres à 2 degrés de liberté).

On ajoutera bien-sûr, à chaque fois, une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \omega t$ à la masse m. par exemple.

Quelle pulsation ω du moteur ($F(t)$) doit-on choisir pour que les oscillations aient une amplitude maximale.

Faire un schema pour expliquer quelles sont les précautions à prendre lors du choix de la vitesse de fonctionnement d'un appareil electro-ménager possedant un moteur tournant.

Exercice 93

Soit le systeme mécanique ci-contre où la barre de masse négligeable et de longueur l peut tourner autour de l'horizontale (position d'équilibre). Determiner:

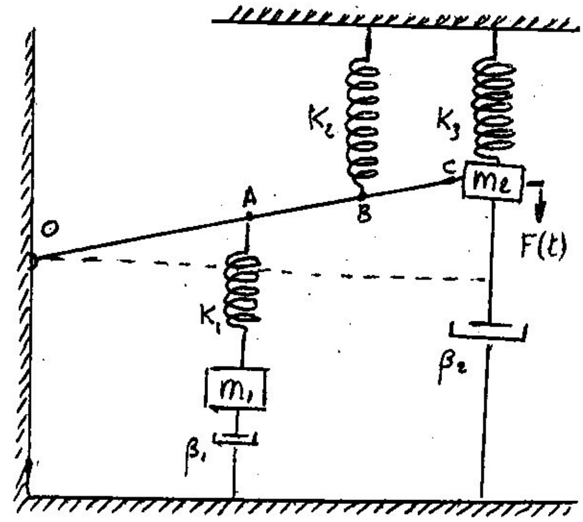
1°/ les equations differentielles du mvt.

2°/ Sachant que $OA = l/2$; $OB = 3l/4$; $OC = l$; $K_1 = 4K$; $K_2 = \frac{16}{9}K$; $K_3 = K$ et $m_1 = m_2 = m$; $F(t) = F_0 \sin \omega t$, déterminer les equations horaires.

3°/ Impedance d'entrée. Quelles sont les conditions pour que m_2 soit immobile.

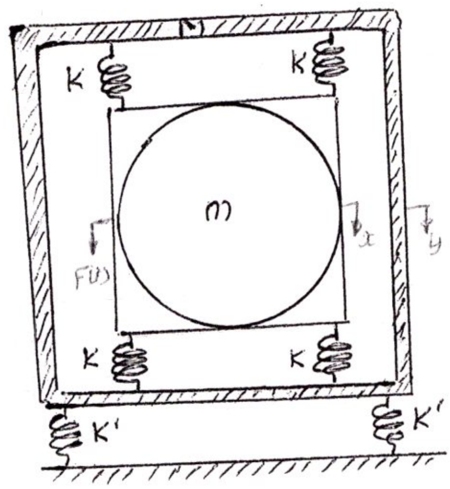
4/ Schema electrique reduit (m_2 immobile).

5/ Conditions pour que m_1 soit im-mobile ?



Solutions : Oscillations Forcées à 2 d.d.l

Exercice 90



$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$

$U = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} K (x-y)^2\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} K' y^2$

$D = 0$

$W_{ext} = F_{ext} \cdot x$

1/ les equations differentielles du mvt du systeme sont données par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial y}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + 4Kx - 4Ky = F_0 \cos\omega t \\ M\ddot{y} + (4K + 2K')y - 4Kx = 0 \end{cases}$$

2/ pour $K' = 2K$ et $M = 2m$, les equations deviennent

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 4Kx - 4Ky = F_0 \cos\omega t \\ m\ddot{y} + 4Ky - 2Kx = 0 \end{cases}$$

// $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$

$x = A e^{j\omega t}$; $y = B e^{j\omega t}$

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + 4K) A - 4K B = F_0 \\ -2K A + (-m\omega^2 + 4K) B = 0 \end{cases}$$

d'où $A = \dfrac{F_0(-m\omega^2 + 4K)}{(-m\omega^2 + 4K)^2 - 8K^2}$ et $B = \dfrac{+2K F_0}{(-m\omega^2 + 4K)^2 - 8K^2}$

ou encore

$$A = \frac{F_0(-m\omega^2 + 4K)}{(m\omega^2 - (4+2\sqrt{2})K)(m\omega^2 - (4-2\sqrt{2})K)} = \frac{F_0(-\omega^2 + \omega_{or}^2)}{(\omega^2 - \omega_{r_1}^2)(\omega^2 - \omega_{r_2}^2)}$$

$$B = \frac{2K F_0}{(m\omega^2 - (4+2\sqrt{2})K)(m\omega^2 - (4-2\sqrt{2})K)} = \frac{\alpha}{(\omega^2 - \omega_{r_1}^2)(\omega^2 - \omega_{r_2}^2)}$$

Exercice 92/93

$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$ // $OA = l/2$; $OB = \frac{3l}{4}$

$W = \frac{1}{2} K_1 \left(x_1 - \frac{l}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{3l}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} K_3 (l\theta)^2$ // $OC = l$

$D = \frac{1}{2}\beta_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2 \dot{x}_2^2$

$W_{ext} = F_{ext}.\, x_2 = F_0(\cos\omega t)\, x_2$

Les équations différentielles du mouvement sont données par :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + \frac{\partial W_{ext}}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \beta_1\dot{x}_1 + 4Kx_1 - 2Kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \beta_2\dot{x}_2 + 3Kx_2 - 2Kx_1 = F \end{cases}$$

2°/ <u>Impédance d'entrée</u> $Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_2}$; $\begin{cases} \ddot{x}_1 = j\omega\dot{x}_1 & \text{et } x_1 = -j\frac{K}{\omega} \\ \ddot{x}_2 = j\omega\dot{x}_2 & \text{et } x_2 = -j\frac{K}{\omega} \end{cases}$

les équations deviennent

$$\begin{cases} \left(jm\omega + \beta_1 - j\frac{4K}{\omega}\right)\dot{x}_1 + 2j\frac{K}{\omega}\dot{x}_2 = 0 \\ \left(jm\omega + \beta - j\frac{3K}{\omega}\right)\dot{x}_2 + 2j\frac{K}{\omega}\dot{x}_1 = F(t) \end{cases} \quad \text{d'où } \dot{x}_1 = -\frac{2j\frac{K}{\omega}}{jm\omega + \beta - j\frac{4}{\omega}}$$

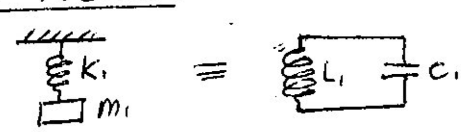
$$\text{d'où } Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_2} = jm\omega + \beta - j\frac{3K}{\omega} + \frac{4\frac{K^2}{\omega^2}}{jm\omega + \beta_1 - j\frac{4K}{\omega}}$$

3°/ <u>Condition pour que m_2 soit immobile</u>

m_2 immobile si $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_2} = \infty$ donc dénominateur.

$jm\omega + \beta_1 - j\frac{4K}{\omega} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$ donc 2 conditions à réali

4°/ <u>Schéma électrique réduit :</u>

m_2 immobile $\Rightarrow$ 

5°/ <u>Condition pour que m_1 soit immobile</u>

m_1 immobile $\Rightarrow \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow Z_s = \frac{F(t)}{\dot{x}_1} = \infty$ comme $\dot{x}_2 = -\frac{jm\omega + \beta - j}{2j\frac{K}{\omega}}$

$$Z_s = \frac{F(t)}{\dot{x}_1} = \frac{F(t)}{\dot{x}_2}\cdot\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = Z_e\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = 2j\frac{K}{\omega} + \left(jm\omega + \beta - j\frac{3K}{\omega}\right)\cdot j(F$$

si $K \neq 0$; Z_s <u>ne</u> peut tendre vers l'infini.

Donc en résumé, le seul moyen pour que m_1 soit immobile, c'est d'é
le ressort K (isoler m_1 de la barre) ce qui revient à aucun couplag