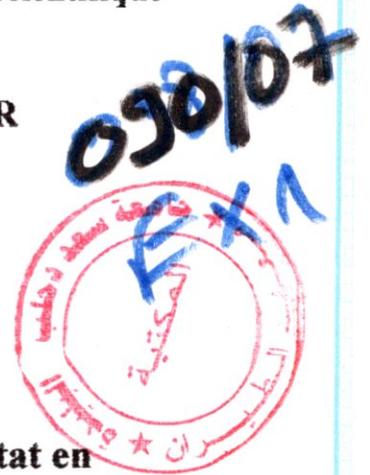


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et De La Recherche scientifique

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR



**Projet de fin d'études**  
En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en  
Aéronautique  
Option : installation

*Thème*

**Implantation du calcul de la position GPS sur  
circuit intégré**

Réalisé par :

**BOUADJADJA ZAKIA  
BOUREDJOUANE AZIZA**

Membre du jury :

**M : BOUNATIRO LOTH  
M : RAHIM MOHAMED  
Mm : BENCIKH SALIHA**

Encadré par :

**M : K. BENACHENHOU**

**Promotion 2006-2007**

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et De La Recherche scientifique

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR



1974 B

**Projet de fin d'études**  
En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en  
Aéronautique  
Option : installation

*Thème*

**Implantation du calcul de la position GPS sur  
circuit intégré**

Réalisé par :

**BOUADJADJA ZAKIA  
BOUREDJOUANE AZIZA**

Membre du jury :

**M : BOUNATIRO LOTH  
M : RAHIM MOHAMED  
Mm : BENCIKH SALIHA**

Encadré par :

**M : K. BENACHENHOU**



# remerciments

## remerciments

---

*Nous remercions tout d'abord Dieu tout puissant tout clément qui nous a aidé à élaborer ce modeste travail et aboutir à ce niveau d'étude.*

*Nous tenons à remercier notre promotrice M. BENACHENHOU Pour tout son appui mais aussi pour sa grande richesse scientifique et humaine qu'elle nous a fait partagée durant ces mois et qui sans lesquels nous pourrions achever ce travail aussi rapidement.*

*Nous remercions tous les enseignants du Département d'aéronautique de Blida qui nous ont très bien encadré pendant nos trois années de spécialisation et tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de notre projet*

*Enfin, nous remercions très chaleureusement tous ceux qui nous ont chers :*

*Nos amis et tous ceux qui ont été là pour nous soutenir et nous encourager*

# dédicaces

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents qui m'ont toujours aidé et veiller sur moi durant toute ma vie.*

*A mes chers frères et mes chères sœurs.*

*A tous les membres des familles : Bouredjouane, Tchina, Djebli, touti et Bouzid.*

*A ma meilleure binôme Zakia et mes amis (es) surtout Amina, Samira, Nacira, Nora, Abd'El Aziz, Fateh, Fouzia, Zahra, , Lamia, Akila et Nacima.*

*AZIZA*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents qui m'ont toujours aidé et veiller sur moi durant toute ma vie.*

*A mon grand père et ma grand mère.*

*A mes chers frères et mes chères sœurs.*

*A tous les membres des familles : Bouadjadja et Zikara.*

*A ma meilleure binôme Aziza et mes amis (es).*

*ZAKIA*

# TABLE DES MATIERES

## RESUMES

## LISTE DES FIGURES

## LISTE DES SYMBOLES

## LISTE DES ABREVIATIONS

## INTRODUCTION GENERALE

### I. GENERALITES SUR LE SYSTEME GPS

I.1. Introduction.....	8
I.2. Historique.....	8
I.3. Principe du GPS .....	9
I.4. Description du système GPS.....	11
I.4.1. Le segment spatial.....	11
I.4.1.a. La constellation spatial.....	11
I.4.1.b. les différents types de satellite.....	12
I.4.1.c. Identification des satellites.....	14
I.4.2. Le segment de contrôle .....	14
I.4.3. Le segment utilisateurs.....	15
I.4.3.a. Le service SPS (Standard Positioning Service).....	16
I.4.3.b. Le service PPS (Précise positioning Service).....	16
I.5. Le structure des signaux GPS.....	16
I.6. Création du signal .....	18
I.6.1. Construction des codes de Gold .....	19
I.6.2. La génération du code C/A .....	19
I.7. Le message de navigation .....	21
I.8. Les récepteurs GPS (Global Positioning System).....	23
I.9. Traitements du signal GPS .....	25
I.9.1. L'acquisition .....	25
I.9.2. La poursuite .....	25
I.9.3. Extraction des données de navigation .....	25
I.10. Les applications.....	26

### II. CALCULE DE POSITIONNEMENT

II.1. Introduction.....	30
II.2. Le principe du positionnement GPS.....	30
II.3. Les systèmes de coordonnées de référence .....	32
II.3.1. Système de coordonnée inertiel centré sur la terre (ECI).....	32
II.3.2. Système de coordonnée centré et fixé par rapport à la terre (ECEF).....	32
II.3.3. Système de coordonnée géodésique.....	33
II.4. Détermination des orbites des satellites.....	37
II.5. La transformation du plan orbital du satellite au plan équatorial.....	39
II.6. Rotation de la terre.....	41
II.7. Perturbations .....	44
II.8. La correction du temps du système GPS au temps de transmission.....	46
II.9. Calcul de la position du satellite.....	47
II.10. Calcul de la position du récepteur.....	49

II.11. Les données d'éphéméride.....	51
<b>III. CALCUL DE POSITIONNEMENT SOUS VHDL</b>	
III.1. Introduction .....	54
III.2. Le langage VHDL.....	54
III.2.1. Historique.....	54
III.2.2. Choix de ce langage.....	55
III.2.3. Description du langage VHDL.....	55
III.2.3.1. Les différentes descriptions possibles.....	55
III.2.3.2. La structure fondamentale d'un modèle VHDL.....	56
III.2.3.3. Les signaux.....	59
III.2.3.4. Le processus.....	59
III.3. L'équation de positionnement.....	59
III.4. Simulations et résultats.....	65
III.5. Vérification 1.....	67
III.5. Vérification 2.....	70
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>74</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>76</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	

## ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو زرع برنامج باستخدام VHDL يسمح لنا بحساب موقع مستقبل GPS وذلك اعتمادا على نظام معادلات و هذا بغرض انجاز دارة مختصرة باستخدام برنامج xilinx في هذا العمل نبدأ بإعطاء فكرة عامة حول GPS ثم نفصل عملية حساب الموقع و أخيرا التمثيل الرياضي يسمح لنا بتكليف معادلات البرنامج VHDL. النتائج المحصل عليها نقوم بتقويمها و مراجعتها باستخدام برنامج Matlab .

## Résumé

L'objectif de ce travail est d'implémenter un programme sous VHDL permettant de calculer la position d'un récepteur GPS à partir du système d'équations associé. Ceci est dans le but de réaliser un circuit intégré à l'aide du logiciel Xilinx.

Dans ce contexte, nous donnons en premier lieu une idée générale sur le système GPS, puis nous exposons en détail le calcul de position. Finalement, une modélisation mathématique permettant d'adapter les équations au langage VHDL sera présentée. Les résultats obtenus seront analysés et vérifiés à l'aide du logiciel Matlab.

## Abstract

The goal of this work is to implement a VHDL program to compute a GPS receiver position. This is with the aim to realize a processor under Xilinx software.

In this context, we give at first a general idea about GPS system, than we expose the computation of position in detailed manner. Finally, we present a mathematical model to adapt position equation to VHDL. The obtained results are analysed and verified with Matlab.

## LISTE DES FIGURES

### Chapitre I

Figure.I.1: circulation de l'information.....	10
Figure.I.2: Position du récepteur.....	11
Figure.I.3: Le segment spatial.....	12
Figure.I.4: Le bloc IIA.....	13
Figure.I.5: Le bloc IIR.....	13
Figure.I.6: Le segment de contrôle.....	15
Figure.I.7: Le segment utilisateur.....	15
Figure.I.8: Structure de signal GPS.....	17
Figure.I.9: Construction d'un signal GPS.....	18
Figure.I.10: La génération du code C/A.....	19
Figure.I.11: Organisation et structure du message de navigation.....	22
Figure.I.12: Récepteur GPS.....	23

### Chapitre II

Figure.II.1: La position du récepteur.....	31
Figure.II.2: Système de coordonnées ECI.....	32
Figure.II.3: Système de coordonnées ECEF.....	33
Figure.II.4: Modèle elliptique de la terre.....	34
Figure.II.5: Les trois éléments orbitaux définissant la forme de l'orbite du satellite.....	38
Figure.II.6: Eléments orbitaux définissant l'orientation de l'orbite du satellite.....	38
Figure.II.7: Plan orbital.....	39
Figure.II.8: Plan Equatorial de la terre et le plan orbital.....	40
Figure.II.9: Rotation de la terre.....	42
Figure.II.10: L'utilisation du trois positions connues pour trouver une position Inconnue.....	50

### Chapitre III

Figure.III. 1: L'organisation d'un modèle VHDL.....	57
Figure.III. 2: Structure d'un fichier VHDL.....	58
Figure.III.3: Les positions des satellites.....	66
Figure.III.4 : La position du récepteur.....	68
Figure.III.5. Les positions des satellites.....	69
Figure.III.6: La position du récepteur.....	71
Figure.III.7: circuit intégré.....	72

## LISTE DES SYMBOLES

Symbole	Définition
$e$	L' excentricité
$f$	L'aplatissement de l'ellipse
$\lambda$	Latitude
$\phi$	Longitude
$h$	Altitude
$t$	Temps du GPS
$a_s$	demi grand axe de l'orbite du satellite
$M$	L'anomalie moyenne
$e_s$	Excentricité de l'orbite du satellite
$i$	L'angle d'inclination
$\omega$	Argument du périégée
$\Omega - \alpha$	L'angle de l'ascension modifié
$V$	L'anomalie vraie
$t_{oe}$	Le temps de la référence
$\Omega$	Le taux de variation de l'ascension
$M_0$	L'anomalie moyenne au temps de la référence
$r$	La distance satellite/récepteur
$\delta r$	La correction de la distance
$\delta i$	La correction d'inclination $i$
$t_r$	Temps de réception
$\rho_i$	La pseudo distance du satellite $i$ au récepteur
$C$	La célérité de la lumière
$\mu$	Paramètre gravitationnel universel de la terre
$E$	L'anomalie excentrique
$\Delta t_r$	Terme de la correction relativiste
$\Omega_{ie}$	Le taux de variation de rotation de la terre
$t_t$	Le temps du passage du satellite et la position

## LISTE DES ABREVIATIONS

<b>Symboles</b>	<b>Abréviations</b>
AS	Antispoofing
Bloc IIF	Follow-On
C/A	Coarse / Acquisition
CS	Commercial Service
DOD	Department Of Defense
ECE	Earth-Centred Inertiel
ECEF	Earth- Centred Earth-fixed
GPS	Global Position System
HOM	Handover Word
NAVSTAR	Navigation System by Timing And Ranging
PDOP	Position Dilution Of Précision
P. Code	Precise code
PRS	Public Regulated service
PPS	Précise Positioning Service
PRN	Pseudo Random Noise
RF	Radiofréquence
SV	Satellite Véhicule
SPS	Standard Positioning Service
SA	Sélective Availability
TLM	Telemetry Word
USDoD	Ministre de la défense
UTC	Universal Time Coordinated
VHDL	VHSIC Hardware Description Language)
WGS84	World Geodetic system 1984

---

# Introduction générale

---

## INTRODUCTION GENERALE

Dans le cadre du projet de fin d'études, nous avons choisi de réaliser une implantation d'un circuit numérique permettant de calculer la position GPS sous VHDL.

Pour ce faire, ce travail sera organisé autour de trois chapitres comme suit :

- Le premier chapitre introduit le sujet en présentant le système GPS.
- Le deuxième chapitre présente une étude détaillée du calcul de la position des satellites suivi d'une formulation mathématique de l'équation de positionnement du récepteur.
- Le troisième chapitre est consacré à une modélisation mathématique permettant d'adapter les équations de positionnement au langage VHDL. Une implémentation sous Xilinx sera présentée.
- Enfin, une conclusion générale.

---

# Chapitre I

## Généralités sur le Système GPS

---

## I.1. Introduction

Le système NAVSTAR (navigation System by Timing And Ranging), aussi appelé GPS (*Global Positioning System*) est un système de positionnement par satellites créé par l'armée américaine dans le contexte de la Guerre Froide.

Il a été développé en vue du remplacement du système de positionnement Transit qui présentait deux limitations importantes : la première étant une couverture satellitaire insuffisante amenant une disponibilité réduite, la deuxième étant une faible précision en navigation.

Le système GPS répond donc aux questions « Quelle est la position, quelle est la vitesse, quelle est l'heure ? » et ce rapidement, avec précision, à peu de frais, n'importe où et n'importe quand sur la terre ou dans son voisinage.

Les spécifications initiales sont d'avoir accès à une position absolue dans un système de référence mondial, avec une précision de 20 mètres, et au temps, avec la précision de la microseconde. Actuellement, le système permet de se positionner en absolu à quelques mètres près et en relatif jusqu'à quelques millimètres près, à un instant daté avec précision.

Le système GPS a été conçu au départ pour des applications militaires, mais sous les directives du Congrès américain, le DoD a favorisé son utilisation pour des applications civiles, pour devenir actuellement un système dual civil et militaire

## I.2. Historique

Le système américain GPS (Global positioning system) est un système de radio positionnement par satellite. Il a été développé par l'armée américaine, à partir de 1973 pour ses besoins propres. Il remplace le système TRANSIT qui fut développé à la fin des années 50 et opérationnel jusqu'au milieu des années 80.

Les spécifications de départ en terme de localisation sont les suivantes :

- ❖ La position et la vitesse d'un mobile, à tout instant, en tout endroit et dans un système de référence mondial (appelé WGS84) avec une précision inférieure à 10m.

❖ Le temps à une microseconde près dans l'échelle de temps GPS qui a été défini à partir de l'UTC. Au 5 janvier 1980 à minuit,  $T_{GPS}=T_{UTC}$ . Par contre le temps GPS est linéaire, on a donc aujourd'hui en 2000 un décalage entre les temps GPS et UTC de 19 secondes pleines ( $T_{UTC}=T_{GPS}-19s$ ).

De plus sa conception militaire a imposé des contraintes supplémentaires :

- Invulnérabilité du système (satellites en orbites hautes).
- Facilité d'emploi sur le terrain et récepteur indétectable. Pour cela le système est descendant, les satellites transmettent toute l'information nécessaire pour se positionner et les récepteurs sont passifs.

Autre avantage de cette conception, le nombre d'utilisateurs est illimité et anonyme. Il suffit de posséder un récepteur pour obtenir sa position. Les principales phases de développement sont les suivantes :

**1973-1978** : mise au point du concept, lancement des appels d'offres

**1978-1985** : phase pré-opérationnelle avec lancement de 11 satellites du block I

**1989-1997** : lancement de 28 satellites du block IIIR de la phase opérationnelle.

**Février 1994** : le congrès américain le déclare opérationnel.

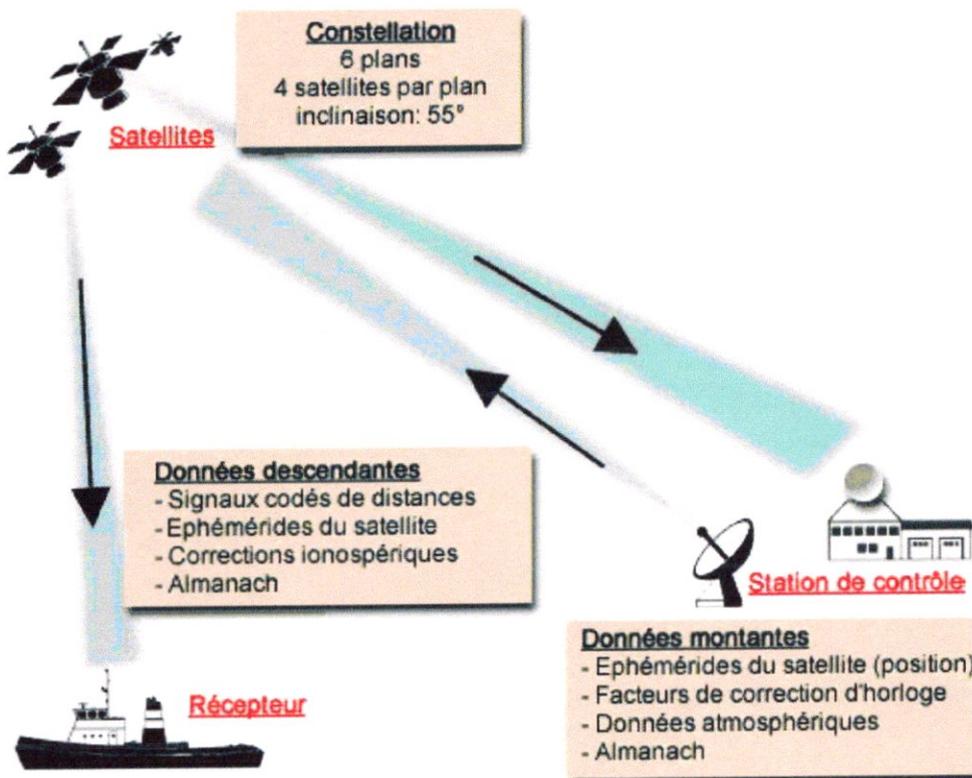
Les possibilités offertes en terme de localisation ont fait que la communauté civile scientifique s'est intéressée très rapidement à lui, dès le début des années 80. Il est aujourd'hui sous le contrôle du département de la défense (DoD) pour les parties, construction des satellite, lancement, contrôle et maintenance. Mais le congrès américain a décidé de développer les utilisations civiles du GPS. En particulier les américains voudraient imposer le système GPS comme seul mode de navigation pour l'aviation civile.

### **I.3.Principe du GPS**

GPS est un système de positionnement à échelle mondiale est une révolution pour la navigation. C'est une technologie qui permet de localiser la position de l'utilisateur, n'importe où dans le monde, 24 heures sur 24, quelle que soit la météo. Conçu par le Ministère de la Défense des Etats Unis d'Amérique pour un usage militaire, le système a été rendu accessible aux civils, pour un emploi dans l'aviation, la marine et pour les marchés généraux des activités d'extérieur et de loisirs. Aujourd'hui, des millions de personnes utilisent la précision et la commodité de cette technologie pour pêcher,

chasser, randonner, voler, naviguer. Le GPS consiste en une constellation de 24 satellites qui orbitent à environ 20 000 Kms de la terre.

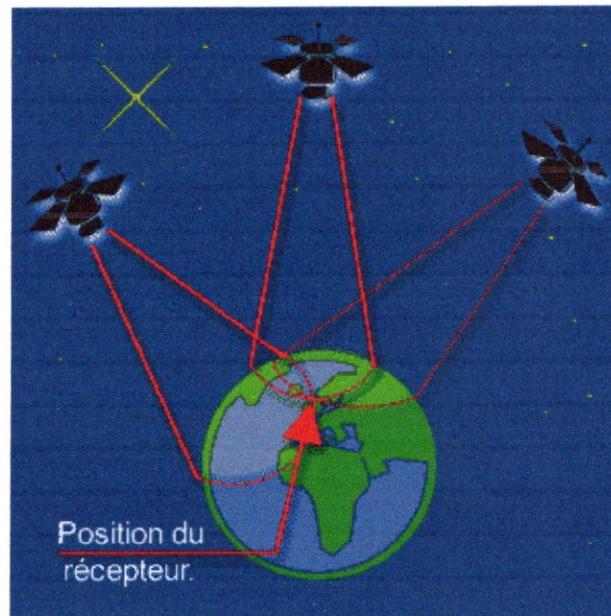
Les satellites GPS envoient des signaux contenant les données d'heure, d'orbites et les données d'almanach. Les récepteurs (au sol, en mer et dans les airs) reçoivent les signaux des satellites et calculent leur position au moyen de ces informations.



**Figure.I.1 :** Circulation de l'information

Le récepteur GPS a besoin d'au moins trois satellites pour pouvoir déterminer une position en 2D (X, Y) à la surface de la terre. Un quatrième satellite est nécessaire pour obtenir une position en 3D (X, Y, Z) qui détermine la hauteur ou l'altitude.

L'initialisation est indispensable pour que le GPS puisse calculer sa position. Lors de la première initialisation, il faut compter 5 minutes environ.



**Figure.I.2** : Position du récepteur

#### **I.4.Description du système GPS**

Le système est composé de trois secteurs :

- Le secteur spatial qui est constitué d'un ensemble de satellites.
- Le secteur de contrôle qui permet de piloter et de surveiller le système.
- Le secteur utilisateur qui est l'ensemble des utilisateurs civiles et militaires du système.

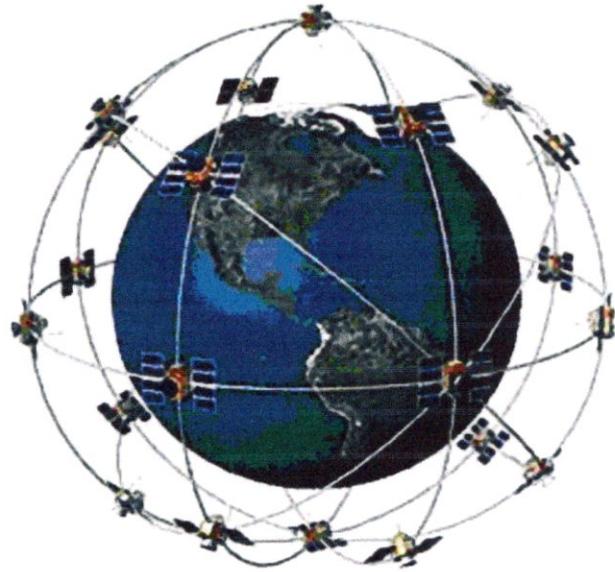
##### **I.4.1.Le segment spatial**

###### **I.4.1.a.La constellation spatial**

Le segment spatial est composé d'un réseau de 28 satellites en orbite quasi-circulaire autour de la terre ils se déplacent sur 6 plans orbitaux, à environ 20000 km d'altitude et dont la période de révolution est de 12 heures sidérales. Ces satellites sont répartis sur 6 plans orbitaux inclinés à  $55^\circ$  par rapport à l'équateur.

La constellation GPS a été conçue de telle manière que, partout sur Terre et à tout moment, un minimum de quatre satellites soient visibles au dessus de  $15^\circ$  d'élévation.

Un satellite décrit une orbite en une demi journée sidérale. Un observateur terrestre qui observe un satellite en particulier, le voit toutes les 23 heures 58 minutes au même endroit du fait de la différence entre la période de rotation de la terre.



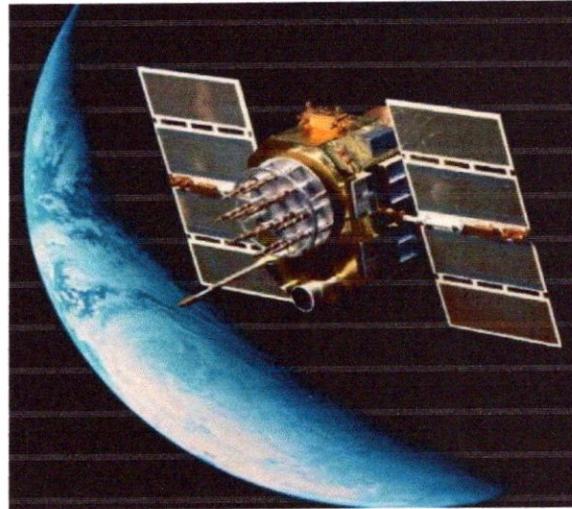
**Figure.I.3** : Le segment spatial

#### **I.4.1.b.les différents types de satellite**

Il existe trois catégories de satellites GPS:

**Bloc I** : 11 satellites mis en orbite entre 1978 et 1985. Fabriqués par Rockwell International, ils étaient prévus pour une mission moyenne de 4,5 ans et une durée de vie de 5 ans, mais leur durée de vie moyenne s'éleva à 8,76 années ; l'un d'entre eux est même resté pendant 10ans en activité. Leur mission principale était de valider les différents concepts du système GPS. Aujourd'hui, plus aucun satellite du Bloc I n'est encore en service.

**Bloc II** : C'est les premiers satellites opérationnels du système GPS. De nombreuses améliorations ont été apportées à ces satellites par rapport à la version précédente, notamment en ce qui concerne leur autonomie. Ils sont capables de rester 14 jours sans contact avec le segment sol tout en gardant une précision suffisante. Neuf satellites furent lancés en 1989 et 1990. Bien qu'on ait estimé leur durée de vie à 7,5 ans, la plupart d'entre eux sont restés en fonction pendant plus de dix ans. Il ne reste plus aujourd'hui aucun satellite du Bloc II actif.



**Figure.I.4:** Le bloc IIA



**Figure.I.5:** Le bloc IIR

**Bloc IIA :** Lancés à partir de 1990, ils correspondent à une version perfectionnée des satellites du Bloc II Initial: ils ont été équipés pour fonctionner en mode dégradé pour les civils. Ils sont équipés de 2 horloges atomiques au césium et 2 horloges au rubidium. Ils ont marqué à partir de 1993 le début de la phase opérationnelle du GPS. Actuellement 15 satellites du Bloc IIA sont actifs.

**Bloc IIR :** Dotés d'une meilleure autonomie, ces satellites mis en orbite à partir de 1996 peuvent se transmettre mutuellement des messages sans aucun contact au sol, permettant ainsi aux opérateurs du système de pouvoir communiquer avec des engins qui leurs sont inaccessibles dans une communication directe. Ils sont équipés de 3 horloges atomiques au rubidium. Quinze satellites du Bloc IIR ont été lancés, le dernier le 17 Novembre 2006; tous sont actifs. Les trois derniers sont désignés sous le sigle IIR-M parce qu'ils émettent un nouveau code civil (L2C) et un nouveau code militaire (M).

**Bloc IIF :** Les satellites Bloc IIF (Follow-On) construits par Boeing seront lancés dès 2007. Le programme vise à atteindre ainsi une constellation de 33 satellites.

**Bloc III :** Les satellites du Block III sont encore en phase de développement et ont pour but de faire perdurer le GPS jusqu'en 2030.

#### **I.4.1.c. Identification des satellites**

On va citer deux numérotation les plus utiliser :

- 🚦 Numérotation Séquentielle dans l'ordre de lancement SV (Satellite Véhicule), numéro lié au plan d'orbite et à la position sur l'orbite.
- 🚦 Numérotation PRN (Pseudo Random Noise) donnée pour les codes, numéro dans le catalogue de la NASA et numérotation internationale. Le numéro PRN est celui qui est généralement utilisé car il est fourni aux utilisateurs dans le message de navigation.

#### **I.4.2. Le segment de contrôle**

Le segment de contrôle au sol gère en permanence le système de satellites. Il compte cinq stations de poursuite réparties tout autour de la terre, dont l'une, située à Colorado Springs, constitue la station maîtresse. Ce segment de contrôle suit tous les satellites, veille à ce qu'ils fonctionnent adéquatement et calcule leurs positions dans l'espace.

Chaque station est capable de :

- ✱ Recevoir des données du satellite.
- ✱ Calculer des éphémérides (données orbitales).
- ✱ Corriger l'horloge.
- ✱ Contrôler les satellites.
- ✱ Echanger des données avec les autres stations.
- ✱ Transmettre au satellite les corrections qu'il doit adopter.

Si un satellite ne fonctionne pas correctement, le segment de contrôle au sol peut le déclarer «hors d'état de marche» et adopter les mesures nécessaires pour corriger le problème.

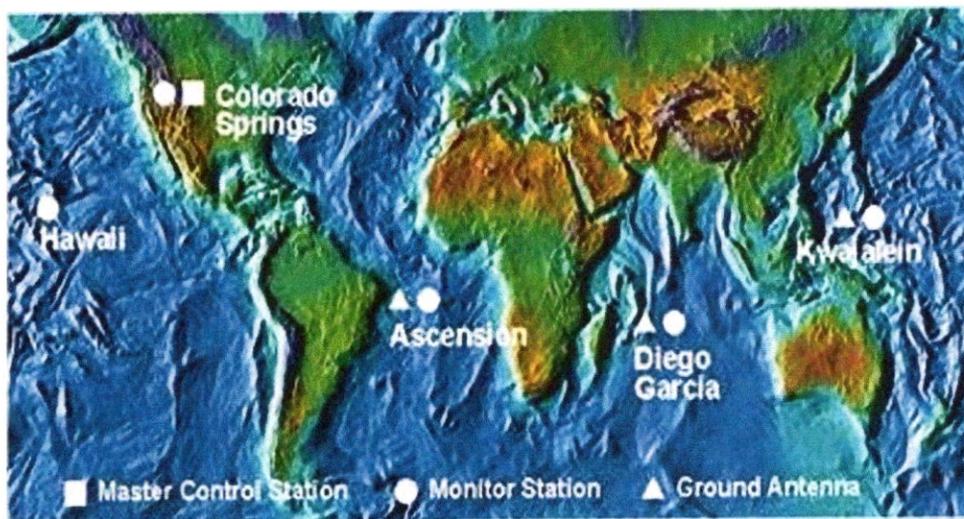


Figure.I.6: Le segment de contrôle

#### I.4.3. Le segment utilisateurs

Le segment utilisateur est constitué de récepteurs qui ont été conçus afin de décoder le signal transmis par les satellites pour déterminer la position, la vitesse et le temps de l'utilisateur.

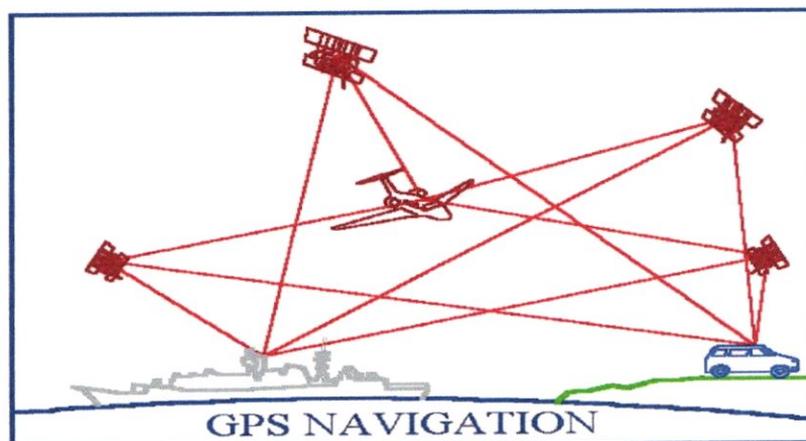


Figure.I.7: Le segment utilisateur

En mode navigation (souvent appelé "mode naturel"), on distingue deux types de service :

#### **I.4.3.a. Le service SPS (Standard Positioning Service)**

Tous les utilisateurs disposant d'un récepteur GPS y ont accès. Ce mode est gratuit et anonyme, les propriétaires du système n'ont actuellement aucune possibilité de connaître le nombre d'utilisateurs ou de les identifier. Par contre les utilisateurs sont soumis aux dégradations volontaires du signal. Deux types de dégradations existent :

- **la SA (Disponibilité Sélective)** accès sélectif qui consiste à dégrader les performances nominales du système et qui n'est plus active de puis le 2 mai 2000.
- **L'AS (antispoofing)** qui consiste à rendre inconnu une partie des informations transmises afin qu'elles ne puissent être reproduites. Concrètement, le code P originel est remplacé par le code Y inconnu.

#### **I.4.3.b. Le service PPS (Précise positioning Service)**

Il est réservé aux militaires des Etats-Unis et à leurs alliés et consiste en l'utilisation de clés de décodage permettant d'éliminer les dégradations volontaires (SA et AS). Presque tous les appareils de poursuite GPS se composent des mêmes éléments de base: une antenne, une section R.F. (radiofréquence), un microprocesseur, un panneau de Commande et d'affichage (CDU), un enregistreur et un bloc d'alimentation. Ces composantes peuvent prendre la forme d'unités distinctes, être intégrées en une seule unité ou être partiellement intégrées.

### **I.5. Le Structure de signaux GPS**

La stabilité des signaux GPS est assurée grâce aux plusieurs horloges atomiques sur chaque satellite. La précision des horloges internes est de l'ordre de  $10^{-12}$  à  $10^{-13}$  sur un jour.

Pour l'ensemble des satellites la fréquence fondamentale est  $f_0=10,23$  Mhz. A partir de la fréquence fondamentale, chaque satellite génère deux ondes porteuses qui seront modulées par des codes pseudo aléatoires et qui seront transmis en direction de la terre. Ce sont ces ondes ainsi que les informations qu'ils véhiculent qui permettront de se positionner.

Les satellites émettent des signaux vers la terre sur deux bandes de fréquences .La première, L1, de fréquence 1575.42MHZ, est réservée pour le message de navigation et

les signaux du code SPS, alors que la deuxième, L2, de fréquence 1227.60MHz, est utilisée pour mesurer le temps de retard dû à la ionosphère pour les récepteurs travaillant en PPS.

Le signal est modulé en modulation de phase BPSK, et il est composé d'un :

-Le **code C/A** (Coarse Acquisition) module la porteuse L1. Ce code est un code pseudo aléatoire répétitif de 1 MHz (Pseudo Random Noise Code). Chaque satellite possède un code pseudo aléatoire différent. Il sert de base pour le système de mesure SPS. Le code C/A permet une localisation plus rapide, mais moins précise; il est de plus accessible à tous.

-Le **code P** est une série pseudo aléatoire de période 267 jours et de fréquence  $f_0=10,23$  Mhz. Il est modulé sur les deux fréquences L1 et L2. Afin de ne pas se faire leurrer, les militaires américains ont remplacé le code P par le code Y. Les caractéristiques de code P ou Y sont inconnues et il est donc impossible de le reproduire. Ce code n'est accessible qu'aux utilisateurs possédant des clés de décryptage comme l'armée américaine et certains de ses alliés.

-Le **message de navigation** module également le code C/A sur la porteuse L1. Ce message est un signal de 50 Hz constitué de bits de données décrivant les orbites du satellite GPS, les corrections de son horloge, ainsi que d'autres paramètres système.

La figure suivante montre la formation des différentes fréquences à partir de la fréquence fondamentale :

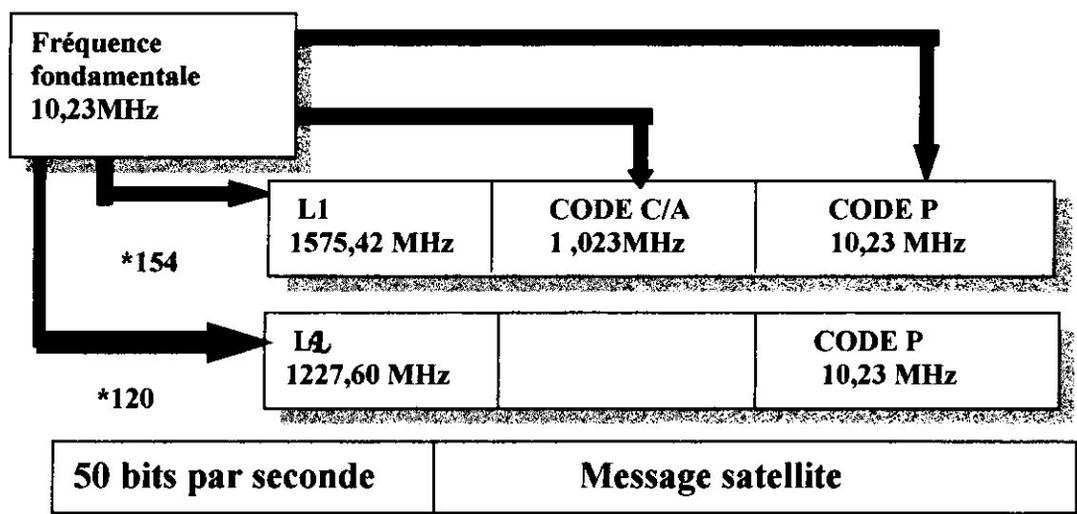


Figure.I.8: Structure de signal GPS

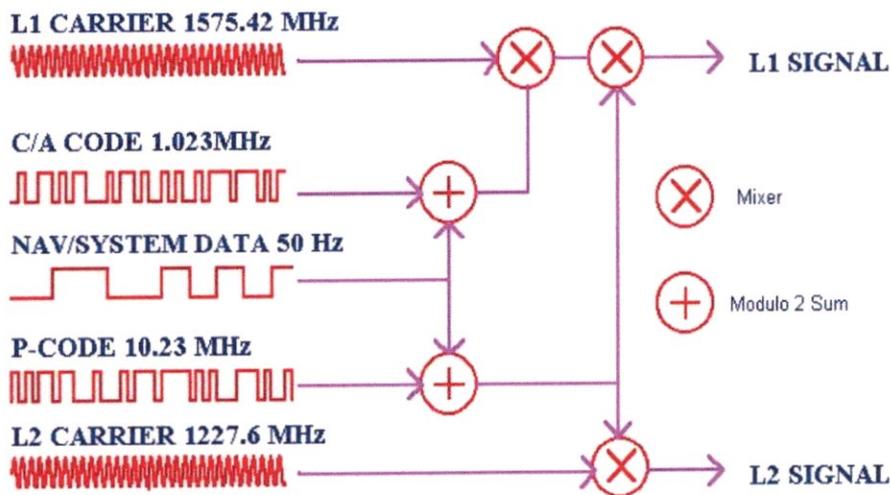
**I.6. Création du signal**

Afin de créer le signal GPS, on réalise en premier lieu une addition modulo 2 entre le message de navigation et le code choisi (P ou C/A), le signal résultant sera numérisé puis multiplié par la porteuse L1, par conséquent cette dernière est modulée en phase par le signal  $P \oplus D$  et en quadrature par le signal  $C/A \oplus D$  (où  $\oplus$  représente l'opérateur XOR). La porteuse L2 est simplement modulée en phase par le signal  $P \oplus D$ . La figure (I.9) illustre le processus de génération du signal GPS. Si on examine ce synoptique de gauche vers la droite, on constate que l'horloge de base ( $f_0 = 10,23$ ) est multiplié par 154 et 120 afin de générer les deux porteuses L1 et L2. Le générateur de données génère le message de navigation tandis que le générateur de code génère le code associé au satellite. C'est deux codes sont combinés a travers une addition modulo 2 et le signal résultant sera numérisé puis multiplié par la porteuse L1, sur cette porteuse modulée en BPSK on note que le code C/A est en quadrature par rapport au code P, au contraire sur la porteuse L2 on ne trouve que le code P. En résumé, le signal ainsi réalisé est donné sous la forme suivante:

$$S_1 = A_p(P \oplus D)(t) \cdot \cos(2\pi.L_1.t + \Phi) + A_c(C/A \oplus D)(t) \cdot \sin(2\pi.L_1.t + \Phi)$$

$$S_2 = B_p(P \oplus D)(t) \cdot \cos(2\pi.L_2.t + \Phi)$$

Où  $A_p$ ,  $A_c$  et  $B_p$  correspondent aux niveaux de sortie des signaux,  $\Phi$  représente les imperfections de l'oscillateur, et où  $(P \oplus D)(t)$  et  $(C/A \oplus D)(t)$  prennent les valeurs '1' ou '-1'.



**Figure.I.9:** Construction d'un signal GPS

### I.6.1. Construction des codes de Gold

Les caractéristiques du code de C/A sont définies ci-dessous en termes de sa structure et la contre réaction employée pour le produire. On note que chaque satellite possède son propre code, il y a 37 codes réservés au système GPS qui est actuellement composé de 27 satellites. Le récepteur à son tour doit générer un nombre de code égal au nombre des canaux disponibles, généralement douze.

### I.6.2. La génération du code C/A

Le code C/A (Coarse/Acquisition) est un code relativement court de 1023 bits et d'une milliseconde de période, il est généré à 1.023 Mhz, on note que c'est un code de Gold qui est retenu grâce à ces propriétés de corrélation, ce qui autorise le multiple accès sur une seule fréquence car chaque satellite émet sur les fréquences L1 et L2 et la sélection se fait uniquement par le code.

La figure (I.10) montre un synoptique simplifié de la génération du code C/A. les deux registres à décalage de 10 étages sont cadencés à 1.023 Mhz, pratiquement le décalage est réalisé par deux multiplexeurs sélectionnant deux sorties du registre G2. Ces deux sorties sont additionnées modulo 2 avant d'être à leur tour additionnées à la sortie du registre G1. On note que le vecteur d'initialisation des registres G1 et G2 est '1111111111'.

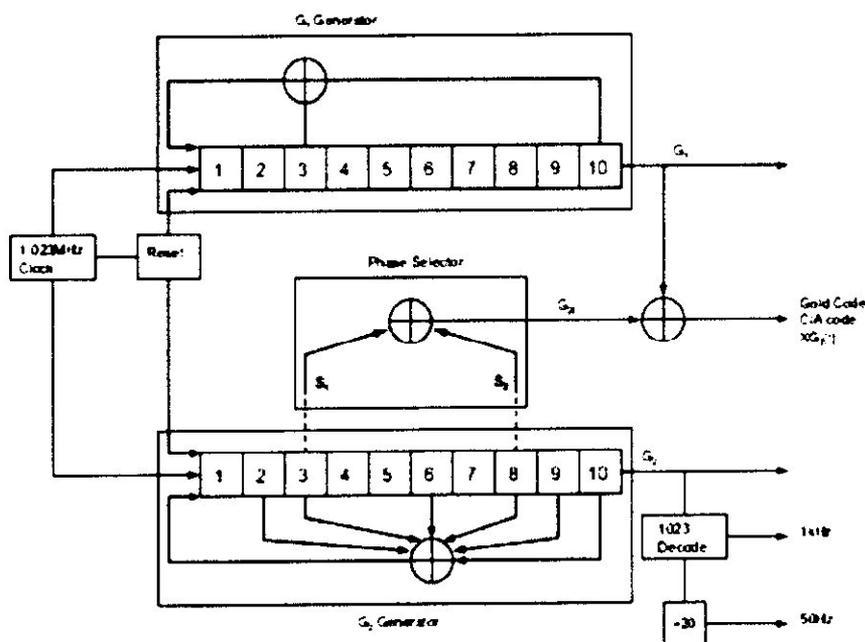


Figure.I.10: La génération du code C/A

N <sup>o</sup> ID Du satellite	N <sup>o</sup> PRN en GPS	Sélection du code phase	10 1 <sup>er</sup> chips octal
1	1	2 ⊕ 6	1440
2	2	3 ⊕ 7	1620
3	3	4 ⊕ 8	1710
4	4	5 ⊕ 9	1744
5	5	1 ⊕ 9	1133
6	6	2 ⊕ 10	1455
7	7	1 ⊕ 8	1131
8	8	2 ⊕ 9	1454
9	9	3 ⊕ 10	1626
10	10	2 ⊕ 3	1504
11	11	3 ⊕ 4	1642
12	12	5 ⊕ 6	1750
13	13	6 ⊕ 7	1764
14	14	7 ⊕ 8	1772
15	15	8 ⊕ 9	1775
16	16	9 ⊕ 10	1776
17	17	1 ⊕ 4	1156
18	18	2 ⊕ 5	1467
19	19	3 ⊕ 6	1633
20	20	4 ⊕ 7	1715
21	21	5 ⊕ 8	1746
22	22	6 ⊕ 9	1763
23	23	1 ⊕ 3	1063
24	24	4 ⊕ 6	1706
25	25	5 ⊕ 7	1743
26	26	6 ⊕ 8	1761
27	27	7 ⊕ 9	1770
28	28	8 ⊕ 10	1774
29	29	1 ⊕ 6	1127
30	30	2 ⊕ 7	1453
31	31	3 ⊕ 8	1625
32	32	4 ⊕ 9	1712
***	33	5 ⊕ 10	1745
***	34**	4 ⊕ 10	1713
***	35	1 ⊕ 7	1134
***	36	2 ⊕ 8	1456
***	37**	4 ⊕ 10	1713

Tableau.I.1: Les différentes combinaisons spécifiques pour chaque PRN

### I.7. Le message de navigation

Le message de navigation contient les informations suivantes :

- ✚ Une indication de temps, la semaine GPS et la date de synchronisation de l'horloge interne des récepteurs.
- ✚ Les corrections d'horloge du satellite, qui permettent de convertir le temps satellite dans l'échelle de temps GPS à l'aide d'un polynôme d'ordre 2.
- ✚ Les éphémérides du satellite.
- ✚ Un modèle mondial d'ionosphère.
- ✚ La différence entre UTC et le temps GPS.
- ✚ Les almanachs de l'ensemble des satellites opérationnels : Ces derniers sont des éphémérides et des corrections d'horloges dégradées. Les récepteurs les utilisent pour connaître approximativement la position des satellites dans le ciel, ce qui leur permet de les capter plus facilement et plus rapidement. Ils sont aussi utilisés par les logiciels pour les prédictions de passages de satellites en un lieu donné.

Les informations spécifiques à chaque satellite, comme les corrections d'horloge et les éphémérides des satellites, sont transmises en totalité toutes les 30 secondes sur une période de 18 secondes.

Le message de navigation est, quant à lui, transmis dans sa totalité en 12 minutes et 30 secondes.

Il se compose de 25 trames de 1500 bits d'information à la fréquence de 50 Hz. chaque trame est donc émise en 30 secondes. Chaque trame est divisée en 5 sous trames de 300 bits chacune, émise en 6 secondes, les sous trames non grisées contiennent les informations spécifiques au satellite sont répétées dans toutes les trames.

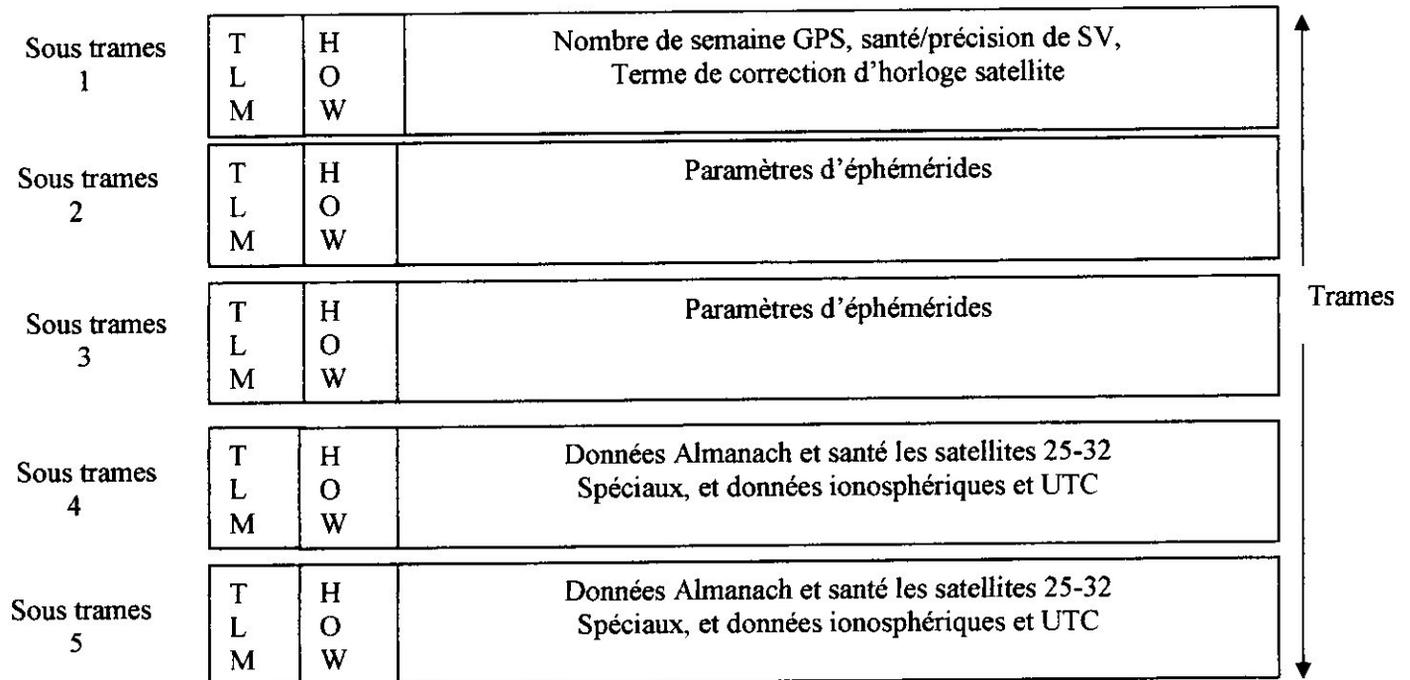


Figure. I.11: Organisation et structure du message de navigation

Les sous trames commencent par le mot TLM (Telemetry Word) utilisé par les station de contrôle au sol, suivi du mot HOM (Handover Word).

Les sous-trames n1 et n2 fournissent les éphémérides du satellite qui définissent le mouvement du centre de graviter du satellite.

Les paramètres de l'éphéméride sont appelée éléments Képlériens de l'orbite. En réalité, l'orbite subit une certaine perturbation à cause de la non sphéricité de la terre, la traînée atmosphérique, l'attraction additionnelle des autres corps (par exemple le soleil et la lune), la pression des radiation (principalement solaire, directes ou réfléchies), et les marées océanique et terrestres. Ceci a conduit la définition de 10 autres éléments à ajouter aux 6 paramètres de l'éphéméride.

Les sous-trames 4 et 5 fournissent des données Almanach définissent des données orbitales mais moins précises et moins souvent mises à jour que les éphémérides et des données UTC permettant de déterminer l'écart entre le temps GPS et le temps UTC, ainsi que des paramètres de correction ionosphérique.

### I.8. Les récepteurs GPS (Global Positioning System)

Le récepteur GPS est un outil de navigation, qui permet de déterminer la position d'un point sur le globe à l'aide de signaux émis par 28 satellites, qui tournent autour de la terre à une altitude de 20 000 km. Ces satellites sont équipés d'horloges atomiques, donc très précises, et émettent l'heure et leur position par radio. Dès que les signaux de trois satellites sont reçus simultanément, une position dans l'espace peut être déterminée par triangulation. Les récepteurs modernes travaillent avec 12 satellites en même temps, ce qui permet une localisation très précise. En fait les imprécisions des positions déterminées sont dues aux influences météorologiques et stratosphériques, qui varient par réfraction la trajectoire linéaire du signal, donc allongent légèrement leurs temps de parcours et par là induisent des erreurs.

Un récepteur GPS permet toujours de déterminer la position pourvu qu'il dispose de deux éléments d'information essentiels:

- ✚ La distance entre le récepteur et chaque satellite (au moins 4).
- ✚ La position exacte de chacun de ces satellites dans l'espace.

Lorsque le récepteur GPS dispose de ces deux éléments d'information essentiels (la distance par rapport à chaque satellite et la position exacte de chacun dans l'espace), il peut, par des calculs mathématiques, déterminer sa position à la surface de la terre.



Figure.1.12: Récepteur GPS

## **-les types de récepteurs GPS**

Les récepteurs GPS peuvent être divisés en trois catégories :

### **Les récepteurs multicanaux**

Ils constituent le top-niveau des récepteurs GPS. Ils sont généralement utilisés pour des applications ultra précises ou dans applications de positionnement dynamique. Ces récepteurs disposent d'un canal de réception par satellite, par lequel chaque satellite peut être suivi en continu.

On peut également faire une distinction entre les récepteurs SPS et les récepteurs PPS. Les récepteurs SPS mesurent uniquement les codes C/A et les phases L1/L2 alors que les récepteurs PPS peuvent également faire des mesures sur le code P.

### **Les récepteurs séquentiels**

Ils existent en version un ou deux canaux .le deuxième canal est généralement utilisé pour l'acquisition d'un satellite initial et pour recevoir le message de navigation. L'autre canal traite les satellites l'un après l'autre avec une fenêtre d'observation typique de 1 seconde par satellite. Cela implique, pour chaque satellite, une courte phase d'initialisation. Une des conséquences de cette méthode est que le récepteur peut seulement déterminer une position tridimensionnelle toutes les 4 à 5 secondes.

### **Les récepteurs multiplex**

Forment un compromis entre les récepteurs multicanaux et séquentiels. Ils peuvent malgré un principe de fonctionnement analogue à un récepteur séquentiel, et grâce à une conception améliorée, faire un enchaînement entre les différents satellites en moins de 20 millisecondes. Grâce à cette haute fréquence de traitement, on élimine le temps d'initialisation nécessaire pour les récepteurs séquentiels. Pour les récepteurs multiplex, comme pour les récepteurs séquentiels, le message de navigation est téléchargé, pour chaque satellite, d'une manière asynchrone.

## I.9. Traitements du signal GPS

### I.9.1. L'acquisition

L'intérêt de l'acquisition est d'identifier les satellites visibles. Si cette opération réussie à accomplir sa mission c'est qu'elle peut nous fournir :

- \* **La fréquence** : à cause du Doppler la fréquence du signal varie au tour d'une valeur nominale qui est la FI. Le décalage Doppler maximal est de  $\pm 5\text{Khz}$  pour un récepteur fixe et de  $\pm 10\text{Khz}$  pour un récepteur mobil.

- \* **Le code phase** : le code phase indique le début du code C/A considéré. Si on examine un bloc de données de 1ms nous aurons un code C/A qui contient un seul début.

Dans ce contexte plusieurs méthodes sont élaborées, mais d'une façon ou d'une autre elles sont toutes basées sur les caractéristiques particulières de la corrélation du code C/A et elles seront traitées l'une après l'autre dans le travail qui suit.

Afin de donner une idée générale sur l'acquisition, on peut la décrire comme une opération de recherche sur le code et la fréquence, une fois un satellite considéré est présent, un pic bien identifié apparaît dans la fonction corrélation, placé sur le code phase correspondant ainsi que la fréquence correspondante.

### I.9.2. La poursuite

Cette opération à pour but de raffiner les valeurs de fréquence et code phase résultantes de l'acquisition, puis assurer leurs poursuite en fonction du temps. Elle consiste en deux parties :

- \* **La poursuite du code** : généralement implémenté comme une DLL (Delay Lock Loop) où trois répliques locales du code du satellite concerné sont générées et corrélées. Elles s'appellent (Early-Late-Prompt).

- \* **La poursuite de la phase** : cette opération est aussi réalisée d'une façon continue et elle est assurée par une boucle à verrouillage de phase, appelée PLL (Phase Locked Loop).

Chacune de ces boucles poursuit le signal d'entrée qui évolue en fonction du temps.

### I.9.3. Extraction des données de navigation

Une fois que la poursuite est réalisée, la sortie de cette opération sera convertie en données de navigation. Cette étape ce fait par la conversion en valeur +1 et -1. Cependant, il y a plusieurs manières d'accomplir ceci; une manière commune est de

trouver la différence entre les sorties adjacente de chaque milliseconde. Si la différence est au delà d'un certain seuil, il y a une transition de données. Pour le programme de poursuite, le seuil est habituellement obtenu à partir de l'amplitude prévue minimum de la sortie. Lorsque on obtient les données qui comporte des différentes informations concernant les éphémérides. La position de satellite est obtenue grâce à ces éphémérides qui nous permet de calculer la position du récepteur.

### **1.10. Les applications**

La navigation en temps réel est l'une des applications élémentaires et principales du GPS. Tout objet mobile muni d'un récepteur GPS peut connaître en temps réel sa position et sa vitesse dans un repère terrestre.

La précision attendue pour un tel mode de navigation est de 10 à 15 mètres sur sa position et de quelques centimètres par seconde sur sa vitesse si l'utilisateur utilise le code précis et une centaine de mètres dans le cas contraire.

Que ce soit sur terre, sur mer, dans les airs ou dans l'espace, ces performances excellentes et le faible coût du récepteur GPS, font de ce système un instrument de navigation très prisé.

Seule la navigation civile aérienne est encore réticente pour des raisons techniques. En effet, l'intégrité du système, c'est à dire la certitude dans un temps très court que tel ou tel satellite fournit ou non des données correctes, n'est pas assurée. Il faudrait installer de lourds moyens de surveillance de la constellation GPS et de lourds moyens politiques (il faut beaucoup de garanties pour faire accepter par la communauté internationale qu'un instrument essentiel de navigation soit entièrement dans les mains des militaires d'un pays).

#### **1. Applications militaires**

Des essais de guidage de bombes ont eu lieu dans le désert de Yuma (Arizona, USA). Les bombes ont été larguées à une altitude de 10 000 pieds (environ 3 kilomètres). L'erreur maximale entre la déflagration et la cible initiale était en moyenne de 56 pieds (17 mètres).

L'application directe du GPS se trouve dans l'utilisation des missiles de croisière. A priori, le système NAVSTAR n'est pas approprié au guidage de missiles intercontinentaux en terrain ennemi sur des milliers de kilomètres. Cependant l'utilisation

de la navigation par GPS permet d'accroître les performances de certains missiles utilisés par les américains.

Les bombardiers utilisant le système NAVSTAR, pour déterminer la position de leurs cibles, peuvent potentiellement détruire de 400 à 600% d'unités ennemies de plus qu'en utilisant les systèmes de localisation habituels.

## **2. Applications civiles**

Le système NAVSTAR est financé par des organismes militaires. Pourtant, nombreuses sont les applications civiles. Le GPS présente des avantages non négligeables vis-à-vis des conditions atmosphériques mais également vis-à-vis de sa non dépendance en luminosité (signal accessible jour et nuit). Ainsi il donne lieu à de multiples utilisations :

### **L'utilisation du système NAVSTAR par d'autres satellites**

Certains satellites d'observation de la surface terrestre utilisent le GPS pour déterminer leur position. Le GPS leur permet de calibrer très précisément les images qui leur sont commandées.

### **L'orbitographie des satellites de haute altitude**

La constellation NAVSTAR permet un positionnement précis aux satellites de basses et moyennes altitudes mais lorsqu'on franchit les 20200 Km d'altitude des satellites GPS, le positionnement est plus délicat. Au delà de cette altitude on ne peut recevoir des signaux GPS que des satellites situés dans l'hémisphère opposée de celle où l'on se trouve. La plupart de ces signaux sont cachés par la terre et ceux qui proviennent des satellites plus excentrés sont très affaiblis.

Le système GPS reste cependant exploitable pour des satellites munis d'antennes à gain très important. La géométrie des satellites utilisables n'étant pas optimum, la précision atteinte reste très en dessous de celle des satellites de basse altitude.

### **Pour les compagnies de service public :**

Les compagnies de transport en commun, de taxis, les ambulances ou encore les pompiers, utilisent le GPS afin d'améliorer leur efficacité, pouvant ainsi gérer en temps réel la position de leur 'flotte' de véhicules.

### **La voiture du futur**

Très bientôt, nos véhicules seront tous équipés de systèmes de navigation GPS avec un système informatique embarqué permettant de donner des informations sur un chemin à suivre, sur des lieux à éviter ou à visiter et sur les conditions météo.

Ces systèmes nécessitent d'avoir une grande précision. Les systèmes de navigation pour automobiles font donc appel, pour une plus grande précision, à une centrale inertielle (gyroscope) et à une boussole électronique.

Avec le GPS complété de ces deux équipements, le système de navigation arrive alors à une précision record d'environ 5 mètres ! C'est l'effort à faire pour avoir un système fiable.

### **Aide à la navigation pour les trains**

La navigation des trains est également touchée par le syndrome du système NAVSTAR. Des systèmes avancés de voies ferrées (ARES) sont actuellement développés. Les trains seront précisément positionnés en temps réel grâce au signal GPS. Leurs positions, par l'intermédiaire d'ondes radio à 900 MHz, seront relayées au central. Celui-ci contrôlera le cheminement du train sur un écran et informera les voyageurs de tout retard en temps réel. Il pourra effectuer plus rapidement les interventions de maintenance et contrôler les correspondances entre cars et trains.

---

# Chapitre II

## Calcul de positionnement

---

## II.1. Introduction

Ce chapitre introduit le concept de base de détermination de position d'un récepteur GPS. Pour cela, on va en premier lieu déterminer la position des satellites, dans ce contexte les systèmes de référence et les matrices de passage seront analysés, puis on donne une idée générale sur la notion de pseudo distance suivie d'une formulation mathématique de l'équation de positionnement.

La solution est initialement exprimée dans un système de coordonnées cartésiennes qui est le ECEF or que la position des satellites est exprimée dans le ECI, mais dans le but de comparer les positions respectives du satellite et de l'observateur et de calculer la distance entre les deux, il est nécessaire de convertir la position instantanée du satellite dans le système de coordonnées ECEF. Les formules nécessaires à la transformation Kepler/ECEF seront présentées et analysées.

## II.2. Le principe de positionnement GPS

Le GPS est un système satellitaire qui utilise le concept de positionnement en exploitant le temps d'arrivée d'un signal daté à son départ. Ce concept entraîne la mesure du temps de propagation d'un signal émis par un satellite situé à une position connue et reçu par le récepteur dont la position est inconnue. Ce temps est multiplié par la célérité de la lumière afin d'obtenir la distance satellite-récepteur. En mesurant les temps de propagation des signaux émis par plusieurs satellites le récepteur peut déterminer sa position.

Supposons le cas d'un seul satellite. Une horloge à bord contrôle l'émission du signal, cette horloge ainsi que tous les horloge des satellites sont synchronisés à un système de temps appelé temps GPS. Le récepteur contient aussi une horloge que nous supposons pour le moment synchronisée avec les horloges des satellites. Une information de temps est incluse dans le signal émis par le satellite pour permettre au récepteur de connaître la date d'émission du signal. En relevant la date d'arrivée du signal, le récepteur peut déterminer le temps de propagation du signal. La multiplication de ce temps par la vitesse de la lumière donne la distance  $R$  entre le satellite et le récepteur.

De ce résultat, on peut déduire que le récepteur est situé quelque part sur la surface de la sphère de rayon  $R$  centrée sur le satellite. Si une autre mesure est effectuée sur un second satellite, le récepteur serait situé sur une sphère centrée sur ce deuxième satellite. Par conséquent, le récepteur sera situé sur le cercle résultant de l'intersection des deux sphères.

Puis on réalise les mêmes mesure sur un troisième satellite, La troisième sphère intercepte le cercle précédent en deux points. Une vue de ces intersections est représentée par la figure (II.1).

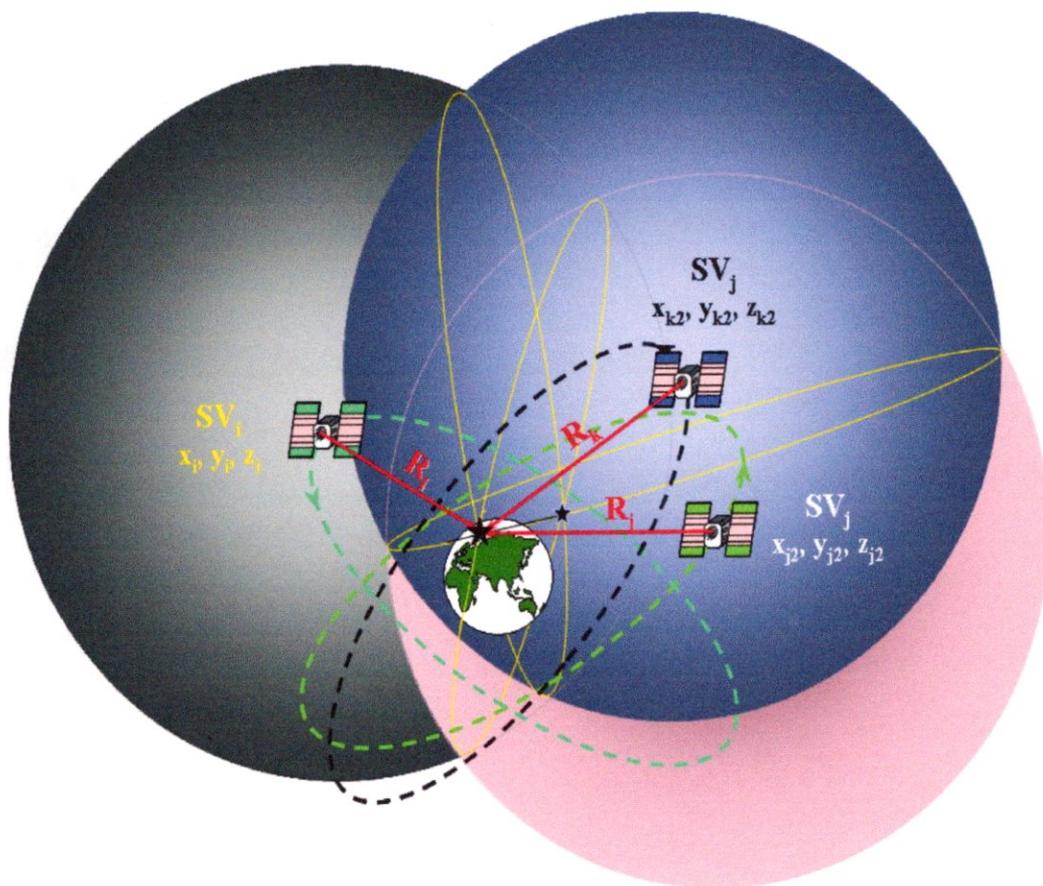


Figure.II.1: La position du récepteur

### II.3. Les systèmes de coordonnées de référence

Afin de formuler le problème de positionnement par satellites, il est nécessaire de choisir un système de coordonnées de référence dans lequel les positions des satellites et du récepteur seront exprimées.

#### II.3.1. Système de coordonnées inertiel centré sur la terre (ECI)

Dans le but de mesurer et déterminer les orbites des satellites du GPS, il convient d'utiliser le système de coordonnées ECI (Earth-Centred Inertiel) dont l'origine est le centre de la terre et le plan  $xOy$  coïncide avec le plan équatorial, l'axe des  $x$  étant dirigé en permanence dans une direction fixe de l'espace (point vernal). La détermination des orbites des satellites est effectuée dans ce type de repère. Ce dernier est représenté par la figure (II.2).

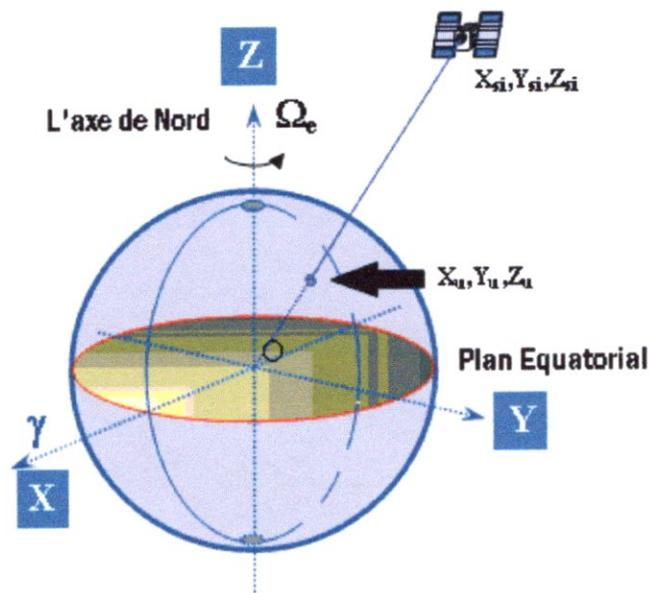


Figure.II.2: Système de coordonnées ECI

#### II. 3.2. Système de coordonnées centré et fixé par rapport à la terre (ECEF)

Dans le but de calculer la position du récepteur, il est plus intéressant d'utiliser un système de coordonnées qui tourne avec la terre appelé repère ECEF (Earth-Centred Earth-Fixed). A la différence du repère ECI, l'axe  $x$  du repère ECEF pointe dans la direction de la longitude zéro, l'axe des  $y$  dans la direction longitude  $90^\circ$ EST. Les axes  $x$  et  $y$  sont donc en rotation avec la terre. Ce repère est représenté par la figure (II.3).

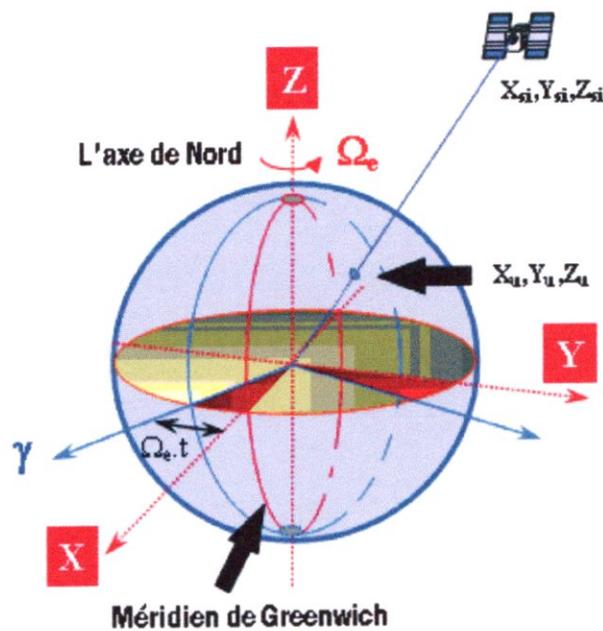


Figure.II.3: Système de coordonnées ECEF

### II.3.3. Système de coordonnées géodésique

Pour rendre les coordonnées de position exploitable d'une manière adéquate par les utilisateurs, le récepteur GPS doit convertir la position de l'observateur dans un système de coordonnées terrestres correspondant à la latitude, longitude géographique et à l'altitude au-dessus du niveau de la mer .

Pour transformer les coordonnées cartésiennes ECEF en latitude, longitude et altitude, il est nécessaire d'avoir un modèle physique décrivant la terre. Le modèle standard de la terre utilisé dans les applications GPS est le WGS-84 (World Geodetic System 1984). Ce système (figure II.4) consiste en un modèle elliptique de la surface de la terre.

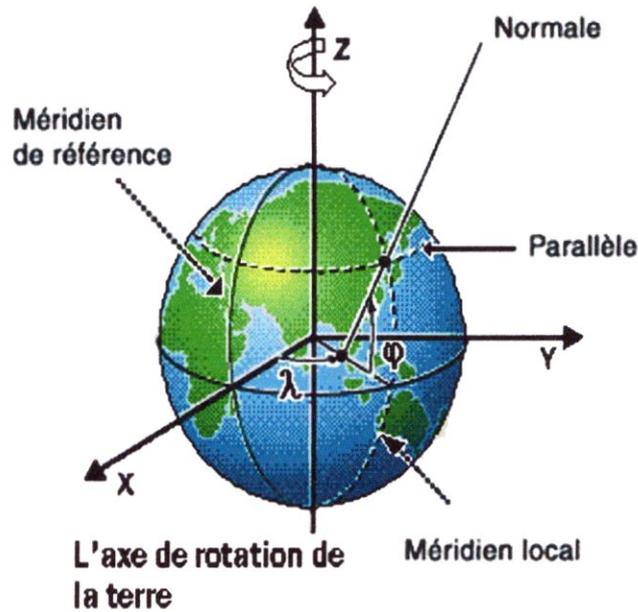


Figure.II.4: Modèle elliptique de la terre

Dans ce modèle, les sections de la terre parallèles au plan équatorial sont des cercles. Le cercle équatorial a un rayon de 6378,137 Km qui est le rayon moyen de la terre. Dans le modèle WGS-84, les sections de la terre normales au plan équatorial sont elliptiques. Le demi grand axe  $a$  est égal à celui du plan équatorial, soit 6378,137Km, le demi petit axe  $b$  de l'ellipse est de 6356,7523km. L'excentricité est donnée par :

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (\text{II.1})$$

L'ensemble des paramètres liés au WGS-84 est donné par le tableau suivant:

Paramètres	Notation	Valeur
<b>Demi grand axe</b>	a	6378137 m
<b>Aplatissement</b>	f	1/298.257223563
<b>Demi petit axe</b>	b	6356752.3 142 m
<b>Excentricité</b>	e	$e^2=0.00669437999013$
<b>Constante de gravité</b>	$G_0$	$398005.10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$
<b>La gravité au pôle</b>	$\gamma_p$	$9.8321863685 \text{ m/s}^2$
<b>La gravité à l'équateur</b>	$\gamma_e$	$9,7803267714 \text{ m/s}^2$
<b>Masse de la terre</b>	$M_g$	$5.9733328.10^{24} \text{ kg}$
<b>La vitesse de rotation de la terre</b>	$\Omega_g$	$7.292115.10^{-5} \text{ rad/s}$

**Tableau.II.1:** Les paramètres de WGS-84

La conversion des coordonnées de position entre le système ECEF (coordonnées X,Y,Z) et le système (latitude, longitude et altitude h) est un peu compliqué par le fait de la terre n'est pas sphérique. Il est nécessaire d'introduire ici deux grandeurs intermédiaires f et N, qui ne servent que pour les calculs de conversion.

On définit l'aplatissement f de cette ellipse par la formule :

$$f = (a - b) / a \quad (\text{II.2})$$

Les paramètres 'a' et 'f' varient légèrement selon les régions du monde. Le système géodésique WGS84 définit ces paramètres de manière précise pour chaque région, et les valeurs les plus couramment utilisées sont généralement stockées dans les mémoires électroniques des récepteurs GPS.

D'autre part, on peut calculer pour un point du globe de latitude 'l' la grandeur intermédiaire 'N' selon la formule :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - f(2 - f)\sin^2 \phi}} \quad (\text{II.3})$$

Avec les notations introduites, les formules de conversion entre les coordonnées locales  $\lambda, \phi$ , et h et les coordonnées ECEF X,Y,Z sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= [(N + f^2)N + h] \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Dans le calcul de position GPS, ce ne sont pas les formules précédentes qui seront utilisées, mais plutôt leurs formes inverses, c'est-à-dire exprimer les coordonnées locales  $\lambda, \phi$  et h à partir des coordonnées ECEF X,Y,Z. Ces formules inverses sont données par les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda &= \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \\ \phi + \arctg &= \left( \frac{Z}{X^2 + Y^2} \left( 1 - \frac{(2-f)fN}{N+h} \right)^{-1} \right) \\ h &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\phi} - N\end{aligned}\quad (II.5)$$

#### II.4. Détermination des orbites des satellites

Afin de calculer la position GPS, le récepteur doit d'abord évaluer exactement la position des satellites. Il est donc nécessaire de comprendre comment sont caractérisés les orbites des satellites.

Dans ce contexte, le système GPS utilise une solution basée sur un ensemble particulier de six paramètres appelés paramètres orbitaux de Kepler. Les trois premiers éléments illustrés dans la figure (II.5) définissent la forme de l'orbite. On remarque que l'orbite de forme elliptique a pour foyer le point 'F', qui correspond au centre de gravité de la terre. Le temps 't<sub>0</sub>' utilisé comme temps de référence est appelé 'époque' et fait partie du message des éphémérides, à 't<sub>0</sub>' le satellite est en un certain point de référence 'A' de l'orbite. Le point 'P' le plus proche de la terre est appelé 'périgée' et l'instant τ de passage du satellite en ce point aussi est considéré comme un paramètre de Kepler. Par conséquent on donne les trois éléments orbitaux de Kepler :

a : Demi grand axe de l'ellipse.

e : Excentricité de l'ellipse.

τ : Temps de passage au périgée.

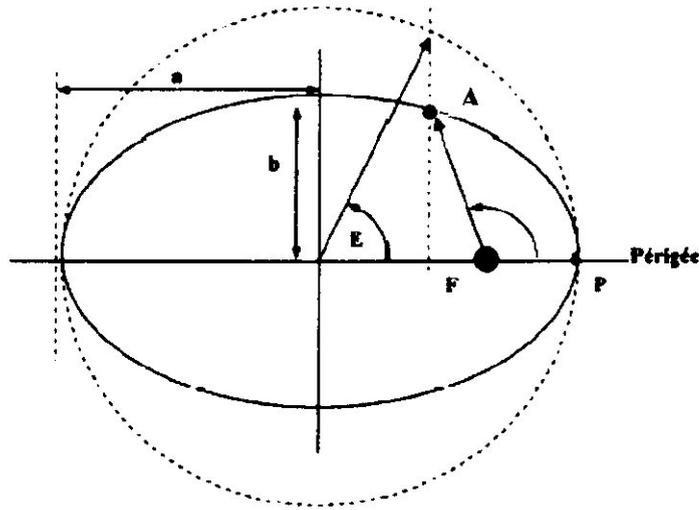
Le système GPS utilise un paramètre équivalent du temps de passage 'τ' qui est 'l'anomalie moyenne', relié à l'anomalie vraie  $v$  qui n'est autre que l'angle PFA.

Les trois éléments orbitaux suivants définissent l'orientation de l'orbite dans le repère ECEF (figure (II.6)) :

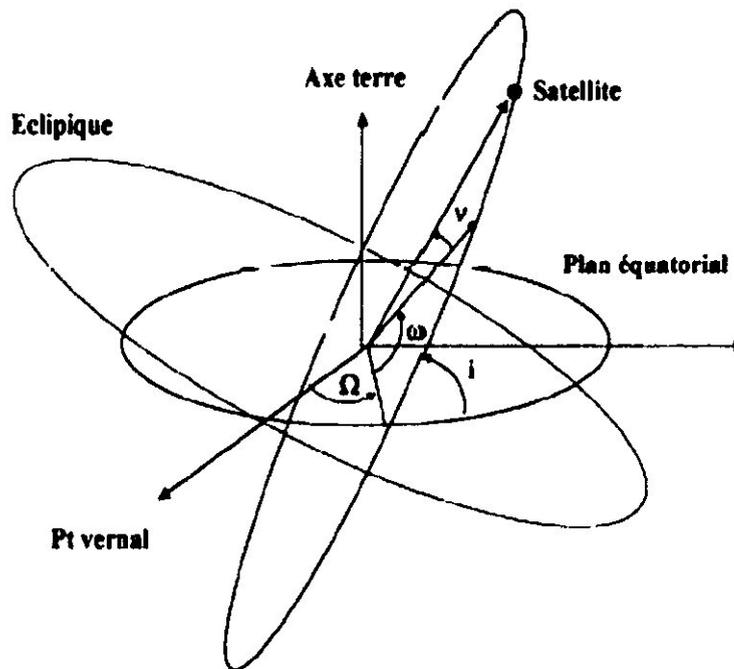
i : Inclinaison

Ω : Longitude de nœud ascendant

ω : Argument de périgée



**Figure.II.5:** Les trois éléments orbitaux définissant la forme de l'orbite du satellite



**Figure.II.6:** Eléments orbitaux définissant l'orientation de l'orbite du satellite

## II.5. Transformation du plan orbital au plan équatorial

Les informations concernant la position instantanée de chacun des satellites sont incluses dans les messages que ceux-ci envoient au récepteur GPS (ce sont les éphémérides des satellites). Ces coordonnées de position sont données dans le système de Kepler, et le récepteur effectue la conversion dans le système ECEF. L'algorithme de transformation est décrit en ce qui suit.

La distance  $r$  du satellite au centre de la terre peut être obtenu comme :

$$r = \frac{a_s(1 - e_s^2)}{1 + e_s \cos v} \quad (\text{II.6})$$

Où ' $a_s$ ' est le demi grand axe de l'orbite,  $e_s$  est l'excentricité de l'orbite du satellite, et  $v$  est l'anomalie vraie.

La valeur de  $\cos v$  peut être obtenue par la relation suivante :

$$\cos v = \frac{\cos E - e_s}{1 - e_s \cos E} \quad (\text{II.7})$$

Où ' $E$ ' est l'anomalie excentrique.

Par substitution de l'équation (II.7) dans l'équation (II.6), le résultat peut être simplifié :

$$r = a_s(1 - e_s \cos E) \quad (\text{II.8})$$

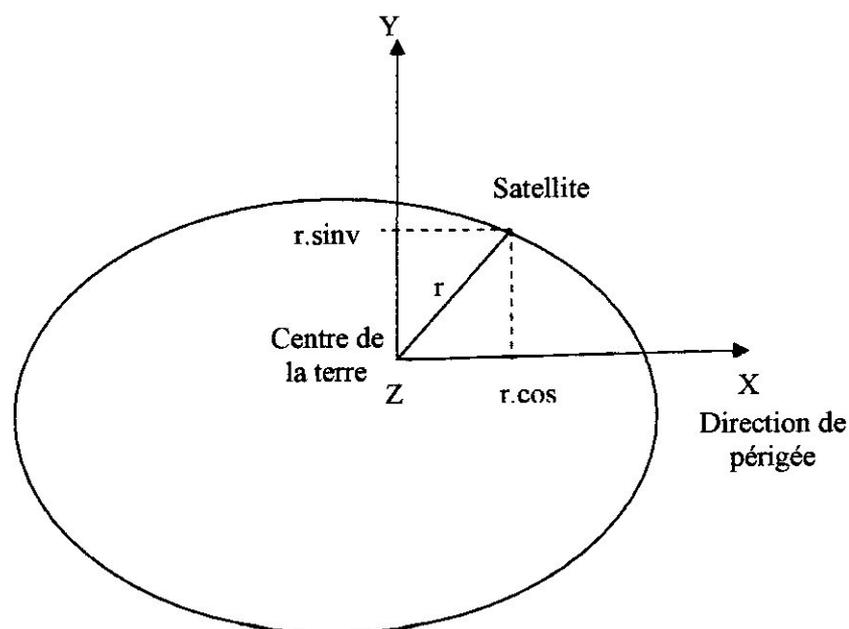


Figure.II.7 : Plan orbital

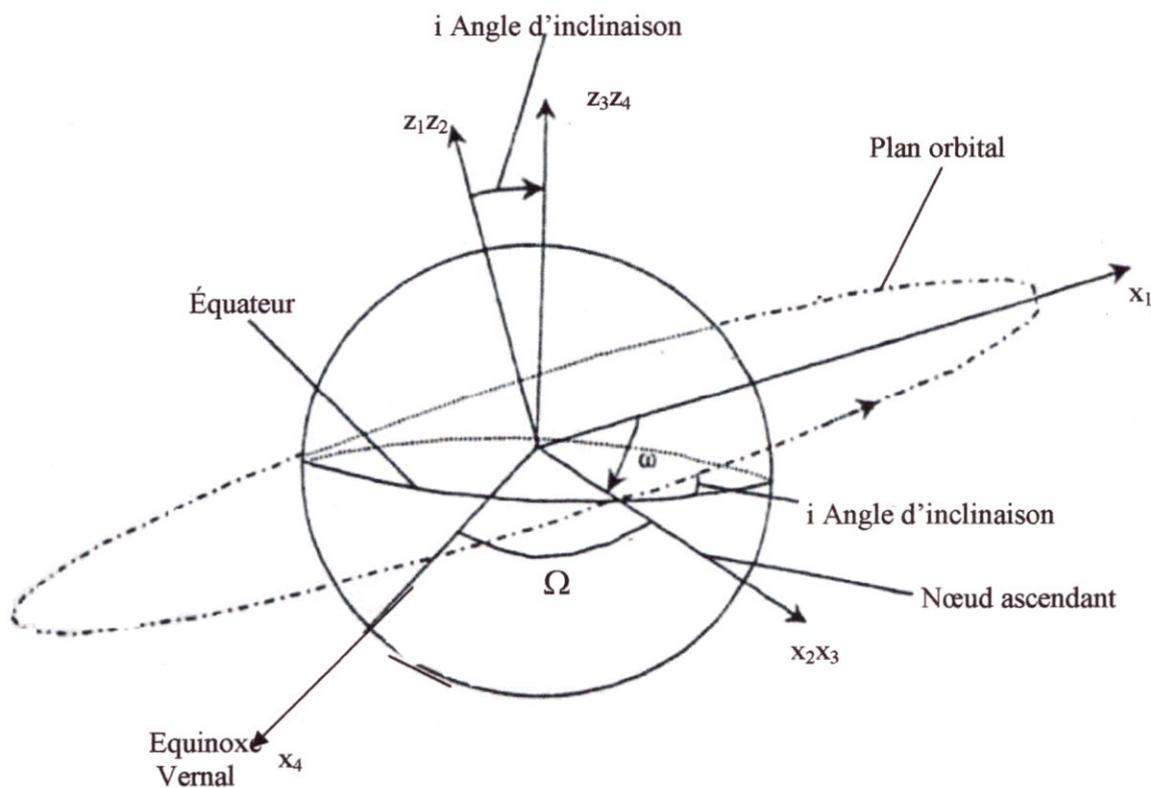
La position du satellite dans le plan orbital est donnée par :

$$\begin{aligned}x &= r \cos v \\y &= r \sin v \\z &= 0\end{aligned}\tag{II.9}$$

Ces coordonnées doivent être transformées en ECEF, pour cela il faut décrire l'orientation de l'orbite caractérisée par trois angles, qui sont :

- L'angle ' $\omega$ ' entre le périégée et le noeud ascendant dans le plan orbital, appelé argument du périégée.
- L'angle d'inclinaison ' $i$ ' entre le plan orbital et le plan équatorial.
- L'angle ' $\Omega$ ' entre le méridien de Greenwich et le point nommé 'noeud ascendant', ce point est caractérisé par l'intersection de l'orbite et le plan équatorial.

Ces angles sont représentés par la figure (II.8) suivante :



**Figure.II.8:** Plan Equatorial de la terre et le plan orbital

Afin de réaliser la transformation, on considère trois rotations indépendantes, la première est selon l'axe x, elle est caractérisée par la matrice de passage :

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

La deuxième rotation correspond à un angle de rotation 'i', c'est l'angle d'inclinaison autour de l'axe y. La matrice de passage correspondante est :

$$C_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

La troisième rotation correspond à un angle de rotation 'Ω', c'est l'angle de rotation autour de l'axe z<sub>2</sub>. La matrice de passage correspondante est :

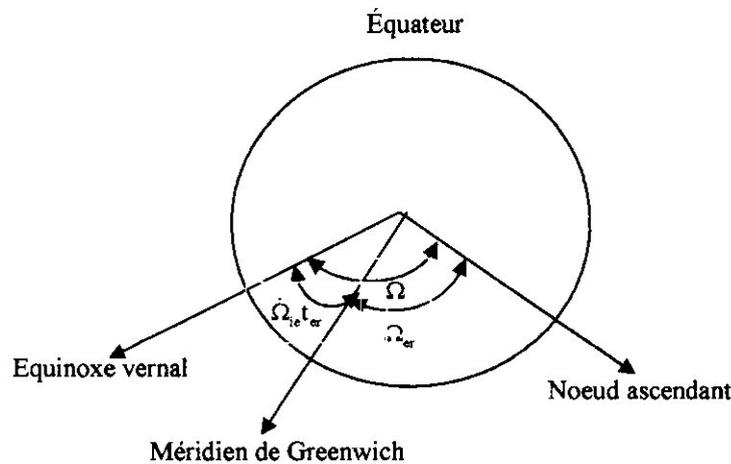
$$C_3^4 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Cette dernière rotation nous ramène au référentiel (ECI), dont l'origine est le centre de gravité de la terre. Ce référentiel ne tourne pas avec la terre car il est considéré comme un référentiel fixe dans l'espace, cependant pour localiser un point sur la surface de la terre, sa rotation doit être prise en considération. Un tel référentiel est connu sous le nom référentiel centré et fixé par rapport à la terre (ECEF).

## II.6. Rotation de la terre

Soit la vitesse de rotation de la terre ' $\dot{\Omega}_{ie}$ ' supposée constante, considérons le temps ' $t_{er}$ ' tel que  $t_{er}=0$  quand le méridien de Greenwich s'aligne avec l'équinoxe vernal. Dans ce cas la vitesse de rotation selon la figure (II.11) est donnée par l'équation suivante :

$$\Omega_{er} = \Omega - \dot{\Omega}_{ie} t_{er} \quad (\text{II.13})$$



**Figure.II.9:** Rotation de la terre

Où  $\Omega_{er}$  est l'angle entre le noeud ascendant et le méridien de Greenwich, le taux de la rotation de la terre  $\dot{\Omega}_{ie} = 7.2921151467 \cdot 10^{-5}$  rad/sec. Quand  $t_{er} = 0$ ,  $\Omega_{er} = \Omega$ , cela veut dire que le méridien de Greenwich et l'équinoxe vernal sont alignés.

Si on remplace  $\Omega$  par l'angle  $\Omega_{er}$  dans l'équation (II.12), l'axe x tournera dans le plan équatorial, et pointe vers le méridien de Greenwich. On aura :

$$C_3^4 = \begin{bmatrix} \cos\Omega_{er} & -\sin\Omega_{er} & 0 \\ \sin\Omega_{er} & \cos\Omega_{er} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Dans cette équation la rotation de la terre est prise en compte. On note que le temps  $t_{er}$  doit être initialisé chaque fois le méridien de Greenwich est aligné avec l'équinoxe vernal, ce qui correspond à une durée maximale d'un jour sidéral.

Comme le système GPS possède son temps propre, le temps ' $t_{er}$ ' doit être remplacé par ' $t$ ' correspondant. Ce dernier commence samedi minuit et dura sept jours solaires avant de s'initialiser. D'une manière simple on peut passer d'un temps ' $t_{er}$ ' au temps ' $t$ ' associé au GPS par un changement linéaire comme suit:

$$t_{er} = t + \Delta t \quad (\text{II.15})$$

En remplaçant cette équation dans l'équation (II.13), on obtient :

$$\text{Où : } \begin{aligned} \Omega_{er} &= \Omega - \dot{\Omega}_{ie} t_{er} = \Omega - \dot{\Omega}_{ie} t - \dot{\Omega}_{ie} \Delta t \equiv \Omega - \alpha - \dot{\Omega}_{ie} t \equiv \Omega_e - \dot{\Omega}_{ie} t \\ \Omega_e &\equiv \Omega - \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Et : } \alpha \equiv \dot{\Omega}_{ie} \Delta t \quad (\text{II.16})$$

L'ensemble de ces paramètres est inclus dans les données d'éphémérides.

Finalement, Pour obtenir la position du satellite dans le référentiel ECEF, on doit utiliser les équations (II.14), (II.11), et (II.10) dans l'équation suivante :

$$C_1^n = C_{n-1}^n \dots C_2^3 C_1^2 \quad (\text{II.17})$$

Le résultat suivant est obtenu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} &= C_3^4 C_2^3 C_1^2 \begin{bmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Omega_{er} & -\sin \Omega_{er} & 0 \\ \sin \Omega_{er} & \cos \Omega_{er} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Omega_{er} & -\sin \Omega_{er} \cos i & \sin \Omega_{er} \sin i \\ \sin \Omega_{er} & \cos \Omega_{er} \cos i & -\cos \Omega_{er} \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Omega_{er} \cos \omega - \sin \Omega_{er} \cos i \sin \omega & -\cos \Omega_{er} \sin \omega - \sin \Omega_{er} \cos i \cos \omega & \sin \Omega_{er} \sin i \\ \sin \Omega_{er} \cos \omega + \cos \Omega_{er} \cos i \sin \omega & -\sin \Omega_{er} \sin \omega + \cos \Omega_{er} \cos i \cos \omega & -\cos \Omega_{er} \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r \cos \Omega_{er} \cos(v+\omega) - r \sin \Omega_{er} \cos i \sin(v+\omega) \\ r \sin \Omega_{er} \cos(v+\omega) + r \cos \Omega_{er} \cos i \sin(v+\omega) \\ r \sin i \sin(v+\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{II.18}) \end{aligned}$$

Cette dernière équation fournit la position du satellite dans le système de coordonnées centrées et fixées par rapport à la terre (ECEF).

En résumé, pour évaluer la transformation ci-dessus, les données suivantes sont nécessaires:

- (1)  $a_s$  : demi grand axe de l'orbite du satellite;
- (2)  $M$  : l'anomalie moyenne;
- (3)  $e_s$  : excentricité de l'orbite du satellite;
- (4)  $i$  : l'angle de l'inclination;
- (5)  $\omega$  : argument du périégée;
- (6)  $\Omega - \alpha$  : ascension modifiée;
- (7) temps GPS.

Les trois premières constantes et l'anomalie vraie  $v$  sont utilisées pour calculer la distance  $r$  du satellite au centre de la terre. Les trois valeurs  $i, \omega$ , et  $\Omega - \alpha$  sont utilisées pour transformer le plan orbital du satellite au plan ECEF. Le temps GPS est nécessaire pour calculer  $\Omega_{er}$  dans l'équation (II.13).

## II.7. Perturbations

La terre n'est pas une sphère parfaite et sa forme influe sur l'orbite du satellite, de même pour le soleil et la lune. À cause de ces effets de gravitations, l'orbite du satellite doit être modifiée en introduisant quelques constantes transmises dans le message de navigation partie éphémérides.

L'équation (II.18) est formulée on se basant sur la supposition que l'orbite du satellite est elliptique; cependant, ce n'est pas exactement le cas. Par conséquent, quelques paramètres dans les équations précédentes doivent être modifiés, ou corrigés.

Dans ce contexte, l'équation (II.13) l'ascension  $\Omega$  sera modifié comme :

$$\Omega \Rightarrow \Omega + \dot{\Omega}(t - t_{oe}) \quad (\text{II.19})$$

Où 't' est le temps de GPS,  $t_{oe}$  est le temps de la référence pour l'éphéméride, et  $\dot{\Omega}$  est le taux de variation de l'ascension. Cette équation implique que l'ascension n'est pas une constante, mais change avec le temps. Les données de l'éphéméride transmises par le satellite contiennent  $t_{oe}$  et  $\dot{\Omega}$ . Substituons l'équation précédente dans l'équation (II.16), le résultat est :

$$\Omega_{er} = \Omega - \alpha + \dot{\Omega}(t - t_{oe}) - \dot{\Omega}_e t \equiv \Omega_e + \dot{\Omega}(t - t_{oe}) - \dot{\Omega}_e t \quad (\text{II.20})$$

Où  $\Omega_e$  est obtenu à partir des données de l'éphéméride.

La vitesse angulaire moyenne de rotation est corrigée par :

$$n \Rightarrow n + \Delta n = \sqrt{\frac{\mu}{a_s^3}} + \Delta n \quad (\text{II.21})$$

Où  $\Delta n$  est le terme de la correction qui est aussi obtenu à partir des données d'éphéméride.

L'anomalie moyenne doit être modifiée comme :

$$M = M_0 + n(t - t_{oe}) \quad (\text{II.22})$$

Où  $M_0$  est l'anomalie moyenne au temps de référence qui peut être obtenue à partir des données d'éphéméride. Cette valeur  $M$  sera utilisée pour trouver l'anomalie vraie  $v$ .

Il y a de plus six constantes  $C_{us}, C_{uc}, C_{rs}, C_{rc}, C_{is}$  et  $C_{ic}$  de correction, qui sont utilisées pour modifier  $v + \omega$ ,  $r$  et  $i$  dans l'équation (II.18) respectivement.

Maintenant on va introduire une nouvelle variable  $\phi$ , Où :

$$\phi \equiv v + \omega \quad (\text{II.23})$$

Le terme de la correction  $v + \omega$  est :

$$\delta(v + \omega) \equiv \delta\phi = C_{us} \sin 2\phi + C_{uc} \cos 2\phi \quad (\text{II.24})$$

Et la nouvelle  $v + \omega$  est :

$$v + \omega \Rightarrow v + \omega + \delta(v + \omega) \quad (\text{II.25})$$

La correction de la distance  $r$  est :

$$\delta r = C_{rs} \sin 2\phi + C_{rc} \cos 2\phi \quad (\text{II.26})$$

Et la nouvelle distance  $r$  est :

$$r \Rightarrow r + \delta r \quad (\text{II.27})$$

La correction de l'inclination  $i$  est :

$$\delta i = C_{is} \sin 2\phi + C_{ic} \cos 2\phi \quad (\text{II.28})$$

Et la nouvelle inclination  $i$  est :

$$i \Rightarrow i + \delta i \quad (\text{II.29})$$

Substituons ces nouvelles valeurs dans l'équation (II.18) va nous donner les résultats désirés.

### II.8. La correction du temps du système GPS au temps de transmission

Dans les équations (II.20) et (II.22) le temps GPS est utilisé, et ce temps est souvent reporté au temps de transmission. Il est nécessaire de le corriger, ceci peut être réalisé selon les étapes suivantes :

En premier lieu on doit calculer avec correction la vitesse angulaire moyenne de rotation donnée par:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a_s^3}} + \Delta n \quad (\text{II.30})$$

Où  $\mu = 3.986005 \cdot 10^{14}$  metres<sup>3</sup>/seces<sup>2</sup> est la constante gravitationnelle universelle de la terre,  $\sqrt{a_s}$  et  $\Delta n$  sont obtenus à partir données de l'éphéméride.

La valeur de 'n' nous permet de calculer l'anomalie moyenne, ceci à partir de l'équation (II.22):

$$M = M_0 + n(t_c - t_{oc}) \quad (\text{II.31})$$

Où  $M_0$  est une donnée d'éphéméride. Dans cette équation 't<sub>c</sub>' est utilisé au lieu de 't' car ce dernier n'est pas encore exprimé.

L'anomalie excentrique 'E' et donnée par :

$$E = M + e_s \sin E \quad (\text{II.32})$$

Où  $e_s$  est l'excentricité de l'orbite du satellite qui peut être obtenue dans les données de l'éphéméride. On définit aussi 'F' :

$$F = \frac{-2\sqrt{\mu}}{c^2} \quad (\text{II.33})$$

Le terme de la correction relativiste est :

$$\Delta t_r = F e_s \sqrt{a_s} \sin E \quad (\text{II.34})$$

Par conséquent, le terme de la correction du temps final est :

$$\Delta t = a_{f0} + a_{f1}(t_c - t_{oc}) + a_{f2}(t_c - t_{oc})^2 + \Delta t_r - T_{GD} \quad (\text{II.35})$$

données d'éphémérides.

3. La valeur de E peut être trouvée à partir de l'équation (II.32), où  $e_s$  peut être obtenue à partir des données d'éphémérides. Une méthode itérative sera utilisée pour résoudre l'équation correspondante.

4. Une fois E est obtenue, la valeur de r peut être trouvée à travers l'équation (II.37).

Dans les quatre étapes précédentes, les trois premières étapes ont pour objectif d'évaluer la valeur de E. Une fois cette dernière est calculée, les équations (II.33) et (II.36) peuvent être utilisées pour trouver le temps GPS corrigé 't'.

Puis on calcul l'anomalie vraie  $v$  :

$$v = \cos^{-1} \left( \frac{\cos E - e_s}{1 - e_s^2 \cos E} \right) \quad (\text{II.38})$$

L'argument  $\omega$  peut être trouvé dans les données d'éphémérides. On utilise la définition de la valeur  $\phi$  de l'équation (II.23) :

$$\phi \equiv v + \omega \quad (\text{II.39})$$

Des termes de correction seront utilisés :

$$\begin{aligned} \delta\phi &= C_{us} \sin 2\phi + C_{uc} \cos 2\phi \\ \delta r &= C_{rs} \sin 2\phi + C_{rc} \cos 2\phi \\ \delta i &= C_{is} \sin 2\phi + C_{ic} \cos 2\phi \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Où les  $C_{us}, C_{uc}, C_{rs}, C_{rc}, C_{is}$  et  $C_{ir}$  sont des données d'éphémérides:

$$\begin{aligned} \phi &\Rightarrow \phi + \delta\phi \\ r &\Rightarrow r + \delta r \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

L'angle d'inclinaison  $i$  peut être obtenu à partir des données d'éphémérides et peut être corrigé par :

$$i \Rightarrow i + \delta i + \text{idot}(t - t_{oe}) \quad (\text{II.42})$$

Où  $\text{idot}$  peut être obtenu par des données d'éphémérides. Le dernier terme peut être trouvé comme suit :

$$\Omega_{er} = \Omega_e + \dot{\Omega}(t - t_{oe}) - \dot{\Omega}_{ie} t \quad (\text{II.43})$$

Où  $\dot{\Omega}_{ie}$  est le taux de rotation de la terre et les constantes,  $\Omega_e$ ,  $\dot{\Omega}$  et  $t_{oe}$  sont obtenus à partir des données d'éphémérides. Une fois, tous les paramètres nécessaires sont obtenus, la position du satellite peut être exprimée par l'équation :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \Omega_{er} \cos \phi - r \sin \Omega_{er} \cos i \sin \phi \\ r \sin \Omega_{er} \cos \phi + r \cos \Omega_{er} \cos i \sin \phi \\ r \sin i \sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

Cette position est calculée dans le référentiel ECEF, Par conséquent la position du satellite est une fonction du temps.

## II.10. Calcul de la position du récepteur

Après le calcul des positions des satellites il nous reste de mesurer la distance entre chaque satellite et le récepteur. Cette distance sera exploitée dans un système d'équations permettant de calculer la position du récepteur. Malheureusement la mesure est entachée d'un certain nombre d'erreurs et d'imprécisions, pour cette raison cette distance est nommée pseudo distance.

Le signal GPS est émis à un moment précis associé au satellite, le récepteur doit mesurer le temps de réception. Grâce à la différence entre ces deux moments on obtient le temps mis par le signal pour parcourir le trajet satellite-récepteur, dont on déduit la pseudo distance qui nous intéresse. Cependant, il faut apporter de nombreuses corrections à cette mesure. En particulier, il faut tenir compte du fait qu'on a trois références temporelles :

- ◆  $T$  : le temps GPS, qui sert de temps de référence ; il est coordonné au temps de l'USNO (United States Naval Observatory) et correspond au temps mesuré par une horloge parfaite pour un utilisateur immobile à la surface de la Terre.
- ◆  $T_s$  : le temps satellite est celui donné par l'horloge du satellite. Pour corriger la dérive interne de cette horloge, le satellite transmet des coefficients de correction pour chaque satellite.
- ◆  $T_R$  : le temps récepteur. Il est impossible d'avoir une horloge atomique au niveau du récepteur, le temps récepteur n'est donc pas synchronisé aux deux autres temps. Par conséquent on a :

$$T_s = T + \Delta T_s \quad \text{et} \quad T_R = T + \Delta T_R \quad (\text{II.45})$$

Si l'on note  $t^e, t_s^e, t^r$  et  $t_r^r$  les temps d'émission (référentiel GPS et satellite) et de réception (référentiel GPS et récepteur), la pseudo distance est donc donnée par :

$$D_{\text{pseudo}} = c.(t_r^r - t_s^e) \quad (\text{II.46})$$

Pour obtenir la vraie distance, il nous faut donc rajouter les termes d'erreurs :

$$\Delta t_r^r = t_r^r - t^r, \Delta t_s^e = t_s^e - t^e \quad (\text{II.47})$$

Et  $\Delta_{\text{propa}}$  qui correspondent aux décalages d'horloge et aux erreurs lors de la propagation du signal. La formule générale de la distance est alors :

$$D = D_{\text{pseudo}} + c \cdot (\Delta t_s^e - \Delta t_r^r) - \Delta_{\text{propa}} \tag{II.48}$$

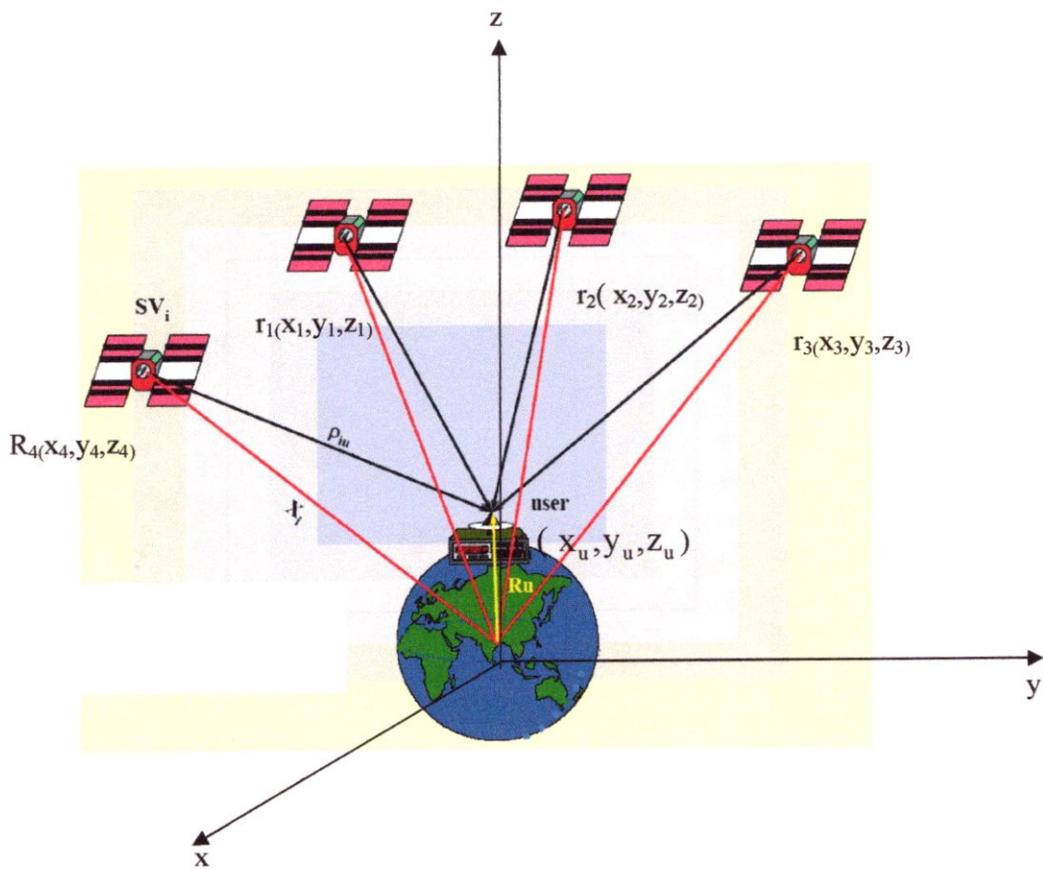
Pour pouvoir estimer la distance, il faut donc estimer les erreurs commises.

On note que l'estimation de  $\Delta_{\text{propa}}$  est obtenue à partir des coefficients de corrections émis par le satellite. De même, pour :

$$\Delta t_s^e = a_0 + a_1 \cdot (t_s^e - t_s^0) + a_2 \cdot (t_s^e - t_s^0)^2 + \varepsilon_{\text{alea}} + \varepsilon_{\text{rel}} \tag{II.49}$$

Où  $a_0, a_1, a_2$  sont les coefficients de correction de l'horloge,

Une fois la pseudo distance est calculée, on formulera l'équation de positionnement, pour cela on considère la figure (II.10) suivante :



**Figure.II.10 :** L'utilisation des trois positions connues pour calculer une position inconnue

Comme les positions des satellites sont connues et les distances entre les satellites et le récepteur sont mesurées, la figure précédente nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} + c\Delta t_r^f \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} + c\Delta t_r^f \\ \rho_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2} + c\Delta t_r^f \\ \rho_4 &= \sqrt{(x_4 - x_u)^2 + (y_4 - y_u)^2 + (z_4 - z_u)^2} + c\Delta t_r^f\end{aligned}$$

Sachant que  $\Delta t_r^f$  est une erreur commune entre les quatre équations. Nous remarquons que ces quatre équations contiennent quatre inconnus qui représente la position du récepteur  $(x_u, y_u, z_u)$  et son erreur d'horloge, par conséquent on peut les résoudre, sauf que la difficulté réside dans leur nature non linéaire, généralement on utilise les méthodes itératives.

### II.11. Les données d'éphéméride

Dans les équations précédentes des constantes et des données d'éphémérides sont utilisées dans les calculs, dans ce qui suit nous allons essayer de les présenter :

Les constantes sont:

$\mu = GM + 3.986005 \cdot 10^{14}$  Metre<sup>3</sup>/sec<sup>2</sup> qui est dans le WGS-84 la valeur de la constante gravitationnelle universelle de la terre.

$\dot{\Omega}_{ie} = 7.2921151467 \cdot 10^{-5}$  Rad/sec qui est la valeur du taux de variation de la rotation de la terre.

$\Pi = 3.1415926535898$ .

$c = 2.99792458 \cdot 10^8$  Mettre/sec est la célérité de la lumière.

Les données d'éphémérides sont:

Les paramètres	Notation
Anomalie moyenne au temps de référence	$M$
La correction de la vitesse moyenne de rotation	$\Delta N$
Racine carrée du demi grand axe de l'orbite	$\sqrt{a_s}$
Excentricité de l'orbite	$e_s$
Les paramètres de correction de l'horloge	$T_{GD}, t_{oc}, a_{f0}, a_{f1}, a_{f2}$
Le temps de référence de l'éphéméride	$t_{oc}$
Coefficient de la correction harmonique en terme de sinus et cosinus de l'argument de latitude	$C_{us}, C_{uc}$
Coefficient de la correction harmonique en terme de sinus et cosinus du rayon d'orbite	$C_{rs}, C_{rc}$
Amplitude du terme de la correction harmonique du sinus et cosinus à l'angle d'inclinaison, respectivement	$C_{is}, C_{ic}$
Longitude du noeud ascendant du plan orbital au temps de référence	$\Omega_e$
Taux de variation de l'ascension	$\dot{\Omega}$
Angle de l'inclinaison au temps de référence	$i$
Argument de périégée	$\omega$
Taux de variation de l'angle d'inclinaison	$\dot{i}$

**Tableau.II.2:** Données des éphémérides

---

# Chapitre III

## Calcul de positionnement sous VHDL

---

### III.1. Introduction

Ce chapitre s'articule de la manière suivante : dans un premier temps, nous allons présenter le langage de haut niveau VHDL, permettant de définir sa puissance mais aussi ses limites de performances. Puis, nous allons manipuler suivant un modèle mathématique les équations de positionnement présentées afin d'élaborer un programme sous VHDL permettant d'évaluer la position du récepteur GPS à partir des positions connues de quatre satellites.

### III.2. Le langage VHDL

#### III.2.1. Historique

Dans les années quatre vingt, le département de la défense américaine fait un appel d'offre afin de disposer d'un langage de description de matériel numérique unique. Le langage VHDL (VHSIC Hardware Description Language) est retenu pour répondre à ce critère. Ce langage est un sous produit de VHSIC (Very High Speed Integrated Circuit) qui est un projet de recherche national mené par le groupement IBM/Texas Instruments/Intermetrics. Ce langage est ouvert au domaine public en 1985 et deviendra une norme IEEE en 1987 sous le nom de IEEE 1076-1987. Des changements minimes se feront pour la seconde normalisation en 1993 et il portera le nom VHDL'93. La dernière norme en cours est la norme IEEE 1076-2001. Ce langage de description matérielle permet la description du matériel d'un système au cours d'une ou plusieurs étapes de conception.

Comme ce langage a pour vocation d'être un langage de description matérielle numérique, il est exploité par tous les fabricants de circuits numériques pour son indépendance à la technologie de fabrication. Il est aussi bien utilisé pour le développement, la synthèse ou la vérification système.

Par la suite (fin des années 90), le langage VHDL-AMS est une redirection du langage VHDL-A qui devait être à la base un langage de modélisation analogique. Le langage VHDLAMS, dont les bases numériques sont le VHDL, permet la modélisation d'un système multidisciplinaire. Il gère donc aussi bien les signaux numériques que

analogiques. Comme le VHDL, nous pouvons faire aussi bien de la description comportementale, de la description structurelle que de la description de type «boîte noire». Ce langage conserve les mêmes principes que le VHDL (modularité, flexibilité, extensibilité) ainsi que la même sémantique, mais apporte un net avantage grâce à la possibilité de modéliser un système complet et l'influence de son environnement.

### **III.2.2. Choix de ce langage**

En vue d'implanter notre système, le choix du langage VHDL semble incontournable, quelque soit la cible que nous choisirons pour notre circuit final. Notre système sera alors réutilisable, flexible, extensible et permettra de calculer la position GPS. En vue d'une implantation, le langage VHDL semble incontournable puisque quelque soit la cible choisie, ce langage est supporté par la quasi-totalité des logiciels de CAO.

### **III.2.3. Description du langage VHDL**

#### **III.2.3.1. Les différentes descriptions possibles**

Trois types de descriptions de fonctions sont identifiés et complémentaires : la description matérielle, la description comportementale, et la description fonctionnelle.

Comme nous l'avons énoncé précédemment, le langage VHDL a été créé pour permettre une description matérielle d'une fonction. Une description matérielle (ou structurelle) définit la structure d'un modèle par un assemblage de composants, ou des boîtes noires. Ce type de description permet de créer la fonction voulue au niveau composant à l'aide de l'association d'éléments sous formes de portes logiques. C'est pourquoi la description structurelle est la seule à être synthétisable puisqu'elle fait référence au matériel de type porte logique élémentaire.

Une autre possibilité de description est la description comportementale qui permet de définir le fonctionnement d'un système ou le comportement d'un modèle. Cette description ne repose pas sur une structure mais plus sur des algorithmes.

La dernière possibilité de description est celle appelée « flot de données » ou description fonctionnelle. Elle rejoint la description comportementale puisqu'elle se base sur l'expression des fonctions de sortie à partir d'équations booléennes. Il apparaît donc plus difficile d'utiliser ce type de description dans le cas d'un circuit complexe où il est nécessaire de se rattacher à une structure.

Au vu de la définition des différentes descriptions possibles, nous avons choisi d'utiliser la description structurelle afin de synthétiser facilement notre système. Cette démarche demande effectivement plus d'investissement au niveau de la définition de la structure du circuit mais ce temps sera regagné lors de l'étape de synthèse.

### III.2.3.2. La structure fondamentale d'un modèle VHDL

L'organisation d'un modèle VHDL est illustrée sur la figure (III.1).

Ce modèle VHDL comprend les parties suivantes :

1. Une déclaration de paquetage, utilisée par plusieurs fichiers, sous-programmes et composants. Elle permet de définir les bibliothèques utilisées, les fichiers, sous-programmes et composants qui composent le corps de paquetage.
2. L'architecture globale de l'entité peut contenir un ou plusieurs composants, chaque composant étant défini par les mêmes parties que l'entité de conception principale.
3. Le corps de l'entité comprenant la déclaration de cette entité et son architecture interne.

Les parties (1) et (2) permettent une description matérielle du système alors que la dernière (3) permet de regrouper les informations pouvant être réutilisées dans d'autres systèmes. Toutes les déclarations (entité, configuration et paquetage) décrivent une vue extérieure, c'est-à-dire qu'elles sont visibles par toutes les parties du modèle et permettent ainsi le partage et la réutilisation des ressources. Elles sont généralement associées aux parties « corps ». Ces parties « corps » permettent de définir une vue interne de l'entité ou du paquetage et une description fine des différentes architectures ou paquetages sera faite. On peut définir pour une même déclaration d'entité plusieurs architectures.

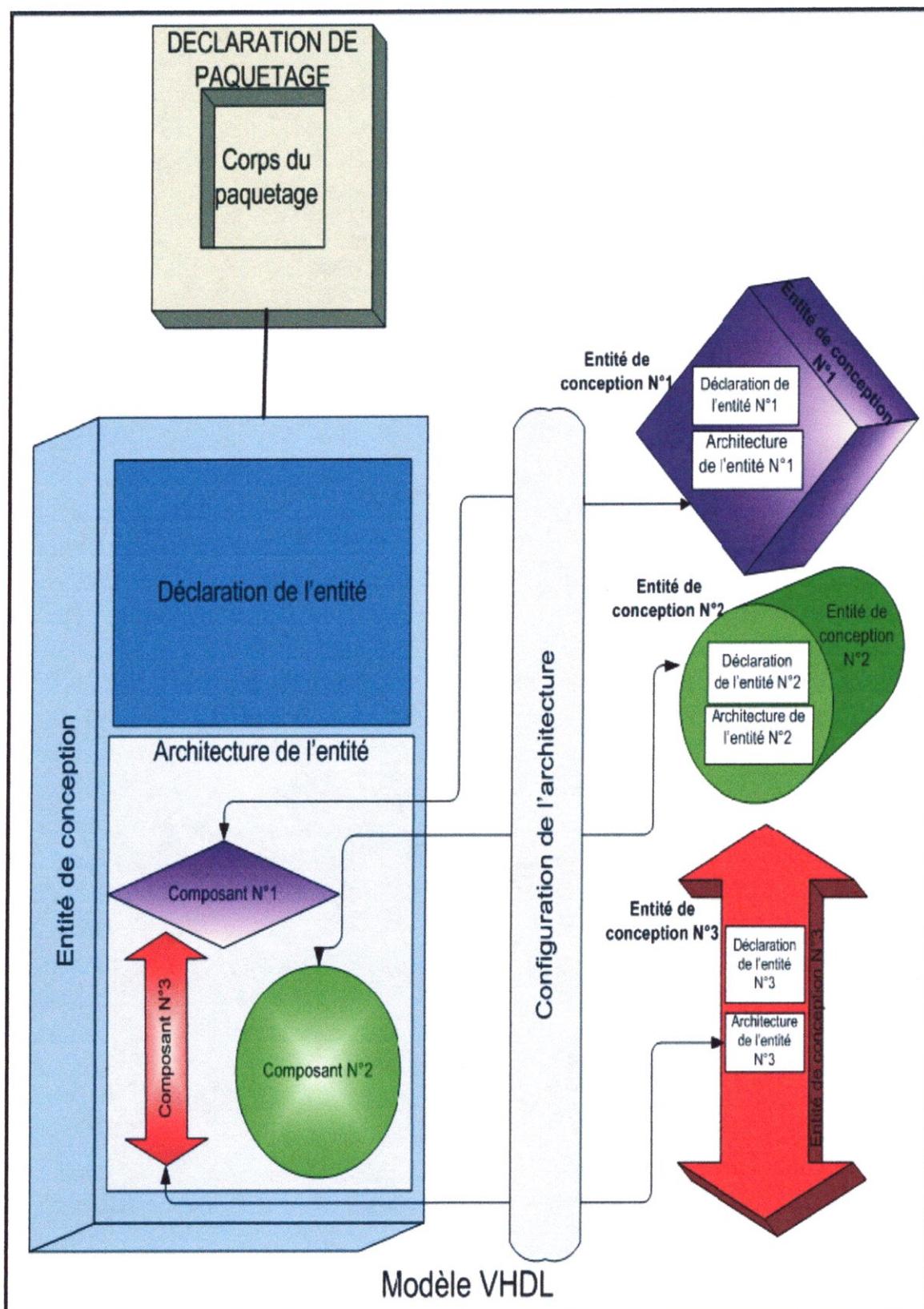
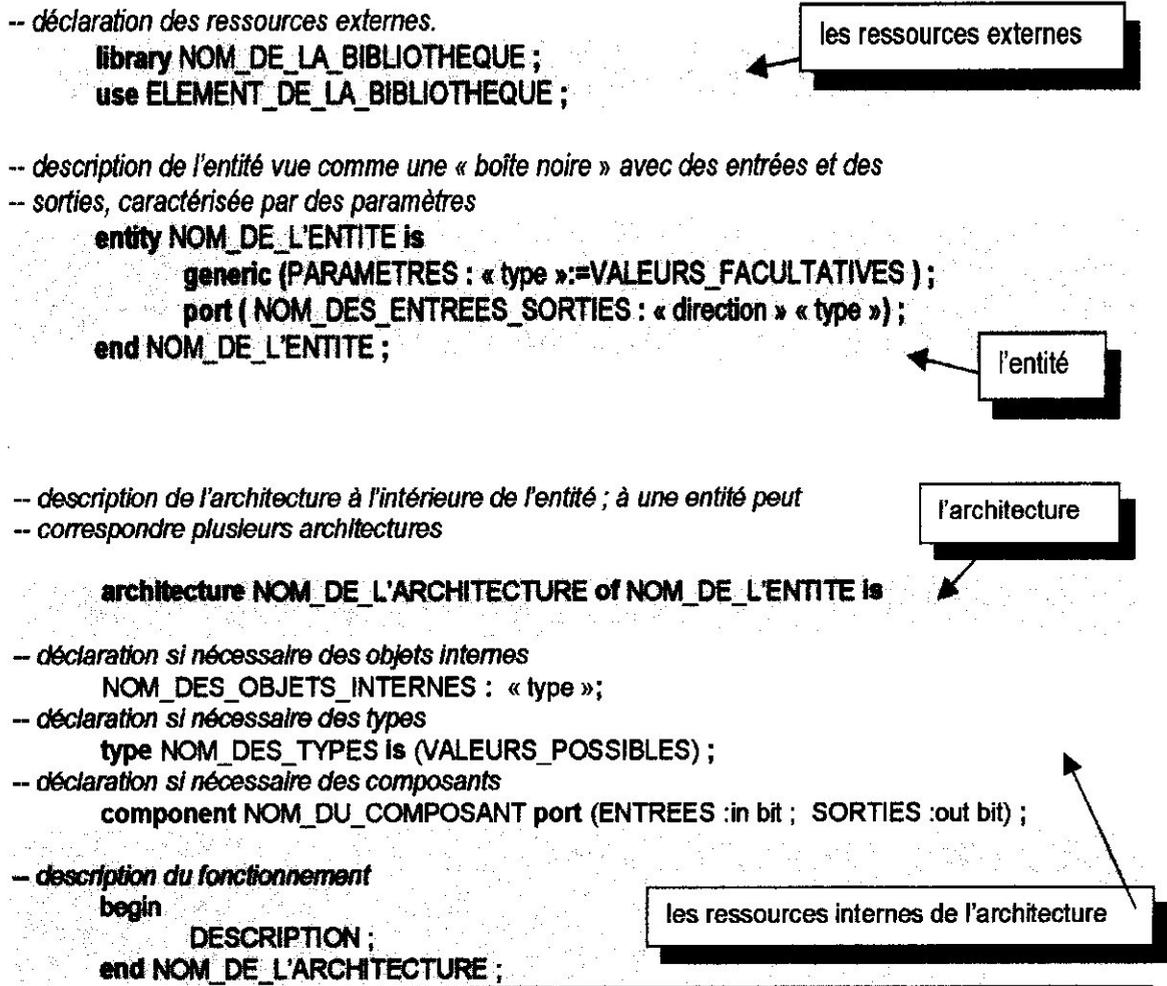


Figure.III.1: L'organisation d'un modèle VHDL.

La figure (III. 2) présente un exemple type de structure de fichier VHDL, faisant apparaître le paquetage, la déclaration de l'entité et son architecture.



Comme on peut le voir, la structure comprend une entité, c'est à dire une "boîte noire" décrivant les entrées sorties, et une architecture associée à l'entité décrivant le fonctionnement.

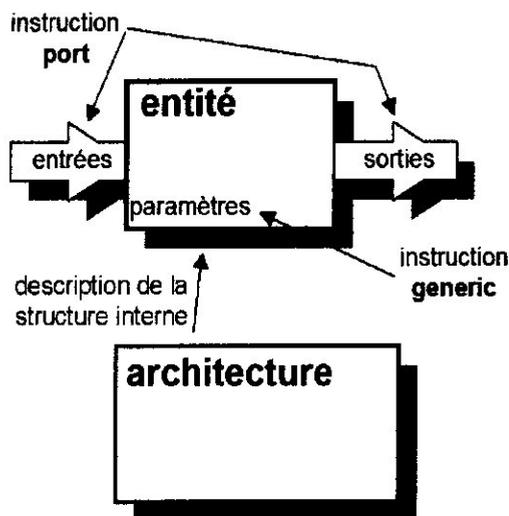


Figure.III.2: Structure d'un fichier

### III.2.3.3. Les signaux

Afin que chaque entité puisse communiquer avec l'extérieur ou simplement dans le modèle principal il existe deux classes de déclaration de signaux generic et ports. Les signaux generic sont des constantes ou des paramètres qui servent à rendre le système plus général.

Les signaux ports sont des variables ou des noeuds entre chaque entité. Ils sont définis par un nom, un mode et un type.

Par exemple clk\_160nco : in std\_logic ;

Le signal porte le nom clk\_160nco, est de mode entrée (in) et son type est std\_logic (standard logique).

Un mode comprend trois déclarations possibles. Le mode entrée (in), le mode sortie (out) et le mode bidirectionnel (inout). Enfin, le type peut être entier, flottant, énuméré ou tableau.

### III.2.3.4. Le processus

Une notion importante est la notion de processus ou « process ». Un processus regroupe un ensemble d'instructions qui sont exécutées en fonction d'évènements auxquels ils sont sensibles. Les instructions du processus s'exécutent séquentiellement jusqu'à un point d'arrêt. C'est à la fin du processus que les signaux prennent leurs valeurs.

## III.3. L'équation de positionnement

Le chapitre (II) nous a permis de modéliser mathématiquement le calcul de positionnement GPS, cette modélisation nous a fournie un ensemble de quatre équations non-linéaires, données par la forme :

$$ct_i = R_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \quad (\text{III.1})$$

$$ct_j = R_j = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j + z)^2} \quad (\text{III.2})$$

$$ct_k = R_k = \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} \quad (\text{III.3})$$

$$ct_l = R_l = \sqrt{(x_l - x)^2 + (y_l - y)^2 + (z_l - z)^2} \quad (\text{III.4})$$

Nous allons maintenant essayer d'adapter ces équation à l'utilisation sous VHDL, pour cela on note que la distance entre le récepteur et un satellite est

déterminée en mesurant le temps de propagation du signal satellitaire, en le multipliant par la célérité 'c' on obtient la distance R. Dans ce qui suit nous allons essayer de proposer une méthode de résolution de ces équations adaptée à l'utilisation sous VHDL, cette méthode est basée sur la différence des temps d'arrivés (TDOA). En premier temps nous allons combiner les quatre équations de la manière suivante :

$$R_i - R_j = R_{ij} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} \quad (\text{III.5})$$

$$R_i - R_k = R_{ik} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} \quad (\text{III.6})$$

$$R_k - R_j = R_{kj} = \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} - \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} \quad (\text{III.7})$$

$$R_k - R_l = R_{kl} = \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} - \sqrt{(x_l - x)^2 + (y_l - y)^2 + (z_l - z)^2} \quad (\text{III.8})$$

En déplaçant le terme de la racine carrée vers le terme à gauche, on obtient:

$$R_{ij} - \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = -\sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} \quad (\text{III.9})$$

$$R_{ik} - \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = -\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} \quad (\text{III.10})$$

$$R_{kj} - \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} = -\sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} \quad (\text{III.11})$$

$$R_{kl} - \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} = -\sqrt{(x_l - x)^2 + (y_l - y)^2 + (z_l - z)^2} \quad (\text{III.12})$$

Puis en prenant le carré des deux cotés de chaque équation, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{ij}^2 - 2R_{ij}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \\ = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} R_{ik}^2 - 2R_{ik}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \\ = (x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned} R_{kj}^2 - 2R_{kj}\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} + (x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2 \\ = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{aligned} R_{kl}^2 - 2R_{kl}\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} + (x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2 \\ = (x_l - x)^2 + (y_l - y)^2 + (z_l - z)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

On développe chaque équation de la manière suivante:

$$\begin{aligned} R_{ij}^2 - 2R_{ij}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + x_i^2 + 2x_ix + x^2 + y_i^2 - 2y_iy + y^2 + z_i^2 \\ - 2z_iz + z^2 = x_j^2 - 2x_jx + x^2 + y_j^2 - 2y_jy + z_j^2 - 2z_jz + z^2 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} R_{ik}^2 - 2R_{ik}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + x_i^2 + 2x_ix + x^2 + y_i^2 - 2y_iy + y^2 + z_i^2 \\ - 2z_iz + z^2 = x_k^2 - 2x_kx + x^2 + y_k^2 - 2y_ky + z_k^2 - 2z_kz + z^2 \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$$\begin{aligned} R_{kj}^2 - 2R_{kj}\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} + x_k^2 + 2x_kx + x^2 + y_k^2 - 2y_ky + y^2 + z_k^2 \\ - 2z_kz + z^2 = x_j^2 - 2x_jx + x^2 + y_j^2 - 2y_jy + z_j^2 - 2z_jz + z^2 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} R_{kl}^2 - 2R_{kl}\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} + x_k^2 + 2x_kx + x^2 + y_k^2 - 2y_ky + y^2 + z_k^2 \\ - 2z_kz + z^2 = x_l^2 - 2x_lx + x^2 + y_l^2 - 2y_ly + z_l^2 - 2z_lz + z^2 \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Par élimination des termes  $x^2, y^2$  et  $z^2$ , les équations se réduisent à:

$$\begin{aligned} R_{ij}^2 - 2R_{ij}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + x_i^2 + 2x_ix - y_i^2 - 2y_iy + z_i^2 - 2z_iz \\ = x_j^2 - 2x_jx + y_j^2 - 2y_jy + z_j^2 - 2z_jz \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned} R_{ik}^2 - 2R_{ik}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + x_i^2 + 2x_ix - y_i^2 - 2y_iy + z_i^2 - 2z_iz \\ = x_k^2 - 2x_kx + y_k^2 - 2y_ky + z_k^2 - 2z_kz \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{aligned} R_{kj}^2 - 2R_{kj}\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} + x_k^2 + 2x_kx - y_k^2 - 2y_ky + z_k^2 - 2z_kz \\ = x_j^2 - 2x_jx + y_j^2 - 2y_jy + z_j^2 - 2z_jz \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} R_{kl}^2 - 2R_{kl}\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} + x_k^2 + 2x_kx - y_k^2 - 2y_ky + z_k^2 - 2z_kz \\ = x_l^2 - 2x_lx + y_l^2 - 2y_ly + z_l^2 - 2z_lz \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

On met la racine carrée à droite et on combine les termes semblables :

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = [R_{ij}^2 + x_i^2 - x_j^2 + y_i^2 - y_j^2 + z_i^2 - z_j^2 + 2x_j x - 2x_i x + 2y_j y - 2y_i y + 2z_j z - 2z_i z] / 2R_{ij} \quad (\text{III.25})$$

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = [R_{ik}^2 + x_i^2 - x_k^2 + y_i^2 - y_k^2 + z_i^2 - z_k^2 + 2x_k x - 2x_i x + 2y_k y - 2y_i y + 2z_k z - 2z_i z] / 2R_{ik} \quad (\text{III.26})$$

$$\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} = [R_{kj}^2 + x_k^2 - x_j^2 + y_k^2 - y_j^2 + z_k^2 - z_j^2 + 2x_j x - 2x_k x + 2y_j y - 2y_k y + 2z_j z - 2z_k z] / 2R_{kj} \quad (\text{III.27})$$

$$\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} = [R_{ki}^2 + x_k^2 - x_i^2 + y_k^2 - y_i^2 + z_k^2 - z_i^2 + 2x_i x - 2x_k x + 2y_i y - 2y_k y + 2z_i z - 2z_k z] / 2R_{ki} \quad (\text{III.28})$$

L'ensemble des équations peut être simplifié en substituant  $x_j - x_i$  par  $x_{ji}$ ,  $y_j - y_i$  par  $y_{ji}$ , on obtient :

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = [R_{ij}^2 + x_i^2 - x_j^2 + y_i^2 - y_j^2 + z_i^2 - z_j^2 + 2x_{ji} x + 2y_{ji} y + 2z_{ji} z] / 2R_{ij} \quad (\text{III.29})$$

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = [R_{ik}^2 + x_i^2 - x_k^2 + y_i^2 - y_k^2 + z_i^2 - z_k^2 + 2x_{ki} x + 2y_{ki} y + 2z_{ki} z] / 2R_{ik} \quad (\text{III.30})$$

$$\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} = [R_{kj}^2 + x_k^2 - x_j^2 + y_k^2 - y_j^2 + z_k^2 - z_j^2 + 2x_{jk} x + 2y_{jk} y + 2z_{jk} z] / 2R_{kj} \quad (\text{III.31})$$

$$\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2} = [R_{ki}^2 + x_k^2 - x_i^2 + y_k^2 - y_i^2 + z_k^2 - z_i^2 + 2x_{ik} x + 2y_{ik} y + 2z_{ik} z] / 2R_{ki} \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{aligned} & [R_{ij}^2 + x_i^2 - x_j^2 + y_i^2 - y_j^2 + z_i^2 - z_j^2 + 2x_{ji} x + 2y_{ji} y + 2z_{ji} z] / 2R_{ij} \\ & = [R_{ik}^2 + x_i^2 - x_k^2 + y_i^2 - y_k^2 + z_i^2 - z_k^2 + 2x_{ki} x + 2y_{ki} y + 2z_{ki} z] / 2R_{ik} \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{aligned} R_{ik} [R_{ij}^2 + x_i^2 - x_j^2 + y_i^2 - y_j^2 + z_i^2 - z_j^2] / 2 - R_{ij} [R_{ik}^2 + x_i^2 - x_k^2 + y_i^2 - y_k^2 \\ + z_i^2 - z_k^2] / 2 = R_{ij} [x_{ki} x + y_{ki} y + z_{ki} z] - R_{ik} [x_{ji} x + y_{ji} y + z_{ji} z] \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} & x [R_{ij} x_{ki} - R_{ik} x_{ji}] + y [R_{ij} y_{ki} - R_{ik} y_{ji}] + z [R_{ij} z_{ki} - R_{ik} z_{ji}] \\ & = R_{ik} [R_{ij}^2 + x_i^2 - x_j^2 + y_i^2 - y_j^2 + z_i^2 - z_j^2] / 2 - R_{ij} [R_{ik}^2 + x_i^2 - x_k^2 + y_i^2 - y_k^2 + z_i^2 - z_k^2] \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Maintenant, on obtient les équations suivantes:

$$y = Ax + Bz + C \quad (\text{III.36})$$

$$A = \left[ \frac{R_{ik}x_{ji} - R_{ij}x_{ki}}{R_{ij}y_{ki} - R_{ik}y_{ji}} \right] \quad (\text{III.37})$$

$$B = \left[ \frac{R_{ik}z_{ji} - R_{ij}z_{ki}}{R_{ij}y_{ki} - R_{ik}y_{ji}} \right] \quad (\text{III.38})$$

$$C = \frac{R_{ik}[R_{ij}^2 + x_i^2 - x_j^2 + y_i^2 - y_j^2 + z_i^2 - z_j^2] - R_{ij}[R_{ik}^2 + x_k^2 - x_l^2 + y_k^2 - y_l^2 + z_k^2 - z_l^2]}{2[R_{ij}y_{ki} - R_{ik}y_{ji}]} \quad (\text{III.39})$$

De la même façon, l'égalisation des équations (III.31) et (III.32) produit une deuxième équation de la forme  $y = Dx + Ez + F$ , on trouve l'ensemble d'équations suivant:

$$y = Dx + Ez + F \quad (\text{III.40})$$

$$D = \left[ \frac{R_{kl}x_{jk} - R_{kj}x_{lk}}{R_{kj}y_{lk} - R_{kl}y_{jk}} \right] \quad (\text{III.41})$$

$$E = \left[ \frac{R_{kl}z_{jk} - R_{kj}z_{lk}}{R_{kj}y_{lk} - R_{kl}y_{jk}} \right] \quad (\text{III.42})$$

$$F = \frac{R_{kl}[R_{kj}^2 + x_k^2 - x_l^2 + y_k^2 - y_l^2 + z_k^2 - z_l^2] - R_{kj}[R_{kl}^2 + x_l^2 - x_k^2 + y_l^2 - y_k^2 + z_l^2 - z_k^2]}{2[R_{kj}y_{lk} - R_{kl}y_{jk}]} \quad (\text{III.43})$$

En utilisant les équations (III.36) et (III.40), on obtient une équation linéaire :

$$Ax + Bx + C = Dx + Ez + F. \quad (\text{III.44})$$

$$x = Gz + H \quad (\text{III.45})$$

$$G = \frac{E - B}{A - D} \quad (\text{III.46})$$

$$H = \frac{F - C}{A - D} \quad (\text{III.47})$$

Substituant l'équation (III.45) dans l'équation (III.36) on obtient les équations suivantes:

$$y = A(Gz + H) + Bz + C \quad (III.48)$$

$$y = Iz + J \quad (III.49)$$

$$I = AG + B \quad (III.50)$$

$$J = AH + C \quad (III.51)$$

Les équations (III.45) et (III.49) sont maintenant substituées dans l'équation (III.30) pour dériver la position  $z$ .

$$2R_{ik} \sqrt{(x_i - (Gz + H))^2 + (y_i - (Iz + J))^2 + (z_i - z)^2} \quad (III.52)$$

$$= [R_{ik}^2 + x_i^2 - x_k^2 + y_i^2 - y_k^2 + z_i^2 - z_k^2 + 2x_{ki}(Gz + H) + 2y_{ki}(Iz + J) + 2z_{ki}z]$$

$$2R_{ik} \sqrt{G^2 z^2 - 2Gz(x_i - H) + (x_i - H)^2 + (I^2 z^2 - 2Iz(y_i - J) + (y_i - J)^2) + (z^2 - 2z_i z + z_i^2)} \quad (III.53)$$

$$= Lz + K$$

$$K = R_{ik}^2 + x_i^2 - x_k^2 + y_i^2 - y_k^2 + z_i^2 - z_k^2 + 2x_{ki}H + 2y_{ki}J \quad (III.54)$$

$$L = 2[x_{ki}G + y_{ki}I + 2z_{ki}] \quad (III.55)$$

$$4R_{ik}^2 [G^2 z^2 + I^2 z^2 + z^2 - 2Gz[x_i - H] - 2Iz[y_i - J] - 2z_i z + (x_i - H)^2 + (y_i - J)^2 + z_i^2] = L^2 z^2 + 2KLz + K^2 \quad (III.56)$$

$$4R_{ik}^2 [G^2 + I^2 + 1]z^2 - 8R_{ik}^2 [G(x_i - H) + I(y_i - J) + z_i]z + 4R_{ik}^2 [(x_i - H)^2 + (y_i - J)^2 + z_i^2] = L^2 z^2 + 2KLz + K^2 \quad (III.57)$$

Pour obtenir  $z$ , l'équation (III.47) est réarrangée dans une équation binomial:

$$Mz^2 - Nz + O = 0 \quad (III.58)$$

D'où  $M = 4R_{ik}^2 [G^2 + I^2 + 1] - L^2 \quad (III.59)$

$$N = 8R_{ik}^2 [G(x_i - H) + I(y_i - J) + z_i] + 2LK \quad (III.60)$$

$$O = 4R_{ik}^2 [(x_i - H)^2 + (y - J)^2 + z_i^2] - K^2 \quad (\text{III.61})$$

La solution de  $z$  est s'écrit comme :

$$z = \frac{N}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{N}{2M}\right)^2 - \frac{O}{M}} \quad (\text{III.62})$$

Les coordonnées de  $z$  peuvent être utilisées dans les équations linéaire (III.45) et (III.49) pour résoudre les coordonnées  $x$  et  $y$ .

### III.4. Simulations et résultats

Dans ce qui suit nous allons essayer de résoudre l'équation de positionnement GPS formulée précédemment sous VHDL. Notre programme est composé de trois parties, dont la première est réservée à la déclaration des variables, dans notre cas se sont les positions des quatre satellites ainsi que les temps de propagation associés, ces données sont exploitées sous le format binaire. La deuxième partie est réservée au calcul de la position, selon les étapes mathématiques déjà développées, comme la solution proposée fournie deux résultats, nous avons élaboré une troisième partie qui consiste à éliminer la solution non conforme.

Dans un premier lieu, nous avons considéré les données suivantes :

	x	Y	z	t
Satellite i	-15102065	21482069	3683495	86320708
Satellite j	0	6380000	25789348	75293013
Satellite k	15338349	15338349	15338349	67335895
Satellite l	26566800	0	0	78283279

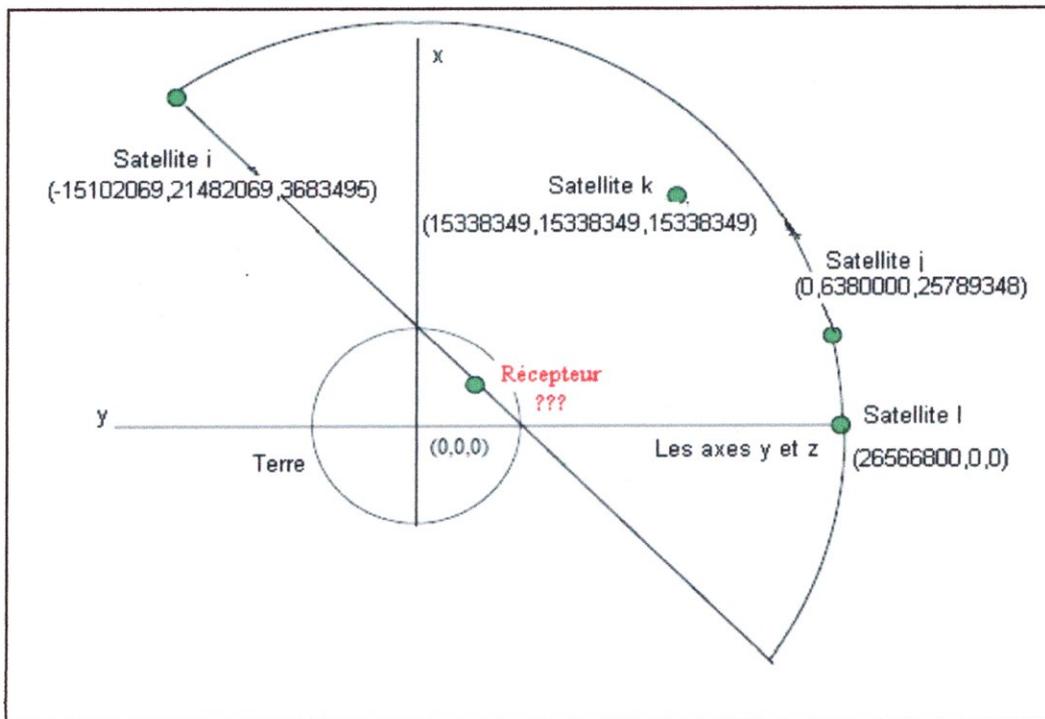
Tableau.III.1: Les coordonnées des quatre satellites

Ces données sont introduites à travers le ‘test bench’ du logiciel Xilinx, représenté par la figure suivante :

Now: 1000 ns	
xi[31:0]	4279865227
xj[31:0]	0
xk[31:0]	15338349
xl[31:0]	26566800
yi[31:0]	21482069
yj[31:0]	6380000
yk[31:0]	15338349
yl[31:0]	0
zi[31:0]	3683495
zj[31:0]	25789348
zk[31:0]	15338349
zl[31:0]	0
ti[31:0]	86320708
tj[31:0]	75293013
tk[31:0]	67335895
tl[31:0]	78283279

**Tableau.III.2:** Les coordonnées des satellites

Ces données sont matérialisées par la figure (III.3) suivante :



**Figure.III.3:** Les positions des satellites

Après exécution, les résultats obtenus sont :

$x_1[31:0]$	3683494
$x_2[31:0]$	4289524632
$y_1[31:0]$	3683495
$y_2[31:0]$	4288815791
$z_1[31:0]$	3683495
$z_2[31:0]$	4289719159

**Tableau.III.3:** Position du récepteur

Alors:

Position 1 (3683494, 3683495, 3683495).

Position 2 (4289524632, 4288815791, 4289719159).

Après élimination de la position non adéquate, la solution finale est bien la première position:

Position récepteur (3683494, 3683495, 3683495).

### III.5. Vérification 1

Par vérification sous Matlab on a constaté que la solution calculée est relativement exacte :

$$\text{Deltari} = \sqrt{((3683494 + 15102069)^2 + (3683495 - 21482069)^2 + (3683495 - 3683495)^2) - 86320708 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltari} = 6.6901 \text{ (m)}$$

$$\text{Deltarj} = \sqrt{((3683494 - 0)^2 + (3683495 - 6380000)^2 + (3683495 - 25789348)^2) - 75293013 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltarj} = 6.5435 \text{ (m)}$$

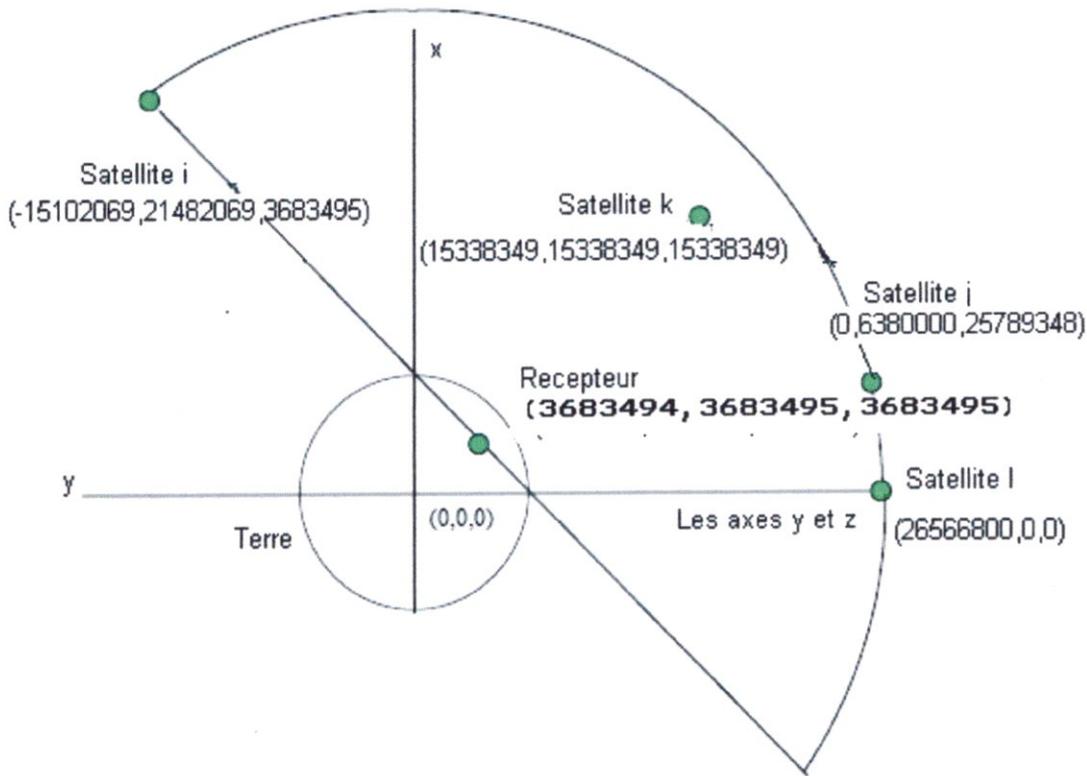
$$\text{Deltark} = \sqrt{((3683494 - 15338349)^2 + (3683495 - 15338349)^2 + (3683495 - 15338349)^2) - 67335895 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltark} = 6.3865 \text{ (m)}$$

$$\text{Deltarl} = \sqrt{((3683494 - 26567800)^2 + (3683495 - 0)^2 + (3683495 - 0)^2) - 78283279 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltarl} = 9.8283 \text{ (m)}$$

Donc la solution finale peut être matérialisée par la figure suivante :



**Figure.III.4:** La position du récepteur

Nous proposons un deuxième exemple afin de valider notre programme, nous choisissons les données introduites par le 'test bench' suivant :

Now: 1000 ns	
$x_i[31:0]$	4279864796
$x_j[31:0]$	0
$x_k[31:0]$	15338000
$x_l[31:0]$	26566500
$y_i[31:0]$	21482000
$y_j[31:0]$	6380000
$y_k[31:0]$	15338000
$y_l[31:0]$	0
$z_i[31:0]$	86320200
$z_j[31:0]$	75293000
$z_k[31:0]$	15338000
$z_l[31:0]$	0
$t_i[31:0]$	86320700
$t_j[31:0]$	75293000
$t_k[31:0]$	67335700
$t_l[31:0]$	78283000

Tableau.III.4 : Les coordonnées des satellites

Ces données sont matérialisées par la figure (III.5) suivante :

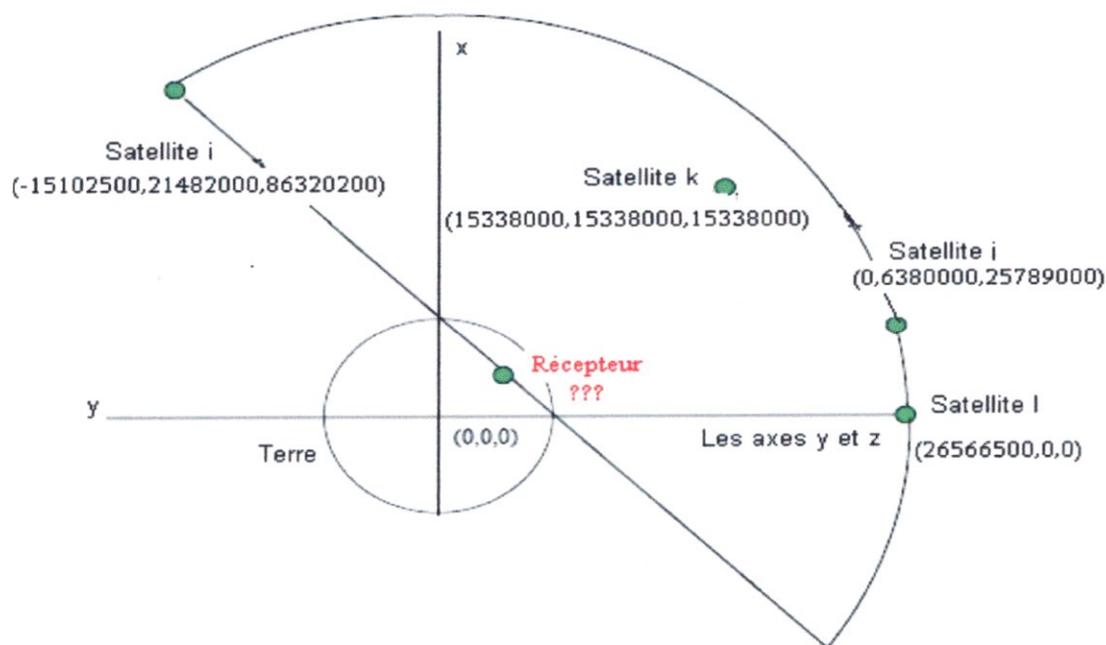


Figure.III.5. La position des satellites

Après exécution, les résultats sont :

- Position 1 (550561276, 336276530, 206801460).
- Position 2 (4199798179, 4247703982, 5205774).

Ce tableau représente les résultats obtenus :

$x_1[31:0]$	550561276
$x_2[31:0]$	4199798179
$y_1[31:0]$	336276530
$y_2[31:0]$	4247703982
$z_1[31:0]$	206801460
$z_2[31:0]$	5205774

**Tableau.III.5.** La position du récepteur

Après élimination de la position non adéquate, la solution finale est bien la première position :

Position –récepteur (550561276, 336276530, 206801460).

### III.6. Vérification 2

Par vérification sous Matlab on a constaté que la solution calculée est relativement exacte :

$$\text{Deltari} = \sqrt{((550561276 + 15102500)^2 + (336276530 - 21482000)^2 + (206801460 - 86320200)^2) - 86320700 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltari} = 6.32 \text{ (m)}$$

$$\text{Deltarj} = \sqrt{((550561276 - 0)^2 + (336276530 - 6380000)^2 + (206801460 - 25789000)^2) - 75293000 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltarj} = 6.44 \text{ (m)}$$

$$\text{Deltark} = \sqrt{((550561276 - 15338000)^2 + (336276530 - 15338000)^2 + (206801460 - 15338000)^2) - 67335700 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltark} = 6.32 \text{ (m)}$$

$$\text{Deltarl} = \sqrt{((550561276 - 26566500)^2 + (336276530 - 0)^2 + (206801460 - 0)^2) - 78283000 * 2.99792458 * 1e8 * 1e-9}$$

$$\text{Deltarl} = 6.32 \text{ (m)}$$

Donc la solution finale peut être matérialisée par la figure suivante :

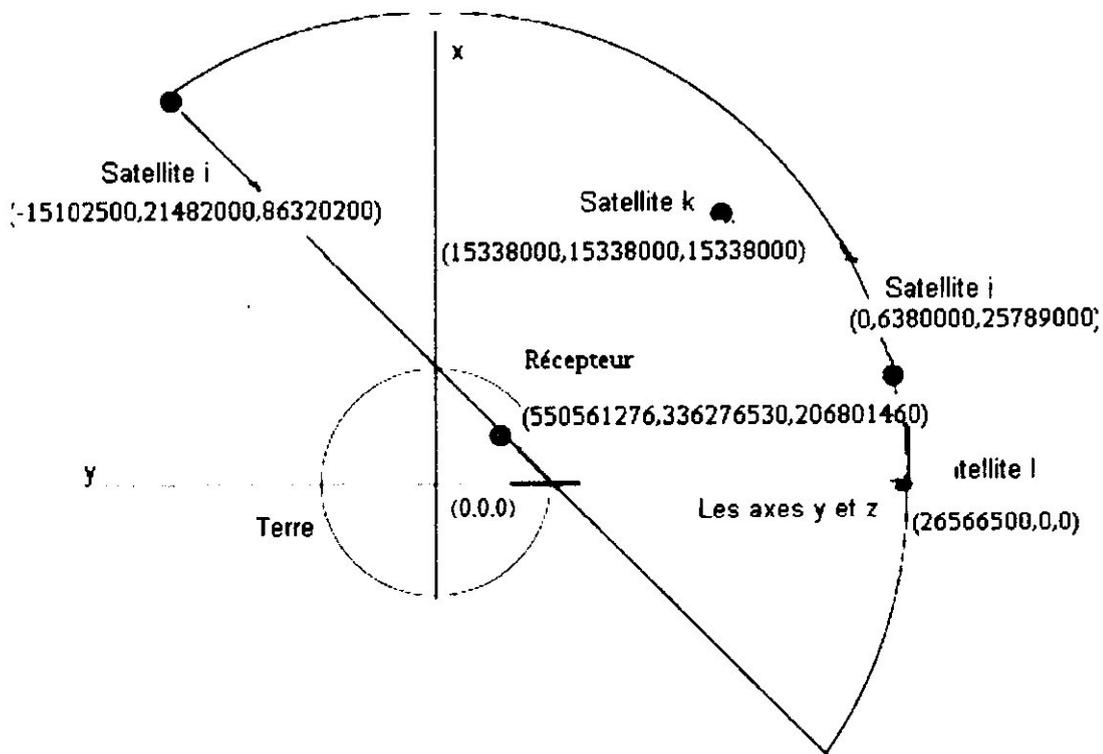


Figure.III.6: position du récepteur

Finalement, en utilisant l'option 'Create schematic symbol' du logiciel Xilinx, sachant que ce module nous fourni l'implémentation de notre programme sous forme d'un circuit intégré, nous obtenons le circuit suivant :

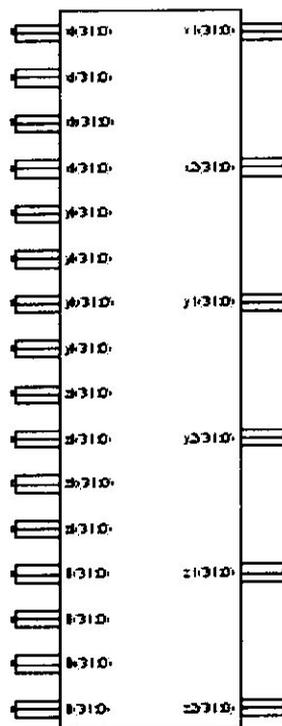


Figure.III.7: circuit intégré

---

Continued

---

## **Conclusion générale**

Dans le cadre du projet de fin d'études, nous avons présenté dans ce travail qui consiste à la réalisation d'un circuit intégré sous VHDL permettant de déterminer la position du récepteur GPS à l'aide des données de positionnement des quatre satellites.

Ce Travail nous a permis de se familiariser avec le langage VHDL qui est un langage flexible, extensible de calculs numériques et d'implantation des circuits intégrés sur FPGA à l'aide du logiciel Xilinx.

De même, nous avons approfondi nos connaissances dans le domaine positionnement par GPS.

Enfin, nous espérons que ce modeste travail servira comme base et sera bénéfique pour d'autres étudiants qui voudraient continuer dans ce domaine et soit complété par d'autres études.

[Redacted line]

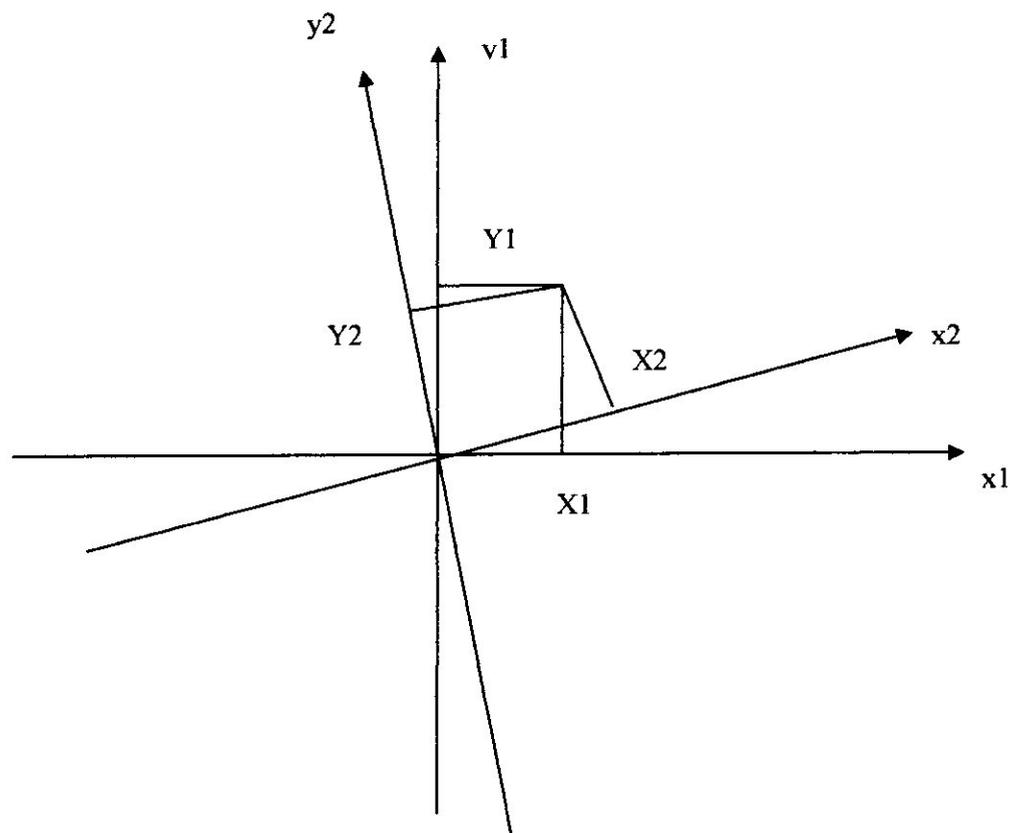
[Redacted line]

## La matrice de passage

Dans ce paragraphe, la matrice de passage sera introduite. Un exemple à deux dimensions simple sera utilisé pour illustrer l'idée, qui sera étendue dans un trois dimensions, l'un est sans preuve supplémentaire. La figure montre deux systèmes à deux dimensions  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ . Les coordonnées de deuxième système sont obtenues par la rotation d'un angle positif  $\alpha$ . Un point P est utilisé pour trouver la relation entre les deux systèmes. Le point P est situé à  $(X_1, Y_1)$  dans le système  $(x_1, y_1)$  et à  $(X_2, Y_2)$  dans le système  $(x_2, y_2)$ . La relation entre  $(X_2, Y_2)$  et  $(X_1, Y_1)$  peut être trouvée dans les équations suivantes:

$$X_2 = X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha = X_1 \cos(X_1, X_2) + Y_1 \cos(Y_1, X_2)$$

$$Y_2 = -X_1 \sin \alpha + Y_1 \cos \alpha = X_1 \cos(X_1, Y_2) + Y_1 \cos(Y_1, Y_2)$$



**Figure:** utilisation du triés position pour trouver une position

L'équation peut être écrite sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(X_1, X_2) & \cos(Y_1, X_2) \\ \cos(X_1, Y_2) & \cos(Y_1, Y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage est définie par :

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(X_1 \text{ sur } X_2) & \cos(Y_1 \text{ sur } X_2) \\ \cos(X_1 \text{ sur } Y_2) & \cos(Y_1 \text{ sur } Y_2) \end{bmatrix}$$

Cela représente que le système est transformé du système 1 au système 2.

Dans un système à trois dimensions, la matrice peut être écrit comme :

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(X_1 \text{ sur } X_2) & \cos(Y_1 \text{ sur } X_2) & \cos(Z_1 \text{ sur } X_2) \\ \cos(X_1 \text{ sur } Y_2) & \cos(Y_1 \text{ sur } Y_2) & \cos(Z_1 \text{ sur } Y_2) \\ \cos(X_1 \text{ sur } Z_2) & \cos(Y_1 \text{ sur } Z_2) & \cos(Z_1 \text{ sur } Z_2) \end{bmatrix}$$

Quelque fois, c'est difficile de faire une transformation des coordonnées d'un signal à un autre, mais la transformation peut être accompli avec une manière pas à pas. Par exemple, si la transformation est de tourner l'angle  $\alpha$  autour de l'axe z et tourner l'angle  $\beta$  autour de l'axe y, il est plus facile d'exécuter la transformation dans deux pas. En d'autres termes, la matrice de passage peut être utilisée dans une manière cascade. Le premier pas est de tourner un angle positif  $\alpha$  autour de l'axe z. la matrice de passage correspondante est :

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le deuxième pas est de tourner un angle positif  $\beta$  autour de l'axe x ; la matrice de

passage correspondante est : 
$$C_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

La transformation totale peut être écrite comme:

$$C_1^3 = C_2^3 C_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Il devrait être noté que l'ordre de multiplication est très important; si l'ordre est inversé, le résultat sera mal obtenu.

Supposons qu'on veut transformer les coordonnées du système 1 au système n via les systèmes 2,3,...,n-1. La relation suivante peut être utilisée:

$$C_1^n = C_{n-1}^n \dots C_2^3 C_1^2$$

En général, chaque  $C_{i-1}^i$  représente seulement un signal transformé. Cette méthode de la cascade sera utilisée pour obtenir le système centré et fixé par rapport à la terre (ECEF).

---

# Bibliographie

---

## Références

[1] S. Meguelati . (2005)

« Simulation d'un algorithme de contrôle d'intégrité de GPS de type RAIM SNAPSHOT » . thèse d'ingénieur d'état. Département de navigation aérienne, institut d'aéronautique, université de Blida.

[2] Didier Bouteloup. (2003)

« cours de Géodésie. Chapitre 7 : Présentation du système GPS ». Cellule pédagogique et de recherche en astrogéodésie. ENSG-CPRAG.

[3] Vincent Freycon, Nicolas Fauvet. (Juin 1998)

« Les GPS de l'acquisition des relevés à leur intégration dans un SIG »  
Montpellier. France.

[5] Amar Zobot, (juin 2003) « Etude et simulation des performances du système GPS ». Thèse d'ingénieur d'état. Département de navigation aérienne, institut d'aéronautique, université de Blida .

[6] M. KRUMVIEDA. (juin 1990)

A Complete IF Software GPS Receiver : A Tutorial about the Details