

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté de Technologie

Département d'Aéronautique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Aéronautique

Spécialité : Aéronautique

RESOLUTION DE L'EQUATION DE POISSON DANS

UN DOMAINE SIMPLEMENT CONNEXE

Par

Mohamed BOUN-JAD

devant le jury composé de :

| | | | |
|--------------------|--------------------------|-------------|------------|
| B. BENAOUA-ZOUAOUI | Professeur, | U. de Blida | Président |
| T. ZEBBICHE | Professeur, | U. de Blida | Rapporteur |
| A. ALLALI | Maître de Conférences A, | U. de Blida | Examineur |
| R. HAOUI | Professeur, | USTHB Alger | Examineur |

Blida, 19 Juin 2013

RESUME

Le présent mémoire présente un modeste travail sur le domaine des éléments finis. On a essayé de résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles de deuxième ordre par la méthode des éléments finis. L'équation considérée est celle de Poisson avec les conditions aux limites de type Dirichlet. On a limité l'étude pour des domaines simplement connexes quelconques. Après un bref théorique sur la résolution de cette équation on a trouvé les solutions analytiques exactes que pour les sections circulaires, rectangulaires et elliptiques. D'où notre intérêt est orienté vers la recherche des solutions numériques approchées. La méthode utilisée est celle des éléments finis. Deux programmes de calcul numérique ont été réalisés dans ce contexte. Le premier est consacré pour la génération de maillage dans les domaines concernés. On a développé ici une technique permettant de générer un maillage de type 'H' dans n'importe quel domaine simplement connexe. Le deuxième programme réalisé est celui pour la résolution numérique de l'équation de Poisson dans un domaine simplement connexe avec les conditions aux limites de Dirichlet et la détermination des résultats auxiliaires intéressants. Le programme utilise un seul type d'élément fini est le triangle à trois nœuds. Le problème résolu a un grand intérêt physique dans pas mal des disciplines, tels que, le transfert de chaleur dans des ailettes de moteur, écoulement à travers les conduites quelconques pour pressuriser par exemple les cabines des avions par l'air, alimenter les réservoirs des moteurs, graissages des arbres des moteurs, etc. D'autres problèmes touchant, tels que, l'étude de la torsion des clefs mécaniques de sections non circulaires et autres en particulier comme la torsion des pales d'hélicoptères et les ailettes dans les refroidisseurs. Les résultats présentés sont choisis pour des sections simples pour but de comparaison et d'autres de formes complexes pour but de voir la puissance du programme réalisé.

Mots Clés

Méthode des éléments finis, Élément triangulaire, Equation de Poisson, Conditions aux limites type Dirichlet, Domaine simplement connexe, Génération de maillage type H, O et C, Méthode de résolution directe de Khaletski, Matrice bande, Stockage des matrices sous forme de vecteur, Erreur de calcul, Valeur moyenne, Valeur maximale.

ABSTRACT

This dissertation presents a modest work on the field of finite elements method. We tried to solve a differential equation in partial derivatives of second order by finite element method. The equation considered is the Poisson equation with the Dirichlet boundary conditions. Our study is limited for any simply connected domains. After a brief theoretical resolution of this equation we found the exact analytical solutions for circular sections, rectangular and elliptical. Hence our interest is oriented to research numerical solutions approached. The method used is that of finite elements. Two programs for numerical computation have been made in this context. The first is devoted to mesh generation in the relevant fields. We developed here a technique to generate a mesh-type 'H' in any simply connected domain. The second program is made for the numerical solution of the Poisson equation in a simply connected domain with Dirichlet boundary conditions and the identification of interesting auxiliary results. The program uses a single type of finite element is the triangle with three nodes. The problem resolved with a great interest in a lot of physical disciplines, such as the heat transfer in fins engine, flow through pipes to pressurize any such aircraft cabins with air, fuel tanks engines, engine lubrication trees, etc. Other problems related, such as the study of the mechanical twist keys and other non-circular sections in particular as the twist of helicopter blades and vanes in the coolers. The results presented are chosen for simple sections for comparison purposes and other complex shapes in order to see the power of the realized program.

Keys Words

Finite element method, triangular elements, Poisson equation, Dirichlet boundary conditions, simply connected domain, Mesh generation type H, O and C, Direct resolution method of Khaletski, Matrix tape storage arrays in the form of vector, error calculation, average value, maximum value.

ملخص

تعرض هذا البحث عمل متواضع في ميدان عناصر المنتهية. حاولنا حل معادلة تفاضلية ذات المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية باستخدام طريقة العناصر المحدودة. تعتبر المعادلة من نوع بواسون مع شروط الحدود من نوع ديريتشليت. تقتصر علينا دراسة عن أي المجالات المتصلة بكل بساطة. بعد قرار نظري مختصر لهذه المعادلة وجدنا الحلول التحليلية الدقيقة لمقاطع دائرية ومستطيلة وبيضاوية. وبالتالي مصلحتنا هي التوجه لوجود حلول رقمية اقتراب. الطريقة المستخدمة هي العناصر المنتهية. برنامجين لحساب العددي في السياق قد تم ايجادهما. ويخصص برنامج الأول لرسم شبكات في المجالات ذات الصلة. هنا قمنا بتطوير تقنية لإنشاء شبكة من نوع أش في أي مجال الاتصال بكل بساطة. يرصد البرنامج الثاني من أجل حل المعادلة العددية للبواسون في مجال توصيل ببساطة مع شروط الحدود ديريتشليت وتحديد النتائج الاهتمام. البرنامج يستخدم نوع واحد من العناصر المحدودة هو مثلث من ثلاثة العقد. يتم اختيار النتائج المقدمة للأقسام لأغراض المقارنة البسيطة والمعقدة الأشكال الأخرى من أجل معرفة قوة البرامج التي أنجزت.

كلمات المفاتيح

طريقة العناصر المنتهية، عنصر ذو ثلاثة عقد، معادلة بواسون، شروط الحدود من نوع ديريتشليت ، مجالات مرتبطة ببساطة ، شبكة من نوع H ، O ، C ، طريقة الحل المباشر لكلتسكي، التخزين المصفوفة في شكل شريط وحيد البعد، متوسط القيمة، القيمة القصوى .

REMERCIEMENTS

Je remercie Allah tout puissant de m'avoir donné la volonté, le courage et la confiance pour pouvoir continuer mes études et arriver à ce stade.

À mes très chères parents pour leur soutien et encouragement, tout au long de ces dures années.

À M^r le promoteur ; le distingué M^r ZEBBICHE Toufik Professeur au département d'Aéronautique que dieu le garde qui m'a honoré de travailler avec lui, qui m'a aidé beaucoup pour la réalisation de ce travail, aussi pour son grand et total soutien, son suivi et ses conseils précieuses durant mon projet et pour toute sa confiance qu'il m'a témoigné

Je tiens encore à remercier sincèrement et vivement le président de jury M^r BENAOUA-ZOUAOUI Braham, Professeur au département d'Aéronautique, les membres de jury, M^r HAOUI Rabah, Professeur au département de mécanique de l'université Houari Boumediene Bab Ezzouar d'Alger et M^r ALLALI Abderrezak, Maître de Conférences Classe A qui ont accepté d'honorer par leurs présence notre soutenance.

Je remercie encore tous les enseignants et personnels du département d'Aéronautique qui ont contribué de près ou de loin à notre formation.

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

| | |
|--|----|
| Figure 1.1 : La représentation des éléments finis dans un cercle | 19 |
| Figure 1.2 : Connexité d'un domaine | 21 |
| Figure 1.3 : La discrétisation en éléments finis par des éléments triangulaires | 24 |
| Figure 1.4 : Domaine et conditions aux limites de fonction de courant et formulation potentiel vitesse pour un écoulement irrotationnel d'un fluide autour d'un cylindre | 24 |
| Figure 2.1 : La discrétisation en l'élément finis d'un domaine irrégulier | 27 |
| Figure 2.2 : Les éléments finis à deux dimensions | 32 |
| Figure 2.3 : Fonctions d'interpolations linéaires pour un élément triangulaire à trois nœuds | 34 |
| Figure 2.4 : Représentation de la continuité de la fonction $u(x, y)$ par des fonctions d'interpolations linéaires d'un triangle à trois nœuds | 34 |
| Figure 2.5 : Eléments rectangulaire à quatre nœuds avec les fonctions d'interpolations associées | 35 |
| Figure 2.6 : Evaluation de flux Q | 40 |
| Figure 2.7 : Assemblage des matrices de rigidité | 41 |
| Figure 3.1 : Domaine simplement connexe | 46 |
| Figure 3.2 : Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle | 46 |
| Figure 3.3 : Courbe d'une fonction multivoque | 47 |
| Figure 3.4 : Discrétisation sur le coté AB | 48 |
| Figure 3.5 : Discrétisation sur le coté DC | 49 |
| Figure 3.6 : Discrétisation sur le coté AD | 50 |
| Figure 3.7 : Discrétisation sur le coté BC | 51 |
| Figure 3.8 : Génération des nœuds sur la frontière du domaine | 53 |
| Figure 3.9 : Distribution des nœuds selon la relation (3.16) | 54 |
| Figure 3.10 : Illustration la procédure de détermination les abscisses | 55 |

| | |
|--|-----|
| Figure 3.11 : Illustration la procédure de détermination les ordonnées | 56 |
| Figure 3.12 : Illustration de la matrice bande | 59 |
| Figure 3.13 : Numérotation des éléments | 61 |
| Figure 3.14 : Exemple sur la numérotation des nœuds | 61 |
| Figure 3.15 : Forme de la matrice de rigidité pour une numérotation choisie suivant le cas 1 | 62 |
| Figure 3.16 : Exemple sur la numérotation des nœuds | 63 |
| Figure 3.17 : Forme de la matrice de rigidité pour une numérotation choisie suivant le cas 2 | 64 |
| Figure 3.18 : Exemple sur la numérotation des nœuds | 65 |
| Figure 3.19 : Forme de la matrice de rigidité pour une numérotation choisie suivant le cas 3 | 66 |
| Figure 3.20 : Forme de la matrice $[K]$ du cas 1 après l'application des conditions aux limites | 75 |
| Figure 3.21 : Forme de la matrice $[K]$ du cas 2 après l'application des conditions aux limites | 75 |
| Figure 3.22 : Forme de la matrice $[K]$ du cas 3 après l'application des conditions aux limites | 76 |
| Figure 4.1: Stockage en colonne | 80 |
| Figure 4.2 : Stockage en diagonal | 82 |
| Figure 4.3 : Stockage en ligne | 83 |
| Figure 4.4 : Stockage en ligne de serpent | 84 |
| Figure 4.5 : Stockage en escalier | 85 |
| Figure 4.6 : Exemple 1 de la matrice bande de la forme (4.23) | 90 |
| Figure 4.7 : Exemple 2 de la matrice bande de la forme (4.23) | 91 |
| Figure 4.8 : Considération d'un quadrilatère comme deux triangles | 96 |
| Figure 5.1: Maillage quadrilatère gros dans un domaine circulaire | 109 |
| Figure 5.2 : Maillage triangulaire dans un domaine circulaire | 109 |

| | |
|---|-----|
| Figure 5.3 : Maillage quadrilatère assez fin dans un domaine circulaire | 109 |
| Figure 5.4 : Maillage triangulaire fin dans un domaine circulaire | 110 |
| Figure 5.5 : Maillage triangulaire filtré dans un domaine circulaire | 110 |
| Figure 5.6 : Effet de positions des points de la frontière sur la forme du maillage pour une domaine circulaire | 111 |
| Figure 5.7 : Effet de positions des points de la frontière sur la forme du maillage interne pour un domaine circulaire | 111 |
| Figure 5.8 : Maillage quadrilatère gros dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile | 112 |
| Figure 5.9 : Maillage quadrilatère assez fin dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile | 112 |
| Figure 5.10 : Maillage triangulaire moyen dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile | 112 |
| Figure 5.11 : Maillage triangulaire filtré dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile | 112 |
| Figure 5.12 : Maillage quadrilatère moyen dans une configuration complexe | 113 |
| Figure 5.13 : Maillage triangulaire assez fin dans une configuration complexe | 113 |
| Figure 5.14 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration complexe | 113 |
| Figure 5.15 : Maillage quadrilatère gros dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile | 114 |
| Figure 5.16 : Maillage triangulaire dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile | 114 |
| Figure 5.17 : Maillage triangulaire fin dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile | 114 |
| Figure 5.18 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile | 114 |
| Figure 5.19 : Maillage quadrilatère dans une configuration complexe | 114 |

| | |
|---|-----|
| Figure 5.20 : Maillage triangulaire assez fin dans une configuration complexe | 115 |
| Figure 5.21 : Maillage quadrilatère filtré dans une configuration complexe | 115 |
| Figure 5.22 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration complexe | 116 |
| Figure 5.23 : Maillage quadrilatère dans une configuration complexe | 117 |
| Figure 5.24 : Maillage triangulaire dans une configuration complexe | 117 |
| Figure 5.25 : Maillage quadrilatère filtré dans une configuration d'un cœur humain | 118 |
| Figure 5.26 : Maillage quadrilatère filtré dans une configuration complexe | 118 |
| Figure 5.27 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration complexe | 118 |
| Figure 5.28 : Variation du paramètre $\frac{H}{a^4}$ en fonction du rapport n pour un rectangle | 127 |
| Figure 5.29 : Variation des paramètres $\frac{u_{\max}}{a^2}$ et $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ en fonction du rapport n pour un rectangle | 128 |
| Figure 5.30 : Variation du paramètre $\frac{H}{a^4}$ en fonction du rapport n pour une ellipse | 132 |
| Figure 5.31 : Variation des paramètres $\frac{u_{\max}}{a^2}$ et $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ en fonction du rapport n pour une ellipse | 133 |
| Figure 5.32 : Variation de l'aire de la section du domaine en fonction de l'épaisseur t maximale | 135 |
| Figure 5.33 : Variation de paramètre H en fonction de l'épaisseur t du profil | 136 |
| Figure 5.34 : Variation des paramètres u_{\max} et u_{moy} en fonction de l'épaisseur t du profil | 136 |

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

TABLE DES MATIERES

| | |
|--|----|
| INTRODUCTION..... | 12 |
| 1. CONCEPT DE LA METHODE DES ELEMNTS FINIS | 15 |
| 1.1. Appréciation générale | 16 |
| 1.2. Bref historique | 17 |
| 1.3. Concept de base de la méthode des éléments finis | 18 |
| 1.4. Problèmes aux limites et aux valeurs initiales | 20 |
| 1.4.1. Domaine et contour | 20 |
| 1.4.2. Fermeture du problème pour solution unique | 22 |
| 1.5. Equation de Poisson et son application | 24 |
| 1.5.1. Torsion d'une poutre de section non circulaire | 24 |
| 1.5.2. Ecoulement autour d'un cylindre | 24 |
| 2. ANALYSE DE L'EQUATION DE POISSON PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS | 26 |
| 2.1. Introduction | 26 |
| 2.2. Equation Différentielle Générale de Second ordre | 26 |
| 2.2.1. Description du Modèle Mathématique | 26 |
| 2.2.2. Formulation variationnelle | 27 |
| 2.2.3. Formulation en éléments finis | 29 |
| 2.2.4. Fonctions d'Interpolations | 30 |
| 2.2.4.1. Fonctions d'interpolations d'un élément triangulaire à trois nœuds | 32 |
| 2.2.4.2. Fonctions d'interpolations d'un élément rectangulaire à quatre nœuds | 35 |
| 2.2.5. Calcul des matrices de rigidités | 37 |
| 2.2.5.1. Matrice de rigidité d'un élément triangulaire à trois nœuds | 38 |

| | |
|---|-----|
| 2.2.5.2. Matrice de rigidité d'un élément rectangulaire à quatre nœuds | 39 |
| 2.2.5.3. Evaluation de l'intégrale de frontière | 39 |
| 2.2.6. Assemblage des matrices de rigidités élémentaires | 41 |
| 3. GENERATION DE MAILLAGE | 45 |
| 3.1. Procédure de génération de maillage type 'H' | 45 |
| 3.1.1. Génération des nœuds sur le contour du domaine | 47 |
| 3.1.2. Fonction de condensation unidimensionnelle | 53 |
| 3.1.3. Génération des nœuds internes pour le maillage de type 'H' | 55 |
| 3.2. Influence de la numérotation des nœuds sur la forme de la matrice de rigidité | 58 |
| 3.3. Filtrage des nœuds | 69 |
| 3.4. Algorithme de connexion des éléments finis du maillage | 70 |
| 3.5. Préparation du système d'équations du problème | 73 |
| 4. FORMULATION NUMERIQUE | 79 |
| 4.1. Remarques Préliminaires | 79 |
| 4.2. Méthodes de stockage sous forme de vecteur | 80 |
| 4.2.1. Stockage en colonne | 80 |
| 4.2.2. Stockage en diagonal | 82 |
| 4.2.3. Stockage en ligne | 83 |
| 4.2.4. Stockage en ligne de serpent | 83 |
| 4.2.5. Stockage en escalier | 84 |
| 4.3. Algorithmes de résolution directe du système d'équations | 87 |
| 4.3.1. Méthode de Khaletsky | 88 |
| 4.3.2. Méthodes de Choletsky | 92 |
| 4.4. Algorithmes de calcul des résultats intéressants | 95 |
| 4.4.1. L'aire et position du centre de gravité de la surface de la section | 96 |
| 4.4.2. Intégrale de surface de la solution u du problème | 97 |
| 4.4.3. Dérivée de la solution u du problème | 100 |
| 4.4.4. Position et valeur maximale de la solution u du problème | 100 |
| 4.4.5. Solution a l'intérieur de la surface de l'élément fini | 102 |

| | |
|---|-----|
| 5. RESULTATS ET COMMENTAIRES | 104 |
| 5.1. Génération de maillage | 104 |
| 5.1.1. Algorithme du programme de génération de maillage | 104 |
| 5.1.2. Résultats sur la génération de maillage | 105 |
| 5.2. Résultats sur la résolution numérique de l'équation de Poisson | 119 |
| 5.2.1. Domaine circulaire | 119 |
| 5.2.1.1. Solution exacte | 119 |
| 5.2.1.2. Exemple sur la distribution de la solution | 120 |
| 5.2.1.3. Effet de la discrétisation sur la convergence du problème | 121 |
| 5.2.2. Domaine rectangulaire | 123 |
| 5.2.3. Domaine elliptique | 128 |
| 5.2.4. Domaine d'un profil d'aile | 133 |
| 5.2.5. Divers domaines | 136 |
| CONCLUSION | 141 |
| APPENDICE A | 143 |
| APPENDICE B | 146 |
| APPENDICE C | 150 |
| REFERENCE | 156 |

INTRODUCTION

L'évolution actuelle de la technologie amène le chercheur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Nous pensons aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans les quels la sécurité est vitale. Pour dominer ces projets et autres, le chercheur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes.

Les sciences de l'ingénieur (mécaniques des solides et des fluides, thermiques ...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique; problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions [1], [3], [7], [10], [21].

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques [6], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [25], [40]. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles [10], [11], [14].
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques [10], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36].
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur [19]

La méthode des éléments finis est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire et en général en mécanique des fluides. Elle nécessite l'écriture des programmes informatiques professionnels répondant à la résolution de ces problèmes. Pour que la méthode des éléments finis soit

efficace dans les applications industrielles, il faut utiliser des programmes d'assistances à la préparation des données et à l'interprétation des résultats [16], [24], [37], [38], [39].

La compréhension de la méthode exige en effet des connaissances dans des domaines variés [1], [2], [3], [10], [12], [41].

- Compréhension du problème physique étudié et connaissance intuitive de la nature de la solution cherchée.
- Approximation des inconnues par sous-domaines et construction de fonctions d'interpolations.
- Construction des équations du système étudié sous forme variationnelle, soit à partir de méthodes énergétiques, soit à partir d'équations aux dérivées partielles.
- Technique d'organisation matricielle des données.
- Méthodes numériques d'intégration, de résolution de systèmes d'équations algébriques et différentielles, linéaires et non linéaires.

La présente étude consiste alors à la résolution numérique de l'équation de Poisson dans un domaine simplement connexes quelconques et complexes avec les conditions aux limites de type Dirichlet. Ceux de Neuman et Cauchy sont présentées comme des travaux de futurs.

En effet, la complexité de es domaines induit que la solution analytique (exacte) du problème n'existe pas, et évidemment notre intérêt s'oriente vers la recherche des solutions numériques approchées. La méthode des éléments finis sera introduit et appliquée avec succès puisque elle s'adapte sur n'importe quelle frontière du domaine [10], [11], [13], [15], [37], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47].

La discrétisation des équations géométrique gérant le phénomène physique seront donc fondées sur l'utilisation des éléments finis bi dimensionnel (2D). L'élément utilisé est celui le triangle à trois nœuds. C'est l'élément le plus simple. Il donne une bonne présentation de la frontière de la géométrie complexe [2], [10], [13], [19], [22], [24].

Cependant, deux difficultés principales se rencontrent, si la méthode des éléments finis est utilisée.

- La première difficulté majeure c'est la manière optimale de génération de maillage ainsi que l'adaptation des équations au modèle mathématique de la résolution.
- L'autre difficulté est le choix de la méthode numérique adéquate à la résolution du système d'équations algébriques vu le nombre important de degré de liberté alloués. Pour cela, il faut subdiviser le domaine en petit sous domaines de géométrie simple connue telle que la géométrie triangulaire par l'intermédiaire des fonctions d'interpolations. Un nombre important d'éléments finis sera établit et appliqué pour le développement d'un programme numérique afin d'avoir une convergence vers la solution exacte.

Vu la dimension importante de la matrice du système, le stockage dans la mémoire de l'ordinateur sera réalisé en utilisant la technique des matrices bandes afin d'éviter le stockage des cases nulles. Pour avoir un nombre important de zéros, il faut faire une bonne numérotation des nœuds de maillage. De même, la résolution du système d'équation sera faite par manière directe en utilisant l'algorithme de Khalatski qui sera modifié spécialement pour des matrices bandes et symétriques [2], [10], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55].

La solution du problème traité représente la distribution du champ de solution dans le domaine. Puisque l'équation de Poisson peut représenter pas mal des phénomènes physiques, il est parfois très intéressant de calculer la distribution de la dérivée de la solution à travers le domaine ainsi que l'intégrale de la solution.

Ce mémoire est organisé en cinq (05) chapitres qui présentent les divers concepts de la méthode des éléments finis ainsi que les techniques numériques et informatiques correspondantes.

Chapitre 1

Exposé de la technique de l'approximation en éléments finis et les divers exemples de l'application de l'équation de Poisson [2], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [19], [24], [56].

Chapitre 2

Description de la formulation en éléments finis de l'équation de Poisson et la transformation en un système algébrique linéaire ainsi les matrices de rigidités élémentaires des éléments finis triangulaires et rectangulaires et la manière de procéder à l'assemblage

pour l'obtention du système d'équation pour le domaine complet [2], [4], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [22], [24], [37], [39], [45], [46], [57], [60], [61].

Chapitre 3

Le but de ce chapitre est de présenter la technique de génération de maillage opté pour notre étude et les algorithmes correspondants et la méthode numérique nécessaire pour construire le système d'équations ainsi que l'influence de la numérotation des nœuds sur la forme de matrice de rigidité du système d'équation algébrique [1], [10], [19], [24], [37], [39], [41], [42], [43], [44], [46], [47], [57], [58], [59].

Chapitre 4

Description des méthodes numériques pour résoudre le système d'équations obtenus au chapitre 2 et les techniques de stockages des matrices sous formes de vecteurs. Finalement les techniques de calcul de quelques paramètres physiques nécessaires pour l'interprétation de la solution [13], [19], [20], [21], [22], [23], [26], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [38], [45], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [55], [54], [62], [63].

Chapitre 5

Ce dernier chapitre présente les différents résultats mathématiques calculés pour différents domaines, commençant par le plus simple afin de justifier et comparer les résultats et de valider le programme réalisé, ensuite vers quelques autres géométries complexes où le domaine présente un intérêt physique et la solution exacte est absente [14], [15].

Ensuite conclusion accompagnée avec quelques travaux de futurs et recommandations.

Enfin trois appendices dont le but de présenter les résumés des listings des programmes réalisés afin qu'ils soient disponibles au sein des mains des étudiants et chercheurs qui intéressent à ce type de problème.

CHAPITRE 1

CONCEPT DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1.1. Appréciation Générale

En fait, chaque phénomène dans la nature, qu'il soit biologique, géologique ou mécanique peut être décrit avec l'aide des lois de la physique sur le plan des équations algébriques, différentielles ou intégrales reliant des quantités variées d'intérêt. Déterminer la distribution de tension dans un récipient de pression avec des trous de forme bizarre et de nombreuses raideurs soumis à des charges mécaniques, thermiques et/ou aérodynamiques, trouver la contrainte de torsion dans des poutres de section non circulaire, trouver la portance et la traînée d'un écoulement visqueux et non visqueux des profils d'ailes en aéronautique, trouver la concentration des polluants dans la mer ou l'atmosphère, et simuler le temps en essayant de comprendre et de prédire le mécanisme de la formation des tornades et des orages sont quelques exemples de beaucoup de problèmes pratique importants [1], [2], [3], [12], [14], [15]. Pendant que la dérivation des équations gouvernantes envers ces problèmes n'est pas excessivement difficile, leurs solutions par des méthodes d'analyses exactes sont d'une tâche terrible dans de tels cas, les méthodes d'analyse approximatives fournissent des moyens alternatifs pour trouver des solutions. Parmi ces moyens, la méthode des différences finies et les méthodes variationnelles telles que, les méthodes de Ritz et Galerkin qui sont plus fréquemment utilisées en littérature [11], [12], [16], [17], [18], [25], [26], [37], [39], [40], [45], [56].

Dans l'approximation de la méthode des différences finies d'une équation différentielle, les dérivées dans l'équation sont remplacées par des équations aux différences qui impliquent les valeurs de la solution à des points de réseau séparés dans le domaine. Les équations distinctes résultantes sont résolues après avoir imposé les conditions aux limites pour les valeurs de la solution aux points de réseau. Bien que la méthode des différences finies soit simple dans le concept, elle subit plusieurs désavantages. Les plus notables sont l'inexactitude des dérivées de la solution approximative, la difficulté de l'imposition des conditions aux limites le long des limites non droites, la difficulté dans la représentation géométrique précise des domaines complexes [5], [6], [7], [8], [20], [21], [23], [25], [26].

Dans la solution variationnelle des équations différentielles, l'équation différentielle est mise dans une forme variationnelle équivalente. A ce moment, la solution approximative est supposée être une combinaison de fonctions d'approximation donnée. Les méthodes variationnelles subissent le désavantage des fonctions d'approximations concernant les problèmes avec les domaines arbitraires qui sont difficiles à construire [11], [12], [13], [14], [16], [17], [18], [22], [24], [37], [45], [56].

La méthode des éléments finis surmonte la difficulté des méthodes variationnelles parce qu'elle procure une procédure systématique à la dérivation des fonctions d'approximations. La méthode est dotée de deux caractéristiques fondamentales qu'explique sa supériorité sur les autres méthodes compétitives. Premièrement, un domaine géométrique complexe du problème est représenté comme une collection de sous domaines géométriques simples, appelés les éléments finis. Deuxièmement, sur chaque élément fini les fonctions d'approximations sont dérivées en utilisant l'idée fondamentale que n'importe quelle fonction continue peut être représentée par une combinaison linéaire algébrique polynomiale. Les fonctions d'approximations sont dérivées en utilisant des concepts de la théorie d'interpolation et sont appelées donc les fonctions d'interpolations [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [22], [24], [39], [45].

Ainsi, la méthode des éléments finis peut être interprétée comme une application des méthodes variationnelles (ex : Ritz et les méthodes de poids résiduels) dans laquelle les fonctions d'approximations sont des polynômes algébriques et les paramètres indéterminés représentent les valeurs de la solution à un nombre fini de points près appelés 'nœud' sur la frontière et dans l'intérieur de l'élément. De la théorie d'interpolation, on trouve que l'ordre (ou le degré) de la fonction d'interpolation dépend du nombre de nœuds (D.D.L.) dans l'élément [4], [10], [11], [12], [13], [16], [18], [22], [24], [26], [37], [39], [45], [56].

1.2. Bref Historique

L'idée de la représentation d'un domaine donnée comme une collection d'éléments séparés n'est pas nouvelle avec la méthode des éléments finis. Il a été enregistré que les anciens mathématiciens estimaient la valeur de π en notant que le périmètre d'un polygone inscrit dans un cercle est approximatif à la circonférence du cercle. Ils ont prédit la valeur de π pour préciser presque 40 chiffres importants par la représentation du cercle étant un polygone d'un nombre de cotés large et limité. Dans le temps moderne l'idée a trouvé refuge dans l'analyse structurelle des avions où par exemple les ailes et les fuselages sont considérés

comme des assemblages de panneaux tendus. En 1941 Hrenikoff a introduit la méthode de structure dans laquelle un avion a été représenté comme une collection de barres et de poutres. L'utilisation des fonctions continues des éléments qui est définie sur un sous domaine pour se rapprocher des fonctions inconnues qui datent du travail de Courant (1943), qui a utilisé un assemblage d'éléments triangulaires et le principe de l'énergie potentielle minimum pour étudier le problème de torsion de Saint venant. Bien que les caractéristiques clés sûrs de la méthode des éléments finis puissent être retrouvées dans les travaux de Hrenikoff (1941) et Courant (1943), la présentation formelle de la méthode des éléments finis est attribuée à Argyris et Kelsey (1960) et à Turner, Clough, Martin et Topp (1956). Cependant, le terme « élément fini » a été utilisé en premier par Clough en 1960. Depuis son début, la littérature sur les applications de l'élément fini s'est appropriée [10], [11], [14].

1.3. Concept de base de la méthode des éléments finis

Les idées de base soulignant la méthode des éléments finis sont introduites par l'exemple simple suivant présenté par la détermination de l'aire d'un cercle moyennant l'équation d'un triangle [11].

Considérons le problème déterminant l'aire d'un cercle dont le rayon R en représentant un ensemble de triangles vu que l'aire du triangle est connue moyennant son équation. Donc, on essayera de faire une approximation de calcul de l'aire des triangles en passant à la méthode des éléments finis.

- Discrétisation :

La région continue (cercle) est représentée par un ensemble dénombrable ($n=5$) soient des triangles (discrétisation d'un domaine ou espace par triangles).

- Chaque sous espace est appelé élément.
- L'ensemble des éléments est appelée maillage d'éléments finis.

Dans ce cas, on va discrétiser le cercle dans un maillage de cinq triangles et les deux discrétisations sont représentées dans la figure 1.1.

Vu que les cinq éléments sont de même dimensions le maillage est dit : uniforme.

- Equation de l'élément :

L'élément typique (triangle) est isolé et ses propriétés seront calculées (l'aire)

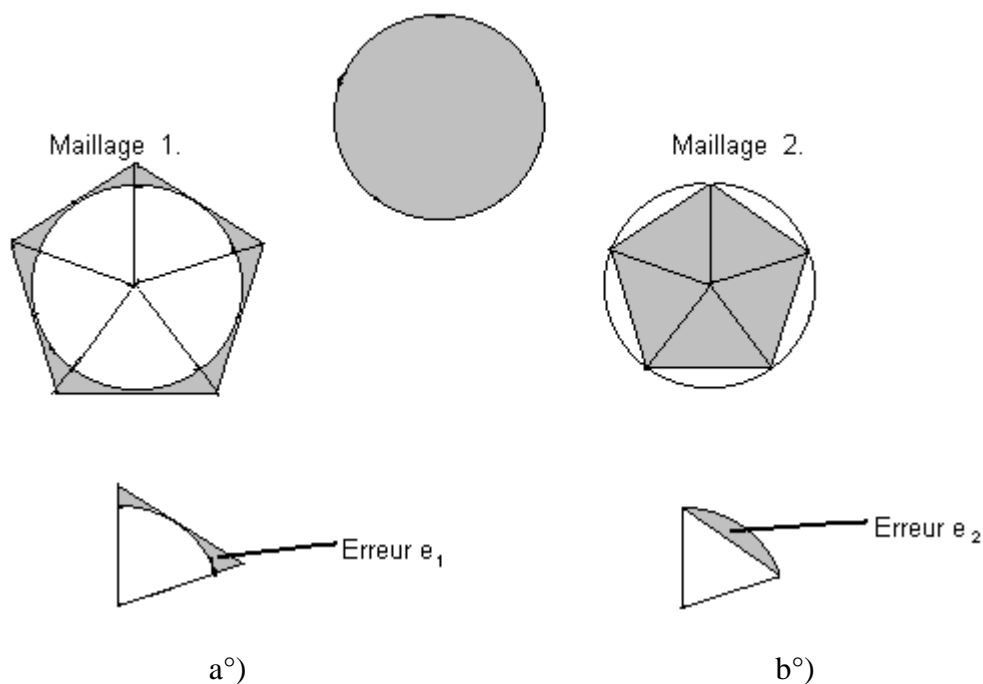


Figure 1.1 : La représentation des éléments finis dans un cercle

$$\begin{aligned}
 A_e &= \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} && \text{maillage 1} \\
 \overline{A_e} &= R^2 \tan \frac{\pi}{n} && \text{maillage 2}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

A_e : l'aire de la surface d'un triangle dans le maillage 1.

$\overline{A_e}$: l'aire de la surface d'un triangle dans le maillage 2.

n : nombre de triangles.

- Assemblage des équations élémentaires et solution :

L'approximation de l'aire du cercle est obtenue en sommant les différentes aires. Ce procédé est appelé : Assemblage des équations élémentaires. Dans notre cas, l'aire totale est égale à la somme des aires élémentaires.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{e=1}^n A_e && \overline{A_2} = \sum_{e=1}^n \overline{A_e}
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

vu que le maillage est uniforme on se permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 A_1^{(n)} &= n \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} && \overline{A_2^{(n)}} = n R^2 \tan \frac{\pi}{n}
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

$A_1^{(n)}$: surface du polygone de n cotés dans le maillage 1.

$\overline{A_2^{(n)}}$: surface du polygone de n cotés dans le maillage 2.

- Convergence et estimation de l'erreur :

Pour ce problème simple on connaît la solution exacte qui est : $A_0 = \pi R^2$. On peut estimer l'erreur dû à l'approximation et voir que l'approximation de la solution converge vers la limite quand $n \rightarrow \infty$. Considérons l'élément typique e. L'erreur dont l'approximation est égale à la différence entre l'aire du secteur et celle du triangle [voir figure 1.1].

$$e_1 = |S_e - A_e| \quad e_2 = |S_e - \overline{A_e}| \quad (1.4)$$

$S_e = \frac{1}{2} R^2 \theta$: l'aire du secteur. L'erreur estimer par un élément dans le maillage 1 et 2 est donnée respectivement par :

$$e_1 = R^2 \left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \right) \quad (1.5)$$

$$e_2 = R^2 \left[\tan \left(\frac{\pi}{n} \right) - \frac{\pi}{n} \right]$$

L'erreur totale commise pour chaque discrétisation (maillage) est obtenue par la multiplication de e_1 et e_2 par n :

$$E_1^{(n)} = n R^2 \left[\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \right] = \pi R^2 A_1^{(n)} \quad (1.6)$$

$$E_2^{(n)} = n R^2 \left[\tan \left(\frac{\pi}{n} \right) - \frac{\pi}{n} \right] = \overline{A_2^{(n)}} - \pi R^2$$

On remarque que $E_1^{(n)}$ et $E_2^{(n)}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

1.4. Problème aux limites et aux valeurs initiales

1.4.1. Domaine et Contour

L'objectif de toute analyse est de déterminer les fonctions inconnues appelées les variables dépendantes qui satisfient un ensemble donné des équations différentielles dans un domaine donné et quelques conditions aux limites sur la frontière du domaine.

Le domaine est une collection de points dans un espace avec la propriété que si P est un point dans le domaine, alors tous les points qui sont suffisamment près de P appartiennent au domaine. La propriété implique que le domaine se consiste uniquement de points intérieurs.

Si n'importe que deux points du domaine peuvent être reliés par une ligne entièrement étendue à l'intérieur du domaine, alors le domaine se dit d'être convexe (courbé) et simplement connexe. La limite du domaine est un ensemble de points tel que dans n'importe quel voisinage de chacun de ces points il y a des points qui appartiennent au domaine aussi bien que d'autres points ne le sont pas [11], [12], [16], [18], [39], [45].

Notons de la définition du domaine que les points dans la limite n'appartiennent pas au domaine. Dans l'étude actuelle, on doit prendre en considération les domaines qui sont connectés par multiplication [voir figure 1.2]. On doit utiliser le symbole (Ω) pour dénoter un domaine arbitraire et (Γ) pour dénoter son frontière [11].

Une région de l'espace est dite simplement connexe si toutes les courbes relient deux points quelconques sont conciliables (ou réductible) par variation continue. Ou bien en d'autre terme, si tout contour fermé dans cette région peut être réduit à un point par déformation continue sans jamais quitter la région, voir figure 1.2a.

Une région de l'espace est dite doublement connexe s'il n'existe que deux chemins non conciliables pour relier deux points quelconques ou bien que toutes les courbes reliant deux points quelconques puissent être classées en deux familles. Dans cette région, il n'existe alors qu'un seul contour fermé irréductible, voir figure 1.2b.

On peut facilement généraliser ces concepts pour définir des régions multi-connexes en terme du nombre de contours irréductibles, figure (V.1b).

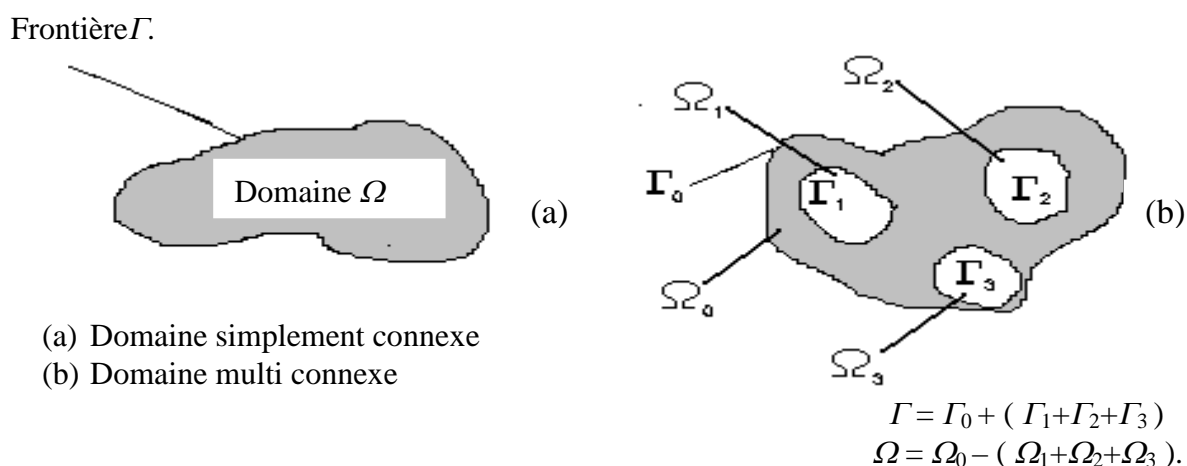


Figure 1.2 : Connexité d'un domaine

Quand les variables dépendantes sont des fonctions d'une seule variable indépendante (x) , le domaine est une ligne de segment (i e, à une dimension), et les points finaux du

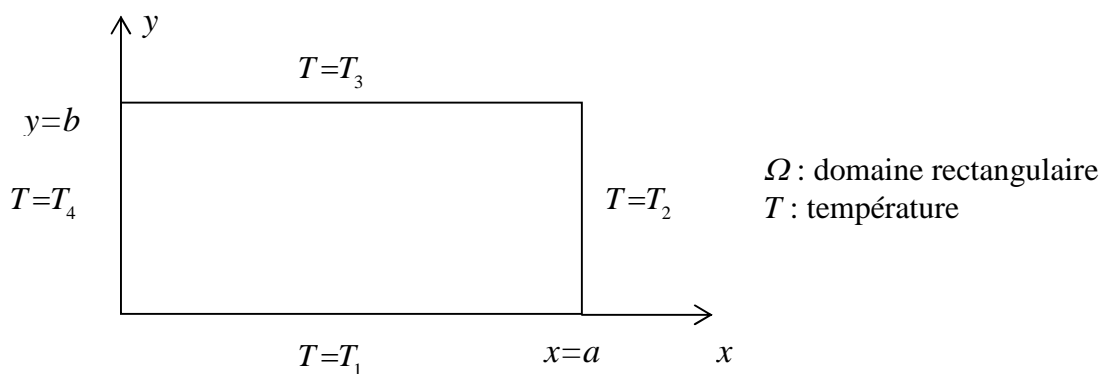
domaine sont appelés les points d'extrémités. Ce n'est pas non commun de trouver des problèmes dans une dimension dans laquelle la variable dépendante et peut être même ses dérivés sont spécifiés à des points intermédiaires aux points finaux. Quand les variables dépendantes sont des fonctions de deux variables indépendantes (x et y), le domaine (à deux dimensions) est une surface et sa limite est la courbe fermée clôt de domaine. Si le nombre des variables indépendantes égale à trois, le domaine est à trois dimensions (i e, un volume) et sa frontière est une surface qui clôt le volume [2], [7], [11].

Ainsi, si on résout le problème de dérivation d'une ficelle ou d'un transfert de température dans un aileron, la déviation ou la température doit être défini dans un intervalle dit $[0, L]$, où L est la longueur du domaine. Si on résout le problème de l'élasticité de l'avion, la torsion d'un membre cylindrique, ou l'écoulement à travers un canal axisymétrique, alors les fonctions de la pression sur la paroi, ou les veloutés doivent être définies dans le domaine de l'avion [1], [2], [3], [4], [5].

1.4.2. Fermeture du problème pour solution unique

Le problème de la valeur initiale est un problème dans lequel la variable dépendante et même possible ses dérivées sont spécifiées initialement (i e, à $t=0$). Le problème de la valeur initiale est généralement un problème qui dépend du temps. Des exemples de problème de la limite et de la valeur initiale sont donnés ci – dessous [5], [6], [7], [8] :

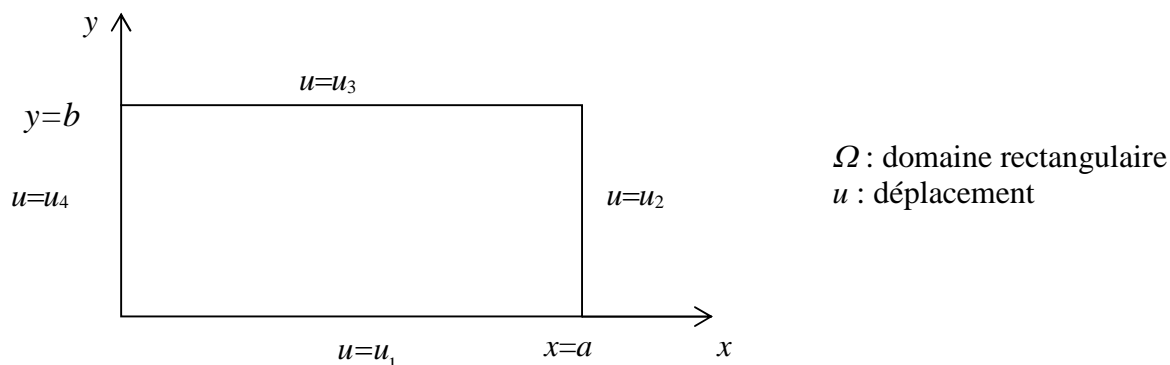
- Le problème de la valeur au limite [5], [6], [7], [8]:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f.$$

$$T = T_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.7)$$

- Le problème de la valeur initiale [5], [6], [7], [8]



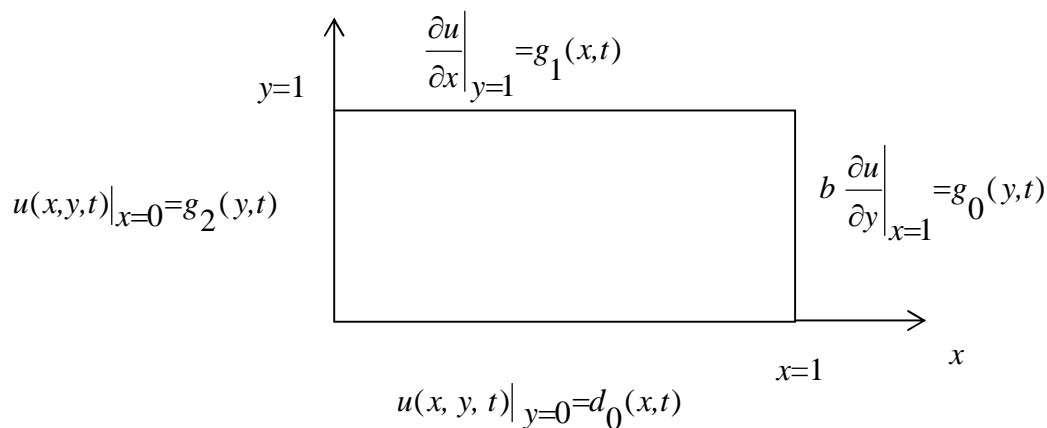
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (\text{vibration d'une membrane}).$$

$$u(t=0) = d_0(x, y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0. \quad (1.8)$$

$$u = u_i \quad \text{sur } \Gamma. \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

- Le problème de la limite et la valeur initiale (problème mixte) [5], [6], [7], [8]:



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, t)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

Les conditions dans les équations (1.7) sont appelées les conditions aux limites, et ceux en équations (1.8) sont appelées les conditions initiales. Quand les valeurs spécifiques (i e , d_0 ,

g_0, g_1, g_2 et u_0) sont non nulles, les conditions sont dites d'être non homogènes, autrement elles sont dites d'être homogènes. Par exemple, $u(0)=d_0$ est une condition au limite non homogène, et la condition au limite homogène associée est $u(0)=0$. L'ensemble des quantités spécifiques ($e, g, a, g_0, d_0, p, u_0$, et v_0) est appelée les données du problème. Les équations différentielles dans lesquelles le membre du deuxième côté f est nulle sont appelées les équations différentielles homogènes [5], [6], [7], [8].

1.5. Equation de Poisson et son application

Le présent paragraphe présente quelques exemples sur le domaine d'application de l'équation de Poisson touchant les différentes disciplines et phénomènes physiques.

1.5.1. Torsion d'une poutre de section non circulaire [6], [7], [10], [11], [12], [14], [15]

Ce problème est présenté par le modèle mathématique suivant:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 1 \quad \text{dans} \quad \Omega = \{(x,y): 0 < (x,y) < 1\} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) \quad u(1,y) = u(x,1) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ici les conditions aux limites sont de type Dirichlet si on considère le maillage complet.

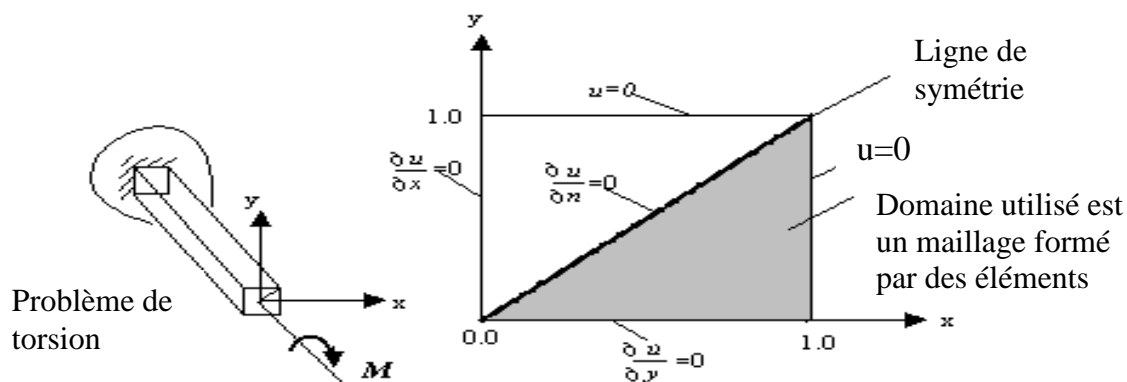


Figure 1.3 : La discrétisation en éléments finis par des éléments triangulaires.

1.5.2. Ecoulement autour d'un cylindre [6], [7], [9], [10], [11], [12], [14], [15]

Un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait (non visqueux) autour d'un cylindre (le cylindre est perpendiculaire au flux entre deux longues plaques):

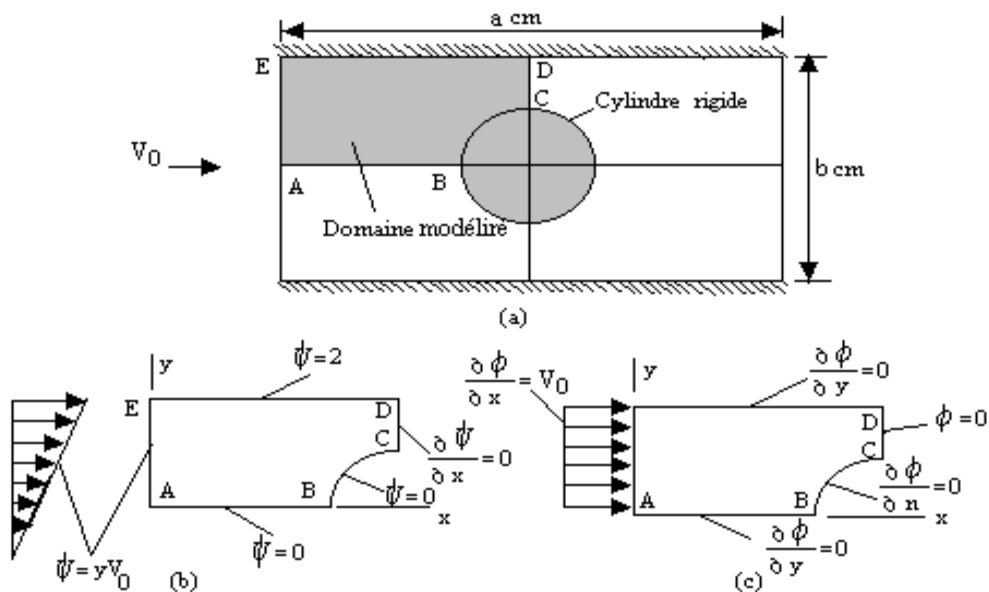


Figure 1.4 : Domaine et conditions aux limites de fonction de courant et formulation potentiel vitesse pour un écoulement irrotationnel d'un fluide autour d'un cylindre.

En utilisant l'analyse par la méthode d'éléments finis l'équation régissant l'écoulement est donnée par :

$$-\nabla^2 f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.10)$$

où f : peut être l'une des deux fonctions :

1. Fonction de courant (ψ)
2. Potentiel de vitesse. (ϕ)

Si f est la fonction de courant (ψ), les composantes du vecteur vitesse sont données par:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.11)$$

Si f est le potentiel de vitesse ϕ , les composantes du vecteur vitesse peuvent être calculées à partir de :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.12)$$

Dans les deux cas la vitesse n'est pas affectée par les constantes de la solution f .

CHAPITRE 2

ANALYSE DE L'EQUATION DE POISSON PAR LA METHODE

DES ELEMENTS FINIS

2.1. Introduction

L'analyse des éléments finis est un peu compliquée, par le fait que les problèmes à deux dimensions sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Le contour Γ du domaine Ω à deux dimensions est en générale une courbe. Cependant, les éléments finis ont des formes géométriques simples que l'on peut utiliser comme une approximation donnée au domaine à deux dimensions. D'autre part, pour les problèmes à 2D, on ne cherche pas uniquement l'approximation de la solution pour les équations aux dérivées partielles données, mais on approxime aussi le domaine donné par un maillage convenable en éléments finis [11].

Par conséquent, on va obtenir une bonne approximation de l'erreur (due à l'approximation de la solution) comme l'erreur de la discrétisation (due à l'approximation du domaine) dans l'analyse des problèmes des éléments finis à deux dimensions. Le maillage des éléments finis concerne les éléments simples 2D tels que, les triangles, rectangles et quadrilatères qu'ils soient connectés entre eux par des points nodaux sur le contour de l'élément. La possibilité de représenter la géométrie du domaine par la collection des éléments finis rend la méthode valable et pratique et un outil pour la résolution des problèmes aux valeurs aux limites touchent une variété des domaines de l'ingénieur [2], [4], [10], [11], [12], [13], [16], [17], [18], [37], [45].

On commence avec la discussion des problèmes décrits par les équations aux dérivées partielles du second ordre. On considère l'équation du second ordre comportant des inconnues u comme une fonction scalaire [8], [10], [11], [14].

2.2. Equations du second ordre comportant de fonction scalaire

2.2.1. Description du Modèle Mathématique

Considérons le problème de la recherche de la solution u de l'équation différentielle de second ordre suivante:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} u - f = 0 \quad (2.1)$$

avec les données a_{ij} ($i, j = 1, 2$), a_{00} et f et les conditions au limites spécifiés.

On peut obtenir l'équation de Poisson à partir de l'équation (2.1) en posons $a_{11}=a_{22}=1$ et $a_{12}=a_{21}=a_{00}=0$:

$$\nabla (a \nabla u) = f \text{ dans } \Omega \quad (2.2)$$

où ∇ est l'opérateur gradient. Si \vec{i} et \vec{j} représentent les vecteurs unitaires dirigés le long des axes x et y , respectivement, l'opérateur gradient peut s'écrire :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad (2.3)$$

2.2.2. Formulation variationnelle [10], [11]

Dans les problèmes à deux dimensions, il ya plusieurs formes géométriques que l'on peut utiliser comme des éléments finis (voir figure 2.1). Comme on va voir, les fonctions d'interpolations ne dépendent pas uniquement que sur le nombre de nœuds dans l'élément, mais aussi de la forme de l'élément.

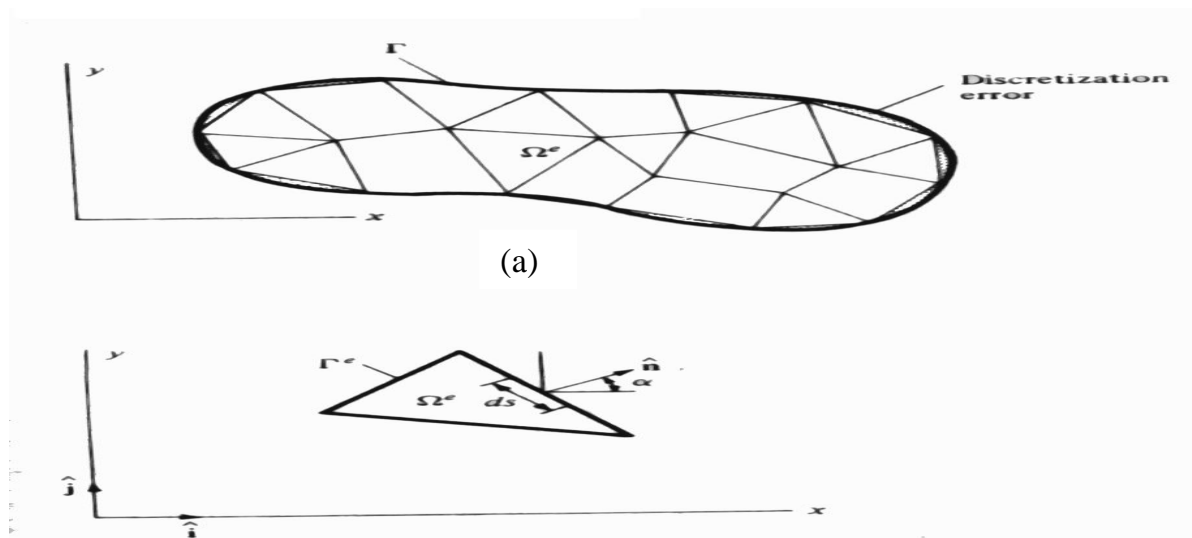


Figure 2.1 : La discrétisation en l'élément finis d'un domaine irrégulier.

(a) La discrétisation par les éléments triangulaires et quadrilatères.

(b) L'élément triangulaire typique (la frontière Γ^e , la normale \vec{n} sur la frontière de l'élément).

On assume que Ω_e est un élément typique, comme un élément triangulaire ou quadrilatère du maillage en éléments finis, et on développera le modèle de l'équation (2.1). Deux types d'éléments finis à deux dimensions seront discutés dans la section suivante.

On va développer la forme variationnelle de l'équation (2.1) avec les éléments typiques. On multiplie l'équation (2.1) par la fonction test v (supposons d'être différentiable une fois avec x et y respectivement) et intégrant sur Ω_e , on obtient :

$$0 = \int_{\Omega_e} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (F_1) - \frac{\partial}{\partial y} (F_2) + a_{00} u - f \right] dx dy \quad (2.4)$$

où

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \quad F_2 = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}$$

On intègre les deux termes premiers dans l'équation (2.4) par parties. Premièrement on note les identités suivantes :

$$\begin{aligned} -v \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} (v F_1) + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 \\ -v \frac{\partial F_2}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} (v F_2) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

On utilise le théorème du gradient (ou divergence) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} (F_1) dx dy &= \int_{\Gamma_e} v F_1 n_x ds \\ \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial y} (F_2) dx dy &= \int_{\Gamma_e} v F_2 n_y ds \end{aligned} \quad (2.6)$$

où : n_x et n_y sont les composantes du vecteur unitaire normale (direction de cosinus)

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \quad (2.7)$$

Sur le contour Γ_e , ds est un arc élémentaire le long du contour (voir figure 2.1b). Substituons les équations (2.5), et (2.6) dans l'équation (2.4), on obtient :

$$0 = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} v u - v f \right] dx dy \quad (2.8)$$

$$- \oint_{\Gamma_e} v \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] ds$$

A partir d'une inspection du terme de la frontière dans l'équation (2.8), on note que la spécification de u constitue la condition au limite essentielle (u est une variable primaire).

$$q_n \equiv n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

Constitue la condition aux limites naturelles (q_n est une variable secondaire) de la formulation.

La fonction $q_n = q_n(s)$ représente la projection du vecteur $F = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$ le long de la normale \vec{n} . Quand $a_{11} = a_{22} = a$ et $a_{21} = a_{12} = 0$, q_n est précisément égale au produit de a et la direction de u respectant la normale \vec{n}

La variable secondaire q_n a un intérêt physique dans plusieurs problèmes. Par exemple, dans le cas du transfert de la chaleur à travers un milieu non isotrope (a_{ij} représente la conductivité de ce milieu), q_n représente le flux de chaleur à travers le contour de l'élément.

La forme variationnelle de l'équation (2.1) est donnée par :

$$0 = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} \cdot v u - v f \right] dx dy \quad (2.10)$$

$$- \oint_{\Gamma_e} v q_n ds$$

L'équation (2.10) est la base de la forme variationnelle du modèle en l'élément finis de l'équation (2.1).

2.2.3. Formulation en élément finis [10], [11], [12], [13], [16], [17], [18], [22], [24], [37], [45]

La forme variationnelle de l'équation (2.10) indique que l'approximation de u choisie doit être au moins bilinéaire en x et en y , donc les deux premiers termes dans cette équation et q_n dans l'équation (2.9) ne sont pas nuls.

Supposons que u est approximer par l'expression suivante :

$$u = \sum_{j=1}^{j=n} u_j \Psi_j \quad (2.11)$$

où u_j sont les valeurs de u aux points (x_j, y_j) et Ψ_j sont les fonctions d'interpolations linéaires avec la propriété:

$$\Psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (2.12)$$

avec δ_{ij} est le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

La forme spécifique de Ψ_j sera dérivée pour les éléments triangulaires linéaires et les éléments rectangulaires dans le paragraphe (2.2.4), (voit aussi paragraphe 2.4).

Substituons l'équation (2.11) dans la forme variationnelle (2.10) on obtient :

$$0 = \sum_{j=1}^{j=n} \left\{ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \Psi_i \Psi_j \right] dx dy \right\} u_j - \int_{\Omega_e} f \Psi_i dx dy - \oint_{\Gamma_e} \Psi_i q_n ds \quad i=1, 2, 3, \dots, n$$

Ou

$$\sum_{j=1}^{j=n} K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = F_i^{(e)} \quad (2.13)$$

telle que

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \Psi_i \Psi_j \right] dx dy$$

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \Psi_i dx dy + \oint_{\Gamma_e} q_n \Psi_i ds \quad (2.14)$$

Notons que $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$ (c'est-à-dire, la matrice $[K]$ est symétrique) seulement si $a_{12} = a_{21}$.

L'équation (2.13) représente le modèle mathématique en éléments finis de l'équation (2.1).

Dans la prochaine section nous discuterons la dérivation des fonctions d'interpolations.

2.2.4. Fonctions d'Interpolations [11], [19]

Un examen de la forme variationnelle (2.10) et les matrices de rigidité de l'élément fini dans les équations (2.14) montre que la fonction Ψ_i doit être au moins une fonction bilinéaire en x et en y . Comme indiqué auparavant, il y a une relation entre le nombre et les positions des points nodaux et le nombre de Degré De Liberté inconnus par nœud dans un élément fini et le nombre de termes généralisés utilisés dans l'approximation du polynôme de la solution u .

Dans les problèmes unidimensionnels du second ordre, le nombre de nœuds n dans un seul élément fini définit le degré r du polynôme, avec la relation qui existe entre n et r est $n = r + 1$. Pour les problèmes à deux dimensions du second d'ordre, la relation entre le nombre de nœuds (qui est égal au nombre de termes dans le polynôme de l'approximation de u) et le degré du polynôme n'est pas unique. Par exemple, le polynôme

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y \quad (2.15)$$

Contient trois termes (linéairement indépendants), et il est linéaire pour x et y . Cependant pour le polynôme

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x y \quad (2.16)$$

Contient quatre termes (linéairement indépendants), mais il est aussi linéaire pour x et y .

L'approximation (2.15) exige un élément avec trois nœuds (avec un degré de liberté pour chaque nœud), et le dernier exige un élément en deux dimensions de quatre nœuds (toujours avec un degré de liberté pour chaque nœud). L'élément bidimensionnel avec trois nœuds est un triangle avec nœuds aux sommets du triangle.

Quand le nombre de nœuds est égal à 4, on peut choisir un triangle avec le quatrième nœud au centre (ou centroid) du triangle ou un rectangle (ou quadrilatère) avec les nœuds aux sommets du rectangle. Un polynôme avec cinq constantes est un polynôme quadratique (polynôme incomplet) :

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x y + c_5 (x^2 + y^2) \quad (2.17)$$

qui peut être utilisé pour former un élément avec cinq nœuds (par exemple, un rectangle avec un nœud à chaque sommet et un nœud au centre du rectangle). De la même manière, le polynôme du second degré suivant :

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x y + c_5 x^2 + c_6 y^2 \quad (2.18)$$

Avec six constantes, peut être utilisé pour construire un élément avec six nœuds (par exemple, un triangle avec un nœud à chaque sommet et aux milieux de chaque côté). Des exemples de trois, quatre, cinq, et six nœuds sont montrés dans la figure 2.2 suivante.

Ici nous dérivons les fonctions d'interpolations linéaires pour l'élément triangulaire à trois nœuds et l'élément rectangulaire à quatre nœuds.

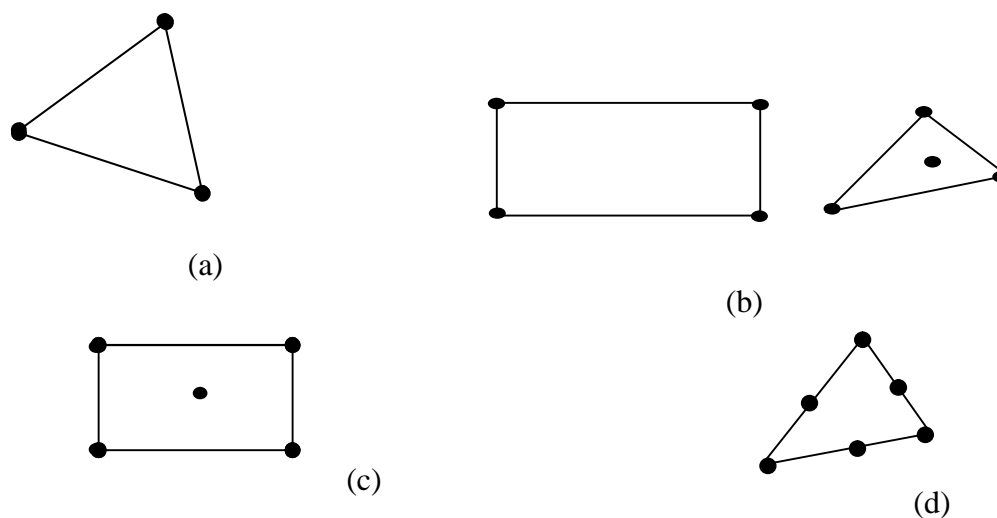


Figure 2.2 : Les éléments finis à deux dimensions

- (a) élément à trois nœuds
- (b) éléments à quatre nœuds
- (c) éléments cinq nœuds
- (d) élément à six nœuds

2.2.4.1. Fonctions d'interpolations d'un élément triangulaire à trois nœuds :

Considérons l'approximation linéaire (2.15). L'ensemble $(1, x, y)$ est linéairement indépendant et complet. Nous devons réécrire l'approximation (2.15) telle ce qu'elle satisfait les conditions suivantes:

$$u(x_i, y_i) = u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

où (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3$) sont les coordonnées du trois sommets du triangle. Autrement, on détermine les trois constantes c_i dans l'équation (2.15) en fonctions de u_i à partir de l'équation (2.19) :

$$\begin{aligned}
u_1 &\equiv u(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 \\
u_2 &\equiv u(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \\
u_3 &\equiv u(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Sous la forme matricielle, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{2.21}$$

Notons que les nœuds sont numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Résolvons le système d'équations (2.21) pour c_i ($i=1, 2, 3$), on obtient :

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2 A_e} [u_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + u_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + u_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1)] \\
c_2 &= \frac{1}{2 A_e} [u_1 (y_2 - y_3) + u_2 (y_3 - y_1) + u_3 (y_1 - y_2)] \\
c_3 &= \frac{1}{2 A_e} [u_1 (x_3 - x_2) + u_2 (x_1 - x_3) + u_3 (x_2 - x_1)]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Où A_e est l'aire du triangle. Elle est donnée par :

$$2 A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \tag{2.23}$$

Le déterminant possède un signe opposé si les nœuds sont numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre. Substituons les équations (2.22) dans l'équation (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_1 \Psi_1(x, y) + u_2 \Psi_2(x, y) + u_3 \Psi_3(x, y) \\
&= \sum_{i=1}^3 u_i \Psi_i^{(e)}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

où $\Psi_i^{(e)}$ sont les fonctions d'interpolations linéaires pour l'élément triangulaire.

$$\Psi_i^{(e)} = \frac{1}{2 A_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i=1, 2, 3 \tag{2.25a}$$

et $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont des constantes données par :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \end{aligned} \right\} i \neq j \neq k \text{ et } i, j, k \text{ permute dans l'ordre naturelle} \quad (2.25b)$$

Par exemple, α_2 est donné en posant $i=2, j=3$, et $k=1$ dans l'équation (2.25b) :

$$\alpha_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

Pour obtenir β_3 on pose $i=3, j=1$ et $k=2$ dans l'équation (2.25b) :

$$\beta_2 = y_3 - y_1$$

Les fonctions d'interpolations $\Psi_i^{(e)}$ sont illustrées dans la figure 2.3. Notons que la fonction Ψ_i possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi_i(x_j, y_j) &= \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^{i=3} \Psi_i &= 1 \quad i, j=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Notons encore que l'équation (2.24) détermine une surface plane passant par u_1, u_2 et u_3 . Cependant, en utilisant ces fonctions d'interpolations Ψ_i pour un triangle, on peut approximer une fonction curviligne continue $u(x,y)$ par des fonctions planes $\sum_{i=1}^{i=3} u_i \Psi_i$ [voir figure 2.4].

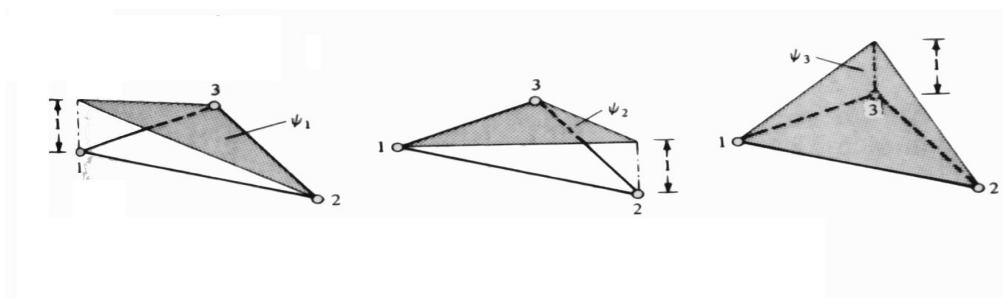


Figure 2.3 : Fonctions d'interpolations linéaires pour un élément triangulaire à trois nœuds.

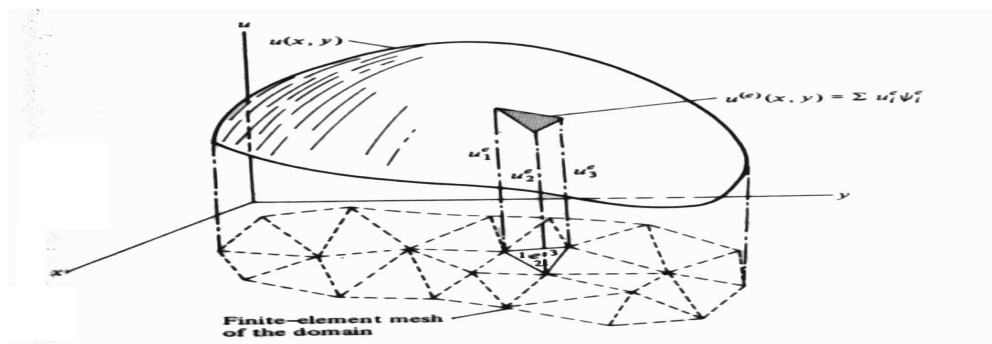


Figure 2.4 : Représentation de la continuité de la fonction $u(x, y)$ par des fonctions d'interpolations linéaires d'un triangle à trois nœuds.

2.2.4.2. Fonctions d'interpolations pour un élément rectangulaire à quatre nœuds [10], [11]

Dans ce cas, nous considérons l'approximation de la forme (2.16) et utilisant un élément rectangulaire avec les longueurs des cotés a et b [voir figure 2.5]. Par raison de commodité, on choisi un système de coordonnées local (ξ, η) pour dériver les fonctions d'interpolations. Supposons que:

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2 \xi + c_3 \eta + c_4 \xi \eta \quad (2.27)$$

alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0, 0) = c_1 \\ u_2 &= u(a, 0) = c_1 + c_2 a \\ u_3 &= u(a, b) = c_1 + c_2 a + c_3 b + c_4 a b \\ u_4 &= u(0, b) = c_1 + c_3 b \end{aligned} \quad (2.28)$$

Résolvons ces équations par rapport à c_i ($i = 1, 2, 3, 4$), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

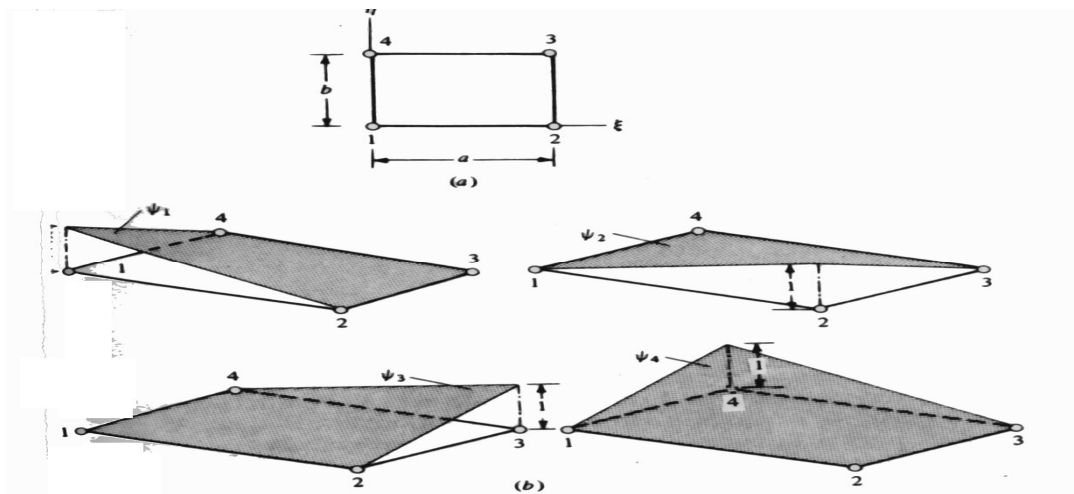


Figure 2.5 : Élément rectangulaire à quatre nœuds avec les fonctions d'interpolations associées.

(a) Élément rectangulaire à quatre nœuds.

(b) Fonctions d'interpolations linéaire

Substituons l'équation (2.29) dans l'équation (2.27), nous obtenons :

$$u(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=4} u_i \Psi_i(\xi, \eta) \quad (2.30)$$

où

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\xi, \eta) &= \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) \\
\Psi_2(\xi, \eta) &= \frac{\xi}{a} \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) \\
\Psi_3(\xi, \eta) &= \frac{\xi \eta}{ab} \\
\Psi_4(\xi, \eta) &= \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \frac{\eta}{b}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Les fonctions d'interpolations sont illustrées dans la figure 2.5b. Nous avons encore :

$$\Psi_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad i, j=1, 2, 3, 4 \tag{2.32}$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \Psi_i = 1 \tag{2.33}$$

La procédure présentée auparavant donnée pour la construction des fonctions d'interpolations, implique l'inversion d'une matrice carrée d'ordre $(n \times n)$ [voir équation (2.29)], où n est le nombre de nœuds dans l'élément (plus précisément le nombre de D.D.L.). Quand n est grand, l'inversion devient très longue. Nous illustrons la procédure pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds. La première propriété de l'équation (2.32) exige que :

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\xi_i, \eta_i) &= 0 \\
\Psi_1(\xi_1, \eta_1) &= 1 \quad i = 2, 3, 4
\end{aligned}$$

telle que, Ψ_1 est identiquement nulle sur les lignes $\xi=a$ et $\eta=b$. D'ici, $\Psi_1(\xi, \eta)$ doit être de la forme

$$\Psi_1(\xi, \eta) = c_1 (a - \xi) (b - \eta)$$

a partir de la condition $\Psi_1(\xi_1, \eta_1) = \Psi_1(0,0) = 1$, on obtient $c_1 = \frac{1}{ab}$. Cependant :

$$\Psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{ab} (a - \xi) (b - \eta) = \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \left(1 - \frac{\eta}{b}\right)$$

Egalement, de la même façon, on peut obtenir les trois autres fonctions d'interpolations.

2.2.5. Calcul des matrices de rigidités [2], [10], [11], [12], [16], [17], [19], [21], [37], [60]

Le calcul des matrices de l'élément $[K^{(e)}]$ et $\{F^{(e)}\}$ dans l'équation (2.14) par les méthodes conventionnelles (par intégration exacte) est, en général, pas facile. De quelque manière que, quand a_{11} , a_{00} et f sont constantes, il est possible d'évaluer exactement les intégrales sur les éléments triangulaires, rectangulaires et quadrilatères discutés dans la section précédente. L'intégrale curviligne de frontière dans $\{F^{(e)}\}$ de l'équation (2.14) peut être évaluée si q_n est connue. Pour un élément interne (c'est-à-dire, un élément qui ne possède aucun de ces cotés avec la frontière du domaine), La contribution de l'intégrale curviligne de l'élément de maillage (analogie au $P_i^{(e)}$ et $Q_i^{(e)}$ dans les problèmes à une seule dimension). Par égard, pour brièveté, nous récrivons $[K^{(e)}]$ dans Equation (2.14) comme la somme de quatre matrices de base $[S^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta=1,2$) et $[S]$.

$$[K^{(e)}] = a_{11} [S^{11}] + a_{12} [S^{12}] + a_{21} [S^{12}]^T + a_{22} [S^{22}] + a_{00} [S] \quad (2.34a)$$

où

$$S_{ij}^{11} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} dx dy \quad S_{ij}^{12} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} dx dy \quad (2.34b)$$

$$S_{ij}^{22} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} dx dy \quad S_{ij} = \int_{\Omega_e} \Psi_i \Psi_j dx dy$$

En peut écrire aussi :

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \Psi_i dx dy \quad Q_i^{(e)} = \oint_{\Gamma_e} q_n \Psi_i ds \quad (2.35)$$

On procède au calcul des matrices dans l'équation (2.34) et (2.35) en utilisons la dérivée de la fonction d'interpolation linéaire dans la section précédente.

2.2.5.1. Matrice de rigidité d'un élément triangulaire à trois nœuds [10], [11], [19], [60], [61]

Pour un triangle, les formules des intégrales exactes suivantes sont nécessaires pour l'évaluation des éléments des matrices de l'élément [10], [11], [19], [46], [60], [61].

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (2.36)$$

Alors nous avons:

$I_{00}=A$ L'aire de la surface du triangle

$$I_{10}=A x_G \quad x_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i$$

$$I_{01}=A y_G \quad y_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$I_{11} = \frac{A}{12} \left[\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9 x_G y_G \right] \quad (2.37)$$

$$I_{20} = \frac{A}{12} \left[\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 x_G^2 \right]$$

$$I_{02} = \frac{A}{12} \left[\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 y_G^2 \right]$$

Utilisons les fonctions d'interpolations linéaires (2.25) dans les équations (2.34b) et (2.35) et notons que :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A} \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A} \quad (2.38)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} S_{ij}^{11} &= \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j & S_{ij}^{12} &= \frac{1}{4A} \beta_i \gamma_j & S_{ij}^{22} &= \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j \\ S_{ij} &= \frac{1}{4A} \left\{ \left[\alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) x_G + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) y_G \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{A} \left[I_{20} \beta_i \beta_j + I_{11} (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) + I_{02} \gamma_i \gamma_j \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.39a)$$

Connaissant que : $\alpha_i + \beta_i x_G + \gamma_i y_G = \frac{2A}{3}$ [qui peut être obtenu à partir des équations (2.25b) et (2.37)], on a alors :

$$f_i^{(e)} = \frac{f}{2} (\alpha_i + \beta_i x_G + \gamma_i y_G) = \frac{f \cdot A}{3} \quad (2.39b)$$

Une fois les coordonnées des nœuds de l'élément sont connues, on peut calculer facilement $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ à partir de l'équation (2.25b) et substituons ensuite dans l'équation (2.39) pour obtenir les matrices de l'élément.

2.2.5.2. Matrice de rigidité d'un élément rectangulaire à quatre nœuds [10], [11], [24], [60]

Comme a_{ij} , a_{00} et f sont des constantes on peut utiliser les fonctions d'interpolations de l'équation (2.31) en remplaçant q_n spécifié respectivement. On obtient:

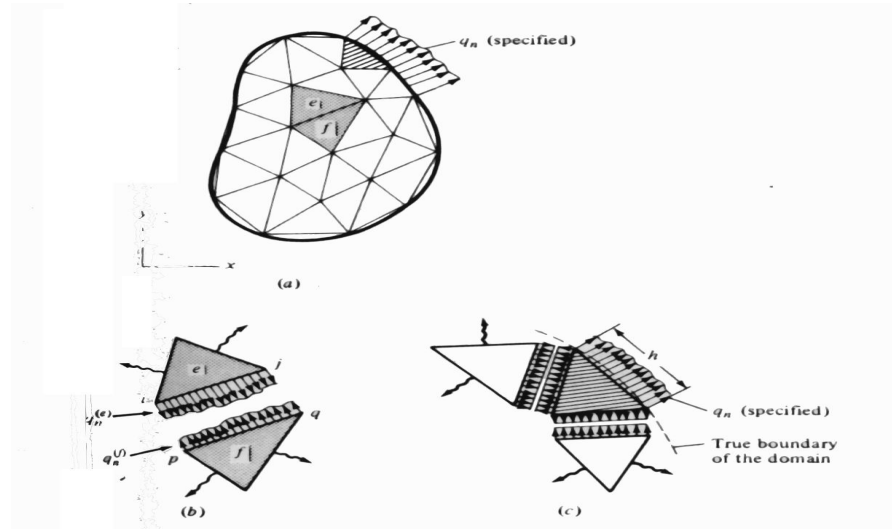
$$\begin{aligned}
 [S^{11}] &= \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} & [S^{12}] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 [S^{21}] &= \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & [S] &= \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\
 \{f\} &= \frac{fab}{4} \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T & & (2.40)
 \end{aligned}$$

2.2.5.3. Evaluation de l'intégrale de frontière

Ici nous considérons l'évaluation des intégrales curvilignes du type [10], [11], [19], [21], [22], [37], [39], [45], [46]:

$$Q_i^{(e)} = \oint_{\Gamma_e} q_i^{(e)} \Psi_i^{(e)}(s) ds \quad (2.41)$$

quand $q_n^{(e)}$ est une fonction connue de la distance s le long de la frontière Γ^e , le calcul de chaque intégrale n'est pas nécessaire quand une portion de Γ^e ne coïncide pas avec la frontière Γ du domaine Ω . Des portions de Γ^e est dans le domaine, $q_n^{(e)}$ sur le côté (i, j) de l'élément (e) annule avec $q_n^{(f)}$ sur le côté (p, q) de l'élément (f) quand le côté (i, j) de l'élément (e) est (p, q) de l'élément (f) sont confondus. Il peut être considéré comme un équilibre des forces internes [voir figure 2.6 b,c)]. Quand Γ^e se trouve sur le contour.

Figure 2.6 : Evaluation de flux Q

Du domaine, $q_n^{(e)}$ est encore connue (en générale en fonction de s), ou peut être déterminé dans les calculs prochains. Dans le dernier cas, la variable primaire va être spécifiée (sur la portion du contour où q_n n'est pas spécifié).

Le contour Γ^e de l'élément linéaire à deux dimensions est l'ensemble des éléments linéaires à une dimension. Cependant, l'évaluation de l'intégrale curviligne de frontière atteint l'évaluation des intégrales sur lignes. Pour fixer les idées, considérons un élément fini qui a une portion du contour sur la frontière du domaine [voir Figure 2.2.6c] et on assume que q_n est connue dans ce contour alors :

$$\int_0^h q_n(s) \Psi_i(s) ds = Q_i \quad (2.42)$$

donne la contribution de q_n au nœud i . Ici h représente la longueur du côté où q_n est appliquée et $\Psi_i(s)$ sont les fonctions d'interpolation à une dimension. Quand $\Psi_i(x,y)$ sont linéaires [alors $\Psi_i(s)$ sont linéaires], i prend les valeurs 1 et 2 et quand $\Psi_i(x,y)$ sont quadratiques [alors $\Psi_i(s)$ sont quadratiques], i prend les valeurs 1, 2 et 3. Par exemple, quand

$\Psi_i(s)$ sont linéaires ($\Psi_1 = 1 - \frac{s}{h}$, $\Psi_2 = \frac{s}{h}$), on aura :

$$Q_i = \begin{cases} \int_0^h q_n \Psi_i ds & \text{pour } q_n \text{ arbitraire} \\ \frac{q_n h}{2} & \text{pour } q_n \text{ constante} \end{cases} \quad (2.43)$$

2.2.6. Assemblage des matrices de rigidités élémentaires

L'assemblage des équations des éléments finis est basé sur le même principe que les problèmes à une dimension. On illustre la procédure par la considération du maillage de l'élément finis construit par un élément triangulaire et un élément quadrilatère [voir figure 2.7a]. Soit $K_{ij}^{(1)}$ ($i, j=1, 2, 3$) représente les éléments de la matrice correspondante de l'élément triangulaire, et soit $K_{ij}^{(2)}$ ($i, j=1, 2, 3, 4$) représente les éléments de la matrice de rigidité de l'élément quadrilatère. A partir du maillage en l'élément finis présenté dans la figure 2.7a, on note la correspondance suivante entre les valeurs des éléments globales [2], [11], [16], [17], [18], [19], [22], [24], [31], [37], [45], [46], [57].

$$U_1 = u_1^{(1)} \quad ; \quad U_2 = u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \quad ; \quad U_3 = u_3^{(1)} = u_4^{(2)} \quad ; \quad U_4 = u_2^{(2)} \quad ; \quad U_5 = u_3^{(2)} \quad (2.4)$$

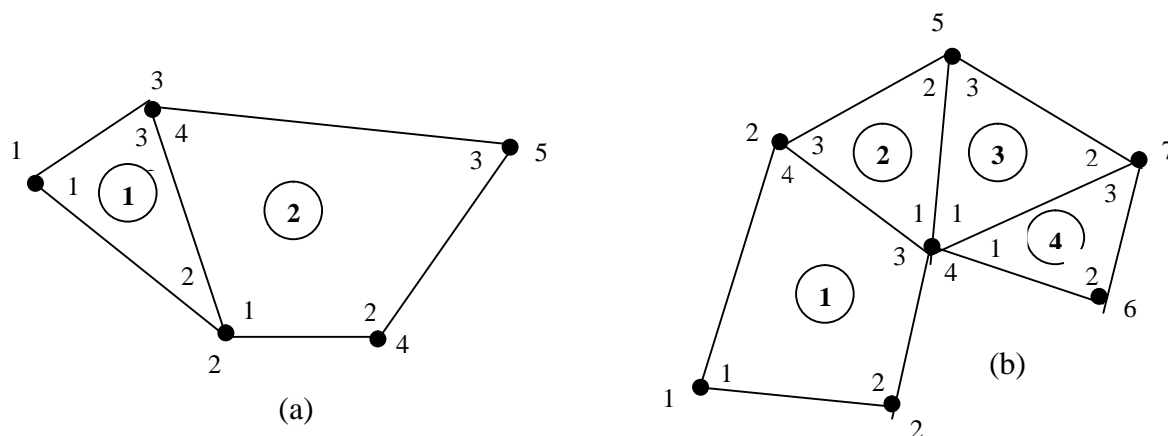


Figure 2.7 : Assemblage des matrices de rigidité
 (a) Assemblage de deux éléments
 (b) Assemblage de plusieurs éléments

- Matrice de rigidité de l'élément (1) est la suivante :
- Matrice de rigidité de l'élément (2) est la suivante :

$$[K]^{(1)} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} \\ \hline 2 & K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} \\ \hline 3 & K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} \\ \hline \end{array}$$

$$[K]^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\ \hline 2 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ \hline 3 & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ \hline 4 & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \\ \hline \end{array}$$

Alors la matrice de rigidité du cas (a) de la figure 2.7 est donnée par :

$$[K] = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ \hline 2 & K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ \hline 3 & K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{41}^{(2)} & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} \\ \hline 4 & 0 & K_{21}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ \hline 5 & 0 & K_{31}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \\ \hline \end{array}$$

Notons que la continuité des valeurs nodales à l'inter-élément des nœuds garantit la continuité de la variable primaire le long de l'inter-élément entier de la frontière. Pour cela rappelons que l'approximation en élément fini est linéaire le long du contour des éléments linéaires triangulaires et quadrilatères, puisque un polynôme linéaire et uniquement défini par deux constantes (les valeurs aux nœuds sur le contour) et les constantes sont les mêmes dans les éléments étudiés dans chaque partie du contour. On peut montrer que la variable primaire et uniquement définie le long du contour de l'inter-élément. Ensuite on utilise les conditions de la continuité de l'inter-élément (2.44) et l'équation (2.25) pour assembler les équations de l'élément :

$$0 = \sum_{e=1}^{e=2} \left\{ \delta^{(e)} \right\}^T \left([K^{(e)}] \left\{ u^{(e)} \right\} - \left\{ F^{(e)} \right\} \right) = \sum_{e=1}^{e=2} \sum_{i=1}^{i=n_e} \delta u_i^{(e)} \left[\sum_{j=1}^{j=n_e} K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} - F_i^{(e)} \right] \quad n_1=3 \quad ; \quad n_2=4$$

ou

$$\begin{aligned} 0 = & \delta_1 \left[K_{11}^{(1)} U_1 + K_{12}^{(1)} U_2 + K_{13}^{(1)} U_3 - F_1^{(1)} \right] \\ & + \delta_2 \left[K_{21}^{(1)} U_1 + K_{22}^{(1)} U_2 + K_{23}^{(1)} U_3 - F_2^{(1)} \right] \\ & + \delta_3 \left[K_{31}^{(1)} U_1 + K_{32}^{(1)} U_2 + K_{33}^{(1)} U_3 - F_3^{(1)} \right] \\ & + \delta_2 \left[K_{11}^{(2)} U_2 + K_{12}^{(2)} U_4 + K_{13}^{(2)} U_5 + K_{14}^{(2)} U_3 - F_1^{(2)} \right] \\ & + \delta_4 \left[K_{21}^{(2)} U_2 + K_{22}^{(2)} U_4 + K_{23}^{(2)} U_5 + K_{24}^{(2)} U_3 - F_2^{(2)} \right] \\ & + \delta_5 \left[K_{31}^{(2)} U_2 + K_{32}^{(2)} U_4 + K_{33}^{(2)} U_5 + K_{34}^{(2)} U_3 - F_3^{(2)} \right] \\ & + \delta_3 \left[K_{41}^{(2)} U_2 + K_{42}^{(2)} U_4 + K_{43}^{(2)} U_5 + K_{44}^{(2)} U_3 - F_4^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Rassemblons les coefficients de δU_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) séparément et écrivons le résultats sous la forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{23}^{(1)}+K_{14}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)}+K_{41}^{(2)} & K_{33}^{(1)}+K_{44}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{31}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)}+F_1^{(2)} \\ F_3^{(1)}+F_4^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

La procédure d'assemblage décrite au paravent peut être interprétée pour chaque chemin que l'un peut éviter les calculs dans l'équation (2.45).

La forme finale de la matrice $[K]$ et des vecteurs $\{U\}$ et $\{F\}$ du cas (b) de la figure 2.7 sont donnés par :

$$\{U\} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{pmatrix} \quad \{F\} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_4^{(1)}+F_3^{(2)} \\ F_3^{(1)} \\ F_3^{(2)}+F_1^{(2)}+F_1^{(3)}+F_1^{(4)} \\ F_2^{(2)}+F_3^{(3)} \\ F_2^{(3)}+F_3^{(4)} \end{pmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{44}^{(1)}+K_{33}^{(2)} & K_{43}^{(1)}+K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & 0 & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{34}^{(1)}+K_{13}^{(2)} & K_{33}^{(1)}+K_{11}^{(2)}+K_{11}^{(3)}+K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(2)}+K_{13}^{(3)} & K_{12}^{(4)} & K_{12}^{(3)}+K_{13}^{(4)} \\ 0 & 0 & K_{23}^{(2)} & K_{21}^{(2)}+K_{31}^{(3)} & K_{22}^{(2)}+K_{33}^{(3)} & 0 & K_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(4)} & 0 & K_{22}^{(4)} & K_{23}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(3)}+K_{31}^{(4)} & K_{23}^{(3)} & K_{32}^{(4)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 3

GENERATION DE MAILLAGE

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite dans le chapitre précédent, nécessite l'utilisation des méthodes numériques puissantes pour résoudre le système algébrique qui en résulte. Ce chapitre traite le problème de la génération de maillage pour les domaines simplement connexes bidimensionnels.

Il existe plusieurs méthodes et techniques de génération de maillage que se soit triangulaires ou quadrilatères. Citons à titre exemple les méthodes suivantes qu'on peut les trouver dans la littérature et les références indiquées. Notre but ici, c'est par de faire une synthèse sur les méthodes existantes, mais pour fixée les idées on donne uniquement le nom de la méthode [1], [41], [42], [43], [44], [46], [47], [57], [58], [59].

- Maillage structuré elliptique par résolution de l'équation de Laplace [1], [41].
- Maillage structuré de type 'O' , 'C' et autres par coupure [1], [41].
- Maillage structuré par la technique des transformations conformes [1], [41].
- Maillage structuré par la méthode de Chwartz Cristoffel [1], [41], [42].
- Maillage structuré par la méthode de Gilding [1], [41].
- Maillage Structuré par technique de multi surface [1], [41].
- Maillage non structuré par la triangulation de Delaunay [59].
- Maillage non structuré par la méthode devant ' Front Method' [58].
- Maillage triangulaire non structuré de Klenstreurer [41].

La liste des méthodes existantes reste ouverte [41], il suffit uniquement de consulter les références pour faire le choix de la méthode qui convient pour le domaine à considéré. Ici dans notre étude, on va développer une méthode algébrique qui donne un maillage structuré, dont les cellules sont de forme quadrilatères qu'on peut facilement les transformer en des cellules triangulaires. Le maillage qu'on va obtenir est de la forme ' H '.

3.1. Procédure de génération de maillage type 'H'

Comme on à déjà parler au chapitre 1 que nous somme intéressé aux domaines de type simplement connexes (2D). La forme générale de ce domaine peut être présentée par :

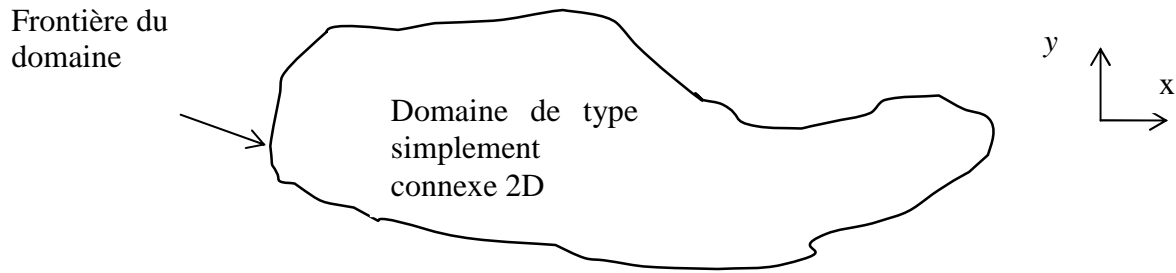


Figure 3.1 : Domaine simplement connexe

Pour faire la génération de maillage à l'intérieur de ce domaine, et parmi les plusieurs méthodes et techniques employées et suivant la méthode de résolution du système algébrique ainsi que la manière de considération la forme de la matrice de rigidité, il est très intéressant d'appliquer l'idée de génération de maillage dans les régions rectangulaires pour ce type de problème et de considérations.

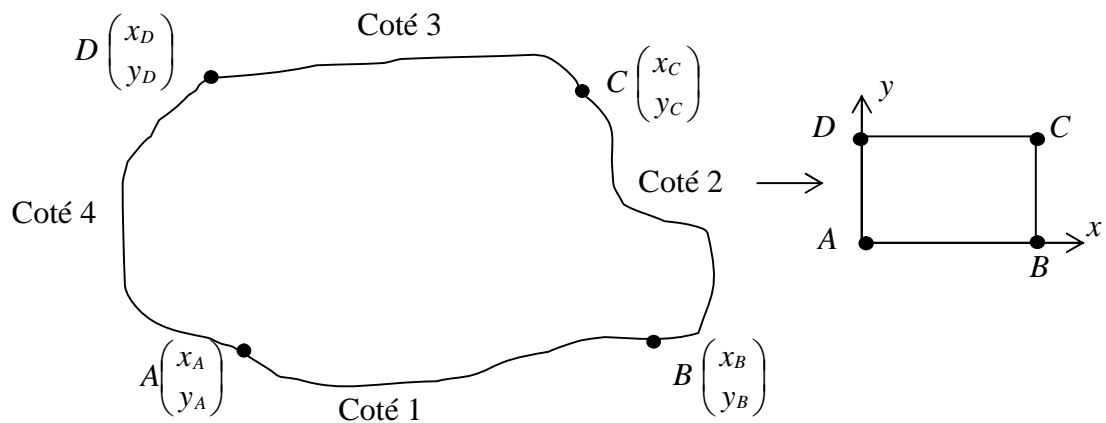


Figure 3.2 : Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle.

On obtient par conséquent quatre cotés qui sont respectivement AD , AB , BC et CD . Si on fait des transformations continues à chaque cotés, on peut les rendre des lignes de droites comme le montre la figure adjacente. Alors le coté AB du domaine joue le rôle de la partie basse du rectangle. Le coté CD est celui de la partie haute du rectangle. Les cotés AD et BC sont ceux de la partie gauche et droite du rectangle.

Pour le rectangle lui même, considérons la subdivision par N_x et N_y nœuds sur l'axe horizontal des x et vertical des y respectivement. Par analogie, les cotés AB et CD du domaine seront subdivisés en N_x nœuds et les cotés AD et BC seront subdivisés en N_y nœuds.

3.1.1. Génération des nœuds sur le contour du domaine

Avant de commencer la génération des nœuds internes, il faut commencer par ceux de la frontière de chaque cotés.

Plusieurs procédures peuvent être considérées et cela suivant la disposition de la courbure de chaque cotés. Dans le cas général, il n'est pas facile de procéder à une méthode universelle qui sera applicable pour n'importe quelles courbes, mais on essaye d'adapter pour chaque forme complexe une procédure convenable, sans oublier de dire que le choix des points A , B , C et D influe sur la forme des quatre cotés du domaine. Parmi les critères de choix des positions des points A , B , C et D est que les fonctions sur les cotés AB , BC , CD et DA doivent être univoque en x ou y , c'est-à-dire, pour chaque valeur de x il y a une image sur les cotés AB et CD . En ce qui concerne les fonctions qui passent par les points AD et BC est quelles doivent être aussi univoque mais en y .

Par exemple, la courbe suivante est multivoque en x et y . Dans ce cas, pour rendre les cotés univoques, il faut faire soit :

- Changer les positions des points A , B , C et D .
- Subdiviser le domaine en quelque blocs de tel sorte que les cotés soit univoques. Ici, il faut respecter la continuité de passage des nœuds entre les blocs.

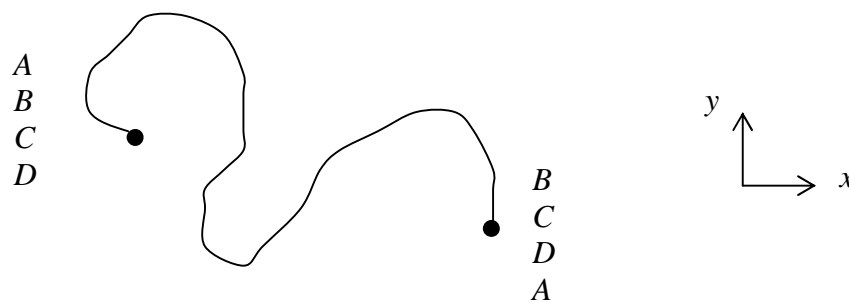


Figure 3.3 : Courbe d'une fonction multivoque

Dans ce qui suit, on suppose que les fonctions des cotés choisies du domaine sont univoques. Considérons les cotés AB et CD . Les positions des points A , B , C et D sont donnés. On regarde ensuite ce qu'on divise le segment $[x_A, x_B]$ en N_x nœuds ensuite déterminer les y_i ($i=1, 2, \dots, N_x$) correspondantes ou, de diviser le segment $[y_A, y_B]$ en N_x nœuds ensuite déterminer les x_i ($i=1, 2, \dots, N_x$). Pour prendre décision, on essaye de calculer les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} x_{dis} &= |x_B - x_A| \\ y_{dis} &= |y_B - y_A| \end{aligned} \quad (3.1)$$

On calcule la valeur maximale entre x_{dis} et y_{dis} par :

$$d_{\max} = \text{Max}(x_{dis}, y_{dis}) \quad (3.2)$$

Si $d_{\max} = x_{dis}$ on propose les valeurs des x_i ($i=1, 2, 3, \dots, N_x$) ensuite déterminer les y_i en utilisant la fonction qui passe par les points A et B du côté AB . Dans certains cas, pour prendre décision, il est mieux de voir encore si la fonction est donnée par $y=f_{AB}(x)$ ou $x=g_{AB}(y)$ pour ne pas calculer la fonction inverse. On suppose qu'on a fait le choix des x_i ensuite calculer les y_i , alors, on divise le segment $[x_A, x_B]$ en N_x nœuds dont les points A et B sont inclus.

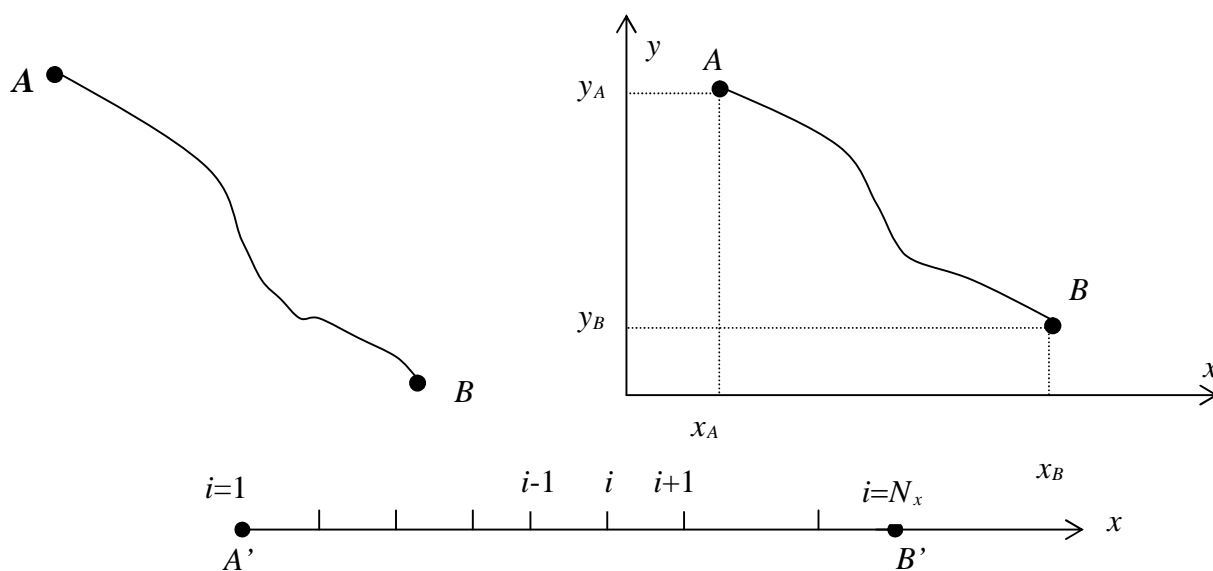


Figure 3.4 : Discretisation sur le côté AB

Avec : A' et B' projections des points A et B respectivement sur l'axe horizontal des x .

Pour simplifier, on choisit un pas constant de subdivision et si le côté et courbe au voisinage du point A ou B ou n'importe quelle région, il est recommandé d'utiliser une procédure de condensation des nœuds, dont on propose sa procédure dans le prochain paragraphe. On obtient, par conséquent $(N_x - 1)$ sous intervalles. La longueur de chaque intervalle est donnée par :

$$\Delta x_{AB} = \frac{|x_B - x_A|}{(N_x - 1)} \quad (3.3)$$

Les abscisses des points de ce coté sont donnés par :

$$x_{AB}(i) = x_A + (i-1) \Delta x_{AB} \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad (3.4)$$

avec :

$$\begin{aligned} i=1 & \quad ; \quad x_{AB}(i=1) = x_A \\ i=N_x & \quad ; \quad x_{AB}(i=N_x) = x_B \end{aligned}$$

Les ordonnées des points sont données par :

$$y_{AB}(i) = f_{AB}(x_{AB}(i)) \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad (3.5)$$

où $f_{AB}(x)$: La fonction du coté AB supposée donner en coordonnées cartésiennes.

Concernons maintenant le coté CD et par analogie avec le coté AB , on aura le suivant en changeons uniquement A par D , B par C et $f_{AB}(x)$ par $f_{DC}(x)$. Alors :

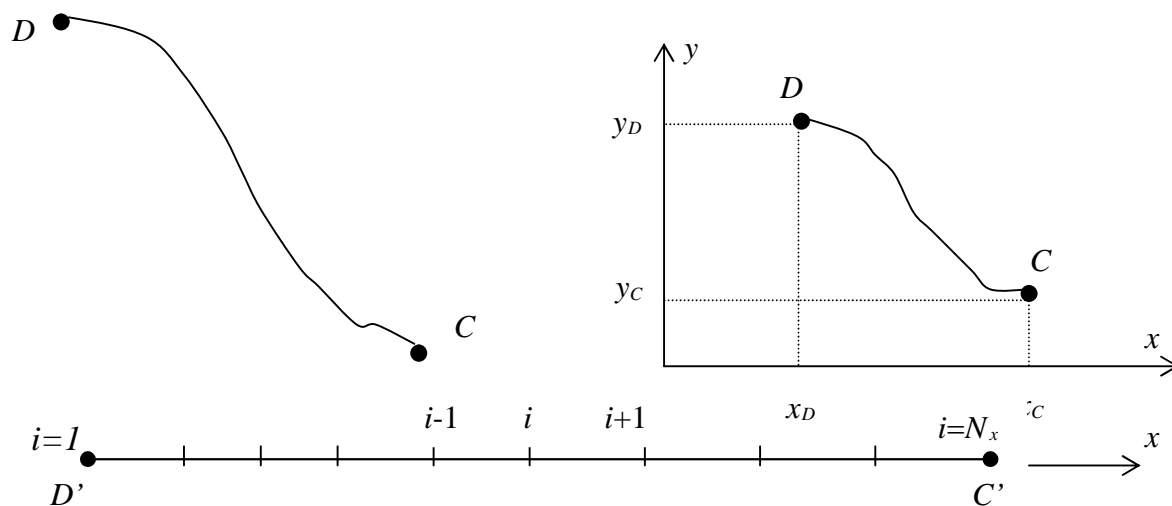


Figure 3.5 : Discretisation sur le coté DC

$$\Delta x_{CD} = \frac{x_C - x_D}{(N_x - 1)} \quad (3.6)$$

$$x_{DC}(i) = x_D + (i-1) \Delta x_{CD} \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad (3.7)$$

avec:

$$\begin{aligned} i=1 & \quad ; \quad x_{DC}(1) = x_D \\ i=N_x & \quad ; \quad x_{DC}(N_x) = x_C \end{aligned}$$

et

$$y_{DC}(i) = f_{DC}(x_{DC}(i)) \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad (3.8)$$

où $f_{DC}(x)$: est la fonction du coté DC

La génération des nœuds sur les contours AD et BC se fait de la même démarche que celle des cotés AB et DC . Ici suivant la disposition de ces cotés. Si $x_A \neq x_D$ et $x_D \neq x_C$ en plus les deux fonctions sont univoques, on peut suivre exactement la démarche précédente pour les cotés AB et DC . On aura:

$$\Delta x_{AD} = \frac{x_A - x_D}{(N_y - 1)}$$

$$\begin{aligned} x_{AD}(j) &= x_D + (j-1) \Delta x_{AD} & j=1, 2, 3, \dots, N_y \\ y_{AD}(j) &= f_{AD}(x_{AD}(j)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

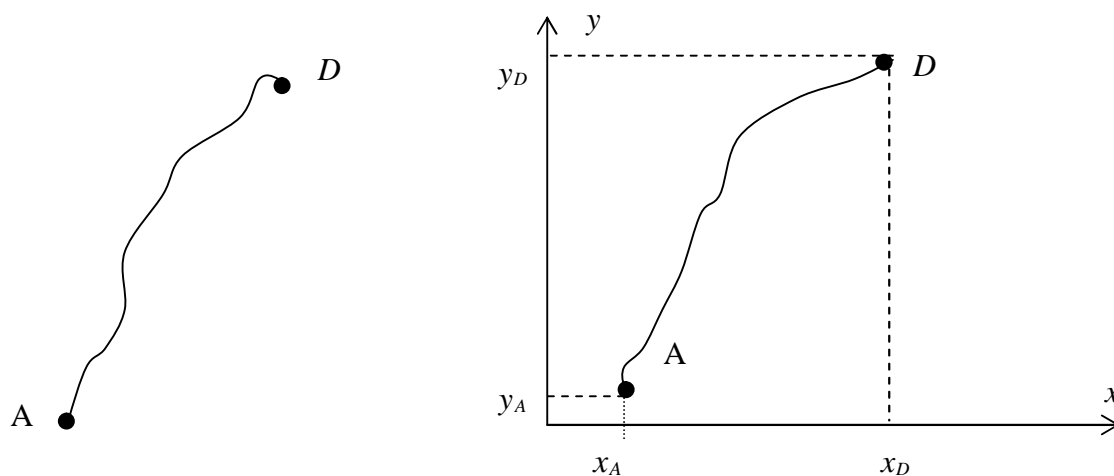
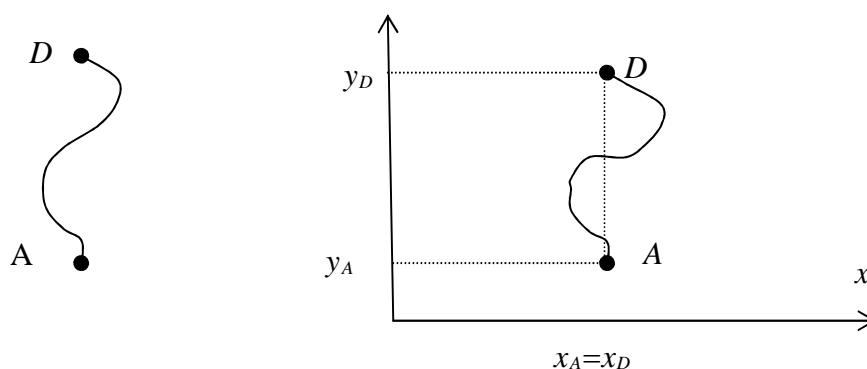


Figure 3.6 : Discretisation sur le côté AD

Mais si $x_A = x_D$, l'algorithme (3.9) ne marche plus et la configuration devient la suivante.



On divise le segment $[y_A, y_D]$ en N_y nœuds dont les points A et B sont inclus, on aura:

$$\Delta y_{AD} = \frac{y_D - y_A}{(N_y - 1)} \quad (3.11)$$

Les coordonnées des points de ce côté sont données par:

$$\begin{aligned} y_{AD}(j) &= y_A + (j-1) \Delta y_{AD} \\ x_{AD}(j) &= f_{AD}^{-1}(y_{AD}(j)) \end{aligned} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (3.12)$$

avec:

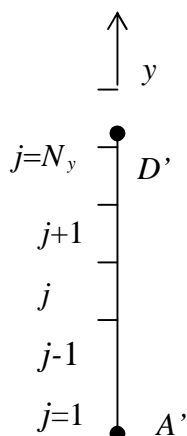
$$\begin{aligned} j=1 & ; & x_{AD}(1) &= x_A & ; & y_{AD}(1) &= y_A \\ j=N_y & ; & x_{AD}(N_y) &= x_D & ; & y_{AD}(N_y) &= y_D \end{aligned}$$

où : $f_{AD}^{-1}(y)$: la fonction inverse du coté AD .

Pour déterminer la racine de la fonction inverse si $f_{AD}(y)$ est implicite on utilise l'algorithme de dichotomie par exemple.

Pour le coté BC on aura: $\Delta x_{BC} = \frac{x_B - x_C}{(N_y - 1)}$

$$\begin{aligned} x_{BC}(j) &= x_C + (j-1) \Delta x_{BC} \\ y_{BC}(j) &= f_{BC}(x_{BC}(j)) \end{aligned} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (3.13)$$



Avec: A' et D' sont projections des points A et D sur l'axe des ordonnées. Alors:

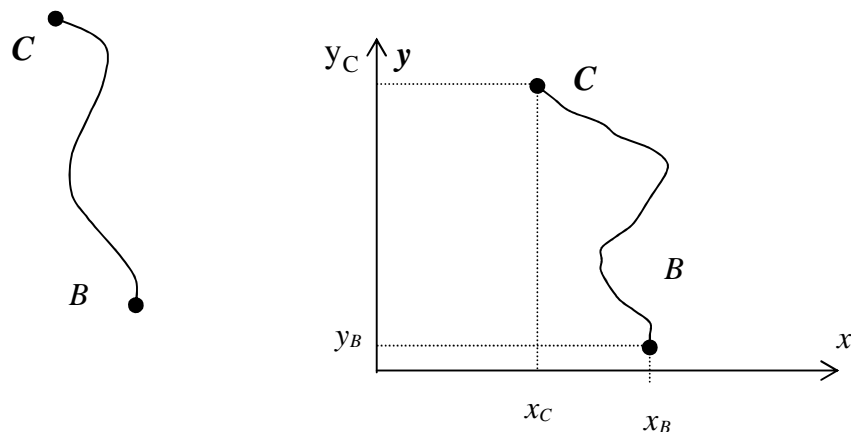
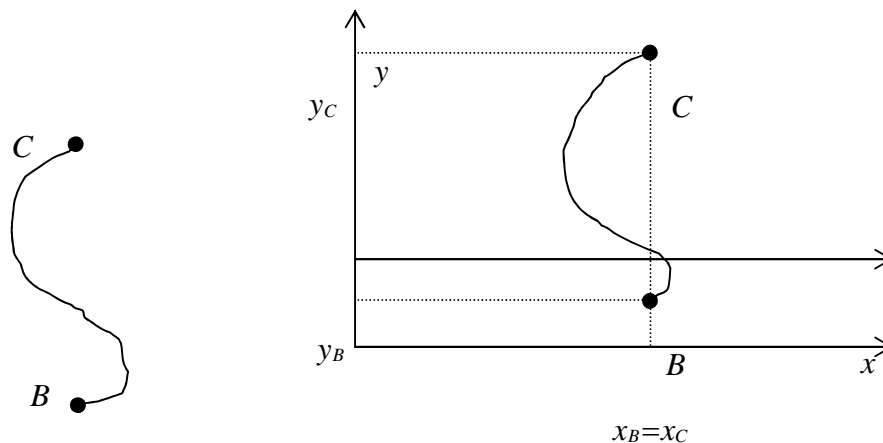


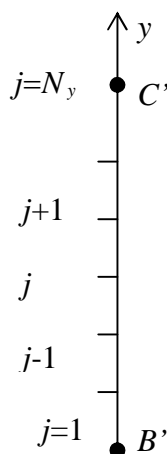
Figure 3.7 : Disrétisation sur le coté BC

Mais si $x_B = x_C$, l'algorithme (3.10) ne marchent plus et la configuration devient la suivante.

On divise le segment $[y_B, y_C]$ en N_y nœuds dont les nœuds B et C sont inclus. On obtient :



On divise le segment $[y_B, y_C]$ en N_y nœuds dont les nœuds B et C sont inclus. On obtient :



Avec: B' et C' les projections des points B et C sur l'axe des ordonnées. Alors:

$$\Delta y_{BC} = \frac{y_C - y_B}{(N_y - 1)}$$

$$\begin{aligned} y_{BC}(j) &= y_B + (j-1)\Delta y_{BC} \\ x_{BC}(j) &= f_{BC}^{-1}(y_{BC}(j)) \end{aligned} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (3.14)$$

où $f_{BC}^{-1}(y)$: représente la fonction inverse du coté BC .

Finalement, après qu'on génère les nœuds sur la frontière on obtient le schéma de la figure 3.8. On note ici que, entre chaque deux nœuds successives sur un coté on assimile la

courbure de la frontière à un segment de droite. L'exemple présenté sur cette figure est pour $N_x=10$ et $N_y=6$.

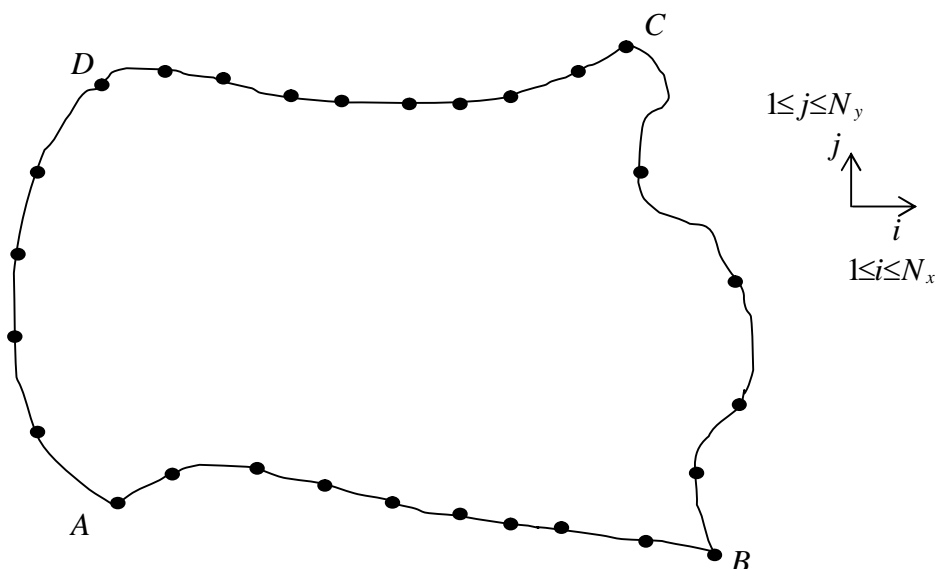


Figure 3.8 : Génération des nœuds sur la frontière du domaine

3.1.2. Fonction de condensation unidimensionnelle

La fonction de condensation unidimensionnelle (stretching function) est généralement utilisée pour distribuer les points le long d'une frontière particulière où une région d'un domaine nécessite une résolution précise. Par exemple, pour étudier un écoulement visqueux sur un profil d'aile (ce problème est intéressé par les aérodynamiciens) nécessite l'introduction de cette fonction ou équivalente pour renforcer la précision de la solution au niveau de la surface du profil d'aile et par conséquent, les points de la frontière se condensent volontairement vers une région voulue. Le gradient de la solution est fort au niveau de cette région [1], [41].

Mathématiquement, il est intéressant d'introduire une variable indépendante dans la fonction pour la normalisation. Pour la fonction de condensation unidimensionnelle appliquée sur le côté EA dans la figure 3.9, la variable indépendante normalisée est donnée par :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_E - \eta_A} \quad (3.15)$$

avec : $0 \leq \eta^* \leq 1$ et $\eta_A \leq \eta \leq \eta_E$

où : η peut représenter x ou y

On peut même donner la distribution sur l'intervalle $[0, 1]$ par η^* avec des sous intervalles égaux. La fonction de condensation développée par Robert en 1971 ensuite modifiée par Eisemann en 1979 est donnée par [1], [41]:

$$s = P \eta^* + (1 - P) \left[1 - \frac{\tanh [Q (1 - \eta^*)]}{\tanh [Q]} \right] \quad (3.16)$$

où : P et Q sont deux paramètres de contrôles de points de maillage.

Si la valeur de P est proche de l'unité, le deuxième membre de la formule se disparaît rapidement. Une fois ' s ' obtenu, il est demandé de spécifier la distribution de x et y . Par exemple, définissons :

$$\frac{x - x_A}{x_A - x_E} = f(s) \quad ; \quad \frac{y - y_A}{y_A - y_E} = g(s) \quad (3.17)$$

Ces formules génèrent $x(s)$ et $y(s)$ directement. Un simple choix est que $f(s) = g(s) = s$, tels que les relations (3.17) donnent :

$$\begin{aligned} x &= x_A + s (x_A - x_E) \\ y &= y_A + s (y_A - y_E) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Des distributions typiques des points sur le segment EA en utilisant la relation (3.16) pour différentes valeurs de P et Q , sont présentées sur la figure 3.9 suivante :

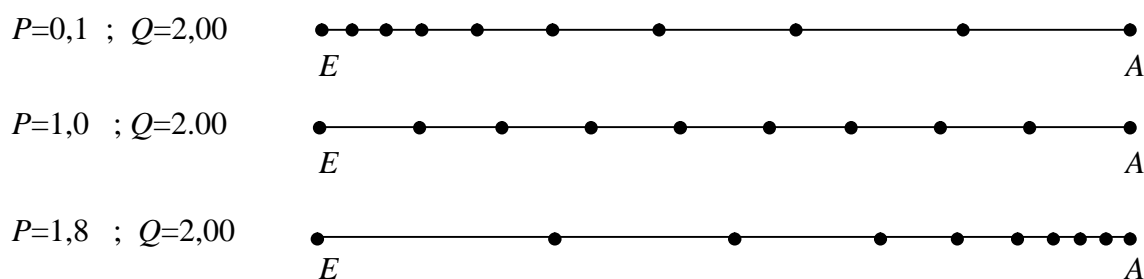


Figure 3.9 : Distribution des nœuds selon la relation (3.16)

Pour des valeurs de $P > 1.0$, il est possible de condenser les nœuds vers le point A . De même, pour condenser vers les nœuds vers le point E , il suffit de prendre des valeurs de P proche de zéro. On peut remarquer que si on choisit la fonction $f(s) = 1 - s$, on trouve la configuration inverse, c'est-à-dire, pour des valeurs de $P > 1.0$ les points se condensent vers l'extrémité E au lieu de l'extrémité A .

On propose l'algorithme suivant permettant de positionner les nœuds sur le segment EA en utilisant la fonction de condensation (3.16):

```

LIRE      N , P , Q , XE , XA
Δx = (XA - XE) / (N - 1)
POUR     I = 1      JUSQU'À      N
FAIRE
  xx = xE - (I - 1) * Δx
  η* = (xx - XA) / (XE - XA)
  S = P * η* + (1 - P) * [ 1 -  $\frac{\tanh\left[\frac{Q}{Q} (1 - \eta^*)\right]}{\tanh\left[\frac{Q}{Q}\right]}$  ]
  X(I) = XA + S * (XE - XA) ; Y(I) = FEA(X(I))
FIN FAIRE

```

Où : $F_{EA}(X(I))$: La fonction de la courbure EA . Ici on a pris une ligne de droite.

3.1.3. Génération des nœuds internes pour le maillage de type 'H'

Après qu'on a déterminé les positions des nœuds de la frontière du domaine, on procède maintenant à la présentation de la méthode développée pour la génération des nœuds internes. Le maillage obtenu est de type 'H', c'est-à-dire que la lettre 'H' se figure dans le maillage. On obtient des petits cellules ou domaines de formes quadrilatères. Chaque nœuds est caractérisés par deux valeurs (x, y) qui permet de déterminer la position exacte de ce point. La procédure qu'on présente est divisée en deux parties. Elle consiste en premier lieu, de déterminer les abscisses x_i de tous les points en ignorons les ordonnées, et cela par une interpolation entre les cotés gauche et droite. On obtient une infinité de solution de position, puisque les y_i sont absentes. Une fois les abscisses sont obtenues, on procède immédiatement à la détermination les ordonnées y_i de ces nœuds par une interpolation entre les cotés bas et haut du domaine.

Comme le nombre de nœuds sur les cotés gauche et droite sont égaux à N_y , alors, à chaque nœud d'un coté sera relié avec un nœud de l'autre coté par une courbe qui contient N_x nœuds, dont les extrémités sont incluses, voir figure 3.10

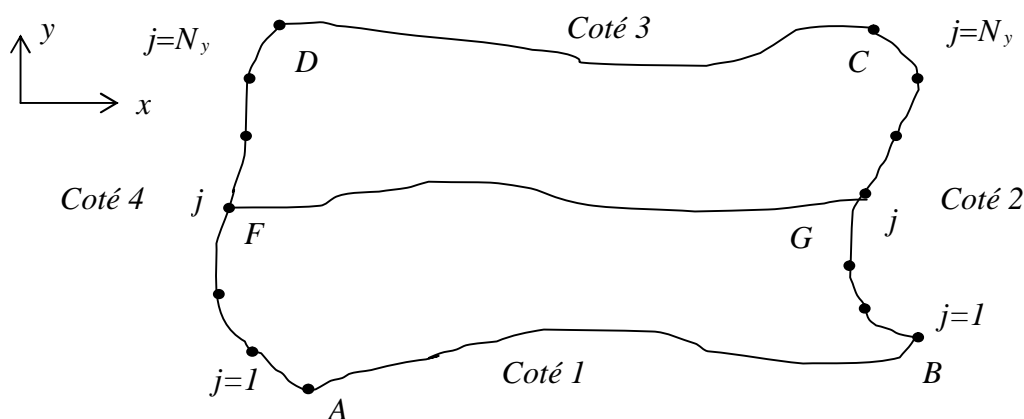


Figure 3.10 : Illustration la procédure de détermination les abscisses.

Pour déterminer les abscisses des nœuds sur la courbe FG on s'intéresse uniquement aux abscisses des nœuds des extrémités gauche et droite qui sont connues. La projection de la courbe reliant les points F et G sur l'axe horizontal donne un segment de droite comme illustre la figure suivante :



Où : F' et G' sont les projections respectivement des points F et G .

On divise le segment $F'G'$ en N_x points dont ceux des extrémités sont inclus. On obtient par conséquent, (N_x-1) intervalles égaux. L'abscisse de chaque points sur cet intervalle et par suite sur la courbe FG est obtenue par:

$$x_i = x_F + (i-1) \Delta x \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad (3.19)$$

avec:

$$\Delta x = \frac{x_G - x_F}{(N_x - 1)}$$

En faisons varier le point F sur le coté gauche en allons de point A jusqu'au point D et le point G du coté droite en allons du point B jusqu'au point C on obtient les abscisses des nœuds d'autre courbes et cela en faisons l'extension de la relation (3.19) par:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(j) &= \frac{x_{\text{coté2}}(j) - x_{\text{coté4}}(j)}{(N_x - 1)} \\ x(i,j) &= x_{\text{coté4}}(j) + (i-1) \cdot \Delta x(j) \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \end{aligned} \right\} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (3.20)$$

La deuxième étape consiste à déterminer les ordonnées des nœuds internes en utilisons par conséquent l'interpolation linéaire entre le coté 3 du haut et le coté 1 du bas par

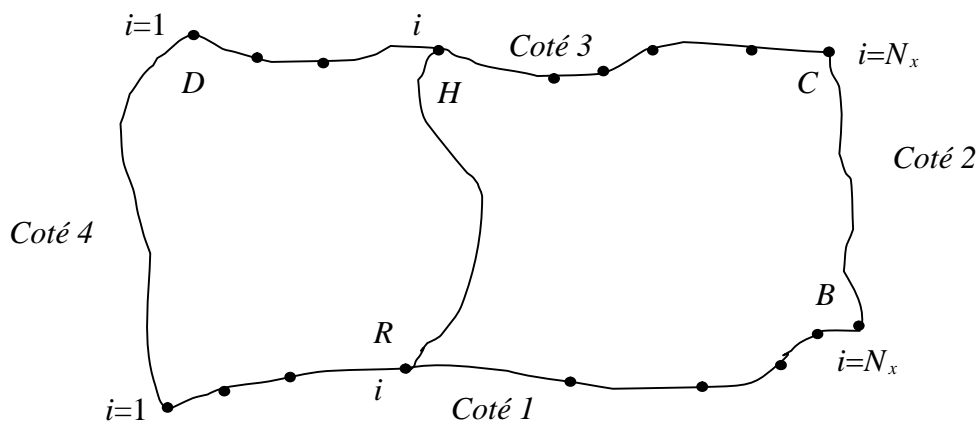
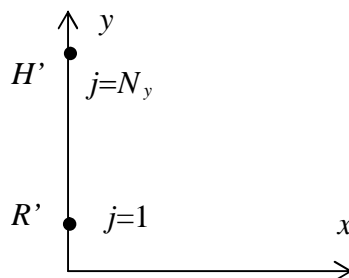


Figure 3.11 : Illustration la procédure de détermination les ordonnées

La projection de la courbe reliant les points H et R sur l'axe vertical des y donne un segment de droite :



Avec: R' et H' sont les projections respectivement des points R et H sur l'axe des ordonnées.

Comme chaque courbe contient N_y nœuds, alors, chaque segment contient N_y nœuds. On divisons ce dernier en (N_y-1) intervalles égaux, l'ordonnée de chaque nœuds est donnée par:

$$y_j = y_R + (j-1) \Delta y \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (3.21)$$

avec:

$$\Delta y = \frac{y_H - y_R}{(N_y - 1)}$$

En faisons varier maintenant le point R sur le coté 1 du bas et le point H sur le coté 3 du haut, on obtient une autre courbe dont les ordonnées de ces nœuds sont données par l'extension de la relation (3.21).

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(i) &= \frac{y_{\text{coté3}}(i) - y_{\text{coté1}}(i)}{(N_y - 1)} \\ y(i,j) &= y_{\text{coté1}}(i) + (j-1) \cdot \Delta y(i) \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \end{aligned} \right\} i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad (3.22)$$

Finalement, les relations (3.20) et (3.22) déterminent rapidement les positions des nœuds internes du maillage. Une fois, on s'intéresse à un raffinement du maillage dans une région qui contient un fort gradient, on peut utiliser la procédure de condensation des nœuds présentée dans le paragraphe précédent 3.1.2.

Il est à noter qu'on a fait le stockage des positions des nœuds dans des vecteurs unicolonne $X(NN)$ et $Y(NN)$ et non des matrices à deux colonnes comme indique les relations (3.20) et (3.21) et que l'algorithme déterminant les positions des nœuds internes sera présenté dans le prochain paragraphe 3.4 sur la connexion des éléments.

Des exemples sur la génération de maillage sur différents domaines simplement connexes et pour différentes discrétisations avec et sans procédure de condensation seront présentées dans le début du chapitre 5 des résultats.

3.2. Influence de la numérotation des nœuds sur la forme de la matrice de rigidité

La numérotation des nœuds joue un rôle très important pour la mémorisation des matrices, surtout, si le rang de la matrice devient de plus en plus élevé [19], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [34].

Pour une matrice carrée quelconque d'ordre $N \times N$, il faut stocker N^2 cases, ce qui devient impossible pour les valeurs de N élevée. La mémoire de l'ordinateur est limitée et le besoin en mémoire pour notre problème est important, ce qui nous oblige à penser à une technique pour résoudre un système d'équations d'ordre très élevé à fin de faire la résolution du problème physique avec une bonne précision voulue.

Si on regarde le domaine du problème physique, on peut rendre la matrice de rigidité correspondante pleine de zéro qui se condensent vers une région connue et les éléments non nuls se condensent vers la diagonale principale, ce que l'on appelle par des matrices bandes [19], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [34], [35], [36], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54].

. En plus la formulation mathématique en éléments finis du problème physique donne une matrice symétrique.

Ces deux propriétés (bande + symétrie) donne un avantage très important et répond aussi bien au même bien à la question de mémorisation des éléments de la matrice de rigidité. On peut diviser les éléments de la matrice $[K]$ en deux parties :

- Eléments nuls
- Eléments non nuls

Les opérations mathématiques que fait un tel algorithme de calcul sont généralement (+, -, /, ×), plus les fonctions bibliothèques connues telles que (sinus, cosinus, tangente, Logarithme, puissance, ...). Le résultat de l'application de ces opérations entre deux nombres réels ou entiers, dont l'un est nul est connu au départ sans refaire un calcul. Donc, on n'a pas besoin de donner à l'ordinateur de refaire ce calcul, puisque le zéro est connu et il n'est pas nécessaire de réserver toute une case pour stocker un zéro. Comme le nombre des zéros peut être important, suivant la numérotation, il reste d'indiquer uniquement leurs positions exactes

dans la matrice de rigidité $[K]$. Alors, il est très important de rendre la matrice de rigidité pleine de zéro à fin de minimiser la mémorisation. Ce souhait ne sera réalisable qu'après faire une très bonne numérotation des nœuds dont le but de serrer au maximum les zéros vers le coin supérieur de droite de la matrice. Ce type de matrice est appelée matrice bande. Elle est caractérisée par la valeur de la demi-bande. Le problème se pose donc au niveau de la valeur de cette bande.

Le nombre des zéros de la matrice augmente si la valeur de la demi-bande diminue. La forme générale de la matrice bande symétrique est la suivante [19], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [34], [35], [36], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54]:

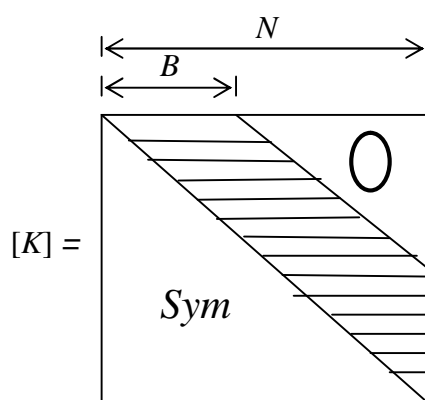


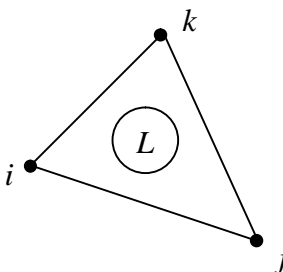
Figure 3.12 : Illustration de la matrice bande

La partie hachurée contient les éléments non nuls (partie bande). Il est à noter qu'on peut trouver dans la partie bande des éléments nuls. Mais si on veut travailler avec les matrices bandes, on ne peut pas éliminer ces éléments de la mémorisation puisque le travail avec ce type de matrice ainsi que la décomposition en deux matrices triangulaires est aussi bandes. On note encore que si on calcul le nombre des zéros qui se trouvent dans la bande, on peut trouver pour certaines numérotation un nombre qui dépasse la moitié ou même 80%. Pour illustrer ce qu'on a dit, on considère quelques exemples en faisant varier la taille de la matrice $[K]$ pour présenter uniquement les positions des cases non nulles (sans calcul la valeur réelle) et de calculer le nombre des zéros.

La demi-largeur de la demi-bande est égale à la différence maximale plus un (problème des intervalles) entre les numéros de deux nœuds d'un même élément, multiplié par le nombre de degré de liberté des nœuds (pour notre cas, chaque nœud contient un degré de liberté).

Si on a un domaine plan, formé par NE éléments triangulaires, la valeur de la demi bande B de la matrice avant l'application des conditions aux limites) est donnée par :

Soit B_L la valeur de la demi-bande donnée par l'élément numéro ' L ' suivant. Alors :



$$B_L = \text{Max}(i, j, k) - \text{Min}(i, j, k) + 1 \quad (3.23)$$

Par conséquent, la valeur de B est donnée par :

$$B = \text{Max}(B_1, B_2, B_3, \dots, B_{NE}) \quad (3.24)$$

avec :

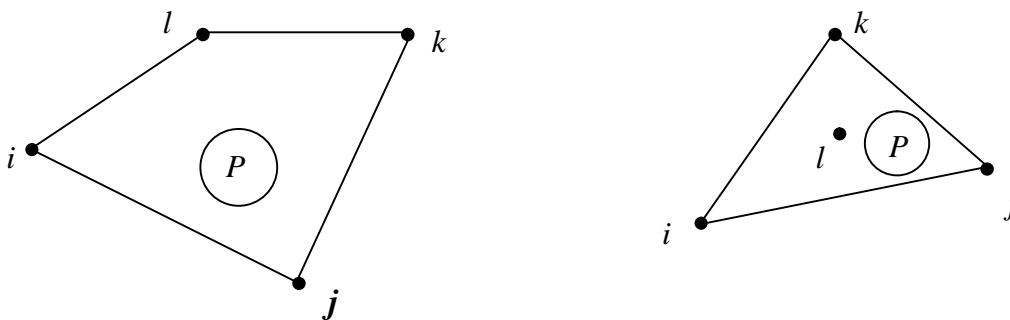
i, j, k les numéros des trois nœuds de l'élément l .

NE : Nombre d'Eléments finis triangulaires.

Max, Min : Calcul la valeur maximale et minimale respectivement.

Remarque :

Pour un élément quadrilatère à quatre nœuds ou un élément triangulaire à quatre nœuds, la valeur de la demi bande B donnée par cet élément est égale à :



$$B_p = \text{Max}(i, j, k, l) - \text{Min}(i, j, k, l) + 1 \quad (3.25)$$

et

$$B = \text{Max}(B_1, B_2, B_3, \dots, B_{NE})$$

Exemple 01 :

Considérons un domaine de forme rectangulaire qui sera discrétisé en trente (30) éléments triangulaires à trois nœuds, comme l'indique la figure suivante :

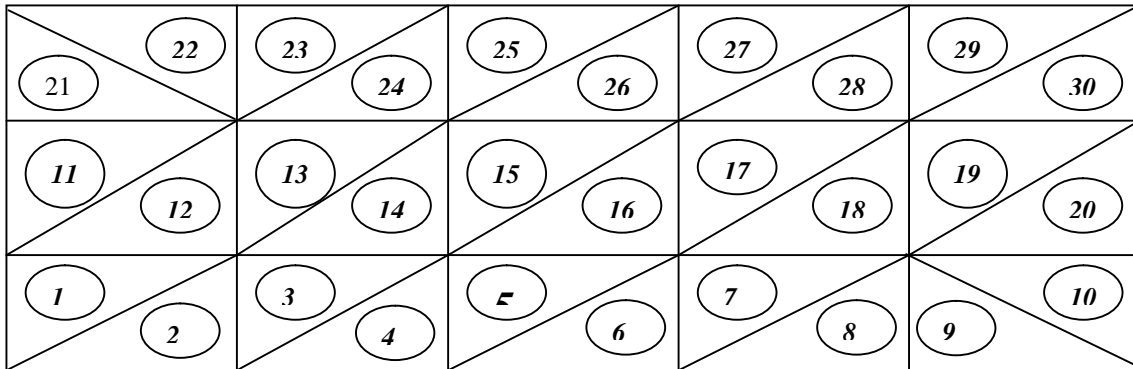


Figure 3.13 : Numérotation des éléments

La numérotation des éléments ne pose aucun problème sur la valeur de la demi bande de la matrice de rigidité, c'est-à-dire, elle est indépendante de la bande. Chaque élément du domaine contient trois nœuds, alors la matrice de rigidité élémentaire d'après le chapitre 2 est de l'ordre (3×3) . On considère pour cet exemple trois cas de numérotation des nœuds et pour chaque cas, on va construire la matrice de rigidité du domaine complet et ça indépendamment des conditions aux limites. Il est à noter que pour cet exemple, le nombre de nœuds est égal à 24, alors la matrice de rigidité $[K]$ est de rang (24×24) .

Cas 1 :

On va numérotter les nœuds suivant l'axe horizontal de gauche vers la droite en montons suivant l'axe y. Voir la figure 3.14 suivante :

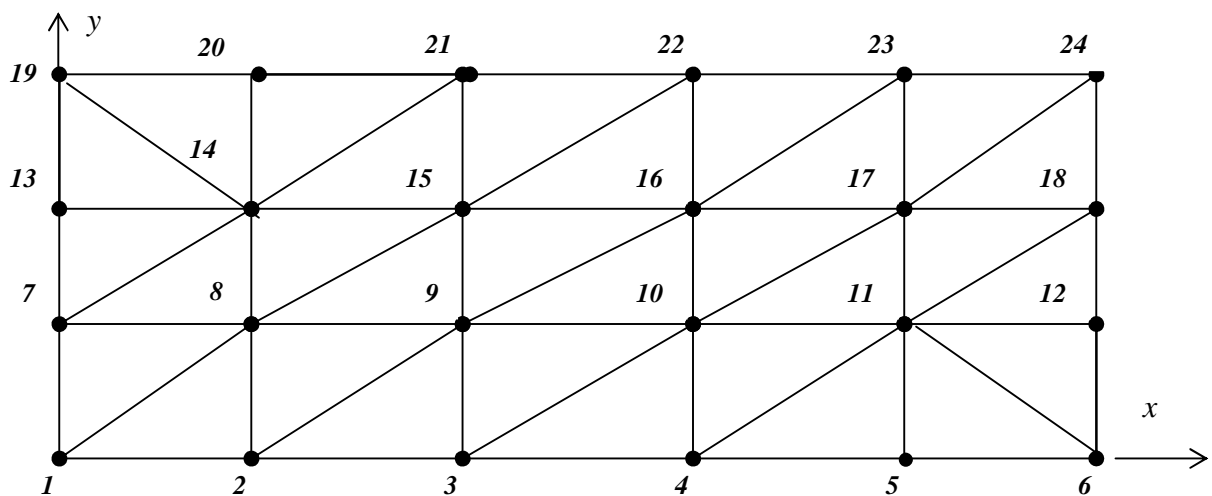
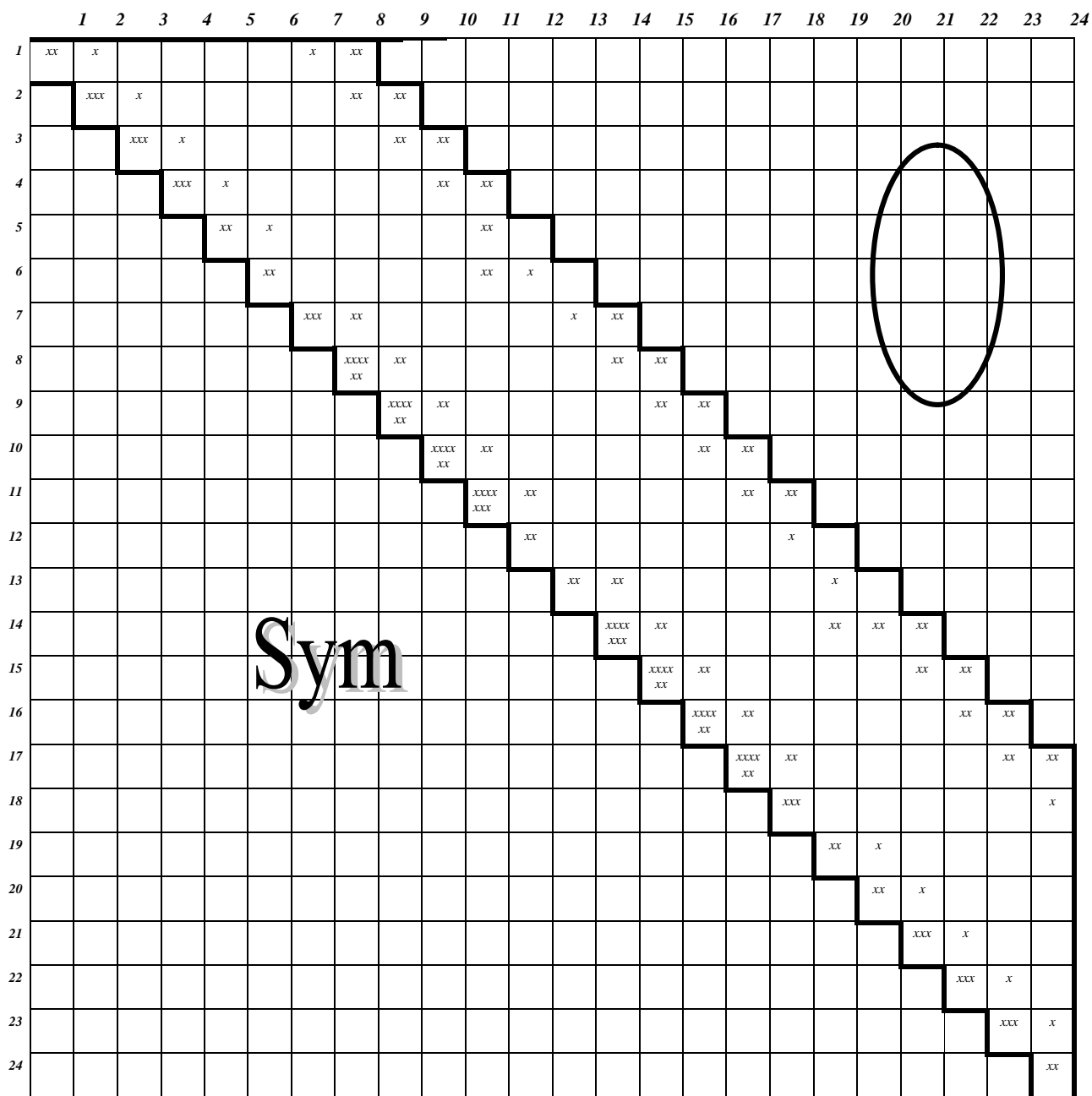


Figure 3.14 : Exemple sur la numérotation des nœuds

La matrice de rigidité de ce domaine par cette numérotation sur la base d'un élément triangulaire est donnée par



x : Case non nulle.

: Case nulle.

Figure 3.15 : Forme de la matrice de rigidité pour une numérotation choisie suivant le cas 1

On peut remarquer que :

1. La largeur de la demi-bande B est égale $B=8$.
2. Le nombre des zéros à l'extérieure de la bande sur la partie supérieure est égale à

$$\frac{16 \times 17}{2} = 136 \text{ cases}$$

3. La case qui contient plus d'un cochet veut dire qu'elle est remplie autant de fois de nombre de cochets, c'est-à-dire, par exemple :

$$K(10,10) = K^{(5)}(2,2) + K^{(6)}(3,3) + K^{(7)}(3,3) + K^{(16)}(2,2) + K^{(17)}(1,1) + K^{(18)}(1,1)$$

On peut considérer plusieurs forme de calcul de $K(10,10)$, suivant la position du nœud 10 dans les matrices de rigidité élémentaires des éléments 5, 6, 7, 16, 17 et 18.

4. $K(9,10)$ contient la somme de deux valeurs puisque les nœuds 9 et 10 sont communs entre deux éléments de numéro 5 et 16.
5. $K(6,12)$ contient une seule valeur, puisque l'arrête qui contient les nœuds 6 et 12 est sur la frontière du domaine. Autrement dit, elle est liée avec à un seul élément de numéro 10.
6. $K(1,1)$ contient une seule valeur, puisque le nœud 1 est commun entre l'élément 1 et 2.
7. Il y a deux nœuds internes sont reliés avec sept (07) éléments finis.
8. Chaque nœud interne de maillage est commun au maximum entre six (06) éléments finis. Les nœuds de frontière sauf les deux coins sont liés entre trois (03) éléments finis. Les deux points des coins sont liés en un seul élément fini. Le nombre des éléments nuls qui se trouvent à l'intérieure de la bande peut être discutés sous la base des matrices à multi diagonales.

Cas 2 :

On va numéroter maintenant les nœuds suivant l'axe vertical des y de bas en haut en déplaçons suivant x de gauche vers la droite, voir figure

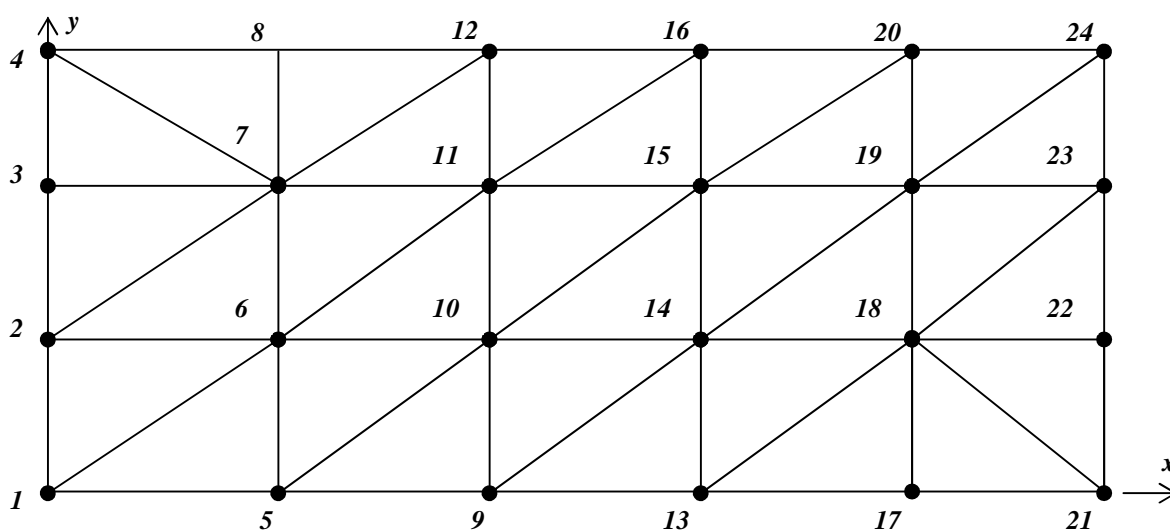


Figure 3.16 : Exemple sur la numérotation des nœuds

La forme de la matrice de rigidité pour ce type de numérotation est donnée par :

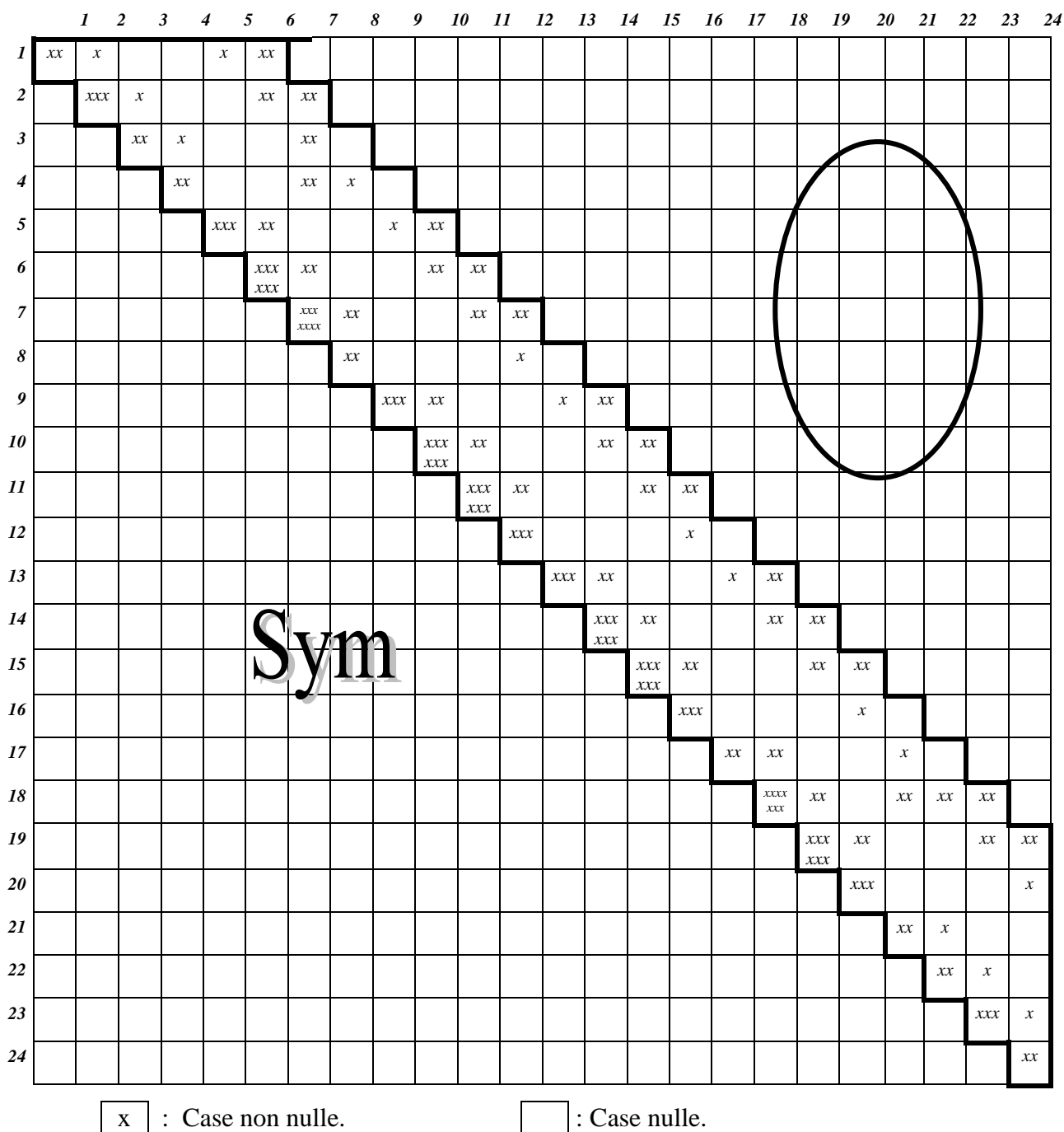


Figure 3.17 : Forme de la matrice de rigidité pour une numérotation choisie suivant le cas 2

On peut remarquer que :

- La largeur de la demi-bande B est égale $B=6$.
- Le nombre des zéros à l'extérieur de la bande sur la partie supérieure est égale à

$$\frac{18 \times 19}{2} = 171 \text{ cases}$$

- Cas 3 :

On va numéroter maintenant les nœuds d'une façon aléatoire, voir la figure suivante et la matrice pour plus illustration. Notons ici, que nous avons plusieurs choix.

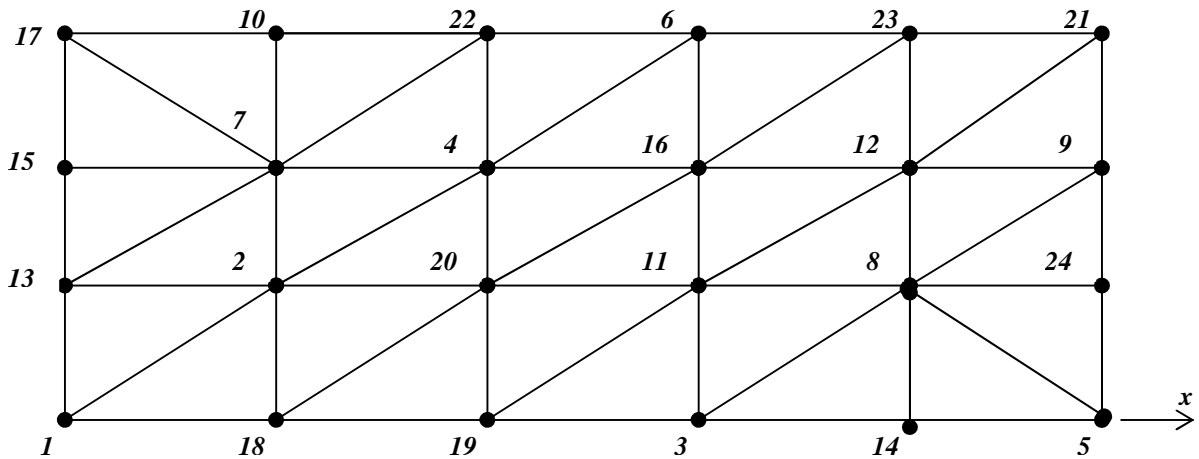


Figure 3.18 : Exemple sur la numérotation des nœuds

On procède maintenant au calcul de la valeur de la bande de cette matrice de la figure 3.19 suivante. Comme la numérotation est aléatoire, on essaye de calculer la bande donnée pour chaque élément par la formule (3.23), ensuite la bande de la matrice complète par la formule (3.24). On aura :

$$B_1 = \text{Max}(1, 2, 13) - \text{Min}(1, 2, 13) + 1 = 13 - 1 + 1 = 13$$

$$B_2 = \text{Max}(1, 18, 2) - \text{Min}(1, 18, 2) + 1 = 18 - 1 + 1 = 18$$

$$B_3 = \text{Max}(18, 20, 2) - \text{Min}(18, 20, 2) + 1 = 20 - 2 + 1 = 19$$

$$B_4 = \text{Max}(18, 19, 20) - \text{Min}(18, 19, 20) + 1 = 20 - 18 + 1 = 3$$

$$B_5 = \text{Max}(19, 11, 20) - \text{Min}(19, 11, 20) + 1 = 20 - 11 + 1 = 10$$

$$B_6 = \text{Max}(19, 3, 11) - \text{Min}(19, 3, 11) + 1 = 19 - 3 + 1 = 17$$

$$B_7 = \text{Max}(3, 8, 11) - \text{Min}(3, 8, 11) + 1 = 11 - 3 + 1 = 9$$

Pour les éléments des numéros 8 jusqu'à 24 on trouve respectivement les valeurs suivantes :

12, 10, 20, 9, 12, 6, 19, 17, 10, 6, 5, 5, 17, 11, 11, 16, 19, 19, 13, 18, 12, 12, 13.

Alors, la valeur de la demi bande de la matrice de rigidité $[K]$ est calculée par :

$$B = \text{Max}(B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_{30})$$

$$= \text{Max}(13, 18, 19, 3, 10, 17, 9, 12, 10, 20, 9, 12, 6, 19, 17, 10, 6, 5, 5, 17, 11, 11, 16, 19, 19, 13, 18, 12, 12, 13)$$

ou : $B = 20$

Pour ce cas, le nombre des zéros gagné est égale à : $\frac{4 \times 5}{2} = 10$ cases

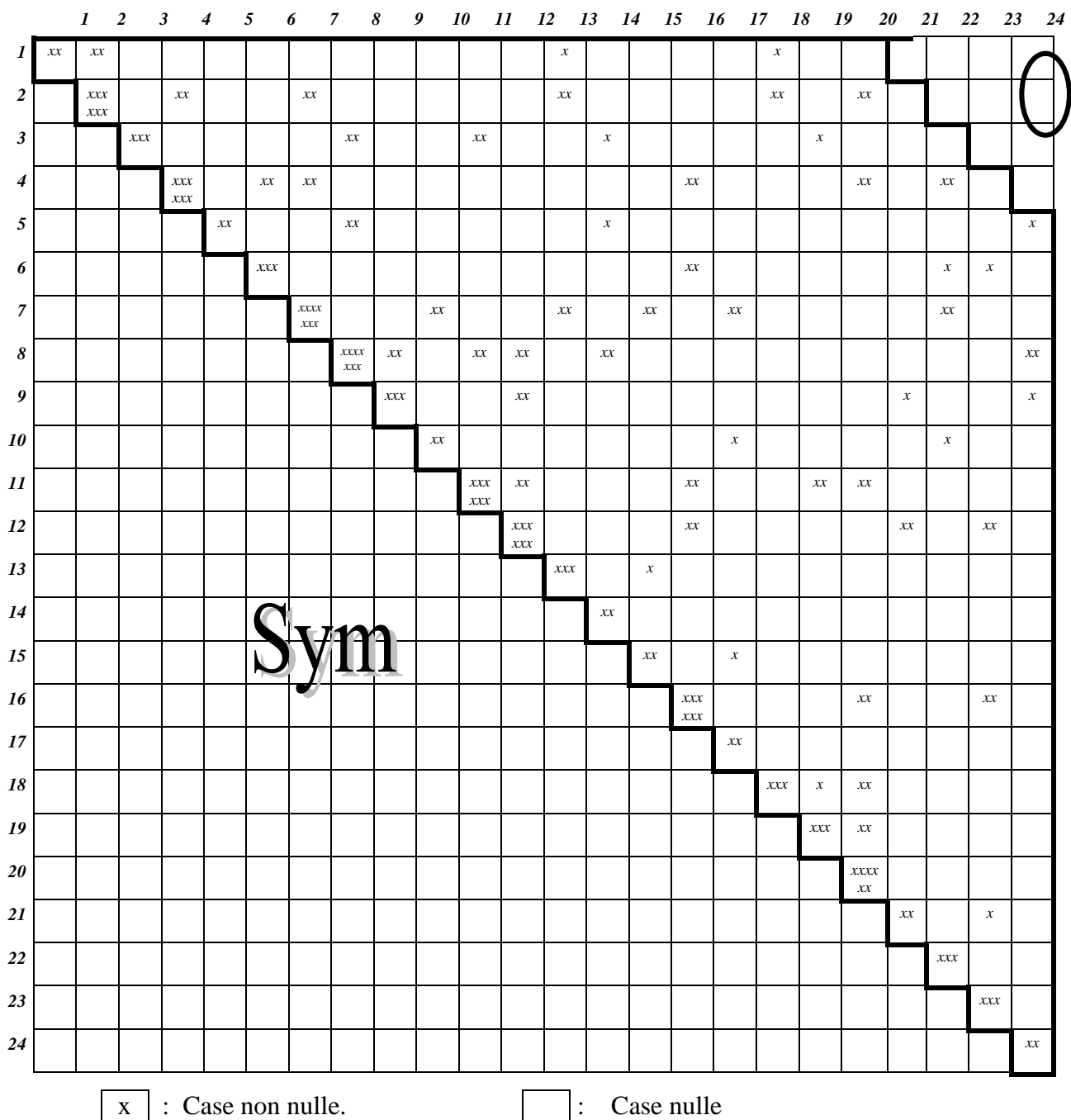


Figure 3.19 : Forme de la matrice de rigidité pour une numérotation choisie suivant le cas 3

En conclusion, on déduit entre les trois numérotations proposées que le deuxième cas correspond à une numérotation optimale pour la quelle les cases non nulles se condensent le plus possible vers la diagonale principale et par conséquent le nombre des zéros sera très grand par rapport aux deux autres et que la bande est la plus petite.

Remarque :

Dans le cas général d'un domaine quelconque, il n'est pas facile d'obtenir une numérotation optimale. On est amené alors à faire une estimation pour obtenir la plus petite numérotation possible.

Finalement, si on veut généraliser à un domaine simplement connexe quelconque bidimensionnel avec conditions aux limites de type Dirichlet, qui peut être considéré ou transformé vers un rectangle, avec une discrétisation de N_x nœuds suivant l'axe horizontal des x et de N_y nœuds suivant l'axe vertical des y , on aura les résultats suivants :

1. Le nombre totale de nœuds NN du domaine est donné par :

$$NN = N_x \times N_y \quad (3.26)$$

2. Le nombre totale des éléments finis triangulaires à trois nœuds dans le domaine est donné par :

$$NET = 2(N_x - 1) \times (N_y - 1) \quad (3.27)$$

3. On commence la numérotation suivant la direction qui possède le nombre de nœuds minimale:

- Si $N_x \leq N_y$, on suivre la numérotation comme le cas 1.
- Si $N_x > N_y$, on suivre la numérotation suivant le cas 2.

4. La largeur de la demi bande avant l'introduction des conditions aux limites est donnée par:

$$B = \text{Min}(N_x, N_y) + 2 \quad (3.28)$$

On propose l'algorithme suivant permettant de calculer la largeur de la demi bande de la matrice de rigidité pour n'importe quelle type de numérotation des nœuds.

```

B=0
POUR I=1 JUSQU'À NET
  FAIRE
    IPETITE=MIN(NUMNT(I,1),NUMNT(I,2),NUMNT(I,3))
    IGRANDE=MAX(NUMNT(I,1),NUMNT(I,2),NUMNT(I,3))
    BI=IGRANDE - IPETITE + 1
    SI BI > B ALORS B=BI
  FIN FAIRE

```

5. Le nombre de nœuds qui se trouve sur la frontière du domaine, où la solution du problème est connue, c'est-à-dire à éliminer de la résolution du système (conditions aux limites) est donné par:

$$NDDLE=2 N_x+2 N_y-4 \quad (3.29)$$

6. Les numéros des nœuds éliminés (nœuds de la frontière), si la numérotation est effectuée suivant l'étape (3) sont donnés par:

- Si $N_x \leq N_y$ on a:

$$\begin{cases} k=i \\ k=(N_y-1) N_x+i \end{cases} \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x$$

$$\begin{cases} k=(j-1) N_x+1 \\ k=j N_x \end{cases} \quad j=2, 3, 4, \dots, N_y-1$$

- Si $N_x > N_y$ on a:

$$\begin{cases} k=j \\ k=(N_x-1) N_y+j \end{cases} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y$$

$$\begin{cases} k=(i-1) N_y+1 \\ k=i N_y \end{cases} \quad i=2, 3, 4, \dots, N_x-1$$

7. Le nombre des inconnues restant du problème qui entrent dans la résolution du système d'équations, c'est-à-dire le rang de la matrice de rigidité est donné par:

$$\begin{aligned} NDDL R &= NN - NDDLE \\ &= N_x N_y - 2 N_x - 2 N_y + 4 \end{aligned}$$

alors

$$NDDL R = (N_x - 2)(N_y - 2) \quad (3.30)$$

8. La valeur de la demi bande finale de la matrice de rigidité pour la résolution du système d'équations, après l'introduction des conditions aux limites, est donnée par:

$$B = \text{Min} (N_x, N_y) \quad (3.31)$$

9. Le nombre des zéros qui se trouvent à l'extérieur de la bande (partie supérieure) de la matrice de rigidité $[K]$ dans la phase finale après l'introduction des conditions aux limites est donné par:

$$NZERO = 1+2+3+4+\dots+N-B = \frac{(N-B)(N-B+1)}{2}$$

où : B est donnée par l'étape 8.

3.3. Filtrage des nœuds

Il est parfois très efficace d'utiliser une option appelée filtrage des nœuds. Dans certain cas, la taille des cellules de maillage est non homogène. On trouve des cellules de tailles grande et d'autre de taille très petite. Surtout pour les points aux voisinage de la frontière. Pour rendre les tailles des cellules de meme grandeur, on repositionne les points internes de maillage en utilisant la procédure présentée par la relation (3.32) suivante [1], [10]:

$$\begin{aligned}
 x_i^{\text{nouveau}} &= x_i^{\text{ancien}} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (x_k^{\text{ancien}} - x_i^{\text{ancien}}) \\
 y_i^{\text{nouveau}} &= y_i^{\text{ancien}} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (y_k^{\text{ancien}} - y_i^{\text{ancien}})
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

avec:

- m : le nombre de nœuds qui sont reliés par une arrête d'un triangle avec le nœud numéro ' i ' à filtrer.
- ω : Facteur de relaxation compris $0 < \omega < 1$.
- $(x_k, y_k): k=1, 2, 3, \dots, m$: les positions des ' m ' nœuds reliés avec le nœud ' i '.

L'algorithme (3.32), est à refaire entre 25 jusqu'à 100 itérations. On peut meme aller à 1000 itérations.

Pour notre type de maillage, chaque nœuds interne est relié avec six (06) nœuds, sauf deux, les adjacents du coin droite bas et du haut gauche où, la relation (3.32) sera donnée par:

$$\begin{aligned}
 x_{i,j}^{\text{nouveau}} &= x_{i,j}^{\text{ancien}} + \frac{\omega}{6} (x_{i-1,j-1}^{\text{ancien}} + x_{i,j-1}^{\text{ancien}} + \\
 &\quad x_{i,j+1}^{\text{ancien}} + x_{i+1,j+1}^{\text{ancien}} + \\
 &\quad x_{i-1,j}^{\text{ancien}} + x_{i+1,j}^{\text{ancien}} - 6 x_{i,j}^{\text{ancien}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} i=2, 3, 4, \dots, N_x-1 \\ j=2, 3, 4, \dots, N_y-1 \end{array} \right. \\
 y_{i,j}^{\text{nouveau}} &= y_{i,j}^{\text{ancien}} + \frac{\omega}{6} (y_{i-1,j-1}^{\text{ancien}} + y_{i,j-1}^{\text{ancien}} + \\
 &\quad y_{i,j+1}^{\text{ancien}} + y_{i+1,j+1}^{\text{ancien}} + \\
 &\quad y_{i-1,j}^{\text{ancien}} + y_{i+1,j}^{\text{ancien}} - 6 y_{i,j}^{\text{ancien}}) \quad \text{sauf } \left\{ \begin{array}{l} i=2, j=N_y-1 \\ i=N_x-1, j=2 \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

- Si $i=2$ et $j=N_y-1$, la relation (3.33) ne sera plus applicable, puisque ce nœud sera relié avec sept (07) nœuds de maillage, et devient la suivante:

$$x_{i,j}^{nouveau} = x_{i,j}^{ancien} + \frac{\omega}{7} (x_{i-1,j-1}^{ancien} + x_{i,j-1}^{ancien} + x_{i-1,j+1}^{ancien} + x_{i,j+1}^{ancien} + x_{i+1,j+1}^{ancien} + x_{i+1,j}^{ancien} + x_{i+1,j}^{ancien} - 7 x_{i,j}^{ancien}) \quad (3.34)$$

$$y_{i,j}^{nouveau} = y_{i,j}^{ancien} + \frac{\omega}{7} (y_{i-1,j-1}^{ancien} + y_{i,j-1}^{ancien} + y_{i-1,j+1}^{ancien} + y_{i,j+1}^{ancien} + y_{i+1,j+1}^{ancien} + y_{i+1,j}^{ancien} + y_{i+1,j}^{ancien} - 7 y_{i,j}^{ancien})$$

- Si $i=N_x-1$, $j=2$, toujours, la relation (3.33) ne sera plus applicable, puisque ce nœud sera relié avec sept (07) nœuds de maillage, et devient la suivante:

$$x_{i,j}^{nouveau} = x_{i,j}^{ancien} + \frac{\omega}{7} (x_{i-1,j-1}^{ancien} + x_{i,j-1}^{ancien} + x_{i+1,j-1}^{ancien} + x_{i,j+1}^{ancien} + x_{i+1,j+1}^{ancien} + x_{i+1,j}^{ancien} + x_{i+1,j}^{ancien} - 7 x_{i,j}^{ancien}) \quad (3.35)$$

$$y_{i,j}^{nouveau} = y_{i,j}^{ancien} + \frac{\omega}{7} (y_{i-1,j-1}^{ancien} + y_{i,j-1}^{ancien} + y_{i+1,j-1}^{ancien} + y_{i,j+1}^{ancien} + y_{i+1,j+1}^{ancien} + y_{i+1,j}^{ancien} + y_{i+1,j}^{ancien} - 7 y_{i,j}^{ancien})$$

On note que les de la frontière ne sont pas concernées par le filtrage.

3.4. Algorithme de connexion des éléments finis du maillage

On a vu dans le paragraphe 3.2 l'influence de la numérotation des nœuds sur la forme de la matrice rigidité. On rappelle ici que le maillage opté dans notre étude est de type ' H '. Après faire la discrétisation du domaine en petits éléments, on obtient un ensemble de points et éléments finis. Chaque élément contient sa propre matrice de rigidité $[K^{(e)}]$ et vecteur force $\{f^{(e)}\}$. Le problème consiste à faire l'assemblage de ces matrices élémentaires pour obtenir celle du domaine complet. Le principe est donné dans le paragraphe 2.2.6 du chapitre 2. Pour arriver aux résultats, il faut connaître les numéros des nœuds de chaque éléments, alors, il faut déclarer une matrice d'ordre $(NE \times 3)$ si les éléments obtenus sont triangulaires à trois nœuds et de l'ordre $(NE \times 4)$ si les éléments finis obtenus sont quadrilatères à quatre nœuds. On désigne cette matrice par *NUMNT*. On rappelle encore que la numérotation opté est donnée dans la figure 3.14 ou la figure 3.16 suivant les valeurs des nœuds le long des axes des coordonnées afin d'obtenir une largeur de la demi bande minimale [13], [22], [27], [29].

Par exemple, pour les trois cas de numérotation présentés dans ce paragraphe, avec la numérotation des éléments triangulaires selon la figure 3.13, le vecteur $NUMNT(NE,3)$ sera rempli de la façon suivante :

- Cas 1

| | 1 | 2 | 3 |
|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 8 | 7 |
| 2 | 1 | 2 | 8 |
| 3 | 2 | 9 | 8 |
| 4 | 2 | 3 | 9 |
| 5 | 3 | 10 | 9 |
| 6 | 3 | 4 | 10 |
| 7 | 4 | 11 | 10 |
| 8 | 4 | 5 | 9 |
| 9 | 5 | 6 | 11 |
| 10 | 6 | 12 | 11 |
| 11 | 7 | 14 | 13 |
| 12 | 7 | 8 | 14 |
| 13 | 8 | 15 | 14 |
| 14 | 8 | 9 | 15 |
| 15 | 9 | 16 | 15 |
| 16 | 9 | 10 | 16 |
| 17 | 10 | 17 | 16 |
| 18 | 10 | 11 | 17 |
| 19 | 11 | 18 | 17 |
| 20 | 11 | 12 | 18 |
| 21 | 13 | 14 | 19 |
| 22 | 14 | 20 | 19 |
| 23 | 14 | 21 | 20 |
| 24 | 14 | 15 | 21 |
| 25 | 15 | 22 | 21 |
| 26 | 15 | 16 | 22 |
| 27 | 16 | 23 | 22 |
| 28 | 16 | 17 | 23 |
| 29 | 17 | 24 | 23 |
| 30 | 17 | 18 | 24 |

- Cas 2

| | 1 | 2 | 3 |
|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 6 | 2 |
| 2 | 1 | 5 | 6 |
| 3 | 5 | 10 | 6 |
| 4 | 5 | 9 | 10 |
| 5 | 9 | 14 | 10 |
| 6 | 9 | 13 | 14 |
| 7 | 13 | 18 | 14 |
| 8 | 13 | 17 | 18 |
| 9 | 17 | 21 | 18 |
| 10 | 21 | 22 | 18 |
| 11 | 2 | 7 | 3 |
| 12 | 2 | 6 | 7 |
| 13 | 6 | 11 | 7 |
| 14 | 6 | 10 | 11 |
| 15 | 10 | 15 | 11 |
| 16 | 10 | 14 | 15 |
| 17 | 14 | 19 | 15 |
| 18 | 14 | 18 | 19 |
| 19 | 18 | 23 | 19 |
| 20 | 18 | 22 | 23 |
| 21 | 3 | 7 | 4 |
| 22 | 7 | 8 | 4 |
| 23 | 7 | 12 | 8 |
| 24 | 7 | 11 | 12 |
| 25 | 11 | 16 | 12 |
| 26 | 11 | 15 | 16 |
| 27 | 15 | 20 | 16 |
| 28 | 15 | 19 | 20 |
| 29 | 19 | 24 | 20 |
| 30 | 19 | 23 | 24 |

- Cas 3

| | 1 | 2 | 3 |
|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 2 | 13 |
| 2 | 1 | 18 | 2 |
| 3 | 18 | 20 | 2 |
| 4 | 18 | 19 | 20 |
| 5 | 19 | 11 | 20 |
| 6 | 19 | 3 | 11 |
| 7 | 3 | 8 | 11 |
| 8 | 3 | 14 | 8 |
| 9 | 14 | 5 | 8 |
| 10 | 5 | 24 | 8 |
| 11 | 13 | 7 | 15 |
| 12 | 13 | 2 | 7 |
| 13 | 2 | 4 | 7 |
| 14 | 2 | 20 | 4 |
| 15 | 20 | 16 | 4 |
| 16 | 20 | 11 | 16 |
| 17 | 11 | 12 | 16 |
| 18 | 11 | 8 | 12 |
| 19 | 8 | 9 | 12 |
| 20 | 8 | 24 | 9 |
| 21 | 15 | 7 | 17 |
| 22 | 7 | 20 | 17 |
| 23 | 7 | 22 | 10 |
| 24 | 7 | 4 | 22 |
| 25 | 4 | 6 | 22 |
| 26 | 4 | 16 | 6 |
| 27 | 16 | 23 | 6 |
| 28 | 16 | 12 | 23 |
| 29 | 12 | 21 | 23 |
| 30 | 12 | 9 | 21 |

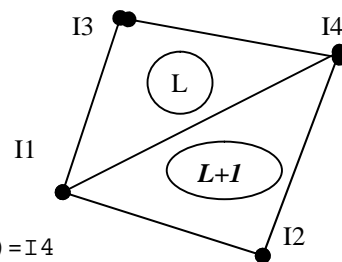
Les trois valeurs de chaque ligne du vecteur $NUMNT(NE, 3)$ représentent les numéros des lignes et des colonnes de la matrice de rigidité globale du domaine complet avant l'introduction des conditions de aux limites. Par exemple, pour la ligne 24 du premier cas, on a les valeurs 14, 15 et 21, c'est-à-dire, l'élément triangulaire numéro 24 a les trois nœuds de numéros 14, 15 et 21 dans le sens antihoraire. Autrement dit, le nœud local 1 de ce triangle est égal à 14 global du domaine. On peut prendre le nœud local 1 égale à 15 ou 21, mais il faut que les trois numéros permutent dans le sens antihoraire.

Si la numérotation des nœuds est aléatoire, le remplissage de cette matrice sera d'une façon manuel, vu l'inexistence d'une formule de récurrence. Mais, pour notre numérotation, suivant le cas 1 ou 2, on propose l'algorithme suivant permettant le remplissage du vecteur $NUMNT(NE,3)$ automatiquement, en donnant uniquement le nombre de nœuds N_x et N_y .


```

L=1
DO 10 J=1,NY-1
DO 10 I=1,NX-1
  I1=(J-1)*NX+I
  I2=I1+1
  I3=J*NX+I
  I4=I3+1
  NUMNT(L,1)=I1 ; NUMNT(L,2)=I4 ; NUMNT(L,3)=I3
  NUMNT(L+1,1)=I1 ; NUMNT(L+1,2)=I2 ; NUMNT(L+1,3)=I4
  L=L+2
10 CONTINUE

```



Pour le quadrilatère de la basse droite, on a

```

I=NX-1 ; J=1 ; L=2*(NX-1)-1
I1=I ; I2=I1+1 ; I3=J*NX+I ; I4=I3+1
NUMNT(L,1)=I1 ; NUMNT(L,2)=I2 ; NUMNT(L,3)=I3
NUMNT(L+1,1)=I2 ; NUMNT(L+1,2)=I4 ; NUMNT(L+1,3)=I3

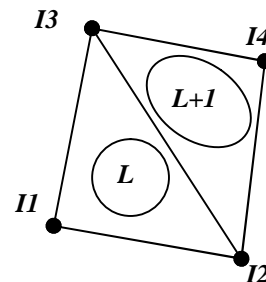
```

Pour le quadrilatère du haut gauche, on a

```

I=1 ; J=NY-1 ; L=NE-2*(NX-1)+1
I1=(J-1)*NX+I ; I2=I1+1 ; I3=J*NX+I ; I4=I3+1
NUMNT(L,1)=I1 ; NUMNT(L,2)=I2 ; NUMNT(L,3)=I3
NUMNT(L+1,1)=I2 ; NUMNT(L+1,2)=I4 ; NUMNT(L+1,3)=I3

```



Comme on a déjà mentionné dans le paragraphe 3.1.3, la procédure déterminant les positions (x, y) des nœuds internes après la détermination des positions des nœuds de la frontière, est donné par :

1. Affectation les positions des nœuds des frontières basse et haute dans les vecteurs x et y par :

```

DO I=1,NX
  X(I)=XCOTE1(I) ; Y(I)=YCOTE1(I)
  L=NE-I+1
  X(L)=XCOTE3(NX-I+1) ; Y(L)=YCOTE3(NX-I+1)
ENDDO

```

2. Affectation les positions des nœuds des frontières gauche et droite dans les vecteurs x et y par :

```

DO J=2,NY-1
  K=(J-1)*NX+1
  X(K)=XCOTE4(J) ; Y(K)=YCOTE4(J)
  K=J*NX
  X(K)=XCOTE2(J) ; Y(K)=YCOTE2(J)
ENDDO

```

3. Détermination les abscisses des nœuds internes

```

DO J=2,NY-1
  XGAUCHE=XCOTE4(J) ; XDROITE=XCOTE2(J)
  PASX=(XGAUCHE-XDROITE)/(NX-1)
  DO I=2,NX-1
    K=(J-1)*NX+I ; X(K)=XGAUCHE+(I-1)*PASX
  ENDDO
ENDDO

```

4. Détermination les ordonnées des nœuds internes

```

DO I=2,NX-1
  YBAS=YCOTE1(I)
  YHAUT=YCOTE3(I)
  PASY=(YHAUT-YBAS)/(NY-1)
  DO J=2,NY-1
    K=(J-1)*NX+I
    Y(K)=YBAS+(J-1)*PASY
  ENDDO
ENDDO

```

3.5. Préparation du système d'équations du problème [11], [19]

Dans ce paragraphe, on va présenter les étapes nécessaires et la technique développée pour faire la préparation du système d'équations algébriques, plus précisément la matrice de rigidité $[K]$ globale du domaine complet et le vecteur force $\{f\}$ correspondant. La procédure mathématique de l'assemblage est présentée dans le paragraphe 2.2.6 du chapitre 2. Notre problème ici est de préparer le système d'équations avant et après l'introduction des conditions aux limites, en plus, sous forme de vecteur. Le rang de la matrice de rigidité du système avant l'introductions des conditions aux limites est égale à NN qui est égale à $N_x N_y$, et après l'introduction des conditions aux limites, c'est-à-dire, l'application des conditions aux limites, le rang de la matrice sera réduit à la valeur $NDDL$ qui est lui même égale à $(N_x-2)(N_y-2)$ inférieur à NN . On remarque que le rang sera diminué par la valeur $NDDLE$. On note ici que la matrice de rigidité est singulière, c'est-à-dire, son déterminant est nul et ça avant l'introduction des conditions aux limites et que l'application de ces dernières enlève la singularité de la matrice et elle la rendre régulière. Autrement dit, il existe une solution mathématique au système d'équations à résoudre. Le problème qui réside ici est que les numéros des lignes et des colonnes à enlevées à la matrice de rigidité avant l'introduction aux limites durant la phase de l'application de ces derniers sont les numéros des nœuds de la frontière du domaine. Pour arriver à l'enlèvement de ces lignes et colonnes, il faut déclarer un vecteur unicolonne de type entier de rang NN , nommé par exemple 'ICL', afin d'indiquer chaque nœud du domaine par sa présence ou l'absence dans la matrice de rigidité finale par un code. Le code utilisé ici est les deux chiffres 0 et 1.

- Si la case $ICL(I)=1$, alors, le nœud de numéro 'I' sera présent dans la matrice finale.
- Si la case $ICL(I)=0$, alors, le nœud de numéro 'I' sera absent dans la matrice finale.

Par exemple, pour les trois cas de numérotations des nœuds présentés dans ce chapitre, le vecteur *ICL* sera rempli de la façon suivante :

- Cas 1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- Cas 2

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- Cas 3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

On peut tirer de ce remplissage que le nombre des cases contenant le chiffre ' 1 ' est le même pour les trois cas et est égale à 8 pour ces exemples. Autrement dit, ce nombre est celui le rang de la matrice de rigidité finale, après l'application des conditions aux limites. Par conséquent, le nombre des zéros contenant dans le vecteur *ICL* est celui *NDDLE*.

Si la numérotation est aléatoire suivant le cas 3, le remplissage du vecteur ' *ICL* ' devient d'une façon manuelle vue l'absence d'une formule de récurrence, mais pour notre numérotation optée dans notre calcul, on peut trouver une formule de cette dernière et le remplissage devient automatique. On propose la procédure suivante suivant le cas 2. On aura :

```

DO I=1,NN
      ICL(I)=0
ENDDO
DO J=2,NY-1
      DO I=2,NX-1
          K=(J-1)*NX+I
          ICL(K)=1
      ENDDO
ENDDO

```

Après qu'on a fait le remplissage du vecteur ' *ICL* ', d'où, le connaître les lignes et les colonnes enlevées de la matrice de rigidité durant l'introduction des conditions aux limites, il nous reste de connaître le cas contraire, c'est-à-dire, le numéro du nœud dans le maillage correspondant à la ligne ou à la colonne de la matrice de rigidité finale (valable pour la résolution du système d'équations).

La forme de la matrice de rigidité des trois cas de numérotation après l'introduction des conditions aux limites possède la forme suivante, et cela près l'enlèvement les lignes et les colonnes possédant les numéros des nœuds de la frontière du domaine. Rappelons ici que le rang de la matrice devient (8×8) . On peut regarder exactement les numéros des lignes les colonnes restants. On Aura :

- Cas 1

| | 8 | 9 | 10 | 11 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|----|------------|------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|
| 8 | xxx xxx | xx | | | xx | xx | | |
| 9 | | xxx xxx | xx | | | xx | xx | |
| 10 | | | xxx xxx | xx | | | xx | xx |
| 11 | | | | xxxx xxx | | | | xx |
| 14 | | | | | xxxx xxx | xx | | |
| 15 | | | | | | xxx xxx | xx | |
| 16 | | | | | | | xxx xxx | xx |
| 17 | | | | | | | | xxx xxx |

Figure 3.20 : Forme de la matrice $[K]$ du cas 1 après l'application des conditions aux limites

- Cas 2

| | 6 | 7 | 10 | 11 | 14 | 15 | 18 | 19 |
|----|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|
| 6 | xxx xxx | xx | xx | xx | | | | |
| 7 | | xxxx xxx | | xx | | | | |
| 10 | | | xxx xxx | xx | xx | xx | | |
| 11 | | | | xxx xxx | | xx | | |
| 14 | | | | | xxx xxx | xx | xx | xx |
| 15 | | | | | | xxx xxx | | xx |
| 18 | | | | | | | xxxx xxx | xx |
| 19 | | | | | | | | xxx xxx |

Figure 3.21 : Forme de la matrice $[K]$ du cas 2 après l'application des conditions aux limites

- Cas 3

| | 2 | 4 | 7 | 8 | 11 | 12 | 16 | 20 |
|----|------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 2 | xxx xxx | xx | xx | | | | | xx |
| 4 | | xxx xxx | xx | | | | xx | xx |
| 7 | | | xxxx xxx | | | | | |
| 8 | | | | xxxx xxx | xx | xx | | |
| 11 | | | | | xxx xxx | xx | xx | xx |
| 12 | | | | | | xxx xxx | xx | |
| 16 | | | | | | | xxx xxx | xx |
| 20 | | | | | | | | xxx xxx |

Figure 3.22 : Forme de la matrice $[K]$ du cas 3 après l'application des conditions aux limites

On peut remarquer à titre information que le nombre de case non nulle à l'intérieur de la matrice $[K]$ est le même quelque soit le type de numérotation. La différence réside au niveau de leurs positions. A l'extérieur des matrices dans les figures 3.20, 3.21 et 3.22 on voit des petits chiffres. Normalement ces numéros commencent de 1 jusqu'à $NDDL$, puisque la solution mathématique d'un système d'équations à la base d'une matrice d'ordre $NDDL$ donne les $NDDL$ solutions numérotées de 1 jusqu'à $NDDL$. Mais, pour notre problème, ces solutions représentent les résultats aux nœuds internes du domaine qui possèdent des numéros pas forcément de 1 jusqu'à $NDDL$. Par exemple, la première solution du système sur la base des matrices de ces figures donnent mathématiquement la valeur de $u(1)$ pour les trois cas, mais cette valeur représente la solution au nœud 8 pour le cas 1 et la solution au nœud 6 pour le cas 2 ainsi que la solution au nœud 2 pour le cas 3. Pour arriver à faire ce transfert, on déclare un vecteur de type entier, nommé par exemple par 'IPOS', de dimension $NDDL$, contient pour chaque case par ordre croissant, le numéro du nœud interne. Pour expliciter ce paragraphe, considérons le remplissage du vecteur 'IPOS' pour les trois cas.

- Cas 1

| | | | | | | | | |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| IPOS = | 8 | 9 | 10 | 11 | 14 | 15 | 16 | 17 |

- Cas 2

| | | | | | | | | |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| IPOS = | 6 | 7 | 10 | 11 | 14 | 15 | 18 | 19 |

- Cas 3

| | | | | | | | | |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| IPOS = | 2 | 4 | 7 | 8 | 11 | 12 | 16 | 20 |

Le remplissage de ce vecteur peut être fait à partir du vecteur ' ICL ' quelque soit le type de numérotation. On propose l'algorithme suivant pour faire ce remplissage.

```

J=1
DO K=1,NN
    IF ( ICL(K).EQ.1 ) THEN
        IPOS(J)=K
        J=J+1
    ENDIF
ENDDO

```

Maintenant, si on fait une petite comparaison sur le changement de la forme de la matrice de rigidité du cas 1 entre les figures 3.15 et 3.20, ou du cas 2 entre les figures 3.17 et 3.21 ou du cas 3 entre les figures 3.19 et 3.22, on remarque que la valeur de la demi bande de la matrice de rigidité est changée. Autrement, elle diminue ou reste-la même. Pour le cas 1, la valeur ancienne est égale à 6 et la nouvelle devient 6. Pour le cas 2, était 8 et devient égale à 4. Pour le cas 3, était 20 et devient 8. Pour notre cas de numérotation, on a déjà donné sa nouvelle valeur, après l'introduction des conditions aux limites par la formule (3.31) qui sera valable uniquement pour le cas 2. Dans le cas général, on propose l'algorithme suivant permet la détermination de la valeur de la demi bande après l'introduction des conditions aux limites pour n'importe quelle type de numérotation des nœuds et cela par :

```

IBAP=0
DO 70 I=1,NN
    IF ( ICL(I).EQ.0 ) GOTO 70
    NPCNN=I
    NDCNN=NPCNN+IBAV-1
    IF (NDCNN.GT.NN) NDCNN=NN
    IBB=0
    DO 60 J=NPCNN,NDCNN
        IF ( ICL(J).EQ.1 ) IBB=IBB+1
60    CONTINUE
    IF ( IBB.GT.IBAP ) IBAP=IBB
70    CONTINUE

```

Avec :

- IBAV : c'est la valeur de la demi-bande donnée par la matrice de rigidité avant l'introduction des conditions aux limites.
- IBAP : la valeur de la demi bande à recherchée. Celle de la matrice de rigidité après l'introduction des conditions aux limites.

On procède maintenant aux étapes nécessaires à suivre pour préparer la matrice de rigidité globale et le vecteur force finaux du domaine complet avec la proposition de

l'algorithme de calcul. On rappelle ici que l'élément finis utilisé est celui le triangulaire à trois nœuds. Le principe de l'assemblage est donné dans le paragraphe 2.2.6 du chapitre 2. La matrice de rigidité du cas 2 de la figure 3.21 est obtenue après faire l'assemblage des 30 éléments finis comme les montres les figures 3.13 et 3.16. Si les conditions aux limites sont non nulles, il faut modifier le vecteur $\{F\}$ en ajoutons les effets des valeurs de frontière. Maintenant, on va généraliser notre remplissage pour une matrice de rigidité d'un domaine contenant N_x nœuds suivant l'axe horizontal et N_y nœuds suivant l'axe vertical. A titre information on a choisi dans cet algorithme le stockage en colonne qui sera discuté dans le chapitre suivant sur la base des matrices bandes stockées sous forme de vecteur. On aura l'algorithme suivant :

```

DO 180 L=1,NE
  CALL ELEMENT_T3N
  DO 170 I=1,3
    NUMI=NUMNT(L,I)
    IF(ICL(NUMI).EQ.0) GOTO 170
    K=1
120    IF(IPOS(K).EQ.NUMI) GOTO 130
        K=K+1
        GOTO 120
130    MI=K
        AF(MI)=AF(MI)+AFE(I)
        DO 160 J=1,3
          NUMJ=NUMNT(L,J)
          IF(ICL(NUMJ).EQ.0) GOTO 160
          K=1
140          IF(IPOS(K).EQ.NUMJ) GOTO 150
              K=K+1
              GOTO 140
150          MJ=K
C
C On choisi le stockage en colonne
C
          IF(MJ.LE.IBAP) MK=MI+MJ*(MJ-1)/2
          IF(MJ.GT.IBAP) MK=MI-MJ+IBAP*(2*MJ-IBAP+1)/2
          AK(MK)=AK(MK)+AKE(I,J)
160          CONTINUE
170          CONTINUE
180 CONTINUE

```

Avec :

- **AK** : Matrice de rigidité globale du domaine complet sous forme de vecteur.
- **AF** : Vecteur force du domaine complet.
- **AKE** : Pour stocker les matrices de rigidités des éléments finis triangulaires. Elle est de l'ordre 3×3 .
- **AFE** : Pour stocker le vecteur force des éléments finis triangulaires. Il est de l'ordre 3.
- **ELEMENT_T3N** : Procédure pour faire le calcul de la matrice AKE et le vecteur AFE élémentaire.

CHAPITRE 4

FORMULATION NUMERIQUE

Cette partie de notre modeste travail est consacrée à la résolution du problème numériquement. On a réalisé un programme en langage Fortran dont les annexes B et C présentent les résumés de listing de chaque partie.

4.1. Remarques préliminaires

- Le programme proposé est conçu spécialement surtout pour un cadre de discrétisation élevée.
- L'élément fini utilisé dans le programme est un triangle linéaire à trois (3) nœuds.
- Le travail a été limité pour des matrices $[K]$ symétriques et bandes. Ces deux propriétés nous ont conduit à stocker la partie supérieure (ou inférieure) de la matrice en éliminant les zéros qui se trouvent à l'extérieur de la bande, dans un vecteur uni colonne (ou uni-ligne), qui donne l'équivalence des cases pour la matrice $[K]$ dans le vecteur $\{vk\}$ qui représente la matrice de rigidité fictive.

La méthode de calcul est simple et consiste à donner à chaque fois qu'on tombe dans une case de la matrice $K(i, j)$, sa position dans le vecteur $\{vk\}$ à partir d'une certaine formule qui varie avec la façon de stockage .

Si une fois on tombe dans une case $K(i, j)$ au dessus de la diagonale (dans la partie supérieure) mais à l'extérieur de la bande, le calcul sera ignoré puisque cette case est réellement nulle et elle ne présente aucun changement de résultat d'addition, puisque on connaît au départ sans calcul, le résultat des opérations (d'addition, soustraction, multiplication, division et autres opérations de fonctions) d'un nombre quelconque avec le zéro.

Si une fois on tombe dans une case $K(i, j)$ au dessous de la diagonale (dans la partie inférieure), il suffit uniquement d'utiliser la propriété $K(i, j)=K(j, i)$ (puisque dans le programme on a choisi le stockage de la partie supérieure) et le traitement se fait comme une case $K(i, j)$ avec les deux cas précédents.

4.2. Méthodes de stockage sous forme de vecteur

Considérons une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ symétrique et bande avec la largeur de la demi-bande est B . Le problème est de savoir stocker les cases de cette matrice dans un vecteur $\{vk\}$. Il est parfois plus difficile de faire une équivalence entre une case de la matrice $[K]$ et la case de vecteur $\{vk\}$, ce qui a supposé plusieurs formes de stockages (ou même infini) sous la forme de vecteur. Ces formes de stockages sont différentes suivant la manière de stockage et la formule de récurrence. On va proposer cinq (05) formes de stockages en prenant une matrice $[K]$ d'ordre (7×7) symétrique et sa bande B est égale a 4 et cela pour fixé les idées [10], [19], [24], [28], [30], [32], [33], [34], [35], [36], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [62], [63].

4.2.1. Stockage en colonne

La méthode de stockage choisie est représenté par la direction des flèches, c'est-à-dire, colonne par colonne, comme le montre la figure 4.1:

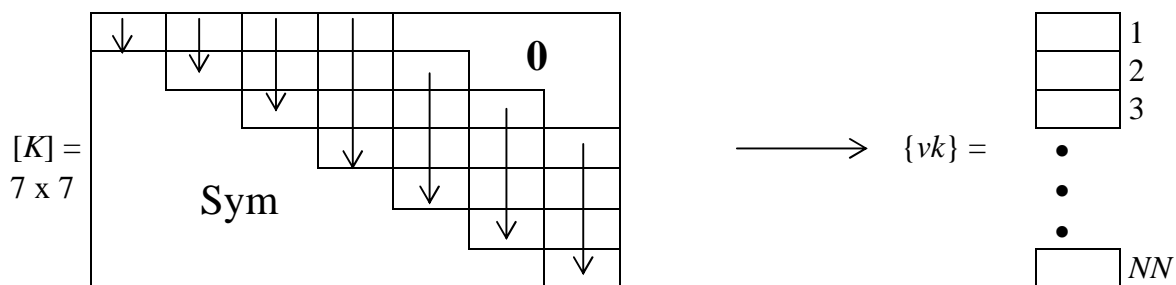


Figure 4.1 : Stockage en colonne

- $vk(1)=K(1,1)$ $vk(2)=K(1,2)$ $vk(3)=K(2,2)$ $vk(4)=K(1,3)$ $vk(5)=K(2,3)$
- $vk(6)=K(3,3)$ $vk(7)=K(1,4)$ $vk(8)=K(2,4)$ $vk(9)=K(3,4)$ $vk(10)=K(4,4)$
- $vk(11)=K(2,5)$ $vk(12)=K(3,5)$ $vk(13)=K(4,5)$ $vk(14)=K(5,5)$ $vk(15)=K(3,6)$
- $vk(16)=K(4,6)$ $vk(17)=K(5,6)$ $vk(18)=K(6,6)$ $vk(19)=K(4,7)$ $vk(20)=K(5,7)$
- $vk(21)=K(6,7)$ $vk(22)=K(7,7)$

On peut remarquer pour cet exemple, que la dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ est égale à 22, c'est à dire $NN = 22$.

Maintenant si on veut généraliser à une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ symétrique avec largeur de la demi-bande égale à B

$$NN = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (N - B) \cdot B$$

$$= \sum_{i=1}^{i=B} i + B \cdot (N-B)$$

comme $\sum_{i=1}^{i=B} i = \frac{B(B+1)}{2}$ suite arithmétique de raison unité, alors :

$$NN = \frac{B(B+1)}{2} + (N-B) \cdot B$$

donc :

$$NN = \frac{B(2N-B+1)}{2} \quad (4.1)$$

On peut vérifier la validité de cette formule pour l'exemple précédant :

$$\begin{cases} N=7 \\ B=4 \end{cases} \rightarrow NN = \frac{4(2 \times 7 - 4 + 1)}{2} = 22$$

On procède maintenant à la détermination de la formule de stockage des éléments de la matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure uniquement) dans le vecteur $\{vk\}$, c'est-à-dire, l'équivalence d'une case de la matrice $[K]$ dans le vecteur $\{vk\}$. Pour trouver la formule de récurrence, on divise la matrice $[K]$ en deux blocs.

❖ Pour une case $K(i, j)$, telle que $j \leq B$, son équivalence (position) dans le vecteur $\{vk\}$ est $vk(L)$ avec :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + (j-1) + i = \frac{(j-1)j}{2} + i$$

alors

$$L = \frac{(j-1)j}{2} + i \quad \text{si } j \leq B \quad (4.2)$$

On peut remarquer que le nombre $(j-1)j$ est un nombre paire.

❖ Pour une case $K(i, j)$, telle que $j > B$, son équivalence (position) dans le vecteur $\{vk\}$ est $vk(L)$ est donnée par :

$$L = 1+2+3+\dots+B+(j-B-1)B+i-(j-B) = i-j+\frac{B(1-B+2j)}{2}$$

alors :

$$L = i - j + \frac{B(1-B+2j)}{2} \quad \text{si } j > B \quad (4.3)$$

Remarques :

➤ Pour la formule (4.2), le compteur 'i' varie de $1 \leq i \leq j$.

- Pour la formule (4.3), le compteur 'i' varie de $j - (B-1) \leq i \leq j$.
- La fonction $L(i, j)$ est continue au point $j = B$, c'est-à-dire, pour $j = B$ on peut appliquer n'importe quelle formules (4.2) ou (4.3).
- Pour les formes suivantes, on va seulement donner les formules de récurrences de stockage sans détailler les calculs.

4.2.2. Stockage en diagonal

La matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure) sera transférée diagonalement dans le vecteur $\{vk\}$ par:

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = \sum_{p=1}^{p=j-i} (N+1-p) + i = \frac{1}{2} (j-i) (2N-j+i+1) + i \quad (4.4)$$

avec $\begin{cases} j=1, 2, 3, \dots, B \\ i=j, 2, 3, \dots, B \end{cases}$ et $\begin{cases} j=B+1, B+2, \dots, N \\ i=j-B, j-B+1, \dots, j \end{cases}$

L'exemple suivant pour une matrice d'ordre (7 x 7) illustre schématiquement le transfert des cases entre la matrice et le vecteur correspondant.

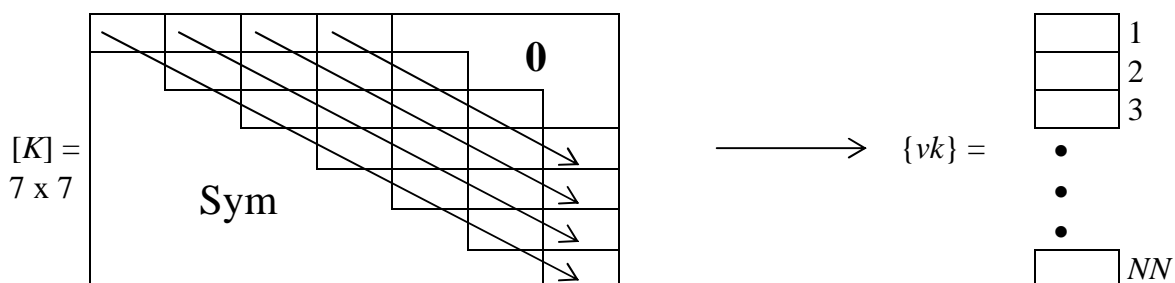


Figure 4.2 : Stockage en diagonal

La dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ est donnée toujours par la formule (4.1). Si on applique la formule (4.4) à cette matrice d'ordre (7 x 7) et $B=4$ pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{array}{lllll}
 vk(1)=K(1,1) & vk(2)=K(2,2) & vk(3)=K(3,3) & vk(4)=K(4,4) & vk(5)=K(5,5) \\
 vk(6)=K(6,6) & vk(7)=K(7,7) & vk(8)=K(1,2) & vk(9)=K(2,3) & vk(10)=K(3,4) \\
 vk(11)=K(4,5) & vk(12)=K(5,6) & vk(13)=K(6,7) & vk(14)=K(1,3) & vk(15)=K(2,4) \\
 vk(16)=K(3,5) & vk(17)=K(4,6) & vk(18)=K(5,7) & vk(19)=K(1,4) & vk(20)=K(2,5) \\
 vk(21)=K(3,6) & vk(22)=K(4,7) & & &
 \end{array}$$

4.2.3. Stockage en ligne

La matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure) sera transférée ligne par ligne dans le vecteur $\{vk\}$ par:

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = (i - 1) B + j + i + 1 \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=1, 2, 3, \dots, N-B \\ j=i, i+1, \dots, i+B-1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$L = \frac{B}{2} (2N - B + 1) - \frac{1}{2} (N - i) (N - i + 1) - N + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=N-B+1, \dots, N \\ j=i, i+1, \dots, N \end{cases} \quad (4.6)$$

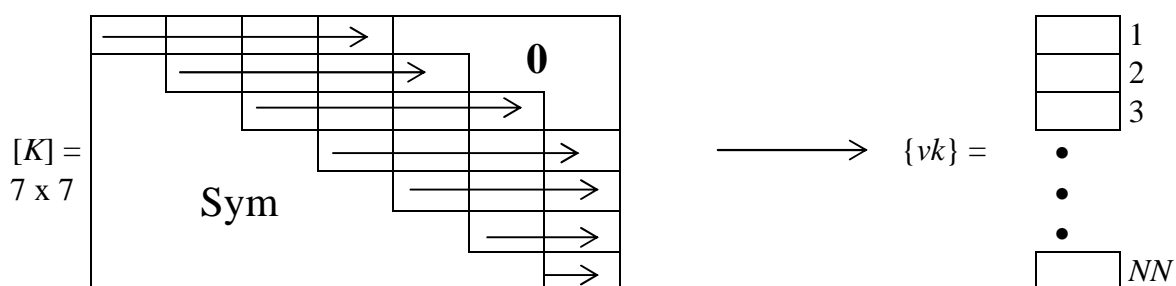


Figure 4.3 : Stockage en ligne

La dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ est donnée toujours par la formule (4.1).

Si on applique les deux formules (4.5) et (4.6) à cette matrice d'ordre (7×7) et $B=4$, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} vk(1) &= K(1,1) & vk(2) &= K(1,2) & vk(3) &= K(1,3) & vk(4) &= K(1,4) & vk(5) &= K(2,2) \\ vk(6) &= K(2,3) & vk(7) &= K(2,4) & vk(8) &= K(2,5) & vk(9) &= K(3,3) & vk(10) &= K(3,4) \\ vk(11) &= K(3,5) & vk(12) &= K(3,6) & vk(13) &= K(4,4) & vk(14) &= K(4,5) & vk(15) &= K(4,6) \\ vk(16) &= K(4,7) & vk(17) &= K(5,5) & vk(18) &= K(5,6) & vk(19) &= K(5,7) & vk(20) &= K(6,6) \\ vk(21) &= K(6,7) & vk(22) &= K(7,7). \end{aligned}$$

4.2.4. Stockage en ligne de serpent

La matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure) sera transféré ligne par ligne alternativement dans le vecteur $\{vk\}$ comme le présente la figure 4.4 suivante. Pour une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ on a :

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = (i-1)B + (-1)^{i-1} (j-i+1) + \left(i+1 - 2 \operatorname{Int}\left(\frac{i}{2}\right) \right) (B+1) \quad (4.7)$$

si $\begin{cases} i=1, 2, \dots, N-B \\ j=i, i+1, \dots, i-B-1 \end{cases}$

et

$$L = \frac{B}{2} (2N-B+1) - \frac{1}{2} (N-i) (N-i+1) - N + j + \left[i+1 - 2 \operatorname{Int}\left(\frac{N}{2}\right) \right] (N-2j+i) \quad (4.8)$$

si $\begin{cases} i=N-B+1, \dots, N \\ j=i, i+1, \dots, N \end{cases}$

avec $\operatorname{Int}(x)$: Veut dire la partie entière d'un nombre fractionnaire.

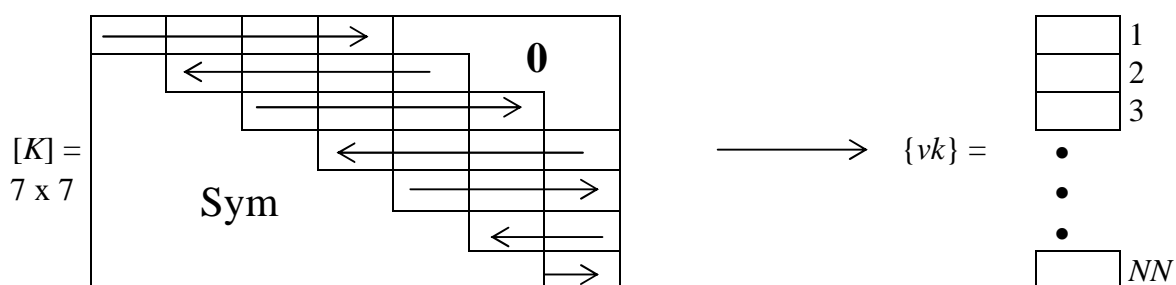


Figure 4.4 : Stockage en ligne de serpent

De même la dimension du vecteur $\{vk\}$ est donnée par la formule (4.1). Si on applique les deux formules (4.7) et (4.8) à cet exemple pour $N=7$, $B=4$, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} vk(1) &= K(1,1) & vk(2) &= K(1,2) & vk(3) &= K(1,3) & vk(4) &= K(1,4) & vk(5) &= K(2,5) \\ vk(6) &= K(2,4) & vk(7) &= K(2,3) & vk(8) &= K(2,2) & vk(9) &= K(3,3) & vk(10) &= K(3,4) \\ vk(11) &= K(3,5) & vk(12) &= K(3,6) & vk(13) &= K(4,7) & vk(14) &= K(4,6) & vk(15) &= K(4,5) \\ vk(16) &= K(4,4) & vk(17) &= K(5,5) & vk(18) &= K(5,6) & vk(19) &= K(5,7) & vk(20) &= K(6,7) \\ vk(21) &= K(6,6) & vk(22) &= K(7,7) \end{aligned}$$

4.2.5. Stockage en escalier

Le schéma de transfert des éléments de la matrice $[K]$ se fait comme indiqué La figure 4.5 suivante pour $N=7$ et $B=4$. Pour une matrice d'ordre $(N \times N)$ avec une bande B , le transfert des éléments se fait par la formule de récurrence suivante :

$$vk(L) = K(i, j) \quad \text{par :}$$

$$L = (i-1) \frac{(2N-i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=1, 2, 3, \dots, B \\ j=i, i+1, \dots, B \end{cases} \quad (4.9)$$

et

$$L = (B-j+i-1) \frac{(2N-B+j-i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=1, 2, \dots, N \\ j=B+1, B+2, \dots, i+B-1 \end{cases} \quad (4.10)$$

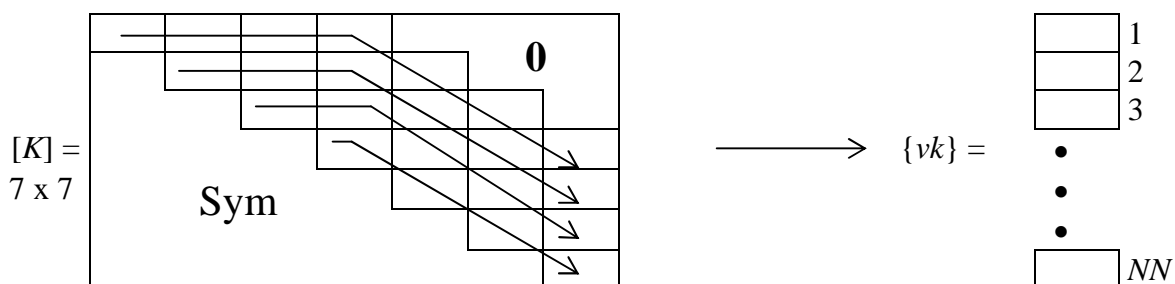


Figure 4.5 : Stockage en escalier

Pour bien voir le transfert des éléments, voici la correspondance :

$$\begin{aligned} vk(1) &= K(1,1) & vk(2) &= K(1,2) & vk(3) &= K(1,3) & vk(4) &= K(1,4) & vk(5) &= K(2,5) \\ vk(6) &= K(3,6) & vk(7) &= K(4,7) & vk(8) &= K(2,2) & vk(9) &= K(2,3) & vk(10) &= K(2,4) \\ vk(11) &= K(3,5) & vk(12) &= K(4,6) & vk(13) &= K(5,7) & vk(14) &= K(3,3) & vk(15) &= K(3,4) \\ vk(16) &= K(4,5) & vk(17) &= K(5,6) & vk(18) &= K(6,7) & vk(19) &= K(4,4) & vk(20) &= K(5,5) \\ vk(21) &= K(6,6) & vk(22) &= K(7,7) \end{aligned}$$

Remarques :

La méthode de stockage des matrices bandes sous forme de vecteur nous fait gagner en espace mémoire l'ordre suivant :

Pour une matrice [K] d'ordre ($N \times N$), symétrique et bande, on a :

$$NDCE = N \times N - NN = N^2 - \frac{B(2N-B+1)}{2}$$

avec $NDCE$: Nombre De Case Eliminés

Au lieu de stocker N^2 cases dans la mémoire de l'ordinateur, on stocke uniquement NN cases. Pour voir un ordre sur les valeurs de $NDCE$ et NN , on propose les exemples suivants :

- $N = 100$

| B | N^2 | NN | $NDCE$ | Pourcentage des cases gagnées |
|-----|-------|------|--------|-------------------------------|
| 100 | 10000 | 5050 | 4950 | $\approx 49,50 \%$ |
| 70 | 10000 | 4585 | 5415 | $\approx 54,15 \%$ |
| 35 | 10000 | 2905 | 7095 | $\approx 70,95 \%$ |
| 10 | 10000 | 955 | 9045 | $\approx 90,45 \%$ |
| 2 | 10000 | 199 | 9801 | $\approx 98,01 \%$ |

- $N = 5000$

| B | N^2 | NN | $NDCE$ | Pourcentage des cases gagnées |
|-----|----------|---------|----------|-------------------------------|
| 480 | 25000000 | 2285040 | 22714960 | $\approx 90,85 \%$ |
| 270 | 25000000 | 1313685 | 23686315 | $\approx 94,74 \%$ |
| 150 | 25000000 | 738825 | 24261175 | $\approx 97,04 \%$ |
| 70 | 25000000 | 347585 | 24652415 | $\approx 98,60 \%$ |

- $N = 100000$

| B | N^2 | NN | $NDCE$ | Pourcentage des cases gagnées |
|-----|-----------|-----------|------------|-------------------------------|
| 480 | 10^{10} | 47885040 | 9952114960 | $\approx 99,52 \%$ |
| 270 | 10^{10} | 269636685 | 9973036315 | $\approx 99,73 \%$ |
| 150 | 10^{10} | 14988825 | 9985011175 | $\approx 99,85 \%$ |
| 70 | 10^{10} | 6997585 | 9993002415 | $\approx 99,93 \%$ |

Il est bien clair d'après ces exemples que plus la largeur de la demi bande est petite plus le nombre des cases gagnées augmente rapidement, ce qui veut dire que, durant la numérotation des nœuds du maillage généré, il est important de choisir celle qui donne la bande minimale, ce que l'on appelle par numérotation optimale.

On peut démontrer que toute régions plane ou surfacique peut être transformée ou considérée comme un carré ou rectangle. Le maillage généré est appelé maillage de type H. Pour un carré, considérons N_x nœuds suivants l'axe horizontale x et N_y nœuds suivant l'axe verticale y .

Alors le nombre des nœuds totale N et donné par :

$$N = N_x \cdot N_y$$

On suppose que $N_x \leq N_y$. Si $N_y > N_x$, il suffit uniquement de permuter les axes de coordonnées.

On peut démontrer que le nombre des nœuds restant après l'entrée des conditions aux limites (si ces dernières sont de type Dirichlet) c'est-à-dire l'ordre de la matrice $[K]$ pour la résolution est donnée par

$$N = N_x \cdot N_y - 2 N_x - 2 N_y + 4 \quad (4.11)$$

Dans ce cas, la largeur optimale de la demi-bande B est donnée par :

$$B \leq N + 2 - 1 + 1$$

ou

$$B \leq N_x + 2 \quad \text{Puisque on a supposé que } N_x \leq N_y$$

Dans ce cas la dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ pour le cas le plus défavorable est donnée par :

$$B_{\max} = N_x + 2$$

Pour bien voir l'ordre de la dimension, ainsi que le pourcentage des cases gagnés, on considère l'exemple suivant:

- $N_y = 100$

| N_x | B_{\max} | N | NN | $NDCE$ | Pourcentage des cases gagnées |
|-------|------------|------|--------|----------|-------------------------------|
| 100 | 102 | 9604 | 974457 | 91262359 | $\approx 98,94 \%$ |
| 80 | 82 | 7644 | 623487 | 57807249 | $\approx 98,93 \%$ |
| 50 | 52 | 4704 | 243282 | 21884334 | $\approx 98,90 \%$ |
| 30 | 32 | 2744 | 87312 | 7442224 | $\approx 98,84 \%$ |
| 10 | 12 | 784 | 9342 | 605314 | $\approx 98,48 \%$ |
| 3 | 5 | 98 | 480 | 9124 | $\approx 95,00 \%$ |

On remarque bien que le nombre de cases gagnés dans les cas les plus défavorables dépasse 90% de la méthode classique de stockage complet. Donc on a bien vu l'intérêt pratique de la technique de la matrice bande. Après avoir résolu le problème de stockage, on va procéder maintenant à la description qualitative des méthodes de résolution d'un système adapté pour des matrices bandes, stockées sous forme d'un vecteur.

4.3. Algorithmes de résolution de système d'équations

On a amené à résoudre le problème après avoir rempli la matrice de rigidité $[K]$ globale et le vecteur $\{F\}$ afin de déterminer le vecteur $\{u\}$ de solution à un système d'équations suivant [16], [19], [20], [28] [30], [33], [34], [36], [48], [49], [52], [53], [54]:

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (4.12)$$

On a choisi deux méthodes pour la résolution numérique de ce système d'équations.

4.3.1. Méthode de Khaletski

Supposons dans la première étape que la matrice $[K]$ est carré mais pleine et quelconque. Après avoir présenté l'algorithme de résolution, en essaye de faire l'extension vers une matrice pleine mais symétrique, et dans la dernière étape en déduit l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et bande [19], [63].

➤ $[K]$ matrice carré pleine quelconque [19], [20], [21]

Mettons la matrice $[K]$ sous la forme d'un produit de deux matrices triangulaires inférieure $[L] = [L_{ij}]$ et de la matrice triangulaire supérieure $[H] = [H_{ij}]$ à diagonale unité, c'est-à-dire :

$$[K] = [L][H] \quad (4.13)$$

où :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ L_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & H_{13} & \cdot & \cdot & H_{1N} \\ & 1 & H_{23} & \cdot & \cdot & H_{2N} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & H_{3N} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments L_{ij} et H_{ij} se calculent d'après les formules suivantes:

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= K_{11} \quad , \quad H_{1j} = \frac{K_{1j}}{L_{11}} \quad j=2, 3, \dots, N \\ L_{ij} &= K_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} L_{im} H_{mj} \quad j=1, 2, 3, \dots, i \\ H_{ij} &= \frac{1}{L_{ii}} \left(K_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{im} H_{mj} \right) \quad j=i+1, i+2, i+3, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (4.14)$$

On aura par suite deux systèmes d'équations à matrice triangulaire

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad \rightarrow \quad [L][H]\{u\} = \{F\}$$

on pose

$$[H]\{u\} = \{y\} \quad (4.15)$$

alors

$$[L]\{y\} = \{F\} \quad (4.16)$$

La résolution de système (4.16) en suite (4-15) se fait par les procédures suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{m=1}^{i-1} L_{im} y_m \right) \end{cases} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (4.17)$$

et

$$\begin{cases} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \sum_{m=i+1}^{m=N} H_{im} u_m \end{cases} \quad i=N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1 \quad (4.18)$$

- [K] matrice carrée pleine et symétrique [19], [20], [21]:

Si la matrice [K] est symétrique, c'est-à-dire, si $K_{ij}=K_{ji}$ ce qui est le cas. Alors, on peut démontrer que:

$$H_{ij} = \frac{L_{ji}}{L_{ii}} \quad (4.19)$$

La propriété (4.19) nous a permis de ne pas déclarer la matrice [H] dans la mémoire de l'ordinateur et de calculer uniquement les éléments de la matrice [L], ce qui engendre un gain d'espace mémoire en plus. L'algorithme présenté par les formules (4.14), (4.17) et (4.18) se simplifie à :

$$\begin{cases} L_{11} = K_{11} \\ L_{ij} = K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_{im} \frac{L_{jm}}{L_{mm}} \end{cases} \quad j=1, 2, 3, \dots, i \quad i=2, 3, \dots, N \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left\{ F_i - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} y_m \right\} \end{cases} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (4.21)$$

et substituons l'équation (4.19) dans l'équation (4.18), cette dernière devient :

$$\begin{cases} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{m=i+1}^{m=N} L_{mi} u_m \end{cases} \quad i=N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1 \quad (4.22)$$

- [K] matrice carrée symétrique et bande [19], [48], [63]:

Comme la matrice [K] de notre problème est symétrique et en plus elle est bande, nous essayons à partir des algorithmes (4.20), (4.21) et (4.22) d'extraire l'algorithme pour des matrices symétriques et bandes et cela en éliminant les opérations sur les zéros].

Exemple 2 : $N = 10$; $B = 4$

| | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|-------------|
| K_{11} | | | | | | | | | |
| K_{21} | K_{22} | | | | | | | | |
| K_{31} | K_{32} | K_{33} | | | | | | | |
| K_{41} | K_{42} | K_{43} | K_{44} | | | | | | |
| | K_{52} | K_{53} | K_{54} | K_{55} | | | | | |
| | | K_{63} | K_{64} | K_{65} | K_{66} | | | | |
| | | | K_{74} | K_{75} | K_{76} | K_{77} | | | |
| | | | | K_{85} | K_{86} | K_{87} | K_{88} | | |
| | | | | | K_{96} | K_{97} | K_{98} | K_{99} | |
| | | | | | | $K_{10,7}$ | $K_{10,8}$ | $K_{10,9}$ | $K_{10,10}$ |

Sym

Figure 4.7 : Exemple 2 de la matrice bande de la relation (4.23)

Remarque :

- La matrice $[L]$ qui vient de la décomposition de la matrice $[K]$ possède la même structure que $[K]$ sauf qu'elle est triangulaire. Après l'élimination des opérations sur les zéros (les éléments à l'extérieure de la bande), la formule de décomposition (4.20) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} L_{ir} \frac{L_{jr}}{L_{rr}} \\ L_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=i-B+1}^{j-1} L_{ir} \frac{L_{jr}}{L_{rr}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i=1, 2, 3, \dots, B \\ j=2, 3, \dots, i \\ i=B+1, B+2, \dots, N \\ j=i-B+1, \dots, i \end{array} \right. \quad (4.24)$$

De la même manière les formules (4.21), et (4.22) deviennent respectivement de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{r=1}^{i-1} L_{ir} y_r \right) \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{r=i-B+1}^{i-1} L_{ir} y_r \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i=2, 3, \dots, B \\ i=B+1, \dots, N \end{array} \right. \quad (4.25)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^{r=N} L_{ri} u_r \quad i=N-1, N-2, \dots, N-B+1 \\ u_i = y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^{r=i+B-1} L_{ri} u_r \quad i=N-B, N-B-1, \dots, 3, 2, 1 \end{array} \right. \quad (4.26)$$

4.3.2. Méthode de Cholesky

Dans le cas d'une matrice indéfinie, la matrice $[K]$ symétrique peut être décomposée sous la forme suivante [19], [20], [21]:

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (4.27)$$

avec :

$[L]$: Matrice triangulaire inférieure (les éléments au-dessous de la diagonal sont non nuls) avec diagonale unité.

$[D]$: Matrice diagonale avec les éléments Pivots $d_{ii} \neq 0$

$[L]^T$: La transposée de la matrice $[L]$

Sous la forme matricielle :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & & \vdots & \vdots \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ L_{N1} & L_{N2} & L_{N3} & \dots & L_{NN} \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & d_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_{NN} \end{bmatrix}$$

Les équations donnant les éléments de $[L]$ et $[D]$ sont données par:

$$\sum_{r=1}^{r=\min(i,j)} d_{rr} L_{ri} L_{rj} = K_{ij} \quad \begin{cases} i=1, 2, 3, \dots, N \\ j=1, 2, 3, \dots, i \end{cases} \quad (4.28)$$

Remarque :

L'algorithme de Cholesky devient celui de Khaletski si on pose :

$[L][D]$ de Cholesky = $[L]$ de Khaletski

$[L]^T$ de Cholesky = $[H]$ de Khaletski

On présente uniquement l'algorithme de factorisation de la matrice $[K]$ (symétrique et pleine) sans calculer le vecteur $\{u\}$ et sans le faire pour la matrice bande.

- Algorithme I :

Cet algorithme est conçu si la matrice $[K]$ n'est pas forcément définie positive. On obtient $\frac{N(N+1)}{2}$ équations résultantes à partir de la décomposition.

$$\begin{aligned} d_{11} &= K_{11} \\ L_{j1} &= \frac{K_{j1}}{d_{11}} \quad j=2, 3, \dots, N \\ \left. \begin{aligned} d_{ii} &= K_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} d_{rr} L_{ri}^2 \\ L_{ji} &= \frac{1}{d_{ii}} \left(K_{ji} - \sum_{r=1}^{i-1} d_{rr} L_{ri} L_{rj} \right) \quad j=i+1, i+2, \dots, N \end{aligned} \right\} i=2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le déterminant de la matrice $[K]$ est obtenu par :

$$\det [K] = \prod_{i=1}^{i=N} d_{ii} \quad (4.30)$$

Remarque :

Si la matrice $[K]$ est symétrique et définis positive, on peut décomposer la matrice $[K]$ sous la forme suivante :

$$[K] = [L]^T \cdot [L] \quad (4.31)$$

Dans ce cas, la matrice $[L]$ est triangulaire supérieure (les éléments au-dessus de la diagonale sont non nuls) et sous la forme matricielle possède la structure suivante :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1N} \\ & L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{2N} \\ & & L_{33} & \cdots & L_{3N} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & L_{NN} \end{bmatrix}$$

- Algorithme II :

Cet algorithme est conçu spécialement si la matrice de rigidité est défini positive. L'algorithme qui donne la factorisation de $[K]$ pour ce type de matrice est le suivant:

$$\left. \begin{aligned}
 L_{11} &= \sqrt{K_{11}} \quad , \quad L_{1j} = \frac{K_{1j}}{L_{11}} \quad j=2, 3, \dots, N \\
 L_{pp} &= \sqrt{K_{pp} - \sum_{r=1}^{p-1} L_{rp}^2} \\
 L_{pj} &= \frac{1}{L_{pp}} \left(K_{pj} - \sum_{r=1}^{p-1} L_{rp} L_{rj} \right) \quad j=p+1, p+2, \dots, N
 \end{aligned} \right\} \quad p=2, 3, \dots, N \quad (4.32)$$

Le déterminant de la matrice $[K]$ est obtenu par $\det [K] = \left(\prod_{i=1}^{i=N} L_{ii} \right)^2$

Remarques :

- Les éléments de la diagonale de la matrice $[K]$ sont tous positifs et non nuls.
- Concernant les algorithmes (4.29) et (4.32) pour la méthode de Cholesky, on n'a pas le problème de division par zéro.
- La division par d_{11} dans l'algorithme (4.29) ne pose aucun problème de division par zéro, puisque $d_{11}=K_{11}$ et on a dit que : $K_{ii} > 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, N$. La division par $d_{ii} \quad (i=1, 2, 3, \dots, N)$ dans l'algorithme (4.29) ne pose pas encore le problème de division par zéro, puisqu'on a : $\det [K] \neq 0$ (La solution de $\{u\}$ existe mathématiquement) et d'après la relation (4.30), il faut que : $d_{ii} \neq 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, N$.
- Concernant l'algorithme II de Cholesky présenté par les équations (4.32) ne pose pas de problème de division par zéro puisqu'on a : $\det [K] \neq 0$. La solution de $\{u\}$ existe, et comme $\det [K]=L_{11}^2.L_{22}^2.L_{33}^2.... L_{NN}^2$. Alors il faut que les $L_{ii} \quad i=1, 2, 3, \dots, N$ soient tous différents de zéro.
- Le problème de la racine d'un nombre négatif de l'algorithme (4.32) pour déterminer les éléments diagonaux de la matrice $[L]$ ne se pose plus, puisque la condition supplémentaire que doit vérifier la matrice $[K]$ pour que l'algorithme II soit applicable est que la matrice $[K]$ soit définie positive.
- Les mêmes remarques présentées pour l'algorithme de Cholesky sont valables pour l'algorithme de Khaletski.

- La détermination du vecteur solution $\{u\}$ par l'algorithme de Cholesky ne diffère pas beaucoup par celui de Khaletski.

On n'a pas présenté ici les détails de l'algorithme de Cholesky pour des matrices symétriques et bandes vu que on n'a pas fait la programmation de cette méthode et qu'elle se semble à un certain niveau.

4.4. Algorithmes de calcul des paramètres intéressants

Après la détermination de la solution du vecteur $\{u\}$ dans chaque nœud du maillage, notre intérêt s'oriente vers le calcul de quelques paramètres intéressants de l'application de l'équation de Poisson.

La discipline mécanique des fluides, par exemple, à l'intérêt sur le calcul de l'écoulement dans des conduites, tels que l'air pour pressuriser des cabines des avions, alimenter les réservoirs de carburant des engins, conduisez de huile pour le graissage des arbres des moteurs etc. Donc, on a besoin de connaître quelques résultats qui reflète l'écoulement, tels que, le coefficient de perte de charge, vitesse maximale, débit du fluide traversant la conduite et vitesse moyenne.

La discipline Résistance des matériaux, donne le résultat de la torsion des poutres des sections uniquement circulaires. Si la section de la poutre est non circulaire, le calcul de la contrainte de torsion et l'angle de torsion seront données par l'élasticité linéaire, après faire la résolution numérique de l'équation de Poisson où la variable u de l'équation est appelée dans ce cas, flux de contrainte. Donc on a l'intérêt de faire le calcul de la formule de torsion sous la forme d'une certaine constante et la distribution de contrainte de torsion dans la surface de la section de la poutre.

Le calcul de la valeur moyenne d'une certaine variable continue, et en particulier, vitesse moyenne de l'écoulement traversant une conduite a besoin de la valeur de l'aire de la surface de la conduite. Donc notre intérêt s'oriente encore vers le calcul de l'aire de section des conduites.

Les positions des nœuds de maillage doivent être données par rapport à un repère passant par le centre de gravité de la section, ce qui veut dire, l'intérêt de calcul de la position du centre de gravité de cette section.

4.4.1. Aire et position du centre de gravité de la surface de la section

La surface du domaine à été subdivisée en petits éléments finis de forme triangulaires, ou quadrilatères de forme simples. Alors, l'aire totale de cette section sera approximer par la somme de toutes les aires des surfaces des éléments élémentaires simples. On peut écrire, par conséquent :

$$A = \sum_{i=1}^{i=NE} A_i \quad (4.37)$$

Si l'élément finis est un quadrilatère (ou rectangle), la surface de cet élément peut être considéré comme l'union de deux triangles comme l'indique la figure suivante :

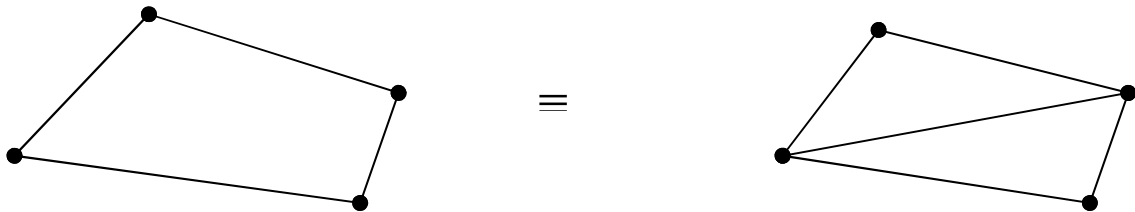


Figure 4.8 : Considération d'un quadrilatère comme deux triangles

Le centre de gravité d'une section plane peut être calculé par les formules suivantes :

$$x_G = \frac{\int x dA}{\int_A dA} \quad y_G = \frac{\int y dA}{\int_A dA} \quad (4.38)$$

Pour une section subdivisée en petits éléments de géométrie simples, le théorème de la surface composée résout ce problème et donne le résultat suivant :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=NE} (x_G)_i A_i}{\sum_{i=1}^{i=NE} A_i} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=NE} (y_G)_i A_i}{\sum_{i=1}^{i=NE} A_i} \quad (4.39)$$

avec :

- NE : Le nombre d'éléments finis du maillage.
- A_i ($i=1, \dots, NE$) : représente l'aire de la surface de l'élément finis (triangle ou quadrilatère). Si l'élément finis est un triangle, sa surface est donnée par la formule (2.23).

- $(x_G)_i$, $(y_G)_i$: représentent les coordonnées du centre de gravité du triangle numéro ' i '.
Ils sont donnés par la formule (2.37).

Si le maillage dans la section est fait par des triangles, l'aire totale et la position du centre de gravité peuvent être calculés et approximés en utilisant l'algorithme suivant :

```

A=0.0
SX=0.0
SY=0.0
POUR I=1 JUSQU'A NE
  FAIRE
    J1=NUMNT(I,1) ; J2=NUMNT(I,2) ; J3=NUMNT(I,3)
    X1=X(J1) ; Y1=Y(J1)
    X2=X(J2) ; Y2=Y(J2)
    X3=X(J3) ; Y3=Y(J3)
    AT=0.5*(X1*(Y2-Y3)+X2*(Y3-Y1)+X3*(Y1-Y2))
    XGT=(X1+X2+X3)/3 ; YGT=(Y1+Y2+Y3)/3
    SX=AT*YGT ; SY=AT*XGT
    A=A+AT
  FIN FAIRE
XG=SY/A ; YG=SX/A

```

avec :

- X et Y : vecteurs contient les positions des nœuds du maillage par rapport à l'ancien repère de coordonnées
- XGT , YGT : Pour calculer la position du centre de gravité du triangle numéro ' I '.
- SX , SY : Pour calculer les moments statiques de la section par rapport aux axes X et Y respectivement.
- $(X1, Y1)$, $(X2, Y2)$, $(X3, Y3)$: Pour stocker les positions des trois nœuds du triangle numéro ' I '.
- AT : Pour calculer l'aire de la surface du triangle numéro ' I '.
- NUMNT(NE, 3) : Pour Stocker les numéros des trois nœuds de chaque triangle de maillage.
- NE : Nombre des éléments finis triangulaires dans le maillage.

4.4.2. Intégrale de surface de la solution u du problème

Le calcul des paramètres physiques des phénomènes de la nature utilisent le résultats de certaine intégrale de surface de la solution du vecteur $\{u\}$ pour déterminer par exemple le débit volumique Q du fluide (gaz ou liquide) à travers une section, le moment de torsion M_t exercé sur une poutre, la vitesse moyenne u_{moy} , le courant électrique à travers des files. Ces paramètres sont donnés par les résultats suivants [11], [19]:

- Le débit volumique est donné par :

$$Q = \iint_A u(x,y) dx dy \quad (4.40)$$

- Le moment de torsion est donné par:

$$M_t = 2 \iint_A u(x,y) dx dy \quad (4.41)$$

avec : $u(x,y)$ représente le flux de contrainte dans ce cas.

- La vitesse moyenne d'un fluide à travers une section droite est donnée par:

$$u_{moy} = \frac{1}{A} \iint_A u(x,y) dx dy \quad (4.42)$$

Par conséquent, l'intégrale suivante à un grand intérêt physique. Pour cela, on va déterminer mathématiquement l'approximation de résultats de cette intégrale en utilisant le principe de la discrétisation et les fonctions d'interpolations. Soit :

$$H = \iint_A u(x,y) dx dy \quad (4.43)$$

On peut considérer l'intégrale comme la somme des intégrales dans les petits éléments finis du maillage. On aura:

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \left[\int_{A_i} u(x,y) dx dy \right] \quad (4.44)$$

La fonction $u(x,y)$ dans l'élément fini est donnée par la formule (2.24) pour un élément triangulaire à trois nœuds et par la formule (2.30) pour un élément quadrilatère (rectangulaire), qui seront résumées par :

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{j=NNPE} u_j \Psi_j(x,y) \quad (4.45)$$

Avec : $NNPE$: Nombre de Nœuds Par Élément. Il est égal à 3 pour un triangle à trois nœuds et 4 pour quadrilatère à 4 nœuds. Substituons l'équation (4.45) dans la relation (4.43) on obtient :

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \left[\int_{A_i} \sum_{j=1}^{j=NNPE} u_j \Psi_j(x,y) dx dy \right] \quad (4.46)$$

Sous une autre forme on a :

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \sum_{j=1}^{j=NNPE} u_j \left[\int_{A_i} \Psi_j(x,y) dx dy \right] \quad (4.47)$$

Pour un élément triangulaire à trois nœuds, les fonctions d'interpolations sont données par la formule (2.25a), récapitulées par :

$$\Psi_j(x,y) = \frac{1}{2 A_i} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \quad (4.48)$$

Remplaçant la relation (4.48) dans la relation (4.47), on obtient :

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \sum_{j=1}^{j=3} u_j \left[\int_{A_i} \frac{1}{2 A_i} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) dx dy \right] \quad (4.49)$$

Sous une autre forme, elle s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \frac{1}{2 A_i} \sum_{j=1}^{j=3} u_j \left[\int_{A_i} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) dx dy \right] \quad (5.50)$$

Sous une autre forme on a :

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \frac{1}{2 A_i} \sum_{j=1}^{j=3} u_j \left[\alpha_j \int_{A_i} dx dy + \beta_j \int_{A_i} x dx dy + \gamma_j \int_{A_i} y dx dy \right] \quad (5.51)$$

En utilisant les relations (2.37) dans la relation (4.51) on obtient :

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \frac{1}{2 A_i} \sum_{j=1}^{j=3} u_j \left[\alpha_j (I_{00})_i + \beta_j (I_{10})_i + \gamma_j (I_{01})_i \right] \quad (4.52)$$

Sous une autre forme, elle s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^{i=NE} \frac{1}{2 A_i} \sum_{j=1}^{j=3} u_j \left[\alpha_j A_i + \beta_j A_i (x_G)_i + \gamma_j A_i (y_G)_i \right] \quad (4.53)$$

En utilisons la relation (2.39b) on aura :

$$H = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=NE} A_i (u_1 + u_2 + u_3)_i \quad (4.54)$$

La formule (4.54) donne le résultat de l'intégrale de surface de la solution $\{u\}$ pour une discrétisation en éléments finis triangulaires à trois nœuds.

On propose l'algorithme suivant permettant le calcul numérique de la valeur de H pour une discrétisation en éléments finis triangulaires à trois nœuds.

```

H=0.0
POUR I=1 JUSQU'A NE
  FAIRE
    J1=NUMNT(I,1) ; J2=NUMNT(I,2) ; J3=NUMNT(I,3)
    X1=X(J1) ; Y1=Y(J1)
    X2=X(J2) ; Y2=Y(J2)
    X3=X(J3) ; Y3=Y(J3)
    AE=0.5*(X1*(Y2-Y3)+X2*(Y3-Y1)+X3*(Y1-Y2))
    H=H+AE*(U(J1)+U(J2)+U(J3))
  FIN FAIRE
H=H/3

```

4.4.3. Dérivée de la solution u du problème

On a l'intérêt sur le calcul de la dérivée partielle de la solution $u(x,y)$ par rapport à x et y a fin de calculer les contraintes τ_{zx} et τ_{zy} dans chaque points du maillage. Mathématiquement, on calcul (on prépare) les résultats suivants [19]:

$$D_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad D_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.55)$$

avec :

D_x : La dérivée de la fonction $u(x,y)$ par rapport à x

D_y : La dérivée de la fonction $u(x,y)$ par rapport à y

La relation (2.11) donne l'approximation de la fonction $u(x,y)$ récapitulée par la forme suivante :

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{j=NN} u_j \Psi_j(x,y) \quad (4.56)$$

NN : Nombre de nœuds dans le maillage.

Un point de maillage est commun entre un nombre d'éléments finis. Alors, pour déterminer les valeurs de D_x et D_y , il faut connaître le nombre et les numéros des éléments communs à ce nœud.

4.4.4. Position et valeur maximale de la solution u du problème

Il est parfois utile de déterminer la valeur et la position de la solution maximale de $\{u\}$ du problème.

Par exemple, si le vecteur $\{u\}$ du problème représente la distribution de contrainte d'une sollicitation élastique, il est très intéressant de déterminer sa valeur et sa position à fin de localiser la section et le point dangereux qui provoque la rupture, ou, pour faire un dimensionnement d'une structure travaillante sous une contrainte inférieure à une certaine contrainte admissible de rupture, déterminée par les essais pratiques de la résistance des matériaux.

Si par exemple la solution $\{u\}$ du problème représente la distribution de la vitesse de l'écoulement, il est utile de déterminer la position et la valeur maximale de cette vitesse afin de déterminer la vitesse débitante.

Donc nous sommes en présence d'un vecteur contient un nombre important de valeur et le problème consiste à déterminer la valeur maximale et la position dans le domaine physique.

On propose l'algorithme suivant, pour déterminer la valeur maximale entre les éléments d'un vecteur et déduire la position dans le domaine physique.

```

UMAX=0.0
POUR I=1 JUSQU'A NN
FAIRE
    SI | U(I) | ≥ UMAX ALORS
        UMAX=U(I)
        IPOSX=I
    FIN SI
FIN FAIRE
XUMAX=X(IPOS) ; YUMAX=Y(IPOS)
Ecrire XUMAX, YUMAX, UMAX

```

Avec :

NN : Nombre de Nœuds dans le maillage.

UMAX : La valeur maximale de la solution $\{u\}$

XUMAX, YUMAX : La position du point possédant la valeur maximale de la solution $\{u\}$.

Remarque :

Il est possible de voir plusieurs points dans le maillage possédants la même valeur maximale $UMAX$ de la solution $\{u\}$.

4.4.5. Solution à l'intérieur de la surface de l'élément fini

Le domaine réel présente une région continue, c'est-à-dire, possède une infinité de points. La discrétisation du domaine nous permet de choisir parmi les points du domaine un nombre important mais fini et la solution $u(x,y)$ sera trouvée par la méthode des éléments finis uniquement en ces points. La solution analytique $u(x,y)$ est absente et elle est remplacée par les valeurs de cette fonction aux points choisis du maillage. Le problème qui se pose c'est d'avoir des valeurs de la solution en n'importe quels points du domaine en dehors des points sélectionnés au départ. Par exemple, on veut chercher la solution dans le centre de gravité de chaque éléments finis au n'importe quels autres points donnés par les composantes (x_p, y_p) dans le domaine. Pour arriver aux résultats, il suffit d'utiliser les fonctions d'interpolations $\Psi_i^{(e)}(x,y)$ de l'élément contenant le point (x_p, y_p) par la formule (2.24) récapitulée sous la forme suivante:

$$u(x_p, y_p) = u_1 \Psi_1(x_p, y_p) + u_2 \Psi_2(x_p, y_p) + u_3 \Psi_3(x_p, y_p) \quad (4.57)$$

L'algorithme suivant détermine la solution dans le centre de gravité de tous les éléments finis du maillage. L'étape de la détermination de la solution $\{u\}$ dans tous les points du maillage à été déjà faite.

```

POUR I=1 JUSQU'A NE
FAIRE
  I1=NUMNT(I,1) ; I2=NUMNT(I,2) ; I3=NUMNT(I,3)
  X1=X(I1) ; Y1=Y(I1)
  X2=X(I2) ; Y2=Y(I2)
  X3=X(I3) ; Y3=Y(I3)
  XP=(X1+X2+X3)/3 ; YP=(Y1+Y2+Y3)/3
  DET=X1*(Y2-Y3)+X2*(Y3-Y1)+X3*(Y1-Y2)
  ALPHA1=X(I2)*Y(I3)-X(I3)*Y(I2) ; BETA1=Y(I2)-Y(I3) ; GAMA1=X(I3)-X(I2)
  ALPHA2=X(I3)*Y(I1)-X(I1)*Y(I3) ; BETA2=Y(I3)-Y(I1) ; GAMA2=X(I1)-X(I3)
  ALPHA3=X(I1)*Y(I2)-X(I2)*Y(I1) ; BETA3=Y(I1)-Y(I2) ; GAMA3=X(I2)-X(I1)
  PSI1=(ALPHA1+BETA1*XP+GAMA1*YP)/DET
  PSI2=(ALPHA2+BETA2*XP+GAMA2*YP)/DET
  PSI3=(ALPHA3+BETA3*XP+GAMA3*YP)/DET
  UP=U(I1)*PSI1+U(I2)*PSI2+U(I3)*PSI3
  ECRIRE XP , YP , UP
FIN FAIRE

```

Avec

- DET : Déterminant de la matrice (2.23) ou égale à deux (02) fois l'aire de la surface du triangle considéré.
- UP : La solution au point p .

- x_P , y_P : Les coordonnées du point considéré. Ici, dans l'algorithme le point choisi est celui du centre de gravité du triangle.
- PSI_1 , PSI_2 , PSI_3 : Les valeurs des trois fonctions d'interpolations au point p .

Remarque :

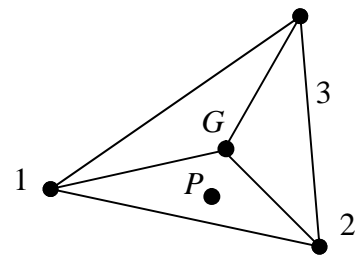
Si nous sommes intéressés au résultat en un autre point p en dehors du centre de gravité, il suffit uniquement de changer les formules donnant la position du point p . Il faut que le point se trouve dans la surface du triangle y compris les arêtes. Par exemple :

1. La position du milieu de l'arête reliant les points 1 et 2 est donnée par :

$$x_p = \frac{(x_1+x_2)}{2} \quad ; \quad y_p = \frac{(y_1+y_2)}{2}$$

2. Le point p dans le triangle de la figure suivante est choisi comme le centre de gravité du triangle 12G, alors sa position est donnée par:

$$x_p = \frac{4x_1 + x_2 + x_3}{9} \quad ; \quad y_p = \frac{4y_1 + y_2 + y_3}{9}$$



3. On peut choisir le point ' p ' comme le barycentre du triangle précédent formé par les points 1, 2, 3, avec les coefficients a , b , c respectivement ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$). Alors, sa position est donnée par :

$$x_p = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c} \quad ; \quad y_p = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}$$

Si $a=b=c=1$, le point p devient celui du centre de gravité du triangle considéré.

CHAPITRE 5

RESULTATS ET COMMENTAIRES

Après une étude sur la résolution numérique de l'équation de Poisson et les techniques numériques employées pour la résolution de ce problème par la méthode des éléments finis, on arrive au stade de la présentation des résultats obtenus, qu'on a divisées en deux parties. Pour chaque partie on a réalisé un programme à part, qui peuvent être englobé pour un seul grand programme. La première partie consiste à l'obtention et visualisation des maillages obtenus de type 'H' dans des configurations simples jusqu'aux celles complexes. La deuxième partie consiste à la présentation des résultats obtenus sur la résolution de l'équation de Poisson dans les configurations choisies.

5.1. Génération de maillage

5.1.1. Algorithme du programme de génération de maillage

L'organigramme du premier programme est résumé comme suit.

Début

- Lecture des données
 1. Choix de la figure (la fonction de la frontière)
 2. Nombre de nœuds
 3. Type des cellules (triangulaires ou quadrilatères)
 4. Paramètres de la fonctions de condensation (P et Q) de chaque cotés
 5. Choix de l'option filtrage par le code ITYPE
 - ◆ Si ITYPE=0, l'option de filtrage est ignorée
 - ◆ Si ITYPE =1, l'option filtrage est prise en compte. Alors lire ω et le nombre d'itérations effectué.
 6. Choix des positions des quatre points A , B , C et D .
- Détermination les positions des nœuds sur les cotés 1, 2, 3 et 4.
- Détermination les abscisses des nœuds internes.
- Détermination les ordonnées des nœuds internes.
- Filtrage des nœuds s'il est nécessaire.
- Affichage les positions des nœuds dans un fichier d'une manière séquentielle adapté pour l'utilisation d'un logiciel opté pour le traçage des courbes.

Fin

On note ici qu'on a réalisé en parallèle un programme permettant la transformation des résultats concernant les positions des nœuds dans un fichier adapté à l'utilisation de logiciel conçu pour le traçage des maillages d'une façon séquentielle.

Le programme de la détermination des positions des nœuds de maillage et son traçage est donné dans l'annexe B.

5.1.2. Résultats sur la génération de maillage

Les résultats donnés par ce programme sont choisis pour des configurations simples telles que le cercle et pour d'autres complexes telles que la configuration d'une navette spatiale. D'autres maillages sont aussi présentés pour des configurations touchant le domaine de l'aéronautique. Le premier exemple choisi c'est celui du domaine circulaire, où on fait le changement des paramètres nécessaires et on voit pour chaque cas la forme du maillage obtenu. L'utilisation d'un tel maillage pour faire la résolution de l'équation de Poisson sera faite sur la base de la variation du gradient de la solution u du problème.

La figure 5.1 présente un maillage de type quadrilatère dans un domaine circulaire. On a pris ici $N_x=10$ et $N_y=10$. On obtient dans ce cas 100 nœuds et 81 quadrilatères. Les positions des points A , B , C , et D sont choisis aux milieux de chaque quadrant.

Pour la figure 5.2 un exemple sur un maillage gros triangulaire dans le même domaine est présenté. Le but c'est de voir exactement la division et la forme ainsi que la disposition des cellules, avec $N_x=15$ et $N_y=10$, alors on aura 150 nœuds et 252 triangles. On peut voir exactement la division des quatre cellules des extrémités.

La figure 5.3 présente un type de maillage quadrilatère dont le but de voir la forme du maillage lorsqu'on augmente le nombre de nœuds. Ici on a pris un exemple avec $N_x=30$ et $N_y=35$. Par conséquent le nombre de nœuds est égal à 1050 et le nombre des quadrilatères est égal à 986. A titre information on peut aller très loin, mais la présentation sur papier sera mauvaise.

La figure 5.4 a pour but de voir la forme des triangles dans le maillage lorsque ce dernier sera fin. L'exemple choisi ici est pour $N_x=50$ et $N_y=40$. Le nombre de nœuds obtenu est égale à 2000 dont 176 sont sur la frontière du domaine et le nombre des triangles est égale à 3822.

La figure 5.5 présente un exemple sur la forme du maillage lorsqu'on applique la procédure de filtrage des nœuds au maillage obtenu par notre technique. L'exemple choisi est pour $N_x=35$ et $N_y=30$. Le facteur de relaxation $\omega=0.3$ et le nombre d'itérations est choisi à 250. Il est à noter ici que cette option a été considéré pour tous les points interne du maillage. On note encore qu'on peut, à partir de cette option de filtrage de considérer plusieurs forme de maillage en jouons sur les paramètres, nombre d'itérations, la manière de filtrer les nœuds et le nombre et les numéros des nœuds à filtrés. Dans cet exemple on a 1050 nœuds et 1972 triangles.

La figure 5.6 présente un exemple typique sur l'effet des positions des points A , B , C et D de frontière sur la forme du maillage. Le point A est choisi dans le troisième quadrant pour $\theta_A=180^\circ+10^\circ$. Les points B , C et D sont choisis respectivement pour $\theta_B=350^\circ$, $\theta_C=10^\circ$ et $\theta_D=170^\circ$. Les nombres $N_x=35$ et $N_y=30$. On voit exactement la disposition des cellules, la forme et la condensation. A titre information, cette forme de maillage n'est pas recommandée pour faire le calcul de l'écoulement visqueux, dans une conduite de la forme de la figure, puisque ce type de problème nécessite un raffinement au voisinage de la paroi.

La figure 5.7 suivante représente un type de maillage obtenu en utilisant la procédure de condensation des nœuds avec l'exemple, toujours, pour $N_x=35$ et $N_y=35$. On voit exactement la distribution des nœuds et la condensation vers le coté gauche.

En comparant les sept (07) figures, on peut tirer qu'on a un infinité de présentation de formes de maillages et que la décision finale pour faire le choix d'un tel ou tel maillage reste toujours sur la discipline contenant le problème physique, le type et nombre des conditions aux limites, l'ordre de la précision du problème, la taille de l'ordinateur et la variation du gradient de la solution du problème.

Le deuxième domaine présenté dans ce modeste travail est celui le cas de la surface d'un profil d'aile. L'exemple choisi ici est le profil NACA 0012 symétrique. Ce domaine à un grand intérêt pour les gents intéressants à l'aérodynamique et l'élasticité. Par exemple, si on peut chercher et étudier le problème de la torsion des pales d'hélicoptères, pales d'hélices des moteurs, les aubes du compresseur et autres cas, il faut générer ce type de maillage. On veut par exemple déterminer l'aire et les caractéristiques géométriques (position du centre de gravité, moments et produits d'inerties) d'un tel profil d'aile qui nous servira pour une étude de résistance et rigidité, on s'intéresse encore à ce type de maillage.

La figure 5.8 schématise un exemple d'un maillage gros de type 'H' avec $N_x=10$ et $N_y=10$. Le nombre de nœuds trouvé est égal à 100 et le nombre des quadrilatères est égal à 81. Pour la figure 5.9 représente le même type de maillage mais dans ce cas avec $N_x=30$ et $N_y=35$ dont le but de raffiné un peu le maillage.

La figure 5.10 représente un exemple de maillage avec des cellules triangulaires. Il est obtenu en divisons les cellules quadrilatères de la figure 5.8 en deux triangles suivant le choix opté.

La figure 5.11 illustre un exemple de maillage avec l'utilisation de la procédure de filtrage des nœuds. Il est obtenu à partir de la figure 5.9 avec le même nombre de nœuds N_x et N_y mais après l'utilisation de la procédure de filtrage des nœuds à tous les nœuds de maillage avec $\omega=0.4$ et le nombre d'itérations est égale à 1000. Il manque un peut de raffinement au niveau du bord d'attaque du profil. On peut raffiner encore le maillage, mais le dessin ne sera pas clair. On peut jouer encore sur les valeurs de ω , nombre d'itérations de la procédure de filtrage, positions des nœuds A , B , C et D de frontière, le nombre et les numéros des nœuds à filtrer, région du profil à filtrer, on peut obtenir des maillages assez efficaces (sous réserves) qui seront apte à utiliser pour faire la résolution de l'équation de Poisson avec précision voulue.

Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 représentent le même maillage que celui du profil. Le but de ces maillages c'est de voir la puissance du programme réalisé, et qu'il peut aller très loin et à générer des maillages dans des configurations très complexes. Un type sur des cellules quadrilatères avec $N_x=30$ et $N_y=18$ est présenté dans la figure 5.12. Un exemple sur un maillage triangulaire est le but de la figure 5.13 en faisant la division des cellules quadrilatères de la figure 5.12 en des triangles. On obtient 540 nœuds et 986 triangles. Un exemple avec la procédure de filtrage des nœuds et des cellules triangulaires est le but de la figure 5.14.

Les figures 5.15, 5.16, 5.17 et 5.18 représentent des exemples sur des maillages quadrilatères, triangulaires avec et sans procédure de filtrage des nœuds. Ce type de maillage, plus précisément du domaine est intéressé par les problèmes de l'aérodynamique lorsqu'on veut calculer la distribution de pression et le calcul des coefficients aérodynamiques sur un tel profil d'aile. Ici on à prie un exemple d'un profil symétrique.

D'autres exemples sont illustrés dans les figures 5.19, 5.20, 5.21 et 5.22. Le but de ces types est de réaliser des maillages dans des configurations très complexes telles que la navette spatiale. On a fait l'intérêt sur la projection de cet engin sur un plan. On peut voir exactement l'effet de la procédure de filtrage sur les dimensions des cellules surtout au niveau de la frontière du domaine. Ce type de domaine est très intéressant lorsqu'on veut calculer la distribution de température sur la surface de l'engin au moment de la rentrée atmosphérique.

Des exemples de maillages lorsque la frontière du domaine possède des grandes courbures répétées, où aux voisinages de ces courbures et coins demandent une distribution et condensation de nœuds rigoureux, sont présentés dans les figures 5.23, 5.24, 5.25, 5.26 et 5.27.

L'application du maillage des figures 5.23 et 5.24 sera pour des problèmes de la torsion des clefs mécaniques ayant des sections comme celles montrées dans ces figures.

Le domaine de la figure 5.25 à la forme d'un cœur humain. Si on veut étudier la dilatation de ce cœur lors la rentrée et la sortie du sang et la distribution de la contrainte élastique de flexibilité et la pression appliquée sur la surface internes du cœur, le médecin à besoin de résoudre le modèle mathématique sur un type de maillage comme celui présenté dans cette figure.

Les figures 5.26 et 5.27 montrent des exemples de maillages dans des configurations à la forme par exemple d'une semelle d'une chaussure. On à l'intérêt de ce type de domaine lors de la fabrication des chaussures pour voir la distribution de contrainte et efforts lors de mouvement des piétants ou les joueurs pour faire une étude sur la durée de la vie des chaussures et l'efficacité durant l'utilisation.

A partir de ces exemples, on voit exactement la puissance du programme réalisé sur la génération du maillage dans n'importe quelles géométrie simplement connexes pour différentes disciplines. On voit aussi l'effet des procédures de filtrage et condensation sur l'organisation des nœuds et la taille des cellules obtenues ainsi quelles répondent pas aux besoins.

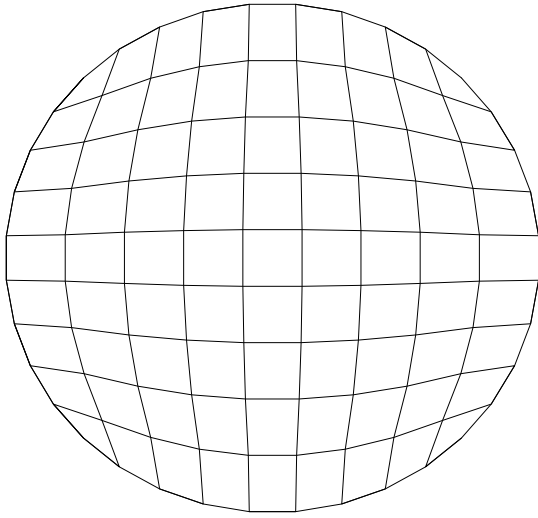


Figure 5.1 : Maillage quadrilatère gros dans un domaine circulaire

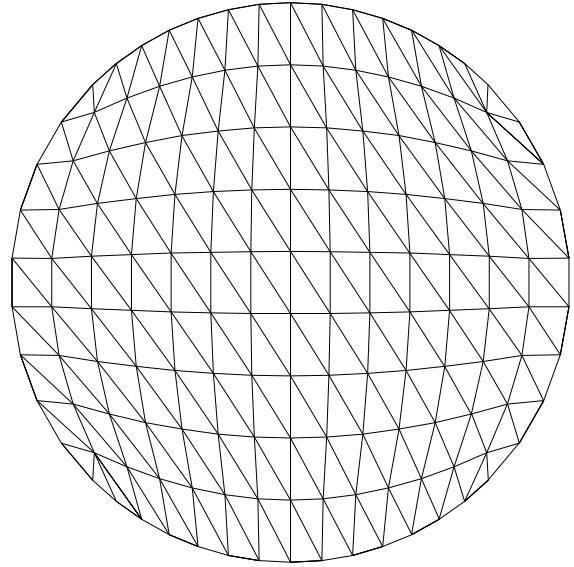


Figure 5.2 : Maillage triangulaire dans un domaine circulaire

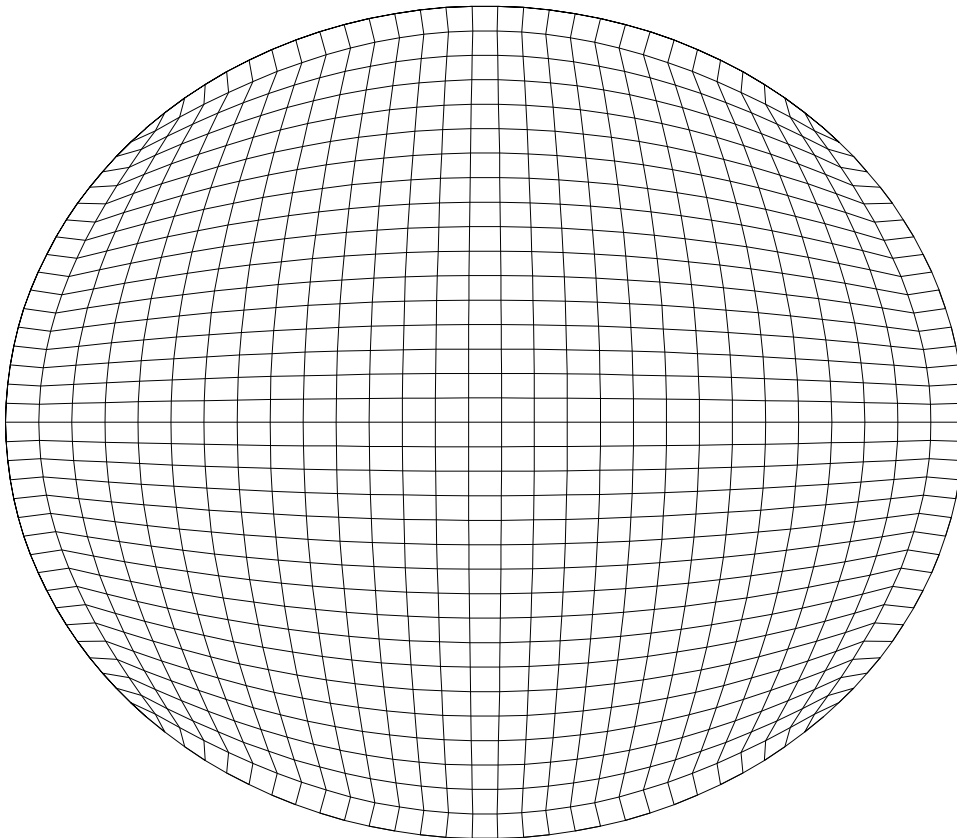


Figure 5.3 : Maillage quadrilatère assez fin dans un domaine circulaire

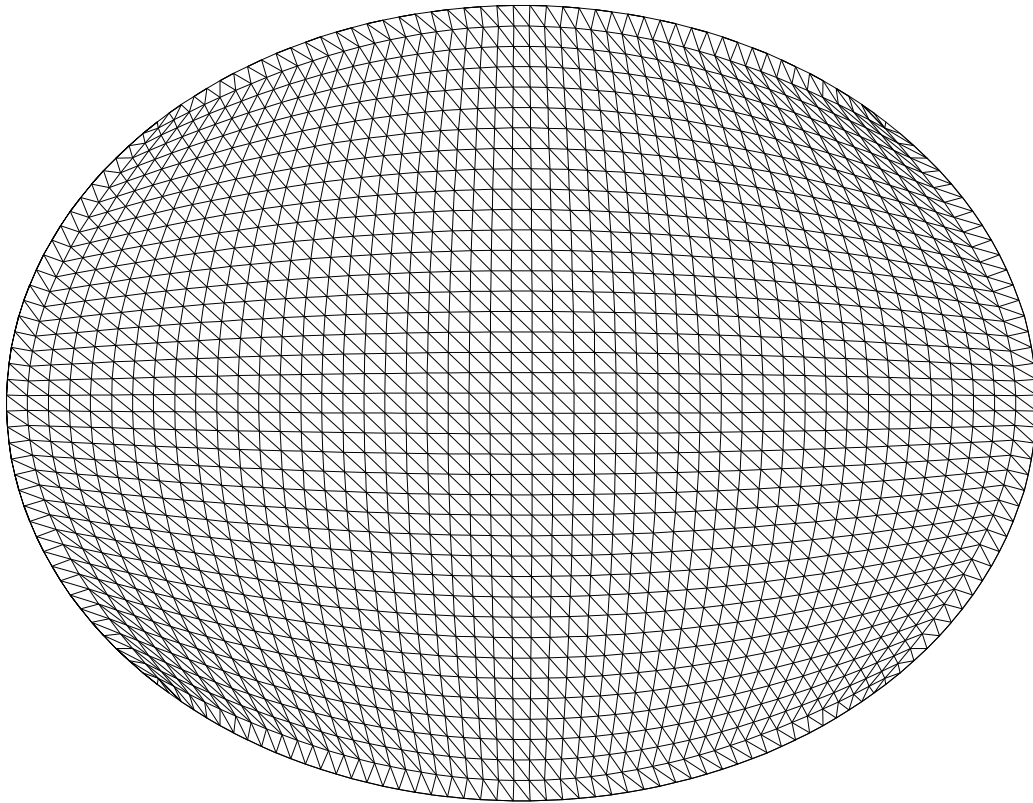


Figure 5.4 : Maillage triangulaire fin dans un domaine circulaire

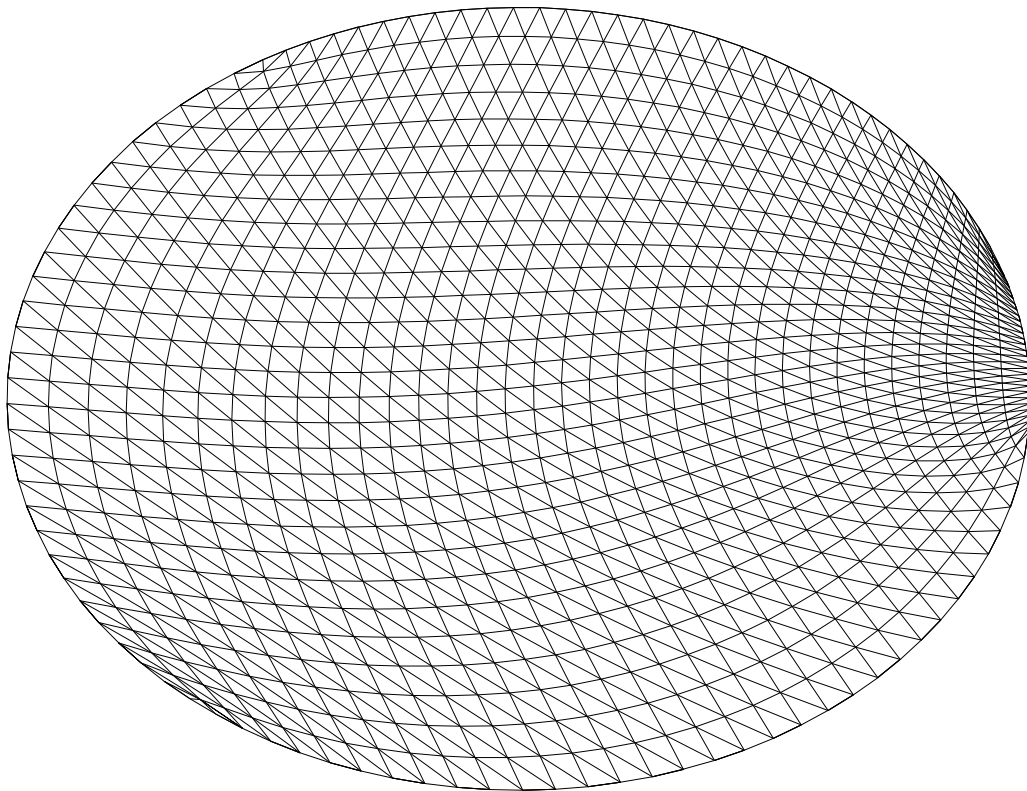


Figure 5.5 : Maillage triangulaire filtré dans un domaine circulaire

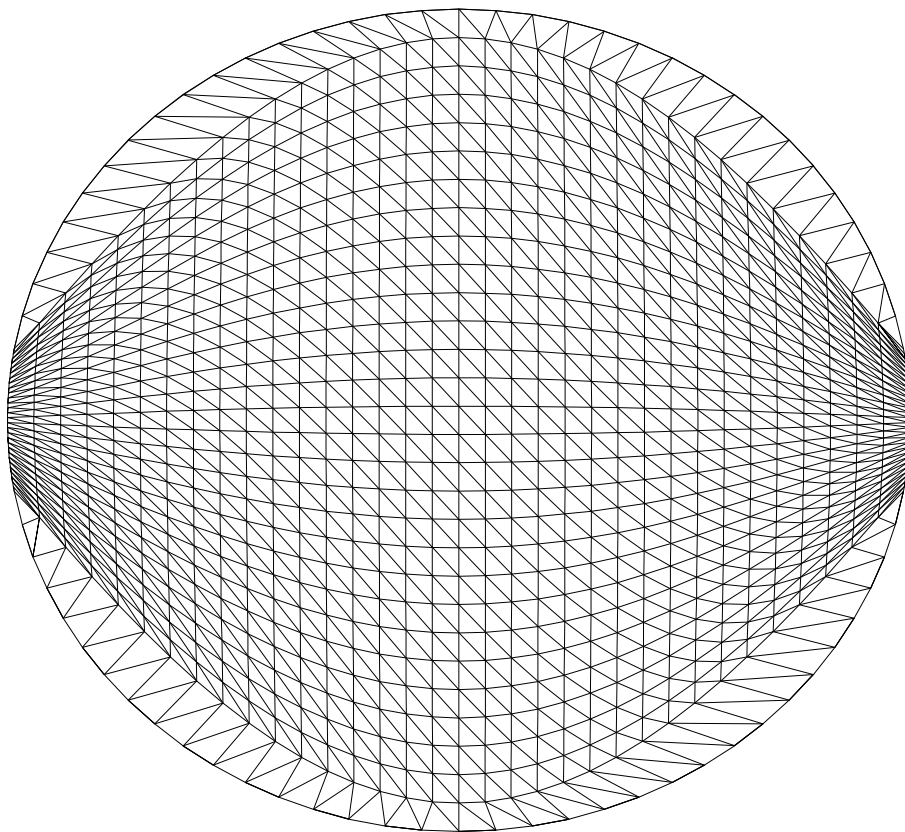


Figure 5.6 : Effet de positions des points de la frontière sur la forme du maillage pour un domaine circulaire

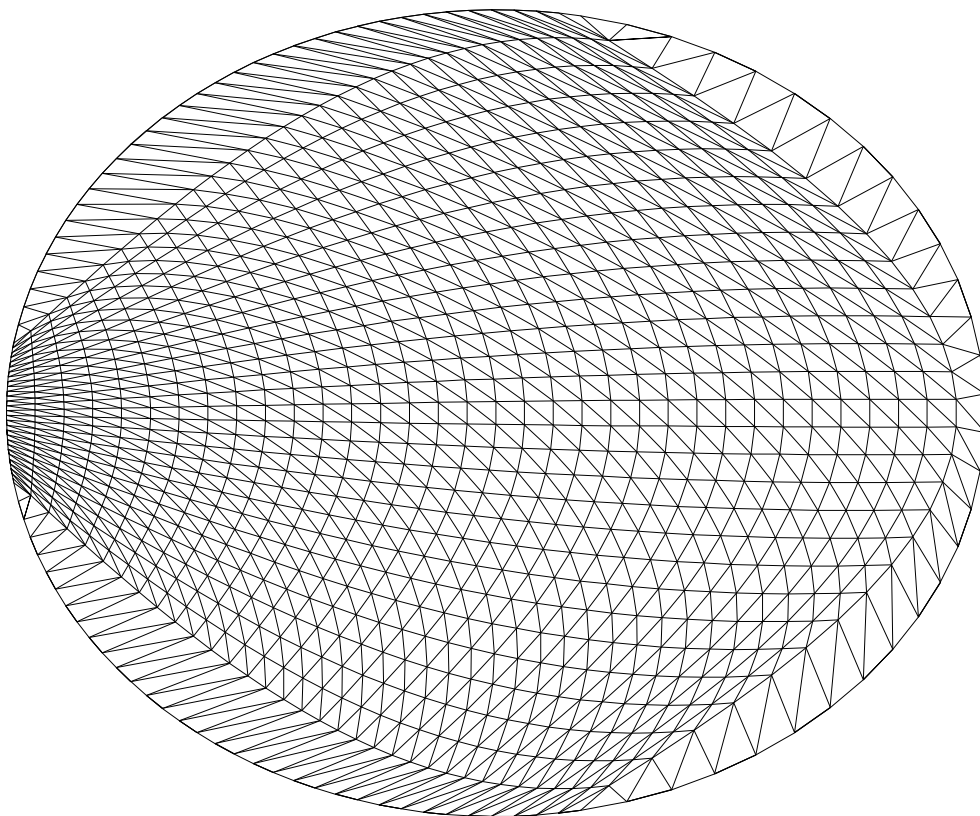


Figure 5.7 : Effet de positions des points de la frontière sur la forme du maillage interne pour un domaine circulaire

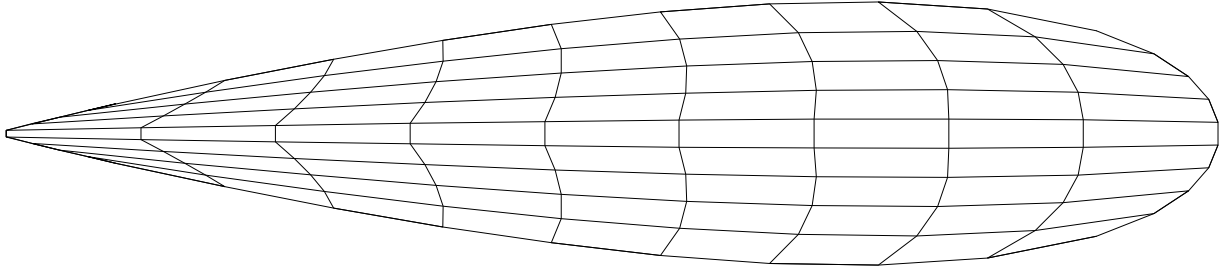


Figure 5.8 : Maillage quadrilatère gros dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile

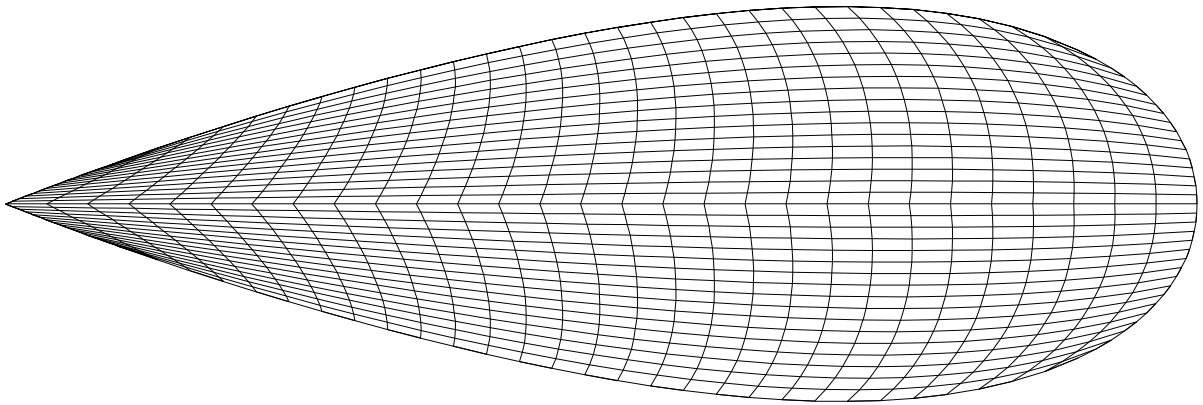


Figure 5.9 : Maillage quadrilatère assez fin dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile

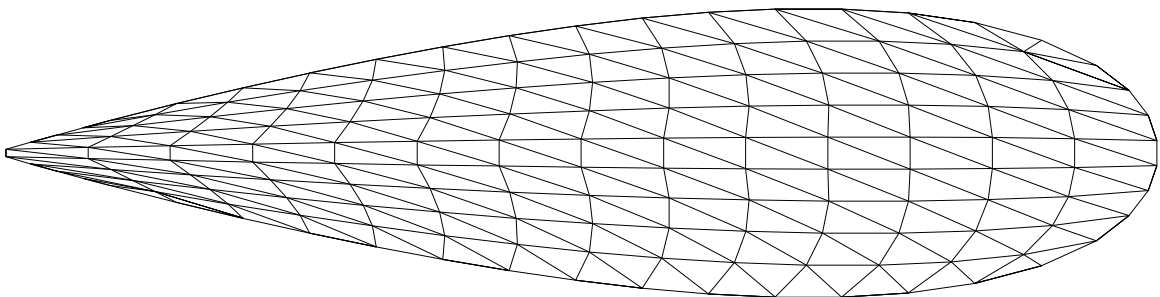


Figure 5.10 : Maillage triangulaire moyen dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile

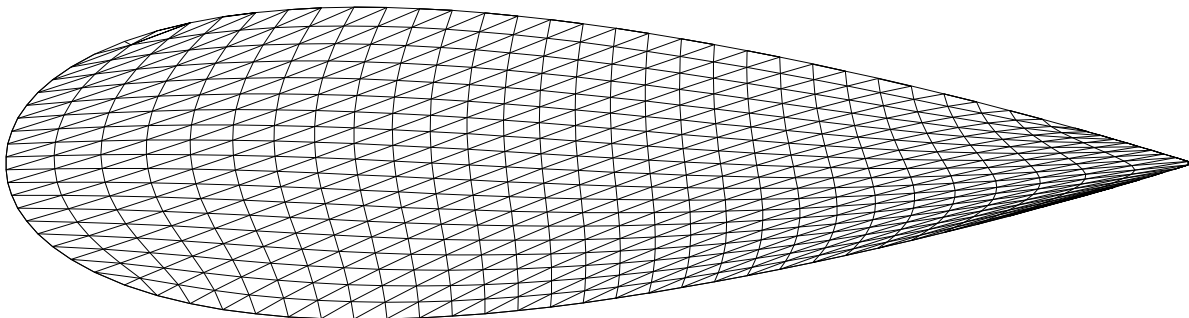


Figure 5.11 : Maillage triangulaire filtré dans un domaine à une configuration d'un profil d'aile

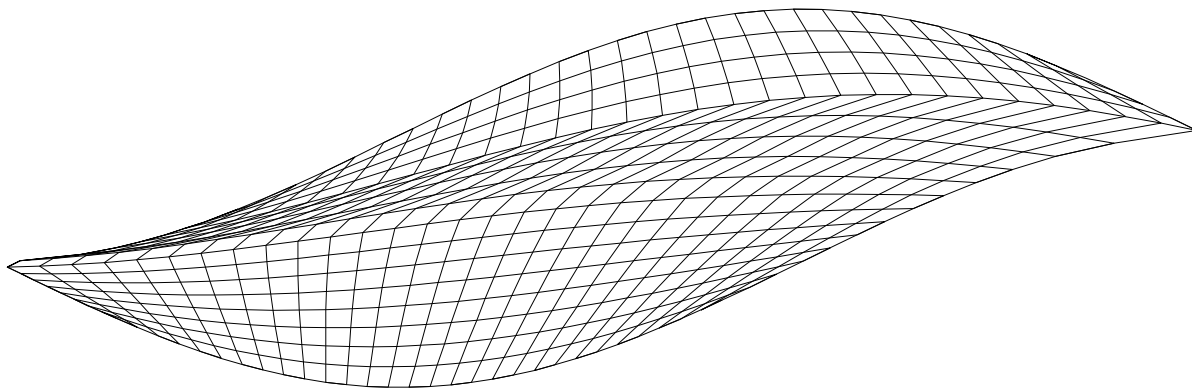


Figure 5.12 : Maillage quadrilatère moyen dans une configuration complexe

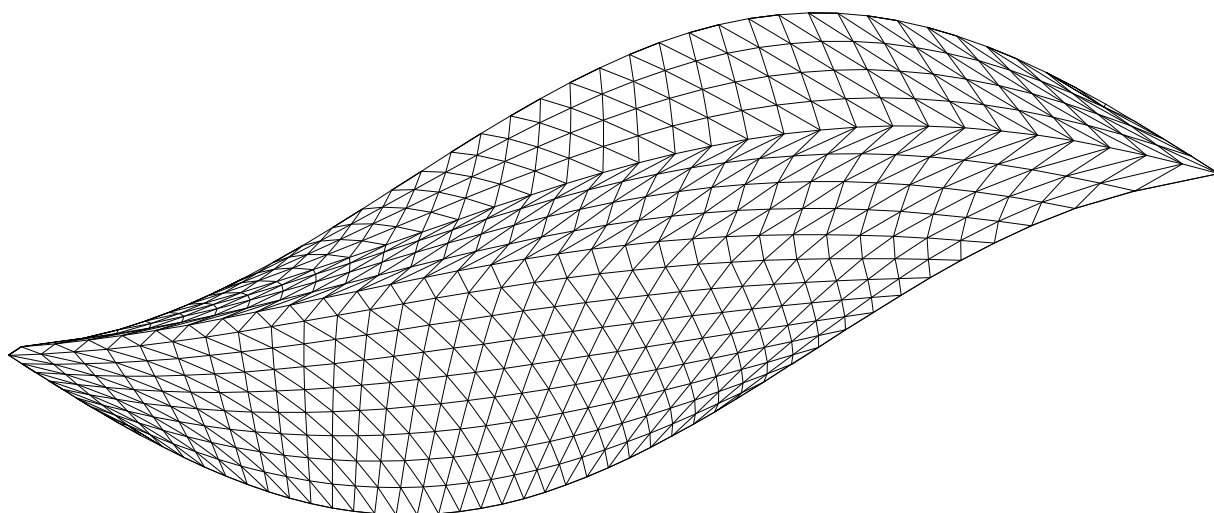


Figure 5.13 : Maillage triangulaire assez fin dans une configuration complexe

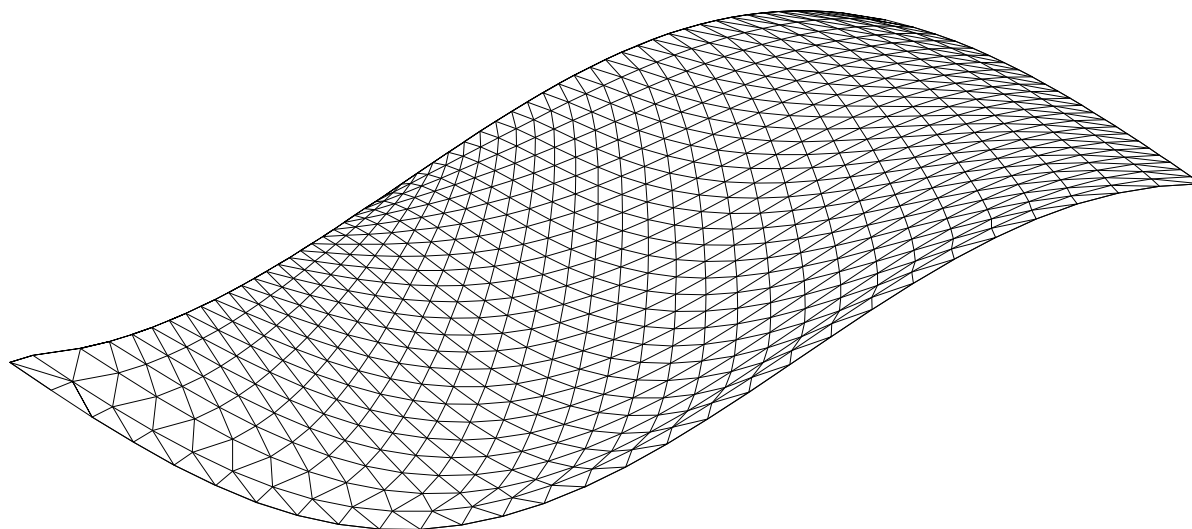


Figure 5.14 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration complexe

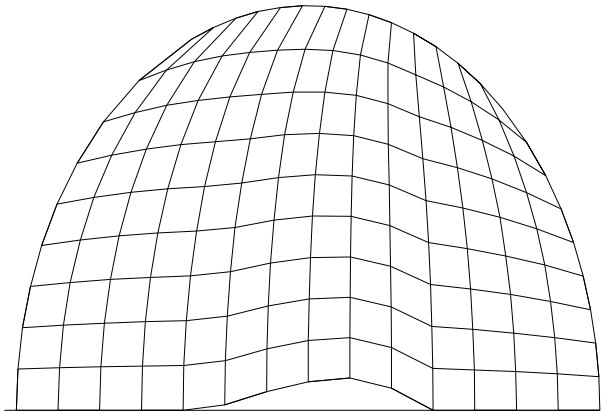


Figure 5.15 : Maillage quadrilatère gros dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile

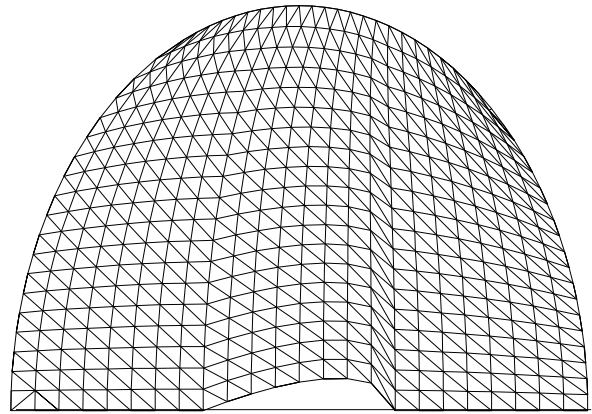


Figure 5.16 : Maillage triangulaire dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile

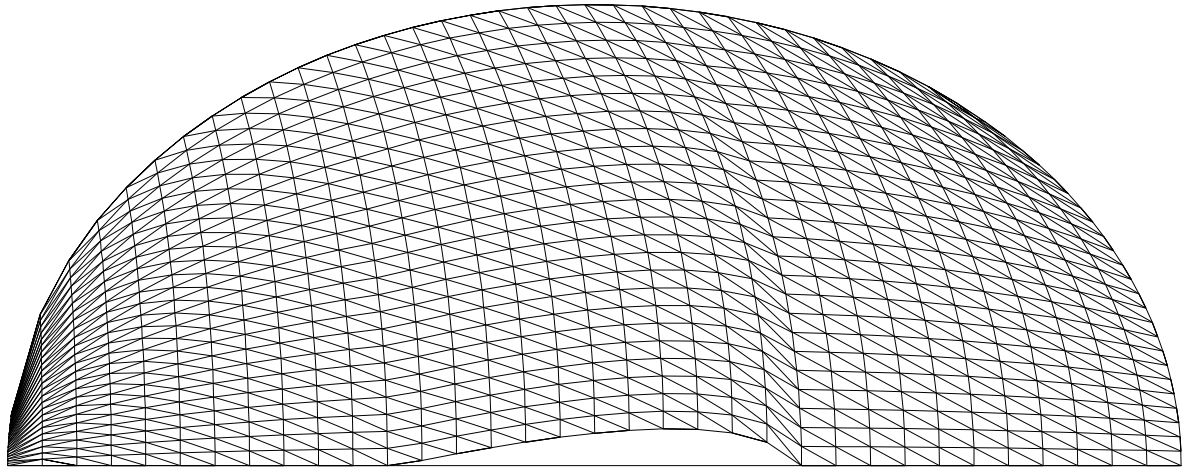


Figure 5.17 : Maillage triangulaire fin dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile

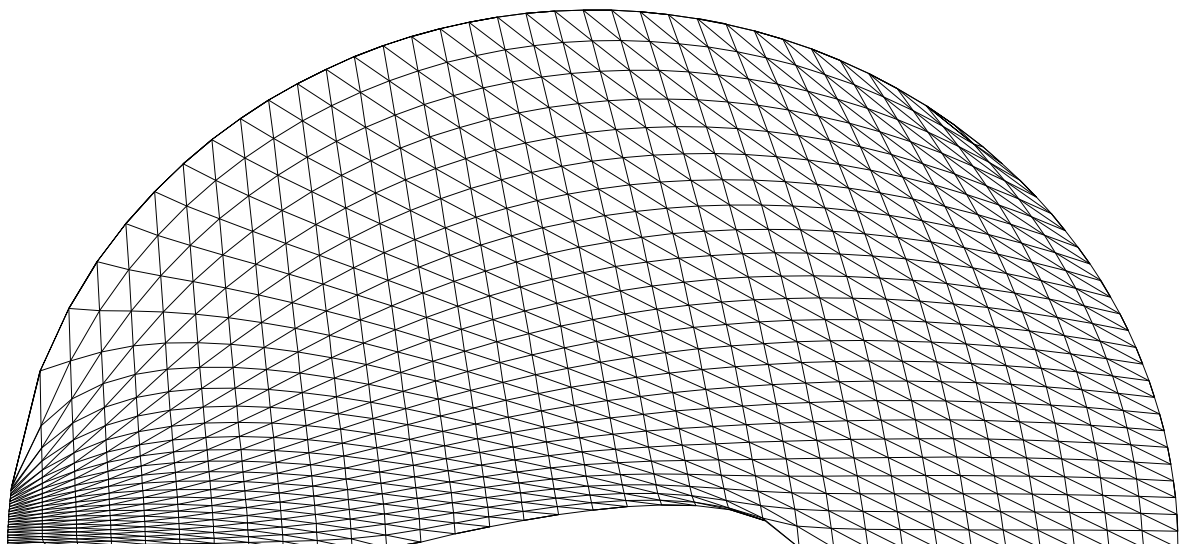


Figure 5.18 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration aérodynamique sur un profil d'aile

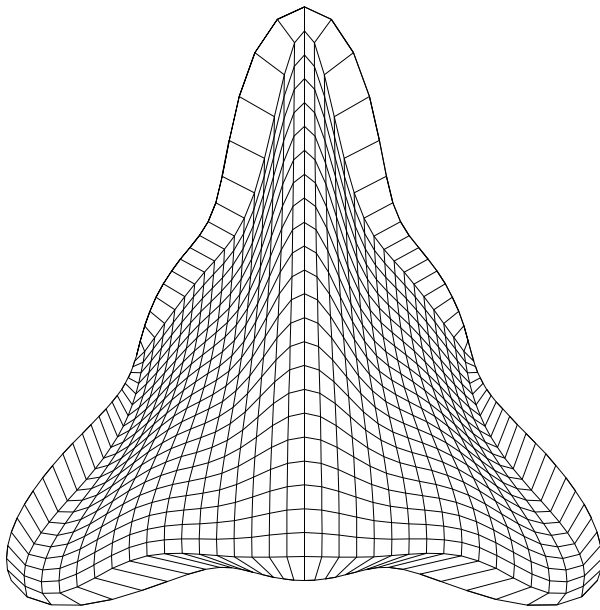


Figure 5.19 : Maillage quadrilatère dans une configuration complexe

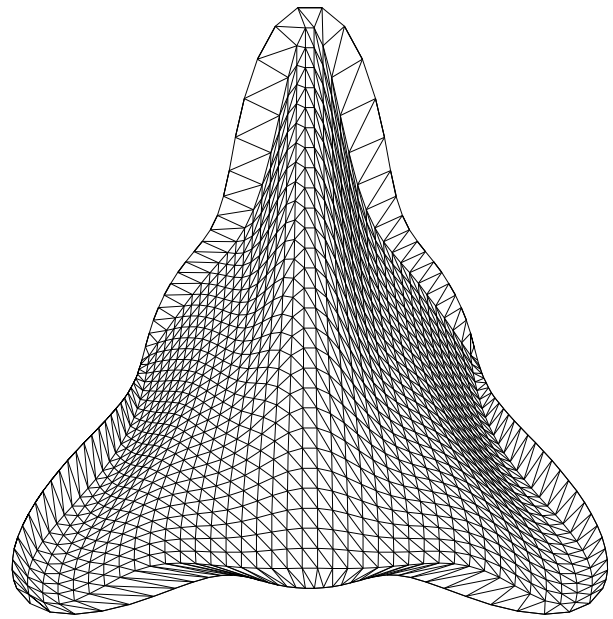


Figure 5.20 : Maillage triangulaire assez fin dans une configuration complexe

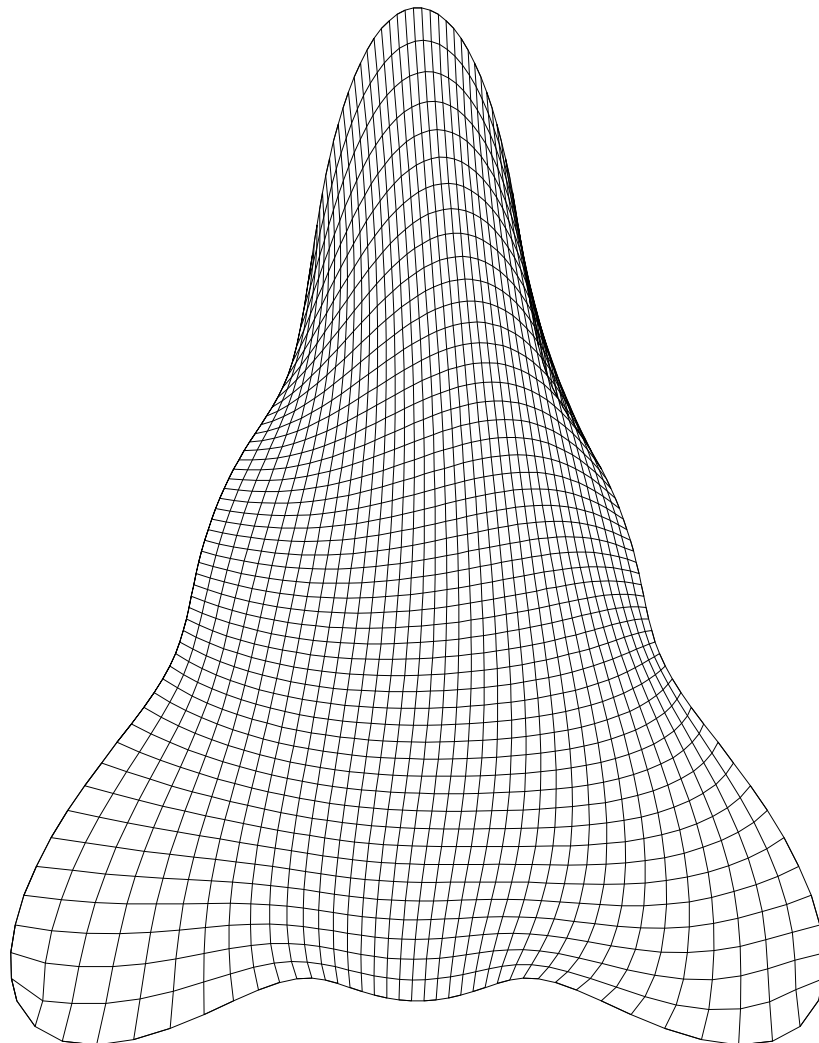


Figure 5.21 : Maillage quadrilatère filtré dans une configuration complexe

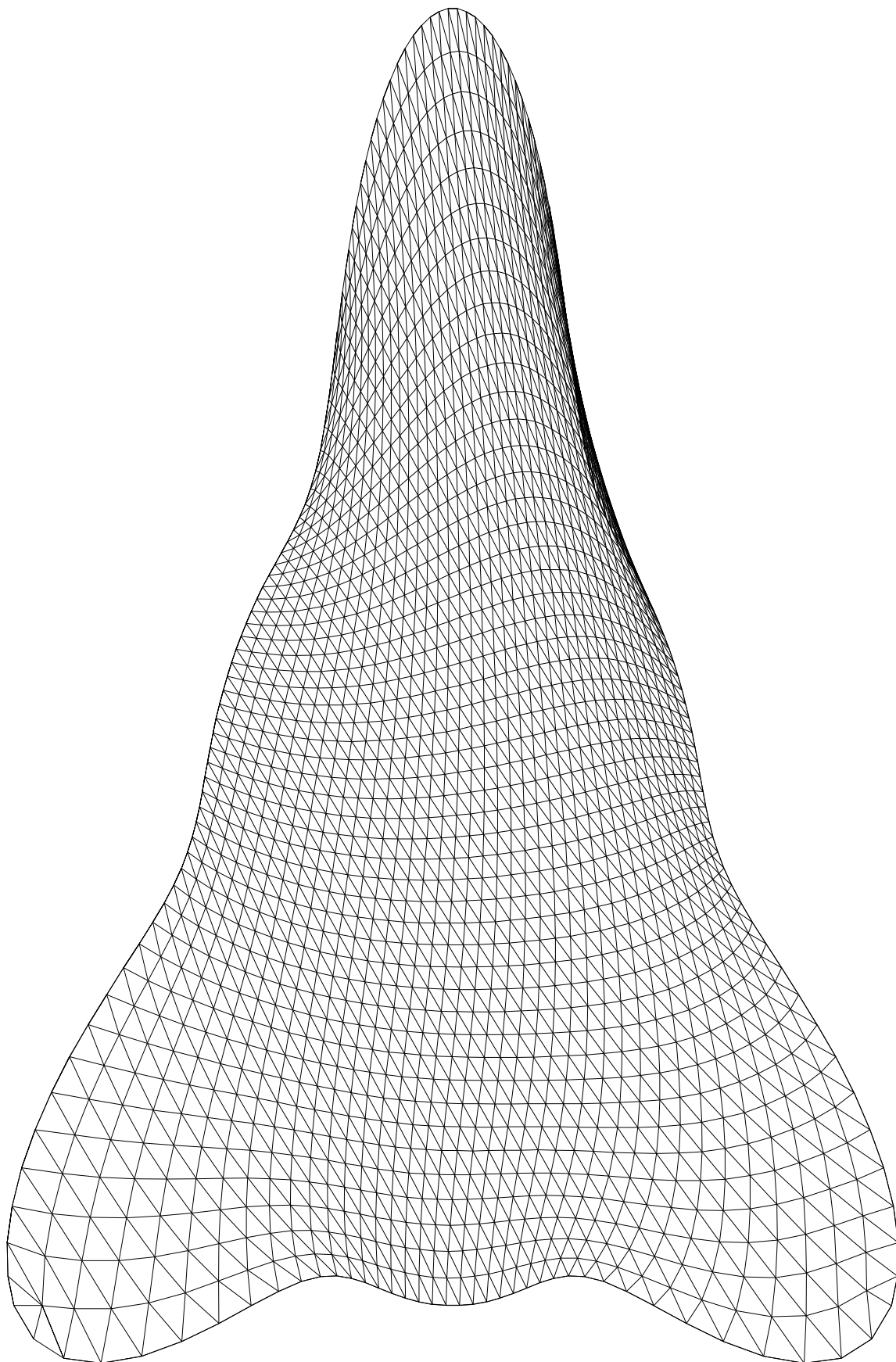


Figure 5.22 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration complexe

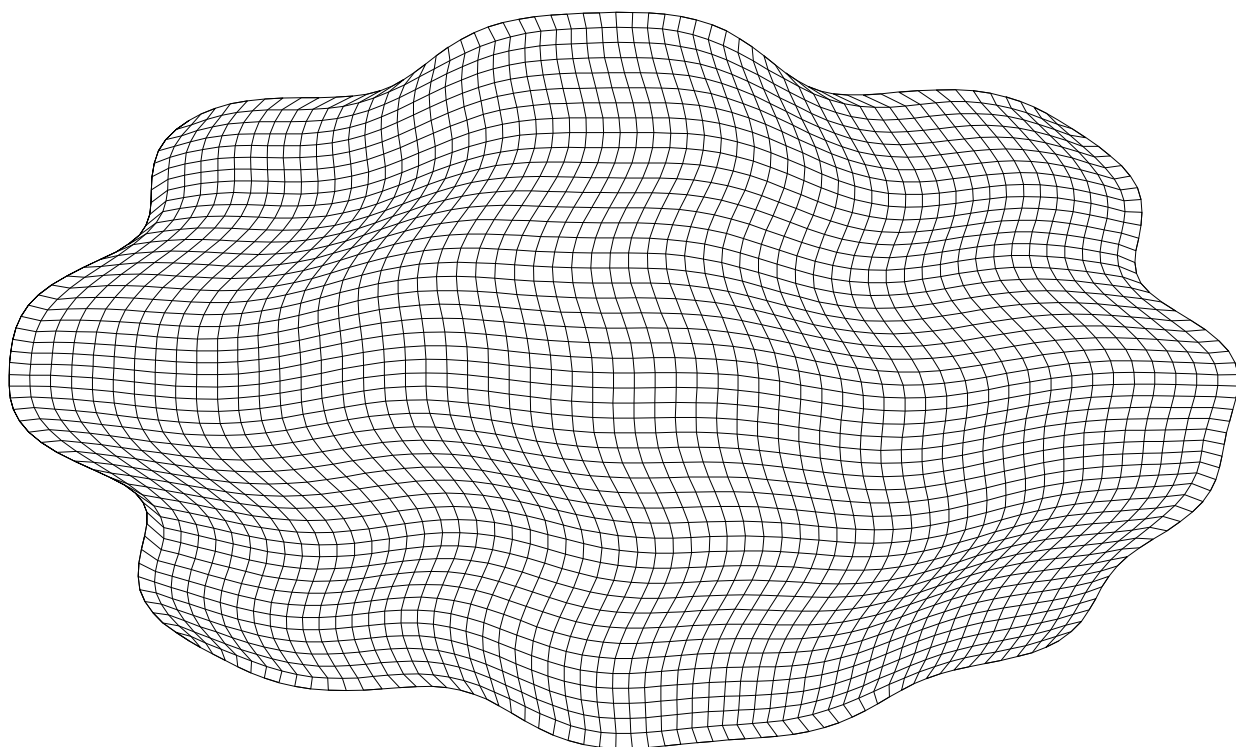


Figure 5.23 : Maillage quadrilatère dans une configuration complexe

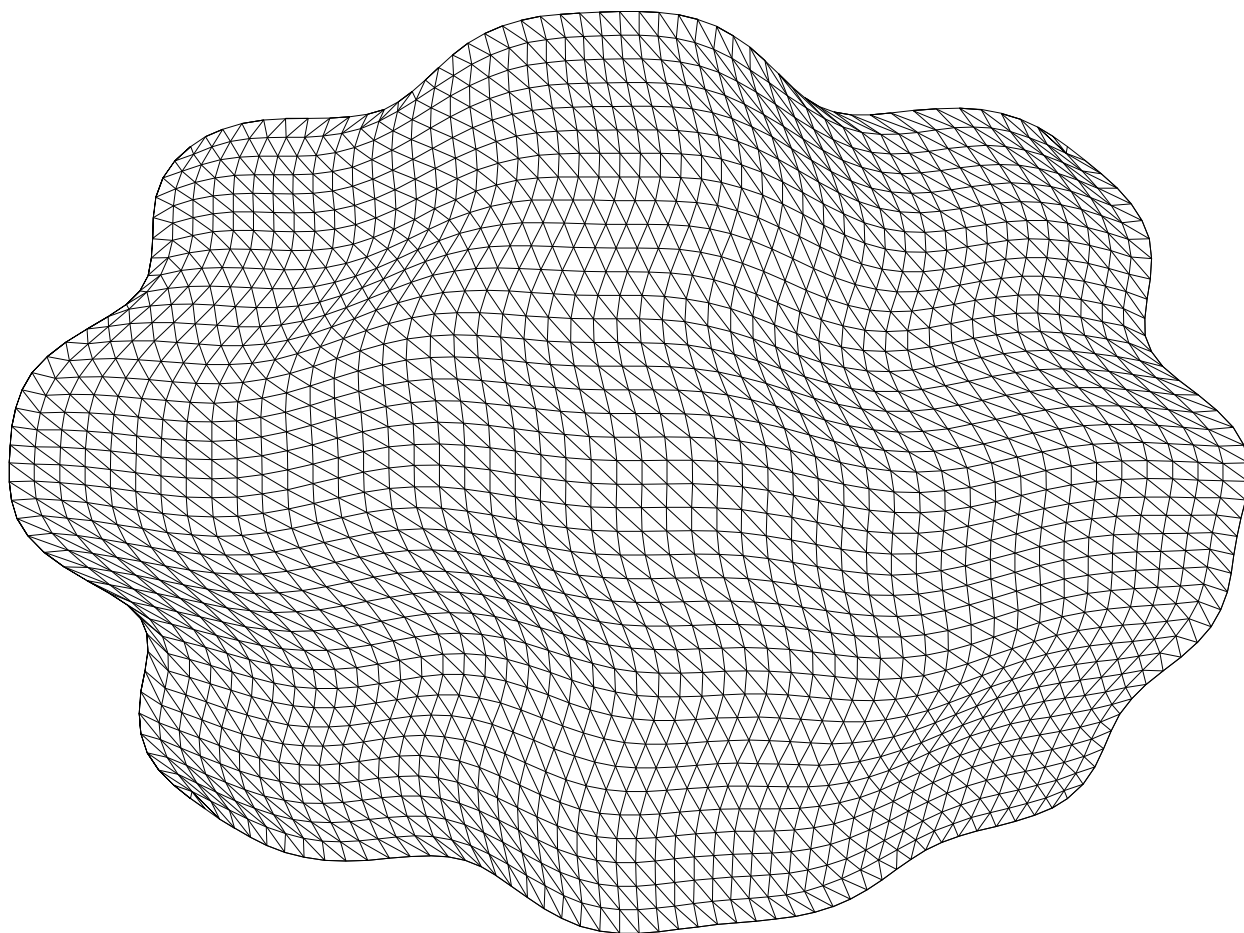


Figure 5.24 : Maillage triangulaire dans une configuration complexe

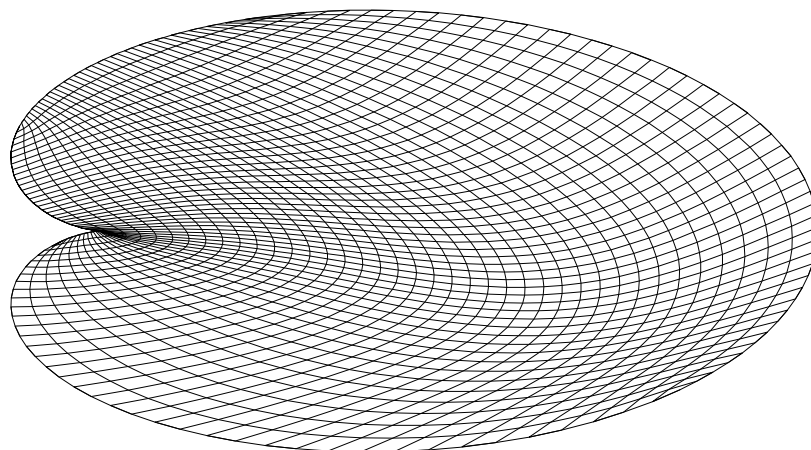


Figure 5.25 : Maillage quadrilatère filtré dans une configuration d'un cœur humain

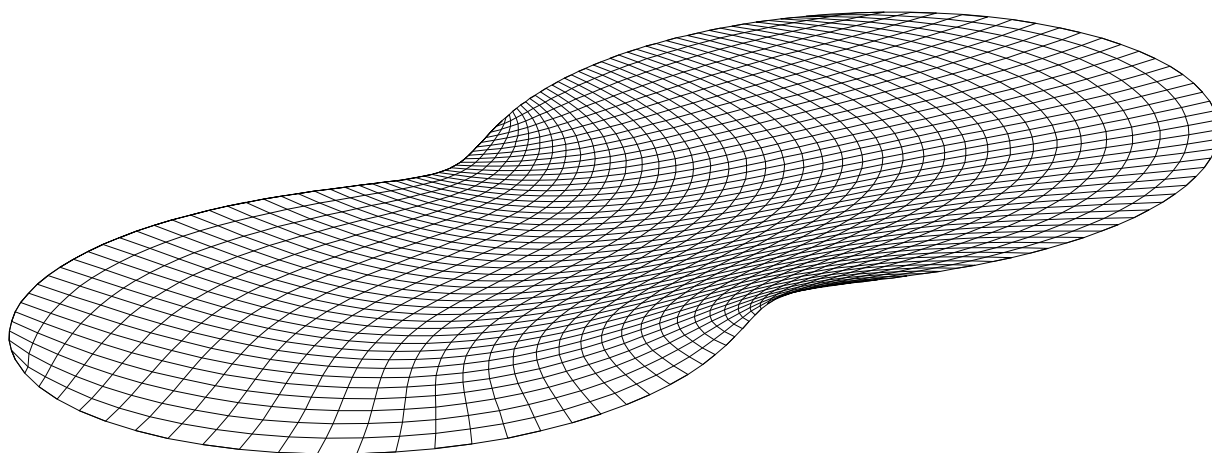


Figure 5.26 : Maillage quadrilatère filtré dans une configuration complexe

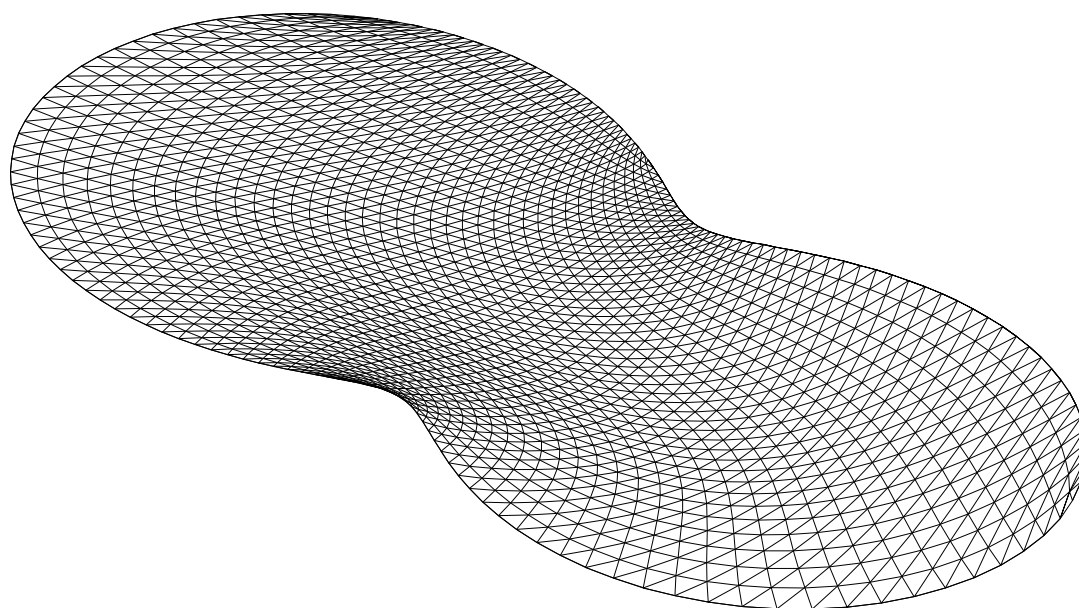


Figure 5.27 : Maillage triangulaire filtré dans une configuration complexe

5.2. Résultats sur la résolution numérique de l'équation de Poisson

Dans la deuxième partie, on va présenter quelques résultats obtenus sur la résolution de l'équation de Poisson avec les conditions aux limites de type Dirichlet. Le modèle choisi est donné par :

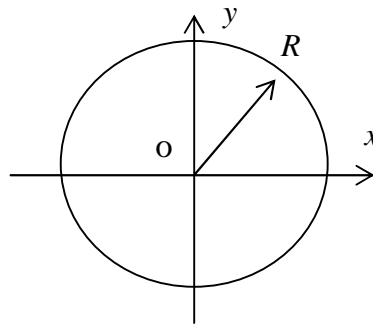
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \quad (5.1)$$

$$u=0 \text{ sur } \Gamma$$

On a choisi ici le deuxième membre égal à l'unité pour faire des simplifications et que la majorité des problèmes physiques peuvent être modélisés par l'équation de Poisson dont le deuxième membre égale à une constante après un changement de variable devient celle considérée. On a réalisé un programme en langage fortran permettant de déterminer la solution u de cette équation en utilisant la méthode des éléments finis avec un élément triangulaire à trois nœuds. Le listing de ce programme est donné dans l'annexe B.

5.2.1. Domaine circulaire

Le premier domaine à étudier est celui le cercle de rayon R donné, avec les conditions aux limites $u=0$ sur Γ .



5.2.1.1. Solution exacte

La solution exacte pour ce domaine circulaire est donnée par la relation suivante:

$$u(x,y) = \frac{R^2}{4} \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} - 1 \right) \quad (5.2)$$

Les points (x,y) sont mesurés par rapport au repère passant par le centre de gravité G $(0,0)$. La position et la valeur maximale exactes de la solution u du problème sont données par :

$$u_{\max} = \frac{R^2}{4} = 0,25 R^2 \quad \text{pour } x = y = 0 \quad (5.3)$$

La valeur exacte de H de l'intégration de surface de la solution u est donnée par :

$$H = \frac{\pi}{8} R^4 = 0,3926990816 \dots R^4 \quad (5.4)$$

De même, la valeur moyenne exacte de la solution u est donnée par :

$$u_{\text{moy}} = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{R^2}{8} = 0,125 R^2 \quad (5.5)$$

5.1.2.1. Exemple sur la distribution de la solution

L'exemple choisi ici est le cercle de rayon $R=1$ placé à l'origine avec la discrétisation de $N_x=6$ et $N_y=5$. On obtient par conséquent 30 points totales dans le domaine dont 18 points sont sur la frontière. Les points A , B , C et D de la frontière sont choisis aux milieux de chaque quadrant. On utilise la procédure de filtrage des nœuds avec 100 itérations et $\omega=0.1$, on obtient les résultats suivants qui seront comparés avec la solution exacte du cercle. On note ici qu'on n'a pas présenté les points de la frontière, puisque la valeur en ces points est égale à zéro.

| Position du point | | Solution $u(x,y)$ de l'équation | |
|-------------------|---------|---------------------------------|---------------------|
| x | y | $u_{\text{calculée}}$ | u_{exacte} |
| 0.49759 | 0.39798 | 0.14877 | 0.14850 |
| 0.15770 | 0.46540 | 0.19118 | 0.18963 |
| 0.17337 | 0.50985 | 0.18320 | 0.17750 |
| 0.48652 | 0.54406 | 0.12881 | 0.11682 |
| 0.56135 | 0.03968 | 0.17199 | 0.17083 |
| 0.18185 | 0.01866 | 0.24115 | 0.24165 |
| 0.16941 | 0.02500 | 0.24146 | 0.24267 |
| 0.54088 | 0.05012 | 0.17375 | 0.17623 |
| 0.57097 | 0.50104 | 0.11707 | 0.10574 |
| 0.19408 | 0.49930 | 0.18086 | 0.17826 |
| 0.14929 | 0.46111 | 0.19074 | 0.19127 |
| 0.49092 | 0.39458 | 0.14929 | 0.15082 |

On remarque bien que pour cette faible discrétisation, la solution déterminée est presque proche de la solution exacte avec une précision relative environ de 3 %.

Les valeurs de A , H , u_{moy} et u_{max} sont données pour cette discrétisation par :

| | Calculée | Exacte |
|------------------|----------|---------|
| A | 3.07581 | 3.14159 |
| H | 0.35437 | 0.39269 |
| u_{\max} | 0.24145 | 0.25000 |
| u_{moy} | 0.11521 | 0.12500 |

5.2.1.3. Effet de la discrétisation sur la convergence du problème

Le but de ce paragraphe est de voir l'effet de la discrétisation sur la convergence du problème pour le même domaine circulaire précédent. On va changer le nombre de nœuds N_x et N_y , plus précisément, augmenter ces valeurs, et pour chaque cas on calcul les valeurs de A , H , u_{moy} et position et valeur de u_{\max} et encore on choisi un point interne à l'intérieure du domaine est on calcul la valeur de u de la solution en ce point, on aura les résultats suivants :

- $N_x=10$

| N_y | NN | NE | $NDDLE$ | $NDDLRL$ | $IBAV$ | $IBAP$ | $NCASE$ |
|-------|------|------|---------|----------|--------|--------|---------|
| 10 | 100 | 162 | 36 | 64 | 12 | 10 | 595 |
| 30 | 300 | 522 | 76 | 224 | 12 | 10 | 2195 |
| 50 | 500 | 882 | 116 | 384 | 12 | 10 | 3795 |
| 100 | 1000 | 1782 | 216 | 784 | 12 | 10 | 7795 |
| 150 | 1500 | 2682 | 316 | 1184 | 12 | 10 | 11795 |
| 200 | 2000 | 3582 | 416 | 1584 | 12 | 10 | 15795 |
| 300 | 3000 | 5382 | 616 | 2384 | 12 | 10 | 23795 |
| 500 | 5000 | 8982 | 1016 | 3984 | 12 | 10 | 39795 |

| N_y | A | u_{\max} | u_{moy} | H |
|-------|--------------|--------------|------------------|--------------|
| 10 | 3.1256671980 | 0.2446009887 | 0.1222161366 | 0.3820240887 |
| 30 | 3.1328619473 | 0.2463985748 | 0.1233680622 | 0.3864951078 |
| 50 | 3.1333608993 | 0.2465123944 | 0.1234569212 | 0.3868350899 |
| 100 | 3.1335640179 | 0.2465561137 | 0.1234941666 | 0.3869768770 |
| 150 | 3.1336008291 | 0.2465616119 | 0.1234998199 | 0.3869991380 |
| 200 | 3.1336136133 | 0.2465622653 | 0.1235009980 | 0.3870044088 |
| 300 | 3.1336226996 | 0.2465612155 | 0.1235007845 | 0.3870048620 |
| 500 | 3.1336273309 | 0.2465588140 | 0.1234992930 | 0.3870007600 |

- $N_x=50$

| N_y | NN | NE | $NDDLE$ | $NDDLRL$ | $IBAV$ | $IBAP$ | $NCASE$ |
|-------|-------|-------|---------|----------|--------|--------|---------|
| 50 | 2500 | 4802 | 196 | 2304 | 52 | 50 | 113975 |
| 100 | 5000 | 9702 | 296 | 4704 | 52 | 50 | 233975 |
| 150 | 7500 | 14602 | 396 | 7104 | 52 | 50 | 353975 |
| 200 | 10000 | 19502 | 496 | 9504 | 52 | 50 | 473975 |
| 250 | 12500 | 24402 | 596 | 11904 | 52 | 50 | 593975 |
| 300 | 15000 | 29302 | 696 | 14304 | 52 | 50 | 713975 |
| 400 | 20000 | 39102 | 896 | 19104 | 52 | 50 | 953975 |
| 500 | 25000 | 48902 | 1096 | 23904 | 52 | 50 | 1193975 |

| N_y | A | u_{max} | u_{moy} | H |
|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 50 | 3.1410546020 | 0.2497513383 | 0.1248922893 | 0.3922935002 |
| 100 | 3.1412577206 | 0.2498431563 | 0.1249322501 | 0.3924443952 |
| 150 | 3.1412945317 | 0.2498596575 | 0.1249393295 | 0.3924712328 |
| 200 | 3.1413073160 | 0.2498652419 | 0.1249416491 | 0.3924801165 |
| 250 | 3.1413132091 | 0.2498677108 | 0.1249426184 | 0.3924838976 |
| 300 | 3.1413164023 | 0.2498689733 | 0.1249430717 | 0.3924857204 |
| 400 | 3.1413195702 | 0.2498700930 | 0.1249433937 | 0.3924871278 |
| 500 | 3.1413210335 | 0.2498704995 | 0.1249434356 | 0.3924874425 |

- $N_x=100$

| N_y | NN | NE | $NDDLE$ | $NDDLRL$ | $IBAV$ | $IBAP$ | $NCASE$ |
|-------|-------|-------|---------|----------|--------|--------|---------|
| 100 | 10000 | 19602 | 396 | 9604 | 102 | 100 | 955450 |
| 150 | 15000 | 29502 | 496 | 14504 | 102 | 100 | 1445450 |
| 200 | 20000 | 39402 | 596 | 19404 | 102 | 100 | 1935450 |
| 250 | 25000 | 49302 | 696 | 24304 | 102 | 100 | 2425450 |
| 300 | 30000 | 59202 | 796 | 29204 | 102 | 100 | 2915450 |
| 350 | 35000 | 69102 | 896 | 34104 | 102 | 100 | 3405450 |
| 400 | 40000 | 79002 | 996 | 39004 | 102 | 100 | 3895450 |
| 500 | 50000 | 98802 | 1196 | 48804 | 102 | 100 | 4875450 |

| N_y | A | u_{max} | u_{moy} | H |
|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 100 | 3.1414608392 | 0.2499377990 | 0.1249731473 | 0.3925982482 |
| 150 | 3.1414976504 | 0.2499549597 | 0.1249805093 | 0.3926259766 |
| 200 | 3.1415104346 | 0.2499608984 | 0.1249830407 | 0.3926355266 |
| 250 | 3.1415163278 | 0.2499636139 | 0.1249841857 | 0.3926398602 |
| 300 | 3.1415195209 | 0.2499650673 | 0.1249847887 | 0.3926421537 |
| 350 | 3.1415214430 | 0.2499659280 | 0.1249851380 | 0.3926434913 |
| 400 | 3.1415226889 | 0.2499664746 | 0.1249853535 | 0.3926443238 |
| 500 | 3.1415241522 | 0.2499670940 | 0.1249855847 | 0.3926452332 |

- $N_x=200$

| N_y | NN | NE | $NDDLE$ | $NDDLRL$ | $IBAV$ | $IBAP$ | $NCASE$ |
|-------|--------|--------|---------|----------|--------|--------|----------|
| 200 | 40000 | 79202 | 796 | 39204 | 202 | 200 | 7820900 |
| 300 | 60000 | 119002 | 996 | 59004 | 202 | 200 | 11780900 |
| 400 | 80000 | 158802 | 1196 | 78804 | 202 | 200 | 15740900 |
| 500 | 100000 | 198602 | 1396 | 98604 | 202 | 200 | 19700900 |

| N_y | A | u_{max} | u_{moy} | H |
|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 200 | 3.1415600300 | 0.2499843760 | 0.1249931705 | 0.3926735486 |
| 300 | 3.1415691163 | 0.2499886763 | 0.1249950197 | 0.3926804937 |
| 400 | 3.1415722842 | 0.2499901663 | 0.1249956554 | 0.3926828867 |
| 500 | 3.1415737476 | 0.2499908467 | 0.1249959415 | 0.3926839683 |

On remarque bien à partir des résultats obtenus par le programme réalisé la convergence des valeurs vers ceux de la solution exacte. On remarque aussi que la convergence est assez lente, puisque chaque fois on augmente les valeurs de N_x et N_y on remarque une petite variation aux valeurs obtenues. On remarque encore que ce n'est pas uniquement le but d'avoir des solutions précises d'augmenter le nombre de nœuds, il faut que la taille des cellules doivent être très petites, c'est-à-dire, la surface, la longueur des cotés et les trois angles internes doivent être aussi à discutés. Par exemple, on peut voir ce qu'on a dit

entre les résultats obtenus entre la discrétisation de $N_x=100$ et $N_y=400$ et la discrétisation de $N_x=200$ et $N_y=200$. Pour les deux discrétisations, on a presque le même nombre de nœuds internes et le système à résoudre est presque le même. Malgré ça, les résultats obtenus pour la deuxième sont meilleurs par rapport aux premiers résultats. Il est à noter que la position de valeur maximale de la solution est obtenue au centre de gravité G du cercle $(0, 0)$

On choisi maintenant un point interne arbitraire et voir l'effet de la discrétisation sur la valeur de la solution u en ce point. Le point choisi se trouve à la position $x=0.0$, $y=0.333333333$. La solution exacte est égale à $u=0.222222222$. On aura les résultats suivants. On note ici que la valeur de l'erreur relative est donnée par la formule suivante :

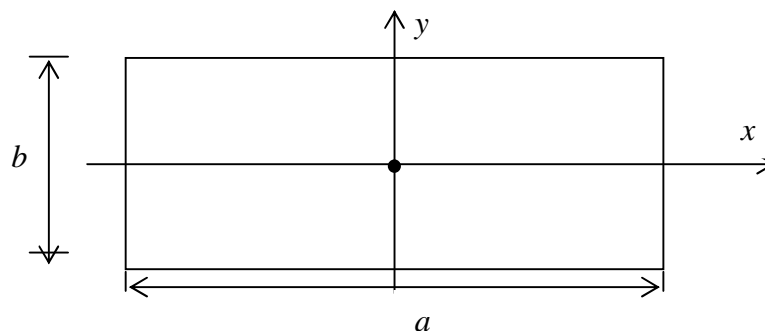
$$\text{Erreur relative \%} = \frac{|u_{\text{calculé}} - u_{\text{exacte}}|}{u_{\text{exacte}}} \times 100$$

| N_x | N_y | $u_{\text{calculée}}$ | u_{exacte} | Erreur relative % |
|-------|-------|-----------------------|---------------------|-------------------|
| 5 | 7 | 0.22093463 | 0.22222222 | 0.57941 |
| 9 | 13 | 0.22148306 | 0.22222222 | 0.33262 |
| 13 | 19 | 0.22183689 | 0.22222222 | 0.17339 |
| 37 | 55 | 0.22216881 | 0.22222222 | 0.02403 |
| 73 | 109 | 0.22220739 | 0.22222222 | 0.00667 |
| 145 | 217 | 0.22221774 | 0.22222222 | 0.00201 |
| 289 | 217 | 0.22221741 | 0.22222222 | 0.00126 |

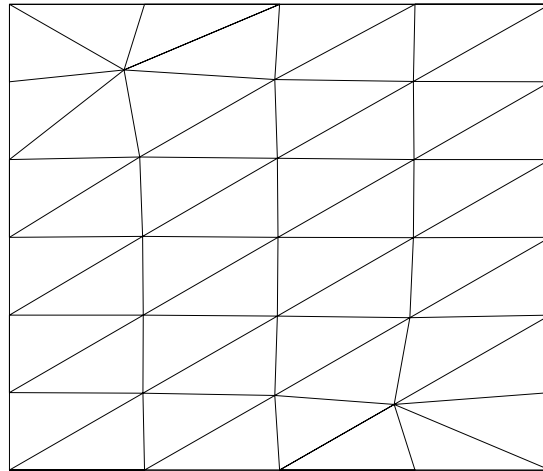
On remarque clairement la puissance de la méthode des éléments finis, malgré le type de l'élément qui est le plus simple, un triangle à trois nœuds. On note ici que le temps d'exécution par ordinateur est assez grand pour le dernier exemple avec 289 et 217 nœuds suivant x et y respectivement.

5.2.2. Domaine rectangulaire

Le second domaine choisi est un rectangle dont le coté horizontale est égale à $x=a$ et le coté verticale est égale à $y=b$.



Un exemple de maillage de type 'H' est donné dans la figure suivante :



Les résultats exacts concernant le domaine rectangulaire sont donnés par:

$$u(x,y) = \frac{4 a^2}{\pi^3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^3} \left[\frac{\operatorname{ch} \left[\frac{(2i+1) \pi \pi}{2a} \right]}{\operatorname{ch} \left[\frac{(2i+1) \pi \pi}{2a} \right]} \right] \cos \left[\frac{(2i+1) \pi \pi}{2a} \right]$$

$$H = \frac{n^3 (1-n s)}{12} a^4$$

avec :

$$s = \frac{192}{\pi^5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^5} \operatorname{th} \left[(2i+1) \frac{\pi}{2n} \right]$$

et

$$n = \frac{b}{a} \quad \text{si } n=1, \text{ le rectangle devient un carré.}$$

Concernant u_{\max} et u_{moy} on n'a pas trouvé dans les littératures disponibles les valeurs exactes de ces quantités.

On a fait en plus un petit programme permettant de déterminer la valeur exacte numérique de H pour différentes valeurs de n et a , s'écrit et proposé de la manière suivante :

```

C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  OPEN(UNIT=1, FILE='K.DAT', STATUS='UNKNOWN')
C
  PI=3.14159265357989
  ITERM=1000000
  DO 40 AN=0.1,10.01,0.1
    S=0.0
    DO 10 I=0, ITERM

```

```

      I=2*I+1
      VAL=DTANH(II*PI/(2*AN))/(II**5) ; S=S+VAL
10  CONTINUE
      S=192*S/(PI**5) ; HE=AN**3*(1-AN*S)/12
      WRITE(*,30) ITERM,AN,S,HE ; WRITE(1,30) ITERM,AN,S,HE
40  CONTINUE
      STOP
30
FORMAT(5X,'ITER=',I7,2X,'N=',F6.2,3X,'S=',F20.10,2X,'HE=',F20.10)
END

```

Remarque : on a estimé un nombre égal à 1000000 de termes de la série pour avoir la convergence avec une précision convenable de 10^{-6} .

On a varié le nombre n de 0.1 jusqu'à la valeur 10 avec un pas de 0.1 et concernant le calcul par la méthode des éléments finis, on a utilisé un maillage de 120 par 120 nœuds et sans procédure de filtrage. Après exécution des programmes on a obtenu les résultats suivants donnés sous formes de tableaux pour voir les résultats numériques et seront interprétés sous formes de graphes.

| n | $\frac{H}{a^4}$ exacte | $\frac{H}{a^4}$ calculé | $\frac{u_{\max}}{a^2}$ calculé | $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ calculé |
|-----|------------------------|-------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| 0.1 | 0.000078081097 | 0.000078028071 | 0.0012499114 | 0.0007802807 |
| 0.2 | 0.000582630873 | 0.000582398167 | 0.0049956085 | 0.0029119908 |
| 0.3 | 0.001824592603 | 0.001824030484 | 0.0111253012 | 0.0060801015 |
| 0.4 | 0.003989798792 | 0.003988743502 | 0.0191844995 | 0.0099718586 |
| 0.5 | 0.007146198768 | 0.007144487985 | 0.0284637667 | 0.0142889758 |
| 0.6 | 0.011264833540 | 0.011262321557 | 0.0382552497 | 0.0187705356 |
| 0.7 | 0.016251849045 | 0.016248423228 | 0.0479910908 | 0.0232120328 |
| 0.8 | 0.021981084942 | 0.021976675082 | 0.0572763335 | 0.0274708434 |
| 0.9 | 0.028319410614 | 0.028313994488 | 0.0658716351 | 0.0314599934 |
| 1.0 | 0.035142591265 | 0.035136201023 | 0.0736584383 | 0.0351362005 |
| 1.1 | 0.042343068537 | 0.042335777589 | 0.0806028770 | 0.0384870700 |
| 1.2 | 0.049832223858 | 0.049824173841 | 0.0867255484 | 0.0415201442 |
| 1.3 | 0.057539490420 | 0.057530860731 | 0.0920786683 | 0.0442545076 |
| 1.4 | 0.065410006365 | 0.065401049799 | 0.0967304369 | 0.0467150349 |
| 1.5 | 0.073401839851 | 0.073392848274 | 0.1007546813 | 0.0489285648 |
| 1.6 | 0.081483329064 | 0.081474674327 | 0.1042247206 | 0.0509216707 |
| 1.7 | 0.089630773199 | 0.089622869807 | 0.1072097197 | 0.0527193344 |
| 1.8 | 0.097826538897 | 0.097819889148 | 0.1097730276 | 0.0543443820 |
| 1.9 | 0.106057561965 | 0.106052727558 | 0.1119714078 | 0.0558172242 |
| 2.0 | 0.114314189641 | 0.114311805869 | 0.1138550643 | 0.0571559021 |
| 2.1 | 0.122589300412 | 0.122590055927 | 0.1154679394 | 0.0583762162 |
| 2.2 | 0.130877642375 | 0.130882354834 | 0.1168483182 | 0.0594919786 |
| 2.3 | 0.139175339853 | 0.139184888689 | 0.1180292750 | 0.0605151681 |
| 2.4 | 0.147479527579 | 0.147494881595 | 0.1190393579 | 0.0614561997 |
| 2.5 | 0.155788080585 | 0.155810276324 | 0.1199031087 | 0.0623241096 |
| 2.6 | 0.164099415336 | 0.164129637887 | 0.1206416614 | 0.0631267829 |
| 2.7 | 0.172412343648 | 0.172451854350 | 0.1212730871 | 0.0638710562 |

| | | | | |
|-----|----------------|----------------|--------------|--------------|
| 2.8 | 0.180725965534 | 0.180776131386 | 0.1218128876 | 0.0645629031 |
| 2.9 | 0.189039590700 | 0.189101861566 | 0.1222743192 | 0.0652075375 |
| 3.0 | 0.197352681083 | 0.197428674136 | 0.1226687768 | 0.0658095571 |
| 3.1 | 0.205664808803 | 0.205756232483 | 0.1230059611 | 0.0663729772 |
| 3.2 | 0.213975625422 | 0.214084310101 | 0.1232941841 | 0.0669013459 |
| 3.3 | 0.222284839469 | 0.222412741505 | 0.1235405536 | 0.0673977995 |
| 3.4 | 0.230592200010 | 0.230741377826 | 0.1237511316 | 0.0678651101 |
| 3.5 | 0.238897484649 | 0.239070214650 | 0.1239311586 | 0.0683057746 |
| 3.6 | 0.247200490754 | 0.247399075223 | 0.1240850167 | 0.0687219643 |
| 3.7 | 0.255501029053 | 0.255727968384 | 0.1242165323 | 0.0691156661 |
| 3.8 | 0.263798918950 | 0.264056917008 | 0.1243289775 | 0.0694886613 |
| 3.9 | 0.272093985108 | 0.272385781712 | 0.1244250715 | 0.0698425071 |
| 4.0 | 0.280386054951 | 0.280714658971 | 0.1245072384 | 0.0701786637 |
| 4.1 | 0.288674956837 | 0.289043419968 | 0.1245774528 | 0.0704983941 |
| 4.2 | 0.296960518728 | 0.297372112504 | 0.1246374732 | 0.0708028829 |
| 4.3 | 0.305242567216 | 0.305700788056 | 0.1246888037 | 0.0710932055 |
| 4.4 | 0.313520926812 | 0.314029324457 | 0.1247326617 | 0.0713702999 |
| 4.5 | 0.321795419425 | 0.322357776286 | 0.1247701530 | 0.0716350603 |
| 4.6 | 0.330065863985 | 0.330686200049 | 0.1248022246 | 0.0718883033 |
| 4.7 | 0.338332076166 | 0.339014475434 | 0.1248296214 | 0.0721307384 |
| 4.8 | 0.346593868180 | 0.347342719691 | 0.1248530631 | 0.0723630655 |
| 4.9 | 0.354851048635 | 0.355670812663 | 0.1248730838 | 0.0725858791 |
| 5.0 | 0.363103422420 | 0.363998813054 | 0.1248901989 | 0.0727997615 |
| 5.1 | 0.371350790635 | 0.372326780506 | 0.1249048502 | 0.0730052500 |
| 5.2 | 0.379592950523 | 0.380654594448 | 0.1249173577 | 0.0732028055 |
| 5.3 | 0.387829695436 | 0.388982375121 | 0.1249280695 | 0.0733928999 |
| 5.4 | 0.396060814803 | 0.397310001502 | 0.1249372099 | 0.0735759251 |
| 5.5 | 0.404286094104 | 0.405637533811 | 0.1249450238 | 0.0737522778 |
| 5.6 | 0.412505314855 | 0.413965032909 | 0.1249517222 | 0.0739223262 |
| 5.7 | 0.420718254600 | 0.422292377023 | 0.1249574324 | 0.0740863808 |
| 5.8 | 0.428924686895 | 0.430619626930 | 0.1249623139 | 0.0742447622 |
| 5.9 | 0.437124381310 | 0.438946843954 | 0.1249665045 | 0.0743977691 |
| 6.0 | 0.445317103415 | 0.447273905583 | 0.1249700715 | 0.0745456498 |
| 6.1 | 0.453502614786 | 0.455600934602 | 0.1249731377 | 0.0746886767 |
| 6.2 | 0.461680672997 | 0.463927808029 | 0.1249757440 | 0.0748270647 |
| 6.3 | 0.469851031617 | 0.472254587344 | 0.1249779719 | 0.0749610445 |
| 6.4 | 0.478013440212 | 0.480581334484 | 0.1249798923 | 0.0750908324 |
| 6.5 | 0.486167644345 | 0.488907925805 | 0.1249815197 | 0.0752166028 |
| 6.6 | 0.494313385571 | 0.497234485239 | 0.1249829263 | 0.0753385572 |
| 6.7 | 0.502450401440 | 0.505560888732 | 0.1249841148 | 0.0754568479 |
| 6.8 | 0.510578425494 | 0.513887198330 | 0.1249851305 | 0.0755716457 |
| 6.9 | 0.518697187269 | 0.522213476469 | 0.1249860133 | 0.0756831114 |
| 7.0 | 0.526806412294 | 0.530539660991 | 0.1249867694 | 0.0757913790 |
| 7.1 | 0.534905822090 | 0.538865689382 | 0.1249874025 | 0.0758965748 |
| 7.2 | 0.542995134171 | 0.547191624076 | 0.1249879433 | 0.0759988355 |
| 7.3 | 0.551074062045 | 0.555517465127 | 0.1249884051 | 0.0760982818 |
| 7.4 | 0.559142315210 | 0.563843212587 | 0.1249887994 | 0.0761950276 |
| 7.5 | 0.567199599157 | 0.572168992276 | 0.1249891635 | 0.0762891978 |
| 7.6 | 0.575245615371 | 0.580494552865 | 0.1249894504 | 0.0763808611 |
| 7.7 | 0.583280061328 | 0.588820020020 | 0.1249896952 | 0.0764701313 |
| 7.8 | 0.591302630496 | 0.597145393797 | 0.1249899039 | 0.0765571006 |
| 7.9 | 0.599313012337 | 0.605470674250 | 0.1249900818 | 0.0766418564 |
| 8.0 | 0.607310892304 | 0.613795987919 | 0.1249902592 | 0.0767244973 |
| 8.1 | 0.615295951844 | 0.622121082023 | 0.1249903879 | 0.0768050707 |
| 8.2 | 0.623267868393 | 0.630446082969 | 0.1249904975 | 0.0768836675 |
| 8.3 | 0.631226315383 | 0.638770990811 | 0.1249905905 | 0.0769603592 |
| 8.4 | 0.639170962236 | 0.647095805607 | 0.1249906696 | 0.0770352138 |
| 8.5 | 0.647101474368 | 0.655420527415 | 0.1249907366 | 0.0771082962 |

| | | | | |
|------|----------------|----------------|--------------|--------------|
| 8.6 | 0.655017513185 | 0.663745283527 | 0.1249908174 | 0.0771796830 |
| 8.7 | 0.662918736088 | 0.672069819647 | 0.1249908652 | 0.0772494034 |
| 8.8 | 0.670804796469 | 0.680394262950 | 0.1249909055 | 0.0773175287 |
| 8.9 | 0.678675343713 | 0.688718613496 | 0.1249909394 | 0.0773841127 |
| 9.0 | 0.686530023195 | 0.697042871343 | 0.1249909678 | 0.0774492068 |
| 9.1 | 0.694368476286 | 0.705367164336 | 0.1249910143 | 0.0775128740 |
| 9.2 | 0.702190340346 | 0.713691237068 | 0.1249910339 | 0.0775751333 |
| 9.3 | 0.709995248729 | 0.722015217280 | 0.1249910501 | 0.0776360437 |
| 9.4 | 0.717782830782 | 0.730339105032 | 0.1249910635 | 0.0776956483 |
| 9.5 | 0.725552711843 | 0.738662900386 | 0.1249910744 | 0.0777539884 |
| 9.6 | 0.733304513243 | 0.746986731679 | 0.1249911047 | 0.0778111167 |
| 9.7 | 0.741037852304 | 0.755310342514 | 0.1249911115 | 0.0778670445 |
| 9.8 | 0.748752342343 | 0.763633861133 | 0.1249911168 | 0.0779218214 |
| 9.9 | 0.756447592666 | 0.771957287601 | 0.1249911209 | 0.0779754824 |
| 10.0 | 0.764123208575 | 0.780280621980 | 0.1249911238 | 0.0780280610 |

En comparant les valeurs de la deuxième et troisième colonne, on peut remarquer la convergence par la méthode des éléments finis. On note ici, qu'on n'a pas trouvé dans la littérature les solutions exactes sur u_{\max} et u_{moy} . Les graphes suivants illustrent la variation des paramètres figurés dans le tableau en fonction du rapport n .

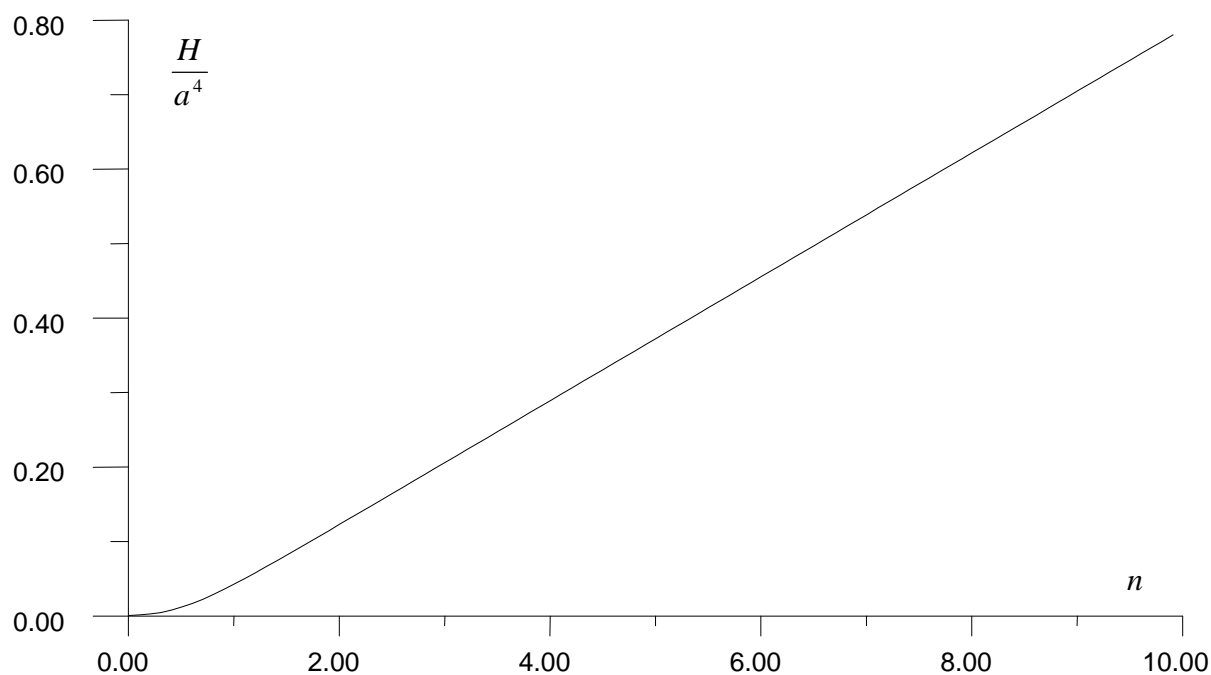


Figure 5.28 : Variation du paramètre $\frac{H}{a^4}$ en fonction du rapport n pour un rectangle

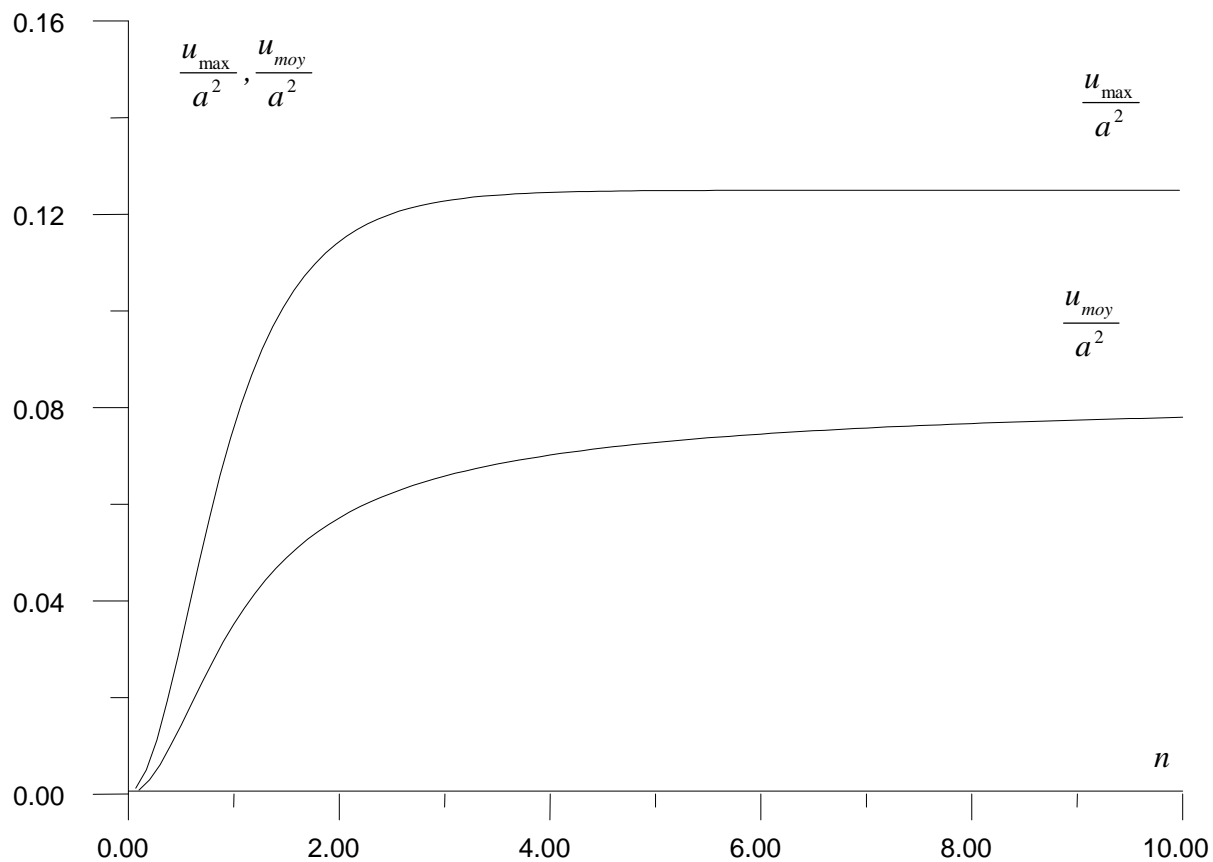
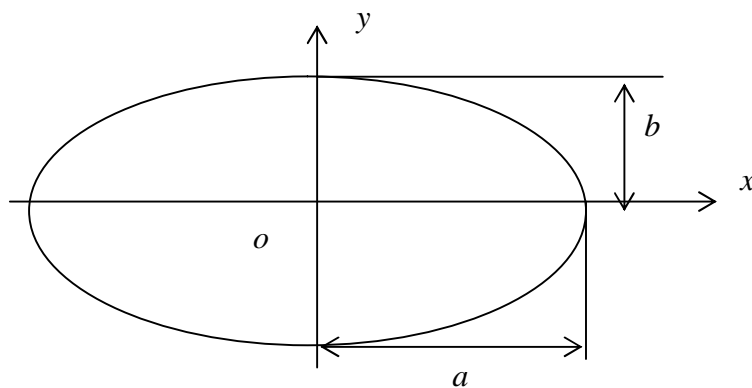


Figure 5.29 : Variation des paramètres $\frac{u_{\max}}{a^2}$ et $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ en fonction du rapport n pour un rectangle

5.2.3. Domaine elliptique

Le troisième domaine à étudié est celui l'ellipse avec le coté vertical égale à b et la longueur horizontale égale à a comme le montre la figure suivante :



L'équation de cette ellipse est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La solution exacte pour ce type de domaine est donnée par:

$$u(x,y) = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right] \quad (5.6)$$

$$H = \frac{\pi}{4} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$D_x = \frac{4H}{\pi a^3 b} x \quad ; \quad D_y = \frac{4H}{\pi a b^3} y$$

$$u_{\max} = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \quad \text{au point } x=y=0$$

$$u_{\text{moy}} = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)}$$

Avant de passer aux calculs numériques de ces paramètres en utilisant le programme réalisé, on propose un exemple sur la distribution de la solution $u(x,y)$ en quelques points avec une discrétisation de 250 par 250 nœuds et une dimension de l'ellipse égale à $a=3$ et $b=1$. On aura les résultats suivants comparés avec ceux de la solution exacte donné par la relation (5.6).

| Position du point | | Solution $u(x,y)$ de l'équation | |
|-------------------|--------------|---------------------------------|---------------------|
| x | y | $u_{\text{calculée}}$ | u_{exacte} |
| 2.2220060435 | 0.2364047479 | 1.9733774976 | 1.9734001401 |
| 1.9734001401 | 0.2700825233 | 1.8817317592 | 1.8817507065 |
| 3.2339220062 | 0.2740466051 | 0.9734902536 | 0.9734822291 |
| 0.6463048000 | 0.4226488563 | 2.8226532614 | 2.8227116894 |
| 0.6124623513 | 0.4593468427 | 2.7449083326 | 2.7449603293 |
| 1.9949788662 | 0.4638140153 | 2.0947477448 | 2.0947711772 |
| 0.0792810447 | 0.0792810447 | 2.7698312066 | 2.7698872393 |
| 0.0260342142 | 0.7044197304 | 2.7210370648 | 2.7210917094 |
| 2.9745774578 | 0.6156546177 | 1.1660522469 | 1.1660502159 |
| 2.1227214485 | 0.7505324870 | 1.8886607065 | 1.8886739729 |
| 1.1211808306 | 0.8822214050 | 2.4046378458 | 2.4046709638 |
| 2.7756905892 | 0.8327090865 | 1.2713089380 | 1.2713081003 |
| 2.2732268081 | 1.0585468415 | 1.5912691292 | 1.5912723252 |
| 0.8334712567 | 1.2882530347 | 2.2238598741 | 2.2238879375 |
| 1.2232411917 | 1.3812386103 | 2.0001422159 | 2.0001601461 |
| 3.3921991222 | 1.1338444630 | 0.3973394052 | 0.3973442755 |
| 3.2968142934 | 1.2344659085 | 0.4359285489 | 0.4359328473 |
| 1.0228380467 | 1.7843726094 | 1.6727969861 | 1.6728090246 |

| | | | |
|--------------|--------------|---------------------|--------------|
| 3.1771044102 | 1.4478143419 | 0.3923050171 | 0.3923081240 |
| 2.3487167200 | 1.7160622797 | 0.9446844716 | 0.9446770392 |
| 2.6700361448 | 1.7231759708 | 0.6465852132 | 0.6465759210 |
| 2.4910713705 | 1.9151937921 | 0.5892814816 | 0.5892718933 |
| 0.2341536436 | 2.4713505668 | 0.9157099446 | 0.9157074131 |
| 2.8397522368 | 1.9351867150 | 0.2300712151 | 0.2300620631 |
| 3.0411641003 | 1.9141974454 | 0.0427101535 | 0.0427091696 |
| 2.4167647421 | 2.2468053017 | 0.2132646954 | 0.2132617722 |
| 1.3859655663 | 2.7273557543 | 0.1539224377 | 0.1539276895 |

De la même manière, on va déterminer les paramètres H , u_{\max} et u_{moy} en utilisant le programme réalisé pour une discrétisation de 120 par 120 nœuds et cela en variant la dimension de l'ellipse, on aura les résultats numériques donnés dans le tableau suivant, qui seront présentés par suite par des graphes. On note ici que $n = \frac{b}{a}$.

| n | $\frac{H}{a^4}$ <i>exacte</i> | $\frac{H}{a^4}$ <i>calculé</i> | $\frac{u_{\max}}{a^2}$ <i>exacte</i> | $\frac{u_{\max}}{a^2}$ <i>calculé</i> | $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ <i>exacte</i> | $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ <i>calculé</i> |
|-----|----------------------------------|-----------------------------------|---|--|---|--|
| 0.1 | 0.0007776220 | 0.0007774831 | 0.0049504952 | 0.0049496269 | 0.0024752476 | 0.0024748774 |
| 0.2 | 0.0060415248 | 0.0060404456 | 0.0192307698 | 0.0192273847 | 0.0096153849 | 0.0096139468 |
| 0.3 | 0.0194548183 | 0.0194513431 | 0.0412844048 | 0.0412771371 | 0.0206422024 | 0.0206391150 |
| 0.4 | 0.0433323154 | 0.0433245751 | 0.0689655190 | 0.0689534192 | 0.0344827595 | 0.0344776021 |
| 0.5 | 0.0785398216 | 0.0785257923 | 0.1000000000 | 0.0999825357 | 0.0500000000 | 0.0499925231 |
| 0.6 | 0.1247397164 | 0.1247174349 | 0.1323529441 | 0.1323299186 | 0.0661764720 | 0.0661665747 |
| 0.7 | 0.1807997228 | 0.1807674279 | 0.1644295335 | 0.1644010128 | 0.0822147667 | 0.0822024708 |
| 0.8 | 0.2451974903 | 0.2451536933 | 0.1951219548 | 0.1950881759 | 0.0975609774 | 0.0975463865 |
| 0.9 | 0.3163288923 | 0.3162723902 | 0.2237569098 | 0.2237182128 | 0.1118784549 | 0.1118617229 |
| 1.0 | 0.3926991043 | 0.3926289621 | 0.2500000000 | 0.2499567812 | 0.1250000000 | 0.1249813078 |
| 1.1 | 0.4730158436 | 0.4729313566 | 0.2737556598 | 0.2737083181 | 0.1368778299 | 0.1368573598 |
| 1.2 | 0.5562164348 | 0.5561170880 | 0.2950819708 | 0.2950309073 | 0.1475409854 | 0.1475189208 |
| 1.3 | 0.6414571962 | 0.6413426254 | 0.3141263975 | 0.3140719876 | 0.1570631988 | 0.1570397104 |
| 1.4 | 0.7280853629 | 0.7279553200 | 0.3310810844 | 0.3310236734 | 0.1655405422 | 0.1655157862 |
| 1.5 | 0.8156058274 | 0.8154601544 | 0.3461538493 | 0.3460937516 | 0.1730769247 | 0.1730510421 |
| 1.6 | 0.9036491690 | 0.9034877715 | 0.3595505648 | 0.3594880617 | 0.1797752824 | 0.1797483982 |
| 1.7 | 0.9919437972 | 0.9917666309 | 0.3714652985 | 0.3714006417 | 0.1857326492 | 0.1857048744 |
| 1.8 | 1.0802929993 | 1.0801000537 | 0.3820754744 | 0.3820088869 | 0.1910377372 | 0.1910091691 |
| 1.9 | 1.1685566741 | 1.1683479653 | 0.3915401327 | 0.3914718140 | 0.1957700663 | 0.1957407907 |
| 2.0 | 1.2566371226 | 1.2564126839 | 0.4000000000 | 0.3999301285 | 0.2000000000 | 0.1999700933 |
| 2.1 | 1.3444681593 | 1.3442280352 | 0.4075785605 | 0.4075072875 | 0.2037892802 | 0.2037588059 |
| 2.2 | 1.4320068568 | 1.4317510996 | 0.4143835638 | 0.4143110303 | 0.2071917819 | 0.2071607989 |
| 2.3 | 1.5192273303 | 1.5189559962 | 0.4205087460 | 0.4204350746 | 0.2102543730 | 0.2102229322 |
| 2.4 | 1.6061160832 | 1.6058292316 | 0.4260355048 | 0.4259608047 | 0.2130177524 | 0.2129858985 |
| 2.5 | 1.6926685349 | 1.6923662256 | 0.4310344845 | 0.4309588531 | 0.2155172423 | 0.2154850147 |
| 2.6 | 1.7788864385 | 1.7785687321 | 0.4355670120 | 0.4354905362 | 0.2177835060 | 0.2177509396 |
| 2.7 | 1.8647759670 | 1.8644429210 | 0.4396863707 | 0.4396091276 | 0.2198431854 | 0.2198103110 |
| 2.8 | 1.9503462984 | 1.9499979699 | 0.4434389155 | 0.4433609743 | 0.2217194578 | 0.2216863029 |
| 2.9 | 2.0356085745 | 2.0352450207 | 0.4468650386 | 0.4467864620 | 0.2234325193 | 0.2233991085 |
| 3.0 | 2.1205751381 | 2.1201964109 | 0.4500000000 | 0.4499208443 | 0.2250000000 | 0.2249663557 |
| 3.1 | 2.2052589775 | 2.2048651253 | 0.4528746478 | 0.4527949603 | 0.2264373239 | 0.2264034639 |
| 3.2 | 2.2896733262 | 2.2892643990 | 0.4555160154 | 0.4554358423 | 0.2277580077 | 0.2277239503 |
| 3.3 | 2.3738313772 | 2.3734074208 | 0.4579478565 | 0.4578672379 | 0.2289739282 | 0.2289396891 |
| 3.4 | 2.4577460833 | 2.4573071404 | 0.4601910839 | 0.4601100566 | 0.2300955419 | 0.2300611352 |

| | | | | | | |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 3.5 | 2.5414300204 | 2.5409761331 | 0.4622641520 | 0.4621827487 | 0.2311320760 | 0.2310975143 |
| 3.6 | 2.6248952977 | 2.6244265024 | 0.4641833821 | 0.4641016314 | 0.2320916910 | 0.2320569857 |
| 3.7 | 2.7081535025 | 2.7076698390 | 0.4659632412 | 0.4658811717 | 0.2329816206 | 0.2329467824 |
| 3.8 | 2.7912156701 | 2.7907171721 | 0.4676165812 | 0.4675342166 | 0.2338082906 | 0.2337733287 |
| 3.9 | 2.8740922721 | 2.8735789769 | 0.4691548436 | 0.4690722069 | 0.2345774218 | 0.2345423452 |
| 4.0 | 2.9567932173 | 2.9562651503 | 0.4705882361 | 0.4705053461 | 0.2352941181 | 0.2352589342 |
| 4.1 | 3.0393278620 | 3.0387850551 | 0.4719258851 | 0.4718427606 | 0.2359629426 | 0.2359276587 |
| 4.2 | 3.1217050273 | 3.1211475102 | 0.4731759664 | 0.4730926244 | 0.2365879832 | 0.2365526060 |
| 4.3 | 3.2039330190 | 3.2033608158 | 0.4743458191 | 0.4742622747 | 0.2371729095 | 0.2371374449 |
| 4.4 | 3.2860196516 | 3.2854327909 | 0.4754420439 | 0.4753583114 | 0.2377210220 | 0.2376854755 |
| 4.5 | 3.3679722728 | 3.3673707722 | 0.4764705889 | 0.4763866800 | 0.2382352945 | 0.2381996708 |
| 4.6 | 3.4497977889 | 3.4491816791 | 0.4774368237 | 0.4773527512 | 0.2387184119 | 0.2386827163 |
| 4.7 | 3.5315026898 | 3.5308719865 | 0.4783456048 | 0.4782613780 | 0.2391728024 | 0.2391370388 |
| 4.8 | 3.6130930743 | 3.6124478018 | 0.4792013317 | 0.4791169619 | 0.2396006659 | 0.2395648384 |
| 4.9 | 3.6945746735 | 3.6939148514 | 0.4800079974 | 0.4799234933 | 0.2400039987 | 0.2399681111 |
| 5.0 | 3.7759528743 | 3.7752785163 | 0.4807692313 | 0.4806846004 | 0.2403846157 | 0.2403486710 |
| 5.1 | 3.8572327412 | 3.8565438703 | 0.4814883382 | 0.4814035892 | 0.2407441691 | 0.2407081709 |
| 5.2 | 3.9384190369 | 3.9377156654 | 0.4821683315 | 0.4820834708 | 0.2410841657 | 0.2410481166 |
| 5.3 | 4.0195162423 | 4.0187983863 | 0.4828119634 | 0.4827269976 | 0.2414059817 | 0.2413698844 |
| 5.4 | 4.1005285745 | 4.0997962508 | 0.4834217511 | 0.4833366863 | 0.2417108756 | 0.2416747327 |
| 5.5 | 4.1814600046 | 4.1807132314 | 0.4840000000 | 0.4839148425 | 0.2420000000 | 0.2419638144 |
| 5.6 | 4.2623142733 | 4.2615530551 | 0.4845488262 | 0.4844635798 | 0.2422744131 | 0.2422381859 |
| 5.7 | 4.3430949065 | 4.3423192624 | 0.4850701706 | 0.4849848410 | 0.2425350853 | 0.2424988192 |
| 5.8 | 4.4238052291 | 4.4230151741 | 0.4855658203 | 0.4854804125 | 0.2427829101 | 0.2427466071 |
| 5.9 | 4.5044483783 | 4.5036439205 | 0.4860374201 | 0.4859519378 | 0.2430187101 | 0.2429823718 |
| 6.0 | 4.5850273157 | 4.5842084696 | 0.4864864869 | 0.4864009337 | 0.2432432434 | 0.2432068717 |
| 6.1 | 4.6655448386 | 4.6647116107 | 0.4869144207 | 0.4868288002 | 0.2434572103 | 0.2434208065 |
| 6.2 | 4.7460035909 | 4.7451559935 | 0.4873225156 | 0.4872368320 | 0.2436612578 | 0.2436248234 |
| 6.3 | 4.8264060727 | 4.8255441170 | 0.4877119689 | 0.4876262247 | 0.2438559844 | 0.2438195210 |
| 6.4 | 4.9067546494 | 4.9058783446 | 0.4880838898 | 0.4879980880 | 0.2440419449 | 0.2440054537 |
| 6.5 | 4.9870515604 | 4.9861609128 | 0.4884393067 | 0.4883534498 | 0.2442196533 | 0.2441831354 |
| 6.6 | 5.0672989269 | 5.0663939517 | 0.4887791745 | 0.4886932656 | 0.2443895872 | 0.2443530441 |
| 6.7 | 5.1474987593 | 5.1465794608 | 0.4891043804 | 0.4890184219 | 0.2445521902 | 0.2445156227 |
| 6.8 | 5.2276529640 | 5.2267193508 | 0.4894157497 | 0.4893297440 | 0.2447078748 | 0.2446712841 |
| 6.9 | 5.3077633500 | 5.3068154298 | 0.4897140509 | 0.4896279999 | 0.2448570255 | 0.2448204124 |
| 7.0 | 5.3878316343 | 5.3868694162 | 0.4900000000 | 0.4899139063 | 0.2450000000 | 0.2449633658 |
| 7.1 | 5.4678594482 | 5.4668829387 | 0.4902742660 | 0.4901881315 | 0.2451371330 | 0.2451004782 |
| 7.2 | 5.5478483418 | 5.5468575423 | 0.4905374719 | 0.4904512953 | 0.2452687359 | 0.2452320613 |
| 7.3 | 5.6277997892 | 5.6267947112 | 0.4907902010 | 0.4907039874 | 0.2453951005 | 0.2453584070 |
| 7.4 | 5.7077151925 | 5.7066958439 | 0.4910329988 | 0.4909467489 | 0.2455164994 | 0.2454797878 |
| 7.5 | 5.7875958867 | 5.7865622749 | 0.4912663758 | 0.4911800919 | 0.2456331879 | 0.2455964589 |
| 7.6 | 5.8674431430 | 5.8663952676 | 0.4914908103 | 0.4914044924 | 0.2457454052 | 0.2457086592 |
| 7.7 | 5.9472581726 | 5.9461960496 | 0.4917067509 | 0.4916204021 | 0.2458533755 | 0.2458166137 |
| 7.8 | 6.0270421304 | 6.0259657599 | 0.4919146186 | 0.4918282389 | 0.2459573093 | 0.2459205320 |
| 7.9 | 6.1067961175 | 6.1057054953 | 0.4921148086 | 0.4920283993 | 0.2460574043 | 0.2460206117 |
| 8.0 | 6.1865211850 | 6.1854163286 | 0.4923076925 | 0.4922212544 | 0.2461538463 | 0.2461170394 |
| 8.1 | 6.2662183362 | 6.2650992463 | 0.4924936198 | 0.4924071552 | 0.2462468099 | 0.2462099891 |
| 8.2 | 6.3458885294 | 6.3447552110 | 0.4926729193 | 0.4925864278 | 0.2463364597 | 0.2462996255 |
| 8.3 | 6.4255326804 | 6.4243851357 | 0.4928459009 | 0.4927593840 | 0.2464229505 | 0.2463861033 |
| 8.4 | 6.5051516647 | 6.5039899068 | 0.4930128565 | 0.4929263157 | 0.2465064283 | 0.2464695688 |
| 8.5 | 6.5847463195 | 6.5835703462 | 0.4931740616 | 0.4930874976 | 0.2465870308 | 0.2465501593 |
| 8.6 | 6.6643174461 | 6.6631272607 | 0.4933297761 | 0.4932431895 | 0.2466648880 | 0.2466280048 |
| 8.7 | 6.7438658116 | 6.7426614236 | 0.4934802453 | 0.4933936373 | 0.2467401227 | 0.2467032283 |
| 8.8 | 6.8233921504 | 6.8221735604 | 0.4936257014 | 0.4935390724 | 0.2468128507 | 0.2467759455 |
| 8.9 | 6.9028971664 | 6.9016643734 | 0.4937663635 | 0.4936797144 | 0.2468831817 | 0.2468462659 |
| 9.0 | 6.9823815340 | 6.9811345417 | 0.4939024392 | 0.4938157701 | 0.2469512196 | 0.2469142934 |
| 9.1 | 7.0618459001 | 7.0605847267 | 0.4940341250 | 0.4939474373 | 0.2470170625 | 0.2469801269 |
| 9.2 | 7.1412908852 | 7.1400155214 | 0.4941616069 | 0.4940749011 | 0.2470808034 | 0.2470438582 |

| | | | | | | |
|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 9.3 | 7.2207170845 | 7.2194275270 | 0.4942850613 | 0.4941983367 | 0.2471425307 | 0.2471055759 |
| 9.4 | 7.3001250698 | 7.2988213360 | 0.4944046555 | 0.4943179140 | 0.2472023277 | 0.2471653642 |
| 9.5 | 7.3795153900 | 7.3781974739 | 0.4945205481 | 0.4944337899 | 0.2472602741 | 0.2472233017 |
| 9.6 | 7.4588885724 | 7.4575564891 | 0.4946328898 | 0.4945461167 | 0.2473164449 | 0.2472794644 |
| 9.7 | 7.5382451239 | 7.5368988636 | 0.4947418237 | 0.4946550346 | 0.2473709118 | 0.2473339231 |
| 9.8 | 7.6175855319 | 7.6162251113 | 0.4948474857 | 0.4947606826 | 0.2474237429 | 0.2473867465 |
| 9.9 | 7.6969102650 | 7.6955356755 | 0.4949500052 | 0.4948631863 | 0.2474750026 | 0.2474379985 |
| 10.0 | 7.7762197741 | 7.7748310176 | 0.4950495051 | 0.4949626723 | 0.2475247525 | 0.2474877409 |

On remarque bien à partir des résultats obtenus dans ce tableau et la comparaison avec ceux de l'exacte, la convergence des résultats mais pour une discrétisation assez élevée. On modifiant la forme du domaine le programme donne des résultats satisfaisants. Donc on peut dire et conclure que le programme peut être applicable pour des sections complexes et on peut estimer la convergence des résultats obtenus pour ce type de domaine malgré l'absence des résultats exacts. Les graphes suivants illustrent la variation des paramètres $\frac{H}{a^4}$, $\frac{u_{\max}}{a^2}$ et $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ en fonction de n . On remarque bien les résultats du cercle à partir du cas de l'ellipse pour $n=1$.

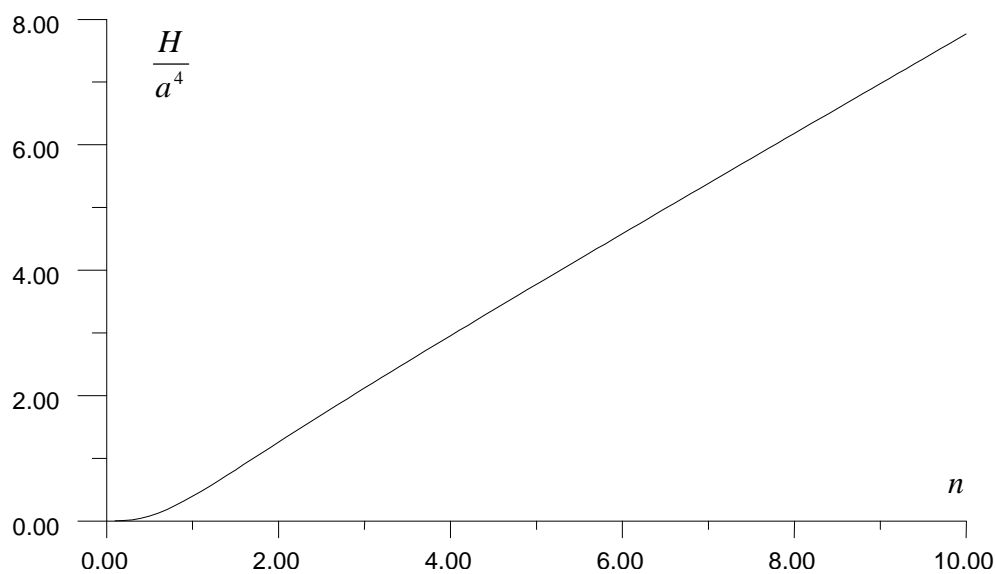


Figure 5.30 : Variation du paramètre $\frac{H}{a^4}$ en fonction de n pour une ellipse

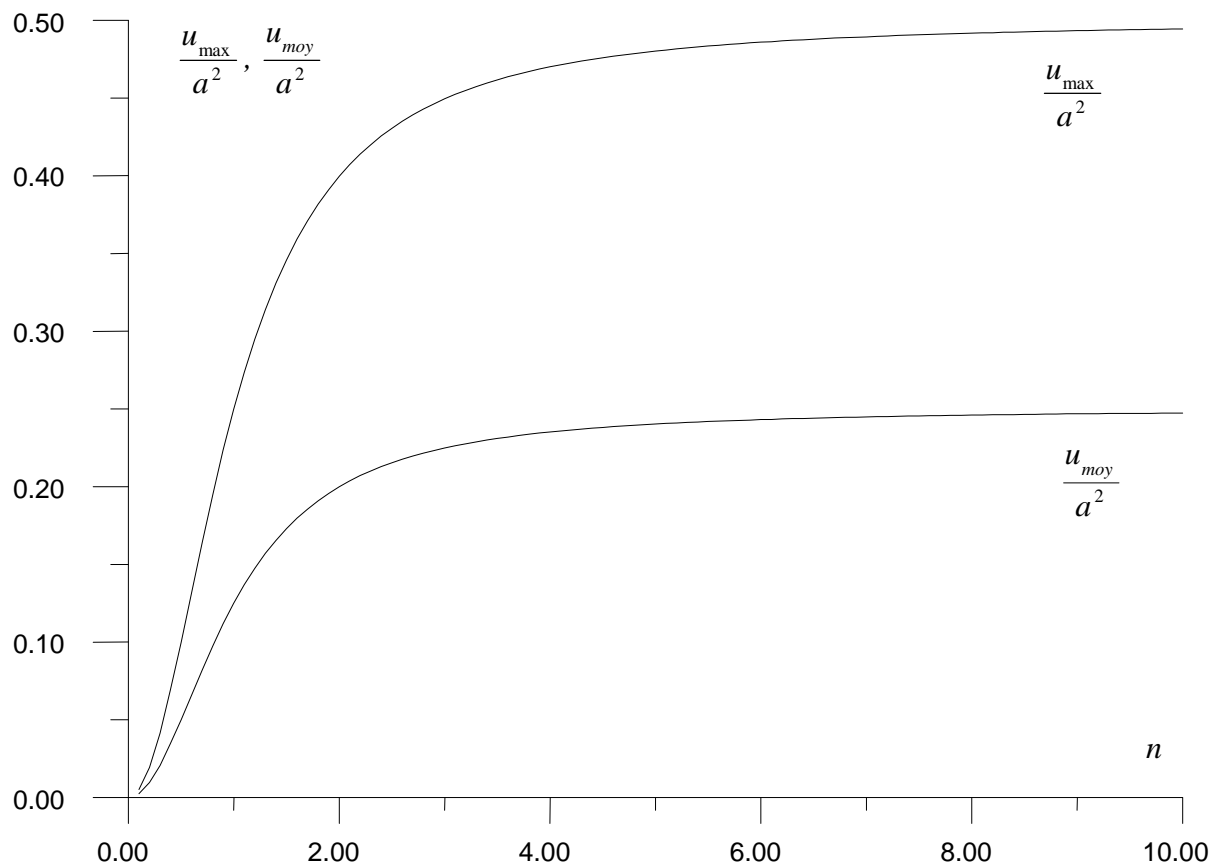
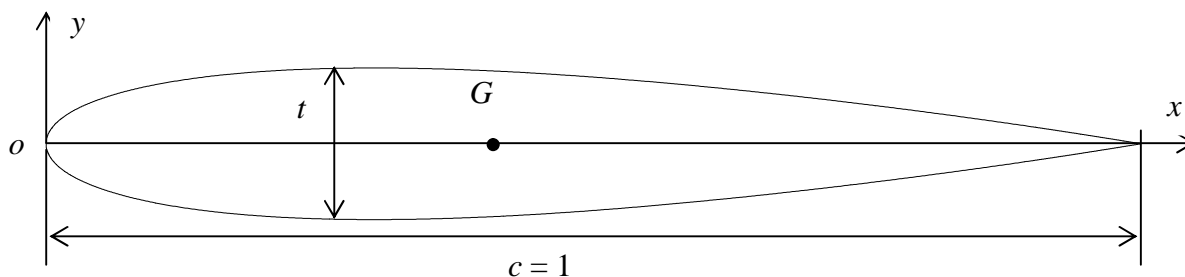


Figure 5.31 : Variation des paramètres $\frac{u_{\max}}{a^2}$ et $\frac{u_{\text{moy}}}{a^2}$ en fonction du rapport n pour une ellipse

5.2.4. Domaine d'un profil d'aile

Le quatrième domaine à étudier est celui le cas d'un profil d'aile. L'exemple pris ici est de la série NACA 00't', qui à la forme générale suivante [1].



C'est un profil symétrique donné par rapport au repère xoy par l'équation suivante [1]:

$$y(x) = t \left(a_1 \sqrt{x} + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 \right) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.7)$$

avec:

$$a_1=1.4779155 \quad a_2=-0.624424 \quad a_3=-1.7478095 \quad a_4=1.384087 \quad a_5=-0.489769$$

Si le profil est le NACA 0012, alors, l'épaisseur maximale est égale à $t=12\%$, ou égale à 0.12. Elle est située à une distance de $x=0.2991671707$ à partir du bord d'attaque. Pour l'intrados, On ajoute à l'équation le signe moins (-) par raison de symétrie. Ici la corde du profil est égale à l'unité.

Malheureusement, pour ce domaine on pas trouvé dans la littérature disponible les résultats exacte concernant la distribution de la solution $u(x,y)$ dans le domaine ainsi que les paramètres H , u_{\max}/c^2 , u_{moy}/c^2 (c mesure la corde du profil. Elle est égale à l'unité), et les valeurs de l'aire de la section et la position du centre de gravité du profil. On peut noter ici que puisque le profil est symétrique, il faut trouver la position de son centre de gravité sur laxe des abscises. Autrement dit, $y_G=0$.

Pour une discrétisation de 120×120 noeuds, on va déterminer pour un profil NACA 0012, les valeurs des paramètres en fonction de l'épaisseur ' t '. Le tableau suivant résume les résultats obtenus. On note ici que la position du centre de gravité ' G ' ne dépend pas de l'épaisseur et elle est située à une distance $x_G=0.417284503$, $y_G=0.0$.

| t | A (Aire totale) | H | u_{\max}/c^2 | u_{moy}/c^2 |
|------|---------------------|--------------|----------------|----------------------|
| 0.10 | 0.0677035188 | 0.0000380727 | 0.0012182136 | 0.0005623438 |
| 0.11 | 0.0744738704 | 0.0000505128 | 0.0014683489 | 0.0006782623 |
| 0.12 | 0.0812442221 | 0.0000653515 | 0.0017400977 | 0.0008043837 |
| 0.13 | 0.0880145737 | 0.0000827773 | 0.0020331057 | 0.0009404951 |
| 0.14 | 0.0947849253 | 0.0001029716 | 0.0023467172 | 0.0010863709 |
| 0.15 | 0.1015552770 | 0.0001261088 | 0.0026802538 | 0.0012417746 |
| 0.16 | 0.1083256286 | 0.0001523556 | 0.0030330688 | 0.0014064593 |
| 0.17 | 0.1150959802 | 0.0001818711 | 0.0034044921 | 0.0015801694 |
| 0.18 | 0.1218663318 | 0.0002148067 | 0.0037938341 | 0.0017626415 |
| 0.19 | 0.1286366835 | 0.0002513053 | 0.0042004972 | 0.0019536055 |
| 0.20 | 0.1354070351 | 0.0002915023 | 0.0046243607 | 0.0021527858 |
| 0.21 | 0.1421773867 | 0.0003355248 | 0.0050641604 | 0.0023599024 |
| 0.22 | 0.1489477384 | 0.0003834915 | 0.0055191744 | 0.0025746717 |
| 0.23 | 0.1557180900 | 0.0004355135 | 0.0059886779 | 0.0027968076 |
| 0.24 | 0.1624884416 | 0.0004916936 | 0.0064719462 | 0.0030260222 |
| 0.25 | 0.1692587932 | 0.0005521268 | 0.0069688631 | 0.0032620270 |
| 0.26 | 0.1760291449 | 0.0006169000 | 0.0074788971 | 0.0035045333 |
| 0.27 | 0.1827994965 | 0.0006860928 | 0.0080007370 | 0.0037532531 |
| 0.28 | 0.1895698481 | 0.0007597769 | 0.0085336866 | 0.0040078996 |
| 0.29 | 0.1963401998 | 0.0008380170 | 0.0090770602 | 0.0042681884 |
| 0.30 | 0.2031105514 | 0.0009208702 | 0.0096303242 | 0.0045338371 |
| 0.31 | 0.2098809030 | 0.0010083868 | 0.0101943600 | 0.0048045668 |
| 0.32 | 0.2166512546 | 0.0011006104 | 0.0107670287 | 0.0050801017 |
| 0.33 | 0.2234216063 | 0.0011975779 | 0.0113477001 | 0.0053601703 |

| | | | | |
|------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.34 | 0.2301919579 | 0.0012993197 | 0.0119357601 | 0.0056445052 |
| 0.35 | 0.2369623095 | 0.0014058603 | 0.0125306112 | 0.0059328437 |
| 0.36 | 0.2437326612 | 0.0015172183 | 0.0131332178 | 0.0062249280 |
| 0.37 | 0.2505030128 | 0.0016334063 | 0.0137423109 | 0.0065205057 |
| 0.38 | 0.2572733644 | 0.0017544319 | 0.0143566826 | 0.0068193295 |
| 0.39 | 0.2640437160 | 0.0018802970 | 0.0149758036 | 0.0071211580 |
| 0.40 | 0.2708140677 | 0.0020109991 | 0.0155991624 | 0.0074257555 |
| 0.41 | 0.2775844193 | 0.0021465304 | 0.0162266828 | 0.0077328922 |
| 0.42 | 0.2843547709 | 0.0022868789 | 0.0168597352 | 0.0080423442 |
| 0.43 | 0.2911251226 | 0.0024320284 | 0.0174957571 | 0.0083538940 |
| 0.44 | 0.2978954742 | 0.0025819584 | 0.0181343053 | 0.0086673299 |
| 0.45 | 0.3046658258 | 0.0027366446 | 0.0187749537 | 0.0089824468 |
| 0.46 | 0.3114361774 | 0.0028960592 | 0.0194172938 | 0.0092990455 |
| 0.47 | 0.3182065291 | 0.0030601709 | 0.0200620355 | 0.0096169332 |
| 0.48 | 0.3249768807 | 0.0032289454 | 0.0207096286 | 0.0099359233 |
| 0.49 | 0.3317472323 | 0.0034023450 | 0.0213579216 | 0.0102558354 |
| 0.50 | 0.3385175839 | 0.0035803296 | 0.0220065678 | 0.0105764952 |

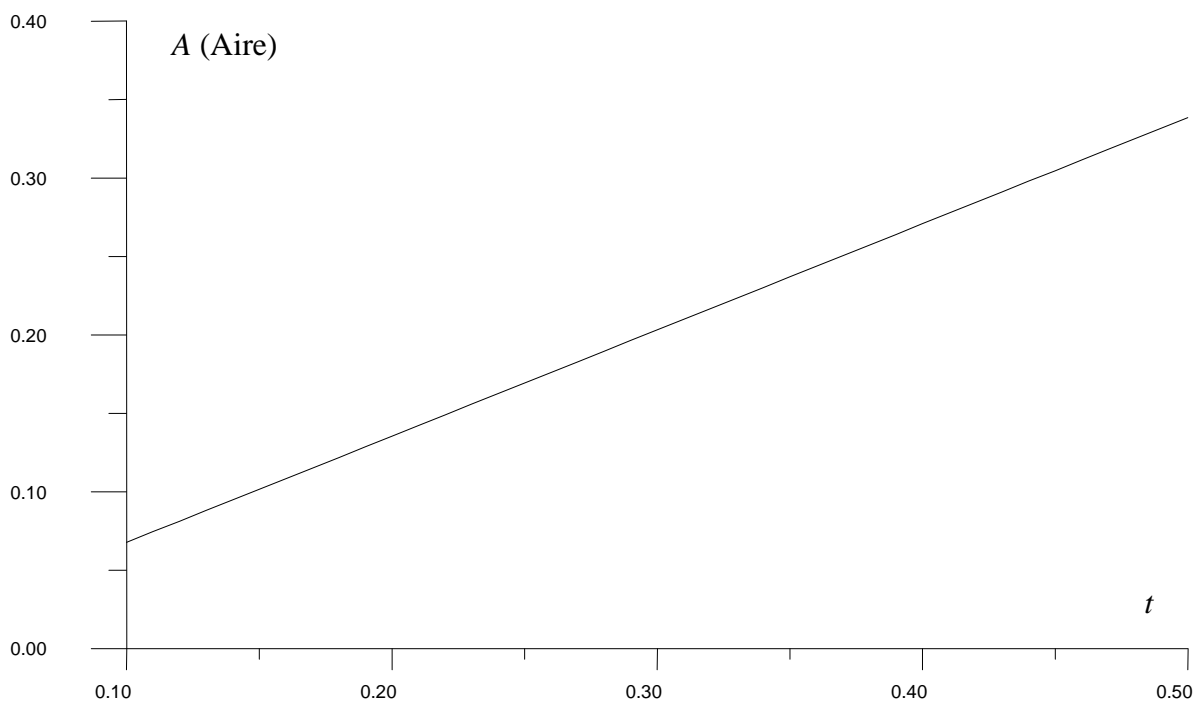


Figure 5.32 : Variation de l'aire de la section du domaine en fonction de l'épaisseur t maximale

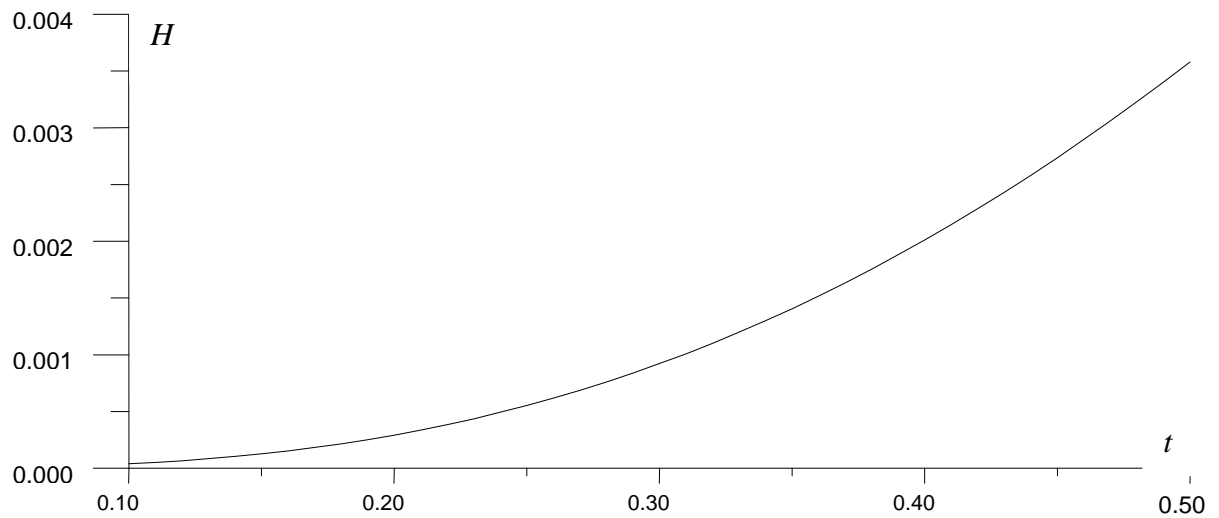


Figure 5.33 : Variation de paramètre H en fonction de l'épaisseur t du profil

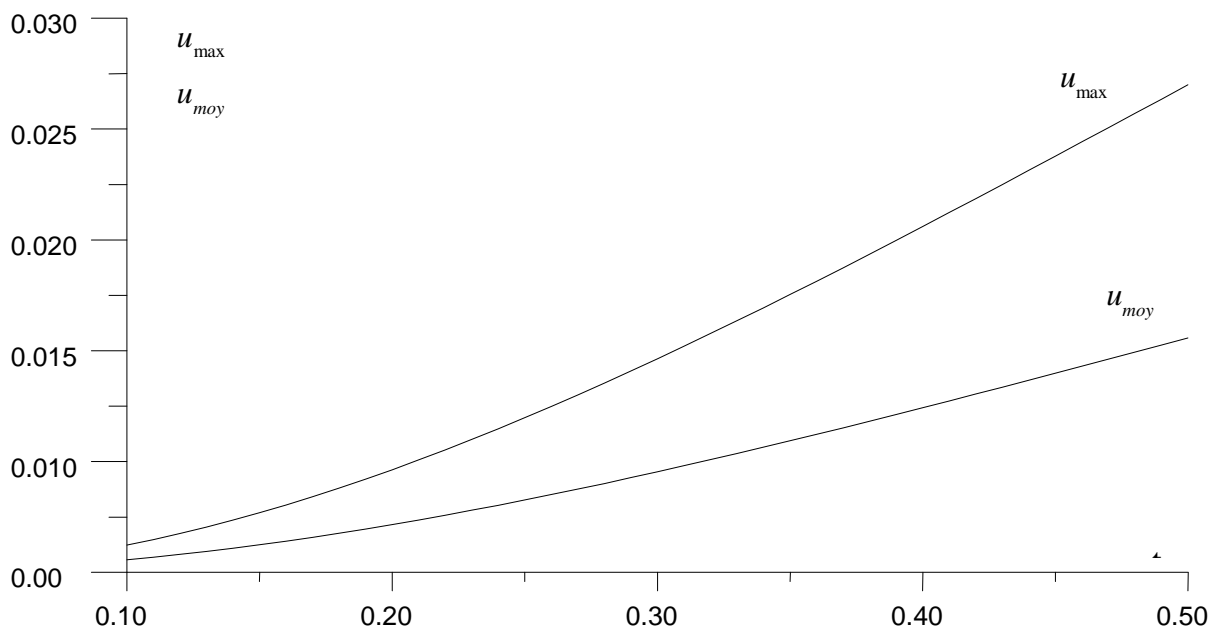


Figure 5.34 : Variation des paramètres u_{\max} et u_{moy} en fonction de l'épaisseur t du profil

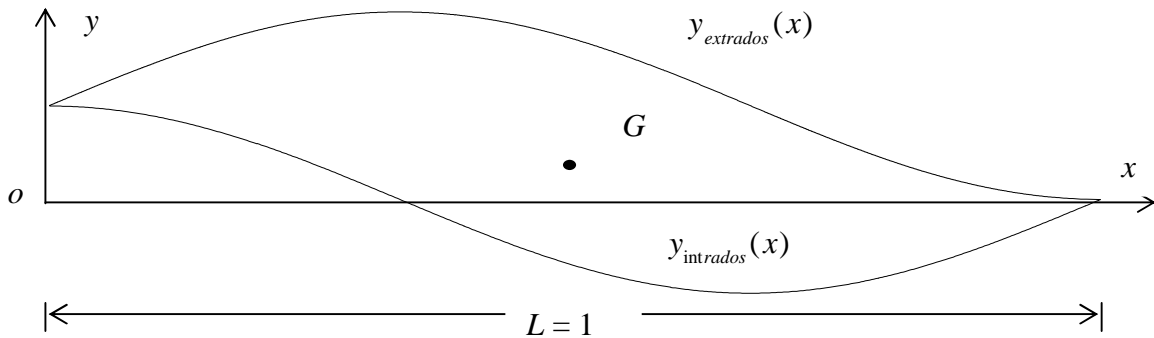
On remarque d'après le graphe (4.34) et les valeurs du tableau correspondant que la valeur de u_{moy} est presque égale à la moitié de la valeur maximale u_{\max} .

5.2.5. Divers domaines

Dans ce paragraphe on va présenter en aperçu les différentes valeurs numériques obtenues sur les paramètres du modèles mathématiques de l'équation de Poisson pour une discrétisation de 300 par 300 nœuds. Les domaines considérés sont les figure (5.14), (5.22), (5.24), (5.25), demi cercle de rayon unité et quart de cercle de rayon unité.

5.2.5.1. Domaine de la figure 5.14

La frontière du domaine de la figure (5.14) est donnée comme le montre la figure suivante:



Les équations de l'extrados et intrados sont données par :

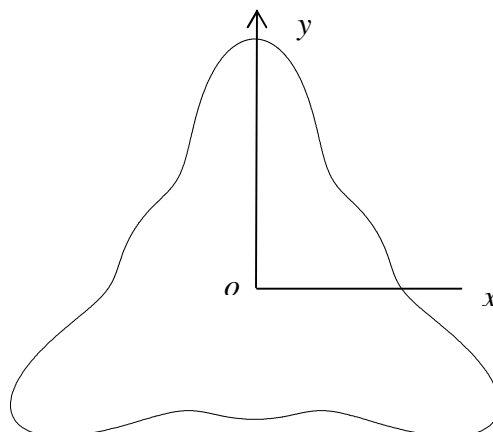
$$y_{extrados}(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + 1 \quad y_{intrados}(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.8)$$

Les résultats des paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

| | |
|---|----------------------------|
| Position du centre de gravité ' G ' par rapport au repère xoy | $x_G=0.5$, $y_G=0.5$ |
| A (Aire) | 1.424409 |
| H | 0.030237 |
| u_{max} | 0.039485 |
| Position (x,y) de u_{max} par rapport au repère xoy | $x=0.28213$ $y=1.29070$ |
| u_{moy} | 0.021228 |

5.2.5.2. Domaine de la figure 5.22

La frontière du domaine de la figure 5.22 est donnée comme le montre la figure suivante :



L'équation de la frontière est choisie maintenant en coordonnées polaires par :

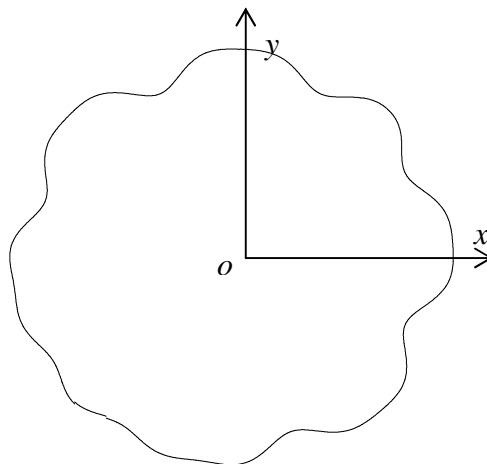
$$r(\theta) = 3 - \sin(3\theta) + \cos(3\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5.9)$$

Les résultats des paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

| | |
|---|-------------------------------|
| Position du centre de gravité ' G ' par rapport au repère xoy | $x_G=0.0$, $y_G=0.0$ |
| A (Aire) | 22.102867 |
| H | 11.735912 |
| u_{\max} | 1.254700 |
| Position (x, y) de u_{\max} par rapport au repère xoy | $x=1.425566$ $y=-0.391335$ |
| u_{moy} | 0.530967 |

5.2.5.3. Domaine de la figure 5.24

La frontière du domaine de la figure 5.24 est donnée comme le montre la figure suivante :



L'équation de la frontière est choisie en coordonnées polaires par :

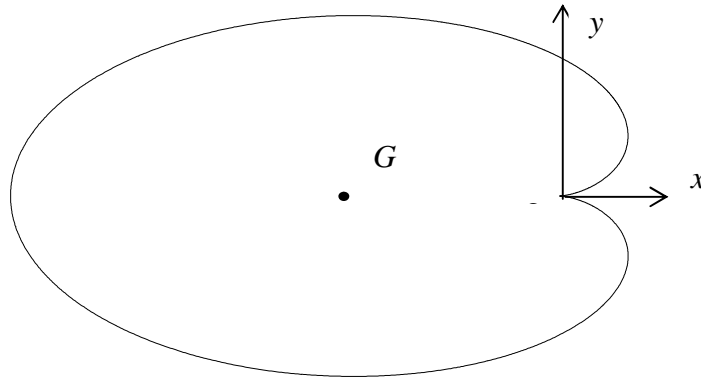
$$r(\theta) = \text{Log} \left(\cos \left(\sin 4\theta \cdot \cos \left(\frac{16}{5} \theta \right) \right) + 2 \right) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5.10)$$

Les résultats des paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

| | |
|---|------------------------------------|
| Position du centre de gravité ' G ' par rapport au repère xoy | $x_G=-0.006333$ $y_G=-0.002711$ |
| A (Aire) | 3.511725 |
| H | 0.461543 |
| u_{\max} | 0.269628 |
| Position (x, y) de u_{\max} par rapport au repère xoy | $x=0.047670$ $y=-0.043356$ |
| u_{moy} | 0.131429 |

5.2.5.4. Domaine de cardioïde de la figure 5.25

La frontière du domaine de la figure 5.25 est donnée comme le montre la figure suivante :



L'équation de la frontière est choisie en coordonnées polaires par :

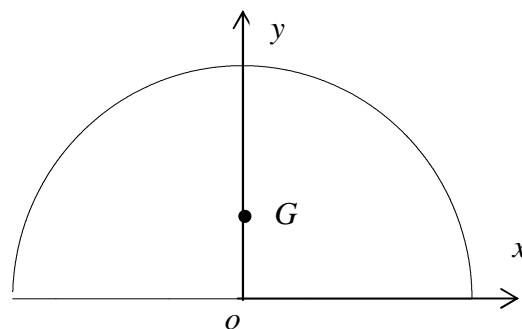
$$r(\theta) = 1 - \cos(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5.11)$$

Les résultats numériques des paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

| | |
|---|------------------------------------|
| Position du centre de gravité ' G ' par rapport au repère xoy | $x_G = -0.833318$ $y_G = 0.0$ |
| A (Aire) | 4.712030 |
| H | 0.781064 |
| u_{\max} | 0.347749 |
| Position (x, y) de u_{\max} par rapport au repère xoy | $x = -0.055511$ $y = -0.022128$ |
| u_{moy} | 0.165759 |

5.2.5.5. Domaine d'un demi cercle

La frontière du domaine d'un demi cercle est donnée comme le montre la figure suivante :



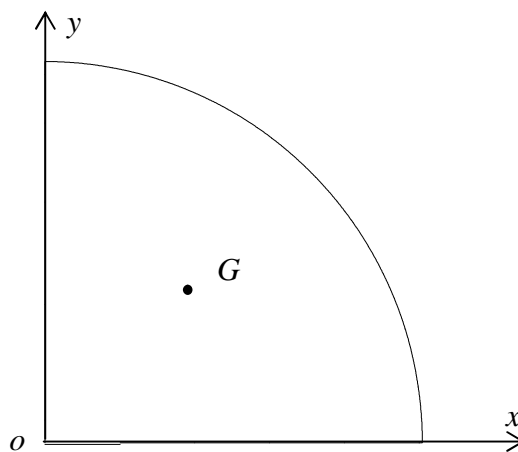
Le rayon du cercle est égal à l'unité

Les résultats numériques des paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

| | |
|---|------------------------------|
| Position du centre de gravité ' G ' par rapport au repère xoy | $x_G=0.0$ $y_G=0.424406$ |
| A (Aire) | 1.5707671 |
| H | 0.074349 |
| u_{\max} | 0.097580 |
| Position (x, y) de u_{\max} par rapport au repère xoy | $x=0.117883$ $y=0.035515$ |
| u_{moy} | 0.047333 |

5.2.5.6. Domaine d'un quart de cercle

La frontière du domaine d'un quart de cercle est donnée comme le montre la figure suivante :



Le rayon du cercle est égal à l'unité

Les résultats numériques des paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

| | |
|---|----------------------------------|
| Position du centre de gravité ' G ' par rapport au repère xoy | $x_G=0.424411$ $y_G=0.424411$ |
| A (Aire) | 0.785392 |
| H | 0.020576 |
| u_{\max} | 0.055087 |
| Position (x, y) de u_{\max} par rapport au repère xoy | $x=0.539361$ $y=0.386129$ |
| u_{moy} | 0.026198 |

CONCLUSION

Le présent travail nous a permis d'exploiter nos connaissances théoriques en éléments finis et son application pour la modélisation de l'équation de Poisson afin de déterminer les résultats des phénomènes physiques qui peuvent être présentés mathématiquement par l'équation de Poisson.

Le cas qu'on a étudié est limité pour les domaines simplement connexes avec les conditions aux limites de type Dirichlet.

Pour ce qui est de l'équation de Poisson, plusieurs phénomènes physiques sont intéressés par les mécaniciens, physiciens et aéronauticiens ont été étudiés implicitement. On a vu dans le chapitre 1 quelques exemples sur l'application de l'équation de Poisson et que la liste reste ouverte.

A partir de ce travail on va éclaircir un peu sur la procédure et la manière de résoudre un tel problème par la méthode des éléments finis, qui reste toujours une méthode très délicate vu l'utilisation intensive de numérique et de l'ordinateur.

L'avantage de cette méthode est qu'elle peut déterminer les résultats de n'importe quelles disciplines où la solution exacte analytique n'existe pas et qu'elle modélise n'importe quels domaines simplement et multi connexes.

Cependant, la comparaison des résultats afin de décider l'exactitude du programme élaboré est faite pour les domaines circulaires, rectangulaires et elliptiques, dont la solution exacte existe.

La chose intéressante dans le programme réalisé est l'optimisation de déclaration des variables et vecteurs et peut résoudre un problème avec une grande discrétisation possible qui dépasse l'ordre des millions, suivant la taille de l'ordinateur disponible.

Un inconvénient dans le programme est qu'il utilise uniquement un seul élément fini de type triangulaire à trois nœuds. On peut faire facilement l'extension du programme afin qu'il utilise d'autres types d'éléments finis.

La résolution du système d'équations obtenus est faite avec la technique des matrices bandes où le stockage de la partie bande supérieures des matrices est considéré dans un

vecteur vu que la matrice de rigidité est symétrique. L'algorithme utilisé est celui de Khaletski conçue spécialement pour la résolution directe des systèmes d'équations.

Espérons bien que notre modeste étude servira aux futurs chercheurs et qu'elle sera comme un outil de base qui facilitera l'amélioration d'autres thèmes de sujets qu'on va proposer ci dessous :

- Refaire le même travail en utilisant des éléments finis triangulaires à 4, 5, 6 et plus de nœuds et même quadrilatères à 4, 8, 9 et plus de nœuds et faire une comparaison entre ces éléments finis de point de vue convergence du problème.
- Résoudre l'équation de Poisson dans des configurations simplement connexes mais avec des conditions aux limites de type Neumann et Cauchy afin de résoudre numériquement le problème de transfert de chaleur dans les aubes et ailettes des turbines.
- Résoudre le même problème mais dans des configurations doublement et multi connexes avec les conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann et Cauchy.
- Etudier le même problème mais sur la base des matrices à stockage aléatoire et résoudre le système d'équations par les méthodes itératives en utilisant par l'exemple l'algorithme de Gauss Seidel accéléré afin de résoudre le problème des zéros qui se trouvent dans la bande de la matrice et qu'on ne peut pas les enlever sur la base des matrices bandes.
- Utiliser la technique de stockage des matrices multi diagonales pour la matrice de rigidité afin d'éliminer les zéros de la bande.
- Résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire par la méthode des éléments finis. L'équation concernée est appelée équation potentiel complète, est une équation de deuxième ordre. Elle modélise l'écoulement autour des configurations aérodynamiques dans le régime transsoniques.

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

| | |
|----------------|--|
| v | Fonction test. |
| \vec{n} | Vecteur unitaire. |
| n_x, n_y | Composantes du vecteur unitaire. |
| ∇ | Opérateur gradient. |
| ∇^2 | Opérateur Laplacien. |
| S_e | L'aire du secteur circulaire. |
| E | Erreur de l'élément. |
| $u(x, y)$ | Fonction inconnue (solution de l'équation différentielle). |
| $\Psi_i(x, y)$ | Fonctions d'interpolations. |
| q_n | Flux de la variable primaire. |
| δ_{ij} | Symbole de Kronecker. |
| (x_j, y_j) | Coordonnées d'un nœud. |
| u_j | La valeur de u au point (x_j, y_j) . |
| f | Deuxième membre de l'équation différentielle. |
| Γ | Frontière du domaine Ω . |
| Γ^e | Frontière d'un élément fini. |
| Ω | Domaine plan. |
| Ω^e | Domaine de l'élément fini. |
| K_{ij} | Les éléments de la matrice de rigidité. |
| $[K]$ | Matrice de rigidité. |
| $\{F\}^e$ | Vecteur force pour l'élément fini. |
| $\{F\}$ | Vecteur force totale du domaine. |
| F_i | Les éléments du vecteur force. |

| | |
|---|---|
| $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ | Constantes pour l'approximation de la fonction $u(x,y)$. |
| $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{00}$ | Les coefficients de l'équation différentielle. |
| $S_{ij}^{11}, S_{ij}^{12}, S_{ij}^{22}, S_{ij}$ | Les éléments des matrices de base. |
| R | Degré du polynôme d'approximation. |
| $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ | Coefficients des fonctions d'interpolations d'un triangle ($i = 1, 2, 3$). |
| ζ, η | Système de coordonnées locale pour un rectangle. |
| a, b | Dimension des cotés d'un rectangle. |
| $[S^{\alpha\beta}], [S]$ | Matrices de base constitutives de la matrice de rigidité ($\alpha=1, 2$), ($\beta=1, 2$). |
| $I_{m,n}$ | Intégrales dans un triangle ($m = 1, 2$), ($n = 1, 2$). |
| I_{10}, I_{01} | Moments statiques. |
| I_{00}, A_e | Aire de la surface d'un triangle. |
| x_G, y_G | Coordonnées du centre de gravité d'un triangle. |
| D_x | La dérivée de la fonction $u(x,y)$ par rapport à x |
| D_y | La dérivée de la fonction $u(x,y)$ par rapport à y |
| B | Largeur de la demi-bande de la matrice de rigidité. |
| B_L | Largeur de la demi-bande donnée par l'élément fini numéro L . |
| BI | Largeur de la demi-bande donnée par un élément fini. |
| $IBAV$ | Valeur de la bande avant l'introduction des conditions aux limites. |
| $IBAP$ | Valeur de la bande après l'introduction des conditions aux limites. |
| NN | Nombre totale de nœuds dans le maillage et Dimension de vecteur $\{vk\}$ nécessaire pour la matrice $[K]$. |
| NET | Nombre totale des éléments finis. |
| $NDDLE$ | Nombre de Degré De Liberté Eliminés. |

| | |
|--------------|---|
| <i>NDDL</i> | Nombre de Degré de Liberté Restant du problème. |
| <i>NZERO</i> | Nombre des zéros qui se trouvent à l'extérieure de la bande. |
| N_x, N_y | Nombre de nœuds suivants l'axes x et y respectivement. |
| η^* | Variable normalisée. |
| P, Q | Paramètres pour le contrôle des points de maillage (Fonction de condensation). |
| S | Variable intermédiaire. |
| ω | Facteur de relaxation utilisé dans l'algorithme de filtrage des nœuds. |
| M | Nombre de nœuds reliés par une arrête d'un triangle avec le nœud considéré. |
| $\{vk\}$ | Vecteur remplaçant la matrice de rigidité. |
| $[L], [H]$ | Matrices triangulaires déterminées par la décomposition de la matrice de rigidité $[K]$. |
| H | Intégrale de surface de la solution u du problème. |
| i, j, k, l | Numéros des nœuds d'un élément fini. |
| t | L'épaisseur de profil d'aile |

INDICES

| | |
|--------------|---|
| A, B, C, D | Points spécifiés sur la frontière du domaine. |
| i, j | Compteur sur les nœuds. |

EXPOSANT

| | |
|----------------|-------------------------------------|
| T | Transposée d'un vecteur ou matrice. |
| (e) | Elément. |
| i, j | Compteur sur les nœuds. |
| <i>nouveau</i> | Nouvelle position. |
| <i>Ancien</i> | Ancienne position. |

APPENDICE B

LISTING DU PROGRAMME DE GENERATION DE MAILLAGE

Le domaine utilisé (choisi dans ce présent listing) est donné par une fonction en coordonnées polaire $r=f(\theta)$. Si nous sommes en présence d'un autre domaine, il suffit uniquement de modifier les fonctions des quatre cotés. Ici Dans le listing, on a pas optimisé le programme pour but de la compréhension rapide.

```

C
C ITYPE : POUR INDIQUER LE TYPE DE L'ELEMENT FINIS UTILISE
C     ITYPE=1 : Elément triangulaire
C     ITYPE=2 : Elément Quadrilataire
C
C     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C     DOUBLE PRECISION
X(1000,1000),Y(1000,1000),XCOTE1(1000),YCOTE1(1000),
+XCOTE2(1000),
+YCOTE2(1000),XCOTE3(1000),YCOTE3(1000),XCOTE4(1000),YCOTE4(1000),XN(1000
,1000),
+YN(1000,1000)
C
C     PI=3.14159265357989
C     NX=50 ; NY=40 ; ITYPE=1 ; NITER=50 ; OMEGA=0.4
C     PAB=1.0 ; QAB=2.0 ; PBC=1.0 ; QBC=2.0
C     PCD=1.0 ; QCD=2.0 ; PDA=1.0 ; QDA=2.0
C     THA=(180+45)*PI/180 ; XA=R(THA)*DCOS(THA) ; YA=R(THA)*DSIN(THA)
C     THB=(360-45)*PI/180 ; XB=R(THB)*DCOS(THB) ; YB=R(THB)*DSIN(THB)
C     THC=(0+45)*PI/180 ; XC=R(THC)*DCOS(THC) ; YC=R(THC)*DSIN(THC)
C     THD=(180-45)*PI/180 ; XD=R(THD)*DCOS(THD) ; YD=R(THD)*DSIN(THD)
C
C     OPEN(UNIT=1,FILE='D_MAILLAGE.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C     OPEN(UNIT=2,FILE='R_MAILLAGE.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C
C     WRITE(1,230)
C     IF(ITYPE.EQ.1) WRITE(1,240) ; IF(ITYPE.EQ.2) WRITE(1,250)
C     WRITE(1,*) ' NX=',NX,' NY=',NY
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'THA=',THA*180/PI,' THB=',THB*180/PI
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'THC=',THC*180/PI,' THD=',THD*180/PI
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'XA=',XA,' YA=',YA
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'XB=',XB,' YB=',YB
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'XC=',XC,' YC=',YC
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'XD=',XD,' YD=',YD
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'PAB=',PAB,' QAB=',QAB
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'PBC=',PBC,' QBC=',QBC
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'PCD=',PCD,' QCD=',QCD
C     WRITE(1,*) ; WRITE(1,*) 'PDA=',PDA,' QDA=',QDA
C
C LA FRONTIÈRE AB DONNEE PAR LE COTE 1
C
C     THAB=THB-THA ; DTHAB=THAB/(NX-1)
C     DO 10 I=1,NX
C     TH1=THA+(I-1)*DTHAB ; THETOIL=(TH1-THA)/(THB-THA)
C     SX=PAB*THETOIL+(1-PAB)*(1-DTANH(QAB*(1-THETOIL)))/DTANH(QAB)
C     TH=THA+SX*(THB-THA)

```

```

        XCOTE1(I)=R(TH)*DCOS(TH) ; YCOTE1(I)=R(TH)*DSIN(TH)
10  CONTINUE
C
C LA FRONTIERE BC DONNEE PAR LE COTE 2
C
        THCB=2*PI-(THB-THC) ; DTHCB=THCB/(NY-1)
        DO 20 J=1,NY
            TH2=THB+(J-1)*DTHCB ; THETOIL=(TH2-THB)/(2*PI+THC-THB)
            SX=PBC*THETOIL+(1-PBC)*(1-DTANH(QBC*(1-THETOIL)))/DTANH(QBC)
            TH=THB+SX*(2*PI-(THB-THC))
            XCOTE2(J)=R(TH)*DCOS(TH) ; YCOTE2(J)=R(TH)*DSIN(TH)
20  CONTINUE
C
C LA FRONTIERE CD DONNEE PAR LE COTE3
C
        THDC=THD-THC ; DTHDC=THDC/(NX-1)
        DO 30 I=1,NX
            TH3=THD-(I-1)*DTHDC ; THETOIL=(TH3-THD)/(THC-THD)
            SX=PCD*THETOIL+(1-PCD)*(1-DTANH(QCD*(1-THETOIL)))/DTANH(QCD)
            TH=THD+SX*(THC-THD)
            XCOTE3(I)=R(TH)*DCOS(TH) ; YCOTE3(I)=R(TH)*DSIN(TH)
30  CONTINUE
C
C LA FRONTIERE DA DONNEE PAR LE COTE 4
C
        THAD=THA-THD ; DTHAD=THAD/(NY-1)
        DO 40 J=1,NY
            TH4=THA-(J-1)*DTHAD ; THETOIL=(TH4-THA)/(THD-THA)
            SX=PDA*THETOIL+(1-PDA)*(1-DTANH(QDA*(1-THETOIL)))/DTANH(QDA)
            TH=THA+SX*(THD-THA)
            XCOTE4(J)=R(TH)*DCOS(TH) ; YCOTE4(J)=R(TH)*DSIN(TH)
40  CONTINUE
C
C REPLISSAGES LES POSITIONS DES COTES DANS LES VECTEURS X ET Y.
C
        DO 50 I=1,NX
            X(I,NY)=XCOTE3(I) ; Y(I,NY)=YCOTE3(I)
            X(I,1)=XCOTE1(I) ; Y(I,1)=YCOTE1(I)
50  CONTINUE
        DO 60 J=1,NY
            X(NX,J)=XCOTE2(J) ; Y(NX,J)=YCOTE2(J)
            X(1,J)=XCOTE4(J) ; Y(1,J)=YCOTE4(J)
60  CONTINUE
C
C DETERMINATION LES ABCISSES DES NEUDS INTERNES.
C
        DO 80 J=2,NY-1
            DXJ=(XCOTE2(J)-XCOTE4(J))/(NX-1)
            DO 70 I=2,NX-1
                X(I,J)=XCOTE4(J)+(I-1)*DXJ
70  CONTINUE
80  CONTINUE
C
C DETERMINATION LES ORDONNEES DES NEUDS INTERNES.
C
        DO 90 I=2,NX-1
            DYI=(YCOTE3(I)-YCOTE1(I))/(NY-1)
            DO 90 J=2,NY-1
                Y(I,J)=YCOTE1(I)+(J-1)*DYI
90  CONTINUE
C
C OPTION FILTRAGE
C
        DO 130 K=1,NITER
            WRITE(*,*) 'K=',K
        DO 110 I=2,NX-1
            DO 100 J=2,NY-1

```

```

SOMEX=X(I-1,J-1)+X(I,J-1)+X(I-1,J)+X(I+1,J)+X(I,J+1)+X(I+1,J+1)
IF(I.EQ.2.AND.J.EQ.NY-1) SOMEX=SOMEX+X(I-1,J+1)
IF(I.EQ.NX-1.AND.J.EQ.2) SOMEX=SOMEX+X(I-1,J-1)
C
XN(I,J)=X(I,J)+OMEGA/6*(SOMEX-6*X(I,J))
IF(I.EQ.2.AND.J.EQ.NY-1) XN(I,J)=X(I,J)+OMEGA/7*(SOMEX-7*X(I,J))
IF(I.EQ.NX-1.AND.J.EQ.2) XN(I,J)=X(I,J)+OMEGA/7*(SOMEX-7*X(I,J))
C
SOMEY=Y(I-1,J-1)+Y(I,J-1)+Y(I-1,J)+Y(I+1,J)+Y(I,J+1)+Y(I+1,J+1)
IF(I.EQ.2.AND.J.EQ.NY-1) SOMEY=SOMEY+Y(I-1,J+1)
IF(I.EQ.NX-1.AND.J.EQ.2) SOMEY=SOMEY+Y(I-1,J-1)
YN(I,J)=Y(I,J)+OMEGA/6*(SOMEY-6*Y(I,J))
IF(I.EQ.2.AND.J.EQ.NY-1) YN(I,J)=Y(I,J)+OMEGA/7*(SOMEY-7*Y(I,J))
IF(I.EQ.NX-1.AND.J.EQ.2) YN(I,J)=Y(I,J)+OMEGA/7*(SOMEY-7*Y(I,J))
100 CONTINUE
110 CONTINUE
DO 120 I=2,NX-1
DO 120 J=2,NY-1
X(I,J)=XN(I,J) ; Y(I,J)=YN(I,J)
120 CONTINUE
130 CONTINUE
C
DO 150 J=1,NY
IRES=MOD(J,2)
IF(IRES.EQ.1) THEN
IDEBUT=1 ; IFIN=NX ; IPAS=1
ENDIF
IF(IRES.EQ.0) THEN
IDEBUT=NX ; IFIN=1 ; IPAS=-1
ENDIF
C
DO 140 I=IDEBUT,IFIN,IPAS
140 WRITE(2,*) X(I,J),Y(I,J)
150 CONTINUE
C
IRES=MOD(NY,2)
IF(IRES.EQ.1) THEN
DO 160 I=NX-1,1,-1
160 WRITE(2,*) X(I,NY),Y(I,NY)
ENDIF
C
DO 180 I=1,NX
IRES=MOD(I,2)
C
IF(IRES.EQ.0) THEN
JDEBUT=1 ; JFIN=NY ; JPAS=1
ENDIF
C
IF(IRES.EQ.1) THEN
JDEBUT=NY ; JFIN=1 ; JPAS=-1
ENDIF
C
DO 170 J=JDEBUT,JFIN,JPAS
170 WRITE(2,*) X(I,J),Y(I,J)
180 CONTINUE
C
IRES=MOD(NX,2)
IF(IRES.EQ.0) THEN
DO 190 J=NY,1,-1
190 WRITE(2,*) X(NX,J),Y(NX,J)
ENDIF
IF(ITYPE.EQ.2) GOTO 225
WRITE(2,*) X(NX-1,2),Y(NX-1,2) ; WRITE(2,*) X(NX-2,1),Y(NX-2,1)
C
JPAS=1
DO 220 I=NX-2,-(NY-4),-1

```

```

      IDEBUT1=1 ; JDEBUT1=1-I+1 ; IDEBUT2=1+I-1 ; JDEBUT2=1
      IFIN1=NX ; JFIN1=NX-I+1 ; IFIN2=NY+I-1 ; JFIN2=NY
C
      IF(IDEBUT1.GE.1.AND.JDEBUT1.GE.1) THEN
          IDEBUT=IDEBUT1 ; JDEBUT=JDEBUT1
      ENDIF
C
      IF(IDEBUT2.GE.1.AND.JDEBUT2.GE.1) THEN
          IDEBUT=IDEBUT2 ; JDEBUT=JDEBUT2
      ENDIF
C
      IF(IFIN1.LE.NX.AND.JFIN1.LE.NY) THEN
          IFIN=IFIN1 ; JFIN=JFIN1
      ENDIF
C
      IF(IFIN2.LE.NX.AND.JFIN2.LE.NY) THEN
          IFIN=IFIN2 ; JFIN=JFIN2
      ENDIF
C
      IF(JPAS.EQ.1) THEN
          J=JDEBUT ; K=0
200      WRITE(2,*) X(IDEBUT+K,J),Y(IDEBUT+K,J)
          K=K+1 ; J=J+1 ; IF(J.LE.JFIN) GOTO 200
      ENDIF
C
      IF(JPAS.EQ.-1) THEN
          J=JFIN ; K=0
210      WRITE(2,*) X(IFIN-K,J),Y(IFIN-K,J)
          K=K+1 ; J=J-1 ; IF(J.GE.JDEBUT) GOTO 210
      ENDIF
C
      JPAS=-1*JPAS
220      CONTINUE
C
      WRITE(2,*) X(2,NY-1),Y(2,NY-1) ; WRITE(2,*) X(1,NY),Y(1,NY)
225      CLOSE(2)

      STOP
230      FORMAT(5X,'LE DOMAINE EST UN CERCLE'//)
240      FORMAT(5X,'LE MAILLAGE EST DE TYPE : TRIANGULAIRE'//)
250      FORMAT(5X,'LE MAILLAGE EST DE TYPE : QUADRILATAIRE'//)
      END
C
C LA FONCTION DE LA FRONTIERE EXTERNE (ICI EST DONNEE EN COORDONNEES
C POLAIRE)
C
      DOUBLE PRECISION FUNCTION R(TH)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      R=DLOG(DCOS(DSIN(4*TH)*DCOS(3.2*TH))+2)
      RETURN
      END

```

APPENDICE C

RESUME DU LISTING DU PROGRAMME DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DE POISSON

Ici dans le listing, on a pas optimisé le programme pour but de la comprehension rapide. La partie concernant sur le maillage a été enlevée.

```

C
C RESOLUTION DE L'EQUATION DE POISSON AVEC CONDITIONS AUX LIMITES
C DE TYPE DIRICHLET (ZERO A LA FRONTIERE)
C
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      COMMON /BK1/ NUMNT
      COMMON /BK2/ X,Y
      COMMON /BK3/ AKE,AFE
      COMMON /BK4/ IBAP,NDDL
      COMMON /BK5/ AK,AF,U
      DOUBLE PRECISION AKE(3,3),AFE(3)
      DOUBLE PRECISION X(250000),Y(250000),AF(250000),U(250000),
+AK(12387725)
      INTEGER NUMNT(500000,3),ICL(250000),NMAT(250000)
      OPEN(UNIT=1,FILE='DPoisson.DAT',STATUS='UNKNOWN')
      OPEN(UNIT=2,FILE='RPoisson.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C
      NX=20 ; NY=20 ; R=1.00 ; NITER=0 ; OMEGA=0.1
      NN=NX*NY ; NE=(NX-1)*(NY-1)*2
C
C REEMPLISSAGE LE VECTEUR { ICL } DE L'INDICATION DES CONDITIONS
C AUX LIMITES DES NOEUDS.
C
      DO 10 I=1,NN
10      ICL(I)=0
C
      WRITE(1,*)
      DO 30 J=2,NY-1
          DO 20 I=2,NX-1
              L=(J-1)*NX+I ; ICL(L)=1
20      CONTINUE
30      CONTINUE
C
C REEMPLISSAGE LE VECTEUR ' NUMNT ' POUR INDIQUER LES NOEUDS DE CHAQUE ELEMENT.
C
      WRITE(1,*) 'LE VECTEUR NUMNT ' ; WRITE(1,*)
      L=1
      DO 50 J=1,NY-1
          DO 40 I=1,NX-1
              I1=(J-1)*NX+I ; I2=I1+1 ; I3=J*NX+I ; I4=I3+1
              NUMNT(L,1)=I1 ; NUMNT(L,2)=I4 ; NUMNT(L,3)=I3
              NUMNT(L+1,1)=I1 ; NUMNT(L+1,2)=I2 ; NUMNT(L+1,3)=I4
              L=L+2
40      CONTINUE
50      CONTINUE
C
C POUR LE QUADRILATERE DU BAS DROITE ON A
C
      I=NX-1 ; J=1 ; L=2*(NX-1)-1
      I1=I ; I2= I1+1 ; I3=J*NX+I ; I4=I3+1
      NUMNT(L,1)=I1 ; NUMNT(L,2)=I2 ; NUMNT(L,3)=I3

```

```

      NUMNT(L+1,1)=I2 ; NUMNT(L+1,2)=I4 ; NUMNT(L+1,3)=I3
C
C POUR LE QUADRILATERE DU HAUT GAUCHE ON A
C
      I=1 ; J=NY-1 ; L=NE-2*(NX-1)+1
      I1=(J-1)*NX+I ; I2= I1+1 ; I3=J*NX+I ; I4=I3+1
      NUMNT(L,1)=I1 ; NUMNT(L,2)=I2 ; NUMNT(L,3)=I3
      NUMNT(L+1,1)=I2 ; NUMNT(L+1,2)=I4 ; NUMNT(L+1,3)=I3
C
      WRITE(1,*)
C
C DETERMINATION L'AIRES TOTALE ' A ' ET LA POSITION DU CENTRE
C DE GRAVITE ' XG , YG ' DU DOMAINE.
C
      ATOTALE=0.0 ; SX=0.0 ; SY=0.0
      DO 60 L=1,NE
        I1=NUMNT(L,1) ; I2=NUMNT(L,2) ; I3=NUMNT(L,3)
        X1=X(I1) ; Y1=Y(I1)
        X2=X(I2) ; Y2=Y(I2)
        X3=X(I3) ; Y3=Y(I3)
        ATRI=0.5*(X1*(Y2-Y3)+X2*(Y3-Y1)+X3*(Y1-Y2))
        XGT=(X1+X2+X3)/3 ; YGT=(Y1+Y2+Y3)/3
        ATOTALE=ATOTALE+ATRI
        SX=SX+YGT*ATRI ; SY=SY+XGT*ATRI
60      CONTINUE
      XG=SY/ATOTALE ; YG=SX/ATOTALE
      WRITE(1,320) ATOTALE ; WRITE(1,330) XG,YG ; WRITE(1,*)
C
C REPOSITIONNEMENT LES NOEUDS DU MAILLAGE PAR RAPPORT AU NOUVEAU REPERE
C PASSANT PAR LE CENTRE DE GRAVITE
C
      DO 70 I=1,NX
        DO 70 J=1,NY
          L=(J-1)*NX+I ; X(L)=X(L)-XG ; Y(L)=Y(L)-YG
70      CONTINUE
C
C DETERMINATION LEES NOMBRE ' NDDLE ' ET ' NDDLRL '
C
      NDDLE=0
      DO 80 I=1,NN
        IF(ICL(I).EQ.0) NDDLE=NDDLE+1
80      CONTINUE
      NDDLRL=NN-NDDLE
C
C DETERMINATION LA VALEUR DE LA BANDE ' IBAV ' AVANT L'INTRODUCTION
C DES CONDITIONS AUX LIMITES
C
      IBAV=0
      DO 90 L=1,NE
        IP=MIN(NUMNT(L,1),NUMNT(L,2),NUMNT(L,3))
        IG=MAX(NUMNT(L,1),NUMNT(L,2),NUMNT(L,3))
        IBB=IG-IP+1
        IF(IBB.GT.IBAV) IBAV=IBB
90      CONTINUE
C
C DETERMINATION LA VALEUR DE LA DEMI BANDE ' IBAP ' APRES L'INTRODUCTION
C DES CONDITIONS AUX LIMITES
C
      IBAP=0
      DO 110 I=1,NN
        IF(ICL(I).EQ.0) GOTO 110
        NPCNN=I
        NDCNN=NPCNN+IBAV-1 ; IF(NDCNN.GT.NN) NDCNN=NN
        IBB=0
        DO 100 J=NPCNN,NDCNN

```



```

        IF(ICL(J).EQ.1) IBB=IBB+1
100    CONTINUE
        IF(IBB.GT.IBAP) IBAP=IBB
110    CONTINUE
        NCASE=IBAP*(2*NDDLRL-IBAP+1)/2
C
        WRITE(1,*) 'NN=',NN          ; WRITE(1,*) 'NE=',NE
        WRITE(1,*) 'NDDLE=',NDDLE ; WRITE(1,*) 'NDDLRL=',NDDLRL
        WRITE(1,*) 'IBAV=',IBAV    ; WRITE(1,*) 'IBAP=',IBAP
        WRITE(1,*) 'NCASE=',NCASE ; WRITE(1,*)
C
C INITIALISATION LA MATRICE ' AK ' ET LE VECTEUR ' AF ' GLOBALES A ZERO
C
        DO 120 I=1,NCASE
120    AK(I)=0.0
        DO 130 I=1,NDDLRL
130    AF(I)=0.0
C
C REMPLISSAGE LES NUMEROS DES NOEUDS DE LASOLUTION ' U ' DE PROBLEME
C
        J=1
        DO 140 I=1,NN
            IF(ICL(I).EQ.0) GOTO 140
            NMAT(J)=I ; J=J+1
140    CONTINUE
C
C ASSEMBLAGE LES ELEMENTS FINIS DU MAILLAGE ET L'OBTENTION DE LA MATRICE
C AK ET VECTEUR AF GLOBALES.
C
        DO 210 L=1,NE
            IF(MOD(L,1000).EQ.0) WRITE(*,*) 'L=',L
            CALL ELEMENT_T3N(L)
C
            DO 200 I=1,3
                NUMI=NUMNT(L,I)
                IF(ICL(NUMI).EQ.0) GOTO 200
                K=1
150            IF(NMAT(K).EQ.NUMI) GOTO 160
                K=K+1
                GOTO 150
160            IPOS=K
C
                AF(IPOS)=AF(IPOS)+AFE(I)
C
                DO 190 J=1,3
                    NUMJ=NUMNT(L,J)
                    IF(ICL(NUMJ).EQ.0) GOTO 190
                    IF(NUMJ.GT.NUMI) GOTO 190
                    K=1
170                IF(NMAT(K).EQ.NUMJ) GOTO 180
                    K=K+1
                    GOTO 170
180                JPOS=K
C
                    CALL TRANS(IPOS,JPOS,KPOS)
                    AK(KPOS)=AK(KPOS)+AKE(I,J)
190            CONTINUE
200            CONTINUE
210            CONTINUE
C
                DO 220 I=1,NN
220            U(I)=0.0
C
                CALL SYSTEME
C

```

```

C DETERMINATION LA VALEUR ET LA POSITION DE LA SOLUTION MAXIMALE DE U
C EN VALEUR ABSOLUE
C
      UMAX=0
      DO 230 I=1,NDDL
        IF(DABS(U(I)).GT.UMAX) THEN
          UMAX=U(I)
          IPOSU=I
        ENDIF
230    CONTINUE
C
C POSITION DE LA VALEUR MAXILAME DE U PAR RAPPORT AU REPERE PASSANT PAR
C LE CENTRE DE GRAVITE
C
      XUMAX=X(IPOSU) ; YUMAX=Y(IPOSU)
      WRITE(1,340) XUMAX,YUMAX,UMAX
C
      DO 240 I=NDDL,1,-1
        U(NMAT(I))=U(I)
        IF(NMAT(I).NE.I) U(I)=0.0
240    CONTINUE
C
      WRITE(2,*)
      DO 250 L=1,NN
        J=L/NX+1 ; I=MOD(L,NX)
        IF(I.EQ.0) THEN
          I=NX
          J=J-1
        ENDIF
250    WRITE(2,310) I,J,X(L),I,J,Y(L),U(L)
C
C DETERMINATION L'INTEGRALE DE SURFACE DE LA SOLUTION U DE PROBLEME
C
      H=0.0
      DO 260 L=1,NE
        I1=NUMNT(L,1) ; I2=NUMNT(L,2) ; I3=NUMNT(L,3)
        X1=X(I1) ; Y1=Y(I1)
        X2=X(I2) ; Y2=Y(I2)
        X3=X(I3) ; Y3=Y(I3)
        DET=X1*(Y2-Y3)+X2*(Y3-Y1)+X3*(Y1-Y2)
        H=H+(DET/2)*(U(I1)+U(I2)+U(I3))
260    CONTINUE
      H=H/3.0
      WRITE(1,350) H
C
C DETERMINATION LA VALEUR MOYENNE DE LA SOLUTION U DU PROBLEME
C
      UMOYENNE=H/ATOTALE ; WRITE(1,360) UMOYENNE
      STOP
270    FORMAT(5X,'LE DOMAINE EST UN CERCLE'//)
280    FORMAT(5X,'LE MAILLAGE EST DE TYPE : TRIANGULAIRE'//)
290    FORMAT(5X,I3,4X,I3,5X,I3,5X,F12.5,5X,F12.5)
300    FORMAT(5X,3(F10.5,4X),3X,F10.5)
310    FORMAT(5X,'X(',I3,',',I3,')=',F10.5,3X,'Y(',I3,',',I3,')=',F10.5,
+3X,'U=',F10.5)
320    FORMAT(5X,'ATOTALE=',F30.20/)
330    FORMAT(5X,'XG=',F30.20,5X,'YG=',F30.20/)
340    FORMAT(5X,'XUMAX=',F20.10,5X,'YUMAX=',F20.10,5X,'UMAX=',F20.10/)
350    FORMAT(5X,'H=',F30.20/)
360    FORMAT(5X,'UMOYENNE=',F30.20/)
      END
C
C SOUS PROGRAMME PERMETTANT LA DETERMINATION LA MATRICE DE RIGIDITE
C AKE et LE VECTEUR FORCE AFE DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE CONSIDERE.
C

```

```

SUBROUTINE ELEMENT_T3N(L)
COMMON /BK1/ NUMNT
COMMON /BK2/ X,Y
COMMON /BK3/ AKE,AFE
DOUBLE PRECISION AKE(3,3),AFE(3),ALPHA(3),BETA(3),GAMA(3)
DOUBLE PRECISION X(250000),Y(250000)
INTEGER NUMNT(500000,3)
C
DO 10 I=1,3
  J=I+1 ; IF(J.GT.3) J=J-3
  K=J+1 ; IF(K.GT.3) K=K-3
  ALPHA(I)=X(NUMNT(L,J))*Y(NUMNT(L,K))-X(NUMNT(L,K))*Y(NUMNT(L,J))
  BETA(I)=Y(NUMNT(L,J))-Y(NUMNT(L,K))
  GAMA(I)=X(NUMNT(L,K))-X(NUMNT(L,J))
10 CONTINUE
AE=0.5*(ALPHA(1)+ALPHA(2)+ALPHA(3))
C
DO 30 I=1,3
  DO 20 J=1,3
    AKE(I,J)=(BETA(I)*BETA(J)+GAMA(I)*GAMA(J))/AE/4.0
20 CONTINUE
AFE(I)=AE/3.0
30 CONTINUE
RETURN
END
C
C RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS SOUS LA BASE DE MATRICE BANDE
C LE STOCKAGE CHOISI EST DE FORME COLONNE
C
SUBROUTINE SYSTEME
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK4/ IBAP,NDDL
COMMON /BK5/ AK,AF,U
DOUBLE PRECISION AK(12387725),AF(250000),U(250000)
C
C FACTORISATION DE LA MATRICE AK. ON STOCKE LA MATRICE AL DANS AK
C
DO 30 I=1,IBAP
  DO 20 J=2,I
    SOME=0.0
    DO 10 K=1,J-1
      CALL TRANS(I,K,IK) ; CALL TRANS(J,K,JK) ; CALL TRANS(K,K,KK)
      SOME=SOME+AK(IK)*AK(JK)/AK(KK)
10 CONTINUE
    CALL TRANS(I,J,IJ) ; AK(IJ)=AK(IJ)-SOME
20 CONTINUE
30 CONTINUE
C
DO 60 I=IBAP+1,NDDL
  DO 50 J=I-IBAP+1,I
    SOME=0.0
    DO 40 K=I-IBAP+1,J-1
      CALL TRANS(I,K,IK) ; CALL TRANS(J,K,JK) ; CALL TRANS(K,K,KK)
      SOME=SOME+AK(IK)*AK(JK)/AK(KK)
40 CONTINUE
    CALL TRANS(I,J,IJ) ; AK(IJ)=AK(IJ)-SOME
50 CONTINUE
60 CONTINUE
C
C DETERMINATION LE VECTEUR {Y}. LE STOCKAGE SE FAIT DANS LE VECTEUR U.
C
U(1)=AF(1)/AK(1)
DO 80 I=2,IBAP
  SOME=0.0
  DO 70 K=1,I-1

```

```

        CALL TRANS(I,K,IK) ; SOME=SOME+AK( IK)*U(K)
70      CONTINUE
        CALL TRANS(I,I,II) ; U(I)=(AF(I)-SOME)/AK(II)
80      CONTINUE
C
      DO 100 I=IBAP+1,NDDLR
        SOME=0.0
        DO 90 K=I-IBAP+1,I-1
          CALL TRANS(I,K,IK) ; SOME=SOME+AK( IK)*U(K)
90      CONTINUE
        CALL TRANS(I,I,II) ; U(I)=(AF(I)-SOME)/AK(II)
100     CONTINUE
C
C DETERMINATION LE VECTEUR {U}.
C
      DO 120 I=NDDLR-1,NDDLR-IBAP+1,-1
        SOME=0.0
        DO 110 K=I+1,NDDLR
          CALL TRANS(K,I,KI) ; SOME=SOME+AK(KI)*U(K)
110     CONTINUE
        CALL TRANS(I,I,II) ; U(I)=U(I)-SOME/AK(II)
120     CONTINUE
C
      DO 140 I=NDDLR-IBAP,1,-1
        SOME=0.0
        DO 130 K=I+1,I+IBAP-1
          CALL TRANS(K,I,KI) ; SOME=SOME+AK(KI)*U(K)
130     CONTINUE
        CALL TRANS(I,I,II) ; U(I)=U(I)-SOME/AK(II)
140     CONTINUE
      RETURN
      END
C
C SUBROUTINE POUR FAIRE LE TRANSFERT ENTRE MATRICE ET VECTEUR
C
      SUBROUTINE TRANS(I,J,L)
      COMMON /BK4/ IBAP,NDDLR
      IF(I.LE.IBAP) L=J+I*(I-1)/2
      IF(I.GT.IBAP) L=IBAP*(IBAP+1)/2+(I-1-IBAP)*IBAP+(J+IBAP-I)
      RETURN
      END

```

REFERENCES

1. Fletcher C. A. J., 'Computational Techniques for Fluid Dynamics,' Volume II, Specific Techniques for Different Flow Categories, Springer-Verlag, 1988, Austria.
2. Imbert J. F., 'Analyse des Structures par Eléments Finis,' 3^{ème} Edition, Sup'Aéro, Cepadues-Editions, 1991, France.
3. Anderson J. Jr., "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, 1982.
4. Hoff N. J. 'Analysis of Structures'. John Wiley and Sons Edition, New York, 1956.
5. Hughes W. F. and Gaylord E. W. 'Basic Equations of Engineering Science,' Schaums Outline serie. Mc Graw-Hill Book Company, 1964.
6. Ladyzenkaja O. A. and Ural'ceva N. N., 'Equations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique,' Dunod, Paris, 1988.
7. Gilbarg D. and Trudinger N. S., 'Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,' Springer, Berlin, 1977.
8. Miranda S., 'Partial Differential Equations of Elliptic Type,' 2nd edition, Springer, Berlin, 1970.
9. Habashi W. G., 'A Finite Element Approach to Subsonic Aerodynamics,' International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, PP. 665-679, 1998.
10. Kardestuncer H. et al, 'Finite Element Handbook,' McGraw-Hill Book Company, 2010, USA.
11. Reddy J. N., 'An Introduction to the Finite Element Method,' Edition Mc-Graw Hill Book Company, 2007.
12. Aziz A. K., 'The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application to Partial Differential Equations,' Academic Press, New York, 1989.
13. Khenane A. 'Méthodes des éléments finis, énoncé des principes de base,' Edition OPU, Algérie, 2007.

14. Zinkiewicz O. C. 'The Finite Element Method in Engineering Science' 2nd Edition McGRAW-Hill, London, 1984.
15. Masatake M. 'The Finites Elements Method and Its Application,' Mac Millan publishing company, New York, U.S.A, 1986.
16. Bathe K. J., 'Finite Element Procedures in Engineering Analysis,' Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
17. Cook R. D., 'Concepts and Applications of Finite Element Analysis,' 2nd edition, John Wiley and Sons., New York, 1981.
18. Gallagher R. H., 'Finite Element Analysis Fundamentals,' Prentice-Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
19. Zebbiche T., 'Eléments Finis', Cours 4^{ème} Année Ingénieur Aéronautique, Option Structure, Département d'Aéronautique, Université SAAD Dahleb de Blida, 2010.
20. Demidovitch B. et Marron I., 'Eléments de Calcul Numérique,' Edition Mir, Moscou, 1987.
21. Raltson, A. and Rabinowitz, A., "A First Course in Numerical Analysis", McGraw Hill Book Company, 2005.
22. Irons B. and Ahmed S., 'Techniques of Finite Elements,' John Wily and Sons., New York, 1990.
23. Boumahrat M. et Gourdin A. 'Méthodes Numérique Appliquées,' Edition OPU, Algérie, 1983.
24. Gouri D. et Touzot G. 'Une présentation de méthode des éléments finis,' Université Laval, Moline S. A. Editeur, Paris, 1999.
25. Schechter M., 'Modern Methods in Partial Differential Equations: An Introduction,' McGraw-Hill, New York, 1977.
26. Amtout L., 'Analyse Numérique,' Cours Première Année Magister en Aéronautique, Département d'Aéronautique, Université SAAD Dahleb de Blida, 2011.

27. Schwarz H. R. and Rutishauser H., 'Numerical Analysis of Symmetric Matrices,' English edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2006.
28. Forsythe G. and Moler C. B., 'Computer Solution of Linear Algebraic Systems,' Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1993.
29. Kardestuncer H., 'Elementary Matrix Analysis of Structures,' McGraw-Hill, New York, 1999.
30. Pissantzky S., 'Sparse Matrix Technology,' Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1998.
31. Argyris J. H., 'Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis,' Pergamon Press: London, 1964.
32. Barker V. A., 'Sparse Matrix Techniques,' Lecture Notes in Mathematics N° 572. Springer-Verlag: Berlin, 1989.
33. Bunch J. R. and Parlett B. N., 'Direct methods for solving symmetric indefinite systems of linear equations,' SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 8, PP. 639-655, 1982.
34. Duff I. S., 'Recent developments in the solution of large sparse linear equations,' In Glowinski and Lions, PP. 407-426, 1980.
35. Stewart G. W., 'Introduction to Matrix Computations,' Academic Press: New York, 1987.
36. VonFuchs G., Roy J. R. and Schrem E., 'Hypermatrix solution of large sets of symmetric positive definite linear equations,' Comput. Meth. Appl. Eng., Vol. 1, PP. 197-216, 1979.
37. Zienkiewicz O. C., 'The Finite Element Method,' McGraw-Hill: London, 1977.
38. Denke P. H., 'A matrix method of structural analysis,' Second National Congress of Applied Mechanics, ASME, June 1999.
39. Bathe K. J. and Wilson E. L., 'Numerical methods in finite element analysis,' Prentice Hall, 2001.

40. Vichnevetsky R. and Stepleman A., 'Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations,' III. Publication, IMAGE, 1979.
41. Thompson J. F., Bharat S. and Weatherill N. P., 'Handbook of Grid Generation,' CRC Press, USA, 2008.
42. Trefethen L. N., 'Numerical Computation of the Schwarz-Christoffel Transformation,' Stanford University Computer Science Report, STAN-CS-85-710, 1985.
43. Sadek E., 'A Scheme for the Automatic Generation of Triangular Finite Elements,' International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, PP. 1813-1822, 1994.
44. Weatherill N. P., 'A method for generating irregular computational grids in multy connected planar domain,' International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, PP. 181-197, 1993.
45. Strang A.A. G. 'An Analysis of the Finite Element method,' Wellesley- Cambridge Press, Wellesley, 1973.
46. Bramble J. H. and Zlamal M., 'Triangular Elements in the Finite Element Methods,' Mathematical Computation, Vol. 24, PP. 809-820, 2000.
47. Topping B. H. V., Muylle J. , Ivanyi P., Putanowicz R. and Cheng B., 'Finite Element Mesh Generation,' Saxe Coburg Publications, Hardback, USA, 2004.
48. Rosen R., 'Matrix Bandwidth Minimization,' Proceedings of the 23rd National Conference, Association for Computing Machinery, Brandon Systems Press, Princeton, N. J., 1989.
49. Always G. G. and Martin D. W., 'An algorithm for reducing the bandwidth of a matrix of symmetric configuration,' Computer Journal, Vol. 8, PP. 264-272, 1988.
50. Arany I., Smyth W. F. and Szola L., 'An improved method for reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices,' In Proceeding of the IGFIP Conference (Ljubliana, Yugoslavia), Booklet TA-1, PP. 6-10. North Holland: Amsterdam, 1986.
51. Brayton R. K., Gustavson F. G. and Willoughby R. A., 'Some results on sparse matrices,' Math. Comput., Vol. 24, PP. 937-954, 1970.

52. Cheng K. Y., 'Note on minimizing the bandwidth of sparse symmetric matrices,' *Computing*, Vol. 11, PP. 27-30, 1985.
53. Cheng K. Y., 'Minimizing the bandwidth of sparse symmetric matrices,' *Computing*, Vol. 11, PP. 103-110, 1985.
54. Henry R. G., 'Algorithm for Matrix Bandwidth Reduction,' *Proceedings of the American Society of Civil Engineering*, PP. 203-214, 1989.
55. Perzemieniecki J. S. 'Theory of Matrix Structural Analysis' McGraw-Hill, New York, 1985.
56. Brezis H., 'Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications,' Masson, Paris, 1983.
57. Irons B. M. and Zienkiewicz O. C. 'The Isoparametric Finite Element System—a new concept in Finite Element Analysis,' *Proceedings, conference on recent advances in stress analysis*. Royal Aeronautical Society, London, 1968.
58. Cavendish J. C., 'Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method,' *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, PP. 679-696, 1979.
59. Weatherill N. P., 'Delaunay Triangulation in Computational Fluid Dynamics,' *Computers Math. Appli*, Vol. 24, N° 5/6, PP. 129-150, 1992.
60. Stroud, A. H. and Secrest, D. H., "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966.
61. Ralston, A., "A Family of Quadrature Formulas Which Achieve High Accuracy in Composite Rules," *J. Ass. Comput. Mach.*, Vol. 6, pp. 384-394, 1959.
62. Wilson E. L., Bathe K. J. and Doherty W. P., 'Direct solution of large systems of linear equations,' *Computers and Structures*, Vol. 4, PP. 363-372, 1984.
63. Always G. G. and Martin D. W., 'An Algorithm for Reducing the Bandwidth of a Matrix of Symmetrical Configuration,' *Computer Journal*, Vol. 8, 1979.