

Université SAAD DAHLEB de Blida

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
 Département d'Aéronautique



MEMOIRE DE MAGISTER
 EN
 AERONAUTIQUE

Présentée par :

M^r Yous Imad



Thème :

Simulation des Grandes Echelles de l'Ecoulement
 Instationnaire Turbulent autour d'un Profil d'Aile
 Oscillant en Configuration de Décrochage

Soutenue le :

DEVANT LE JURY D'EXAMEN :

| | | |
|--------------|----------------------------------|--|
| Président : | M^r S. BOUKRAA | Maître de conférences, université de Blida |
| Rapporteur : | M^r T. REZZOUG | Maître de conférences, université de Blida |
| Examineurs : | M^r L. AMTOUT | Chargé de cours, université de Blida |
| | M^r M. BOUNEDER | Chargé de cours, université de Blida |
| | M^r R. HAUI | Maître de conférences, USTHB |

Résumé

Cette thèse porte sur la simulation numérique d'un écoulement externe incompressible, instationnaire et turbulent à l'aide de la Simulation des Grandes Echelles (SGE). Dans cette approche, les grandes échelles énergétiques et instationnaires de l'écoulement sont calculées, tandis que les petites échelles sont modélisées.

L'objectif de ce travail, est d'analyser les potentialités de la SGE pour le calcul d'écoulements périodiques en géométrie 3D en vue d'applications aux pales de rotors d'hélicoptères.

Le cas d'étude retenu pour la validation de la méthodologie est l'écoulement autour d'un profil d'aile Naca0012 en configurations de décrochage statique et dynamique pour lequel il existe des résultats statistiques et expérimentaux. L'écoulement présente des phénomènes physiques complexes caractérisés par de large décollement, et de lâcher de tourbillons. La SGE est obtenue à partir d'un modèle de sous maille de Smagorinsky modifié près de la paroi. La discrétisation temporelle des équations écrites en vitesses contravariantes dans un système de coordonnées curvilignes est réalisée par un schéma à pas fractionnaires implicite d'ordre deux tandis que l'intégration spatiale suivant une cellule décalée est accomplie par la technique des volumes finis.

La SGE a permis d'obtenir des informations instationnaires sur l'écoulement, et de mettre en évidence la formation et le lâcher de tourbillons autour du profil d'aile. La solution instationnaire est différente de la solution stationnaire RANS obtenue avec une modélisation statistique classique et montre la déstabilisation du décollement au cours du temps. Les résultats de la SGE obtenus sur la pression, les profils de la vitesse moyenne et les tensions de Reynolds sont discutées et comparées aux résultats expérimentaux et statistiques, obtenus avec le modèle $k-\varepsilon$.

Abstract

A realistic 3D external, unsteady, turbulent and incompressible flow was simulated using the Large Eddy Simulation (LES).

The selected test-case was a 3D airfoil. Indeed there were available experimental results and numerical simulations using RANS approach that could be used for comparisons with our simulation. Also this configuration contained the main physical phenomena encountered around rotors of helicopter.

The main aerofoil geometry examined is the Naca0012. Of particular interest is the prediction of maximum lift and stall on aerofoil, leading to a large separation and vortex shedding. In the LES approach, the large unsteady and energetic scales are calculated. The contribution of the unresolved small scales is modelled using the Smagorinsky modified model. Time integration of the curvilinear equations in contravariant velocity form is performed by a second order implicit fractional step method. The spatial discretization is obtained by a finite volume schema on a structured staggered grid.

The LES of such flow has given some interesting unsteady results. The temporal evolution of the turbulent eddies, convected by the mean flow, has been observed. The large separation became unstable and the vortex shedding were captured by the LES. The methodology was then validated by comparing our results on the pressure, the mean velocity and the Reynolds stress tensor to the numerical results given by the statistical modelisation of $k-\varepsilon$.

خلاصة

إن هذه الأطروحة تحمل على تصوير عددي لتدفق خارجي مائع غير ضغوطى، ورش في حالة غير مستقرة عن طريق حسابات عددية للجسيمات الكبيرة (ت ج ك). و من أجل هذا المبتغى، نقوم بمتابعة تلك الجسيمات الكبيرة الطاقية والغير مستقرة للتدفق بحساب رقمي، فيما نكتفي بتمثيل حركية الجسيمات الأصغر منها بنموذج.

هدف هذا العمل هو تحليل قدرة طريقة تصوير الجسيمات الكبيرة على حساب سيلان دوري في هندسة ثلاثية الأبعاد من أجل تطبيقها على مروحة دوار.

الحالة المدروسة لتسليم بهذه المنهجية هي التدفق المائع حول مقطع جانبي لجناح Naca0012 في شكل إنزال اعتدالي و حركي والذي تتواجد له نتائج إحصائية وتجريبية. يظهر هذا التدفق مظاهر فيزيائية معقدة تتميز بإنفكاك عريض و إطلاق لدوامات.

حصلنا طريقة (ت ج ك) بنموذج للحلقة السفلية معدل قرب الجدران، لسماغورنسكي. يعتمد التقدير الوقتي لجملة المعادلات المكتوبة في شكل السرعة المتباينة ضمن نظام إحداثيات منحنية الأضلاع على مخططا ذات خطوات كسرية ضمنية برتبتين في حين كان التكامل الامتدادي على خلايا غير وضعية بطريقة الأحجام المتناهية.

سمحت لنا طريقة (ت ج ك) بالحصول على معلومات غير مستقرة حول التدفق تبين فيه تشكل و إطلاق لدوامات حول المقطع جانبي للجناح. الحل الغير مستقر مختلف عن الحل المستقر لطريقة (RANS) ذات النموذج الإحصائي حيث يتبين تذبذب الإنفكاك مع مجرى الوقت. وأخيرا تحدثنا و قارنا نتائج (ت ج ك) للضغط، مقاطع السرعة الوسطى و توترات رينولدس مع نتائج تجريبية وإحصائية حصلت بنموذج $k-\varepsilon$

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force de mener à bien ce travail

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur T. REZZOUG, maître de conférences et directeur de la post graduation au département d'aéronautique de l'université de Blida pour avoir accepté de diriger mes recherches et à qui j'exprime ici ma profonde gratitude pour m'avoir orienté vers le monde enthousiasmant de la mécanique des fluides numériques.

Mes remerciements vont à Monsieur S. BOUKRAA, maître de conférences et président du conseil scientifique au département d'aéronautique à l'université de Blida pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer comme président à mon jury de thèse.

Pour avoir accepté de juger ce travail et participer à mon jury de thèse, je remercie Monsieur R. HAOUI, maître de conférence à l'université des sciences et technologies Houari Boumediene.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur M. BOUNEDER, chargé de cours au département d'aéronautique de l'université de Blida, pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à mon jury de thèse.

Je remercie Monsieur L. AMTOUT chargé de cours au département d'aéronautique à l'université de Blida, pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à mon jury de thèse

Ma gratitude s'adresse également à toutes les personnes qui ont participés de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à:

Mes très chers parents, pour leur soutien indéfectible

Mes frères, et mes belles sœurs

Mes neveux et nièces

Mes proches

Mes amis

Table des matières

| | Page |
|--------------------------|------|
| Résumé | I |
| Remerciements..... | III |
| Dédicaces..... | IV |
| Table des matières | V |
| Nomenclature | VIII |
| Liste des figures | X |

Chapitre I

Introduction

| | |
|---|---|
| I.1 Motivations et objectifs | 1 |
| I.2 Les différentes approches de la turbulence | 3 |
| I.2.1 Méthode statistique | 3 |
| I.2.2 Approche directe : simulation numérique directe (SND) et simulation des grandes échelles turbulentes (SGE)..... | 4 |
| I.3 Les méthodes de résolutions numériques d'écoulement | 6 |
| I.4 Domaine d'étude de la thèse | 7 |

Chapitre II

Formulation du problème

| | |
|---|----|
| II.1 Caractéristique du problème..... | 9 |
| II.2 Le mouvement cyclique imposé au profil d'aile..... | 10 |
| II.3 Problème continu..... | 11 |
| II.3.1 Hypothèses et équations de base..... | 11 |
| II.3.2 Changement de repère..... | 12 |
| II.3.3 Formulation adimensionnée..... | 13 |
| II.4 Principes d'analyse tensorielle..... | 14 |
| II.4.1 Transformation des coordonnées..... | 14 |
| II.4.2 Paramètres géométriques..... | 16 |
| II.4.2 Calcul tensoriel..... | 18 |

Chapitre III

Simulation des grandes échelles turbulentes

| | |
|--|----|
| III.1 Fondement de la méthode..... | 21 |
| III.2 Isotropie locale..... | 22 |
| III.3 Notions de filtrage et propriétés..... | 24 |
| III.3.1 Définition..... | 24 |
| III.3.1 Propriétés des filtres..... | 24 |
| III.4 Les équations de Navier-Stokes filtrées..... | 26 |
| III.5 Modélisations de sous-maille..... | 27 |
| III.5.1 Le modèle de sous-maille de Smagorinsky..... | 28 |
| III.5.2 Le modèle dynamique de sous-maille..... | 29 |
| III.5.3 Le modèle de sous-maille à équations de transport..... | 30 |

| | |
|---|----|
| III.6 Equations du mouvement des grandes structures turbulentes en Coordonnées généralisées..... | 33 |
| III.7 Les Problèmes de simulation des régions près de la paroi..... | 35 |
| III.8 Nouvelles directions de recherche, problèmes ouverts..... | 35 |

Chapitre IV

Résolution numérique

| | |
|--|----|
| IV.1 Analyse des travaux antérieurs de discrétisation en coordonnées curvilignes..... | 36 |
| IV.2. Génération de maillage et paramètres géométriques..... | 38 |
| IV.3 Discrétisation invariante en volumes finis des équations gouvernant le mouvement..... | 40 |
| IV.3.1 L'équation de continuité..... | 41 |
| IV.3.2 Les équations de quantité de mouvement..... | 42 |
| IV.3.3 L'équation du transport..... | 43 |
| IV.3.4 Le terme de production dans le modèle à deux équations..... | 44 |
| IV.4 Discrétisation Invariante des équations gouvernant le mouvement sur des maillages non-réguliers..... | 45 |
| IV.4.1 L'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement..... | 46 |
| IV.4.2 L'équation du transport..... | 51 |
| IV.4.3 Le terme de production dans les modèles à deux équations..... | 52 |
| IV.5 Approximation des termes de convection et du flux de diffusion..... | 56 |
| IV.5.1 Les propriétés des schémas d'approximations de flux..... | 56 |
| IV.5.2 Méthodes d'approximation pour les flux convectives..... | 58 |
| IV.5.2.1 Schéma central, décentré en amont du premier ordre et Hybride.... | 58 |
| IV.5.2.2 Schémas décentrés en amont d'ordre supérieure en Précision..... | 60 |
| IV.5.3 Approximation des flux de diffusion..... | 60 |
| IV.6 Conditions aux limites, intégration temporelle et algorithme de résolution..... | 64 |
| IV.6.1 Conditions aux limites..... | 64 |
| IV.6.1.1 Les équations de quantité de mouvement..... | 65 |
| IV.6.1.2 l'équation du transport..... | 69 |
| IV.6.1.3 Fonctions de paroi..... | 71 |
| IV.6.2 Intégration temporelle et les techniques de correction de la pression..... | 74 |
| IV.6.3 traitement du terme source de la turbulence..... | 76 |
| IV.6.4 L'algorithme de résolution..... | 77 |

Chapitre V

Application et résultats numériques

| | |
|---|----|
| V.1 Mise en œuvre de la SGE sur le cas test..... | 81 |
| V.1.1 Géométrie et maillage de l'écoulement autour du profil d'aile et ses caractéristiques..... | 81 |
| V.1.2 Conditions aux limites..... | 84 |
| V.1.3 Conditions initiales..... | 85 |
| V.2 Résultats instationnaires de la SGE..... | 90 |
| V.2.1 Champ instantané autour du profil..... | 90 |
| V.2.1.1 Evolution temporelle des champs..... | 91 |
| V.2.2 Spectres temporels..... | 94 |

| | |
|--|-----|
| V.3 Résultats moyennés de la SGE | 98 |
| V.3.1 Résultats sur la distribution de pression | 98 |
| V.3.2 Résultats sur les profils de vitesse moyennes..... | 99 |
| V.3.2 Résultats sur les profils des tensions de Reynolds | 101 |
| V.4 Résultats de l'écoulement autour du profil en mouvement oscillatoire de tangage..... | 104 |

| |
|---|
| <p>Chapitre VI Conclusions et perspectives</p> |
|---|

| |
|--|
| <p>Annexe A Analyse mathématique des équations de Navier-Stokes</p> |
|--|

| | |
|---|-----|
| A.1 Existence, unicité des solutions..... | 112 |
|---|-----|

| |
|---|
| <p>Annexe B Méthodes de Krylov</p> |
|---|

| | |
|----------------------------|-----|
| B.1 Méthode de Krylov..... | 115 |
| B.1.1 GMRES | 115 |

Bibliographie

Nomenclature

| | |
|---------------------------------------|--|
| A | : allongement de l'aile |
| $a_{(\alpha)}$ | : vecteurs de base covariants |
| $a^{(\alpha)}$ | : vecteurs de base contravariants |
| b | : envergure de l'aile |
| C | : corde du profil |
| C_k | : constante de Kolmogorov |
| C_s | : coefficient de Smagorinsky |
| C_p | : coefficient de pression |
| C_x | : coefficient de traînée |
| C_z | : coefficient de portance |
| E_3 | : espace euclidien tridimensionnel |
| $E(k)$ | : spectre d'énergie cinétique dans l'espace de Fourier |
| f | : fréquence réduite |
| G | : fonction filtre |
| $g_{\alpha\beta}$ | : tenseur métrique covariant |
| $g^{\alpha\beta}$ | : tenseur métrique contravariant |
| g_{α}^{β} | : tenseur métrique mixte |
| J | : le Jacobien de la transformation $x=x(\zeta)$ |
| l | : échelle caractéristique de sous-maille |
| k_s | : l'énergie cinétique de turbulence de sous-maille |
| L_{ij} | : tensions de Léonard |
| N_x | : nombre de points dans la direction longitudinale |
| N_y | : nombre de points dans la direction normale aux parois |
| N_z | : nombre de points dans la direction transversale |
| p | : la pression |
| $P = p + \rho \frac{(\Omega r)^2}{2}$ | : la pression modifiée |
| P_{∞} | : la pression à l'infini amont |
| P_r | : nombre de Prandtl |
| P_{rt} | : nombre de Prandtl turbulent |
| \vec{R} | : le vecteur position d'une particule fluide par rapport au repère absolue |
| \vec{r} | : le vecteur position d'une particule dans le nouveau repère. |
| Re | : nombre de Reynolds |
| R_{sgs} | : nombre de Reynolds de sous-maille |
| R_{ij} | : tensions de Reynolds de sous-maille |
| S | : surface de l'aile |
| S_{ij} | : tenseur des déformations du champ filtré |
| Str | : nombre de Strouhal |
| t | : temps |
| U | : vitesse parallèle à l'infini amont |
| u_i | : les composantes de la vitesse |
| U^{α} | : vitesse contravariante dans un système de coordonnées curvilignes |

| | |
|--|--|
| U_α | : vitesse covariante dans un système de coordonnées curvilignes |
| u_τ | : la vitesse de frottement |
| $\overline{U_c}$ | : vitesse de translation du profil |
| $\langle u_i u_j \rangle$ | : tensions de Reynolds |
| V^α | : flux de volume contravariants |
| x_i | : le système de coordonnées cartésiennes |
| ρ | : la masse volumique du fluide |
| ρ_∞ | : la densité à l'infini amont |
| α_0 | : l'incidence métrique |
| ν | : la viscosité cinématique |
| ν_t | : viscosité de turbulence de sous-maille |
| $\overline{\Omega}$ | : vitesse de rotation du profil |
| ζ_i | : le système de coordonnées curvilignes. |
| δ_α^β | : le symbole de Kronecker, |
| $d\Omega$ | : L'élément différentiel du volume associé aux coordonnées curvilignes ζ |
| $\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$ | : les symboles de Christoffel |
| Δ | : la largeur du filtre |
| τ_{ij} | : tenseur de sous-maille |
| \mathcal{E} | : le taux de dissipation de l'énergie cinétique |

Autres symboles :

| | |
|-------------------------|--|
| $(\bar{\quad})$ | : opération de filtrage spatial |
| $\langle \quad \rangle$ | : moyenne spatiale et temporelle dans les directions homogènes |
| $(\quad)''$ | : partie fluctuante à grande échelle |
| $(\quad)'$ | : partie fluctuante de sous maille |

Indice :

| | |
|-----------|--------------------------------------|
| p | : indique la paroi |
| i, j, k | : compteur sur les nœuds du maillage |

Exposant :

| | |
|---|---|
| + | : indique l'adimensionnement des coordonnées de paroi |
|---|---|

Liste des Figures

| | page |
|---|------|
| Figure(1.1) :Boucles d’hystérésis du mouvement en tangage du profil Naca0012 (K.W.McAlister et W.J. Croskey 1982)..... | 2 |
| Figure(1.2) :Schéma des différents régimes de l’écoulement autour d’un profil d’aile..... | 3 |
| Figure(1.2) :Visualisation d’un écoulement de couche de mélange (Brown et Roshko 1974).. | 5 |
| Figure(2.1) :Les caractéristiques d’écoulement autour d’un profil d’aile | 9 |
| Figure(2.2) :Calage du profil face à l’écoulement uniforme..... | 10 |
| Figure(2.3) :Le système des coordonnées en rotation | 12 |
| Figure(2.4) :La représentation d’un vecteur dans deux systèmes de coordonnées..... | 15 |
| Figure(2.5) :Le domaine cartésien avec les coordonnées curvilignes et les vecteurs de base.. | 16 |
| Figure(3.1) :Schéma du spectre d’énergie turbulente..... | 23 |
| Figure(3.2) :Fonctions filtres typiques..... | 26 |
| Figure(4.1) :Une maille tridimensionnelle dans le domaine physique Ω , et son image dans le domaine G | 38 |
| Figure(4.2) :L’arrangement des inconnues dans une maille décalé 3D..... | 41 |
| Figure(4.3) :Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement V^1 en 2D..... | 43 |
| Figure (4.4) :Le maillage décalé bidimensionnel et le volume de contrôle $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ et son image $G_{i+\frac{1}{2},j}$ | 46 |
| Figure(4.5) :Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement $-u$ en 2D..... | 51 |
| Figure(4.6) :Le stencil de discrétisation pour les équations V^1 | 52 |
| Figure(4.7) : Le stencil de discrétisation de l’équation de transport..... | 54 |
| Figure(4.8) : Maillage décalé unidimensionnel avec les nœuds impliqués dans l’évaluation de ϕ sur la face $i+\frac{1}{2}$ | 58 |
| Figure(4.9) : Coordonnées obliques avec allongement horizontal..... | 62 |
| Figure(4.10) :Le stencil de discrétisation pour une équation de transport en 2D..... | 63 |
| Figure(4.11) : Calcul de la distance normale Y_p entre le nœud p et la surface limite..... | 73 |
| Figure(5.1) : Schéma de l’aile et des axes de coordonnées..... | 80 |
| Figure(5.2) : Maillage bidimensionnel autour du profil d’aile..... | 81 |
| Figure(5.3) : Vues perspectives du maillage tridimensionnel et ces limites autour du profil d’aile Naca0012 en forme C | 82 |
| Figure(5.4) : Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200$ et incidence= 0° | 84 |
| Figure(5.5) : Contours d’isopressions autour du profil $Re=200$ et incidence= 0° | 84 |
| Figure(5.6) : Distribution de la pression sur la paroi du profil..... | 85 |
| Figure(5.7) : Profils des vitesses longitudinales | 86 |
| Figure(5.8) : Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 0° | 86 |
| Figure(5.9) : Contours d’isopressions $Re=200000$ et incidence= 0° | 86 |
| Figure(5.10) : Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 0° | 86 |
| Figure(5.11) : Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 0° avec une discrétisation classique..... | 86 |
| Figure(5.12): Contours d’isopressions $Re=200000$ et incidence= 0° avec une discrétisation classique..... | 86 |
| Figure(5.13) : Distribution de la pression sur la paroi du profil obtenue par les deux méthodes de discrétisation..... | 87 |
| Figure(5.14):Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 6° | 88 |
| Figure(5.15):Contours d’isopressions $Re=200000$ et incidence= 6° | 88 |
| Figure(5.16):Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 6° | 88 |
| Figure(5.16):Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 12° | 88 |

| | |
|---|-----|
| Figure(5.17):Contours d'isopressions $Re=200000$ et incidence= 12° | 88 |
| Figure(5.18):Contours d'isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 12° | 88 |
| Figure(5.20): Isovaleurs de la vitesse longitudinales dans un plan $z=0.01$ et temps $T=0.04$.. | 90 |
| Figure(5.21): Isovaleurs de la vitesse longitudinales dans un plan $z=0.01$ et temps $T=6.0$ | 91 |
| Figure(5.21): Vecteur vitesse instantanée dans un plan $z=0.5$ et temps $T=6.0$ | 91 |
| Figure(5.23): L'évolution temporelle du champ instationnaire dans un plan fixe $z=1$ | 92 |
| Figure(5.24): Isovaleurs instantanée de u à $T=1.0$ | 94 |
| Figure(5.25): Isovaleurs instantanée de u à $T=3.5$ | 94 |
| Figure(5.26): Isovaleurs instantanée de u à $T=5.5$ | 94 |
| Figure(5.27): Echantillonnage de u au cours du temps..... | 95 |
| Figure(5.28): Echantillonnage de v au cours du temps..... | 95 |
| Figure(5.29): Echantillonnage de w au cours du temps..... | 95 |
| Figure(5.30): Spectre de u | 96 |
| Figure(5.40): Spectre de v | 96 |
| Figure(5.50): Spectre de w | 96 |
| Figure(5.63):Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 20° .. | 97 |
| Figure(5.64): La distribution de la pression selon un calcul direct et expérimental | 97 |
| Figure(5.65): Isovaleurs de pression moyenne..... | 97 |
| Figure(5.66): Vitesse longitudinale en $x=0.10C$ | 99 |
| Figure(5.67): Vitesse longitudinale en $x=0.15C$ | 99 |
| Figure(5.68): Vitesse longitudinale en $x=0.20C$ | 99 |
| Figure(5.69): Vitesse longitudinale en $x=0.40C$ | 99 |
| Figure(5.70): Vitesse longitudinale en $x=0.60C$ | 99 |
| Figure(5.71): Vitesse longitudinale en $x=1.00C$ | 99 |
| Figure(5.72): Vitesse normale en $x=0.10C$ | 99 |
| Figure(5.73): Vitesse normale en $x=0.15C$ | 99 |
| Figure(5.74): Vitesse normale en $x=0.20C$ | 99 |
| Figure(5.75): Vitesse normale en $x=0.40C$ | 99 |
| Figure(5.76): Vitesse normale en $x=0.60C$ | 99 |
| Figure(5.77): Vitesse normale en $x=1.00C$ | 99 |
| Figure(5.78): Tension de Reynolds normale longitudinale en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.79): Tension de Reynolds normale longitudinale en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.80): Tension de Reynolds normale longitudinale en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.81): Tension de Reynolds normale verticale en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.82): Tension de Reynolds normale verticale en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.83): Tension de Reynolds normale verticale en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.84): Tension de Reynolds croisée en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.85): Tension de Reynolds croisée en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.86): Tension de Reynolds croisée en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.87): Tension de Reynolds normale transversale en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.88): Tension de Reynolds normale transversale en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.89): Tension de Reynolds normale transversale en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.90): Boucles d'hystérésis du mouvement en tangage du profil Naca0012 | 104 |
| Figure(5.91): Champs de vitesse instantanés et lignes de courant du mouvement en tangage du profil Naca0012..... | 107 |

Chapitre I

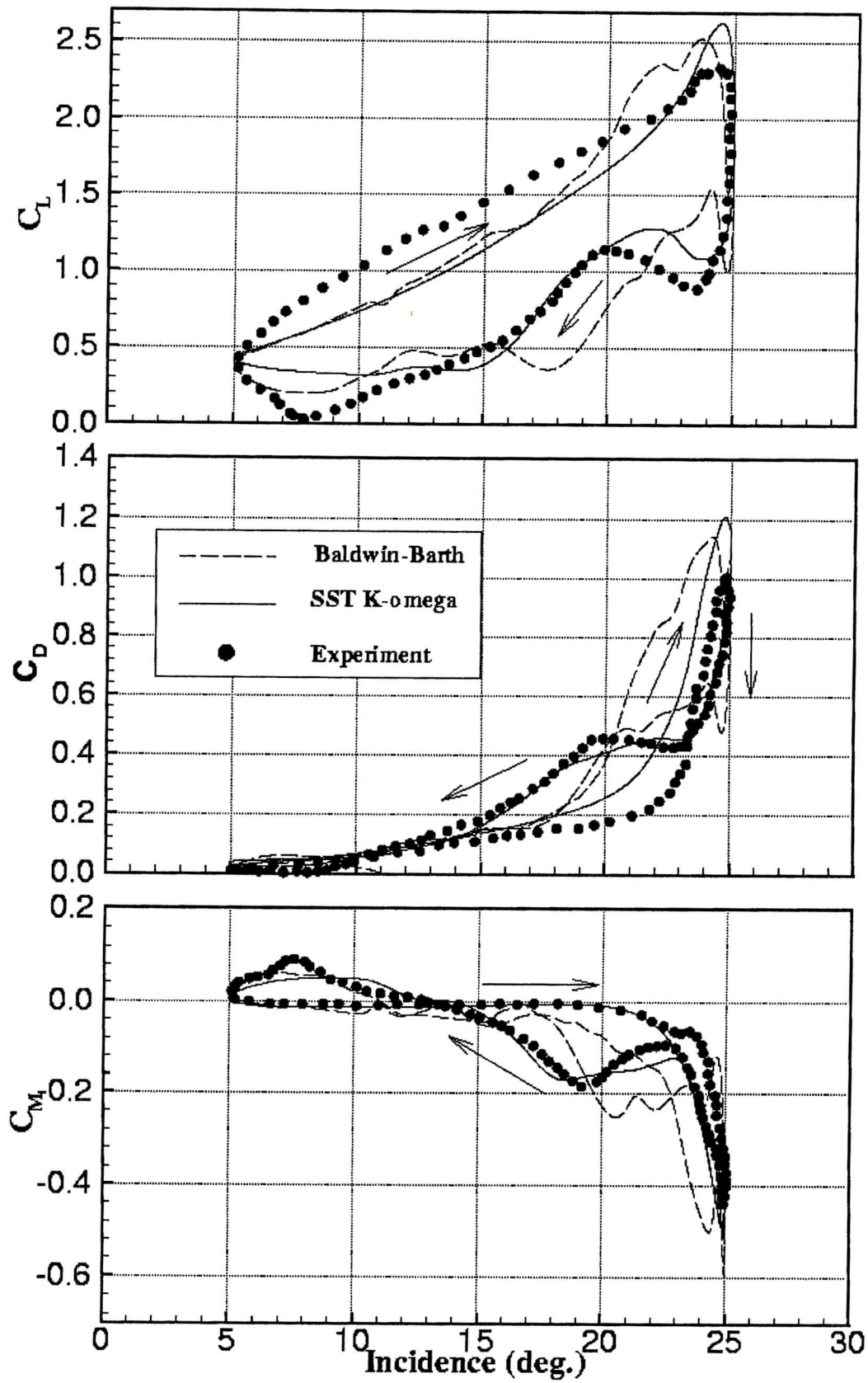
Introduction

I.1 Motivations et objectifs:

La détermination de l'écoulement autour d'une aile en mouvement cyclique a pris un regain d'intérêt depuis que l'on s'est aperçu de l'importance du décrochage dynamique pour l'amélioration des performances et de la durée de vie des rotors d'hélicoptères, des rotors d'éoliennes et des hydroptères subcavitants.

Ce problème, lié à l'instationnarité de l'écoulement est tout à fait général pour toute surface portante animée d'un mouvement cyclique dont l'amplitude ou l'incidence et la fréquence dépassent une certaine valeur. Il se traduit en particulier par un décollement et un recollement de la couche limite (Mc Croskey et Philippe, 1975), (j.j-Philippe, 1977). Au cours d'un mouvement de tangage par exemple, la portance du profil continue d'augmenter avec l'incidence au-delà de la valeur maximale de décrochage statique, il se forme alors un tourbillon au bord d'attaque qui se déplace en roulant sur le profil pendant la phase de décélération (décroissance d'incidence), la portance passe par un maximum lorsque le tourbillon est à mi-corde. Du fait des charges induites par le tourbillon lors de son déplacement, le moment piqueur augmente et atteint un maximum lorsque les tourbillons passent au bord de fuite. L'incidence continue de décroître et la couche limite finit par recoller, mais la portance ne retrouve sa valeur statique que pour de faibles incidences. Pour un mouvement cyclique, la portance présente ainsi une boucle d'hystérésis avec une partie supérieure à la portance statique et une autre plus faible. Le moment par rapport à l'axe passant par le quart de la corde présente une boucle en huit avec une augmentation significative du moment piqueur (voir Figure(1.1)). Cette description du phénomène en tangage pour un nombre de Reynolds de $2.5 \cdot 10^6$ peut présenter des caractéristiques légèrement différentes lorsque le nombre de Reynolds est plus faible. Par exemple pour un nombre de Reynolds de 10^4 les résultats nous montrent que le tourbillon du bord d'attaque peut être suivi d'un second à mi-corde. Dans tous les cas, il est certain que les variations de portance et de moment engendrent des vibrations, donc une fatigue de la structure de l'aile et du bruit pour l'environnement. Ces effets négatifs peuvent être compensés par une amélioration du rendement dans le cas de l'éolienne et on peut penser utiliser cet effet pour améliorer certains types de rotors. Il est donc important d'étudier ce phénomène.

L'objet du présent travail porte donc sur le développement d'une prévision numérique de l'écoulement turbulent autour d'une aile en mouvement périodique imposé capable de décrire le champ aérodynamique, ce qui représente un vrai challenge pour la mécanique des fluides numériques au vu de l'élévation du nombre de Reynolds et des différents régimes d'écoulements qui caractérise notre problème comme le montre la Figure(1.2). Au bord d'attaque, on remarque une zone de couche limite laminaire non décollé, l'épaisseur de cette couche y est très petite devant la corde et les pressions extérieures sont transmises directement à la paroi, une autre région de couche limite est alimentée par un courant de retour, qui s'ajoutant aux forts cisaillements au sein du fluide crée un écoulement rotationnel important ; sous l'effet d'un gradient de pression favorable qui accélère l'écoulement, ce courant de retour, prenant naissance au bord de fuite peut être soit laminaire, soit turbulent,



Figure(1.1) Boucles d'hystérésis du mouvement en tangage du profil NACA 0012
(K.W. Mc Alister et W.J. Croskey 1982)

suivant le nombre de Reynolds. Quand l'angle d'incidence augmente jusqu'à atteindre une valeur critique, ce décollement se transforme en un décrochage total de la couche limite sur l'extrados du profil. Un autre type de décollement apparaît au bord d'attaque des profils en incidence sous forme d'un bulbe local qui se produit après la pointe de survitesse située près du bord d'attaque. La couche limite est laminaire entre le point d'arrêt et le pic de survitesse. A l'aval de ce pic le gradient de pression crée une recompression qui fait décoller la couche limite localement ; deux phénomènes peuvent s'y produire :

- Une transition laminaire-turbulent avec le recollement de la couche limite.
- Un éclatement du bulbe pouvant entraîner un décrochage total de la couche limite sur l'extrados du profil. Ce deuxième cas apparaît surtout pour des faibles nombres de Reynolds (Bonnet et Gleyzes, 1983), (cousteix, 1988).

Un sillage naît de la rencontre des deux couches limites extrados et intrados du profil. Il représente le débit déficitaire de l'écoulement au bord de fuite. Ce sillage ainsi formé est caractérisé par d'importantes contraintes de cisaillement et de distribution d'intensité du vecteur tourbillon, s'atténuant au fur et à mesure que les particules fluides s'éloignent du profil.

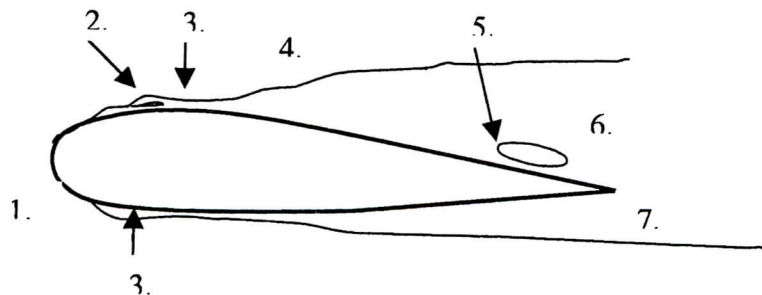


Figure (1.2) : schéma des différents régimes de l'écoulement autour d'un profil d'aile :
 1.couche limite laminaire, 2. décollement bulbe laminaire, 3. région de transition,
 4.couche limite turbulente, 5.point de décollement, 6. zone de décollement, 7.sillage

I.2 Les différentes approches de la turbulence :

Il n'existe pas une théorie générale explicative du phénomène de turbulence mais de nombreuses théories partielles et incomplètes. Parmi ces théories, certaines, si elles sont très rudimentaires et très limitées, n'en demeurent pas moins utiles à une approche industrielle, d'autres plus évoluées, exigent des développements mathématiques plus importants. Les approches sont donc nombreuses et diverses : la turbulence est une discipline en évolution constante qui s'enrichit sans cesse de matériaux nouveaux

I.2.1 Méthode statistique :

Une solution turbulente est toujours une solution compliquée non stationnaire des équations du mouvement, présentant des fluctuations irrégulières dans l'espace et dans le temps. Devant cet aspect désordonné des évolutions turbulentes et cette apparente complexité du phénomène l'attitude naturelle et la plus utilisée a été d'introduire des méthodes statistiques. Le hasard apparent des évolutions turbulentes a son origine dans les irrégularités des conditions initiales et des conditions aux limites mal déterminées dans leur détail et pour lesquelles une très petite variation bouleverse totalement la structure détaillée de l'écoulement. La méthode statistique

n'est donc pas justifiés par l'absence de causes mais par l'ignorance des causes surabondantes et difficilement accessibles.

La décomposition d'une grandeur caractéristique instantanée de l'écoulement turbulent en une partie macroscopique et une partie turbulente d'apparence aléatoire permet de développer un traitement statistique des équations de mouvement. Ce traitement appliqué aux équations de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement détaillé instantané du fluide, fait apparaître des termes inconnus supplémentaires qui sont interprétés comme des tensions turbulentes. Le fait de prendre la moyenne d'une équation instantanée conduit à une perte d'informations qu'il faudra réintroduire sous forme d'hypothèses physiques : C'est le problème de fermeture.

I.2.2 Approche directe : simulation numérique directe (SND) et Simulation des grandes échelles turbulentes (SGE)

La plupart des approches de la turbulence supposent que le mouvement instantané détaillé du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Le fluide est alors considéré comme un continuum par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue, on connaît donc les équations de la turbulence, et certaines recherches se sont orientées vers l'étude de "solutions turbulentes" des équations de Navier-Stokes (Agostini L. et Bass J., 1950-Bass J., 1961).

L'étude de tout écoulement turbulent pourrait donc se faire, du moins en principe, par résolution directe des équations de Navier-Stokes. En vue de la prédétermination numérique d'un écoulement turbulent la question se pose donc : pourquoi ne pas résoudre directement les équations de Navier-Stokes ? cette vue consisterait à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour une ou plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires et faire ensuite un traitement statistique sur les solutions obtenues. On montre toutefois que le nombre de points de discrétisation nécessaire pour représenter les plus petites échelles de la turbulence atteint des valeurs faramineuses.

Pour fixer les idées, essayons de préciser quantitativement les ressources informatiques nécessaires. La turbulence étant toujours tridimensionnelle et instationnaire, le nombre N^3 de points de maillage qui conditionne l'espace mémoire nécessaire sur ordinateur dans un domaine cubique sera proportionnel à δx étant le pas d'espace, et le temps de calcul sera proportionnel à $\frac{(N)^3}{\delta t}$ ou δt est le pas de temps.

De manière à représenter les plus petites échelles, δx et δt doivent être de l'ordre des échelles de Kolmogoroff.

Plus précisément :

$$\delta x = \frac{\eta}{4} \quad \text{avec} \quad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.1)$$

$$\text{et} \quad \delta t = \frac{\tau}{4} \quad \text{avec} \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

L'ordre de grandeur de ces échelles a été divisé par quatre afin de pouvoir représenter au moins très grossièrement une sinusoïde sur une période.

Soit $Re_t = \frac{l\sqrt{k}}{\nu}$ le nombre de Reynolds de la turbulence, où l est la dimension des gros

tourbillons énergétiques $l = \frac{(k)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$ et k l'énergie cinétique de la turbulence :

$$(N)^3 = \left(\frac{L}{\delta x}\right)^3 \approx 64 \left(\frac{l}{\eta}\right)^3 \approx 64 \text{Re}^{\frac{9}{4}} \quad (1.3)$$

On a admis que la dimension géométrique L caractéristique de l'écoulement était de l'ordre de l .

Considérons par exemple une section de l'écoulement autour d'un cylindre, si l'on admet $\text{Re}_r \approx \frac{\text{Re}}{10}$ où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement $\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$ on trouve pour un $\text{Re} = 80000$ et $N^3 = 4.10^{10}$. On montrerait de même que le temps de calcul est proportionnel à $\text{Re}^{\frac{11}{4}}$.

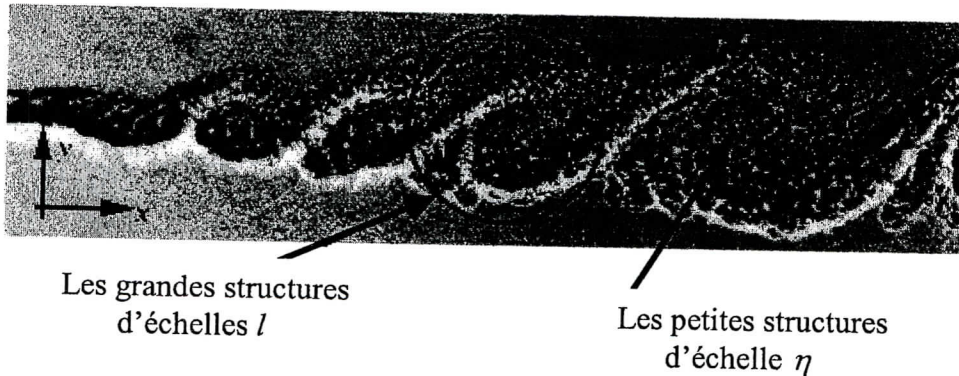


Figure (1-2) : Visualisation d'un écoulement de couche de mélange (Brown et Roshko 1974)

Cette approche directe nécessite de puissants moyens informatiques, elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés. L'attaque directe des équations de Navier-Stokes en régime turbulent reste donc réservée à des études fondamentales de recherche en turbulence (Orszag et Patterson, 1972 ; Orszag et Pao, 1974), et n'est pas abordable pour la prévision numérique d'écoulements dans la pratique industrielle, tout au moins dans un futur prévisible.

Il existe toutefois une technique de calcul intermédiaire entre le calcul direct et l'approche statistique. La méthode consiste à calculer l'écoulement à partir des équations de Navier-Stokes sur un maillage plus lâche et à modéliser les mouvements d'échelles inférieures aux dimensions de la maille. Il s'agit donc d'une simulation numérique des grosses structures turbulentes (Large Eddy Simulation) justement celles qui seraient le plus difficile à modéliser. Le but est donc de simuler par un calcul tridimensionnel et instationnaire des réalisations d'écoulements turbulents qui fournissent une vision et une description détaillée des structures générées et leur évolution. Les diverses méthodes de simulation sont utiles pour des études approfondies d'écoulement turbulent car elles permettent de générer le champ fluctuant à grande échelle qui peut être analysé par un post-traitement statistique tout comme le fait l'expérimentateur sur des mesures de laboratoire. Une autre application est l'étude d'écoulement pour lesquels les modèles en un point tombe en défaut ou bien ne peuvent pas donner l'information recherchée, c'est le cas des écoulements périodiques turbulents autour de corps solides, considérés comme des écoulements complexes ou pathologiques présentent des mouvements à grande échelle fortement instationnaires ou irréguliers. Les macro simulations peuvent être alors utilisées pour fournir des informations utiles à la mise au point de modèles plus simples, en particulier sur des quantités non accessibles aux mesures.

I.3 Les méthodes de résolutions numériques d'écoulement :

Au cours des dernières décennies, l'industrie aéronautique a fourni un effort particulier pour améliorer les méthodes numériques employées en mécanique des fluides pour résoudre les équations de Navier-Stokes, car les exigences en terme de précision et de réduction des temps de calcul augmentent, alors que les problèmes physiques abordés deviennent plus complexes.

En particulier, la nécessité d'améliorer les outils de prédiction des écoulements turbulents a entraîné le développement des méthodes numériques plus précises basées sur la simulation des grandes échelles (SGE) ou sur la simulation numérique directe (SND), et d'autres pour les modélisations en un point.

Dans le cas des simulations directes ou de simulation des grandes structures turbulentes, des méthodes de grande précision sont nécessaires, elles doivent aussi posséder de bonnes propriétés de conservation (quantité de mouvement, énergie...) et un bon comportement sur des temps d'intégration importants.

La SND, qui simule toutes les échelles de l'écoulement, nécessite, d'une part, des temps d'intégration suffisamment longs pour garantir l'obtention d'un champ moyen convergé, et d'autre part, une discrétisation des termes convectifs assez précise pour ne pas détériorer la représentation des structures de plus petites échelles. En conséquence, cette approche au succès grandissant se montre particulièrement sensible à l'efficacité et à la précision de la méthode numérique servant à intégrer les équations.

Si les schémas numériques habituellement employés dans les codes de calcul d'écoulements compressibles se comportent de manière plutôt satisfaisante face aux contraintes de la SND pour les écoulements en régimes transsonique ou supersonique, cette propriété n'est plus vérifiée quand l'écoulement s'effectue à des très faibles valeurs du nombre de Mach. En effet, développées initialement pour la simulation des écoulements à grande vitesse, les méthodes numériques deviennent inadaptées en termes de précision et d'efficacité quand $M_\infty \leq 0.2$.

Les techniques privilégiées qui permettent la prédétermination numérique d'écoulements sont les méthodes de volumes finis, de différences finies ou d'éléments finis. Les méthodes de volumes finis en particulier ont été largement utilisées du fait de leur robustesse pour traiter des équations avec termes sources complexes et des propriétés de conservation globale des schémas utilisés.

Les méthodes de discrétisation permettent de remplacer les équations continues aux dérivées partielles par des équations numériques. Parmi les plus anciennes, les méthodes de différences finies sont généralement basées sur l'approximation d'une fonction par son développement de Taylor autour d'un point. Des approximations plus précises sont obtenues soit en augmentant le nombre de point dans l'expression des dérivées, soit en utilisant des relations implicites (schémas hermitiens). Les schémas d'approximations décentrés sont généralement d'ordre inférieur mais peuvent posséder des propriétés stabilisatrices (schémas amont). Ils présentent néanmoins l'inconvénient d'introduire une fausse diffusion d'origine numérique qui devra être contrôlée si l'on désire que l'erreur introduite reste limité.

Les schémas d'intégration temporelle font intervenir généralement deux ou trois niveaux, les schémas implicites sont généralement plus stables que les schémas explicites. Citons aussi les schémas prédicteurs-correcteur. Dans le cas d'opérateurs différentiels complexes la méthode des pas fractionnaires permet de discrétiser successivement les n opérateurs sur une fraction $\frac{\delta t}{n}$ du pas de temps. Une application particulière importante des pas fractionnaires est faite dans les schémas de directions alternées (ADI) utilisée pour résoudre les équations de convection-diffusion à plusieurs dimensions.

Le calcul d'écoulements en géométrie complexes peut être abordé soit par les méthodes d'éléments finis, soit par la méthode de volumes finis sur des maillages curvilignes (Amsden A.A et Hirt C.W.,1973,- Thompson J.F. et al.,1974). Les méthodes de volumes finis sont basées sur le concept d'intégration des équations sur une cellule de calcul. Elles sont souvent d'ordre peu élevé (ordre un ou deux) mais les schémas utilisés sont choisis de façon à fournir des approximations physiquement réalistes même sur des maillages très lâches (Gosman A.D. et al.,1969-1977, -Patankar S.V.,1980). Remarquons que cette condition n'est pas forcément réalisée dans les méthodes de différences finies même d'ordre élevé : une méthode de différences finies réputée de haute précision peut devenir médiocre ou même inutilisable sur un maillage trop grossier. Divers algorithmes spécifiques à la résolution des équations du mouvement en variables primitives ont été développés. En écoulement incompressible, la principale difficulté réside dans le couplage vitesse-pression à partir de l'équation de continuité. Une des méthodes les plus anciennes pour les écoulements stationnaires est la méthode de compressibilité artificielle qui introduit une équation de pression avec évolution fictive. Les méthodes de projection ainsi que les méthodes MAC (Welch J.E. et al.,1966), SMAC (Amsden A.A. et Harlow F.H., 1970) et leurs dérivés utilisent une équation de poisson pour la pression et un maillage décalé pour les composantes de la vitesse et s'appliquent en situation instationnaire.

Dans le présent travail on a privilégié l'utilisation de la technique des volumes finis pour sa grande flexibilité géométrique renforcée par une intégration appliquée à un maillage structuré générer suivant des coordonnées généralisées liées à la forme de l'obstacle étudié.

L'utilisation des coordonnées curvilignes complique tant soit peu la formulation des équations de mouvement qui nécessite alors l'utilisation de dérivées covariantes et de tenseurs métriques, introduisant ainsi une source d'instabilité et de dissipation numérique lorsque le maillage utilisé n'est pas orthogonal, le choix des variables dépendantes est un aspect important influant sur l'efficacité de la méthode de résolution du problème, la difficulté associée au calcul de la pression peut être éliminée en introduisant le vecteur-tourbillon, toute fois cette formulation diminue sensiblement l'ordre des équations gouvernant la simulation. Les variables primitives nous paraissent alors comme le choix de variables dépendantes le plus général pour un calcul d'écoulement tridimensionnel.

Notre méthode utilise une marche en temps du type pas fractionnaires. Cette technique a pour but de découpler les effets de diffusion visqueuse des effets de l'incompressibilité. Il s'agit d'approcher la solution des équations de Navier-Stokes avec deux séries d'approximations de la vitesse (vitesses prédites et projetées) et une série d'approximations de la pression. La vitesse prédite est obtenue par la résolution d'un problème de diffusion. Celle-ci n'étant pas à divergence nulle, elle est corrigée au moyen d'une projection sur l'espace des vitesses à divergence nulle. L'emploi de maillage décalé est couramment utilisé pour les calculs d'écoulements incompressibles, car il facilite le couplage entre les variables dépendantes et prévient le comportement oscillatoire de la pression. L'extension de cette approche au système de coordonnées curvilignes nécessite l'adoption des vitesses contravariantes comme variables dépendantes (Shyy W. et al.,1985) soutenant ainsi la conservation de la masse dans chaque cellule de discrétisation et favorisant la convergence du processus de résolution de l'équation de Poisson.

I.4 Domaine d'étude de la thèse :

Parmi les voies possibles pour la simulation numérique des écoulements instationnaires turbulents, celle basée sur la simulation des grosses structures avec une modélisation des petites échelles virtuelles semble-la mieux adaptée. En effet, à la différence des modèles de moyenne temporelle de Reynolds, la modélisation par sous maille se base sur le filtrage spatial et les modèles servent à reproduire les effets des structures non captées par la discrétisation spatiale. Cette technique est utilisée jusqu'à maintenant avec un certain succès dans des configurations géométriques peu complexes. L'objet de cette recherche est donc d'appliquer cette technique aux cas d'écoulements externes décollés autour d'obstacles à géométrie relativement complexe comme le cas des profils d'aile. Les maillages utilisés pour traiter cette classe d'écoulements sont en général des maillages curvilignes.

Pour atteindre ces objectifs on doit résoudre plusieurs difficultés qui sont liées à la modélisation des effets des petites échelles, aux problèmes d'intégrations temporelles à long terme et à la validité des approximations des conditions aux limites ouvertes aux grands pas de temps. Plusieurs schémas temporels et de types de conditions aux limites ouvertes ont été analysés par expériences numériques. En ce qui concerne les modèles de sous maille, on se propose d'utiliser les modèles de Smagorinsky et a équations de transport. La méthode de résolution numérique est efficace et précise d'ordre deux employant des schémas de discrétisation en volumes finis consistant sur un maillage de calcul décalé suivant une formulation en coordonnées généralisées tridimensionnelle.

Le plan proposé pour la présentation du travail réalisé est le suivant :

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire nous reprenons en détail le cadre général de l'étude en présentant la configuration de l'écoulement périodique généré autour d'un profil d'aile du type Naca0012, ainsi que les équations de base nécessaire à la formulation du problème. Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthode de Simulation des Grandes Echelles Turbulentes. On expose d'abord le principe et les objectifs de la méthode et on introduit le concept de cascade d'énergie. Nous présentons ensuite les modèles de turbulence classiques, basés sur le concept de viscosité turbulente, modèles utilisés pour la fermeture des équations de Navier-Stokes filtrées. Les recherches actuelles dans le domaine de la SGE sont orientées vers la définition et la validation de nouveaux modèles de fermeture pour ces équations. La quatrième chapitre est consacrée aux méthodes numériques employées pour la résolution numérique des équations formulées précédemment. Nous présentons ensuite les résultats instationnaires obtenus grâce à la SGE avant de comparer les quantités moyennes aux résultats statistiques dans l'optique de valider la démarche utilisée.

En fin, des conclusions sur les résultats obtenus et les perspectives que nous pouvons envisager dans ce domaine de recherche sont présentées.

Chapitre II

Formulation du problème

Nous avons décrit dans le premier chapitre les phénomènes physiques rencontrés autour des pales de rotors. Dans cette étude nous nous limitons à l'étude de la modélisation des phénomènes instationnaires hors régime nominal et à la modélisation de la turbulence pour le calcul des grandes échelles instationnaires énergétiques. Dans cette partie nous discuterons des hypothèses et caractéristiques du problème ainsi que de sa mise en équation après la description du cas teste de profil d'aile Naca0012 dans différentes configurations d'écoulements.

II.1 Caractéristique du problème :

Considérons l'écoulement bidimensionnel instationnaire se développant autour d'un profil d'aile en mouvement cyclique.

Un corps solide et mince (l'aile) est placé dans un écoulement homogène et parallèle de vitesse U_∞ ; la densité est ρ_∞ , la pression P_∞ , et dont les propriétés internes, sont également connues. L'écoulement autour de l'obstacle engendrera une certaine distribution de pression et de frottement (ou cisaillement) le long de la surface du corps. Nous voulons déterminer ces distributions de pression et de frottement en fonction de la forme du corps, de sa position face à l'écoulement non perturbé et des valeurs des paramètres U, ρ, P , puisqu'elles permettent de calculer les composantes de la force F qui agissent sur le corps, à savoir la traînée F_x , et la portance F_y , parallèle et normale à l'écoulement homogène et non perturbé.

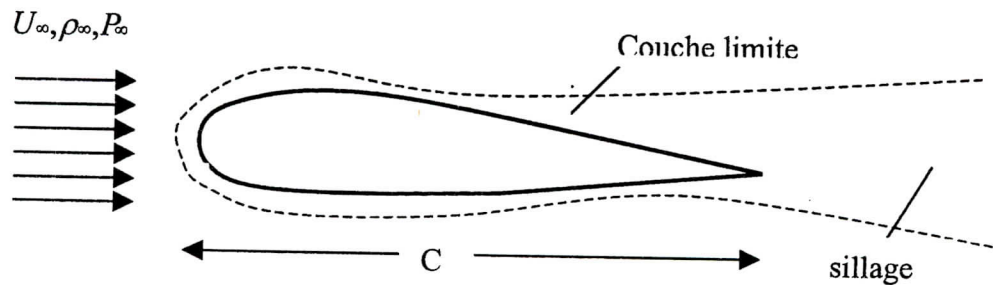


Figure (2.1) Les caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile

En tout premier lieu nous nous proposons, pour étudier la structure de l'écoulement turbulent complètement développé, de décrire brièvement quelques propriétés quantitatives basées sur des observations expérimentales.

En général, l'écoulement turbulent peut être caractéristique par les propriétés suivantes :

- L'écoulement est instationnaire.
- Le vecteur vitesse en un point varie de façon aléatoire en direction et en module.
- L'écoulement contient un grand nombre de tourbillons de taille très variée.

L'interaction entre ces tourbillons peut être décrite par le mouvement très complexe de fils tourbillonnaires. Ceux-ci sont enchevêtrés, transportés par l'écoulement turbulent et sont soumis à des étirements et des flexions locales. Ils sont ainsi à la base des fluctuations aléatoires du vecteur vitesse, pour un nombre de Reynolds élevé, basé sur la grandeur et le mouvement des grands tourbillons.

Ces hypothèses constituent une bonne approximation des conditions réelles de l'écoulement : le fluide, plus particulièrement un gaz, est considéré comme homogène, s'il contient peu de particules solides ou liquides susceptibles de modifier ses propriétés générales. Cette condition est donc assez facile à satisfaire. Par contre la condition d'incompressibilité peut être plus restrictive en imposant un nombre de Mach beaucoup plus petit que un. Cependant l'application de cette hypothèse peut être faite jusqu'à des vitesses du fluide assez élevées.

La bidimensionnalité de l'écoulement du fluide est assurée pour une section d'aile assez loin des extrémités afin de négliger les effets de bord il faut aussi que l'envergure de l'aile soit grande par rapport à la corde du profil (ou aile de grand allongement ; $A=b^2/S$ avec b envergure de l'aile et S surface de l'aile).

Les écoulements instationnaires sont engendrés par les mouvements cycliques du profil suivant une direction déterminée ; tamis, pilonnement, tangage.

II.2 Le mouvement cyclique imposé au profil d'aile :

Les écoulements instationnaires considérés sont engendrés par les mouvements périodiques du profil suivant une direction déterminée : tamis (parallèle à U), pilonnement (perpendiculaire à U), oblique (n'importe quelle direction) ou en oscillation d'incidence : tangage (oscillation par rapport au quart de la corde du profil).

Dans le cas le plus général de l'oscillation oblique le profil placé à l'incidence métrique α_0 est animé d'un mouvement oscillatoire suivant une direction x_δ faisant un angle δ par rapport à la direction de l'écoulement amont U :

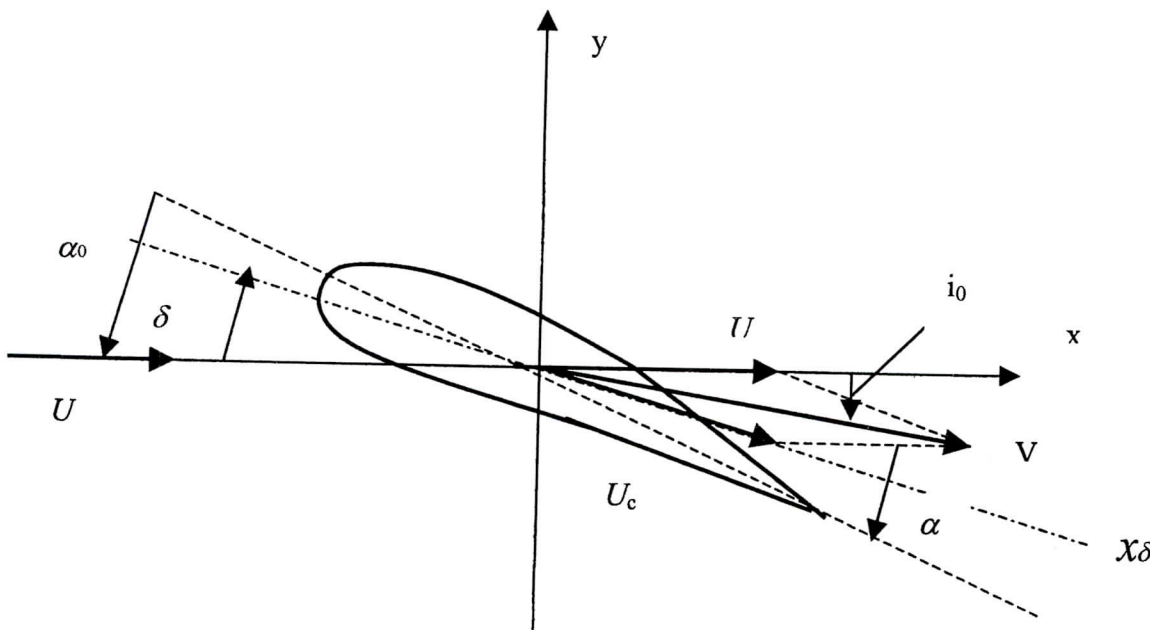


Figure.(2.2) Calage du profil face à l'écoulement uniforme

La composante de la vitesse \vec{U}_∞ de l'écoulement uniforme avec la vitesse \vec{U}_c de translation du profil ($U_c = A\omega\cos(\omega t)$), donne à chaque instant une vitesse résultante \vec{V} (vitesse relative) dont le module et l'incidence instantanée par rapport à la corde du profil s'écrivent :

$$V(t) = U_\infty \left[1 + 2\lambda \cos(\omega t) \cos(\delta) + (\lambda)^2 \cos(\omega t)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 - i(t) \quad (2.2)$$

$$\text{avec } i(t) = \text{Arctg} \left[\frac{\lambda \cos \omega t \sin \delta}{1 + \lambda \cos \omega t \cos \delta} \right] \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{A \omega}{U_\infty} \quad (2.3)$$

Les oscillations de tamis et de pilonnement se déduisent du cas général des équations ci-dessus en prenant respectivement $\delta=0$ et $\delta=-\frac{\pi}{2}$ on a alors ;

- Pour le mouvement de tamis ($\delta=0$) :

$$V(t) = U_\infty [1 + \lambda \cos(\omega t)] \quad (2.4)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{constante} \quad (2.5)$$

- Pour le mouvement de tamis ($\delta=-\frac{\pi}{2}$) :

$$V(t) = U_\infty \left[1 + (\lambda)^2 \cos^2(\omega t) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

$$\text{avec } \alpha(t) = \alpha_0 - \text{Arctg}[\lambda \cos \omega t] \quad (2.7)$$

- Dans le cas du mouvement de tangage : seule la variation d'incidence est à prendre en compte

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \cos \omega t \quad (2.8)$$

II.3 Problème continu :

Cette section est dévolue à la mise en place des équations de Navier-Stokes incompressibles qui servent à modéliser les écoulements de fluide visqueux. Pour préparer la résolution numérique, une forme adimensionnée de ces équations est proposée, afin de limiter les erreurs d'arrondi. En effet, ce problème est particulièrement exacerbé quand le nombre de Mach devient très petit. Aussi, même un bon adimensionnement des équations ne garantit pas une évaluation précise du gradient de pression, si la forme classique des équations de Navier-Stokes incompressibles est employée.

II.3.1 Hypothèses et équations de base :

Afin de se concentrer uniquement sur les problèmes numériques liés à la méthode d'intégration, le cadre physique de ce travail se restreint à des écoulements tridimensionnels instationnaires incompressible de fluide newtonien.

Les équations de Navier-Stokes, formulées en variables primitives et en coordonnées cartésiennes dans un domaine de \mathfrak{R}^n ($n=2,3$) de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, peuvent s'écrire sous la forme conservative en notation tensorielle :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

La masse volumique du fluide, les composantes de la vitesse, la pression, la viscosité cinématique sont représentés respectivement par ρ, u_i, p, ν tandis que la convention de sommation d'Einstein est utilisée pour les indices répétés. Où le terme $u \cdot \nabla u$ est le terme de transport ou de convection et le terme $\nu \Delta u$ est le terme de diffusion dans les équations de Navier-Stokes, ce dernier étant dû à l'existence des interactions au niveau moléculaire entre les particules, et se traduisant par une dissipation d'énergie.

II.3.2 Changement de repère :

Il est intéressant d'étudier l'écoulement dans un repère lié au profil. En effet, les paramètres géométriques du maillage autour du profil deviennent indépendants du temps et ne nécessitent pas un réajustement au cours du calcul. De plus la valeur d'une grandeur scalaire définie en un point donné ne dépend pas du repère choisi.

Le mouvement du profil étant défini par sa vitesse de translation \vec{U}_c et sa vitesse de rotation $\vec{\Omega}=(0,0,\omega)$, nous avons :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_0 \quad (2.11)$$

Où \vec{R} désigne le vecteur position d'une particule fluide par rapport au repère absolue et \vec{r} le vecteur position d'une particule dans le nouveau repère.

On obtient :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (2.12)$$

donc la vitesse d'une particule fluide dans le repère absolue peut être remplacée dans l'équation de mouvement par la relation suivante :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{U}_\infty + \vec{U}_c + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (2.13)$$

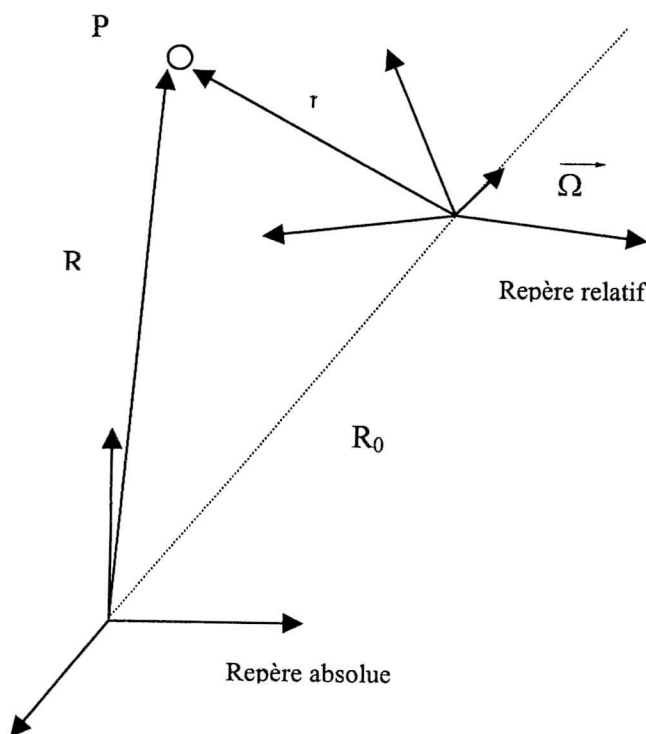


Figure (2.3) le système des coordonnées en rotation

Pour des vitesses de rotation et d'écoulement uniforme constantes, La composition des accélérations s'écrit suivant :

$$\frac{d\vec{A}_a}{dt} = \frac{d\vec{A}_r}{dt} + \frac{d\vec{U}_c}{dt} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r \quad (2.14)$$

En remplaçant les équations (2-11) et (2-12) dans le système (2-9), (2-10), les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\Omega r)^2}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} - 2 \varepsilon_{ipq} \Omega_{q u_p} - \frac{dU_{ci}}{dt} \quad (2.15)$$

On peut ainsi définir la pression modifiée $P = p + \rho \frac{(\Omega r)^2}{2}$, et on montre aisément que si r désigne la distance à l'axe de rotation du point \vec{x} , on a :

$$r^2 = x_j x_j - \frac{(x_j \Omega_j)^2}{(\Omega)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial (\Omega r)^2}{\partial x_i} = \Omega^2 x_j - \Omega_i (x_j \Omega_j) \quad (2.16)$$

II.3.3 Formulation adimensionnée :

Dans une simulation numérique, Il est nécessaire de stocker informatiquement les variables conservatives, Comme la précision des calculateurs est au mieux de l'ordre de 16 décimales significatives, il est important de travailler avec des variables adimensionnées afin d'éviter que des erreurs d'arrondis, introduites par la représentation machine des réels, ne viennent détériorer la précision de la solution numérique. Ce phénomène est particulièrement exacerbé en régime incompressible, car les écoulements sont alors caractérisés par de très faibles variations des variables.

Les variables adimensionnées sont obtenues à partir des variables physiques en utilisant les formules suivantes:

$$u_i = \frac{u_i^*}{U_\infty}, \quad P = \frac{(P^* - P_\infty)}{\rho U_\infty^2}, \quad t = \frac{U_\infty t^*}{C}, \quad x_i = \frac{x_i^*}{C}, \quad \omega = \frac{\omega^* C}{U_\infty} \quad (2.17)$$

Où les symboles u_i, P, t, x_i, ω indiquent respectivement, une vitesse, une pression, fréquence réduite, une coordonné et une fréquence réduite du mouvement d'oscillation, adimensionnées par une vitesse de l'écoulement amont U_∞ et par une longueur de référence C , la corde du profil.

De même, l'hypothèse d'un nombre de Reynolds constant conduit a la relation suivante entre les forces d'inerties et de viscosité :

$$Re = \frac{U_\infty C}{\nu} \quad (2.18)$$

Pour les essais d'une aile en oscillation harmonique, il faut choisir U_∞ , C et ω de telle sorte qu'une particule de fluide parcourt pendant le temps ω la même distance rapportée à C sur le modèle. La valeur $\frac{U_\infty}{\omega}$ qui s'exprime en m, donne la distance que l'aile parcourt pour chaque période d'oscillation. Si cette distance est grande par rapport à la corde C du profil d'aile, c'est à dire que $\frac{\omega C}{U_\infty} \ll 1$, l'écoulement est dit quasi-stationnaire. On définit le nombre de

Strouhal :

$$Str = \frac{\omega C}{U_\infty} \quad (2.19)$$

En reportant les relations des équations.(2.17)-(2.18) dans les équations.(2.15)-(2.10), les équations adimensionnées suivantes sont obtenues:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2.21)$$

où :

$$f_i = -2 \varepsilon_{ipq} \Omega_{q u_p} - \frac{dU_{ci}}{dt} \quad \text{et} \quad P = p + \frac{(\omega r)^2}{2}$$

II.4 Principes d'analyse tensorielle :

Les techniques exposées dans ce paragraphe seront surtout utiles pour l'écriture des équations tensorielles gouvernant la dynamique de l'écoulement dans des systèmes en coordonnées curvilignes. Les concepts et définitions d'analyse tensorielle présentées ici sont donnés sans preuves, plus de détails peuvent être trouvés par exemple dans [3] et [134]. On utilisera ici les commodités d'écriture très synthétique des tenseurs et leurs propriétés opératoires, les notations d'Einstein sont adoptées dans toute cette thèse, nous nous restreignons à un espace euclidien tridimensionnel E_3 .

II.4.1 Transformation des coordonnées :

On considère deux systèmes de coordonnées dans l'espace E_3 . Le premier est un système de coordonnées Cartésiennes, noté $x=(x_1, x_2, x_3)$ alors que l'autre est un système de coordonnées curvilignes, noté $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. On écrira les composants d'une coordonnée avec un index comme indice supérieur. Soit deux régions $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $G \subset \mathbb{R}^3$.

On définit alors la transformation qui lie les deux régions par la relation suivante :

$$T : x=x(\zeta), \quad x \in \Omega, \quad \zeta \in G \quad (2.22)$$

Si le Jacobien de la transformation (2.22), défini par

$$J = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \zeta^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \zeta^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \zeta^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \zeta^3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta^1}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial \zeta^2}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial \zeta^3}{\partial \zeta^1} \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial \zeta^2}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial \zeta^3}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial \zeta^3} & \frac{\partial \zeta^2}{\partial \zeta^3} & \frac{\partial \zeta^3}{\partial \zeta^3} \end{vmatrix}} \quad (2.23)$$

ne s'annule pas dans tout le domaine Ω , alors la transformation (2.22) peut être considérée comme étant admissible. En conséquence, la projection topographique T est dite inversible.

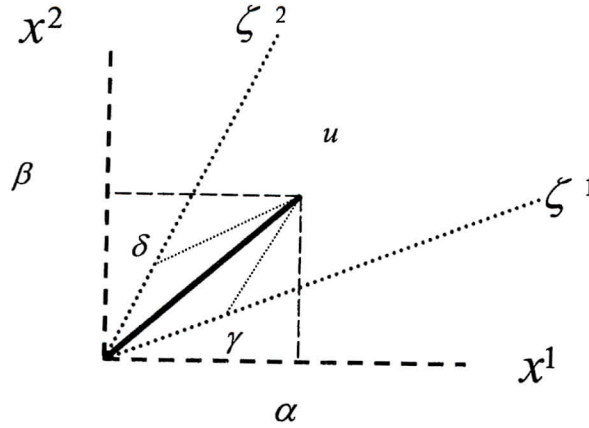
Le calcul tensoriel qui sera discuté dans la section II.4.3, nécessite la considération de quelques définitions et propriétés élémentaires du comportement de certaines quantités sous transformation de coordonnées d'un système à un autre. Dans ce but nous formulons les remarques et définitions suivantes :

Définitions 2.1 : Une quantité $T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ est appelée composante contravariante d'un tenseur de rang r , si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit :

$$t^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r} = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \zeta^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_r}}{\partial \zeta^{\alpha_r}} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \quad (2.24)$$

Remarque 2.1 : Les composantes cartésiennes d'un tenseur sont dénotées par lettres minuscules Romaines, et les composantes d'un système de coordonnées générales par lettres majuscule Romaines.

Remarque 2.2 : Il est évident que l'inverse de (2.24) est aussi défini, $t^{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}$ est la composante contravariante d'un tenseur de rang r dans le système de coordonnées cartésiennes.



Figure(2.4) La représentation d'un vecteur dans deux systèmes de coordonnées

Définitions 2.2: Une quantité $T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est appelée composante covariante d'un tenseur de rang r , si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit :

$$t_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r} = \frac{\partial \zeta^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial \zeta^{\alpha_r}}{\partial x^{\beta_r}} T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} \quad (2.25)$$

Définitions 2.3 : Une quantité $T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est appelée composante mixte d'un tenseur de rang $r+s$, si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit :

$$t_{\delta_1\delta_2\dots\delta_s}^{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r} = \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \zeta^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma_r}}{\partial \zeta^{\alpha_r}} \frac{\partial \zeta^{\beta_1}}{\partial x^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial \zeta^{\beta_s}}{\partial x^{\delta_s}} T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} \quad (2.26)$$

Remarque 2.3 : Strictement parlant, $T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est la composante contravariante d'un tenseur de rang r , Pour plus de brièveté et simplicité nous l'appellerons un tenseur contravariant de rang r , de la même façon pour les covariant et les tenseurs mixtes.

Remarque 2.4 : Les tenseurs contravariants et covariants sont distingués, respectivement par un exposant et un indice. Cette notation est essentielle dans le calcul tensoriel et nous devons adhérer à cette formulation.

Les tenseurs sont, en faite, des entités mathématiques indépendantes du système de coordonnées dans le quelle ils sont écrits. D'où une définition plus générale du tenseur :

Définitions 2.4 : Une quantité $T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est appelée tenseur relatif mixte de rang $r+s$ et de poids w , si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit suivant la relation :

$$t_{\delta_1\delta_2\dots\delta_s}^{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r} = J^{-w} \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \zeta^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma_r}}{\partial \zeta^{\alpha_r}} \frac{\partial \zeta^{\beta_1}}{\partial x^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial \zeta^{\beta_s}}{\partial x^{\delta_s}} T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} \quad (2.27)$$

dans laquelle J est le Jacobien défini par la relation (2.23)

Définitions 2.5 : un tenseur relatif de poids unité, est appelé tenseur densité, alors que le tenseur relatif de poids zéro est un tenseur absolu.

Pour notre étude, on a seulement besoin de tenseurs de rang $r \leq 2$ ou de tenseurs mixtes de rang $r+s \leq 2$ (absolu ou relatif). Par exemple le vecteur vitesse $u = \frac{dx^\alpha}{dt}$ est un tenseur d'ordre un ses composants cartésiens contravariant et covariant sont respectivement dénotés par u^α et u_α avec $u^\alpha = u_\alpha$. Et ses composants dans un système de coordonnées générales sont notés par U^α et U_α avec $U^\alpha \neq U_\alpha$. Il existe des quantités qui dépendent de la position dans l'espace, mais dont les valeurs sont indépendantes du choix du système de coordonnées. par exemples la longueur d'un vecteur, la pression et l'énergie turbulente. Une telle quantité est appelée un scalaire qui est un tenseur de rang zéro.

II.4.2 Paramètres géométriques :

Le vecteur base est un des paramètres le plus important entrant dans la définition des transformations d'un tenseur d'un système cartésien à un système de coordonnées curvilignes. Les vecteurs de base covariants sont des vecteurs tangents a la ligne des coordonnées ζ^α et définis comme étant :

$$a_{(\alpha)} = \frac{\partial x}{\partial \zeta^\alpha} \quad (2.28)$$

Remarque 2.5 : $a_{(\alpha)}$ est un ensemble de trois vecteurs, et non pas la composante d'un seul vecteur, l'indice α entre parenthèse varie de 1 a 3.

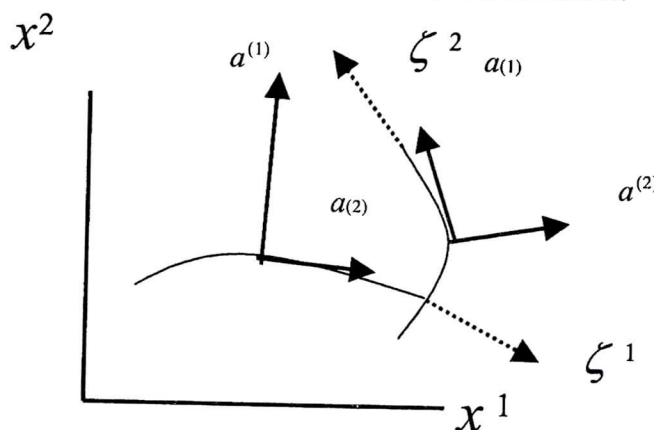
Les vecteurs :

$$a^{(\alpha)} = \text{grad} \zeta^\alpha \quad (2.29)$$

sont normaux a la surface des coordonnées ζ^α constante, et sont appelés les vecteurs base contravariants. En outre, ils sont réciproques aux vecteurs base covariants:

$$a_{(\alpha)} a^{(\beta)} = \delta_\alpha^\beta \quad (2.30)$$

Le δ_α^β est le symbole de Kronecker, généralement, les vecteurs base ne sont pas des vecteurs unités, excepté dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes.



Figure(2.5) Le domaine cartésien avec les coordonnées curvilignes et les vecteurs de base

En utilisant la relation (2.30), il est possible de calculer $a^{(\alpha)}$ une fois $a_{(\alpha)}$ obtenues. A l'aide de la règle de Cramer on peut écrire :

$$a^{(\alpha)} = \frac{1}{J} (a_{(\beta)} \times a_{(\gamma)}) \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ cyclique} \quad (2.31)$$

où J est donné par :

$$J = |a_{(1)} a_{(2)} a_{(3)}| = a_{(1)} \cdot (a_{(2)} \times a_{(3)}) \quad (2.32)$$

Comparant ce résultat avec la relation (2.23), on montre que J est le Jacobien de la transformation (2.22).

Chaque vecteur u peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base. Par exemple, nous avons :

$$u = a^{(\alpha)} U_{\alpha} \quad \text{ou} \quad u_{\beta} = a_{\beta}^{(\alpha)} U_{\alpha} \quad (2.33)$$

Cette équation correspond à la loi de transformation (2.25). Utilisant (2.30) on écrit :

$$U_{\beta} = a_{(\beta)} u = a_{(\beta)}^{\alpha} u_{\alpha} \quad (2.34)$$

La topologie de E_3 est définie par l'élément métrique :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} d\zeta^{\alpha} d\zeta^{\beta} \quad (2.35)$$

où ds est la longueur de l'élément différentiel associé au déplacement dx^{γ} et $g_{\alpha\beta}$ défini par le produit scalaire des vecteurs de base covariants :

$$g_{\alpha\beta} = a_{(\alpha)} \cdot a_{(\beta)} \quad (2.36)$$

$g_{\alpha\beta}$ est appelé tenseur métrique covariant. De la même façon on définit respectivement le tenseur métrique contravariant et mixte par :

$$g^{\alpha\beta} = a^{(\alpha)} \cdot a^{(\beta)} \quad \text{et} \quad g_{\beta}^{\alpha} = a^{(\alpha)} \cdot a_{(\beta)} \quad (2.37)$$

De (2.30) et (2.37), il s'ensuit que le tenseur métrique mixte est égal au delta de Kronecker. En outre, les tenseurs métriques sont symétriques, et peuvent s'écrire suivant :

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} \quad (2.38)$$

Les composants du tenseur métrique covariant forme une matrice symétrique, noté par $(g_{\alpha\beta})$. En vertu de (2.36), cette matrice est définie positive. On notera le déterminant $|g_{\alpha\beta}|$ par g .

Théorème 2.1 : Nous avons

$$g = J^2 \quad (2.39)$$

ici, l'inverse de la matrice $(g_{\alpha\beta})$ est la matrice $(g^{\alpha\beta})$, tel que :

$$g_{\alpha\beta} \cdot g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (2.40)$$

Dans un espace E_3 la définition du tenseur métrique nous permet d'exprimer longueur, angle et volume suivant une formulation indépendante des systèmes de coordonnées. Par exemple, la longueur des vecteurs de base covariants et contravariants peut être calculée, suivant :

$$|a_{(\alpha)}| = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad |a^{(\alpha)}| = \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \quad (2.41)$$

Ainsi, les vecteurs unités tangentiels et normaux sont donnés par :

$$t = \frac{a^{(\alpha)}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}, \quad n = \frac{a^{(\alpha)}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \quad (2.42)$$

L'élément différentiel du volume $d\Omega$ associé à un système de coordonnées curvilignes ζ s'écrit :

$$d\Omega = \sqrt{g} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \quad (2.43)$$

Les tenseurs métriques peuvent être utilisés pour élever et abaisser les indices, comme c'est illustré dans l'exemple suivant :

$$T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} T_{\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} T_{\delta\gamma} \quad (2.44)$$

Les vecteurs base ne sont pas des constantes dans un système de coordonnées généralisées, et leurs dérivées satisfont :

$$\frac{\partial a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\beta}} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} a^{(\gamma)}, \quad \frac{\partial a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\beta}} = - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} a^{(\gamma)} \quad (2.45)$$

Soulignons que les symboles de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$ ne sont pas des tenseurs. Utilisant (2.30), on peut écrire :

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} = a^{(\alpha)} \frac{\partial a^{(\gamma)}}{\partial \zeta^{\beta}} = \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial \zeta^{\beta} \partial \zeta^{\gamma}} \quad (2.46)$$

Les symboles de Christoffel sont symétriques, en ce qui concerne leurs indices :

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} \quad (2.47)$$

II.4.2 Calcul tensoriel :

Nous discuterons les propriétés d'opérations algébriques et analytiques à qui peuvent être appliquées aux tenseurs sur un espace E_3 .

Théorème 2.2 (Addition) : La somme de deux tenseurs du même type est un tenseur du type original.

Théorème 2.3 (produit contracté) : Le produit contracté d'un tenseur de rang $(p + q)$ avec un tenseur de rang $(r + s)$ est un tenseur de rang $(p + r) + (q + s)$.

Théorème 2.4 (contraction) : Soit un tenseur de rang $(p + q)$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$. La contraction est une sommation sur un indice covariant et un indice contravariant, le résultat est un tenseur de rang $(p-1) + (q-1)$.

L'illustration du théorème 2.4, est :

$$U^{\beta} = g^{\alpha\beta} U_{\alpha} \quad (2.48)$$

Théorème 2.5 : Si tous les composants d'un tenseur sont nulles dans un système de coordonnées alors ils le seront dans n'importe quel autre système.

Ce dernier théorème joue un rôle important dans la détermination des lois physiques d'un invariant. Ce théorème nous permet d'écrire les lois physiques dans un système de coordonnées généralisées, une fois leur formulation cartésienne en notation tensorielle écrite.

En général, la différenciation partielle ne transforme pas un tenseur en un autre tenseur. La dérivée covariante est une opération qui conserve le caractère tensoriel et qui équivaut à une différenciation partielle dans un système de coordonnées cartésiennes.

Définitions 2.6 : on définit

$$T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r, \gamma} = \frac{\partial T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}}{\partial \zeta^{\gamma_1}} + \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \delta \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\delta \alpha_2 \dots \alpha_r} + \dots + \left\{ \begin{matrix} \alpha_r \\ \delta \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r-1} \delta} + \\ - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \beta_1 \gamma \end{matrix} \right\} T_{\delta \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} - \dots - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \beta_s \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{s-1} \delta}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} - W \cdot \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \delta \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \quad (2.49)$$

La dérivée covariante du tenseur mixte $T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ de poids w dans un système de coordonnées généralisées.

Remarque 2.6 : Dans un système de coordonnées Cartésiennes, nous avons :

$$u_{\alpha, \beta} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad (2.50)$$

Remarque 2.7 : La dérivée covariante d'un scalaire absolu est réduite à une dérivée partielle :

$$\varphi_{, \beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\beta}} \quad (2.51)$$

En vertu du Théorème 2.5, les règles habituelles applicables pour une différenciation dans un système de coordonnées cartésiennes sont aussi vérifiées pour une différenciation covariante. Par exemple,

$$(U^{\alpha} U^{\beta})_{, \gamma} = U^{\beta} U^{\alpha}_{, \gamma} + U^{\alpha} U^{\beta}_{, \gamma} \quad (2.52)$$

La dérivée covariante des composants du tenseur métrique est strictement nul :

$$g^{\alpha \beta}_{, \gamma} = g_{\alpha \beta, \gamma} = 0 \quad (2.53)$$

Ces identités sont rapportées habituellement comme étant le lemme de Ricci. Ils montrent que la dérivée covariante du déterminant du tenseur métrique et du Jacobien sont égaux à zéro :

$$g_{, \gamma} = 0 \quad \sqrt{g}_{, \gamma} = 0 \quad (2.54)$$

D'où l'identité usuelle suivante ;

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \zeta^{\alpha}} = \sqrt{g} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \alpha \end{matrix} \right\} \quad (2.55)$$

Cette identité résultante de (2.54) est due au fait que \sqrt{g} est une densité scalaire de poids 1.

On peut utiliser cette identité pour obtenir une expression utile pour la divergence d'un champ vectoriel:

$$\operatorname{div}(u) = U_{,\alpha}^{\alpha} = \frac{\partial U^{\alpha}}{\partial \zeta^{\alpha}} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} U^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} U^{\alpha}}{\partial \zeta^{\alpha}} \quad (2.56)$$

De la même façon, la divergence d'un champ de tenseur de rang deux devient :

$$T_{,\alpha}^{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{\beta\alpha}}{\partial \zeta^{\alpha}} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\alpha \end{matrix} \right\} T^{\gamma\alpha} \quad (2.57)$$

Une autre identité importante est :

$$\frac{\partial \sqrt{g} a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\alpha}} = 0 \quad (2.58)$$

est appelée l'identité géométrique.

Ces résultats peuvent être vérifiés en dérivant les relations suivantes : supposons que le vecteur v est constant, alors à l'aide de (2.56) nous avons :

$$0 = \operatorname{div}(v) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot v}{\partial \zeta^{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot v \frac{\partial \sqrt{g} a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\alpha}} \quad (2.59)$$

La version intégrale de (2.58) peut être obtenue au moyen du théorème de divergence de Gauss :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v) d\Omega = \oint_{\Gamma} v \cdot n d\Gamma \quad (2.60)$$

où $\Gamma = \partial\Omega$ et n vecteur unité sortant normal à Γ , si $v = \text{constante}$, on écrit :

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) d\Omega = \oint_{\Gamma} v^{\beta} a_{\beta}^{(\alpha)} d\Gamma_{\alpha} = v^{\beta} \oint_{\Gamma} a_{\beta}^{(\alpha)} d\Gamma_{\alpha} \quad (2.61)$$

donc, on obtient :

$$\oint_{\Gamma} a_{\beta}^{(\alpha)} d\Gamma_{\alpha} = 0 \quad (2.62)$$

Nous passons maintenant à la description de la modélisation de sous maille et des méthodes numériques utilisées pour calculer l'écoulement autour d'un profil d'aile 3D en configuration de décrochage dynamique et statique en SGE.

Chapitre III

Simulation des Grandes Echelles Turbulentes

La Simulation des Grandes Echelles (SGE) est étroitement liée à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en régime turbulent et à la notion de séparation d'échelles par filtrage spatial. Les grandes échelles de l'écoulement, isolées par un filtre en échelles, sont calculées tandis que les petites échelles sont modélisées. Ainsi on peut voir la SGE comme une réduction du nombre de degrés de liberté du système étudié, pour lequel le calcul dynamique des grandes échelles énergétiques est caractéristique de la dynamique globale de l'écoulement. Dans ce chapitre, nous décrivons la méthodologie de façon plus formelle en introduisant la notion de filtrage sous forme mathématique et la notion de modélisation de sous maille. L'opération de filtrage des termes non linéaires dans les équations de Navier-Stokes en régime incompressible fait apparaître de nombreux termes de sous maille dont nous discutons la modélisation.

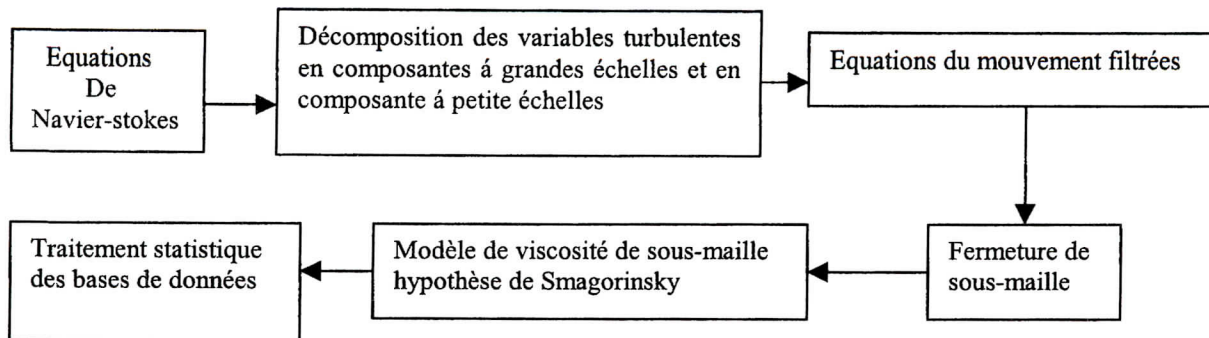
La modélisation de sous maille utilisée pour représenter le tenseur de sous maille est ensuite présentée. L'écriture des modèles est très différente selon que l'on travaille dans l'espace physique ou dans l'espace spectral, même si les mécanismes reproduits par la modélisation sont identiques. On ne parlera ici des modèles de Smagorinsky, Dynamique ainsi que des modèles à équations de transports utilisés dans l'espace physique mais on peut se référer à [15], [35], [90], [121], pour une présentation détaillée des modèles spectraux.

III.1 Fondement de la méthode :

La simulation des grandes structures turbulentes est une approche hybride utilisant une simulation partielle (grands tourbillons) et une modélisation partielle (petits tourbillons). L'idée est basée sur l'observation que si les grands tourbillons sont en fait très différents selon la géométrie, leur structure variant beaucoup avec le type d'écoulement considéré, par contre les petits tourbillons ont un caractère beaucoup plus universel. La méthode consiste alors à calculer le mouvement tridimensionnel et instationnaire des gros tourbillons dans le cas d'un mouvement périodique d'un profil d'aile. Les propriétés statistiques sont obtenues ensuite dans un second temps, tout comme on le ferait sur des signaux issus de mesures en laboratoire. On peut ainsi prendre des moyennes, dans le temps, dans l'espace ou sur des réalisations en répétant le calcul avec des conditions initiales aléatoires. La situation ressemble donc à celle d'un expérimentateur qui disposerait d'un fil chaud en chaque point de maillage.

De manière très générale, la modélisation consiste à faire un traitement statistique sur les équations de base et ensuite résoudre numériquement ces équations tandis que la simulation adopte la démarche inverse : résolution numérique des équations de base et ensuite le traitement statistique des bases de données ainsi constituées. La justification de ce type d'approche réside dans une idée simple : les grands tourbillons produits par l'écoulement moyen sont fortement dépendants de celui-ci, anisotrope et de longue durée de vie, ils sont difficiles à modéliser. Par contre, les petits tourbillons produits par transfert ont un caractère plus

universel et tendent vers l'isotropie, leur durée de vie est courte et ils sont relativement plus faciles à modéliser.



III.2 Isotropie locale :

Le concept de cascade d'énergie et d'isotropie locale est essentiel pour la compréhension de la méthode de simulation des grandes structures turbulentes, comme on va le voir ci-après.

La théorie de l'isotropie locale a été développée par Kolmogoroff. A la suite de ses travaux, une contribution importante à la compréhension des mécanismes turbulents a été apportée par Von Karman, Lin, Batchlor et Townsend, dont nous rappelons, ici les idées de base :

Les gros tourbillons interagissent avec l'écoulement moyen car leurs échelles sont du même ordre de grandeur, ils extraient de l'énergie cinétique du mouvement moyen et la fournissent aux agitations à grande échelle. Les structures turbulentes peuvent être considérées comme des éléments tourbillonnaires qui s'étirent les uns les autres. Cet allongement des filets tourbillonnaires est un aspect essentiel du mouvement turbulent. Il produit le passage de l'énergie à des échelles de plus en plus petites jusqu'à ce que les forces visqueuses deviennent actives et dissipent l'énergie : c'est la cascade d'énergie.

Lorsque les conditions aux limites le permettent (c'est à dire quand on peut faire l'hypothèse de périodicité dans les trois directions de l'écoulement), une alternative naturelle à l'analyse dans l'espace physique peut être l'analyse spectrale des équations du mouvement. Cela peut nous fournir des informations importantes concernant les mécanismes physiques de la turbulence. Sans entrer dans les détails, on rappelle juste l'expression du spectre d'énergie cinétique dans l'espace de Fourier:

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in S_{k, \frac{1}{2}}} |u(k)|^2, \quad k \in N \quad (3.1)$$

(où $S_{k, \frac{1}{2}}$ représente la couronne ; $S_{k, \frac{1}{2}} = \{k \in \mathbb{Z}^3, \text{tel. que } |k| \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]\}$ et $u(k)$ sont les coefficients

de Fourier du champ de vitesse u)

et l'équation de l'évolution de l'énergie cinétique dans l'espace spectral (obtenu à partir des équations de Navier-Stokes)

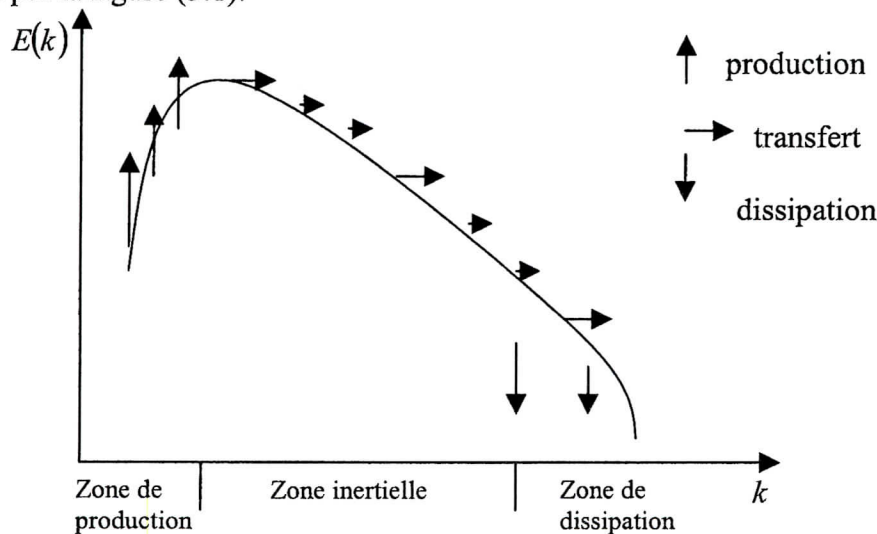
$$(\partial_t + 2\nu k^2)E(k, t) = W(k, t) + T(k, t) \quad (3.2)$$

Où $W(k, t)$ est le terme qui représente la *production* d'énergie due aux forces appliquées au fluide et $T(k, t)$ représente le *transfert* d'énergie dû aux termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes.

D'habitude on interprète l'équation (3.2) de la manière suivante: l'énergie est introduite dans le système au niveau des grandes échelles par le terme $W(k, t)$ ensuite elle est transférée aux échelles de plus en plus petites par le terme $T(k, t)$ pour être enfin dissipée au niveau des plus

petites échelles, par le terme $(2\nu k^2)E(k,t)$. Le transfert d'énergie des grandes échelles vers les échelles de petite taille est dû principalement au phénomène d'étirement des filets tourbillonnaires (en anglais vortex stretching).

La cascade d'énergie du mouvement moyen injectée dans le mouvement turbulent est déterminée par les grandes échelles, c'est seulement cette quantité d'énergie qui pourra être transmise aux petites échelles et ensuite dissipée. Ainsi le taux de dissipation d'énergie est déterminé par le mouvement à grandes échelles bien que la dissipation soit un processus visqueux dont les petits tourbillons sont le siège. La viscosité du fluide ne détermine pas le taux de dissipation mais seulement l'échelle à laquelle cette dissipation se produit. Plus le nombre de Reynolds est élevé, plus les tourbillons dissipateurs sont petits. Ce processus, illustré par la figure (3.1).



Figure(3.1) Schéma du spectre d'énergie turbulente

Du fait de l'interaction avec le mouvement moyen, les gros tourbillons dépendent fortement des conditions aux limites du problème. Le mouvement moyen présente souvent des directions privilégiées qui sont alors imposées aux mouvements turbulents à grande échelle. Ces gros tourbillons peuvent être fortement anisotropes. Durant le processus de cascade, la dépendance directionnelle est atténuée. Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand pour que la zone des gros tourbillons et celle des petits tourbillons dissipateurs soit bien distincte dans le spectre, cette dépendance directionnelle est presque totalement perdue : c'est la tendance à l'isotropie locale de la micro turbulence.

Les échelles de Kolmogoroff sont les plus petites échelles de l'écoulement turbulent et sont exprimés à l'aide des relations suivantes :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = (\nu \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (3.3)$$

Où η la longueur de l'échelle, τ la fréquence de l'échelle, ν sa vitesse caractéristique, ε taux de dissipation. L'un des principaux résultats de la théorie de Kolmogorov, déduit d'une hypothèse d'auto similarité et d'une analyse dimensionnelle, prédit que la pente du spectre d'énergie dans la zone inertielle est de $-\frac{5}{3}$ en échelle logarithmique. Plus précisément, on a :

$$E(k) = C_k \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}; \quad C_k = 1.5 \text{ constante de Kolmogorov} \quad (3.4)$$

III.3 Notions de filtrage et propriétés :

Le problème initial est celui de la définition des grandes structures turbulentes. Pour cela, la plupart des auteurs effectuent un filtrage des grandeurs turbulentes (Léonard A., 1974).

III.3.1 Définition :

Soit ϕ une quantité turbulente telle que u_i, p par exemple, on définit la quantité filtrée par :

$$\overline{\phi} = \int G(\vec{x}, \vec{y}; \Delta) \phi(\vec{y}, t) d\vec{y} \quad (3.5)$$

G est la fonction filtre au point \vec{x} . G détermine exactement la portion des fluctuations qui est incorporée dans les gros tourbillons. Δ est un paramètre qui caractérise la largeur du filtre. On utilisera la notation $(\overline{\quad})$ pour représenter la quantité filtrée.

G doit être bien sûr normalisé de telle façon que :

$$\int G(\vec{x}, \vec{y}; \Delta) d\vec{y} = 1 \quad \forall \vec{x} \quad (3.6)$$

III.3.1 Propriétés des filtres :

Une grandeur turbulente peut toujours s'écrire :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \quad (3.7)$$

grandeur instantanée = partie filtrée + partie à petite échelle

$\overline{\phi}$ caractérise les grandes échelles dont la longueur caractéristique est supérieure à Δ et ϕ' caractérise les petites échelles dont la longueur caractéristique est inférieure à Δ .

Lorsque le filtre est temporel, la décomposition est identique à la décomposition de Reynolds où le signal est décomposé autour de sa valeur moyenne. Lorsque le filtre est spatial, la partie non résolue est appelée contribution de sous maille.

Les propriétés fondamentales des filtres sont définies à partir des moyennes d'ensemble. Les filtres doivent vérifier les propriétés suivantes :

○ conservation des constantes $\overline{a} = a$ (3.8)

○ Linéarité $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$ (3.9)

○ Commutativité de la dérivée $\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}$ (3.10)

Cependant les propriétés d'un filtre sont très différentes de celles d'une moyenne classique. Le filtre ne vérifie pas les règles de Reynolds et en particulier :

$$\circ \quad \overline{\phi} \neq \overline{\phi} \quad (3.11)$$

$$\circ \quad \overline{\phi'} \neq 0 \quad (3.12)$$

$$\circ \quad \overline{\phi'} = \overline{\phi} - \overline{\phi} \quad (3.13)$$

Ces propriétés sur les moyennes d'ensemble ne sont malheureusement pas toujours vérifiées pour les maillages curvilignes 3D, notamment la propriété de commutation [38], [59]. Les filtres qui commutent avec l'opérateur de dérivation ne sont pour l'instant construits facilement que dans l'espace de Fourier [85]. La technique très largement utilisée en SGE est l'opération de filtrage implicite des équations. Le filtrage implicite consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes discrétisées sans appliquer de filtre connu analytiquement, les opérateurs de dérivation discrets agissant comme un filtre passe-haut en échelle dans la direction de dérivation [156]. Il est difficile, aussi bien en régime incompressible qu'en régime compressible, d'interpréter l'opération implicite de filtrage sur les maillages curvilignes 3D même si l'approche implicite repose sur l'idée que la taille caractéristique du maillage utilisé est de l'ordre de la taille du filtre qu'il faudrait utiliser pour capturer les grandes échelles.

- **Exemples de filtres :**

1. Le filtre passe bas : très simple dans l'espace spectral, ce filtre a l'inconvénient de fournir une fonction oscillatoire dans l'espace physique

$$G(\vec{\xi}) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin \frac{\pi \xi_i \Delta}{2}}{\pi \xi_i \Delta} \quad \Delta = \frac{\pi}{k_c}, \quad \vec{\xi} = \vec{x} - \vec{y} \quad (3.14)$$

2. Le filtre top hat : très simple dans l'espace physique, l'inconvénient est reporté cette fois dans l'espace spectral

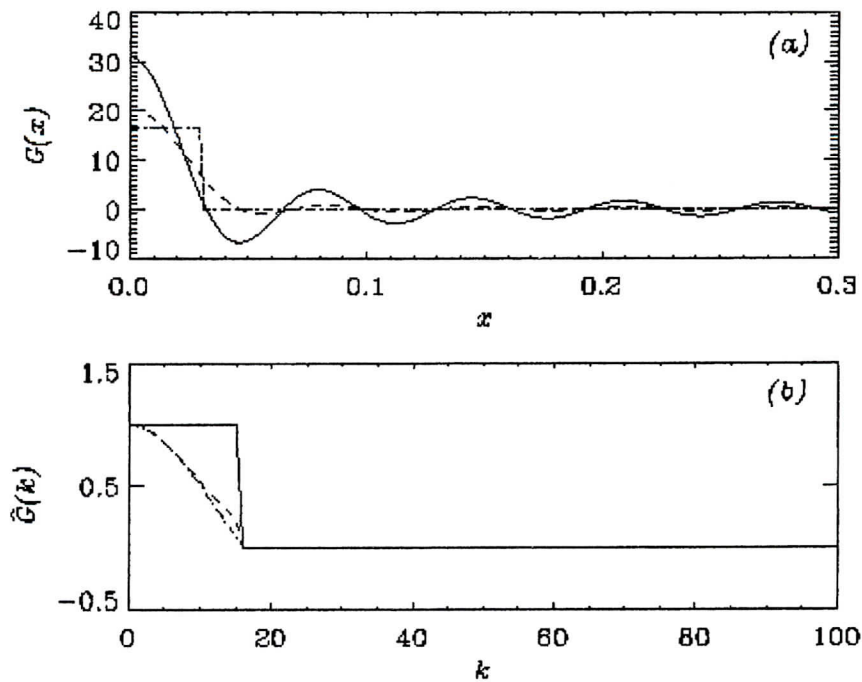
$$G(\vec{\xi}) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| < \frac{\Delta}{2} \quad (3.15)$$

$$G(\vec{\xi}) = 0 \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| \geq \frac{\Delta}{2}$$

3. Le filtre gaussien : ce filtre est progressif et donc va inclure une part très faible de petits tourbillons dans la définition des échelles explicites. Cependant ce filtre est utilisable aussi bien dans l'espace physique que dans l'espace de Fourier et donne souvent les meilleurs résultats.

$$G(\vec{\xi}) = \left(\sqrt{\frac{\gamma}{r}} \frac{1}{\Delta} \right)^3 \exp\left(\frac{-\gamma \xi^2}{\Delta^2} \right) \quad \text{avec} \quad \gamma = 6 \quad (3.16)$$

Ces trois filtres et leur transformé de Fourier sont représentés dans la figure(3.2). Il devrait être noté qu'en pratique le filtre Gaussien est toujours utilisé conjointement avec un filtre passe bas ; la troncature du Gaussien à des valeurs non négligeable est la cause des oscillations observées dans la figure.



Figure(3.2) Fonctions filtres typiques : — filtre passe bas ; ---- gaussien -.- top hat
(a) espace physique, (b) espace de Fourier

III.4 Les équations de Navier-Stokes filtrées :

La simulation des grandes échelles repose donc sur un filtrage spatial des équations de Navier-Stokes. Ce filtrage permet d'introduire des termes correctifs dans les équations décrites dans les paragraphes précédents. Ces contributions supplémentaires essaient de pallier la perte d'information liée à l'utilisation d'un maillage de pas d'espace fini. En effet, toute structure physique, dont la taille est inférieure à celle du pas d'espace, ne peut pas être prise en compte directement par la simulation. Or dans le cas d'écoulements turbulents, il existe une forte interaction entre les "petites" et les "grandes" structures de l'écoulement.

Ainsi les termes provenant du filtrage spatial des équations de Navier-Stokes permettent de modéliser l'action des "petites" structures, que la résolution spatiale ne peut prendre en compte, sur le mouvement des grandes échelles.

On applique une opération de filtrage sur les équations de Navier-Stokes (2.20)-(2.21) appliquées au mouvement instantané du fluide supposé incompressible :

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \bar{f}_i \quad (3.18)$$

Le produit filtré des vitesses instantanées s'écrit alors :

$$\overline{u_i u_j} = (\overline{u_j} + u'_j)(\overline{u_i} + u'_i) \quad (3.19)$$

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_j} \overline{u_i} + (\overline{u_j u'_i} - \overline{u'_j u_i}) + (\overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j}) \quad (3.20)$$

avec :

$$L_{ij} = (\overline{u_j u'_i} - \overline{u'_j u_i}) \quad \text{tensions de Léonard.} \quad (3.21)$$

$$R_{ij} = (\overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j}) \quad \text{tensions de Reynolds de sous-maille} \quad (3.22)$$

On peut dès lors écrire l'équation d'évolution des vitesses filtrées :

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j u'_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - L_{ij} - R_{ij} + \overline{f_i} \quad (3.24)$$

III.5 Modélisations de sous-maille :

Après filtrage des équations de Navier-Stokes instantanées, on déduit le système suivant composé des équations de continuité et de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j u'_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \overline{f_i} \quad (3.26)$$

Dans lesquelles :

$$\tau_{ij} = (\overline{u_j u'_i} - \overline{u'_j u_i}) \quad (3.27)$$

τ_{ij} est le tenseur sous-maille.

Le filtrage implique inmanquablement, une perte d'information et par voie de conséquence une inconnue supplémentaire τ_{ij} apparaît qui doit être modélisé.

Les modèles les plus simples sont basés sur une hypothèse de viscosité de turbulence de sous-maille. Il convient de souligner ici que cette viscosité n'est pas une propriété du fluide mais une propriété du mouvement turbulent lui-même, il s'ensuit que cette viscosité de turbulence devra être choisie différemment dans chaque cas particulier d'écoulement.

La fermeture du système précédent sera alors basée sur une hypothèse dans laquelle le déviateur des tensions de sous maille est relié directement au taux de déformation du champ filtré (hypothèse de Boussinesq) :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2 \nu_t S_{ij} \quad (3.28)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.29)$$

ν_t sera fonction de Δ largeur du filtre et des invariants de S_{ij} tenseur des déformations du champ filtré.

III.5.1 Le modèle de sous-maille de Smagorinsky :

Citons l'hypothèse de Smagorinsky, ce modèle n'est autre que l'adaptation du modèle statistique de longueur de mélange au cas de la simulation des grandes échelles turbulentes, introduit par le météorologue Smagorinsky (1963). Loin des parois la viscosité de sous-maille est donnée par :

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 S_{kl} S_{kl}} \quad (3.30)$$

L'échelle caractéristique de la turbulence de sous maille est ici connue et directement proportionnelle à la largeur du filtre. C_s est la constante de Smagorinsky qui varie en pratique de 0.1 à 0.25.

Dans le cas où le nombre de Reynolds de turbulence pourrait devenir faible, C_s ne peut plus être considérée comme constante. Des simulations directes menés dans une géométrie simple (turbulence homogène dans un cube) et utilisées pour tester les fermetures de sous-maille ont montré (Mac Millan O.J. et Ferziger J.H., 1979) que l'on pouvait utiliser des approximations du type :

$$C_s = 0.128 \left(1 + \frac{24.5}{R_{sgs}} \right)^{-1} \quad (3.31)$$

où R_{sgs} est le nombre de Reynolds de sous-maille construit sur $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}}$.

Près des parois, des modifications sont apportées afin tenir compte de l'effet de la viscosité moléculaire, C_s la constante de Smagorinsky est exprimé à l'aide de la fonction qui s'inspire de la correction de Van Driest E.R. suivante :

$$C_s^2 = 0.01 \left(1.0 - \exp \left(- \left(\frac{d^+}{25} \right)^3 \right) \right) \quad (3.32)$$

où $d^+ = \frac{u_\tau d}{\nu}$ qui représente la distance adimensionnée normale à la paroi, d étant la distance la

plus proche à la paroi, et u_τ la vitesse de frottement définie selon $u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Une variante du modèle de Smagorinsky a été proposée par Lilly D.K. 1971, elle fait intervenir non point la valeur instantanée du taux de déformation mais sa valeur moyenne :

$$\nu_t = (C_l \Delta)^2 \sqrt{\langle 2 S_{kl} S_{kl} \rangle} \quad (3.33)$$

Tous ces schémas simples supposent que la turbulence de sous-maille est en équilibre local avec le champ à grande échelle, τ_{ij} est alors déterminé par les grands tourbillons.

Le flux d'énergie apporté par les tourbillons d'échelles explicites équilibre alors exactement le taux de dissipation dont le siège est la turbulence de sous-maille.

En effet, l'équilibre énergétique dans la zone de sous-maille s'écrit :

$$\nu_t S_{ij} S_{ij} = C \frac{k^2}{\Delta} \quad (3.34)$$

et en utilisant $\nu_t = C_1 D k^{\frac{1}{2}}$ il s'ensuit :

$$k = \frac{C_1}{C} \Delta^2 S_{ij} S_{ij} \quad (3.35)$$

$$\nu_t = \frac{C_1^{\frac{3}{2}}}{C^2} \Delta^2 \sqrt{\langle 2 S_{kl} S_{kl} \rangle} \quad (3.36)$$

III.5.2 Le modèle dynamique de sous-maille :

Le modèle de sous-maille dynamique fut proposé par Germano et al.1991, dans le quelle la constante de Smagorinsky n'est pas choisie arbitrairement ou optimisé, mais déterminer numériquement au cours de la simulation à l'aide d'un second filtrage :

un filtre test noté $(\widehat{\cdot})$ est appliqué aux équations (3.26)-(3.27), dont la largeur du filtre $\widehat{\Delta}$ est deux fois plus lâche que la largeur du premier filtre Δ , on obtient :

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{u}_j \widehat{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \overline{f}_i \quad (3.37)$$

Où le tenseur sous-maille est maintenant donné par :

$$T_{ij} = \left(\overline{u_i u_j} - \widehat{u}_j \widehat{u}_i \right) \quad (3.38)$$

On considère alors les tensions turbulentes du champ résolues (tensions de Léonard) définies par :

$$L_{ij} = \left(\overline{u_j u_i} - \widehat{u}_j \widehat{u}_i \right) \quad (3.39)$$

Qui représentent les contributions des tensions de Reynolds des échelles dont la largeur est comprise entre $\widehat{\Delta}$ et Δ .

Les équations (3.28)-(3.38)-(3.39), nous permettent d'écrire :

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij} \quad (3.40)$$

en combinant les hypothèses de Smagorinsky pour exprimer les différents tenseurs on obtient:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2(c\Delta)^2 |\overline{S}_{ij}| \overline{S}_{ij} \quad (3.41)$$

et :

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2(c\widehat{\Delta})^2 |\widehat{S}_{ij}| \widehat{S}_{ij} \quad (3.42)$$

avec :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \widehat{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.43)$$

$$|\overline{S}_{ij}| = \sqrt{2 \overline{S}_{kl} \overline{S}_{kl}}, \quad |\widehat{S}_{ij}| = \sqrt{2 \widehat{S}_{kl} \widehat{S}_{kl}} \quad (3.44)$$

Appliquons le filtrage test à l'équation (3.41), la substitution de cette équation et de l'équation (3.42) dans l'équation (3.40) donne :

$$L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} = -2C \left((\widehat{\Delta})^2 \widehat{S}_{ij} \widehat{S}_{ij} - \Delta^2 \left(\overline{S_{ij} S_{ij}} \right) \right) \quad (3.44)$$

Notons que la constante C (dont la variation est très faible) est une fonction de l'espace et du temps $C = C(x_i, t)$.

L'équation (3.44) est une équation tenseur (S_{ij} est un tenseur symétrique, dont la trace est nulle), c'est à dire qu'on a cinq équations à résoudre pour déterminer la constante C , Lilly 1992, proposa de choisir C dans un sens des moindres carrés, en définissant l'erreur par :

$$Q_{ij} = \left(L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} - 2CM_{ij} \right) \left(L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} - 2CM_{ij} \right) \quad (3.45)$$

avec :

$$M_{ij} = - \left((\widehat{\Delta})^2 \widehat{S}_{ij} \widehat{S}_{ij} - \Delta^2 \left(\overline{S_{ij} S_{ij}} \right) \right) \quad (3.46)$$

la procédure requière $\frac{\partial Q}{\partial C} = 0$, qui permet d'écrire :

$$C = \frac{M_{ij} L_{ij}}{2M_{ij} M_{ij}} \quad (3.47)$$

III.5.3 Le modèle de sous-maille à équations de transport :

Les écoulements turbulents instationnaires générés en les forçant, soit par des oscillations périodiques ajoutées au gradient de pression, soit par des perturbations périodiques dans l'espace et dans le temps sont considérés comme des écoulements en non-équilibre spectral. Les résultats expérimentaux sur ces écoulements pulsés, montrent que des effets de retard se produisent notamment entre les modulations des tensions de Reynolds et celle de la vitesse moyenne axiale. Ces résultats ne peuvent être représentés par les modèles classiques basés sur une hypothèse d'équilibre, cet effet d'histoire sera pris en compte par l'introduction d'une ou plusieurs équations de transport de sous-maille.

Le comportement du modèle de sous-maille dépendra bien sûr de la position de la coupure (filtre) qui se place entre les deux limites extrêmes de la simulation directe (le modèle de sous maille n'intervient pas), et la modélisation statistique (toute fluctuation turbulente est modélisée).

Par ailleurs, un nouveau modèle de sous-maille à deux équations de transport à été développé par Dejoan et Schiestel (1999), Befeno et Schiestel (2001), afin de traiter de la turbulence en non-équilibre spectral sur des maillages relativement lâches. Il s'agit d'une adaptation du modèle statistique $k-\varepsilon$ transposé en LES : les échelles caractéristiques de longueur et de vitesse de la turbulence de sous-maille sont déterminées à partir d'équations de transport pour l'énergie cinétique de sous-maille et le taux de dissipation. Ce modèle présente l'avantage de pas tomber en défaut lorsque la largeur du filtre est grande et de mieux tenir compte des effets du non-équilibre.

Horiuti K. et Yoshizawa A., 1985 ont introduit une modélisation de l'équation de l'énergie de turbulence de sous-maille $k_s = \frac{1}{2} \overline{u_i u_j}$ du type :

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k_s}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \text{diff}_{sgs} - \overline{\nu u_i u_i} \quad (3.48)$$

Plusieurs auteurs utilisent des hypothèses inspirées des modèles classiques de fermeture en un point qui utilisent en général le concept de viscosité isotrope de turbulence. Les tensions de Reynolds sont alors obtenues à l'aide d'une loi de comportement :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k_s \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.49)$$

Dans le cadre du modèle à une équation, la viscosité de sous-maille est évaluée sur la base de l'échelle de longueur définie analytiquement par Prandtl-Kolmogoroff :

$$\nu_t = C_{vsgs} l_{sgs} k_s^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

La modélisation de l'équation de transport de l'énergie turbulente de sous-maille est inspirée du modèle de Prandtl, qui permet de prendre en compte les effets visqueux près des parois, et où une hypothèse de diffusion en gradient est utilisée. L'adaptation de ce modèle à la modélisation de sous-maille conduit au formalisme suivant :

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k_s}{\partial x_j} = 2 \nu_t S_{ij} S_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + c \Delta k_s^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial k_s}{\partial x_j} \right) - c \frac{k_s^{\frac{3}{2}}}{\Delta} \quad (3.51)$$

avec :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.52)$$

et

$$l_{sgs} = \Delta ; \Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}}$$

L'échelle de longueur caractéristique étant donnée par la largeur du filtre, il devient inutile dans le cas présent, d'utiliser une équation modèle pour le taux de dissipation. Elle deviendrait nécessaire si la position de coupure devait prendre des valeurs quelconques.

Lorsque le maillage est très peu dense, la coupure spectrale peut se placer avant la zone inertielle du spectre et l'on a une simulation de très grandes échelles. Si de plus, l'écoulement est en non-équilibre spectral, la zone de sous-maille ne sera pas en équilibre et la taille de la maille de calcul ne pourra plus être une bonne estimation de l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence. Cette constatation justifie dans ce cas l'introduction de modèles de sous-maille à deux équations de transport.

Les équations du champ turbulent k et ε peuvent être déduites des équations modélisées présentées par Launder B.E., 1975 en utilisant une hypothèse de diffusion en gradient et une viscosité isotrope pour la diffusion turbulente k et ε , dont la formulation est donné sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k_s}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_s}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{s1} P_k \frac{\varepsilon}{k_s} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{s2} \frac{\varepsilon^2}{k_s} \quad (3.54)$$

le terme P_k représente la production d'énergie turbulente :

$$P_k = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.55)$$

et

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.56)$$

Pour déterminer les constantes numériques on adopte la même approche utilisée par Dejoan et Schiestel (1999). Dans une approche heuristique on supposera que la turbulence de sous-maille peut être formellement décrite, en turbulence homogène, par le système d'équations :

$$\frac{dk_s}{dt} = F - \varepsilon \quad , \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = C_{s1} F \frac{\varepsilon}{k_s} - C_{s2} \frac{\varepsilon^2}{k_s} \quad (3.57)$$

Où F est le flux d'énergie entrant dans la zone de sous-maille.

Si on se place en situation d'équilibre, il est possible simplement de faire le lien avec le modèle classique $k-\varepsilon$ qui permet de modéliser l'énergie cinétique turbulente totale k , cela par une hypothèse de similitude. En effet, si le rapport $\frac{P}{\varepsilon}$ où P est le taux de production

d'énergie, est supposé constant et avec $k = k_p + k_s$ (énergie explicite + énergie implicite), alors :

$$\frac{\frac{dk_p}{dt}}{\frac{dk_s}{dt}} = \frac{k_p}{k_s} = \frac{P-F}{F-\varepsilon} \quad \text{conduit à} \quad F = \varepsilon + (P-\varepsilon) \frac{k_s}{k} \quad (3.58)$$

Il en résulte l'équation $\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{s1} P \frac{\varepsilon}{k} - \left[\frac{k}{k_s} (C_{s1} - C_{s2}) + C_{s1} \right] \frac{\varepsilon^2}{k}$ qui, identifiée au modèle $k-\varepsilon$

Usuel, fournit les coefficients à utiliser dans (3.57), soit $C_{s1} = C_{\varepsilon 1}$ et $C_{s2} = C_{\varepsilon 1} + \frac{k_s}{k} (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})$

Ainsi, à la limite extrême $k_s \rightarrow k$, le modèle $k-\varepsilon$ est retrouvé avec $C_{\varepsilon 1} = 1.5$ et $C_{\varepsilon 2} = 1.92$.

La détermination de $\frac{k_s}{k}$ peut se faire de façon approchée en intégrant un spectre en $-\frac{5}{3}$,

$$k_s = \int_{\kappa_c}^{+\infty} \gamma \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} d\kappa \quad \text{conduit alors} \quad \frac{k_s}{k} = \frac{3}{2} \gamma N_c^{-\frac{2}{3}}, \quad \text{expression qui fait intervenir le nombre d'onde}$$

adimensionnel $N_c = \kappa_c L$ où L est l'échelle intégrale du spectre dans son ensemble, $L = k^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

De manière à réaliser $C_{s2} \rightarrow 1.92$ lorsque $k_s \rightarrow k$ (soit $N_c \rightarrow 0$, on choisira empiriquement :

$$C_{\varepsilon 1} = 1.5 \quad \text{et} \quad C_{\varepsilon 2} = 1.5 + 0.42 \frac{1}{1 + \beta N_c^{\frac{2}{3}}}.$$

On notera que $C_{\varepsilon 2}$ varie avec le maillage. En pratique on évaluera L par l'expression $L = \kappa y$
Finalement:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.5, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.5 + 0.42 \frac{1}{1 + 0.38 N_c^{\frac{2}{3}}}, \quad \sigma_k = 1., \quad \sigma_\varepsilon = 1.5, \quad C_\mu = 0.09 \quad (3.59)$$

Où $\kappa_c = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}}$ représente la coupure spectrale déduite de la taille de la maille et L une macro échelle ici approchée par $L = 0.41 d$, d étant la distance à la paroi la plus proche.

La mise au point de ce modèle et son test sur le cas du canal pulsé avaient montré d'intéressantes potentialités (Dejoan et Schiestel, 1999).

Dans la région de paroi, une extension à faible nombre de Reynolds est obtenue par transposition directe du modèle statistique de Jones et Launder (1972).

III.6 Equations du mouvement des grandes structures turbulentes en Coordonnées généralisées :

Après avoir défini les principales concepts d'analyse tensorielle, utile pour la construction des équations différentielles d'un écoulement incompressible du mouvement des grandes structures turbulentes en coordonnées curvilignes. plusieurs formes d'écriture s'imposent à nous, suivant le choix des variables dépendantes et des considérations de conservation des équations. Bien que d'une manière purement formelle elles soient équivalentes les unes aux autres, ces formulations renferment n'est au moins des différences considérables d'un point de vue numérique. Une vue d'ensemble des différentes options avec leurs avantages et inconvénients sont présentées dans [27]. Dans la présente étude une formulation invariante en coordonnées généralisées du flux de volume contravariant est adoptée.

Nous considérons les équations Navier-Stokes filtrées (3.25)-(3.27). Dans le but d'exprimer ces équations dans une forme invariante au changement de coordonnée, on rétablit la notation tensorielle générale avec des variances correctes, en remplaçant les dérivées partielles par des dérivées covariantes et en utilisant les tenseurs métriques :

$$u_{,\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} + (u^{\alpha} u^{\beta})_{,\alpha} + (g^{\alpha\beta} p)_{,\alpha} - \tau_{,\beta}^{\alpha\beta} = f^{\alpha} \quad (3.61)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{Re} + \nu_t\right) \cdot (g^{\alpha\gamma} u_{,\gamma}^{\beta} + g^{\beta\gamma} u_{,\gamma}^{\alpha}) \quad (3.62)$$

Notons qu'en coordonnées cartésiennes $g^{\alpha\beta}$ est égal au symbole de Kronecker δ_{α}^{β} . L'application du Théorème 2.5, nous permet, d'écrire ces équations en coordonnées généralisées sous la formulation suivante :

$$U_{,\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial t} + (U^{\alpha} U^{\beta})_{,\alpha} + (g^{\alpha\beta} p)_{,\alpha} - \tau_{,\beta}^{\alpha\beta} = F^{\alpha} \quad (3.64)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{Re} + \nu_t\right) \cdot (g^{\alpha\gamma} U_{,\gamma}^{\beta} + g^{\beta\gamma} U_{,\gamma}^{\alpha}) \quad (3.65)$$

Où U^{α} et F^{α} sont les composantes contravariantes du champ de vitesse et des forces extérieures. Pour des raisons que nous précisons plus tard nous choisirons les composants du flux de volume contravariants V^{α} , donné par,

$$V^{\alpha} = \sqrt{g} U^{\alpha} \quad (3.66)$$

comme variables dépendantes. Notez que V^{α} est un tenseur densité de rang 1.

Une procédure semblable est appliquée aux équations de modélisation de sous-maille des grandes échelles turbulentes. Nous avons la formulation invariante en coordonnées généralisée des équations de transport de l'énergie de turbulence de sous maille et du taux de dissipation, suivantes :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + (U^\alpha k_s)_{,\alpha} - \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) g^{\alpha\beta} k_{s,\beta} \right)_{,\alpha} = P_k - \varepsilon \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (U^\alpha \varepsilon)_{,\alpha} - \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) g^{\alpha\beta} \varepsilon_{,\beta} \right)_{,\alpha} = C_{s1} P_k \frac{\varepsilon}{k_s} - C_{s2} \frac{\varepsilon^2}{k_s} \quad (3.69)$$

Où le terme P_k représente la production d'énergie turbulente :

$$P_k = 2 \cdot \nu_t S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \quad (3.70)$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\gamma} U_{,\gamma}^\beta + g^{\beta\gamma} U_{,\gamma}^\alpha), \quad S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (U_{,\alpha,\beta} + U_{,\beta,\alpha}) \quad (3.71)$$

sont respectivement le tenseur contravariant et covariant de déformation du champ filtré. Les valeurs des constantes de fermeture sont données par (3.59).

Les équations du modèle de fermeture de sous-maille peuvent être considérées comme des équations de convection diffusion avec terme source non linéaire. Soit l'équation de transport générale suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (U^\alpha \phi)_{,\alpha} - (\Gamma \cdot g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta})_{,\alpha} = S \quad (3.72)$$

Où la quantité ϕ représente ε ou bien k , Γ est un coefficient de diffusion et S terme source qui dépend de U^α et de ϕ .

En utilisant (2.56) et (2.57), les équations du mouvement (3.63), (3.64) et l'équation de transport (3.72) peuvent s'écrire sous une forme plus approprié à une discrétisation en volumes finis :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} U^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} = F^\alpha \quad (3.74)$$

$$T^{\alpha\beta} = U^\alpha U^\beta + g^{\alpha\beta} p - \tau^{\alpha\beta} \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} Q^\beta}{\partial \zeta^\beta} = S \quad (3.76)$$

$$Q^\alpha = (U^\alpha \phi) - (\Gamma \cdot g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}) \quad (3.77)$$

III.7 Les Problèmes de simulation des régions près de la paroi :

Les différents résultats provenant des simulations SGE confirment l'efficacité de cette méthode à transcrire les principales phénomènes liés à une turbulence présentant une zone inertielle dynamique (sillage d'écoulement, jets et région externe de couche limite à un nombre de Reynolds élevé). Cette zone inertielle diminue à l'approche d'une limite solide, déplaçant la région à isotropie locale qu'a des échelles de plus en plus petites. D'après Saddoughi et Veeravalli [124] dans leur étude d'un écoulement de couche de mélange, le critère d'isotropie local est directement lié au taux de déformation du champ S_{ij} . Le taux de déformation du champ moyen devient bien sûr plus grand au voisinage d'une paroi, généralisant ainsi l'anisotropie à des plus petites échelles proche d'une limite solide. Aussi, très près des parois, les plus petits tourbillons doivent encore être suffisamment résolus. Ces structures cohérentes dans la sous-couche visqueuse ont une influence importante puisqu'ils interagissent avec la région tampon responsable pour une majeure partie de la production d'énergie [56]. Il a été estimé qu'utiliser la simulation SGE autour d'une aile d'avion à nombre de Reynolds de corde de 10^7 exigerait un nombre de nœuds de l'ordre de 10^{11} [137]. Cela illustre clairement les problèmes de la SGE près des parois. D'où la nécessité d'introduire de conditions aux limites basées sur les lois de parois pour des simulations à des nombres de Reynolds élevés, ou bien utilisé une approche simulant les très grandes échelles combinant la modélisation statistique près des parois et une simulation des grandes échelles en dehors [137][30].

III.8 Nouvelles directions de recherche, problèmes ouverts :

Citons le modèle de similitude d'échelles. (Bardina J., Ferizeger J.H. et Reynolds W.C., 1980, la similitude des modèles de turbulence, 1984) qui repose sur l'idée que la majorité des interactions entre grandes échelles et petites échelles est concentrée près de la coupure. En remarquant que le champ $\overline{\phi}$ est plus riche en grandes structures que le champ $\bar{\phi}$ on est conduit à définir : $\phi^* = \overline{\phi} - \bar{\phi}$ qui est supposé être représentatif des tourbillons d'échelles voisines des nombres d'onde de coupure. Le modèle suppose alors :

$$\tau_{ij} = C_b \left(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \right) \quad (3.78)$$

Ce qui traduit l'hypothèse que le champ fluctuant de sous-maille a une structure semblable à celle de la partie du champ filtré correspondant aux plus forts nombres d'ondes.

Les écoulements étudiés par simulation numérique de grandes structures turbulentes sont généralement des écoulements en géométrie assez simple et nécessitent l'emploi des supercalculateurs. L'extension à des situations industrielles ne peut être envisagée de façon courante. Parmi les problèmes ouverts, reste bien sûr le problème central de la fermeture de sous-maille, mais aussi d'autres problèmes plus techniques de mise en œuvre comme la formulation des conditions aux limites dans les sections d'entrée et de sortie. Pratiquement les conditions périodiques sont utilisées chaque fois que la direction correspondante peut être considérée comme homogène mais dans les cas plus généraux le problème reste plus délicat à maîtriser. Sur le plan des fondements de la théorie, le filtrage ne peut être assimilé à une moyenne statistique conditionnelle de façon simple. Ce fait est à l'origine des propriétés opératoires plus complexes de l'opérateur de filtrage.

Après avoir abordé certains aspects concernant la modélisation de sous maille, nous passons à la description de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes filtrées dans lesquelles les termes non linéaires ont été modélisés.

Chapitre IV

Résolution numérique

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une formulation tensorielle, invariante en coordonnées des équations différentielles de quantité du mouvement des grandes structures turbulentes d'un écoulement incompressible, et des principales équations de transport nécessaire à la modélisation de la turbulence des échelles de sous-maille. La résolution numérique de ces équations, impose en premier lieu de faire un choix judicieux des techniques de discrétisation spatiale, capables de fournir des approximations physiquement réalistes même sur des maillages distordus. Au cours des précédentes quinze dernières années plusieurs approches ont été proposées pour le développement des modélisations d'écoulements turbulents autour de géométrie complexe, tel que les méthodes des différences finies et des volumes finis, en maillage décalé ou collocatif, en coordonnées orthogonal ou non-orthogonal, en formulation de vitesses cartésiennes ou contravariantes. Un brève résumé des différentes possibilités de ces méthodes en tenant compte de leurs avantages et inconvénients sera donner dans la prochaine section.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une intégration spatiale en volume finie efficace et précise ainsi qu'une intégration temporelle stable des équations de Navier-Stokes filtrées avec deux équations de modélisation de turbulence des petites échelles sur un maillage de calcul décalé couramment utilisé pour les calculs d'écoulements incompressibles, car ils facilitent le couplage entre les champs de vitesse et de pression, en autorisant l'emploi de schéma centré pour approcher les dérivées spatiales de type gradient et divergence. En effet, grâce à la localisation des nœuds de pression par rapport aux nœuds des composantes de la vitesse, un schéma centré conduit à des molécules compactes à la fois pour le calcul de la divergence du champ de vitesse intervenant dans l'équation de continuité et dans la détermination du gradient de pression dans l'équation de la quantité de mouvement. Ceci, aussi interdit tout découplage entre les champs de vitesse et de pression, ce qui renforce la robustesse de la méthode. Les flux de volume contravariants seront choisis comme variables dépendantes. On supposera que Le domaine de calcul numérique rectangulaire ou cubique (structuré) est obtenu par transformation d'un domaine physique doublement ou multi connexes. Une discrétisation standard sera présenté dans la Section IV.3, restreinte à des grilles de maillage plus ou moins réguliers, en conséquence de l'avènement des symboles de Christoffel, qui exigent l'admissibilité d'une deuxièmes dérivés de la transformation $x=x(\zeta)$. Malgré cela, l'exactitude de la discrétisation peut être maintenue si certaines règles relatives aux approximations des quantités géométriques sont suivies. Dans la Section IV.4, une méthode plus appropriée aux maillages irréguliers, nécessaire dans un calcul resserré près des parois sera adopté afin de contourner les difficultés associées à ces derniers. Il est attendu que ces discrétisations maintiendront la stabilité et la consistance des schémas numériques utilisés dans la simulation, pour des changements rapides des dimensions de la maille dans le domaine physique. la discrétisation temporelle doit être réalisée de façon implicite pour ne pas baser le pas de temps sur la vitesse de propagation des ondes sonores, mais sur la vitesse du fluide. cependant, même si elle autorise l'emploi de grands pas de temps, l'avantage de la méthode n'est pas garanti, car la résolution d'un pas de temps peut se révéler coûteuse et peu précise suivant l'approche retenue.

IV.1 Analyse des travaux antérieurs de discrétisation en coordonnées curvilignes :

Une synthèse des différentes méthodes numériques utilisées pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes incompressible et de transport de la turbulence en coordonnées généralisées est évaluée et analysée afin d'en définir une ligne de procédures plus adaptées aux objectifs recherchés dans la présente étude.

Généralement, deux approches de base peuvent être considérées pour l'écriture des équations dans un système de coordonnées curvilignes. La première méthode consiste en une transformation complète des équations gouvernant le mouvement en coordonnées généralisées, comme ce fut présenté au chapitre précédent. Une telle formulation invariante en coordonnée implique l'introduction de plusieurs paramètres géométriques, et exige un temps de calcul et d'espace mémoire onéreux. De plus, l'évaluation des symboles de Christoffel, à partir d'un maillage irrégulier induit une source d'erreurs et d'instabilité qui peut altérer sérieusement la simulation. C'est peut-être là le principal inconvénient de cette stratégie, en particulier quand un modèle à deux équations de transport est utilisé, dont le taux de production d'énergie turbulente, nécessite le calcul de pas moins de six différents symboles de Christoffel dans le cas d'une simulation bidimensionnelle.

La deuxième approche de résolution procède par une transformation partielle des équations de Navier-Stokes et de modélisation afin d'éviter l'apparition des symboles de Christoffel, en maintenant les vitesses cartésiennes comme variables dépendantes obtenant ainsi une formulation conservatrice, et structurer plus simple à programmer.

Le choix entre les deux approches décrites au-dessus est dicté par le type de maillage utilisé: décalé ou collocatif. En maillage décalé, généralement les composantes de la vitesse cartésiennes, ne sont pas perpendiculaires par rapport aux faces de la maille, menant ainsi à une discrétisation instable consécutive d'une non-conservation de la masse discrétisée suivant une maille. D'où, la nécessité de choisir des variables dépendantes orientées suivant le maillage telles que les flux de volume contravariants. Sur un maillage collocatif l'orientation suivant les grilles de la maille dévient facultatif, levant ainsi les contraintes liées au maillage décalé, l'utilisation des vitesses cartésiennes comme variables primitifs dans les équations de mouvement paraît alors satisfaisant.

A la lumière des observations précédentes, l'approche collocatif/cartésiennes pour la discrétisation des équations Navier-Stokes moyennés avec le modèle standard " $k-\varepsilon$ " en coordonnées généralisées est devenu très populaire et a été largement utilisée pendant les quinze dernières années [38], [113], [104], [29], [117], [107], [19], [89], [180], [20], [169], [119], [144], [52] et [82]. Bien que l'approche collocatif soit très populaire, elle présente toute fois un inconvénient de taille celui des mesures spéciales exigées pour l'obtention d'une discrétisation stable, comme par exemple, l'interpolation de Rhie-Chow [113] afin d'éviter les difficultés dues au couplage de la pression et de la vitesse. Par contre, un maillage décalé a de nombreux avantages pour un calcul en écoulement incompressible, tel que l'élimination naturelle des oscillations non-physiques du calcul de la pression. En coordonnées cartésiennes un maillage décalé assure une discrétisation plus naturel, simple et exact qu'en maillage collocatif. Plusieurs études procédant par des discrétisations des équations de Reynolds sur des maillages décalé avec les composantes cartésiennes de vitesse comme variables primitifs ainsi que le modèle standard " $k-\varepsilon$ " en coordonnées généralisées sont présentés dans [92], [111], [10], [78], [173] et [17]. Comme c'est déjà mentionné cette approche peut donner lieu à une à discrétisations instable. Suivant Chen et al. [17], l'unique méthode pour éviter ces difficultés, est de choisir un système de coordonnées en essayant de minimiser l'angle entre

les variables dépendantes et la grille. Règle, très difficile à vérifier pour un domaine général, surtout en calcul tridimensionnel.

Des discrétisations sur un maillage décalé avec des vitesses orientées en grille comme inconnues sont présentées dans [109], [112], [26], [140], [87] et [57]. Dans [140] les équations gouvernant le mouvement sont formulées en notation vectorielle dont l'avantage est de ne pas présenter explicitement de symbole de Christoffel. Dans [112] et [87] les composantes de la vitesse contravariantes sont utilisées, tandis que dans [109], [26] et [57] les auteurs utilisent les composantes physiques covariantes de la vitesse comme inconnues.

Quelques publications utilisent le flux de volume contravariant V^α comme variables primitives (justement celles adoptées par notre étude) sur un maillage décalé [51], [120] et [7] restreintes aux écoulements laminaires.

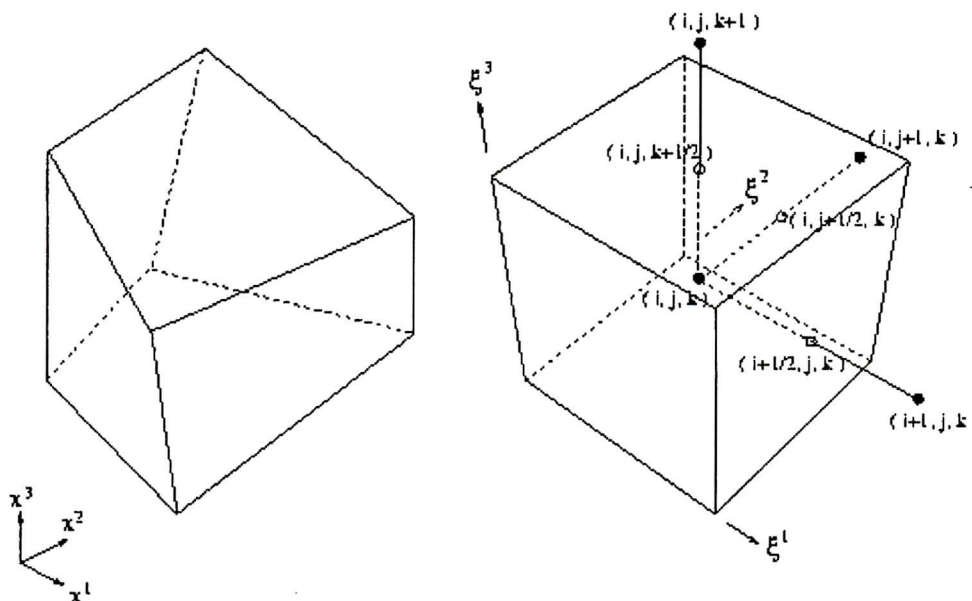
Jusqu'à présent, il est très compliqué de dire quelle est la meilleure approche pour calculer l'écoulement incompressible autour de géométries arbitraires, mais il est certainement évident que l'approche collocation/cartésienne très répandue est plus préférée, tandis que l'approche décalée/contravariant, qui demande dans un premier temps une écriture fastidieuse paraît une fois cette étape dépassée plus prolifique, par des calculs plus stables et consistants simulant le mouvement des grandes structures turbulentes.

IV.2 Génération de maillage et paramètres géométriques :

On considère le maillage en coordonnées curvilignes tridimensionnel d'un cube G transformé d'un domaine physique Ω . Dans G une maille uniforme G_h est définie par :

$$G_h = \left\{ \zeta_i, \zeta_{i-\frac{1}{2}}^1 = (i-1)\Delta\zeta^1, \zeta_{j-\frac{1}{2}}^2 = (j-1)\Delta\zeta^2, \zeta_{k-\frac{1}{2}}^3 = (k-1)\Delta\zeta^3; i=1,2,\dots,I, j=1,2,\dots,J, k=1,2,\dots,K \right\} \quad (4.1)$$

Ces points sont les faces des cellules. La figure(4.1) représente une cellule 3D. Il est supposé que les coordonnées des faces de la cellule soient les seules informations de base recherchées par la génération de maillage. Les faces de la cellule sont connectées par segments de lignes droites, correspondant à l'hypothèse d'une transformation d'un domaine physique doublement ou multi connexes.



Figure(4.1) Une maille tridimensionnelle dans le domaine physique Ω , et son image dans le domaine G

Dans un plan bidimensionnel ces raccordements sont appelés nœuds de maille. Une cellule tridimensionnelle est bornée par six faces, chacune une d'elles, est défini par quatre droites connectées, qui dans un cas général ne sont pas tracées dans le même plan, et dont les grilles n'ont plus besoin d'être uniforme. La cellule centrée au point $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ est appelée G_{ijk} et son image dans le plan Ω est appelé Ω_{ijk} . Le maillage $x=x(\zeta)$ est défini par les coordonnées des points $x\left(\zeta_{i-\frac{1}{2}}^1, \zeta_{j-\frac{1}{2}}^2, \zeta_{k-\frac{1}{2}}^3\right)$ étendus à tout le domaine G par interpolation tri-linéaire (bi-linéaire en bidimensionnel). Ainsi, à l'intérieur de la maille la transformation est donnée par la relation suivante :

$$x=c_0+c_1\zeta^1+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+c_4\zeta^1\zeta^2+c_5\zeta^1\zeta^3+c_6\zeta^2\zeta^3+c_7\zeta^1\zeta^2\zeta^3 \quad (4.2)$$

Où les constantes C_0, C_1, \dots, C_7 sont convenablement choisies. Ces constantes diffèrent d'une maille à une autre, pour une transformation $x=x(\zeta)$ supposée doublement ou multi connexes. Par ailleurs, on admet une certaine orientation des surfaces des faces de la cellule Ω_{ijk} .

La génération de maillage permet de collecter les différentes coordonnées des quatre points limitant chaque face de maille afin de pouvoir calculer les principaux paramètres géométriques liés au maillage. Cela sera discuté au-dessous, en premier lieu nous considérerons les propriétés de continuités de ces quantités. En partant de l'hypothèse d'une transformation doublement ou multi connexes tous les paramètres géométriques sont calculés à l'intérieur d'une cellule en prenant des différences centrées. Notons par ailleurs la discontinuité de certaines de ces quantités sur les faces de la cellule. Par exemple, à partir de l'équation.(4.2), on admet que $a(\alpha)$ est constant le long de la ligne ζ^β (c.-à-d. $\zeta^\beta = \text{constante}$, $\alpha \neq \beta$), et varie d'une maille à une autre, même pour des maillages non réguliers. Par contre, le long des faces $\zeta^\alpha = \text{constant}$, $a(\alpha)$ est discontinu si le maillage utilisé est non linéaire. Sur les autres faces de la maille, on trouve que $a(\alpha)$ est continu. D'après (4.2) la dérivée ζ^β du vecteur base covariant $a(\alpha)$ est continu sur les faces γ tel que $\gamma \neq \alpha \neq \beta$, toutefois sur les faces α et β la dérivée $\frac{\partial a(\alpha)}{\partial \zeta^\beta}$ est en général discontinue.

Tout cela présage des nombreuses difficultés ayant trait aux calculs des symboles de Christoffel. Les propriétés de continuités des quantités géométriques restantes suivent ceux des vecteurs de base covariants. D'après (2.32) et (2.39), \sqrt{g} est discontinu sur toutes les faces de la maille. Alors que $\sqrt{g}a(\alpha)$ est régulier et seulement discontinu sur les faces β ($\alpha \neq \beta$). Les quantités géométriques sont calculées à l'aide de différences centrales et d'interpolation linéaire. Par exemple, les vecteurs base covariants $a(\alpha) = \frac{\partial x}{\partial \zeta^\alpha}$ sont calculés

suivant un arrangement décalé au centre des bords de la maille G_{ijk} d'après :

$$a(1)^\beta \Big|_{(i, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})} = \frac{x(i + \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta - x(i - \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta}{\Delta \zeta^1}$$

$$a(2)^\beta \Big|_{(i \pm \frac{1}{2}, j, k \pm \frac{1}{2})} = \frac{x(i \pm \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta - x(i \pm \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta}{\Delta \zeta^2}$$

$$a_{(3)}^{\beta} \Big|_{\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k\right)} = \frac{x_{\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}^{\beta} - x_{\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)}^{\beta}}{\Delta \zeta^3} \quad (4.3)$$

Aux autres points (au centre de la maille, faces) les vecteurs de base covariants sont obtenus à partir de leurs valeurs au milieu des faces par une simple moyenne, par exemple on a :

$$a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left(a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} \right) \quad (4.4)$$

Sur les faces où les vecteurs de base covariants sont discontinus, leurs valeurs sont obtenues grâce à des moyennes arithmétiques des vecteurs de base covariants existants :

$$a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)} = \frac{1}{4} \left(a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)} \right) \quad (4.5)$$

Les vecteurs de base contravariants sont obtenus par orthogonalité de (2.31). Dans le cas bidimensionnel, en prenant, $a_{(1)}^1 = a_{(2)}^2 = 0$, l'équation (2.31) permet d'écrire :

$$a^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g}} (a_{(2)}^2 - a_{(2)}^1)^T \quad \text{et} \quad a^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{g}} (-a_{(1)}^2 - a_{(1)}^1)^T \quad (4.6)$$

avec

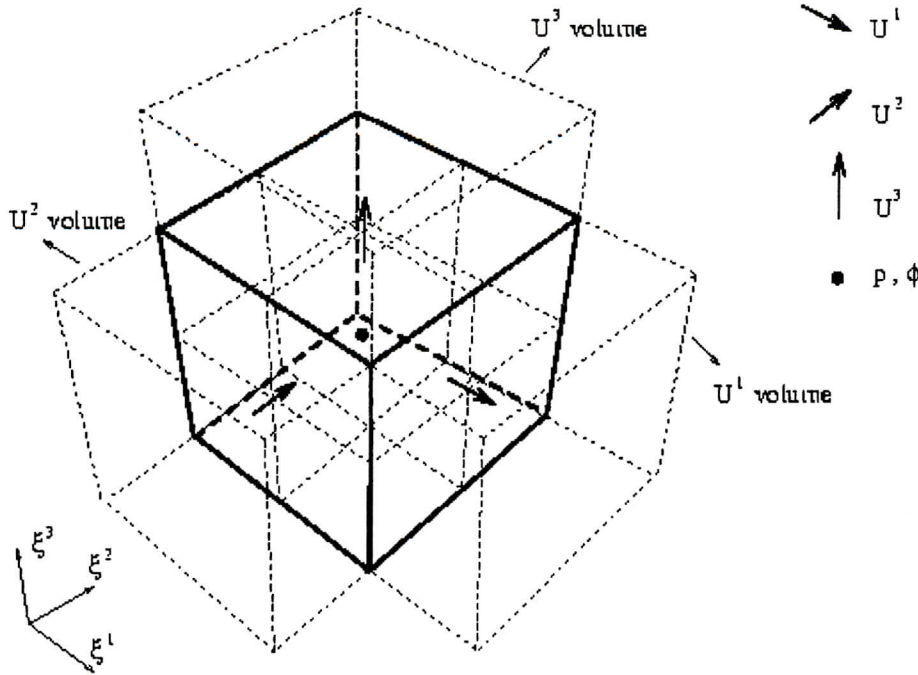
$$\sqrt{g} = a_{(1)}^1 a_{(2)}^2 - a_{(1)}^2 a_{(2)}^1 \quad (4.7)$$

Après les différentes approximations numériques, il est préférable de satisfaire à la relation (2.58), ce qui est toujours le cas en calculant les vecteurs de base contravariant l'aide de (4.6) ou, dans un cas plus général, par la condition d'orthogonalité (2.31). A partir de (2.36) et (2.37) on peut déduire les valeurs des tenseurs métriques covariants et contravariants de tous les points du maillage. Les symboles de Christoffel sont alors calculés par des différences centrales après avoir calculé $a_{(\alpha)}$ et $a^{(\alpha)}$ aux points exigés, en utilisant l'équation (2.46). Cela complète notre description de la méthode de calcul des quantités géométriques.

IV.3 Discrétisation invariante en volumes finis des équations gouvernant le mouvement :

La méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser les équations de l'écoulement autour d'un corps arbitraire (3.73)-(3.77). Cette méthode est basée sur la résolution d'une forme intégrale de ces équations. Le domaine Ω est divisé en volumes élémentaires auxquelles on applique l'intégration. Un arrangement décalé des variables est utilisé où tous les scalaires (pression et quantités turbulentes) sont localisés aux centres de la cellule (i, j, k) alors que les composants de la vitesse U^α sont placés dans la direction ζ^α au centre des faces de la maille. En conséquence, U^1, U^2 et U^3 sont définis respectivement aux points $\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right), \left(i, j + \frac{1}{2}, k\right), \left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)$. Pour chaque inconnu nous définissons une collection d'un nombre fini de volume de contrôle sur tout le domaine Ω . La figure (4.2) présente l'arrangement de l'ensemble des inconnues, ainsi que le volume de contrôle correspondant dans un système ζ^α . Chaque inconnu est centré au milieu de ça maille de contrôle.

Dans les trois prochaines sections nous considérons respectivement la discrétisation spatiale de l'équation de continuité (3.73), des équations de Navier-Stokes filtrées (3.74) et de l'équation du transport (3.76)- (3.77).



Figure(4.2) L'arrangement des inconnues dans une maille décalé 3D

En utilisant le théorème de divergence de Gauss, on transforme les intégrales de volume contenant les termes d'opérateurs différentiels en intégrales de surface des faces de la cellule. La dérivée temporelle et la partie droite des équations constituent les termes source ainsi que les termes dus à la courbure qui ne peuvent pas être exprimés en opérateurs différentiels de flux de volume et qui doivent être évalués d'une autre manière. La transformation de maillage $x=x(\zeta)$ est choisie de telle façon $\Delta\zeta^\alpha=1$ pour $\alpha=1,2,3$.

IV.3.1 L'équation de continuité :

La discrétisation de l'équation de la continuité (3.73) est obtenue par une intégration sur chaque cellule G_{ijk} suivant :

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} U^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega = \int_{C_{i,j,k}} \frac{\partial \sqrt{g} U^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3$$

$$\approx V_1 \left| \begin{matrix} i+\frac{1}{2}, j, k \\ i-\frac{1}{2}, j, k \end{matrix} \right| + V_2 \left| \begin{matrix} i, j+\frac{1}{2}, k \\ i, j-\frac{1}{2}, k \end{matrix} \right| + V_3 \left| \begin{matrix} i, j, k+\frac{1}{2} \\ i, j, k-\frac{1}{2} \end{matrix} \right| = 0 \tag{3.8}$$

Avec :

$$V^\alpha = \sqrt{g} U^\alpha = \sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot u \tag{3.9}$$

appelés flux de volume, et utilisés comme inconnues primitives, au vu des constatations suivantes :

1. Quand on représente un champ de vitesse constant u en composantes contravariantes, le recalcul du vecteur original u à partir de ces composantes devrait être exactement retrouvé, or cette exigence peut être satisfaite seulement si on utilise les composantes contravariantes V^α au lieu de U^α (voir [91]).

2. D'après la section IV.2, il est évident que la vitesse $U^\alpha = a^{(\alpha)}.u$ n'est pas continue sur les faces α . D'un autre côté puisque $\sqrt{g}a^{(\alpha)}$ est continu sur toutes les faces de maille $\zeta^\alpha = \text{constant}$ alors, V^α l'est aussi.

IV.3.2 Les équations de quantité de mouvement :

L'équation (3.74) peut être réécrite sous la forme tensorielle suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\beta} = F^\alpha - \frac{\partial U^\alpha}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} \quad (4.10)$$

avec :

$$T^{\alpha\beta} = U^\alpha U^\beta + g^{\alpha\beta} p - \tau^{\alpha\beta}$$

Ces équations sont discrétisées dans l'espace par intégration suivant un volume de contrôle centré au point de localisation de V^α . Par exemple, pour $\alpha=1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{1\beta}}{\partial \zeta^\beta} d\Omega &= \int_{C_{i+\frac{1}{2},j,k}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{1\beta}}{\partial \zeta^\beta} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \\ &\approx \sqrt{g} T^{11} \Big|_{(i,j,k)}^{(i+1,j,k)} + \sqrt{g} T^{12} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}^{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} + \sqrt{g} T^{13} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La partie droite de l'équation (4.10) est intégrée en utilisant la règle du point milieu :

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}} \left(F^1 - \frac{\partial U^1}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} \right) d\Omega \approx \sqrt{g} \left(F^1 - \frac{\partial U^1}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} \right) \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} \quad (4.12)$$

L'intégration de l'équation (4.10) sur le volume de contrôle $\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k}$ et $\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ respectivement, pour $\alpha=2$ et $\alpha=3$ peut être obtenue d'une manière similaire à celle présentée au-dessus. La discrétisation est complétée par la substitution de (3.62) et (3.75) dans (4.11). Les symboles de Christoffel sont introduits dans les équations discrétisées par les dérivées covariantes des vitesses contravariantes dans (3.62). En outre, la vitesse U^α est remplacée dans les équations

obtenues par $\frac{V^\alpha}{\sqrt{g}}$. La discrétisation du terme convectif nécessite une linéarisation par la méthode standard de Newton:

$$V^\alpha V^\beta \approx \bar{V}^\alpha V^\beta + V^\alpha \bar{V}^\beta - \bar{V}^\alpha \bar{V}^\beta \quad (4.13)$$

Où \bar{V}^α représente la vitesse contravariante prise au temps précédent. Finalement les flux à travers les faces de la maille contenant les quantités de convection et les dérivées de diffusion doivent être évalués approximativement par des différences centrales combinées à des interpolations bi-linéaire (4-points), par exemples :

$$V_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^2 = \frac{1}{4} (V_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^2 + V_{(i,j-\frac{1}{2},k)}^2 + V_{(i+1,j+\frac{1}{2},k)}^2 + V_{(i+1,j-\frac{1}{2},k)}^2) \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3} \Big|_{(i,j,k)} = V_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^3 - V_{(i,j,k-\frac{1}{2})}^3 \tag{4.15}$$

Bien que les différences centrales soient non-monotones, et donnent lieu à des oscillations non-physiques, typiquement au voisinage des régions à fort gradient, elles restent une référence très fiable, pour des simulations à des nombres de Reynolds élevés. En pratique, la discrétisation des équations de quantité de mouvement est implémentée par des schémas centraux même non-monotones dont les résultats sont d'une précision avérée.

Le discrétisation de l'équation de mouvement- V^1 dans le cas bidimensionnel présente un stencil de discrétisation de 19-points sur lesquels les molécules des différents termes sont représentées sur la figure (4.3)

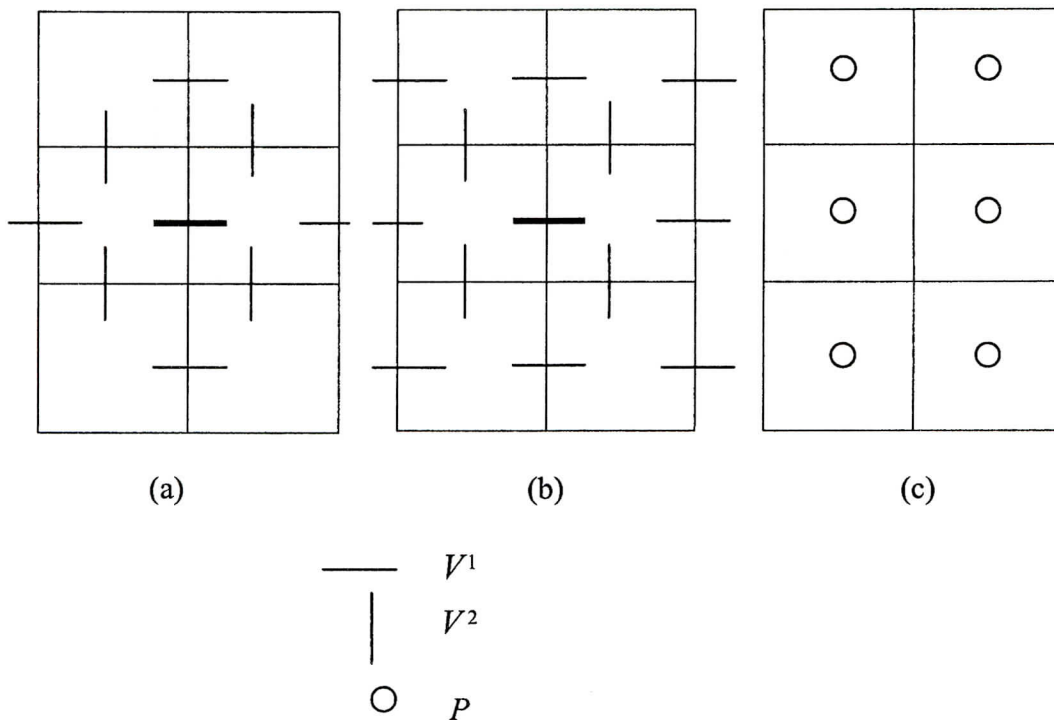


Figure (4.3) Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement - V^1 en 2D: (a) les termes de Convection ; (b) les termes de diffusion ; (c) les termes de pression

Le stencil- V^2 est obtenu par rotation de 90° . En trois dimensions, le nombre total des variables rassemblées dans l'équation de mouvement- V^1 est de 61 (V^1 -19 points, V^2 -16 points, V^3 -16 points et P - 10 points) qui est plus compliqué à tracer.

IV.3.3 L'équation du transport :

L'équation du transport (3.76) est intégrée sur une cellule de la pression au centre (i, j, k) suivant la formulation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i,j,k}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} Q^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega &= \int_{C_{i,j,k}} \frac{\partial \sqrt{g} Q^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \\ &\approx \sqrt{g} Q^1 \Big|_{(i-\frac{1}{2}, j, k)}^{(i+\frac{1}{2}, j, k)} + \sqrt{g} Q^2 \Big|_{(i, j-\frac{1}{2}, k)}^{(i, j+\frac{1}{2}, k)} + \sqrt{g} Q^3 \Big|_{(i, j, k-\frac{1}{2})}^{(i, j, k+\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (4.16)$$

La partie droite de l'équation est intégrée en utilisant la règle du point milieu :

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} \left(S - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Omega \approx \sqrt{g} \left(S - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_{(i,j,k)} \quad (4.17)$$

On substitue (3.77) dans l'équation (4.16) pour compléter la discrétisation. Les inconnues ϕ sont obtenues au centre des cellules de calcul. Les différences centrales devraient être utilisées pour maintenir la précision au deuxième ordre. Cependant, ces schémas, ont une tendance à produire des oscillations qui peuvent endommager la stabilité des solutions du modèle à deux équations, et favorise l'apparition de valeurs négatives des quantités turbulentes accrues par la non-linéarité et le couplage fort entre les équations du modèle, ce qui peut entraver la convergence des solutions.

IV.3.4 Le terme de production dans le modèle à deux équations :

Le taux de production d'énergie turbulente formulé par (3.70) est un terme source dans les équations de modélisation de turbulence. La discrétisation de ce terme est porté au centre (i, j, k) par des différences centrales et d'interpolations bi-linéaires en utilisant le minimum de nœuds proches du point de discrétisation. De plus en utilisant $V^\alpha = \sqrt{g} U^\alpha$ comme inconnues, la dérivée covariante des composantes de la vitesse contravariante doit être exprimée en composantes du flux. En vertu de (2.49) et (2.54) on obtient :

$$U_{,\beta}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \zeta^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta \end{matrix} \right\} V^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} V^\gamma \right) \quad (4.18)$$

En conséquence le terme de production contiendra plusieurs symboles de Christoffel, particulièrement, en 3D produisant ainsi des résultats imprécis même sur des maillages faiblement irréguliers. Pour y remédier à cela ces symboles sont éliminés dans cette formule en utilisant le lemme de Ricci (2.53) substitué dans (3.71) suivant :

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(g^{\alpha\gamma} \frac{\partial U^\beta}{\partial \zeta^\gamma} + g^{\beta\gamma} \frac{\partial U^\alpha}{\partial \zeta^\gamma} - \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\gamma} U^\gamma \right) \quad (4.19)$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\gamma} \frac{\partial U^\gamma}{\partial \zeta^\beta} + g_{\gamma\beta} \frac{\partial U^\gamma}{\partial \zeta^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\gamma} U^\gamma \right) \quad (4.20)$$

Où, on remplace la vitesse U^α par $\frac{V^\alpha}{\sqrt{g}}$. Bien que, la discrétisation de (4.19) et (4.20) produit de meilleurs résultats que (4.18), elle reste imprécise pour des simulation sur des maillages déformés.

IV.4 Discrétisation Invariante des équations gouvernant le mouvement sur des maillages non-réguliers :

En conséquence, de la présence des symboles de Christoffel dans les équations discrétisées, la transformation $x=x(\zeta)$ utilisée pour générer le maillage doit être deux fois différentiable. Cela est vérifié si les points de la grille $x=x(\zeta)$, $\zeta \in G_h$ sont distribués d'une manière uniforme dans le domaine physique Ω doublement ou multi connexes. L'utilisation de maillage présentant des changements rapides de dimensions de maille a des fines pratiques est très répandue, par exemple la simulation de la turbulence près des parois d'un corps arbitraire, nécessite un traitement particulier, le maillage utilisé par les auteurs est resserré près des parois selon des projections topographiques une seule fois différentiable. Dans ce cas l'emploi de la méthode décrite auparavant est inadéquat aux vus des résultats erronés produits par cette procédure.

Pour y remédier à ces difficultés les trois prochaines sections seront consacrées à la présentation d'une méthode de discrétisation qui n'exige plus l'admissibilité par la transformation $x=x(\zeta)$ d'une deuxième dérivée et dont la précision est maintenue dans le cas d'une simulation d'un champ uniforme de vitesse et scalaire ainsi qu'un champ de pression bi-linéaire sur des grilles arbitraires. De plus, cette approche est du deuxième ordre quand la projection topographique est lisse et réduite à un schéma MAC cartésien [41] quand l'identité de génération de maillage $x=\zeta$, est utilisée [161].

Parce que cette nouvelle méthode s'avère pour être quelque peu compliquée, on procède par un résumer des principales traits de la méthode :

- On débute l'écriture des équations de l'écoulement par une formulation cartésienne.
- Transformation des variables indépendantes : La vitesse cartésienne et les contraintes ainsi que les termes de gradient sont retenus dans un premier temps dans cette formulation. Les équations sont écrites dans leur forme définitive en utilisant une notation vectorielle/tensorielle mixte plus adaptée à une discrétisation.
- La discrétisation des équations de l'écoulement est obtenue au moyen d'intégration en volumes finis. Les termes de convection et visqueux impliquant des vitesses ou des scalaires sur des points qui ne coïncident pas avec leurs points de définition sont automatiquement interpolés. En outre, quelques définitions de certaines quantités non continues sur les faces ou les bordures des cellules sont introduites. Ces définitions maintiennent la précision même pour des champs d'écoulements constants sur des maillages irréguliers. Les termes de gradient de pression sont approchées par une méthode d'intégration appeler chemin d'intégration [164].
- On transforme les équations discrétisées pour u en prenant le produit scalaire de cette équation par $\sqrt{g}a^{(\alpha)}$ pour obtenir des équations pour V^α .

- Finalement, les équations du mouvement discrétisées contenant u et V^α sont écrites sous une forme invariante en coordonnées en exprimant u en termes de V^α dans leurs points de définition. Par conséquent, l'interpolation et la définition des quantités sur les faces des cellules sont obtenues avec une grande précision même pour un champ d'écoulement uniforme sur des grilles arbitraires.

IV.4.1 L'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement :

Dans le reste de cette section nous nous restreignons à un calcul bidimensionnel. Pour la discrétisation, un maillage décalé représenté sur la figure (4.4) est employé. Pour l'équation de continuité la discrétisation robuste (4.8) est retenue sur des mailles arbitraires, car les flux de masse ont des propriétés de régularité dans leurs points de définition. Nous continuons alors avec les équations de mouvement.

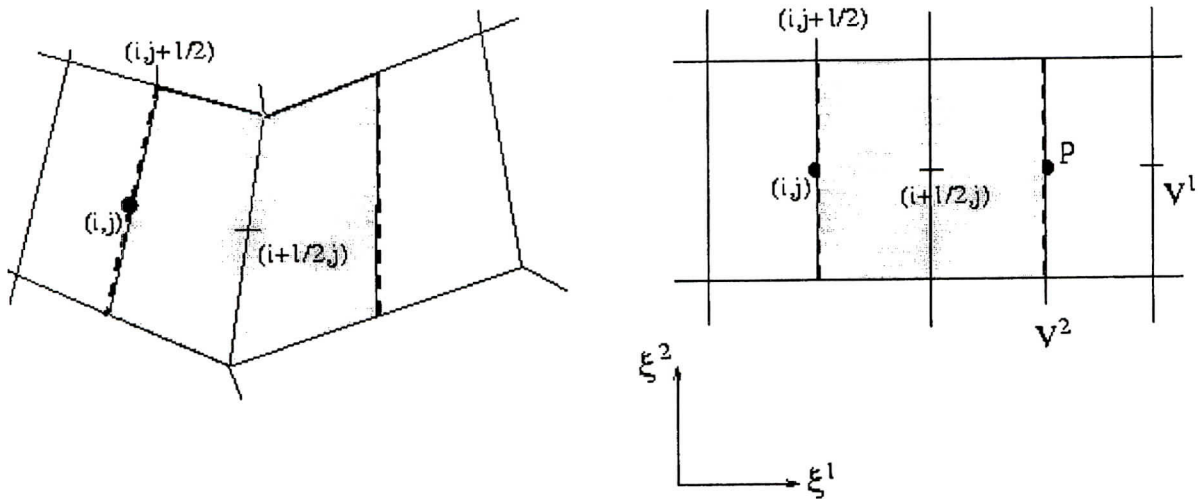


Figure (4.4) Le maillage décalé bidimensionnel et le volume de contrôle $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ et son image $G_{i+\frac{1}{2},j}$

En premier lieu, nous avons besoin d'une expression pour la dérivée partielle de toute quantité ϕ suivant x exprimée en termes de coordonnées généralisées, à savoir :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} (\sqrt{g} a_\beta^{(\gamma)} \phi) \tag{4.21}$$

Obtenu en utilisant la l'identité (2.58). Dans un premier temps, pour abaisser l'indice contravariant α , la relation de transformation (4.21) est considérée sans qu'aucun changement ne soit effectué sur les termes de pression ou sur le tenseur des contraintes visqueuses, les équations de mouvement (3.74)-(3.75) sont alors écrites sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u_\alpha}{\partial \zeta^\gamma} + \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} (\sqrt{g} a_\beta^{(\gamma)} \tau_\alpha^\beta) = f_\alpha \tag{4.22}$$

$$\tau_\alpha^\beta = \nu_{eff} \cdot \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + g^{\beta\gamma} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\gamma} \right) \tag{4.23}$$

avec V_{eff} viscosité effective définie comme étant la somme d'une viscosité turbulente ν_t et du nombre de Reynolds. La raison pour laquelle l'équation (4.22) est écrite sous une forme hybride qui contienne des tenseurs en notations cartésiennes et générales sera discutée plus tard. Il a été trouvé que la forme vectorielle (4.22) est une forme très utile pour un début de discrétisation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} + \nabla p - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} \left(\sqrt{g} a_\beta^{(\gamma)} \tau^{(\beta)} \right) = f \quad (4.24)$$

$$\tau^{(\beta)} = \left(\tau_1^{(\beta)}, \tau_2^{(\beta)} \right)^T \quad (4.25)$$

Nous considérons séparément la discrétisation dans l'espace de chacun des termes de (4.24). Ces termes sont intégrés suivant les différents volumes du contrôle de vitesse. Nous prenons comme modèle le volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ de la figure(4.4), la contribution de l'équation discrétisé sur le volume $\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}$ peut être facilement obtenue par rotation et symétrie.

L'intégration de la dérivée temporelle et de la partie droite de (4.24) à travers le volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$, est donnée par:

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} ; \quad \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} f d\Omega = \sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)} f \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.26)$$

puisque \sqrt{g} est discontinu au point $(i+\frac{1}{2},j)$ nous devons définir $\sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)}$ par une moyenne arithmétique du Jacobien des deux points avoisinant le centre :

$$\sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{g}_{(i,j)} + \sqrt{g}_{(i+1,j)} \right) \quad (4.27)$$

Notons que (4.26) est exact pour un champ de vitesse constant dans l'espace. L'intégration du terme de convection à travers le volume, est donnée par:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} d\Omega &= \int_{C_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} d\zeta^1 d\zeta^2 \\ &\approx \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{j+\frac{1}{2}}} V^1 u \Big|_i^{i+1} d\zeta^2 + \int_{\zeta_i^1}^{\zeta_{i+1}^1} V^2 u \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} d\zeta^1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Où nous avons supposé les vitesses V^1 et u continues aux points $(i+\frac{1}{2},j)$. Les deux dernières intégrales de (4.28) sont approchés par une moyenne, valable pour n'importe quelle transformation en coordonnées généralisées avec $u=\text{constante}$. Cependant, en contraste avec l'approximation du premier terme de ces deux intégrales le second ne peut être approché avec une précision du deuxième ordre, si la transformation $x=x(\zeta)$ n'est pas doublement différentiable, parce que V^2 et u ne sont pas continues suivant ζ^1 aux points $(i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2})$. En conséquence, l'approximation devient du premier ordre en précision. De là, nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} d\Omega \approx V^1 u \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} + V^2 u \Big|_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \quad (4.29)$$

on définit

$$V_{(i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2})}^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \left(V_{(i,j\pm\frac{1}{2})}^{(2)} + V_{(i+1,j\pm\frac{1}{2})}^{(2)} \right) \quad (4.30)$$

qui peut être considéré comme exact pour un champ de vitesse uniforme. Le flux V^1 dans (4.29) est calculé par interpolation linéaire :

$$V_{(i,j)}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left(V_{(i-\frac{1}{2},j)}^{(1)} + V_{(i+\frac{1}{2},j)}^{(1)} \right) ; \quad V_{(i+1,j)}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left(V_{(i+\frac{1}{2},j)}^{(1)} + V_{(i+\frac{3}{2},j)}^{(1)} \right) \quad (4.31)$$

Une autre approximation de u est requise, pour cela un schéma central est obtenu, en utilisant les moyennes suivantes :

$$u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} \left(u_{(i-\frac{1}{2},j)} + u_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) ; \quad u_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \equiv \frac{1}{2} \left(u_{(i+\frac{1}{2},j+1)} + u_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \quad (4.32)$$

Un schéma décentré en amont du premier ordre est obtenu par exemple, avec :

$$u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign} (V_{(i,j)}^{(1)}) \right] u_{(i-\frac{1}{2},j)} + \frac{1}{2} \left[1 - \text{sign} (V_{(i,j)}^{(1)}) \right] u_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.33)$$

et

$$u_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign} (V_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{(2)}) \right] u_{(i+\frac{1}{2},j+1)} + \frac{1}{2} \left[1 - \text{sign} (V_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{(2)}) \right] u_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.34)$$

Tous les termes de convection sont linéairement approchés à l'aide de la méthode standard de Newton.

Une approximation précise du gradient de pression est capitale, particulièrement sur des grilles irrégulières, à cause de son influence directe sur la résolution. C'est en conséquence de la contribution relativement élevée du gradient de pression au processus d'équilibre qui dicte le niveau des forces vives dans le cas d'un nombre de Reynolds élevé.

Dans [164, 149], une approche particulière et précise est utilisée pour évaluer correctement le gradient de pression ou d'une manière générale le gradient d'un scalaire. L'idée de base de cette méthode appelée chemin d'intégration (integration-path) est d'intégrer le gradient en question le long des trajectoires convenablement choisies dans le domaine physique et en exploiter la régularité pour obtenir une approximation. Il a été montré que cette approximation est exacte pour des gradients constants sur des grilles arbitraires non uniformes.

Avant d'appliquer cette méthode pour calculer le gradient de pression, on intègre dans un premier temps ce terme à travers $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$, suivant:

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \nabla p \cdot d\Omega = \sqrt{g} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \nabla p \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.35)$$

$\sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)}$ est défini par (4.27). L'approximation (4.35) est vérifiée exacte pour un champ de pression bi-linéaire. Nous choisissons un chemin d'intégration à travers le point $(i+\frac{1}{2},j)$. Un choix évident est celui $(i+1,j)-(i,j)$, obtenu par l'intégration suivante :

$$p\Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} = \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \nabla p \cdot dx \approx \nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} dx \equiv \nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} c(1) \quad (4.36)$$

où nous avons privilégié la propriété de régularité de ∇p au point $(i+\frac{1}{2},j)$. En outre, (4.36) est toujours vérifié pour un $\nabla p = \text{constant}$ et :

$$c(1) = \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} dx \equiv \frac{1}{2} \cdot (a_{(1)}\Big|_{(i,j)} + a_{(1)}\Big|_{(i+1,j)}) \quad (4.37)$$

afin trouver une équation supplémentaire pour résoudre ∇p , un autre chemin d'intégration à travers le point $(i+\frac{1}{2},j)$ doit être choisi. Nous choisissons la moyenne des deux trajectoires, comme suit:

$$\frac{1}{2} (p\Big|_{(i,j-1)}^{(i,j+1)} + p\Big|_{(i+1,j-1)}^{(i+1,j+1)}) = \frac{1}{4} \left(\int_{x(i,j-1)}^{x(i,j+1)} + \int_{x(i+1,j-1)}^{x(i+1,j+1)} \right) \nabla p \cdot dx \approx \nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} c(2) \quad (4.38)$$

avec :

$$c(2) = \frac{1}{8} \cdot a_{(2)}\Big|_{(i,j-1)} + \frac{1}{4} \cdot a_{(2)}\Big|_{(i,j)} + \frac{1}{8} a_{(2)}\Big|_{(i,j+1)} + \frac{1}{8} a_{(2)}\Big|_{(i+1,j-1)} + \frac{1}{4} a_{(2)}\Big|_{(i+1,j)} + \frac{1}{8} a_{(2)}\Big|_{(i+1,j+1)} \quad (4.39)$$

qui reste encore exact pour les champs de pression bi-linéaire. Les équations (4.36) et (4.38) sont résolues pour ∇p par la méthode de Cramer. En analogie avec (4.6) et (4.7) nous définissons :

$$c^{(1)} = \frac{1}{C} (c_{(2)}^2 - c_{(1)}^2)^{\gamma} ; c^{(2)} = \frac{1}{C} (-c_{(1)}^2 - c_{(1)}^2)^{\gamma} ; C = c_{(1)} c_{(2)}^2 - c_{(1)}^2 c_{(2)} \quad (4.40)$$

La solution s'écrit alors :

$$\nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{2} \cdot p\Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} \cdot c^{(1)} + \frac{1}{2} (p\Big|_{(i,j-1)}^{(i,j+1)} + p\Big|_{(i+1,j-1)}^{(i+1,j+1)}) c^{(2)} \quad (4.41)$$

D'une façon similaire au terme de convection, la discrétisation du terme visqueux est obtenue par l'intégration suivante :

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^{\gamma}} (\sqrt{g} a_{\beta}^{(\gamma)} \tau^{\beta}) d\Omega = \int_{C_{i+\frac{1}{2},j,k}} \frac{\partial}{\partial \zeta^{\gamma}} (\sqrt{g} a_{\beta}^{(\gamma)} \tau^{\beta}) d\zeta^1 d\zeta^2$$

$$\approx \sqrt{g} a_{\beta}^{(1)} \tau^{\beta} \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} + \sqrt{g} a_{\beta}^{(2)} \tau^{\beta} \Big|_{(i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2})} \quad (4.42)$$

Cette dernière relation reste vérifier pour $\sqrt{g} a_{\beta}^{(\gamma)} \tau^{\beta}$ constant, $\forall \gamma \in [1, 2]$ et aussi pour un champ de vitesse bi-linéaire. Par ailleurs :

$$\sqrt{g} a^{(2)} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j\pm 1)} = \frac{1}{2} (\sqrt{g} a^{(2)} \Big|_{(i+1,j\pm 1)} + \sqrt{g} a^{(2)} \Big|_{(i,j\pm 1)}) \quad (4.43)$$

puisque $\sqrt{g} a^{(2)}$ est continu et constant aux points $(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})$ et $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$. Par conséquent, sauf pour des maillages réguliers, τ^β est non différentiable suivant ζ^1 . On utilise alors la méthode du chemin d'intégration pour approcher le terme $v_{eff} \nabla u^\alpha$ qui apparaît dans τ^β et maintenir ainsi la précision, quand v_{eff} varie rapidement. En utilisant par exemple, la continuité de $v_{eff} \nabla u^\alpha$ au point $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i,j+1)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} \right) &= \frac{1}{2} \left(\int_{x(i,j+1)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \right) \frac{1}{v_{eff}} v_{eff} \nabla u^\alpha . dx \\ &\approx v_{eff} \nabla u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} \frac{1}{2} \left(\int_{x(i,j+1)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \right) \frac{1}{v_{eff}} . dx \end{aligned} \quad (4.44)$$

La dernière intégrale peut être évalué suivant:

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{1}{2} \left(\int_{x(i,j+1)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \right) \frac{1}{v_{eff}} . dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j)} + \frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j)} + \frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j+1)} + \frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j+1)} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Pour trouver une deuxième équation pour $v_{eff} \nabla u^\alpha$ nous choisissons une autre trajectoire d'intégration à travers le point $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$. Un choix évident est celui de la moyenne des deux trajectoires, suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i+1,j)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i,j+1)} \right) &= \frac{1}{2} \left(\int_{x(i+1,j)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i,j+1)} \right) \frac{1}{v_{eff}} v_{eff} \nabla u^\alpha . dx \\ \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i+1,j)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i,j+1)} \right) &\approx v_{eff} \nabla u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} c(2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\text{avec : } c(2) = \frac{1}{4} \left(\frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j)} + \frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j)} + \frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j+1)} + \frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j+1)} \right) \quad (4.47)$$

Résoudre (4.44) et (4.46) pour $v_{eff} \nabla u^\alpha$ au point $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$, nous permet d'écrire les résultats suivants :

$$\begin{aligned} v_{eff} \nabla u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i,j+1)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} \right) c(1) + \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i+1,j)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i,j+1)} \right) c(2) \\ &\approx u^\alpha \Big|_{(i,j+\frac{1}{2})}^{(i+1,j+\frac{1}{2})} . c(1) + u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)}^{(i+\frac{1}{2},j+1)} . c(2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Avec $c^{(\alpha)}$ donné par (4.40). Suivant la même procédure, on peut obtenir une expression pour $v_{eff} \nabla u^\alpha$ aux autres faces de la cellule ainsi qu'au centre.

La discrétisation spatiale des équations complétés, est représenté par une structure de molécules sur la figure(4.5). Nous devons transformer les équations complètement discrétisées en terme de flux de volume V^α .

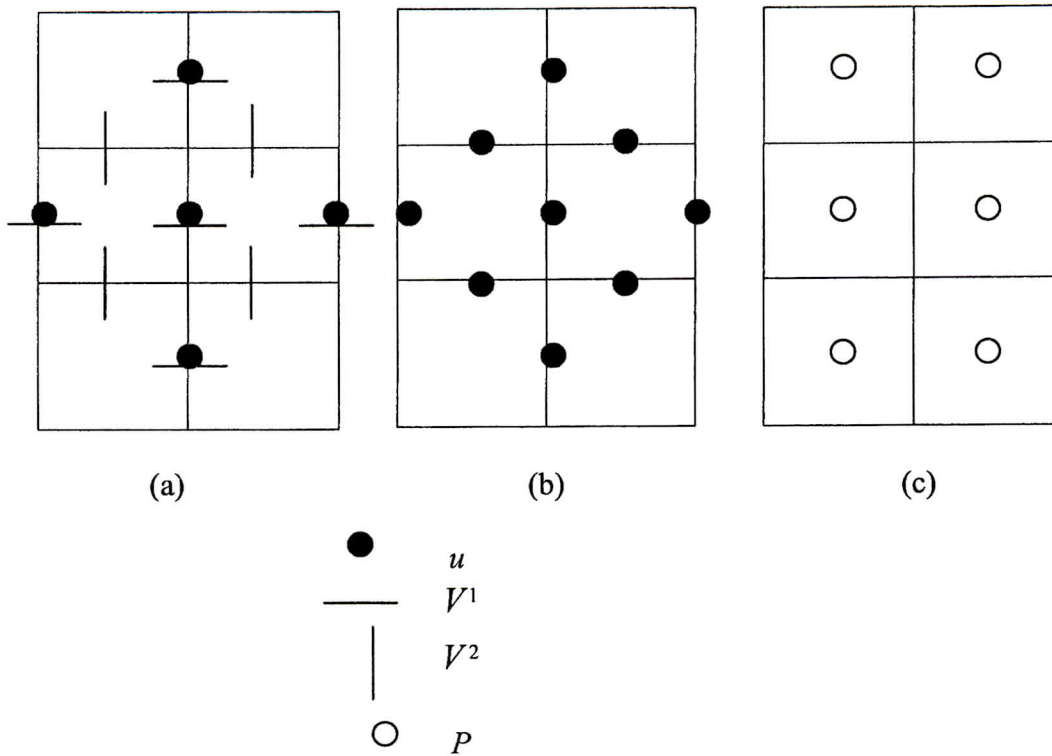


Figure (4.5) Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement $-u$ en 2D :(a) les termes de Convection ; (b) les termes de diffusion ; (c) les termes de pression

Cette opération est constituée de deux étapes. Premièrement, en prenant le produit scalaire de $\sqrt{g}a^{(1)}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)}$ et des intégrales suivant le volume de contrôle $\Omega_{(i+\frac{1}{2},j)}$, on obtient alors une équation pour V^1 . Par exemple, la dérivée temporelle dans les équations (4.26) devient:

$$\sqrt{g}a^{(1)}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega \approx \sqrt{g}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \frac{\partial V^1}{\partial t}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \tag{4.49}$$

Deuxièmement, puisque les formulations contiennent encore u aux points autres que $(i+\frac{1}{2},j)$ u doit être exprimé en terme de flux V^α . Nous avons alors :

$$u = \frac{a_{(1)}V^1 + a_{(2)}V^2}{\sqrt{g}} \tag{4.50}$$

Depuis que la vitesse u est donnée au centre des faces de la maille, les quantités géométriques discontinues et les flux doivent être remplacés par des définitions convenables tel que (4.50) reste continu pour une vitesse u constante sur des maillages arbitraires [161].

Par exemple:

$$u_{(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{a_{(1)}V^1 + a_{(2)}V^2}{\sqrt{g}}\Big|_{(i,j+\frac{1}{2})} \tag{4.51}$$

$$\text{avec } a_{(2)}\left|_{(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4} \left(a_{(2)}\left|_{(i-\frac{1}{2},j)} + a_{(2)}\left|_{(i-\frac{1}{2},j+1)} + a_{(2)}\left|_{(i+\frac{1}{2},j)} + a_{(2)}\left|_{(i+\frac{1}{2},j+1)} \right) \right. \quad (4.52)$$

$$V_{(i,j+\frac{1}{2})}^1 = \frac{1}{4} \left(V_{(i-\frac{1}{2},j)}^1 + V_{(i-\frac{1}{2},j+1)}^1 + V_{(i+\frac{1}{2},j)}^1 + V_{(i+\frac{1}{2},j+1)}^1 \right) \quad (4.53)$$

$$\sqrt{g}_{(i,j+\frac{1}{2})} = (a_{(2)}^2 a_{(1)} - a_{(1)}^2 a_{(2)})\left|_{(i,j+\frac{1}{2})} \quad (4.54)$$

Le résultat définitif des approximations précitées ainsi que les contributions de V^1 et V^2 , p aux coefficients de l'équation $V_{(i+\frac{1}{2},j)}^1$ des différents points de maillage incluant $(i+\frac{1}{2},j)$ est représenté dans la figure (4.6). Ces coefficients ne contiennent aucun symbole de Christoffel .

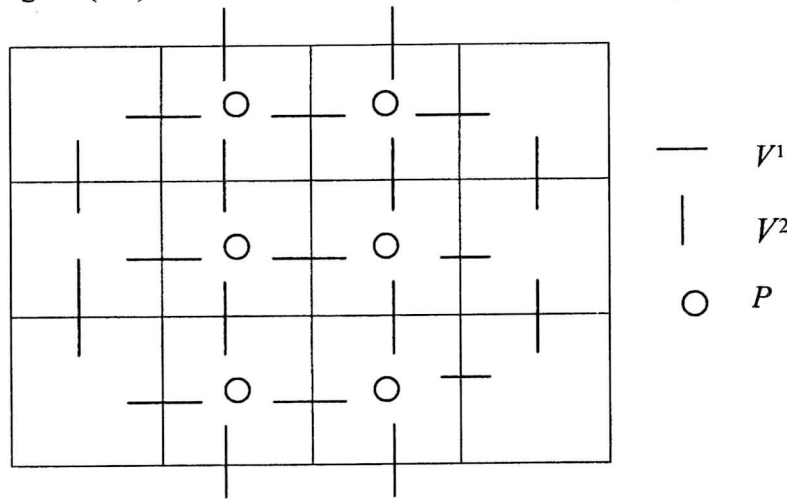


Figure (4.6) Le stencil de discrétisation pour les équations V^1

Le nombre total des variables rassemblés dans l'équation- V^1 est $9V^1, 12V^2$ et $6p$. Les discrétisations présentées mènent à des systèmes à résoudre plus dense que celui obtenu par la méthode de discrétisation décrite dans la section précédente.

IV.4.2 L'équation du transport :

La discrétisation de l'équation du transport (3.76) présenté dans la Section IV.3.3 est restreinte à des maillages plus ou moins réguliers. D'autre part, puisque le coefficient de diffusion Γ varie rapidement et présente de large saut en valeur d'une maille à une autre, une discrétisation simple et directe de cette équation peut entraîner de larges erreurs si des grilles distordues sont utilisées. On va essayer maintenant, de considérer une méthode de discrétisation capable d'approcher la solution d'un scalaire avec une précision appréciable même s'elle est uniforme et linéaire sans se soucier de la régularité de la grille et du coefficient de diffusion Γ . Afin d'atteindre cet objectif, une autre formulation différente de l'actuelle équation de transport est employée.

L'équation générale de transport en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u^\beta \phi}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\Gamma g^{\beta\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} \right) = S \quad (4.55)$$

En utilisant la relation de transformation (4.21), on obtient une formulation appropriée de l'équation du transport donné par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \phi}{\partial \zeta^\alpha} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a_\beta^{(\alpha)} \Gamma g^{\beta\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} \right) = S \quad (4.56)$$

La discrétisation de (4.56) est obtenu par intégration suivant un volume fini $\Omega_{(i,j)}$ au centre (i,j) comme indiqué sur la figure (4.4). on obtient alors :

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \phi}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega = \int_{C_{i,j}} \frac{\partial V^\alpha u}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^1 d\zeta^2 \approx V^1 \phi \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}^{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} + V^2 \phi \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} \quad (4.57)$$

Toutefois la dérivée temporelle et le terme source sont intégrés en utilisant la règle du point milieu :

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \sqrt{g}_{(i,j)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{(i,j)} ; \int_{\Omega_{i,j}} S d\Omega = \sqrt{g}_{(i,j)} S \Big|_{(i,j)} \quad (4.58)$$

jusqu'ici, aucune difficultés ne peuvent survenir car aucune des quantités utilisées dans les formules précitées n'est discontinu. En outre, ces discrétisations ont une précision du second ordre et (4.57) reste vérifier pour ϕ constant . Les valeurs sur les faces de maille doivent être approcher au moyen d'interpolation des valeurs de ϕ aux centres des cellules voisines. Cela sera discuté dans la section IV.5. Le seul point à discuter ici est l'approximation du terme de diffusion. En premier lieu, pour faciliter les manipulations, le terme de diffusion sera exprimé en termes :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a_\beta^{(\alpha)} \Gamma g^{\beta\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot \Gamma \nabla \phi \right) \quad (4.59)$$

Il en résulte de l'intégration suivant $\Omega_{(i,j)}$:

$$- \int_{C_{i,j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot \Gamma \nabla \phi \right) d\zeta^1 d\zeta^2 = -\sqrt{g} a^{(1)} \cdot \Gamma \nabla \phi \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}^{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} + \sqrt{g} a^{(2)} \cdot \Gamma \nabla \phi \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} \quad (4.60)$$

La quantité physique $\Gamma \nabla \phi$ est partout continue pour des maillages arbitraires. Mais si Γ est discontinu alors $\nabla \phi$ l'est aussi, l'approximation de $\nabla \phi$ par des différences centrales sera alors imprécise. Cependant, en utilisant la méthode du chemin d'intégration une approximation exacte de $\Gamma \nabla \phi$ au point $\left(i+\frac{1}{2}, j\right)$ est obtenue par :

$$\Gamma \nabla \phi \Big|_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} = \phi \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} c^{(1)} + \frac{1}{4} \left(\phi \Big|_{(i,j-1)}^{(i,j+1)} + \phi \Big|_{(i+1,j-1)}^{(i+1,j+1)} \right) c^{(2)} \quad (4.61)$$

Où :

$$c^{(1)} = \frac{1}{C} (c_{(2)}^2 - c_{(2)}^1) ; c^{(2)} = \frac{1}{C} (-c_{(1)}^2 - c_{(1)}^1) \quad (4.62)$$

$$C = c_{(1)}^1 c_{(2)}^2 - c_{(1)}^2 c_{(2)}^1 \quad (4.63)$$

Avec :

$$c_{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{(1)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j)} + \frac{a_{(1)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j)} \right) \tag{4.64}$$

$$c_{(2)} = \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j-1)} + \frac{1}{4} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j)} + \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j+1)} + \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j-1)} + \frac{1}{4} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j)} + \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j+1)} \tag{4.65}$$

La substitution de (4.61) dans (4.60) permet d'obtenir une discrétisation robuste quand $\nabla\phi$ est constant, et en général pour un champ scalaire linéaire. Les flux sur les faces de maille peuvent être obtenus d'une manière similaire à celle présentée au-dessus. La structure qui en résulte est composée de 9-molécules pour le terme de la diffusion, représenté sur la figure (4.7).

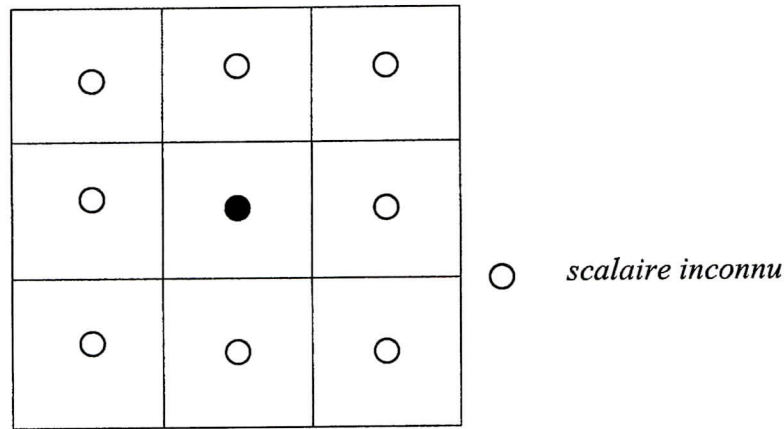


Figure (4.7) Le stencil de discrétisation de l'équation de transport

La discrétisation du terme de production d'énergie turbulente, présenté dans la section IV.3.4, n'est pas très recommander quand une grille irrégulière est adoptée. Une autre approche pour discrétiser le terme de production dans le cas des maillages distordus consiste en une intégration de l'expression cartésienne de P_k , (3.70), sur un volume fini $\Omega_{(i,j)}$, afin qu'aucun symbole de Christoffel ou tenseur métrique n'apparaisse dans la formulation. La procédure nécessite une discrétisation des dérivées partielles des composantes cartésiennes de la vitesse suivant x au point (i,j) et où les coordonnées locales représentées sur la figure (4.4) sont utilisées. Cela peut être accompli à l'aide de la méthode du chemin d'intégration. Pour approcher la dérivée de la vitesse u^α suivant x^β , cette dérivée est exprimée en termes des coordonnées curvilignes ζ .

En utilisant les différentes relations de transformation, on obtient:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \zeta^\gamma}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \zeta^\gamma} = a_\beta^{(\gamma)} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \zeta^\gamma} \tag{4.66}$$

L'approximation de (4.66) au point (i,j) s'écrit :

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{(i,j)} = a_\beta^{(\gamma)} \Big|_{(i,j)} \Delta_\gamma u^\alpha \Big|_{(i,j)} \quad (4.67)$$

Ici $\Delta_\gamma u^\alpha \Big|_{(i,j)}$ représente la différence de u^α , à travers la cellule qui clôture le point (i,j) , suivant la direction ζ^γ . Les différences sont évaluées par les relations suivantes:

$$\Delta_1 u^\alpha \Big|_{(i,j)} = u^\alpha \Big|_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} - u^\alpha \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)} ; \Delta_2 u^\alpha \Big|_{(i,j)} = u^\alpha \Big|_{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} - u^\alpha \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.68)$$

La dernière expression de l'approximation:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^2} \right) \quad (4.69)$$

devient :

$$\nabla u^\alpha \Big|_{(i,j)} = a^{(1)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} - a^{(1)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)} + a^{(2)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} - a^{(2)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.70)$$

Les composantes de la vitesse sur les faces de la maille sont obtenues à l'aide des formules (4.50).

IV.5 Approximation des termes de convection et du flux de diffusion :

Dans les sections antérieures, on a discuté de la discrétisation en volumes finis des équations du mouvement turbulent des grandes structures ainsi que de l'équation de transport pour une quantité scalaire ϕ , cédant à un équilibre des flux sur les faces de la maille, impliquant les valeurs des termes de convection et des dérivées de diffusion, ainsi que du volume intégré du terme source. L'estimation des flux à travers les faces de la maille par les valeurs nodales des points les plus proches est l'une des clés garantissant le succès de la simulation. Dans les paragraphes suivants plusieurs schémas d'approximations sont analysés d'un point de vue de précision, de comportement monotone et d'efficacité. Le traitement des dérivées mixtes des termes de diffusion dues aux maillages non-orthogonale et leurs effets sur la précision et la monotonie est aussi étudié.

IV.5.1 Les propriétés des schémas d'approximations de flux :

Les schémas d'approximations de flux sur les faces de maille ont une influence indéniable sur la précision, la stabilité et l'efficacité de la méthode de résolution numérique. Les équations discrétisées devraient avoir les propriétés suivantes:

Un ordre élevé de précisions : La précision formelle est déterminée par les séries de Taylor pour une erreur de troncation qui devrait être au moins du second ordre sur des maillages réguliers.

Conservation. Les quantités qui sont conservées physiquement doivent aussi être conservées numériquement. Par conséquent, il suffit que les flux à travers les faces de la cellule soient déterminés uniquement par les valeurs des deux cellules adjacentes.

Monotonie. Les schémas ne doivent pas produire de fausses oscillations ou de "wiggles", afin qu'aucun extrême artificiel n'apparaisse avec la progression du temps.

Les schémas d'approximations doivent être stables et faciles à mettre en oeuvre pour les calculs d'écoulements instationnaires multidimensionnels. Il est difficile de satisfaire simultanément à toutes ces propriétés, car jusqu'à une certaine mesure ils sont contradictoires. Par exemple, une approximation d'ordre supérieur (centrale ou décentré en amont) des termes de transport convectifs engage des termes de dispersion spatiale (dérivées d'ordre impair) dans l'erreur de troncature. Sous certaines conditions l'ordre de ces dérivées devient relativement grand comparé aux termes de diffusion (dérivées spatiales d'ordre pair, qui n'apparaissent pas quand des schémas centraux sont utilisés) et peuvent causer de fausses oscillations, principalement dans le cas d'une variation rapide du gradient. Par contre dans le cas d'un maillage dont le raffinement est adapté pour un calcul de couches limites où des conditions aux limites sont convenablement choisies, l'amplitude de ces wiggles est souvent négligeable, ainsi ces oscillations peuvent être tolérées. Cependant l'expérience numérique montre que l'utilisation des schémas d'ordre supérieurs non monotone pour discrétiser les équations de quantité de mouvement sont malgré tout satisfaisants. Toutefois il ne faut pas oublier que la non-monotonie reste une source de troubles pour la résolution d'équations de quantités fondamentalement positives et de systèmes fortement non linéaires, et peut provoquer la non-convergence des processus itératifs. Par exemple l'utilisation des schémas non monotone pour discrétiser les équations de transport de la turbulence, provoque l'apparition de valeurs négatives non physique des solutions turbulentes inadmissible par la simulation. Par conséquent, l'utilisation d'approximations monotone d'ordre élevé s'impose

automatiquement pour la discrétisation de ce type d'équation, c'est en substance l'objet des sections suivantes. Nous concluons ce paragraphe en présentant une condition générale qui assure la monotonie des solutions numériques.

La forme discrétiser de l'équation (3.77) peut être s'écrire:

$$a_{(i,j,k)}^{000} \phi_{(i,j,k)}^{n+1} = \sum_{p,q,r \neq 0} a_{(i,j,k)}^{pqr} \phi_{(i+p,j+q,k+r)}^{n+1} + \phi_{(i,j,k)}^n + S_{(i,j,k)}^{n+1} \quad (4.71)$$

avec :

$$a_{(i,j,k)}^{000} = 1 + \sum_{p,q,r \neq 0} a_{(i,j,k)}^{pqr} \quad (4.72)$$

Pour tous les points (i,j,k) de la grille computationnelle G_h . Notons que (4.71) est linéaire et discrétisée temporellement par un schéma d'Euler implicite (voir IV.6). Les nœuds qui contribuent au terme de sommation dépendent du choix du schéma d'approximation des flux. L'utilisation des différences centrales standards et décentrés implique 8 ou 18 nœuds adjacents respectivement pour deux ou trois dimensions. Pour les schémas d'ordre plus élevé des nœuds additionnels doivent être utilisés, mais pour plus d'efficacité numérique, et afin d'éviter l'élargissement du stencil de discrétisation, certains termes sont transférés au terme source S .

Si $S=0$ la solution exacte a la propriété suivante : si les conditions initiales et aux limites sont positifs, alors la solution reste positive avec la progression du temps. Si la discrétisation préserve cette propriété, alors les oscillations ne se produiront pas. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.1 : Si $S=0$ et

$$a_{(i,j,k)}^{000} > 0 \wedge \forall p \neq 0, \forall q \neq 0, \forall r \neq 0: a_{(i,j,k)}^{pqr} \geq 0 \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad (4.73)$$

$$\text{Et } \phi_{(i,j,k)}^0 > 0, \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad (4.74)$$

$$\text{Alors, } \phi_{(i,j,k)}^n > 0 \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.75)$$

Preuve : Par induction. Pour $n=0$ (4.75) est vérifié, en conséquence de (4.74). On suppose $\phi_{(i,j,k)}^n > 0$ pour tous les points $(i,j,k) \in G_h$. Soit $(i_0, j_0, k_0) \in G_h$ tel que :

$$\phi_{(i,j,k)}^{n+1} \geq \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad (4.76)$$

Avec (4.73) et (4.76) il s'ensuit :

$$a_{(i_0, j_0, k_0)}^{000} \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \geq \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \sum_{p,q,r \neq 0} a_{(i_0, j_0, k_0)}^{pqr} + \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^n \quad (4.77)$$

Avec (4.72), on obtient :

$$\phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \geq \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^n \quad (4.78)$$

Puisque $\phi_{(i_0, j_0, k_0)}^n > 0$ avec (4.76) et (4.78) il s'ensuit que $\phi_{(i,j,k)}^n > 0$ pour tous les points $(i,j,k) \in G_h$.

Le schéma linéaire (4.71), (4.72) est dit positif, satisfaisant à (4.73) et (4.74) en l'absence de tout terme source. En ce qui concerne la précision, on peut montrer à l'aide d'un développement en série de Taylor que les schémas positifs linéaires de premier ordre en précision ont un comportement plus adaptée aux simulations d'écoulement incompressible.

IV.5.2 Méthodes d'approximation pour les flux convectifs

Maintenant, on va étudier les différentes méthodes capables d'exprimer une valeur scalaire sur les faces de la maille en fonction des valeurs nodales qui l'entoure. Pour plus de clarté, on centre notre description sur une discrétisation suivant un maillage décalé infini uniforme représenté sur la figure (4.8). Pour des raisons de robustesse et de simplicité algorithmique

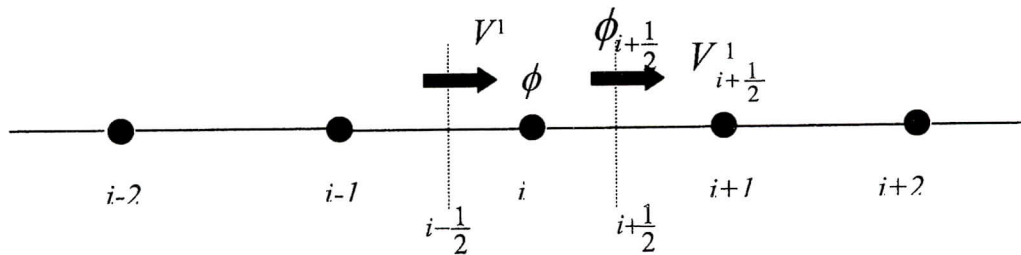


Figure (4.8): maillage décalé unidimensionnel avec les nœuds impliqués dans l'évaluation de ϕ sur la face $i+\frac{1}{2}$

Les schémas multidimensionnels centraux et décentrés en amont (upwind) seront traités par décomposition unidimensionnelle dans la direction normale de chaque face de la maille. Ces schémas sont appelés schémas fractionnés. Par conséquent, nous nous restreignons à une interpolation des valeurs sur les faces le long d'une direction spécifique dans l'espace G , prenant par exemple la direction ζ^1 . Pour l'application des schémas upwind multidimensionnel, nous nous reportons à [157]. Nous considérons, ici la valeur du scalaire sur la face de la maille $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ seulement. Les autres faces seront traitées de la manière similaire.

IV.5.2.1 Schéma central, décentré en amont du premier ordre et hybride :

Sur les vingt dernières années, les techniques de modélisation des termes de convection se réduisaient à l'utilisation des schémas décentrés en amont (upwinding) du premier ordre, des différences centrales du deuxième ordre et des alternatives apparentées, comme le schéma central/upwind hybride de Spalding [135]. Leur popularité est due essentiellement à leur comportement consistant et stable, pour des équations multidimensionnelles, stationnaire à coefficients-constants, source libre, et pour des équations de convection-diffusion d'un scalaire dont les termes de convection ne jouent pas de rôle dominant. Ces schémas sont discutés au-dessous, pour plus de détails voir [101] et [99].

Schéma de différence centrale (SDC).

Dans ce schéma, la valeur sur la face de la maille $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est approché au moyen de l'interpolation linéaire suivante:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) \tag{4.79}$$

Il en résulte une précision du deuxième ordre. Ce schéma est évidemment conservatif et n'est plus positif quand le nombre de Péclet de maille défini comme le rapport des contributions de convection et de diffusion, dépasse une certaine valeur. Par exemple, quand un maillage orthogonal est adopté, le schéma peut produire des oscillations, si le nombre de Péclet par maille défini par (4.16) et (3.77):

$$P_{e\ i+\frac{1}{2}}^1 = \frac{V_{i+\frac{1}{2}}^1}{2\sqrt{g_{i+\frac{1}{2}}(\Gamma g^{11})_{i+\frac{1}{2}}}} \quad (4.80)$$

devient supérieur à 1. dans le cas d'un maillage distordu l'expression du nombre de Péclet de maille dépend de la manière avec laquelle les termes de dérivée mixte vont être approchés.

Schéma décentré en amont (upwind) du premier ordre (SDA) :

La valeur sur la face de la maille $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est pris égale à la valeur du nœud en amont et, pour des raisons d'efficacité de codage vectoriel, on peut exprimer cette approximation suivant :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign} \left(V_{i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_i + \frac{1}{2} \left[1 - \text{sign} \left(V_{i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_{i+1} \quad (4.81)$$

Ce schéma est conservateur, du premier ordre, inconditionnellement positive. Cependant lorsque la direction de l'écoulement est oblique par rapport aux lignes du maillage, le schéma upwind produit numériquement un écoulement de retour en conséquence d'une fausse diffusion, traduite par de larges erreurs dans la solution. Le seul remède à ces défaillances est une adaptation du maillage afin d'aligner ces lignes avec la direction de l'écoulement ou un affinage de la grille jusqu'à ce que la diffusion numérique devienne négligeable en respectant l'ordre de la diffusion physique.

Schéma de différence hybride central/upwind (SDH).

Afin de combiner les avantages du schéma central et ceux du schéma décentré en amont (upwind), Spalding [135] fut un des premiers auteurs à avoir proposer le schéma des différences hybrides central/upwind. L'approximation de $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est donné par :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[1 + s \left(P_{e\ i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_c + \frac{1}{2} \left[1 - s \left(P_{e\ i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_u \quad (4.82)$$

Où ϕ_c est donné par (4.79), ϕ_u par (4.81) et s est une fonction switcher qui dépend du nombre de Péclet de maille P_e avec $0 \leq s(P_e) \leq 1$. Avec le schéma hybride les termes de convection sont approchés par des différences centrales, à moins que $|P_e| > 1$ alors un schéma décentré en amont du premier ordre sera appliquer :

$$s(P_e) = \begin{cases} 0, & |P_e| \leq 1 \\ 1, & |P_e| > 1 \end{cases} \quad (4.83)$$

Pour des raisons de convergence, on utilise la fonction switcher suivante:

$$s(P_e) = 1 - \min \left(1, \frac{1}{|P_e|} \right) \quad (4.84)$$

La fonction switcher est obtenue tel que les éléments de la matrice non situés sur la diagonal impliquant les contributions des termes de convection et de diffusion seraient non-positives, afin de supprimer les oscillations (wiggles) (théorème 4.1). L'inconvénient de cette méthode provient de son utilisation dans le cas d'écoulement à convection dominante, où le schéma upwind est partout appliqué indépendamment de l'apparition ou non de wiggles.

IV.5.2.2 Schémas décentrés en amont d'ordre supérieure en précision :

La discrétisation à l'aide d'un schéma décentré en amont du premier ordre dans le cas d'écoulements multidimensionnels avec courants de retour produit une diffusion numérique excessive. L'application de schéma upwind de haute précision dans ce cas, donne lieu à des améliorations considérables. On cite par exemples les schémas de différences upwind linéaires du deuxième ordre (SDUL) étudiés dans [104], le schéma QUICK proposé par Leonard [68] et le schéma d'interpolation cubique du troisième ordre (UIC) utilisé dans [11]. Le schéma QUICK est de loin le plus populaire, en particulier dans le cas d'écoulements incompressible (voir par exemple [39], [80], [70], [45] et [143]), car il peut approcher les valeurs sur les faces d'un maillage uniforme avec une précision du troisième ordre tout en gardant une simplicité algorithmique. Les schémas de précision supérieure peuvent être construits par interpolation polynomiale comme se fut suggéré par Van Leer [155]. L'idée de base de cette méthode appeler κ -interpolation est fondée sur l'utilisation d'approximations linéaires et quadratiques des solutions sur chaque cellule obtenant ainsi une discrétisation spatiale du troisième ordre. La forme générale du schéma- κ est donné par:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \phi_i + \frac{1}{4}[(\kappa + 1)(\phi_{i+1} - \phi_i) + (\kappa - 1)(\phi_i - \phi_{i-1})]V_{i+\frac{1}{2}}^{-1} > 0 \\ \phi_{i+1} - \frac{1}{4}[(\kappa + 1)(\phi_{i+1} - \phi_i) + (\kappa - 1)(\phi_{i+2} - \phi_{i+1})]V_{i+\frac{1}{2}}^{-1} < 0 \end{cases} \quad (4.85)$$

Où le paramètre κ reste à définir. Le premier terme de la partie droite de l'équation (4.85) représente le schéma upwind du premier ordre, et le deuxième terme est une correction qui sert à convertir le schéma à un ordre supérieur. Pour toutes les valeurs de $\kappa \in [-1, 1]$, on obtient une forme mixte du schéma de différences centrales et upwind linéaire du second ordre. Les schémas SDUL, QUICK et UIC sont obtenues respectivement pour $\kappa = -1, \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. La valeur de $\kappa = 0$ donne le schéma de Fromm [34], pendant que $\kappa = 1$ correspond aux SDC. Pour $\kappa \neq \frac{1}{3}$ l'erreur de troncature locale est du deuxième ordre alors que pour $\kappa = \frac{1}{3}$ elle est du troisième ordre. Pour une mise en œuvre générale, la formulation κ reste très commode.

IV.5.3 Approximation des flux de diffusion :

Dans cette section nous nous intéressons aux schémas capables d'exprimer les dérivés sur les faces du maillage (les flux de diffusion) en terme de valeur des nœuds adjacents. Une attention spéciale sera accordée en particulier, aux termes des dérivées mixtes qui surviennent de l'utilisation d'un système de coordonnées non-orthogonale, au vu de la condition de positivité formulée dans la section IV.5.1. La discrétisation en volumes finis de l'équation du transport (2.76) cède à l'équation (4.16). Après avoir substitué (2.77) dans (4.16) pour tous les

faces des cellules, on obtient par exemple, pour les flux diffusives sur la face de la cellule $(i+\frac{1}{2}, j, k)$ l'expression suivante:

$$-\sqrt{g}\Gamma g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} - \sqrt{g}\Gamma g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} - \sqrt{g}\Gamma g^{13} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^3} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} \quad (4.86)$$

Pour des raisons de convenance nous nous restreignons aux seules faces $(i+\frac{1}{2}, j, k)$, Les autres faces seront traités de la même façon.

Remarque 4.1 Nous supposons la transformation $x=x(\zeta)$ régulière, afin que les quantités géométriques \sqrt{g} , $g^{\alpha\beta}$ et le coefficient de diffusion Γ sur les faces de maille puissent être approchées par interpolation bi ou tri-linéaire.

Si le maillage est orthogonal, les deux derniers termes de (4.86) disparaissent et la première partie est approché par les différences centrales suivantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} = \phi_{(i+1, j, k)} - \phi_{(i, j, k)} \quad (4.87)$$

cette approximation est conservatrice et contribue à la positivité du schéma. L'erreur de troncation locale est du deuxième ordre. Cependant quand un maillage non-orthogonal est utilisé, l'approximation des dérivées mixtes peut causer de fausses oscillations. Par exemple,

si nous approchons $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)}$ par des différences centrales et par interpolation bi-linéaire

(4-points) exigé pour exprimer les valeurs nodales de ϕ sur les faces de la cellule, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} &= \phi_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)} - \phi_{(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\phi_{(i+1, j+1, k)} + \phi_{(i, j+1, k)} - \phi_{(i+1, j-1, k)} - \phi_{(i, j-1, k)}) \end{aligned} \quad (4.88)$$

en référence au théorème 4.1, le coefficient correspondant aux points $\phi_{(i+1, j-1, k)}$ et $\phi_{(i, j-1, k)}$ prend un signe défavorable si $g^{12}_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} > 0$. D'un autre côté, si $g^{12}_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} < 0$, nous obtenons des

contributions négatives aux coefficients de $\phi_{(i+1, j+1, k)}$ et $\phi_{(i, j+1, k)}$. Mais ceci n'implique pas nécessairement des solutions oscillatoires. En fait, ces coefficients sont habituellement très petits par rapport aux coefficients relatifs aux dérivées $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1}$, mais dans le cas d'un maillage

fortement non-orthogonal ces coefficients deviennent considérable et provoquent l'apparition de wiggles, nous considérerons trois méthodes pour éliminer ces difficultés.

La méthode (i) :

L'approche la plus évidente consiste en un traitement explicite des dérivées mixtes c'est à dire qu'ils sont évalués au niveau de temps antérieur et sont incorporés dans le terme source. Cette méthode est fréquemment utilisée dans les procédures numériques tel que [104], [26], [19], [89], [180], [20], [82] et beaucoup d'autres. Elle permet de réduire la dimension du stencil à 5-points ou 7-points respectivement dans le cas 2D et 3D, cette méthode a l'avantage de ne pas diminuer l'ordre de précision des approximations dans le cas stationnaire. Cependant, elle peut causer la détérioration sérieuse du taux de convergence, en particulier quand le la grille est nettement non-orthogonal où des oscillations peuvent encore survenir dans la solution stationnaire.

La méthode (ii) :

Dans cette méthode, proposé par Demirdzic [27], une interpolation de 2-points est utilisée au lieu de 4-points. Par exemple, supposons que $g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{12} > 0$, alors l'approximation suivante est considéré :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} &= \phi_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - \phi_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)} \\ &= \frac{1}{2}(\phi_{(i,j,k)} + \phi_{(i+1,j+1,k)}) - \frac{1}{2}(\phi_{(i,j-1,k)} + \phi_{(i+1,j,k)}) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Si $g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{12} < 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} = \frac{1}{2}(\phi_{(i,j+1,k)} + \phi_{(i+1,j,k)} - \phi_{(i,j,k)} - \phi_{(i+1,j-1,k)}) \quad (4.90)$$

Ce schéma est symétrique autour de $(i+\frac{1}{2},j,k)$ est du second ordre en précision. Des expressions similaires sont obtenues pour les deux derniers termes de l'équation (4.16). Ce schéma est conservateur, et produit des coefficients des points adjacents inconditionnellement non-négatives c'est à dire ceux correspondants aux points $\phi_{(i+1,j-1,k)}$, $\phi_{(i+1,j+1,k)}$ et $\phi_{(i+1,j,k+1)}$, $\phi_{(i+1,j,k-1)}$, mais il ne garantit pas la positivité des principaux coefficients aux points $(i,j-1,k)$, $(i+1,j,k)$, $(i,j+1,k)$ et $(i,j,k+1)$, $(i,j,k-1)$. Cependant les termes de g^{11} donne aux contributions de ces coefficients un signe correct dominant si g^{12} n'est pas trop grand.

Comme illustration nous discutons le cas de la transformation bidimensionnel suivante :

$$\begin{aligned} x^1 &= \sigma \zeta^1 + \zeta^2 \cos \alpha \\ x^2 &= \zeta^2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.91)$$

où $\sigma > 0$ est le facteur d'allongement et α est l'angle entre les lignes de la grille représenté sur la figure (4.2). Il peut être montré, en considérant l'équation discrétisé (4.80) et en appliquant la condition de positivité des principaux coefficients que :

$$|g^{12}| \leq \min(g^{11}, g^{12}) \quad (4.92)$$

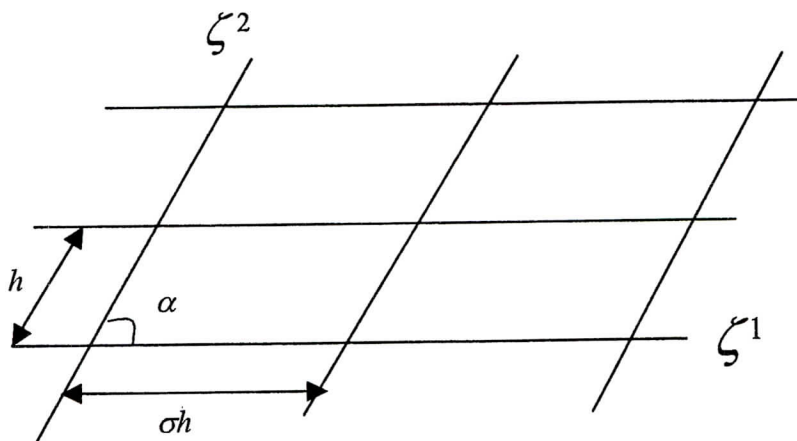


Figure (4.9): Coordonnées obliques avec allongement horizontal

à condition que le coefficient de diffusion Γ soit uniforme sur chaque maille. En utilisant (4.91) on peut écrire : $g_{11}=\sigma^2$; $g_{12}=\sigma\cos\alpha$; $g_{22}=1$. (4.93)

alors qu'en utilisant la relation (2.56) nous obtenons de (4.21) les conditions suivantes:

$$\sigma|\cos\alpha|\leq 1, \text{ si } \sigma>1 \tag{4.94}$$

$$\frac{|\cos\alpha|}{\sigma}\leq 1, \text{ si } \sigma<1 \tag{4.95}$$

Ces conditions ont été dérivées par Demirdzic [27]. Si la grille est oblique et non allongé, alors la solution du schéma est toujours positive, et indépendante de l'angle.

La méthode (iii) :

Tous les schémas précédemment considérés ne garantissent pas une positivité inconditionnelle de la solution. Dans ce qui suit, un nouveau schéma qui satisfait le Théorème 4.1 sera décrit. Il utilise des différences décentrées plutôt que centrales tel que seuls les coefficients non-négatives seraient impliqués. La dérivé mixte suivant la direction ζ^2 au point $(i+\frac{1}{2},j,k)$ est évaluée par les différences suivantes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi_{(i+1,j+1,k)} + \frac{1}{2}\phi_{(i,j+1,k)} - \phi_{(i,j,k)} ; g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^2 > 0 \\ \phi_{(i,j,k)} - \frac{1}{2}\phi_{(i+1,j-1,k)} - \frac{1}{2}\phi_{(i,j-1,k)} ; g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^2 < 0 \end{cases} \tag{4.96}$$

Il est évident que ce schéma réduit l'ordre de troncation. mais il a l'avantage d'être inconditionnellement positive. Des expressions similaires sont obtenues pour les deux derniers termes de l'équation (4.86). de plus puisque les différences des faces de maille sont uniquement définies sur chaque face de cellule, le schéma est aussi conservateur.

Les termes de dérivées mixtes dans la présente étude sont approcher par des interpolations de 4-point, formulé dans (4.88). Ce choix est motivé par le très bon comportement de ce schéma avec lequel aucun coefficient négatif n'est rencontré.

Généralement, le nombre total des variables enchaînées ensemble dans l'équation du transport est de 9 points et 19 points respectivement en deux dimensions et trois dimensions. La structure du stencil de discrétisation en bidimensionnel est représentée dans la figure (4.10).

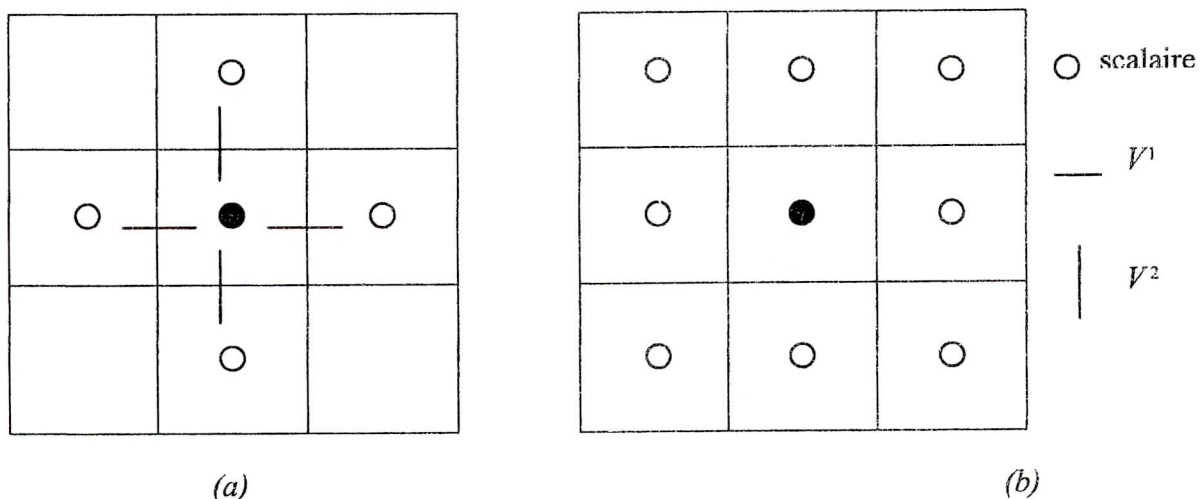


Figure (4.10) Le stencil de discrétisation pour une équation de transport en 2D : (a) Termes de convection (b) termes de diffusion

IV.6 Conditions aux limites, intégration temporelle et algorithme de résolution :

Cette partie du chapitre est consacré à quelques thèmes complétant la description de la méthode de résolution numérique. Premièrement, la mise en oeuvre des conditions aux limites pour les équations de quantité de mouvement ainsi que pour les équations de transport sont décrites dans section IV.6.1, suivi par une discussion sur la méthode des fonctions de paroi. Ensuite, l'intégration temporelle et la méthode de correction de pression sont présentées dans la section IV.6.2. La section IV.6.3 décrit le traitement du terme source dans les équations de turbulence. Un résumé de l'algorithme de résolution total est esquissé dans section IV.6.4.

IV.6.1 Conditions aux limites :

Pour les écoulements incompressibles, les équations gouvernant le mouvement des structures turbulentes décrites au Chapitre II sont paraboliques ou elliptiques quand l'écoulement est indépendant du temps. Par conséquent, les conditions de la limite doivent être spécifiées sur toutes les limites du domaine de calcul. Bien que, les conditions de la limite peuvent être spécifiées comme dépendantes du temps, nous nous restreignons aux conditions aux limites stationnaires. A l'entrées du domaine, la vitesse et les valeurs des quantités de turbulence sont prescrites. Il est, cependant, habituellement nécessaire de calculer le taux de la dissipation ε à partir de l'énergie de turbulence k et d'une estimation de la distribution de la longueur des

échelles de turbulence l , à l'aide la formule $\varepsilon \approx \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}$ dans le cas d'une modélisation à deux équations de transport. A la sortie du domaine du calcul où souvent aucune information physique n'est disponible, on applique une condition de sortie d'écoulement (outflow) c'est à dire que les contraintes normales et tangentielles sont prises égales à zéro, le gradient normal d'un scalaire peut être alors imposé comme nulle. Sur un plan de symétrie les composantes des tensions de cisaillement, ainsi que les composantes normales de vitesse et les gradients normaux sont considérés nuls. Sur les parois fixes, en principe, des conditions d'adhérence peuvent être imposées. La vitesse du fluide sur la paroi est prise égale à celle de la paroi qui est dans notre cas a égale zéro. Souvent, si le maillage près des parois n'est pas suffisamment resserrer les contraintes de cisaillement sont intégrées à l'aide des fonctions de parois. Ces lois de paroi sont basées sur la supposition d'une prédominance d'un équilibre local dans la couche turbulente près des parois. La loi de paroi permet d'exprimer la variation d'énergie de turbulence et son taux de dissipation en fonction de la distance normale et le frottement de paroi dans une forme adimensionnelle qui facilite l'application des conditions aux limites. Ces formules sont communément reportées comme étant fonctions de paroi.

Plusieurs autres types de conditions aux limites peuvent être rencontrés dans les problèmes de dynamique des fluides, par exemple pour un écoulement turbulent homogène suivant une direction précise, des conditions aux limites périodiques peuvent être appliquer, en imposant à la solution la même valeur au début et a la fin du domaine.

La discrétisation des conditions aux limites reçoit souvent moins d'attention que la discrétisation des équations de l'écoulement, ce qui est injustifié au vu de l'influence de cette dernière étape dans l'exactitude de la solution. Près des limites, les intégrales sur les cellules sont approchées suivant la procédure de discrétisation habituel, mais les flux à travers les faces de la cellule qui coïncident avec les limites du domaine exigent un traitement spécial. Ces flux sur les limites doivent être exprimés en fonctions d'inconnues définies à l'intérieur du domaine de calcul numérique, pour y parvenir on utilise des différences décentrées ou des extrapolations. Les détails de l'implémentation des conditions aux limites des équations de

mouvement et des équations du transport seront présentés, respectivement dans les sections IV.6.1.1 et IV.6.1.2.

IV.6.1.1 Les équations de quantité de mouvement :

Nous discuterons des conditions aux limites des équations de quantité de mouvement et leur application. Cette mise en œuvre est dans un premier temps fastidieuse et un peu compliquée. Pour décrire cette opération d'une manière plus claire, nous nous restreignons au cas bidimensionnel, des détails supplémentaires peuvent être trouvés dans [127]. On considère les conditions aux limites suivantes :

- Les conditions de Dirichlet : les vecteurs de vitesse tangentiels et normaux sont prescrits sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$(u.n)n \quad \text{et} \quad (u.t)t \quad \text{donnés} \quad (4.97)$$

où n et t sont les vecteurs unités extérieures normal et tangent.

- Les conditions de Neumann : les contraintes tangentiels et normales sont prescrites sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$(\sigma^{(n)}.n)n \quad \text{et} \quad (\sigma^{(n)}.t)t \quad \text{donnés} \quad (4.98)$$

où $\sigma^{(n)}$ est le vecteur des contraintes normales.

- La vitesse tangentielle et les contraintes normales sont prescrites sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$u^t \quad \text{et} \quad (\sigma^{(n)}.n)n \quad \text{donnés} \quad (4.99)$$

- Les contraintes tangentiels et la vitesse normale sont prescrites sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$(\sigma^{(n)}.t)t \quad \text{et} \quad u^n \quad \text{donnés} \quad (4.100)$$

Une fois les conditions aux limites définies, nous considérons la discrétisation des cellules auxquelles une face fait partie de la limite du domaine. Nous ne considérons pas les coins du domaine. Les cellules des limites sont traitées exactement comme les cellules intérieures. Ce traitement introduit quelques inconnues virtuelles qui peuvent être éliminées en utilisant les conditions aux limites ainsi que des extrapolations linéaires. Il est nécessaire d'exprimer les conditions aux limites en termes de vitesse contravariantes ou composantes des contraintes. La transformation est définie par la méthode suivante : sur une surface caractérisée par $\zeta^n = \text{constante}$, on définit uniquement le vecteur normal n et le vecteur tangent t , donné par (2.42). Nous avons :

$$U^n = u^n \cdot a^{(n)} = (u.n)n \cdot a^{(n)} = \sqrt{g^{nn}} u.n \quad (4.101)$$

$$U_t = u^t \cdot a_{(t)} = (u.t)t \cdot a_{(t)} = \sqrt{g_{tt}} u.t \quad (4.102)$$

Avec $U_t = g_{t\alpha} U^\alpha$ qui permet d'écrire :

$$U^t = \frac{1}{g_{tt}} \sqrt{g_{tt}} u.t - g_{tn} U^n \quad (4.103)$$

Notons que les indices n et t sont fixés, c'est à dire qu'on n'applique pas de sommation. Soit le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}_\beta^g$ dénote du $\beta^{\text{ième}}$ composant cartésien de $\sigma^{(n)}$ donné par l'expression $\bar{\sigma}_\beta^g = -p\delta_\beta^g + \bar{\tau}_\beta^g$ avec p la pression et $\bar{\tau}_\beta^g$ le tenseur déviateur des tensions. En coordonnées généralisées :

$$\sigma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + \tau^{\alpha\beta} \quad (4.104)$$

avec $\tau^{\alpha\beta}$ donné par (3.62). Soit le tenseur des contraintes sur la surface $\zeta^n = \text{constante}$ exprimé à l'aide de la relation suivante :

$$\sigma^{(n)} = (\sigma^{(n)}.n)n + (\sigma^{(n)}.t)t \quad (4.105)$$

D'après Aris [3], nous avons :

$$\sigma_\beta^{(n)} = \bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha \quad (4.106)$$

avec n_α , le $\alpha^{\text{ième}}$ composant de n , afin que :

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha = (\sigma^{(n)}.n)n_\beta + (\sigma^{(n)}.t)t_\beta \quad (4.107)$$

On dérive une expression pour σ^{nm} en prenant le produit scalaire de (4.107) par $a^{(n)}$:

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} = n_\beta a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} \sigma^{(n)}.n + t_\beta a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} \sigma^{(n)}.t \quad (4.108)$$

Le dernier terme de (4.108) disparaît car :

$$t_\beta a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} = \frac{a_{(t)}^\gamma}{\sqrt{g_{tt}}} a_\gamma^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} a_{(t)} a^{(n)} = 0 \quad (4.109)$$

De (4.109) on obtient :

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha a_\gamma^{(n)} a_\alpha^{(n)} = a_\beta^{(n)} a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} \sigma^{(n)}.n \quad (4.110)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sigma^{nm} = g^{nn} \sigma^{(n)}.n \quad (4.111)$$

De la même façon, une expression pour σ^{nt} peut être trouvée en prenant le produit scalaire de (4.107) par $a_{(t)}$:

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha a_{(t)}^\beta = n_\beta a_{(t)}^\beta \sigma^{(n)}.n + t_\beta a_{(t)}^\beta \sigma^{(n)}.t \quad (4.112)$$

$$\text{Où :} \quad \bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha a_{(t)}^\beta = t_\beta a_{(t)}^\beta \sigma^{(n)}.t \quad (4.113)$$

$$\text{Tel que :} \quad \bar{\sigma}_\beta^\alpha a_\alpha^{(n)} g_\gamma^\alpha a_\beta^{(y)} = a_{(t)}^\gamma a_{(t)}^\beta g_{\gamma\beta} \sqrt{\frac{g^{nn}}{g_{tt}}} \sigma^{(n)}.t \quad (4.114)$$

$$\text{qui devient :} \quad \sigma^{nt} g_{tt} + \sigma^{nn} g_{nt} = \sqrt{g^{nn} g_{tt}} \sigma^{(n)}.t \quad (4.115)$$

$$\text{Et en conséquence :} \quad \sigma^{nt} = \frac{1}{g_{tt}} \left(\sqrt{g^{nn} g_{tt}} \sigma^{(n)}.t - g_{nt} \sigma^{nn} \right) \quad (4.116)$$

Notons que $\sigma^{\alpha\beta}$ est donné par (4.104). En conséquence, l'intégration de la pression et des tensions visqueuses sur les cellules des limites est appliquée simultanément.

Pour l'intégration en volumes finis nous avons besoin d'un volume de control pour chaque inconnu, excepté quand la composante normale U^n sur la surface des limites du domaine est imposée. Dans ce cas on considère un seul volume de control pour la composante tangentielle U^t alors que la vitesse normale est introduite explicitement en vitesse inconnue prescrite sur les limites. Soit la cellule limite $\Omega_{i,1}$ sur la surface limite représentée par $\zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2$ la vitesse u est prescrite. Nous avons :

$$U^2 = \sqrt{g^{22}} u \cdot n \quad \text{sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \quad (4.117)$$

$$U^1 = \frac{1}{g^{11}} \left(\sqrt{g_{11}} u \cdot t - g_{12} U^2 \right) \quad \text{sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \quad (4.118)$$

Le stencil résultant de l'intégration suivant le volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},1}$ est représenté sur la figure(4.3). Nous avons des vitesses tangentielles et pressions virtuelles aux points $(i-\frac{1}{2},0)$ et $(i,0)$, $(i+\frac{1}{2},0)$, $(i+1,0)$ et $(i+\frac{3}{2},0)$. Ces inconnues virtuelles peuvent être éliminées en utilisant l'extrapolation linéaire suivante:

$$V_{(i+k,0)}^1 = 2\sqrt{g} U^1 \Big|_{(i+k,\frac{1}{2})} - V_{(i+k,1)}^1 \quad (4.119)$$

$$P_{(i+l,0)} = 2P_{(i+l,1)} - P_{(i+l,2)} \quad (4.120)$$

avec $k = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ et $l = 0, 1$.

Supposons que la contrainte tangentielle $(\sigma^{(n)} \cdot t)$ est prescrite sur $\zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2$, si nous avons une condition limite de non-glissement. L'expression (4.118) est remplacée par :

$$\sigma^{12} = \frac{1}{g_{11}} \left(\sqrt{g^{22}} g_{11} \sigma^{(n)} \cdot t - g_{21} \sigma^{22} \right) \quad \text{sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \quad (4.121)$$

On considère l'intégration de l'équation de V^1 sur $\Omega_{i+\frac{1}{2},1}$; puisqu'on traite le cas d'une condition aux limites où les contraintes sont prescrites, le tenseur des contraintes regroupant les termes visqueux et de pression doit être traité séparément. Nous nous restreignons aux intégrales des termes de convection et du tenseur des contraintes, qui impliquent des inconnues virtuelles. Le discrétisation du terme de convection nécessite l'évaluation de la vitesse virtuelle $V_{(i+\frac{1}{2},0)}^1$ (voir la figure (4.3)) par l'extrapolation linéaire suivante:

$$V_{(i+k,0)}^1 = 2V_{(i+k,1)}^1 - V_{(i+k,2)}^1 \quad (4.122)$$

avec $k = \frac{1}{2}$. La discrétisation du tenseur des contraintes est donné par (voir(2.11),(2.77),(4.104)):

$$- \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},1}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \sigma^{1\beta}}{\partial \zeta^\beta} d\Omega \approx -\sqrt{g} \sigma^{11} \Big|_{(i,1)}^{(i+1,1)} - \sqrt{g} \sigma^{12} \Big|_{(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2},\frac{3}{2})} \quad (4.123)$$

Le terme $\sqrt{g} \sigma^{12}$ au point $(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est évalué en utilisant (4.121) et (2.39):

$$\sqrt{g}\sigma^{12}\Big|_{\left(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\sigma^{(n)}.t-\sqrt{g}\frac{g_{21}}{g_{11}}\sigma^{22}\Big|_{\left(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \quad (4.124)$$

Le premier terme est prescrit, il contribue à la partie droite des équations discrétisées de quantité de mouvement, cependant le second terme et les autres termes de (4.123) contiennent des inconnues virtuelles qui doivent être éliminées en utilisant (4.122) avec $k=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ et (4.120) avec $l=0,1$. Et :

$$V_{(i+m,0)}^2=2\sqrt{g}U^2\Big|_{\left(i+m,\frac{1}{2}\right)}-V_{(i+m,1)}^2 \quad (4.125)$$

avec $m=0,1$. la quantité $U^2_{\left(i+m,\frac{1}{2}\right)}$ est évalué à l'aide de la condition aux limites (4.117).

Quand la vitesse normale U^2 n'est pas prescrite à la limite, nous introduisons un demi-volume de contrôle pour U^2 , car les équations de mouvement ne sont valident qu'a l'intérieur du domaine de l'écoulement. Si nous intégrons (4.10) sur le demi de cellule $\Omega_{i,\frac{1}{2}}$ pour $\alpha=2$ en utilisant la règle du point milieu, on obtient les approximations suivantes :

$$\int_{\Omega_{i,\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}T^{2\beta}}{\partial\zeta^\beta}d\Omega\approx\frac{1}{2}\sqrt{g}T^{21}\Big|_{\left(i-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}-\sqrt{g}T^{22}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.126)$$

et

$$\int_{\Omega_{i,\frac{1}{2}}}\left(F^2\frac{\partial U^2}{\partial t}\{^2_{\beta\gamma}\}T^{\beta\gamma}\right)d\Omega\approx\frac{1}{2}\sqrt{g}\left(F^2\frac{\partial U^2}{\partial t}\{^2_{\beta\gamma}\}T^{\beta\gamma}\right)\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.127)$$

Ces approximations sont appliquées près des limites de sorte, où l'écoulement est supposé ne plus trop changer. Cette restriction nous permet d'approcher les intégrales (4.126) et (4.127) au premier ordre de précision. Autrement, un stencil plus large serait nécessaire pour maintenir une précision du second ordre. Les contributions de convection, du tenseur des contraintes et la partie droite des équations contenant les symboles de Christoffel, impliquant des inconnues virtuelles peuvent être éliminés comme ce qui suit : Pour le terme de convection, les composantes de la vitesse virtuelle peuvent être éliminées par l'extrapolation linéaire des inconnues intérieures et des valeurs limites des vitesses tangentes, si elles sont prescrites. Les pressions virtuelles peuvent aussi être éliminées par l'extrapolation linéaire.

Concernant le tenseur des contraintes, le terme $\sqrt{g}\sigma^{22}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)}$ peut être évalué en utilisant la condition aux limites, voir (4.111). Si la contrainte tangentielle est prescrite, alors les termes $\sqrt{g}\sigma^{21}\Big|_{\left(i-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ et $\sqrt{g}\sigma^{21}\Big|_{\left(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ sont donnés par (4.124), sinon ils contribuent au stencil de la manière habituelle. Finalement le terme,

$$-\frac{1}{2}\sqrt{g}\{^2_{\beta\gamma}\}T^{\beta\gamma}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.128)$$

peut être traité comme auparavant, à l'exception du terme :

$$-\frac{1}{2}\sqrt{g}\{^1_{\beta\gamma}\}\sigma^{11}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.129)$$

qui requière l'approximation de $\frac{\partial U^1}{\partial \zeta^2}$ sur $\zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2$ élargissant le stencil de discrétisation.

Cependant, puisqu'on suppose la variation de U^1 suivant la direction ζ^2 négligeable, on a :

$$\frac{\partial U^1}{\partial \zeta^2} \approx 0.$$

La procédure d'intégration suivant $\Omega_{i+\frac{1}{2},1}$ de la composante tangentielle de la vitesse $V_{(i+\frac{1}{2},1)}^1$, est similaire à celle exposé préalablement, excepté pour les expressions (4.118) et (4.125) remplacés par :

$$U^1 \text{ donné sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \tag{4.130}$$

$$V_{(i+m,0)}^2 = 2V_{(i+m,1)}^2 - V_{(i+m,2)}^2 \tag{4.131}$$

La condition (4.130) combiné avec $\sigma^{(N),n}$ prescrit à la limite de sortie de l'écoulement, est supposé égale à zéro. L'une des raisons qui nous pousse à prescrire U^1 au lieu de $u.t$ est sa simplicité de mise en œuvre. L'imprécision associée ne se propagera pas en amont, à condition que le nombre Reynolds soit suffisamment grand et que la limite de l'écoulement soit placée en aval de la région qui nous intéresse. Nous avons complété maintenant la mise en œuvre des conditions aux limites, des détails supplémentaires peuvent être trouvés dans [127].

IV.6.1.2 l'équation du transport :

Dans cette section nous considérons la discrétisation de l'équation de transport pour ϕ sur les cellules limites. Les conditions aux limites suivantes seront considérées:

- Les conditions de Dirichlet : ϕ prescrit sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$\phi = g_D \tag{4.132}$$

- Les conditions de Neumann : la dérivée de ϕ suivant la direction normale à la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$ est prescrite.

$$\Gamma n \cdot \nabla \phi = g_N \tag{4.133}$$

où n est le vecteur unité extérieur normal à la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$. La mise en oeuvre des conditions aux limites doit être tel qu'il en résulte un schéma positif. Les seuls termes qui peuvent introduire des inconnues virtuelles sont les termes de convection et les termes de diffusion. Ces termes seront traités séparément. Chacune des cellules limites sera traité comme dans la Section IV.3.3. Nous nous restreignons à une cellule limite $\Omega_{i,j,k}$ sur $\zeta^1 = \zeta_{\frac{1}{2}}^1$.

Les autres limites peuvent être traitées exactement de la même façon. Nous ne discutons pas des modifications apportées aux coins limites du domaine qui nécessite plusieurs combinaisons des conditions aux limites prescrites. Le traitement de ces possibilités est très important pour obtenir un schéma positif. Nous traitons un domaine de calcul tridimensionnel :

Le terme de diffusion.

Considérons l'intégration en volumes finis du terme de diffusion (voir (4.16) et (3.76)):

$$-\int_{\Omega_{l,j,k1}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \Gamma g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega \approx -\sqrt{g} \Gamma g^{1\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(\frac{3}{2}, j, k\right)} - \sqrt{g} \Gamma g^{2\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j+\frac{1}{2}, k\right)} - \sqrt{g} \Gamma g^{3\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j, k-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.134)$$

Supposons que l'on ait une condition de Dirichlet (4.132) sur $\zeta^1 = \zeta_1^1$. On considère les

approximations suivantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} = \phi_{(1,j,k)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} \quad (4.135)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} = g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)} \quad (4.136)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^3} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} = g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.137)$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{\left(1, j\pm\frac{1}{2}, k\right)} = \phi_{\left(\frac{3}{2}, j\pm\frac{1}{2}, k\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j\pm\frac{1}{2}, k\right)} \quad (4.138)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{(1,j,k)} = \phi_{\left(\frac{3}{2}, j, k\pm\frac{1}{2}\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\pm\frac{1}{2}\right)} \quad (4.139)$$

alors que les autres termes de (4.134) sont traités avec la même méthode, exposé dans la Section IV.4.3. Pour (4.135) nous avons utilisé des différences décentrées, alors que dans (4.136) à (4.139) des différences centrales sont utilisées. L'expression (4.135) contribue à un schéma positif. Les expressions (4.136) et (4.137) contiennent que des termes connus et n'ont pas d'influence sur la positivité du schéma, pendant que (4.138) et (4.139) contribuent à un schéma positif si la méthode (ii) ou (iii), exposé dans la Section IV.4.3, est employée pour calculer $\phi_{\left(\frac{3}{2}, j\pm\frac{1}{2}, k\right)}$ et $\phi_{\left(\frac{3}{2}, j, k\pm\frac{1}{2}\right)}$.

Ensuite, soit une condition de Neumann (4.134) sur $\zeta^1 = \zeta_1^1$ donné par :

$$\Gamma n \cdot \nabla \phi = -\frac{\Gamma g^{1\beta}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} = g_N$$

ici, l'intégration en volume finie du terme de diffusion (4.134) devient :

$$-\int_{\Omega_{l,j,k1}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \Gamma g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega \approx -\sqrt{g} \Gamma g^{1\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(\frac{3}{2}, j, k\right)} - \sqrt{g} \sqrt{g^{11}} g_N - \sqrt{g} \Gamma g^{2\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j+\frac{1}{2}, k\right)} - \sqrt{g} \Gamma g^{3\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j, k-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.141)$$

La partie droite de l'équation (4.141) peut être approchée juste à l'intérieur du domaine, ces approximations introduisent quelques inconnues virtuelles aux points $(0, j, k)$, $(0, j\pm 1, k)$ et $(0, j, k\pm 1)$, qui peuvent être éliminées au moyen de la condition de Neumann (4.133) et des

points virtuels $x_{(0,j,k)}$, $x_{(0,j\pm 1,k)}$ et $x_{(0,j,k\pm 1)}$, par réflexion, respectivement des points $x_{(1,j,k)}$, $x_{(1,j\pm 1,k)}$ et $x_{(1,j,k\pm 1)}$, à la limite $\zeta^1 = \zeta_{\frac{1}{2}}^1$.

Les inconnues virtuelles sont éliminées par les approximations suivantes:

$$\phi_{(0,j,k)} = \phi_{(1,j,k)} - \frac{g_N}{\Gamma} |x_{(1,j,k)} - x_{(0,j,k)}| \quad (4.142)$$

$$\phi_{(0,j\pm 1,k)} = \phi_{(1,j\pm 1,k)} - \frac{g_N}{\Gamma} |x_{(1,j\pm 1,k)} - x_{(0,j\pm 1,k)}| \quad (4.143)$$

$$\phi_{(0,j,k\pm 1)} = \phi_{(1,j,k\pm 1)} - \frac{g_N}{\Gamma} |x_{(1,j,k\pm 1)} - x_{(0,j,k\pm 1)}| \quad (4.144)$$

En référence au théorème 4.1 il est clair que ces approximations produisent un schéma positif car les coefficients de $\phi_{(0,j,k)}$, $\phi_{(0,j\pm 1,k)}$ et $\phi_{(0,j,k\pm 1)}$ sont non-négatifs. Un modèle de sous maille à deux équations, seules les conditions de Neumann homogènes ($g_N=0$) sont appliquées.

Le terme de convection.

Les schémas décentrés en amont (upwind), traités dans la section IV.5.2, introduisent une seule inconnue virtuelle près des limites, à savoir $\phi_{(0,j,k)}$. Avec des conditions aux limites Dirichlet ou Neumann cette inconnue virtuelle peut être éliminée en utilisant une extrapolation linéaire. Dans le cas de la condition Dirichlet (4.132) nous écrivons :

$$\phi_{(0,j,k)} = 2g_D \left| \frac{1}{2}, j, k \right) - \phi_{(1,j,k)} \quad (4.145)$$

toutefois dans le cas d'une condition de Neumann (4.133), (4.142) est utilisé pour éliminer $\phi_{(0,j,k)}$. Dans tous les cas la positivité des schémas est maintenue.

IV.6.1.3 Fonctions de paroi :

Le calcul détaillé de l'écoulement près d'une paroi nécessite l'introduction d'un nombre élevé de point de discrétisation dans la zone de la sous-couche visqueuse et la zone intermédiaire où règnent des gradients intenses. Une méthode pratique pour pallier cet inconvénient est de faire appel à une loi universelle dans ces régions. Dans les cas usuels de couche limite sur plaque plane on utilise la loi logarithmique de vitesse proposée par Launder et Spalding [66]. Les fonctions de paroi utilisent des lois empiriques pour circonvenir l'incapacité du modèle à prédire un profil de vitesse logarithmique près d'une paroi. Avec ces lois, il est possible d'exprimer la vitesse parallèle aux parois et les quantités de la turbulence à l'extérieur de la sous couche visqueuse en fonction de la distance aux parois et des conditions de paroi telle que la tension du frottement et du gradient de pression.

Les fonctions de paroi sont utilisées pour fournir des conditions aux limites pour les équations de mouvement et des équations de transport, afin que la sous couche visqueuse n'ait plus besoin d'être résolu par un maillage très fin. Les lois de parois peuvent être obtenues par intégration des équations du mouvement dans l'approximation unidimensionnelle de l'écoulement stationnaire de couette.

L'expérience et l'analyse dimensionnelle montrent que la tension du frottement sur la paroi τ_w est liée à la vitesse parallèle à travers la paroi par la loi logarithmique suivante:

$$\tau_w = \frac{\rho C_{\mu}^{\frac{1}{4}} \kappa \sqrt{k_p}}{\text{Ln}(E Y_{p^+})} u'_p \quad (4.146)$$

où la coordonnée de paroi Y^+ est donnée par :

$$Y^+ = \frac{\rho C_{\mu}^{\frac{1}{4}} Y \sqrt{k}}{\mu} \quad (4.147)$$

Ici, u' est le vecteur de vitesse tangentielle, et κ est la constante de Von Karman (= 0.4) et E est un paramètre de rugosité, approximativement égale à 0.90 pour une paroi lisse. L'indice p fait référence au centre d'une cellule adjacente à la paroi. L'emplacement du centre de la cellule loin de la paroi doit être tel que $Y^+ > 11.3$ pour que la loi de paroi (4.146) reste valide.

Sinon, τ_w est calculé à partir du profil de la sous couche visqueuse:

$$\tau_w = \frac{\mu}{Y_{p^+}} u'_p \quad (4.148)$$

Ces relations sont une approche très acceptable dans le cas d'un écoulement bidimensionnel dans une région où l'équilibre local prédomine, mais nous les utiliserons aussi bien dans des circonstances plus générales. Une étude des lois de paroi tridimensionnelles est présentée dans [150].

La tension de frottement sur la paroi τ_w peut être utilisée comme une condition aux limites pour les équations de quantité de mouvement suivant l'expression:

$$\sigma^{(n),t} = -|\tau_w| ; \quad t = \frac{\tau_w}{|\tau_w|} \quad (4.149)$$

Si la contrainte tangentielle $(\sigma^{(n),t})$ est prescrite. La deuxième condition est supposée être :

$$u \cdot n = 0 \quad (4.150)$$

Le vecteur u' peut être obtenu en soustrayant le vecteur normal u^n du vecteur vitesse u :

$$u' = u - u^n \quad (4.151)$$

avec :

$$u = U^\alpha \cdot a_{(\alpha)} \quad \text{et} \quad u^n = (u \cdot n) n = \frac{U^n}{g^{nn}} a^{(n)} \quad (4.152)$$

où (2.39) a été utilisé. Les composants de la vitesse contravariantes U^α et U^n au centre de la cellule sont calculés par interpolations linéaires en utilisant les points adjacents. La distance d'un nœud p près de la paroi d'une surface limite peut être trouvée comme le produit scalaire d'un vecteur qui connecte les points limites B et P et du vecteur unité normale n (voir la figure (4.11)).

Les coordonnées de B et p sont obtenues par interpolation linéaire des coordonnées des faces de la maille .

$$Y_p = BP \cdot n = \frac{BP \cdot a_B^{(n)}}{\sqrt{g_B^{NN}}} \quad (4.153)$$

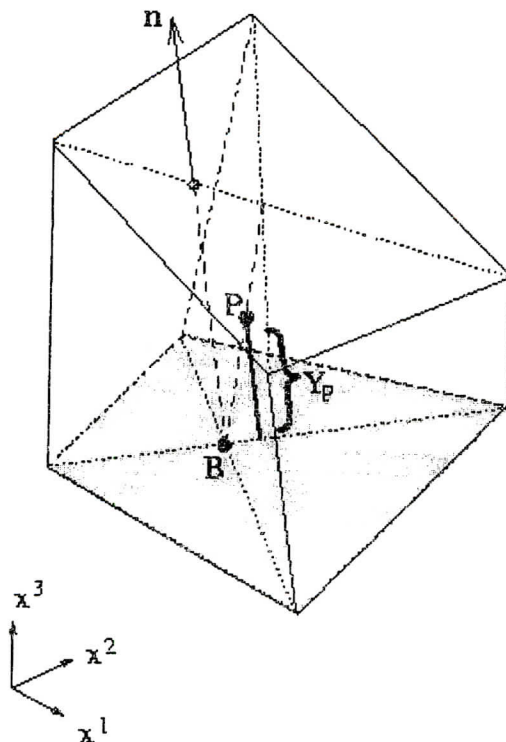


Figure (4.11): Calcul de la distance normale Y_p entre le nœud p et la surface limite.

Afin d'assurer une représentation numérique exacte de l'énergie de turbulence près de la paroi un traitement particulier est exigé dans l'évaluation du terme source par les cellules proches de la paroi. On considère le terme de production de l'équation de l'énergie de turbulence k . Puisque l'écoulement dans la sous couche est supposé être celui de Couette, la contribution dominante dans le terme de production est :

$$P_k = \tau_w \cdot \frac{\partial u^t}{\partial Y} \tag{4.154}$$

Suivant Launder et Spalding [66], nous supposons que la valeur locale de production au centre de la cellule près de la paroi peut être obtenue par une moyenne sur le demi de cellule proche de la paroi :

$$\overline{P_k} = \frac{1}{Y_p} \int_0^{Y_p} \tau_w \cdot \frac{\partial u^t}{\partial Y} dY = \tau_w \cdot \frac{u_p^t}{Y_p} \tag{4.155}$$

en prenant τ_w constant à travers la cellule proche de la paroi. Le taux de dissipation de k sur les cellules de la sous couche doit être traité d'une manière analogue. Pour évaluer le taux de la dissipation dans la couche logarithmique, on pose :

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa Y} \tag{4.156}$$

en supposant l'équilibre local, logique avec l'usage de la loi logarithmique de paroi. Dans le sous couche visqueuse nous adoptons l'expression suivante:

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu} \tag{4.157}$$

Avec (4.156) et (4.157) nous pouvons calculer la moyenne du taux de dissipation sur le demi de cellule près de la paroi :

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{Y_p} \int_0^{Y_p} \varepsilon dY = \begin{cases} C_{\mu}^4 k_p^2 \frac{Y_p^+}{Y_p}; Y_p^+ < 11.3 \\ C_{\mu}^4 k_p^2 \frac{\ln(EY_p^+)}{\kappa Y_p}; Y_p^+ > 11.3 \end{cases} \quad (4.158)$$

Ici, nous supposons que la variation d'énergie turbulente à travers la cellule proche de la paroi est négligeable. Les expressions (4.155) et (4.158) remplacent respectivement P_k et ε , dans le terme source de la forme standard de l'équation pour l'énergie turbulente (3.76). Finalement, le flux d'énergie turbulente à travers la paroi est supposé nul et la valeur de ε au premier point de la grille loin de la paroi est déterminée à partir de (4.156).

IV.6.2 Intégration temporelle et les techniques de correction de pression :

Plusieurs techniques numériques nécessaires à la construction d'un code de simulation numérique d'un écoulement instationnaire (discrétisation spatiale, interpolation et méthodes de correction, conditions aux limites, etc.) ont été largement discutées dans les sections précédentes. Pour résoudre un problème stationnaire, plusieurs stratégies sont disponibles. Une approche appropriée est d'appliquer une méthode d'intégration dépendante du temps pour atteindre un état stationnaire. Plus spécifiquement, on peut considérer la solution stationnaire comme la limite temporelle infinie des équations d'écoulements instationnaires c'est à dire que l'intégration peut être envisagée comme une méthode d'itération et le pas de temps comme un facteur de relaxation. Par cette approche il nous suffit donc de définir une seule méthode d'intégration qui servira alors à résoudre les problèmes stationnaires et instationnaires.

De même que l'espace physique est discrétisé par un maillage, l'axe des temps doit être découpé en intervalles Δt que nous supposons réguliers pour intégrer numériquement les équations filtrées de Navier-Stokes et les équations de modélisation. Le champ aérodynamique n'est alors calculé qu'en des instants $t^n = n\Delta t$, où Δt est communément appelé le pas de temps.

Aussi la discrétisation du problème continu est achevée en choisissant :

- o Une discrétisation de la dérivée temporelle $\frac{\partial V^\alpha}{\partial t}$.
- o l'instant entre t^{n+1} et t^n où sont estimés les termes de convection et visqueux.

Si les ces flux sont estimés en t^n , la méthode d'intégration est dite explicite, et elle se caractérise par la rapidité de l'intégration des équations sur un pas de temps. Cependant ce dernier peut parfois prendre de très petites valeurs pour assurer la stabilité de l'intégration, car il doit vérifier la condition de Courant-Friedricks-Levy :

$$\Delta t \leq CFL \min_j \left(\frac{\Delta x_j}{|u_j| + c}, \frac{\Delta x_j^2 R_e}{4} \right) \quad (4.159)$$

Où le nombre de CFL est proche de l'unité, sa valeur doit être légèrement ajustée en fonction du schéma explicite retenu. Le pas de temps se trouve donc limité par une double contrainte, qui consiste à assurer une intégration stable des flux de convection et visqueux.

Si les flux sont estimés en t^{n+1} , la méthode d'intégration est dite implicite, et la stabilité de l'intégration n'est plus liée à l'équation (4.159). Dans ce cas, les limitations imposées au pas de temps ont pour unique origine l'instationnarité des écoulements. Ainsi des pas de temps de valeur quasi-infinie peuvent être employés pour accélérer la convergence vers une solution stationnaire. Cependant le prix à payer pour cette stabilité accrue réside dans la nécessité de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps de l'intégration temporelle, ce qui peut se révéler très coûteux en temps de calcul. Cependant, la résolution numérique des équations incompressible de Navier-Stokes est compliquée par le manque d'équations explicites pour la pression. Afin de contourner cette difficulté on utilise des méthodes de projection. Ces méthodes divisent l'intégration d'un pas de temps en deux sous pas, constitués d'un pas prédictif qui permet d'obtenir une première estimation du champ de vitesse, qui n'est pas en général à divergence nulle et d'un pas correcteur, qui modifie le champ de vitesse afin d'assurer la contrainte d'incompressibilité. Cette technique est connue comme la méthode de correction de pression [47]. Pour la discrétisation temporelle nous utilisons une combinaison linéaire du schéma d'Euler décentré en avant et en arrière, appelé méthode- θ , et la méthode de correction de pression du deuxième ordre de troncation en temps décrite par Van Kan [152].

Le discrétisation spatiale des équations de continuité, du mouvement et des équations de transport aboutit au système d'équations non-linéaires dépendantes du temps suivant:

$$R \frac{\partial V}{\partial t} + M(V, \phi_1 \dots \phi_n) + Gp = F \quad (4.160)$$

$$DV = 0 \quad (4.161)$$

$$R \frac{\partial \phi}{\partial t} + T_i(V, \phi_1 \dots \phi_n) = S_i + S_{b,i} ; \forall i \in [1, \dots, N] \quad (4.162)$$

Où V et p dénotent des vecteurs algébriques contenant les inconnues de vitesse et de pression de tous les points du maillage, ϕ_i est la $i^{\text{ème}}$ fonction scalaire discrète de la grille et N est le nombre total des scalaires inconnues. Par exemple dans le cas du modèle à deux équations de transport $N = 2$. En outre, R est la matrice diagonale unité, D et G sont l'opérateur de divergence et de gradient discrétisé, M représente la discrétisation spatiale des termes de convection et des tenseurs des contraintes visqueuses et T_i est l'opérateur impliquant la discrétisation de convection et de diffusion du $i^{\text{ème}}$ scalaire. Le vecteur F contient les forces de volume et les termes dus au changement de repère ainsi que les valeurs des vitesses aux limites du domaine et S_i représente le terme source suivant ϕ_i qui est en général une fonction de V_i et $\phi_j \forall j \in [1, \dots, N]$. Les termes sources S_i résultent des conditions aux limites pour ϕ_i . Dans cette section nous nous restreignons à la discrétisation temporelle de l'équation de quantité de mouvement. Le traitement des équations du transport sera discuté dans la prochaine section, car la discrétisation du terme source de la turbulence a un impact considérable sur l'intégration temporelle. L'application de la méthode- θ à (4.160)-(4.161) nous permet d'écrire :

$$R \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} + \theta M(V^{n+1}) + (1-\theta)M(V^n) + \theta Gp^{n+1} + (1-\theta)Gp^n = \theta F^{n+1} + (1-\theta)F^n \quad (4.163)$$

$$DV^{n+1} = 0 \quad (4.164)$$

Où θ varie entre zéro et l'unité, n dénote du niveau du temps précédent, $n+1$ le nouveau niveau du temps. Pour $\theta=0$ et $\theta=1$ nous obtenons le schéma d'Euler du premier ordre respectivement, explicite et implicite, pour $\theta=\frac{1}{2}$ nous obtenons le schéma de Crank-Nicolson du deuxième ordre. La méthode de correction de pression définit le changement du niveau de temps (n) au niveau ($n+1$) en deux pas. En premier lieu, (4.164) est remplacé par :

$$R \frac{V^* - V^n}{\Delta t} + \theta M(V^*) + (1-\theta)M(V^n) + (1-\theta)Gp^n = \theta F^{n+1} + (1-\theta)F^n \quad (4.165)$$

Où V^* représente une vitesse intermédiaire. Le terme non linéaire $M(V^*)$ est linéarisé en utilisant la méthode Newton du deuxième ordre :

$$M(V^*) \approx M(V^n) + \left(\frac{\partial M}{\partial V}\right)'(V^* - V^n) \quad (4.166)$$

Le système obtenu est résolu pour V^* , en soustrayant (4.165) de (4.163), qui s'écrit :

$$\frac{V^{n+1} - V^*}{\Delta t} = -\theta R^{-1}G(p^{n+1} - p^n) \quad (4.167)$$

Où le terme $\theta(M(V^{n+1}) - M(V^*))$ peut être négligé sans affecter l'ordre de précision [152]. L'application de l'opérateur discret de divergence D à (4.167) en utilisant (4.164) permet d'écrire :

$$DV^* = -\theta \Delta t DR^{-1}G(p^{n+1} - p^n) \quad (4.168)$$

une équation de Poisson pour la correction de pression. Généralement cette équation introduit un stencil de discrétisation de 9 points et 19 points respectivement dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel similaire à celui de l'équation de transport. Toutefois la matrice $DR^{-1}G$ est non-symétrique lorsqu'on utilise un maillage non-orthogonal. Une fois p^{n+1} est obtenue on calcule V^{n+1} par la formule (4.167).

IV.6.3 traitement du terme source de la turbulence :

Nous considérons le système (4.162) résultant de la discrétisation spatiale des équations du transport de la turbulence. L'objectif principal de cette section est d'étudier l'influence du terme source de la turbulence sur l'intégration temporelle des équations. Le terme source est traité en séparant les contributions positives des contributions négatives arrangées sous forme linéaire:

$$S_i = S_i^p + S_i^n \phi_i \quad (4.169)$$

où S_i^p représentent les contributions positives et S_i^n les contributions négatives. Tout terme négatif ne contenant pas ϕ_i comme multiplicateur est divisé en premier lieu par ϕ_i (obtenu au niveau du temps antérieur) et ajouté à S_i^n afin d'assurer la dominance diagonale des coefficients de la matrice afin d'améliorer la stabilité numérique. L'approximation de S_i devrait garantir la positivité des quantités de la turbulence (k et ε). On introduit pour cela un nouveau facteur temporel pour le terme source. En utilisant la méthode- θ de discrétisation nous obtenons le système discret suivant :

$$R \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \theta T^{n+1} + (1-\theta)T^n = \psi \cdot S_i^{n+1} + (1-\psi)S_i^n + S_{b,i} \quad (4.170)$$

Où $\psi \in [0,1]$ est le facteur choisi indépendamment de θ . Pour un écoulement stationnaire, on prend $\theta=1$ c'est la seule valeur qui assure la positivité de tous les coefficients dans la partie gauche de l'équation (4.170) et donc satisfait les conditions de Théorème 4.1. Maintenant, on considère le traitement du terme source S_i tel que les valeurs des quantités turbulentes soient non négatives pendant l'évolution du temps et par conséquent maintenir la stabilité numérique. Il est suffisant de considérer l'équation suivante:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \psi \cdot S_i^{n+1} + (1 - \psi) S_i^n \quad (4.171)$$

On linéarise le terme source au niveau temporel $n+1$ suivant :

$$S_i^{n+1} = S_i^n + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n (\phi^{n+1} - \phi^n) \quad (4.172)$$

En substituant (4.172) dans (4.171), nous arrivons à :

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = S_i^n + \psi \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n (\phi^{n+1} - \phi^n) \quad (4.173)$$

Pour préserver la positivité de la solution ϕ , on pose l'inégalité suivante (voir le théorème

4.1):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n < 0 \quad (4.174)$$

Bien que ce ne soit pas une exigence nécessaire, il est suffisant que ϕ^n soit non négative pour que ϕ^{n+1} l'est aussi. Dans ce cas, quand $\left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n > 0$ nous devons choisir $\psi=0$.

IV.6.4. L'algorithme de résolution :

Les discrétisations spatiales et temporelles cèdent à un ensemble d'équations algébriques couplées pour la vitesse, la pression et les quantités de la turbulence (k et ε). L'étape finale du travail de simulation numérique est de choisir une méthode capable de résoudre l'ensemble des équations discrétisées. Ce choix affecte l'accouplement de plusieurs inconnues. Fondamentalement, la vitesse et le champ de pression sont associés par l'équation de continuité. Pour les écoulements turbulents, les équations de mouvement sont associées aux équations du transport de la turbulence par la viscosité turbulente. Il faut encore noter qu'un très fort accouplement existe entre les équations de turbulence dans le cas d'une modélisation à plusieurs équations de transport.

En principe, il y a deux approches pour la résolution de l'ensemble des équations discrétisées couplées. La première consiste à résoudre toutes les équations en chaque point de la grille simultanément. Par contraste, la seconde est une technique de résolution séquentielle itérative découplée en traitant les autres variables comme des quantités connues jusqu'à obtenir une solution convergée des équations. La méthode de résolution couplé exige un ordinateur très puissant, mais peut avoir un meilleur taux de convergence et plus de stabilité numérique que celle traitant la résolution d'une manière découplée [84, 117, 168]. Néanmoins, résoudre toutes les équations simultanément, peut être si compliqué qu'il devient très difficile d'utiliser cette procédure de résolution. Il peut être alors préférable d'adopter une méthode découplée ou bien une forme mixte des deux stratégies.

Ici, l'algorithme de résolution peut être décrit par les étapes suivantes : Pour chaque pas du temps, le début du processus commence par une estimation des variables V^{α}, p, k et ε par des valeurs initiales ou par les valeurs obtenues au niveau temporel antérieur. notons que la

vitesse estimée doit satisfaire la condition d'incompressibilité. Ensuite l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement couplées sont résolues en utilisant une viscosité turbulente non actualisé. Afin d'assurer un champ de vitesse a divergence nulle la méthode de correction de pression présentée dans la section IV.6.2 est utilisée. Les équations de quantité de mouvement et équations de correction de pression sont résolues séquentiellement. A cause des non-linéarités cette boucle ($V^\alpha \rightarrow p$) peut être répétée jusqu'à ce qu'une solution convergée soit obtenue, mais une itération de la méthode Newton pour chaque pas du temps est suffisante dans le cas d'un écoulement turbulent stationnaire. Finalement, les équations de la turbulence sont résolues d'une façon découplées en utilisant les quantités de l'écoulement mises à jour et une viscosité turbulente non actualisé. L'équation pour ε est résolue après celle pour k . Pour les écoulements instationnaires, il est nécessaire de répéter cette boucle ($k \rightarrow \varepsilon$) à chaque pas du temps pour atteindre un état de convergence. De plus, la boucle externe ($V^\alpha \rightarrow p \rightarrow k \rightarrow \varepsilon$) qui contient les deux boucles intérieures ($V^\alpha \rightarrow p$) et ($k \rightarrow \varepsilon$) couplées par la viscosité turbulente, est répété tant que toutes les variables au niveau temporel $n+1$ n'ont pas encore convergées.

Pour résoudre un problème stationnaire, la méthode consiste à résoudre les équations instationnaires de Navier-Stokes et choisir une limite finale d'intégration temporelle assez grande pour atteindre l'état stationnaire. On dit alors qu'une solution est stationnaire si elle vérifie le critère de convergence suivant :

$$\|u^{n+1} - u^n\|_{\max} \leq \frac{1-\lambda}{\lambda} \left(relacc \|u^{n+1}\|_2 + absacc \right) \quad (4.175)$$

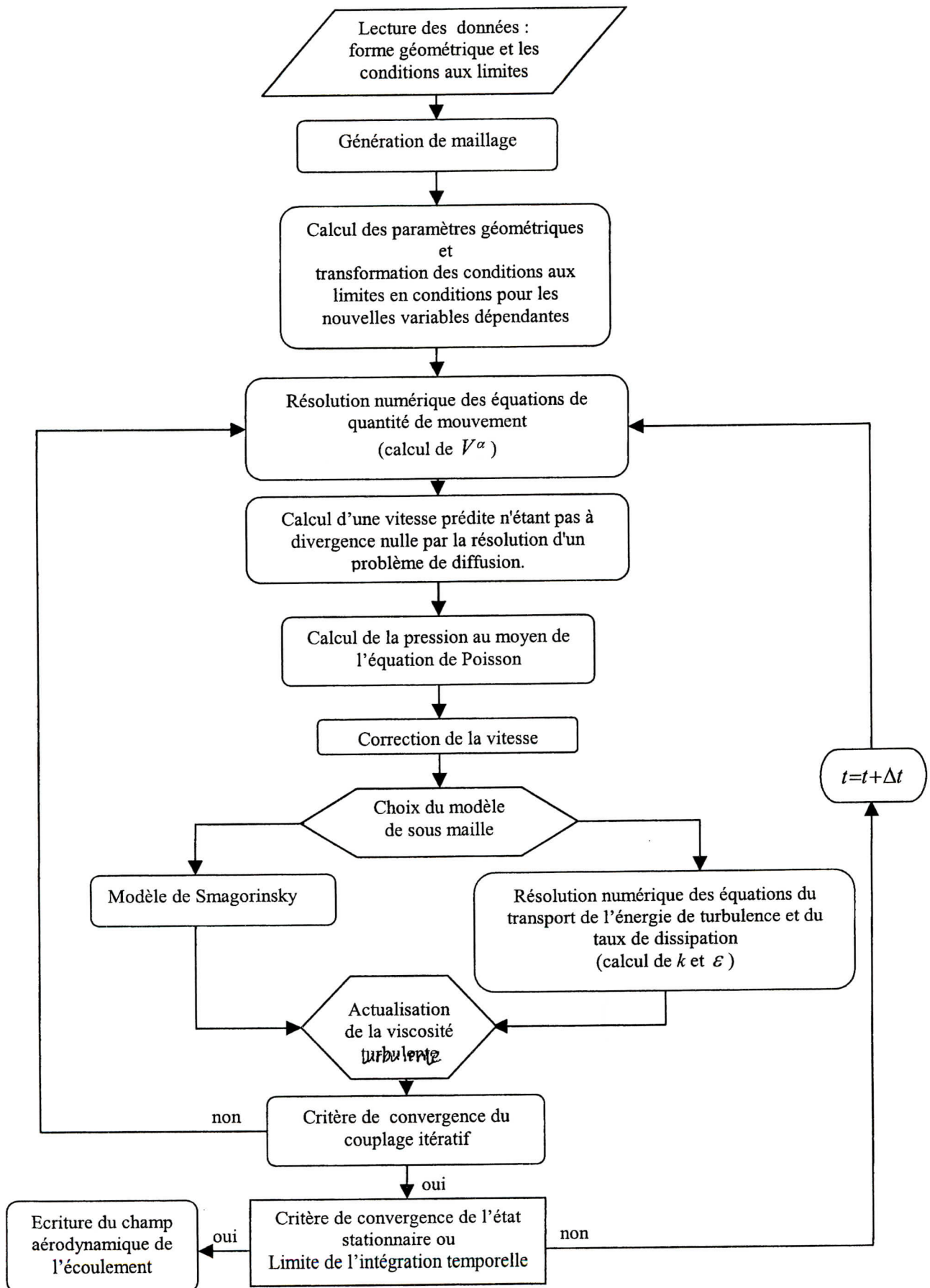
avec

$$\lambda = \frac{\|u^{n+1} - u^n\|_2}{\|u^n - u^{n-1}\|_2}$$

Les valeurs de *relacc* (le paramètre relatif de précision) et *absacc* (le paramètre absolu de précision) peuvent être définies suivant le problème traité, les valeurs par défaut sont égales à zéro. Il est recommandé dans ce cas d'utiliser le schéma Euler implicite, afin de pouvoir utiliser de large pas de temps. Malheureusement la combinaison de ce schéma et la méthode de correction de pression exclue l'usage de pas de temps trop grand.

Les systèmes des équations linéaires sont résolus par une méthode de sous-espace de Krylov du type GMRES [122] avec un préconditionnement ILU (factorisation LU incomplète). Cette méthode est très adaptée pour résoudre des systèmes a matrice non-symétrique, avec un taux de convergence relativement très rapide. Puisque la méthode GMRES nécessite le calcul du résidu, on utilise sa réduction comme critère de convergence. Soit le système à résoudre noté $Ax=b$, après k itérations, nous avons une solution approximative $x^{(k)}$ et un résidu $\tau^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ relié à l'erreur de convergence $\epsilon^{(k)} = x - x^{(k)}$ par la relation $A\epsilon^{(k)} = \tau^{(k)}$, donc la réduction du résidu résulte de la réduction de l'erreur de convergence. Le processus d'itération GMRES s'arrête à chaque pas du temps si le rapport de la norme résiduelle sur le résidu initial $\frac{\|\tau^{(k)}\|_2}{\|\tau^{(0)}\|_2} \leq tol$ où *tol* est de l'ordre de 10^{-3} pour la résolution des systèmes d'équations de quantité de mouvement et du transport des quantités turbulentes et de 10^{-4} pour le système de pression (voir annexe pour plus de détails).

L'organigramme de la résolution numérique :



Chapitre V

Application et résultats numériques

L'algorithme de simulation numérique décrit dans les chapitres précédents a été utilisé pour la détermination de l'écoulement stationnaire et instationnaire autour d'un profil Naca0012. Les résultats numériques ont été validés par des comparaisons avec des résultats expérimentaux obtenus par des laboratoires d'aérodynamique instationnaire et celles obtenues par simulation statistique sur une aile d'envergure dans différentes configurations.

V.1 Mise en œuvre de la SGE sur le cas test :

Cette section du chapitre est consacrée à la mise en œuvre de la Simulation des Grandes Echelles pour calculer l'écoulement autour d'une aile tridimensionnelle présentée au chapitre(II).

V.1.1 Géométrie et maillage de l'écoulement autour du profil d'aile et ses caractéristiques :

La géométrie de l'écoulement est schématisée sur la figure (5.1), on définit la direction longitudinale (Ox^1) et normale (Ox^2) et finalement la direction transversale (Ox^3). D'un point de vue statistique, les directions (Ox^1) et (Ox^2) limitées par la paroi du profil sont inhomogènes, alors que la direction (Ox^3) est homogène et justiciable de conditions aux limites périodiques. Pour éviter le recouvrement des spectres et des corrélations dues aux conditions aux limites les dimensions du domaine de calcul sont choisies telles que :

$$L_{x^1}=4C \quad ; \quad L_{x^2}=4C \quad ; \quad L_{x^3}=C \quad (5.1)$$

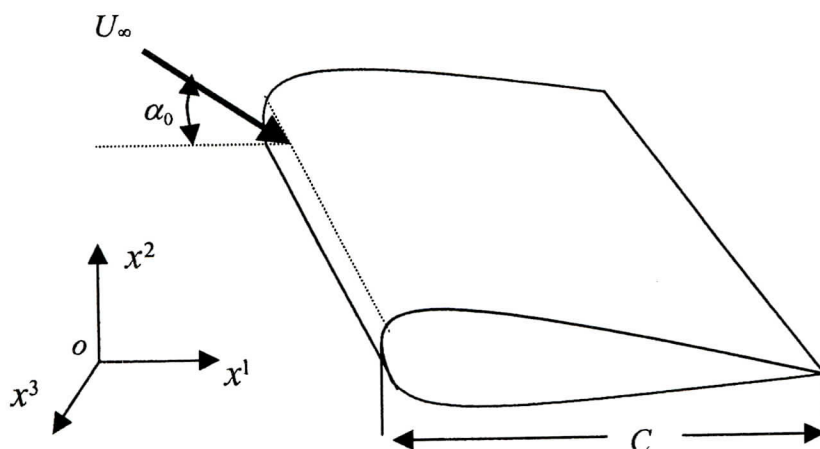


Figure (5.1) Schéma de l'aile et des axes de coordonnées

Afin d'effectuer des calculs laminaires et turbulents statistiques nécessaire à l'initialisation de la simulation des grandes échelles turbulentes on adopte deux types de maillage en forme C.

Le maillage autour d'un profil d'aile adapté aux calculs statistiques illustré par la figure (5.2) est un maillage très resserré aux parois et lâche au cœur du domaine. Il est important d'avoir un maillage très resserré près des parois dans les calculs statistiques car certains paramètres des modèles sont calculés à partir des gradients de la vitesse et surtout à partir des valeurs de l'énergie cinétique de turbulence k et de la dissipation ε proche des parois. Il faut donc évaluer les dérivées avec une grande précision. De plus, la discrétisation temporelle utilisée dans la résolution statistique étant implicite, le pas de temps ne devient plus un facteur limitant. Pour les simulations des grandes échelles nous avons modifié le maillage de façon à avoir des maillages plus réguliers moins lâche dans le cœur du domaine sans pour autant desserrer la concentration des nœuds près de parois. Il est également très important de discrétiser correctement les couches limites en SGE pour capturer les phénomènes turbulents dans le cas d'une modélisation n'utilisant pas de loi de parois.

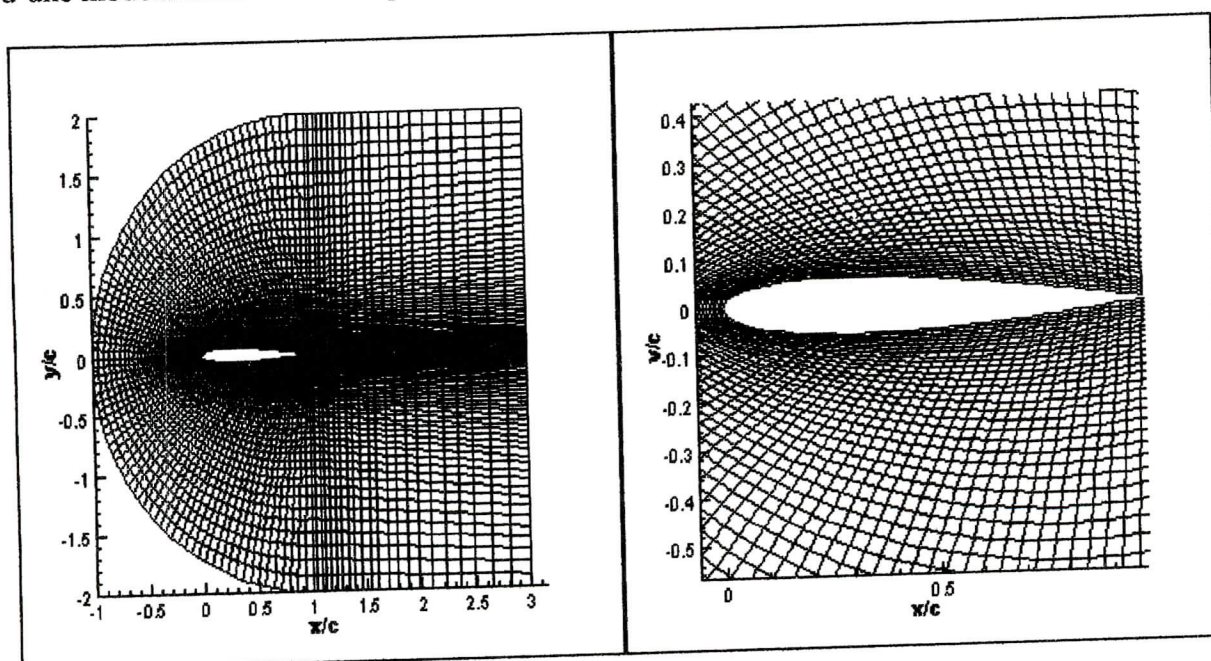


Figure (5.2) Maillage bidimensionnel autour du profil d'aile

Maillage utilisé dans la simulation SGE :

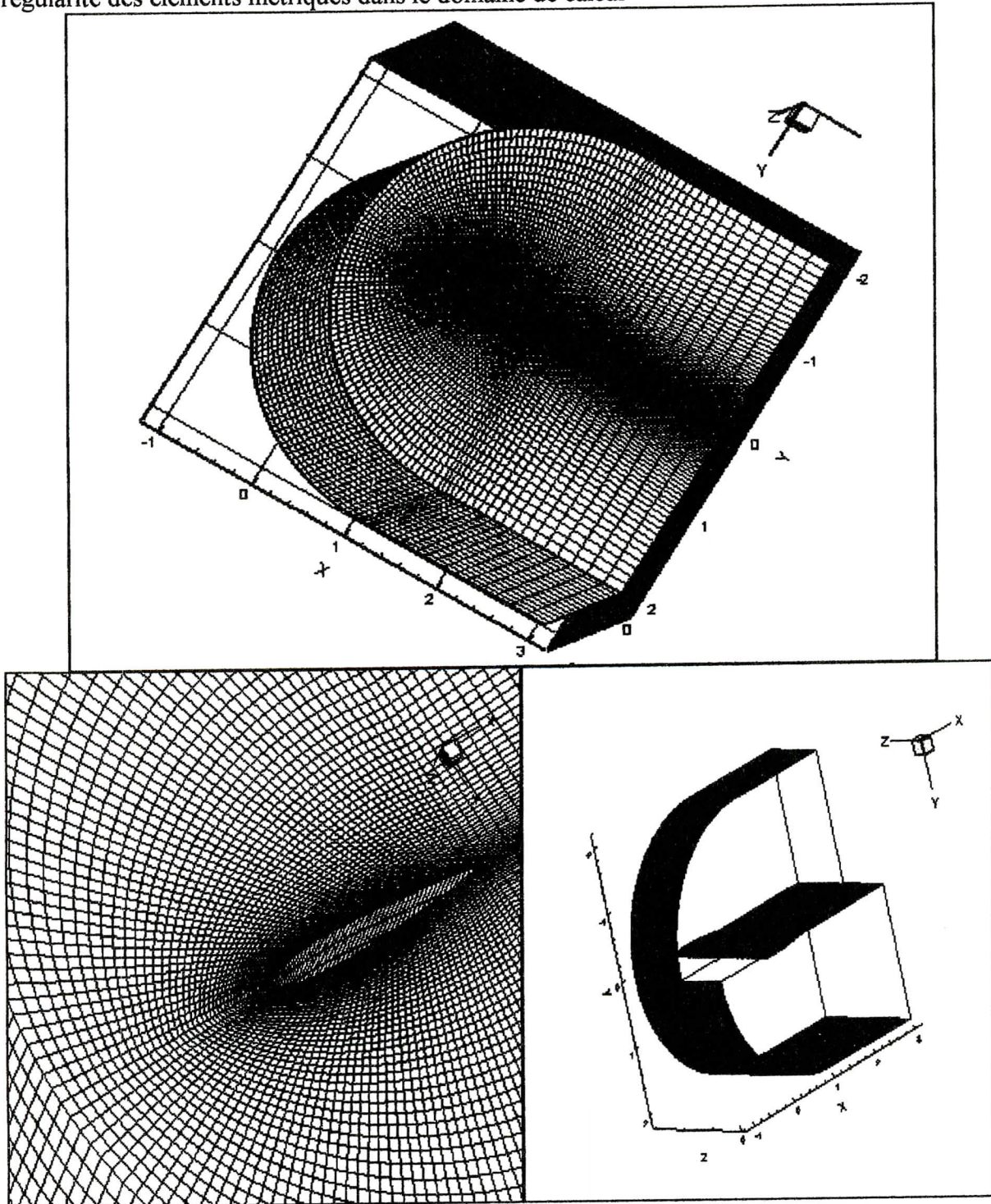
Le maillage en forme de C illustré sur la figure (5.3) généré autour du profil Naca0012 dont la ligne moyenne et la corde sont confondues en ayant une épaisseur maximum de 12% de sa corde : la distribution de l'épaisseur est donné par la fonction suivante (Abbot et Dsenhoff, 1959) :

$$Y_e = \frac{e}{0.2} \left[0.2969\sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2846x^3 - 0.1015x^4 \right] \quad (5.2)$$

Où e représente l'épaisseur maximum du profil par rapport à la corde du profil.

Le maillage est tracé dans le plan $x^3=0.03C$. Le plan transformé $\zeta^2=0$. coïncide avec la paroi du profil et $\zeta^2=1$. coïncide avec la limite extérieure du domaine. Les plans transformés $\zeta^1=0$. et $\zeta^1=1$. coïncident respectivement avec les deux parois latérales à $x^1=3C$ et $x^1=\pm 2C$. Les plans transformés $\zeta^3=constante$ sont parallèles aux plans $x^3=constante$.

Une distribution équidistante selon (Ox^3) est adoptée. Nous avons imposé une distribution des points selon (Ox^1) et selon (Ox^2) à l'aide d'une formule algébrique en cosinus. Le maillage est finalement lissé à l'aide de la résolution d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique sur x^1 et x^2 dans chaque plan $x^3=constante$ [39], [76], [77]. Cela permet d'assurer la régularité des éléments métriques dans le domaine de calcul



Figure(5.3) Vues perspectives du maillage tridimensionnel et ces limites autour du profil d'aile Naca 0012 en forme C

V.1.2 Conditions aux limites :

Dans les calculs de quantité de mouvement, les conditions de parois du profil sont des conditions d'adhérence et des conditions de loi de paroi basée sur une loi instantanée logarithmique quand le maillage est moins concentré près des parois. Les conditions aux limites imposées à la sortie de l'écoulement sont des conditions où on prescrit les contraintes normales et tangentielles égales à zéro.

Les conditions d'entrée sont spécifiées sur les régions courbées du maillage C. Les vitesses imposées par la configuration du mouvement instationnaire étudié sont perturbées afin de générer la turbulence dans la simulation des grandes échelles turbulentes. La perturbation autour du profil moyen des composantes de vitesse \bar{u}_i est induite en superposant un bruit blanc aux profils des vitesses. Il est construit de telle façon qu'il n'induit pas de débit supplémentaire. Les calculs réalisés en simulation des grandes échelles permettent de calculer l'écoulement dans une configuration particulière à chaque pas de temps, à l'inverse des calculs statistiques qui moyennent plusieurs réalisations dans le temps. Le bruit blanc est donc une suite spatialement aléatoire mais déterministe en temps. Il est en effet important de pouvoir recommencer les calculs dans la même configuration à tout instant, donc à l'entrée du domaine de calcul, les vitesses sont imposées par les relations suivantes :

$$U_e = U_\infty + \tilde{u} \quad (5.3)$$

$$V_e = V_\infty + \tilde{v} \quad (5.4)$$

$$W_e = \tilde{w} \quad (5.5)$$

les vitesses de perturbation sont calculées sur la base des intensités de fluctuation (rms)

$$u_{rms} = \sqrt{\langle (u''(t))^2 \rangle_t} \quad (5.6)$$

avec :

$$u''(t) = \bar{u}(t) - \langle \bar{u}(t) \rangle_t$$

et d'une longueur d'échelle ainsi que de la plage des fréquences au-dessus de lesquelles l'énergie est distribuée. La procédure utilisée dans cette étude est similaire à celle utilisé par Rai et Moin [115] pour la simulation directe de la transition d'une couche limite sur une plaque plane. Pour décrire cette méthode on considère la vitesse de perturbation $\tilde{u}(x^2, x^3, t)$ assumant une périodicité suivant x^2 , x^3 et t on peut écrire la représentation de $\tilde{u}(x^2, x^3, t)$ en série de Fourier :

$$\tilde{u}(x^2, x^3, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{lmn} \sin\left(\frac{2\pi l x^2}{L_{x^2}} + \phi_l\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi m x^3}{L_{x^3}} + \phi_m\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n\right) \quad (5.7)$$

L_{x^2} et L_{x^3} sont les dimensions du domaine de calcul numérique respectivement suivant la direction x^2 et x^3 , T est la période des basses fréquences à générer et les angles de phase ϕ_m, ϕ_n, ϕ_l sont des nombres aléatoires choisis entre zéro et 2π . On choisit les coefficients sous la formulation suivante :

$$A_{lmn}^2 = 8 u_{rms} X^2(l) X^3(m) T(n) \quad (5.8)$$

$$\text{avec :} \quad X^2(l) = K_{x^2} d_{x^2}^{l-1} \quad l=1, 2, \dots, L \quad (5.9)$$

$$X^3(m) = K_{x^3} d_{x^3}^{m-1} \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5.10)$$

et la fonction $T(n)$ est supposée satisfaire le spectre de Von Karman défini par :

$$\frac{T(n+1)}{T(n)} = \frac{1+\theta^2 n^2}{1+\theta^2(n+1)^2} \tag{5.11}$$

$$\theta = \frac{2\pi\Lambda}{U_\infty}$$

Λ est la longueur d'échelle, n nombre d'onde. Les valeurs des constantes K_{x^2} , K_{x^3} et $T(1)$ sont choisies telles que :

$$\sum_{l=1}^L X^2(l)=1, \sum_{m=1}^M X^3(m)=1, \sum_{n=1}^N T(n)=1 \tag{5.12}$$

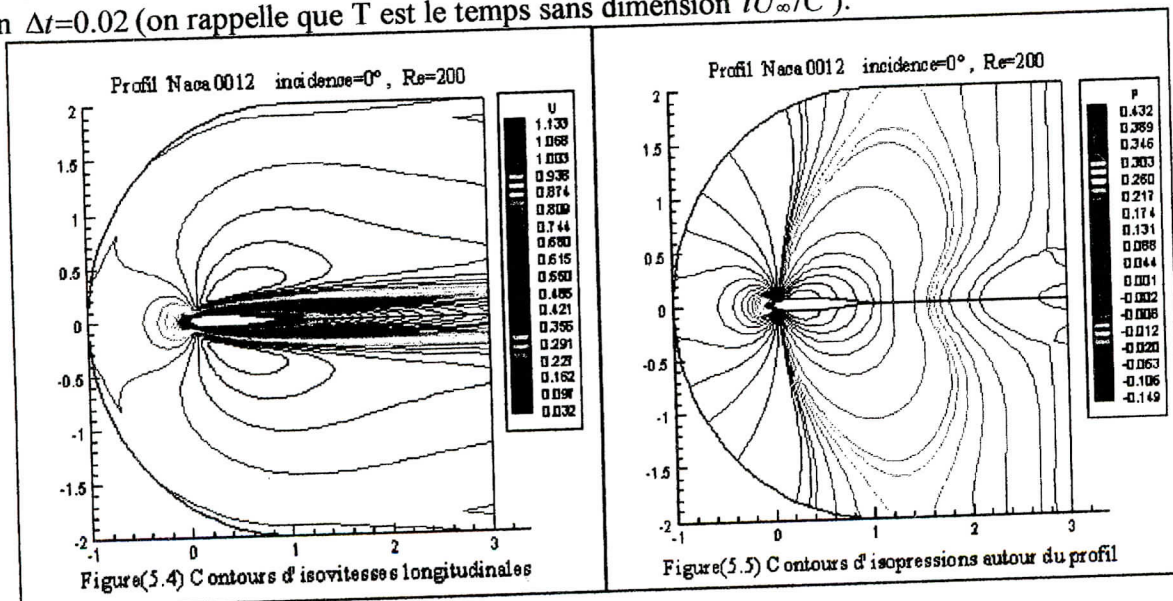
Les conditions d'entrée sont données par un champ réalisant un spectre d'énergie de Kolmogoroff présentant une pente en $-5/3$ dans la zone inertielle. L'énergie turbulente est choisie de façon à retrouver les niveaux d'énergie de l'expérience de l'écoulement turbulent autour d'un profil d'aile en fonction de l'expression reliant les intensités de fluctuation à l'entrée du domaine et le spectre d'énergie de turbulence :

$$E(k) = C_0 \frac{u_{rms}^2}{K_0} \left(\frac{K}{K_0}\right)^4 \exp\left[-2\left(\frac{K}{K_0}\right)^2\right] \tag{5.13}$$

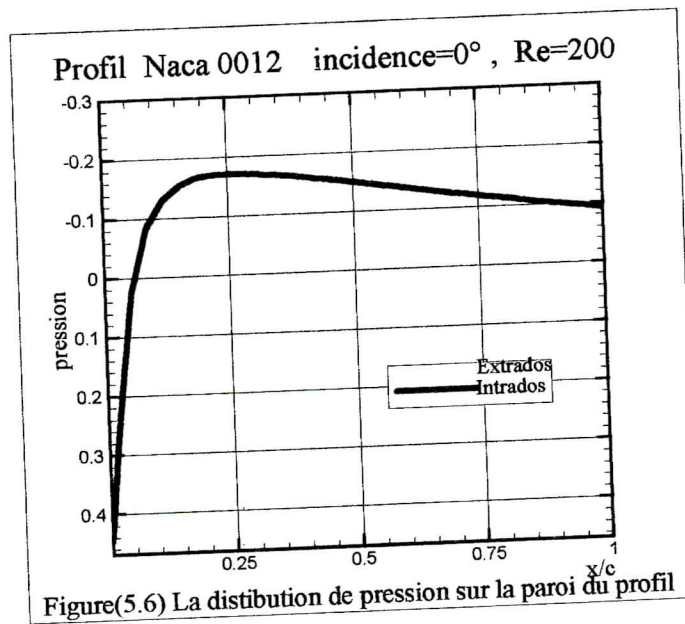
avec le nombre d'onde K_0 correspondant au maximum de $E(k)$ relatif aux gros tourbillons. Les conditions aux limites périodiques sont utilisées dans la direction transversale considérée homogène. Nous initialisons la simulation numérique par un champ statistique convergé obtenue à l'aide de la méthode $k-\varepsilon$.

V.1.3 Conditions initiales :

Afin d'initialiser les simulations numériques et valider les performances du code de calcul par étape dans des configurations moins compliquées que celle de la simulation des grandes échelles turbulentes, on commence par modéliser l'écoulement stationnaire autour d'un profil d'aile bidimensionnel à un nombre de Reynolds $Re=2.10^5$ pour des angles d'incidence $\alpha_0=0,6$ et 12 . Pour illustrer le problème que nous analysons dans cette section, nous commençons par présenter les résultats obtenus pour un écoulement laminaire à un $Re=200$ et une incidence $=0^\circ$ sur les figures (5.4) et (5.5) représentant les isovaleurs de la vitesse longitudinale et la pression de l'état stationnaire obtenue après un temps de calcul $T=1.7$ pour un $\Delta t=0.02$ (on rappelle que T est le temps sans dimension tU_∞/C).

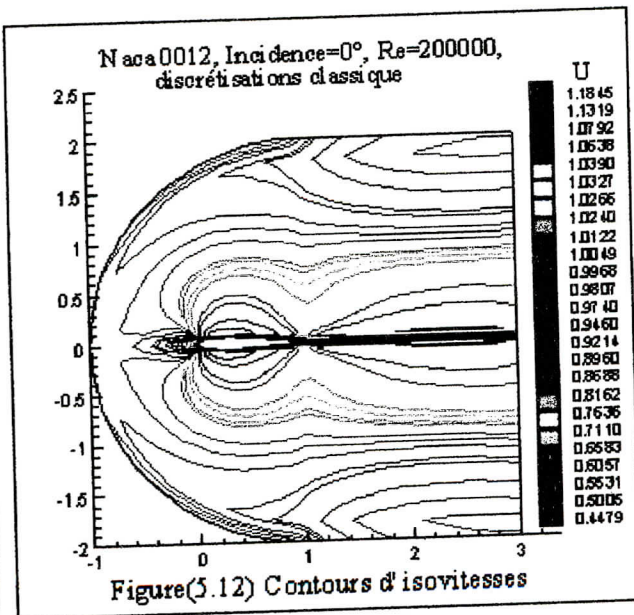
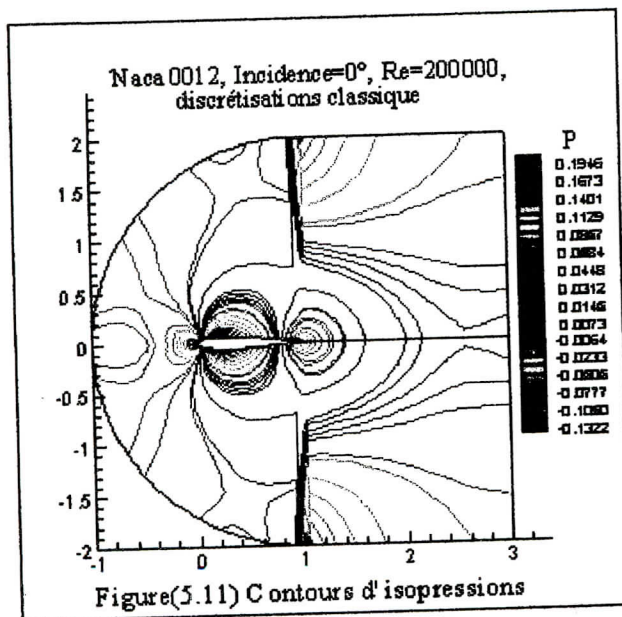
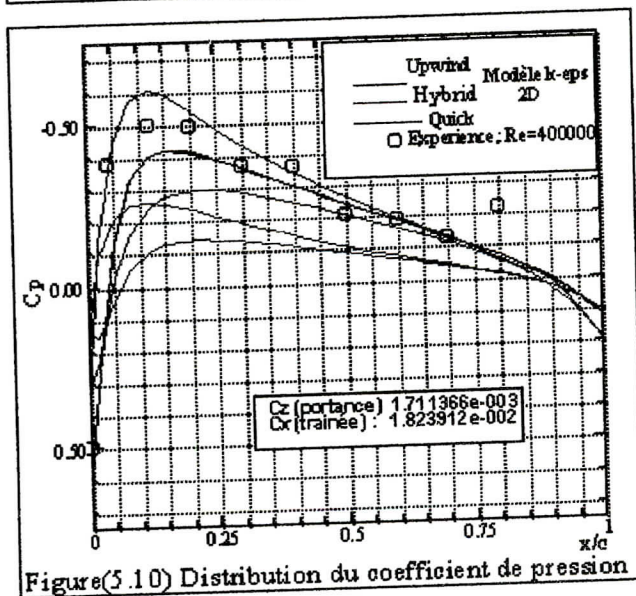
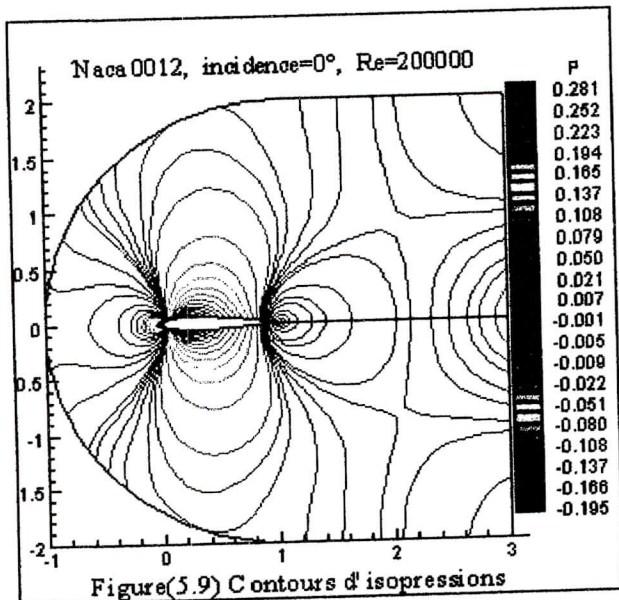
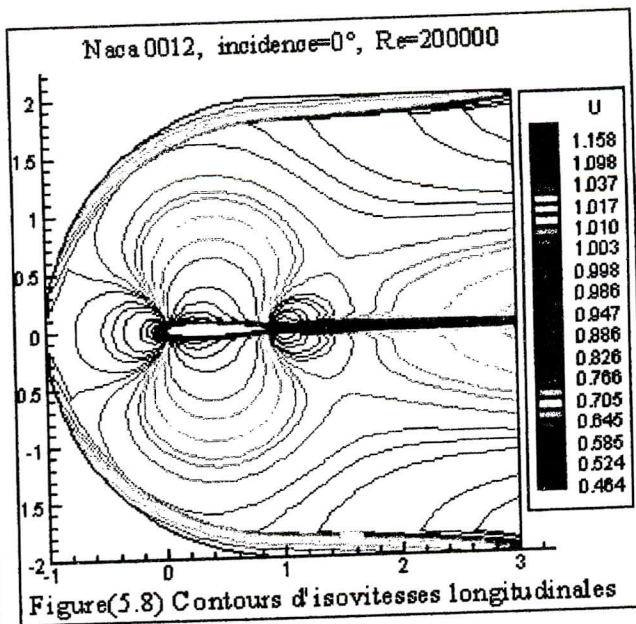
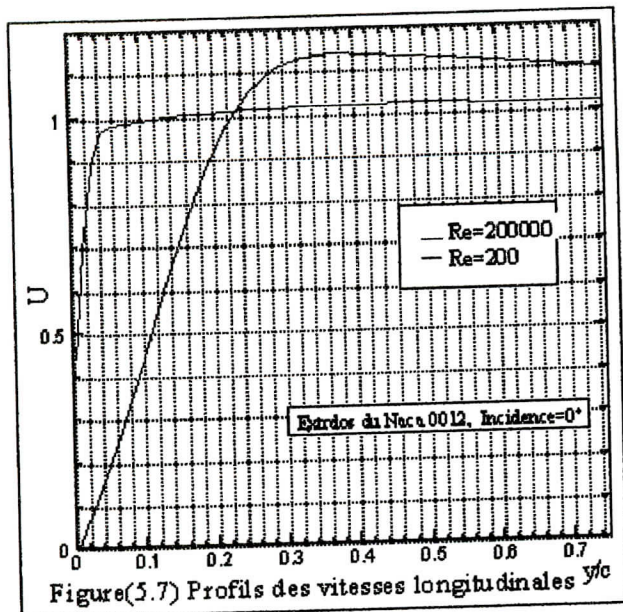


On remarque que l'immersion d'un corps symétrique dans l'écoulement crée localement des perturbations traduites par une dépression sur les deux cotés de la paroi du profil et l'apparition un point d'impact sur le bord d'attaque défini comme étant le point d'arrêt où on retrouve les conditions génératrices, les contours d'isovitesse longitudinales montrent une variation rapide des niveaux de valeurs tout au long de la région proche de la paroi du profil traduisant ainsi l'épaississement de la couche limite laminaire. La distribution de la pression adimensionnée est représenté sur la figure(5.6) elle est étroitement similaire à celle obtenue par un calcul potentielle.

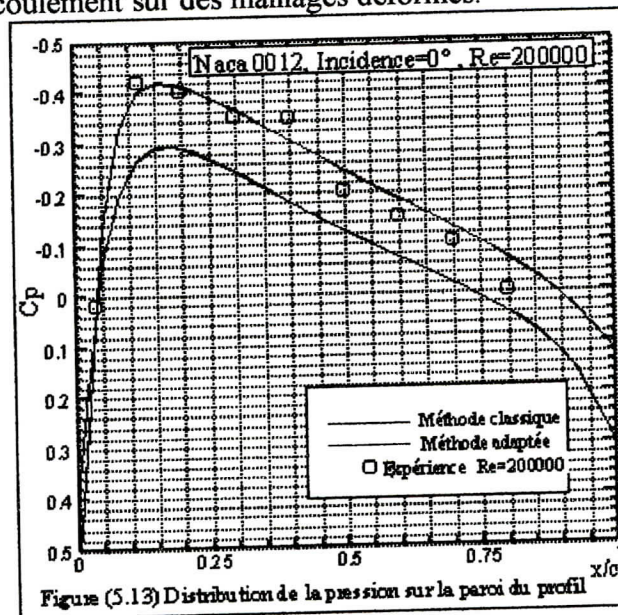


La méthode numérique décrite dans les chapitres antérieurs a été testé pour la prédiction de l'écoulement turbulent à un nombre de Reynolds $Re=2.10^5$ en incidence $\alpha_0=0$ à l'aide du modèle " $k-\epsilon$ ", afin d'établir une étude comparatif des résultats obtenues avec les différents schéma de discrétisation et ceux obtenues expérimentalement.

Les équations du mouvement turbulent discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis adaptée au maillage irrégulier représenté sur la figure(5.2) sont intégrées temporellement par un schéma d'Euler $\theta=1$ pour calculer le champ aérodynamique stationnaire autour du profil pour cela les termes de convection des équations de transport sont approchés par un schéma de différence hybride tandis que ceux des équations de quantité de mouvement sont approchés dans un premier temps par un schéma décentré du premier ordre, on constate alors que l'état stationnaire est atteint après un temps $T=2.05$ en utilisant un pas $\Delta t=0.01$, les résultats sont présentés sous formes d'isovaleurs de la vitesse longitudinale et de pression sur les figures (5.8) et (5.9) et dont la comparaison avec les figures (5.4) et (5.5) confirme les constatations de fidélité de notre code de simulation à reproduire les conditions réelles d'écoulement tel que la diminution de l'épaisseur de la couche limite turbulente par rapport à celle de la couche laminaire confortée par la figure (5.7) où on a représenté la vitesse moyenne U/U_∞ dans le cas turbulent comparée à la vitesse laminaire au même abscisse sur la fin de l'extrados. Pour $y/C=0.005$ on a encore U/U_∞ environ égal à 0.5, on a alors l'impression que le fluide glisse sur la paroi. La distribution du coefficient de pression sur la paroi du profil nécessaire au calcul des forces et moments, montre un assez bon accord des deux courbes confondues (extrados et intrados) avec les résultats obtenues expérimentalement [2] pour un nombre de Reynolds supérieurs à celui utilisé dans notre simulation.



Les capacités de prédiction des schémas quick, hybride et central pour la discrétisation de l'équation du mouvement ont été testés dans la même configuration d'écoulement que celle du premier schéma décentré. Les performances de ces approximations à calculer la distribution de la pression sur la paroi du profil sont représentée sur la figure (5.10). Le schéma central souffre d'une diffusion numérique excessive qui empêche la simulation de converger vers l'état stationnaire tandis que les résultats permanents des deux autres schémas ne sont atteints qu'après un temps de calcul largement supérieur à celui du schéma upwind et qui montre une différence de pression entre l'extrados et l'intrados physiquement inacceptable. La méthode du chemin d'intégration des équations avec un coefficient de diffusion discontinu montre d'assez bons résultats sur des maillages irréguliers, contrairement aux résultats obtenus avec la méthode de discrétisation standard sur les figures(5.11),(5.12) qui montre clairement des discontinuités et d'oscillations qui laisse pensé que cette stratégie est inapte a simulé d'écoulement sur des maillages déformés.

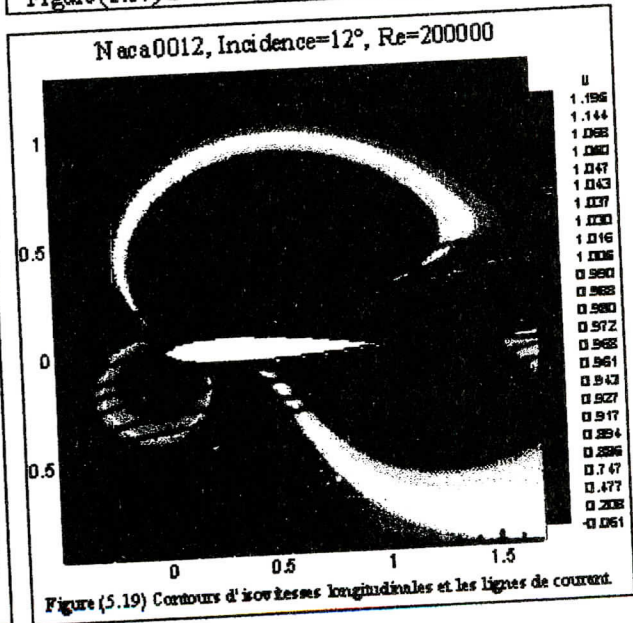
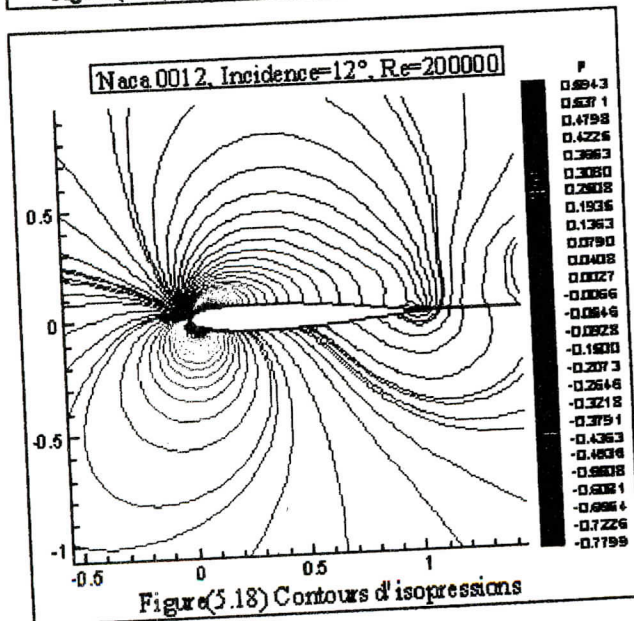
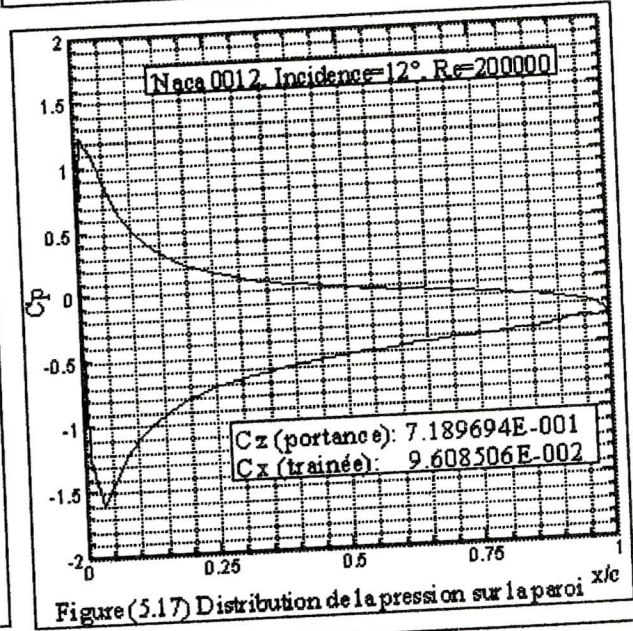
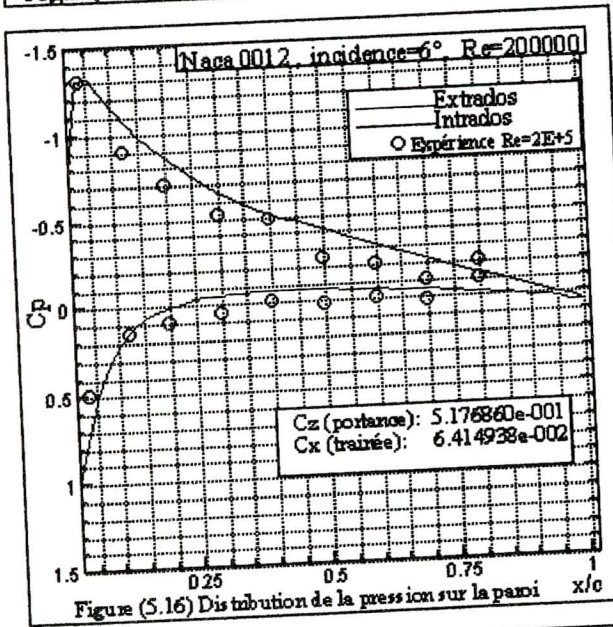
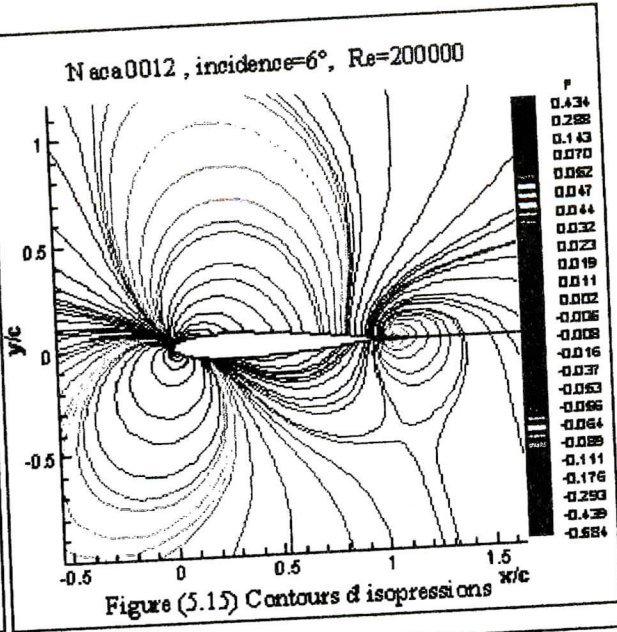
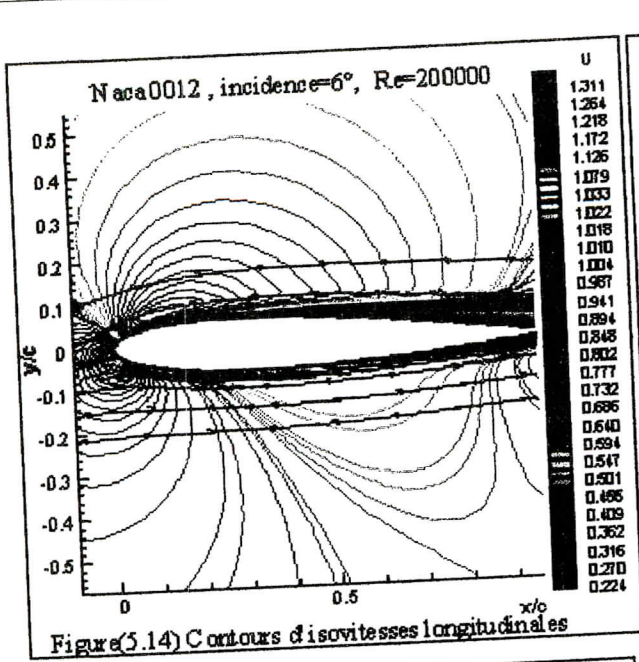


La figure (5.13) représentant la distribution de la pression sur la paroi du profil calculée par les deux méthodes de discrétisation confirme toute l'efficacité et la précision des résultats de la méthode d'intégration spatiale adaptée aux maillages irréguliers et dont les comparaisons avec les données expérimentales sont très satisfaisantes.

Pour la discrétisation des flux de convection de l'équation de transport un schéma hybride central, upwind est utilisé afin de prévenir les valeurs négatives des quantités turbulentes k et ε assurant ainsi la stabilité de la procédure. Tandis que les dérivées mixtes des termes de diffusion sont approchés d'après la méthode (iii) exposée dans la section IV.5 pendant ce traitement abaisse sensiblement le taux de convergence.

Pour décrire l'écoulement autour du profil d'aile en incidence égale à 6° et 12° , plusieurs visualisations ont été faites.

La figure (5.14) représentant les isovaleurs de la vitesse longitudinale et les lignes de courant permet de regarder de plus près les perturbations engendrées. Certains filets sont déviés vers le haut et contournent l'extrados. D'autres longent l'intrados. Il existe donc un filet frontalier qui ne passant ni en haut ni en bas, viendra s'arrêter sur le profil. La position de ce point d'arrêt est fonction de l'incidence. Les isovaleurs de vitesse et de pression (5.15) confirment la création de dépression et par conséquent une survitesse sur l'extrados et l'inverse sur l'intrados. La courbe de distribution de pression unique dans le cas d'une incidence nulle se dédouble sur la figure (5.16), la dépression de la face qui devient extrados augmente, l'autre diminue.



Le point de rebroussement intrados recule, initialement se situant au point $x_1=0.0$ et $x_2=0.0$ en incidence égale à 0° , il se déplace au point $x_1=0.0073$ et $x_2=-0.011$ en incidence égale à 6° et au point $x_1=0.012$ et $x_2=-0.019$ en incidence égale à 12° .

Notons que pour un angle d'attaque égale à 12° , on remarque sur la figure (5.18) représentant les contours d'isopressions l'apparition d'une région fortement dépressionnaire (bleu) concentré sur le bord d'attaque de l'extrados du profil. Alors qu'à l'aval du profil on retrouve rapidement les conditions de pression infini amont, cette différence de pression provoque le décollement de la couche limite représenté sur la figure(5.19) par l'apparition d'un tourbillon sur la fin de l'extrados du profil schématisé par des lignes de courant circulaires. Les forces appliquées sur le profil d'aile sont obtenues par intégration de la pression et des tensions visqueuses le long du profil. Le coefficient de portance C_z tendant vers zéro pour une incidence= 0° et croit avec l'incidence. La même constatation peut être faite pour le coefficient de traînée.

| α_0 | 0° | 6° | 12° |
|------------|-------------|------------|------------|
| C_z | 0.001711366 | 0.5176860 | 0.7189694 |
| C_x | 0.01823912 | 0.06414938 | 0.09608506 |

Interpolation du champ initial

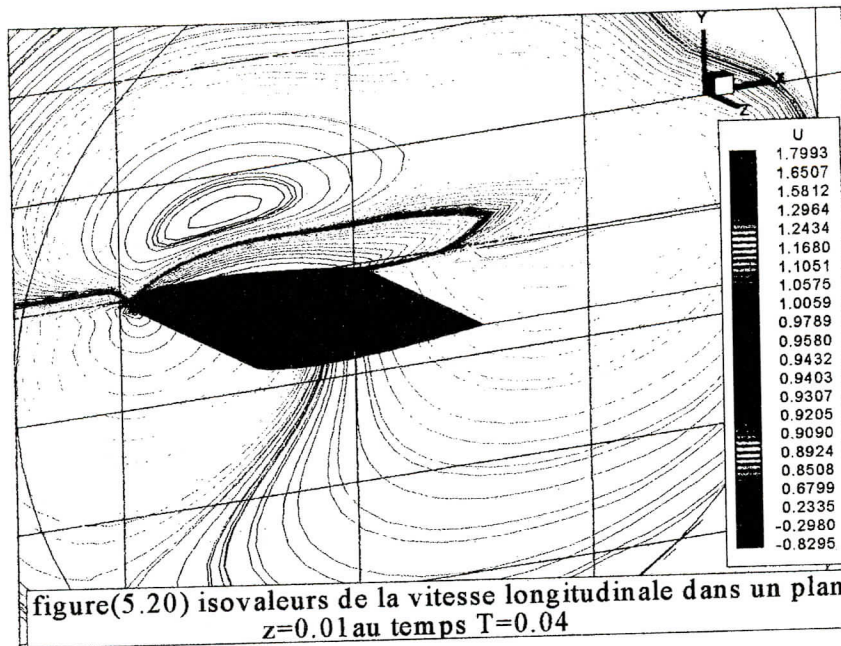
L'interpolation du champ u_i et p est réalisée dans chaque plan x_1 puisque la répartition longitudinale des points n'a pas changée. L'interpolation est linéaire dans chaque direction (Ox_2) et (Ox_3) en considérant donc que le maillage est quasi-orthogonal dans chaque plan $x_1 = \text{cte}$ le long du profil. Cette hypothèse n'est pas strictement vérifiée sur les bosses du profil. Chaque point du nouveau maillage est encadré par quatre points de l'ancien maillage. Les valeurs des différentes quantités physiques initiales au point du nouveau maillage sont obtenues par une interpolation linéaire selon chaque direction (Ox_2) et (Ox_3).

V.2 Résultats instationnaires de la SGE :

L'intérêt de la simulation des grandes échelles par rapport à une simulation statistique réside dans les informations accessibles sur les grosses structures instationnaires de l'écoulement. Cette partie présente quelques résultats instationnaires obtenus autour du profil. Nous présentons un instantané du champ des isovaleurs de la vitesse longitudinale. Puis nous présentons l'évolution du champ instantané au cours du temps en montrant la capture de structures tourbillonnaires instationnaires créées par le décollement de la couche limite sur l'extrados du profil en incidence égale à 20° .

V.2.1 Champ instantané autour du profil :

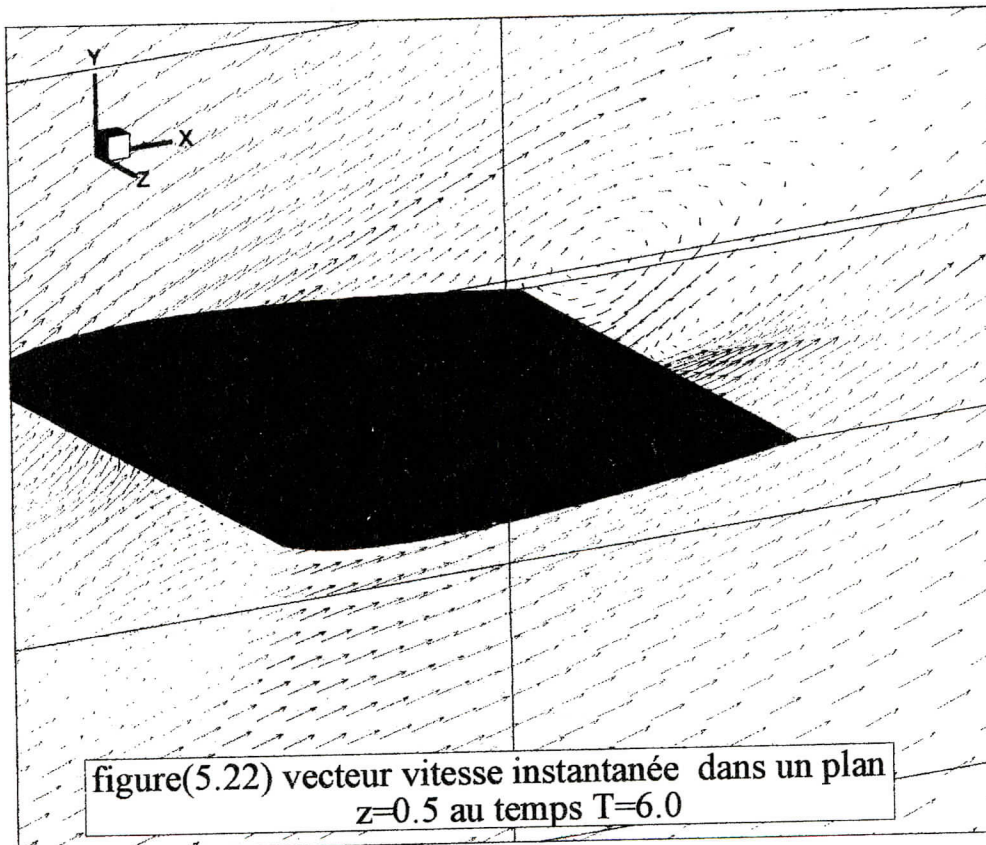
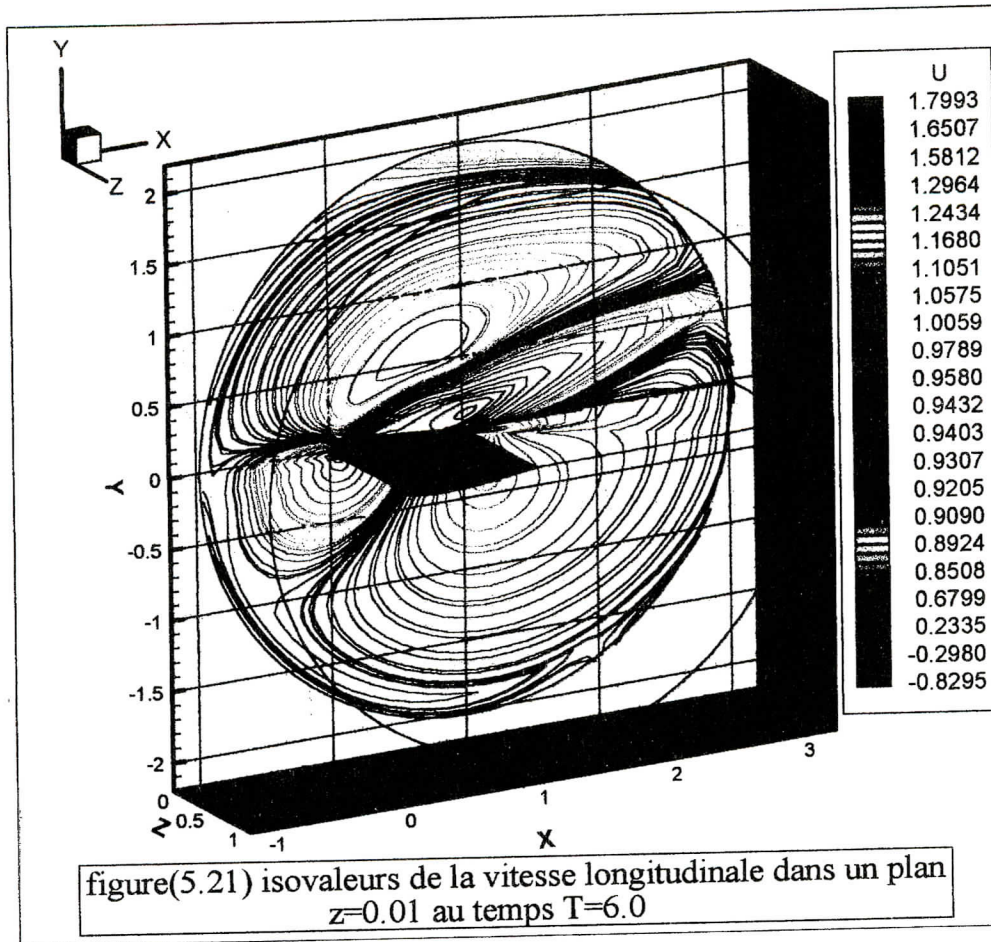
La figure (5.20) représente les isovaleurs de la composante longitudinale de la vitesse à l'initialisation en $x_3=0.01C$. Elle est rendue ici sans dimension par la vitesse à l'entrée. Les figures(5.21)-(5.22) représentent les isovaleurs du champ instantané de la vitesse longitudinale en $x_3=0.01C$ et les vecteurs vitesse instantanée en $x_3=0.5C$ à la fin de notre calcul à $T=6.5$. Nous rappelons que le temps de référence que nous avons défini correspond au temps de calcul basé sur la vitesse à l'entrée et sur la longueur de la corde du profil.



Nous pouvons observer sur la figure (5.21) la déstabilisation de l'évolution de la couche limite dont la transition au régime turbulent est clairement visualisée le long du profil sur la figure (5.20). Du bord d'attaque vers le bord de fuite, la couche limite s'épaissit de plus en plus jusqu'à se détacher complètement. Ce phénomène met en évidence l'importance de l'initialisation dans le calcul et son influence sur un temps non négligeable par rapport au temps de calcul des simulations de la SGE, car on ne l'observe pas sur les résultats moyennés. Nous observons également des différences entre le champ initial sur la figure (5.20) et le champ instationnaire de la figure (5.22) qui montre l'apparition d'un deuxième tourbillon près du bord de fuite et confirme la configuration bidimensionnel de l'écoulement étudié toutefois la simulation faillie à prédire la séparation laminaire au bord d'attaque.

V.2.1.1 Evolution temporelle des champs :

Nous présentons quelques champs instationnaires obtenus à différents temps de calcul dans un plan proche de la face latérale gauche. La figure(5.23) présente les isovaleurs de la composante longitudinale de la vitesse et les lignes de courant pour différents temps de calcul dans un plan $x_3=1C$. On observe une modification de l'écoulement et la déstabilisation de la zone initialement décollée. Nous pouvons remarquer tout au long du début de simulation le grossissement de la poche tourbillonnaire sur l'extrados qui se déplace en s'enroulant sur elle-même et en s'éloignant du profil jusqu'à l'apparition d'un deuxième tourbillon au temps $T=2.5$ confiné au bord de fuite. Les oscillations de la couche limite perturbée génèrent au final un lâcher de tourbillons visible sur la figure pour un $T=3.5$. On constate alors que l'écoulement reprend sa forme initiale et entame une autre phase de décrochage semblable a celle décrite précédemment confirmant ainsi la périodicité du phénomène. Les difficultés physiques sont particulièrement significatives dans ces situations de décrochage et de post décrochage où l'écoulement fait intervenir une séparation massive et des phénomènes instationnaires. Il en résulte que la prédiction précise de l'incidence de décrochage et du coefficient de portance maximale sont un problème particulièrement difficile. Au-delà du décrochage, la structure de l'écoulement (lâcher tourbillonnaire) et les forces instationnaires sont des facteurs importants de la stabilité.



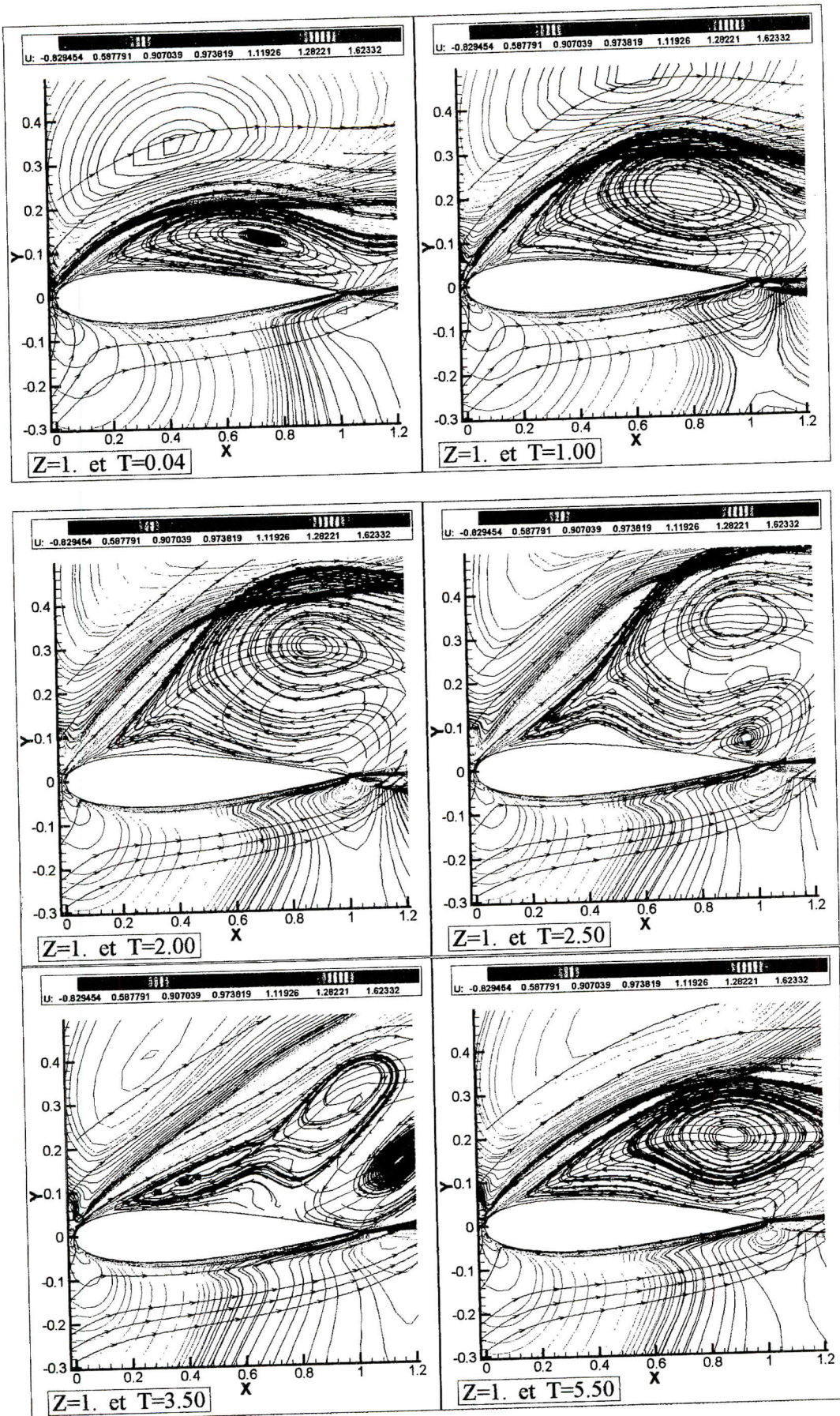


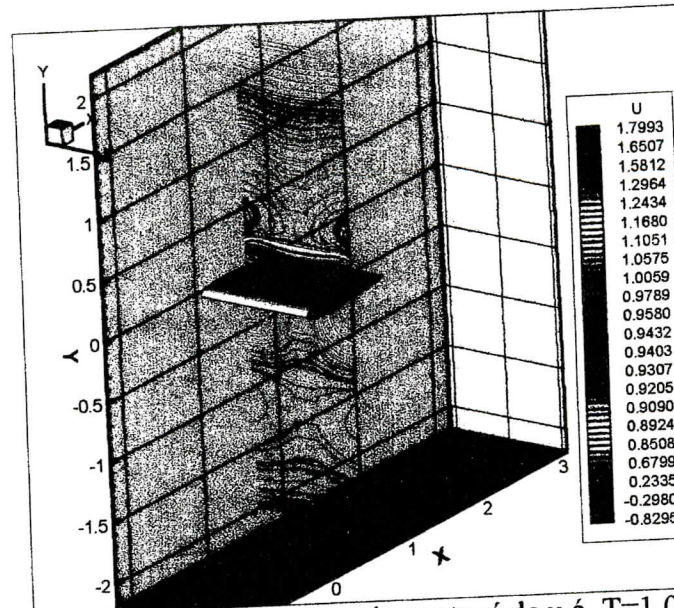
Figure (5.23) l'évolution temporelle du champ instationnaire dans un plan fixe $z=1$.

V.2.2 Spectres temporels :

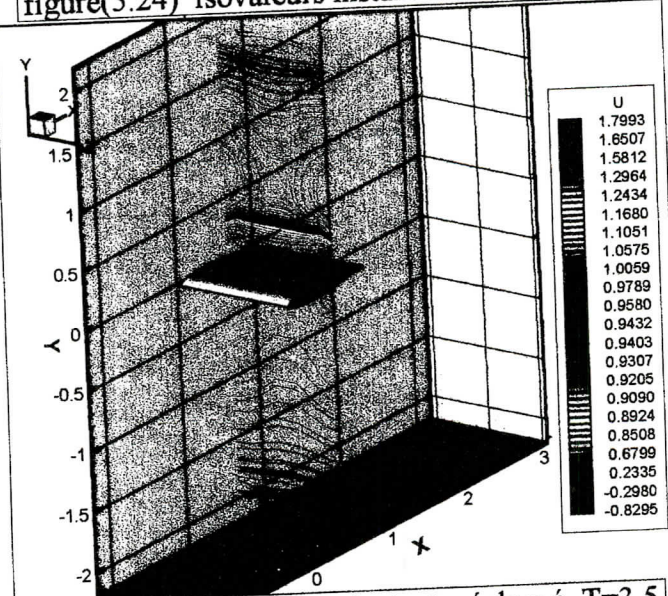
Nous avons pu voir à travers la présentation des isovaleurs de la vitesse longitudinale qu'il existe des phénomènes instationnaires à grandes échelles. Bien qu'il soit difficile de capturer pleinement les basses fréquences des grosses structures instationnaires vu le de temps de simulation nécessaire, nous avons réalisé une étude spectrale des signaux fluctuants (u_i, v_i, w_i) dans la zone de décollement initial. Les acquisitions sont réalisées tous les 100 pas de temps, ce qui correspond à un pas de temps sans dimension de $\Delta T = 0.001$. Nous présentons les résultats obtenus dans le plan $x_1 = 0.595 C$. Le point sélectionné selon la direction transversal se situe en $x_3 = 0.8 C$ et les trois points choisis dans la direction verticale sont proches de la paroi de l'extrados du profil. Pour ne pas surcharger les spectres, seules les ordonnées y sont indiquées sur les figures, elles sont rendues sans dimension par la corde du profil.

Les isovaleurs de la composante longitudinale dans le plan $x_1 = 0.595 C$ sont tracés au cours du temps sur les figures (5.24), (5.25) et (5.26) où l'on peut observer le passage des tourbillons au cours du temps. Les figures (5.27), (5.28) et (5.29) représentent l'évolution temporelle des composantes de la vitesse correspondant aux spectres représentés sur les figures (5.30) à (5.50). Le nombre d'échantillons utilisé pour réaliser les spectres temporels n'est pas très important mais est un multiple de deux comme le préconisent les transformées de Fourier rapide. Nous présentons les spectres en échelle logarithmique. Tous les spectres sont rendus sans dimension par la valeur maximum de la densité d'énergie du spectre. Nous avons convolué chaque signal par une fonction cosinus à support borné pour le rendre périodique et limiter ainsi les effets de bords. La fréquence maximum que l'on puisse obtenir sur les spectres vaut $f^* = \frac{1}{\Delta t^*} = 10^5$. Nous avons préféré présenter nos résultats sans analogie de

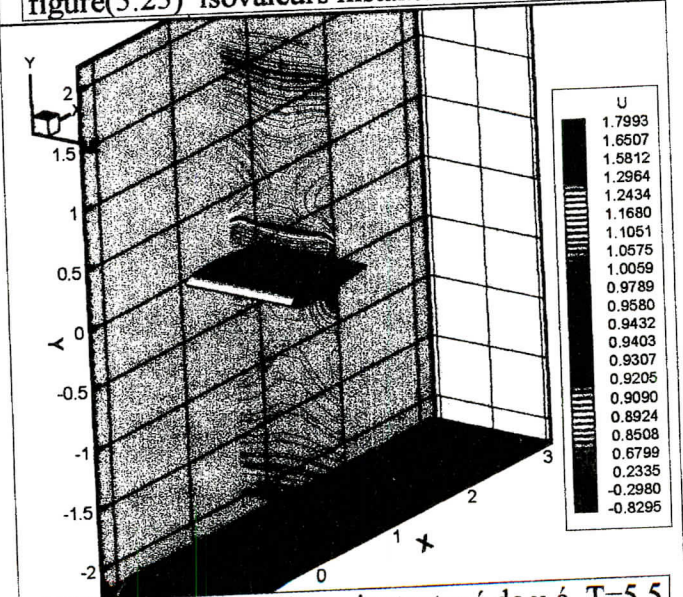
Taylor $K = \frac{2\pi f}{U}$ puisque nous avons un écoulement inhomogène. On observe la présence d'un pic qui se détache sur les spectres de u_i et v_i autour de $f = 4000$ Hz. Cela est en assez bon accord avec la fréquence que l'on peut estimer sur la courbe de la composante u correspondantes à la figure (5.27) en $x_2 = 0.0456$. Nous pouvons souligner que les fréquences de l'ordre du kHz correspondent aux ondes sonores. Il est possible de d'obtenir un nombre de Strouhal à partir de la fréquence mesurée. Le nombre de Strouhal est un nombre sans dimension utilisé dans l'étude des corps épais caractérisés par des lâchés tourbillonnaires. Il mesure le temps de retournement des tourbillons convectés par l'écoulement par unité de temps. Il est rendu sans dimension par l'épaisseur des corps épais étudiés. Si l'on introduit la corde du profil, et la vitesse de convection de l'écoulement amont, le nombre de Strouhal associé vaut $St = \frac{1}{T} = 0.2857$. La valeur du nombre de Strouhal calculée ci-dessus est en bon accord avec celle calculée ou mesurée dans les sillages des corps épais avec des lâchés tourbillonnaires. Le nombre de Strouhal pour le cylindre vaut $St = 0.2$ et il vaut $St = 0.3$ pour les corps épais. En fin, nous pouvons également obtenir un ordre de grandeur du nombre de d'onde associé au pic que nous avons décrit précédemment: $k = \frac{2\pi f}{U_\infty} = \frac{1.795}{C}$. Cette longueur d'onde correspond à une longueur adimensionnée par la longueur de corde égale à $l = 0.557$. La longueur estimée à partir du volume de chaque maille proche de la paroi basse du côté latéral droit où nous effectuons nos spectres vaut $l_{min} = 0.0075$. La longueur estimée l est au moins cent fois plus importante que l_{min} et il n'y a pas donc de problèmes de résolution en maillage. Les phénomènes capturés sont à grande échelle, ils ne sont pas filtrés par le maillage. Nous discutons maintenant des résultats obtenus en moyennant les quantités sur le temps de calcul total.



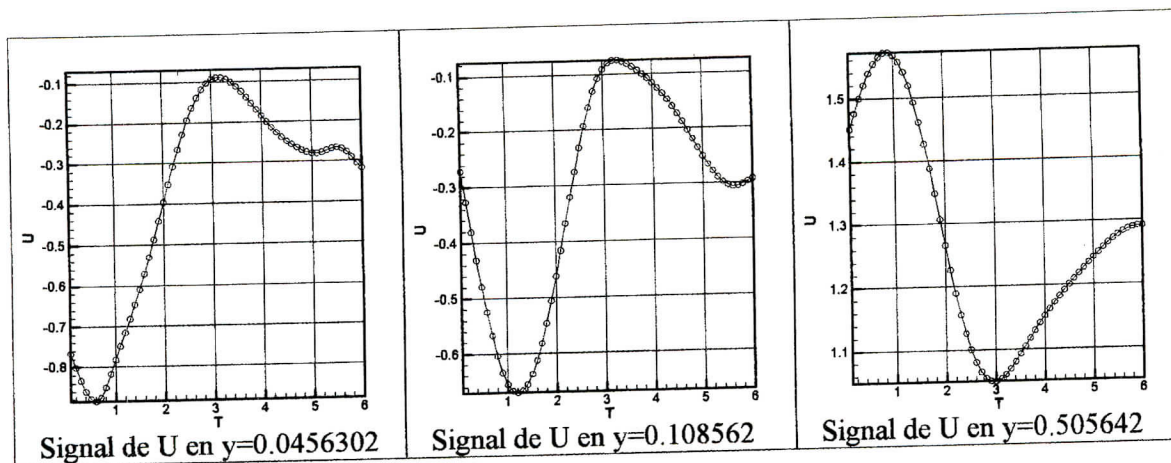
figure(5.24) isovaleurs instantané de u à $T=1.0$



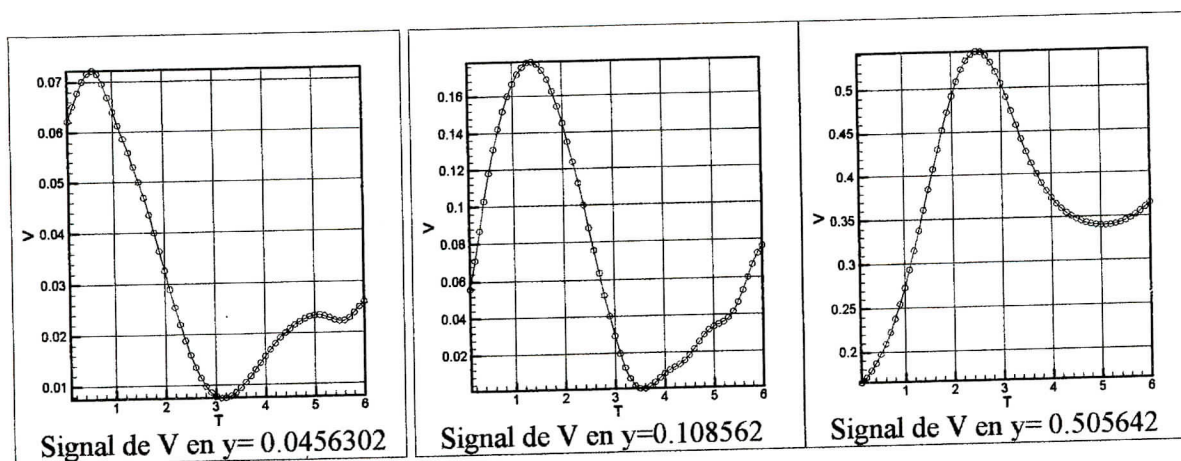
figure(5.25) isovaleurs instantané de u à $T=3.5$



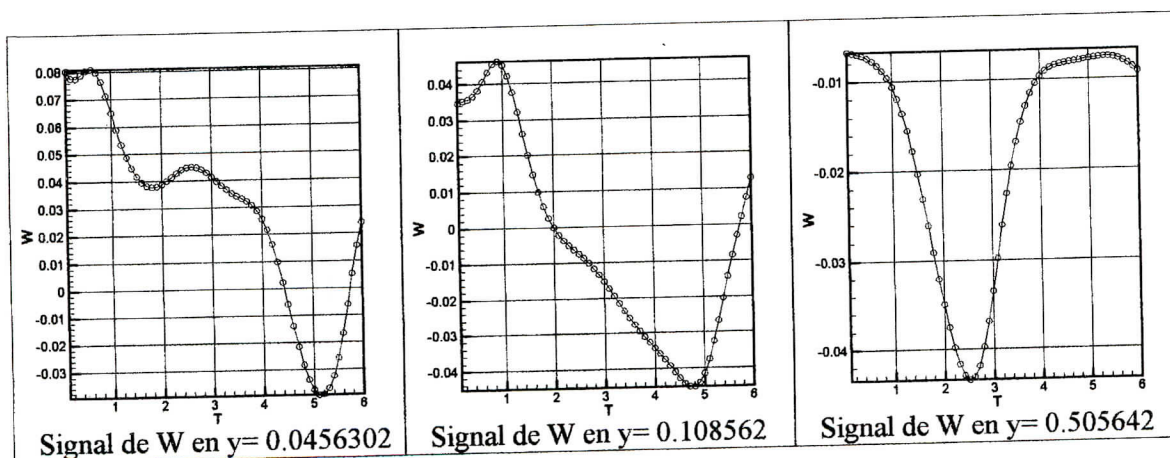
figure(5.26) isovaleurs instantané de u à $T=5.5$



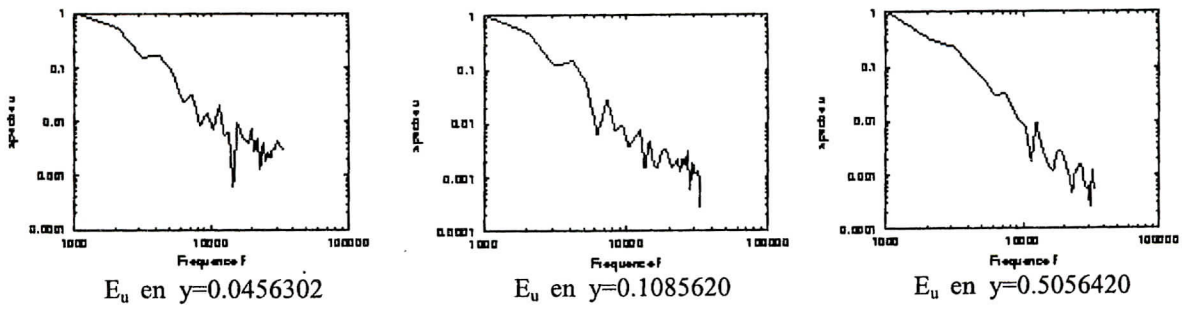
Figure(5.27) Echantillonnage de u au cours du temps



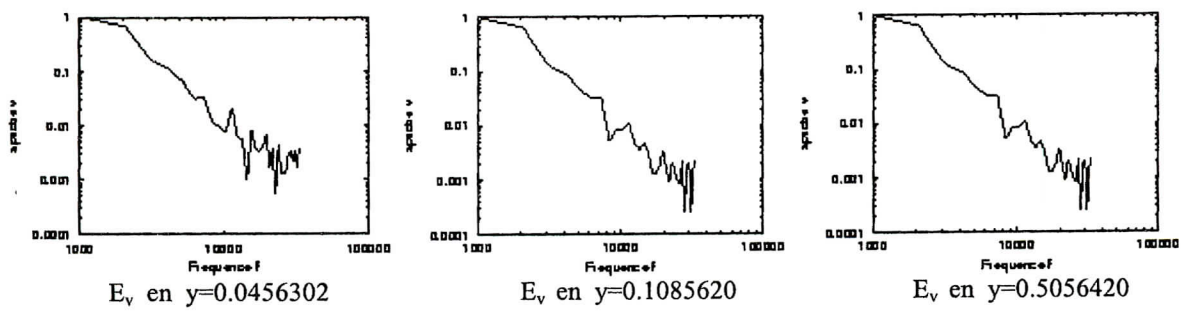
Figure(5.28) Echantillonnage de v au cours du temps



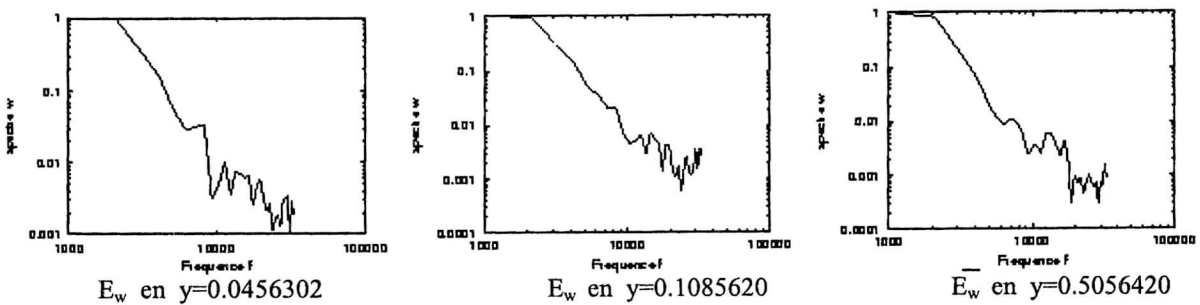
Figure(5.29) Echantillonnage de w au cours du temps



Figure(5.30) Spectre de u



Figure(5.40) Spectre de v



Figure(5.50) Spectre de w

V.3 Résultats moyennés de la SGE :

Cette partie présente les résultats obtenus sur la pression, les valeurs moyennes de la vitesse et des tensions de Reynolds en les comparant aux simulations statistiques et aux résultats expérimentaux. Le temps de calcul total sans dimension de la simulation SGE que nous avons réalisé est de l'ordre de six. Ce temps de calcul correspond à 8000 pas de temps. Comme nous l'avons vu sur les résultats instationnaires, nous moyennons sur un temps qui prend en compte un seul lâcher de tourbillons. Les moyennes présentées, sauf lorsque nous le mentionnons explicitement, correspondent à un temps d'accumulation égal au temps total de calcul. On utilisera à la fois des moyennes dans l'espace et dans le temps du fait de l'homogénéité de la direction transversale.

V.3.1 Résultats sur la distribution de pression :

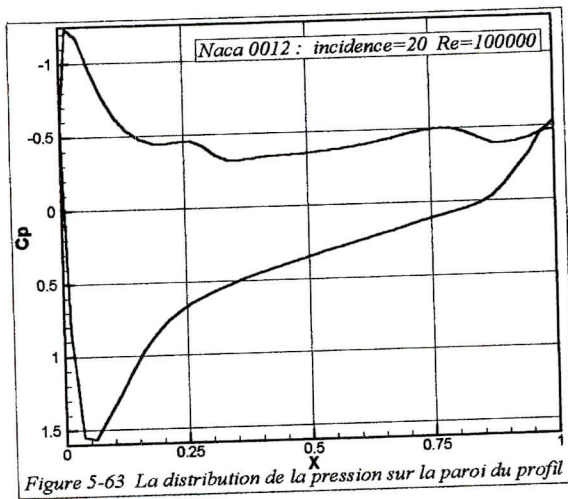


Figure 5-63 La distribution de la pression sur la paroi du profil

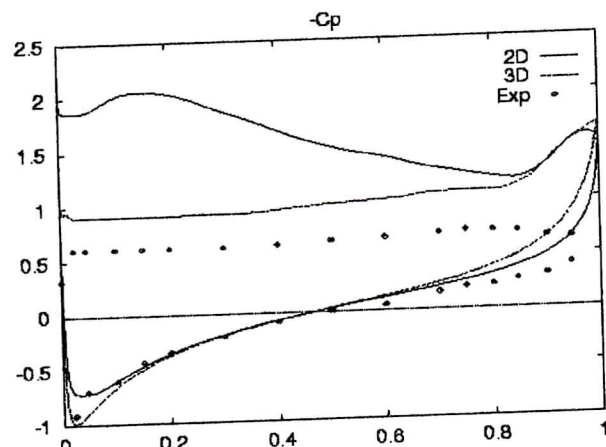
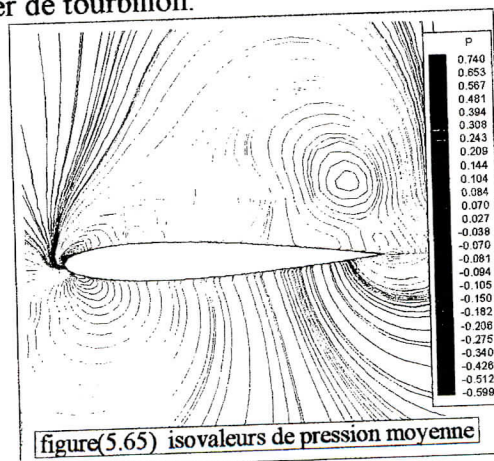


Figure 5-64 La distribution de la pression selon un calcul direct et expérimental

La figure(5-63) présentant la distribution de la pression moyennée suivant la direction transversale et en temps montre clairement une allure semblable à celle obtenue par un calcul direct et expérimental [59] présenté sur la figure(5-64). On remarque toutefois une surévaluation du pic de pression prédit au bord d'attaque ainsi qu'un manque dans la prédiction de la région de séparation laminaire, néanmoins un résultat particulièrement intéressant de la SGE est la capacité de la méthode à prédire la présence du plateau de pression mesuré expérimentalement, associé au décollement de la couche limite. Nous avons représenté figure(5.65) les isovaleurs de pression moyenne montrant l'instabilité de la surface dépressionnaire liée au lâcher de tourbillon.



figure(5.65) isovaleurs de pression moyenne

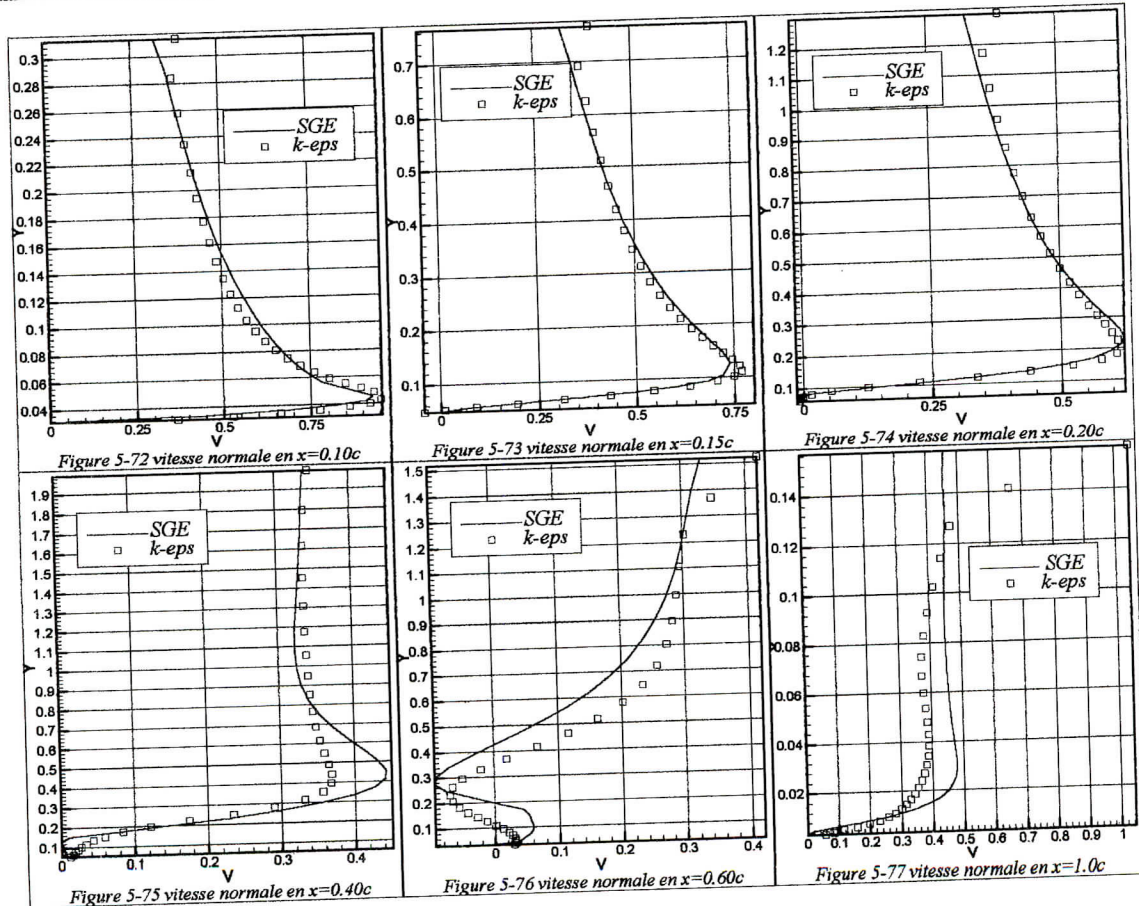
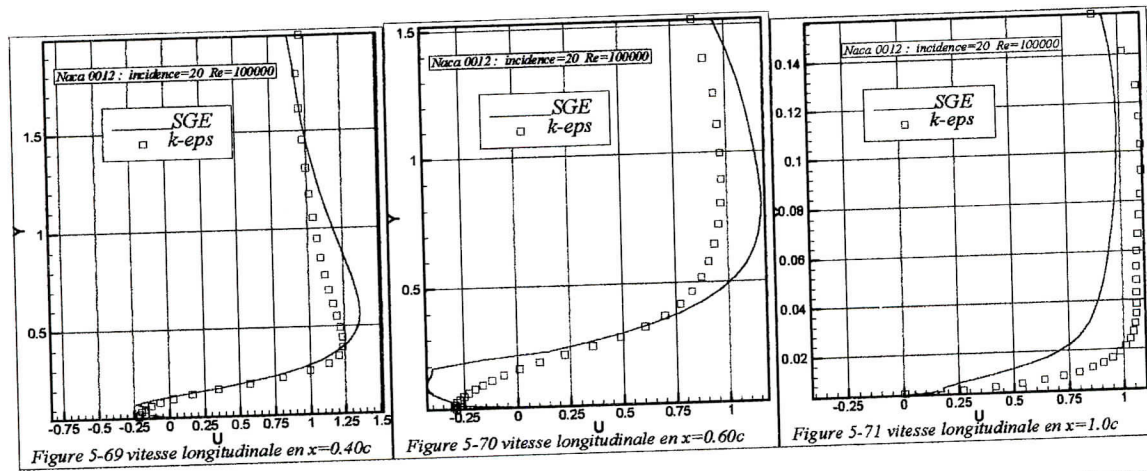
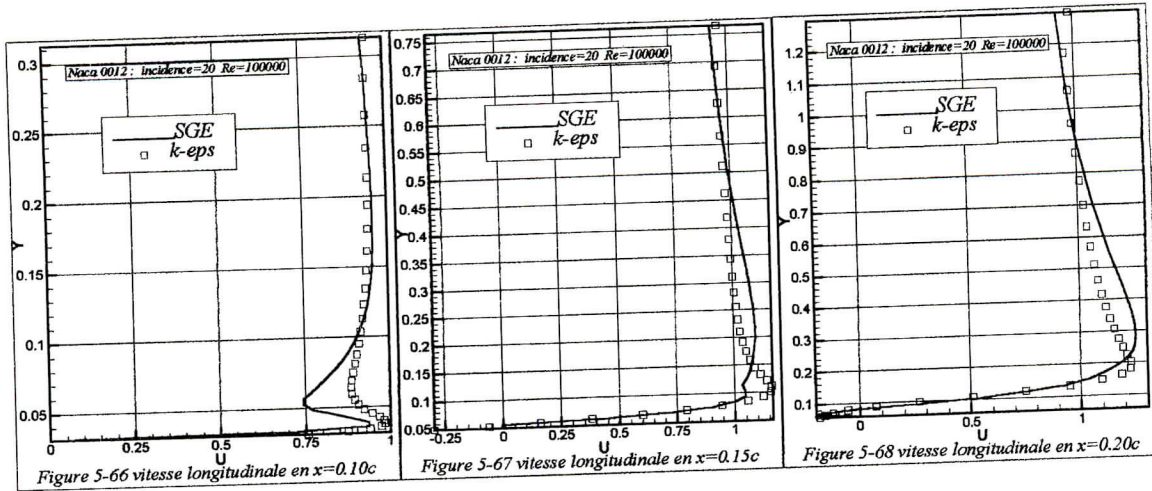
L'ensemble des résultats obtenus par notre simulation montre que le phénomène de sur-prédiction de pression au bord d'attaque par la SGE est moins marqué pour des incidences inférieures à celle provoquant un décrochage statique. Il apparaît au contraire plus marqué dans les zones où l'on observe un plateau de pression correspondant à une zone de recirculation

V.3.2 Résultats sur les profils de vitesse moyennes :

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus sur les vitesses moyennes suivant les coordonnées verticales (Ox_2) dans plusieurs plans de mesure (Ox_1) correspondant à la surface d'aspiration du profil en aval et en amont du décollement de la couche limite. Sur chaque figure, les rectangles correspondent aux points de la simulation statistique et le trait représente les résultats de la SGE. Toutes les vitesses sont rendues sans dimension par la vitesse de référence qui est la vitesse de l'infini amont au profil. Nous comparons donc nos résultats sur les profils de la vitesse moyenne aux quantités statistiques $\hat{u} = \langle u(t) \rangle_t$, où $\langle \cdot \rangle_t$ est l'opérateur de moyenne temporelle. Les composantes moyennes de la vitesse sont alors obtenues à partir de nos variables filtrées, seules accessibles par le calcul en prenant $\hat{u} = \langle \bar{u}(t) \rangle_t$. Nous pouvons souligner, à première vue le bon accord observé entre les résultats statistiques "k-ε" et la simulation des grandes échelles turbulentes sur les composantes de la vitesse présentées sur les figures (5-66)-(5-77). Les profils de vitesse à la section $x_1 = 0.1c$ au début du bord d'attaque, représentée sur les figures (5-66) et (5-72) indique en particulier un développement attaché de la couche limite caractérisé par une diminution des vitesses dans la zone de proche paroi. Les régimes laminaire et turbulent coexistent toujours sur un profil, il n'y a donc pas de "profils laminaires" qui impliqueraient alors que les autres seraient turbulents; mais seulement des profils à laminarité plus ou moins étendue, cependant la transition laminaire/turbulent est favorisée par l'influence du gradient de pression engendré par la forme du profil placé à un angle d'incidence provoquant une recompression immédiate après le bord d'attaque, on note alors que pour le nombre de Reynolds considéré, l'écoulement est pleinement turbulent. Les figures suivantes montrent plusieurs choses: on y distingue d'abord une couche limite qui va en s'épaississant dans le sens du courant; on y remarque aussi une diminution des vecteurs locaux de vitesse à l'extérieur de la couche limite ce qui montre que le courant fluide ralentit; mais surtout il apparaît un contre-courant qui signale l'inversion du sens d'entraînement des particules fluides près de la surface du profil.

Les figures (5-67)-(5-70) détaillent plus précisément ce qui se passe successivement le long du profil. Elles mettent bien en évidence, au fur et à mesure que s'épaissit la couche limite, le fait que le gradient de vitesse diminue (l'angle que fait la pente des courbes de variation de vitesse au point de contact avec la surface par rapport à la normale). Or, le décollement se produit précisément lorsque cet angle s'annule, c'est à dire lorsque le gradient de vitesse devient nul, cela est vérifié dans notre simulation pour $0.10c < x_1 < 0.15c$. A noter que la recirculation inverse carrément ce gradient.

Il est possible que le léger épaississement de la zone de décollement de la couche limite, observé sur la figure (5-70) des profils u de la SGE par rapport à celui obtenu par simulation statistique, soit seulement lié à une forte dissipation introduite par le modèle de sous maille. Si le décollement s'initie à l'endroit précis où le gradient de vitesse s'annule, la surface de discontinuité elle-même (ou surface de décollement) n'est pas forcément aussi nette que celle représentée sur les figures. En fait, il s'agit moins d'une véritable surface de contact entre une rétro-circulation et les filets de la couche limite de l'écoulement général, que d'une nappe de



rotors, plus ou moins stable, plus ou moins mouvante. Par ailleurs cette nappe n'est pas non plus parallèle à l'écoulement puisqu'elle se referme plus ou moins loin derrière le profil avec celle venue du côté opposé du profil, au vu des figures(5-71) et (5-77).

La composante v de la vitesse, obtenue par la SGE est identiquement semblable à celle obtenue par simulation statistique "k-ε" dans la sous couche visqueuse, comme le montre les figures(5-72)-(5-74), toutefois on remarque une différence marqué entre les deux résultats à l'extérieur de la couche limite due essentiellement à la qualité du maillage non régulier. Les résultats obtenus après l'établissement du décollement représentés sur les figures(5-75)-(5-76) sont en assez bon accord avec les résultats statistiques et semblent moins perturbés par l'instabilité que les profils de la vitesse longitudinale.

V.3.2 Résultats sur les profils des tensions de Reynolds :

Dans cette partie nous présentons les résultats obtenus sur les profils des tensions de Reynolds dans quelques plan de mesure x_1 fixé comme pour les composantes de la vitesse moyenne. Les tensions de Reynolds sont obtenues à partir de nos variables filtrées par la formule ci-dessous en utilisant l'équation (5.6) :

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle (\bar{u}_i - \langle \bar{u}_i \rangle) (\bar{u}_j - \langle \bar{u}_j \rangle) \rangle \quad (5.14)$$

on obtient :

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_j \rangle \langle \bar{u}_i \rangle + \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_i \rangle \quad (5.15)$$

puisque par hypothèse : $\langle \langle \cdot \rangle \rangle = \langle \cdot \rangle$

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle \quad (5.16)$$

A nouveau, sur chaque figure, les rectangles correspondent aux points de la simulation statistique bidimensionnelle et le trait représente les résultats de la SGE. Toutes les corrélations sont rendues sans dimension par le carré de la vitesse de référence à l'infini amont du profil. Nous avons mis les courbes relatives aux résultats de simulation statistique "k-ε" qu'a titre indicatif puisque ces dernières ne mettent pas en jeu les corrélations de la composante transversale de la vitesse. Chacune des contraintes de Reynolds correspond à la corrélation de deux composantes des fluctuations en un même point du champ de vitesse et représente ainsi une quantité mesurable. Une valeur finie de cette corrélation indique que les deux composantes ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Nous pouvons observer sur les figures la bonne description du maximum des valeurs des tensions confiné très près des parois. Les tensions de Reynolds évoluent lentement car, il y a une forte influence de l'initialisation qui masque l'évolution des tensions prédites par la SGE. Nous avons aussi observé que l'intensité des pics turbulents qui apparaissent sur les différentes corrélations dans le cœur, et qui correspondent à la région du décollement, ont tendance à augmenter en intensité et à s'étaler au cours du calcul. Concernant les corrélations croisées, les tensions $\langle u_2 u_3 \rangle$ et $\langle u_1 u_3 \rangle$ étant très inférieures à $\langle u_1 u_2 \rangle$ qui est principalement responsable de la production de turbulence, nous ne présentons que cette dernière.

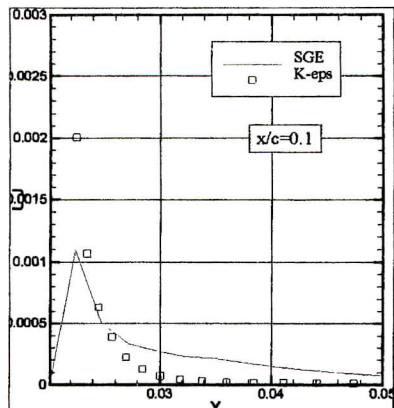


Figure (5-78) Tension de Reynolds normale longitudinale

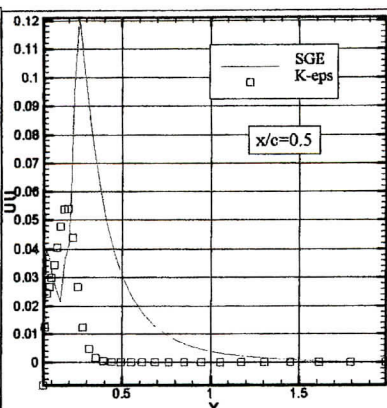


Figure (5-79) Tension de Reynolds normale longitudinale

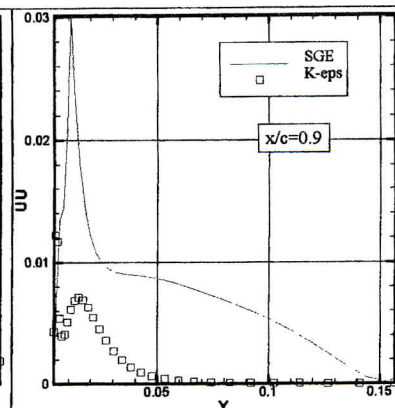


Figure (5-80) Tension de Reynolds normale longitudinale

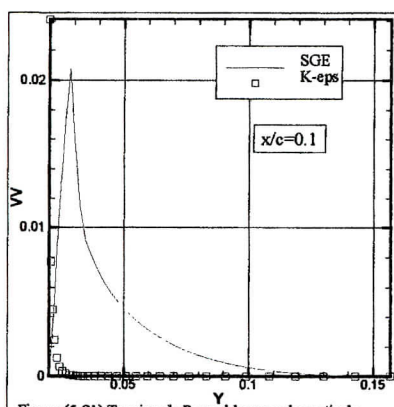


Figure (5-81) Tension de Reynolds normale verticale

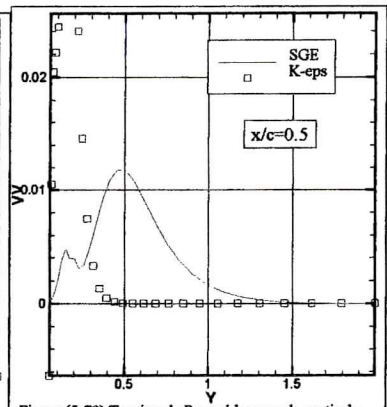


Figure (5-79) Tension de Reynolds normale verticale

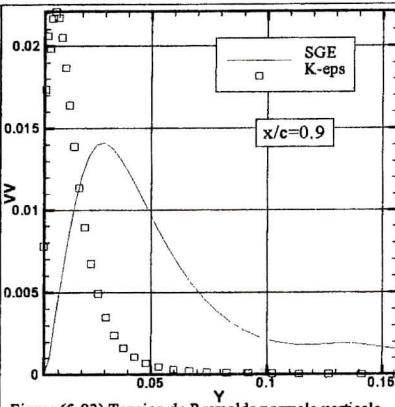


Figure (5-83) Tension de Reynolds normale verticale

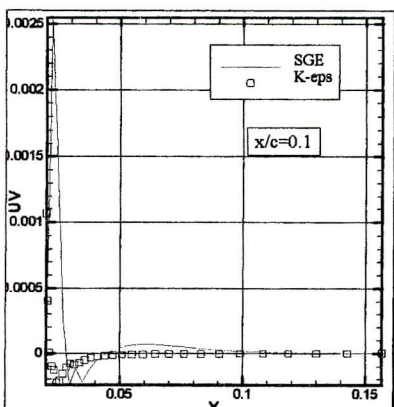


Figure (5-84) Tension de Reynolds croisée

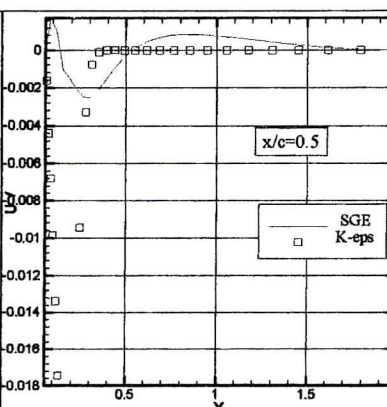


Figure (5-85) Tension de Reynolds croisée

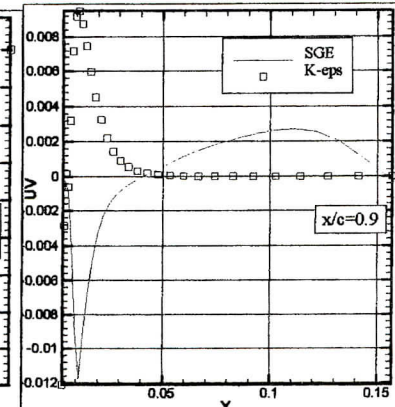


Figure (5-86) Tension de Reynolds croisée

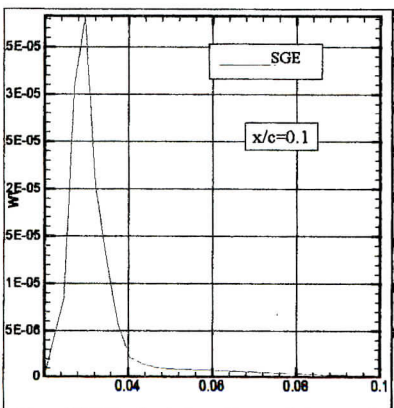


Figure (5-87) Tension de Reynolds normale transversale

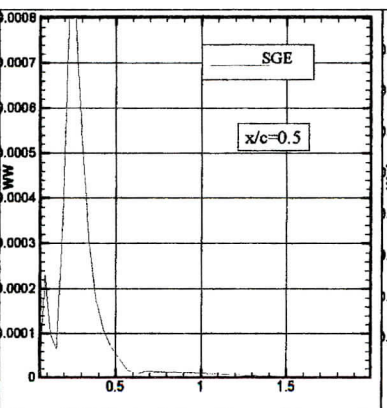


Figure (5-88) Tension de Reynolds normale transversale

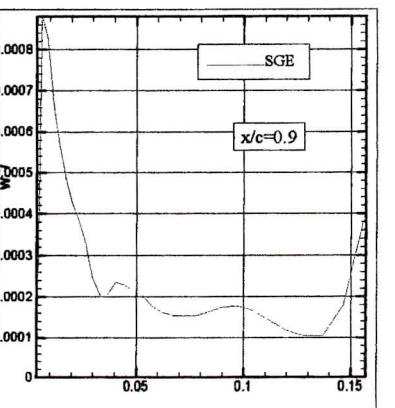


Figure (5-89) Tension de Reynolds normale transversale

Sur la section du bord d'attaque du profil $x_1 = 0.1c$ nous avons des corrélations $\langle u_1 u_1 \rangle$ prédites par la SGE plus faibles en intensité que les tensions calculées par RANS. On remarque que les pics sont correctement positionnés même si on observe un léger épaissement sur les courbes de la SGE à relier aux différences que nous avons mis en évidence entre la SGE et RANS sur les gradients à la paroi des profils des vitesses. Ceci peut également expliquer l'intensité plus faible puisque \hat{u}_1 varie plus lentement. Le pic d'intensité positive des corrélations $\langle u_2 u_2 \rangle$ est mal positionné par rapport à la paroi et sous-estimé en comparaison des résultats statistiques, il y a certainement un effet du maillage qui influe directement sur la composante normale de la vitesse moyenne mais qui n'explique pas à lui seul l'élargissement observé. Les résultats obtenus sur les tensions croisées $\langle u_1 u_2 \rangle$ restent du même ordre de grandeur et sont en assez bon accord dans la forme, le second pic négatif observé sur les corrélations $\langle u_1 u_2 \rangle$ proche de la paroi sur la figure(5-84) semble venir du couplage entre la vitesse moyenne longitudinale moins importante dans les couches limites et les valeurs plus importantes en valeur absolue de la valeur moyenne \hat{u}_2 dans cette zone. Nous avons remarqué que les intensités des corrélations transversales $\langle u_3 u_3 \rangle$ sont sous-estimées par la SGE dans la région du bord d'attaque du profil.

La figure(5-79) représente les corrélations longitudinales $\langle u_1 u_1 \rangle$ à la section $x_1 = 0.5c$ dans la région du décollement. Il apparaît que l'intensité turbulente proche de la paroi du profil dans le décollement est surestimée mais le double pic signalé dans le cas d'un phénomène d'écoulement de retour est correctement positionné sur l'axe (ox_2) . On peut noter que les résultats statistiques ne prédisent pas de double pic dans le décollement. Nous pouvons aussi souligner que l'intensité de la corrélation longitudinale est dix fois supérieure à celle prédite en $x_1 = 0.1c$ du fait de l'épaissement des profils de vitesse moyenne. Le pic d'intensité positive des corrélations $\langle u_2 u_2 \rangle$ en $x_1 = 0.5c$ est décalé par rapport aux résultats statistiques caractérisé par un élargissement dans sa largeur. Sa forme est liée à la mauvaise prédiction du gradient de la vitesse moyenne normale à cette station. Nous regardons à la fin de cette partie l'influence de l'initialisation et la turbulence initiale contenue dans nos résultats. Nous pouvons souligner que les pics observés sur $\langle u_1 u_2 \rangle$ sont propres à la SGE dans la mesure où même s'ils sont longs à croître, ils apparaissent encore après avoir moyenné les quantités sur un temps plus court, d'une façon très globale, les caractéristiques de la turbulence sont finalement assez bien prédites en présence d'un écoulement de retour par rapport à la modélisation statistique. On peut remarquer que la largeur du pic calculée par la SGE est trop importante, dû à l'étalement de la région du décollement. Le signe négatif de $\langle u_1 u_2 \rangle$ dans la région proche de la paroi provient de la composante longitudinale de la vitesse qui est négative et qui n'est pas compensée par la composante verticale à cette station. L'intensité de la tension de Reynolds $\langle u_3 u_3 \rangle$ est mieux évaluée à la section $x_1 = 0.5c$ en présence du décollement, présentant des valeurs plus acceptables pour un écoulement tridimensionnel.

Concernant les résultats en $x_1 = 0.9c$, le pic mesuré correspond à l'épaissement de la couche limite qui relaxe lentement vers son état d'équilibre, après son décollement et son instabilité caractérisée par le lâcher de tourbillon. A nouveau nous pouvons noter que $\langle u_1 u_2 \rangle$ n'est plus

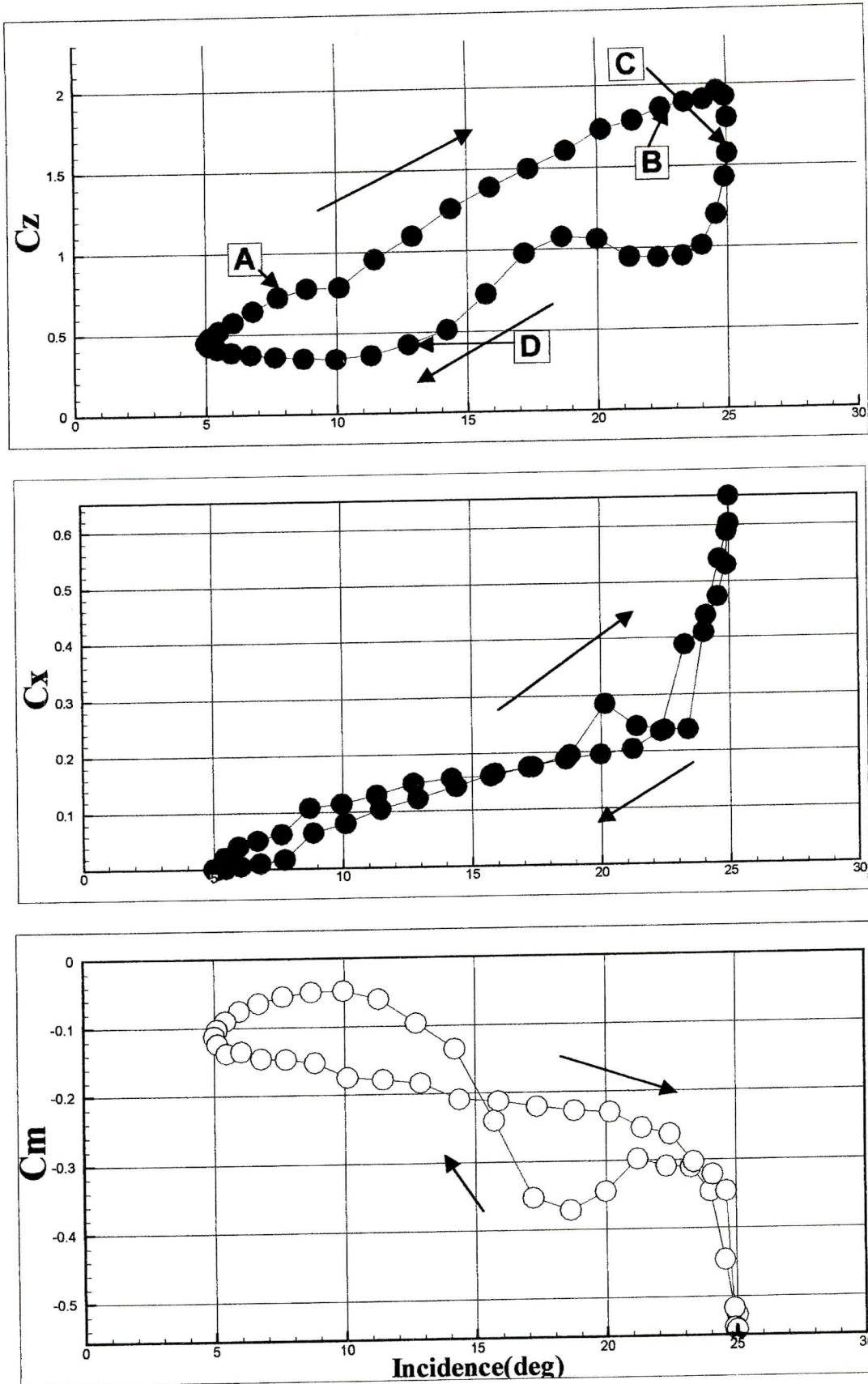
prédit correctement proche de la paroi. La position du pic est correctement prédite par la SGE pour les corrélations longitudinales tandis qu'il est décalé pour $\langle u_2^2 u_2^2 \rangle$. Nous pouvons aussi noter que le pic d'intensité turbulente qui se trouvait près de la paroi sur les corrélations longitudinales, est de plus en plus attaché à la paroi. Ceci s'explique par le fait que le terme de production de $\langle u_1^2 u_1^2 \rangle$, positif dans la zone de décollement, est fonction de $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}$. La position du maxima d'intensité turbulente dépend donc de la distribution des gradients selon (ox_1) et (ox_2) . Nous avons remarqué que nous sous-estimons les corrélations transverses sauf dans le décollement. Après avoir regardé l'influence de la contribution du champ initial dans le calcul des tensions de Reynolds évaluées à partir des grandes échelles, il semble que ce phénomène soit lié à une mauvaise redistribution de $\langle u_1^2 u_1^2 \rangle$ vers $\langle u_2^2 u_2^2 \rangle$ et $\langle u_3^2 u_3^2 \rangle$ puisque la SGE ne produit pas suffisamment de $\langle u_1^2 u_1^2 \rangle$ sauf dans les zones citées ci-dessus. Il se produit le même phénomène avec les tensions croisées, qui sont les sources de production de la turbulence, lorsqu'il n'y a pas présence de forts gradients comme dans le décollement. L'explication de ces résultats se trouve peut être dans une mauvaise capture des phénomènes turbulents de type "streaks" dans les couches limites qui sont responsables de la production des tensions de Reynolds. Les streaks sont des zones de fluide près des parois, où il y a alternance de zones de fluide à faible vitesse et à haute vitesse. Ces streaks induisent l'éjection intermittente de fluide des couches limites vers le centre de la paroi (burst) responsable de la production turbulente dans ce type d'écoulement. La sous estimation de ces corrélations semble donc liée dans notre cas à la mauvaise évaluation des gradients aux parois et à une forte turbulence à petite échelle dans les contributions de sous maille que nous ne capturons pas correctement.

V.4 Résultats de l'écoulement autour du profil en mouvement oscillatoire de tangage :

Après l'étude de l'écoulement turbulent autour du profil d'aile en incidence de décrochage statique, notre intérêt se porte sur la réponse de l'écoulement instationnaire et turbulent se développant autour d'un profil d'aile en mouvement de tangage. Le mouvement d'oscillation au quart de la corde du profil est défini par un angle d'attaque dépendant du temps, autour d'une incidence moyenne α_0 :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \cos(2kt) \quad (5.14)$$

Où k est la fréquence réduite. Nous nous intéressons à des cas de décrochage dynamique profond, c'est-à-dire à des cas où l'amplitude d'oscillation α_m est importante. Dans cette étude, l'amplitude d'oscillation vaut 10 degrés. L'incidence moyenne a pour valeur 15 degrés et la fréquence réduite est de 0.15, ce qui donne une période sans-dimensions du mouvement d'oscillation de $T=20.94$. Le nombre de Reynolds, basé sur la corde du profil est $Re=1$ million. Les courbes d'hystérésis, c'est-à-dire les efforts, portance C_z , traînée C_x et moment C_M , en fonction de l'incidence du profil sont obtenues par intégration des forces de pression et de cisaillement sur la surface du corps.



Figure(5.90) Boucles d'hystérésis du mouvement en tangage du profil Naca0012

La comparaison de la figure(5.90) représentant l'évolution des coefficients aérodynamiques obtenus par simulation des grandes structures en fonction de l'incidence avec les résultats de l'épreuve expérimentale présentés sur la figure(1.1) montre une très bonne conformité phénoménologique. L'apparition d'un mince écoulement de retour, le développement des tourbillons de décrochage dynamique, l'état de lâcher de tourbillons post décrochage dynamique ainsi que le recollement de la couche limite se produit au cours d'un temps adimensionnel $T=2.5$ du mouvement de tangage du profil. L'analyse des principales étapes du processus de décrochage dynamique simulé est réalisée par une description des coefficients des forces et moment agissant sur le profil ainsi que des champs de vitesse instantanée.

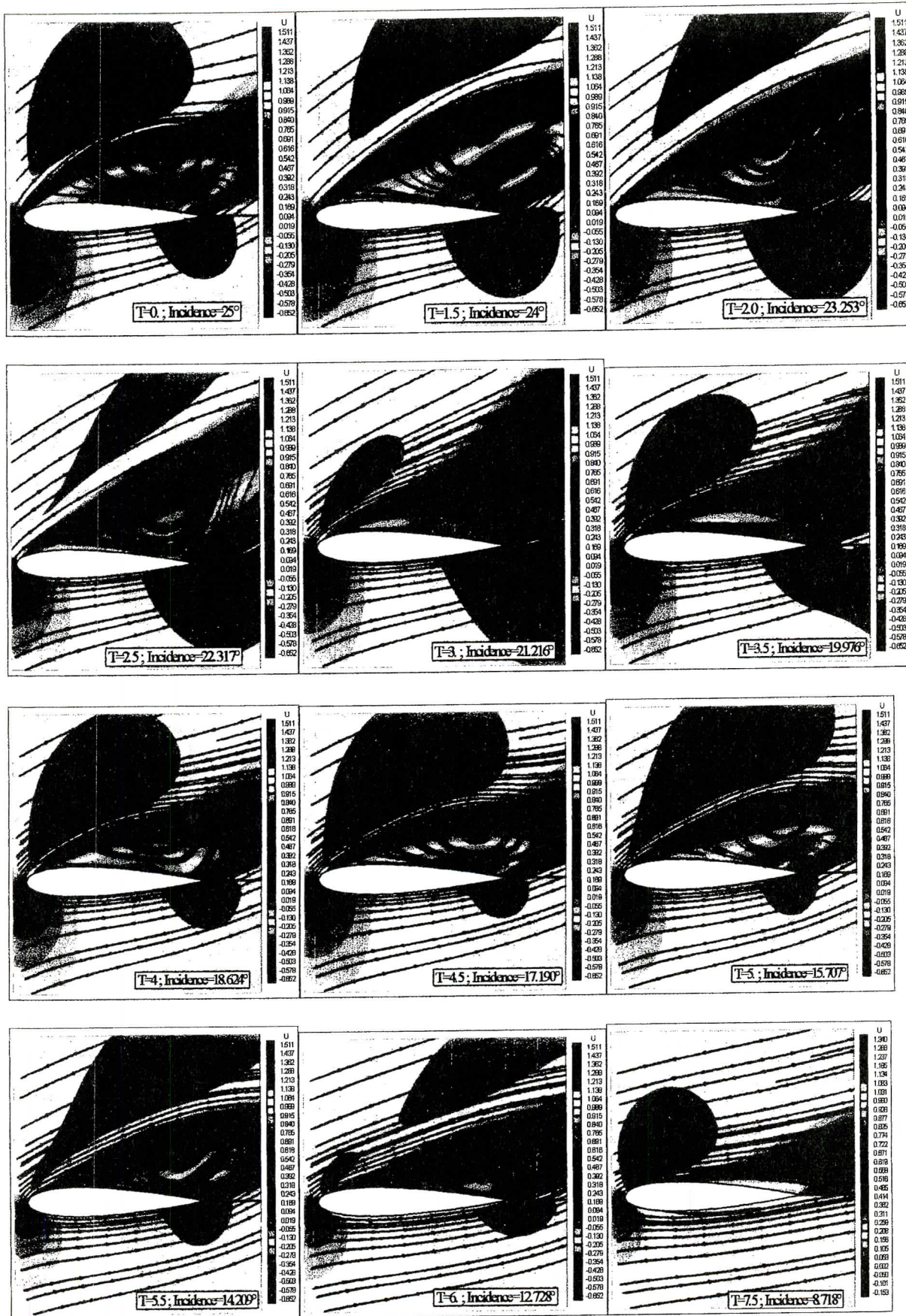
Comme c'est évident dans la figure(5.90), les phénomènes transitoires considérés dans la phase de descente sont éliminés pendant la phase de montée du mouvement de tangage du profil. Même si une bonne reproductibilité du coefficient de portance peut être obtenue pour la phase de montée, de forts effets apériodiques peuvent être observés pendant le lâcher tourbillonnaire de la phase descendante du mouvement. Le décrochage dynamique diffère du décrochage statique sous deux aspects. En premier lieu, la portance maximale obtenue sous des conditions d'incidence variable est plus importante que pour une incidence calée. En second lieu, alors que la portance maximum, à incidence calée, ne dépend que de l'incidence, la portance pour un profil en mouvement de tangage dépend de l'histoire du mouvement d'oscillation. On associe ainsi au décrochage dynamique une boucle d'hystérésis. L'influence de l'histoire rend la prédiction du décrochage dynamique extrêmement difficile, en particulier pour les cas de décrochage profond pour lesquels l'amplitude d'oscillation autour de l'incidence moyenne α_0 , sera de l'ordre de l'incidence de portance statique maximale. Le modèle utilisé pour la simulation des grandes structures turbulentes, tend vers une sous-estimation des coefficients pour la phase de montée, alors qu'ils sont mieux prédits dans la phase de descente d'autre part et pour des raisons qui relèvent de la qualité du maillage on constate plusieurs insuffisances dans les résultats des coefficients de traînée et du moment. L'augmentation des coefficients de portance au-delà de l'angle de décrochage statique ($\approx 14^\circ$) est essentiellement dû au développement des tourbillons générés par le décrochage dynamique qui maintiennent le pic d'aspiration au bord d'attaque de l'extrados du profil d'aile. Sur la courbe d'hystérésis de la portance, on définit quatre points de référence caractérisant l'évolution du processus de décrochage dynamique libellés par ordre alphabétique pour : un écoulement attaché, développement de tourbillons de décrochage dynamique, lâcher de tourbillons post décrochage dynamique ainsi qu'un recollement de la couche limite. Le moment par rapport à l'axe passant par le quart de la corde présente une boucle en huit avec une augmentation significative du moment Piqueur.

Afin d'étudier le comportement qualitatif de la couche limite se développant sur le profil Naca0012 en mouvement de tangage, on a effectué un zoom de la zone dans laquelle évolue le profil. Pour des raisons de symétrie, les résultats schématisés sur la figure(5.91) présentent l'évolution de la couche limite au cours de la phase de descente c'est à dire une demi-période. Sur la figure sont résumées les différentes phases du décrochage dynamique.

Pendant que la portance du profil continue d'augmenter avec l'incidence au-delà de la valeur maximale de décrochage statique, il se forme un tourbillon au bord d'attaque qui se déplace en roulant sur le profil pendant la phase de décélération (décroissance d'incidence), la portance passe par un maximum lorsque le tourbillon est à mi-corde. Du fait des charges induites par le tourbillon lors de son déplacement, le moment piqueur augmente et atteint un maximum lorsque les tourbillons passent au bord de fuite. L'incidence continue de décroître et la couche

limite finit par recoller, mais la portance ne retrouve sa valeur statique que pour de faibles incidences. Les résultats nous montrent que le tourbillon du bord d'attaque peut être suivi d'un second au bord de fuite lorsque le premier grossit. Les deux enroulements tourbillonnaires progressent vers le sillage où le tourbillon aval s'échappe à incidence $\alpha=22^\circ$ alors que le tourbillon amont est émis dans le sillage vers la fin du premier quart de période. Pour une incidence voisine de 14° , les deux zones de décollement ont tendance à se confondre, on observe alors le même comportement rencontré pendant le premier quart de période. Au cours d'une demi-période quatre tourbillons sont ainsi émis dans le sillage.

Notre simulation numérique est encore incapable de décrire correctement les effets du décrochage dynamique ; ceci s'explique par la grande complexité des mécanismes mis en œuvre qui ne sont toujours pas bien compris, où en particulier le caractère fortement visqueux et instationnaire de l'écoulement est dominant. En effet, on observe de grosses structures tourbillonnaires lâchées par le profil, ce qui explique à la fois des gains de portance par rapport au décrochage statique, mais aussi de très forts gradients de portance et de moment de tangage lorsque ces structures tourbillonnaires sont évacuées en aval du profil.



Figure(5.91) champs de vitesse instantanés et lignes de courant du mouvement en tangage du profil Naca0012

Chapitre VI

Conclusions et perspectives

Ce travail a porté sur la Simulation des Grandes Echelles turbulentes en régime incompressible en géométrie complexe, en vue d'une application à un écoulement autour d'un profil statique puis oscillant en configuration de décrochage tel que celui intervenant en vol d'avancement à grande vitesse ou à forte charge sur les pales reculantes du rotor principal de l'hélicoptère.

C'est un cas test qui présente des difficultés physiques particulièrement significatives dans des situations de décrochage et de post décrochage où l'écoulement fait intervenir une séparation massive et des phénomènes instationnaires. Au-delà du décrochage, la structure de l'écoulement (lâcher tourbillonnaire) et les forces instationnaires sont des facteurs importants influents sur la stabilité et les performances aérodynamiques des profils portants.

Les équations de Navier Stokes pour un fluide incompressible ont été résolues dans la géométrie considérée en adaptant les conditions aux limites en entrée, sortie et aux parois. Ceci a nécessité la mise en œuvre d'un code de calcul tridimensionnel basé sur l'utilisation des techniques des volumes finis pour discrétiser spatialement les équations du mouvement écrites sous une formulation en vitesses contravariantes appliquée à un maillage structuré décalé généré suivant des coordonnées généralisées liées à la forme de l'obstacle. Notre méthode d'intégration temporelle est du type pas fractionnaires complètement implicite précise au second ordre tandis qu'une méthode de Newton approchée assure la prise en compte des termes non-linéaires. Une méthode de Krylov a été retenue pour résoudre le système linéaire de grande taille associée à chaque itération du processus de Newton.

La méthodologie de la simulation des grandes échelles a été utilisée pour filtrer spatialement les grandes échelles de l'écoulement et modéliser la turbulence à petite échelle. Seul le tenseur de sous maille présent dans les équations de l'écoulement ainsi obtenu est calculé à l'aide du modèle de Smagorinsky modifié afin tenir compte de l'effet de la viscosité moléculaire près des parois. Ce travail a permis de montrer qu'il est possible de récupérer des informations instationnaires en perturbant un écoulement initial obtenu par simulation statistique en utilisant la méthodologie des grandes échelles. C'est un fait important dans la mesure où une des difficultés majeures des méthodes RANS à l'heure actuelle pour le calcul instationnaire vient du nombre d'équations à résoudre et du nombre important de termes à modéliser. Le nombre d'équations utilisées en SGE est constant et les résultats obtenus sont instationnaires. Un autre avantage de la SGE est sa simplicité et le faible nombre de paramètres à caler par rapport à RANS. Les résultats obtenus sur les profils de vitesse moyenne ainsi que les tensions de Reynolds sont encourageants même si les tensions sont surestimées dans le cas de l'écoulement autour du profil en incidence de décrochage, où nous avons pu mesurer toutes les difficultés d'une estimation précise des efforts s'exerçant sur un profil d'aile, liées à la précision et l'indépendance vis-à-vis du maillage des prédictions d'écoulements visqueux ainsi qu'à la modélisation de la turbulence et de la transition. La SGE capture mieux les oscillations de l'écoulement et permis de mieux suivre l'évolution du bulbe de décollement depuis sa formation au bord d'attaque jusqu'à son passage au bord de fuite où il donne naissance à une émission tourbillonnaire dans le sillage. Les calculs de décrochage

dynamique sur le profil oscillant réalisés, indiquent que le code de calcul fourni une prédiction acceptable des écoulements et des efforts s'exerçant sur des corps en mouvement. Dès lors, des calculs d'interaction fluide-structure sont envisageables puisque la prédiction des efforts sur une structure immergée dans un milieu fluide en est le point difficile.

Néanmoins, nous nous sommes heurtés lors de ces calculs à un certain nombre de difficultés. La première est liée au coût CPU de la SGE très important en résolution fortement couplée des équations de Navier-Stokes dans le cadre de la modélisation d'écoulements incompressibles mais qui reste toutefois une voie attrayante, comparativement aux méthodes découplées dites à " correction de pression " (SIMPLE, SIMPLER, PISO). Cette attractivité est principalement due à la robustesse de l'algorithme construit qui consiste à résoudre le système linéarisé des équations de Navier-Stokes de manière couplée. L'originalité de cette méthode consiste à introduire des variables intermédiaires facilitant ultérieurement la reconstruction des flux et à dériver une équation de pression des équations de quantité de mouvement et de l'équation de continuité. Cette démarche conduit ainsi - lors d'applications tridimensionnelles - à un système linéaire qui nécessite d'importantes ressources de stockage et dont la convergence non-linéaire de l'algorithme se trouve à la fois dépendante de l'efficacité des méthodes de résolution linéaire mais aussi de la représentation de la non-linéarité. Cependant, l'un des facteurs contraignant dans le calcul est la taille des mailles aux parois et dont dépend le choix du pas de temps malgré l'adoption d'une résolution implicite. Nous avons choisi initialement de ne pas utiliser de lois de paroi parce qu'il semblait judicieux de ne pas introduire de modélisation supplémentaire dans la résolution des grandes échelles. Une amélioration des résultats est possible en utilisant un maillage plus serré autour des zones de décollement et précisément aux parois. Un nombre de points plus important dans la direction longitudinale pour mieux capturer les phénomènes post décrochage dynamique et peut permettre d'éviter de trop les diffuser. Un maillage plus serré aux parois permettrait également de mieux prédire la production de l'énergie cinétique par la SGE et ainsi d'améliorer les bilans et le calcul des tensions de Reynolds.

L'utilisation de la simulation des grandes échelles pour calculer un écoulement aussi complexe a soulevé de nombreuses questions fondamentales. L'interprétation de l'opération de filtrage sur des maillages curvilignes qui sont anisotropes n'est pas évidente. Il subsiste également des problèmes associés au couplage entre la viscosité numérique introduite par les schémas décentrés et la viscosité de sous maille. On a constaté aussi dans certains cas que le modèle choisi dans la présente étude surdissipe et peut entraîner la disparition des grosses structures de l'écoulement.

Le code a été conçu pour fonctionner sur un seul ordinateur avec un maillage monobloc. Ce mode de fonctionnement adapté aux moyens informatiques mis à notre disposition est en train d'être dépassé. L'émergence de la nouvelle technologie basée sur l'architecture parallèle entraîne sans doute la disparition des ordinateurs vectoriels dans le domaine de calcul intensif dans un avenir proche. La maîtrise de la parallélisation devient incontournable. Avec une vitesse de calcul de plusieurs GFLOPS et une capacité de mémoire de plusieurs dizaines Go, un serveur de calcul à architecture parallèle permet d'étudier des problèmes complexes encore plus proches de la réalité. Cependant, ce type de problème est souvent difficile à traiter avec un maillage multi-blocs. Le développement des outils multi-blocs est donc à l'ordre du jour. Afin de mieux répondre au besoin des nouvelles applications et de bien profiter de l'avantage offert par cette nouvelle technologie, la parallélisation du code devrait être entreprise pour transformer le code en un solveur Navier-Stokes multi-blocs.

Nous tenons à souligner au final que ce calcul n'a été rendu possible que grâce à une évolution très rapide des moyens informatiques sur ces trois dernières années et ne constitue qu'un premier pas qu'on a osé franchir.

La SGE est une méthodologie qui sera de plus en plus utilisée dans le monde industriel vu ses capacités à capturer les grandes échelles instationnaires des écoulements. Mais comme nous l'avons vu, c'est une technique qui reste encore très chère. Une voie pour son utilisation plus systématique en écoulement complexe passe certainement par la parallélisation des codes. Cela s'avérera d'autant plus nécessaire s'il faut des maillages très serrés aux parois pour bien calculer les différentes interactions qui sont observée autour du profil. Cela pose de nouveaux problèmes, comme le problème du filtrage temporel des solutions en plus du filtrage spatial et du choix d'un pas de temps pertinent par rapport aux phénomènes physiques considérés.

Néanmoins, la réalisation d'études paramétriques sur les modélisations utilisées en SGE pour calculer des écoulements présentant des phénomènes physiques complexes ne sera rendue possible qu'à condition de faire diminuer le temps des calculs. Cette voie est d'autant plus sérieusement envisageable depuis que la mémoire de calcul nécessaire se trouve vulgarisé à toute machine informatique. Une autre voie complémentaire est peut-être d'utiliser le couplage entre la SGE et les simulations statistiques un peu différemment. Nous avons vu sur les résultats que les différences observées entre les résultats se situent au niveau de la région proche parois. Il pourrait être bénéfique de ne calculer que la partie d'interaction entre fluide-structure en travaillant sur les conditions physiques à imposer à l'entrée d'un domaine de calcul plus restreint. Il a déjà été utilisé avec succès des initialisations de calculs spatiaux à partir de calculs temporels moins chers.

La montée en puissance de calcul des ordinateurs dans les années à venir permettra de simuler numériquement des écoulements de plus en plus complexes et de tester plus systématiquement la méthodologie de la SGE dans les conditions réelles d'écoulements industriels incompressibles, permettant une modélisation de plus en plus fine des écoulements turbulents instationnaires incompressibles 3D en géométrie complexe.

Annexe A

Analyse mathématique des équations de Navier-Stokes

A.1 Existence, unicité des solutions :

Position du problème. Les espaces fonctionnels

On considère les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement d'un fluide newtonien, incompressible dans un domaine Ω de \mathbb{R}^n ($n \in \{2, 3\}$):

$$(\partial_t + u(x,t) \cdot \nabla)u(x,t) = f(x,t) - \nabla p(x,t) + \nu \Delta u(x,t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[. \quad \nu > 0 \quad (\text{a.1})$$

$$\text{et} \quad \text{div}(u(x,t)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[. \quad (\text{a.2})$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$u(x,0) = u_0(x). \quad x \in \Omega \quad (\text{a.3})$$

$$\text{et} \quad u(x,t) = \phi(x,t). \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0 \quad \phi \text{ donnée} \quad (\text{a.4})$$

Le problème qu'on se pose est de trouver u et p tels que (a.1), (a.2), (a.3) et (a.4) aient lieu. Pour la résolution mathématique de ce problème on considère les espaces :

- $\gamma = \{v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \text{div}v = 0\}$ l'espace des fonctions test, où $C_0^\infty(\Omega)$ représente l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .
 - $H = 1$ 'adhérence de γ dans $L^2(\Omega)^n$ et
 - $V = 1$ 'adhérence de γ dans $H_0^1(\Omega)^n$
- $n \in \{2, 3\}$ étant la dimension de l'espace considéré.

H et V sont des espaces de Hilbert munis respectivement de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ et de la norme $\|\cdot\|_H$, et on peut les caractériser comme suit :

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^n; \text{div}v = 0; v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^n, \text{div}v = 0\}$$

D'autres propriétés des espaces H et V sont présentées dans Temam [92].

On note par Λ l'opérateur linéaire non borné dans H associé au produit scalaire de V^1 :

$$(\Lambda u, v) = ((u, v)) \quad \forall u, v \in V$$

Le domaine de l'opérateur Λ est noté par $D(\Lambda)$ et d'après la théorie sur les systèmes linéaires elliptiques on a :

$$D(\Lambda) = (H^2(\Omega))^n \cap V$$

Soit V^1 l'espace dual de V . Alors, on a :

$$D(\Lambda) \subset V \subset H \subset V^1$$

Où toutes les inclusions sont continues, chaque espace est dense dans le suivant et de plus l'inclusion $V \rightarrow H$ est compacte. De plus :

$$\Lambda u = -P\Delta u$$

où P est le projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega)^n$ sur l'espace H (dans le cas périodique $\Lambda u = -\Delta u$ $\forall u \in D(\Lambda)$).

L'opérateur Λ est auto adjoint, positif et d'inverse compact dans H . Il existe une suite λ_i telle que :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty$$

et une base orthonormale dans H , $\{w_k\}_{k \in N^*}$ tel que :

$$\Lambda w_k = \lambda_k w_k \quad k \in N^*$$

Les quantités $\frac{1}{2}|u|^2$ et $\|u\|^2$ représente l'énergie cinétique et l'enstrophie respectivement.

On utilise les notations standard pour les produits scalaires et les normes dans L^2 et dans H_0^1 :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx \quad \text{et} \quad ((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx ; \quad |u| = (u, u)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u\| = ((u, u))^{\frac{1}{2}}$$

Formulation faible. Résultats d'existence et d'unicité

La formulation faible des équations de Navier-Stokes (due à J. Leray) ne dépend que de la vitesse u . Elle est obtenue en multipliant l'équation (a.1) avec une fonction test $v \in \gamma$, puis en intégrant sur Ω .

Si on note $u(t)$ l'application

$$x \in \Omega \rightarrow u(x, t)$$

alors le problème à résoudre dans la formulation faible est de trouver les solutions $u(t) \in V$ pour presque tout t telles que l'équation :

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V \quad (\text{a.5})$$

soit vérifiée au sens de distributions sur $]0, T[$ ou $]0, \infty[$.

Le terme b est donné par:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \cdot w_j dx \quad (\text{a.6})$$

(dans un domaine où les intégrales ont un sens).

On appelle solution faible des équations de Navier-Stokes sur $[0, T]$ un champ de vecteurs de divergence nulle

$$u \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H) \quad \text{pour } T > 0$$

et qui vérifie l'équation (a.5) au sens des distributions, et solution forte, la solution qui appartient à :

$$L^2((0, T), D(\Lambda)) \cap L^\infty((0, T), V) \quad \text{pour } T > 0$$

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions sont différents selon la dimension de l'espace considéré.

L'existence de la solution est généralement obtenue par une méthode constructive: on construit d'abord une solution approchée (par une méthode de Galerkin par exemple) et ensuite on passe à la limite à l'aide d'estimations a priori sur la solution construite. On peut aussi utiliser les théorèmes de point fixe de Leray-Schauder ou bien de Banach, qui donnent les solutions sur un petit intervalle de temps $]0, T^*[$. La partie délicate dans ce type de démonstration est la dérivation des estimations a priori. Celles-ci dépendent de l'évaluation du terme b . Il existe plusieurs estimations de ce terme, obtenues en combinant l'inégalité de Hölder avec d'autres inégalités, comme par exemple: celles de Sobolev, d'interpolation, de Gagliardo-Nirenberg.

On résume maintenant les résultats connus concernant l'existence et l'unicité dans le contexte de la théorie des espaces L^2 :

- en dimension 2, la théorie mathématique concernant les équations de Navier-Stokes est assez satisfaisante, le problème étant bien posé, au sens qu'on connaît l'existence et l'unicité de la solution faible; on a le même type de résultat pour les solutions fortes, mais pour celles-ci, seulement dans le cas où la donnée initiale est suffisamment régulière.

Plus précisément on énonce ici un théorème qui regroupe en fait ces résultats :

Théorème a.1 *i)* Si f et u_0 sont données telles que :

$$f \in L^2(0, T; V') \text{ et } u_0 \in H \quad (\text{a.7})$$

alors il existe une unique solution faible des équations de Navier-Stokes qui est dans $C([0, T]; H)$ et qui vérifie

$$u' \in L^2(0, T; V')$$

ii) Si f et u_0 sont données telles que

$$f \in L^\infty(0, T; H) \text{ et } u_0 \in V \quad (\text{a.8})$$

alors il existe une unique solution forte des équations de Navier-Stokes qui est dans $C([0, T]; V)$.

- en dimension 3, on a seulement des résultats partiels : l'existence et l'unicité des solutions fortes sur un intervalle $]0, T^*$ [(le temps de blow-up T^* dépendant de la condition initiale (Ladyshzenskaya [54])), ainsi que l'existence globale des solutions faibles.

On peut énoncer dans ce cas:

Théorème a.2 *i)* Si f et u_0 sont données telles que (a.7) alors il existe une solution faible des équations de Navier-Stokes qui est continue au sens faible sur $[0, T]$ à valeurs dans H et qui vérifie

$$u' \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; V')$$

ii) Si f et u_0 sont données telles que (a.8) alors il existe $T^* = T^*(u_0)$ tel que sur l'intervalle $[0, T]$ les équations de Navier-Stokes admettent une unique solution forte.

Remarque a.1 Actuellement on ne sait pas si la solution faible des équations de Navier-Stokes 3D est unique, ou quelles sont les hypothèses qui peuvent la rendre unique, ainsi que l'existence de la solution forte pour tout T .

Annexe B

Méthodes de Krylov

B.1 Méthode de Krylov :

Pour résoudre le système linéaire suivant :

$$J\delta = b \quad (\text{b.1})$$

En général J est une matrice non-symétrique, δ solution du système linéaire. On utilise des méthodes fondés sur une recherche de la solution en restriction à un sous-espace de Krylov. De telles méthodes cherchent une approximation de la solution δ^* du système (b.1) sur $\delta_0 + K(J, r_0, k)$ où $K(J, r_0, k)$ est le sous espace de Krylov défini par :

Définition (b.1) : Le sous-espace de Krylov $K(J, r_0, k)$ associé au vecteur $r_0 = b - J\delta_0$ et à la matrice J est le sous espace formé par $\langle r_0, Jr_0, \dots, J^{k-1}r_0 \rangle$ où δ_0 est une première estimation de δ .

Cette approche se justifie par le résultat suivant :

Théorème (b.1) : Soit J non singulière. Il existe $k_0 \leq N$ tel que $\delta^* \in \delta_0 + K(J, r_0, k)$.

Preuve. En mettant J sous sa forme de Jordan, il est aisé de montrer qu'il existe un entier $k_0 \leq N$ tel que $K(J, r_0, k_0) = K(J, r_0, k_0 + 1)$. Ainsi,

$$J^{k_0} r_0 = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k J^k r_0$$

Soit $l \geq 0$ plus petit entier tel que a_l soit non nul alors

$$0 = r_0 + J \sum_{k=0}^{k_0-l-1} b_k J^k r_0$$

avec $b_k = \frac{a_{k+l+1}}{a_l}$ pour $k=0, k_0-l-2$ et $b_{k_0-l-1} = -\frac{1}{a_l}$ il suffit dès lors de prendre :

$$\delta = \delta_0 + \sum_{k=0}^{k_0-l-1} b_k J^k r_0$$

De nombreux algorithmes utilisent ce résultat pour résoudre ou approcher la solution de (b.1) lorsque J est non symétrique. Dans l'algorithme de FOM ou de GMRES, une base pour le sous-espace de Krylov est construite, puis une approximation de la solution est donnée à chaque étape de sa construction. Une de ces méthodes a retenu notre attention, il s'agit de GMRES qui est optimale au sens où elle cherche une approximation de la solution vérifiant :

$$\min_{z \in K(J, r_0, k)} \|r_0 - Jz\|_2$$

B.1.1 GMRES :

Nous présentons ici brièvement l'algorithme de GMRES, en introduisant quelques notations nécessaire

Le principe de GMRES est de minimiser $\| -J(\delta_0 + z) + b \|_2$ avec z dans le sous-espace de Krylov $K(J, r_0, k)$ (définition b.1). Ainsi, (b.1) est remplacé par le problème de minimisation approché

$$\min_{z \in K(J, r_0, k)} \| r_0 - Jz \|_2$$

le sous espace de Krylov est généré par le processus d'Arnoldi conduisant à l'algorithme de GMRES suivant :

Algorithme b.1: GMRES

$\delta_0 \in \mathbb{R}^N$ une première approximation de δ^* ,

(s1). $r_0 := b - J\delta_0$

$$\beta := \| r_0 \|_2 ; v_1 := \frac{r_0}{\beta} ; k := 0.$$

(s2). **Do**

$k := k + 1.$

$$(a) w_{k+1} = Jv_k - \sum_{l=0}^k h_{l,k} v_l$$

$$\text{avec } h_{l,k} := (Jv_k, v_l) \quad (l=1, \dots, k)$$

$$h_{k+1,k} := \| w_{k+1} \|_2$$

$$v_{k+1} := \frac{w_{k+1}}{h_{k+1,k}}$$

$$(b) \text{ calculer } \rho_k := \min_{y \in \mathbb{R}^k} \| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2$$

until $\rho_k = 0$

(s3). Calculer y_k ; $z_k := V_k y_k$ et $\delta := \delta_0 + z_k$

$$\text{où } (\overline{H}_k)_{p,l} = \begin{cases} h_{m,l} & 1 \leq p \leq k+1, p \leq l \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$V_k = (v_1, \dots, v_k)$$

et

$$\| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^k} \| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2 = \rho_k$$

Le processus d'Arnoldi génère une base orthogonale telle que :

$$JV_k = V_{k+1} \overline{H}_k$$

impliquant

$$\min_{z \in K(J, r_0, k)} \| r_0 - Jz \|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^k} \| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2$$

On peut facilement vérifier les trois propriétés suivantes :

$$(i) \quad K(J, r_0, k_0) = K(J, r_0, k_0 - 1)$$

$$(ii) \quad \rho_k = 0$$

$$(iii) \quad J\delta_k = b$$

Bibliographie

- [1] Akselvoll, K., & Moin, P. 1996 Large-eddy simulation of turbulent coned coannular jets. *J. Fluid Mech.* 315, 387.
- [2] Arnoux, J. juin 1983 Etude préliminaire du calcul numérique de la couche limite instationnaire sur un profil d'aile en rotation, application à l'éolienne Darrieus. Rapport DEA, Aix Marseille II IMST.
- [3] R. Aris. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [4] P. Arminjon and A. Dervieux. Construction of TVD-like artificial viscosities on two-dimensional arbitrary FEM grids. *J. Comput. Phys.*, 106:176--198, 1993.
- [5] W.D. Baines and D.J. Knapp. Wind driven water currents. *J. Hydraulics Division ASCE*, 91:295--321, 1965.
- [6] A.C. Benim and W. Zinser. Investigation into the finite element analysis of confined turbulent flows using a $k-\varepsilon$ model of turbulence. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 51:507--523, 1985.
- [7] R.S. Bernard and H. Kapitza. How to discretize the pressure gradient for curvilinear MAC grids. *J. Comput. Phys.*, 99:288--298, 1992.
- [8] J.P. Boris. New directions in CFD. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 21:345--385, 1989.
- [9] J.P. Boris and D.L. Book. Flux-corrected transport I - SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, 11:38--69, 1973.
- [10] M. Braaten and W. Shyy. A study of recirculating flow computation using body-fitted coordinates: consistency aspects and mesh skewness. *Numer. Heat Transfer*, 9:559--574, 1986.
- [11] Brochier, G. 1986 Etude numérique de la couche limite instationnaire sur un profil d'aile en mouvement, application et expérimentation à l'éolienne Darrieus. Rapport DEA, Aix Marseille II IMST.
- [12] P. Bradshaw, T. Cebeci, and J.H. Whitelaw. *Engineering calculation methods for turbulent flow.* Academic Press, London, 1981.
- [13] E. Brakkee and A. Segal. A parallel domain decomposition algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations. In L. Dekker, W. Smit, and J.C. Zuidervart, editors, *Massively Parallel Processing Applications and Development*, pages 743--752, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [14] E. Brakkee, A. Segal, and C.G.M. Kassels. A parallel domain decomposition algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Simul. Pract. Theor.*, 3:185--205, 1995.
- [15] J. P. Chollet and M. Lesieur. Parametrization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, 1981.
- [16] T.L. Chambers and D.C. Wilcox. Critical examination of two-equation turbulence closure models for boundary layers. *AIAA J.*, 15:821--828, 1977.
- [17] H.C. Chen, V.C. Patel, and S. Ju. Solutions of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for three-dimensional incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 88:305--336, 1990.
- [18] Choi, H., Moin, P., & Kim, J. 1993 Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.* 255, 503.
- [19] N-H. Cho and C.A.J. Fletcher. Computation of turbulent conical diffuser flows using a non-orthogonal grid system. *Comput. Fluids*, 19:347--361, 1991.
- [20] P.J. Coelho and J.C.F. Pereira. Finite volume computation of the turbulent flow over

- a hill employing 2D or 3D non-orthogonal collocated grid systems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 14:423--441, 1992.
- [21] G.W. Colenbrander. CFD in research for the petrochemical industry. *Appl. Sci. Res.*, 48:211--245, 1991.
- [22] S.M. Correa and W. Shyy. Computational models and methods for continuous gaseous turbulent combustion. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 13:249--292, 1987.
- [23] T.J. Craft, B.E. Launder, and K. Suga. Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements. In *Proc. 5th Int. IAHR Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, pages 125--132, Presses Ponts et Chauss'ees, Paris, 1993.
- [24] Dejoan A. et Schiestel R., 1999 Simulation de grandes échelles en écoulement turbulent soumis à des perturbations instationnaires, 14^o Congrès Français de Mécanique, Toulouse 30 août-3 sept. 1999, communication N^o 453.
- [25] G. de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 3:249--264, 1983.
- [26] I. Demirdzic, A.D. Gosman, R.I. Issa, and M. Peric. A calculation procedure for turbulent flow in complex geometries. *Comput. Fluids*, 15:251--273, 1987.
- [27] I.A. Demirdzic. A finite volume method for computation of fluid flow in complex geometries. Ph.D. thesis, University of London, 1982.
- [29] L. Davidson and B. Farhanieh. CALC-BFC: A finite-volume code employing collocated variable arrangement and cartesian velocity components for computation of fluid flow and heat transfer in complex three-dimensional geometries. Rept. 92/4, Dept. of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg, 1992.
- [29] G.B. Deng. Numerical simulation of incompressible turbulent appendage-flat plate junction flows. In C. Taylor, W.G. Habashi, and M.M. Hafez, editors, *Proc. Sixth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 793--803, Pineridge Press, Swansea, 1989.
- [30] L. Davidson. LES-RANS of channel flow .Technical Report 00/2, Dept.of Thermo and Fluid Dynamics , Chalmers University of Technology, Gothenburg , Sweden, 2000.
- [31] Favier, D. octobre 1980 Aérodynamique subsonique instationnaire d'un profil d'aile soumis á des variations de vitesse et d'incidence, thèse d'état , Aix Marseille II IMF
- [32] J.H. Ferziger. Simulation of incompressible turbulent flows. *J. Comput. Phys.*, 69:1--48, 1987.
- [33] C.A.J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics*, Vols. 1 and 2. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [34] J.E. Fromm. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 3:176--189, 1968.
- [35] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamic subgrid scale eddy-viscosity model. *Phys. Fluids A* ,
- [36] P.M. Gresho and R.L. Lee. Don't suppress the wiggles they're telling you something! *Computers & Fluids*, 9:223--253, 1981.
- [37] S. Ghosal and P. Moin. The basic equations for the Large Eddy Simulation of turbulent flows in complex geometry . *Journal of Computational Physics* , 1995.
- [38] M.A. Habib and J.H. Whitelaw. The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers. *Numer. Heat Transfer*, 5:145--164, 1982.
- [39] T. Han, J.A.C. Humphrey, and B.E. Launder. A comparison of hybrid and quadratic upstream differencing in high Reynolds number elliptic flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 29:81--95, 1981.
- [40] Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P. & Akselvoll, K. 1995 A Dynamic Localization Model for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. *J. Fluid Mech.* 286, 229-255.

- [41] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182--2189, 1965.
- [42] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357--393, 1983.
- [43] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. *J. Comput. Phys.*, 71:231--303, 1987.
- [44] A. Harten, J.M. Hyman, and P.D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29:297--322, 1976.
- [45] T. Hayase, J.A.C. Humphrey, and R. Greif. A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures. *J. Comput. Phys.*, 98:108--118, 1992.
- [46] J.O. Hinze. *Turbulence*. Mac Graw-Hill, New York, 1975.
- [47] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, Vols. 1 and 2. John Wiley, Chichester, 1990.
- [48] P.G. Huang, B.E. Launder, and M.A. Leschziner. Discretization of nonlinear convection processes: a broad-range comparison of four schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 48:1--24, 1985.
- [49] W. Hundsdorfer, B. Koren, M. van Loon, and J.G. Verwer. A positive finite-difference advection scheme. *J. Comput. Phys.*, 117:35--46, 1995.
- [50] A.G. Hutton, R.M. Smith, and S. Hickmott. The computation of turbulent flows of industrial complexity by the finite element method - progress and prospects. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 7:1277--1298, 1987.
- [51] T. Ikohagi and B.R. Shin. Finite difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates. *Comput. Fluids*, 19:479--488, 1991.
- [52] R.I. Issa and P.J. Oliveira. Numerical prediction of phase separation in two-phase flow through T-junctions. *Comput. Fluids*, 23:347--372, 1994.
- [53] P. K. Khosla and S. G. Rubin. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Comput. Fluids*, 2:207--209, 1974.
- [54] J. Kim, S.J. Kline, and J.P. Johnston. Investigation of a reattaching turbulent shear layer: flow over a backward-facing step. *ASME J. Fluids Engng.*, 102:302--308, 1980.
- [55] W.J. Kim and V.C. Patel. Influence of streamwise curvature on longitudinal vortices imbedded in turbulent boundary layers. *Comput. Fluids*, 23:647--673, 1994.
- [56] S. J. Kline , W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler. The structure of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 30:741\226773, 1967.
- [57] S. Koshizuka and Y. Oka. A calculation procedure of coordinate-free Navier-Stokes equations on boundary-fitted grids. In C. Taylor, J.H. Chin, and G.M. Homsy, editors, *Proc. Seventh Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 1474--1484, Pineridge Press, Swansea, 1991.
- [58] K.Y.M. Lai and A.D. Gosman. Finite difference and other approximations for the transport and Navier-Stokes equations. Report FS/82/16, Mechanical Engineering Department, Imperial College, London, U.K., 1982.
- [59] Raphael Lardat. *Simulations numériques d'écoulements externes instationnaires décollés autour d'une aile avec des modèles de sous maille*. PhD thesis, Université Paris.
- [60] B.E. Launder. Turbulence modeling in the vicinity of a wall. In S.J. Kline, B.J. Cantwell, and G.M. Lilley, editors, *Complex turbulent flows: comparison of computation and experiment*, volume II, pages 691--699, Stanford University Press, Stanford, CA, 1982.
- [61] B.E. Launder. Second-moment closure and its use in modelling turbulent industrial flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 9:963--985, 1989.

- [62] B.E. Launder. Second-moment closure: present... and future? *Int. J. Heat Fluid Flow*, 10:282--300, 1989.
- [63] B.E. Launder. On the modelling of turbulent industrial flows. In Ch. Hirsch, J. Périaux, and E. Onate, editors, *Computational methods in applied sciences*, pages 91--102, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [64] B.E. Launder, G.J. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68:537--566, 1975.
- [65] B.E. Launder and D.B. Spalding. *Lectures in mathematical models of turbulence*. Academic Press, London, 1972.
- [66] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 3:269--289, 1974.
- [67] D. Laurence. Modeling turbulent flows in engineering applications. In Ch. Hirsch, J. Périaux, and E. Onate, editors, *Computational methods in applied sciences*, pages 103--116, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [68] B.P. Léonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 19:59--98, 1979.
- [69] B.P. Leonard. A survey of finite differences with upwinding for numerical modelling of the incompressible convection diffusion equation. In C. Taylor and K. Morgan, editors, *Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow*, pages 1--35, Pineridge Press, Swansea, 1981.
- [70] B.P. Leonard. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 8:1291--1318, 1988.
- [71] B.P. Leonard and J.E. Drummond. Why you should not use 'hybrid', 'power-law' or related exponential schemes for convective modelling - there are much better alternatives. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 20:421--442, 1995.
- [72] B.P. Leonard and S. Mokhtari. Beyond first-order upwinding: the ULTRA-SHARP alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 30:729--766, 1990.
- [73] M.A. Leschziner. Practical evaluation of three finite difference schemes for the computation of steady-state recirculating flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 23:293--312, 1980.
- [74] M.A. Leschziner. Modeling turbulent recirculating flows by finite-volume methods current status and future directions. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 10:186--202, 1989.
- [75] M.A. Leschziner. Modelling engineering flows with Reynolds stress turbulence closure. *J. Wind Engng. Indust. Aero.*, 35:21--47, 1990.
- [76] M.A. Leschziner. Numerical implementation and performance of Reynolds-stress closures in finite volume computations of recirculating and strongly swirling flows. In *Introduction to the modeling of turbulence*, VKI, Brussels, 1993. Lecture Series 1993-02.
- [77] M.A. Leschziner. Computation of aerodynamic flows with turbulence-transport models based on second-moment closure. *Comput. Fluids*, 24:377--392, 1995.
- [78] M.A. Leschziner and K.P. Dimitriadis. Computation of three-dimensional turbulent flow in non-orthogonal junctions by a branch-coupling method. *Comput. Fluids*, 17:371--396, 1989.
- [79] M.A. Leschziner and B.E. Launder, editors. *Round normally impinging turbulent jet and turbulent flow through tube bank sub-channel*, Manchester, UK., 1993. UMIST. Proc. Second ERCOFTAC-IAHR Workshop on Refined Flow Modelling.
- [80] M.A. Leschziner and W. Rodi. Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulence-model variations. *ASME J. Fluids Engng.*, 103:352--360, 1981.
- [81] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Assessment of turbulence-transport models including

- non-linear RNG eddy-viscosity formulation and second-moment closure for flow over a backward-facing step. *Comput. Fluids*, 23:983--1004, 1994.
- [82] F.S. Lien and M.A. Leschziner. A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation and Part 2: Application. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 114:123--167, 1994.
- [83] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 19:527--548, 1994.
- [84] A. Lin and H. Weinstein. Numerical analysis of confined turbulent flow. *Comput. Fluids*, 10:27--50, 1982.
- [85] T. S. Lund. On the use of discrete fillters for large eddy simulation. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, 1997.
- [86] J.L. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.*, 18:123--176, 1978.
- [87] S. Majumdar and W. Rodi. Three-dimensional computation of flow past cylindrical structures and model cooling towers. *Building and Environment*, 24:3--22, 1989.
- [88] Mary I., Sagaut P. and Guillen Ph., "Large Eddy Simulation of the Manipulated Flow around a Circular Cylinder", *Proceedings of the IMACS 16th World Congress*, August, 2000.-
- [89] P. Moin and J. Jimenez. Large eddy simulation of complex turbulent flows. *24th AIAA Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 93-3099*, Orlando, 1993.
- [90] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large eddy simulation of isotropic and stably stratified tubulence. *J. Fluid Mech.*, 1992.
- [91] A.E. Mynett, P. Wesseling, A. Segal, and C.G.M. Kassels. The ISNaS incompressible Navier-Stokes solver: invariant discretization. *Appl. Sci. Res.*, 48:175--191, 1991.
- [92] A. Nakayama. A finite difference calculation procedure for three-dimensional turbulent separated flows. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 20:1247--1260, 1984.
- [93] M. Nallasamy. Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: a review. *Comput. Fluids*, 15:151--194, 1987.
- [94] I. Nezu and W. Rodi. Open-channel flow measurements with a laser doppler anemometer. *J. Hydraulic Engng.*, 112:335--355, 1986.
- [95] C.W. Oosterlee. Robust multigrid methods for the steady and unsteady incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. Ph.D. thesis, Delft University of Technology, 1993.
- [96] C.W. Oosterlee and P. Wesseling. A robust multigrid method for a discretization of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. *Impact of Comput. Sci. Engng.*, 5:128--151, 1993.
- [97] C.W. Oosterlee, P. Wesseling, A. Segal, and E. Brakkee. Benchmark solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates on staggered grids. *Int J. Numer. Meth. Fluids*, 17:301--321, 1993.
- [98] G. Papadakis and G. Bergeles. A locally modified second order upwind scheme for convection terms discretization. *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, 5:49--62, 1995.
- [99] S.V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [100] S.V. Patankar. Recent developments in computational heat transfer. *J. Heat Transfer*, 110:1037--1045, 1988.
- [101] S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:1787--1806, 1972.

- [102] M.K. Patel and N.C. Markatos. An evaluation of eight discretization schemes for two-dimensional convection-diffusion equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 6:129--154, 1986.
- [103] V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review. *AIAA J.*, 23:1308--1319, 1985.
- [104] M. Peric. Finite volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts. Ph.D. thesis, Imperial College, London, 1985.
- [105] M. Peric, M. Ruger, and G. Scheuerer. Calculation of the two-dimensional turbulent flow over a sand dune model. Report SRR-TN-88-02, University Erlangen-Nbg., Erlangen, Germany, 1988.
- [106] R. Peyret and T.D. Taylor. *Computational methods for fluid flow*. Springer, Berlin, 1983.
- [107] J. Piquet and P. Queutey. Computation of the viscous flow past a prolate spheroid at incidence. In P. Wesseling, editor, *Proc. Eighth GAMM Conf. on Numer. Meth. Fluid Mech.*, pages 464--473, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1990. *Notes on Numerical Fluid Mechanics* 29.
- [108] A. Pollard and A.L.W. Siu. The calculation of some laminar flows using various discretization schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 35:293--313, 1982.
- [109] S.B. Pope. The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates. *J. Comput. Phys.*, 26:197--217, 1978.
- [110] G.D. Raithby. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 9:153--164, 1976.
- [111] C.W. Rapley. Turbulent flow in a duct with cusped corners. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 5:155--167, 1985.
- [112] A.K. Rastogi. Hydrodynamics in tubes perturbed by curvilinear obstructions. *ASME J. Fluids Engng.*, 106:262--269, 1984.
- [113] C.M. Rhie and W.L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA J.*, 21:1525--1532, 1983.
- [114] Roy Ph., 1980 Résolution des équations de Navier-Stokes par un schéma de haute précision en espace et en temps, *La Recherche Aéronautique*, 6, pp. 373-385.
- [115] Rai, M. M. & Moin, P. 1993 Direct Numerical Simulation of Transition and Turbulence in a Spatially Evolving Boundary Layer. *J. Comp. Phys.* 109, No. 2, 169-192.
- [116] W. Rodi, J.-C. Bonnin, and T. Buchal, editors. ERCOFTAC workshop on data bases and testing of calculation methods for turbulent flows, Karlsruhe, Germany, 1995. Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe. *Proc. Fourth ERCOFTAC-IAHR Workshop on Refined Flow Modelling*.
- [117] W. Rodi, S. Majumdar, and B. Schonung. Finite volume methods for two-dimensional incompressible flows with complex boundaries. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 75:369--392, 1989.
- [118] P.L. Roe. Finite-volume methods for the compressible Navier-Stokes equations. In C. Taylor, W.G. Habashi, and M.M. Hafez, editors, *Proc. Fifth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 2088--2101, Pineridge Press, Swansea, 1987.
- [119] H. Rolfes, J.A. Visser, and A. Bekker. Simulation of wind flow over arbitrary shaped buildings. In C. Taylor, editor, *Proc. Eighth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 643--654, Pineridge Press, Swansea, 1993.
- [120] M. Rosenfeld, D. Kwak, and M. Vinokur. A fractional step solution method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations in generalized coordinate systems. *J. Comput. Phys.*, 94:102--137, 1991.
- [121] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluides incompressibles*. Springer-Verlag, Mathématiques et Applications, 1998.

- [122] Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856--869, 1986.
- [123] H. Schlichting. *Boundary layer theory*. McGraw Hill, New York, 1969.
- [124] S.G. Saddoughi and S.V. Veeravalli. Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 268:333--372, 1994.
- [125] A. Segal, P. Wesseling, J. van Kan, C.W. Oosterlee, and K. Kassels. Invariant discretization of the incompressible Navier-Stokes equations in boundary fitted coordinates. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 15:411--426, 1992.
- [126] G. Segal, K. Vuik, and K. Kassels. On the implementation of symmetric and antisymmetric periodic boundary conditions for incompressible flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 18:1153--1165, 1994.
- [127] G. Segal, K. Vuik, W. Kuppen, and M. Zijlema. ISNaS - incompressible flow solver. *Mathematical manual. Report 93-96*, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1993.
- [128] C.-W. Shu. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws. *Math. Comput.*, 49:105--121, 1987.
- [129] W. Shyy. A study of finite difference approximations to steady-state, convection-dominated flow problems. *J. Comput. Phys.*, 57:415--438, 1985.
- [130] D. Simonin and M. Barcouda. Measurements and predictions of turbulent flow entering a staggered tube bundle. EDF Report H-44/88.25, EDF, Laboratoire National d'Hydraulique, Chatou, France, 1988.
- [131] L.M. Smith and W.C. Reynolds. On the Yaghot-Orszag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models. *Phys. Fluids A*, 4:364--390, 1992.
- [132] R.E. Smith and L.-E. Eriksson. Algebraic grid generation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 64:285--300, 1987.
- [133] R.M. Smith. On the finite-element calculation of turbulent flow using the $k-\varepsilon$ model. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 4:303--319, 1984.
- [134] I.S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis*. Wiley, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [135] D.B. Spalding. A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 4:551--559, 1972.
- [136] S.P. Spekreijse. Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws. *Math. Comput.*, 49:135--155, 1987.
- [137] P.R. Spalart, W.-H. Jou, M. Strelets, and S.R. Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. 1st AFOSR Int. Conf. on DNS/LES, Aug. 4-8, 1997, Ruston, LA. In *Advances in DNS/LES*, C. Liu & Z. Liu Eds., Greyden Press, Columbus, OH.
- [138] C.G. Speziale. On nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 178:459--475, 1987.
- [139] C.G. Speziale. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:107--157, 1991.
- [140] F. Stern, S.Y. Yoo, and V.C. Patel. Interactive and large-domain solutions of higher-order viscous-flow equations. *AIAA J.*, 26:1052--1060, 1988.
- [141] H.L. Stone. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5:530--558, 1968.
- [142] Schiestel R. et Viazzo S., 1995 A Hermitian-Fourier numerical method for solving the incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Computers & Fluids*, 24(6), pp. 739-752.
- [143] P. Tamamidis and D.N. Assanis. Evaluation of various high-order-accuracy schemes with and without flux limiters. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 16:931--948, 1993.
- [144] P. Tamamidis and D.N. Assanis. Three-dimensional incompressible flow calculations with alternative discretization schemes. *Numer. Heat Transfer B*, 24:57--76, 1993.

- [145] H. Tennekes and J.L. Lumley. A first course in turbulence. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983.
- [146] S. Thakur and W. Shyy. Some implementational issues of convection schemes for finite-volume formulations. *Numer. Heat Transfer B*, 24:31--55, 1993.
- [147] J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, and C.W. Mastin. Numerical grid generation, foundations and applications. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [148] M.S. Uberoi and P. Freymuth. Turbulent energy balance and spectra of the axisymmetric wake. *Phys. Fluids*, 13:2205--2210, 1970.
- [149] P. van Beek, R.R.P. van Nooyen, and P. Wesseling. Accurate discretization of gradients on non-uniform curvilinear staggered grids. *J. Comput. Phys.*, 117:364--367, 1995.
- [150] B. van den Berg. A three-dimensional law of the wall for turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 70:149--160, 1975.
- [151] H.A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BiCG for the solution of non symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13:631--644, 1992.
- [152] J.J.I.M. van Kan. A second-order accurate pressure correction method for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:870--891, 1986.
- [153] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comput. Phys.*, 14:361--370, 1974.
- [154] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 32:101--136, 1979.
- [155] B. van Leer. Upwind-difference methods for aerodynamic problems governed by the Euler equations. *Lectures in Appl. Math.*, 22:327--336, 1985.
- [156] Oleg V. Vasilyev and Thomas S. Lund. A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry. Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, 1997.
- [157] C.B. Vreugdenhil and B. Koren, editors. Numerical methods for advection-diffusion problems, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1993. Notes on Numerical Fluid Mechanics.
- [158] C. Vuik. Solution of the discretized incompressible Navier-Stokes equations with the GMRES method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 16:507--523, 1993.
- [159] N.P. Waterson and H. Deconinck. A unified approach to the design and application of bounded higher-order convection schemes. In C. Taylor and P. Durbetaki, editors, *Proc. Ninth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 203--214, Pineridge Press, Swansea, 1995.
- [160] P. Wesseling. Large scale modeling in computational fluid dynamics. In E.F. Deprettere and A.-J. van der Veen, editors, *Algorithms and parallel VLSI architectures*, Volume A: Tutorials, pages 277--308, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [161] P. Wesseling. Flow computation in general geometries. J.M. Burgers Centre Lecture Series "Numerieke Stromingsleer III", Delft, june 1994.
- [162] P. Wesseling, C.G.M. Kassels, C.W. Oosterlee, A. Segal, C. Vuik, S. Zeng, and M. Zijlema. Computing incompressible flows in general domains. In F.-K. Hebekker, R. Rannacher, and G. Wittum, editors, *Numerical Methods for the Navier-Stokes equations*, pages 298--314, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1994.
- [163] P. Wesseling, A. Segal, J.J.I.M. van Kan, C.W. Oosterlee, and C.G.M. Kassels. Finite volume discretization of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates on staggered grids. *Comput. Fluid Dyn. J.*, 1:27--33, 1992.
- [164] P. Wesseling, P. van Beek, and R.R.P. van Nooyen. Aspects of non-smoothness in flow computations. In A. Peters, G. Wittum, B. Herrling, U. Meissner, C.A. Brebbia, W.G. Gray, and G.F. Pinder, editors, *Computational Methods in Water Resources X*, pages 1263--1271, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [165] P. Wesseling, M. Zijlema, A. Segal, and C.G.M. Kassels. Computation of turbulent flow in general domains. Report 95-85, Delft University of Technology, Faculty of

- Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1995.
- [166] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.*, 26:1299--1310, 1988.
- [167] D.C. Wilcox. A half century historical review of the $k-\varepsilon$ model. *AIAA Paper 91-0615*, 1991.
- [168] D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., California, U.S.A., 1993.
- [169] Z.G. Xu, D.H.T. Gotham, and M.W. Collins. Numerical modelling of three dimensional turbulent flow in packaged air-conditioning units with inclined heat exchangers. In C. Taylor, editor, *Proc. Eighth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 328--337, Pineridge Press, Swansea, 1993.
- [170] V. Yakhot and S.A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory. *J. Sci. Comput.*, 1:3--51, 1986.
- [171] V. Yakhot, S.A. Orszag, S. Thangam, T.B. Gatski, and C.G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. Fluids A*, 4:1510--1520, 1992.
- [172] V. Yakhot and L.M. Smith. The renormalization group, the ε -expansion and derivation of turbulence models. *J. Sci. Comput.*, 7:35--61, 1992.
- [173] C-N. Yung, T.G. Keith Jr., and K.J. de Witt. Numerical simulation of axisymmetric turbulent flow in combustors and diffusers. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 9:167--183, 1989.
- [174] S.T. Zalesak. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.*, 31:335--362, 1979.
- [175] S. Zeng and P. Wesseling. Multigrid solution of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:1764--1784, 1994.
- [176] J. Zhu. A low-diffusive and oscillation-free convection scheme. *Comm. Appl. Numer. Meth.*, 7:225--232, 1991.
- [177] J. Zhu. On the higher-order bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 98:345--360, 1992.
- [178] J. Zhu and M.A. Leschziner. A local oscillation-damping algorithm for higher order convection schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 67:355--366, 1988.
- [179] J. Zhu and W. Rodi. A low dispersion and bounded convection scheme. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92:87--96, 1991.
- [180] J. Zhu and W. Rodi. Zonal finite-volume computations of incompressible flows. *Comput. Fluids*, 20:411--420, 1991.
- [181] J. Zhu and W. Rodi. Computation of axisymmetric confined jets in a diffuser. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 14:241--251, 1992.
- [182] M. Zijlema. Finite volume discretization of the $k-\varepsilon$ turbulence model in general coordinates. Report 93-90, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1993.
- [183] M. Zijlema. Numerical study of the 2D turbulent flow over a sand dune using standard and RNG $k-\varepsilon$ models and non-orthogonal staggered grids. Report 94-59, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1994.
- [184] M. Zijlema. On the construction of a third-order accurate TVD scheme using Leonard's normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains. Report 94-104, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1994.
- [185] M. Zijlema. On the sensitivity of the results to the numerical approximation of turbulence convective transport in a $k-\varepsilon$ turbulence model. Report 95-06, Delft University of

Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1995.

[186] M. Zijlema. On the construction of a third-order accurate monotone convection scheme with application to turbulent flows in general domains. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 22:619--641, 1996.

[187] M. Zijlema, C.G.M. Kassels, A. Segal, and P. Wesseling. Computation of turbulent flows in boundary-fitted coordinates. In R.W.J. Kouffeld and C.J. Hoogendoorn, editors, *Annual Report of J.M. Burgers Centre for Fluid Mechanics*, pages 20--21, Delft, 1994.

[188] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Finite volume computation of 2D incompressible turbulent flows in general coordinates on staggered grids. Report 94-24, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1994.

[189] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Finite volume computation of incompressible turbulent flows in general coordinates on staggered grids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 20:621--640, 1995.

[190] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Invariant discretization of the $k-\varepsilon$ model in general co-ordinates for prediction of turbulent flow in complicated geometries. *Comput. Fluids*, 24:209--225, 1995.

Université SAAD DAHLEB de Blida

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
 Département d'Aéronautique



MEMOIRE DE MAGISTER
 EN
 AERONAUTIQUE

Présentée par :

M^r Yous Imad



Thème :

Simulation des Grandes Echelles de l'Ecoulement
 Instationnaire Turbulent autour d'un Profil d'Aile
 Oscillant en Configuration de Décrochage

Soutenue le :

DEVANT LE JURY D'EXAMEN :

| | | |
|--------------|----------------------------------|--|
| Président : | M^r S. BOUKRAA | Maître de conférences, université de Blida |
| Rapporteur : | M^r T. REZZOUG | Maître de conférences, université de Blida |
| Examineurs : | M^r L. AMTOUT | Chargé de cours, université de Blida |
| | M^r M. BOUNEDER | Chargé de cours, université de Blida |
| | M^r R. HAUI | Maître de conférences, USTHB |

Résumé

Cette thèse porte sur la simulation numérique d'un écoulement externe incompressible, instationnaire et turbulent à l'aide de la Simulation des Grandes Echelles (SGE). Dans cette approche, les grandes échelles énergétiques et instationnaires de l'écoulement sont calculées, tandis que les petites échelles sont modélisées.

L'objectif de ce travail, est d'analyser les potentialités de la SGE pour le calcul d'écoulements périodiques en géométrie 3D en vue d'applications aux pales de rotors d'hélicoptères.

Le cas d'étude retenu pour la validation de la méthodologie est l'écoulement autour d'un profil d'aile Naca0012 en configurations de décrochage statique et dynamique pour lequel il existe des résultats statistiques et expérimentaux. L'écoulement présente des phénomènes physiques complexes caractérisés par de large décollement, et de lâcher de tourbillons. La SGE est obtenue à partir d'un modèle de sous maille de Smagorinsky modifié près de la paroi. La discrétisation temporelle des équations écrites en vitesses contravariantes dans un système de coordonnées curvilignes est réalisée par un schéma à pas fractionnaires implicite d'ordre deux tandis que l'intégration spatiale suivant une cellule décalée est accomplie par la technique des volumes finis.

La SGE a permis d'obtenir des informations instationnaires sur l'écoulement, et de mettre en évidence la formation et le lâcher de tourbillons autour du profil d'aile. La solution instationnaire est différente de la solution stationnaire RANS obtenue avec une modélisation statistique classique et montre la déstabilisation du décollement au cours du temps. Les résultats de la SGE obtenus sur la pression, les profils de la vitesse moyenne et les tensions de Reynolds sont discutées et comparées aux résultats expérimentaux et statistiques, obtenus avec le modèle $k-\varepsilon$.

Abstract

A realistic 3D external, unsteady, turbulent and incompressible flow was simulated using the Large Eddy Simulation (LES).

The selected test-case was a 3D airfoil. Indeed there were available experimental results and numerical simulations using RANS approach that could be used for comparisons with our simulation. Also this configuration contained the main physical phenomena encountered around rotors of helicopter.

The main aerofoil geometry examined is the Naca0012. Of particular interest is the prediction of maximum lift and stall on aerofoil, leading to a large separation and vortex shedding. In the LES approach, the large unsteady and energetic scales are calculated. The contribution of the unresolved small scales is modelled using the Smagorinsky modified model. Time integration of the curvilinear equations in contravariant velocity form is performed by a second order implicit fractional step method. The spatial discretization is obtained by a finite volume schema on a structured staggered grid.

The LES of such flow has given some interesting unsteady results. The temporal evolution of the turbulent eddies, convected by the mean flow, has been observed. The large separation became unstable and the vortex shedding were captured by the LES. The methodology was then validated by comparing our results on the pressure, the mean velocity and the Reynolds stress tensor to the numerical results given by the statistical modelisation of $k-\varepsilon$.

خلاصة

إن هذه الأطروحة تحمل على تصوير عددي لتدفق خارجي مائع غير ضغوطوي, ورش في حالة غير مستقرة عن طريق حسابات عددية للجسيمات الكبيرة (ت ج ك). و من أجل هذا المبتغى, نقوم بمتابعة تلك الجسيمات الكبيرة الطاقية والغير مستقرة للتدفق بحساب رقمي, فيما نكتفي بتمثيل حركية الجسيمات الأصغر منها بنموذج.

هدف هذا العمل هو تحليل قدرة طريقة تصوير الجسيمات الكبيرة على حساب سيلان دوري في هندسة ثلاثية الأبعاد من أجل تطبيقها على مروحة دوار.

الحالة المدروسة لتسليم بهذه المنهجية هي التدفق المائع حول مقطع جانبي لجناح Naca0012 في شكل إنزال اعتدالي و حركي والذي تتواجد له نتائج إحصائية وتجريبية. يظهر هذا التدفق مظاهر فيزيائية معقدة تتميز بإنفكاك عريض و إطلاق لدوامات.

حصلنا طريقة (ت ج ك) بنموذج للحلقة السفلية معدل قرب الجدران, لسماغورنسكي. يعتمد التقدير الوقتي لجملة المعادلات المكتوبة في شكل السرعة المتباينة ضمن نظام إحداثيات منحنية الأضلاع على مخططا ذات خطوات كسرية ضمنية برتبتين في حين كان التكامل الامتدادي على خلايا غير وضعية بطريقة الأحجام المتناهية.

سمحت لنا طريقة (ت ج ك) بالحصول على معلومات غير مستقرة حول التدفق تبين فيه تشكل و إطلاق لدوامات حول المقطع جانبي للجناح. الحل الغير مستقر مختلف عن الحل المستقر لطريقة (RANS) ذات النموذج الإحصائي حيث يتبين تذبذب الإنفكاك مع مجرى الوقت. وأخيرا تحدثنا و قارنا نتائج (ت ج ك) للضغط, مقاطع السرعة الوسطى و توترات رينولدس مع نتائج تجريبية وإحصائية حصلت بنموذج $k-\varepsilon$

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force de mener à bien ce travail

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur T. REZZOUG, maître de conférences et directeur de la post graduation au département d'aéronautique de l'université de Blida pour avoir accepté de diriger mes recherches et à qui j'exprime ici ma profonde gratitude pour m'avoir orienté vers le monde enthousiasmant de la mécanique des fluides numériques.

Mes remerciements vont à Monsieur S. BOUKRAA, maître de conférences et président du conseil scientifique au département d'aéronautique à l'université de Blida pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer comme président à mon jury de thèse.

Pour avoir accepté de juger ce travail et participer à mon jury de thèse, je remercie Monsieur R. HAOUI, maître de conférence à l'université des sciences et technologies Houari Boumediene.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur M. BOUNEDER, chargé de cours au département d'aéronautique de l'université de Blida, pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à mon jury de thèse.

Je remercie Monsieur L. AMTOUT chargé de cours au département d'aéronautique à l'université de Blida, pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à mon jury de thèse

Ma gratitude s'adresse également à toutes les personnes qui ont participés de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à:

Mes très chers parents, pour leur soutien indéfectible

Mes frères, et mes belles sœurs

Mes neveux et nièces

Mes proches

Mes amis

Table des matières

| | Page |
|--------------------------|------|
| Résumé | I |
| Remerciements..... | III |
| Dédicaces..... | IV |
| Table des matières | V |
| Nomenclature | VIII |
| Liste des figures | X |

Chapitre I Introduction

| | |
|---|---|
| I.1 Motivations et objectifs | 1 |
| I.2 Les différentes approches de la turbulence | 3 |
| I.2.1 Méthode statistique | 3 |
| I.2.2 Approche directe : simulation numérique directe (SND) et simulation des grandes échelles turbulentes (SGE)..... | 4 |
| I.3 Les méthodes de résolutions numériques d'écoulement | 6 |
| I.4 Domaine d'étude de la thèse | 7 |

Chapitre II Formulation du problème

| | |
|---|----|
| II.1 Caractéristique du problème..... | 9 |
| II.2 Le mouvement cyclique imposé au profil d'aile..... | 10 |
| II.3 Problème continu..... | 11 |
| II.3.1 Hypothèses et équations de base..... | 11 |
| II.3.2 Changement de repère..... | 12 |
| II.3.3 Formulation adimensionnée..... | 13 |
| II.4 Principes d'analyse tensorielle..... | 14 |
| II.4.1 Transformation des coordonnées..... | 14 |
| II.4.2 Paramètres géométriques..... | 16 |
| II.4.2 Calcul tensoriel..... | 18 |

Chapitre III Simulation des grandes échelles turbulentes

| | |
|--|----|
| III.1 Fondement de la méthode..... | 21 |
| III.2 Isotropie locale..... | 22 |
| III.3 Notions de filtrage et propriétés..... | 24 |
| III.3.1 Définition..... | 24 |
| III.3.1 Propriétés des filtres..... | 24 |
| III.4 Les équations de Navier-Stokes filtrées..... | 26 |
| III.5 Modélisations de sous-maille..... | 27 |
| III.5.1 Le modèle de sous-maille de Smagorinsky..... | 28 |
| III.5.2 Le modèle dynamique de sous-maille..... | 29 |
| III.5.3 Le modèle de sous-maille à équations de transport..... | 30 |

| | |
|---|----|
| III.6 Equations du mouvement des grandes structures turbulentes en Coordonnées généralisées..... | 33 |
| III.7 Les Problèmes de simulation des régions près de la paroi..... | 35 |
| III.8 Nouvelles directions de recherche, problèmes ouverts..... | 35 |

Chapitre IV

Résolution numérique

| | |
|--|----|
| IV.1 Analyse des travaux antérieurs de discrétisation en coordonnées curvilignes..... | 36 |
| IV.2. Génération de maillage et paramètres géométriques..... | 38 |
| IV.3 Discrétisation invariante en volumes finis des équations gouvernant le mouvement..... | 40 |
| IV.3.1 L'équation de continuité..... | 41 |
| IV.3.2 Les équations de quantité de mouvement..... | 42 |
| IV.3.3 L'équation du transport..... | 43 |
| IV.3.4 Le terme de production dans le modèle à deux équations..... | 44 |
| IV.4 Discrétisation Invariante des équations gouvernant le mouvement sur des maillages non-réguliers..... | 45 |
| IV.4.1 L'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement..... | 46 |
| IV.4.2 L'équation du transport..... | 51 |
| IV.4.3 Le terme de production dans les modèles à deux équations..... | 52 |
| IV.5 Approximation des termes de convection et du flux de diffusion..... | 56 |
| IV.5.1 Les propriétés des schémas d'approximations de flux..... | 56 |
| IV.5.2 Méthodes d'approximation pour les flux convectives..... | 58 |
| IV.5.2.1 Schéma central, décentré en amont du premier ordre et Hybride.... | 58 |
| IV.5.2.2 Schémas décentrés en amont d'ordre supérieure en Précision..... | 60 |
| IV.5.3 Approximation des flux de diffusion..... | 60 |
| IV.6 Conditions aux limites, intégration temporelle et algorithme de résolution..... | 64 |
| IV.6.1 Conditions aux limites..... | 64 |
| IV.6.1.1 Les équations de quantité de mouvement..... | 65 |
| IV.6.1.2 l'équation du transport..... | 69 |
| IV.6.1.3 Fonctions de paroi..... | 71 |
| IV.6.2 Intégration temporelle et les techniques de correction de la pression..... | 74 |
| IV.6.3 traitement du terme source de la turbulence..... | 76 |
| IV.6.4 L'algorithme de résolution..... | 77 |

Chapitre V

Application et résultats numériques

| | |
|---|----|
| V.1 Mise en œuvre de la SGE sur le cas test..... | 81 |
| V.1.1 Géométrie et maillage de l'écoulement autour du profil d'aile et ses caractéristiques..... | 81 |
| V.1.2 Conditions aux limites..... | 84 |
| V.1.3 Conditions initiales..... | 85 |
| V.2 Résultats instationnaires de la SGE..... | 90 |
| V.2.1 Champ instantané autour du profil..... | 90 |
| V.2.1.1 Evolution temporelle des champs..... | 91 |
| V.2.2 Spectres temporels..... | 94 |

| | |
|--|-----|
| V.3 Résultats moyennés de la SGE | 98 |
| V.3.1 Résultats sur la distribution de pression | 98 |
| V.3.2 Résultats sur les profils de vitesse moyennes..... | 99 |
| V.3.2 Résultats sur les profils des tensions de Reynolds | 101 |
| V.4 Résultats de l'écoulement autour du profil en mouvement oscillatoire de tangage..... | 104 |

| |
|---|
| <p>Chapitre VI Conclusions et perspectives</p> |
|---|

| |
|--|
| <p>Annexe A Analyse mathématique des équations de Navier-Stokes</p> |
|--|

| | |
|---|-----|
| A.1 Existence, unicité des solutions..... | 112 |
|---|-----|

| |
|---|
| <p>Annexe B Méthodes de Krylov</p> |
|---|

| | |
|----------------------------|-----|
| B.1 Méthode de Krylov..... | 115 |
| B.1.1 GMRES | 115 |

Bibliographie

Nomenclature

| | |
|---------------------------------------|--|
| A | : allongement de l'aile |
| $a_{(\alpha)}$ | : vecteurs de base covariants |
| $a^{(\alpha)}$ | : vecteurs de base contravariants |
| b | : envergure de l'aile |
| C | : corde du profil |
| C_k | : constante de Kolmogorov |
| C_s | : coefficient de Smagorinsky |
| C_p | : coefficient de pression |
| C_x | : coefficient de traînée |
| C_z | : coefficient de portance |
| E_3 | : espace euclidien tridimensionnel |
| $E(k)$ | : spectre d'énergie cinétique dans l'espace de Fourier |
| f | : fréquence réduite |
| G | : fonction filtre |
| $g_{\alpha\beta}$ | : tenseur métrique covariant |
| $g^{\alpha\beta}$ | : tenseur métrique contravariant |
| g_{α}^{β} | : tenseur métrique mixte |
| J | : le Jacobien de la transformation $x=x(\zeta)$ |
| l | : échelle caractéristique de sous-maille |
| k_s | : l'énergie cinétique de turbulence de sous-maille |
| L_{ij} | : tensions de Léonard |
| N_x | : nombre de points dans la direction longitudinale |
| N_y | : nombre de points dans la direction normale aux parois |
| N_z | : nombre de points dans la direction transversale |
| p | : la pression |
| $P = p + \rho \frac{(\Omega r)^2}{2}$ | : la pression modifiée |
| P_{∞} | : la pression à l'infini amont |
| P_r | : nombre de Prandtl |
| P_{rt} | : nombre de Prandtl turbulent |
| \vec{R} | : le vecteur position d'une particule fluide par rapport au repère absolue |
| \vec{r} | : le vecteur position d'une particule dans le nouveau repère. |
| Re | : nombre de Reynolds |
| R_{sgs} | : nombre de Reynolds de sous-maille |
| R_{ij} | : tensions de Reynolds de sous-maille |
| S | : surface de l'aile |
| S_{ij} | : tenseur des déformations du champ filtré |
| Str | : nombre de Strouhal |
| t | : temps |
| U | : vitesse parallèle à l'infini amont |
| u_i | : les composantes de la vitesse |
| U^{α} | : vitesse contravariante dans un système de coordonnées curvilignes |

| | |
|--|--|
| U_α | : vitesse covariante dans un système de coordonnées curvilignes |
| u_τ | : la vitesse de frottement |
| $\overline{U_c}$ | : vitesse de translation du profil |
| $\langle u_i u_j \rangle$ | : tensions de Reynolds |
| V^α | : flux de volume contravariants |
| x_i | : le système de coordonnées cartésiennes |
| ρ | : la masse volumique du fluide |
| ρ_∞ | : la densité à l'infini amont |
| α_0 | : l'incidence métrique |
| ν | : la viscosité cinématique |
| ν_t | : viscosité de turbulence de sous-maille |
| $\overline{\Omega}$ | : vitesse de rotation du profil |
| ζ_i | : le système de coordonnées curvilignes. |
| δ_α^β | : le symbole de Kronecker, |
| $d\Omega$ | : L'élément différentiel du volume associé aux coordonnées curvilignes ζ |
| $\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$ | : les symboles de Christoffel |
| Δ | : la largeur du filtre |
| τ_{ij} | : tenseur de sous-maille |
| \mathcal{E} | : le taux de dissipation de l'énergie cinétique |

Autres symboles :

| | |
|-------------------------|--|
| $(\bar{\quad})$ | : opération de filtrage spatial |
| $\langle \quad \rangle$ | : moyenne spatiale et temporelle dans les directions homogènes |
| $(\quad)''$ | : partie fluctuante à grande échelle |
| $(\quad)'$ | : partie fluctuante de sous maille |

Indice :

| | |
|-----------|--------------------------------------|
| p | : indique la paroi |
| i, j, k | : compteur sur les nœuds du maillage |

Exposant :

| | |
|---|---|
| + | : indique l'adimensionnement des coordonnées de paroi |
|---|---|

Liste des Figures

| | page |
|---|------|
| Figure(1.1) :Boucles d’hystérésis du mouvement en tangage du profil Naca0012 (K.W.McAlister et W.J. Croskey 1982)..... | 2 |
| Figure(1.2) :Schéma des différents régimes de l’écoulement autour d’un profil d’aile..... | 3 |
| Figure(1.2) :Visualisation d’un écoulement de couche de mélange (Brown et Roshko 1974).. | 5 |
| Figure(2.1) :Les caractéristiques d’écoulement autour d’un profil d’aile | 9 |
| Figure(2.2) :Calage du profil face à l’écoulement uniforme..... | 10 |
| Figure(2.3) :Le système des coordonnées en rotation | 12 |
| Figure(2.4) :La représentation d’un vecteur dans deux systèmes de coordonnées..... | 15 |
| Figure(2.5) :Le domaine cartésien avec les coordonnées curvilignes et les vecteurs de base.. | 16 |
| Figure(3.1) :Schéma du spectre d’énergie turbulente..... | 23 |
| Figure(3.2) :Fonctions filtres typiques..... | 26 |
| Figure(4.1) :Une maille tridimensionnelle dans le domaine physique Ω , et son image dans le domaine G | 38 |
| Figure(4.2) :L’arrangement des inconnues dans une maille décalé 3D..... | 41 |
| Figure(4.3) :Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement V^1 en 2D..... | 43 |
| Figure (4.4) :Le maillage décalé bidimensionnel et le volume de contrôle $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ et son image $G_{i+\frac{1}{2},j}$ | 46 |
| Figure(4.5) :Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement $-u$ en 2D..... | 51 |
| Figure(4.6) :Le stencil de discrétisation pour les équations V^1 | 52 |
| Figure(4.7) : Le stencil de discrétisation de l’équation de transport..... | 54 |
| Figure(4.8) : Maillage décalé unidimensionnel avec les nœuds impliqués dans l’évaluation de ϕ sur la face $i+\frac{1}{2}$ | 58 |
| Figure(4.9) : Coordonnées obliques avec allongement horizontal..... | 62 |
| Figure(4.10) :Le stencil de discrétisation pour une équation de transport en 2D..... | 63 |
| Figure(4.11) : Calcul de la distance normale Y_p entre le nœud p et la surface limite..... | 73 |
| Figure(5.1) : Schéma de l’aile et des axes de coordonnées..... | 80 |
| Figure(5.2) : Maillage bidimensionnel autour du profil d’aile..... | 81 |
| Figure(5.3) : Vues perspectives du maillage tridimensionnel et ces limites autour du profil d’aile Naca0012 en forme C | 82 |
| Figure(5.4) : Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200$ et incidence= 0° | 84 |
| Figure(5.5) : Contours d’isopressions autour du profil $Re=200$ et incidence= 0° | 84 |
| Figure(5.6) : Distribution de la pression sur la paroi du profil..... | 85 |
| Figure(5.7) : Profils des vitesses longitudinales | 86 |
| Figure(5.8) : Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 0° | 86 |
| Figure(5.9) : Contours d’isopressions $Re=200000$ et incidence= 0° | 86 |
| Figure(5.10) : Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 0° | 86 |
| Figure(5.11) : Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 0° avec une discrétisation classique..... | 86 |
| Figure(5.12): Contours d’isopressions $Re=200000$ et incidence= 0° avec une discrétisation classique..... | 86 |
| Figure(5.13) : Distribution de la pression sur la paroi du profil obtenue par les deux méthodes de discrétisation..... | 87 |
| Figure(5.14):Contours d’isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 6° | 88 |
| Figure(5.15):Contours d’isopressions $Re=200000$ et incidence= 6° | 88 |
| Figure(5.16):Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 6° | 88 |
| Figure(5.16):Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 12° | 88 |

| | |
|---|-----|
| Figure(5.17):Contours d'isopressions $Re=200000$ et incidence= 12° | 88 |
| Figure(5.18):Contours d'isovitesse longitudinales $Re=200000$ et incidence= 12° | 88 |
| Figure(5.20): Isovaleurs de la vitesse longitudinales dans un plan $z=0.01$ et temps $T=0.04$.. | 90 |
| Figure(5.21): Isovaleurs de la vitesse longitudinales dans un plan $z=0.01$ et temps $T=6.0$ | 91 |
| Figure(5.21): Vecteur vitesse instantanée dans un plan $z=0.5$ et temps $T=6.0$ | 91 |
| Figure(5.23): L'évolution temporelle du champ instationnaire dans un plan fixe $z=1$ | 92 |
| Figure(5.24): Isovaleurs instantanée de u à $T=1.0$ | 94 |
| Figure(5.25): Isovaleurs instantanée de u à $T=3.5$ | 94 |
| Figure(5.26): Isovaleurs instantanée de u à $T=5.5$ | 94 |
| Figure(5.27): Echantillonnage de u au cours du temps..... | 95 |
| Figure(5.28): Echantillonnage de v au cours du temps..... | 95 |
| Figure(5.29): Echantillonnage de w au cours du temps..... | 95 |
| Figure(5.30): Spectre de u | 96 |
| Figure(5.40): Spectre de v | 96 |
| Figure(5.50): Spectre de w | 96 |
| Figure(5.63):Distribution de la pression sur la paroi du profil $Re=200000$ et incidence= 20° .. | 97 |
| Figure(5.64): La distribution de la pression selon un calcul direct et expérimental | 97 |
| Figure(5.65): Isovaleurs de pression moyenne..... | 97 |
| Figure(5.66): Vitesse longitudinale en $x=0.10C$ | 99 |
| Figure(5.67): Vitesse longitudinale en $x=0.15C$ | 99 |
| Figure(5.68): Vitesse longitudinale en $x=0.20C$ | 99 |
| Figure(5.69): Vitesse longitudinale en $x=0.40C$ | 99 |
| Figure(5.70): Vitesse longitudinale en $x=0.60C$ | 99 |
| Figure(5.71): Vitesse longitudinale en $x=1.00C$ | 99 |
| Figure(5.72): Vitesse normale en $x=0.10C$ | 99 |
| Figure(5.73): Vitesse normale en $x=0.15C$ | 99 |
| Figure(5.74): Vitesse normale en $x=0.20C$ | 99 |
| Figure(5.75): Vitesse normale en $x=0.40C$ | 99 |
| Figure(5.76): Vitesse normale en $x=0.60C$ | 99 |
| Figure(5.77): Vitesse normale en $x=1.00C$ | 99 |
| Figure(5.78): Tension de Reynolds normale longitudinale en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.79): Tension de Reynolds normale longitudinale en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.80): Tension de Reynolds normale longitudinale en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.81): Tension de Reynolds normale verticale en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.82): Tension de Reynolds normale verticale en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.83): Tension de Reynolds normale verticale en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.84): Tension de Reynolds croisée en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.85): Tension de Reynolds croisée en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.86): Tension de Reynolds croisée en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.87): Tension de Reynolds normale transversale en $x=0.10C$ | 101 |
| Figure(5.88): Tension de Reynolds normale transversale en $x=0.50C$ | 101 |
| Figure(5.89): Tension de Reynolds normale transversale en $x=0.90C$ | 101 |
| Figure(5.90): Boucles d'hystérésis du mouvement en tangage du profil Naca0012 | 104 |
| Figure(5.91): Champs de vitesse instantanés et lignes de courant du mouvement en tangage du profil Naca0012..... | 107 |

Chapitre I

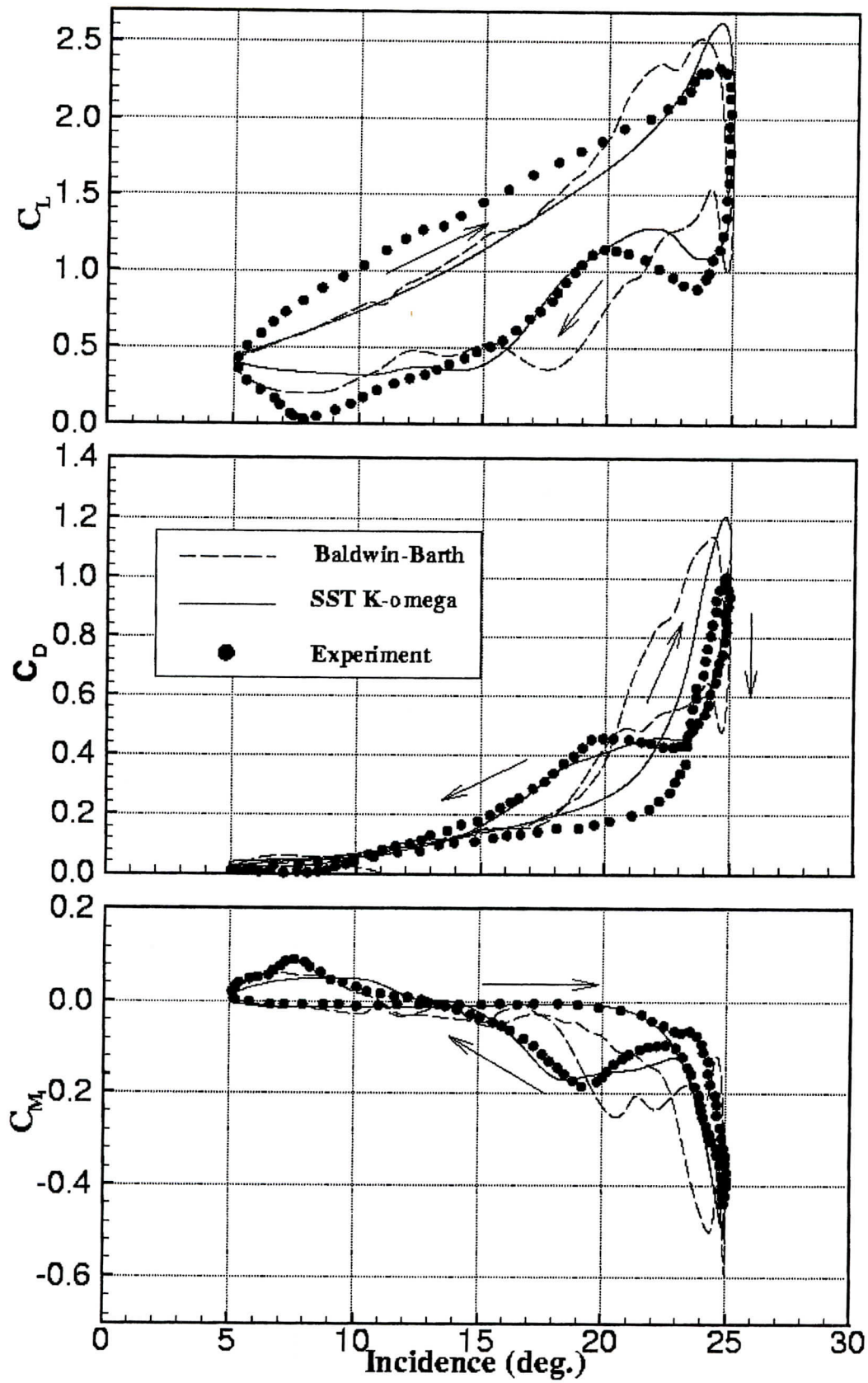
Introduction

I.1 Motivations et objectifs:

La détermination de l'écoulement autour d'une aile en mouvement cyclique a pris un regain d'intérêt depuis que l'on s'est aperçu de l'importance du décrochage dynamique pour l'amélioration des performances et de la durée de vie des rotors d'hélicoptères, des rotors d'éoliennes et des hydroptères subcavitants.

Ce problème, lié à l'instationnarité de l'écoulement est tout à fait général pour toute surface portante animée d'un mouvement cyclique dont l'amplitude ou l'incidence et la fréquence dépassent une certaine valeur. Il se traduit en particulier par un décollement et un recollement de la couche limite (Mc Croskey et Philippe, 1975), (j.j-Philippe, 1977). Au cours d'un mouvement de tangage par exemple, la portance du profil continue d'augmenter avec l'incidence au-delà de la valeur maximale de décrochage statique, il se forme alors un tourbillon au bord d'attaque qui se déplace en roulant sur le profil pendant la phase de décélération (décroissance d'incidence), la portance passe par un maximum lorsque le tourbillon est à mi-corde. Du fait des charges induites par le tourbillon lors de son déplacement, le moment piqueur augmente et atteint un maximum lorsque les tourbillons passent au bord de fuite. L'incidence continue de décroître et la couche limite finit par recoller, mais la portance ne retrouve sa valeur statique que pour de faibles incidences. Pour un mouvement cyclique, la portance présente ainsi une boucle d'hystérésis avec une partie supérieure à la portance statique et une autre plus faible. Le moment par rapport à l'axe passant par le quart de la corde présente une boucle en huit avec une augmentation significative du moment piqueur (voir Figure(1.1)). Cette description du phénomène en tangage pour un nombre de Reynolds de $2.5 \cdot 10^6$ peut présenter des caractéristiques légèrement différentes lorsque le nombre de Reynolds est plus faible. Par exemple pour un nombre de Reynolds de 10^4 les résultats nous montrent que le tourbillon du bord d'attaque peut être suivi d'un second à mi-corde. Dans tous les cas, il est certain que les variations de portance et de moment engendrent des vibrations, donc une fatigue de la structure de l'aile et du bruit pour l'environnement. Ces effets négatifs peuvent être compensés par une amélioration du rendement dans le cas de l'éolienne et on peut penser utiliser cet effet pour améliorer certains types de rotors. Il est donc important d'étudier ce phénomène.

L'objet du présent travail porte donc sur le développement d'une prévision numérique de l'écoulement turbulent autour d'une aile en mouvement périodique imposé capable de décrire le champ aérodynamique, ce qui représente un vrai challenge pour la mécanique des fluides numériques au vu de l'élévation du nombre de Reynolds et des différents régimes d'écoulements qui caractérise notre problème comme le montre la Figure(1.2). Au bord d'attaque, on remarque une zone de couche limite laminaire non décollé, l'épaisseur de cette couche y est très petite devant la corde et les pressions extérieures sont transmises directement à la paroi, une autre région de couche limite est alimentée par un courant de retour, qui s'ajoutant aux forts cisaillements au sein du fluide crée un écoulement rotationnel important ; sous l'effet d'un gradient de pression favorable qui accélère l'écoulement, ce courant de retour, prenant naissance au bord de fuite peut être soit laminaire, soit turbulent,



Figure(1.1) Boucles d'hystérésis du mouvement en tangage du profil NACA 0012
(K.W. Mc Alister et W.J. Croskey 1982)

suivant le nombre de Reynolds. Quand l'angle d'incidence augmente jusqu'à atteindre une valeur critique, ce décollement se transforme en un décrochage total de la couche limite sur l'extrados du profil. Un autre type de décollement apparaît au bord d'attaque des profils en incidence sous forme d'un bulbe local qui se produit après la pointe de survitesse située près du bord d'attaque. La couche limite est laminaire entre le point d'arrêt et le pic de survitesse. A l'aval de ce pic le gradient de pression crée une recompression qui fait décoller la couche limite localement ; deux phénomènes peuvent s'y produire :

- Une transition laminaire-turbulent avec le recollement de la couche limite.
- Un éclatement du bulbe pouvant entraîner un décrochage total de la couche limite sur l'extrados du profil. Ce deuxième cas apparaît surtout pour des faibles nombres de Reynolds (Bonnet et Gleyzes, 1983), (cousteix, 1988).

Un sillage naît de la rencontre des deux couches limites extrados et intrados du profil. Il représente le débit déficitaire de l'écoulement au bord de fuite. Ce sillage ainsi formé est caractérisé par d'importantes contraintes de cisaillement et de distribution d'intensité du vecteur tourbillon, s'atténuant au fur et à mesure que les particules fluides s'éloignent du profil.

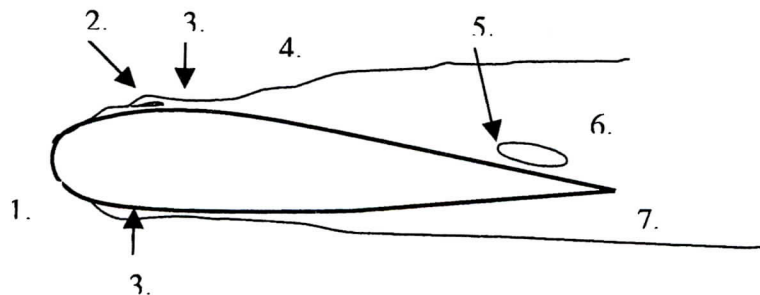


Figure (1.2) : schéma des différents régimes de l'écoulement autour d'un profil d'aile :
 1.couche limite laminaire, 2. décollement bulbe laminaire, 3. région de transition,
 4.couche limite turbulente, 5.point de décollement, 6. zone de décollement, 7.sillage

I.2 Les différentes approches de la turbulence :

Il n'existe pas une théorie générale explicative du phénomène de turbulence mais de nombreuses théories partielles et incomplètes. Parmi ces théories, certaines, si elles sont très rudimentaires et très limitées, n'en demeurent pas moins utiles à une approche industrielle, d'autres plus évoluées, exigent des développements mathématiques plus importants. Les approches sont donc nombreuses et diverses : la turbulence est une discipline en évolution constante qui s'enrichit sans cesse de matériaux nouveaux

I.2.1 Méthode statistique :

Une solution turbulente est toujours une solution compliquée non stationnaire des équations du mouvement, présentant des fluctuations irrégulières dans l'espace et dans le temps. Devant cet aspect désordonné des évolutions turbulentes et cette apparente complexité du phénomène l'attitude naturelle et la plus utilisée a été d'introduire des méthodes statistiques. Le hasard apparent des évolutions turbulentes a son origine dans les irrégularités des conditions initiales et des conditions aux limites mal déterminées dans leur détail et pour lesquelles une très petite variation bouleverse totalement la structure détaillée de l'écoulement. La méthode statistique

n'est donc pas justifiés par l'absence de causes mais par l'ignorance des causes surabondantes et difficilement accessibles.

La décomposition d'une grandeur caractéristique instantanée de l'écoulement turbulent en une partie macroscopique et une partie turbulente d'apparence aléatoire permet de développer un traitement statistique des équations de mouvement. Ce traitement appliqué aux équations de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement détaillé instantané du fluide, fait apparaître des termes inconnus supplémentaires qui sont interprétés comme des tensions turbulentes. Le fait de prendre la moyenne d'une équation instantanée conduit à une perte d'informations qu'il faudra réintroduire sous forme d'hypothèses physiques : C'est le problème de fermeture.

I.2.2 Approche directe : simulation numérique directe (SND) et Simulation des grandes échelles turbulentes (SGE)

La plupart des approches de la turbulence supposent que le mouvement instantané détaillé du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Le fluide est alors considéré comme un continuum par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue, on connaît donc les équations de la turbulence, et certaines recherches se sont orientées vers l'étude de "solutions turbulentes" des équations de Navier-Stokes (Agostini L. et Bass J., 1950-Bass J., 1961).

L'étude de tout écoulement turbulent pourrait donc se faire, du moins en principe, par résolution directe des équations de Navier-Stokes. En vue de la prédétermination numérique d'un écoulement turbulent la question se pose donc : pourquoi ne pas résoudre directement les équations de Navier-Stokes ? cette vue consisterait à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour une ou plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires et faire ensuite un traitement statistique sur les solutions obtenues. On montre toutefois que le nombre de points de discrétisation nécessaire pour représenter les plus petites échelles de la turbulence atteint des valeurs faramineuses.

Pour fixer les idées, essayons de préciser quantitativement les ressources informatiques nécessaires. La turbulence étant toujours tridimensionnelle et instationnaire, le nombre N^3 de points de maillage qui conditionne l'espace mémoire nécessaire sur ordinateur dans un domaine cubique sera proportionnel à δx étant le pas d'espace, et le temps de calcul sera proportionnel à $\frac{(N)^3}{\delta t}$ ou δt est le pas de temps.

De manière à représenter les plus petites échelles, δx et δt doivent être de l'ordre des échelles de Kolmogoroff.

Plus précisément :

$$\delta x = \frac{\eta}{4} \quad \text{avec} \quad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.1)$$

$$\text{et} \quad \delta t = \frac{\tau}{4} \quad \text{avec} \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

L'ordre de grandeur de ces échelles a été divisé par quatre afin de pouvoir représenter au moins très grossièrement une sinusoïde sur une période.

Soit $Re_t = \frac{l\sqrt{k}}{\nu}$ le nombre de Reynolds de la turbulence, où l est la dimension des gros

tourbillons énergétiques $l = \frac{(k)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$ et k l'énergie cinétique de la turbulence :

$$(N)^3 = \left(\frac{L}{\delta x}\right)^3 \approx 64 \left(\frac{l}{\eta}\right)^3 \approx 64 \text{Re}^{\frac{9}{4}} \quad (1.3)$$

On a admis que la dimension géométrique L caractéristique de l'écoulement était de l'ordre de l .

Considérons par exemple une section de l'écoulement autour d'un cylindre, si l'on admet $\text{Re}_r \approx \frac{\text{Re}}{10}$ où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement $\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$ on trouve pour un $\text{Re} = 80000$ et $N^3 = 4.10^{10}$. On montrerait de même que le temps de calcul est proportionnel à $\text{Re}^{\frac{11}{4}}$.

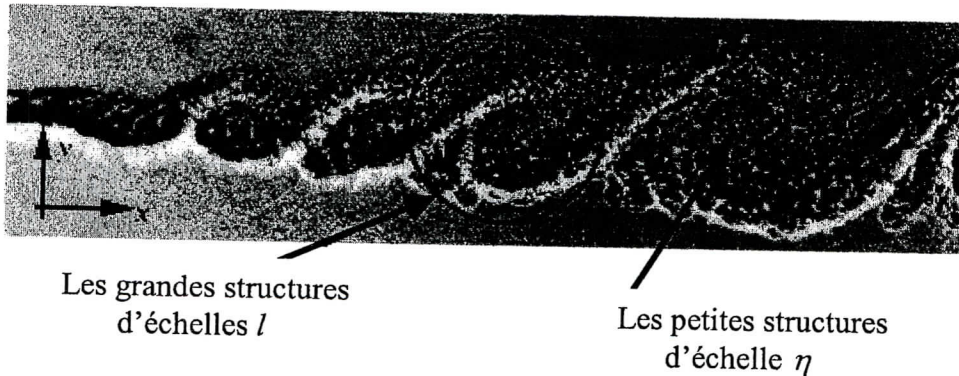


Figure (1-2) : Visualisation d'un écoulement de couche de mélange (Brown et Roshko 1974)

Cette approche directe nécessite de puissants moyens informatiques, elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés. L'attaque directe des équations de Navier-Stokes en régime turbulent reste donc réservée à des études fondamentales de recherche en turbulence (Orszag et Patterson, 1972 ; Orszag et Pao, 1974), et n'est pas abordable pour la prévision numérique d'écoulements dans la pratique industrielle, tout au moins dans un futur prévisible.

Il existe toutefois une technique de calcul intermédiaire entre le calcul direct et l'approche statistique. La méthode consiste à calculer l'écoulement à partir des équations de Navier-Stokes sur un maillage plus lâche et à modéliser les mouvements d'échelles inférieures aux dimensions de la maille. Il s'agit donc d'une simulation numérique des grosses structures turbulentes (Large Eddy Simulation) justement celles qui seraient le plus difficile à modéliser. Le but est donc de simuler par un calcul tridimensionnel et instationnaire des réalisations d'écoulements turbulents qui fournissent une vision et une description détaillée des structures générées et leur évolution. Les diverses méthodes de simulation sont utiles pour des études approfondies d'écoulement turbulent car elles permettent de générer le champ fluctuant à grande échelle qui peut être analysé par un post-traitement statistique tout comme le fait l'expérimentateur sur des mesures de laboratoire. Une autre application est l'étude d'écoulement pour lesquels les modèles en un point tombe en défaut ou bien ne peuvent pas donner l'information recherchée, c'est le cas des écoulements périodiques turbulents autour de corps solides, considérés comme des écoulements complexes ou pathologiques présentent des mouvements à grande échelle fortement instationnaires ou irréguliers. Les macro simulations peuvent être alors utilisées pour fournir des informations utiles à la mise au point de modèles plus simples, en particulier sur des quantités non accessibles aux mesures.

I.3 Les méthodes de résolutions numériques d'écoulement :

Au cours des dernières décennies, l'industrie aéronautique a fourni un effort particulier pour améliorer les méthodes numériques employées en mécanique des fluides pour résoudre les équations de Navier-Stokes, car les exigences en terme de précision et de réduction des temps de calcul augmentent, alors que les problèmes physiques abordés deviennent plus complexes.

En particulier, la nécessité d'améliorer les outils de prédiction des écoulements turbulents a entraîné le développement des méthodes numériques plus précises basées sur la simulation des grandes échelles (SGE) ou sur la simulation numérique directe (SND), et d'autres pour les modélisations en un point.

Dans le cas des simulations directes ou de simulation des grandes structures turbulentes, des méthodes de grande précision sont nécessaires, elles doivent aussi posséder de bonnes propriétés de conservation (quantité de mouvement, énergie...) et un bon comportement sur des temps d'intégration importants.

La SND, qui simule toutes les échelles de l'écoulement, nécessite, d'une part, des temps d'intégration suffisamment longs pour garantir l'obtention d'un champ moyen convergé, et d'autre part, une discrétisation des termes convectifs assez précise pour ne pas détériorer la représentation des structures de plus petites échelles. En conséquence, cette approche au succès grandissant se montre particulièrement sensible à l'efficacité et à la précision de la méthode numérique servant à intégrer les équations.

Si les schémas numériques habituellement employés dans les codes de calcul d'écoulements compressibles se comportent de manière plutôt satisfaisante face aux contraintes de la SND pour les écoulements en régimes transsonique ou supersonique, cette propriété n'est plus vérifiée quand l'écoulement s'effectue à des très faibles valeurs du nombre de Mach. En effet, développées initialement pour la simulation des écoulements à grande vitesse, les méthodes numériques deviennent inadaptées en termes de précision et d'efficacité quand $M_\infty \leq 0.2$.

Les techniques privilégiées qui permettent la prédétermination numérique d'écoulements sont les méthodes de volumes finis, de différences finies ou d'éléments finis. Les méthodes de volumes finis en particulier ont été largement utilisées du fait de leur robustesse pour traiter des équations avec termes sources complexes et des propriétés de conservation globale des schémas utilisés.

Les méthodes de discrétisation permettent de remplacer les équations continues aux dérivées partielles par des équations numériques. Parmi les plus anciennes, les méthodes de différences finies sont généralement basées sur l'approximation d'une fonction par son développement de Taylor autour d'un point. Des approximations plus précises sont obtenues soit en augmentant le nombre de point dans l'expression des dérivées, soit en utilisant des relations implicites (schémas hermitiens). Les schémas d'approximations décentrés sont généralement d'ordre inférieur mais peuvent posséder des propriétés stabilisatrices (schémas amont). Ils présentent néanmoins l'inconvénient d'introduire une fausse diffusion d'origine numérique qui devra être contrôlée si l'on désire que l'erreur introduite reste limité.

Les schémas d'intégration temporelle font intervenir généralement deux ou trois niveaux, les schémas implicites sont généralement plus stables que les schémas explicites. Citons aussi les schémas prédicteurs-correcteur. Dans le cas d'opérateurs différentiels complexes la méthode des pas fractionnaires permet de discrétiser successivement les n opérateurs sur une fraction $\frac{\delta t}{n}$ du pas de temps. Une application particulière importante des pas fractionnaires est faite dans les schémas de directions alternées (ADI) utilisée pour résoudre les équations de convection-diffusion à plusieurs dimensions.

Le calcul d'écoulements en géométrie complexes peut être abordé soit par les méthodes d'éléments finis, soit par la méthode de volumes finis sur des maillages curvilignes (Amsden A.A et Hirt C.W.,1973,- Thompson J.F. et al.,1974). Les méthodes de volumes finis sont basées sur le concept d'intégration des équations sur une cellule de calcul. Elles sont souvent d'ordre peu élevé (ordre un ou deux) mais les schémas utilisés sont choisis de façon à fournir des approximations physiquement réalistes même sur des maillages très lâches (Gosman A.D. et al.,1969-1977, -Patankar S.V.,1980). Remarquons que cette condition n'est pas forcément réalisée dans les méthodes de différences finies même d'ordre élevé : une méthode de différences finies réputée de haute précision peut devenir médiocre ou même inutilisable sur un maillage trop grossier. Divers algorithmes spécifiques à la résolution des équations du mouvement en variables primitives ont été développés. En écoulement incompressible, la principale difficulté réside dans le couplage vitesse-pression à partir de l'équation de continuité. Une des méthodes les plus anciennes pour les écoulements stationnaires est la méthode de compressibilité artificielle qui introduit une équation de pression avec évolution fictive. Les méthodes de projection ainsi que les méthodes MAC (Welch J.E. et al.,1966), SMAC (Amsden A.A. et Harlow F.H., 1970) et leurs dérivés utilisent une équation de poisson pour la pression et un maillage décalé pour les composantes de la vitesse et s'appliquent en situation instationnaire.

Dans le présent travail on a privilégié l'utilisation de la technique des volumes finis pour sa grande flexibilité géométrique renforcée par une intégration appliquée à un maillage structuré générer suivant des coordonnées généralisées liées à la forme de l'obstacle étudié.

L'utilisation des coordonnées curvilignes complique tant soit peu la formulation des équations de mouvement qui nécessite alors l'utilisation de dérivées covariantes et de tenseurs métriques, introduisant ainsi une source d'instabilité et de dissipation numérique lorsque le maillage utilisé n'est pas orthogonal, le choix des variables dépendantes est un aspect important influant sur l'efficacité de la méthode de résolution du problème, la difficulté associée au calcul de la pression peut être éliminée en introduisant le vecteur-tourbillon, toute fois cette formulation diminue sensiblement l'ordre des équations gouvernant la simulation. Les variables primitives nous paraissent alors comme le choix de variables dépendantes le plus général pour un calcul d'écoulement tridimensionnel.

Notre méthode utilise une marche en temps du type pas fractionnaires. Cette technique a pour but de découpler les effets de diffusion visqueuse des effets de l'incompressibilité. Il s'agit d'approcher la solution des équations de Navier-Stokes avec deux séries d'approximations de la vitesse (vitesses prédites et projetées) et une série d'approximations de la pression. La vitesse prédite est obtenue par la résolution d'un problème de diffusion. Celle-ci n'étant pas à divergence nulle, elle est corrigée au moyen d'une projection sur l'espace des vitesses à divergence nulle. L'emploi de maillage décalé est couramment utilisé pour les calculs d'écoulements incompressibles, car il facilite le couplage entre les variables dépendantes et prévient le comportement oscillatoire de la pression. L'extension de cette approche au système de coordonnées curvilignes nécessite l'adoption des vitesses contravariantes comme variables dépendantes (Shyy W. et al.,1985) soutenant ainsi la conservation de la masse dans chaque cellule de discrétisation et favorisant la convergence du processus de résolution de l'équation de Poisson.

I.4 Domaine d'étude de la thèse :

Parmi les voies possibles pour la simulation numérique des écoulements instationnaires turbulents, celle basée sur la simulation des grosses structures avec une modélisation des petites échelles virtuelles semble-la mieux adaptée. En effet, à la différence des modèles de moyenne temporelle de Reynolds, la modélisation par sous maille se base sur le filtrage spatial et les modèles servent à reproduire les effets des structures non captées par la discrétisation spatiale. Cette technique est utilisée jusqu'à maintenant avec un certain succès dans des configurations géométriques peu complexes. L'objet de cette recherche est donc d'appliquer cette technique aux cas d'écoulements externes décollés autour d'obstacles à géométrie relativement complexe comme le cas des profils d'aile. Les maillages utilisés pour traiter cette classe d'écoulements sont en général des maillages curvilignes.

Pour atteindre ces objectifs on doit résoudre plusieurs difficultés qui sont liées à la modélisation des effets des petites échelles, aux problèmes d'intégrations temporelles à long terme et à la validité des approximations des conditions aux limites ouvertes aux grands pas de temps. Plusieurs schémas temporels et de types de conditions aux limites ouvertes ont été analysés par expériences numériques. En ce qui concerne les modèles de sous maille, on se propose d'utiliser les modèles de Smagorinsky et a équations de transport. La méthode de résolution numérique est efficace et précise d'ordre deux employant des schémas de discrétisation en volumes finis consistant sur un maillage de calcul décalé suivant une formulation en coordonnées généralisées tridimensionnelle.

Le plan proposé pour la présentation du travail réalisé est le suivant :

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire nous reprenons en détail le cadre général de l'étude en présentant la configuration de l'écoulement périodique généré autour d'un profil d'aile du type Naca0012, ainsi que les équations de base nécessaire à la formulation du problème. Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthode de Simulation des Grandes Echelles Turbulentes. On expose d'abord le principe et les objectifs de la méthode et on introduit le concept de cascade d'énergie. Nous présentons ensuite les modèles de turbulence classiques, basés sur le concept de viscosité turbulente, modèles utilisés pour la fermeture des équations de Navier-Stokes filtrées. Les recherches actuelles dans le domaine de la SGE sont orientées vers la définition et la validation de nouveaux modèles de fermeture pour ces équations. La quatrième chapitre est consacrée aux méthodes numériques employées pour la résolution numérique des équations formulées précédemment. Nous présentons ensuite les résultats instationnaires obtenus grâce à la SGE avant de comparer les quantités moyennes aux résultats statistiques dans l'optique de valider la démarche utilisée.

En fin, des conclusions sur les résultats obtenus et les perspectives que nous pouvons envisager dans ce domaine de recherche sont présentées.

Chapitre II

Formulation du problème

Nous avons décrit dans le premier chapitre les phénomènes physiques rencontrés autour des pales de rotors. Dans cette étude nous nous limitons à l'étude de la modélisation des phénomènes instationnaires hors régime nominal et à la modélisation de la turbulence pour le calcul des grandes échelles instationnaires énergétiques. Dans cette partie nous discuterons des hypothèses et caractéristiques du problème ainsi que de sa mise en équation après la description du cas teste de profil d'aile Naca0012 dans différentes configurations d'écoulements.

II.1 Caractéristique du problème :

Considérons l'écoulement bidimensionnel instationnaire se développant autour d'un profil d'aile en mouvement cyclique.

Un corps solide et mince (l'aile) est placé dans un écoulement homogène et parallèle de vitesse U_∞ ; la densité est ρ_∞ , la pression P_∞ , et dont les propriétés internes, sont également connues. L'écoulement autour de l'obstacle engendrera une certaine distribution de pression et de frottement (ou cisaillement) le long de la surface du corps. Nous voulons déterminer ces distributions de pression et de frottement en fonction de la forme du corps, de sa position face à l'écoulement non perturbé et des valeurs des paramètres U, ρ, P , puisqu'elles permettent de calculer les composantes de la force F qui agissent sur le corps, à savoir la traînée F_x , et la portance F_y , parallèle et normale à l'écoulement homogène et non perturbé.

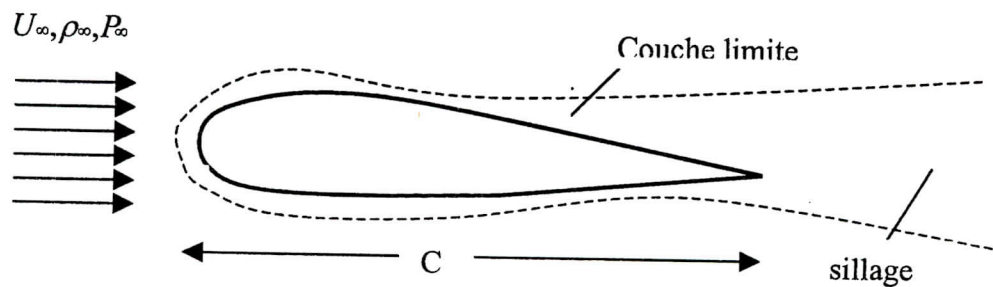


Figure (2.1) Les caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile

En tout premier lieu nous nous proposons, pour étudier la structure de l'écoulement turbulent complètement développé, de décrire brièvement quelques propriétés quantitatives basées sur des observations expérimentales.

En général, l'écoulement turbulent peut être caractéristique par les propriétés suivantes :

- L'écoulement est instationnaire.
- Le vecteur vitesse en un point varie de façon aléatoire en direction et en module.
- L'écoulement contient un grand nombre de tourbillons de taille très variée.

L'interaction entre ces tourbillons peut être décrite par le mouvement très complexe de fils tourbillonnaires. Ceux-ci sont enchevêtrés, transportés par l'écoulement turbulent et sont soumis à des étirements et des flexions locales. Ils sont ainsi à la base des fluctuations aléatoires du vecteur vitesse, pour un nombre de Reynolds élevé, basé sur la grandeur et le mouvement des grands tourbillons.

Ces hypothèses constituent une bonne approximation des conditions réelles de l'écoulement : le fluide, plus particulièrement un gaz, est considéré comme homogène, s'il contient peu de particules solides ou liquides susceptibles de modifier ses propriétés générales. Cette condition est donc assez facile à satisfaire. Par contre la condition d'incompressibilité peut être plus restrictive en imposant un nombre de Mach beaucoup plus petit que un. Cependant l'application de cette hypothèse peut être faite jusqu'à des vitesses du fluide assez élevées.

La bidimensionnalité de l'écoulement du fluide est assurée pour une section d'aile assez loin des extrémités afin de négliger les effets de bord il faut aussi que l'envergure de l'aile soit grande par rapport à la corde du profil (ou aile de grand allongement ; $A=b^2/S$ avec b envergure de l'aile et S surface de l'aile).

Les écoulements instationnaires sont engendrés par les mouvements cycliques du profil suivant une direction déterminée ; tamis, pilonnement, tangage.

II.2 Le mouvement cyclique imposé au profil d'aile :

Les écoulements instationnaires considérés sont engendrés par les mouvements périodiques du profil suivant une direction déterminée : tamis (parallèle à U), pilonnement (perpendiculaire à U), oblique (n'importe quelle direction) ou en oscillation d'incidence : tangage (oscillation par rapport au quart de la corde du profil).

Dans le cas le plus général de l'oscillation oblique le profil placé à l'incidence métrique α_0 est animé d'un mouvement oscillatoire suivant une direction x_δ faisant un angle δ par rapport à la direction de l'écoulement amont U :

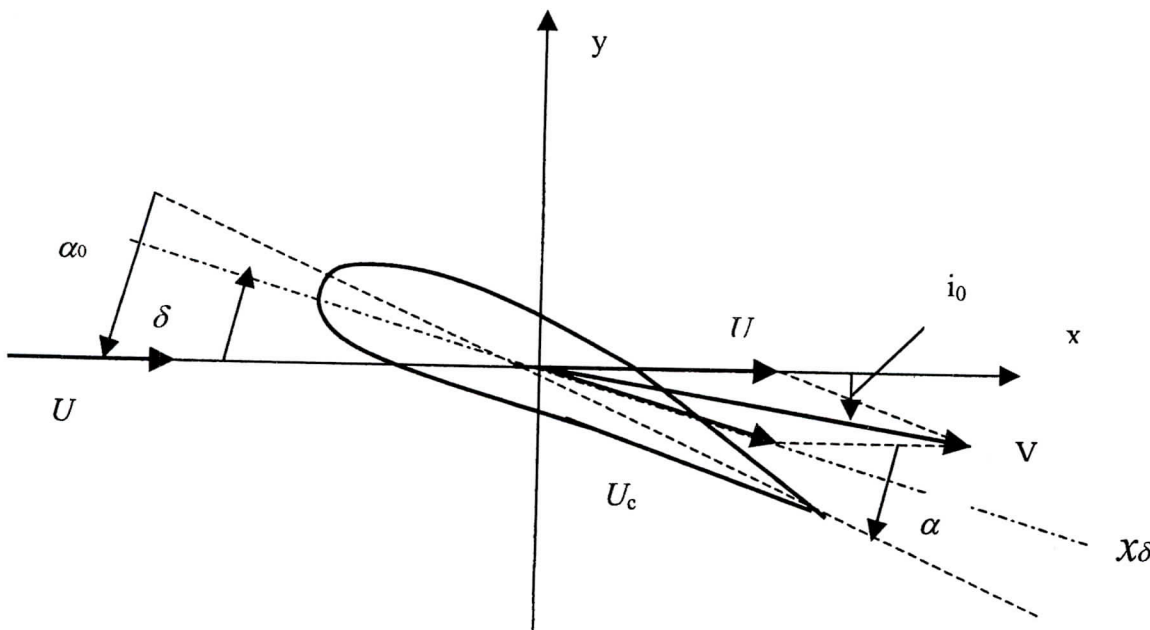


Figure.(2.2) Calage du profil face à l'écoulement uniforme

La composante de la vitesse \vec{U}_∞ de l'écoulement uniforme avec la vitesse \vec{U}_c de translation du profil ($U_c = A\omega\cos(\omega t)$), donne à chaque instant une vitesse résultante \vec{V} (vitesse relative) dont le module et l'incidence instantanée par rapport à la corde du profil s'écrivent :

$$V(t) = U_\infty \left[1 + 2\lambda \cos(\omega t) \cos(\delta) + (\lambda)^2 \cos^2(\omega t) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 - i(t) \quad (2.2)$$

$$\text{avec } i(t) = \text{Arctg} \left[\frac{\lambda \cos \omega t \sin \delta}{1 + \lambda \cos \omega t \cos \delta} \right] \text{ et } \lambda = \frac{A \omega}{U_\infty} \quad (2.3)$$

Les oscillations de tamis et de pilonnement se déduisent du cas général des équations ci-dessus en prenant respectivement $\delta=0$ et $\delta=-\frac{\pi}{2}$ on a alors ;

- Pour le mouvement de tamis ($\delta=0$) :

$$V(t) = U_\infty [1 + \lambda \cos(\omega t)] \quad (2.4)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{constante} \quad (2.5)$$

- Pour le mouvement de tamis ($\delta=-\frac{\pi}{2}$) :

$$V(t) = U_\infty \left[1 + (\lambda)^2 \cos^2(\omega t) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

$$\text{avec } \alpha(t) = \alpha_0 - \text{Arctg}[\lambda \cos \omega t] \quad (2.7)$$

- Dans le cas du mouvement de tangage : seule la variation d'incidence est à prendre en compte

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \cos \omega t \quad (2.8)$$

II.3 Problème continu :

Cette section est dévolue à la mise en place des équations de Navier-Stokes incompressibles qui servent à modéliser les écoulements de fluide visqueux. Pour préparer la résolution numérique, une forme adimensionnée de ces équations est proposée, afin de limiter les erreurs d'arrondi. En effet, ce problème est particulièrement exacerbé quand le nombre de Mach devient très petit. Aussi, même un bon adimensionnement des équations ne garantit pas une évaluation précise du gradient de pression, si la forme classique des équations de Navier-Stokes incompressibles est employée.

II.3.1 Hypothèses et équations de base :

Afin de se concentrer uniquement sur les problèmes numériques liés à la méthode d'intégration, le cadre physique de ce travail se restreint à des écoulements tridimensionnels instationnaires incompressible de fluide newtonien.

Les équations de Navier-Stokes, formulées en variables primitives et en coordonnées cartésiennes dans un domaine de \mathfrak{R}^n ($n=2,3$) de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, peuvent s'écrire sous la forme conservative en notation tensorielle :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

La masse volumique du fluide, les composantes de la vitesse, la pression, la viscosité cinématique sont représentés respectivement par ρ, u_i, p, ν tandis que la convention de sommation d'Einstein est utilisée pour les indices répétés. Où le terme $u \cdot \nabla u$ est le terme de transport ou de convection et le terme $\nu \Delta u$ est le terme de diffusion dans les équations de Navier-Stokes, ce dernier étant dû à l'existence des interactions au niveau moléculaire entre les particules, et se traduisant par une dissipation d'énergie.

II.3.2 Changement de repère :

Il est intéressant d'étudier l'écoulement dans un repère lié au profil. En effet, les paramètres géométriques du maillage autour du profil deviennent indépendants du temps et ne nécessitent pas un réajustement au cours du calcul. De plus la valeur d'une grandeur scalaire définie en un point donné ne dépend pas du repère choisi.

Le mouvement du profil étant défini par sa vitesse de translation \vec{U}_c et sa vitesse de rotation $\vec{\Omega}=(0,0,\omega)$, nous avons :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_0 \quad (2.11)$$

Où \vec{R} désigne le vecteur position d'une particule fluide par rapport au repère absolue et \vec{r} le vecteur position d'une particule dans le nouveau repère.

On obtient :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (2.12)$$

donc la vitesse d'une particule fluide dans le repère absolue peut être remplacée dans l'équation de mouvement par la relation suivante :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{U}_\infty + \vec{U}_c + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (2.13)$$

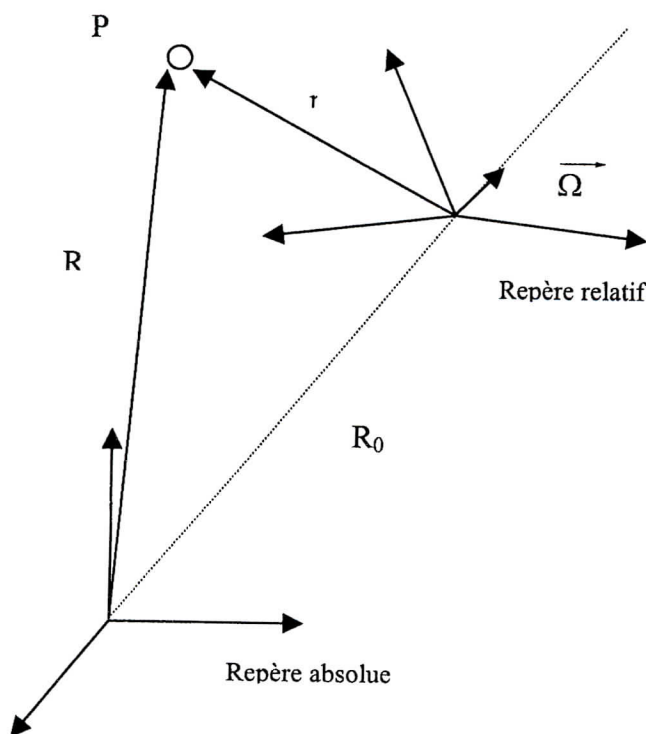


Figure (2.3) le système des coordonnées en rotation

Pour des vitesses de rotation et d'écoulement uniforme constantes, La composition des accélérations s'écrit suivant :

$$\frac{d\vec{A}_a}{dt} = \frac{d\vec{A}_r}{dt} + \frac{d\vec{U}_c}{dt} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r \quad (2.14)$$

En remplaçant les équations (2-11) et (2-12) dans le système (2-9), (2-10), les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\Omega r)^2}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} - 2 \varepsilon_{ipq} \Omega_{q u_p} - \frac{dU_{ci}}{dt} \quad (2.15)$$

On peut ainsi définir la pression modifiée $P = p + \rho \frac{(\Omega r)^2}{2}$, et on montre aisément que si r désigne la distance à l'axe de rotation du point \vec{x} , on a :

$$r^2 = x_j x_j - \frac{(x_j \Omega_j)^2}{(\Omega)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial (\Omega r)^2}{\partial x_i} = \Omega^2 x_j - \Omega_i (x_j \Omega_j) \quad (2.16)$$

II.3.3 Formulation adimensionnée :

Dans une simulation numérique, Il est nécessaire de stocker informatiquement les variables conservatives, Comme la précision des calculateurs est au mieux de l'ordre de 16 décimales significatives, il est important de travailler avec des variables adimensionnées afin d'éviter que des erreurs d'arrondis, introduites par la représentation machine des réels, ne viennent détériorer la précision de la solution numérique. Ce phénomène est particulièrement exacerbé en régime incompressible, car les écoulements sont alors caractérisés par de très faibles variations des variables.

Les variables adimensionnées sont obtenues à partir des variables physiques en utilisant les formules suivantes:

$$u_i = \frac{u_i^*}{U_\infty}, \quad P = \frac{(P^* - P_\infty)}{\rho U_\infty^2}, \quad t = \frac{U_\infty t^*}{C}, \quad x_i = \frac{x_i^*}{C}, \quad \omega = \frac{\omega^* C}{U_\infty} \quad (2.17)$$

Où les symboles u_i, P, t, x_i, ω indiquent respectivement, une vitesse, une pression, fréquence réduite, une coordonné et une fréquence réduite du mouvement d'oscillation, adimensionnées par une vitesse de l'écoulement amont U_∞ et par une longueur de référence C , la corde du profil.

De même, l'hypothèse d'un nombre de Reynolds constant conduit a la relation suivante entre les forces d'inerties et de viscosité :

$$Re = \frac{U_\infty C}{\nu} \quad (2.18)$$

Pour les essais d'une aile en oscillation harmonique, il faut choisir U_∞ , C et ω de telle sorte qu'une particule de fluide parcourt pendant le temps ω la même distance rapportée à C sur le modèle. La valeur $\frac{U_\infty}{\omega}$ qui s'exprime en m, donne la distance que l'aile parcourt pour chaque période d'oscillation. Si cette distance est grande par rapport à la corde C du profil d'aile, c'est à dire que $\frac{\omega C}{U_\infty} \ll 1$, l'écoulement est dit quasi-stationnaire. On définit le nombre de

Strouhal :

$$Str = \frac{\omega C}{U_\infty} \quad (2.19)$$

En reportant les relations des équations.(2.17)-(2.18) dans les équations.(2.15)-(2.10), les équations adimensionnées suivantes sont obtenues:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2.21)$$

où :

$$f_i = -2 \varepsilon_{ipq} \Omega_{q u_p} - \frac{dU_{ci}}{dt} \quad \text{et} \quad P = p + \frac{(\omega r)^2}{2}$$

II.4 Principes d'analyse tensorielle :

Les techniques exposées dans ce paragraphe seront surtout utiles pour l'écriture des équations tensorielles gouvernant la dynamique de l'écoulement dans des systèmes en coordonnées curvilignes. Les concepts et définitions d'analyse tensorielle présentées ici sont donnés sans preuves, plus de détails peuvent être trouvés par exemple dans [3] et [134]. On utilisera ici les commodités d'écriture très synthétique des tenseurs et leurs propriétés opératoires, les notations d'Einstein sont adoptées dans toute cette thèse, nous nous restreignons à un espace euclidien tridimensionnel E_3 .

II.4.1 Transformation des coordonnées :

On considère deux systèmes de coordonnées dans l'espace E_3 . Le premier est un système de coordonnées Cartésiennes, noté $x=(x_1, x_2, x_3)$ alors que l'autre est un système de coordonnées curvilignes, noté $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. On écrira les composants d'une coordonnée avec un index comme indice supérieur. Soit deux régions $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $G \subset \mathbb{R}^3$.

On définit alors la transformation qui lie les deux régions par la relation suivante :

$$T : x=x(\zeta), \quad x \in \Omega, \quad \zeta \in G \quad (2.22)$$

Si le Jacobien de la transformation (2.22), défini par

$$J = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \zeta^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \zeta^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \zeta^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \zeta^3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \zeta^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \zeta^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \zeta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}} \quad (2.23)$$

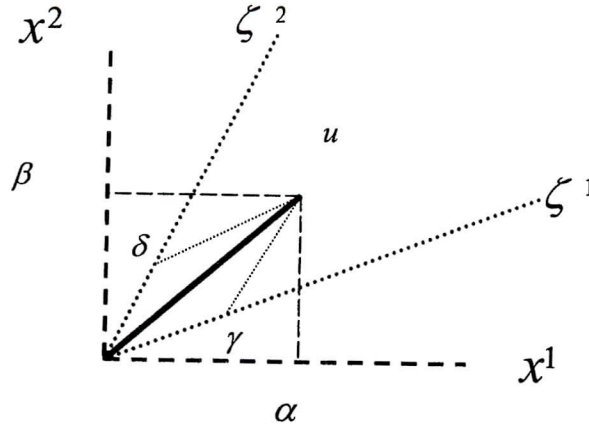
ne s'annule pas dans tout le domaine Ω , alors la transformation (2.22) peut être considérée comme étant admissible. En conséquence, la projection topographique T est dite inversible. Le calcul tensoriel qui sera discuté dans la section II.4.3, nécessite la considération de quelques définitions et propriétés élémentaires du comportement de certaines quantités sous transformation de coordonnées d'un système à un autre. Dans ce but nous formulons les remarques et définitions suivantes :

Définitions 2.1 : Une quantité $T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ est appelée composante contravariante d'un tenseur de rang r , si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit :

$$t^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r} = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \zeta^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_r}}{\partial \zeta^{\alpha_r}} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \quad (2.24)$$

Remarque 2.1 : Les composantes cartésiennes d'un tenseur sont dénotées par lettres minuscules Romaines, et les composantes d'un système de coordonnées générales par lettres majuscule Romaines.

Remarque 2.2 : Il est évident que l'inverse de (2.24) est aussi défini, $t^{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}$ est la composante contravariante d'un tenseur de rang r dans le système de coordonnées cartésiennes.



Figure(2.4) La représentation d'un vecteur dans deux systèmes de coordonnées

Définitions 2.2: Une quantité $T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est appelée composante covariante d'un tenseur de rang r , si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit :

$$t_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r} = \frac{\partial \zeta^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial \zeta^{\alpha_r}}{\partial x^{\beta_r}} T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} \quad (2.25)$$

Définitions 2.3 : Une quantité $T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est appelée composante mixte d'un tenseur de rang $r+s$, si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit :

$$t_{\delta_1\delta_2\dots\delta_s}^{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r} = \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \zeta^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma_r}}{\partial \zeta^{\alpha_r}} \frac{\partial \zeta^{\beta_1}}{\partial x^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial \zeta^{\beta_s}}{\partial x^{\delta_s}} T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} \quad (2.26)$$

Remarque 2.3 : Strictement parlant, $T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est la composante contravariante d'un tenseur de rang r , Pour plus de brièveté et simplicité nous l'appellerons un tenseur contravariant de rang r , de la même façon pour les covariant et les tenseurs mixtes.

Remarque 2.4 : Les tenseurs contravariants et covariants sont distingués, respectivement par un exposant et un indice. Cette notation est essentielle dans le calcul tensoriel et nous devons adhérer à cette formulation.

Les tenseurs sont, en faite, des entités mathématiques indépendantes du système de coordonnées dans le quelle ils sont écrits. D'où une définition plus générale du tenseur :

Définitions 2.4 : Une quantité $T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ est appelée tenseur relatif mixte de rang $r+s$ et de poids w , si sous la transformation (2.22), cette quantité s'écrit suivant la relation :

$$t_{\delta_1\delta_2\dots\delta_s}^{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r} = J^{-w} \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \zeta^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma_r}}{\partial \zeta^{\alpha_r}} \frac{\partial \zeta^{\beta_1}}{\partial x^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial \zeta^{\beta_s}}{\partial x^{\delta_s}} T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} \quad (2.27)$$

dans laquelle J est le Jacobien défini par la relation (2.23)

Définitions 2.5 : un tenseur relatif de poids unité, est appelé tenseur densité, alors que le tenseur relatif de poids zéro est un tenseur absolu.

Pour notre étude, on a seulement besoin de tenseurs de rang $r \leq 2$ ou de tenseurs mixtes de rang $r+s \leq 2$ (absolu ou relatif). Par exemple le vecteur vitesse $u = \frac{dx^\alpha}{dt}$ est un tenseur d'ordre un ses composants cartésiens contravariant et covariant sont respectivement dénotés par u^α et u_α avec $u^\alpha = u_\alpha$. Et ses composants dans un système de coordonnées générales sont notés par U^α et U_α avec $U^\alpha \neq U_\alpha$. Il existe des quantités qui dépendent de la position dans l'espace, mais dont les valeurs sont indépendantes du choix du système de coordonnées. par exemples la longueur d'un vecteur, la pression et l'énergie turbulente. Une telle quantité est appelée un scalaire qui est un tenseur de rang zéro.

II.4.2 Paramètres géométriques :

Le vecteur base est un des paramètres le plus important entrant dans la définition des transformations d'un tenseur d'un système cartésien à un système de coordonnées curvilignes. Les vecteurs de base covariants sont des vecteurs tangents a la ligne des coordonnées ζ^α et définis comme étant :

$$a_{(\alpha)} = \frac{\partial x}{\partial \zeta^\alpha} \quad (2.28)$$

Remarque 2.5 : $a_{(\alpha)}$ est un ensemble de trois vecteurs, et non pas la composante d'un seul vecteur, l'indice α entre parenthèse varie de 1 a 3.

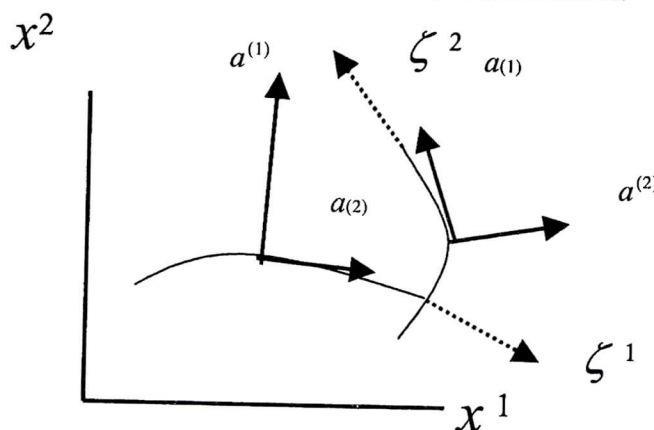
Les vecteurs :

$$a^{(\alpha)} = \text{grad} \zeta^\alpha \quad (2.29)$$

sont normaux a la surface des coordonnées ζ^α constante, et sont appelés les vecteurs base contravariants. En outre, ils sont réciproques aux vecteurs base covariants:

$$a_{(\alpha)} a^{(\beta)} = \delta_\alpha^\beta \quad (2.30)$$

Le δ_α^β est le symbole de Kronecker, généralement, les vecteurs base ne sont pas des vecteurs unités, excepté dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes.



Figure(2.5) Le domaine cartésien avec les coordonnées curvilignes et les vecteurs de base

En utilisant la relation (2.30), il est possible de calculer $a^{(\alpha)}$ une fois $a_{(\alpha)}$ obtenues. A l'aide de la règle de Cramer on peut écrire :

$$a^{(\alpha)} = \frac{1}{J} (a_{(\beta)} \times a_{(\gamma)}) \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ cyclique} \quad (2.31)$$

où J est donné par :

$$J = |a_{(1)} a_{(2)} a_{(3)}| = a_{(1)} \cdot (a_{(2)} \times a_{(3)}) \quad (2.32)$$

Comparant ce résultat avec la relation (2.23), on montre que J est le Jacobien de la transformation (2.22).

Chaque vecteur u peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base. Par exemple, nous avons :

$$u = a^{(\alpha)} U_{\alpha} \quad \text{ou} \quad u_{\beta} = a_{\beta}^{(\alpha)} U_{\alpha} \quad (2.33)$$

Cette équation correspond à la loi de transformation (2.25). Utilisant (2.30) on écrit :

$$U_{\beta} = a_{(\beta)} u = a_{(\beta)}^{\alpha} u_{\alpha} \quad (2.34)$$

La topologie de E_3 est définie par l'élément métrique :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} d\zeta^{\alpha} d\zeta^{\beta} \quad (2.35)$$

où ds est la longueur de l'élément différentiel associé au déplacement dx^{γ} et $g_{\alpha\beta}$ défini par le produit scalaire des vecteurs de base covariants :

$$g_{\alpha\beta} = a_{(\alpha)} \cdot a_{(\beta)} \quad (2.36)$$

$g_{\alpha\beta}$ est appelé tenseur métrique covariant. De la même façon on définit respectivement le tenseur métrique contravariant et mixte par :

$$g^{\alpha\beta} = a^{(\alpha)} \cdot a^{(\beta)} \quad \text{et} \quad g_{\beta}^{\alpha} = a^{(\alpha)} \cdot a_{(\beta)} \quad (2.37)$$

De (2.30) et (2.37), il s'ensuit que le tenseur métrique mixte est égal au delta de Kronecker. En outre, les tenseurs métriques sont symétriques, et peuvent s'écrire suivant :

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} \quad (2.38)$$

Les composants du tenseur métrique covariant forme une matrice symétrique, noté par $(g_{\alpha\beta})$. En vertu de (2.36), cette matrice est définie positive. On notera le déterminant $|g_{\alpha\beta}|$ par g .

Théorème 2.1 : Nous avons

$$g = J^2 \quad (2.39)$$

ici, l'inverse de la matrice $(g_{\alpha\beta})$ est la matrice $(g^{\alpha\beta})$, tel que :

$$g_{\alpha\beta} \cdot g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (2.40)$$

Dans un espace E_3 la définition du tenseur métrique nous permet d'exprimer longueur, angle et volume suivant une formulation indépendante des systèmes de coordonnées. Par exemple, la longueur des vecteurs de base covariants et contravariants peut être calculée, suivant :

$$|a_{(\alpha)}| = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad |a^{(\alpha)}| = \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \quad (2.41)$$

Ainsi, les vecteurs unités tangentiels et normaux sont donnés par :

$$t = \frac{a^{(\alpha)}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}, \quad n = \frac{a^{(\alpha)}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \quad (2.42)$$

L'élément différentiel du volume $d\Omega$ associé à un système de coordonnées curvilignes ζ s'écrit :

$$d\Omega = \sqrt{g} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \quad (2.43)$$

Les tenseurs métriques peuvent être utilisés pour élever et abaisser les indices, comme c'est illustré dans l'exemple suivant :

$$T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} T_{\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} T_{\delta\gamma} \quad (2.44)$$

Les vecteurs base ne sont pas des constantes dans un système de coordonnées généralisées, et leurs dérivées satisfont :

$$\frac{\partial a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\beta}} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} a^{(\gamma)}, \quad \frac{\partial a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\beta}} = - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} a^{(\gamma)} \quad (2.45)$$

Soulignons que les symboles de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$ ne sont pas des tenseurs. Utilisant (2.30), on peut écrire :

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} = a^{(\alpha)} \frac{\partial a^{(\gamma)}}{\partial \zeta^{\beta}} = \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial \zeta^{\beta} \partial \zeta^{\gamma}} \quad (2.46)$$

Les symboles de Christoffel sont symétriques, en ce qui concerne leurs indices :

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} \quad (2.47)$$

II.4.2 Calcul tensoriel :

Nous discuterons les propriétés d'opérations algébriques et analytiques à qui peuvent être appliquées aux tenseurs sur un espace E_3 .

Théorème 2.2 (Addition) : La somme de deux tenseurs du même type est un tenseur du type original.

Théorème 2.3 (produit contracté) : Le produit contracté d'un tenseur de rang $(p + q)$ avec un tenseur de rang $(r + s)$ est un tenseur de rang $(p + r) + (q + s)$.

Théorème 2.4 (contraction) : Soit un tenseur de rang $(p + q)$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$. La contraction est une sommation sur un indice covariant et un indice contravariant, le résultat est un tenseur de rang $(p-1) + (q-1)$.

L'illustration du théorème 2.4, est :

$$U^{\beta} = g^{\alpha\beta} U_{\alpha} \quad (2.48)$$

Théorème 2.5 : Si tous les composants d'un tenseur sont nulles dans un système de coordonnées alors ils le seront dans n'importe quel autre système.

Ce dernier théorème joue un rôle important dans la détermination des lois physiques d'un invariant. Ce théorème nous permet d'écrire les lois physiques dans un système de coordonnées généralisées, une fois leur formulation cartésienne en notation tensorielle écrite.

En général, la différenciation partielle ne transforme pas un tenseur en un autre tenseur. La dérivée covariante est une opération qui conserve le caractère tensoriel et qui équivaut à une différenciation partielle dans un système de coordonnées cartésiennes.

Définitions 2.6 : on définit

$$T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r, \gamma} = \frac{\partial T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}}{\partial \zeta^{\gamma_1}} + \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \delta \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\delta \alpha_2 \dots \alpha_r} + \dots + \left\{ \begin{matrix} \alpha_r \\ \delta \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r-1} \delta} + \\ - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \beta_1 \gamma \end{matrix} \right\} T_{\delta \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} - \dots - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \beta_s \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{s-1} \delta}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} - W \cdot \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \delta \gamma \end{matrix} \right\} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \quad (2.49)$$

La dérivée covariante du tenseur mixte $T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ de poids w dans un système de coordonnées généralisées.

Remarque 2.6 : Dans un système de coordonnées Cartésiennes, nous avons :

$$u_{\alpha, \beta} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad (2.50)$$

Remarque 2.7 : La dérivée covariante d'un scalaire absolu est réduite à une dérivée partielle :

$$\varphi_{, \beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\beta}} \quad (2.51)$$

En vertu du Théorème 2.5, les règles habituelles applicables pour une différenciation dans un système de coordonnées cartésiennes sont aussi vérifiées pour une différenciation covariante. Par exemple,

$$(U^{\alpha} U^{\beta})_{, \gamma} = U^{\beta} U^{\alpha}_{, \gamma} + U^{\alpha} U^{\beta}_{, \gamma} \quad (2.52)$$

La dérivée covariante des composants du tenseur métrique est strictement nul :

$$g^{\alpha \beta}_{, \gamma} = g_{\alpha \beta, \gamma} = 0 \quad (2.53)$$

Ces identités sont rapportées habituellement comme étant le lemme de Ricci. Ils montrent que la dérivée covariante du déterminant du tenseur métrique et du Jacobien sont égaux à zéro :

$$g_{, \gamma} = 0 \quad \sqrt{g}_{, \gamma} = 0 \quad (2.54)$$

D'où l'identité usuelle suivante ;

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \zeta^{\alpha}} = \sqrt{g} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \alpha \end{matrix} \right\} \quad (2.55)$$

Cette identité résultante de (2.54) est due au fait que \sqrt{g} est une densité scalaire de poids 1.

On peut utiliser cette identité pour obtenir une expression utile pour la divergence d'un champ vectoriel:

$$\operatorname{div}(u) = U_{,\alpha}^{\alpha} = \frac{\partial U^{\alpha}}{\partial \zeta^{\alpha}} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} U^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} U^{\alpha}}{\partial \zeta^{\alpha}} \quad (2.56)$$

De la même façon, la divergence d'un champ de tenseur de rang deux devient :

$$T_{,\alpha}^{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{\beta\alpha}}{\partial \zeta^{\alpha}} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\alpha \end{matrix} \right\} T^{\gamma\alpha} \quad (2.57)$$

Une autre identité importante est :

$$\frac{\partial \sqrt{g} a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\alpha}} = 0 \quad (2.58)$$

est appelée l'identité géométrique.

Ces résultats peuvent être vérifiés en dérivant les relations suivantes : supposons que le vecteur v est constant, alors à l'aide de (2.56) nous avons :

$$0 = \operatorname{div}(v) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot v}{\partial \zeta^{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot v \frac{\partial \sqrt{g} a^{(\alpha)}}{\partial \zeta^{\alpha}} \quad (2.59)$$

La version intégrale de (2.58) peut être obtenue au moyen du théorème de divergence de Gauss :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v) d\Omega = \oint_{\Gamma} v \cdot n d\Gamma \quad (2.60)$$

où $\Gamma = \partial\Omega$ et n vecteur unité sortant normal à Γ , si $v = \text{constante}$, on écrit :

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) d\Omega = \oint_{\Gamma} v^{\beta} a_{\beta}^{(\alpha)} d\Gamma_{\alpha} = v^{\beta} \oint_{\Gamma} a_{\beta}^{(\alpha)} d\Gamma_{\alpha} \quad (2.61)$$

donc, on obtient :

$$\oint_{\Gamma} a_{\beta}^{(\alpha)} d\Gamma_{\alpha} = 0 \quad (2.62)$$

Nous passons maintenant à la description de la modélisation de sous maille et des méthodes numériques utilisées pour calculer l'écoulement autour d'un profil d'aile 3D en configuration de décrochage dynamique et statique en SGE.

Chapitre III

Simulation des Grandes Echelles Turbulentes

La Simulation des Grandes Echelles (SGE) est étroitement liée à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en régime turbulent et à la notion de séparation d'échelles par filtrage spatial. Les grandes échelles de l'écoulement, isolées par un filtre en échelles, sont calculées tandis que les petites échelles sont modélisées. Ainsi on peut voir la SGE comme une réduction du nombre de degrés de liberté du système étudié, pour lequel le calcul dynamique des grandes échelles énergétiques est caractéristique de la dynamique globale de l'écoulement. Dans ce chapitre, nous décrivons la méthodologie de façon plus formelle en introduisant la notion de filtrage sous forme mathématique et la notion de modélisation de sous maille. L'opération de filtrage des termes non linéaires dans les équations de Navier-Stokes en régime incompressible fait apparaître de nombreux termes de sous maille dont nous discutons la modélisation.

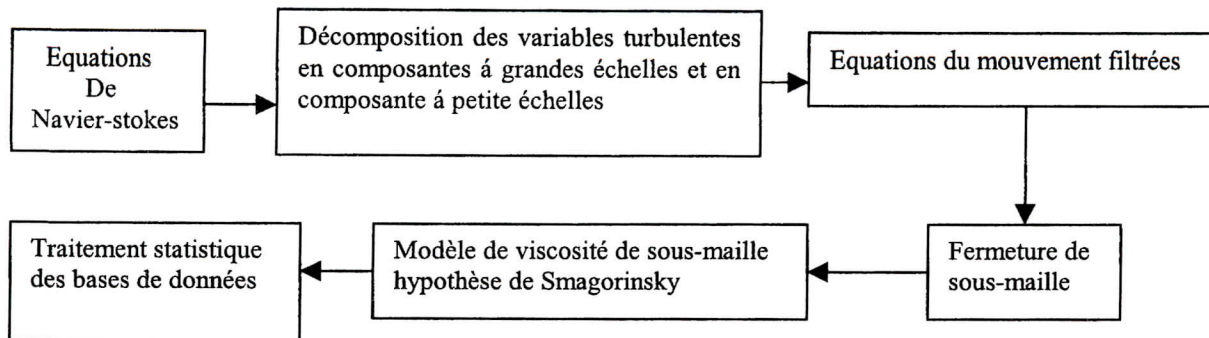
La modélisation de sous maille utilisée pour représenter le tenseur de sous maille est ensuite présentée. L'écriture des modèles est très différente selon que l'on travaille dans l'espace physique ou dans l'espace spectral, même si les mécanismes reproduits par la modélisation sont identiques. On ne parlera ici des modèles de Smagorinsky, Dynamique ainsi que des modèles à équations de transports utilisés dans l'espace physique mais on peut se référer à [15], [35], [90], [121], pour une présentation détaillée des modèles spectraux.

III.1 Fondement de la méthode :

La simulation des grandes structures turbulentes est une approche hybride utilisant une simulation partielle (grands tourbillons) et une modélisation partielle (petits tourbillons). L'idée est basée sur l'observation que si les grands tourbillons sont en fait très différents selon la géométrie, leur structure variant beaucoup avec le type d'écoulement considéré, par contre les petits tourbillons ont un caractère beaucoup plus universel. La méthode consiste alors à calculer le mouvement tridimensionnel et instationnaire des gros tourbillons dans le cas d'un mouvement périodique d'un profil d'aile. Les propriétés statistiques sont obtenues ensuite dans un second temps, tout comme on le ferait sur des signaux issus de mesures en laboratoire. On peut ainsi prendre des moyennes, dans le temps, dans l'espace ou sur des réalisations en répétant le calcul avec des conditions initiales aléatoires. La situation ressemble donc à celle d'un expérimentateur qui disposerait d'un fil chaud en chaque point de maillage.

De manière très générale, la modélisation consiste à faire un traitement statistique sur les équations de base et ensuite résoudre numériquement ces équations tandis que la simulation adopte la démarche inverse : résolution numérique des équations de base et ensuite le traitement statistique des bases de données ainsi constituées. La justification de ce type d'approche réside dans une idée simple : les grands tourbillons produits par l'écoulement moyen sont fortement dépendants de celui-ci, anisotrope et de longue durée de vie, ils sont difficiles à modéliser. Par contre, les petits tourbillons produits par transfert ont un caractère plus

universel et tendent vers l'isotropie, leur durée de vie est courte et ils sont relativement plus faciles à modéliser.



III.2 Isotropie locale :

Le concept de cascade d'énergie et d'isotropie locale est essentiel pour la compréhension de la méthode de simulation des grandes structures turbulentes, comme on va le voir ci-après.

La théorie de l'isotropie locale a été développée par Kolmogoroff. A la suite de ses travaux, une contribution importante à la compréhension des mécanismes turbulents a été apportée par Von Karman, Lin, Batchlor et Townsend, dont nous rappelons, ici les idées de base :

Les gros tourbillons interagissent avec l'écoulement moyen car leurs échelles sont du même ordre de grandeur, ils extraient de l'énergie cinétique du mouvement moyen et la fournissent aux agitations à grande échelle. Les structures turbulentes peuvent être considérées comme des éléments tourbillonnaires qui s'étirent les uns les autres. Cet allongement des filets tourbillonnaires est un aspect essentiel du mouvement turbulent. Il produit le passage de l'énergie à des échelles de plus en plus petites jusqu'à ce que les forces visqueuses deviennent actives et dissipent l'énergie : c'est la cascade d'énergie.

Lorsque les conditions aux limites le permettent (c'est à dire quand on peut faire l'hypothèse de périodicité dans les trois directions de l'écoulement), une alternative naturelle à l'analyse dans l'espace physique peut être l'analyse spectrale des équations du mouvement. Cela peut nous fournir des informations importantes concernant les mécanismes physiques de la turbulence. Sans entrer dans les détails, on rappelle juste l'expression du spectre d'énergie cinétique dans l'espace de Fourier:

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in S_{k, \frac{1}{2}}} |u(k)|^2, \quad k \in N \quad (3.1)$$

(où $S_{k, \frac{1}{2}}$ représente la couronne ; $S_{k, \frac{1}{2}} = \{k \in \mathbb{Z}^3, \text{tel. que } |k| \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]\}$ et $u(k)$ sont les coefficients

de Fourier du champ de vitesse u)

et l'équation de l'évolution de l'énergie cinétique dans l'espace spectral (obtenu à partir des équations de Navier-Stokes)

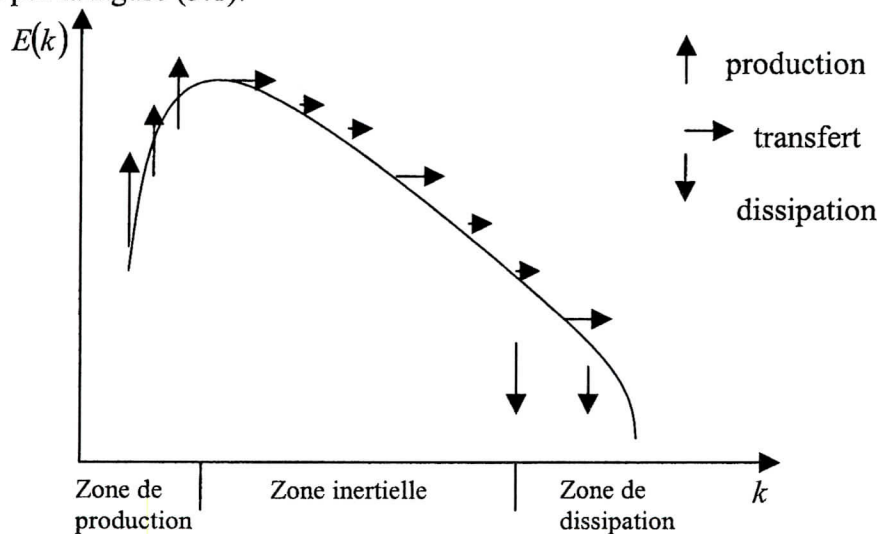
$$(\partial_t + 2\nu k^2)E(k, t) = W(k, t) + T(k, t) \quad (3.2)$$

Où $W(k, t)$ est le terme qui représente la *production* d'énergie due aux forces appliquées au fluide et $T(k, t)$ représente le *transfert* d'énergie dû aux termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes.

D'habitude on interprète l'équation (3.2) de la manière suivante: l'énergie est introduite dans le système au niveau des grandes échelles par le terme $W(k, t)$ ensuite elle est transférée aux échelles de plus en plus petites par le terme $T(k, t)$ pour être enfin dissipée au niveau des plus

petites échelles, par le terme $(2\nu k^2)E(k,t)$. Le transfert d'énergie des grandes échelles vers les échelles de petite taille est dû principalement au phénomène d'étirement des filets tourbillons (en anglais vortex stretching).

La cascade d'énergie du mouvement moyen injectée dans le mouvement turbulent est déterminée par les grandes échelles, c'est seulement cette quantité d'énergie qui pourra être transmise aux petites échelles et ensuite dissipée. Ainsi le taux de dissipation d'énergie est déterminé par le mouvement à grandes échelles bien que la dissipation soit un processus visqueux dont les petits tourbillons sont le siège. La viscosité du fluide ne détermine pas le taux de dissipation mais seulement l'échelle à laquelle cette dissipation se produit. Plus le nombre de Reynolds est élevé, plus les tourbillons dissipateurs sont petits. Ce processus, illustré par la figure (3.1).



Figure(3.1) Schéma du spectre d'énergie turbulente

Du fait de l'interaction avec le mouvement moyen, les gros tourbillons dépendent fortement des conditions aux limites du problème. Le mouvement moyen présente souvent des directions privilégiées qui sont alors imposées aux mouvements turbulents à grande échelle. Ces gros tourbillons peuvent être fortement anisotropes. Durant le processus de cascade, la dépendance directionnelle est atténuée. Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand pour que la zone des gros tourbillons et celle des petits tourbillons dissipateur soit bien distincte dans le spectre, cette dépendance directionnelle est presque totalement perdue : c'est la tendance à l'isotropie locale de la micro turbulence.

Les échelles de Kolmogoroff sont les plus petites échelles de l'écoulement turbulent et sont exprimés à l'aide des relations suivantes :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = (\nu \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (3.3)$$

Où η la longueur de l'échelle, τ la fréquence de l'échelle, ν sa vitesse caractéristique, ε taux de dissipation. L'un des principaux résultats de la théorie de Kolmogorov, déduit d'une hypothèse d'auto similarité et d'une analyse dimensionnelle, prédit que la pente du spectre d'énergie dans la zone inertielle est de $-\frac{5}{3}$ en échelle logarithmique. Plus précisément, on a :

$$E(k) = C_k \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}; \quad C_k = 1.5 \text{ constante de Kolmogorov} \quad (3.4)$$

III.3 Notions de filtrage et propriétés :

Le problème initial est celui de la définition des grandes structures turbulentes. Pour cela, la plupart des auteurs effectuent un filtrage des grandeurs turbulentes (Léonard A., 1974).

III.3.1 Définition :

Soit ϕ une quantité turbulente telle que u_i, p par exemple, on définit la quantité filtrée par :

$$\overline{\phi} = \int G(\vec{x}, \vec{y}; \Delta) \phi(\vec{y}, t) d\vec{y} \quad (3.5)$$

G est la fonction filtre au point \vec{x} . G détermine exactement la portion des fluctuations qui est incorporée dans les gros tourbillons. Δ est un paramètre qui caractérise la largeur du filtre. On utilisera la notation $(\overline{\quad})$ pour représenter la quantité filtrée.

G doit être bien sûr normalisé de telle façon que :

$$\int G(\vec{x}, \vec{y}; \Delta) d\vec{y} = 1 \quad \forall \vec{x} \quad (3.6)$$

III.3.1 Propriétés des filtres :

Une grandeur turbulente peut toujours s'écrire :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \quad (3.7)$$

grandeur instantanée = partie filtrée + partie à petite échelle

$\overline{\phi}$ caractérise les grandes échelles dont la longueur caractéristique est supérieure à Δ et ϕ' caractérise les petites échelles dont la longueur caractéristique est inférieure à Δ .

Lorsque le filtre est temporel, la décomposition est identique à la décomposition de Reynolds où le signal est décomposé autour de sa valeur moyenne. Lorsque le filtre est spatial, la partie non résolue est appelée contribution de sous maille.

Les propriétés fondamentales des filtres sont définies à partir des moyennes d'ensemble. Les filtres doivent vérifier les propriétés suivantes :

○ conservation des constantes $\overline{a} = a$ (3.8)

○ Linéarité $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$ (3.9)

○ Commutativité de la dérivée $\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}$ (3.10)

Cependant les propriétés d'un filtre sont très différentes de celles d'une moyenne classique. Le filtre ne vérifie pas les règles de Reynolds et en particulier :

$$\circ \quad \overline{\phi} \neq \overline{\phi} \quad (3.11)$$

$$\circ \quad \overline{\phi'} \neq 0 \quad (3.12)$$

$$\circ \quad \overline{\phi'} = \overline{\phi} - \overline{\phi} \quad (3.13)$$

Ces propriétés sur les moyennes d'ensemble ne sont malheureusement pas toujours vérifiées pour les maillages curvilignes 3D, notamment la propriété de commutation [38], [59]. Les filtres qui commutent avec l'opérateur de dérivation ne sont pour l'instant construits facilement que dans l'espace de Fourier [85]. La technique très largement utilisée en SGE est l'opération de filtrage implicite des équations. Le filtrage implicite consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes discrétisées sans appliquer de filtre connu analytiquement, les opérateurs de dérivation discrets agissant comme un filtre passe-haut en échelle dans la direction de dérivation [156]. Il est difficile, aussi bien en régime incompressible qu'en régime compressible, d'interpréter l'opération implicite de filtrage sur les maillages curvilignes 3D même si l'approche implicite repose sur l'idée que la taille caractéristique du maillage utilisé est de l'ordre de la taille du filtre qu'il faudrait utiliser pour capturer les grandes échelles.

- **Exemples de filtres :**

1. Le filtre passe bas : très simple dans l'espace spectral, ce filtre a l'inconvénient de fournir une fonction oscillatoire dans l'espace physique

$$G(\vec{\xi}) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin \frac{\pi \xi_i \Delta}{2}}{\pi \xi_i \Delta} \quad \Delta = \frac{\pi}{k_c}, \quad \vec{\xi} = \vec{x} - \vec{y} \quad (3.14)$$

2. Le filtre top hat : très simple dans l'espace physique, l'inconvénient est reporté cette fois dans l'espace spectral

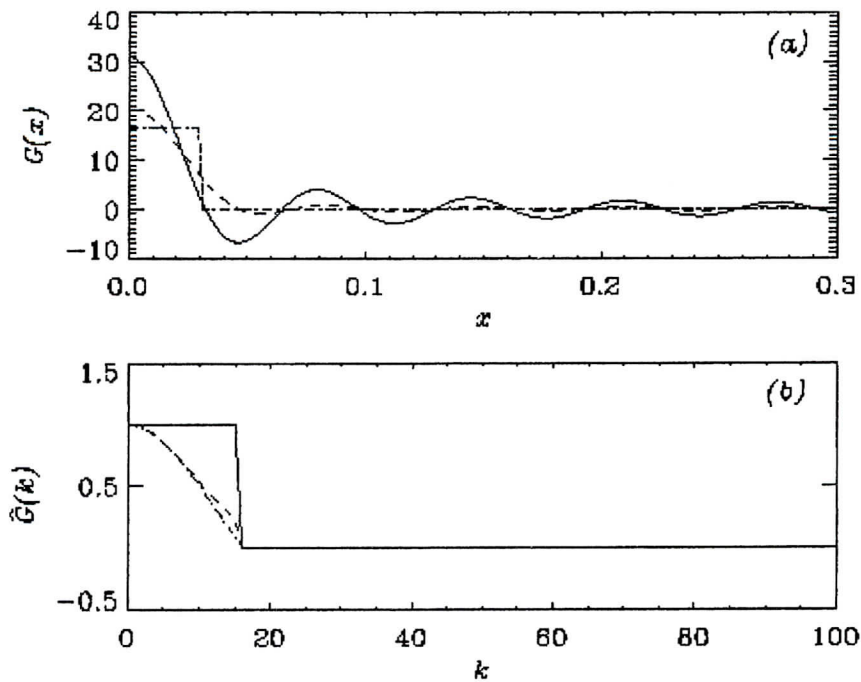
$$G(\vec{\xi}) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| < \frac{\Delta}{2} \quad (3.15)$$

$$G(\vec{\xi}) = 0 \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| \geq \frac{\Delta}{2}$$

3. Le filtre gaussien : ce filtre est progressif et donc va inclure une part très faible de petits tourbillons dans la définition des échelles explicites. Cependant ce filtre est utilisable aussi bien dans l'espace physique que dans l'espace de Fourier et donne souvent les meilleurs résultats.

$$G(\vec{\xi}) = \left(\sqrt{\frac{\gamma}{r}} \frac{1}{\Delta} \right)^3 \exp\left(\frac{-\gamma \xi^2}{\Delta^2} \right) \quad \text{avec} \quad \gamma = 6 \quad (3.16)$$

Ces trois filtres et leur transformé de Fourier sont représentés dans la figure(3.2). Il devrait être noté qu'en pratique le filtre Gaussien est toujours utilisé conjointement avec un filtre passe bas ; la troncature du Gaussien à des valeurs non négligeable est la cause des oscillations observées dans la figure.



Figure(3.2) Fonctions filtres typiques : — filtre passe bas ; ---- gaussien -.- top hat
(a) espace physique, (b) espace de Fourier

III.4 Les équations de Navier-Stokes filtrées :

La simulation des grandes échelles repose donc sur un filtrage spatial des équations de Navier-Stokes. Ce filtrage permet d'introduire des termes correctifs dans les équations décrites dans les paragraphes précédents. Ces contributions supplémentaires essaient de pallier la perte d'information liée à l'utilisation d'un maillage de pas d'espace fini. En effet, toute structure physique, dont la taille est inférieure à celle du pas d'espace, ne peut pas être prise en compte directement par la simulation. Or dans le cas d'écoulements turbulents, il existe une forte interaction entre les "petites" et les "grandes" structures de l'écoulement.

Ainsi les termes provenant du filtrage spatial des équations de Navier-Stokes permettent de modéliser l'action des "petites" structures, que la résolution spatiale ne peut prendre en compte, sur le mouvement des grandes échelles.

On applique une opération de filtrage sur les équations de Navier-Stokes (2.20)-(2.21) appliquées au mouvement instantané du fluide supposé incompressible :

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \bar{f}_i \quad (3.18)$$

Le produit filtré des vitesses instantanées s'écrit alors :

$$\overline{u_i u_j} = (\overline{u_j} + u'_j)(\overline{u_i} + u'_i) \quad (3.19)$$

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_j} \overline{u_i} + (\overline{u_j u'_i} - \overline{u'_j u_i}) + (\overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j}) \quad (3.20)$$

avec :

$$L_{ij} = (\overline{u_j u'_i} - \overline{u'_j u_i}) \quad \text{tensions de Léonard.} \quad (3.21)$$

$$R_{ij} = (\overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j}) \quad \text{tensions de Reynolds de sous-maille} \quad (3.22)$$

On peut dès lors écrire l'équation d'évolution des vitesses filtrées :

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j u'_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - L_{ij} - R_{ij} + \overline{f_i} \quad (3.24)$$

III.5 Modélisations de sous-maille :

Après filtrage des équations de Navier-Stokes instantanées, on déduit le système suivant composé des équations de continuité et de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j u'_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \overline{f_i} \quad (3.26)$$

Dans lesquelles :

$$\tau_{ij} = (\overline{u_j u'_i} - \overline{u'_j u_i}) \quad (3.27)$$

τ_{ij} est le tenseur sous-maille.

Le filtrage implique inmanquablement, une perte d'information et par voie de conséquence une inconnue supplémentaire τ_{ij} apparaît qui doit être modélisé.

Les modèles les plus simples sont basés sur une hypothèse de viscosité de turbulence de sous-maille. Il convient de souligner ici que cette viscosité n'est pas une propriété du fluide mais une propriété du mouvement turbulent lui-même, il s'ensuit que cette viscosité de turbulence devra être choisie différemment dans chaque cas particulier d'écoulement.

La fermeture du système précédent sera alors basée sur une hypothèse dans laquelle le déviateur des tensions de sous maille est relié directement au taux de déformation du champ filtré (hypothèse de Boussinesq) :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2 \nu_t S_{ij} \quad (3.28)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.29)$$

ν_t sera fonction de Δ largeur du filtre et des invariants de S_{ij} tenseur des déformations du champ filtré.

III.5.1 Le modèle de sous-maille de Smagorinsky :

Citons l'hypothèse de Smagorinsky, ce modèle n'est autre que l'adaptation du modèle statistique de longueur de mélange au cas de la simulation des grandes échelles turbulentes, introduit par le météorologue Smagorinsky (1963). Loin des parois la viscosité de sous-maille est donnée par :

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 S_{kl} S_{kl}} \quad (3.30)$$

L'échelle caractéristique de la turbulence de sous maille est ici connue et directement proportionnelle à la largeur du filtre. C_s est la constante de Smagorinsky qui varie en pratique de 0.1 à 0.25.

Dans le cas où le nombre de Reynolds de turbulence pourrait devenir faible, C_s ne peut plus être considérée comme constante. Des simulations directes menés dans une géométrie simple (turbulence homogène dans un cube) et utilisées pour tester les fermetures de sous-maille ont montré (Mac Millan O.J. et Ferziger J.H., 1979) que l'on pouvait utiliser des approximations du type :

$$C_s = 0.128 \left(1 + \frac{24.5}{R_{sgs}} \right)^{-1} \quad (3.31)$$

où R_{sgs} est le nombre de Reynolds de sous-maille construit sur $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}}$.

Près des parois, des modifications sont apportées afin tenir compte de l'effet de la viscosité moléculaire, C_s la constante de Smagorinsky est exprimé à l'aide de la fonction qui s'inspire de la correction de Van Driest E.R. suivante :

$$C_s^2 = 0.01 \left(1.0 - \exp \left(- \left(\frac{d^+}{25} \right)^3 \right) \right) \quad (3.32)$$

où $d^+ = \frac{u_\tau d}{\nu}$ qui représente la distance adimensionnée normale à la paroi, d étant la distance la

plus proche à la paroi, et u_τ la vitesse de frottement définie selon $u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Une variante du modèle de Smagorinsky a été proposée par Lilly D.K. 1971, elle fait intervenir non point la valeur instantanée du taux de déformation mais sa valeur moyenne :

$$\nu_t = (C_l \Delta)^2 \sqrt{\langle 2 S_{kl} S_{kl} \rangle} \quad (3.33)$$

Tous ces schémas simples supposent que la turbulence de sous-maille est en équilibre local avec le champ à grande échelle, τ_{ij} est alors déterminé par les grands tourbillons.

Le flux d'énergie apporté par les tourbillons d'échelles explicites équilibre alors exactement le taux de dissipation dont le siège est la turbulence de sous-maille.

En effet, l'équilibre énergétique dans la zone de sous-maille s'écrit :

$$\nu_t S_{ij} S_{ij} = C \frac{k^2}{\Delta} \quad (3.34)$$

et en utilisant $\nu_t = C_1 D k^{\frac{1}{2}}$ il s'ensuit :

$$k = \frac{C_1}{C} \Delta^2 S_{ij} S_{ij} \quad (3.35)$$

$$\nu_t = \frac{C_1^{\frac{3}{2}}}{C^2} \Delta^2 \sqrt{\langle 2 S_{kl} S_{kl} \rangle} \quad (3.36)$$

III.5.2 Le modèle dynamique de sous-maille :

Le modèle de sous-maille dynamique fut proposé par Germano et al.1991, dans le quelle la constante de Smagorinsky n'est pas choisie arbitrairement ou optimisé, mais déterminer numériquement au cours de la simulation à l'aide d'un second filtrage :

un filtre test noté $(\widehat{\cdot})$ est appliqué aux équations (3.26)-(3.27), dont la largeur du filtre $\widehat{\Delta}$ est deux fois plus lâche que la largeur du premier filtre Δ , on obtient :

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{u}_j \widehat{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \overline{f}_i \quad (3.37)$$

Où le tenseur sous-maille est maintenant donné par :

$$T_{ij} = \left(\overline{u_i u_j} - \widehat{u}_j \widehat{u}_i \right) \quad (3.38)$$

On considère alors les tensions turbulentes du champ résolues (tensions de Léonard) définies par :

$$L_{ij} = \left(\overline{u_j u_i} - \widehat{u}_j \widehat{u}_i \right) \quad (3.39)$$

Qui représentent les contributions des tensions de Reynolds des échelles dont la largeur est comprise entre $\widehat{\Delta}$ et Δ .

Les équations (3.28)-(3.38)-(3.39), nous permettent d'écrire :

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij} \quad (3.40)$$

en combinant les hypothèses de Smagorinsky pour exprimer les différents tenseurs on obtient:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2(c\Delta)^2 |\overline{S}_{ij}| \overline{S}_{ij} \quad (3.41)$$

et :

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2(c\widehat{\Delta})^2 |\widehat{S}_{ij}| \widehat{S}_{ij} \quad (3.42)$$

avec :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \widehat{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.43)$$

$$|\overline{S}_{ij}| = \sqrt{2 \overline{S}_{kl} \overline{S}_{kl}}, \quad |\widehat{S}_{ij}| = \sqrt{2 \widehat{S}_{kl} \widehat{S}_{kl}} \quad (3.44)$$

Appliquons le filtrage test à l'équation (3.41), la substitution de cette équation et de l'équation (3.42) dans l'équation (3.40) donne :

$$L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} = -2C \left((\widehat{\Delta})^2 \widehat{S}_{ij} \widehat{S}_{ij} - \Delta^2 \left(\overline{S_{ij} S_{ij}} \right) \right) \quad (3.44)$$

Notons que la constante C (dont la variation est très faible) est une fonction de l'espace et du temps $C = C(x_i, t)$.

L'équation (3.44) est une équation tenseur (S_{ij} est un tenseur symétrique, dont la trace est nulle), c'est à dire qu'on a cinq équations à résoudre pour déterminer la constante C , Lilly 1992, proposa de choisir C dans un sens des moindres carrés, en définissant l'erreur par :

$$Q_{ij} = \left(L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} - 2CM_{ij} \right) \left(L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} - 2CM_{ij} \right) \quad (3.45)$$

avec :

$$M_{ij} = - \left((\widehat{\Delta})^2 \widehat{S}_{ij} \widehat{S}_{ij} - \Delta^2 \left(\overline{S_{ij} S_{ij}} \right) \right) \quad (3.46)$$

la procédure requière $\frac{\partial Q}{\partial C} = 0$, qui permet d'écrire :

$$C = \frac{M_{ij} L_{ij}}{2M_{ij} M_{ij}} \quad (3.47)$$

III.5.3 Le modèle de sous-maille à équations de transport :

Les écoulements turbulents instationnaires générés en les forçant, soit par des oscillations périodiques ajoutées au gradient de pression, soit par des perturbations périodiques dans l'espace et dans le temps sont considérés comme des écoulements en non-équilibre spectral. Les résultats expérimentaux sur ces écoulements pulsés, montrent que des effets de retard se produisent notamment entre les modulations des tensions de Reynolds et celle de la vitesse moyenne axiale. Ces résultats ne peuvent être représentés par les modèles classiques basés sur une hypothèse d'équilibre, cet effet d'histoire sera pris en compte par l'introduction d'une ou plusieurs équations de transport de sous-maille.

Le comportement du modèle de sous-maille dépendra bien sûr de la position de la coupure (filtre) qui se place entre les deux limites extrêmes de la simulation directe (le modèle de sous maille n'intervient pas), et la modélisation statistique (toute fluctuation turbulente est modélisée).

Par ailleurs, un nouveau modèle de sous-maille à deux équations de transport à été développé par Dejoan et Schiestel (1999), Befeno et Schiestel (2001), afin de traiter de la turbulence en non-équilibre spectral sur des maillages relativement lâches. Il s'agit d'une adaptation du modèle statistique $k-\varepsilon$ transposé en LES : les échelles caractéristiques de longueur et de vitesse de la turbulence de sous-maille sont déterminées à partir d'équations de transport pour l'énergie cinétique de sous-maille et le taux de dissipation. Ce modèle présente l'avantage de pas tomber en défaut lorsque la largeur du filtre est grande et de mieux tenir compte des effets du non-équilibre.

Horiuti K. et Yoshizawa A., 1985 ont introduit une modélisation de l'équation de l'énergie de turbulence de sous-maille $k_s = \frac{1}{2} \overline{u_i u_j}$ du type :

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k_s}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \text{diff}_{sgs} - \overline{\nu u_i u_i} \quad (3.48)$$

Plusieurs auteurs utilisent des hypothèses inspirées des modèles classiques de fermeture en un point qui utilisent en général le concept de viscosité isotrope de turbulence. Les tensions de Reynolds sont alors obtenues à l'aide d'une loi de comportement :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k_s \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.49)$$

Dans le cadre du modèle à une équation, la viscosité de sous-maille est évaluée sur la base de l'échelle de longueur définie analytiquement par Prandtl-Kolmogoroff :

$$\nu_t = C_{vsgs} l_{sgs} k_s^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

La modélisation de l'équation de transport de l'énergie turbulente de sous-maille est inspirée du modèle de Prandtl, qui permet de prendre en compte les effets visqueux près des parois, et où une hypothèse de diffusion en gradient est utilisée. L'adaptation de ce modèle à la modélisation de sous-maille conduit au formalisme suivant :

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k_s}{\partial x_j} = 2 \nu_t S_{ij} S_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + c \Delta k_s^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial k_s}{\partial x_j} \right) - c \frac{k_s^{\frac{3}{2}}}{\Delta} \quad (3.51)$$

avec :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.52)$$

et

$$l_{sgs} = \Delta ; \Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}}$$

L'échelle de longueur caractéristique étant donnée par la largeur du filtre, il devient inutile dans le cas présent, d'utiliser une équation modèle pour le taux de dissipation. Elle deviendrait nécessaire si la position de coupure devait prendre des valeurs quelconques.

Lorsque le maillage est très peu dense, la coupure spectrale peut se placer avant la zone inertielle du spectre et l'on a une simulation de très grandes échelles. Si de plus, l'écoulement est en non-équilibre spectral, la zone de sous-maille ne sera pas en équilibre et la taille de la maille de calcul ne pourra plus être une bonne estimation de l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence. Cette constatation justifie dans ce cas l'introduction de modèles de sous-maille à deux équations de transport.

Les équations du champ turbulent k et ε peuvent être déduites des équations modélisées présentées par Launder B.E., 1975 en utilisant une hypothèse de diffusion en gradient et une viscosité isotrope pour la diffusion turbulente k et ε , dont la formulation est donné sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k_s}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_s}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{s1} P_k \frac{\varepsilon}{k_s} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{s2} \frac{\varepsilon^2}{k_s} \quad (3.54)$$

le terme P_k représente la production d'énergie turbulente :

$$P_k = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.55)$$

et

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.56)$$

Pour déterminer les constantes numériques on adopte la même approche utilisée par Dejoan et Schiestel (1999). Dans une approche heuristique on supposera que la turbulence de sous-maille peut être formellement décrite, en turbulence homogène, par le système d'équations :

$$\frac{dk_s}{dt} = F - \varepsilon \quad , \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = C_{s1} F \frac{\varepsilon}{k_s} - C_{s2} \frac{\varepsilon^2}{k_s} \quad (3.57)$$

Où F est le flux d'énergie entrant dans la zone de sous-maille.

Si on se place en situation d'équilibre, il est possible simplement de faire le lien avec le modèle classique $k-\varepsilon$ qui permet de modéliser l'énergie cinétique turbulente totale k , cela par une hypothèse de similitude. En effet, si le rapport $\frac{P}{\varepsilon}$ où P est le taux de production

d'énergie, est supposé constant et avec $k = k_p + k_s$ (énergie explicite + énergie implicite), alors :

$$\frac{\frac{dk_p}{dt}}{\frac{dk_s}{dt}} = \frac{k_p}{k_s} = \frac{P-F}{F-\varepsilon} \quad \text{conduit à} \quad F = \varepsilon + (P-\varepsilon) \frac{k_s}{k} \quad (3.58)$$

Il en résulte l'équation $\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{s1} P \frac{\varepsilon}{k} - \left[\frac{k}{k_s} (C_{s1} - C_{s2}) + C_{s1} \right] \frac{\varepsilon^2}{k}$ qui, identifiée au modèle $k-\varepsilon$

Usuel, fournit les coefficients à utiliser dans (3.57), soit $C_{s1} = C_{\varepsilon 1}$ et $C_{s2} = C_{\varepsilon 1} + \frac{k_s}{k} (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})$

Ainsi, à la limite extrême $k_s \rightarrow k$, le modèle $k-\varepsilon$ est retrouvé avec $C_{\varepsilon 1} = 1.5$ et $C_{\varepsilon 2} = 1.92$.

La détermination de $\frac{k_s}{k}$ peut se faire de façon approchée en intégrant un spectre en $-\frac{5}{3}$,

$$k_s = \int_{\kappa_c}^{+\infty} \gamma \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} d\kappa \quad \text{conduit alors} \quad \frac{k_s}{k} = \frac{3}{2} \gamma N_c^{-\frac{2}{3}}, \quad \text{expression qui fait intervenir le nombre d'onde}$$

adimensionnel $N_c = \kappa_c L$ où L est l'échelle intégrale du spectre dans son ensemble, $L = k^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

De manière à réaliser $C_{s2} \rightarrow 1.92$ lorsque $k_s \rightarrow k$ (soit $N_c \rightarrow 0$, on choisira empiriquement :

$$C_{\varepsilon 1} = 1.5 \quad \text{et} \quad C_{\varepsilon 2} = 1.5 + 0.42 \frac{1}{1 + \beta N_c^{\frac{2}{3}}}.$$

On notera que $C_{\varepsilon 2}$ varie avec le maillage. En pratique on évaluera L par l'expression $L = \kappa y$
Finalement:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.5, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.5 + 0.42 \frac{1}{1 + 0.38 N_c^{\frac{2}{3}}}, \quad \sigma_k = 1., \quad \sigma_\varepsilon = 1.5, \quad C_\mu = 0.09 \quad (3.59)$$

Où $\kappa_c = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}}$ représente la coupure spectrale déduite de la taille de la maille et L une macro échelle ici approchée par $L = 0.41 d$, d étant la distance à la paroi la plus proche.

La mise au point de ce modèle et son test sur le cas du canal pulsé avaient montré d'intéressantes potentialités (Dejoan et Schiestel, 1999).

Dans la région de paroi, une extension à faible nombre de Reynolds est obtenue par transposition directe du modèle statistique de Jones et Launder (1972).

III.6 Equations du mouvement des grandes structures turbulentes en Coordonnées généralisées :

Après avoir défini les principales concepts d'analyse tensorielle, utile pour la construction des équations différentielles d'un écoulement incompressible du mouvement des grandes structures turbulentes en coordonnées curvilignes. plusieurs formes d'écriture s'imposent à nous, suivant le choix des variables dépendantes et des considérations de conservation des équations. Bien que d'une manière purement formelle elles soient équivalentes les unes aux autres, ces formulations renferment n'est au moins des différences considérables d'un point de vue numérique. Une vue d'ensemble des différentes options avec leurs avantages et inconvénients sont présentées dans [27]. Dans la présente étude une formulation invariante en coordonnées généralisées du flux de volume contravariant est adoptée.

Nous considérons les équations Navier-Stokes filtrées (3.25)-(3.27). Dans le but d'exprimer ces équations dans une forme invariante au changement de coordonnée, on rétablit la notation tensorielle générale avec des variances correctes, en remplaçant les dérivées partielles par des dérivées covariantes et en utilisant les tenseurs métriques :

$$u_{,\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} + (u^{\alpha} u^{\beta})_{,\alpha} + (g^{\alpha\beta} p)_{,\alpha} - \tau_{,\beta}^{\alpha\beta} = f^{\alpha} \quad (3.61)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{Re} + \nu_t\right) \cdot (g^{\alpha\gamma} u_{,\gamma}^{\beta} + g^{\beta\gamma} u_{,\gamma}^{\alpha}) \quad (3.62)$$

Notons qu'en coordonnées cartésiennes $g^{\alpha\beta}$ est égal au symbole de Kronecker δ_{α}^{β} . L'application du Théorème 2.5, nous permet, d'écrire ces équations en coordonnées généralisées sous la formulation suivante :

$$U_{,\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial t} + (U^{\alpha} U^{\beta})_{,\alpha} + (g^{\alpha\beta} p)_{,\alpha} - \tau_{,\beta}^{\alpha\beta} = F^{\alpha} \quad (3.64)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{Re} + \nu_t\right) \cdot (g^{\alpha\gamma} U_{,\gamma}^{\beta} + g^{\beta\gamma} U_{,\gamma}^{\alpha}) \quad (3.65)$$

Où U^{α} et F^{α} sont les composantes contravariantes du champ de vitesse et des forces extérieures. Pour des raisons que nous précisons plus tard nous choisirons les composants du flux de volume contravariants V^{α} , donné par,

$$V^{\alpha} = \sqrt{g} U^{\alpha} \quad (3.66)$$

comme variables dépendantes. Notez que V^{α} est un tenseur densité de rang 1.

Une procédure semblable est appliquée aux équations de modélisation de sous-maille des grandes échelles turbulentes. Nous avons la formulation invariante en coordonnées généralisée des équations de transport de l'énergie de turbulence de sous maille et du taux de dissipation, suivantes :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + (U^\alpha k_s)_{,\alpha} - \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) g^{\alpha\beta} k_{s,\beta} \right)_{,\alpha} = P_k - \varepsilon \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (U^\alpha \varepsilon)_{,\alpha} - \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) g^{\alpha\beta} \varepsilon_{,\beta} \right)_{,\alpha} = C_{s1} P_k \frac{\varepsilon}{k_s} - C_{s2} \frac{\varepsilon^2}{k_s} \quad (3.69)$$

Où le terme P_k représente la production d'énergie turbulente :

$$P_k = 2 \cdot \nu_t S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \quad (3.70)$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\gamma} U_{,\gamma}^\beta + g^{\beta\gamma} U_{,\gamma}^\alpha), \quad S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (U_{,\alpha,\beta} + U_{,\beta,\alpha}) \quad (3.71)$$

sont respectivement le tenseur contravariant et covariant de déformation du champ filtré. Les valeurs des constantes de fermeture sont données par (3.59).

Les équations du modèle de fermeture de sous-maille peuvent être considérées comme des équations de convection diffusion avec terme source non linéaire. Soit l'équation de transport générale suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (U^\alpha \phi)_{,\alpha} - (\Gamma \cdot g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta})_{,\alpha} = S \quad (3.72)$$

Où la quantité ϕ représente ε ou bien k , Γ est un coefficient de diffusion et S terme source qui dépend de U^α et de ϕ .

En utilisant (2.56) et (2.57), les équations du mouvement (3.63), (3.64) et l'équation de transport (3.72) peuvent s'écrire sous une forme plus approprié à une discrétisation en volumes finis :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} U^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} = F^\alpha \quad (3.74)$$

$$T^{\alpha\beta} = U^\alpha U^\beta + g^{\alpha\beta} p - \tau^{\alpha\beta} \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} Q^\beta}{\partial \zeta^\beta} = S \quad (3.76)$$

$$Q^\alpha = (U^\alpha \phi) - (\Gamma \cdot g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}) \quad (3.77)$$

III.7 Les Problèmes de simulation des régions près de la paroi :

Les différents résultats provenant des simulations SGE confirment l'efficacité de cette méthode à transcrire les principales phénomènes liés à une turbulence présentant une zone inertielle dynamique (sillage d'écoulement, jets et région externe de couche limite à un nombre de Reynolds élevé). Cette zone inertielle diminue à l'approche d'une limite solide, déplaçant la région à isotropie locale qu'a des échelles de plus en plus petites. D'après Saddoughi et Veeravalli [124] dans leur étude d'un écoulement de couche de mélange, le critère d'isotropie local est directement lié au taux de déformation du champ S_{ij} . Le taux de déformation du champ moyen devient bien sûr plus grand au voisinage d'une paroi, généralisant ainsi l'anisotropie à des plus petites échelles proche d'une limite solide. Aussi, très près des parois, les plus petits tourbillons doivent encore être suffisamment résolus. Ces structures cohérentes dans la sous-couche visqueuse ont une influence importante puisqu'ils interagissent avec la région tampon responsable pour une majeure partie de la production d'énergie [56]. Il a été estimé qu'utiliser la simulation SGE autour d'une aile d'avion à nombre de Reynolds de corde de 10^7 exigerait un nombre de nœuds de l'ordre de 10^{11} [137]. Cela illustre clairement les problèmes de la SGE près des parois. D'où la nécessité d'introduire de conditions aux limites basées sur les lois de parois pour des simulations à des nombres de Reynolds élevés, ou bien utilisé une approche simulant les très grandes échelles combinant la modélisation statistique près des parois et une simulation des grandes échelles en dehors [137][30].

III.8 Nouvelles directions de recherche, problèmes ouverts :

Citons le modèle de similitude d'échelles. (Bardina J., Ferizeger J.H. et Reynolds W.C., 1980, la similitude des modèles de turbulence, 1984) qui repose sur l'idée que la majorité des interactions entre grandes échelles et petites échelles est concentrée près de la coupure. En remarquant que le champ $\overline{\phi}$ est plus riche en grandes structures que le champ $\bar{\phi}$ on est conduit à définir : $\phi^* = \overline{\phi} - \bar{\phi}$ qui est supposé être représentatif des tourbillons d'échelles voisines des nombres d'onde de coupure. Le modèle suppose alors :

$$\tau_{ij} = C_b \left(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \right) \quad (3.78)$$

Ce qui traduit l'hypothèse que le champ fluctuant de sous-maille a une structure semblable à celle de la partie du champ filtré correspondant aux plus forts nombres d'ondes.

Les écoulements étudiés par simulation numérique de grandes structures turbulentes sont généralement des écoulements en géométrie assez simple et nécessitent l'emploi des supercalculateurs. L'extension à des situations industrielles ne peut être envisagée de façon courante. Parmi les problèmes ouverts, reste bien sûr le problème central de la fermeture de sous-maille, mais aussi d'autres problèmes plus techniques de mise en œuvre comme la formulation des conditions aux limites dans les sections d'entrée et de sortie. Pratiquement les conditions périodiques sont utilisées chaque fois que la direction correspondante peut être considérée comme homogène mais dans les cas plus généraux le problème reste plus délicat à maîtriser. Sur le plan des fondements de la théorie, le filtrage ne peut être assimilé à une moyenne statistique conditionnelle de façon simple. Ce fait est à l'origine des propriétés opératoires plus complexes de l'opérateur de filtrage.

Après avoir abordé certains aspects concernant la modélisation de sous maille, nous passons à la description de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes filtrées dans lesquelles les termes non linéaires ont été modélisés.

Chapitre IV

Résolution numérique

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une formulation tensorielle, invariante en coordonnées des équations différentielles de quantité du mouvement des grandes structures turbulentes d'un écoulement incompressible, et des principales équations de transport nécessaire à la modélisation de la turbulence des échelles de sous-maille. La résolution numérique de ces équations, impose en premier lieu de faire un choix judicieux des techniques de discrétisation spatiale, capables de fournir des approximations physiquement réalistes même sur des maillages distordus. Au cours des précédentes quinze dernières années plusieurs approches ont été proposées pour le développement des modélisations d'écoulements turbulents autour de géométrie complexe, tel que les méthodes des différences finies et des volumes finis, en maillage décalé ou collocatif, en coordonnées orthogonal ou non-orthogonal, en formulation de vitesses cartésiennes ou contravariantes. Un brève résumé des différentes possibilités de ces méthodes en tenant compte de leurs avantages et inconvénients sera donner dans la prochaine section.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une intégration spatiale en volume finie efficace et précise ainsi qu'une intégration temporelle stable des équations de Navier-Stokes filtrées avec deux équations de modélisation de turbulence des petites échelles sur un maillage de calcul décalé couramment utilisé pour les calculs d'écoulements incompressibles, car ils facilitent le couplage entre les champs de vitesse et de pression, en autorisant l'emploi de schéma centré pour approcher les dérivées spatiales de type gradient et divergence. En effet, grâce à la localisation des nœuds de pression par rapport aux nœuds des composantes de la vitesse, un schéma centré conduit à des molécules compactes à la fois pour le calcul de la divergence du champ de vitesse intervenant dans l'équation de continuité et dans la détermination du gradient de pression dans l'équation de la quantité de mouvement. Ceci, aussi interdit tout découplage entre les champs de vitesse et de pression, ce qui renforce la robustesse de la méthode. Les flux de volume contravariants seront choisis comme variables dépendantes. On supposera que Le domaine de calcul numérique rectangulaire ou cubique (structuré) est obtenu par transformation d'un domaine physique doublement ou multi connexes. Une discrétisation standard sera présenté dans la Section IV.3, restreinte à des grilles de maillage plus ou moins réguliers, en conséquence de l'avènement des symboles de Christoffel, qui exigent l'admissibilité d'une deuxièmes dérivés de la transformation $x=x(\zeta)$. Malgré cela, l'exactitude de la discrétisation peut être maintenue si certaines règles relatives aux approximations des quantités géométriques sont suivies. Dans la Section IV.4, une méthode plus appropriée aux maillages irréguliers, nécessaire dans un calcul resserré près des parois sera adopté afin de contourner les difficultés associées à ces derniers. Il est attendu que ces discrétisations maintiendront la stabilité et la consistance des schémas numériques utilisés dans la simulation, pour des changements rapides des dimensions de la maille dans le domaine physique. la discrétisation temporelle doit être réalisée de façon implicite pour ne pas baser le pas de temps sur la vitesse de propagation des ondes sonores, mais sur la vitesse du fluide. cependant, même si elle autorise l'emploi de grands pas de temps, l'avantage de la méthode n'est pas garanti, car la résolution d'un pas de temps peut se révéler coûteuse et peu précise suivant l'approche retenue.

IV.1 Analyse des travaux antérieurs de discrétisation en coordonnées curvilignes :

Une synthèse des différentes méthodes numériques utilisées pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes incompressible et de transport de la turbulence en coordonnées généralisées est évaluée et analysée afin d'en définir une ligne de procédures plus adaptées aux objectifs recherchés dans la présente étude.

Généralement, deux approches de base peuvent être considérées pour l'écriture des équations dans un système de coordonnées curvilignes. La première méthode consiste en une transformation complète des équations gouvernant le mouvement en coordonnées généralisées, comme ce fut présenté au chapitre précédent. Une telle formulation invariante en coordonnée implique l'introduction de plusieurs paramètres géométriques, et exige un temps de calcul et d'espace mémoire onéreux. De plus, l'évaluation des symboles de Christoffel, à partir d'un maillage irrégulier induit une source d'erreurs et d'instabilité qui peut altérer sérieusement la simulation. C'est peut-être là le principal inconvénient de cette stratégie, en particulier quand un modèle à deux équations de transport est utilisé, dont le taux de production d'énergie turbulente, nécessite le calcul de pas moins de six différents symboles de Christoffel dans le cas d'une simulation bidimensionnelle.

La deuxième approche de résolution procède par une transformation partielle des équations de Navier-Stokes et de modélisation afin d'éviter l'apparition des symboles de Christoffel, en maintenant les vitesses cartésiennes comme variables dépendantes obtenant ainsi une formulation conservatrice, et structurer plus simple à programmer.

Le choix entre les deux approches décrites au-dessus est dicté par le type de maillage utilisé: décalé ou collocatif. En maillage décalé, généralement les composantes de la vitesse cartésiennes, ne sont pas perpendiculaires par rapport aux faces de la maille, menant ainsi à une discrétisation instable consécutive d'une non-conservation de la masse discrétisée suivant une maille. D'où, la nécessité de choisir des variables dépendantes orientées suivant le maillage telles que les flux de volume contravariants. Sur un maillage collocatif l'orientation suivant les grilles de la maille dévient facultatif, levant ainsi les contraintes liées au maillage décalé, l'utilisation des vitesses cartésiennes comme variables primitives dans les équations de mouvement paraît alors satisfaisant.

À la lumière des observations précédentes, l'approche collocatif/cartésiennes pour la discrétisation des équations Navier-Stokes moyennés avec le modèle standard " $k-\varepsilon$ " en coordonnées généralisées est devenu très populaire et a été largement utilisée pendant les quinze dernières années [38], [113], [104], [29], [117], [107], [19], [89], [180], [20], [169], [119], [144], [52] et [82]. Bien que l'approche collocatif soit très populaire, elle présente toute fois un inconvénient de taille celui des mesures spéciales exigées pour l'obtention d'une discrétisation stable, comme par exemple, l'interpolation de Rhie-Chow [113] afin d'éviter les difficultés dues au couplage de la pression et de la vitesse. Par contre, un maillage décalé a de nombreux avantages pour un calcul en écoulement incompressible, tel que l'élimination naturelle des oscillations non-physiques du calcul de la pression. En coordonnées cartésiennes un maillage décalé assure une discrétisation plus naturel, simple et exact qu'en maillage collocatif. Plusieurs études procédant par des discrétisations des équations de Reynolds sur des maillages décalé avec les composantes cartésiennes de vitesse comme variables primitives ainsi que le modèle standard " $k-\varepsilon$ " en coordonnées généralisées sont présentés dans [92], [111], [10], [78], [173] et [17]. Comme c'est déjà mentionné cette approche peut donner lieu à une à discrétisations instable. Suivant Chen et al. [17], l'unique méthode pour éviter ces difficultés, est de choisir un système de coordonnées en essayant de minimiser l'angle entre

les variables dépendantes et la grille. Règle, très difficile a vérifié pour un domaine général, surtout en calcul tridimensionnel.

Des discrétisations sur un maillage décalé avec des vitesses orientées en grille comme inconnues sont présenté dans [109], [112], [26], [140], [87] et [57]. Dans [140] les équations gouvernant le mouvement sont formulées en notation vectorielle dont l'avantage est de ne pas présenté explicitement de symbole de Christoffel. Dans [112] et [87] les composantes de la vitesse contravariantes sont utilisées, tandis que dans [109], [26] et [57] les auteurs utilisent les composantes physiques contavariantes de la vitesse comme inconnues.

Quelques publications utilisent le flux de volume contravariant V^α comme variables primitives (justement celles adoptées par notre étude) sur un maillage décalé [51], [120] et [7] restreintes aux écoulements laminares.

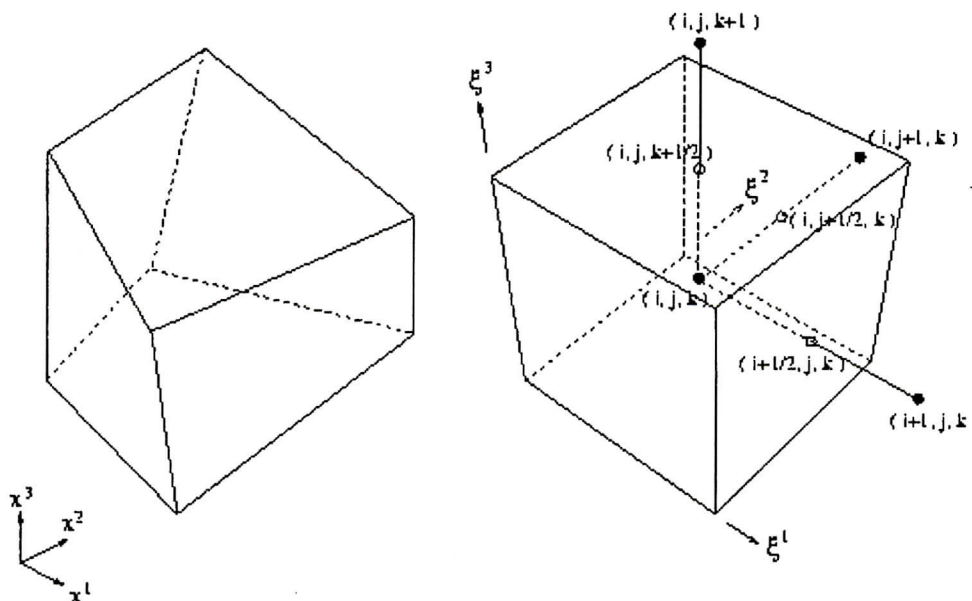
Jusqu'a présent, il est très compliqué de dire quelle est la meilleure approche pour calculer l'écoulement incompressible autour de géométries arbitraires, mais il est certainement évident que l'approche collocatif/cartésienne très répandue est plus préférée, tandis que l'approche décalée/contravariant, qui demande dans un premier temps une écriture fastidieuse paraît une fois cette étape dépassée plus prolifique, par des calculs plus stables et consistants simulant le mouvement des grandes structures turbulentes.

IV.2 Génération de maillage et paramètres géométriques :

On considère le maillage en coordonnées curvilignes tridimensionnel d'un cube G transformé d'un domaine physique Ω . Dans G une maille uniforme G_h est défini par :

$$G_h = \left\{ \zeta_i, \zeta_{i-\frac{1}{2}}^1 = (i-1)\Delta\zeta^1, \zeta_{j-\frac{1}{2}}^2 = (j-1)\Delta\zeta^2, \zeta_{k-\frac{1}{2}}^3 = (k-1)\Delta\zeta^3; i=1,2,\dots,I, j=1,2,\dots,J, k=1,2,\dots,K \right\} \quad (4.1)$$

Ces points sont les faces des cellules. La figure(4.1) représente une cellule 3D. Il est supposé que les coordonnées des faces de la cellule soient les seules informations de base recherchées par la génération de maillage. Les faces de la cellule sont connectées par segments de lignes droites, correspondantes à l'hypothèse d'une transformation d'un domaine physique doublement ou multi connexes.



Figure(4.1) Une maille tridimensionnelle dans le domaine physique Ω , et son image dans le domaine G

Dans un plan bidimensionnel ces raccordements sont appelés nœuds de maille. Une cellule tridimensionnelle est bornée par six faces, chacune une d'elles, est défini par quatre droites connectées, qui dans un cas général ne sont pas tracées dans le même plan, et dont les grilles n'ont plus besoin d'être uniforme. La cellule centrée au point $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ est appelée G_{ijk} et son image dans le plan Ω est appelé Ω_{ijk} . Le maillage $x=x(\zeta)$ est défini par les coordonnées des points $x\left(\zeta_{i-\frac{1}{2}}^1, \zeta_{j-\frac{1}{2}}^2, \zeta_{k-\frac{1}{2}}^3\right)$ étendus à tout le domaine G par interpolation tri-linéaire (bi-linéaire en bidimensionnel). Ainsi, à l'intérieur de la maille la transformation est donnée par la relation suivante :

$$x=c_0+c_1\zeta^1+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+c_4\zeta^1\zeta^2+c_5\zeta^1\zeta^3+c_6\zeta^2\zeta^3+c_7\zeta^1\zeta^2\zeta^3 \quad (4.2)$$

Où les constantes C_0, C_1, \dots, C_7 sont convenablement choisies. Ces constantes diffèrent d'une maille à une autre, pour une transformation $x=x(\zeta)$ supposée doublement ou multi connexes. Par ailleurs, on admet une certaine orientation des surfaces des faces de la cellule Ω_{ijk} .

La génération de maillage permet de collecter les différentes coordonnées des quatre points limitant chaque face de maille afin de pouvoir calculer les principaux paramètres géométriques liés au maillage. Cela sera discuté au-dessous, en premier lieu nous considérerons les propriétés de continuités de ces quantités. En partant de l'hypothèse d'une transformation doublement ou multi connexes tous les paramètres géométriques sont calculés à l'intérieur d'une cellule en prenant des différences centrées. Notons par ailleurs la discontinuité de certaines de ces quantités sur les faces de la cellule. Par exemple, à partir de l'équation.(4.2), on admet que $a(\alpha)$ est constant le long de la ligne ζ^β (c.-à-d. $\zeta^\beta = \text{constante}$, $\alpha \neq \beta$), et varie d'une maille à une autre, même pour des maillages non réguliers. Par contre, le long des faces $\zeta^\alpha = \text{constant}$, $a(\alpha)$ est discontinu si le maillage utilisé est non linéaire. Sur les autres faces de la maille, on trouve que $a(\alpha)$ est continu. D'après (4.2) la dérivée ζ^β du vecteur base covariant $a(\alpha)$ est continu sur les faces γ tel que $\gamma \neq \alpha \neq \beta$, toutefois sur les faces α et β la dérivée $\frac{\partial a(\alpha)}{\partial \zeta^\beta}$ est en général discontinue.

Tout cela présage des nombreuses difficultés ayant trait aux calculs des symboles de Christoffel. Les propriétés de continuités des quantités géométriques restantes suivent ceux des vecteurs de base covariants. D'après (2.32) et (2.39), \sqrt{g} est discontinu sur toutes les faces de la maille. Alors que $\sqrt{g}a(\alpha)$ est régulier et seulement discontinu sur les faces β ($\alpha \neq \beta$). Les quantités géométriques sont calculées à l'aide de différences centrales et d'interpolation linéaire. Par exemple, les vecteurs base covariants $a(\alpha) = \frac{\partial x}{\partial \zeta^\alpha}$ sont calculés

suivant un arrangement décalé au centre des bords de la maille G_{ijk} d'après :

$$a(1)^\beta \Big|_{(i, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})} = \frac{x(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta - x(i - \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta}{\Delta \zeta^1}$$

$$a(2)^\beta \Big|_{(i \pm \frac{1}{2}, j, k \pm \frac{1}{2})} = \frac{x(i \pm \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta - x(i \pm \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})^\beta}{\Delta \zeta^2}$$

$$a_{(3)}^{\beta} \Big|_{\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k\right)} = \frac{x_{\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}^{\beta} - x_{\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)}^{\beta}}{\Delta \zeta^3} \quad (4.3)$$

Aux autres points (au centre de la maille, faces) les vecteurs de base covariants sont obtenus à partir de leurs valeurs au milieu des faces par une simple moyenne, par exemple on a :

$$a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left(a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} \right) \quad (4.4)$$

Sur les faces où les vecteurs de base covariants sont discontinus, leurs valeurs sont obtenues grâce à des moyennes arithmétiques des vecteurs de base covariants existants :

$$a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)} = \frac{1}{4} \left(a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} + a_{(1)}^{\beta} \Big|_{\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)} \right) \quad (4.5)$$

Les vecteurs de base contravariants sont obtenus par orthogonalité de (2.31). Dans le cas bidimensionnel, en prenant, $a_{(1)}^1 = a_{(2)}^2 = 0$, l'équation (2.31) permet d'écrire :

$$a^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g}} (a_{(2)}^2 - a_{(2)}^1)^T \quad \text{et} \quad a^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{g}} (-a_{(1)}^2 - a_{(1)}^1)^T \quad (4.6)$$

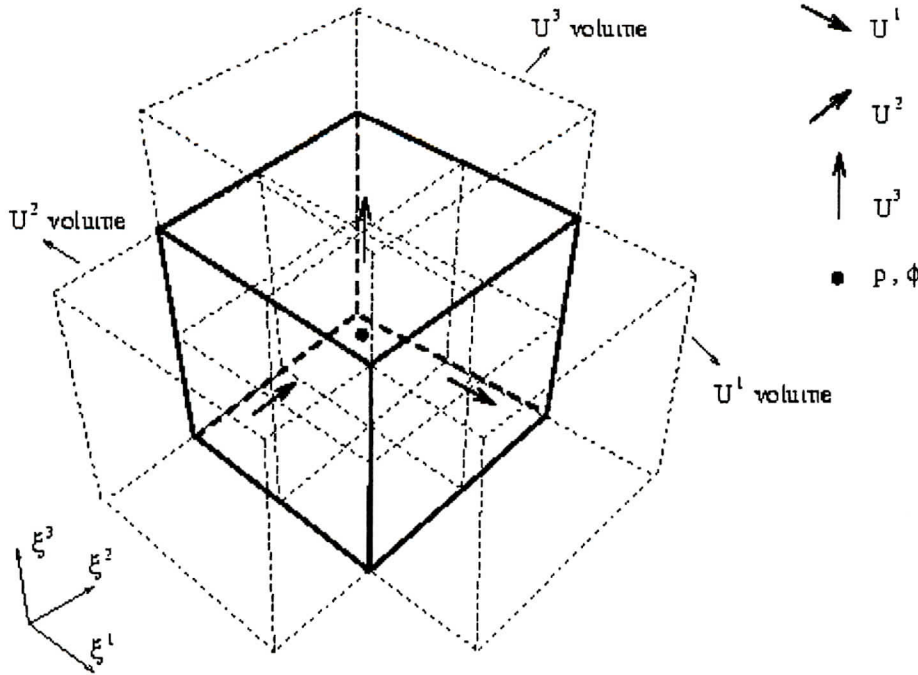
$$\text{avec} \quad \sqrt{g} = a_{(1)}^1 a_{(2)}^2 - a_{(1)}^2 a_{(2)}^1 \quad (4.7)$$

Après les différentes approximations numériques, il est préférable de satisfaire à la relation (2.58), ce qui est toujours le cas en calculant les vecteurs de base contravariant l'aide de (4.6) ou, dans un cas plus général, par la condition d'orthogonalité (2.31). A partir de (2.36) et (2.37) on peut déduire les valeurs des tenseurs métriques covariants et contravariants de tous les points du maillage. Les symboles de Christoffel sont alors calculés par des différences centrales après avoir calculé $a_{(\alpha)}$ et $a^{(\alpha)}$ aux points exigés, en utilisant l'équation (2.46). Cela complète notre description de la méthode de calcul des quantités géométriques.

IV.3 Discrétisation invariante en volumes finis des équations gouvernant le mouvement :

La méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser les équations de l'écoulement autour d'un corps arbitraire (3.73)-(3.77). Cette méthode est basée sur la résolution d'une forme intégrale de ces équations. Le domaine Ω est divisé en volumes élémentaires auxquelles on applique l'intégration. Un arrangement décalé des variables est utilisé où tous les scalaires (pression et quantités turbulentes) sont localisés aux centres de la cellule (i, j, k) alors que les composants de la vitesse U^α sont placés dans la direction ζ^α au centre des faces de la maille. En conséquence, U^1, U^2 et U^3 sont définis respectivement aux points $\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right), \left(i, j + \frac{1}{2}, k\right), \left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)$. Pour chaque inconnu nous définissons une collection d'un nombre fini de volume de contrôle sur tout le domaine Ω . La figure (4.2) présente l'arrangement de l'ensemble des inconnues, ainsi que le volume de contrôle correspondant dans un système ζ^α . Chaque inconnu est centré au milieu de la maille de contrôle.

Dans les trois prochaines sections nous considérons respectivement la discrétisation spatiale de l'équation de continuité (3.73), des équations de Navier-Stokes filtrées (3.74) et de l'équation du transport (3.76)- (3.77).



Figure(4.2) L'arrangement des inconnues dans une maille décalé 3D

En utilisant le théorème de divergence de Gauss, on transforme les intégrales de volume contenant les termes d'opérateurs différentiels en intégrales de surface des faces de la cellule. La dérivée temporelle et la partie droite des équations constituent les termes source ainsi que les termes dus à la courbure qui ne peuvent pas être exprimés en opérateurs différentiels de flux de volume et qui doivent être évalués d'une autre manière. La transformation de maillage $x=x(\zeta)$ est choisie de telle façon $\Delta\zeta^\alpha=1$ pour $\alpha=1,2,3$.

IV.3.1 L'équation de continuité :

La discrétisation de l'équation de la continuité (3.73) est obtenue par une intégration sur chaque cellule G_{ijk} suivant :

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} U^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega = \int_{C_{i,j,k}} \frac{\partial \sqrt{g} U^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3$$

$$\approx V_1 \left| \begin{matrix} i+\frac{1}{2}, j, k \\ i-\frac{1}{2}, j, k \end{matrix} \right| + V_2 \left| \begin{matrix} i, j+\frac{1}{2}, k \\ i, j-\frac{1}{2}, k \end{matrix} \right| + V_3 \left| \begin{matrix} i, j, k+\frac{1}{2} \\ i, j, k-\frac{1}{2} \end{matrix} \right| = 0 \tag{3.8}$$

Avec :

$$V^\alpha = \sqrt{g} U^\alpha = \sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot u \tag{3.9}$$

appelés flux de volume, et utilisés comme inconnues primitives, au vu des constatations suivantes :

1. Quand on représente un champ de vitesse constant u en composantes contravariantes, le recalcul du vecteur original u à partir de ces composantes devrait être exactement retrouvé, or cette exigence peut être satisfaite seulement si on utilise les composantes contravariantes V^α au lieu de U^α (voir [91]).

2. D'après la section IV.2, il est évident que la vitesse $U^\alpha = a^{(\alpha)}.u$ n'est pas continue sur les faces α . D'un autre coté puisque $\sqrt{g}a^{(\alpha)}$ est continu sur toutes les faces de maille $\zeta^\alpha = \text{constant}$ alors, V^α l'est aussi.

IV.3.2 Les équations de quantité de mouvement :

L'équation (3.74) peut être réécrite sous la forme tensorielle suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\beta} = F^\alpha - \frac{\partial U^\alpha}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} \quad (4.10)$$

avec :
$$T^{\alpha\beta} = U^\alpha U^\beta + g^{\alpha\beta} p - \tau^{\alpha\beta}$$

Ces équations sont discrétisées dans l'espace par intégration suivant un volume de contrôle centré au point de localisation de V^α . Par exemple, pour $\alpha=1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{1\beta}}{\partial \zeta^\beta} d\Omega &= \int_{C_{i+\frac{1}{2},j,k}} \frac{\partial \sqrt{g} T^{1\beta}}{\partial \zeta^\beta} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \\ &\approx \sqrt{g} T^{11} \Big|_{(i,j,k)}^{(i+1,j,k)} + \sqrt{g} T^{12} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}^{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} + \sqrt{g} T^{13} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La partie droite de l'équation (4.10) est intégrée en utilisant la règle du point milieu :

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}} \left(F^1 - \frac{\partial U^1}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} \right) d\Omega \approx \sqrt{g} \left(F^1 - \frac{\partial U^1}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T^{\beta\gamma} \right) \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} \quad (4.12)$$

L'intégration de l'équation (4.10) sur le volume de contrôle $\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k}$ et $\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ respectivement, pour $\alpha=2$ et $\alpha=3$ peut être obtenue d'une manière similaire à celle présentée au-dessus. La discrétisation est complétée par la substitution de (3.62) et (3.75) dans (4.11). Les symboles de Christoffel sont introduits dans les équations discrétisées par les dérivées covariantes des vitesses contravariantes dans (3.62). En outre, la vitesse U^α est remplacée dans les équations

obtenues par $\frac{V^\alpha}{\sqrt{g}}$. La discrétisation du terme convective nécessite une linéarisation par la méthode standard de Newton:

$$V^\alpha V^\beta \approx \bar{V}^\alpha V^\beta + V^\alpha \bar{V}^\beta - \bar{V}^\alpha \bar{V}^\beta \quad (4.13)$$

Où \bar{V}^α représente la vitesse contravariante prise au temps précédent. Finalement les flux à travers les faces de la maille contenant les quantités de convection et les dérivées de diffusion doivent être évalués approximativement par des différences centrales combinées à des interpolations bi-linéaire (4-points), par exemples :

$$V_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^2 = \frac{1}{4} (V_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^2 + V_{(i,j-\frac{1}{2},k)}^2 + V_{(i+1,j+\frac{1}{2},k)}^2 + V_{(i+1,j-\frac{1}{2},k)}^2) \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3} \Big|_{(i,j,k)} = V_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^3 - V_{(i,j,k-\frac{1}{2})}^3 \tag{4.15}$$

Bien que les différences centrales soient non-monotones, et donnent lieu à des oscillations non-physiques, typiquement au voisinage des régions à fort gradient, elles restent une référence très fiable, pour des simulations à des nombres de Reynolds élevés. En pratique, la discrétisation des équations de quantité de mouvement est implémentée par des schémas centraux même non-monotones dont les résultats sont d'une précision avérée.

Le discrétisation de l'équation de mouvement- V^1 dans le cas bidimensionnel présente un stencil de discrétisation de 19-points sur lesquels les molécules des différents termes sont représentées sur la figure (4.3)

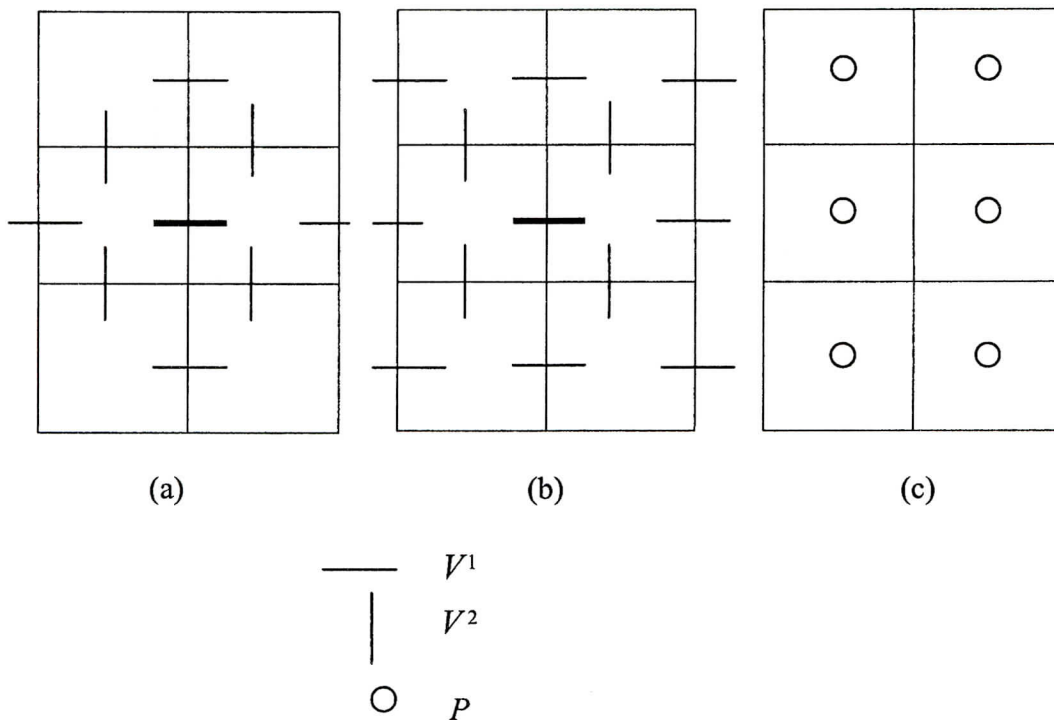


Figure (4.3) Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement - V^1 en 2D: (a) les termes de Convection ; (b) les termes de diffusion ; (c) les termes de pression

Le stencil- V^2 est obtenu par rotation de 90° . En trois dimensions, le nombre total des variables rassemblées dans l'équation de mouvement- V^1 est de 61 (V^1 -19 points, V^2 -16 points, V^3 -16 points et P - 10 points) qui est plus compliqué à tracer.

IV.3.3 L'équation du transport :

L'équation du transport (3.76) est intégrée sur une cellule de la pression au centre (i, j, k) suivant la formulation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i,j,k}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} Q^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega &= \int_{C_{i,j,k}} \frac{\partial \sqrt{g} Q^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \\ &\approx \sqrt{g} Q^1 \Big|_{(i-\frac{1}{2}, j, k)}^{(i+\frac{1}{2}, j, k)} + \sqrt{g} Q^2 \Big|_{(i, j-\frac{1}{2}, k)}^{(i, j+\frac{1}{2}, k)} + \sqrt{g} Q^3 \Big|_{(i, j, k-\frac{1}{2})}^{(i, j, k+\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (4.16)$$

La partie droite de l'équation est intégrée en utilisant la règle du point milieu :

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} \left(S - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Omega \approx \sqrt{g} \left(S - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_{(i,j,k)} \quad (4.17)$$

On substitue (3.77) dans l'équation (4.16) pour compléter la discrétisation. Les inconnues ϕ sont obtenues au centre des cellules de calcul. Les différences centrales devraient être utilisées pour maintenir la précision au deuxième ordre. Cependant, ces schémas, ont une tendance à produire des oscillations qui peuvent endommager la stabilité des solutions du modèle à deux équations, et favorise l'apparition de valeurs négatives des quantités turbulentes accrues par la non-linéarité et le couplage fort entre les équations du modèle, ce qui peut entraver la convergence des solutions.

IV.3.4 Le terme de production dans le modèle à deux équations :

Le taux de production d'énergie turbulente formulé par (3.70) est un terme source dans les équations de modélisation de turbulence. La discrétisation de ce terme est porté au centre (i, j, k) par des différences centrales et d'interpolations bi-linéaires en utilisant le minimum de nœuds proches du point de discrétisation. De plus en utilisant $V^\alpha = \sqrt{g} U^\alpha$ comme inconnues, la dérivée covariante des composantes de la vitesse contravariante doit être exprimée en composantes du flux. En vertu de (2.49) et (2.54) on obtient :

$$U_{,\beta}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \zeta^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta \end{matrix} \right\} V^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} V^\gamma \right) \quad (4.18)$$

En conséquence le terme de production contiendra plusieurs symboles de Christoffel, particulièrement, en 3D produisant ainsi des résultats imprécis même sur des maillages faiblement irréguliers. Pour y remédier à cela ces symboles sont éliminés dans cette formule en utilisant le lemme de Ricci (2.53) substitué dans (3.71) suivant :

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(g^{\alpha\gamma} \frac{\partial U^\beta}{\partial \zeta^\gamma} + g^{\beta\gamma} \frac{\partial U^\alpha}{\partial \zeta^\gamma} - \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\gamma} U^\gamma \right) \quad (4.19)$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\gamma} \frac{\partial U^\gamma}{\partial \zeta^\beta} + g_{\gamma\beta} \frac{\partial U^\gamma}{\partial \zeta^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\gamma} U^\gamma \right) \quad (4.20)$$

Où, on remplace la vitesse U^α par $\frac{V^\alpha}{\sqrt{g}}$. Bien que, la discrétisation de (4.19) et (4.20) produit de meilleurs résultats que (4.18), elle reste imprécise pour des simulation sur des maillages déformés.

IV.4 Discrétisation Invariante des équations gouvernant le mouvement sur des maillages non-réguliers :

En conséquence, de la présence des symboles de Christoffel dans les équations discrétisées, la transformation $x=x(\zeta)$ utilisée pour générer le maillage doit être deux fois différentiable. Cela est vérifié si les points de la grille $x=x(\zeta)$, $\zeta \in G_h$ sont distribués d'une manière uniforme dans le domaine physique Ω doublement ou multi connexes. L'utilisation de maillage présentant des changements rapides de dimensions de maille a des fines pratiques est très répandue, par exemple la simulation de la turbulence près des parois d'un corps arbitraire, nécessite un traitement particulier, le maillage utilisé par les auteurs est resserré près des parois selon des projections topographiques une seule fois différentiable. Dans ce cas l'emploi de la méthode décrite auparavant est inadéquat aux vus des résultats erronés produits par cette procédure.

Pour y remédier à ces difficultés les trois prochaines sections seront consacrées à la présentation d'une méthode de discrétisation qui n'exige plus l'admissibilité par la transformation $x=x(\zeta)$ d'une deuxième dérivée et dont la précision est maintenue dans le cas d'une simulation d'un champ uniforme de vitesse et scalaire ainsi qu'un champ de pression bi-linéaire sur des grilles arbitraires. De plus, cette approche est du deuxième ordre quand la projection topographique est lisse et réduite à un schéma MAC cartésien [41] quand l'identité de génération de maillage $x=\zeta$, est utilisée [161].

Parce que cette nouvelle méthode s'avère pour être quelque peu compliquée, on procède par un résumer des principales traits de la méthode :

- On débute l'écriture des équations de l'écoulement par une formulation cartésienne.
- Transformation des variables indépendantes : La vitesse cartésienne et les contraintes ainsi que les termes de gradient sont retenus dans un premier temps dans cette formulation. Les équations sont écrites dans leur forme définitive en utilisant une notation vectorielle/tensorielle mixte plus adaptée à une discrétisation.
- La discrétisation des équations de l'écoulement est obtenue au moyen d'intégration en volumes finis. Les termes de convection et visqueux impliquant des vitesses ou des scalaires sur des points qui ne coïncident pas avec leurs points de définition sont automatiquement interpolés. En outre, quelques définitions de certaines quantités non continues sur les faces ou les bordures des cellules sont introduites. Ces définitions maintiennent la précision même pour des champs d'écoulements constants sur des maillages irréguliers. Les termes de gradient de pression sont approchées par une méthode d'intégration appeler chemin d'intégration [164].
- On transforme les équations discrétisées pour u en prenant le produit scalaire de cette équation par $\sqrt{g}a^{(\alpha)}$ pour obtenir des équations pour V^α .

- Finalement, les équations du mouvement discrétisées contenant u et V^α sont écrites sous une forme invariante en coordonnées en exprimant u en termes de V^α dans leurs points de définition. Par conséquent, l'interpolation et la définition des quantités sur les faces des cellules sont obtenues avec une grande précision même pour un champ d'écoulement uniforme sur des grilles arbitraires.

IV.4.1 L'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement :

Dans le reste de cette section nous nous restreignons à un calcul bidimensionnel. Pour la discrétisation, un maillage décalé représenté sur la figure (4.4) est employé. Pour l'équation de continuité la discrétisation robuste (4.8) est retenue sur des mailles arbitraires, car les flux de masse ont des propriétés de régularité dans leurs points de définition. Nous continuons alors avec les équations de mouvement.

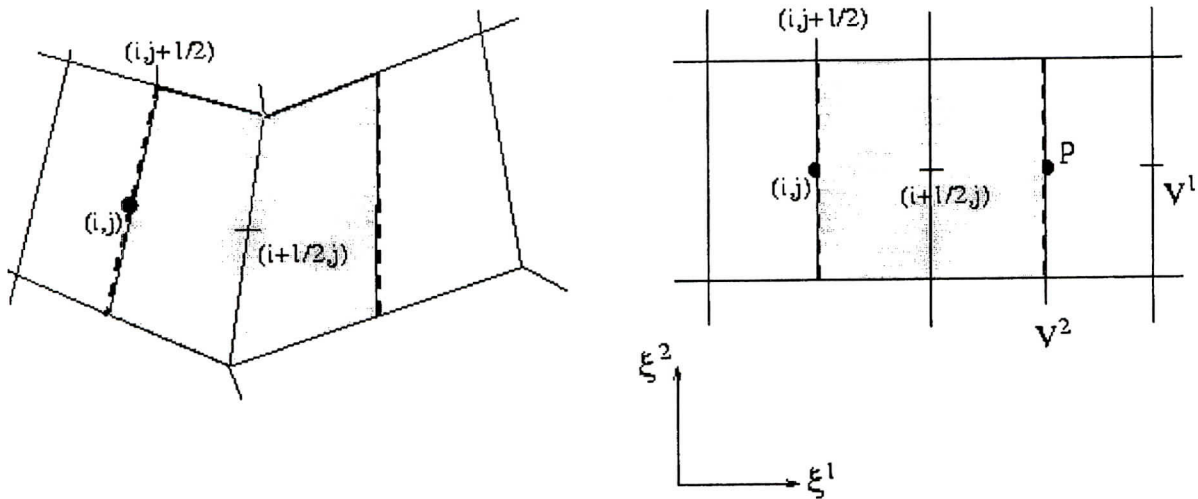


Figure (4.4) Le maillage décalé bidimensionnel et le volume de contrôle $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ et son image $G_{i+\frac{1}{2},j}$

En premier lieu, nous avons besoin d'une expression pour la dérivée partielle de toute quantité ϕ suivant x exprimée en termes de coordonnées généralisées, à savoir :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} (\sqrt{g} a_\beta^{(\gamma)} \phi) \tag{4.21}$$

Obtenu en utilisant la l'identité (2.58). Dans un premier temps, pour abaisser l'indice contravariant α , la relation de transformation (4.21) est considérée sans qu'aucun changement ne soit effectué sur les termes de pression ou sur le tenseur des contraintes visqueuses, les équations de mouvement (3.74)-(3.75) sont alors écrites sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u_\alpha}{\partial \zeta^\gamma} + \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} (\sqrt{g} a_\beta^{(\gamma)} \tau_\alpha^\beta) = f_\alpha \tag{4.22}$$

$$\tau_\alpha^\beta = \nu_{eff} \cdot \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + g^{\beta\gamma} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\gamma} \right) \tag{4.23}$$

avec V_{eff} viscosité effective définie comme étant la somme d'une viscosité turbulente ν_t et du nombre de Reynolds. La raison pour laquelle l'équation (4.22) est écrite sous une forme hybride qui contienne des tenseurs en notations cartésiennes et générales sera discutée plus tard. Il a été trouvé que la forme vectorielle (4.22) est une forme très utile pour un début de discrétisation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} + \nabla p - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} \left(\sqrt{g} a_\beta^{(\gamma)} \tau^{(\beta)} \right) = f \quad (4.24)$$

$$\tau^{(\beta)} = \left(\tau_1^{(\beta)}, \tau_2^{(\beta)} \right)^T \quad (4.25)$$

Nous considérons séparément la discrétisation dans l'espace de chacun des termes de (4.24). Ces termes sont intégrés suivant les différents volumes du contrôle de vitesse. Nous prenons comme modèle le volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ de la figure(4.4), la contribution de l'équation discrétisé sur le volume $\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}$ peut être facilement obtenue par rotation et symétrie.

L'intégration de la dérivée temporelle et de la partie droite de (4.24) à travers le volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$, est donnée par:

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} ; \quad \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} f d\Omega = \sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)} f \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.26)$$

puisque \sqrt{g} est discontinu au point $(i+\frac{1}{2},j)$ nous devons définir $\sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)}$ par une moyenne arithmétique du Jacobien des deux points avoisinant le centre :

$$\sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{g}_{(i,j)} + \sqrt{g}_{(i+1,j)} \right) \quad (4.27)$$

Notons que (4.26) est exact pour un champ de vitesse constant dans l'espace. L'intégration du terme de convection à travers le volume, est donnée par:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} d\Omega &= \int_{C_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} d\zeta^1 d\zeta^2 \\ &\approx \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{j+\frac{1}{2}}} V^1 u \Big|_i^{i+1} d\zeta^2 + \int_{\zeta_i^1}^{\zeta_{i+1}^1} V^2 u \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} d\zeta^1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Où nous avons supposé les vitesses V^1 et u continues aux points $(i+\frac{1}{2},j)$. Les deux dernières intégrales de (4.28) sont approchés par une moyenne, valable pour n'importe quelle transformation en coordonnées généralisées avec $u=\text{constante}$. Cependant, en contraste avec l'approximation du premier terme de ces deux intégrales le second ne peut être approché avec une précision du deuxième ordre, si la transformation $x=x(\zeta)$ n'est pas doublement différentiable, parce que V^2 et u ne sont pas continues suivant ζ^1 aux points $(i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2})$. En conséquence, l'approximation devient du premier ordre en précision. De là, nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\gamma u}{\partial \zeta^\gamma} d\Omega \approx V^1 u \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} + V^2 u \Big|_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \quad (4.29)$$

on définit

$$V_{(i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2})}^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \left(V_{(i,j\pm\frac{1}{2})}^{(2)} + V_{(i+1,j\pm\frac{1}{2})}^{(2)} \right) \quad (4.30)$$

qui peut être considéré comme exact pour un champ de vitesse uniforme. Le flux V^1 dans (4.29) est calculé par interpolation linéaire :

$$V_{(i,j)}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left(V_{(i-\frac{1}{2},j)}^{(1)} + V_{(i+\frac{1}{2},j)}^{(1)} \right) ; \quad V_{(i+1,j)}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left(V_{(i+\frac{1}{2},j)}^{(1)} + V_{(i+\frac{3}{2},j)}^{(1)} \right) \quad (4.31)$$

Une autre approximation de u est requise, pour cela un schéma central est obtenu, en utilisant les moyennes suivantes :

$$u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} \left(u_{(i-\frac{1}{2},j)} + u_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) ; \quad u_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \equiv \frac{1}{2} \left(u_{(i+\frac{1}{2},j+1)} + u_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \quad (4.32)$$

Un schéma décentré en amont du premier ordre est obtenu par exemple, avec :

$$u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign} (V_{(i,j)}^{(1)}) \right] u_{(i-\frac{1}{2},j)} + \frac{1}{2} \left[1 - \text{sign} (V_{(i,j)}^{(1)}) \right] u_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.33)$$

et

$$u_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign} (V_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{(2)}) \right] u_{(i+\frac{1}{2},j+1)} + \frac{1}{2} \left[1 - \text{sign} (V_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{(2)}) \right] u_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.34)$$

Tous les termes de convection sont linéairement approchés à l'aide de la méthode standard de Newton.

Une approximation précise du gradient de pression est capitale, particulièrement sur des grilles irrégulières, à cause de son influence directe sur la résolution. C'est en conséquence de la contribution relativement élevée du gradient de pression au processus d'équilibre qui dicte le niveau des forces vives dans le cas d'un nombre de Reynolds élevé.

Dans [164, 149], une approche particulière et précise est utilisée pour évaluer correctement le gradient de pression ou d'une manière générale le gradient d'un scalaire. L'idée de base de cette méthode appelée chemin d'intégration (integration-path) est d'intégrer le gradient en question le long des trajectoires convenablement choisies dans le domaine physique et en exploiter la régularité pour obtenir une approximation. Il a été montré que cette approximation est exacte pour des gradients constants sur des grilles arbitraires non uniformes.

Avant d'appliquer cette méthode pour calculer le gradient de pression, on intègre dans un premier temps ce terme à travers $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$, suivant:

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \nabla p \cdot d\Omega = \sqrt{g} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \nabla p \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \quad (4.35)$$

$\sqrt{g}_{(i+\frac{1}{2},j)}$ est défini par (4.27). L'approximation (4.35) est vérifiée exacte pour un champ de pression bi-linéaire. Nous choisissons un chemin d'intégration à travers le point $(i+\frac{1}{2},j)$. Un choix évident est celui $(i+1,j)-(i,j)$, obtenu par l'intégration suivante :

$$p\Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} = \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \nabla p \cdot dx \approx \nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} dx \equiv \nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} c^{(1)} \quad (4.36)$$

où nous avons privilégié la propriété de régularité de ∇p au point $(i+\frac{1}{2},j)$. En outre, (4.36) est toujours vérifié pour un $\nabla p = \text{constant}$ et :

$$c^{(1)} = \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} dx \equiv \frac{1}{2} \cdot (a_{(1)}\Big|_{(i,j)} + a_{(1)}\Big|_{(i+1,j)}) \quad (4.37)$$

afin trouver une équation supplémentaire pour résoudre ∇p , un autre chemin d'intégration à travers le point $(i+\frac{1}{2},j)$ doit être choisi. Nous choisissons la moyenne des deux trajectoires, comme suit:

$$\frac{1}{2} (p\Big|_{(i,j-1)}^{(i,j+1)} + p\Big|_{(i+1,j-1)}^{(i+1,j+1)}) = \frac{1}{4} \left(\int_{x(i,j-1)}^{x(i,j+1)} + \int_{x(i+1,j-1)}^{x(i+1,j+1)} \right) \nabla p \cdot dx \approx \nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} c^{(2)} \quad (4.38)$$

avec :

$$c^{(2)} = \frac{1}{8} \cdot a_{(2)}\Big|_{(i,j-1)} + \frac{1}{4} \cdot a_{(2)}\Big|_{(i,j)} + \frac{1}{8} a_{(2)}\Big|_{(i,j+1)} + \frac{1}{8} a_{(2)}\Big|_{(i+1,j-1)} + \frac{1}{4} a_{(2)}\Big|_{(i+1,j)} + \frac{1}{8} a_{(2)}\Big|_{(i+1,j+1)} \quad (4.39)$$

qui reste encore exact pour les champs de pression bi-linéaire. Les équations (4.36) et (4.38) sont résolues pour ∇p par la méthode de Cramer. En analogie avec (4.6) et (4.7) nous définissons :

$$c^{(1)} = \frac{1}{C} (c_{(2)}^2 - c_{(1)}^2)^{\gamma} ; c^{(2)} = \frac{1}{C} (-c_{(1)}^2 - c_{(1)}^2)^{\gamma} ; C = c_{(1)} c_{(2)}^2 - c_{(1)}^2 c_{(2)} \quad (4.40)$$

La solution s'écrit alors :

$$\nabla p\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{2} \cdot p\Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} \cdot c^{(1)} + \frac{1}{2} (p\Big|_{(i,j-1)}^{(i,j+1)} + p\Big|_{(i+1,j-1)}^{(i+1,j+1)}) c^{(2)} \quad (4.41)$$

D'une façon similaire au terme de convection, la discrétisation du terme visqueux est obtenue par l'intégration suivante :

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^{\gamma}} (\sqrt{g} a_{\beta}^{(\gamma)} \tau^{\beta}) d\Omega = \int_{C_{i+\frac{1}{2},j,k}} \frac{\partial}{\partial \zeta^{\gamma}} (\sqrt{g} a_{\beta}^{(\gamma)} \tau^{\beta}) d\zeta^1 d\zeta^2$$

$$\approx \sqrt{g} a_{\beta}^{(1)} \tau^{\beta} \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} + \sqrt{g} a_{\beta}^{(2)} \tau^{\beta} \Big|_{(i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2})} \quad (4.42)$$

Cette dernière relation reste vérifier pour $\sqrt{g} a_{\beta}^{(\gamma)} \tau^{\beta}$ constant, $\forall \gamma \in [1, 2]$ et aussi pour un champ de vitesse bi-linéaire. Par ailleurs :

$$\sqrt{g} a_{\beta}^{(2)} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j\pm 1)} = \frac{1}{2} (\sqrt{g} a_{\beta}^{(2)} \Big|_{(i+1,j\pm 1)} + \sqrt{g} a_{\beta}^{(2)} \Big|_{(i,j\pm 1)}) \quad (4.43)$$

puisque $\sqrt{g} a^{(2)}$ est continu et constant aux points $(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})$ et $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$. Par conséquent, sauf pour des maillages réguliers, τ^β est non différentiable suivant ζ^1 . On utilise alors la méthode du chemin d'intégration pour approcher le terme $v_{eff} \nabla u^\alpha$ qui apparaît dans τ^β et maintenir ainsi la précision, quand v_{eff} varie rapidement. En utilisant par exemple, la continuité de $v_{eff} \nabla u^\alpha$ au point $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i,j+1)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} \right) &= \frac{1}{2} \left(\int_{x(i,j+1)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \right) \frac{1}{v_{eff}} v_{eff} \nabla u^\alpha . dx \\ &\approx v_{eff} \nabla u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} \frac{1}{2} \left(\int_{x(i,j+1)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \right) \frac{1}{v_{eff}} . dx \end{aligned} \quad (4.44)$$

La dernière intégrale peut être évalué suivant:

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{1}{2} \left(\int_{x(i,j+1)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i+1,j)} \right) \frac{1}{v_{eff}} . dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j)} + \frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j)} + \frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j+1)} + \frac{a(1)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j+1)} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Pour trouver une deuxième équation pour $v_{eff} \nabla u^\alpha$ nous choisissons une autre trajectoire d'intégration à travers le point $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$. Un choix évident est celui de la moyenne des deux trajectoires, suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i+1,j)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i,j+1)} \right) &= \frac{1}{2} \left(\int_{x(i+1,j)}^{x(i+1,j+1)} + \int_{x(i,j)}^{x(i,j+1)} \right) \frac{1}{v_{eff}} v_{eff} \nabla u^\alpha . dx \\ \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i+1,j)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i,j+1)} \right) &\approx v_{eff} \nabla u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} c(2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\text{avec : } c(2) = \frac{1}{4} \left(\frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j)} + \frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j)} + \frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i,j+1)} + \frac{a(2)}{v_{eff}} \Big|_{(i+1,j+1)} \right) \quad (4.47)$$

Résoudre (4.44) et (4.46) pour $v_{eff} \nabla u^\alpha$ au point $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$, nous permet d'écrire les résultats suivants :

$$\begin{aligned} v_{eff} \nabla u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i,j+1)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} \right) c(1) + \frac{1}{2} \left(u^\alpha \Big|_{(i+1,j)}^{(i+1,j+1)} + u^\alpha \Big|_{(i,j)}^{(i,j+1)} \right) c(2) \\ &\approx u^\alpha \Big|_{(i,j+\frac{1}{2})}^{(i+1,j+\frac{1}{2})} . c(1) + u^\alpha \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)}^{(i+\frac{1}{2},j+1)} . c(2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Avec $c^{(\alpha)}$ donné par (4.40). Suivant la même procédure, on peut obtenir une expression pour $v_{eff} \nabla u^\alpha$ aux autres faces de la cellule ainsi qu'au centre.

La discrétisation spatiale des équations complétés, est représenté par une structure de molécules sur la figure(4.5). Nous devons transformer les équations complètement discrétisées en terme de flux de volume V^α .

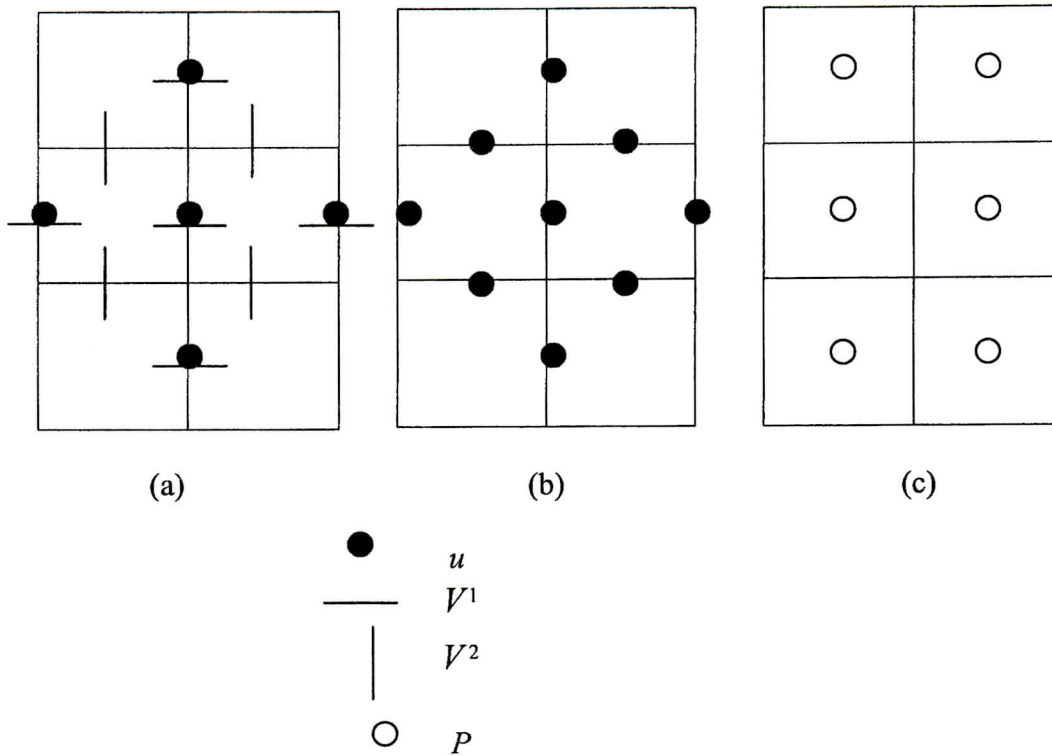


Figure (4.5) Le stencil de discrétisation pour les équations de mouvement $-u$ en 2D :(a) les termes de Convection ; (b) les termes de diffusion ; (c) les termes de pression

Cette opération est constituée de deux étapes. Premièrement, en prenant le produit scalaire de $\sqrt{g}a^{(1)}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)}$ et des intégrales suivant le volume de contrôle $\Omega_{(i+\frac{1}{2},j)}$, on obtient alors une équation pour V^1 . Par exemple, la dérivée temporelle dans les équations (4.26) devient:

$$\sqrt{g}a^{(1)}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega \approx \sqrt{g}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \frac{\partial V^1}{\partial t}\Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} \tag{4.49}$$

Deuxièmement, puisque les formulations contiennent encore u aux points autres que $(i+\frac{1}{2},j)$ u doit être exprimé en terme de flux V^α . Nous avons alors :

$$u = \frac{a_{(1)}V^1 + a_{(2)}V^2}{\sqrt{g}} \tag{4.50}$$

Depuis que la vitesse u est donnée au centre des faces de la maille, les quantités géométriques discontinues et les flux doivent être remplacés par des définitions convenables tel que (4.50) reste continu pour une vitesse u constante sur des maillages arbitraires [161].

Par exemple:

$$u_{(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{a_{(1)}V^1 + a_{(2)}V^2}{\sqrt{g}}\Big|_{(i,j+\frac{1}{2})} \tag{4.51}$$

$$\text{avec } a_{(2)} \Big|_{(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4} \left(a_{(2)} \Big|_{(i-\frac{1}{2},j)} + a_{(2)} \Big|_{(i-\frac{1}{2},j+1)} + a_{(2)} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)} + a_{(2)} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j+1)} \right) \quad (4.52)$$

$$V_{(i,j+\frac{1}{2})}^1 = \frac{1}{4} \left(V_{(i-\frac{1}{2},j)}^1 + V_{(i-\frac{1}{2},j+1)}^1 + V_{(i+\frac{1}{2},j)}^1 + V_{(i+\frac{1}{2},j+1)}^1 \right) \quad (4.53)$$

$$\sqrt{g}_{(i,j+\frac{1}{2})} = (a_{(2)}^2 a_{(1)} - a_{(1)}^2 a_{(2)}) \Big|_{(i,j+\frac{1}{2})} \quad (4.54)$$

Le résultat définitif des approximations précitées ainsi que les contributions de V^1 et V^2 , p aux coefficients de l'équation $V_{(i+\frac{1}{2},j)}^1$ des différents points de maillage incluant $(i+\frac{1}{2},j)$ est représenté dans la figure (4.6). Ces coefficients ne contiennent aucun symbole de Christoffel .

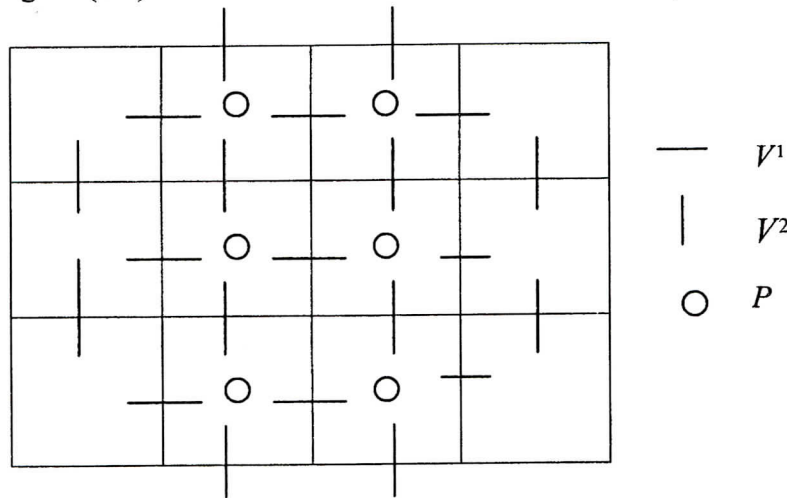


Figure (4.6) Le stencil de discrétisation pour les équations V^1

Le nombre total des variables rassemblés dans l'équation- V^1 est $9V^1, 12V^2$ et $6p$. Les discrétisations présentées mènent à des systèmes à résoudre plus dense que celui obtenu par la méthode de discrétisation décrite dans la section précédente.

IV.4.2 L'équation du transport :

La discrétisation de l'équation du transport (3.76) présenté dans la Section IV.3.3 est restreinte à des maillages plus ou moins réguliers. D'autre part, puisque le coefficient de diffusion Γ varie rapidement et présente de large saut en valeur d'une maille à une autre, une discrétisation simple et directe de cette équation peut entraîner de larges erreurs si des grilles distordues sont utilisées. On va essayer maintenant, de considérer une méthode de discrétisation capable d'approché la solution d'un scalaire avec une précision appréciable même s'elle est uniforme et linéaire sans se soucier de la régularité de la grille et du coefficient de diffusion Γ . Afin d'atteindre cet objectif, une autre formulation différente de l'actuelle équation de transport est employée.

L'équation générale de transport en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u^\beta \phi}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\Gamma g^{\beta\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} \right) = S \quad (4.55)$$

En utilisant la relation de transformation (4.21), on obtient une formulation appropriée de l'équation du transport donné par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \phi}{\partial \zeta^\alpha} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a_\beta^{(\alpha)} \Gamma g^{\beta\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} \right) = S \quad (4.56)$$

La discrétisation de (4.56) est obtenu par intégration suivant un volume fini $\Omega_{(i,j)}$ au centre (i,j) comme indiqué sur la figure (4.4). on obtient alors :

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \phi}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega = \int_{C_{i,j}} \frac{\partial V^\alpha u}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^1 d\zeta^2 \approx V^1 \phi \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}^{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} + V^2 \phi \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} \quad (4.57)$$

Toutefois la dérivée temporelle et le terme source sont intégrés en utilisant la règle du point milieu :

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \sqrt{g}_{(i,j)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{(i,j)} ; \int_{\Omega_{i,j}} S d\Omega = \sqrt{g}_{(i,j)} S \Big|_{(i,j)} \quad (4.58)$$

jusqu'ici, aucune difficultés ne peuvent survenir car aucune des quantités utilisées dans les formules précitées n'est discontinu. En outre, ces discrétisations ont une précision du second ordre et (4.57) reste vérifier pour ϕ constant . Les valeurs sur les faces de maille doivent être approcher au moyen d'interpolation des valeurs de ϕ aux centres des cellules voisines. Cela sera discuté dans la section IV.5. Le seul point à discuter ici est l'approximation du terme de diffusion. En premier lieu, pour faciliter les manipulations, le terme de diffusion sera exprimé en termes :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a_\beta^{(\alpha)} \Gamma g^{\beta\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot \Gamma \nabla \phi \right) \quad (4.59)$$

Il en résulte de l'intégration suivant $\Omega_{(i,j)}$:

$$- \int_{C_{i,j}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \left(\sqrt{g} a^{(\alpha)} \cdot \Gamma \nabla \phi \right) d\zeta^1 d\zeta^2 = -\sqrt{g} a^{(1)} \cdot \Gamma \nabla \phi \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}^{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} + \sqrt{g} a^{(2)} \cdot \Gamma \nabla \phi \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} \quad (4.60)$$

La quantité physique $\Gamma \nabla \phi$ est partout continue pour des maillages arbitraires. Mais si Γ est discontinu alors $\nabla \phi$ l'est aussi, l'approximation de $\nabla \phi$ par des différences centrales sera alors imprécise. Cependant, en utilisant la méthode du chemin d'intégration une approximation exacte de $\Gamma \nabla \phi$ au point $\left(i+\frac{1}{2}, j\right)$ est obtenue par :

$$\Gamma \nabla \phi \Big|_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} = \phi \Big|_{(i,j)}^{(i+1,j)} c^{(1)} + \frac{1}{4} \left(\phi \Big|_{(i,j-1)}^{(i,j+1)} + \phi \Big|_{(i+1,j-1)}^{(i+1,j+1)} \right) c^{(2)} \quad (4.61)$$

Où :

$$c^{(1)} = \frac{1}{C} (c_{(2)}^2 - c_{(2)}^1) ; c^{(2)} = \frac{1}{C} (-c_{(1)}^2 - c_{(1)}^1) \quad (4.62)$$

$$C = c_{(1)}^1 c_{(2)}^2 - c_{(1)}^2 c_{(2)}^1 \quad (4.63)$$

Avec :

$$c_{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{(1)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j)} + \frac{a_{(1)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j)} \right) \tag{4.64}$$

$$c_{(2)} = \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j-1)} + \frac{1}{4} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j)} + \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i,j+1)} + \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j-1)} + \frac{1}{4} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j)} + \frac{1}{8} \frac{a_{(2)}}{\Gamma} \Big|_{(i+1,j+1)} \tag{4.65}$$

La substitution de (4.61) dans (4.60) permet d'obtenir une discrétisation robuste quand $\nabla\phi$ est constant, et en général pour un champ scalaire linéaire. Les flux sur les faces de maille peuvent être obtenus d'une manière similaire à celle présentée au-dessus. La structure qui en résulte est composée de 9-molécules pour le terme de la diffusion, représenté sur la figure (4.7).

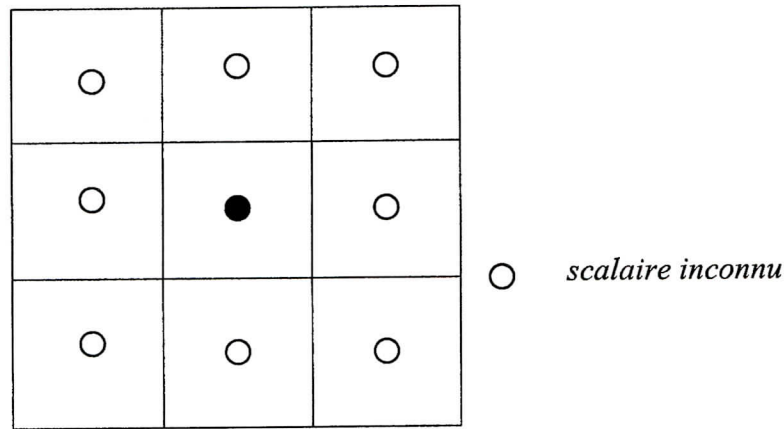


Figure (4.7) Le stencil de discrétisation de l'équation de transport

La discrétisation du terme de production d'énergie turbulente, présenté dans la section IV.3.4, n'est pas très recommander quand une grille irrégulière est adoptée. Une autre approche pour discrétiser le terme de production dans le cas des maillages distordus consiste en une intégration de l'expression cartésienne de P_k , (3.70), sur un volume fini $\Omega_{(i,j)}$, afin qu'aucun symbole de Christoffel ou tenseur métrique n'apparaisse dans la formulation. La procédure nécessite une discrétisation des dérivées partielles des composantes cartésiennes de la vitesse suivant x au point (i,j) et où les coordonnées locales représentées sur la figure (4.4) sont utilisées. Cela peut être accompli à l'aide de la méthode du chemin d'intégration. Pour approcher la dérivée de la vitesse u^α suivant x^β , cette dérivée est exprimée en termes des coordonnées curvilignes ζ .

En utilisant les différentes relations de transformation, on obtient:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \zeta^\gamma}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \zeta^\gamma} = a_\beta^{(\gamma)} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \zeta^\gamma} \tag{4.66}$$

L'approximation de (4.66) au point (i,j) s'écrit :

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{(i,j)} = a_\beta^{(\gamma)} \Big|_{(i,j)} \Delta_\gamma u^\alpha \Big|_{(i,j)} \quad (4.67)$$

Ici $\Delta_\gamma u^\alpha \Big|_{(i,j)}$ représente la différence de u^α , à travers la cellule qui clôture le point (i,j) , suivant la direction ζ^γ . Les différences sont évaluées par les relations suivantes:

$$\Delta_1 u^\alpha \Big|_{(i,j)} = u^\alpha \Big|_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} - u^\alpha \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)} ; \Delta_2 u^\alpha \Big|_{(i,j)} = u^\alpha \Big|_{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} - u^\alpha \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.68)$$

La dernière expression de l'approximation:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^2} \right) \quad (4.69)$$

devient :

$$\nabla u^\alpha \Big|_{(i,j)} = a^{(1)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} - a^{(1)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)} + a^{(2)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} - a^{(2)} \Big|_{(i,j)} u^\alpha \Big|_{\left(i, j-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.70)$$

Les composantes de la vitesse sur les faces de la maille sont obtenues à l'aide des formules (4.50).

IV.5 Approximation des termes de convection et du flux de diffusion :

Dans les sections antérieures, on a discuté de la discrétisation en volumes finis des équations du mouvement turbulent des grandes structures ainsi que de l'équation de transport pour une quantité scalaire ϕ , cédant à un équilibre des flux sur les faces de la maille, impliquant les valeurs des termes de convection et des dérivées de diffusion, ainsi que du volume intégré du terme source. L'estimation des flux à travers les faces de la maille par les valeurs nodales des points les plus proches est l'une des clés garantissant le succès de la simulation. Dans les paragraphes suivants plusieurs schémas d'approximations sont analysés d'un point de vue de précision, de comportement monotone et d'efficacité. Le traitement des dérivées mixtes des termes de diffusion dues aux maillages non-orthogonale et leurs effets sur la précision et la monotonie est aussi étudié.

IV.5.1 Les propriétés des schémas d'approximations de flux :

Les schémas d'approximations de flux sur les faces de maille ont une influence indéniable sur la précision, la stabilité et l'efficacité de la méthode de résolution numérique. Les équations discrétisées devraient avoir les propriétés suivantes:

Un ordre élevé de précisions : La précision formelle est déterminée par les séries de Taylor pour une erreur de troncation qui devrait être au moins du second ordre sur des maillages réguliers.

Conservation. Les quantités qui sont conservées physiquement doivent aussi être conservées numériquement. Par conséquent, il suffit que les flux à travers les faces de la cellule soient déterminés uniquement par les valeurs des deux cellules adjacentes.

Monotonie. Les schémas ne doivent pas produire de fausses oscillations ou de "wiggles", afin qu'aucun extrême artificiel n'apparaisse avec la progression du temps.

Les schémas d'approximations doivent être stables et faciles à mettre en oeuvre pour les calculs d'écoulements instationnaires multidimensionnels. Il est difficile de satisfaire simultanément à toutes ces propriétés, car jusqu'à une certaine mesure ils sont contradictoires. Par exemple, une approximation d'ordre supérieur (centrale ou décentré en amont) des termes de transport convectifs engage des termes de dispersion spatiale (dérivées d'ordre impair) dans l'erreur de troncature. Sous certaines conditions l'ordre de ces dérivées devient relativement grand comparé aux termes de diffusion (dérivées spatiales d'ordre pair, qui n'apparaissent pas quand des schémas centraux sont utilisés) et peuvent causer de fausses oscillations, principalement dans le cas d'une variation rapide du gradient. Par contre dans le cas d'un maillage dont le raffinement est adapté pour un calcul de couches limites où des conditions aux limites sont convenablement choisies, l'amplitude de ces wiggles est souvent négligeable, ainsi ces oscillations peuvent être tolérées. Cependant l'expérience numérique montre que l'utilisation des schémas d'ordre supérieurs non monotone pour discrétiser les équations de quantité de mouvement sont malgré tout satisfaisants. Toutefois il ne faut pas oublier que la non-monotonie reste une source de troubles pour la résolution d'équations de quantités fondamentalement positives et de systèmes fortement non linéaires, et peut provoquer la non-convergence des processus itératifs. Par exemple l'utilisation des schémas non monotone pour discrétiser les équations de transport de la turbulence, provoque l'apparition de valeurs négatives non physique des solutions turbulentes inadmissible par la simulation. Par conséquent, l'utilisation d'approximations monotone d'ordre élevé s'impose

automatiquement pour la discrétisation de ce type d'équation, c'est en substance l'objet des sections suivantes. Nous concluons ce paragraphe en présentant une condition générale qui assure la monotonie des solutions numériques.

La forme discrétiser de l'équation (3.77) peut être s'écrire:

$$a_{(i,j,k)}^{000} \phi_{(i,j,k)}^{n+1} = \sum_{p,q,r \neq 0} a_{(i,j,k)}^{pqr} \phi_{(i+p,j+q,k+r)}^{n+1} + \phi_{(i,j,k)}^n + S_{(i,j,k)}^{n+1} \quad (4.71)$$

avec :

$$a_{(i,j,k)}^{000} = 1 + \sum_{p,q,r \neq 0} a_{(i,j,k)}^{pqr} \quad (4.72)$$

Pour tous les points (i,j,k) de la grille computationnelle G_h . Notons que (4.71) est linéaire et discrétisée temporellement par un schéma d'Euler implicite (voir IV.6). Les nœuds qui contribuent au terme de sommation dépendent du choix du schéma d'approximation des flux. L'utilisation des différences centrales standards et décentrés implique 8 ou 18 nœuds adjacents respectivement pour deux ou trois dimensions. Pour les schémas d'ordre plus élevé des nœuds additionnels doivent être utilisés, mais pour plus d'efficacité numérique, et afin d'éviter l'élargissement du stencil de discrétisation, certains termes sont transférés au terme source S .

Si $S=0$ la solution exacte a la propriété suivante : si les conditions initiales et aux limites sont positifs, alors la solution reste positive avec la progression du temps. Si la discrétisation préserve cette propriété, alors les oscillations ne se produiront pas. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.1 : Si $S=0$ et

$$a_{(i,j,k)}^{000} > 0 \wedge \forall p \neq 0, \forall q \neq 0, \forall r \neq 0: a_{(i,j,k)}^{pqr} \geq 0 \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad (4.73)$$

$$\text{Et } \phi_{(i,j,k)}^0 > 0, \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad (4.74)$$

$$\text{Alors, } \phi_{(i,j,k)}^n > 0 \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.75)$$

Preuve : Par induction. Pour $n=0$ (4.75) est vérifié, en conséquence de (4.74). On suppose $\phi_{(i,j,k)}^n > 0$ pour tous les points $(i,j,k) \in G_h$. Soit $(i_0, j_0, k_0) \in G_h$ tel que :

$$\phi_{(i,j,k)}^{n+1} \geq \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \quad \forall (i,j,k) \in G_h \quad (4.76)$$

Avec (4.73) et (4.76) il s'ensuit :

$$a_{(i_0, j_0, k_0)}^{000} \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \geq \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \sum_{p,q,r \neq 0} a_{(i_0, j_0, k_0)}^{pqr} + \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^n \quad (4.77)$$

Avec (4.72), on obtient :

$$\phi_{(i_0, j_0, k_0)}^{n+1} \geq \phi_{(i_0, j_0, k_0)}^n \quad (4.78)$$

Puisque $\phi_{(i_0, j_0, k_0)}^n > 0$ avec (4.76) et (4.78) il s'ensuit que $\phi_{(i,j,k)}^n > 0$ pour tous les points $(i,j,k) \in G_h$.

Le schéma linéaire (4.71), (4.72) est dit positif, satisfaisant à (4.73) et (4.74) en l'absence de tout terme source. En ce qui concerne la précision, on peut montrer à l'aide d'un développement en série de Taylor que les schémas positifs linéaires de premier ordre en précision ont un comportement plus adaptée aux simulations d'écoulement incompressible.

IV.5.2 Méthodes d'approximation pour les flux convectifs

Maintenant, on va étudier les différentes méthodes capables d'exprimer une valeur scalaire sur les faces de la maille en fonction des valeurs nodales qui l'entoure. Pour plus de clarté, on centre notre description sur une discrétisation suivant un maillage décalé infini uniforme représenté sur la figure (4.8). Pour des raisons de robustesse et de simplicité algorithmique

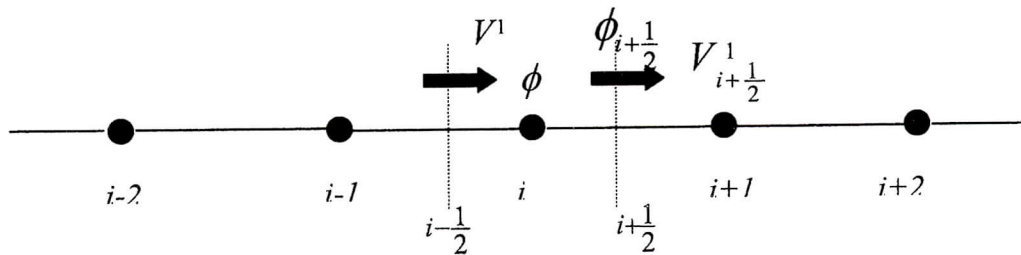


Figure (4.8): maillage décalé unidimensionnel avec les nœuds impliqués dans l'évaluation de ϕ sur la face $i+\frac{1}{2}$

Les schémas multidimensionnels centraux et décentrés en amont (upwind) seront traités par décomposition unidimensionnelle dans la direction normale de chaque face de la maille. Ces schémas sont appelés schémas fractionnés. Par conséquent, nous nous restreignons à une interpolation des valeurs sur les faces le long d'une direction spécifique dans l'espace G , prenant par exemple la direction ζ^1 . Pour l'application des schémas upwind multidimensionnel, nous nous reportons à [157]. Nous considérons, ici la valeur du scalaire sur la face de la maille $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ seulement. Les autres faces seront traitées de la manière similaire.

IV.5.2.1 Schéma central, décentré en amont du premier ordre et hybride :

Sur les vingt dernières années, les techniques de modélisation des termes de convection se réduisaient à l'utilisation des schémas décentrés en amont (upwinding) du premier ordre, des différences centrales du deuxième ordre et des alternatives apparentées, comme le schéma central/upwind hybride de Spalding [135]. Leur popularité est due essentiellement à leur comportement consistant et stable, pour des équations multidimensionnelles, stationnaire à coefficients-constants, source libre, et pour des équations de convection-diffusion d'un scalaire dont les termes de convection ne jouent pas de rôle dominant. Ces schémas sont discutés au-dessous, pour plus de détails voir [101] et [99].

Schéma de différence centrale (SDC).

Dans ce schéma, la valeur sur la face de la maille $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est approché au moyen de l'interpolation linéaire suivante:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) \tag{4.79}$$

Il en résulte une précision du deuxième ordre. Ce schéma est évidemment conservatif et n'est plus positif quand le nombre de Péclet de maille défini comme le rapport des contributions de convection et de diffusion, dépasse une certaine valeur. Par exemple, quand un maillage orthogonal est adopté, le schéma peut produire des oscillations, si le nombre de Péclet par maille défini par (4.16) et (3.77):

$$P_{e\ i+\frac{1}{2}}^1 = \frac{V_{i+\frac{1}{2}}^1}{2\sqrt{g_{i+\frac{1}{2}}(\Gamma g^{11})_{i+\frac{1}{2}}}} \quad (4.80)$$

devient supérieur à 1. dans le cas d'un maillage distordu l'expression du nombre de Péclet de maille dépend de la manière avec laquelle les termes de dérivée mixte vont être approchés.

Schéma décentré en amont (upwind) du premier ordre (SDA) :

La valeur sur la face de la maille $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est pris égale à la valeur du nœud en amont et, pour des raisons d'efficacité de codage vectoriel, on peut exprimer cette approximation suivant :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign} \left(V_{i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_i + \frac{1}{2} \left[1 - \text{sign} \left(V_{i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_{i+1} \quad (4.81)$$

Ce schéma est conservateur, du premier ordre, inconditionnellement positive. Cependant lorsque la direction de l'écoulement est oblique par rapport aux lignes du maillage, le schéma upwind produit numériquement un écoulement de retour en conséquence d'une fausse diffusion, traduite par de larges erreurs dans la solution. Le seul remède à ces défaillances est une adaptation du maillage afin d'aligner ces lignes avec la direction de l'écoulement ou un affinage de la grille jusqu'à ce que la diffusion numérique devienne négligeable en respectant l'ordre de la diffusion physique.

Schéma de différence hybride central/upwind (SDH).

Afin de combiner les avantages du schéma central et ceux du schéma décentré en amont (upwind), Spalding [135] fut un des premiers auteurs à avoir proposer le schéma des différences hybrides central/upwind. L'approximation de $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est donné par :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[1 + s \left(P_{e\ i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_c + \frac{1}{2} \left[1 - s \left(P_{e\ i+\frac{1}{2}}^1 \right) \right] \cdot \phi_u \quad (4.82)$$

Où ϕ_c est donné par (4.79), ϕ_u par (4.81) et s est une fonction switcher qui dépend du nombre de Péclet de maille P_e avec $0 \leq s(P_e) \leq 1$. Avec le schéma hybride les termes de convection sont approchés par des différences centrales, à moins que $|P_e| > 1$ alors un schéma décentré en amont du premier ordre sera appliquer :

$$s(P_e) = \begin{cases} 0, & |P_e| \leq 1 \\ 1, & |P_e| > 1 \end{cases} \quad (4.83)$$

Pour des raisons de convergence, on utilise la fonction switcher suivante:

$$s(P_e) = 1 - \min \left(1, \frac{1}{|P_e|} \right) \quad (4.84)$$

La fonction switcher est obtenue tel que les éléments de la matrice non situés sur la diagonal impliquant les contributions des termes de convection et de diffusion seraient non-positives, afin de supprimer les oscillations (wiggles) (théorème 4.1). L'inconvénient de cette méthode provient de son utilisation dans le cas d'écoulement à convection dominante, où le schéma upwind est partout appliqué indépendamment de l'apparition ou non de wiggles.

IV.5.2.2 Schémas décentrés en amont d'ordre supérieure en précision :

La discrétisation à l'aide d'un schéma décentré en amont du premier ordre dans le cas d'écoulements multidimensionnels avec courants de retour produit une diffusion numérique excessive. L'application de schéma upwind de haute précision dans ce cas, donne lieu à des améliorations considérables. On cite par exemples les schémas de différences upwind linéaires du deuxième ordre (SDUL) étudiés dans [104], le schéma QUICK proposé par Leonard [68] et le schéma d'interpolation cubique du troisième ordre (UIC) utilisé dans [11]. Le schéma QUICK est de loin le plus populaire, en particulier dans le cas d'écoulements incompressible (voir par exemple [39], [80], [70], [45] et [143]), car il peut approcher les valeurs sur les faces d'un maillage uniforme avec une précision du troisième ordre tout en gardant une simplicité algorithmique. Les schémas de précision supérieure peuvent être construits par interpolation polynomiale comme se fut suggéré par Van Leer [155]. L'idée de base de cette méthode appeler κ -interpolation est fondée sur l'utilisation d'approximations linéaires et quadratiques des solutions sur chaque cellule obtenant ainsi une discrétisation spatiale du troisième ordre. La forme générale du schéma- κ est donné par:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \phi_i + \frac{1}{4}[(\kappa + 1)(\phi_{i+1} - \phi_i) + (\kappa - 1)(\phi_i - \phi_{i-1})]V_{i+\frac{1}{2}}^{-1} > 0 \\ \phi_{i+1} - \frac{1}{4}[(\kappa + 1)(\phi_{i+1} - \phi_i) + (\kappa - 1)(\phi_{i+2} - \phi_{i+1})]V_{i+\frac{1}{2}}^{-1} < 0 \end{cases} \quad (4.85)$$

Où le paramètre κ reste à définir. Le premier terme de la partie droite de l'équation (4.85) représente le schéma upwind du premier ordre, et le deuxième terme est une correction qui sert à convertir le schéma à un ordre supérieur. Pour toutes les valeurs de $\kappa \in [-1, 1]$, on obtient une forme mixte du schéma de différences centrales et upwind linéaire du second ordre. Les schémas SDUL, QUICK et UIC sont obtenues respectivement pour $\kappa = -1, \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. La valeur de $\kappa = 0$ donne le schéma de Fromm [34], pendant que $\kappa = 1$ correspond aux SDC. Pour $\kappa \neq \frac{1}{3}$ l'erreur de troncature locale est du deuxième ordre alors que pour $\kappa = \frac{1}{3}$ elle est du troisième ordre. Pour une mise en œuvre générale, la formulation κ reste très commode.

IV.5.3 Approximation des flux de diffusion :

Dans cette section nous nous intéressons aux schémas capables d'exprimer les dérivés sur les faces du maillage (les flux de diffusion) en terme de valeur des nœuds adjacents. Une attention spéciale sera accordée en particulier, aux termes des dérivées mixtes qui surviennent de l'utilisation d'un système de coordonnées non-orthogonale, au vu de la condition de positivité formulée dans la section IV.5.1. La discrétisation en volumes finis de l'équation du transport (2.76) cède à l'équation (4.16). Après avoir substitué (2.77) dans (4.16) pour tous les

faces des cellules, on obtient par exemple, pour les flux diffusives sur la face de la cellule $(i+\frac{1}{2}, j, k)$ l'expression suivante:

$$-\sqrt{g}\Gamma g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} - \sqrt{g}\Gamma g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} - \sqrt{g}\Gamma g^{13} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^3} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} \quad (4.86)$$

Pour des raisons de convenance nous nous restreignons aux seules faces $(i+\frac{1}{2}, j, k)$, Les autres faces seront traités de la même façon.

Remarque 4.1 Nous supposons la transformation $x=x(\zeta)$ régulière, afin que les quantités géométriques \sqrt{g} , $g^{\alpha\beta}$ et le coefficient de diffusion Γ sur les faces de maille puissent être approchées par interpolation bi ou tri-linéaire.

Si le maillage est orthogonal, les deux derniers termes de (4.86) disparaissent et la première partie est approché par les différences centrales suivantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} = \phi_{(i+1, j, k)} - \phi_{(i, j, k)} \quad (4.87)$$

cette approximation est conservatrice et contribue à la positivité du schéma. L'erreur de troncation locale est du deuxième ordre. Cependant quand un maillage non-orthogonal est utilisé, l'approximation des dérivées mixtes peut causer de fausses oscillations. Par exemple,

si nous approchons $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)}$ par des différences centrales et par interpolation bi-linéaire

(4-points) exigé pour exprimer les valeurs nodales de ϕ sur les faces de la cellule, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} &= \phi_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)} - \phi_{(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\phi_{(i+1, j+1, k)} + \phi_{(i, j+1, k)} - \phi_{(i+1, j-1, k)} - \phi_{(i, j-1, k)}) \end{aligned} \quad (4.88)$$

en référence au théorème 4.1, le coefficient correspondant aux points $\phi_{(i+1, j-1, k)}$ et $\phi_{(i, j-1, k)}$ prend un signe défavorable si $g^{12}_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} > 0$. D'un autre côté, si $g^{12}_{(i+\frac{1}{2}, j, k)} < 0$, nous obtenons des

contributions négatives aux coefficients de $\phi_{(i+1, j+1, k)}$ et $\phi_{(i, j+1, k)}$. Mais ceci n'implique pas nécessairement des solutions oscillatoires. En fait, ces coefficients sont habituellement très petits par rapport aux coefficients relatifs aux dérivées $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1}$, mais dans le cas d'un maillage

fortement non-orthogonal ces coefficients deviennent considérable et provoquent l'apparition de wiggles, nous considérerons trois méthodes pour éliminer ces difficultés.

La méthode (i) :

L'approche la plus évidente consiste en un traitement explicite des dérivées mixtes c'est à dire qu'ils sont évalués au niveau de temps antérieur et sont incorporés dans le terme source. Cette méthode est fréquemment utilisée dans les procédures numériques tel que [104], [26], [19], [89], [180], [20], [82] et beaucoup d'autres. Elle permet de réduire la dimension du stencil à 5-points ou 7-points respectivement dans le cas 2D et 3D, cette méthode a l'avantage de ne pas diminuer l'ordre de précision des approximations dans le cas stationnaire. Cependant, elle peut causer la détérioration sérieuse du taux de convergence, en particulier quand le la grille est nettement non-orthogonal où des oscillations peuvent encore survenir dans la solution stationnaire.

La méthode (ii) :

Dans cette méthode, proposé par Demirdzic [27], une interpolation de 2-points est utilisée au lieu de 4-points. Par exemple, supposons que $g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{12} > 0$, alors l'approximation suivante est considéré :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} &= \phi_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - \phi_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)} \\ &= \frac{1}{2}(\phi_{(i,j,k)} + \phi_{(i+1,j+1,k)}) - \frac{1}{2}(\phi_{(i,j-1,k)} + \phi_{(i+1,j,k)}) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Si $g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{12} < 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j,k)} = \frac{1}{2}(\phi_{(i,j+1,k)} + \phi_{(i+1,j,k)} - \phi_{(i,j,k)} - \phi_{(i+1,j-1,k)}) \quad (4.90)$$

Ce schéma est symétrique autour de $(i+\frac{1}{2},j,k)$ est du second ordre en précision. Des expressions similaires sont obtenues pour les deux derniers termes de l'équation (4.16). Ce schéma est conservateur, et produit des coefficients des points adjacents inconditionnellement non-négatives c'est à dire ceux correspondants aux points $\phi_{(i+1,j-1,k)}$, $\phi_{(i+1,j+1,k)}$ et $\phi_{(i+1,j,k+1)}$, $\phi_{(i+1,j,k-1)}$, mais il ne garantit pas la positivité des principaux coefficients aux points $(i,j-1,k)$, $(i+1,j,k)$, $(i,j+1,k)$ et $(i,j,k+1)$, $(i,j,k-1)$. Cependant les termes de g^{11} donne aux contributions de ces coefficients un signe correct dominant si g^{12} n'est pas trop grand.

Comme illustration nous discutons le cas de la transformation bidimensionnel suivante :

$$\begin{aligned} x^1 &= \sigma \zeta^1 + \zeta^2 \cos \alpha \\ x^2 &= \zeta^2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.91)$$

où $\sigma > 0$ est le facteur d'allongement et α est l'angle entre les lignes de la grille représenté sur la figure (4.2). Il peut être montré, en considérant l'équation discrétisé (4.80) et en appliquant la condition de positivité des principaux coefficients que :

$$|g^{12}| \leq \min(g^{11}, g^{12}) \quad (4.92)$$

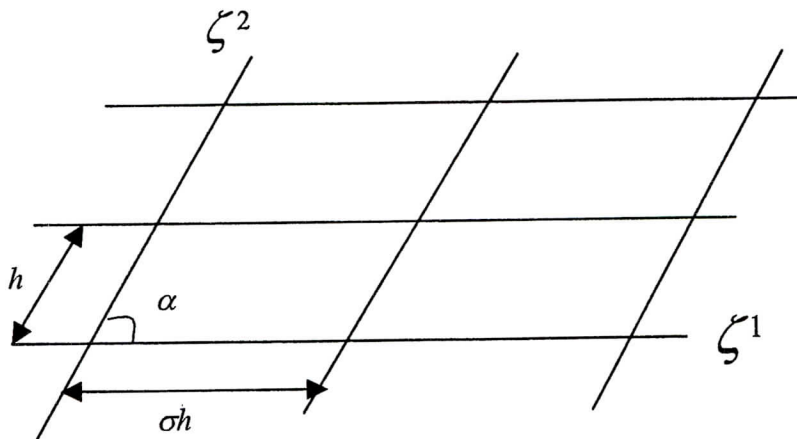


Figure (4.9): Coordonnées obliques avec allongement horizontal

à condition que le coefficient de diffusion Γ soit uniforme sur chaque maille. En utilisant (4.91) on peut écrire : $g_{11}=\sigma^2$; $g_{12}=\sigma\cos\alpha$; $g_{22}=1$. (4.93)

alors qu'en utilisant la relation (2.56) nous obtenons de (4.21) les conditions suivantes:

$$\sigma|\cos\alpha|\leq 1, \text{ si } \sigma>1 \tag{4.94}$$

$$\frac{|\cos\alpha|}{\sigma}\leq 1, \text{ si } \sigma<1 \tag{4.95}$$

Ces conditions ont été dérivées par Demirdzic [27]. Si la grille est oblique et non allongé, alors la solution du schéma est toujours positive, et indépendante de l'angle.

La méthode (iii) :

Tous les schémas précédemment considérés ne garantissent pas une positivité inconditionnelle de la solution. Dans ce qui suit, un nouveau schéma qui satisfait le Théorème 4.1 sera décrit. Il utilise des différences décentrées plutôt que centrales tel que seuls les coefficients non-négatives seraient impliqués. La dérivé mixte suivant la direction ζ^2 au point $(i+\frac{1}{2},j,k)$ est évaluée par les différences suivantes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi_{(i+1,j+1,k)} + \frac{1}{2}\phi_{(i,j+1,k)} - \phi_{(i,j,k)} ; g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^2 > 0 \\ \phi_{(i,j,k)} - \frac{1}{2}\phi_{(i+1,j-1,k)} - \frac{1}{2}\phi_{(i,j-1,k)} ; g_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^2 < 0 \end{cases} \tag{4.96}$$

Il est évident que ce schéma réduit l'ordre de troncation. mais il a l'avantage d'être inconditionnellement positive. Des expressions similaires sont obtenues pour les deux derniers termes de l'équation (4.86). de plus puisque les différences des faces de maille sont uniquement définies sur chaque face de cellule, le schéma est aussi conservateur.

Les termes de dérivées mixtes dans la présente étude sont approcher par des interpolations de 4-point, formulé dans (4.88). Ce choix est motivé par le très bon comportement de ce schéma avec lequel aucun coefficient négatif n'est rencontré.

Généralement, le nombre total des variables enchaînées ensemble dans l'équation du transport est de 9 points et 19 points respectivement en deux dimensions et trois dimensions. La structure du stencil de discrétisation en bidimensionnel est représentée dans la figure (4.10).

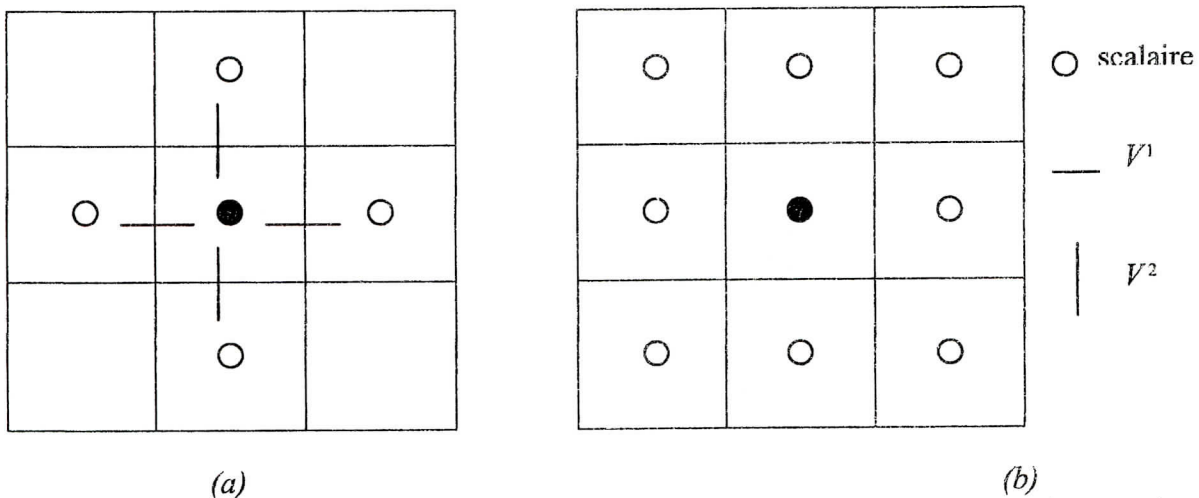


Figure (4.10) Le stencil de discrétisation pour une équation de transport en 2D : (a) Termes de convection (b) termes de diffusion

IV.6 Conditions aux limites, intégration temporelle et algorithme de résolution :

Cette partie du chapitre est consacré à quelques thèmes complétant la description de la méthode de résolution numérique. Premièrement, la mise en oeuvre des conditions aux limites pour les équations de quantité de mouvement ainsi que pour les équations de transport sont décrites dans section IV.6.1, suivi par une discussion sur la méthode des fonctions de paroi. Ensuite, l'intégration temporelle et la méthode de correction de pression sont présentées dans la section IV.6.2. La section IV.6.3 décrit le traitement du terme source dans les équations de turbulence. Un résumé de l'algorithme de résolution total est esquissé dans section IV.6.4.

IV.6.1 Conditions aux limites :

Pour les écoulements incompressibles, les équations gouvernant le mouvement des structures turbulentes décrites au Chapitre II sont paraboliques ou elliptiques quand l'écoulement est indépendant du temps. Par conséquent, les conditions de la limite doivent être spécifiées sur toutes les limites du domaine de calcul. Bien que, les conditions de la limite peuvent être spécifiées comme dépendantes du temps, nous nous restreignons aux conditions aux limites stationnaires. A l'entrées du domaine, la vitesse et les valeurs des quantités de turbulence sont prescrites. Il est, cependant, habituellement nécessaire de calculer le taux de la dissipation ε à partir de l'énergie de turbulence k et d'une estimation de la distribution de la longueur des

échelles de turbulence l , à l'aide la formule $\varepsilon \approx \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}$ dans le cas d'une modélisation à deux équations de transport. A la sortie du domaine du calcul où souvent aucune information physique n'est disponible, on applique une condition de sortie d'écoulement (outflow) c'est à dire que les contraintes normales et tangentielles sont prises égales à zéro, le gradient normal d'un scalaire peut être alors imposé comme nulle. Sur un plan de symétrie les composantes des tensions de cisaillement, ainsi que les composantes normales de vitesse et les gradients normaux sont considérés nuls. Sur les parois fixes, en principe, des conditions d'adhérence peuvent être imposées. La vitesse du fluide sur la paroi est prise égale à celle de la paroi qui est dans notre cas a égale zéro. Souvent, si le maillage près des parois n'est pas suffisamment resserrer les contraintes de cisaillement sont intégrées à l'aide des fonctions de parois. Ces lois de paroi sont basées sur la supposition d'une prédominance d'un équilibre local dans la couche turbulente près des parois. La loi de paroi permet d'exprimer la variation d'énergie de turbulence et son taux de dissipation en fonction de la distance normale et le frottement de paroi dans une forme adimensionnelle qui facilite l'application des conditions aux limites. Ces formules sont communément reportées comme étant fonctions de paroi.

Plusieurs autres types de conditions aux limites peuvent être rencontrés dans les problèmes de dynamique des fluides, par exemple pour un écoulement turbulent homogène suivant une direction précise, des conditions aux limites périodiques peuvent être appliquer, en imposant à la solution la même valeur au début et a la fin du domaine.

La discrétisation des conditions aux limites reçoit souvent moins d'attention que la discrétisation des équations de l'écoulement, ce qui est injustifié au vu de l'influence de cette dernière étape dans l'exactitude de la solution. Près des limites, les intégrales sur les cellules sont approchées suivant la procédure de discrétisation habituel, mais les flux à travers les faces de la cellule qui coïncident avec les limites du domaine exigent un traitement spécial. Ces flux sur les limites doivent être exprimés en fonctions d'inconnues définies à l'intérieur du domaine de calcul numérique, pour y parvenir on utilise des différences décentrées ou des extrapolations. Les détails de l'implémentation des conditions aux limites des équations de

mouvement et des équations du transport seront présentés, respectivement dans les sections IV.6.1.1 et IV.6.1.2.

IV.6.1.1 Les équations de quantité de mouvement :

Nous discuterons des conditions aux limites des équations de quantité de mouvement et leur application. Cette mise en œuvre est dans un premier temps fastidieuse et un peu compliquée. Pour décrire cette opération d'une manière plus claire, nous nous restreignons au cas bidimensionnel, des détails supplémentaires peuvent être trouvés dans [127]. On considère les conditions aux limites suivantes :

- Les conditions de Dirichlet : les vecteurs de vitesse tangentiels et normaux sont prescrits sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$(u.n)n \quad \text{et} \quad (u.t)t \quad \text{donnés} \quad (4.97)$$

où n et t sont les vecteurs unités extérieures normal et tangent.

- Les conditions de Neumann : les contraintes tangentielles et normales sont prescrites sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$(\sigma^{(n)}.n)n \quad \text{et} \quad (\sigma^{(n)}.t)t \quad \text{donnés} \quad (4.98)$$

où $\sigma^{(n)}$ est le vecteur des contraintes normales.

- La vitesse tangentielle et les contraintes normales sont prescrites sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$u^t \quad \text{et} \quad (\sigma^{(n)}.n)n \quad \text{donnés} \quad (4.99)$$

- Les contraintes tangentielles et la vitesse normale sont prescrites sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$(\sigma^{(n)}.t)t \quad \text{et} \quad u^n \quad \text{donnés} \quad (4.100)$$

Une fois les conditions aux limites définies, nous considérons la discrétisation des cellules auxquelles une face fait partie de la limite du domaine. Nous ne considérons pas les coins du domaine. Les cellules des limites sont traitées exactement comme les cellules intérieures. Ce traitement introduit quelques inconnues virtuelles qui peuvent être éliminées en utilisant les conditions aux limites ainsi que des extrapolations linéaires. Il est nécessaire d'exprimer les conditions aux limites en termes de vitesse contravariantes ou composantes des contraintes. La transformation est définie par la méthode suivante : sur une surface caractérisée par $\zeta^n = \text{constante}$, on définit uniquement le vecteur normal n et le vecteur tangent t , donné par (2.42). Nous avons :

$$U^n = u^n \cdot a^{(n)} = (u.n)n \cdot a^{(n)} = \sqrt{g^{nn}} u.n \quad (4.101)$$

$$U_t = u^t \cdot a_{(t)} = (u.t)t \cdot a_{(t)} = \sqrt{g_{tt}} u.t \quad (4.102)$$

Avec $U_t = g_{t\alpha} U^\alpha$ qui permet d'écrire :

$$U^t = \frac{1}{g_{tt}} \sqrt{g_{tt}} u.t - g_{tn} U^n \quad (4.103)$$

Notons que les indices n et t sont fixés, c'est à dire qu'on n'applique pas de sommation. Soit le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}_\beta^g$ dénote du $\beta^{\text{ième}}$ composant cartésien de $\sigma^{(n)}$ donné par l'expression $\bar{\sigma}_\beta^g = -p\delta_\beta^g + \bar{\tau}_\beta^g$ avec p la pression et $\bar{\tau}_\beta^g$ le tenseur déviateur des tensions. En coordonnées généralisées :

$$\sigma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + \tau^{\alpha\beta} \quad (4.104)$$

avec $\tau^{\alpha\beta}$ donné par (3.62). Soit le tenseur des contraintes sur la surface $\zeta^n = \text{constante}$ exprimé à l'aide de la relation suivante :

$$\sigma^{(n)} = (\sigma^{(n)}.n)n + (\sigma^{(n)}.t)t \quad (4.105)$$

D'après Aris [3], nous avons :

$$\sigma_\beta^{(n)} = \bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha \quad (4.106)$$

avec n_α , le $\alpha^{\text{ième}}$ composant de n , afin que :

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha = (\sigma^{(n)}.n)n_\beta + (\sigma^{(n)}.t)t_\beta \quad (4.107)$$

On dérive une expression pour σ^{nm} en prenant le produit scalaire de (4.107) par $a^{(n)}$:

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} = n_\beta a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} \sigma^{(n)}.n + t_\beta a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} \sigma^{(n)}.t \quad (4.108)$$

Le dernier terme de (4.108) disparaît car :

$$t_\beta a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} = \frac{a_{(t)}^\gamma}{\sqrt{g_{tt}}} a_\gamma^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} a_{(t)} a^{(n)} = 0 \quad (4.109)$$

De (4.109) on obtient :

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha a_\gamma^{(n)} a_\alpha^{(n)} = a_\beta^{(n)} a_\gamma^{(n)} g^{\gamma\beta} \sigma^{(n)}.n \quad (4.110)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sigma^{nm} = g^{nn} \sigma^{(n)}.n \quad (4.111)$$

De la même façon, une expression pour σ^{nt} peut être trouvée en prenant le produit scalaire de (4.107) par $a_{(t)}$:

$$\bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha a_{(t)}^\beta = n_\beta a_{(t)}^\beta \sigma^{(n)}.n + t_\beta a_{(t)}^\beta \sigma^{(n)}.t \quad (4.112)$$

$$\text{Où :} \quad \bar{\sigma}_\beta^\alpha n_\alpha a_{(t)}^\beta = t_\beta a_{(t)}^\beta \sigma^{(n)}.t \quad (4.113)$$

$$\text{Tel que :} \quad \bar{\sigma}_\beta^\alpha a_\alpha^{(n)} g_\gamma^\alpha a_\beta^{(y)} = a_{(t)}^\gamma a_{(t)}^\beta g_{\gamma\beta} \sqrt{\frac{g^{nn}}{g_{tt}}} \sigma^{(n)}.t \quad (4.114)$$

$$\text{qui devient :} \quad \sigma^{nt} g_{tt} + \sigma^{nn} g_{nt} = \sqrt{g^{nn} g_{tt}} \sigma^{(n)}.t \quad (4.115)$$

$$\text{Et en conséquence :} \quad \sigma^{nt} = \frac{1}{g_{tt}} \left(\sqrt{g^{nn} g_{tt}} \sigma^{(n)}.t - g_{nt} \sigma^{nn} \right) \quad (4.116)$$

Notons que $\sigma^{\alpha\beta}$ est donné par (4.104). En conséquence, l'intégration de la pression et des tensions visqueuses sur les cellules des limites est appliquée simultanément.

Pour l'intégration en volumes finis nous avons besoin d'un volume de control pour chaque inconnu, excepté quand la composante normale U^n sur la surface des limites du domaine est imposée. Dans ce cas on considère un seul volume de control pour la composante tangentielle U^t alors que la vitesse normale est introduite explicitement en vitesse inconnue prescrite sur les limites. Soit la cellule limite $\Omega_{i,1}$ sur la surface limite représentée par $\zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2$ la vitesse u est prescrite. Nous avons :

$$U^2 = \sqrt{g^{22}} u \cdot n \quad \text{sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \quad (4.117)$$

$$U^1 = \frac{1}{g^{11}} \left(\sqrt{g_{11}} u \cdot t - g_{12} U^2 \right) \quad \text{sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \quad (4.118)$$

Le stencil résultant de l'intégration suivant le volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},1}$ est représenté sur la figure(4.3). Nous avons des vitesses tangentielles et pressions virtuelles aux points $(i-\frac{1}{2},0)$ et $(i,0)$, $(i+\frac{1}{2},0)$, $(i+1,0)$ et $(i+\frac{3}{2},0)$. Ces inconnues virtuelles peuvent être éliminées en utilisant l'extrapolation linéaire suivante:

$$V_{(i+k,0)}^1 = 2\sqrt{g} U^1 \Big|_{(i+k,\frac{1}{2})} - V_{(i+k,1)}^1 \quad (4.119)$$

$$P_{(i+l,0)} = 2P_{(i+l,1)} - P_{(i+l,2)} \quad (4.120)$$

avec $k = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ et $l = 0, 1$.

Supposons que la contrainte tangentielle $(\sigma^{(n)} \cdot t)$ est prescrite sur $\zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2$, si nous avons une condition limite de non-glissement. L'expression (4.118) est remplacée par :

$$\sigma^{12} = \frac{1}{g_{11}} \left(\sqrt{g^{22}} g_{11} \sigma^{(n)} \cdot t - g_{21} \sigma^{22} \right) \quad \text{sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \quad (4.121)$$

On considère l'intégration de l'équation de V^1 sur $\Omega_{i+\frac{1}{2},1}$; puisqu'on traite le cas d'une condition aux limites où les contraintes sont prescrites, le tenseur des contraintes regroupant les termes visqueux et de pression doit être traité séparément. Nous nous restreignons aux intégrales des termes de convection et du tenseur des contraintes, qui impliquent des inconnues virtuelles. Le discrétisation du terme de convection nécessite l'évaluation de la vitesse virtuelle $V_{(i+\frac{1}{2},0)}^1$ (voir la figure (4.3)) par l'extrapolation linéaire suivante:

$$V_{(i+k,0)}^1 = 2V_{(i+k,1)}^1 - V_{(i+k,2)}^1 \quad (4.122)$$

avec $k = \frac{1}{2}$. La discrétisation du tenseur des contraintes est donné par (voir(2.11),(2.77),(4.104)):

$$- \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},1}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \sigma^{1\beta}}{\partial \zeta^\beta} d\Omega \approx -\sqrt{g} \sigma^{11} \Big|_{(i,1)}^{(i+1,1)} - \sqrt{g} \sigma^{12} \Big|_{(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2})}^{(i+\frac{1}{2},\frac{3}{2})} \quad (4.123)$$

Le terme $\sqrt{g} \sigma^{12}$ au point $(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est évalué en utilisant (4.121) et (2.39):

$$\sqrt{g}\sigma^{12}\Big|_{\left(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\sigma^{(n)}.t-\sqrt{g}\frac{g_{21}}{g_{11}}\sigma^{22}\Big|_{\left(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \quad (4.124)$$

Le premier terme est prescrit, il contribue à la partie droite des équations discrétisées de quantité de mouvement, cependant le second terme et les autres termes de (4.123) contiennent des inconnues virtuelles qui doivent être éliminées en utilisant (4.122) avec $k=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ et (4.120) avec $l=0,1$. Et :

$$V_{(i+m,0)}^2=2\sqrt{g}U^2\Big|_{\left(i+m,\frac{1}{2}\right)}-V_{(i+m,1)}^2 \quad (4.125)$$

avec $m=0,1$. la quantité $U^2_{\left(i+m,\frac{1}{2}\right)}$ est évalué à l'aide de la condition aux limites (4.117).

Quand la vitesse normale U^2 n'est pas prescrite à la limite, nous introduisons un demi-volume de contrôle pour U^2 , car les équations de mouvement ne sont valides qu'à l'intérieur du domaine de l'écoulement. Si nous intégrons (4.10) sur le demi de cellule $\Omega_{i,\frac{1}{2}}$ pour $\alpha=2$ en utilisant la règle du point milieu, on obtient les approximations suivantes :

$$\int_{\Omega_{i,\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}T^{2\beta}}{\partial\zeta^\beta}d\Omega\approx\frac{1}{2}\sqrt{g}T^{21}\Big|_{\left(i-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}-\sqrt{g}T^{22}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.126)$$

et

$$\int_{\Omega_{i,\frac{1}{2}}}\left(F^2\frac{\partial U^2}{\partial t}\{^2_{\beta\gamma}\}T^{\beta\gamma}\right)d\Omega\approx\frac{1}{2}\sqrt{g}\left(F^2\frac{\partial U^2}{\partial t}\{^2_{\beta\gamma}\}T^{\beta\gamma}\right)\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.127)$$

Ces approximations sont appliquées près des limites de sorte, où l'écoulement est supposé ne plus trop changer. Cette restriction nous permet d'approcher les intégrales (4.126) et (4.127) au premier ordre de précision. Autrement, un stencil plus large serait nécessaire pour maintenir une précision du second ordre. Les contributions de convection, du tenseur des contraintes et la partie droite des équations contenant les symboles de Christoffel, impliquant des inconnues virtuelles peuvent être éliminés comme ce qui suit : Pour le terme de convection, les composantes de la vitesse virtuelle peuvent être éliminées par l'extrapolation linéaire des inconnues intérieures et des valeurs limites des vitesses tangentes, si elles sont prescrites. Les pressions virtuelles peuvent aussi être éliminées par l'extrapolation linéaire.

Concernant le tenseur des contraintes, le terme $\sqrt{g}\sigma^{22}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)}$ peut être évalué en utilisant la condition aux limites, voir (4.111). Si la contrainte tangentielle est prescrite, alors les termes $\sqrt{g}\sigma^{21}\Big|_{\left(i-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ et $\sqrt{g}\sigma^{21}\Big|_{\left(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ sont donnés par (4.124), sinon ils contribuent au stencil de la manière habituelle. Finalement le terme,

$$-\frac{1}{2}\sqrt{g}\{^2_{\beta\gamma}\}T^{\beta\gamma}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.128)$$

peut être traité comme auparavant, à l'exception du terme :

$$-\frac{1}{2}\sqrt{g}\{^1_{\beta\gamma}\}\sigma^{11}\Big|_{\left(i,\frac{1}{2}\right)} \quad (4.129)$$

qui requière l'approximation de $\frac{\partial U^1}{\partial \zeta^2}$ sur $\zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2$ élargissant le stencil de discrétisation.

Cependant, puisqu'on suppose la variation de U^1 suivant la direction ζ^2 négligeable, on a :

$$\frac{\partial U^1}{\partial \zeta^2} \approx 0.$$

La procédure d'intégration suivant $\Omega_{i+\frac{1}{2},1}$ de la composante tangentielle de la vitesse $V_{(i+\frac{1}{2},1)}^1$, est similaire à celle exposé préalablement, excepté pour les expressions (4.118) et (4.125) remplacés par :

$$U^1 \text{ donné sur } \zeta^2 = \zeta_{\frac{1}{2}}^2 \tag{4.130}$$

$$V_{(i+m,0)}^2 = 2V_{(i+m,1)}^2 - V_{(i+m,2)}^2 \tag{4.131}$$

La condition (4.130) combiné avec $\sigma^{(N),n}$ prescrit à la limite de sortie de l'écoulement, est supposé égale à zéro. L'une des raisons qui nous pousse à prescrire U^1 au lieu de $u.t$ est sa simplicité de mise en œuvre. L'imprécision associée ne se propagera pas en amont, à condition que le nombre Reynolds soit suffisamment grand et que la limite de l'écoulement soit placée en aval de la région qui nous intéresse. Nous avons complété maintenant la mise en œuvre des conditions aux limites, des détails supplémentaires peuvent être trouvés dans [127].

IV.6.1.2 l'équation du transport :

Dans cette section nous considérons la discrétisation de l'équation de transport pour ϕ sur les cellules limites. Les conditions aux limites suivantes seront considérées:

- Les conditions de Dirichlet : ϕ prescrit sur la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$.

$$\phi = g_D \tag{4.132}$$

- Les conditions de Neumann : la dérivée de ϕ suivant la direction normale à la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$ est prescrite.

$$\Gamma n \cdot \nabla \phi = g_N \tag{4.133}$$

où n est le vecteur unité extérieur normal à la surface limite $\zeta^n = \text{constante}$. La mise en oeuvre des conditions aux limites doit être tel qu'il en résulte un schéma positif. Les seuls termes qui peuvent introduire des inconnues virtuelles sont les termes de convection et les termes de diffusion. Ces termes seront traités séparément. Chacune des cellules limites sera traité comme dans la Section IV.3.3. Nous nous restreignons à une cellule limite $\Omega_{i,j,k}$ sur $\zeta^1 = \zeta_{\frac{1}{2}}^1$.

Les autres limites peuvent être traitées exactement de la même façon. Nous ne discutons pas des modifications apportées aux coins limites du domaine qui nécessite plusieurs combinaisons des conditions aux limites prescrites. Le traitement de ces possibilités est très important pour obtenir un schéma positif. Nous traitons un domaine de calcul tridimensionnel :

Le terme de diffusion.

Considérons l'intégration en volumes finis du terme de diffusion (voir (4.16) et (3.76)):

$$- \int_{\Omega_{l,j,k1}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \Gamma g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega \approx -\sqrt{g} \Gamma g^{1\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(\frac{3}{2}, j, k\right)} - \sqrt{g} \Gamma g^{2\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j+\frac{1}{2}, k\right)} - \sqrt{g} \Gamma g^{3\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j, k-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.134)$$

Supposons que l'on ait une condition de Dirichlet (4.132) sur $\zeta^1 = \zeta_1^1$. On considère les

approximations suivantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} = \phi_{(1,j,k)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} \quad (4.135)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^2} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} = g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)} \quad (4.136)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^3} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k\right)} = g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.137)$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{\left(1, j \pm \frac{1}{2}, k\right)} = \phi_{\left(\frac{3}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k\right)} \quad (4.138)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta^1} \Big|_{(1, j, k)} = \phi_{\left(\frac{3}{2}, j, k \pm \frac{1}{2}\right)} - g_D \Big|_{\left(\frac{1}{2}, j, k \pm \frac{1}{2}\right)} \quad (4.139)$$

alors que les autres termes de (4.134) sont traités avec la même méthode, exposé dans la Section IV.4.3. Pour (4.135) nous avons utilisé des différences décentrées, alors que dans (4.136) à (4.139) des différences centrales sont utilisées. L'expression (4.135) contribue à un schéma positif. Les expressions (4.136) et (4.137) contiennent que des termes connus et n'ont pas d'influence sur la positivité du schéma, pendant que (4.138) et (4.139) contribuent à un schéma positif si la méthode (ii) ou (iii), exposé dans la Section IV.4.3, est employée pour calculer $\phi_{\left(\frac{3}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k\right)}$ et $\phi_{\left(\frac{3}{2}, j, k \pm \frac{1}{2}\right)}$.

Ensuite, soit une condition de Neumann (4.134) sur $\zeta^1 = \zeta_1^1$ donné par :

$$\Gamma n \cdot \nabla \phi = -\frac{\Gamma g^{1\beta}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} = g_N$$

ici, l'intégration en volume finie du terme de diffusion (4.134) devient :

$$- \int_{\Omega_{l,j,k1}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \Gamma g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}}{\partial \zeta^\alpha} d\Omega \approx -\sqrt{g} \Gamma g^{1\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(\frac{3}{2}, j, k\right)} - \sqrt{g} \sqrt{g^{11}} g_N - \sqrt{g} \Gamma g^{2\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j+\frac{1}{2}, k\right)} - \sqrt{g} \Gamma g^{3\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^\beta} \Big|_{\left(1, j, k-\frac{1}{2}\right)} \quad (4.141)$$

La partie droite de l'équation (4.141) peut être approchée juste à l'intérieur du domaine, ces approximations introduisent quelques inconnues virtuelles aux points $(0, j, k)$, $(0, j \pm 1, k)$ et $(0, j, k \pm 1)$, qui peuvent être éliminées au moyen de la condition de Neumann (4.133) et des

points virtuels $x_{(0,j,k)}$, $x_{(0,j\pm 1,k)}$ et $x_{(0,j,k\pm 1)}$, par réflexion, respectivement des points $x_{(1,j,k)}$, $x_{(1,j\pm 1,k)}$ et $x_{(1,j,k\pm 1)}$, à la limite $\zeta^1 = \zeta_{\frac{1}{2}}^1$.

Les inconnues virtuelles sont éliminées par les approximations suivantes:

$$\phi_{(0,j,k)} = \phi_{(1,j,k)} - \frac{g_N}{\Gamma} |x_{(1,j,k)} - x_{(0,j,k)}| \quad (4.142)$$

$$\phi_{(0,j\pm 1,k)} = \phi_{(1,j\pm 1,k)} - \frac{g_N}{\Gamma} |x_{(1,j\pm 1,k)} - x_{(0,j\pm 1,k)}| \quad (4.143)$$

$$\phi_{(0,j,k\pm 1)} = \phi_{(1,j,k\pm 1)} - \frac{g_N}{\Gamma} |x_{(1,j,k\pm 1)} - x_{(0,j,k\pm 1)}| \quad (4.144)$$

En référence au théorème 4.1 il est clair que ces approximations produisent un schéma positif car les coefficients de $\phi_{(0,j,k)}$, $\phi_{(0,j\pm 1,k)}$ et $\phi_{(0,j,k\pm 1)}$ sont non-négatifs. Un modèle de sous maille à deux équations, seules les conditions de Neumann homogènes ($g_N=0$) sont appliquées.

Le terme de convection.

Les schémas décentrés en amont (upwind), traités dans la section IV.5.2, introduisent une seule inconnue virtuelle près des limites, à savoir $\phi_{(0,j,k)}$. Avec des conditions aux limites Dirichlet ou Neumann cette inconnue virtuelle peut être éliminée en utilisant une extrapolation linéaire. Dans le cas de la condition Dirichlet (4.132) nous écrivons :

$$\phi_{(0,j,k)} = 2g_D \left| \frac{1}{2}, j, k \right) - \phi_{(1,j,k)} \quad (4.145)$$

toutefois dans le cas d'une condition de Neumann (4.133), (4.142) est utilisé pour éliminer $\phi_{(0,j,k)}$. Dans tous les cas la positivité des schémas est maintenue.

IV.6.1.3 Fonctions de paroi :

Le calcul détaillé de l'écoulement près d'une paroi nécessite l'introduction d'un nombre élevé de point de discrétisation dans la zone de la sous-couche visqueuse et la zone intermédiaire où règnent des gradients intenses. Une méthode pratique pour pallier cet inconvénient est de faire appel à une loi universelle dans ces régions. Dans les cas usuels de couche limite sur plaque plane on utilise la loi logarithmique de vitesse proposée par Launder et Spalding [66]. Les fonctions de paroi utilisent des lois empiriques pour circonvenir l'incapacité du modèle à prédire un profil de vitesse logarithmique près d'une paroi. Avec ces lois, il est possible d'exprimer la vitesse parallèle aux parois et les quantités de la turbulence à l'extérieur de la sous couche visqueuse en fonction de la distance aux parois et des conditions de paroi telle que la tension du frottement et du gradient de pression.

Les fonctions de paroi sont utilisées pour fournir des conditions aux limites pour les équations de mouvement et des équations de transport, afin que la sous couche visqueuse n'ait plus besoin d'être résolu par un maillage très fin. Les lois de parois peuvent être obtenues par intégration des équations du mouvement dans l'approximation unidimensionnelle de l'écoulement stationnaire de couette.

L'expérience et l'analyse dimensionnelle montrent que la tension du frottement sur la paroi τ_w est liée à la vitesse parallèle à travers la paroi par la loi logarithmique suivante:

$$\tau_w = \frac{\rho C_{\mu}^{\frac{1}{4}} \kappa \sqrt{k_p}}{\text{Ln}(E Y_{p^+})} u'_p \quad (4.146)$$

où la coordonnée de paroi Y^+ est donnée par :

$$Y^+ = \frac{\rho C_{\mu}^{\frac{1}{4}} Y \sqrt{k}}{\mu} \quad (4.147)$$

Ici, u' est le vecteur de vitesse tangentielle, et κ est la constante de Von Karman (= 0.4) et E est un paramètre de rugosité, approximativement égale à 0.90 pour une paroi lisse. L'indice p fait référence au centre d'une cellule adjacente à la paroi. L'emplacement du centre de la cellule loin de la paroi doit être tel que $Y^+ > 11.3$ pour que la loi de paroi (4.146) reste valide.

Sinon, τ_w est calculé à partir du profil de la sous couche visqueuse:

$$\tau_w = \frac{\mu}{Y_{p^+}} u'_p \quad (4.148)$$

Ces relations sont une approche très acceptable dans le cas d'un écoulement bidimensionnel dans une région où l'équilibre local prédomine, mais nous les utiliserons aussi bien dans des circonstances plus générales. Une étude des lois de paroi tridimensionnels est présentée dans [150].

La tension de frottement sur la paroi τ_w peut être utilisée comme une condition aux limites pour les équations de quantité de mouvement suivant l'expression:

$$\sigma^{(n),t} = -|\tau_w| ; \quad t = \frac{\tau_w}{|\tau_w|} \quad (4.149)$$

Si la contrainte tangentielle $(\sigma^{(n),t})$ est prescrite. La deuxième condition est supposée être :

$$u \cdot n = 0 \quad (4.150)$$

Le vecteur u' peut être obtenu en soustrayant le vecteur normal u^n du vecteur vitesse u :

$$u' = u - u^n \quad (4.151)$$

avec :

$$u = U^\alpha \cdot a_{(\alpha)} \quad \text{et} \quad u^n = (u \cdot n) n = \frac{U^n}{g^{nn}} a^{(n)} \quad (4.152)$$

où (2.39) a été utilisé. Les composants de la vitesse contravariantes U^α et U^n au centre de la cellule sont calculés par interpolations linéaires en utilisant les points adjacents. La distance d'un nœud p près de la paroi d'une surface limite peut être trouvée comme le produit scalaire d'un vecteur qui connecte les points limites B et P et du vecteur unité normale n (voir la figure (4.11)).

Les coordonnées de B et p sont obtenues par interpolation linéaire des coordonnées des faces de la maille .

$$Y_p = BP \cdot n = \frac{BP \cdot a_B^{(n)}}{\sqrt{g_B^{NN}}} \quad (4.153)$$

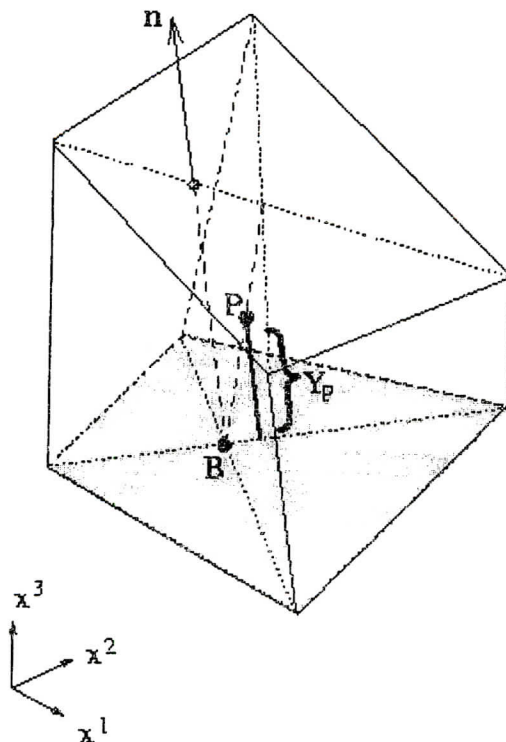


Figure (4.11): Calcul de la distance normale Y_p entre le nœud p et la surface limite.

Afin d'assurer une représentation numérique exacte de l'énergie de turbulence près de la paroi un traitement particulier est exigé dans l'évaluation du terme source par les cellules proches de la paroi. On considère le terme de production de l'équation de l'énergie de turbulence k . Puisque l'écoulement dans la sous couche est supposé être celui de Couette, la contribution dominante dans le terme de production est :

$$P_k = \tau_w \cdot \frac{\partial u^t}{\partial Y} \tag{4.154}$$

Suivant Launder et Spalding [66], nous supposons que la valeur locale de production au centre de la cellule près de la paroi peut être obtenue par une moyenne sur le demi de cellule proche de la paroi :

$$\overline{P_k} = \frac{1}{Y_p} \int_0^{Y_p} \tau_w \cdot \frac{\partial u^t}{\partial Y} dY = \tau_w \cdot \frac{u_p^t}{Y_p} \tag{4.155}$$

en prenant τ_w constant à travers la cellule proche de la paroi. Le taux de dissipation de k sur les cellules de la sous couche doit être traité d'une manière analogue. Pour évaluer le taux de la dissipation dans la couche logarithmique, on pose :

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa Y} \tag{4.156}$$

en supposant l'équilibre local, logique avec l'usage de la loi logarithmique de paroi. Dans le sous couche visqueuse nous adoptons l'expression suivante:

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu} \tag{4.157}$$

Avec (4.156) et (4.157) nous pouvons calculer la moyenne du taux de dissipation sur le demi de cellule près de la paroi :

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{Y_p} \int_0^{Y_p} \varepsilon dY = \begin{cases} C_{\mu}^4 k_p^2 \frac{Y_p^+}{Y_p}; Y_p^+ < 11.3 \\ C_{\mu}^4 k_p^2 \frac{\ln(EY_p^+)}{\kappa Y_p}; Y_p^+ > 11.3 \end{cases} \quad (4.158)$$

Ici, nous supposons que la variation d'énergie turbulente à travers la cellule proche de la paroi est négligeable. Les expressions (4.155) et (4.158) remplacent respectivement P_k et ε , dans le terme source de la forme standard de l'équation pour l'énergie turbulente (3.76). Finalement, le flux d'énergie turbulente à travers la paroi est supposé nul et la valeur de ε au premier point de la grille loin de la paroi est déterminée à partir de (4.156).

IV.6.2 Intégration temporelle et les techniques de correction de pression :

Plusieurs techniques numériques nécessaires à la construction d'un code de simulation numérique d'un écoulement instationnaire (discrétisation spatiale, interpolation et méthodes de correction, conditions aux limites, etc.) ont été largement discutées dans les sections précédentes. Pour résoudre un problème stationnaire, plusieurs stratégies sont disponibles. Une approche appropriée est d'appliquer une méthode d'intégration dépendante du temps pour atteindre un état stationnaire. Plus spécifiquement, on peut considérer la solution stationnaire comme la limite temporelle infinie des équations d'écoulements instationnaires c'est à dire que l'intégration peut être envisagée comme une méthode d'itération et le pas de temps comme un facteur de relaxation. Par cette approche il nous suffit donc de définir une seule méthode d'intégration qui servira alors à résoudre les problèmes stationnaires et instationnaires.

De même que l'espace physique est discrétisé par un maillage, l'axe des temps doit être découpé en intervalles Δt que nous supposons réguliers pour intégrer numériquement les équations filtrées de Navier-Stokes et les équations de modélisation. Le champ aérodynamique n'est alors calculé qu'en des instants $t^n = n\Delta t$, où Δt est communément appelé le pas de temps.

Aussi la discrétisation du problème continu est achevée en choisissant :

- Une discrétisation de la dérivée temporelle $\frac{\partial V^\alpha}{\partial t}$.
- l'instant entre t^{n+1} et t^n où sont estimés les termes de convection et visqueux.

Si les ces flux sont estimés en t^n , la méthode d'intégration est dite explicite, et elle se caractérise par la rapidité de l'intégration des équations sur un pas de temps. Cependant ce dernier peut parfois prendre de très petites valeurs pour assurer la stabilité de l'intégration, car il doit vérifier la condition de Courant-Friedricks-Levy :

$$\Delta t \leq CFL \min_j \left(\frac{\Delta x_j}{|u_j| + c}, \frac{\Delta x_j^2 R_e}{4} \right) \quad (4.159)$$

Où le nombre de CFL est proche de l'unité, sa valeur doit être légèrement ajustée en fonction du schéma explicite retenu. Le pas de temps se trouve donc limité par une double contrainte, qui consiste à assurer une intégration stable des flux de convection et visqueux.

Si les flux sont estimés en t^{n+1} , la méthode d'intégration est dite implicite, et la stabilité de l'intégration n'est plus liée à l'équation (4.159). Dans ce cas, les limitations imposées au pas de temps ont pour unique origine l'instationnarité des écoulements. Ainsi des pas de temps de valeur quasi-infinie peuvent être employés pour accélérer la convergence vers une solution stationnaire. Cependant le prix à payer pour cette stabilité accrue réside dans la nécessité de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps de l'intégration temporelle, ce qui peut se révéler très coûteux en temps de calcul. Cependant, la résolution numérique des équations incompressible de Navier-Stokes est compliquée par le manque d'équations explicites pour la pression. Afin de contourner cette difficulté on utilise des méthodes de projection. Ces méthodes divisent l'intégration d'un pas de temps en deux sous pas, constitués d'un pas prédictif qui permet d'obtenir une première estimation du champ de vitesse, qui n'est pas en général à divergence nulle et d'un pas correcteur, qui modifie le champ de vitesse afin d'assurer la contrainte d'incompressibilité. Cette technique est connue comme la méthode de correction de pression [47]. Pour la discrétisation temporelle nous utilisons une combinaison linéaire du schéma d'Euler décentré en avant et en arrière, appelé méthode- θ , et la méthode de correction de pression du deuxième ordre de troncation en temps décrite par Van Kan [152].

Le discrétisation spatiale des équations de continuité, du mouvement et des équations de transport aboutit au système d'équations non-linéaires dépendantes du temps suivant:

$$R \frac{\partial V}{\partial t} + M(V, \phi_1 \dots \phi_n) + Gp = F \quad (4.160)$$

$$DV = 0 \quad (4.161)$$

$$R \frac{\partial \phi}{\partial t} + T_i(V, \phi_1 \dots \phi_n) = S_i + S_{b,i} ; \forall i \in [1, \dots, N] \quad (4.162)$$

Où V et p dénotent des vecteurs algébriques contenant les inconnues de vitesse et de pression de tous les points du maillage, ϕ_i est la $i^{\text{ème}}$ fonction scalaire discrète de la grille et N est le nombre total des scalaires inconnus. Par exemple dans le cas du modèle à deux équations de transport $N = 2$. En outre, R est la matrice diagonale unité, D et G sont l'opérateur de divergence et de gradient discrétisé, M représente la discrétisation spatiale des termes de convection et des tenseurs des contraintes visqueuses et T_i est l'opérateur impliquant la discrétisation de convection et de diffusion du $i^{\text{ème}}$ scalaire. Le vecteur F contient les forces de volume et les termes dus au changement de repère ainsi que les valeurs des vitesses aux limites du domaine et S_i représente le terme source suivant ϕ_i qui est en général une fonction de V_i et $\phi_j \forall j \in [1, \dots, N]$. Les termes sources S_i résultent des conditions aux limites pour ϕ_i . Dans cette section nous nous restreignons à la discrétisation temporelle de l'équation de quantité de mouvement. Le traitement des équations du transport sera discuté dans la prochaine section, car la discrétisation du terme source de la turbulence a un impact considérable sur l'intégration temporelle. L'application de la méthode- θ à (4.160)-(4.161) nous permet d'écrire :

$$R \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} + \theta M(V^{n+1}) + (1-\theta)M(V^n) + \theta Gp^{n+1} + (1-\theta)Gp^n = \theta F^{n+1} + (1-\theta)F^n \quad (4.163)$$

$$DV^{n+1} = 0 \quad (4.164)$$

Où θ varie entre zéro et l'unité, n dénote du niveau du temps précédent, $n+1$ le nouveau niveau du temps. Pour $\theta=0$ et $\theta=1$ nous obtenons le schéma d'Euler du premier ordre respectivement, explicite et implicite, pour $\theta=\frac{1}{2}$ nous obtenons le schéma de Crank-Nicolson du deuxième ordre. La méthode de correction de pression définit le changement du niveau de temps (n) au niveau ($n+1$) en deux pas. En premier lieu, (4.164) est remplacé par :

$$R \frac{V^* - V^n}{\Delta t} + \theta M(V^*) + (1-\theta)M(V^n) + (1-\theta)Gp^n = \theta F^{n+1} + (1-\theta)F^n \quad (4.165)$$

Où V^* représente une vitesse intermédiaire. Le terme non linéaire $M(V^*)$ est linéarisé en utilisant la méthode Newton du deuxième ordre :

$$M(V^*) \approx M(V^n) + \left(\frac{\partial M}{\partial V}\right)'(V^* - V^n) \quad (4.166)$$

Le système obtenu est résolu pour V^* , en soustrayant (4.165) de (4.163), qui s'écrit :

$$\frac{V^{n+1} - V^*}{\Delta t} = -\theta R^{-1}G(p^{n+1} - p^n) \quad (4.167)$$

Où le terme $\theta(M(V^{n+1}) - M(V^*))$ peut être négligé sans affecter l'ordre de précision [152]. L'application de l'opérateur discret de divergence D à (4.167) en utilisant (4.164) permet d'écrire :

$$DV^* = -\theta \Delta t DR^{-1}G(p^{n+1} - p^n) \quad (4.168)$$

une équation de Poisson pour la correction de pression. Généralement cette équation introduit un stencil de discrétisation de 9 points et 19 points respectivement dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel similaire à celui de l'équation de transport. Toutefois la matrice $DR^{-1}G$ est non-symétrique lorsqu'on utilise un maillage non-orthogonal. Une fois p^{n+1} est obtenue on calcule V^{n+1} par la formule (4.167).

IV.6.3 traitement du terme source de la turbulence :

Nous considérons le système (4.162) résultant de la discrétisation spatiale des équations du transport de la turbulence. L'objectif principal de cette section est d'étudier l'influence du terme source de la turbulence sur l'intégration temporelle des équations. Le terme source est traité en séparant les contributions positives des contributions négatives arrangées sous forme linéaire:

$$S_i = S_i^p + S_i^n \phi_i \quad (4.169)$$

où S_i^p représentent les contributions positives et S_i^n les contributions négatives. Tout terme négatif ne contenant pas ϕ_i comme multiplicateur est divisé en premier lieu par ϕ_i (obtenu au niveau du temps antérieur) et ajouté à S_i^n afin d'assurer la dominance diagonale des coefficients de la matrice afin d'améliorer la stabilité numérique. L'approximation de S_i devrait garantir la positivité des quantités de la turbulence (k et ε). On introduit pour cela un nouveau facteur temporel pour le terme source. En utilisant la méthode- θ de discrétisation nous obtenons le système discret suivant :

$$R \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \theta T^{n+1} + (1-\theta)T^n = \psi \cdot S_i^{n+1} + (1-\psi)S_i^n + S_{b,i} \quad (4.170)$$

Où $\psi \in [0,1]$ est le facteur choisi indépendamment de θ . Pour un écoulement stationnaire, on prend $\theta=1$ c'est la seule valeur qui assure la positivité de tous les coefficients dans la partie gauche de l'équation (4.170) et donc satisfait les conditions de Théorème 4.1. Maintenant, on considère le traitement du terme source S_i tel que les valeurs des quantités turbulentes soient non négatives pendant l'évolution du temps et par conséquent maintenir la stabilité numérique. Il est suffisant de considérer l'équation suivante:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \psi \cdot S_i^{n+1} + (1 - \psi) S_i^n \quad (4.171)$$

On linéarise le terme source au niveau temporel $n+1$ suivant :

$$S^{n+1} = S^n + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n (\phi^{n+1} - \phi^n) \quad (4.172)$$

En substituant (4.172) dans (4.171), nous arrivons à :

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = S^n + \psi \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n (\phi^{n+1} - \phi^n) \quad (4.173)$$

Pour préserver la positivité de la solution ϕ , on pose l'inégalité suivante (voir le théorème

4.1):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n < 0 \quad (4.174)$$

Bien que ce ne soit pas une exigence nécessaire, il est suffisant que ϕ^n soit non négative pour que ϕ^{n+1} l'est aussi. Dans ce cas, quand $\left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^n > 0$ nous devons choisir $\psi=0$.

IV.6.4. L'algorithme de résolution :

Les discrétisations spatiales et temporelles cèdent à un ensemble d'équations algébriques couplées pour la vitesse, la pression et les quantités de la turbulence (k et ε). L'étape finale du travail de simulation numérique est de choisir une méthode capable de résoudre l'ensemble des équations discrétisées. Ce choix affecte l'accouplement de plusieurs inconnues. Fondamentalement, la vitesse et le champ de pression sont associés par l'équation de continuité. Pour les écoulements turbulents, les équations de mouvement sont associées aux équations du transport de la turbulence par la viscosité turbulente. Il faut encore noter qu'un très fort accouplement existe entre les équations de turbulence dans le cas d'une modélisation à plusieurs équations de transport.

En principe, il y a deux approches pour la résolution de l'ensemble des équations discrétisées couplées. La première consiste à résoudre toutes les équations en chaque point de la grille simultanément. Par contraste, la seconde est une technique de résolution séquentielle itérative découplée en traitant les autres variables comme des quantités connues jusqu'à obtenir une solution convergée des équations. La méthode de résolution couplé exige un ordinateur très puissant, mais peut avoir un meilleur taux de convergence et plus de stabilité numérique que celle traitant la résolution d'une manière découplée [84, 117, 168]. Néanmoins, résoudre toutes les équations simultanément, peut être si compliqué qu'il devient très difficile d'utiliser cette procédure de résolution. Il peut être alors préférable d'adopter une méthode découplée ou bien une forme mixte des deux stratégies.

Ici, l'algorithme de résolution peut être décrit par les étapes suivantes : Pour chaque pas du temps, le début du processus commence par une estimation des variables V^{α}, p, k et ε par des valeurs initiales ou par les valeurs obtenues au niveau temporel antérieur. notons que la

vitesse estimée doit satisfaire la condition d'incompressibilité. Ensuite l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement couplées sont résolues en utilisant une viscosité turbulente non actualisé. Afin d'assurer un champ de vitesse a divergence nulle la méthode de correction de pression présentée dans la section IV.6.2 est utilisée. Les équations de quantité de mouvement et équations de correction de pression sont résolues séquentiellement. A cause des non-linéarités cette boucle ($V^\alpha \rightarrow p$) peut être répétée jusqu'à ce qu'une solution convergée soit obtenue, mais une itération de la méthode Newton pour chaque pas du temps est suffisante dans le cas d'un écoulement turbulent stationnaire. Finalement, les équations de la turbulence sont résolues d'une façon découplées en utilisant les quantités de l'écoulement mises à jour et une viscosité turbulente non actualisé. L'équation pour ε est résolue après celle pour k . Pour les écoulements instationnaires, il est nécessaire de répéter cette boucle ($k \rightarrow \varepsilon$) à chaque pas du temps pour atteindre un état de convergence. De plus, la boucle externe ($V^\alpha \rightarrow p \rightarrow k \rightarrow \varepsilon$) qui contient les deux boucles intérieures ($V^\alpha \rightarrow p$) et ($k \rightarrow \varepsilon$) couplées par la viscosité turbulente, est répété tant que toutes les variables au niveau temporel $n+1$ n'ont pas encore convergées.

Pour résoudre un problème stationnaire, la méthode consiste à résoudre les équations instationnaires de Navier-Stokes et choisir une limite finale d'intégration temporelle assez grande pour atteindre l'état stationnaire. On dit alors qu'une solution est stationnaire si elle vérifie le critère de convergence suivant :

$$\|u^{n+1} - u^n\|_{\max} \leq \frac{1-\lambda}{\lambda} \left(relacc \|u^{n+1}\|_2 + absacc \right) \quad (4.175)$$

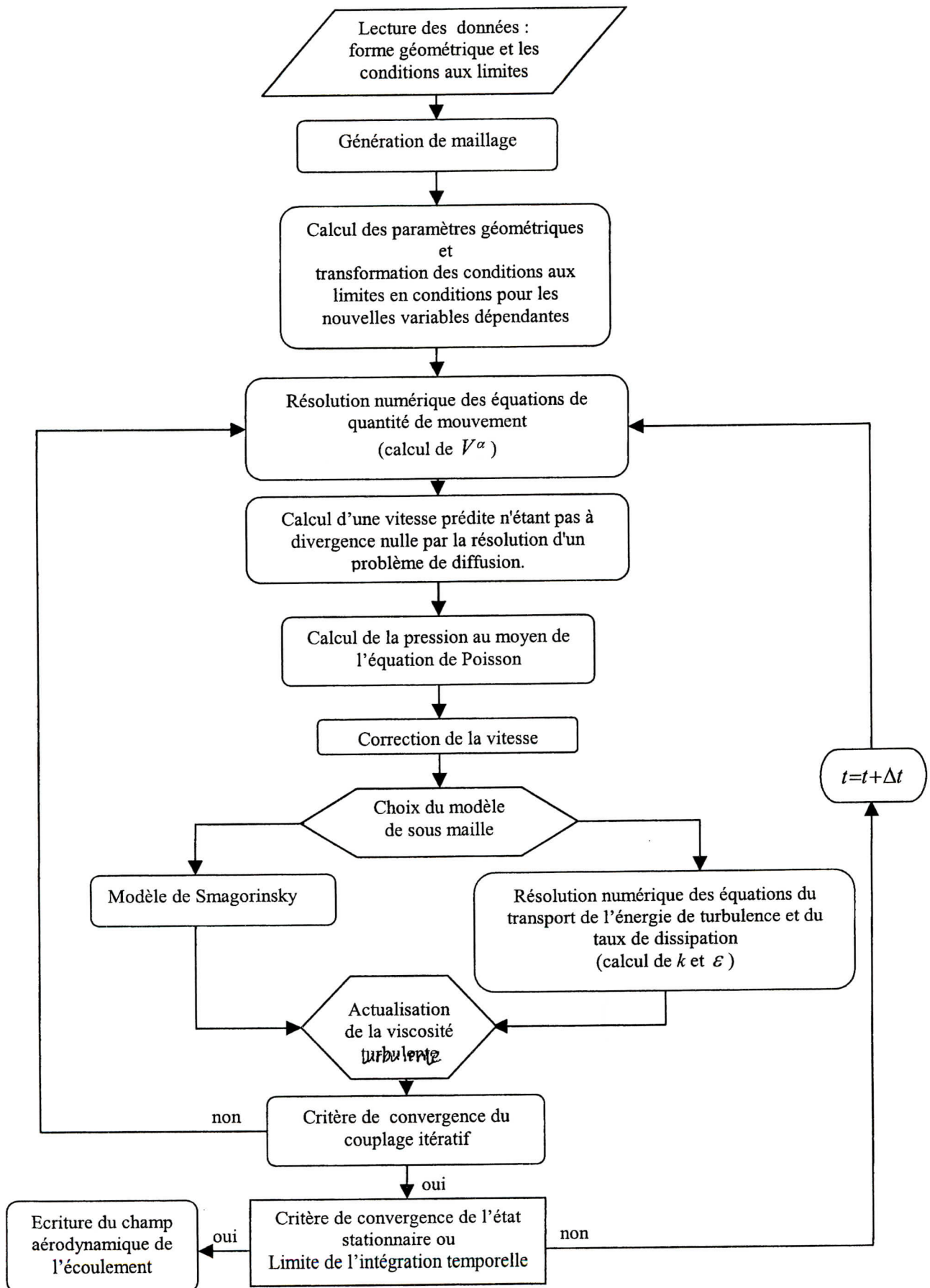
avec

$$\lambda = \frac{\|u^{n+1} - u^n\|_2}{\|u^n - u^{n-1}\|_2}$$

Les valeurs de *relacc* (le paramètre relatif de précision) et *absacc* (le paramètre absolu de précision) peuvent être définies suivant le problème traité, les valeurs par défaut sont égales à zéro. Il est recommandé dans ce cas d'utiliser le schéma Euler implicite, afin de pouvoir utiliser de large pas de temps. Malheureusement la combinaison de ce schéma et la méthode de correction de pression exclue l'usage de pas de temps trop grand.

Les systèmes des équations linéaires sont résolus par une méthode de sous-espace de Krylov du type GMRES [122] avec un préconditionnement ILU (factorisation LU incomplète). Cette méthode est très adaptée pour résoudre des systèmes a matrice non-symétrique, avec un taux de convergence relativement très rapide. Puisque la méthode GMRES nécessite le calcul du résidu, on utilise sa réduction comme critère de convergence. Soit le système à résoudre noté $Ax=b$, après k itérations, nous avons une solution approximative $x^{(k)}$ et un résidu $\tau^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ relié à l'erreur de convergence $\epsilon^{(k)} = x - x^{(k)}$ par la relation $A\epsilon^{(k)} = \tau^{(k)}$, donc la réduction du résidu résulte de la réduction de l'erreur de convergence. Le processus d'itération GMRES s'arrête à chaque pas du temps si le rapport de la norme résiduelle sur le résidu initial $\frac{\|\tau^{(k)}\|_2}{\|\tau^{(0)}\|_2} \leq tol$ où *tol* est de l'ordre de 10^{-3} pour la résolution des systèmes d'équations de quantité de mouvement et du transport des quantités turbulentes et de 10^{-4} pour le système de pression (voir annexe pour plus de détails).

L'organigramme de la résolution numérique :



Chapitre V

Application et résultats numériques

L'algorithme de simulation numérique décrit dans les chapitres précédents a été utilisé pour la détermination de l'écoulement stationnaire et instationnaire autour d'un profil Naca0012. Les résultats numériques ont été validés par des comparaisons avec des résultats expérimentaux obtenus par des laboratoires d'aérodynamique instationnaire et celles obtenues par simulation statistique sur une aile d'envergure dans différentes configurations.

V.1 Mise en œuvre de la SGE sur le cas test :

Cette section du chapitre est consacrée à la mise en œuvre de la Simulation des Grandes Echelles pour calculer l'écoulement autour d'une aile tridimensionnelle présentée au chapitre(II).

V.1.1 Géométrie et maillage de l'écoulement autour du profil d'aile et ses caractéristiques :

La géométrie de l'écoulement est schématisée sur la figure (5.1), on définit la direction longitudinale (Ox^1) et normale (Ox^2) et finalement la direction transversale (Ox^3). D'un point de vue statistique, les directions (Ox^1) et (Ox^2) limitées par la paroi du profil sont inhomogènes, alors que la direction (Ox^3) est homogène et justiciable de conditions aux limites périodiques. Pour éviter le recouvrement des spectres et des corrélations dues aux conditions aux limites les dimensions du domaine de calcul sont choisies telles que :

$$L_{x^1}=4C \quad ; \quad L_{x^2}=4C \quad ; \quad L_{x^3}=C \quad (5.1)$$

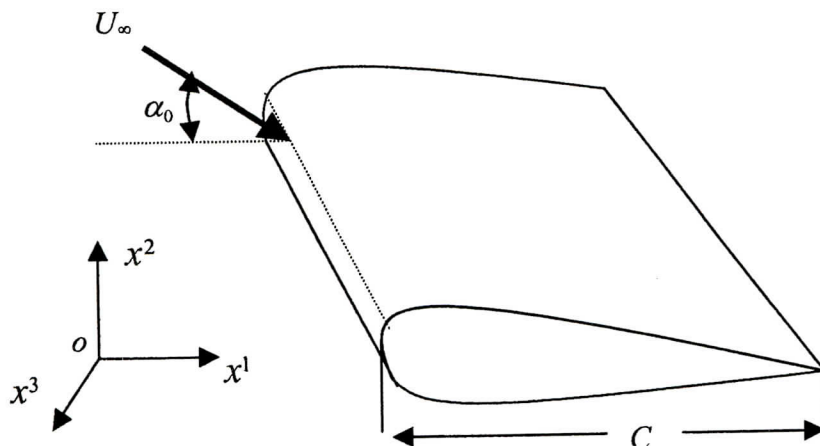


Figure (5.1) Schéma de l'aile et des axes de coordonnées

Afin d'effectuer des calculs laminaires et turbulents statistiques nécessaire à l'initialisation de la simulation des grandes échelles turbulentes on adopte deux types de maillage en forme C.

Le maillage autour d'un profil d'aile adapté aux calculs statistiques illustré par la figure (5.2) est un maillage très resserré aux parois et lâche au cœur du domaine. Il est important d'avoir un maillage très resserré près des parois dans les calculs statistiques car certains paramètres des modèles sont calculés à partir des gradients de la vitesse et surtout à partir des valeurs de l'énergie cinétique de turbulence k et de la dissipation ε proche des parois. Il faut donc évaluer les dérivées avec une grande précision. De plus, la discrétisation temporelle utilisée dans la résolution statistique étant implicite, le pas de temps ne devient plus un facteur limitant. Pour les simulations des grandes échelles nous avons modifié le maillage de façon à avoir des maillages plus réguliers moins lâche dans le cœur du domaine sans pour autant desserrer la concentration des nœuds près de parois. Il est également très important de discrétiser correctement les couches limites en SGE pour capturer les phénomènes turbulents dans le cas d'une modélisation n'utilisant pas de loi de parois.

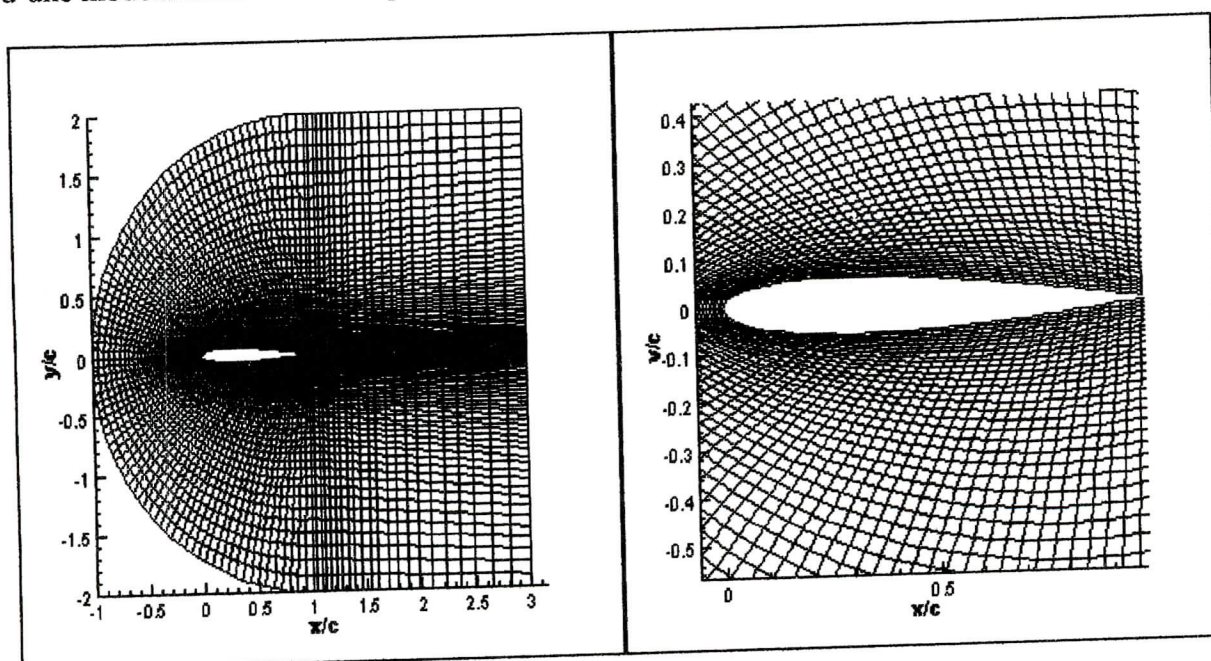


Figure (5.2) Maillage bidimensionnel autour du profil d'aile

Maillage utilisé dans la simulation SGE :

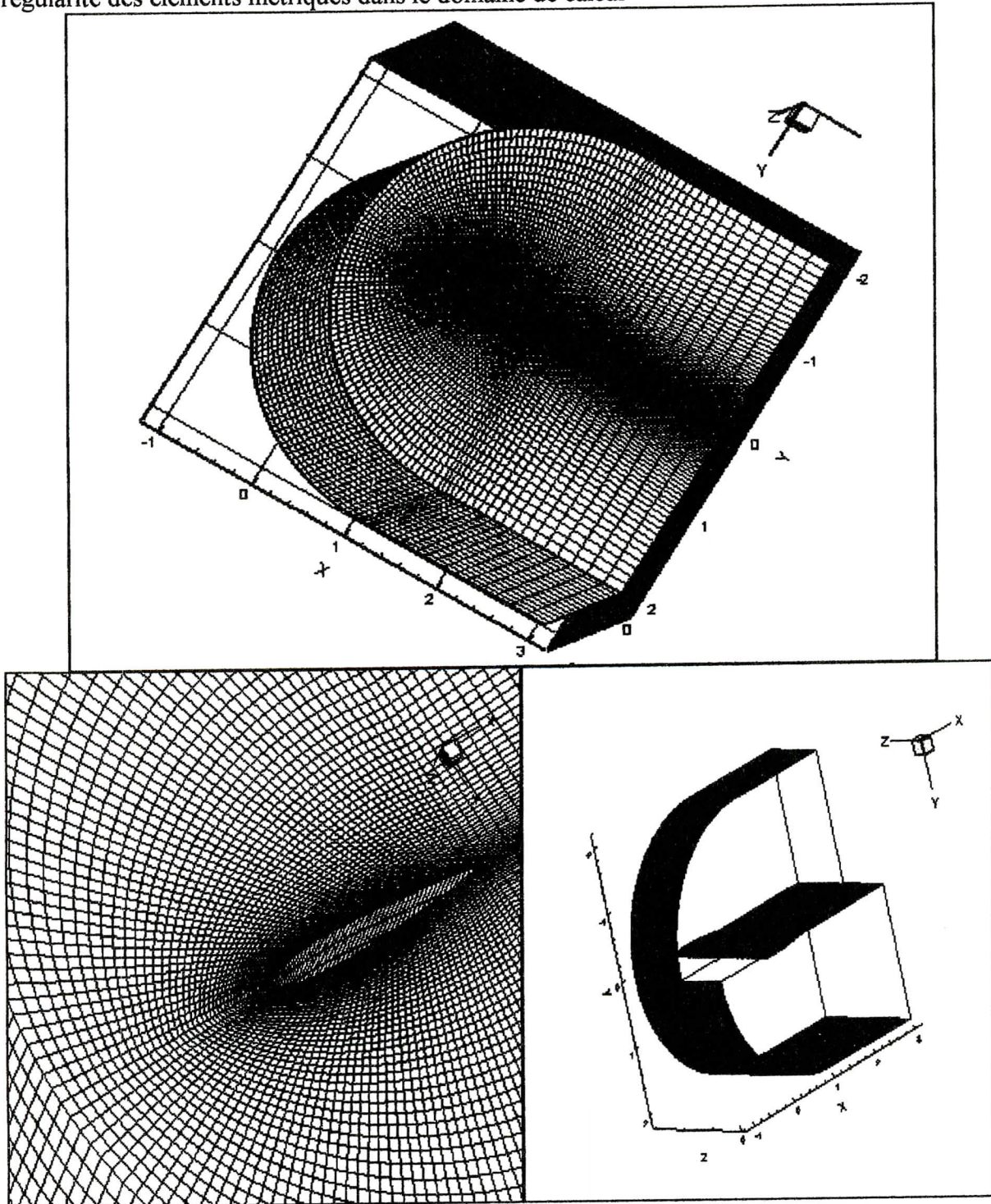
Le maillage en forme de C illustré sur la figure (5.3) généré autour du profil Naca0012 dont la ligne moyenne et la corde sont confondues en ayant une épaisseur maximum de 12% de sa corde : la distribution de l'épaisseur est donné par la fonction suivante (Abbot et Dsenhoff, 1959) :

$$Y_e = \frac{e}{0.2} \left[0.2969\sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2846x^3 - 0.1015x^4 \right] \quad (5.2)$$

Où e représente l'épaisseur maximum du profil par rapport à la corde du profil.

Le maillage est tracé dans le plan $x^3=0.03C$. Le plan transformé $\zeta^2=0$. coïncide avec la paroi du profil et $\zeta^2=1$. coïncide avec la limite extérieure du domaine. Les plans transformés $\zeta^1=0$. et $\zeta^1=1$. coïncident respectivement avec les deux parois latérales à $x^1=3C$ et $x^1=\pm 2C$. Les plans transformés $\zeta^3=constante$ sont parallèles aux plans $x^3=constante$.

Une distribution équidistante selon (Ox^3) est adoptée. Nous avons imposé une distribution des points selon (Ox^1) et selon (Ox^2) à l'aide d'une formule algébrique en cosinus. Le maillage est finalement lissé à l'aide de la résolution d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique sur x^1 et x^2 dans chaque plan $x^3=constante$ [39], [76], [77]. Cela permet d'assurer la régularité des éléments métriques dans le domaine de calcul



Figure(5.3) Vues perspectives du maillage tridimensionnel et ces limites autour du profil d'aile Naca 0012 en forme C

V.1.2 Conditions aux limites :

Dans les calculs de quantité de mouvement, les conditions de parois du profil sont des conditions d'adhérence et des conditions de loi de paroi basée sur une loi instantanée logarithmique quand le maillage est moins concentré près des parois. Les conditions aux limites imposées à la sortie de l'écoulement sont des conditions où on prescrit les contraintes normales et tangentielles égales à zéro.

Les conditions d'entrée sont spécifiées sur les régions courbées du maillage C. Les vitesses imposées par la configuration du mouvement instationnaire étudié sont perturbées afin de générer la turbulence dans la simulation des grandes échelles turbulentes. La perturbation autour du profil moyen des composantes de vitesse \bar{u}_i est induite en superposant un bruit blanc aux profils des vitesses. Il est construit de telle façon qu'il n'induit pas de débit supplémentaire. Les calculs réalisés en simulation des grandes échelles permettent de calculer l'écoulement dans une configuration particulière à chaque pas de temps, à l'inverse des calculs statistiques qui moyennent plusieurs réalisations dans le temps. Le bruit blanc est donc une suite spatialement aléatoire mais déterministe en temps. Il est en effet important de pouvoir recommencer les calculs dans la même configuration à tout instant, donc à l'entrée du domaine de calcul, les vitesses sont imposées par les relations suivantes :

$$U_e = U_\infty + \tilde{u} \quad (5.3)$$

$$V_e = V_\infty + \tilde{v} \quad (5.4)$$

$$W_e = \tilde{w} \quad (5.5)$$

les vitesses de perturbation sont calculées sur la base des intensités de fluctuation (rms)

$$u_{rms} = \sqrt{\langle (u''(t))^2 \rangle_t} \quad (5.6)$$

avec :

$$u''(t) = \bar{u}(t) - \langle \bar{u}(t) \rangle_t$$

et d'une longueur d'échelle ainsi que de la plage des fréquences au-dessus de lesquelles l'énergie est distribuée. La procédure utilisée dans cette étude est similaire à celle utilisé par Rai et Moin [115] pour la simulation directe de la transition d'une couche limite sur une plaque plane. Pour décrire cette méthode on considère la vitesse de perturbation $\tilde{u}(x^2, x^3, t)$ assumant une périodicité suivant x^2 , x^3 et t on peut écrire la représentation de $\tilde{u}(x^2, x^3, t)$ en série de Fourier :

$$\tilde{u}(x^2, x^3, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{lmn} \sin\left(\frac{2\pi l x^2}{L_{x^2}} + \phi_l\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi m x^3}{L_{x^3}} + \phi_m\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n\right) \quad (5.7)$$

L_{x^2} et L_{x^3} sont les dimensions du domaine de calcul numérique respectivement suivant la direction x^2 et x^3 , T est la période des basses fréquences à générer et les angles de phase ϕ_m, ϕ_n, ϕ_l sont des nombres aléatoires choisis entre zéro et 2π . On choisit les coefficients sous la formulation suivante :

$$A_{lmn}^2 = 8 u_{rms} X^2(l) X^3(m) T(n) \quad (5.8)$$

avec :

$$X^2(l) = K_{x^2} d_{x^2}^{l-1} \quad l=1, 2, \dots, L \quad (5.9)$$

$$X^3(m) = K_{x^3} d_{x^3}^{m-1} \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5.10)$$

et la fonction $T(n)$ est supposée satisfaire le spectre de Von Karman défini par :

$$\frac{T(n+1)}{T(n)} = \frac{1+\theta^2 n^2}{1+\theta^2(n+1)^2} \tag{5.11}$$

$$\theta = \frac{2\pi\Lambda}{U_\infty}$$

Λ est la longueur d'échelle, n nombre d'onde. Les valeurs des constantes K_{x^2} , K_{x^3} et $T(1)$ sont choisies telles que :

$$\sum_{l=1}^L X^2(l)=1, \sum_{m=1}^M X^3(m)=1, \sum_{n=1}^N T(n)=1 \tag{5.12}$$

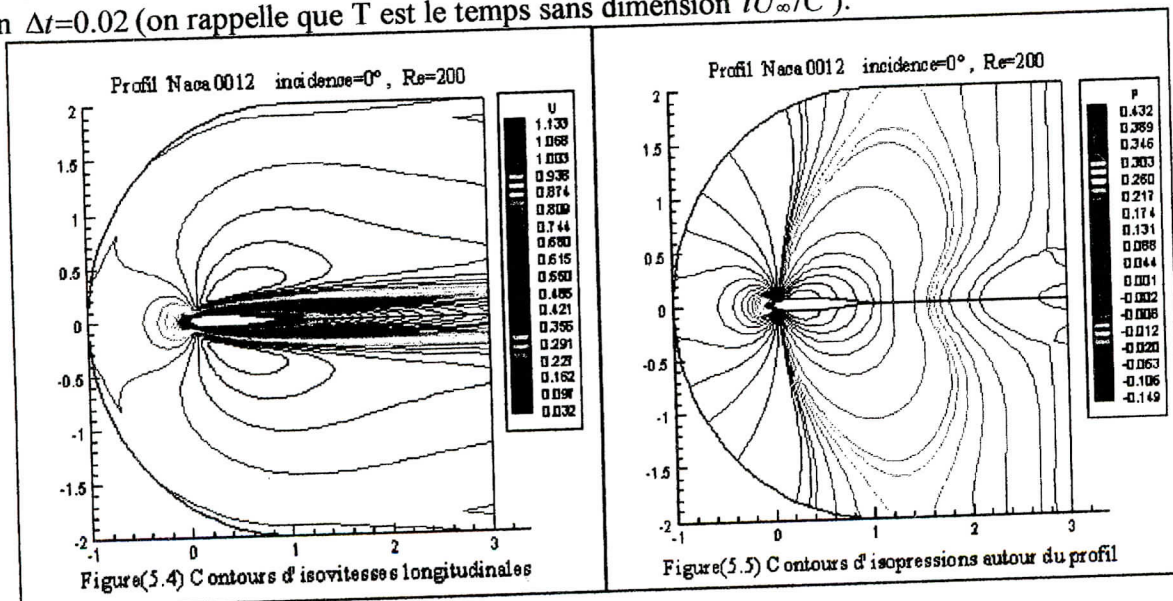
Les conditions d'entrée sont données par un champ réalisant un spectre d'énergie de Kolmogoroff présentant une pente en $-5/3$ dans la zone inertielle. L'énergie turbulente est choisie de façon à retrouver les niveaux d'énergie de l'expérience de l'écoulement turbulent autour d'un profil d'aile en fonction de l'expression reliant les intensités de fluctuation à l'entrée du domaine et le spectre d'énergie de turbulence :

$$E(k) = C_0 \frac{u_{rms}^2}{K_0} \left(\frac{K}{K_0}\right)^4 \exp\left[-2\left(\frac{K}{K_0}\right)^2\right] \tag{5.13}$$

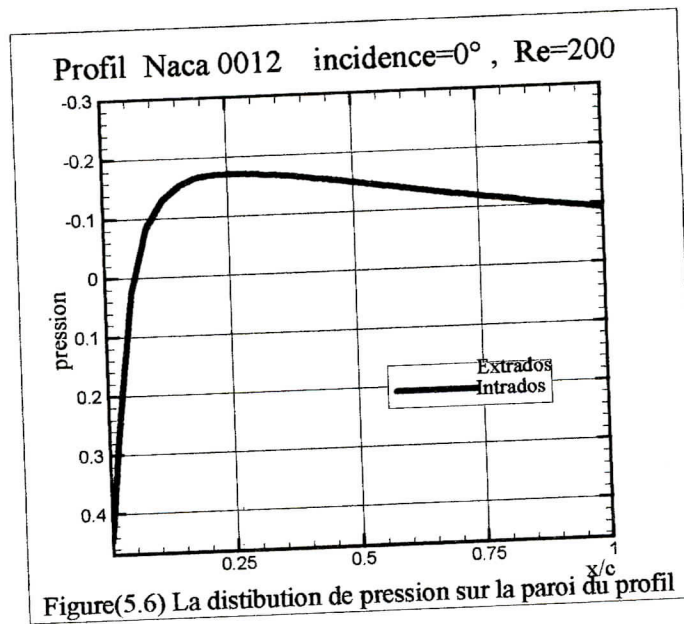
avec le nombre d'onde K_0 correspondant au maximum de $E(k)$ relatif aux gros tourbillons. Les conditions aux limites périodiques sont utilisées dans la direction transversale considérée homogène. Nous initialisons la simulation numérique par un champ statistique convergé obtenue à l'aide de la méthode $k-\varepsilon$.

V.1.3 Conditions initiales :

Afin d'initialiser les simulations numériques et valider les performances du code de calcul par étape dans des configurations moins compliquées que celle de la simulation des grandes échelles turbulentes, on commence par modéliser l'écoulement stationnaire autour d'un profil d'aile bidimensionnel à un nombre de Reynolds $Re=2.10^5$ pour des angles d'incidence $\alpha_0=0,6$ et 12 . Pour illustrer le problème que nous analysons dans cette section, nous commençons par présenter les résultats obtenus pour un écoulement laminaire à un $Re=200$ et une incidence $=0^\circ$ sur les figures (5.4) et (5.5) représentant les isovaleurs de la vitesse longitudinale et la pression de l'état stationnaire obtenue après un temps de calcul $T=1.7$ pour un $\Delta t=0.02$ (on rappelle que T est le temps sans dimension tU_∞/C).

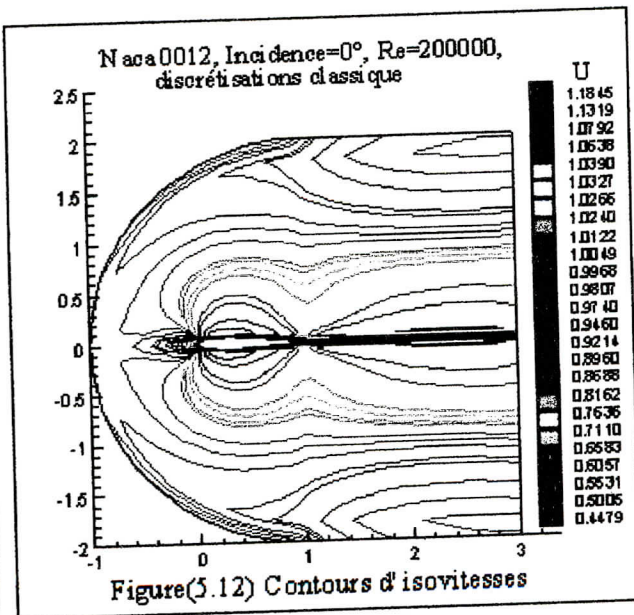
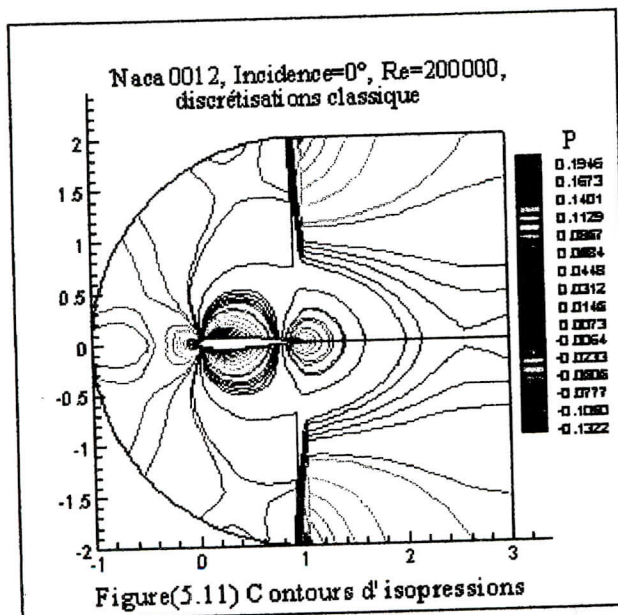
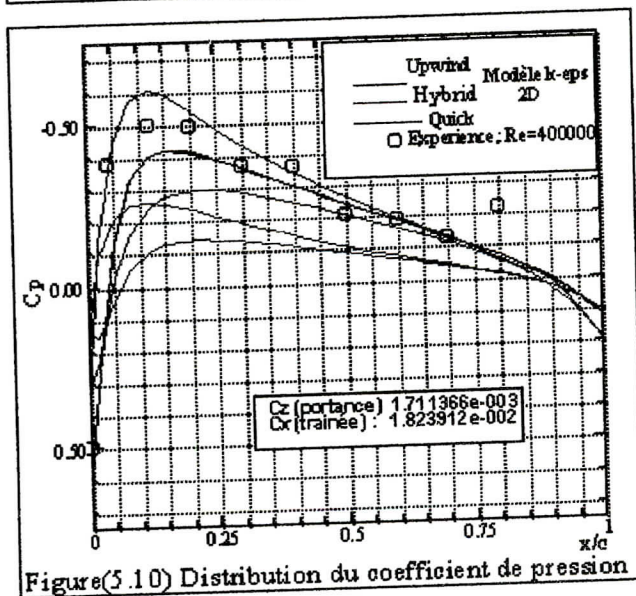
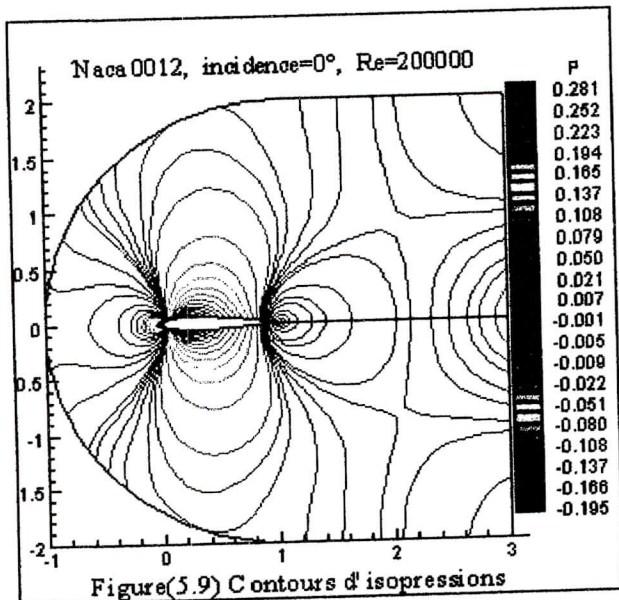
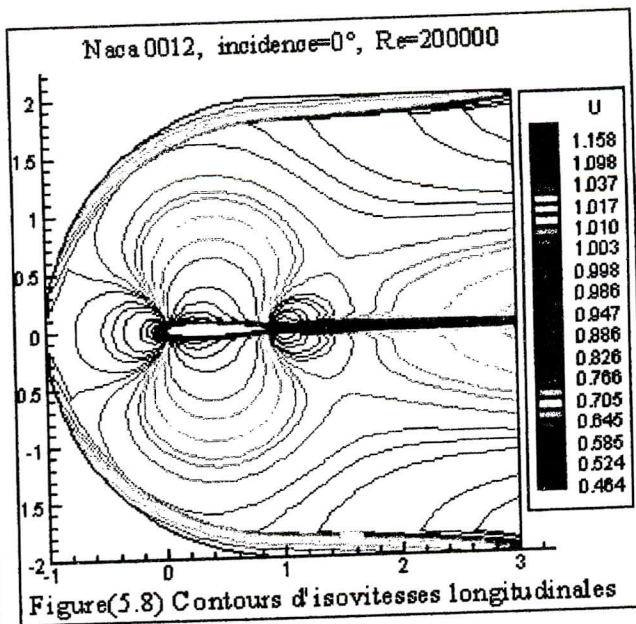
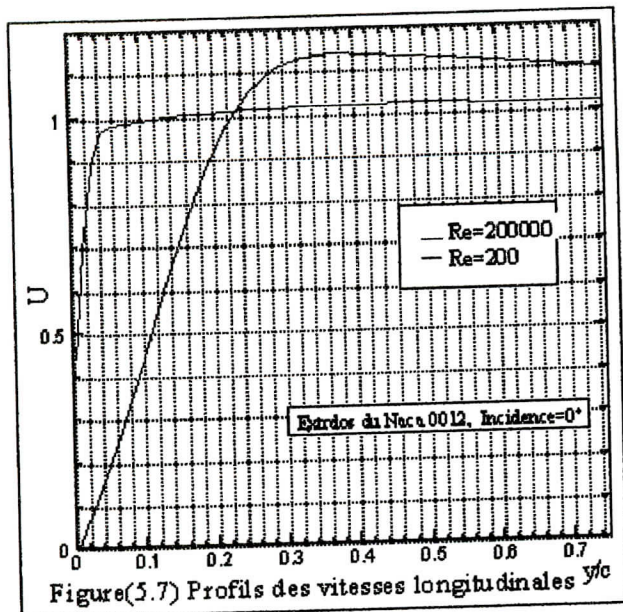


On remarque que l'immersion d'un corps symétrique dans l'écoulement crée localement des perturbations traduites par une dépression sur les deux cotés de la paroi du profil et l'apparition un point d'impact sur le bord d'attaque défini comme étant le point d'arrêt où on retrouve les conditions génératrices, les contours d'isovitesse longitudinales montrent une variation rapide des niveaux de valeurs tout au long de la région proche de la paroi du profil traduisant ainsi l'épaississement de la couche limite laminaire. La distribution de la pression adimensionnée est représenté sur la figure(5.6) elle est étroitement similaire à celle obtenue par un calcul potentielle.

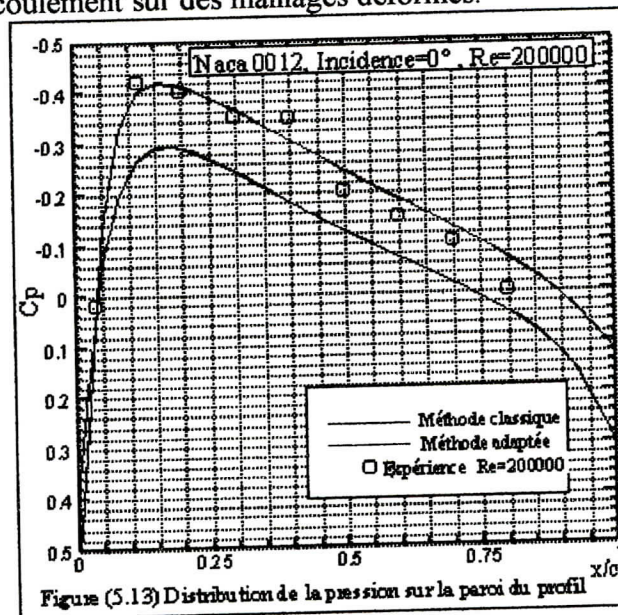


La méthode numérique décrite dans les chapitres antérieurs a été testé pour la prédiction de l'écoulement turbulent à un nombre de Reynolds $Re=2.10^5$ en incidence $\alpha_0=0$ à l'aide du modèle "k-ε", afin d'établir une étude comparatif des résultats obtenues avec les différents schéma de discrétisation et ceux obtenues expérimentalement.

Les équations du mouvement turbulent discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis adaptée au maillage irrégulier représenté sur la figure(5.2) sont intégrées temporellement par un schéma d'Euler $\theta=1$ pour calculer le champ aérodynamique stationnaire autour du profil pour cela les termes de convection des équations de transport sont approchés par un schéma de différence hybride tandis que ceux des équations de quantité de mouvement sont approchés dans un premier temps par un schéma décentré du premier ordre, on constate alors que l'état stationnaire est atteint après un temps $T=2.05$ en utilisant un pas $\Delta t=0.01$, les résultats sont présentés sous formes d'isovaleurs de la vitesse longitudinale et de pression sur les figures (5.8) et (5.9) et dont la comparaison avec les figures (5.4) et (5.5) confirme les constatations de fidélité de notre code de simulation à reproduire les conditions réelles d'écoulement tel que la diminution de l'épaisseur de la couche limite turbulente par rapport à celle de la couche laminaire confortée par la figure (5.7) où on a représenté la vitesse moyenne U/U_∞ dans le cas turbulent comparée à la vitesse laminaire au même abscisse sur la fin de l'extrados. Pour $y/C=0.005$ on a encore U/U_∞ environ égal à 0.5, on a alors l'impression que le fluide glisse sur la paroi. La distribution du coefficient de pression sur la paroi du profil nécessaire au calcul des forces et moments, montre un assez bon accord des deux courbes confondues (extrados et intrados) avec les résultats obtenues expérimentalement [2] pour un nombre de Reynolds supérieurs à celui utilisé dans notre simulation.



Les capacités de prédiction des schémas quick, hybride et central pour la discrétisation de l'équation du mouvement ont été testés dans la même configuration d'écoulement que celle du premier schéma décentré. Les performances de ces approximations à calculer la distribution de la pression sur la paroi du profil sont représentée sur la figure (5.10). Le schéma central souffre d'une diffusion numérique excessive qui empêche la simulation de converger vers l'état stationnaire tandis que les résultats permanents des deux autres schémas ne sont atteints qu'après un temps de calcul largement supérieur à celui du schéma upwind et qui montre une différence de pression entre l'extrados et l'intrados physiquement inacceptable. La méthode du chemin d'intégration des équations avec un coefficient de diffusion discontinu montre d'assez bons résultats sur des maillages irréguliers, contrairement aux résultats obtenus avec la méthode de discrétisation standard sur les figures(5.11),(5.12) qui montre clairement des discontinuités et d'oscillations qui laisse pensé que cette stratégie est inapte a simulé d'écoulement sur des maillages déformés.

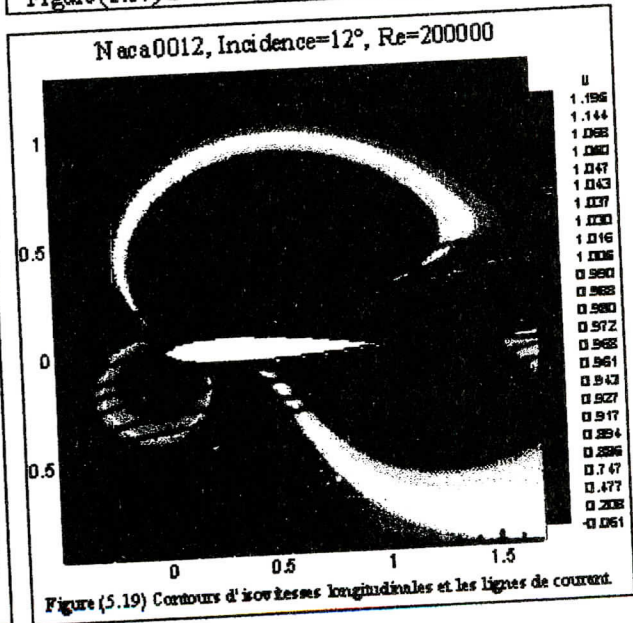
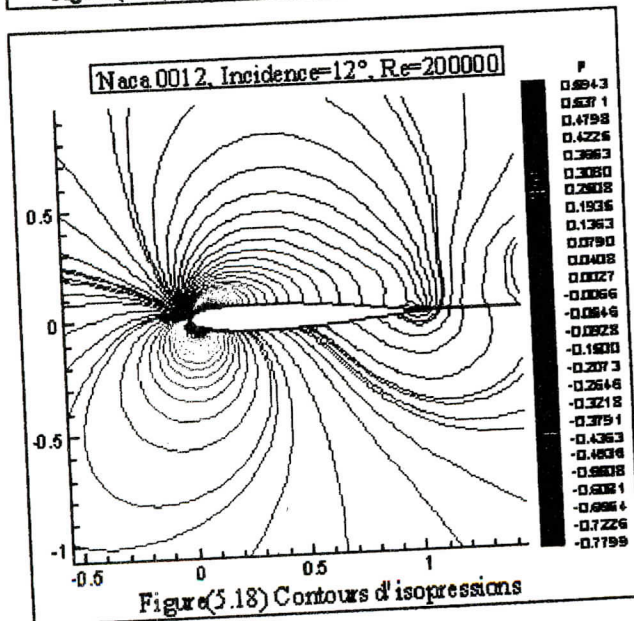
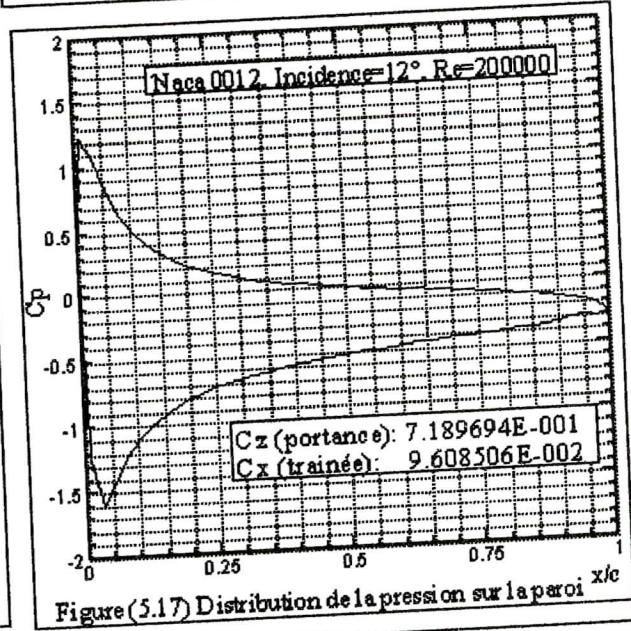
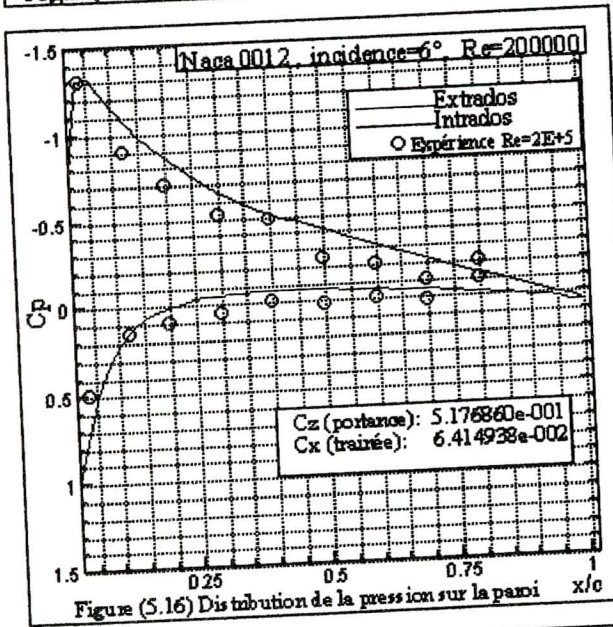
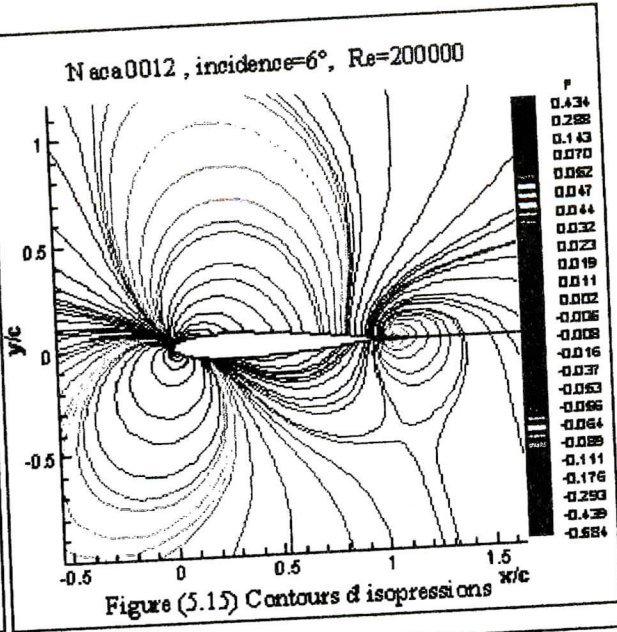
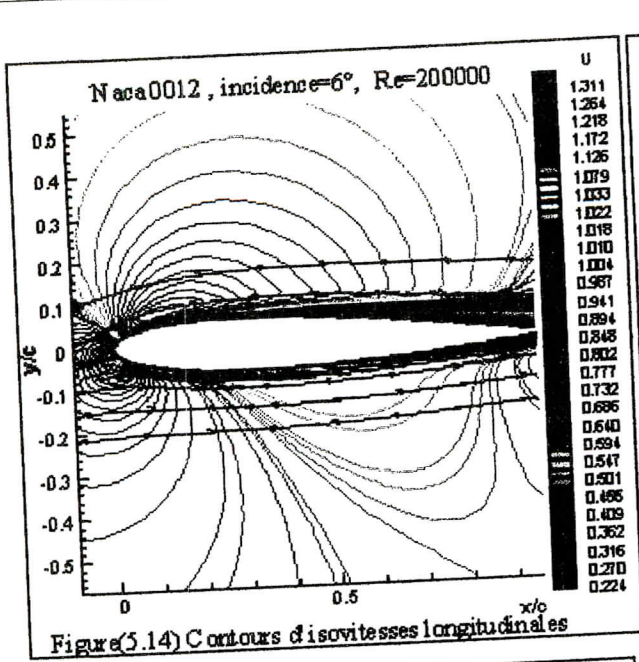


La figure (5.13) représentant la distribution de la pression sur la paroi du profil calculée par les deux méthodes de discrétisation confirme toute l'efficacité et la précision des résultats de la méthode d'intégration spatiale adaptée aux maillages irréguliers et dont les comparaisons avec les données expérimentales sont très satisfaisantes.

Pour la discrétisation des flux de convection de l'équation de transport un schéma hybride central, upwind est utilisé afin de prévenir les valeurs négatives des quantités turbulentes k et ε assurant ainsi la stabilité de la procédure. Tandis que les dérivées mixtes des termes de diffusion sont approchés d'après la méthode (iii) exposée dans la section IV.5 pendant ce traitement abaisse sensiblement le taux de convergence.

Pour décrire l'écoulement autour du profil d'aile en incidence égale à 6° et 12° , plusieurs visualisations ont été faites.

La figure (5.14) représentant les isovaleurs de la vitesse longitudinale et les lignes de courant permet de regarder de plus près les perturbations engendrées. Certains filets sont déviés vers le haut et contournent l'extrados. D'autres longent l'intrados. Il existe donc un filet frontalier qui ne passant ni en haut ni en bas, viendra s'arrêter sur le profil. La position de ce point d'arrêt est fonction de l'incidence. Les isovaleurs de vitesse et de pression (5.15) confirment la création de dépression et par conséquent une survitesse sur l'extrados et l'inverse sur l'intrados. La courbe de distribution de pression unique dans le cas d'une incidence nulle se dédouble sur la figure (5.16), la dépression de la face qui devient extrados augmente, l'autre diminue.



Le point de rebroussement intrados recule, initialement se situant au point $x_1=0.0$ et $x_2=0.0$ en incidence égale à 0° , il se déplace au point $x_1=0.0073$ et $x_2=-0.011$ en incidence égale à 6° et au point $x_1=0.012$ et $x_2=-0.019$ en incidence égale à 12° .

Notons que pour un angle d'attaque égale à 12° , on remarque sur la figure (5.18) représentant les contours d'isopressions l'apparition d'une région fortement dépressionnaire (bleu) concentré sur le bord d'attaque de l'extrados du profil. Alors qu'à l'aval du profil on retrouve rapidement les conditions de pression infini amont, cette différence de pression provoque le décollement de la couche limite représenté sur la figure(5.19) par l'apparition d'un tourbillon sur la fin de l'extrados du profil schématisé par des lignes de courant circulaires. Les forces appliquées sur le profil d'aile sont obtenues par intégration de la pression et des tensions visqueuses le long du profil. Le coefficient de portance C_z tendant vers zéro pour une incidence= 0° et croit avec l'incidence. La même constatation peut être faite pour le coefficient de traînée.

| α_0 | 0° | 6° | 12° |
|------------|-------------|------------|------------|
| C_z | 0.001711366 | 0.5176860 | 0.7189694 |
| C_x | 0.01823912 | 0.06414938 | 0.09608506 |

Interpolation du champ initial

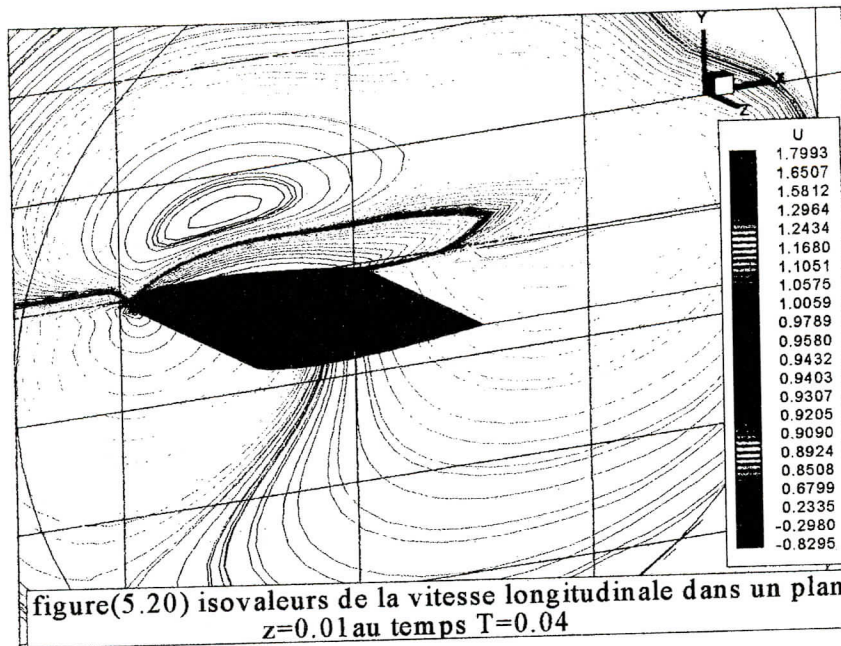
L'interpolation du champ u_i et p est réalisée dans chaque plan x_1 puisque la répartition longitudinale des points n'a pas changée. L'interpolation est linéaire dans chaque direction (Ox_2) et (Ox_3) en considérant donc que le maillage est quasi-orthogonal dans chaque plan $x_1 = \text{cte}$ le long du profil. Cette hypothèse n'est pas strictement vérifiée sur les bosses du profil. Chaque point du nouveau maillage est encadré par quatre points de l'ancien maillage. Les valeurs des différentes quantités physiques initiales au point du nouveau maillage sont obtenues par une interpolation linéaire selon chaque direction (Ox_2) et (Ox_3).

V.2 Résultats instationnaires de la SGE :

L'intérêt de la simulation des grandes échelles par rapport à une simulation statistique réside dans les informations accessibles sur les grosses structures instationnaires de l'écoulement. Cette partie présente quelques résultats instationnaires obtenus autour du profil. Nous présentons un instantané du champ des isovaleurs de la vitesse longitudinale. Puis nous présentons l'évolution du champ instantané au cours du temps en montrant la capture de structures tourbillonnaires instationnaires créées par le décollement de la couche limite sur l'extrados du profil en incidence égale à 20° .

V.2.1 Champ instantané autour du profil :

La figure (5.20) représente les isovaleurs de la composante longitudinale de la vitesse à l'initialisation en $x_3=0.01C$. Elle est rendue ici sans dimension par la vitesse à l'entrée. Les figures(5.21)-(5.22) représentent les isovaleurs du champ instantané de la vitesse longitudinale en $x_3=0.01C$ et les vecteurs vitesse instantanée en $x_3=0.5C$ à la fin de notre calcul à $T=6.5$. Nous rappelons que le temps de référence que nous avons défini correspond au temps de calcul basé sur la vitesse à l'entrée et sur la longueur de la corde du profil.



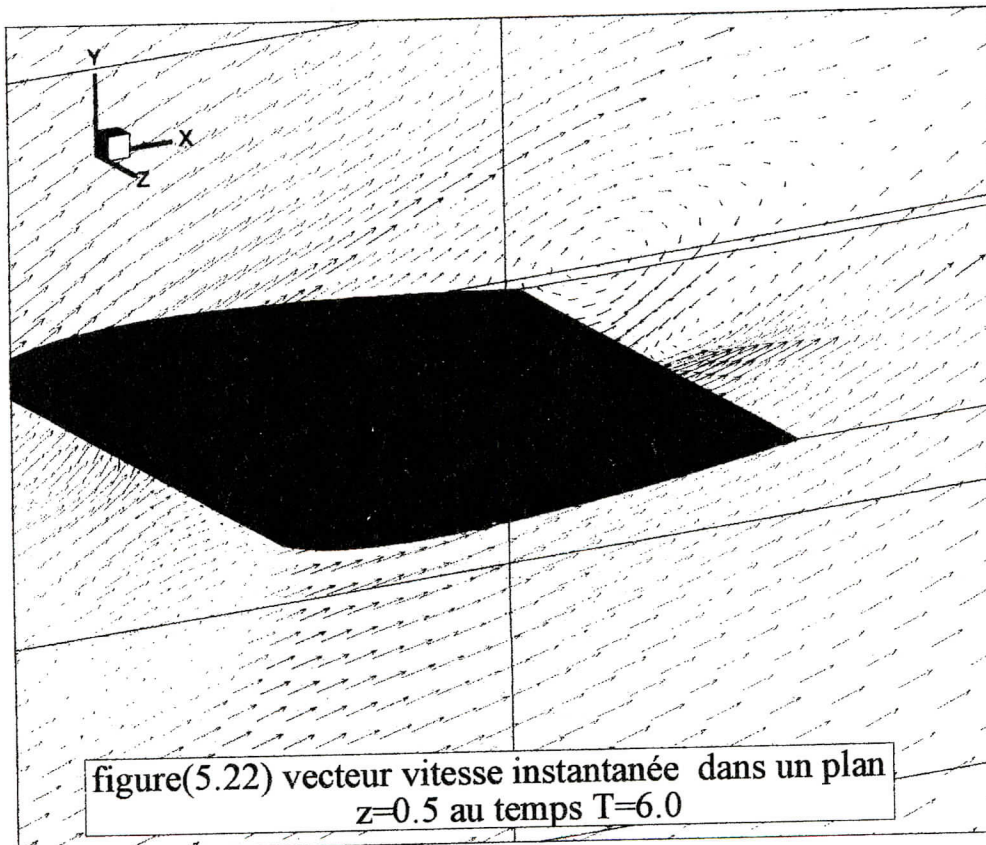
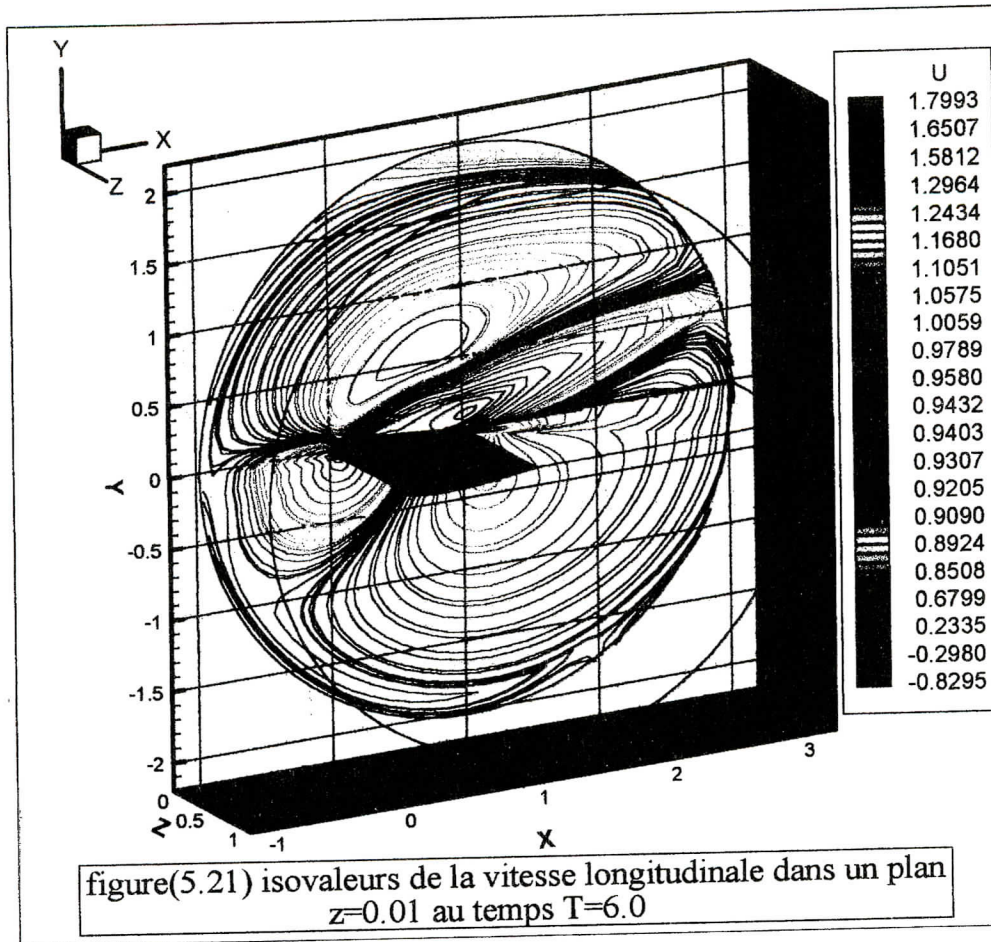
figure(5.20) isovaleurs de la vitesse longitudinale dans un plan $z=0.01$ au temps $T=0.04$

Nous pouvons observer sur la figure (5.21) la déstabilisation de l'évolution de la couche limite dont la transition au régime turbulent est clairement visualisée le long du profil sur la figure (5.20). Du bord d'attaque vers le bord de fuite, la couche limite s'épaissit de plus en plus jusqu'à se détacher complètement. Ce phénomène met en évidence l'importance de l'initialisation dans le calcul et son influence sur un temps non négligeable par rapport au temps de calcul des simulations de la SGE, car on ne l'observe pas sur les résultats moyennés. Nous observons également des différences entre le champ initial sur la figure (5.20) et le champ instationnaire de la figure (5.22) qui montre l'apparition d'un deuxième tourbillon près du bord de fuite et confirme la configuration bidimensionnel de l'écoulement étudié toutefois la simulation faillie à prédire la séparation laminaire au bord d'attaque.

V.2.1.1 Evolution temporelle des champs :

Nous présentons quelques champs instationnaires obtenus à différents temps de calcul dans un plan proche de la face latérale gauche.

La figure(5.23) présente les isovaleurs de la composante longitudinale de la vitesse et les lignes de courant pour différents temps de calcul dans un plan $x_3=1C$. On observe une modification de l'écoulement et la déstabilisation de la zone initialement décollée. Nous pouvons remarquer tout au long du début de simulation le grossissement de la poche tourbillonnaire sur l'extrados qui se déplace en s'enroulant sur elle-même et en s'éloignant du profil jusqu'à l'apparition d'un deuxième tourbillon au temps $T=2.5$ confiné au bord de fuite. Les oscillations de la couche limite perturbée génèrent au final un lâcher de tourbillons visible sur la figure pour un $T=3.5$. On constate alors que l'écoulement reprend sa forme initiale et entame une autre phase de décrochage semblable a celle décrite précédemment confirmant ainsi la périodicité du phénomène. Les difficultés physiques sont particulièrement significatives dans ces situations de décrochage et de post décrochage où l'écoulement fait intervenir une séparation massive et des phénomènes instationnaires. Il en résulte que la prédiction précise de l'incidence de décrochage et du coefficient de portance maximale sont un problème particulièrement difficile. Au-delà du décrochage, la structure de l'écoulement (lâcher tourbillonnaire) et les forces instationnaires sont des facteurs importants de la stabilité.



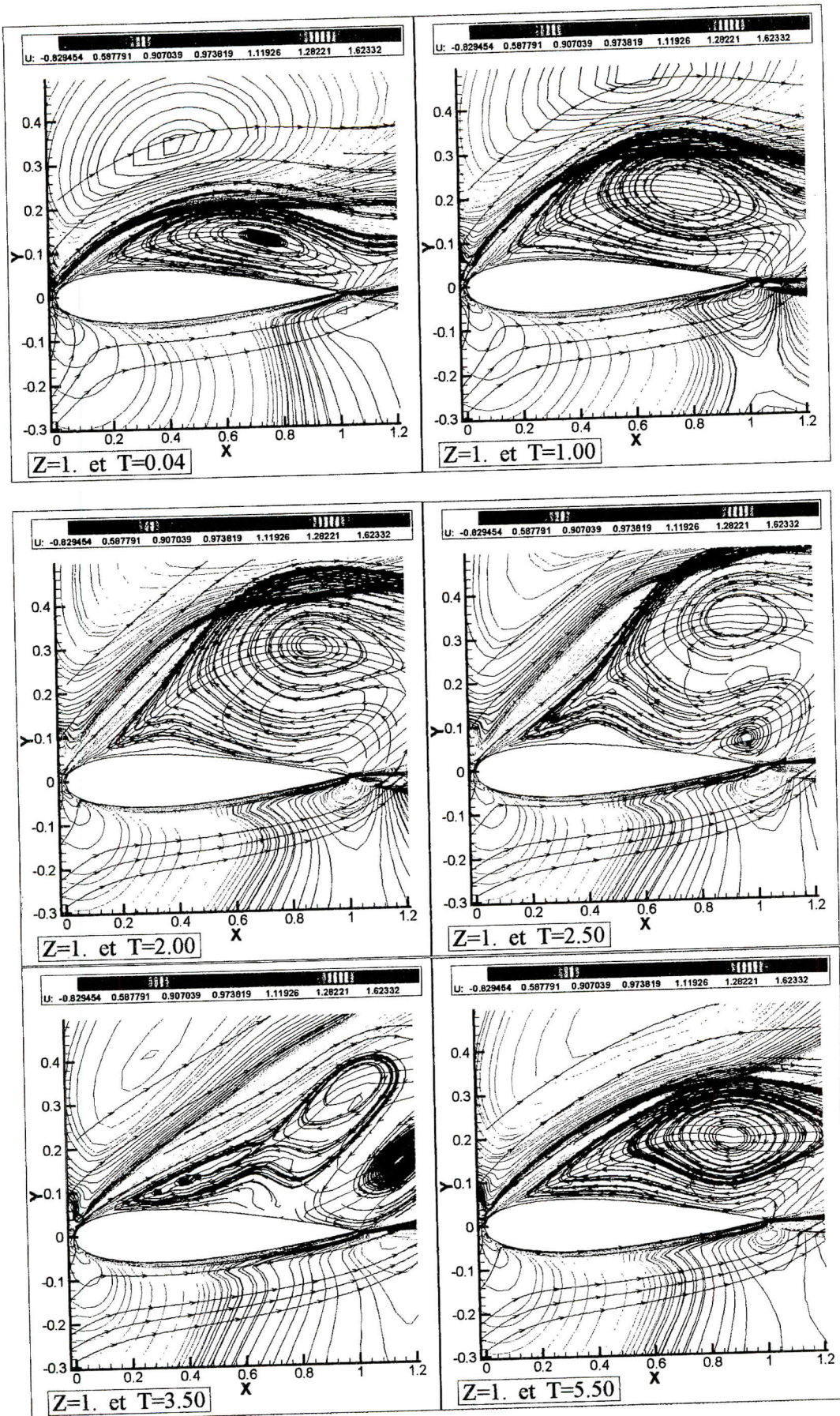


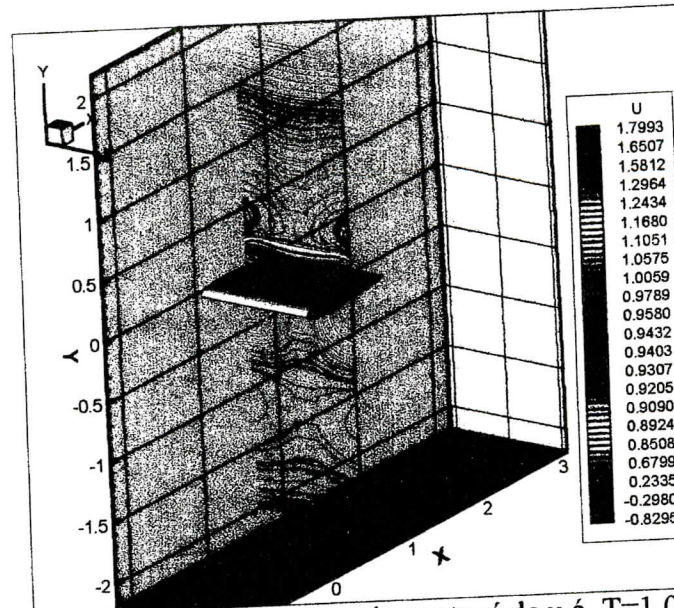
Figure (5.23) l'évolution temporelle du champ instationnaire dans un plan fixe $z=1$.

V.2.2 Spectres temporels :

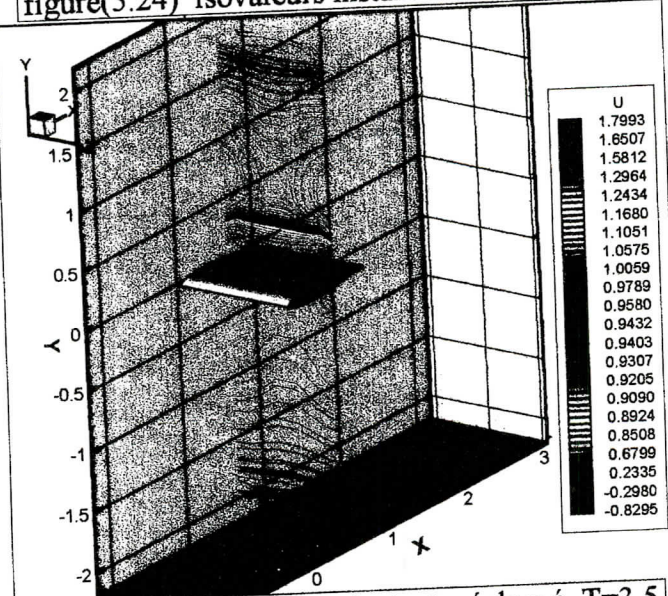
Nous avons pu voir à travers la présentation des isovaleurs de la vitesse longitudinale qu'il existe des phénomènes instationnaires à grandes échelles. Bien qu'il soit difficile de capturer pleinement les basses fréquences des grosses structures instationnaires vu le de temps de simulation nécessaire, nous avons réalisé une étude spectrale des signaux fluctuants (u_i, v_i, w_i) dans la zone de décollement initial. Les acquisitions sont réalisées tous les 100 pas de temps, ce qui correspond à un pas de temps sans dimension de $\Delta T = 0.001$. Nous présentons les résultats obtenus dans le plan $x_1 = 0.595 C$. Le point sélectionné selon la direction transversal se situe en $x_3 = 0.8 C$ et les trois points choisis dans la direction verticale sont proches de la paroi de l'extrados du profil. Pour ne pas surcharger les spectres, seules les ordonnées y sont indiquées sur les figures, elles sont rendues sans dimension par la corde du profil.

Les isovaleurs de la composante longitudinale dans le plan $x_1 = 0.595 C$ sont tracés au cours du temps sur les figures (5.24), (5.25) et (5.26) où l'on peut observer le passage des tourbillons au cours du temps. Les figures (5.27), (5.28) et (5.29) représentent l'évolution temporelle des composantes de la vitesse correspondant aux spectres représentés sur les figures (5.30) à (5.50). Le nombre d'échantillons utilisé pour réaliser les spectres temporels n'est pas très important mais est un multiple de deux comme le préconisent les transformées de Fourier rapide. Nous présentons les spectres en échelle logarithmique. Tous les spectres sont rendus sans dimension par la valeur maximum de la densité d'énergie du spectre. Nous avons convolué chaque signal par une fonction cosinus à support borné pour le rendre périodique et limiter ainsi les effets de bords. La fréquence maximum que l'on puisse obtenir sur les spectres vaut $f^* = \frac{1}{\Delta t^*} = 10^5$. Nous avons préféré présenter nos résultats sans analogie de

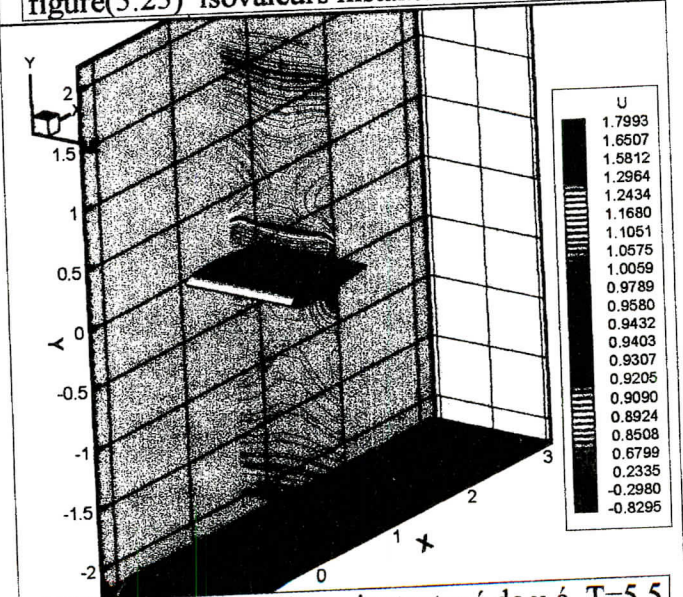
Taylor $K = \frac{2\pi f}{U}$ puisque nous avons un écoulement inhomogène. On observe la présence d'un pic qui se détache sur les spectres de u_i et v_i autour de $f = 4000$ Hz. Cela est en assez bon accord avec la fréquence que l'on peut estimer sur la courbe de la composante u correspondantes à la figure (5.27) en $x_2 = 0.0456$. Nous pouvons souligner que les fréquences de l'ordre du kHz correspondent aux ondes sonores. Il est possible de d'obtenir un nombre de Strouhal à partir de la fréquence mesurée. Le nombre de Strouhal est un nombre sans dimension utilisé dans l'étude des corps épais caractérisés par des lâchés tourbillonnaires. Il mesure le temps de retournement des tourbillons convectés par l'écoulement par unité de temps. Il est rendu sans dimension par l'épaisseur des corps épais étudiés. Si l'on introduit la corde du profil, et la vitesse de convection de l'écoulement amont, le nombre de Strouhal associé vaut $St = \frac{1}{T} = 0.2857$. La valeur du nombre de Strouhal calculée ci-dessus est en bon accord avec celle calculée ou mesurée dans les sillages des corps épais avec des lâchés tourbillonnaires. Le nombre de Strouhal pour le cylindre vaut $St = 0.2$ et il vaut $St = 0.3$ pour les corps épais. En fin, nous pouvons également obtenir un ordre de grandeur du nombre de d'onde associé au pic que nous avons décrit précédemment: $k = \frac{2\pi f}{U_\infty} = \frac{1.795}{C}$. Cette longueur d'onde correspond à une longueur adimensionnée par la longueur de corde égale à $l = 0.557$. La longueur estimée à partir du volume de chaque maille proche de la paroi basse du côté latéral droit où nous effectuons nos spectres vaut $l_{min} = 0.0075$. La longueur estimée l est au moins cent fois plus importante que l_{min} et il n'y a pas donc de problèmes de résolution en maillage. Les phénomènes capturés sont à grande échelle, ils ne sont pas filtrés par le maillage. Nous discutons maintenant des résultats obtenus en moyennant les quantités sur le temps de calcul total.



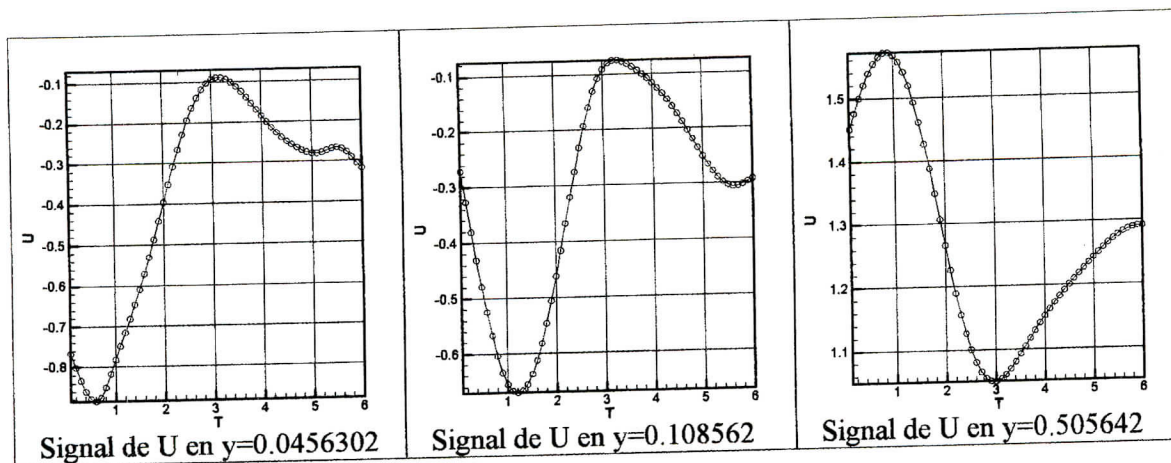
figure(5.24) isovaleurs instantané de u á T=1.0



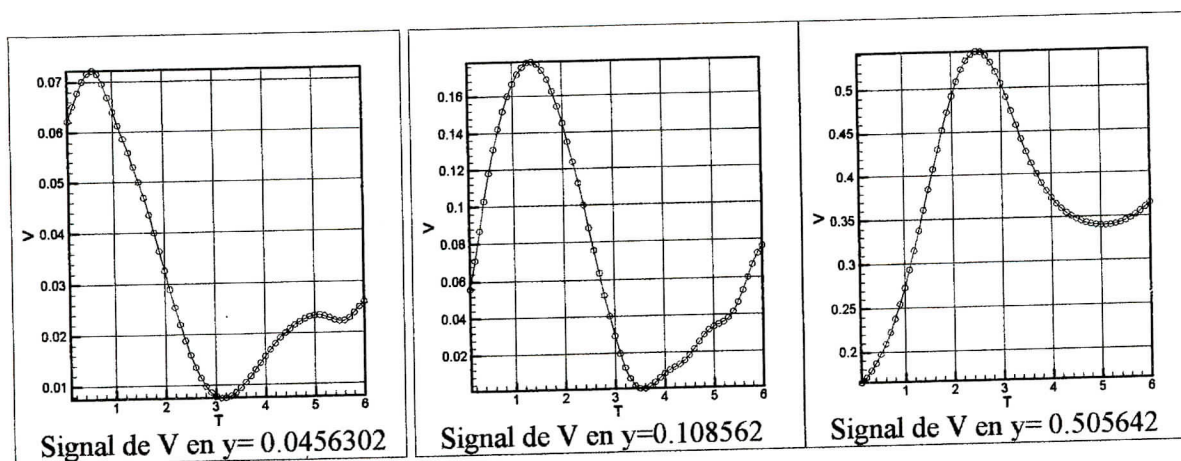
figure(5.25) isovaleurs instantané de u á T=3.5



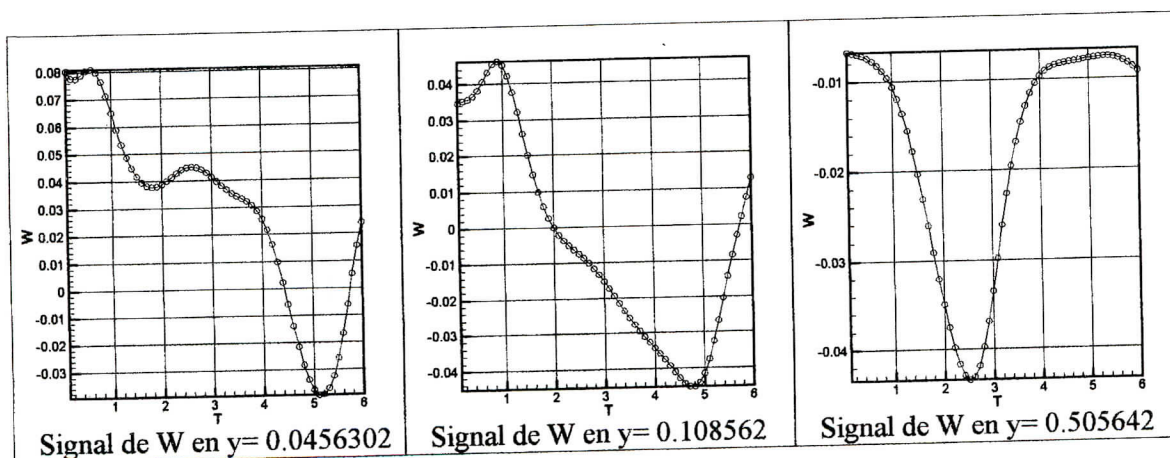
figure(5.26) isovaleurs instantané de u á T=5.5



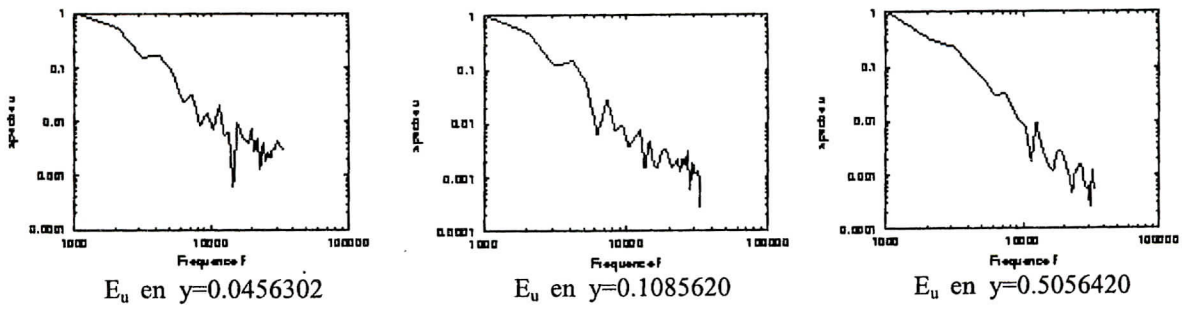
Figure(5.27) Echantillonnage de u au cours du temps



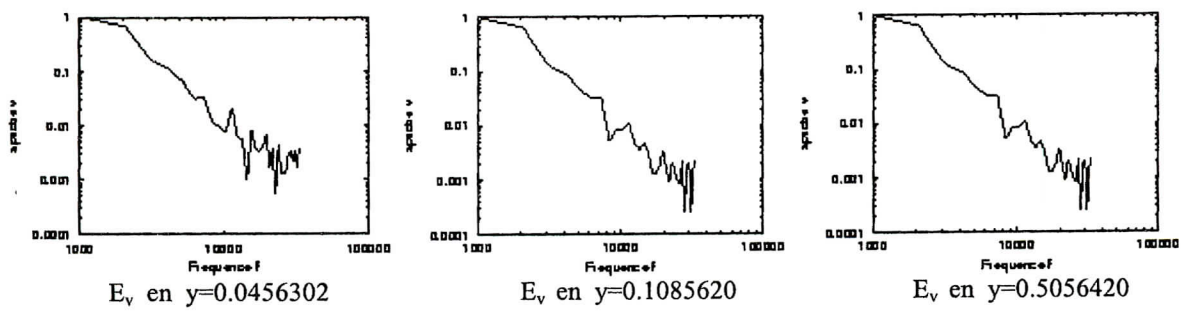
Figure(5.28) Echantillonnage de v au cours du temps



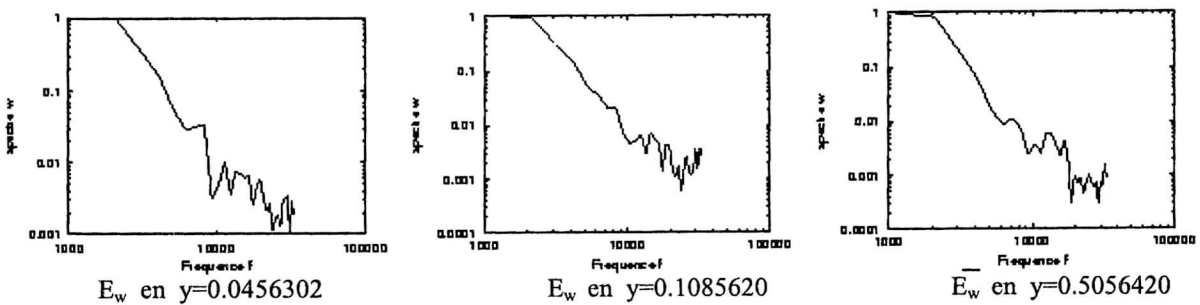
Figure(5.29) Echantillonnage de w au cours du temps



Figure(5.30) Spectre de u



Figure(5.40) Spectre de v



Figure(5.50) Spectre de w

V.3 Résultats moyennés de la SGE :

Cette partie présente les résultats obtenus sur la pression, les valeurs moyennes de la vitesse et des tensions de Reynolds en les comparant aux simulations statistiques et aux résultats expérimentaux. Le temps de calcul total sans dimension de la simulation SGE que nous avons réalisé est de l'ordre de six. Ce temps de calcul correspond à 8000 pas de temps. Comme nous l'avons vu sur les résultats instationnaires, nous moyennons sur un temps qui prend en compte un seul lâcher de tourbillons. Les moyennes présentées, sauf lorsque nous le mentionnons explicitement, correspondent à un temps d'accumulation égal au temps total de calcul. On utilisera à la fois des moyennes dans l'espace et dans le temps du fait de l'homogénéité de la direction transversale.

V.3.1 Résultats sur la distribution de pression :

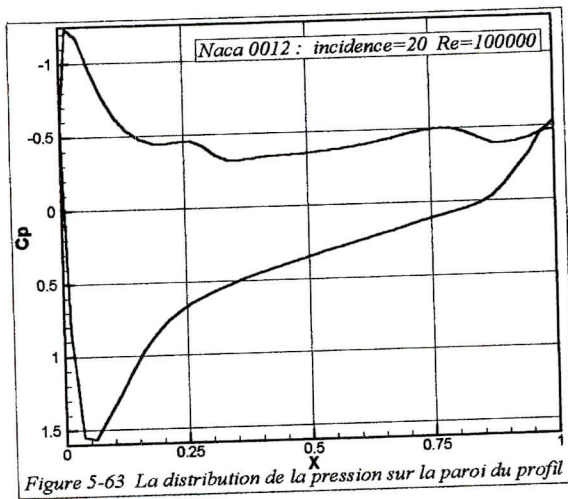


Figure 5-63 La distribution de la pression sur la paroi du profil

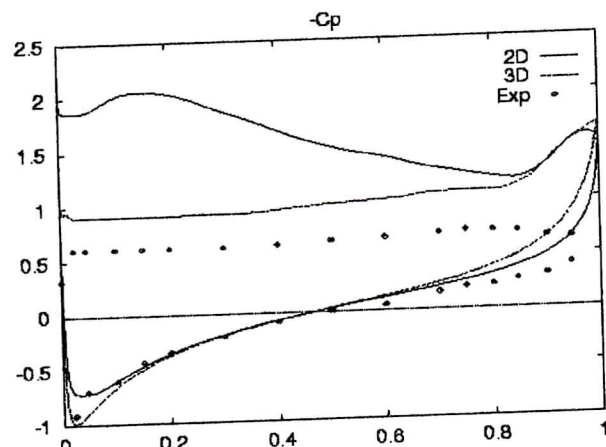
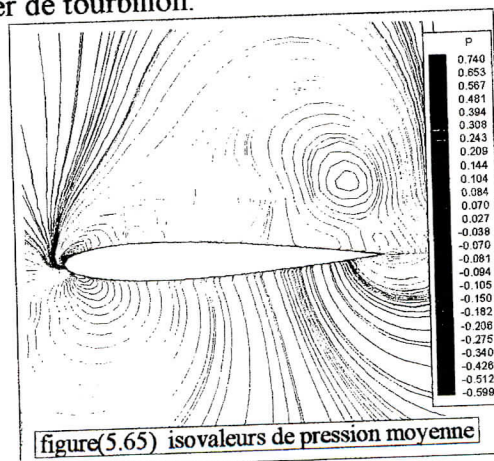


Figure 5-64 La distribution de la pression selon un calcul direct et expérimental

La figure(5-63) présentant la distribution de la pression moyennée suivant la direction transversale et en temps montre clairement une allure semblable à celle obtenue par un calcul direct et expérimental [59] présenté sur la figure(5-64). On remarque toutefois une surévaluation du pic de pression prédit au bord d'attaque ainsi qu'un manque dans la prédiction de la région de séparation laminaire, néanmoins un résultat particulièrement intéressant de la SGE est la capacité de la méthode à prédire la présence du plateau de pression mesuré expérimentalement, associé au décollement de la couche limite. Nous avons représenté figure(5.65) les isovaleurs de pression moyenne montrant l'instabilité de la surface dépressionnaire liée au lâcher de tourbillon.



figure(5.65) isovaleurs de pression moyenne

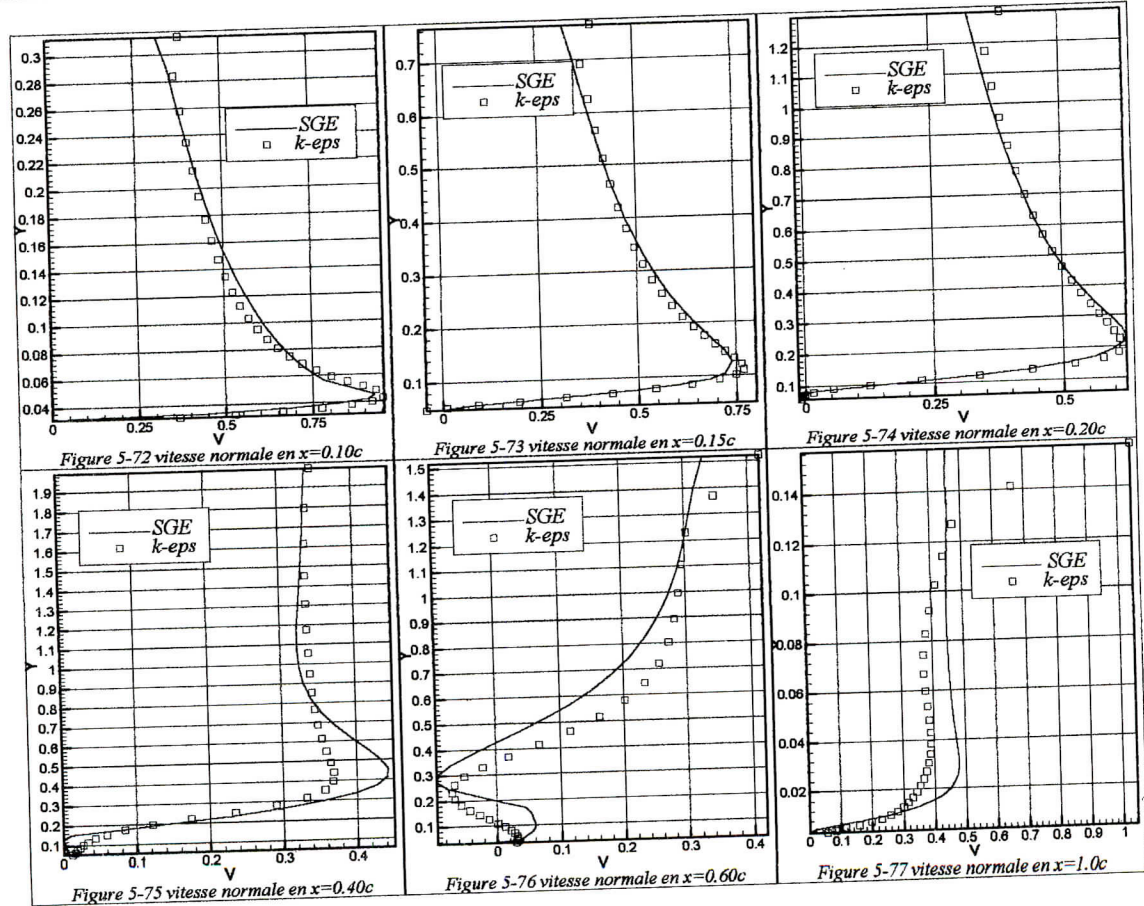
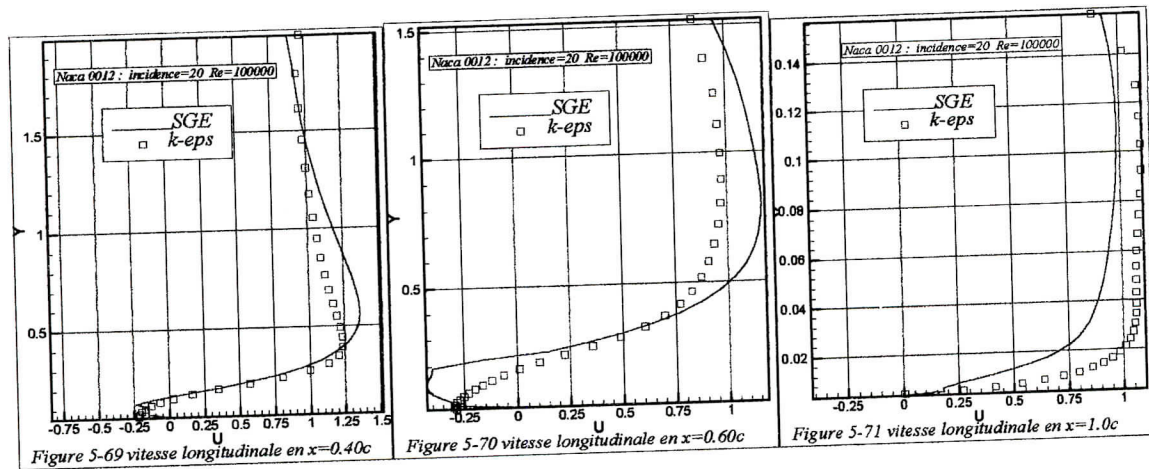
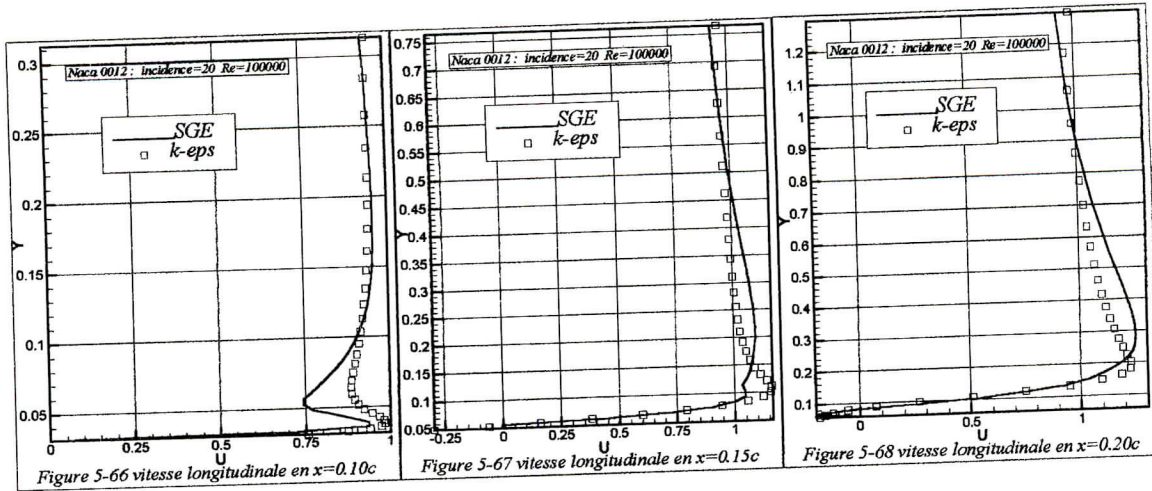
L'ensemble des résultats obtenus par notre simulation montre que le phénomène de sur-prédiction de pression au bord d'attaque par la SGE est moins marqué pour des incidences inférieures à celle provoquant un décrochage statique, Il apparaît au contraire plus marqué dans les zones où l'on observe un plateau de pression correspondant à une zone de recirculation

V.3.2 Résultats sur les profils de vitesse moyennes :

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus sur les vitesses moyennes suivant les coordonnées verticales (Ox_2) dans plusieurs plan de mesure (Ox_1) correspondant à la surface d'aspiration du profil en aval et en amont du décollement de la couche limite. Sur chaque figure, les rectangles correspondent aux points de la simulation statistique et le trait représente les résultats de la SGE. Toutes les vitesses sont rendues sans dimension par la vitesse de référence qui est la vitesse de l'infini amont au profil. Nous comparons donc nos résultats sur les profils de la vitesse moyenne aux quantités statistiques $\hat{u} = \langle u(t) \rangle_t$, où $\langle \cdot \rangle_t$ est l'opérateur de moyenne temporelle. Les composantes moyennes de la vitesse sont alors obtenues à partir de nos variables filtrées, seules accessibles par le calcul en prenant $\hat{u} = \langle \bar{u}(t) \rangle_t$. Nous pouvons souligner, à première vue le bon accord observé entre les résultats statistiques "k-ε" et la simulation des grandes échelles turbulentes sur les composantes de la vitesse présentées sur les figures (5-66)-(5-77). Les profils de vitesse à la section $x_1 = 0.1c$ au début du bord d'attaque, représentée sur les figures(5-66) et (5-72) indique en particulier un développement attaché de la couche limite caractérisé par une diminution des vitesses dans la zone de proche paroi. Les régimes laminaire et turbulent coexistent toujours sur un profil, Il n'y a donc pas de "profils laminaires" qui impliqueraient alors que les autres seraient turbulents; mais seulement des profils à laminarité plus ou moins étendue, cependant la transition laminaire/turbulent est favorisée par l'influence du gradient de pression engendré par la forme du profil placé à un angle d'incidence provoquant une recompression immédiate après le bord d'attaque, on note alors que pour le nombre de Reynolds considéré, l'écoulement est pleinement turbulent. Les figures suivantes montre plusieurs choses: on y distingue d'abord une couche limite qui va en s'épaississant dans le sens du courant; on y remarque aussi une diminution des vecteurs locaux de vitesse à l'extérieur de la couche limite ce qui montre que le courant fluide ralentit ; mais surtout il apparaît un contre-courant que signale l'inversion du sens d'entraînement des particules fluides près de la surface du profil.

Les figures (5-67)-(5-70) détaillent plus précisément ce qui se passe successivement le long du profil. Elles mettent bien en évidence, au fur et à mesure que s'épaissit la couche limite, le fait que le gradient de vitesse diminue (l'angle que fait la pente des courbes de variation de vitesse au point de contact avec la surface par rapport à la normale). Or, le décollement se produit précisément lorsque cet angle s'annule, c'est à dire lorsque le gradient de vitesse devient nul, cela est vérifié dans notre simulation pour $0.10c < x_1 < 0.15c$. A noter que la recirculation inverse carrément ce gradient.

Il est possible que le léger épaississement de la zone décoller de la couche limite, observer sur la figure(5-70) des profils u de la SGE par rapport à celui obtenu par simulation statistique, soit seulement lié à une forte dissipation introduite par le modèle de sous maille. Si le décollement s'initie à l'endroit précis où le gradient de vitesse s'annule, la surface de discontinuité elle-même (ou surface de décollement) n'est pas forcément aussi nette que celle représentée sur les figures. En fait, il s'agit moins d'une véritable surface de contact entre une rétro-circulation et les filets de la couche limite de l'écoulement général, que d'une nappe de



rotors, plus ou moins stable, plus ou moins mouvante. Par ailleurs cette nappe n'est pas non plus parallèle à l'écoulement puisqu'elle se referme plus ou moins loin derrière le profil avec celle venue du côté opposé du profil, au vu des figures(5-71) et (5-77).

La composante v de la vitesse, obtenue par la SGE est identiquement semblable à celle obtenue par simulation statistique "k-ε" dans la sous couche visqueuse, comme le montre les figures(5-72)-(5-74), toutefois on remarque une différence marquée entre les deux résultats à l'extérieur de la couche limite due essentiellement à la qualité du maillage non régulier. Les résultats obtenus après l'établissement du décollement représentés sur les figures(5-75)-(5-76) sont en assez bon accord avec les résultats statistiques et semblent moins perturbés par l'instabilité que les profils de la vitesse longitudinale.

V.3.2 Résultats sur les profils des tensions de Reynolds :

Dans cette partie nous présentons les résultats obtenus sur les profils des tensions de Reynolds dans quelques plan de mesure x_1 fixé comme pour les composantes de la vitesse moyenne. Les tensions de Reynolds sont obtenues à partir de nos variables filtrées par la formule ci-dessous en utilisant l'équation (5.6) :

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle (\bar{u}_i - \langle \bar{u}_i \rangle) (\bar{u}_j - \langle \bar{u}_j \rangle) \rangle \quad (5.14)$$

on obtient :

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_j \rangle \langle \bar{u}_i \rangle + \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_i \rangle \quad (5.15)$$

puisque par hypothèse : $\langle \langle \cdot \rangle \rangle = \langle \cdot \rangle$

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle \quad (5.16)$$

A nouveau, sur chaque figure, les rectangles correspondent aux points de la simulation statistique bidimensionnelle et le trait représente les résultats de la SGE. Toutes les corrélations sont rendues sans dimension par le carré de la vitesse de référence à l'infini amont du profil. Nous avons mis les courbes relatives aux résultats de simulation statistique "k-ε" qu'a titre indicatif puisque ces dernières ne mettent pas en jeu les corrélations de la composante transversale de la vitesse. Chacune des contraintes de Reynolds correspond à la corrélation de deux composantes des fluctuations en un même point du champ de vitesse et représente ainsi une quantité mesurable. Une valeur finie de cette corrélation indique que les deux composantes ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Nous pouvons observer sur les figures la bonne description du maximum des valeurs des tensions confiné très près des parois. Les tensions de Reynolds évoluent lentement car, il y a une forte influence de l'initialisation qui masque l'évolution des tensions prédites par la SGE. Nous avons aussi observé que l'intensité des pics turbulents qui apparaissent sur les différentes corrélations dans le cœur, et qui correspondent à la région du décollement, ont tendance à augmenter en intensité et à s'étaler au cours du calcul. Concernant les corrélations croisées, les tensions $\langle u_2 u_3 \rangle$ et $\langle u_1 u_3 \rangle$ étant très inférieures à $\langle u_1 u_2 \rangle$ qui est principalement responsable de la production de turbulence, nous ne présentons que cette dernière.

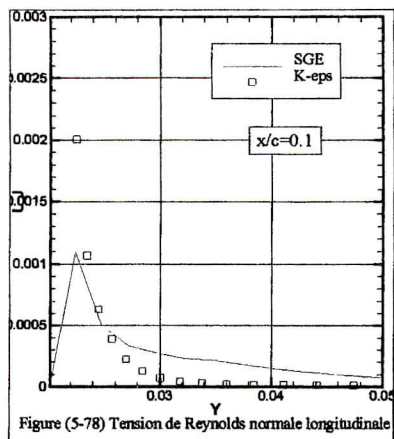


Figure (5-78) Tension de Reynolds normale longitudinale

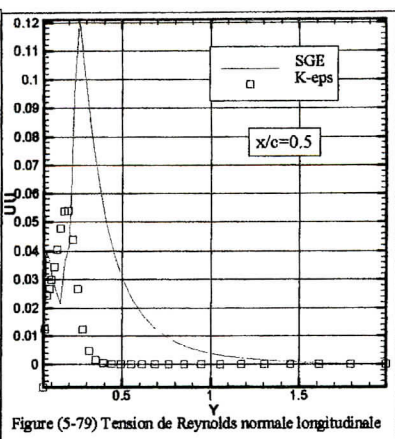


Figure (5-79) Tension de Reynolds normale longitudinale

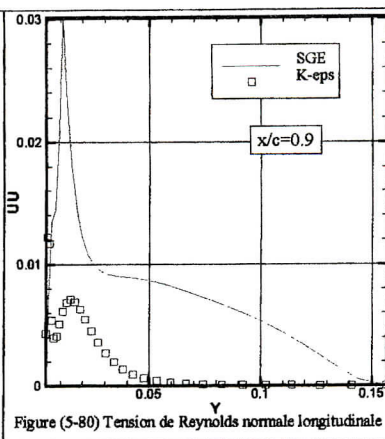


Figure (5-80) Tension de Reynolds normale longitudinale

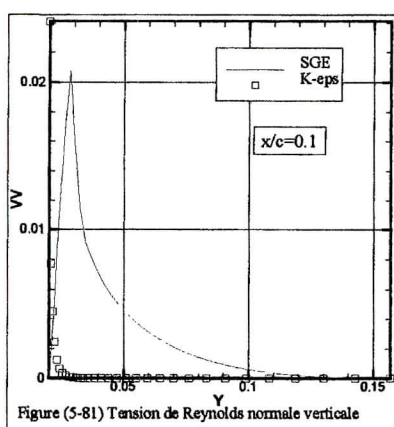


Figure (5-81) Tension de Reynolds normale verticale

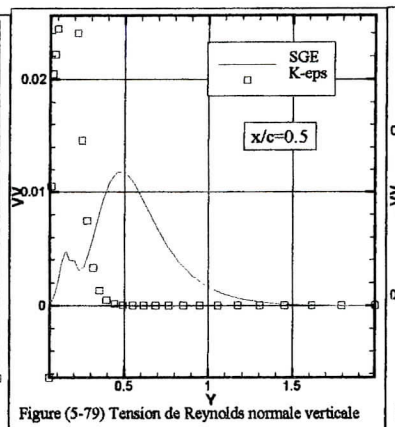


Figure (5-79) Tension de Reynolds normale verticale

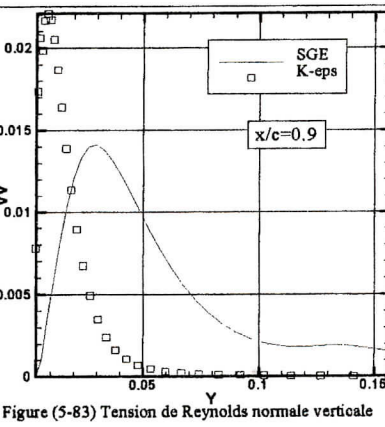


Figure (5-83) Tension de Reynolds normale verticale

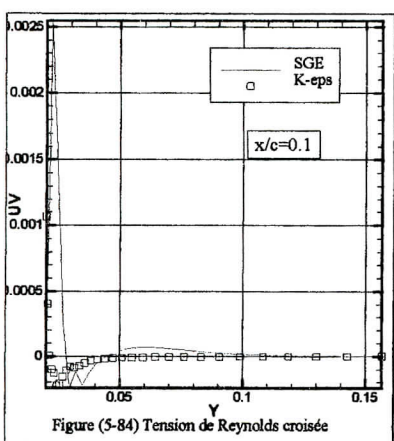


Figure (5-84) Tension de Reynolds croisée

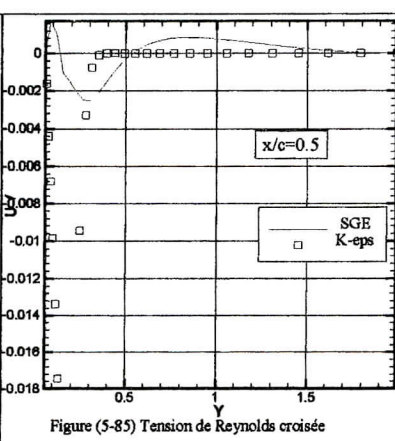


Figure (5-85) Tension de Reynolds croisée

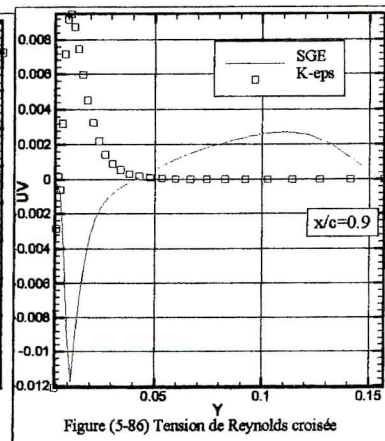


Figure (5-86) Tension de Reynolds croisée

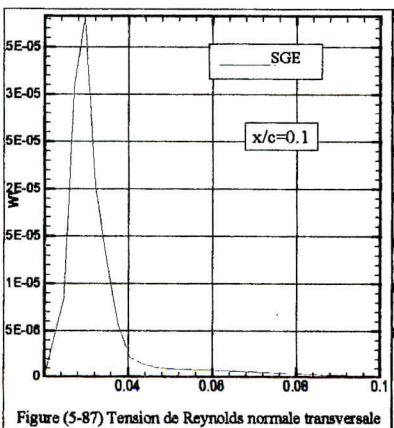


Figure (5-87) Tension de Reynolds normale transversale

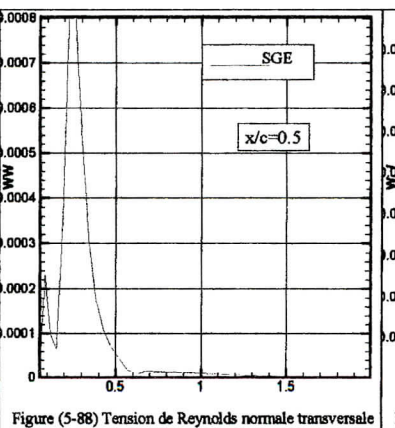


Figure (5-88) Tension de Reynolds normale transversale

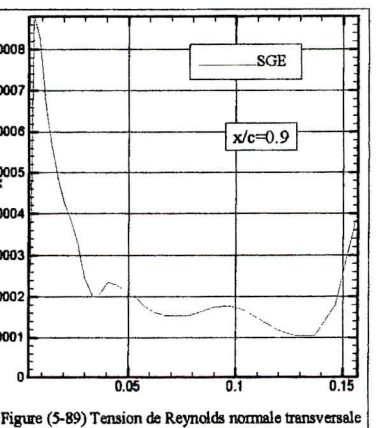


Figure (5-89) Tension de Reynolds normale transversale

Sur la section du bord d'attaque du profil $x_1 = 0.1c$ nous avons des corrélations $\langle u_1 u_1 \rangle$ prédites par la SGE plus faibles en intensité que les tensions calculées par RANS. On remarque que les pics sont correctement positionnés même si on observe un léger épaissement sur les courbes de la SGE à relier aux différences que nous avons mis en évidence entre la SGE et RANS sur les gradients à la paroi des profils des vitesses. Ceci peut également expliquer l'intensité plus faible puisque \hat{u}_1 varie plus lentement. Le pic d'intensité positive des corrélations $\langle u_2 u_2 \rangle$ est mal positionné par rapport à la paroi et sous-estimé en comparaison des résultats statistiques, il y a certainement un effet du maillage qui influe directement sur la composante normale de la vitesse moyenne mais qui n'explique pas à lui seul l'élargissement observé. Les résultats obtenus sur les tensions croisées $\langle u_1 u_2 \rangle$ restent du même ordre de grandeur et sont en assez bon accord dans la forme, le second pic négatif observé sur les corrélations $\langle u_1 u_2 \rangle$ proche de la paroi sur la figure(5-84) semble venir du couplage entre la vitesse moyenne longitudinale moins importante dans les couches limites et les valeurs plus importantes en valeur absolue de la valeur moyenne \hat{u}_2 dans cette zone. Nous avons remarqué que les intensités des corrélations transversales $\langle u_3 u_3 \rangle$ sont sous-estimées par la SGE dans la région du bord d'attaque du profil.

La figure(5-79) représente les corrélations longitudinales $\langle u_1 u_1 \rangle$ à la section $x_1 = 0.5c$ dans la région du décollement. Il apparaît que l'intensité turbulente proche de la paroi du profil dans le décollement est surestimée mais le double pic signalé dans le cas d'un phénomène d'écoulement de retour est correctement positionné sur l'axe (ox_2) . On peut noter que les résultats statistiques ne prédisent pas de double pic dans le décollement. Nous pouvons aussi souligner que l'intensité de la corrélation longitudinale est dix fois supérieure à celle prédite en $x_1 = 0.1c$ du fait de l'épaissement des profils de vitesse moyenne. Le pic d'intensité positive des corrélations $\langle u_2 u_2 \rangle$ en $x_1 = 0.5c$ est décalé par rapport aux résultats statistiques caractérisé par un élargissement dans sa largeur. Sa forme est liée à la mauvaise prédiction du gradient de la vitesse moyenne normale à cette station. Nous regardons à la fin de cette partie l'influence de l'initialisation et la turbulence initiale contenue dans nos résultats. Nous pouvons souligner que les pics observés sur $\langle u_1 u_2 \rangle$ sont propres à la SGE dans la mesure où même s'ils sont longs à croître, ils apparaissent encore après avoir moyenné les quantités sur un temps plus court, d'une façon très globale, les caractéristiques de la turbulence sont finalement assez bien prédites en présence d'un écoulement de retour par rapport à la modélisation statistique. On peut remarquer que la largeur du pic calculée par la SGE est trop importante, dû à l'étalement de la région du décollement. Le signe négatif de $\langle u_1 u_2 \rangle$ dans la région proche de la paroi provient de la composante longitudinale de la vitesse qui est négative et qui n'est pas compensée par la composante verticale à cette station. L'intensité de la tension de Reynolds $\langle u_3 u_3 \rangle$ est mieux évaluée à la section $x_1 = 0.5c$ en présence du décollement, présentant des valeurs plus acceptables pour un écoulement tridimensionnel.

Concernant les résultats en $x_1 = 0.9c$, le pic mesuré correspond à l'épaissement de la couche limite qui relaxe lentement vers son état d'équilibre, après son décollement et son instabilité caractérisée par le lâcher de tourbillon. A nouveau nous pouvons noter que $\langle u_1 u_2 \rangle$ n'est plus

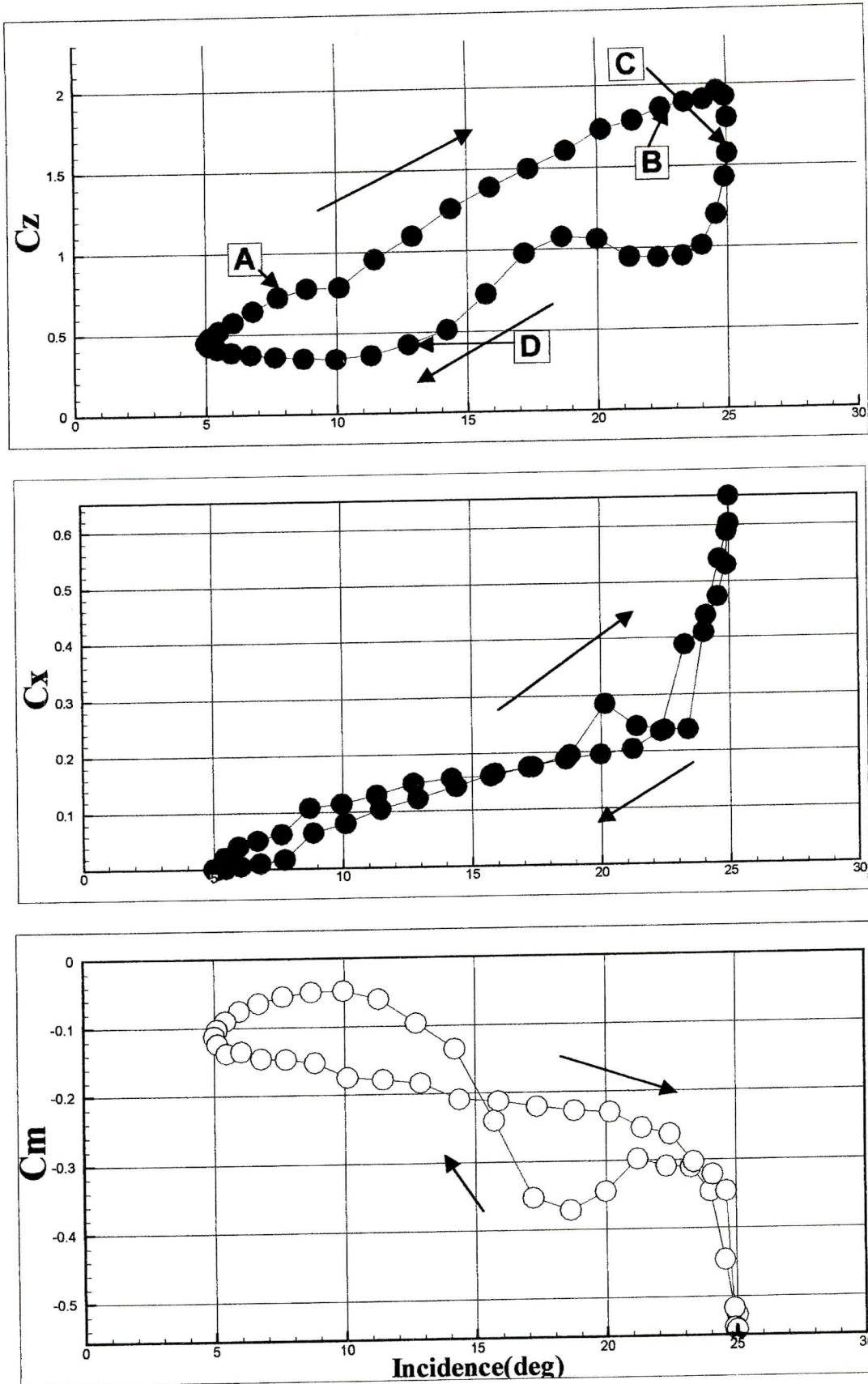
prédit correctement proche de la paroi. La position du pic est correctement prédite par la SGE pour les corrélations longitudinales tandis qu'il est décalé pour $\langle u_2^2 u_2^2 \rangle$. Nous pouvons aussi noter que le pic d'intensité turbulente qui se trouvait près de la paroi sur les corrélations longitudinales, est de plus en plus attaché à la paroi. Ceci s'explique par le fait que le terme de production de $\langle u_1^2 u_1^2 \rangle$, positif dans la zone de décollement, est fonction de $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}$. La position du maxima d'intensité turbulente dépend donc de la distribution des gradients selon (ox_1) et (ox_2) . Nous avons remarqué que nous sous-estimons les corrélations transverses sauf dans le décollement. Après avoir regardé l'influence de la contribution du champ initial dans le calcul des tensions de Reynolds évaluées à partir des grandes échelles, il semble que ce phénomène soit lié à une mauvaise redistribution de $\langle u_1^2 u_1^2 \rangle$ vers $\langle u_2^2 u_2^2 \rangle$ et $\langle u_3^2 u_3^2 \rangle$ puisque la SGE ne produit pas suffisamment de $\langle u_1^2 u_1^2 \rangle$ sauf dans les zones citées ci-dessus. Il se produit le même phénomène avec les tensions croisées, qui sont les sources de production de la turbulence, lorsqu'il n'y a pas présence de forts gradients comme dans le décollement. L'explication de ces résultats se trouve peut être dans une mauvaise capture des phénomènes turbulents de type "streaks" dans les couches limites qui sont responsables de la production des tensions de Reynolds. Les streaks sont des zones de fluide près des parois, où il y a alternance de zones de fluide à faible vitesse et à haute vitesse. Ces streaks induisent l'éjection intermittente de fluide des couches limites vers le centre de la paroi (burst) responsable de la production turbulente dans ce type d'écoulement. La sous estimation de ces corrélations semble donc liée dans notre cas à la mauvaise évaluation des gradients aux parois et à une forte turbulence à petite échelle dans les contributions de sous maille que nous ne capturons pas correctement.

V.4 Résultats de l'écoulement autour du profil en mouvement oscillatoire de tangage :

Après l'étude de l'écoulement turbulent autour du profil d'aile en incidence de décrochage statique, notre intérêt se porte sur la réponse de l'écoulement instationnaire et turbulent se développant autour d'un profil d'aile en mouvement de tangage. Le mouvement d'oscillation au quart de la corde du profil est défini par un angle d'attaque dépendant du temps, autour d'une incidence moyenne α_0 :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \cos(2kt) \quad (5.14)$$

Où k est la fréquence réduite. Nous nous intéressons à des cas de décrochage dynamique profond, c'est-à-dire à des cas où l'amplitude d'oscillation α_m est importante. Dans cette étude, l'amplitude d'oscillation vaut 10 degrés. L'incidence moyenne a pour valeur 15 degrés et la fréquence réduite est de 0.15, ce qui donne une période sans-dimensions du mouvement d'oscillation de $T=20.94$. Le nombre de Reynolds, basé sur la corde du profil est $Re=1$ million. Les courbes d'hystérésis, c'est-à-dire les efforts, portance C_z , traînée C_x et moment C_M , en fonction de l'incidence du profil sont obtenues par intégration des forces de pression et de cisaillement sur la surface du corps.



Figure(5.90) Boucles d'hystérésis du mouvement en tangage du profil Naca0012

La comparaison de la figure(5.90) représentant l'évolution des coefficients aérodynamiques obtenus par simulation des grandes structures en fonction de l'incidence avec les résultats de l'épreuve expérimentale présentés sur la figure(1.1) montre une très bonne conformité phénoménologique. L'apparition d'un mince écoulement de retour, le développement des tourbillons de décrochage dynamique, l'état de lâcher de tourbillons post décrochage dynamique ainsi que le recollement de la couche limite se produit au cours d'un temps adimensionnel $T=2.5$ du mouvement de tangage du profil. L'analyse des principales étapes du processus de décrochage dynamique simulé est réalisée par une description des coefficients des forces et moment agissant sur le profil ainsi que des champs de vitesse instantanée.

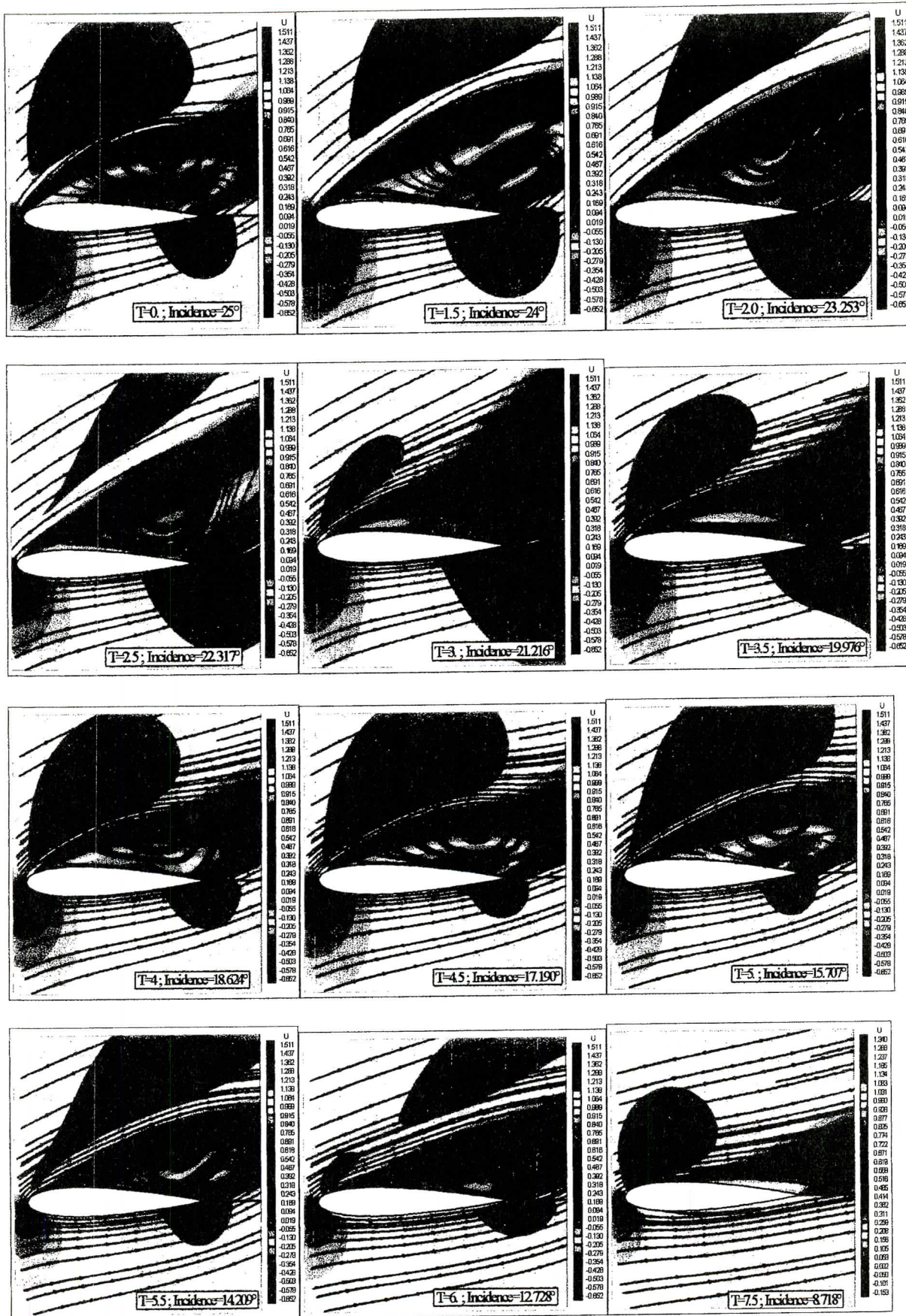
Comme c'est évident dans la figure(5.90), les phénomènes transitoires considérés dans la phase de descente sont éliminés pendant la phase de montée du mouvement de tangage du profil. Même si une bonne reproductibilité du coefficient de portance peut être obtenue pour la phase de montée, de forts effets apériodiques peuvent être observés pendant le lâcher tourbillonnaire de la phase descendante du mouvement. Le décrochage dynamique diffère du décrochage statique sous deux aspects. En premier lieu, la portance maximale obtenue sous des conditions d'incidence variable est plus importante que pour une incidence calée. En second lieu, alors que la portance maximum, à incidence calée, ne dépend que de l'incidence, la portance pour un profil en mouvement de tangage dépend de l'histoire du mouvement d'oscillation. On associe ainsi au décrochage dynamique une boucle d'hystérésis. L'influence de l'histoire rend la prédiction du décrochage dynamique extrêmement difficile, en particulier pour les cas de décrochage profond pour lesquels l'amplitude d'oscillation autour de l'incidence moyenne α_0 , sera de l'ordre de l'incidence de portance statique maximale. Le modèle utilisé pour la simulation des grandes structures turbulentes, tend vers une sous-estimation des coefficients pour la phase de montée, alors qu'ils sont mieux prédits dans la phase de descente d'autre part et pour des raisons qui relèvent de la qualité du maillage on constate plusieurs insuffisances dans les résultats des coefficients de traînée et du moment. L'augmentation des coefficients de portance au-delà de l'angle de décrochage statique ($\approx 14^\circ$) est essentiellement dû au développement des tourbillons générés par le décrochage dynamique qui maintiennent le pic d'aspiration au bord d'attaque de l'extrados du profil d'aile. Sur la courbe d'hystérésis de la portance, on définit quatre points de référence caractérisant l'évolution du processus de décrochage dynamique libellés par ordre alphabétique pour : un écoulement attaché, développement de tourbillons de décrochage dynamique, lâcher de tourbillons post décrochage dynamique ainsi qu'un recollement de la couche limite. Le moment par rapport à l'axe passant par le quart de la corde présente une boucle en huit avec une augmentation significative du moment Piqueur.

Afin d'étudier le comportement qualitatif de la couche limite se développant sur le profil Naca0012 en mouvement de tangage, on a effectué un zoom de la zone dans laquelle évolue le profil. Pour des raisons de symétrie, les résultats schématisés sur la figure(5.91) présentent l'évolution de la couche limite au cours de la phase de descente c'est à dire une demi-période. Sur la figure sont résumées les différentes phases du décrochage dynamique.

Pendant que la portance du profil continue d'augmenter avec l'incidence au-delà de la valeur maximale de décrochage statique, il se forme un tourbillon au bord d'attaque qui se déplace en roulant sur le profil pendant la phase de décélération (décroissance d'incidence), la portance passe par un maximum lorsque le tourbillon est à mi-corde. Du fait des charges induites par le tourbillon lors de son déplacement, le moment piqueur augmente et atteint un maximum lorsque les tourbillons passent au bord de fuite. L'incidence continue de décroître et la couche

limite finit par recoller, mais la portance ne retrouve sa valeur statique que pour de faibles incidences. Les résultats nous montrent que le tourbillon du bord d'attaque peut être suivi d'un second au bord de fuite lorsque le premier grossit. Les deux enroulements tourbillonnaires progressent vers le sillage où le tourbillon aval s'échappe à incidence $\alpha=22^\circ$ alors que le tourbillon amont est émis dans le sillage vers la fin du premier quart de période. Pour une incidence voisine de 14° , les deux zones de décollement ont tendance à se confondre, on observe alors le même comportement rencontré pendant le premier quart de période. Au cours d'une demi-période quatre tourbillons sont ainsi émis dans le sillage.

Notre simulation numérique est encore incapable de décrire correctement les effets du décrochage dynamique ; ceci s'explique par la grande complexité des mécanismes mis en œuvre qui ne sont toujours pas bien compris, où en particulier le caractère fortement visqueux et instationnaire de l'écoulement est dominant. En effet, on observe de grosses structures tourbillonnaires lâchées par le profil, ce qui explique à la fois des gains de portance par rapport au décrochage statique, mais aussi de très forts gradients de portance et de moment de tangage lorsque ces structures tourbillonnaires sont évacuées en aval du profil.



Figure(5.91) champs de vitesse instantanés et lignes de courant du mouvement en tangage du profil Naca0012

Chapitre VI

Conclusions et perspectives

Ce travail a porté sur la Simulation des Grandes Echelles turbulentes en régime incompressible en géométrie complexe, en vue d'une application à un écoulement autour d'un profil statique puis oscillant en configuration de décrochage tel que celui intervenant en vol d'avancement à grande vitesse ou à forte charge sur les pales reculantes du rotor principal de l'hélicoptère.

C'est un cas test qui présente des difficultés physiques particulièrement significatives dans des situations de décrochage et de post décrochage où l'écoulement fait intervenir une séparation massive et des phénomènes instationnaires. Au-delà du décrochage, la structure de l'écoulement (lâcher tourbillonnaire) et les forces instationnaires sont des facteurs importants influents sur la stabilité et les performances aérodynamiques des profils portants.

Les équations de Navier Stokes pour un fluide incompressible ont été résolues dans la géométrie considérée en adaptant les conditions aux limites en entrée, sortie et aux parois. Ceci a nécessité la mise en œuvre d'un code de calcul tridimensionnel basé sur l'utilisation des techniques des volumes finis pour discrétiser spatialement les équations du mouvement écrites sous une formulation en vitesses contravariantes appliquée à un maillage structuré décalé généré suivant des coordonnées généralisées liées à la forme de l'obstacle. Notre méthode d'intégration temporelle est du type pas fractionnaires complètement implicite précise au second ordre tandis qu'une méthode de Newton approchée assure la prise en compte des termes non-linéaires. Une méthode de Krylov a été retenue pour résoudre le système linéaire de grande taille associée à chaque itération du processus de Newton.

La méthodologie de la simulation des grandes échelles a été utilisée pour filtrer spatialement les grandes échelles de l'écoulement et modéliser la turbulence à petite échelle. Seul le tenseur de sous maille présent dans les équations de l'écoulement ainsi obtenu est calculé à l'aide du modèle de Smagorinsky modifié afin tenir compte de l'effet de la viscosité moléculaire près des parois. Ce travail a permis de montrer qu'il est possible de récupérer des informations instationnaires en perturbant un écoulement initial obtenu par simulation statistique en utilisant la méthodologie des grandes échelles. C'est un fait important dans la mesure où une des difficultés majeures des méthodes RANS à l'heure actuelle pour le calcul instationnaire vient du nombre d'équations à résoudre et du nombre important de termes à modéliser. Le nombre d'équations utilisées en SGE est constant et les résultats obtenus sont instationnaires. Un autre avantage de la SGE est sa simplicité et le faible nombre de paramètres à caler par rapport à RANS. Les résultats obtenus sur les profils de vitesse moyenne ainsi que les tensions de Reynolds sont encourageants même si les tensions sont surestimées dans le cas de l'écoulement autour du profil en incidence de décrochage, où nous avons pu mesurer toutes les difficultés d'une estimation précise des efforts s'exerçant sur un profil d'aile, liées à la précision et l'indépendance vis-à-vis du maillage des prédictions d'écoulements visqueux ainsi qu'à la modélisation de la turbulence et de la transition. La SGE capture mieux les oscillations de l'écoulement et permis de mieux suivre l'évolution du bulbe de décollement depuis sa formation au bord d'attaque jusqu'à son passage au bord de fuite où il donne naissance à une émission tourbillonnaire dans le sillage. Les calculs de décrochage

dynamique sur le profil oscillant réalisés, indiquent que le code de calcul fourni une prédiction acceptable des écoulements et des efforts s'exerçant sur des corps en mouvement. Dès lors, des calculs d'interaction fluide-structure sont envisageables puisque la prédiction des efforts sur une structure immergée dans un milieu fluide en est le point difficile.

Néanmoins, nous nous sommes heurtés lors de ces calculs à un certain nombre de difficultés. La première est liée au coût CPU de la SGE très important en résolution fortement couplée des équations de Navier-Stokes dans le cadre de la modélisation d'écoulements incompressibles mais qui reste toutefois une voie attrayante, comparativement aux méthodes découplées dites à " correction de pression " (SIMPLE, SIMPLER, PISO). Cette attractivité est principalement due à la robustesse de l'algorithme construit qui consiste à résoudre le système linéarisé des équations de Navier-Stokes de manière couplée. L'originalité de cette méthode consiste à introduire des variables intermédiaires facilitant ultérieurement la reconstruction des flux et à dériver une équation de pression des équations de quantité de mouvement et de l'équation de continuité. Cette démarche conduit ainsi - lors d'applications tridimensionnelles - à un système linéaire qui nécessite d'importantes ressources de stockage et dont la convergence non-linéaire de l'algorithme se trouve à la fois dépendante de l'efficacité des méthodes de résolution linéaire mais aussi de la représentation de la non-linéarité. Cependant, l'un des facteurs contraignant dans le calcul est la taille des mailles aux parois et dont dépend le choix du pas de temps malgré l'adoption d'une résolution implicite. Nous avons choisi initialement de ne pas utiliser de lois de paroi parce qu'il semblait judicieux de ne pas introduire de modélisation supplémentaire dans la résolution des grandes échelles. Une amélioration des résultats est possible en utilisant un maillage plus serré autour des zones de décollement et précisément aux parois. Un nombre de points plus important dans la direction longitudinale pour mieux capturer les phénomènes post décrochage dynamique et peut permettre d'éviter de trop les diffuser. Un maillage plus serré aux parois permettrait également de mieux prédire la production de l'énergie cinétique par la SGE et ainsi d'améliorer les bilans et le calcul des tensions de Reynolds.

L'utilisation de la simulation des grandes échelles pour calculer un écoulement aussi complexe a soulevé de nombreuses questions fondamentales. L'interprétation de l'opération de filtrage sur des maillages curvilignes qui sont anisotropes n'est pas évidente. Il subsiste également des problèmes associés au couplage entre la viscosité numérique introduite par les schémas décentrés et la viscosité de sous maille. On a constaté aussi dans certains cas que le modèle choisi dans la présente étude surdissipe et peut entraîner la disparition des grosses structures de l'écoulement.

Le code a été conçu pour fonctionner sur un seul ordinateur avec un maillage monobloc. Ce mode de fonctionnement adapté aux moyens informatiques mis à notre disposition est en train d'être dépassé. L'émergence de la nouvelle technologie basée sur l'architecture parallèle entraîne sans doute la disparition des ordinateurs vectoriels dans le domaine de calcul intensif dans un avenir proche. La maîtrise de la parallélisation devient incontournable. Avec une vitesse de calcul de plusieurs GFLOPS et une capacité de mémoire de plusieurs dizaines Go, un serveur de calcul à architecture parallèle permet d'étudier des problèmes complexes encore plus proches de la réalité. Cependant, ce type de problème est souvent difficile à traiter avec un maillage multi-blocs. Le développement des outils multi-blocs est donc à l'ordre du jour. Afin de mieux répondre au besoin des nouvelles applications et de bien profiter de l'avantage offert par cette nouvelle technologie, la parallélisation du code devrait être entreprise pour transformer le code en un solveur Navier-Stokes multi-blocs.

Nous tenons à souligner au final que ce calcul n'a été rendu possible que grâce à une évolution très rapide des moyens informatiques sur ces trois dernières années et ne constitue qu'un premier pas qu'on a osé franchir.

La SGE est une méthodologie qui sera de plus en plus utilisée dans le monde industriel vu ses capacités à capturer les grandes échelles instationnaires des écoulements. Mais comme nous l'avons vu, c'est une technique qui reste encore très chère. Une voie pour son utilisation plus systématique en écoulement complexe passe certainement par la parallélisation des codes. Cela s'avérera d'autant plus nécessaire s'il faut des maillages très serrés aux parois pour bien calculer les différentes interactions qui sont observées autour du profil. Cela pose de nouveaux problèmes, comme le problème du filtrage temporel des solutions en plus du filtrage spatial et du choix d'un pas de temps pertinent par rapport aux phénomènes physiques considérés.

Néanmoins, la réalisation d'études paramétriques sur les modélisations utilisées en SGE pour calculer des écoulements présentant des phénomènes physiques complexes ne sera rendue possible qu'à condition de faire diminuer le temps des calculs. Cette voie est d'autant plus sérieusement envisageable depuis que la mémoire de calcul nécessaire se trouve vulgarisée à toute machine informatique. Une autre voie complémentaire est peut-être d'utiliser le couplage entre la SGE et les simulations statistiques un peu différemment. Nous avons vu sur les résultats que les différences observées entre les résultats se situent au niveau de la région proche parois. Il pourrait être bénéfique de ne calculer que la partie d'interaction entre fluide-structure en travaillant sur les conditions physiques à imposer à l'entrée d'un domaine de calcul plus restreint. Il a déjà été utilisé avec succès des initialisations de calculs spatiaux à partir de calculs temporels moins chers.

La montée en puissance de calcul des ordinateurs dans les années à venir permettra de simuler numériquement des écoulements de plus en plus complexes et de tester plus systématiquement la méthodologie de la SGE dans les conditions réelles d'écoulements industriels incompressibles, permettant une modélisation de plus en plus fine des écoulements turbulents instationnaires incompressibles 3D en géométrie complexe.

Annexe A

Analyse mathématique des équations de Navier-Stokes

A.1 Existence, unicité des solutions :

Position du problème. Les espaces fonctionnels

On considère les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement d'un fluide newtonien, incompressible dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n (n \in \{2,3\})$:

$$(\partial_t + u(x,t) \cdot \nabla)u(x,t) = f(x,t) - \nabla p(x,t) + \nu \Delta u(x,t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[. \quad \nu > 0 \quad (\text{a.1})$$

$$\text{et} \quad \text{div}(u(x,t)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[. \quad (\text{a.2})$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$u(x,0) = u_0(x). \quad x \in \Omega \quad (\text{a.3})$$

$$\text{et} \quad u(x,t) = \phi(x,t). \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0 \quad \phi \text{ donnée} \quad (\text{a.4})$$

Le problème qu'on se pose est de trouver u et p tels que (a.1), (a.2), (a.3) et (a.4) aient lieu. Pour la résolution mathématique de ce problème on considère les espaces :

- $\gamma = \{v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \text{div}v = 0\}$ l'espace des fonctions test, où $C_0^\infty(\Omega)$ représente l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .
 - $H = 1$ 'adhérence de γ dans $L^2(\Omega)^n$ et
 - $V = 1$ 'adhérence de γ dans $H_0^1(\Omega)^n$
- $n \in \{2,3\}$ étant la dimension de l'espace considéré.

H et V sont des espaces de Hilbert munis respectivement de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ et de la norme $\|\cdot\|_H$, et on peut les caractériser comme suit :

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^n; \text{div}v = 0; v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^n, \text{div}v = 0\}$$

D'autres propriétés des espaces H et V sont présentées dans Temam [92].

On note par Λ l'opérateur linéaire non borné dans H associé au produit scalaire de V^1 :

$$(\Lambda u, v) = ((u, v)) \quad \forall u, v \in V$$

Le domaine de l'opérateur Λ est noté par $D(\Lambda)$ et d'après la théorie sur les systèmes linéaires elliptiques on a :

$$D(\Lambda) = (H^2(\Omega))^n \cap V$$

Soit V^1 l'espace dual de V . Alors, on a :

$$D(\Lambda) \subset V \subset H \subset V^1$$

Où toutes les inclusions sont continues, chaque espace est dense dans le suivant et de plus l'inclusion $V \rightarrow H$ est compacte. De plus :

$$\Lambda u = -P\Delta u$$

où P est le projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega)^n$ sur l'espace H (dans le cas périodique $\Lambda u = -\Delta u$ $\forall u \in D(\Lambda)$).

L'opérateur Λ est auto adjoint, positif et d'inverse compact dans H . Il existe une suite λ_i telle que :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty$$

et une base orthonormale dans H , $\{w_k\}_{k \in N^*}$ tel que :

$$\Lambda w_k = \lambda_k w_k \quad k \in N^*$$

Les quantités $\frac{1}{2}|u|^2$ et $\|u\|^2$ représente l'énergie cinétique et l'enstrophie respectivement.

On utilise les notations standard pour les produits scalaires et les normes dans L^2 et dans H_0^1 :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx \quad \text{et} \quad ((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx ; \quad |u| = (u, u)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u\| = ((u, u))^{\frac{1}{2}}$$

Formulation faible. Résultats d'existence et d'unicité

La formulation faible des équations de Navier-Stokes (due à J. Leray) ne dépend que de la vitesse u . Elle est obtenue en multipliant l'équation (a.1) avec une fonction test $v \in \gamma$, puis en intégrant sur Ω .

Si on note $u(t)$ l'application

$$x \in \Omega \rightarrow u(x, t)$$

alors le problème à résoudre dans la formulation faible est de trouver les solutions $u(t) \in V$ pour presque tout t telles que l'équation :

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V \quad (\text{a.5})$$

soit vérifiée au sens de distributions sur $]0, T[$ ou $]0, \infty[$.

Le terme b est donné par:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \cdot w_j dx \quad (\text{a.6})$$

(dans un domaine où les intégrales ont un sens).

On appelle solution faible des équations de Navier-Stokes sur $[0, T]$ un champ de vecteurs de divergence nulle

$$u \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H) \quad \text{pour } T > 0$$

et qui vérifie l'équation (a.5) au sens des distributions, et solution forte, la solution qui appartient à :

$$L^2((0, T), D(\Lambda)) \cap L^\infty((0, T), V) \quad \text{pour } T > 0$$

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions sont différents selon la dimension de l'espace considéré.

L'existence de la solution est généralement obtenue par une méthode constructive: on construit d'abord une solution approchée (par une méthode de Galerkin par exemple) et ensuite on passe à la limite à l'aide d'estimations a priori sur la solution construite. On peut aussi utiliser les théorèmes de point fixe de Leray-Schauder ou bien de Banach, qui donnent les solutions sur un petit intervalle de temps $]0, T^*[$. La partie délicate dans ce type de démonstration est la dérivation des estimations a priori. Celles-ci dépendent de l'évaluation du terme b . Il existe plusieurs estimations de ce terme, obtenues en combinant l'inégalité de Hölder avec d'autres inégalités, comme par exemple: celles de Sobolev, d'interpolation, de Gagliardo-Nirenberg.

On résume maintenant les résultats connus concernant l'existence et l'unicité dans le contexte de la théorie des espaces L^2 :

- en dimension 2, la théorie mathématique concernant les équations de Navier-Stokes est assez satisfaisante, le problème étant bien posé, au sens qu'on connaît l'existence et l'unicité de la solution faible; on a le même type de résultat pour les solutions fortes, mais pour celles-ci, seulement dans le cas où la donnée initiale est suffisamment régulière.

Plus précisément on énonce ici un théorème qui regroupe en fait ces résultats :

Théorème a.1 *i)* Si f et u_0 sont données telles que :

$$f \in L^2(0, T; V') \text{ et } u_0 \in H \quad (\text{a.7})$$

alors il existe une unique solution faible des équations de Navier-Stokes qui est dans $C([0, T]; H)$ et qui vérifie

$$u' \in L^2(0, T; V')$$

ii) Si f et u_0 sont données telles que

$$f \in L^\infty(0, T; H) \text{ et } u_0 \in V \quad (\text{a.8})$$

alors il existe une unique solution forte des équations de Navier-Stokes qui est dans $C([0, T]; V)$.

- en dimension 3, on a seulement des résultats partiels : l'existence et l'unicité des solutions fortes sur un intervalle $]0, T^*$ [(le temps de blow-up T^* dépendant de la condition initiale (Ladyshzenskaya [54])), ainsi que l'existence globale des solutions faibles.

On peut énoncer dans ce cas:

Théorème a.2 *i)* Si f et u_0 sont données telles que (a.7) alors il existe une solution faible des équations de Navier-Stokes qui est continue au sens faible sur $[0, T]$ à valeurs dans H et qui vérifie

$$u' \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; V')$$

ii) Si f et u_0 sont données telles que (a.8) alors il existe $T^* = T^*(u_0)$ tel que sur l'intervalle $[0, T]$ les équations de Navier-Stokes admettent une unique solution forte.

Remarque a.1 Actuellement on ne sait pas si la solution faible des équations de Navier-Stokes 3D est unique, ou quelles sont les hypothèses qui peuvent la rendre unique, ainsi que l'existence de la solution forte pour tout T .

Annexe B

Méthodes de Krylov

B.1 Méthode de Krylov :

Pour résoudre le système linéaire suivant :

$$J\delta = b \quad (\text{b.1})$$

En général J est une matrice non-symétrique, δ solution du système linéaire. On utilise des méthodes fondés sur une recherche de la solution en restriction à un sous-espace de Krylov. De telles méthodes cherchent une approximation de la solution δ^* du système (b.1) sur $\delta_0 + K(J, r_0, k)$ où $K(J, r_0, k)$ est le sous espace de Krylov défini par :

Définition (b.1) : Le sous-espace de Krylov $K(J, r_0, k)$ associé au vecteur $r_0 = b - J\delta_0$ et à la matrice J est le sous espace formé par $\langle r_0, Jr_0, \dots, J^{k-1}r_0 \rangle$ où δ_0 est une première estimation de δ .

Cette approche se justifie par le résultat suivant :

Théorème (b.1) : Soit J non singulière. Il existe $k_0 \leq N$ tel que $\delta^* \in \delta_0 + K(J, r_0, k)$.

Preuve. En mettant J sous sa forme de Jordan, il est aisé de montrer qu'il existe un entier $k_0 \leq N$ tel que $K(J, r_0, k_0) = K(J, r_0, k_0 + 1)$. Ainsi,

$$J^{k_0} r_0 = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k J^k r_0$$

Soit $l \geq 0$ plus petit entier tel que a_l soit non nul alors

$$0 = r_0 + J \sum_{k=0}^{k_0-l-1} b_k J^k r_0$$

avec $b_k = \frac{a_{k+l+1}}{a_l}$ pour $k=0, k_0-l-2$ et $b_{k_0-l-1} = -\frac{1}{a_l}$ il suffit dès lors de prendre :

$$\delta = \delta_0 + \sum_{k=0}^{k_0-l-1} b_k J^k r_0$$

De nombreux algorithmes utilisent ce résultat pour résoudre ou approcher la solution de (b.1) lorsque J est non symétrique. Dans l'algorithme de FOM ou de GMRES, une base pour le sous-espace de Krylov est construite, puis une approximation de la solution est donnée à chaque étape de sa construction. Une de ces méthodes a retenu notre attention, il s'agit de GMRES qui est optimale au sens où elle cherche une approximation de la solution vérifiant :

$$\min_{z \in K(J, r_0, k)} \|r_0 - Jz\|_2$$

B.1.1 GMRES :

Nous présentons ici brièvement l'algorithme de GMRES, en introduisant quelques notations nécessaire

Le principe de GMRES est de minimiser $\| -J(\delta_0 + z) + b \|_2$ avec z dans le sous-espace de Krylov $K(J, r_0, k)$ (définition b.1). Ainsi, (b.1) est remplacé par le problème de minimisation approché

$$\min_{z \in K(J, r_0, k)} \| r_0 - Jz \|_2$$

le sous espace de Krylov est généré par le processus d'Arnoldi conduisant à l'algorithme de GMRES suivant :

Algorithme b.1: GMRES

$\delta_0 \in \mathbb{R}^N$ une première approximation de δ^* ,

(s1). $r_0 := b - J\delta_0$

$$\beta := \| r_0 \|_2 ; v_1 := \frac{r_0}{\beta} ; k := 0.$$

(s2). Do

$$\left| \begin{array}{l} k := k + 1. \\ (a) \quad w_{k+1} = Jv_k - \sum_{l=0}^k h_{l,k} v_l \\ \quad \text{avec } h_{l,k} := (Jv_k, v_l) \quad (l=1, \dots, k) \\ \quad h_{k+1,k} := \| w_{k+1} \|_2 \\ \quad v_{k+1} := \frac{w_{k+1}}{h_{k+1,k}} \\ (b) \quad \text{calculer } \rho_k := \min_{y \in \mathbb{R}^k} \| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2 \end{array} \right.$$

until $\rho_k = 0$

(s3). Calculer y_k ; $z_k := V_k y_k$ et $\delta := \delta_0 + z_k$

$$\text{où } (\overline{H}_k)_{p,l} = \begin{cases} h_{m,l} & 1 \leq p \leq k+1, p \leq l \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$V_k = (v_1, \dots, v_k)$$

et

$$\| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^k} \| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2 = \rho_k$$

Le processus d'Arnoldi génère une base orthogonale telle que :

$$JV_k = V_{k+1} \overline{H}_k$$

impliquant

$$\min_{z \in K(J, r_0, k)} \| r_0 - Jz \|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^k} \| \beta e_1 - \overline{H}_k y \|_2$$

On peut facilement vérifier les trois propriétés suivantes :

$$(i) \quad K(J, r_0, k_0) = K(J, r_0, k_0 - 1)$$

$$(ii) \quad \rho_k = 0$$

$$(iii) \quad J\delta_k = b$$

Bibliographie

- [1] Akselvoll, K., & Moin, P. 1996 Large-eddy simulation of turbulent coned coannular jets. *J. Fluid Mech.* 315, 387.
- [2] Arnoux, J. juin 1983 Etude préliminaire du calcul numérique de la couche limite instationnaire sur un profil d'aile en rotation, application à l'éolienne Darrieus. Rapport DEA, Aix Marseille II IMST.
- [3] R. Aris. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [4] P. Arminjon and A. Dervieux. Construction of TVD-like artificial viscosities on two-dimensional arbitrary FEM grids. *J. Comput. Phys.*, 106:176--198, 1993.
- [5] W.D. Baines and D.J. Knapp. Wind driven water currents. *J. Hydraulics Division ASCE*, 91:295--321, 1965.
- [6] A.C. Benim and W. Zinser. Investigation into the finite element analysis of confined turbulent flows using a $k-\varepsilon$ model of turbulence. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 51:507--523, 1985.
- [7] R.S. Bernard and H. Kapitza. How to discretize the pressure gradient for curvilinear MAC grids. *J. Comput. Phys.*, 99:288--298, 1992.
- [8] J.P. Boris. New directions in CFD. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 21:345--385, 1989.
- [9] J.P. Boris and D.L. Book. Flux-corrected transport I - SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, 11:38--69, 1973.
- [10] M. Braaten and W. Shyy. A study of recirculating flow computation using body-fitted coordinates: consistency aspects and mesh skewness. *Numer. Heat Transfer*, 9:559--574, 1986.
- [11] Brochier, G. 1986 Etude numérique de la couche limite instationnaire sur un profil d'aile en mouvement, application et expérimentation à l'éolienne Darrieus. Rapport DEA, Aix Marseille II IMST.
- [12] P. Bradshaw, T. Cebeci, and J.H. Whitelaw. *Engineering calculation methods for turbulent flow.* Academic Press, London, 1981.
- [13] E. Brakkee and A. Segal. A parallel domain decomposition algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations. In L. Dekker, W. Smit, and J.C. Zuidervart, editors, *Massively Parallel Processing Applications and Development*, pages 743--752, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [14] E. Brakkee, A. Segal, and C.G.M. Kassels. A parallel domain decomposition algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Simul. Pract. Theor.*, 3:185--205, 1995.
- [15] J. P. Chollet and M. Lesieur. Parametrization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, 1981.
- [16] T.L. Chambers and D.C. Wilcox. Critical examination of two-equation turbulence closure models for boundary layers. *AIAA J.*, 15:821--828, 1977.
- [17] H.C. Chen, V.C. Patel, and S. Ju. Solutions of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for three-dimensional incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 88:305--336, 1990.
- [18] Choi, H., Moin, P., & Kim, J. 1993 Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.* 255, 503.
- [19] N-H. Cho and C.A.J. Fletcher. Computation of turbulent conical diffuser flows using a non-orthogonal grid system. *Comput. Fluids*, 19:347--361, 1991.
- [20] P.J. Coelho and J.C.F. Pereira. Finite volume computation of the turbulent flow over

- a hill employing 2D or 3D non-orthogonal collocated grid systems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 14:423--441, 1992.
- [21] G.W. Colenbrander. CFD in research for the petrochemical industry. *Appl. Sci. Res.*, 48:211--245, 1991.
- [22] S.M. Correa and W. Shyy. Computational models and methods for continuous gaseous turbulent combustion. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 13:249--292, 1987.
- [23] T.J. Craft, B.E. Launder, and K. Suga. Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements. In *Proc. 5th Int. IAHR Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, pages 125--132, Presses Ponts et Chauss'ees, Paris, 1993.
- [24] Dejoan A. et Schiestel R., 1999 Simulation de grandes échelles en écoulement turbulent soumis à des perturbations instationnaires, 14^o Congrès Français de Mécanique, Toulouse 30 août-3 sept. 1999, communication N^o 453.
- [25] G. de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 3:249--264, 1983.
- [26] I. Demirdzic, A.D. Gosman, R.I. Issa, and M. Peric. A calculation procedure for turbulent flow in complex geometries. *Comput. Fluids*, 15:251--273, 1987.
- [27] I.A. Demirdzic. A finite volume method for computation of fluid flow in complex geometries. Ph.D. thesis, University of London, 1982.
- [29] L. Davidson and B. Farhanieh. CALC-BFC: A finite-volume code employing collocated variable arrangement and cartesian velocity components for computation of fluid flow and heat transfer in complex three-dimensional geometries. Rept. 92/4, Dept. of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg, 1992.
- [29] G.B. Deng. Numerical simulation of incompressible turbulent appendage-flat plate junction flows. In C. Taylor, W.G. Habashi, and M.M. Hafez, editors, *Proc. Sixth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 793--803, Pineridge Press, Swansea, 1989.
- [30] L. Davidson. LES-RANS of channel flow .Technical Report 00/2, Dept.of Thermo and Fluid Dynamics , Chalmers University of Technology, Gothenburg , Sweden, 2000.
- [31] Favier, D. octobre 1980 Aérodynamique subsonique instationnaire d'un profil d'aile soumis á des variations de vitesse et d'incidence, thèse d'état , Aix Marseille II IMF
- [32] J.H. Ferziger. Simulation of incompressible turbulent flows. *J. Comput. Phys.*, 69:1--48, 1987.
- [33] C.A.J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics*, Vols. 1 and 2. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [34] J.E. Fromm. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 3:176--189, 1968.
- [35] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamic subgrid scale eddy-viscosity model. *Phys. Fluids A* ,
- [36] P.M. Gresho and R.L. Lee. Don't suppress the wiggles they're telling you something! *Computers & Fluids*, 9:223--253, 1981.
- [37] S. Ghosal and P. Moin. The basic equations for the Large Eddy Simulation of turbulent flows in complex geometry . *Journal of Computational Physics* , 1995.
- [38] M.A. Habib and J.H. Whitelaw. The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers. *Numer. Heat Transfer*, 5:145--164, 1982.
- [39] T. Han, J.A.C. Humphrey, and B.E. Launder. A comparison of hybrid and quadratic upstream differencing in high Reynolds number elliptic flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 29:81--95, 1981.
- [40] Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P. & Akselvoll, K. 1995 A Dynamic Localization Model for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. *J. Fluid Mech.* 286, 229-255.

- [41] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182--2189, 1965.
- [42] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357--393, 1983.
- [43] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. *J. Comput. Phys.*, 71:231--303, 1987.
- [44] A. Harten, J.M. Hyman, and P.D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29:297--322, 1976.
- [45] T. Hayase, J.A.C. Humphrey, and R. Greif. A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures. *J. Comput. Phys.*, 98:108--118, 1992.
- [46] J.O. Hinze. *Turbulence*. Mac Graw-Hill, New York, 1975.
- [47] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, Vols. 1 and 2. John Wiley, Chichester, 1990.
- [48] P.G. Huang, B.E. Launder, and M.A. Leschziner. Discretization of nonlinear convection processes: a broad-range comparison of four schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 48:1--24, 1985.
- [49] W. Hundsdorfer, B. Koren, M. van Loon, and J.G. Verwer. A positive finite-difference advection scheme. *J. Comput. Phys.*, 117:35--46, 1995.
- [50] A.G. Hutton, R.M. Smith, and S. Hickmott. The computation of turbulent flows of industrial complexity by the finite element method - progress and prospects. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 7:1277--1298, 1987.
- [51] T. Ikohagi and B.R. Shin. Finite difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates. *Comput. Fluids*, 19:479--488, 1991.
- [52] R.I. Issa and P.J. Oliveira. Numerical prediction of phase separation in two-phase flow through T-junctions. *Comput. Fluids*, 23:347--372, 1994.
- [53] P. K. Khosla and S. G. Rubin. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Comput. Fluids*, 2:207--209, 1974.
- [54] J. Kim, S.J. Kline, and J.P. Johnston. Investigation of a reattaching turbulent shear layer: flow over a backward-facing step. *ASME J. Fluids Engng.*, 102:302--308, 1980.
- [55] W.J. Kim and V.C. Patel. Influence of streamwise curvature on longitudinal vortices imbedded in turbulent boundary layers. *Comput. Fluids*, 23:647--673, 1994.
- [56] S. J. Kline , W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler. The structure of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 30:741\226773, 1967.
- [57] S. Koshizuka and Y. Oka. A calculation procedure of coordinate-free Navier-Stokes equations on boundary-fitted grids. In C. Taylor, J.H. Chin, and G.M. Homsy, editors, *Proc. Seventh Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 1474--1484, Pineridge Press, Swansea, 1991.
- [58] K.Y.M. Lai and A.D. Gosman. Finite difference and other approximations for the transport and Navier-Stokes equations. Report FS/82/16, Mechanical Engineering Department, Imperial College, London, U.K., 1982.
- [59] Raphael Lardat. *Simulations numériques d'écoulements externes instationnaires décollés autour d'une aile avec des modèles de sous maille*. PhD thesis, Université Paris.
- [60] B.E. Launder. Turbulence modeling in the vicinity of a wall. In S.J. Kline, B.J. Cantwell, and G.M. Lilley, editors, *Complex turbulent flows: comparison of computation and experiment*, volume II, pages 691--699, Stanford University Press, Stanford, CA, 1982.
- [61] B.E. Launder. Second-moment closure and its use in modelling turbulent industrial flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 9:963--985, 1989.

- [62] B.E. Launder. Second-moment closure: present... and future? *Int. J. Heat Fluid Flow*, 10:282--300, 1989.
- [63] B.E. Launder. On the modelling of turbulent industrial flows. In Ch. Hirsch, J. Périaux, and E. Onate, editors, *Computational methods in applied sciences*, pages 91--102, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [64] B.E. Launder, G.J. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68:537--566, 1975.
- [65] B.E. Launder and D.B. Spalding. *Lectures in mathematical models of turbulence*. Academic Press, London, 1972.
- [66] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 3:269--289, 1974.
- [67] D. Laurence. Modeling turbulent flows in engineering applications. In Ch. Hirsch, J. Périaux, and E. Onate, editors, *Computational methods in applied sciences*, pages 103--116, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [68] B.P. Léonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 19:59--98, 1979.
- [69] B.P. Leonard. A survey of finite differences with upwinding for numerical modelling of the incompressible convection diffusion equation. In C. Taylor and K. Morgan, editors, *Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow*, pages 1--35, Pineridge Press, Swansea, 1981.
- [70] B.P. Leonard. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 8:1291--1318, 1988.
- [71] B.P. Leonard and J.E. Drummond. Why you should not use 'hybrid', 'power-law' or related exponential schemes for convective modelling - there are much better alternatives. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 20:421--442, 1995.
- [72] B.P. Leonard and S. Mokhtari. Beyond first-order upwinding: the ULTRA-SHARP alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 30:729--766, 1990.
- [73] M.A. Leschziner. Practical evaluation of three finite difference schemes for the computation of steady-state recirculating flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 23:293--312, 1980.
- [74] M.A. Leschziner. Modeling turbulent recirculating flows by finite-volume methods current status and future directions. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 10:186--202, 1989.
- [75] M.A. Leschziner. Modelling engineering flows with Reynolds stress turbulence closure. *J. Wind Engng. Indust. Aero.*, 35:21--47, 1990.
- [76] M.A. Leschziner. Numerical implementation and performance of Reynolds-stress closures in finite volume computations of recirculating and strongly swirling flows. In *Introduction to the modeling of turbulence*, VKI, Brussels, 1993. Lecture Series 1993-02.
- [77] M.A. Leschziner. Computation of aerodynamic flows with turbulence-transport models based on second-moment closure. *Comput. Fluids*, 24:377--392, 1995.
- [78] M.A. Leschziner and K.P. Dimitriadis. Computation of three-dimensional turbulent flow in non-orthogonal junctions by a branch-coupling method. *Comput. Fluids*, 17:371--396, 1989.
- [79] M.A. Leschziner and B.E. Launder, editors. *Round normally impinging turbulent jet and turbulent flow through tube bank sub-channel*, Manchester, UK., 1993. UMIST. Proc. Second ERCOFTAC-IAHR Workshop on Refined Flow Modelling.
- [80] M.A. Leschziner and W. Rodi. Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulence-model variations. *ASME J. Fluids Engng.*, 103:352--360, 1981.
- [81] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Assessment of turbulence-transport models including

- non-linear RNG eddy-viscosity formulation and second-moment closure for flow over a backward-facing step. *Comput. Fluids*, 23:983--1004, 1994.
- [82] F.S. Lien and M.A. Leschziner. A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation and Part 2: Application. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 114:123--167, 1994.
- [83] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 19:527--548, 1994.
- [84] A. Lin and H. Weinstein. Numerical analysis of confined turbulent flow. *Comput. Fluids*, 10:27--50, 1982.
- [85] T. S. Lund. On the use of discrete fillters for large eddy simulation. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, 1997.
- [86] J.L. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.*, 18:123--176, 1978.
- [87] S. Majumdar and W. Rodi. Three-dimensional computation of flow past cylindrical structures and model cooling towers. *Building and Environment*, 24:3--22, 1989.
- [88] Mary I., Sagaut P. and Guillen Ph., "Large Eddy Simulation of the Manipulated Flow around a Circular Cylinder", *Proceedings of the IMACS 16th World Congress*, August, 2000.-
- [89] P. Moin and J. Jimenez. Large eddy simulation of complex turbulent flows. *24th AIAA Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 93-3099*, Orlando, 1993.
- [90] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large eddy simulation of isotropic and stably stratified tubulence. *J. Fluid Mech.*, 1992.
- [91] A.E. Mynett, P. Wesseling, A. Segal, and C.G.M. Kassels. The ISNaS incompressible Navier-Stokes solver: invariant discretization. *Appl. Sci. Res.*, 48:175--191, 1991.
- [92] A. Nakayama. A finite difference calculation procedure for three-dimensional turbulent separated flows. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 20:1247--1260, 1984.
- [93] M. Nallasamy. Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: a review. *Comput. Fluids*, 15:151--194, 1987.
- [94] I. Nezu and W. Rodi. Open-channel flow measurements with a laser doppler anemometer. *J. Hydraulic Engng.*, 112:335--355, 1986.
- [95] C.W. Oosterlee. Robust multigrid methods for the steady and unsteady incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. Ph.D. thesis, Delft University of Technology, 1993.
- [96] C.W. Oosterlee and P. Wesseling. A robust multigrid method for a discretization of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. *Impact of Comput. Sci. Engng.*, 5:128--151, 1993.
- [97] C.W. Oosterlee, P. Wesseling, A.Segal, and E. Brakkee. Benchmark solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates on staggered grids. *Int J. Numer. Meth. Fluids*, 17:301--321, 1993.
- [98] G. Papadakis and G. Bergeles. A locally modified second order upwind scheme for convection terms discretization. *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, 5:49--62, 1995.
- [99] S.V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [100] S.V. Patankar. Recent developments in computational heat transfer. *J. Heat Transfer*, 110:1037--1045, 1988.
- [101] S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:1787--1806, 1972.

- [102] M.K. Patel and N.C. Markatos. An evaluation of eight discretization schemes for two-dimensional convection-diffusion equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 6:129--154, 1986.
- [103] V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review. *AIAA J.*, 23:1308--1319, 1985.
- [104] M. Peric. Finite volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts. Ph.D. thesis, Imperial College, London, 1985.
- [105] M. Peric, M. Ruger, and G. Scheuerer. Calculation of the two-dimensional turbulent flow over a sand dune model. Report SRR-TN-88-02, University Erlangen-Nbg., Erlangen, Germany, 1988.
- [106] R. Peyret and T.D. Taylor. *Computational methods for fluid flow*. Springer, Berlin, 1983.
- [107] J. Piquet and P. Queutey. Computation of the viscous flow past a prolate spheroid at incidence. In P. Wesseling, editor, *Proc. Eighth GAMM Conf. on Numer. Meth. Fluid Mech.*, pages 464--473, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1990. *Notes on Numerical Fluid Mechanics* 29.
- [108] A. Pollard and A.L.W. Siu. The calculation of some laminar flows using various discretization schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 35:293--313, 1982.
- [109] S.B. Pope. The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates. *J. Comput. Phys.*, 26:197--217, 1978.
- [110] G.D. Raithby. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 9:153--164, 1976.
- [111] C.W. Rapley. Turbulent flow in a duct with cusped corners. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 5:155--167, 1985.
- [112] A.K. Rastogi. Hydrodynamics in tubes perturbed by curvilinear obstructions. *ASME J. Fluids Engng.*, 106:262--269, 1984.
- [113] C.M. Rhie and W.L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA J.*, 21:1525--1532, 1983.
- [114] Roy Ph., 1980 Résolution des équations de Navier-Stokes par un schéma de haute précision en espace et en temps, *La Recherche Aéronautique*, 6, pp. 373-385.
- [115] Rai, M. M. & Moin, P. 1993 Direct Numerical Simulation of Transition and Turbulence in a Spatially Evolving Boundary Layer. *J. Comp. Phys.* 109, No. 2, 169-192.
- [116] W. Rodi, J.-C. Bonnin, and T. Buchal, editors. ERCOFTAC workshop on data bases and testing of calculation methods for turbulent flows, Karlsruhe, Germany, 1995. Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe. *Proc. Fourth ERCOFTAC-IAHR Workshop on Refined Flow Modelling*.
- [117] W. Rodi, S. Majumdar, and B. Schonung. Finite volume methods for two-dimensional incompressible flows with complex boundaries. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 75:369--392, 1989.
- [118] P.L. Roe. Finite-volume methods for the compressible Navier-Stokes equations. In C. Taylor, W.G. Habashi, and M.M. Hafez, editors, *Proc. Fifth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 2088--2101, Pineridge Press, Swansea, 1987.
- [119] H. Rolfes, J.A. Visser, and A. Bekker. Simulation of wind flow over arbitrary shaped buildings. In C. Taylor, editor, *Proc. Eighth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 643--654, Pineridge Press, Swansea, 1993.
- [120] M. Rosenfeld, D. Kwak, and M. Vinokur. A fractional step solution method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations in generalized coordinate systems. *J. Comput. Phys.*, 94:102--137, 1991.
- [121] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluides incompressibles*. Springer-Verlag, Mathématiques et Applications, 1998.

- [122] Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856--869, 1986.
- [123] H. Schlichting. *Boundary layer theory*. McGraw Hill, New York, 1969.
- [124] S.G. Saddoughi and S.V. Veeravalli. Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 268:333--372, 1994.
- [125] A. Segal, P. Wesseling, J. van Kan, C.W. Oosterlee, and K. Kassels. Invariant discretization of the incompressible Navier-Stokes equations in boundary fitted coordinates. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 15:411--426, 1992.
- [126] G. Segal, K. Vuik, and K. Kassels. On the implementation of symmetric and antisymmetric periodic boundary conditions for incompressible flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 18:1153--1165, 1994.
- [127] G. Segal, K. Vuik, W. Kuppen, and M. Zijlema. ISNaS - incompressible flow solver. *Mathematical manual. Report 93-96*, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1993.
- [128] C.-W. Shu. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws. *Math. Comput.*, 49:105--121, 1987.
- [129] W. Shyy. A study of finite difference approximations to steady-state, convection-dominated flow problems. *J. Comput. Phys.*, 57:415--438, 1985.
- [130] D. Simonin and M. Barouda. Measurements and predictions of turbulent flow entering a staggered tube bundle. EDF Report H-44/88.25, EDF, Laboratoire National d'Hydraulique, Chatou, France, 1988.
- [131] L.M. Smith and W.C. Reynolds. On the Yaghot-Orszag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models. *Phys. Fluids A*, 4:364--390, 1992.
- [132] R.E. Smith and L.-E. Eriksson. Algebraic grid generation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 64:285--300, 1987.
- [133] R.M. Smith. On the finite-element calculation of turbulent flow using the $k-\varepsilon$ model. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 4:303--319, 1984.
- [134] I.S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis*. Wiley, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [135] D.B. Spalding. A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 4:551--559, 1972.
- [136] S.P. Spekreijse. Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws. *Math. Comput.*, 49:135--155, 1987.
- [137] P.R. Spalart, W.-H. Jou, M. Strelets, and S.R. Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. 1st AFOSR Int. Conf. on DNS/LES, Aug. 4-8, 1997, Ruston, LA. In *Advances in DNS/LES*, C. Liu & Z. Liu Eds., Greyden Press, Columbus, OH.
- [138] C.G. Speziale. On nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 178:459--475, 1987.
- [139] C.G. Speziale. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:107--157, 1991.
- [140] F. Stern, S.Y. Yoo, and V.C. Patel. Interactive and large-domain solutions of higher-order viscous-flow equations. *AIAA J.*, 26:1052--1060, 1988.
- [141] H.L. Stone. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5:530--558, 1968.
- [142] Schiestel R. et Viazzo S., 1995 A Hermitian-Fourier numerical method for solving the incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Computers & Fluids*, 24(6), pp. 739-752.
- [143] P. Tamamidis and D.N. Assanis. Evaluation of various high-order-accuracy schemes with and without flux limiters. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 16:931--948, 1993.
- [144] P. Tamamidis and D.N. Assanis. Three-dimensional incompressible flow calculations with alternative discretization schemes. *Numer. Heat Transfer B*, 24:57--76, 1993.

- [145] H. Tennekes and J.L. Lumley. A first course in turbulence. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983.
- [146] S. Thakur and W. Shyy. Some implementational issues of convection schemes for finite-volume formulations. *Numer. Heat Transfer B*, 24:31--55, 1993.
- [147] J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, and C.W. Mastin. Numerical grid generation, foundations and applications. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [148] M.S. Uberoi and P. Freymuth. Turbulent energy balance and spectra of the axisymmetric wake. *Phys. Fluids*, 13:2205--2210, 1970.
- [149] P. van Beek, R.R.P. van Nooyen, and P. Wesseling. Accurate discretization of gradients on non-uniform curvilinear staggered grids. *J. Comput. Phys.*, 117:364--367, 1995.
- [150] B. van den Berg. A three-dimensional law of the wall for turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 70:149--160, 1975.
- [151] H.A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BiCG for the solution of non symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13:631--644, 1992.
- [152] J.J.I.M. van Kan. A second-order accurate pressure correction method for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:870--891, 1986.
- [153] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comput. Phys.*, 14:361--370, 1974.
- [154] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 32:101--136, 1979.
- [155] B. van Leer. Upwind-difference methods for aerodynamic problems governed by the Euler equations. *Lectures in Appl. Math.*, 22:327--336, 1985.
- [156] Oleg V. Vasilyev and Thomas S. Lund. A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, 1997.
- [157] C.B. Vreugdenhil and B. Koren, editors. Numerical methods for advection-diffusion problems, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1993. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*.
- [158] C. Vuik. Solution of the discretized incompressible Navier-Stokes equations with the GMRES method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 16:507--523, 1993.
- [159] N.P. Waterson and H. Deconinck. A unified approach to the design and application of bounded higher-order convection schemes. In C. Taylor and P. Durbetaki, editors, *Proc. Ninth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 203--214, Pineridge Press, Swansea, 1995.
- [160] P. Wesseling. Large scale modeling in computational fluid dynamics. In E.F. Deprettere and A.-J. van der Veen, editors, *Algorithms and parallel VLSI architectures*, Volume A: Tutorials, pages 277--308, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [161] P. Wesseling. Flow computation in general geometries. *J.M. Burgers Centre Lecture Series "Numerieke Stromingsleer III"*, Delft, june 1994.
- [162] P. Wesseling, C.G.M. Kassels, C.W. Oosterlee, A. Segal, C. Vuik, S. Zeng, and M. Zijlema. Computing incompressible flows in general domains. In F.-K. Hebekker, R. Rannacher, and G. Wittum, editors, *Numerical Methods for the Navier-Stokes equations*, pages 298--314, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1994.
- [163] P. Wesseling, A. Segal, J.J.I.M. van Kan, C.W. Oosterlee, and C.G.M. Kassels. Finite volume discretization of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates on staggered grids. *Comput. Fluid Dyn. J.*, 1:27--33, 1992.
- [164] P. Wesseling, P. van Beek, and R.R.P. van Nooyen. Aspects of non-smoothness in flow computations. In A. Peters, G. Wittum, B. Herrling, U. Meissner, C.A. Brebbia, W.G. Gray, and G.F. Pinder, editors, *Computational Methods in Water Resources X*, pages 1263--1271, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [165] P. Wesseling, M. Zijlema, A. Segal, and C.G.M. Kassels. Computation of turbulent flow in general domains. Report 95-85, Delft University of Technology, Faculty of

- Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1995.
- [166] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.*, 26:1299--1310, 1988.
- [167] D.C. Wilcox. A half century historical review of the $k-\varepsilon$ model. *AIAA Paper 91-0615*, 1991.
- [168] D.C. Wilcox. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, Inc., California, U.S.A., 1993.
- [169] Z.G. Xu, D.H.T. Gotham, and M.W. Collins. Numerical modelling of three dimensional turbulent flow in packaged air-conditioning units with inclined heat exchangers. In C. Taylor, editor, *Proc. Eighth Int. Conf. on Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow*, pages 328--337, Pineridge Press, Swansea, 1993.
- [170] V. Yakhot and S.A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory. *J. Sci. Comput.*, 1:3--51, 1986.
- [171] V. Yakhot, S.A. Orszag, S. Thangam, T.B. Gatski, and C.G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. Fluids A*, 4:1510--1520, 1992.
- [172] V. Yakhot and L.M. Smith. The renormalization group, the ε -expansion and derivation of turbulence models. *J. Sci. Comput.*, 7:35--61, 1992.
- [173] C-N. Yung, T.G. Keith Jr., and K.J. de Witt. Numerical simulation of axisymmetric turbulent flow in combustors and diffusers. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 9:167--183, 1989.
- [174] S.T. Zalesak. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.*, 31:335--362, 1979.
- [175] S. Zeng and P. Wesseling. Multigrid solution of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:1764--1784, 1994.
- [176] J. Zhu. A low-diffusive and oscillation-free convection scheme. *Comm. Appl. Numer. Meth.*, 7:225--232, 1991.
- [177] J. Zhu. On the higher-order bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 98:345--360, 1992.
- [178] J. Zhu and M.A. Leschziner. A local oscillation-damping algorithm for higher order convection schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 67:355--366, 1988.
- [179] J. Zhu and W. Rodi. A low dispersion and bounded convection scheme. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92:87--96, 1991.
- [180] J. Zhu and W. Rodi. Zonal finite-volume computations of incompressible flows. *Comput. Fluids*, 20:411--420, 1991.
- [181] J. Zhu and W. Rodi. Computation of axisymmetric confined jets in a diffuser. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 14:241--251, 1992.
- [182] M. Zijlema. Finite volume discretization of the $k-\varepsilon$ turbulence model in general coordinates. Report 93-90, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1993.
- [183] M. Zijlema. Numerical study of the 2D turbulent flow over a sand dune using standard and RNG $k-\varepsilon$ models and non-orthogonal staggered grids. Report 94-59, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1994.
- [184] M. Zijlema. On the construction of a third-order accurate TVD scheme using Leonard's normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains. Report 94-104, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1994.
- [185] M. Zijlema. On the sensitivity of the results to the numerical approximation of turbulence convective transport in a $k-\varepsilon$ turbulence model. Report 95-06, Delft University of

Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1995.

[186] M. Zijlema. On the construction of a third-order accurate monotone convection scheme with application to turbulent flows in general domains. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 22:619--641, 1996.

[187] M. Zijlema, C.G.M. Kassels, A. Segal, and P. Wesseling. Computation of turbulent flows in boundary-fitted coordinates. In R.W.J. Kouffeld and C.J. Hoogendoorn, editors, *Annual Report of J.M. Burgers Centre for Fluid Mechanics*, pages 20--21, Delft, 1994.

[188] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Finite volume computation of 2D incompressible turbulent flows in general coordinates on staggered grids. Report 94-24, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1994.

[189] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Finite volume computation of incompressible turbulent flows in general coordinates on staggered grids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 20:621--640, 1995.

[190] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Invariant discretization of the $k-\varepsilon$ model in general co-ordinates for prediction of turbulent flow in complicated geometries. *Comput. Fluids*, 24:209--225, 1995.