

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVESITE SAAD DAHLEB DE BLIDA
FACULTE DES SCIENCES D'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE

*PROJET DE FIN D'ETUDES POUR L'OBTENTION DU DIPOLME
D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE*

*Option
STRUCTURE*

Thème :

***ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES
AÉRODYNAMIQUES D'UN PROFIL D'AILE
EN PRÉSENCE D'UNE ET DE DEUX
PAROIS PLANE PAR LA MÉTHODE DES
IMAGES***

PROPOSÉ PAR :

Mr. T. ZEBBICHE

ÉTUDIÉ PAR :

↓ *BEY Noureddine*
↓ *BELGROUNE Mounira*

**PROMOTION
2007**

DEDICACE

A la mémoire de notre ami HAMIDA TAYEB

A mémoire de l'étudiant BOUSBIAA de la spécialité

Installation

Aux êtres chers que nous venons de perdre

A tous ceux qui nous sont chers

ON DEDIE LE FRUIT DE NOS EFFORTS COMMUNS

REMERCIEMENTS

Nous remercions Dieu de nous avoir permis de mener à bien notre entreprise, Que son nom soit glorifié

Notre remerciement va ensuite à Mr ZEBBICH qui a placé en nous et en nos capacités une confiance aveugle et ce, jusqu'au bout sans jamais avoir manifesté le moindre rechignement devant le retard mis par rapport à l'évolution de notre travail .Que sa patience excuse notre caractère emporté. Un grand remerciement aussi pour Mr TAHI qui a guidé au début nos pas nonchalants et conseillé tout le long de notre projet – avec une disponibilité irréprochable- de manière fort judicieuse .

Egalement va notre reconnaissance à tous les enseignants du département d'Aéronautique sous l'égide de qui nous avons eu la joie et l'honneur d'étudier.

Une pensée particulière pour tout le personnel de l'institut de génie mécanique qui fleure bon la joie de vivre et avec qui nous avons eu de forts moments de gaieté, d'émotion, et de complicité, spécialement KHADIDJA et FARIDA qui ont toujours laissé la bibliothèque en notre entière disposition .

Notre plus profonde affection à ZOLA, la sœur et l'amie, pour son hospitalité, sa disponibilité et surtout, sa générosité... On ne saurait la remercier pour tous les services qu'elle nous a rendus ... ALLAH IDJAZIK ZOLA.

Notre gratitude va également à Mr .le directeur et tout le personnel du centre pour jeunes de Ouled Yaich pour nous y avoir laissé travailler pendant presque six mois

Puissent toutes ces personnes trouver ici l'expression de notre plus grand respect.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
I. L'EFFET DE SOL	3
I.1 L'HISTOIRE DE L'EFFET DE SOL	3
I.2 DESCRIPTION ET EXPLICATION PRATIQUE DE L'EFFET DE SOL	6
I.3 LES ECONOMIES DE CARBURANT	7
I.3.1. LES CALCULS	7
a. <i>Augmentation du coefficient de portance</i>	7
b. <i>Diminution de la traînée</i>	9
I.3.2. EN PRATIQUE	11
II. NOTIONS AERODYNAMIQUES ET METHODES DES PANNEAUX	12
II.1 INTRODUCTION	12
II.2 DEFINITION ET OBJECTIF DE L'AERODYNAMIQUE	13
II.3 METHODES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES EN AERODYNAMIQUE	14
II.4 CONCEPTS DE BASE	16
II.4.1. ECOULEMENT IRROTATIONNEL PLAN	16
II.4.2. POTENTIEL DES VITESSES	16
II.4.3. FONCTION DE COURANT	17
II.4.4. LES DIFFERENTS TYPES D'ECOULEMENT	18
a. <i>Écoulement uniforme</i>	18
b. <i>Source plane ou puits</i>	19
c. <i>Tourbillon ponctuel</i>	22
d. <i>Doublet ou dipôle</i>	23
II.4.5. METHODE DE SUPERPOSITION DES ECOULEMENTS	25
a. <i>Superposition d'une source plane et d'un écoulement uniforme</i>	25
b. <i>Superposition d'une source et d'un puits plans</i>	26
c. <i>Superposition d'une source, d'un puits, et d'un écoulement uniforme</i>	27
d. <i>Superposition d'un tourbillon et d'un écoulement uniforme</i>	28

<i>e.</i>	<i>Superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme (écoulement sans circulation autour d'un cylindre)</i>	29
<i>f.</i>	<i>Superposition d'un doublet, d'un écoulement uniforme et d'un tourbillon (écoulement avec circulation autour d'un cylindre)</i>	30
II.5	PROFILS AERODYNAMIQUES EN REGIME SUBSONIQUE	32
II.5.5.	CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS	32
<i>a.</i>	<i>Profils de type NACA</i>	33
<i>b.</i>	<i>Principales caractéristiques géométriques des profils</i>	36
II.4.6.	COEFFICIENT DE PRESSION	37
II.4.7.	CONDITION DE KUTTA	38
II.5	PRESENTATION DES METHODES DES PANNEAUX	39
II.5.1.	METHODE DE HESS & SMITH	39
II.5.2.	FONDEMENTS THEORIQUES DES METHODES DE PANNEAUX (IDENTITE DE GREEN)	42
II.5.3.	METHODE DES PANNEAUX AVEC TOURBILLON PAR FORMULATION DE VITESSE	44
II.5.4.	METHODE DE PANNEAUX AVEC TOURBILLONS PAR FORMULATION DE LIGNE DE COURANT	48
II.5.5.	METHODE DE PANNEAUX AVEC DOUBLET CONSTANT PAR FORMULATION DU POTENTIEL	50
II.5.6.	METHODE DE PANNEAUX AVEC DOUBLET LINEAIRE PAR FORMULATION DU POTENTIEL	52
II.5.7.	AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES METHODES DE PANNEAUX	55
III.	METHODES DES IMAGES	56
III.1	CONSEQUENCE D'UNE PROPRIETE DE SYMETRIE	56
III.2	METHODE DES IMAGES	57
III.3	EXEMPLE	59
III.3.1.	ÉCOULEMENT ENGENDRE PAR UNE SOURCE SITUÉE À PROXIMITÉ D'UNE PAROI	59
III.3.2.	UNE AILE À PROXIMITÉ D'UNE PAROI	60

III.3.3. UNE AILE PLACEE ENTRE DEUX PAROIS (SOUFFLERIE)	61
IV. ALGORITHMES ET PROCESSUS DE TRAVAIL	62
IV.1 PREAMBULE	62
IV.2 GEOMETRIE DU PROFIL	62
IV.3 METHODE DES PANNEAUX	63
IV.3.1. CHOIX DE LA METHODE DE RESOLUTION : METHODE DE HESS ET SMITH	63
IV.3.2. PRESENTATION THEORIQUE DE LA METHODE DE HESS & SMITH	64
a. <i>Fondements mathématiques</i>	64
b. <i>Conditions limites</i>	64
c. <i>Discrétisation du profil</i>	65
d. <i>Coefficient de pression</i>	71
e. <i>Coefficient de portance</i>	71
IV.4 METHODE DES IMAGES	72
IV.4.1. CAS DU PROFIL A PROXIMITE D'UNE PAROI	72
IV.4.2. CAS DU PROFIL PLACE ENTRE DEUX PAROIS	73
IV.5 ALGORITHME ET PROCEDURE DE TRAVAIL	75
V. PRESENTATION DE L'APPLICATION	82
V.1 PRESENTATION DE L'APPLICATION	82
VI. RESULTATS ET INTERPRETATION	96
CONCLUSION GENERALE	106
LES ANNEXE	
ANNEXE A	
ANNEXE B : CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS	
ANNEXE C : RAPPELS SUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES – INVERSION DE MATRICES	
ANNEXE D : GRANDEUR PHYSIQUE ET UNITES DE MESURE	
ANNEXE E : FORMULES UTILISEES EN AERONAUTIQUE	
REFERENCE	
BIBLIOGRAPHIE	
WEBOGRAPHIE	

TABLE DES NOTATIONS

$\mathfrak{R}(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$	Repère lié au bateau dans sa position moyenne
$(x, y, z) = (x_M, y_M, z_M)$	Coordonnées du point M
D	Domaine fluide
S_B	Surface instantanée de la carène
S_0	Surface de la carène dans sa position moyenne
S	Frontière entre \mathcal{T}_i et \mathcal{T}_e
S_j	Facette du corps épais
S_s	Facette du squelette
SL	Surface libre
SL_i	Surface libre intérieure
SL_e	Surface libre extérieure
Σ_R	Sillage
Σ	Sillage dans la position moyenne de la carène
S_1	Squelette des parties portantes
S_2	Prolongation à $z=0$ de $S_1 \cup \Sigma$
S_∞	Surface de D à l'infini
C_B	Contour de flottaison instantané
C_j	Segment du contour de flottaison
C	Contour de flottaison dans la position moyenne de la carène
C_∞	Contour de la surface libre à l'infini
U_∞	Vitesse du bateau
a	Amplitude de la houle incidente
β	Direction de la houle par rapport à la vitesse du navire
$\vec{V}(M, t)$	Vitesse du fluide au point M à l'instant t
$\vec{V}_E(M, t)$	Vitesse d'entraînement d'un point M de la carène, à l'instant t
$E(x, y, t)$	Equation de la surface libre dans \mathfrak{R}
p	Pression statique dans le fluide
p_a	Pression atmosphérique
p^+, p^-	Pression de part et d'autre du bord de fuite et du sillage
p_s	Pression stationnaire
p_i	Pression instationnaire
\tilde{p}_D	Pression de diffraction
$\tilde{p}_{j,j=1,6}$	Pression de radiation élémentaire
$\tilde{p}'_{j,j=1,6}$	Pression de radiation élémentaire dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme

g	Accélération de la pesanteur
ρ	Masse volumique de l'eau
ε	Viscosité artificielle
$\vec{n}(M, t)$	Normale extérieure à la carène au point M
$\vec{n}_0(M)$	Normale extérieure à la carène dans sa position moyenne
$n_{j,j=1,6}$	Normale généralisée à la carène dans sa position moyenne
\vec{n}_K	Normale extérieure à la facette d'où est issu le point de Joukowski
$\Phi(M, t)$	Potentiel total des vitesses
$\Phi_j(M, t)$	Potentiel de la houle incidente
$\Phi_s(M)$	Potentiel total stationnaire
$\Phi_i(M, t)$	Potentiel des perturbations instationnaire
$\varphi(M)$	Potentiel des perturbations stationnaire
$\bar{\varphi}(M)$	Potentiel instationnaire harmonique
$\bar{\Phi}_j(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de la houle incidente
$\bar{\Phi}_D(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de diffraction
$\bar{\Phi}_i(M)$	Potentiel intérieur
$\bar{\Phi}_e(M)$	Potentiel extérieur
$\bar{G}(M, M')$	Fonction de Green
$\bar{\phi}_{j,j=1,6}(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de radiation élémentaire
$\bar{\phi}'_{j,j=1,6}(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de radiation élémentaire dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
ω_A	Pulsation de la houle incidente
ω	Pulsation de rencontre
k_x	Nombre d'onde
\vec{t}	Translation de la carène dans \mathfrak{R}
$\vec{\theta}$	Rotation de la carène dans \mathfrak{R}
$\dot{\vec{t}}$	Vitesse de translation dans \mathfrak{R}
$\dot{\vec{\theta}}$	Vitesse de rotation dans \mathfrak{R}
$\xi_{j,j=1,6}$	Mouvements de la carène dans \mathfrak{R}
$\bar{\xi}_{j,j=1,6}$	Mouvements harmonique de la carène dans \mathfrak{R}
$\beta_{j,j=1,6}$	Vecteur unitaire généralisé
$m_{j,j=1,6}$	Termes correctifs pour la prise en compte de l'écoulement stationnaire dans la condition de glissement instationnaire
$\bar{F}_{I,j=1,6}^i$	Efforts de Froude-Krilov
$\bar{F}_{D,j=1,6}^i$	Efforts de diffraction
$\bar{F}_{R,j=1,6}^i$	Efforts de radiation
$\bar{F}_{hs}^i(t)$	Efforts hydrostatiques et de pesanteur

$\bar{F}_M(t)$	Efforts d'inertie
$\bar{M}_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Matrice des efforts de radiation
$\bar{M}'_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Matrice des efforts de radiation dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
$A_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Coefficients dimensionnels de masse ajoutée
$B_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Coefficients dimensionnels d'amortissement
$A'_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Coefficients dimensionnels de masse ajoutée dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
$B'_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Coefficients dimensionnels d'amortissement dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
$M_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Matrice des efforts d'inertie
$S_{\substack{ij(i,j) \in \{1,6\} \times \{1,6\}}}$	Matrice des efforts hydrostatiques et de pesanteur
m	Masse du navire
G	Centre de gravité du navire
SF_0	Surface de flottaison de la carène dans sa position moyenne
C	Centre de carène
\mp	Déplacement en kg
ζ	Élévation de la surface libre
ζ_s	Élévation de la surface libre linéarisée stationnaire
ζ_i	Élévation de la surface libre linéarisée instationnaire
$\bar{\zeta}_D$	Élévation de la surface libre instationnaire harmonique de diffraction
$\bar{\zeta}_r$	Élévation de la surface libre instationnaire harmonique de radiation élémentaire
$\bar{\zeta}'_r$	Élévation de la surface libre instationnaire harmonique de radiation élémentaire, dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
τ_i	Domaine intérieur
τ_e	Domaine extérieur
I_i	Intégrale de ligne
\vec{t}	Vecteur tangent à la ligne de flottaison
\vec{s}	$\vec{s} = \vec{n} \wedge \vec{t}$
BF	Bord de fuite
BA	Bord d'attaque
α	Angle d'attaque des parties portantes
$\vec{f}(M, \omega)$	Fonction de circulation dans le squelette
$\vec{\gamma}(M, \omega)$	Fonction de circulation dans le sillage
$\vec{\sigma}(M')$	Intensité surfacique de sources
$\vec{\mu}(M')$	Intensité surfacique de doublets
Γ	Intensité surfacique généralisée
\mathcal{A}	Matrice d'influence

\mathcal{B}	Vecteur second membre
G	Fonction de green de diffraction-radiation
G_0	Terme de Rankine
G_1	1 ^{ère} composante du terme de vagues de la fonction de green de diffraction radiation
G_2	2 ^{ème} composante du terme de vagues de la fonction de green de diffraction radiation
G_r	Fonction de green de résistance de vagues
Gw	Terme de vagues de la fonction de green de résistance de vagues
(X, Y, Z)	Coordonnées adimensionnées du point de calcul
(X', Y', Z')	Coordonnées adimensionnées du point source
L_0	Longueur de référence
F	Nombre de Froude
ω	Pulsation réduite (adimensionnée)
τ	Paramètre de Brard
$K_s, K_c, K_{1,2=1,4}, Z_{1,2=3,4}$	Pôles de la fonction de Green
g_1, g_2, g_3	Fonctions exponentielles intégrales complexes modifiées
C_k, C'_k	Coefficients de forme dans le calcul de l'intégrale surfacique de la fonction de Green
(p, q, r)	Coordonnées de la normale extérieure
$\theta_c, \theta_{c'}, \alpha_c$	Angles de Fourier
$\epsilon_{rel}, \epsilon_{abs}$	Erreur relative, erreur absolue
k	Fréquence réduite
Λ	Longueur d'onde du sillage
A_{BF}, B_{BF}	Points du bord de fuite, origine du sillage
L	Longueur du bateau
B	Largeur
T	Tirant d'eau
c	Corde
λ	Allongement
S_m	Surface mouillée
C_b	Coefficient de bloc
C_w	Coefficient de résistance de vagues
C_x	Coefficients de traînée
C_y	Coefficients de force latérale
C_z	Coefficients de portance
C_p	Coefficients de pression
Re	Nombre de Reynolds

ملخص:

إن الطائرات ذات تأثير عامل الأرضية هي اليوم غير معروفة بكثرة عند جمع العموم، مع أن مبدأ عامل الأرضية يسمح بصناعة أفضل للأجهزة، هذه الأخيرة مصنفة تحت اسم (السفن ذات عامل السطح)، وراء هذه التسمية تتزوي كثير من الآلات الطائرة وآلات الملاحة.

مع كل هذا فإن تأثير عامل الأرضية ليس حكرا على ميدان علم الطيران فحسب، بل يتعداه إلى ميدان النقل البحري أين نجده أكثر استعمالا و أكثر وضوحا (هذه الأيام)، فبالنسبة للسفن فإن الهدف هو رفع مقدار السرعة القصوى (النهائية) مع خفض مقاومة الأمواج، وهو وسيلة للتوصل إلى استعمال الهياكل المعروفة بتأثير عامل الأرضية للتنقل الجزئي أو الكلي خارج الماء (حالة الهياكل المحدبة)، أما بالنسبة للطائرات الشراعية (مبدأ الوسادة الهوائية) فنلاحظ أن الأجنحة تؤخر بعض الشيء، هذا وإن الأجنحة ذات تأثير عامل الأرضية تناسب فوق الوسادة الهوائية الديناميكية المتشكلة عن حركاتها الأمامية، وأيضا عن قوة الحمل المتعلقة بسرعة التنقل، حينئذ؛ فإن الطائرات الشراعية تمتلك دوافع تعطي باستمرار وسادة هوائية ثابتة تحتها.

ونحن في هذا العمل قد حاولنا تبسيط هذه المفاهيم، وكذا المبدأ القاعدي لظاهرة تأثير عامل الرضية، لأجل هذا قمنا بدراسة شاملة للظاهرة، أو بالأحرى، دراسة رقمية لها وهذا لأجل :

- تسهيل العمل على المستخدمين.
- دراسة خصائص الديناميكية الهوائية.
- تحديد الارتفاع الحدي لتواجد الظاهرة.
- فحص تحقيق ارتفاع معطى للظاهرة.
- إعطاء فكرة عامة عن الدراسة في حالة التواجد بين حاجزين.


Résumé :

Les avions à effet de sol (désignés par l'appellation « WIG pour Wing In Ground effect ») sont actuellement très peu connus du grand public. Pourtant, le principe de l'effet de sol a servi à la conception de bien des appareils. Ces derniers sont d'ailleurs regroupés sous le terme général de WISES (navires à effet de surface). Derrière ce terme se cachent de nombreux engins volant ou navigant au ras des flots ou du sol. En effet, l'effet de sol n'est pas l'apanage du monde aéronautique mais c'est dans le transport maritime qu'il est d'abord apparu et qu'il est le plus utilisé (pour l'instant). Pour les bateaux, le but est d'accroître la vitesse limite en diminuant la résistance de vague ; un des moyens d'y parvenir est d'utiliser des coques dites à 'effet de sol', afin de se déplacer partiellement ou totalement hors de l'eau. C'est le cas des « catamarans » pontés (la coque prend 'appui' sur l'air), des aéroglisseurs (principe du coussin d'air). Remarquons toutefois que si les ailes à effet de sol et les aéroglisseurs sont classés dans la même famille, leur principe diffère quelque peu. En effet, l'aile à effet de sol glisse sur un coussin d'air dynamique créé par son propre mouvement avant, et sa portance est engendrée par sa vitesse de déplacement, alors que l'aéroglisseur possède des propulseurs qui injectent continuellement un coussin d'air statique en dessous de lui (voir section aérodynamique).

Nous essayons à travers notre PFE de mettre en évidence ces notions, ainsi que les principes de base sur lesquelles repose le phénomène « Effet de Sol ».

Pour cela, nous avons établi une étude générale de l'effet de sol, ou bien alors, pour être plus précis, une numérisation du phénomène, qui permettra de :

- Faciliter la tâche aux utilisateurs ;
- Etudier les caractéristiques aérodynamiques ;
- Déterminer la hauteur limite de l'effet de sol ;
- Vérifier l'existence de l'effet de sol à une certaine hauteur ;
- Donner une idée générale sur l'étude de l'effet de sol dans le cas de deux parois ;

An orange, multi-lobed cloud shape with a dark grey drop shadow, containing the text 'Introduction Générale'.

Introduction

Générale

INTRODUCTION GENERALE :

Les avions à effet de sol (désignés par l'appellation « WIG pour Wing In Ground effect ») sont actuellement très peu connus du grand public. Pourtant, le principe de l'effet de sol a servi à la conception de bien des appareils. Ces derniers sont d'ailleurs regroupés sous le terme général de WISES (navires à effet de surface). Derrière ce terme se cachent de nombreux engins volant ou navigant au ras des flots ou du sol. En effet, l'effet de sol n'est pas l'apanage du monde aéronautique mais c'est dans le transport maritime qu'il est d'abord apparu et qu'il est le plus utilisé (pour l'instant). Pour les bateaux, le but est d'accroître la vitesse limite en diminuant la résistance de vague ; un des moyens d'y parvenir est d'utiliser des coques dites à effet de sol, afin de se déplacer partiellement ou totalement hors de l'eau. C'est le cas des « catamarans » pontés (la coque prend 'appui' sur l'air), des aéroglisseurs (principe du coussin d'air). Remarquons toutefois que si les ailes à effet de sol et les aéroglisseurs sont classés dans la même famille, leur principe diffère quelque peu. En effet, l'aile à effet de sol glisse sur un coussin d'air dynamique créé par son propre mouvement avant, et sa portance est engendrée par sa vitesse de déplacement, alors que l'aéroglisseur possède des propulseurs qui injectent continuellement un coussin d'air statique en dessous de lui (voir section aérodynamique).

Nous essayons à travers notre PFE de mettre en évidence ces notions, ainsi que les principes de base sur lesquelles repose le phénomène « Effet de Sol ».

Pour cela, nous avons établi une étude générale de l'effet de sol, ou bien alors, pour être plus précis, une numérisation du phénomène, qui permettra de :

- Faciliter la tâche aux utilisateurs ;
- Etudier les caractéristiques aérodynamiques ;
- Déterminer la hauteur limite de l'effet de sol ;
- Vérifier l'existence de l'effet de sol à une certaine hauteur ;
- Donner une idée générale sur l'étude de l'effet de sol dans le cas de deux parois ;

Nous avons à cet effet jugé utile de « segmenter » le travail de la manière suivante :

- Une présentation générale de quoi mettre en évidence l'effet de sol ;
- Une introduction aux notions de base de l'aérodynamique, suivie d'une exposition détaillée des méthodes de panneaux ;
- Une étude préliminaire de l'effet de sol par la méthode des images ;
- Réalisation de l'application ;

Voilà, en peu de mots, comment on pouvait présenter notre travail, cette exposition laconique pourrait ombrager l'Effort qui y a été mis, mais cela n'exclut en aucun cas que nous en avons pris énormément de plaisir...

Finalement, notre plus grand souhait est de savoir que notre ouvrage tiendra place de référence auprès des futurs ingénieurs en phase de préparer leurs PFE.

Si jamais on apprenait qu'un tel ou tel étudiant l'a consulté pour « y piquer des idées », alors la serait notre plus grande satisfaction.



Chapitre I

Effet de Sol

I.1. L'HISTOIRE DE L'EFFET DE SOL :

On peut penser que cela est absurde mais le premier utilisateur de l'effet de sol est la nature! En effet, certains canards marins, tels *la Macreuse noire* mettent à profit l'effet de sol pour économiser de l'énergie quand ils volent à proximité de l'eau. L'effet de sol a été découvert dans les années 1920, mais on suppose que le premier avion des frères Wright qui s'est révélé incapable de voler au delà de quelques mètres d'altitude, profitait de l'effet de sol. Un autre exemple est l'hydravion construit par le milliardaire américain *Howard Hughes*, le *H4 Hercules*, l'un des plus grands avions jamais construits, qui ne fut capable de dépasser *21 mètres* d'altitude au dessus de la mer lors de son unique vol en 1947, et on suppose donc que c'est également l'effet de sol qui lui a permis ce court vol. ^[1.1]



Fig. 1.1 Le H4Hercules dit « Spruce Goose » projet aéronautique d'hydravion transatlantique de Hughes

Durant la guerre, plusieurs aviateurs s'en servirent après la perte d'un moteur ou de carburant, car ils savaient que cela permettait de substantielles économies de carburant, ou de se maintenir en vol malgré une perte de puissance sur un ou plusieurs moteurs et l'effet de sol leur permis parfois de rentrer sains et saufs malgré une autonomie ou une puissance moteur très réduite ! L'effet de sol fut ensuite exploité par les Russes durant la guerre froide. Il permet en effet un transport de matériels lourds tout en étant plus économique que l'avion (portance égale à vitesse plus faible, comme nous le verrons plus bas) et plus rapide que le bateau (les frottements aérodynamiques étant moins importants que les

frottements hydrodynamiques). Les avions à effet de sol créés par les Russes, couramment dénommés « **ékranoplanes** » (notez qu'on trouve également le nom **WIG**, pour « *Wing In Ground-effect* » utilisé plutôt de l'autre côté de l'atlantique, mais également parfois chez nous) étaient des avions gigantesques. Le plus grand, terminé par les Russes en 1966, et nommé par les américains *Le Monstre de la Caspienne* était gigantesque, 100 mètres de long pour 550 tonnes (pour comparaison l'A380 mesure « à peine » 73 mètres de long pour 560 tonnes).

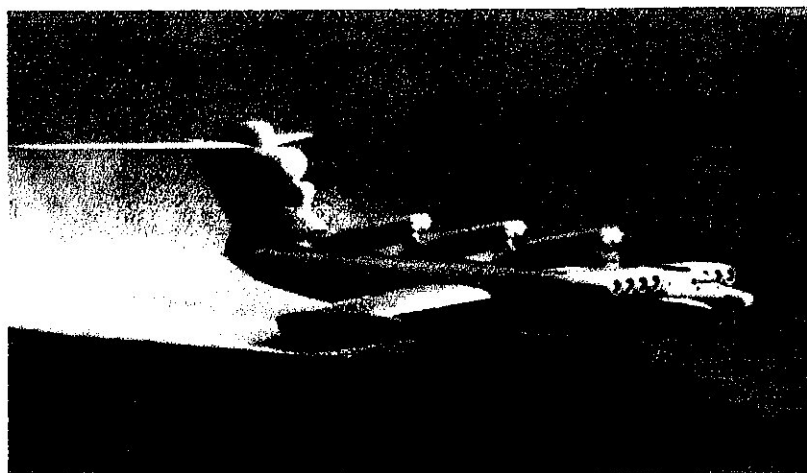


Fig.1.2 L'un des ékranoplanes russes : le LUN, utilisé comme lance-missiles

Les Russes ont construit cet avion car ils disposaient de grandes étendues d'eau (lacs et océans). En effet, ces avions pour décoller, malgré la présence de l'effet de sol, doivent atteindre une vitesse de quelques centaines de km/h (classiquement, de 200 à 300 km/h), et il leur faut donc des étendues suffisamment grandes et planes pour voler en toute sécurité. Les avions à effet de sol russes avaient par contre un gros désavantage : ils n'étaient pas faits pour voler au delà de quelques mètres de la mer, car au delà de cette altitude, l'effet de sol disparaît brutalement et l'avion « **décroche** » (Il n'y a plus assez de portance pour compenser la masse de l'avion, et l'avion se met réellement à tomber). Sur un avion classique, on remet les gaz lors d'un décrochage afin de reprendre de la vitesse puis de l'altitude. Or, ce défaut causa la perte de cet avion gigantesque, car il fut un jour déséquilibré par une vague et le pilote peu expérimenté sur ce type d'appareil remit les gaz, l'avion prit de l'altitude, décrocha soudainement et fut englouti par les flots de la mer rouge sur laquelle il se déplaçait. Cette impossibilité de voler en altitude contraignait donc les Russes à voler uniquement par mer calme. Le règne des ékranoplanes prit fin avec celui de l'Union Soviétique, car l'économie de l'armée russe, ruinée par les recherches pour ;

montrer sa supériorité face aux américains ne put bientôt plus assumer de nouvelles recherches sur les ekranoplanes.



Fig.1.3 L'avion à effet de sol selon Boeing :

Le Pélican

Aujourd'hui, après une longue période de désintérêt pour cette technologie, les avions à effet de sol ont à nouveau la côte. En effet, avec l'épuisement de nos ressources naturelles, et plus encore avec l'augmentation du prix du pétrole qui y est lié, nous avons besoin de développer des moyens de transport rapides mais économiques et surtout écologiques. L'avion à effet de sol peut s'inscrire dans cet objectif, comme nous le verrons dans les parties suivantes. Aujourd'hui des grandes firmes comme **Boeing** relancent des projets ayant pour but de développer des avions exploitant l'effet de sol, avec par exemple **le projet Pélican** lancé en **2003**, ayant pour objectif la conception d'un avion qui mesurerait **200 mètres** de longueur, **150 m** d'envergure pour **1400 tonnes**. D'autres projets à taille plus humaine sont également en cours de développement de part le monde. Ces avions seraient capables également de combiner les avantages de l'effet de sol sans conserver son principal inconvénient, à savoir son incapacité à voler là où il n'y a plus d'effet de sol et loin d'étendues planes et calmes. L'avion Pélican pourrait en effet voler à plus de **6 000 mètres** afin de rejoindre des contrées plus calmes en cas de mer trop grosse pour voler en toute sécurité, ou encore dans l'objectif de rejoindre des aérodromes plus enfoncés dans les terres. Bien sur, ces vols en altitude poseraient par contre le problème de consommer infiniment plus de carburant du fait de l'absence d'effet de sol (et ce phénomène serait d'autant plus accentué que l'avion ne serait pas « optimisé » pour ce type

de vol). C'est pour cette raison que ce projet du **Pélican** met un peu de temps à démarrer, car il est important pour Boeing de bien étudier le marché potentiel pour ce type de transport avant-gardiste. D'autres entreprises conçoivent et vendent également des avions à effet de sol à des particuliers... et certains particuliers se sont également lancés seuls dans l'aventure de la construction de ce type d'avion !

I.2. DESCRIPTION ET EXPLICATION PRATIQUE DE L'EFFET DE SOL :

L'effet de sol est un phénomène qui s'observe sur la plupart des avions plus ou moins longtemps durant les phases d'atterrissage notamment. Il se traduit au pilote par le refus de l'avion de se poser, l'avion ayant tendance à refuser de descendre arrivé à quelques mètres du sol, alors que les commandes sont toujours en position « descente » et que l'avion conserve une assiette en piquée. Au contraire, l'effet de sol favorise le décollage car il diminue la vitesse à laquelle suffisamment de portance est créée pour soulever l'avion. L'effet de sol est d'autant plus ressenti que l'aile est proche du sol et sa surface importante.

Cela se produit en fait dès que l'aile se situe à une altitude égale à la moitié de la corde de profil de l'aile (on en déduit donc que sur certains avions, notamment ceux à ailes hautes, ce phénomène n'est pas perceptible). L'air est en fait pris entre l'aile et la piste d'atterrissage, ce qui crée un goulot d'étranglement et une surpression entre les 2 surfaces. L'effet de sol peut donc s'apparenter au coussin d'air d'un aéroglisseur à la différence que sur l'avion, l'air est comprimé entre l'aile et le sol au lieu d'être pris entre la jupe et le sol.

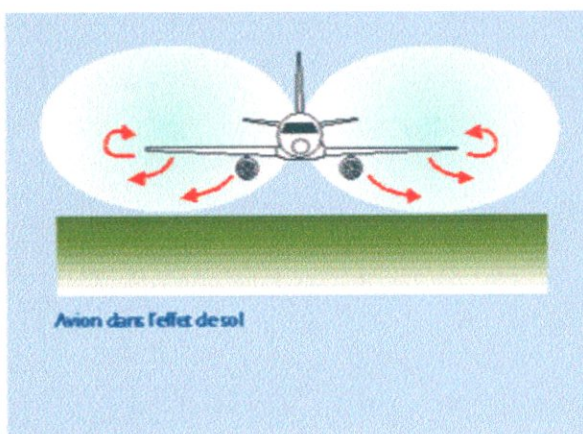


Fig.1.4 Avec effet de sol

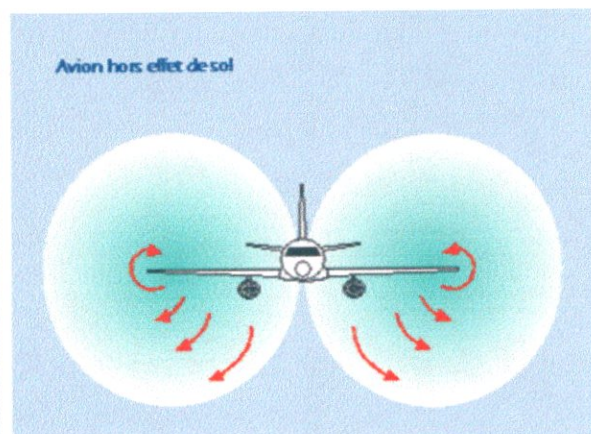


Fig.1.5 Sans effet de sol

Avec ces illustrations, on constate que grâce à l'effet de sol la zone de surpression est beaucoup plus restreinte, ce qui permet une plus grande augmentation de la valeur de la surpression présente en vol sur l'intrados. D'autre part, cette zone de surpression s'étend sous tout l'avion et non plus seulement sous les ailes.

I.3. LES ECONOMIES DE CARBURANT :

Dans cette partie, nous allons aborder la partie économie de carburant. Nous avons décidé d'y répondre sans expérimentation, en vous présentant uniquement des résultats théoriques obtenus par calculs.

I.3.1 LES CALCULS :

a. Augmentation du coefficient de portance :

Nous allons essayer de percevoir les économies de carburant possibles grâce à l'effet de sol. Pour cela, on part du fait que grâce à l'effet de sol, on obtiendrait une portance égale à celle obtenue hors effet de sol à seulement 50% de la vitesse sans effet de sol. C'est donc que si l'on transporte une masse « x » à **200 km/h**, avec l'effet de sol, on pourra transporter une masse de **2x** sans augmenter la vitesse, ou encore de diviser par deux la vitesse nécessaire pour soulever cette même masse. Dans cette partie, nous allons donc essayer de chiffrer les économies de carburant possibles. On sait que l'équation de sustentation est donnée par $mg = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_l$, or, pendant les essais, on ne modifie ni la surface de l'aile, ni la densité de l'air, ni la vitesse, on en déduit donc que l'effet de sol modifie le C_l , coefficient de portance, en l'augmentant. On en déduit que pour soulever une même masse, comme le C_l a augmenté, une vitesse moindre est nécessaire. Dans les expériences, il a été constaté une augmentation de la sustentation de l'ordre de 1,5. Le profil le plus efficace en effet de sol, le Clark Y a un C_l à 4° d'environ **0,7**. On a donc multiplié ce C_l par **1,5**, le nouveau C_l avec effet de sol est donc de **1,05** (Voir Fig. I.6).

Grâce à ces courbes, nous pouvons constater que pour soulever une même masse, nous pouvons diviser la vitesse par environ **1,25** (en fait, on la divise exactement par $\sqrt{1.5}$ car dans le calcul de la portance, on a la vitesse au carré. Dans le calcul, le paramètre C_l intervient donc en racine par rapport à la vitesse).

L'augmentation du C_l dans ce cas n'est pas associée à l'augmentation de la traînée, le C_x , qui reste donc stable, que l'on soit avec ou sans effet de sol (mais en fait ce paramètre varie, comme nous le verrons plus bas).

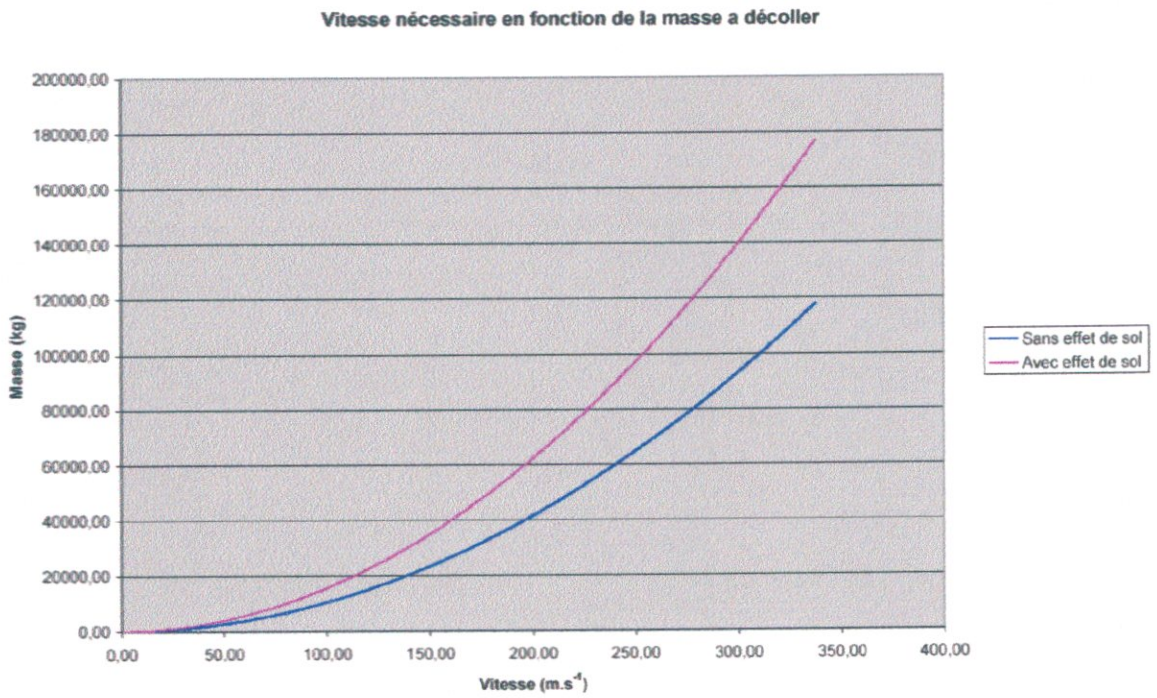


Fig.1.6 Vitesse minimum de décollage en fonction de la masse de l'aéronef

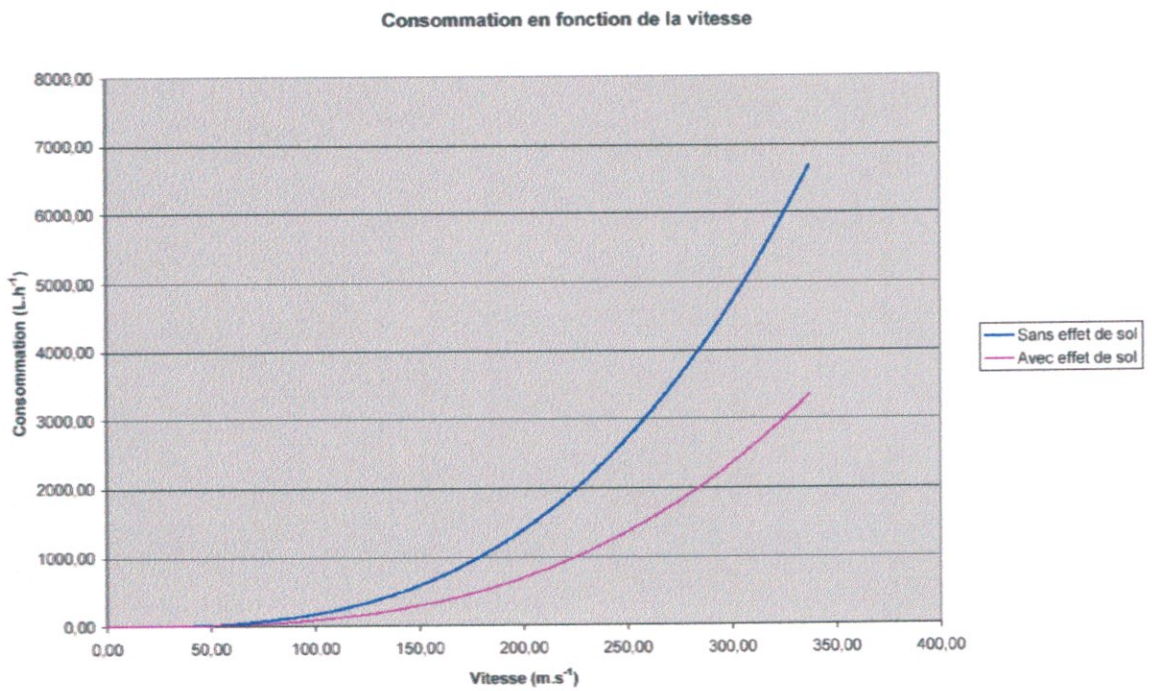


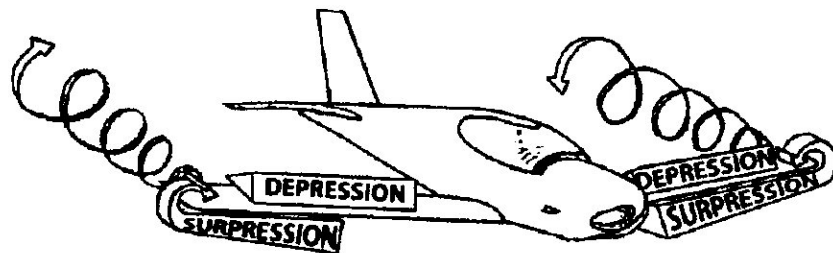
Fig.1.7 Consommation de carburant en fonction de la vitesse^[1.2]

On en déduit donc que pour soulever une même masse, avec de l'effet de sol il faudra une vitesse moindre que sans effet de sol. Voyons maintenant comment cela va permettre des économies de carburant. La consommation d'un aéronef, voire plus généralement d'un mobile quelconque, est relative à l'énergie nécessaire pour vaincre les forces de frottements entre le mobile en question et les différents fluides et solides avec lequel il est en contact. Dans le cas d'un avion, celui-ci est uniquement en contact avec l'air une fois décollé. La seule force qu'il sera nécessaire de vaincre pour avancer est donc une force opposée au mouvement et due aux frottements de l'appareil avec l'air : la traînée. On sait que cette dernière est donnée par l'équation $T = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x$. Cette valeur, en N donne juste la valeur de la résistance à l'avancement. Pour connaître l'énergie nécessaire pour vaincre cette traînée, il faut la multiplier par la vitesse. On a donc la consommation qui est égale à : $\frac{1}{2} \rho S V^3 C_x$ Comme toute puissance, ce paramètre est exprimé en Watts (W). On considérera aussi que la puissance délivrée par un moteur, qu'il soit à explosion ou à réaction, est directement proportionnelle à sa consommation de carburant. On en déduit donc le graphique suivant (Voir Fig.1.7)

b. Diminution de la traînée:

L'effet de sol est accompagné d'une réduction de la traînée (tourbillons marginaux), qui réduit donc encore la consommation de carburant. En effet, les tourbillons marginaux, également nommés vortex sont des tourbillons qui sont créés au bout des ailes. L'intrados est le siège d'une surpression tandis que l'extrados est le siège d'une dépression, or, l'air en bout d'aile a tendance à être aspiré de l'intrados vers l'extrados (car l'air va toujours des zones de hautes pressions vers celles de basses pressions), ce qui crée les vortex, qui sont

des tourbillons qui sont situés en bout d'aile et qui tournent sur eux mêmes. Or, à proximité du sol,



ces tourbillons n'ont pas la place de se créer, ce qui réduit la traînée et réduit encore la consommation. Or, ces tourbillons sont responsables de 50% de la traînée totale d'une aile ! Nous devons donc chercher à calculer les économies de carburant réalisées sans ces tourbillons.

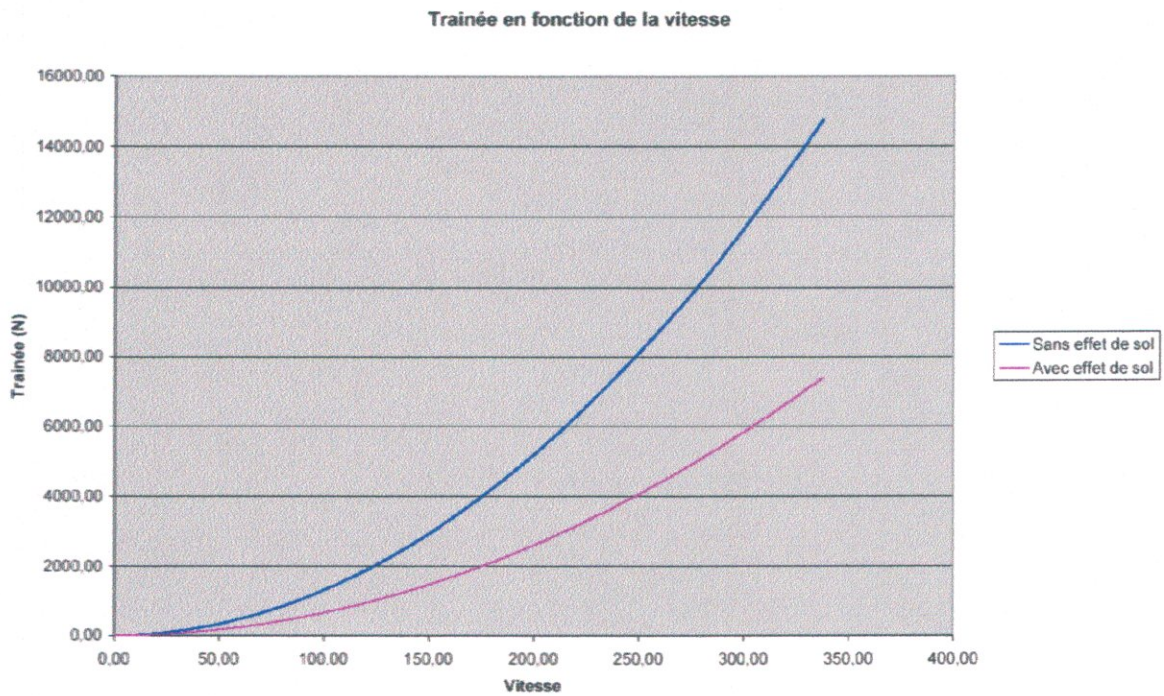


Fig.1.8 Evolution de la force de trainée en fonction de la vitesse

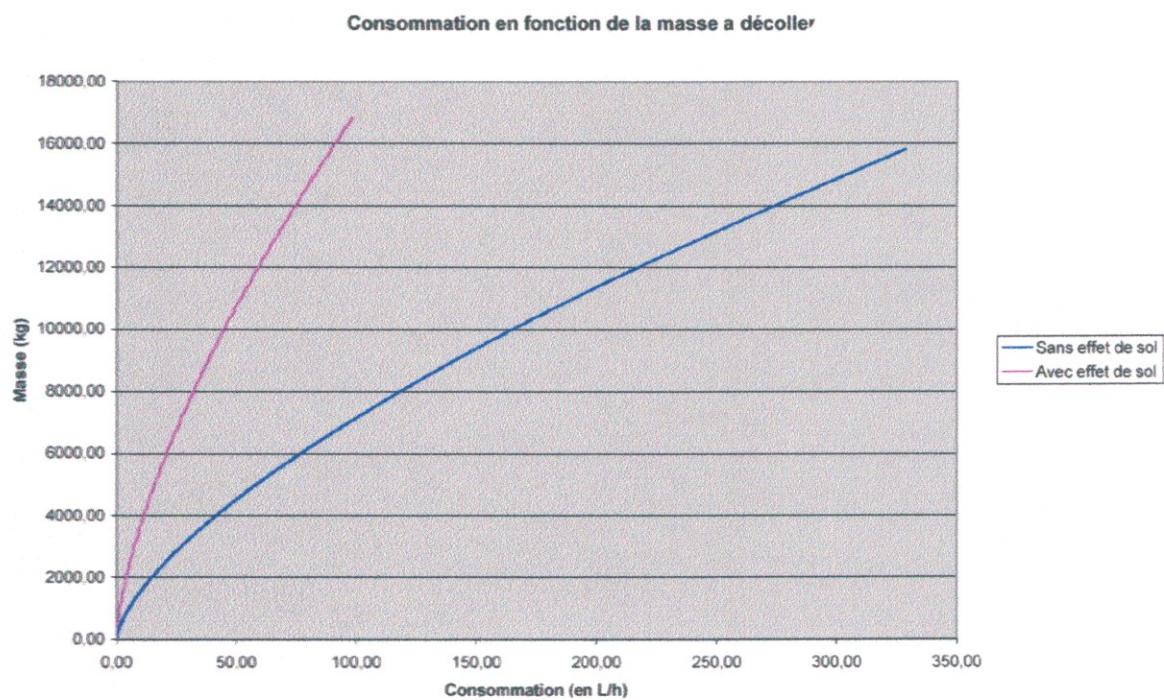


Fig.1.9 Consommation au décollage d'un aéronef en fonction de sa masse, avec et sans effet de sol

Pour cela deux séries de calculs ont été menées, à savoir une avec une traînée deux fois supérieure à celle de la seconde série (C_x de 0,108 pour la première et 0,0054 pour la seconde). (Voir Fig.1.8)

Les effets des deux précédents points s'ajoutent, on peut donc en déduire ce graphique (Voir Fig.1.9)

I.3.2 EN PRATIQUE :

Grâce à ces calculs, on peut constater que l'effet de sol réduit considérablement la consommation de carburant. Selon les calculs, l'effet de sol permet de réduire la consommation dans un facteur d'environ 2,5. Dans la pratique, si un avion consomme 2700 L/h de carburant hors effet de sol (consommation horaire d'un A320), alors le même avion exploitant l'effet de sol ne consommerait plus que 1100 L/h environ pour soulever la même masse.

Finalemment ; L'effet de sol est donc une technologie qui est capable de faire diminuer énormément la quantité de carburant consommée par un avion. De plus, il permet de transporter de lourdes charges tout en réduisant la pollution. Aussi, l'effet de sol permettrait de conjuguer les avantages du bateau tout en se défaisant de ses inconvénients, à savoir, permettre le transport de lourdes charges à grande vitesse, tout en restant beaucoup plus abordable que le transport par avion.

Selon ces calculs, on peut donc emporter une charge double à une même vitesse tout en consommant 2 à 3 fois moins de carburant grâce à l'effet de sol. Un des freins au développement de cette technologie est le fait que ces appareils ne sont exploitables que sur des surfaces très planes telles que les océans et à faible altitude (le projet Pélican de Boeing parle d'exploiter ces avions à une altitude de 20 à 50 pieds, soit environ 7 à 20 m), mais que leurs vitesses d'exploitation les rend incompatibles avec la navigation maritime, parfois plusieurs dizaines de fois plus lente. Si cette technologie était amenée à se développer, on devrait probablement mettre en place un système de couloirs aérien de basses altitudes réservées aux "écranoplans". De plus l'avion à effet de sol est beaucoup plus sensible aux conditions climatiques que n'importe quel autre moyen de transport. D'autre part, si la plupart des grands ports seraient à même d'accueillir des appareils gigantesques de type Pélican, il n'en est pas de même pour les aéroports, ou la présence d'un A380, appareil plus de deux fois plus petit se révèle déjà parfois problématique.



Chapitre II

*Notions Aérodynamiques
et
Méthodes des panneaux*

II.1. INTRODUCTION :

Il n'y a guère plus de cent ans qu'*Orville* et *Wilbur Wright* ont réussi le premier vol d'un véhicule propulsé plus lourd que l'air. Depuis ce 17 Décembre 1905, les progrès n'ont pas cessé ; voici qu'aujourd'hui l'on arrive à transporter des passagers à des vitesses doubles ou triples de celle du son. Sans doute, le simple fait d'y penser relevait de « l'inconcevable » il y a peine 50 ans mais aujourd'hui cela fait partie des banalités les plus « normales » grâce aux techniciens de l'Aéronautique qui ont eu à résoudre de nombreux problèmes.

Quelle est la forme de l'aile la mieux adaptée ? Quel type de moteur faut-il choisir ? Quelles sont les modifications à apporter aux procédés de navigation pour tenir compte des nouvelles conditions d'exploitation...etc. Telles sont les questions que se pose l'homme avide de progrès technique et auxquelles il s'acharne à donner de nouvelles réponses aussi longtemps que la recherche progresse... Et l'aérodynamique y est pour beaucoup dans ce cas de figure même.

Aujourd'hui, les études de marché indiquent un besoin croissant en avions supersoniques long-courriers (dont la vitesse atteint le double ou le triple de la vitesse du son) et de transporteurs « *Superjumbo* ». Un bon exemple des travaux entrepris dans ce domaine est sans doute le projet *Alliance*, qui part de l'expérience du Concorde [2.1]. Son objectif est la réalisation d'un nouvel avion supersonique capable de transporter deux fois plus de passagers que le Concorde sur des distances beaucoup plus longues (on parle d'un rayon d'action d'environ 9000km comparativement à 6500km pour le Concorde). Un autre projet important à cet égard est celui des appareils « *Superjumbo* » de Boeing et d'Airbus, pouvant transporter de 600 à 800 passagers. Ces projets, ainsi que le développement d'engins spatiaux, dont certains atteignent des vitesses qui se chiffrent à plusieurs milliers de kilomètres à l'heure, et de véhicules spatiaux, qui nécessitent une étude approfondie en ce qui concerne l'entrée dans l'atmosphère, posent de nouveaux problèmes de nature aérodynamique et requièrent des moyens de plus en plus compliqués. Parmi les contraintes auxquelles sont soumis les projets actuels, il semble que les plus importantes concernent la manœuvrabilité (ou l'extension du domaine du vol) et l'économie d'énergie. Dans cette optique, les immenses progrès qu'on a connus dans de nombreux domaines, de la dynamique des fluides qui a pour objet l'étude des mouvements de l'air autour des corps, à l'électronique, en passant par les différents modes de propulsions, ont permis de qualifier l'industrie aéronautique d'industrie pilote.

II.2. DEFINITION ET OBJECTIF DE L'AERODYNAMIQUE :

L'aérodynamique dont l'étymologie évoque immédiatement l'action de l'air en mouvement, est la science qui étudie les différents aspects de cette action, notamment les forces, pressions et moments qui résultent du déplacement des corps dans l'atmosphère. L'aérodynamique intervient essentiellement dans la conception des avions et des missiles, dont elle définit les formes optimales, mais joue également un rôle d'importance variable dans le dessin de bateaux, voitures rapides, véhicules à coussins d'air, ainsi que dans la construction d'ouvrages fixes comme les ponts, tours, ou grands immeubles, dont elle détermine les réactions au vent.

Sa naissance, comme science, peut être située au 18^{ème} siècle en Europe, où furent développées les théories (*D. Bernoulli* 1738 ; *Euler* 1755) qui faisaient suite à un empirisme séculaire.

Mais ce n'est qu'un siècle plus tard que les lois fondamentales tenant compte des contraintes intérieures d'un milieu continu ont été formulées (*M. Navier* 1827 ; *S.D. Poisson* 1831 ; *D. de Saint-Venant* 1843 ; *G.G. Stokes* 1845). Devant l'impossibilité de résoudre ces équations extrêmement compliquées, les connaissances aérodynamiques n'ont pu se développer que grâce à l'introduction d'hypothèses simplificatrices, appuyées sur l'expérience. Les étapes les plus importantes de ces travaux théoriques expérimentaux sont marquées, entre autres, par l'introduction des coefficients de similitude (*E. Mach* 1889 ; *O. Reynolds* 1883), des notions de fluide parfait et de couche limite (*L. Prandtl* 1904) dans le cas des écoulements à des vitesses modérées.

C'est également à la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} que l'aérodynamique expérimentale a découvert les lois physiques que les théoriciens ont eu à expliquer, concernant les phénomènes de portance (*N.I. Joukovski* 1904), de la traînée (*W. Blasius* 1907), de la stabilité et du contrôle des avions subsoniques. L'accroissement de la vitesse, jusqu'à des valeurs supersoniques, a réussi les progrès de la technique, favorisés par le développement des connaissances aérodynamiques grâce d'abord aux balisticiens (*Mach* 1887 ; *P.H. Hugoniot* 1883).

D'une manière générale on pourrait dire que l'Aérodynamique a deux objectifs :

- Le premier objectif de l'aérodynamique est de déterminer les forces et les moments, en considérant aussi les effets thermiques (transfert de chaleur), sur un corps se déplaçant dans un fluide, généralement de l'air (par exemple, la génération de la portance,



de la traînée, et des moments sur les profils, les ailes, le fuselage, les nacelles et les hélices). On veut aussi estimer la force du vent sur des bâtiments ou la résistance à l'avancement de bateaux ou sous-marins. On peut également calculer les forces qui s'exercent sur les pâles d'hélicoptères ou sur les éoliennes (machines à vent) à axe horizontal ou à axe vertical. On pourrait aussi s'intéresser, par exemple, aux détails de l'écoulement dans le sillage d'un corps en mouvement, de l'écoulement associé aux tourbillons libres qui se détachent aux bouts des ailes d'un avion subsonique comme le **Boeing 747**, de la propagation des ondes de choc ou encore de l'écoulement autour des avions supersoniques comme le Concorde. On doit aussi être en mesure de calculer les effets thermiques sur un véhicule interplanétaire. Tous ces problèmes appartiennent à l'*aérodynamique externe*, qui traite de l'écoulement autour des corps en mouvement, en général, ou fixes, dans les cas particuliers de l'action du vent sur des bâtiments, des ponts ou des poteaux (par exemple, les lignes de transmission électriques).

- Le second objectif se résume à la détermination des écoulements internes des gaz dans les tuyaux, les moteurs, les turbines, les compresseurs et les ventilateurs. L'aérodynamique doit permettre de calculer et de mesurer les propriétés de l'écoulement dans un propulseur de missiles (ou de fusées), de connaître les détails liés à l'écoulement d'un gaz dans une conduite ainsi que son débit... etc. ces problèmes appartiennent au domaine de l'*aérodynamique interne*.

II.3. METHODES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES EN AERODYNAMIQUE :

Les méthodes théoriques et expérimentales en aérodynamique reposent essentiellement sur les notions de base régissant le mouvement d'un corps dans un fluide réel [2.1, 2.6]. Plusieurs chercheurs célèbres ont contribué à l'établissement de ces notions: **Bernoulli** auteur du théorème qui régit l'écoulement des fluides incompressibles, **Euler** avec ses travaux sur l'aérodynamique, **Laplace** qui a donné la formule exacte de la propagation du son dans l'air, **Mach** qui a découvert les ondes de choc, **Navier** et **Stokes** qui ont généralisé les lois qui gouvernent le mouvement d'un fluide visqueux (équations de **Navier** et **Stokes** publiées en 1823 et 1843); **Prandtl** (1875-1953) qui a établi le concept de la couche limite et la théorie de l'aile d'envergure finie; **Reynolds** (1842-1912) qui a trouvé une des lois fondamentales de la similitude en dynamique des fluides, **Von Karman** (1881-1963) qui a développé le concept de la couche limite, **Ackeret** qui a

développé la première théorie de l'écoulement supersonique autour d'une aile en 1925, enfin *Busemann* qui, en 1935, a pu améliorer les résultats en utilisant une méthode encore plus perfectionnée. C'est au cours de la deuxième guerre mondiale qu'on a entrepris les premières études sur le régime transonique ; par la suite, on a mis sur pied un vaste programme de recherche sur l'aérodynamique des avions (subsoniques/supersoniques, civils/militaires), des hélicoptère et des véhicules spatiaux.

Parallèlement aux recherches théoriques, les premiers travaux relatifs à l'aérodynamique expérimentale datent de 1866, alors que *Lilienthal* a pu mesurer la composante de sustentation d'éléments plans et déterminer, dans un vent naturel, la portance, la traînée et le moment d'ailes dont la forme s'apparentait à celle d'ailes d'oiseaux. Depuis, plusieurs souffleries aérodynamiques ont vu le jour, grâce à *Wenham* (1871) puis à *Phillips* (1891) en Angleterre, grâce à *Lacour* (1890) au Danemark, à *Joukowski* (1903) en Russie, à *Rateau* (1909) et *Eiffel* (1909) en France ; on doit d'ailleurs à *Eiffel* la mise au point de techniques d'essai en soufflerie qui sont encore en usage de nos jours. Au cours du 20^{ème} siècle, les études de l'aérodynamique expérimentale vont aller de pair avec, d'une part, le développement de l'aérodynamique théorique et, d'autre part, la construction des différents types d'avions. Actuellement, on dispose de grandes souffleries qui sont indispensables autant pour valider et améliorer les méthodes de calcul, que pour effectuer des études de configuration en aérodynamique externe et interne. On effectue également des essais en vol afin de compléter les mesures prises en soufflerie, notamment les mesures relatives à la prévention de la transition, à la contamination (présence de glace, par exemple), au contrôle de la couche limite et, finalement, à la certification des avions.

Depuis trois décennies environ, on dispose d'un autre moyen de résoudre les équations complexes qui régissent le mouvement des corps dans un fluide réel : Il s'agit de l'utilisation des méthodes numériques avec l'informatique qui, toujours en développement, produit des appareils de plus en plus puissants ; on évalue que le coût des simulations numériques a été divisé par 1000 en l'espace de 30 ans. L'utilisation des méthodes numériques dans les études d'aérodynamique sert à fournir un moyen rapide et bon marché de simuler les écoulements des fluides ainsi qu'à mettre au point des outils complémentaires aux données obtenues dans les tunnels aérodynamiques en vue de la conception des véhicules spatiaux. Les méthodes numériques mènent aussi à des modèles hybrides (théorie-expérience) qui favorisent la compréhension de phénomènes très complexes comme la turbulence et le décrochage dynamique. La simulation numérique,

qui est en relation directe avec la physique (problèmes posés par la turbulence et le transfert de chaleur), les mathématiques (développement d'Algorithmes toujours plus efficaces) et l'informatique (développement de langage, de compilateurs et d'ordinateurs toujours plus efficaces), représente un moyen de recherche courant dont l'évolution et les performances des moyens de calcul ont permis l'essor de l'industrie aérospatiale. On reconnaît aujourd'hui la simulation numérique comme un moyen de conception efficace et indispensable à l'élargissement du champ d'application de l'aérodynamique. Dans la phase de conception d'un nouveau design d'avion, par exemple, la simulation numérique donne l'occasion :

- De simuler des phénomènes physiques complexes.
- D'étudier les interactions de plusieurs disciplines (thermodynamique, aéroélasticité... etc.).
- D'améliore les models théoriques en passant des fluides parfaits (Equation d'Euler) aux fluides réels (Equations de Navier- Stokes).
- De mieux optimiser l'appareil en tenant compte d'un plus grand nombre de paramètre, donc en se rapprochant de plus en plus de l'écoulement réel.
- De raccourcir la durée de mise au point du prototype final [2.2].

II.4. CONCEPTS DE BASE : [2.3, 2.4]

II.4.1. ECOULEMENT IRROTATIONNEL PLAN :

Un écoulement est dit irrotationnel dans un plan si [2.1 à 2.6] :

$$\text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

II.4.2. POTENTIEL DES VITESSES :

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel plan il existe une fonction ϕ appelée potentiel du vitesse telle que :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

II.4.4. LES DIFFERENTS TYPES D'ÉCOULEMENT :

a. *Écoulement uniforme :*

Considérons un écoulement uniforme et parallèle de vitesse V_∞ selon l'axe x . Pour déterminer la fonction de courant Ψ et le potentiel de vitesse Φ de cet écoulement par rapport aux variables x et y (écoulement bidimensionnel), on peut écrire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = V_\infty = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_y = 0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.9)$$

D'où :

$$\Phi = V_\infty x \quad (2.10)$$

$$\Psi = V_\infty y \quad (2.11)$$

En fonction des variables : x, r (écoulement axisymétrique) on obtient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = V_\infty = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.13)$$

D'où :

$$\Phi = V_\infty x \quad (2.14)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} V_\infty r^2 \quad (2.15)$$

De même, en fonction des variables R, θ , on aura :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = v_R = V_\infty \cos \theta = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{R} = v_\theta = V_\infty \sin \theta = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (2.17)$$

D'où :

$$\Phi = V_{\infty} R \cos \theta \quad (2.18)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} V_{\infty} R^2 \sin^2 \theta \quad (2.19)$$

b. Source plane ou puits :

En un point du plan $x y$, un écoulement radial, soit sortant soit entrant, correspond à un écoulement engendré soit par une source soit par un puits.

En utilisant les coordonnées polaires r, θ , centrées en un tel point, l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} v_{\theta} + \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (2.20)$$

La nature radiale de l'écoulement implique que $v_{\theta} = 0$; par conséquent l'équation précédente se réduit à : $r v_r = cte$.

Ainsi la fonction de courant associée vérifie :

$$v_{\theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (2.21)$$

$$r v_r = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = cte = C$$

Avec pour résultat :

$$\Psi = C \theta \quad (2.22)$$

La constante C exprimée en fonction du débit Q de la source devient :

$$Q = 2\pi r v_r = 2\pi C.$$

Où Q est donnée par unité de longueur dans la direction \mathbf{k} ; ainsi Q s'exprime en $m^2 s^{-1}$.

Le potentiel de la source est obtenu à l'aide de : $\vec{V} = \nabla\Phi$.

D'où :

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0 \quad (2.23)$$

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{C}{r}. \quad (2.24)$$

En résumé nous obtenons :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r.$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta. \quad (2.25)$$

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$v_{\theta} = 0$$

Les lignes de courant sont donc les rayons à $\theta = \text{constant}$, et les lignes équipotentielles les cercles $r = \text{constant}$.

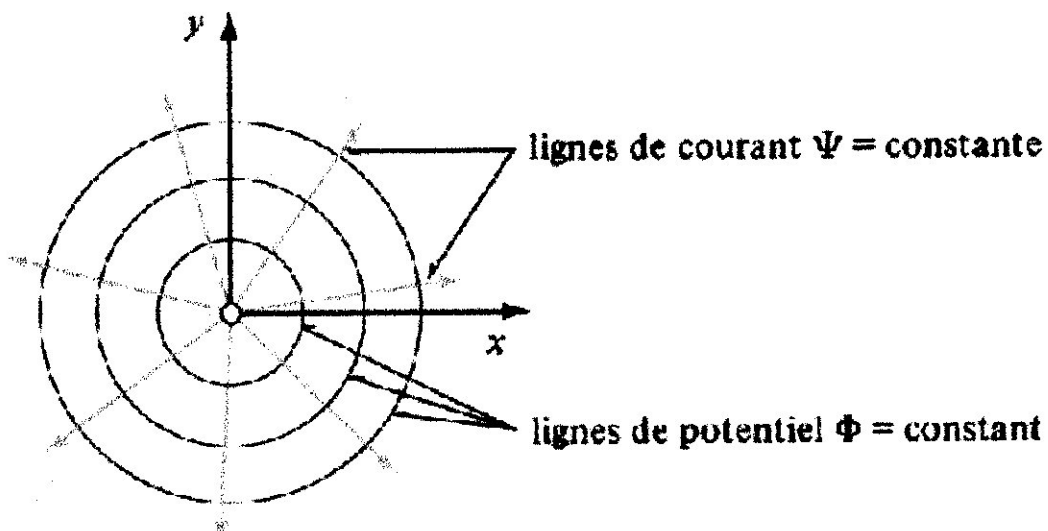


Fig.2.1. Source plane avec ses lignes de courant et de potentiel constants.

Si la source est située en un point $Q(a, b)$ dans le plan xy , r est alors la distance entre la source et un point $P(x, y)$ quelconque considéré, et l'angle θ définit l'angle entre r et l'axe des x .

On obtient dans ce cas :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q}{2\pi} \ln[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \Psi &= \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a} \\ v_x &= \frac{Q}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ v_y &= \frac{Q}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \end{aligned} \tag{2.26}$$

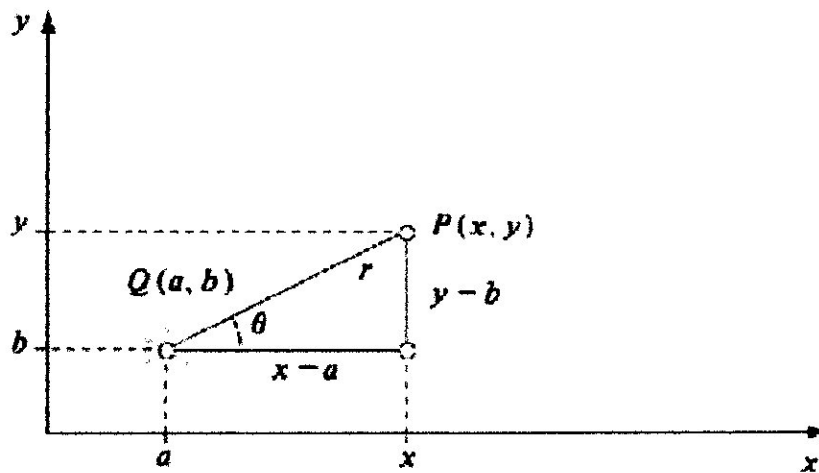


Fig.2.2. Source située au point $x = a, y = b$

c. Tourbillon ponctuel :

Un fil tourbillonnaire rectiligne et parallèle à l'axe z engendre un écoulement irrotationnel dans le plan (x, y) .

En utilisant les coordonnées polaires r, θ centrées au noyau du fil, nous pouvons donc écrire :

$$(\nabla \times \mathbf{v})_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = 0 \quad (2.27)$$

Où :

$$v_r = 0 \text{ et } r v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (2.28)$$

La fonction de courant et le potentiel de vitesse vérifient ainsi :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (2.29)$$

En résumé nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \Psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \\ v_r &= 0 \\ v_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Observons que Γ peut être positive ou négative : Si $\Gamma < 0$ et $v_\theta < 0$: Le tourbillon tourne autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre. Par contre, si $\Gamma > 0$ et $v_\theta > 0$: Le tourbillon tourne en sens inverse.

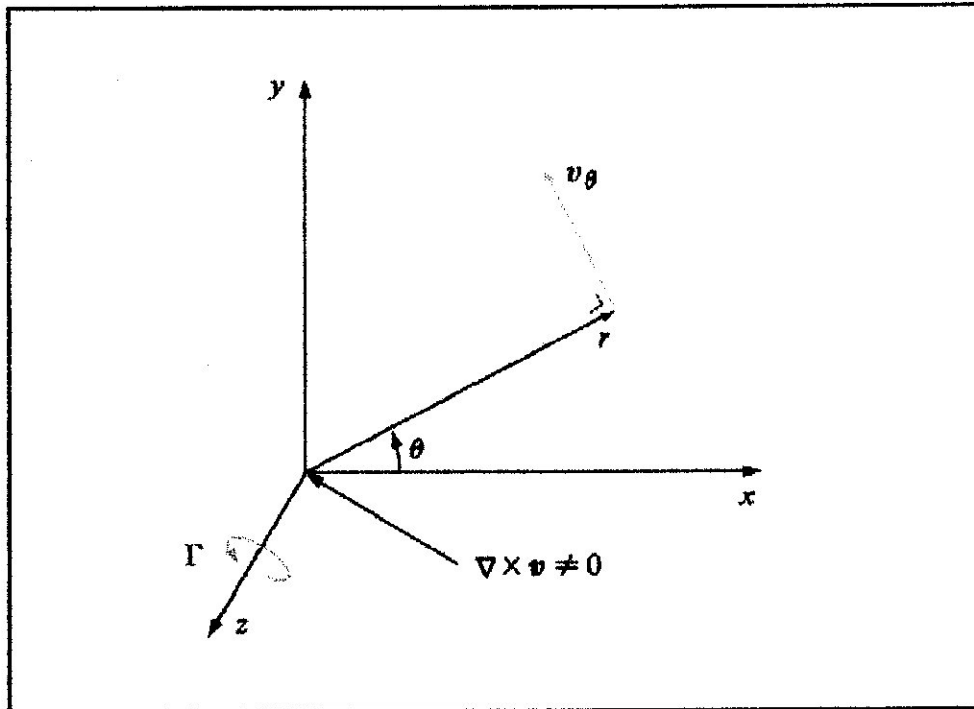


Fig.2.3. Fil tourbillonnaire:

$\nabla \times v \neq 0$ uniquement pour $x = y = 0$. A l'exception de ce point $\nabla \times v = 0$

d. Doublet ou dipôle :

Il s'agit ici d'une superposition d'une source d'intensité $+Q$ située au point (x', y') et d'un puits d'intensité $-Q$ situé au point $(x' - \Delta x', y')$.

Le potentiel Φ par rapport au point $P(x, y)$ devient alors :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \ln \left[(x-x'+\Delta x')^2 + (y-y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.31)$$

Le dipôle se définit par un passage aux limites tel que $\Delta x' \rightarrow 0$ et $Q \rightarrow \infty$ avec la condition :

$$Q\Delta x' \rightarrow \mu$$

Où μ est l'intensité du dipôle ; μ s'exprime donc en $m^3 s^{-1}$.

On obtient ainsi :

$$\Phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} \ln[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\frac{1}{2}} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x-x'}{r^2} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.32)$$

Les composantes du vecteur vitesse deviennent :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.33)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2.34)$$

Et la fonction Ψ :

$$\Psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \quad (2.35)$$

Un dipôle est donc caractérisé par sa direction et son orientation positive définie par les points consécutifs puits-sources.

Par conséquent en utilisant la notation vectorielle on écrit :

$$\mu = \mu e_{axe}$$

Où e_{axe} représente le vecteur unitaire dans la direction positive de l'axe du dipôle.

Il s'en suit que le potentiel d'un dipôle devient :

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mu \cdot r}{r^2} \quad (2.36)$$

En résumé, pour un dipôle dirigé dans la direction de la figure ci-dessous on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r} \\ \Psi &= \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r} \\ v_r &= \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2} \\ v_\theta &= \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

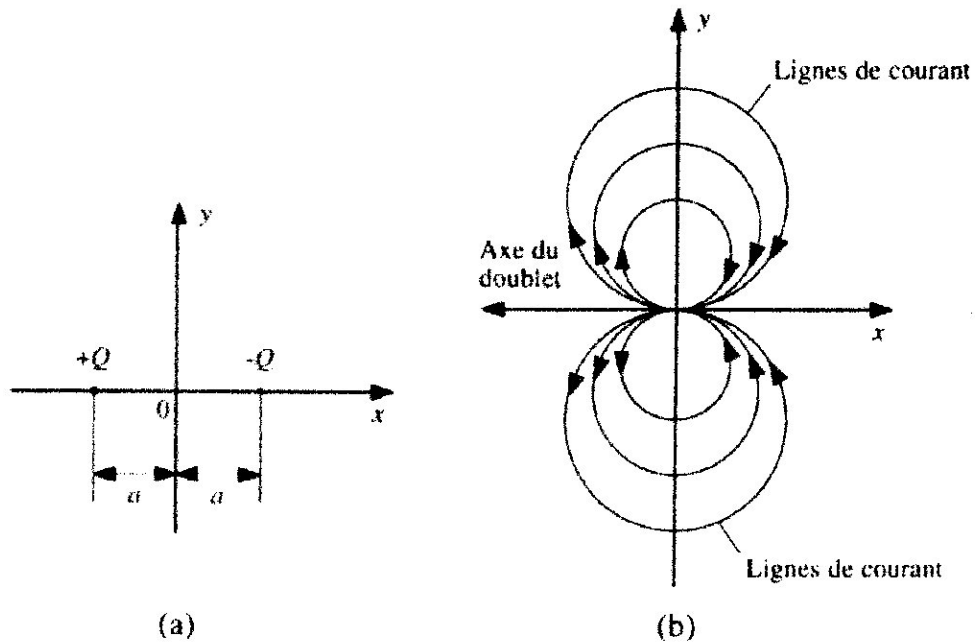


Fig.2.4. Ecoulement déterminé par un doublet

a) Position des singularités

b) Ligne de courant et axe du doublet

II.4.5. METHODE DE SUPERPOSITION DES ECOULEMENTS : [2.3, 2.4]

a. Superposition d'une source plane et d'un écoulement uniforme :

Considérons un écoulement uniforme de vitesse V_∞ et une source de débit Q placée à l'origine du système d'axes xOy . Conformément au principe de superposition de plusieurs singularités, ou écoulements simples.

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_\infty x + \frac{Q}{2\pi} \ln r = V_\infty r \cos \theta + \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (2.38)$$

$$\Psi = V_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \theta = V_\infty r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (2.39)$$

Cet écoulement correspond à l'écoulement autour d'un corps qui n'est pas un corps fermé. A l'infini ($\theta = 0$), les valeurs de y sur la partie supérieure et la partie inférieure sont :

$$y = \pm \frac{Q}{2V_\infty} \tag{2.40}$$

La vitesse totale est nulle au point d'arrêt $A(x_A, y_A)$ placé sur l'axe OX .

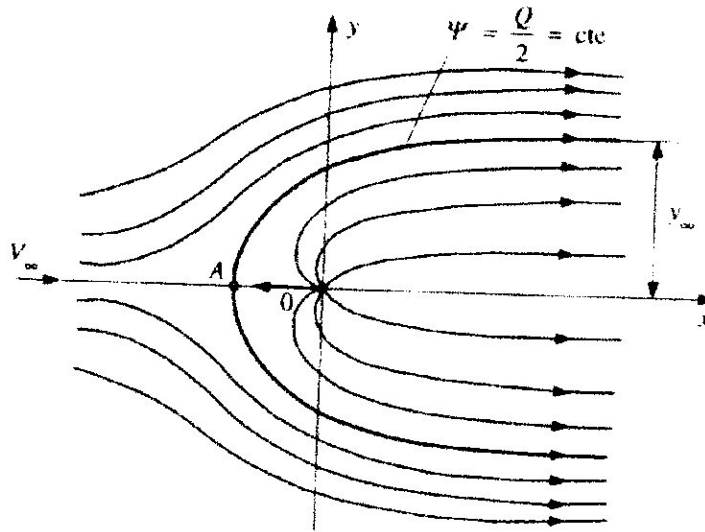


Fig.2.5. Source plane en écoulement uniforme

b. Superposition d'une source et d'un puits plans :

Soit une source et un puits de même intensité, situés sur l'axe des x en des points symétriques : $x = -a$ pour la source et $x = +a$ pour le puits.

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \tag{2.41}$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

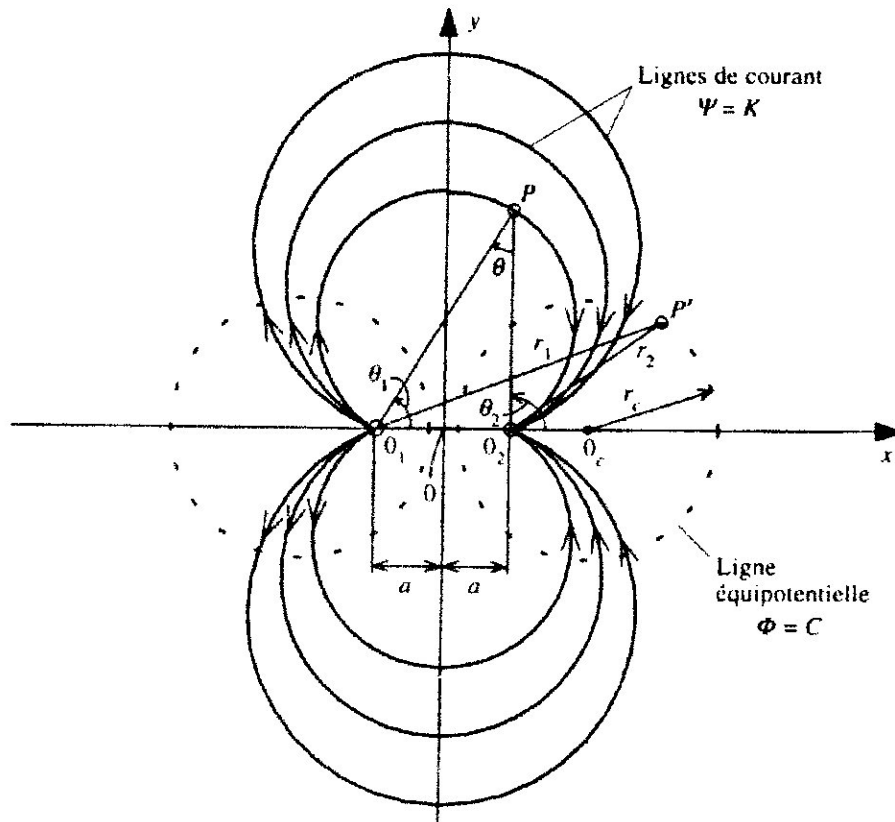


Fig.2.6. Source et puits plans

c. Superposition d'une source, d'un puits, et d'un écoulement uniforme :

Soient une source d'intensité $+Q$ et un puits d'intensité $-Q$ situés sur l'axe des x en des points symétriques : $x = -a$ pour la source et $x = +a$ pour le puits, sur cet ensemble on superpose un courant uniforme de vitesse V_∞ .

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_\infty x + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \tag{2.42}$$

$$\Psi = V_\infty y - \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Telle que : $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

La ligne de courant obtenue pour $\Psi = 0$ correspond au contour d'un cylindre ovale :

$$\theta = \frac{2\pi V_\infty y}{Q} \tag{2.43}$$

La vitesse est nulle aux points d'arrêt $A(X_A, Y_A)$ et $B(X_B, Y_B)$.

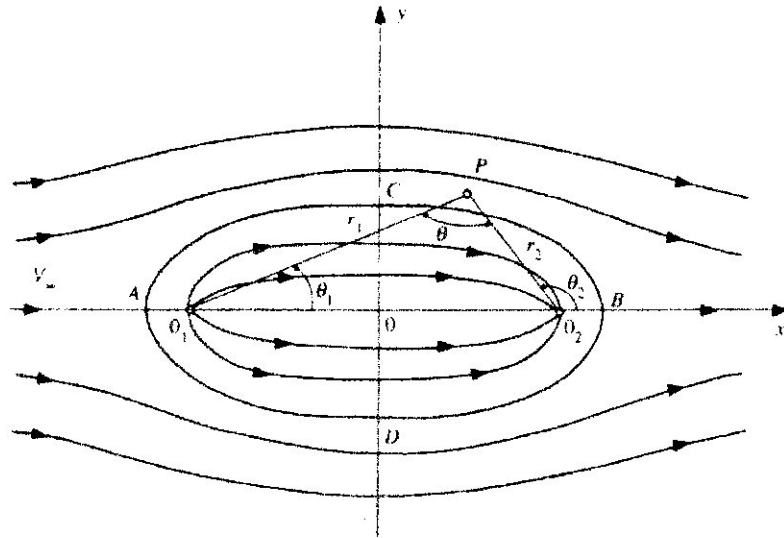


Fig.2.7. Ecoulement autour d'un cylindre ovale

d. Superposition d'un tourbillon et d'un écoulement uniforme :

Considérons l'écoulement déterminé par un tourbillon ponctuel situé à l'origine et plongé dans un écoulement uniforme V_∞ parallèle à l'axe OX .

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\begin{aligned} \Phi &= -V_\infty x + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \Psi &= -V_\infty y - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \tag{2.44}$$

La vitesse est nulle au point d'arrêt $A(X_A, Y_A)$.

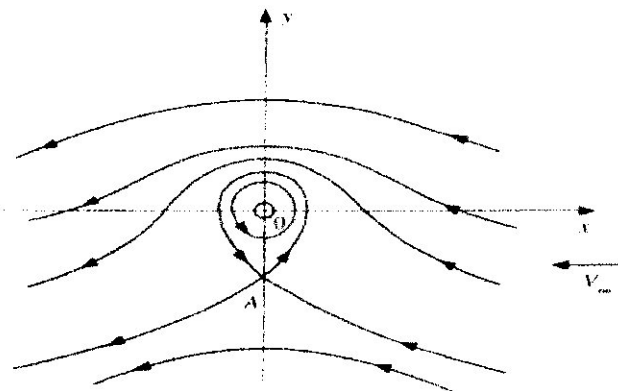


Fig.2.8. Tourbillon en écoulement uniforme

e. Superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme (écoulement sans circulation autour d'un cylindre) :

Soit un doublet positif m placé dans un écoulement uniforme V_∞ parallèle à l'axe OX .

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (2.45)$$

$$\Psi = V_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

A partir de la on peut tirer en coordonnées polaires la vitesse radiale et la vitesse tangentielle qui sont respectivement :

$$v_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (2.46)$$

$$v_\theta = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

Lorsque $\Psi = 0$, on obtient le cercle de rayon a . L'écoulement extérieur correspond à l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon a , qui se trouve dans un courant uniforme. Sur le cercle de rayon $r = a$, la vitesse radiale est nulle et la vitesse totale est égale à la vitesse tangentielle.

$$V = v_\theta = -2 V_\infty \sin \theta \quad (2.47)$$

Aux points d'arrêt ou $\theta = \pi$ et $\theta = 0$ la vitesse est nulle, elle est maximale aux points $A(\theta = \frac{\pi}{2})$ et $B(\theta = \frac{3\pi}{2})$.

On calcule ainsi le coefficient de pression :

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (2.48)$$

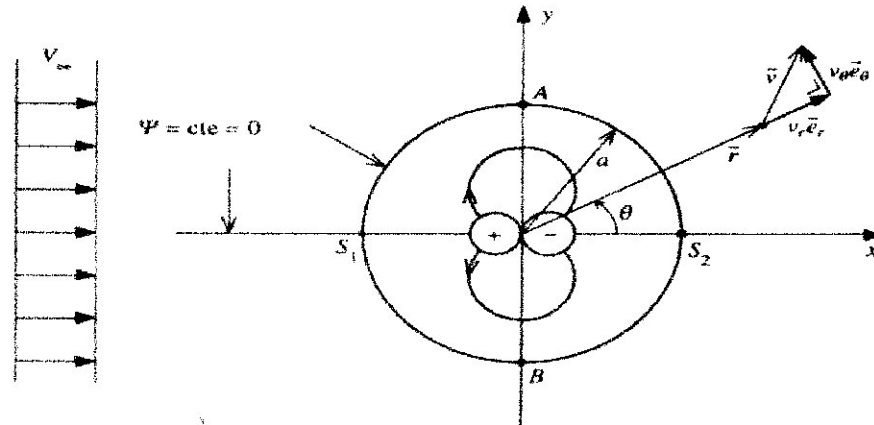


Fig.2.9. Ecoulement autour d'un cylindre dans un courant uniforme.

f. Superposition d'un doublet, d'un écoulement uniforme et d'un tourbillon (écoulement avec circulation autour d'un cylindre) :

Soient un doublet positif m et un tourbillon négatif $-\Gamma$ situés à l'origine (le mouvement de rotation du tourbillon se fait dans le sens des aiguilles d'une montre) placés dans un écoulement uniforme V_∞ parallèle à l'axe OX .

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \tag{2.49}$$

$$\Psi = V_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \tag{2.50}$$

Pour $\Psi = \ln a$, on obtient un cercle de rayon a comme ligne de courant et l'écoulement correspond à l'écoulement autour du cylindre circulaire de rayon a avec la circulation Γ , on a d'autre part $\Psi = 0$ sur le cercle.

Les vitesses radiale et tangentielle sont respectivement :

$$v_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \tag{2.51}$$

$$v_\theta = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{2.52}$$

Si $r = a$. On obtient :

$$v_r = 0 \tag{2.53}$$

$$v_\theta = -2 V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \tag{2.54}$$

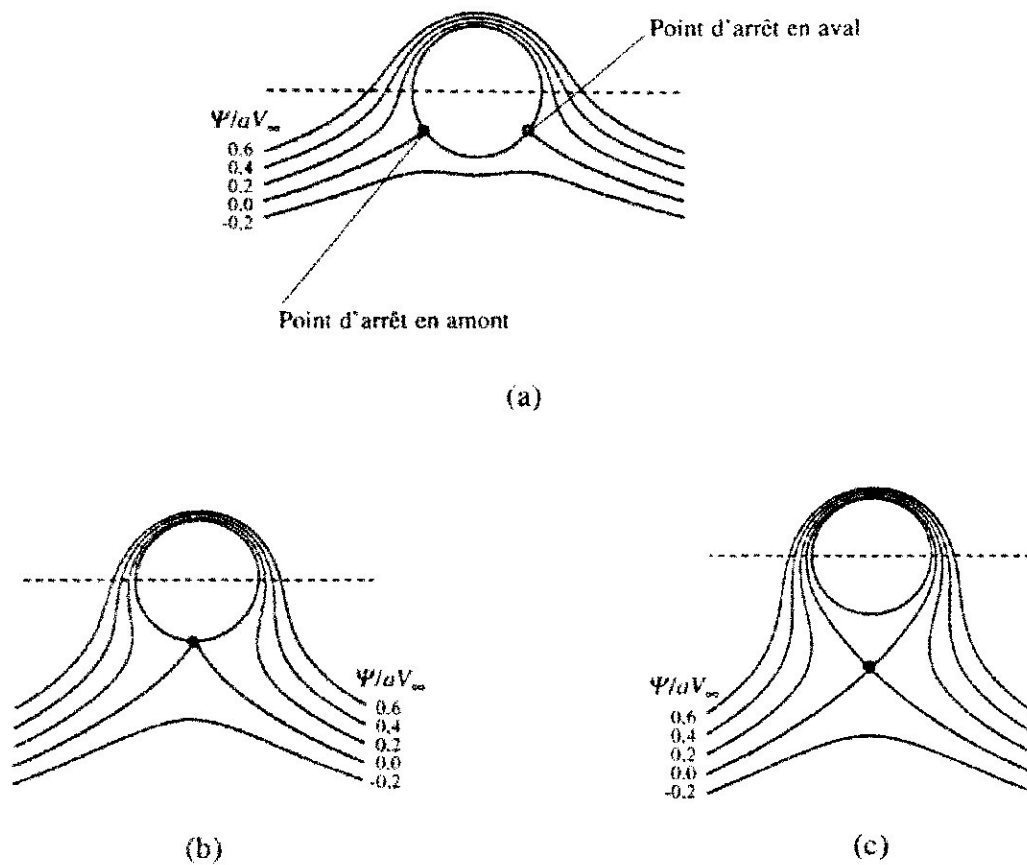


Fig.2.10. Ecoulement avec circulation autour d'un cylindre

a) $\Gamma/(aV_\infty) = 2.4\pi$

b) $\Gamma/(aV_\infty) = 4\pi$

c) $\Gamma = k4\pi aV_\infty$ avec $k = 1.225$

La vitesse totale est nulle aux points qui correspondent à :

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty a} \tag{2.55}$$

Pour $\Gamma < 4\pi V_\infty a$: On obtient deux points d'arrêt sur le cylindre.

Pour $\Gamma = 4\pi V_\infty a$: Les deux points coïncident et sont situés sur le cercle en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Pour $\Gamma > 4\pi V_\infty a$: L'unique point d'arrêt se trouve dans le champ de l'écoulement extérieur au cylindre.

Le coefficient de pression sur le cylindre est :

$$C_{p'} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = 1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty a}\right)^2 \quad (2.56)$$

II.5. PROFILS AÉRODYNAMIQUES EN RÉGIME SUBSONIQUE

II.5.1 CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES PROFILS : [2.3]

On définit un profil aérodynamique comme étant le contour géométrique qu'on obtient par la coupe verticale d'une aile d'avion, d'une pale d'hélicoptère et d'une pale de turbine à gaz ou de turbine à vent.

La forme du profil est une caractéristique essentielle d'une aile et influe grandement sur les caractéristiques aérodynamiques et les performances d'un avion.

On définit les grandeurs géométriques suivantes d'un profil aérodynamique :

A : Bord d'attaque	c : Longueur de la corde de référence
B : Bord de fuite	d : Position de la cambrure maximale du profil.
AB : Corde de référence du profil	f : Cambrure maximale
AMB : Extrados.	r : Rayon du bord d'attaque
ANB : Intrados	α : Angle d'attaque (ou d'incidence géométrique par rapport à la vitesse de l'écoulement V_∞).
APB : Ligne de cambrure du profil	τ : Angle du bord de fuite

Le milieu des segments perpendiculaires à la corde de référence, tel MN , est appelé squelette du profil ou *ligne de cambrure moyenne*. On note f la plus grande ordonnée de la ligne de cambrure moyenne par rapport à AB . Le rapport f/c est dit *cambrure relative* et la valeur maximale du segment MN représente l'épaisseur maximale du profil, e_{max} . L'expression $e_{max}/c = t$ correspond à l'*épaisseur relative maximale*. Les profils classiques ont une épaisseur relative de 6 à 20 % située environ à $c/3$, la cambrure relative est de

l'ordre de 6 à 8 % et d / e_{max} varie de 15 à 50 %. Sur la même figure apparaissent les forces aérodynamiques : L (la portance) et D (la traînée).

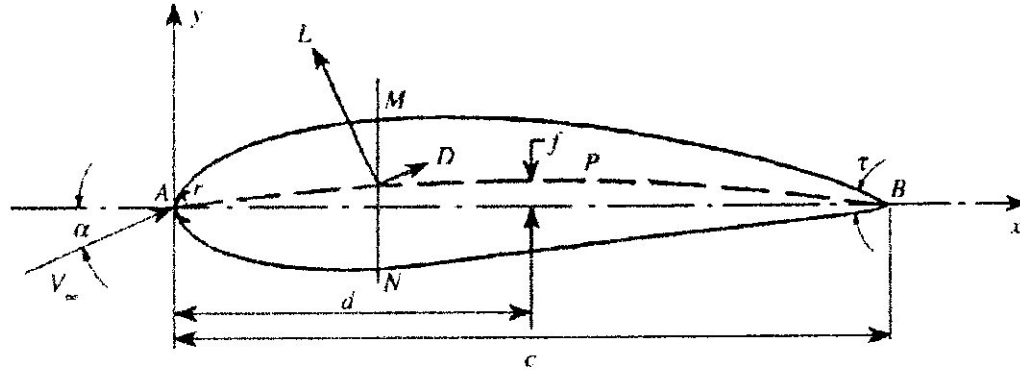


Fig.2.11. Caractéristiques géométriques d'un profil.

Différents types de profils aérodynamiques sont catalogués dans le monde. On notera, par exemple, les profils **Joukowski**, **Eppler**, **Wortmann**, **NACA**, **RAE**, **Gottingen**, **NLR**, **NASA/LRC** et **SANDIA**. Parmi ces derniers, les profils de type **NACA** sont connus, et on utilise certains couramment tant en pratique que pour la validation des méthodes numériques.

a. Profils de type NACA :

Le prédécesseur de la NASA était la **NACA** (*National Advisory Committee for Aeronautics*). Cet organisme a étudié différentes familles de profils répondant à diverses applications. Parmi ces dernières, il faut distinguer la famille de profils à **quatre chiffres**, celle à **cinq chiffres** et les profils **laminaires** portant la désignation **NLF**.

- **Famille de profils à quatre chiffres** : Dans cette famille, on identifie un profil par quatre chiffres : Le premier spécifiant la cambrure relative maximale en pourcentage de la corde, le deuxième indiquant la position de cette cambrure relative en pourcentage de la corde et les deux derniers chiffres représentent l'épaisseur relative maximale, toujours en pourcentage de la corde.

Par exemple, dans le profil **NACA 2415** :

- Le 2 représente la cambrure relative maximale (2 %).
- Le 4 représente la position de la cambrure maximale (40 %).
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15 %).

Dans le cas des profils symétriques de cette famille, on se sert de l'expression suivante pour calculer la forme géométrique :

$$\pm y_t = \frac{t}{0,2} (0,2969\sqrt{x} - 01260x - 03537x^2 + 02843x^3 - 01015x^4) \quad (2.57)$$

Le rayon de courbure au bord d'attaque correspond à :

$$r = 1,1019t^2 \quad (2.58)$$

Où t représente l'épaisseur relative maximale du profil. à titre indicatif, on donne la variation du coefficient de traînée C_d en fonction de l'épaisseur relative pour un profil symétrie.

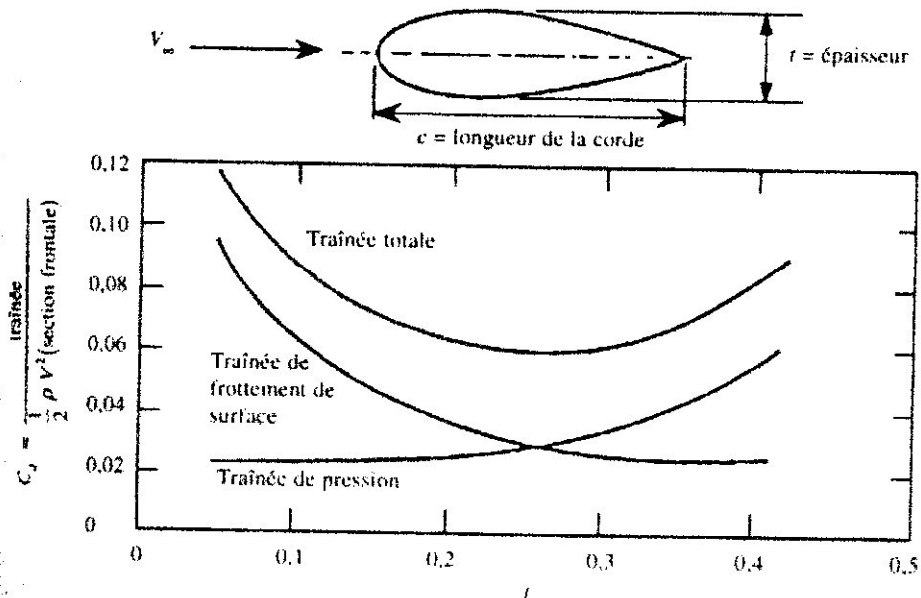


Fig.2.12. le coefficient C_d en fonction de l'épaisseur relative pour les profils symétriques de la famille de profils à quatre chiffres.

Dans le cas du profil cambré, la forme géométrique de la cambrure moyenne est représentée par deux paraboles :

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{y_A}{x_A} x(2x_A - x) & 0 \leq x \leq x_A \\ &= \frac{y_A}{(c - x_A)^2} (c - x)(c + x - 2x_A) & x_A \leq x \leq c \end{aligned} \quad (2.59)$$

Où le point $A (x_A, y_A)$ situé à la distance où la flèche est maximale, représente le point commun des deux paraboles. Notons que y_A représente la cambrure maximale et que x_A en donne l'emplacement. Par exemple, pour NACA 4412, la cambrure maximale est de 4 %

($y_A = 0,04$) et se trouve à 40 % ($x_A = 0,4$). Les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur relative maximale, ici 12 %.

L'équation de la forme géométrique d'un profil cambré est donc :

- Partie de l'extrados :

$$\begin{aligned} x_e &= x - y_t \sin \theta \\ y_e &= y_c + y_t \cos \theta \end{aligned} \tag{2.60}$$

- Partie de l'intrados :

$$\begin{aligned} x_i &= x + y_t \sin \theta \\ y_i &= y_c - y_t \cos \theta \end{aligned} \tag{2.61}$$

On obtient y_t de l'équation du profil symétrique et θ présente l'angle de la pente de l'équation de y_c soit $\theta = dy_c/dx$.

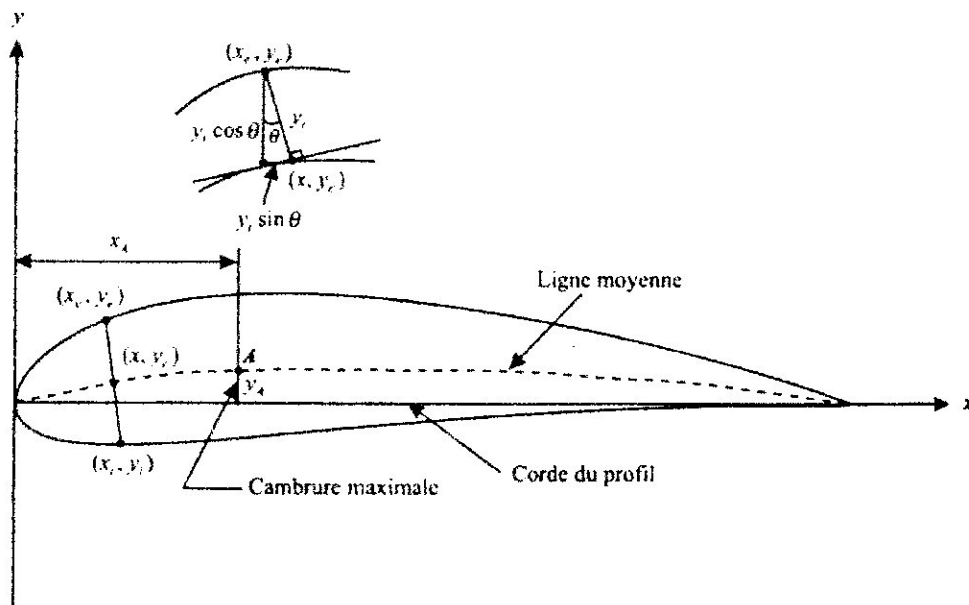


Fig.2.13. caractéristiques géométriques d'un profil cambré.

• **Famille de profils à cinq chiffres** : Dans cette famille, cinq chiffres caractérisent chaque profil.

Par exemple, dans le cas de NACA 23015 :

- Le 2 représente le coefficient de portance caractéristique ($3/2 \times 0,2 = 0,3$).
- Le 30 représente la position de la cambrure maximale ($1/2 \times 30 = 15\%$).
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15 %).

• **Famille de profils laminaires** : Le NACA a également étudié une série de profils dont l'écoulement est laminaire sur une majeure partie de sa surface et les a désignés par un ensemble de chiffres significatifs.

Par exemple, pour **NACA 66₂-215** :

- Le premier **6** représente la désignation de la série (profil laminaire).
- Le deuxième **6** représente la position de la pression minimale (**60 %**).
- L'indice **2** est la marge au-dessus et au-dessous du coefficient de portance caractéristique pour laquelle il existe un gradient de pression favorable **0,2**
- Le **2** représente le coefficient de portance caractéristique (**0,2**).
- Le **15** représente l'épaisseur relative maximale (**15%**).

b. Principales caractéristiques géométriques des profils : [2.5]

A la figure 2.14, on présente la distribution de la vitesse et les caractéristiques géométriques.

Pour un profil symétrique **NACA 0012**, on trouvera une gamme complète de profils de type NACA et leurs principales caractéristiques géométriques et aérodynamiques, présentées par *Abbott et al* (ANNEX B).

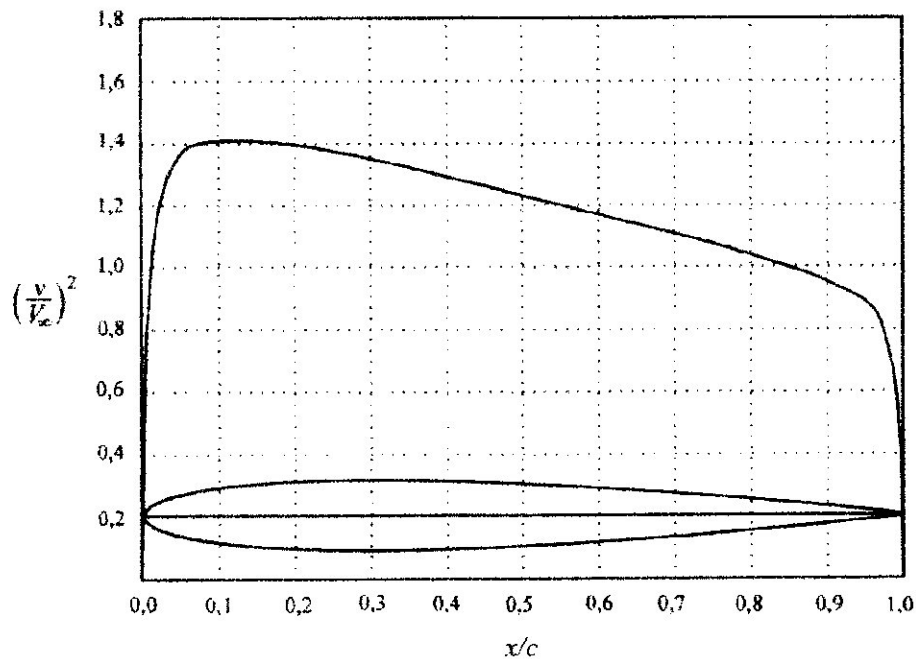


Fig.2.14. distribution de la vitesse sur un profil symétrique NACA0012.

II.5.2 COEFFICIENT DE PRESSION :

On définit le coefficient de pression pour un profil aérodynamique à l'aide de la relation vue précédemment :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{(1/2) \rho V_\infty^2} \quad (2.62)$$

Où:

P = pression statique locale.

P_∞ = pression statique de l'écoulement non perturbé.

Avec un écoulement subsonique incompressible, si on utilise l'équation de Bernoulli, on peut écrire le coefficient de pression par rapport à la vitesse locale v sous la forme :

$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.63)$$

La valeur maximale de v correspond à une valeur minimale de C_p .

En général, la distribution de la vitesse sur un profil aérodynamique provient de trois composantes :

- a) la distribution de la vitesse due à l'épaisseur, v ;
- b) La distribution de la vitesse sur la ligne de cambrure Δv .
- c) La distribution de la vitesse due à l'angle d'attaque Δv_α .

Par conséquent, dans le cas d'un profil dont l'épaisseur et la cambrure sont à un certain angle d'attaque, on obtient le coefficient de pression à l'aide de la formule plus complète :

$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v}{V_\infty} \pm C_l \frac{\Delta v_\alpha}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.64)$$

Notons qu'en général, les valeurs $\Delta v_\alpha / V_\infty$, sont tabulées pour $C_l = 1.0$ et que les signes positifs et négatifs correspondent respectivement aux valeurs sur l'extrados et sur l'intrados du profil. Evidemment, pour les profils symétriques, Δv est égal à 0 et l'équation (2.64) s'en trouve simplifiée.

II.5.3 CONDITION DE KUTTA :

Une analyse approfondie montre qu'on peut avoir une infinité de solutions pour l'intensité de la circulation γ , de sorte que le potentiel total de l'écoulement, Φ , satisfait aux conditions de continuité, d'irrotationnalité et de l'écoulement tangent pour un profil en écoulement stationnaire à un angle d'attaque donné. De toute évidence, ces conditions sont insuffisantes pour déterminer une solution unique de la circulation, ce qui permettrait de calculer ensuite la portance et le moment (dans le cas précis d'un fluide parfait incompressible). Il devient nécessaire de poser une condition supplémentaire pour obtenir une valeur unique de Γ qui corresponde à un profil donné et à un angle d'attaque donné. Cette condition provient de l'étude de l'écoulement autour du bord de fuite observé pour la première fois par le mathématicien allemand *Wilhelm Kutta* en 1902 et qui permet de trouver une valeur unique de la circulation au bord de fuite du profil.

Afin d'examiner l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, nous tiendrons compte de deux formes différentes pour la géométrie du bord de fuite du profil et nous exprimerons la condition de *Kutta* comme suit :

- a) Pour un profil se terminant par un dièdre (*fig.2.15.a*) : Le bord de fuite lui-même est un point d'arrêt. Soient les vitesses de l'écoulement au bord de fuite, \mathbf{BF} : v_e tangente à l'extrados et v_i tangente à l'intrados ; on a deux vitesses de directions différentes en un même point BF , ce qui n'est possible que si les deux vitesses sont nulles et que le point BF est un point d'arrêt : C'est-à-dire : $v_e = v_i = 0$.
- b) Pour un profil se terminant par un point de rebroussement (*fig.2.14.a*) : La vitesse à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite a la même valeur finie. Dans ce cas, les vitesses v_e et v_i ont la même direction au point BF et ont toutes deux une valeur finie. Cependant, la pression au bord de fuite a une valeur unique P_{BF} et l'équation de **Bernoulli**, appliquée à l'extrados du profil dans la proximité du bord de fuite, conduit à :

$$P_{BF} + \frac{1}{2} \rho v_e^2 = P_{BF} + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \quad (2.65)$$

Il en résulte que $v_e = v_i$.

De l'étude de l'écoulement au bord de fuite d'un profil, on peut tirer deux remarques importantes :

- a) La vitesse doit prendre des valeurs finies au bord de fuite ;
- b) L'écoulement quitte le profil au bord de fuite, et ce selon la bissectrice de l'angle du bord de fuite.



Fig.2.15. Condition de Kutta

a) Pour un profil se terminant par un dièdre.

b) Pour un profil se terminant par un point de rebroussement.

Dans le cas d'un profil mince, la condition de Kutta se traduit par le fait que l'intensité tourbillonnaire doit prendre une valeur nulle au bord de fuite $\gamma(BF) = \gamma(c) = 0$, quelle que soit la géométrie du profil à cet endroit.

II.6. PRESENTATION DES METHODES DES PANNEAUX :

La théorie du profil mince donne des résultats acceptables pour les coefficients de portance et de moment, mais elle ne tient pas compte de l'effet de l'épaisseur du profil sur les coefficients aérodynamiques. Suivant cette théorie, la pression aux points d'arrêt n'est pas valable, c'est pour cette raison qu'on a été établies des méthodes plus exactes, basées sur une distribution de singularités (sources, tourbillons, doublets) non pas sur la corde, mais sur la surface du profil. Ce sont les méthodes des panneaux. [2.3]

II.6.1 METHODE DE HESS & SMITH :

Cette méthode élaborée par Hess et Smith en 1966 consiste tout d'abord à diviser le profil en un certain nombre de panneaux afin d'en approcher le mieux possible le contour réel. On modélise ensuite l'écoulement à l'aide de sources et de tourbillons distribués sur chaque panneau. Ensuite, les conditions de tangence et de *Kutta*, nous permettent de déterminer l'intensité de ces singularités. Puis, une fois celles-ci connues, on peut calculer la vitesse, et, par conséquent, le coefficient de pression en tout point de la surface, ainsi que la distribution de l'angle d'attaque en fonction de l'angle d'incidence du profil.

Pour un écoulement irrotationnel, le potentiel total autour du profil correspond à l'équation suivante :

$$\Phi = \Phi_{\infty} + \Phi_s + \Phi_v \quad (2.66)$$

Avec :

Φ_{∞} = Potentiel de l'écoulement uniforme.

Φ_s = Potentiel d'une distribution de source $q(s)$ par unité de longueur.

Φ_v = potentiel d'une distribution de tourbillon d'intensité $\gamma(s)$.

Hess et Smith ont posé les conditions suivantes : l'intensité des sources est constante sur chacun des panneaux mais varie d'un panneau à l'autre, tandis que l'intensité des tourbillons est la même sur tous les panneaux. Donc sur un panneau i , $q(s) = q_i$ tandis que $\gamma(s) = \gamma$.

La discrétisation se fait de la façon suivante :

On remplace le profil par un polygone à N cotés en divisant la surface du profil en un certain nombre de panneaux en commençant par le bord de fuite, le choix d'une soixantaine de panneaux donne une assez bonne précision, pour cela on choisit un grand nombre de panneaux au bord d'attaque et au bord de fuite, c'est-à-dire là où la courbure est la plus importante et on utilise une distribution sinusoidale des panneaux telle que :

$x_i = c/2 * (1 - \cos \theta_i)$, $\theta_i = i \Delta\theta$. L'incrément $\Delta\theta$ est fonction du nombre de panneaux ($\Delta\theta = 2\pi/N$).

De telle sorte que le potentiel résultant devient :

$$\Phi = V_{\infty}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{i=1}^N \int_{\text{panneau } i} \left[\frac{q(s)}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma}{2\pi} \theta \right] ds \quad (2.67)$$

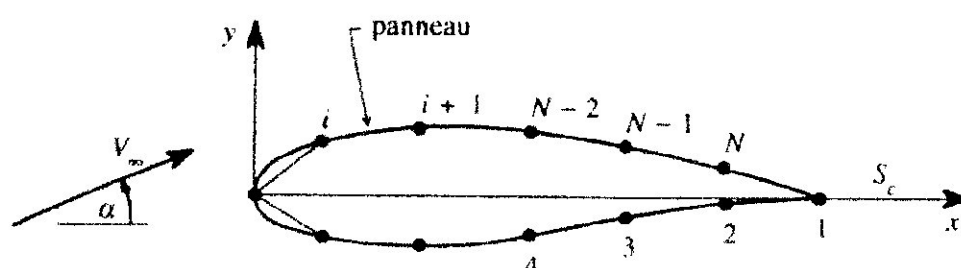


Fig.2.16. Notation des panneaux sur le profil.

Il y a donc $N+1$ inconnues dans ce problème :

- Les N valeurs de q_i aux points de contrôle
- La valeur de γ pour le tourbillon au point de contrôle.

Avant d'effectuer les calculs, on doit préciser les conditions aux frontières :

Tout d'abord, on considère que les points de contrôle sont situés au centre des panneaux. Puis on impose la condition de tangence entre les panneaux, ce qui donne une vitesse normale à la surface des panneaux nulle. Ensuite, la condition de Kutta établit que les vitesses tangentielles du premier et du dernier panneau sont égales.

L'ensemble de ces conditions permet de déterminer les inconnues de départ, c'est-à-dire l'intensité des sources et des tourbillons.

Une fois le champ de vitesse connu, on peut en déduire le coefficient de pression sur chaque panneau. Puis le coefficient de portance est calculé à l'aide de la relation de **Kutta-Joukowski**.

La méthode de Hess et Smith présente des coefficients d'influence assez complexes à évaluer qui nécessitent des calculs plutôt longs à effectuer. De plus, la condition de Kutta génère une équation complexe qui exige qu'on trouve les valeurs des contributions individuelles de chaque panneau. La détermination des valeurs de la matrice des coefficients est donc une lourde tâche avec cette méthode. L'inversion de cette matrice permet de calculer l'intensité des distributions de sources et de tourbillons. Pour obtenir les caractéristiques aérodynamiques recherchées, on doit déterminer la valeur d'une autre

matrice qui, elle, permettra de calculer les vitesses tangentielles au centre de chaque panneau. Ainsi le principal inconvénient que présente cette méthode est qu'elle exige la résolution de deux matrices des coefficients d'influence : La première sert à calculer l'intensité des singularités, et la seconde, à déterminer les vitesses tangentielles, cependant c'est une méthode qui fournit de bons résultats en 2 dimensions comme en 3 dimensions.

II.6.2 FONDEMENTS THEORIQUES DES METHODES DE PANNEAUX (IDENTITE DE GREEN) :

Bien que les méthodes de panneaux aient été découvertes par le biais d'une approche intuitive, les fondements mathématiques de ces méthodes reposent sur l'identité de Green.

Cette identité permet de calculer la valeur du potentiel en tout point du champ concerné, en autant qu'on connaisse les conditions aux limites. La surface en question ne doit cependant contenir aucune singularité. Etant donné que les singularités sont distribuées à la surface du profil, examinons le champ décrit à la figure 1.6.

L'identité de Green s'exprime comme suit :

$$\Phi_p = \int_S [(\vec{n} \cdot \nabla \Phi) \Phi_s - \Phi (\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s)] dS \tag{2.68}$$

Où Φ_s est le potentiel créé par une source unitaire en deux dimensions :

$$\Phi_s = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln r$$

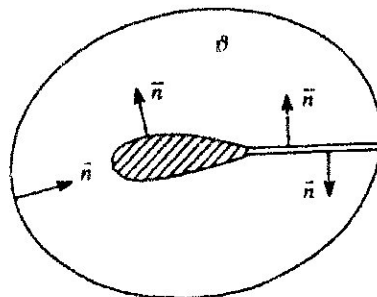


Fig.2.17. Surface représentative à l'intérieur de laquelle l'identité de Green est applicable

La première intégrale de cette équation, $\int_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) \Phi_s dS$, correspond à l'influence au point P d'une distribution de sources sur la surface S et $(\vec{n} \cdot \nabla \Phi)$ représente la vitesse

normale à la paroi. Dans le cas présente cette vitesse est nulle, car il faut satisfaire à la condition de tangence des vitesses.

Par conséquent, ce premier terme est nul, dans la seconde partie, $-\int_S \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS$, on

peut montrer que le terme $(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s)$ correspond l'influence d'un doublet (fig. 2.17).

Ce terme représente le taux de changement de Φ_s selon la direction \vec{n} .

Si Φ_1 et Φ_2 sont les valeurs de potentiel à Q_1 et Q_2 alors :

$$\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\delta} \tag{2.69}$$

Dans la présente situation, on peut interpréter Φ_1 et Φ_2 comme une source et un puits d'intensité élémentaire. La limite indiquée dans l'équation (1.25) correspond donc, par définition, à l'influence d'un doublet. **Moran** propose une relation pour la contribution de la surface S_∞ au point P :

$$\Phi_\infty = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha)$$

Où α représente l'angle d'attaque (l'incidence) du profil. Dès lors, on peut réécrire l'identité de Green comme suit :

$$\phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \int_{S_B + S_C} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS \tag{2.70}$$

Equation qu'on peut discrétiser en utilisant la méthode de panneaux de la même façon que dans l'équation (2.67).

Les paramètres S_B et S_C représentent les surfaces du corps (ou du profil) et la surface du sillage respectivement.

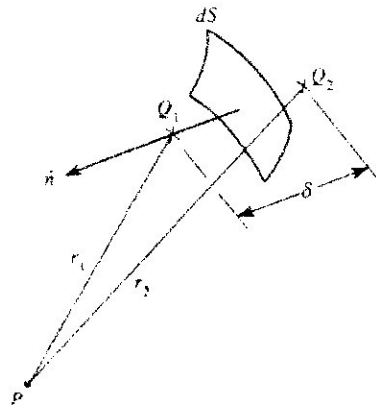


Fig.2.18. Interprétation du second terme comme une distribution de doublets

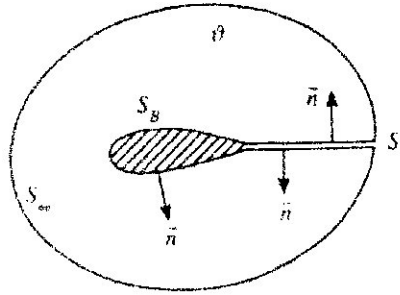


Fig.2.19. Notation des domaines pour l'identité de Green

Remarque : il existe deux manières différentes de calculer le champ des vitesses à l'aide des méthodes de panneaux : on peut, soit utiliser le potentiel total, soit avoir recours à Φ , qui représente le potentiel de perturbation.

Dans la deuxième méthode, on aurait : $V = V_\infty + \nabla\phi$ et la contribution de S_∞ serait nulle :

On aurait alors : $\vec{n} \cdot \nabla\Phi = -\vec{n} \cdot V_\infty$.

En ce qui concerne la surface du sillage, S_C , on peut l'interpréter comme une surface simple, après avoir posé :

$$\Delta\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$$

Où : Φ^+ = valeur de Φ du côté de S_C (\vec{n} pointe vers le fluide)

Φ^- = valeur du côté opposé.

On obtient alors :

$$\Phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \int_{S_B} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla\Phi_s) dS - \int_{S_C} \Delta\Phi(\vec{n} \cdot \nabla\Phi_s) dS \quad (2.71)$$

Où : Φ est le potentiel total.

Lorsqu'on insère la circulation Γ dans l'équation, cette dernière devient :

$$\Phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \int_{S_B} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla\Phi_s) dS - \Gamma \int_{S_C} \vec{n} \cdot \nabla\Phi_s dS \quad (2.72)$$

II.6.3 METHODE DES PANNEAUX AVEC TOURBILLON PAR FORMULATION DE VITESSE :

Fondements mathématiques : la méthode des panneaux avec tourbillon par formulation de vitesse vient de *Mavriplis*, qui l'a présentée en 1971. Elle est basée sur le principe de superposition de solutions élémentaires consistant à distribuer des tourbillons sur la surface du corps à analyser. Comme avec la méthode de *Hess* et *Smith*, on fait une approximation du profil à l'aide d'un ensemble de lignes droites que l'on nomme

panneaux. On détermine la solution en distribuant des tourbillons sur la surface du corps plongé dans un écoulement uniforme avec un écoulement circulaire. Pour ce type de représentation, *Martensen* a démontré que la condition de vitesse tangentielle nulle sur la surface interne du corps, est équivalente à la condition de tangence, et que la vitesse tangentielle sur la surface externe du corps est égale à l'intensité des tourbillons. A partir de ces observations, on peut exprimer la vitesse tangentielle en un point intérieur de la surface du corps de la façon suivante :

$$V_{iP} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{i} + \frac{\omega}{2} + \int_{SB} \gamma \vec{i} \cdot \nabla \Phi_v \, dS \quad (2.73)$$

Où :

- $\omega/2$ = vitesse induite par l'écoulement circulaire
- γ = intensité des tourbillons sur la surface.
- \vec{i} = tangente au point P
- $(\vec{i} \nabla \phi_v)$ = taux de changement de Φ_v selon la direction \vec{i} .

Puisque le point *P* est un point de la surface interne du corps, la vitesse tangentielle est égale à zéro et l'équation (2.73) devient :

$$0 = \vec{V}_\infty \cdot \vec{i} + \frac{\omega}{2} + \int_{SB} \gamma \vec{i} \cdot \nabla \Phi_v \, dS \quad (2.74)$$

On cherche donc la distribution γ et l'écoulement circulaire $\omega/2$ qui satisfont à l'équation (2.74) pour tous les points de la surface du corps. Une fois qu'on a déterminé la distribution γ , on sait que la vitesse tangentielle en un point *P* de la surface externe du corps est égale à l'intensité du tourbillon à cet endroit.

Discretisation : la discrétisation de la surface du corps se fait de la même façon qu'avec la méthode de *Hess* et *Smith* : On pose que la distribution du tourbillon est constante sur chaque panneau, mais varie d'un panneau à un autre. Si on a *N* panneaux, on obtient ainsi $(N+1)$ inconnues, soit les *N* valeurs de γ_i et la valeur de ω . Pour obtenir le nombre d'équations nécessaires, on doit appliquer l'équation (2.74) aux *N* points de contrôle qui sont situés au centre de chaque panneau.

L'équation (2.74) devient alors :

$$0 = \vec{V}_\infty \cdot \vec{i} + \frac{\omega}{2} + \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_0^{l_j} \vec{i} \cdot \nabla \phi_v \, dS \quad (2.75)$$

Après qu'on a trouvé la valeur de l'intégrale on obtient (fig.2.20) :

$$0 = \vec{V}_\infty \vec{i} + \frac{\omega}{2} + \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_0^{l_j} \gamma_j A_{p,j} \quad (2.76)$$

Où :

$$A_{p,j} = \frac{1}{2\pi} \left[\begin{aligned} &\beta_{p,j} (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \\ &+ \ln \frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}} (\sin \theta_p \cos \theta_j - \cos \theta_p \sin \theta_j) \end{aligned} \right] \quad (2.77)$$

$$r_{p,j} = \sqrt{(x_p - x_j)^2 + (y_p - y_j)^2} \quad (2.78)$$

$$\beta_{p,j} = \arctg \left[\frac{(y_p - y_j)(x_{j+1} - x_p) - (y_p - y_{j+1})(x_j - x_p)}{(y_p - y_j)(y_p - y_{j+1}) + (x_j - x_p)(x_{j+1} - x_p)} \right] \quad (2.79)$$

L'équation 2.76 devient un système d'équations algébriques linéaires lorsqu'on l'applique aux points de contrôle i situés au centre des panneaux. On obtient un système de N équations à $(N+1)$ inconnues que l'on peut noter de la façon suivante :

$$-\vec{i} V_\infty = \frac{\omega}{2} + \sum_{j=1}^N \gamma_j A_{i,j} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.80)$$

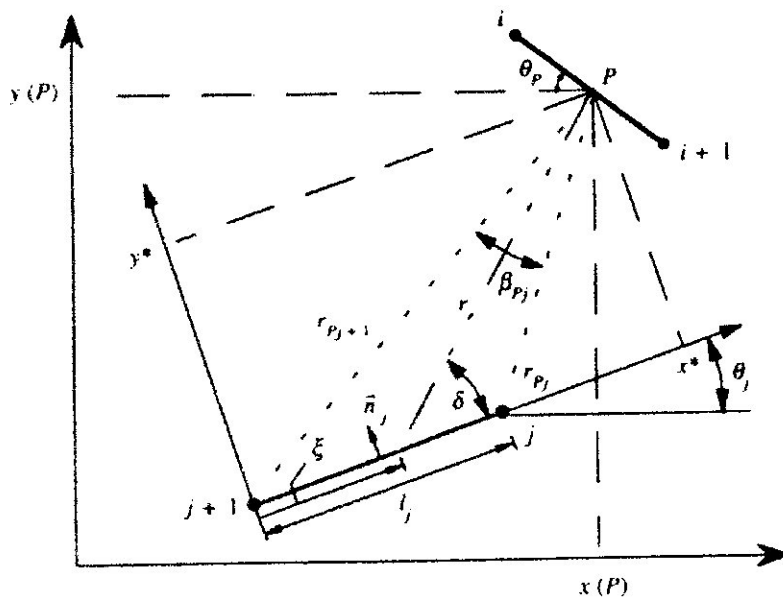


Fig2.20. Notation sur un panneau :

Méthode de panneaux avec tourbillon par formulation de vitesses et de ligne de courant.

Il est important de noter que lorsque $i = j$, l'expression (2.77) n'est plus valable. Dans ce cas, le coefficient $A_{i,i}$ est égale à $-1/2$. Il manque une seule équation et elle provient encore une fois de l'application de la condition de *Kutta* au bord de fuite. Comme dans le cas de la méthode de *Hess* et *Smith*, on applique numériquement cette condition en posant que les vitesses tangentielles sont égales aux points de contrôle adjacents au bord de fuite, c'est-à-dire aux points $i = 1$ et $i = N$. Comme ces vitesses tangentielles sont égales à l'intensité des tourbillons en ces points, l'équation de la condition de *Kutta* est très simple et exprimée comme suit :

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0 \quad (2.81)$$

L'équation (2.80) et l'équation (2.81) forment un système de $(N+1)$ équations et $(N+1)$ inconnues que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.82)$$

Où $[A]$ est la matrice des coefficients d'influence de dimension $(N+1)$ sur $(N+1)$.

On peut trouver les coefficients de $[A]$ à l'aide de la relation (2.77).

Les autres coefficients sont :

$$A_{i,i} = -\frac{1}{2}$$

$$A_{i,N+1} = \frac{1}{2}$$

et

$$A_{N+1,j} = 0 \quad \text{sauf } A_{N+1,1} = A_{N+1,N} = 1$$

Le vecteur $\{x\}$ est le vecteur inconnu de dimension $(N+1)$ et formé de :

$$x_i = \gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.83)$$

$$x_{N+1} = \omega \quad (2.84)$$

Le vecteur $\{b\}$ est le vecteur constant qu'on détermine ainsi :

$$b_i = -V_\infty \cos(\alpha - \theta_j) \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.85)$$

$$b_{N+1} = 0 \quad (2.86)$$

Alors qu'on résout le système 2.82, il est possible de déterminer directement les vitesses tangentielles aux points de contrôle, exprimées de la façon suivante :

$$V_{t,i} = \gamma_i \quad (2.87)$$

Les coefficients de pressions aux points de contrôles ont comme expression la relation 2.63.

Le coefficient de portance s'exprime d'une façon tout à fait similaire à l'équation 2.67 La seule différence est que l'intensité des tourbillons varie d'un panneau à un autre.

Le coefficient de portance devient donc :

$$C_l = \frac{2}{V_\infty c} \sum_{j=1}^N \gamma_j l_j \quad (2.88)$$

II.6.4 METHODE DE PANNEAUX AVEC TOURBILLONS PAR FORMULATION DE LIGNE DE COURANT :

Fondements mathématiques : la formulation de ligne de courant se base également sur le principe de superposition des solutions élémentaires et utilise encore le tourbillon. La différence réside dans l'équation intégrale, qui n'exprime pas la vitesse tangentielle comme dans l'article 6.3, mais plutôt la ligne de courant. Cette formulation utilise toutefois le fait que la vitesse tangentielle en un point du corps est égale à l'intensité des tourbillons, ce qui équivaut à appliquer la condition de tangence puisqu'on spécifie que la vitesse tangentielle sur la surface interne est égale à zéro. Cette hypothèse est très avantageuse car elle permet d'obtenir facilement les caractéristiques de l'écoulement. La fonction de courant générée par une distribution de tourbillons sur la surface d'un corps plongé dans un écoulement uniforme est la suivante :

$$\Psi_p = \Psi_\infty + \int_{S_b} \gamma \Psi_v dS \quad (2.89)$$

La fonction de courant d'un écoulement uniforme prend la forme :

$$\Psi_\infty = V_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \quad (2.90)$$

Et celle d'un tourbillon unitaire correspond à :

$$\Psi_v = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (2.91)$$

On obtient l'équation :

$$\Psi_p = V_\infty (y_p \cos \alpha - x_p \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_b} \gamma \ln r dS \quad (2.92)$$

Qui exprime la fonction de courant en un point Q quelconque. Or, la fonction de courant est constante tout le long du corps et on a donc, pour tout point P sur le corps :

$$\Psi_p = \Psi_b \quad (2.93)$$

Comme avec la formulation des vitesses (art. 6.3), on cherche une distribution γ telle que la fonction de courant sera constante tout le long de la surface du corps.

Discretisation : la discrétisation de l'intégrale de surface de l'équation 2.92 se fait de façon similaire aux méthodes précédentes. On procède d'abord à une approximation du corps des panneaux sur lesquels on pose que la distribution de tourbillons est constante mais qu'elle varie d'un panneau à un autre.

L'équation 2.92 devient, en conséquence :

$$\Psi_B = V_\infty (y_P \cos \alpha - x_P \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_0^{l_j} \ln r \, dS \quad (2.94)$$

Avec la division de la surface en N panneaux, on obtient $(N+1)$ inconnues, soit les N valeurs de γ , que l'on note γ_i , et la valeur de Ψ_B .

Après avoir trouvé la valeur de l'intégrale, l'équation 2.94 devient (fig. 2.20) :

$$\Psi_B = V_\infty (y_P \cos \alpha - x_P \sin \alpha) + \sum_{j=1}^N A_{P,j} \gamma_j \quad (2.95)$$

Où:

$$A_{P,j} = \frac{l_j}{2\pi} [\ln r_{P,j+1} - 1] + \frac{x^*}{2\pi} \ln \frac{r_{P,j}}{r_{P,j+1}} + \frac{y^*}{2\pi} \beta_{P,j} \quad (2.96)$$

$$x^* = (x_P - x_j) \cos \theta_j + (y_P - y_j) \sin \theta_j \quad (2.97)$$

$$y^* = -(x_P - x_j) \sin \theta_j + (y_P - y_j) \cos \theta_j \quad (2.98)$$

On détermine les paramètres $r_{P,j}$ et $\beta_{P,j}$ aux moyens des équations 2.78 et 2.79.

Lorsque le point P est situé au centre du panneau j , alors :

$$A_{P,j} = \frac{l_j}{2\pi} \left[\ln \frac{l_j}{2} - 1 \right] \quad (2.99)$$

On obtient un système de N équations linéaires lorsqu'on applique l'équation 2.95 au centre de chaque panneau c'est-à-dire lorsque le point P devient le point de contrôle i pour $i=1, 2, \dots, N$. la $(N+1)$ équation nécessaire provient encore une fois de l'application de la condition du **Kutta** au bord de fuite. Elle s'exprime sous la même forme qu'à l'article 6.3.

Le système d'équations ainsi obtenu peut prendre la forme matricielle suivante :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.100)$$

Où $[A]$ est la matrice des coefficients d'influences. On trouve les coefficients $A_{i,j}$ à l'aide des équations 2.96 et 2.99 selon le cas, pour $j < N+1$ et $A_{i,N+1} = -1$. Les coefficients de la

($N+1$) équation sont tous nuls sauf $A_{N+1, 1} = A_{N+1, N} = 1$. Le vecteur inconnu $\{x\}$ est le suivant :

$$x_i = \gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.101)$$

$$x_{N+1} = \Psi_c \quad (2.102)$$

Le vecteur constant $\{b\}$ est :

$$b_i = -V_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.103)$$

$$b_{N+1} = 0 \quad (2.104)$$

Lorsqu'on résout le système de l'équation 2.100 on utilise l'équation 2.87 pour obtenir directement les vitesses tangentielles. L'équation 2.63 permet d'obtenir les coefficients de pression et la relation 2.77 donne la valeur du coefficient de portance.

II.6.5 METHODE DE PANNEAUX AVEC DOUBLETES CONSTANTS PAR FORMULATION DU POTENTIEL :

Fondements mathématiques : la méthode des panneaux avec doublets constants par formulation du potentiel utilise la théorie des fonctions de Green pour obtenir l'équation intégrale. Elle résulte du travail de *Morino* et *Kuo* et se base sur la solution de l'équation intégrale 1.23.

Discrétisation : le profil est, comme avec les méthodes précédentes, représenté par un ensemble de panneaux. De plus, le potentiel, correspondant à l'intensité des doublets, est constant sur chaque panneau et varie d'un panneau à un autre. On obtient donc N inconnues correspondant aux potentiels Φ_i ; $i = 1, 2, \dots, N-1, N$.

On peut exprimer la circulation de la façon suivante :

$$\Gamma = \Phi_N - \Phi_1 \quad (2.105)$$

Où : Φ_N = potentiel sur le panneau N.

Φ_1 = potentiel sur le panneau 1.

A la suite de cette discrétisation, l'équation 1.23 devient :

$$\begin{aligned} \Phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_0^{l_j} \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s \, dS \\ - (\Phi_N - \Phi_1) \int_c^\infty \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s \, dS \end{aligned} \quad (2.106)$$

On retrouve dans cette équation linéaire algébrique N inconnues, soit les potentiels Φ_j sur tous les panneaux. Il est important de remarquer qu'on a une inconnue de moins que dans toutes les méthodes précédentes. On n'a donc besoin que de N équations, qui proviennent de l'application de l'équation 2.106 au centre de tous les panneaux.

On obtient ainsi un système de N équations linéaires et N inconnues :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.107)$$

Où:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{1}{2\pi} \beta_{i,1} - \delta_{i,1} - \frac{1}{2\pi} \beta_{i,N+1} & \text{si } j = 1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \beta_{i,N} - \delta_{i,N} - \frac{1}{2\pi} \beta_{i,N+1} & \text{si } j = N \\ &= \frac{1}{2\pi} \beta_{i,j} - \delta_{i,j} & \text{autrement} \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$b_{i,j} = -\vec{V}_\infty (\bar{x}_i \cos \alpha + \bar{y}_i \sin \alpha) \quad (2.109)$$

Le vecteur inconnu de dimension N contenant les Φ_i est $\{x\}$, le symbole de **Kronecker** est $\delta_{i,j}$ et le paramètre $\beta_{i,j}$ est défini par l'équation 2.79.

De plus, on a :

$$\beta_{i,N+1} = \arctg \left[\frac{\bar{y}_i}{c - \bar{x}_i} \right] \quad (2.110)$$

Où \bar{x}_i et \bar{y}_i sont les coordonnées du point de contrôle i situé au centre du panneau i . En raison de la discontinuité du potentiel d'un panneau à l'autre, les panneaux voisins contribuent à créer des tourbillons en chacun des nœuds dont l'intensité, par exemple au nœud i , correspond à la différence $\Phi_i - \Phi_{i-1}$. Cependant, le panneau 1 et le panneau N font naître des tourbillons dont l'intensité est respectivement Φ_1 et Φ_N , de telle sorte que le tourbillon au nœud du bord de fuite s'annule avec celui du panneau $(N+1)$ se trouvant sur la surface du sillage S_c . Cette remarque permet d'affirmer que la vitesse est continue au bord de fuite et, par conséquent, la condition de **Kutta** trouve une solution implicite dans cette formulation. On peut résoudre le système d'équations 2.63 directement : On obtient ainsi les potentiels au centre de tous les panneaux. Pour en déduire les vitesses tangentielles, on doit dériver les potentiels.

On obtient ainsi l'équation suivante, qui exprime la vitesse tangentielle aux nœuds du profil (fig. 2.21):

$$V_{t,i} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{d} \quad (2.111)$$

Avec d comme il est défini dans la figure 2.21.

L'expression 2.107 permet d'obtenir les coefficients de pression. Toutefois, il s'agit des coefficients de pression aux nœuds du profil et non au centre des panneaux.

À partir des équations 2.84 et 2.101, on trouve que :

$$C_l = \left(\frac{\Phi_N - \Phi_1}{V_\infty c} \right) \tag{2.112}$$

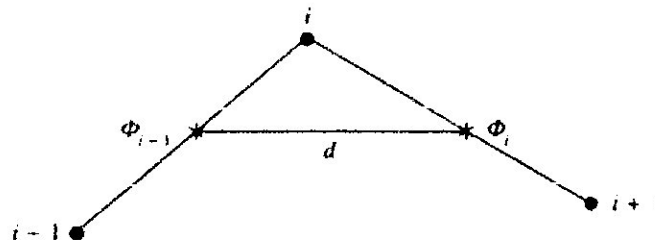


Fig.2.21. Panneaux adjacents

II.6.6 METHODE DE PANNEAUX AVEC DOUBLET LINEAIRES PAR FORMULATION DU POTENTIEL :

Fondements mathématiques : On peut obtenir la solution discrète du problème envisagé au moyen d'une méthode de panneaux développée par *Moran*, basée sur la solution de l'équation 2.71. On a obtenu cette dernière équation par la technique des fonctions de *Green*. La grande différence avec la méthode décrite à l'article 6.5 se situe sur le plan de la discrétisation de la distribution de doublets. *Moran* utilise une distribution linéaire de doublets.

Discrétisation : on doit d'abord discrétiser les intégrales de surface de l'équation 2.71 suivant la démarche de l'article 6.5. Toutefois, au lieu de poser que la distribution de doublets est constante sur chaque panneau, on utilise la distribution suivante :

$$\Phi = \Phi_j + \xi \frac{(\Phi_{j+1} - \Phi_j)}{l_j} \tag{2.113}$$

Où Φ_j est le potentiel au nœud j et ξ varie entre 0 et l_j .

On remarque de plus que :

$$\Gamma = \Phi_{N+1} - \Phi_1 \tag{2.114}$$

Après cette discrétisation, l'équation 2.71 devient :

$$\begin{aligned} \Phi_P = V_\infty (x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha) - \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \Phi \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s dS \\ - (\Phi_{N+1} - \Phi_1) \int_{S_C} \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s dS \end{aligned} \quad (2.115)$$

Après avoir trouvé la valeur des intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_P = V_\infty (x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\Phi_j + \frac{x^*}{l_j} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) \right] \beta_{P,j} \\ + \frac{y^*}{l_j} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) \ln \frac{r_{P,j+1}}{r_{P,j}} + \frac{1}{2\pi} (\Phi_{N+1} - \Phi_1) \beta_{P,N+1} \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\beta_{i,N+1} = \arctg \left[\frac{y_P}{c - x_P} \right] \quad (2.117)$$

Où les termes $r_{P,j}$ et $\beta_{P,j}$ sont donnés par les équations 2.78 et 2.79. On définit les termes x^* et y^* au moyen des équations 2.97 et 2.99.

Si le point P tend vers le i^{e} nœud du corps, l'équation 2.116 possède alors $(N+1)$ inconnues, soit les Φ_i , pour $i=1, 2, 3, \dots, N+1$. Cette équation peut devenir un système d'équations algébriques si on l'applique à tous les nœuds (soit $N+1$ nœuds). Il reste que ce n'est pas si simple, en effet, on doit faire attention lorsque $j=i$ ou $j=i-1$ (équation 2.116 où P devient i). En effet, ces termes de la sommation contiennent des singularités logarithmiques, car $r_{i,j} = 0$. De plus, $\beta_{i,j}$ est indéterminé lorsque $j=i$ ou $j=i-1$. Il faut donc faire tendre le point P vers le i^{e} nœud et tenir compte des effets sur l'équation 2.116. Comme on l'a vu précédemment, les termes importants sont les i^{e} et $(i-1)^{\text{e}}$ de la sommation de l'équation 2.116.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_i = \left\{ \left[\Phi_{i-1} + \frac{x_{i-1}^*}{l_{i-1}} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) \right] \beta_{i,i-1} \frac{y_{i-1}^*}{l_{i-1}} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) \ln \frac{r_{i,i}}{r_{i,i-1}} \right\} \\ + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\Phi_i + \frac{x_i^*}{l_i} (\Phi_{i+1} + \Phi_i) \right] \beta_{i,i} + \frac{y_i^*}{l_j} (\Phi_{i+1} + \Phi_i) \ln \frac{r_{i,i+1}}{r_{i,i}} \right\} \\ + \text{termes réguliers} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Dans l'équation précédente, x_{i-1}^*, y_{i-1}^* est la position du point P par rapport au panneau $(i - 1)$. Une remarque semblable s'applique pour x_i^*, y_i^* . Les termes réguliers sont tous les termes de la sommation de l'équation 2.116 sauf les termes $j=i$ et $j = i - 1$.

Comme P tend vers le nœud i , on a :

$$x_i^* = 0 \quad y_i^* = 0 \quad y_{i-1}^* = 0 \quad x_{i-1}^* = l_{i-1} \quad (2.119)$$

De là, l'équation 2.118 devient :

$$\Phi_i = \frac{1}{2\pi} \Phi_i (\beta_{i,i-1} + \beta_{i,i}) + \text{termes réguliers} \quad (2.120)$$

Où $\beta_{i,i-1}$ et $\beta_{i,i}$ sont indéterminés. Par contre, il est possible de calculer leur somme, qui représente l'angle entre les panneaux $i - 1$ et i .

Lorsque i est égal à 1, le résultat est différent, l'équation 2.118 devient (fig. 2.22):

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} [\Phi_1 (\delta - 2\pi) \Phi_{N+1} \lambda] + \text{termes réguliers} \quad (2.121)$$

L'application de l'équation 1.72 aux nœuds 1 et $N+1$ donne un résultat identique. On se retrouve avec N équations linéairement indépendantes, qui ne suffisent pas pour déterminer les $(N+1)$ inconnues Φ_i . La dernière équation nécessaire provient de l'application de la condition de *Kutta* au bord de fuite. Elle consiste à égaliser les vitesses tangentielles au centre des deux panneaux adjacents au bord de fuite :

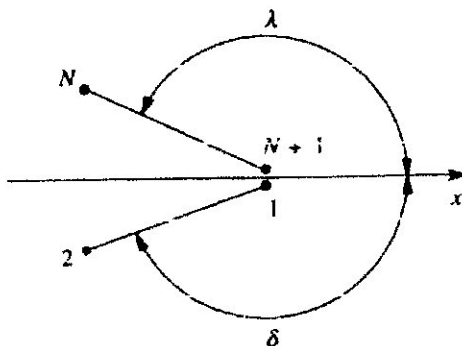


Fig.2.22. Nœuds au bord de fuite.

$$\frac{\Phi_{N+1} - \Phi_N}{l_N} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{l_1} \quad (2.122)$$

On peut exprimer ce système d'équations sous la forme matricielle suivante :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.123)$$

Où $[A]$ est une matrice carrée $(N+1)$ sur $(N+1)$, appelée matrice des coefficients d'influence. Elle ne dépend que de la géométrie du corps. Le vecteur $\{x\}$ est un vecteur de dimension $(N+1)$ et contient les inconnues Φ_i .

Le vecteur $\{b\}$ est également un vecteur de dimension $(N+1)$. On le calcule de la façon suivante :

$$b_i = -V_\infty (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \quad (2.124)$$

Lorsqu'on résout le système d'équations 2.118, il est possible de déterminer directement les $(N+1)$ inconnues. La solution de l'équation 2.116, permet de connaître les valeurs du potentiel Φ à chaque nœud. Etant donné que la vitesse représente le gradient du potentiel, la procédure la plus simple pour l'obtenir consiste à dériver l'équation 2.113, la formule supposant une variation linéaire du potentiel sur chaque panneau, et de poser que le résultat constitue la vitesse tangentielle au centre du panneau :

$$V_{t,i} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{l_j} \quad (2.125)$$

L'expression du coefficient de pression au centre du panneau i provient de l'équation 2.63. Pour ce qui est du coefficient de portance, on le trouve, à partir des équations 2.64 et 2.114, que :

$$C_l = 2 \left(\frac{\Phi_{N+1} - \Phi_1}{V_\infty c} \right) \quad (2.126)$$

II.6.7 AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES METHODES DE PANNEAUX :

Les principales différences que l'on peut noter entre les cinq méthodes de panneaux présentées précédemment se situent sur les plans de la complexité des coefficients d'influence, de la forme de la condition de Kutta et du type d'inconnues.

La méthode de Hess et Smith présente des coefficients d'influence assez complexes à évaluer qui nécessitent des calculs plutôt longs à effectuer. De plus, la condition de Kutta génère une équation complexe qui exige qu'on trouve les valeurs des contributions individuelles de chaque panneau. La détermination des valeurs de la matrice des coefficients est donc une lourde tâche avec cette méthode. L'inversion de cette matrice permet de calculer l'intensité des distributions de sources et de tourbillons. Pour obtenir les caractéristiques aérodynamiques recherchées, on doit déterminer la valeur d'une autre

matrice qui, elle, permettra de calculer les vitesses tangentielles au centre de chaque panneau. Ainsi le principal inconvénient que présente cette méthode est qu'elle exige la résolution de deux matrices des coefficients d'influence : La première sert à calculer l'intensité des singularités, et la seconde, de déterminer les vitesses tangentielles. Un dernier point intéressant au sujet de cette méthode concerne la position des points de contrôle. Ces derniers sont situés au centre des panneaux, ce qui signifie que l'équation intégrale exprimant la condition d'imperméabilité du corps ne s'applique pas directement au corps réel.

De son côté, la méthode de panneaux avec tourbillons par formulation de vitesse possède une condition de Kutta extrêmement simple et nécessite l'évaluation d'une seule matrice puisqu'une fois la distribution de tourbillons connue, le calcul des vitesses tangentielles devient automatique. En effet, comme on l'a vu précédemment, l'intensité tourbillonnaire en un point est égale à la vitesse tangentielle. On peut donc aisément prévoir que cette méthode sera plus rapide que la méthode de Hess et Smith. Toutefois, le degré de précision qu'on peut en attendre devrait être à peu près le même qu'avec l'autre méthode, puisque les points de contrôle se trouvent au centre des panneaux.

On peut reprendre les mêmes commentaires en ce qui concerne la méthode de panneaux avec tourbillons par formulation de ligne de courant. Toutefois, on doit restreindre cette méthode à la solution d'écoulement en deux dimensions.

C'est avec la méthode avec doublets constants que les coefficients d'influence sont les plus simples à déterminer ; La solution du système matriciel permet de calculer le potentiel de vitesse aux points de contrôle, et, par conséquent, de calculer facilement les vitesses tangentielles par une simple dérivée numérique. Cette méthode ne nécessite qu'une seule matrice, mais les points de contrôle sont encore une fois situés au centre des panneaux. A remarquer que c'est la seule méthode qui ne possède pas de condition de *Kutta* explicite.

Enfin, la méthode avec doublets linéaires est la seule méthode dans laquelle les points de contrôle se trouvent aux extrémités des panneaux. La détermination des coefficients d'influence est extrêmement complexe et fait donc intervenir de longs et laborieux calculs.

La principale différence qu'on note entre elle et la méthode avec doublets constants est la présence d'une condition de Kutta explicite. Il est également important de noter que le champ de vitesse induit par la représentation linéaire n'est pas singulier aux extrémités des panneaux, comme c'est le cas dans la méthode avec doublets constants.



Chapitre III

Méthode des

Images

III.1. CONSEQUENCE D'UNE PROPRIETE DE SYMETRIE :

Pour résoudre certains problèmes d'écoulements potentiels la méthode des images est souvent utile. Il s'agit de problèmes où une propriété de symétrie peut être exploitée pour reformuler le problème original. Par conséquent, une simplification est obtenue dans l'analyse. La méthode est démontrée ici au moyen d'exemples.

III.2. METHODE DES IMAGES : [3.1]

Puisqu'on peut représenter l'écoulement autour d'un corps par une distribution appropriée de singularités vérifiant l'équation de Laplace, il est important d'étudier ces représentations en présence d'autres conditions limites telle que le sol et les parois des souffleries. Par exemple, prenons une source bidimensionnelle d'intensité Q à une distance h d'un mur (voir fig.). Posons que l'origine du système de coordonnées cartésien est la source et que l'axe x est parallèle au mur. S'il n'y avait pas de mur, le potentiel des vitesses de la source s'exprimerait ainsi :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.1)$$

Toutefois, étant donné qu'on veut une ligne de courant sur le mur et que la seule singularité dans l'écoulement est due à la source, la solution recherchée pour le potentiel total, Φ_T est de la forme :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \Phi_I \quad (3.2)$$

Où le potentiel « image », Φ_I , satisfaisant à l'équation de Laplace, n'a aucune discontinuité pour $y > -h$. le potentiel des vitesses diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de mur et annule la composante normale de la vitesse au mur due à la source. On écrit donc la condition limites au mur sur Φ_I ainsi :

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(x, -h) = \frac{Qh}{2\pi} \frac{1}{x^2 + h^2} \quad (3.3)$$

Comme solution possible, on considère une source « image » situé à $(0, -2h)$. Son potentiel des vitesses est :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y^2 + h^2)} \quad (3.4)$$

Et lorsqu'on substitue cette équation dans l'équation des conditions limites, on montre que les conditions aux limites sont satisfaites.

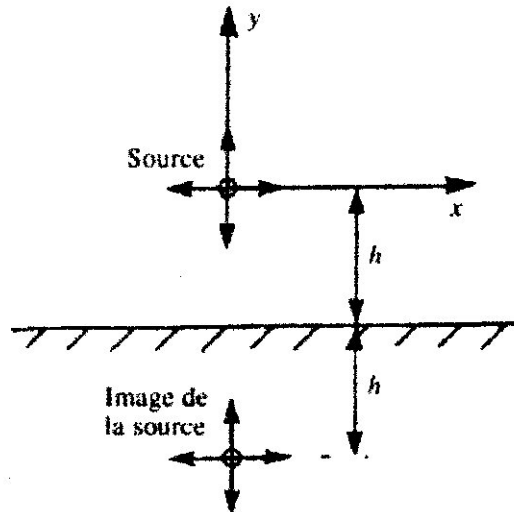


Fig.31. Image de la source

La fig.3.2 présente les images pour un tourbillon et un doublet. On exprime le potentiel complexe pour les singularités initiales, plus leurs images, par :

$$\begin{aligned}
 \text{source : } f(x) &= \frac{Q}{2\pi} \ln z + \frac{Q}{2\pi} \ln(z + 2ih) \\
 \text{tourbillon : (sens horaire) } f(z) &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + 2ih) \\
 \text{doublet : (} m = 2\alpha Q \text{) } f(z) &= -\frac{m}{2\pi z} e^{i\alpha} - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z + 2ih)} e^{i(2\pi-\alpha)}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

(l'axe du doublet est incliné suivant l'angle α par rapport à Ox)

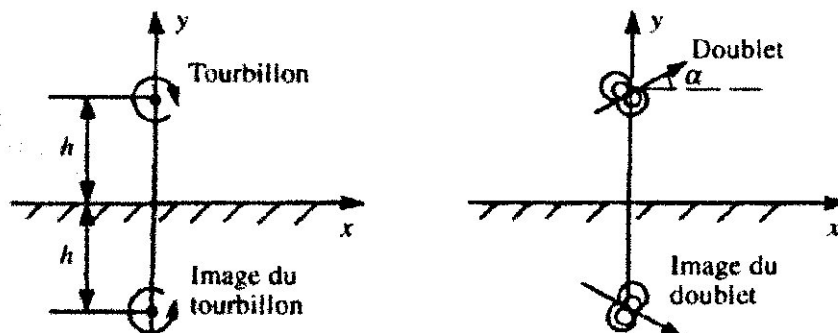


Fig.3.2 Image du tourbillon et du doublet.

III.3. EXEMPLE ^[3.2]

III.3.1. ÉCOULEMENT ENGENDRE PAR UNE SOURCE SITUEE A PROXIMITE D'UNE PAROI

Considérons un écoulement engendré par deux sources placées symétriquement par rapport à la paroi selon la fig. Pour vérifier que la paroi devienne une ligne de courant $\Psi = \text{constant}$, on étudie l'écoulement qui résulte de la juxtaposition des deux sources d'intensité égale. Donc on obtient pour la fonction de courant

$$\frac{2\pi \Psi}{Q} = \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y+b}{x} = \operatorname{arctg} \frac{2yx}{x^2 + b^2 - y^2} \quad (3.6)$$

où $2b$ est la distance entre les sources. Il découle de (3.6) que $\Psi = 0$ pour $y = 0$ et pour $x = 0$. Par conséquent la paroi $y = 0$ est une ligne de courant et l'expression (3.6) représente la solution cherchée (fig.3.3).

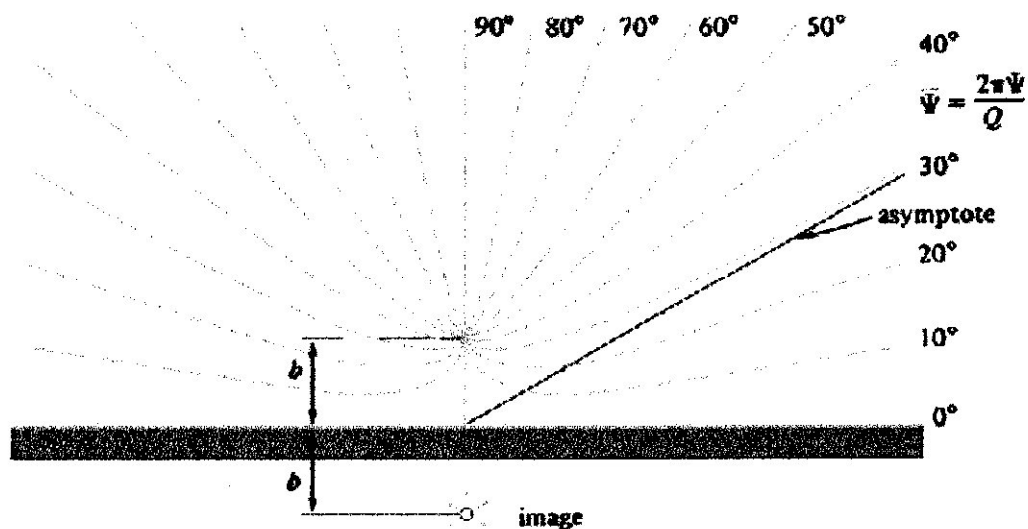


Fig.3.3. Ecoulement engendré par une source à proximité d'une paroi.

III.3.2. UNE AILE A PROXIMITE D'UNE PAROI

La solution pour ce cas est obtenue en introduisant deux ailes placées symétriquement par rapport à la paroi de telle façon que chacune d'elles représente une image parfaite de l'autre (fig.3.4).

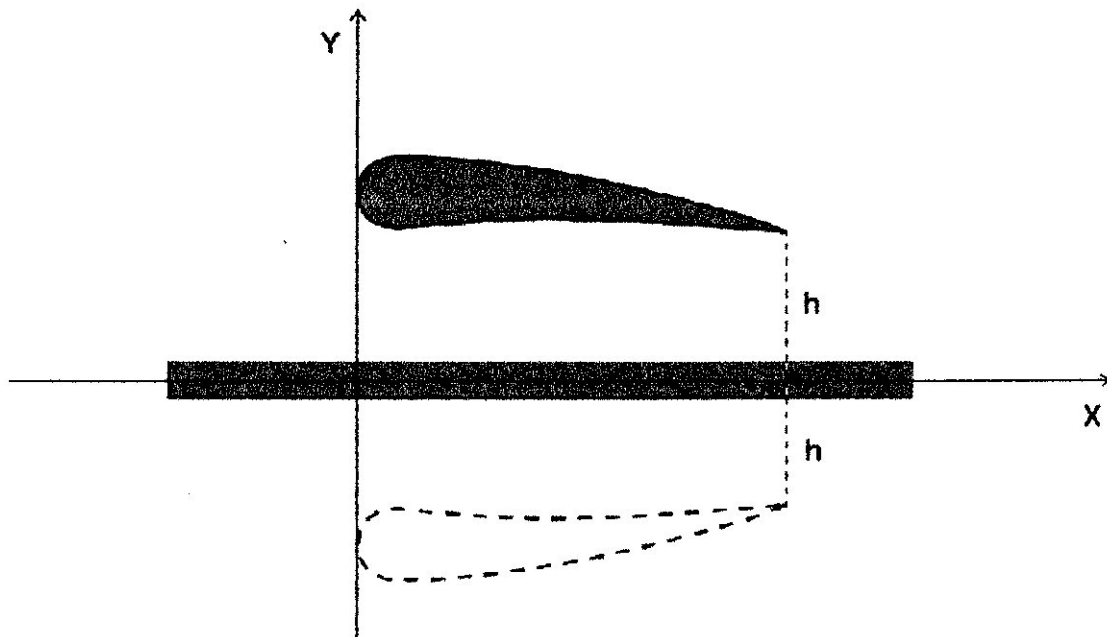


Fig.3.4. Profil d'aile à proximité d'une paroi.

III.3.3. UNE AILE PLACÉE ENTRE DEUX PAROIS (SOUFFLERIE)

L'aile originale et son image I engendrent la paroi A tandis que l'aile originale et son image 1 engendrent la paroi a (fig.3.5). Mais l'image 1 donne une perturbation sur la paroi A et par conséquent il faut corriger l'écoulement en ajoutant l'image II, etc. On obtient ainsi une série infinie d'images pour la description de l'écoulement original.

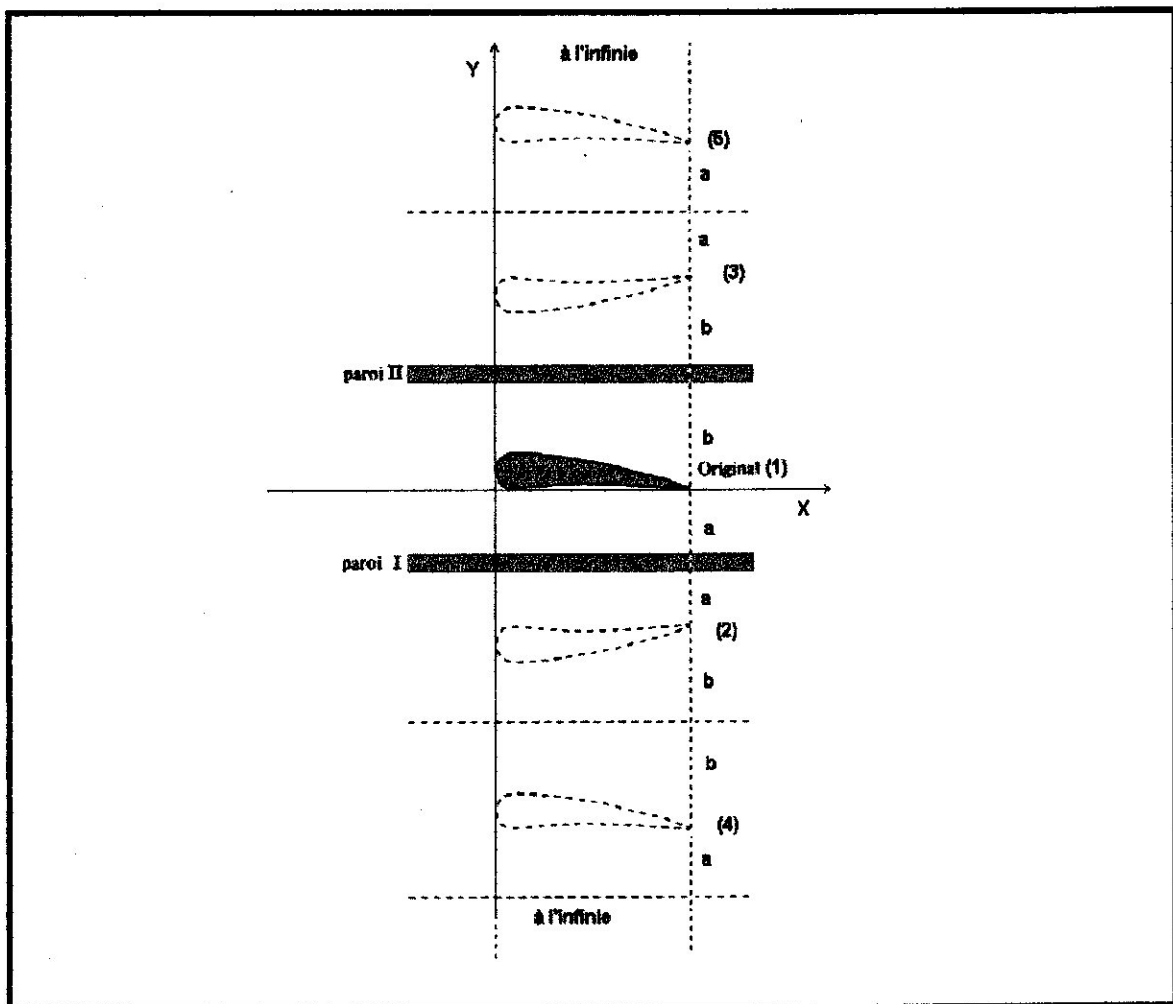


Fig.3.5. Profil d'aile placée entre deux parois.



Chapitre IV

Algorithme et

Processus de Travail

IV.1. PREAMBULE :

Il s'agit dans ce chapitre de présenter ce qui a été exposé dans les chapitres 1, 2 et 3 d'une manière pratique. Le processus à suivre est, par conséquent, le même que celui de la partie théorique :

- 1) Géométrie du profil.
- 2) Cas du profil à air libre : Méthode des panneaux.
- 3) Cas du profil en présence d'une et de deux parois : Méthode des images.

Aussi, avant de commencer, il est très important de préciser que nous avons limité notre étude à un profil symétrique de type NACA à quatre chiffres symétrique, car à l'origine nous voulions aussi la (l'étude) faire avec un profil asymétrique mais nous avons fini par laisser tomber à cause des innombrables difficultés rencontrées lors du travail ... Avis aux amateurs !

IV.2. GEOMETRIE DU PROFIL :

Cette étape pourrait servir de « vestibule » à notre projet, on aurait pu ne pas en faire le détours mais elle sert quand même à ouvrir un petit peu les portes sur les tous premiers pas de notre travail ou il fallait d'abord commencer par trouver l'équation explicite du profil dont il fallait calculer les C_p et C_l , mais surtout, de saisir le pourquoi de la méthode des panneaux : En effet nous avons eu énormément de difficultés à avoir des équations de forme pour un profil NACA quelconque, cela est dû au fait que nous n'avons pas trouvé d'ouvrages où il était question et d'équations d'abscisses et de celles des ordonnées simultanément, comme nous le souhaitions, mais plutôt des tables relatives aux profils NACA à quatre chiffres faisant références à des abscisses et leurs ordonnées correspondantes, autrement dit, sans les équations des abscisses et ordonnées, il est évident que cette façon de procéder manque énormément quant à la précision de la géométrie du profil puisqu'il faut faire une extrapolation des points donnés dans les tables.

Ensuite, nous avons pu trouver l'équation de forme d'un profil NACA, qui est de la forme (2.57) pour le cas symétrique, et de la forme (2.59-2.60-2.61) pour le cas asymétrique, mais nous n'avons cependant toujours pas l'équation des abscisses, pour y remédier, il fallait (non il faut, car c'est la méthode qui exige cela) faire une répartition des points du profil selon la corde « C ». On fait donc varier les abscisses $x(i)$ en les limitant

par la longueur de la corde « C » telle que : $x(i) = \frac{C}{2}(1 - \cos \theta_i)$, pour cela, on propose à l'utilisateur de donner le nombre de points souhaité pour créer et dessiner le profil.

Pour une précision donnée, l'utilisateur doit entrer le nombre de point « N » puis donner une certaine précision de calcul « pas », c'est d'ailleurs grâce à ce « pas » qu'on peut avoir la succession des points du profil qui vont servir à réaliser son (profil) dessin par la suite (on en reparlera plus amplement dans la partie présentation de l'application). Il s'avère, la aussi malheureusement, que cette méthode fait défaut pour ce qui est de la précision puisque les ordonnées des abscisses correspondant aux pas ne sont pas concentrées à l'extrados et à l'intrados.

IV.3. METHODE DES PANNEAUX :

Nous avons fini, fort heureusement, par trouver une solution explicite à notre problème : Il s'agit de l'équation des abscisses $x(i) = \frac{C}{2}(1 - \cos \theta_i)$, sachant que $\theta_i = 2\pi i/N$ cette dernière présente l'avantage de faire une répartition des points telle, qu'ils sont concentrés aux bord d'attaque et au bord de fuite, c'est-à-dire aux endroits qui présentent la plus grande courbure.

IV.3.1. CHOIX DE LA METHODE DE RESOLUTION : METHODE DE HESS ET SMITH :

Notre choix s'est porté sur la méthode de *Hess & Smith*, or comme nous l'avons vu lors de la présentation des différentes méthodes des panneaux, la méthode de *Hess & Smith* est la plus compliquée des méthodes indiquées, du fait - comme nous l'avons dit - qu'elle présente des coefficients d'influence assez complexes à évaluer qui nécessitent des calculs plutôt longs à effectuer. De plus, la condition de *Kutta* génère une équation complexe qui exige qu'on trouve les valeurs des contributions individuelles de chaque panneau. La détermination des valeurs de la matrice des coefficients est donc une lourde tâche avec cette méthode. L'inversion de cette matrice permet de calculer l'intensité des distributions de sources et de tourbillons. Pour obtenir les caractéristiques aérodynamiques recherchées, on doit déterminer la valeur d'une autre matrice qui, elle, permettra de calculer les vitesses tangentielles au centre de chaque panneau. Ainsi le principal inconvénient que présente cette méthode est qu'elle exige la résolution de deux matrices

des coefficients d'influence : La première sert à calculer l'intensité des singularités, et la seconde, de déterminer les vitesses tangentielles. Malgré cela, elle se distingue par le fait qu'elle présente les résultats les plus exacts de toutes les méthodes des panneaux, de plus elle est valable en deux dimensions comme en trois.

Enfin, il faut ajouter que les difficultés que représente la méthode de Hess et Smith nous ont « boosté » à travailler avec, nous avons essayé en quelque sorte de la « dompter » afin de la rendre plus accessible.

IV.3.2. PRESENTATION THEORIQUE DE LA METHODE DE HESS & SMITH :

a. Fondements mathématiques :

La méthode élaborée par *Hess* et *Smith* en 1966 consiste tout d'abord à diviser le profil en un certain nombre de panneaux afin d'en approcher le mieux possible le contour. Ensuite, on utilise des sources et des tourbillons distribués sur chaque panneau pour modéliser l'écoulement. On détermine l'intensité de ces singularités grâce aux conditions de **Tangence** et du *Kutta*. Une fois les singularités connues, on peut calculer la vitesse et, par conséquent, le coefficient de pression C_p , en tout point de la surface de même que la distribution du coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque.

b. Conditions limites :

Pour un écoulement irrotationnel, le potentiel total autour du profil correspond à l'équation :

$$\Phi = \Phi_{\infty} + \Phi_s + \Phi_v \quad (4.1)$$

Où :

Φ_{∞} = Potentiel de l'écoulement uniforme.

Φ_s = Potentiel d'une distribution de source $q(s)$ par unité de longueur.

Φ_v = potentiel d'une distribution de tourbillon d'intensité $\gamma(s)$.

D'après les relations d'aérodynamiques précédant et à partir de la figure 4.1 on peut écrire les trois relations suivantes:

$$\begin{aligned} \Phi_\infty &= V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \Phi_s &= \int \frac{q(s)}{2\pi} \ln r ds \\ \Phi_v &= -\int \frac{\gamma(s)}{2\pi} \theta ds \end{aligned} \tag{4.2}$$

On doit intégrer ces deux dernières équations sur toute la surface du corps. En raison du principe de la superposition des écoulements, le potentiel total Φ satisfait automatiquement à l'équation de **Laplace** :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{4.3}$$

De plus, il satisfait à la condition limite à l'infini, $r \rightarrow \infty, \Phi \rightarrow \Phi_\infty$. Il reste à déterminer les valeurs des intensités $q(s)$ et $\gamma(s)$ qui satisferont à la condition de l'écoulement tangent et celle du **Kutta**. La distribution des sources remplira la condition de tangence de l'écoulement sur la surface et l'intensité tourbillonnaire, la condition du Kutta au bord de fuite.

c. Discrétisation du profil :

La discrétisation consiste à remplacer le profil par un polygone à N cotés. Il faut donc diviser la surface du profil en un certain nombre de panneaux, en commençant par le bord de fuite. Avec une soixantaine de panneaux tourbillonnaires, on obtient une assez bonne précision.

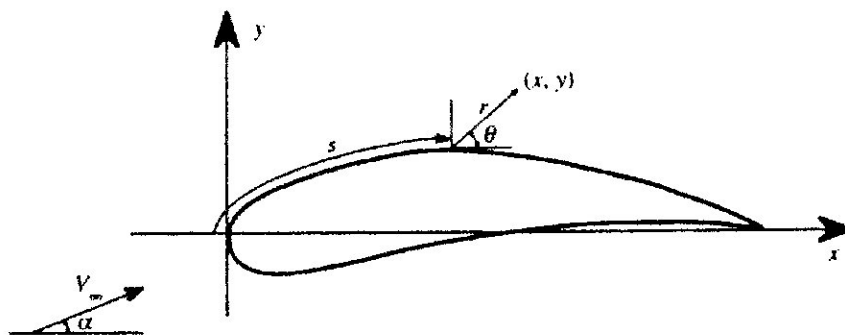


Fig .4.1. Définition de s , de r et $d\theta$.

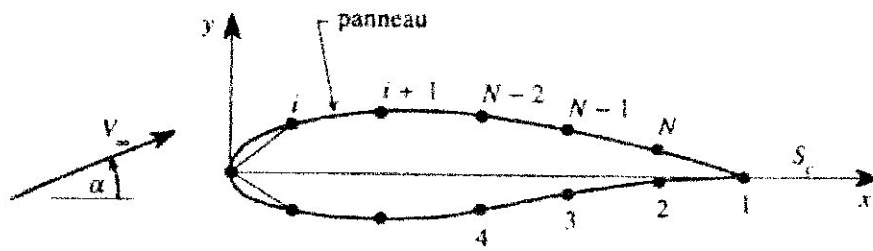


Fig.4.2. Notation des panneaux sur le profil.

Afin de bien représenter le profil aérodynamique, on doit utiliser un grand nombre de panneaux au bord d'attaque et au bord de fuite, c'est-à-dire aux endroits où la courbure est importante. Pour ce faire, on utilise une distribution cosinusoidale des panneaux où :

$$x_i = c/2 (1 - \cos\theta_i),$$

$$\theta_i = i \Delta\theta. \text{ L'incrément } \Delta\theta \text{ est fonction du nombre de panneaux } (\Delta\theta = 2\pi/N).$$

Sur chaque panneau, on distribue des sources et des tourbillons. Si on utilise les équations 1.1 et 1.2 le potentiel résultant en un point (x, y) devient :

$$\Phi = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{i=1}^N \int_{\text{panneau } i} \left[\frac{q(s)}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma}{2\pi} \theta \right] ds \quad (4.4)$$

Il s'agit donc de récupérer un système de N équations à N inconnues, se qu'il laisse la possibilité de choisir arbitrairement les distributions de sources et de tourbillons ; c'est pourquoi on dispose de différentes méthodes des panneaux, que nous verrons dans la suite de cette section. D'après *Hess* et *Smith*, l'intensité de la source est constante sur chaque panneau, mais elle varie d'un panneau à l'autre, ainsi $q(s)=q_i$ sur le panneau $i, i=1,2,\dots, N$. Par contre, l'intensité tourbillonnaire est constante sur tous les panneaux : $\gamma(s) = \gamma$ sur tout le profil. Cette méthode constitue un bon choix lorsqu'on veut limiter le nombre d'inconnues. Les inconnues du problème sont les suivantes :

$q_i = N$ valeurs pour les sources aux points de contrôle.

$\gamma =$ une valeur pour le tourbillon aux points de contrôle.

Les points de contrôles se trouvent au milieu de chaque panneau. Il faut déterminer l'expression pour ces points en regard du panneau i . pour la condition de *Kutta*, on va poser que les valeurs des vitesses sur les panneaux N et i sont égales.

D'après la figure 4.3, on peut écrire ainsi les relations définissant les vecteurs unitaires dans la direction normale (\vec{n}_i) et tangentielle (\vec{t}_i) sur le panneau i en fonction de l'angle d'inclinaison du panneau θ_i .

$$\begin{aligned} \vec{n}_i &= -\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{j} \\ \vec{t}_i &= \cos \theta_i \vec{i} + \sin \theta_i \vec{j} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Où:

$$\sin \theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i} \quad \cos \theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{l_i} \quad (4.6)$$

Le paramètre l_i correspond à la longueur du panneau i . les expressions suivantes définissent les coordonnées du pt de contrôle situe au milieu du panneau i .

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad \bar{y}_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \quad (4.7)$$

Pour désigner les composantes de vitesse au milieu du $i^{\text{ème}}$ panneau, on écrit:

$$u_i = u(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \quad v_i = v(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \quad (4.8)$$

Avec la condition de tangence, on pose que la vitesse normale sur chaque panneau est nulle. Ainsi, on se réfère à la figure 4.2, on a pour le panneau i :

$$-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

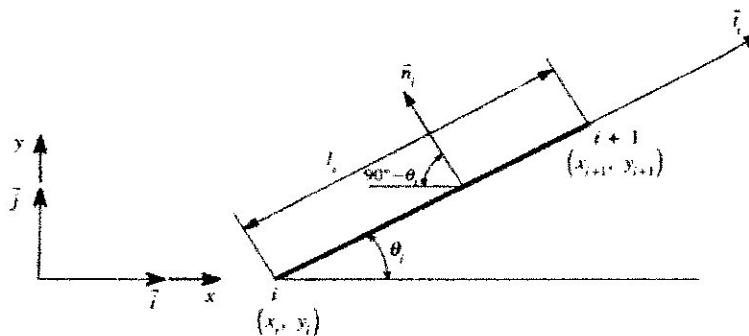


Fig.4.3. Notation sur le panneau i .

Avec la condition de *Kutta*, on obtient la relation suivante pour les panneaux 1 et N (au bord de fuite) :

$$u_1 \cos \theta_1 + v_1 \sin \theta_1 = -u_N \cos \theta_N - v_N \sin \theta_N$$

Les composantes de la vitesse (u_i, v_i) au milieu du panneau i sont formées de contribution de l'écoulement uniforme V_∞ , de même que les composantes des sources et des tourbillons sur chaque panneau. Les vitesses induites en un point quelconque par les sources et

tourbillons situes sur un panneau donné sont proportionnelles à l'intensité de la source ou du tourbillon sur ce panneau ; dès lors, on peut écrire, pour le panneau i :

$$\begin{aligned}
 u_i &= V_\infty \cos \alpha + \sum_{j=1}^N q_j u_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N u_{vij} \\
 v_i &= V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{vij}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Où :

u_{sij} = composante en x de la vitesse au milieu du segment i due à une source unitaire située sur le panneau j .

u_{vij} = composante en x de la vitesse au milieu du segment i due à un tourbillon unitaire situé sur le panneau j .

Pour évaluer u_{sij} , v_{sij} , u_{vij} et v_{vij} , il est préférable de travailler dans les coordonnées (x^*, y^*) liées au panneau j (fig.4.4).

Système de coordonnées lié au panneau j : si on connaît les composantes locales (u^*, v^*) , on peut évaluer les composantes de la vitesse totale à l'aide des expressions :

$$\begin{aligned}
 u &= u^* \cos \theta_i - v^* \sin \theta_i \\
 v &= u^* \sin \theta_i + v^* \cos \theta_i
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

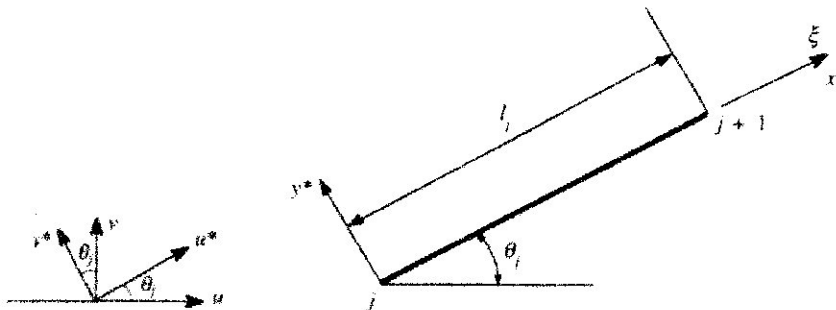


Fig.4.4. système de coordonnées liées au panneau j.

On peut écrire ainsi les composantes de la vitesse au point (x_i, y_i) due à la distribution d'une source unitaire sur le panneau j :

$$\begin{aligned}
 u_{sij}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{(x^* - \xi) d\xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} = -\frac{1}{2\pi} \ln[(x^* - \xi)^2 + y^{*2}]^{1/2} \Big|_{\xi=0}^{\xi=l_j} \\
 v_{sij}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y^*}{x^* - \xi} \right) \Big|_{\xi=0}^{\xi=l_j}
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Où (x^*, y^*) sont les coordonnées locales qui correspondent à (x_i, y_i) .

On peut réduire l'équation (4.11) par la géométrie (fig4.5):

$$\begin{aligned}
 u_{sj}^* &= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{j+1}}{r_{ij}} \\
 v_{sj}^* &= \frac{v_1 - v_0}{2\pi} = \frac{\beta_{ij}}{2\pi}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Où :

r_{ij} = distance du nœud j au milieu du panneau j .

β_{ij} = angle sous lequel on voit le panneau j du milieu du panneau i .

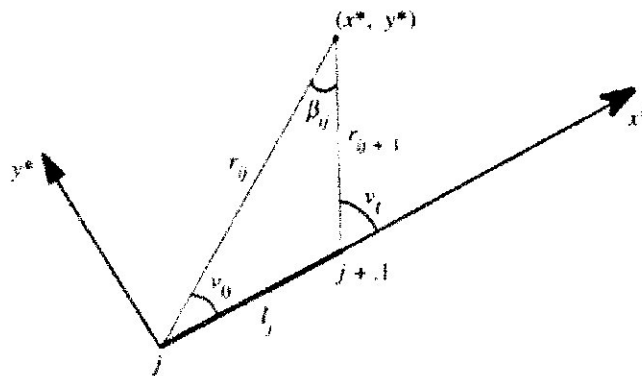


Fig.4.5. Réduction de l'équation par la géométrie.

A partir de l'équation (4.12), on se rend compte que $u_{sj}^* = 0$ (c'est-à-dire quand $i = j$) représente la vitesse induite par la source sur le milieu du panneau lui-même, mais que $v_{sj}^* \neq 0$. Si les points (x^*, y^*) s'approche de panneau ($y^* \rightarrow 0$ pour $0 < x^* < l_j$), alors $\beta_{ij} \rightarrow \pi$. On conclura β_{ij} comme suit :

$$\begin{aligned}
 \beta_{ij} &= \arctg \left(\frac{(\bar{y}_i - y_{i+1})(\bar{x}_i - x_j) - (\bar{x}_i - x_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)}{(\bar{x}_i - x_{i+1})(\bar{x}_i - x_j) - (\bar{y}_i - y_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)} \right) \quad \text{si } (i \neq j) \\
 &= \pi \quad \text{si } (i = j)
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

De la même façon que pour u_{sj}^* et v_{sj}^* , on calcul la vitesse induite au point (x^*, y^*) par le tourbillon d'intensité unitaire située sur le panneau j :

$$\begin{aligned}
 u_{sj}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{(x^* - \xi) d\xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} = \frac{\beta_{ij}}{2\pi} \\
 v_{sj}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{j+1}}{r_{ij}}
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Ainsi, les conditions de tangences, $-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0$, prennent la forme :

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} q_j + A_{iN+1} \gamma = b_i \quad (4.15)$$

Où:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -u_{ij} \sin \theta_i + v_{ij} \cos \theta_i \\ &= -u_{ij}^* (\cos \theta_j \sin \theta_i - \sin \theta_j \cos \theta_i) + v_{ij}^* (\sin \theta_j \sin \theta_i - \cos \theta_j \cos \theta_i) \end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned} 2\pi A_{ij} &= \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \\ 2\pi A_{iN+1} &= \sum_{j=1}^N \left[\cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \end{aligned}$$

et $b_i = V_\infty \sin(\theta_i - \alpha)$

La condition du Kutta (au bord de fuite) :

$$u_i \cos \theta_i + v_i \sin \theta_i = -u_N \cos \theta_i - v_N \sin \theta_i$$

Peut également s'exprimer ainsi :

$$\sum_{j=1}^N A_{N+1,j} q_j + A_{N+1,N+1} \gamma = b_{N+1} \quad (4.16)$$

$$2\pi A_{N+1,j} = \sum_{k=1, N} \left[\sin(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} - \cos(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{kj+1}}{r_{kj}} \right]$$

$$2\pi A_{N+1,N+1} = \sum_{k=1, N} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{kj+1}}{r_{kj}} - \cos(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} \right]$$

$$b_{N+1} = -V_\infty \cos(\theta_1 - \alpha) V_\infty \cos(\theta_N - \alpha)$$

Les équations 1.15 et 1.16 forment un system de $(N+1)$ équation à $(N+1)$ inconnues, soit:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N+1,1} & \cdots & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N+1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Où

$$q_{N+1} = \gamma$$

La résolution du système $[A] \{Q\} = \{B\}$ se fait par la méthode de Gauss-Jordan. (Voir ANNEXE C)

Pour connaître la vitesse tangentielle au point de control pour chaque panneau, on doit résoudre l'équation suivante :

$$V_H = V \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi} \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \beta_j - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{j+1}}{r_j} \right] + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{j+1}}{r_j} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_j \right] \quad (4.18)$$

d. Coefficient de pression :

Avec la vitesse tangentielle sur chaque panneau, on peut calculer le coefficient de pression C_p ; ainsi, on peut déterminer le coefficient de pression au point (x_i, y_i) à l'aide de l'expression :

$$C_p(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 1 - \left(\frac{V_H}{V_\infty} \right)^2 \quad (4.19)$$

Lorsqu'on connaît les valeurs de C_p sur chaque panneau, on peut tracer les courbes de distribution de pression en fonction de la corde pour un angle d'attaque α donné.

e. Coefficient de portance :

Le coefficient de portance correspond à la relation suivante :

$$C_l = \frac{L}{q_\infty c}$$

Où:

$$L = \rho V_\infty \Gamma \quad (\text{kutta - Joukowski})$$

$$q_\infty = (1/2) \rho V_\infty^2$$

Ainsi:

$$C_l = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{1/2 \rho V_\infty^2 c} = \frac{2\Gamma}{V_\infty c} \quad (4.20)$$

On peut exprimer la circulation, Γ , en fonction de l'intensité tourbillonnaire, γ , et conséquemment en fonction de la longueur de tous les panneaux :

$$\Gamma = \oint \gamma \cdot ds = \gamma \oint ds \quad (4.21)$$

Par contre, $\oint ds$ représente le contour du profil ou bien la longueur approximative de tous les panneaux, soit $\sum_{i=1}^N l_i$. On a donc :

$$\Gamma = \gamma \sum_{i=1}^N l_i \quad (4.22)$$

Finalement le coefficient de portance équivaut à :

$$C_l = \frac{2 \gamma}{V_\infty c} \sum_{i=1}^N l_i \quad (4.23)$$

IV.4. METHODE DES IMAGES :

Dans cette partie, nous allons essayer de présenter les différentes étapes de travail par la méthode des images, ce qui est - à juste titre - le but même de notre projet : L'étude de l'effet de sol par la méthode des panneaux .

On peut alors distinguer deux cas de figure :

- **profil à proximité d'une paroi** : Cas du vol proche d'une surface, sol, mer... etc.
- **profil placé entre deux parois** : Théoriquement ; cas du vol dans une soufflerie, dans la pratique, vol à l'intérieur d'une grotte... etc.

Pour ce faire, nous devons d'abord commencer par présenter le principe de base de la méthode des images, puis le coupler à la méthode des panneaux que nous avons choisi (*Hess & Smith*) pour avoir au bout du compte « *Notre propre méthode des images* ».

Principe de base: Le principe de base de cette méthode est de supposer que pour un profil placé devant une ou plusieurs parois, chaque paroi joue le rôle d'un miroir (méthode de l'image miroir), et crée ainsi une image inverse du profil d'origine.

Ensuite, il faudra introduire la méthode des panneaux dans la méthode des images pour trouver C_p et C_l .

IV.4.1. CAS DU PROFIL A PROXIMITE D'UNE PAROI :

Dans ce cas, le profil est placé devant une paroi distante de « H » (voir fig.4.6). Il se crée alors, comme il a été dit précédemment, un autre profil, image inverse du profil d'origine, dont les coordonnées sont les suivantes :

$$X(i)_{image} = X(i)$$

$$Y(i)_{image} = - Y(i)$$

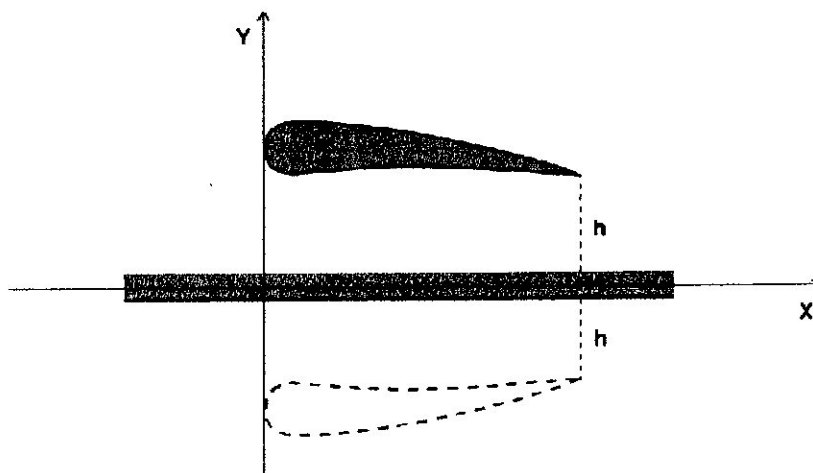


Fig.4.6 Profil à proximité d'une paroi.

Principe de base : dans ce cas « profil à proximité d'une paroi », on utilise les mêmes étapes que la méthode des panneaux dans le cas d'air libre, on prend en considération que $i = 1 \dots N$ et $j = 1 \dots 2N$ (voir fig4.7).

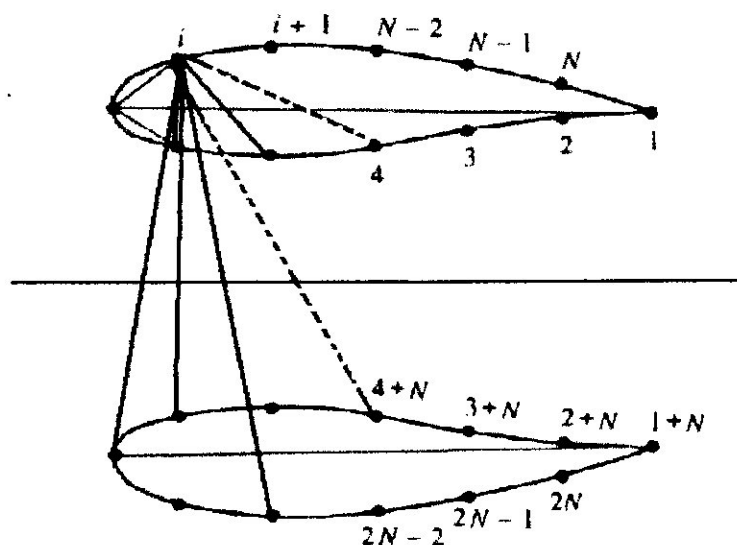


Fig.4.7. Procédure de calcul de r_{ij}

IV.4.2. CAS DU PROFIL PLACE ENTRE DEUX PAROIS :

Dans ce cas, le profil est placé entre deux parois, à une distance « a » par rapport à la première paroi, et « b » par rapport à la deuxième (voir fig.1.8). Il se crée alors deux profils, image inverse chacun du profil d'origine par rapport à la première et à la deuxième

paroi, et chaque image aura par conséquent à son tour une nouvelle image par rapport à l'autre paroi, et ainsi de suite ad infinitum.

Il est évident d'après ce qui vient d'être dit que dans le cas de deux parois, les images se forment par une succession de blocs d'images : deux images supplémentaires à chaque fois.

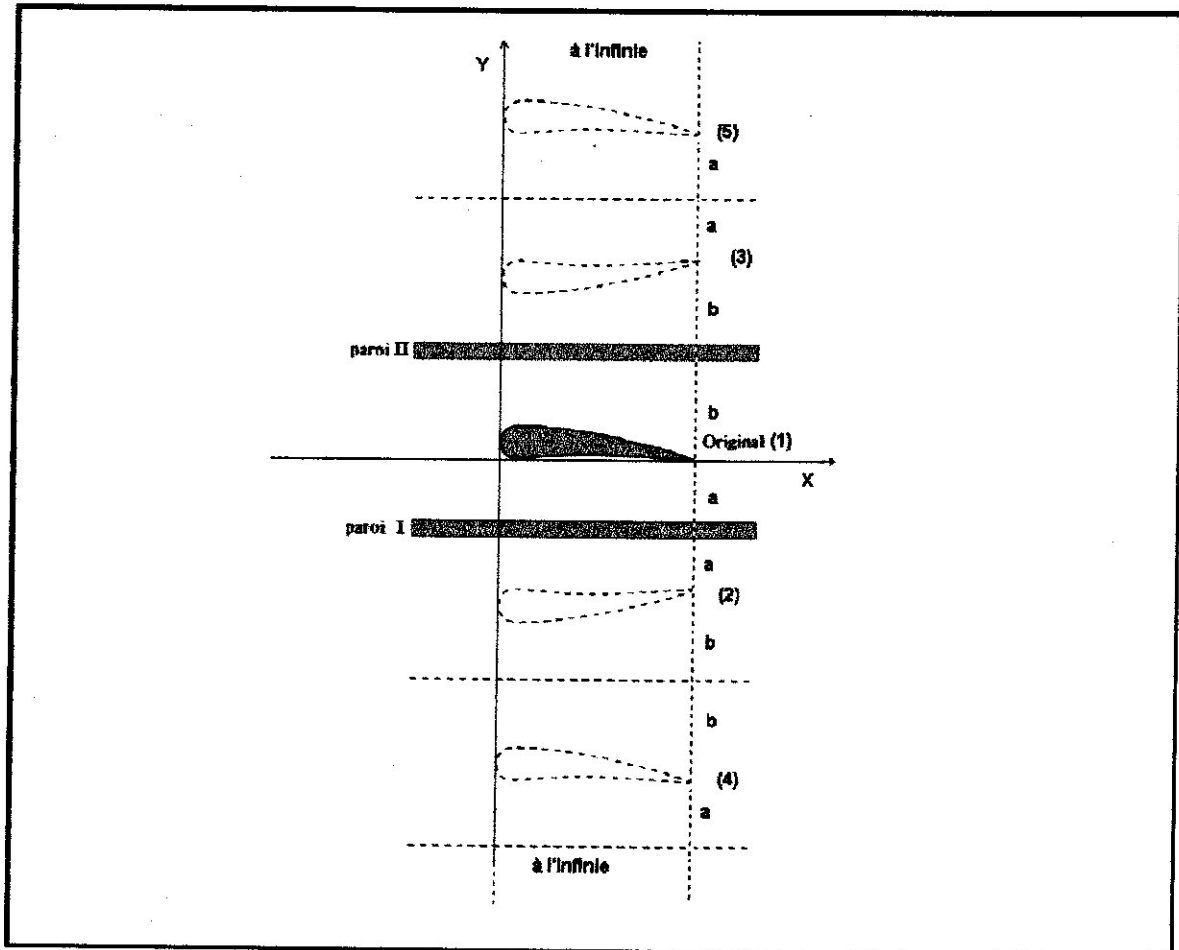


Fig.4.8. Profil placé entre deux parois.

Notion du Bloc d'images : c'est l'ensemble des images par rapport aux deux parois.

En suivant les étapes de la méthode des panneaux à air libre,

Principe de base : dans ce cas « profil placé entre deux parois » on utilise les mêmes étapes de la méthode des panneaux dans le cas d'air libre, sauf que les calculs se font par bloc d'images.

IV.5. ALGORITHME ET PROCEDURE DE TRAVAIL :

Dans notre application nous avons limité notre travail, comme nous l'avions dit auparavant, à un profil symétrique de type NACA 00 t à cause de la complexité du problème lorsqu'il s'agit un profil asymétrique.

Pour cela, et pour détailler la réalisation de l'application, on doit suivre ces étapes de calcul :

1) GEOMETRIE DU PROFIL :

- 1) Initialisation des données de calcul par l'utilisateur (C, T, N) ;
- 2) Calcul du « Pas », sachant que $\text{Pas} := 2 C / N$;
- 3) Calcul de X(i) pour chaque point du profil, pour l'intrados et pour l'extrados, tel que :
 - Intrados : (i = 1... N / 2)
 - $X[i] := x + \text{pas}$;
 - $Y[i] := Y_{\text{extrados}}(X[i], T)$;
 - Extrados : (i = N/2 + 1... N)
 - $X[i] := x - \text{pas}$;
 - $Y[i] := (-1) * Y_{\text{extrados}}(X[i], T)$;
- 4) Affichage des résultats ;

2) AIR LIBRE :

- 1) Initialisation des données de calcul par l'utilisateur (C, T, alpha, N) ;
- 2) Calcul des coordonnées pour chaque point du profil, tel que :
 - $X[i] := (C/2) * (1 - \cos(2 \pi i / N))$; (i = 1... N)
 - $Y[i] := Y_{\text{extrados}}(X[i], T)$; (i = 1... N)
- 3) Calcul de la longueur de chaque panneau « L(i) » :
 - $L[i] := \text{Longue}(X[i], X[j], Y[i], Y[j])$; //Longueur du panneau "i" et (i = 1... N, j = 1... N)
- 4) Calcul de l'angle de chaque panneau « Teta(i) » par rapport à l'horizontale :
 - $Teta[i] := \text{ArcSin}((Y[j] - Y[i]) / L[i])$; // L'angle des panneaux "i" et (i = 1... N)
- 5) Calcul des coordonnées des points de contrôles pour chaque panneau :
 - $Xc[i] := (X[i] + X[j]) / 2$; //Les points de contrôles, (i = 1... N)

$Yc[i] := (Y[i] + Y[j]) / 2$; //Les points de contrôles, ($i = 1 \dots N$)

6) Changement de repère suivant chaque panneau de la façon suivante :

Points de contrôles :

$Xc1[i] := Xc[i] * \cos(Teta[i]) + Yc[i] * \sin(Teta[i])$; ($i = 1 \dots N$)

$Yc1[i] := (-1) * Xc[i] * \sin(Teta[i]) + Yc[i] * \cos(Teta[i])$; ($i = 1 \dots N$)

Points limite des panneaux :

$X1[i, j] := X[j] * \cos(Teta[i]) + Y[j] * \sin(Teta[i])$; ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots N$)

$Y1[i, j] := -1 * X[j] * \sin(Teta[i]) + Y[j] * \cos(Teta[i])$; ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots N$)

7) Aide de calcul ; calcul de $R(i, j)$ et $Beta(i, j)$ pour tout panneau ; ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots N$)

8) Aide de calcul ; calcul de $USij, VSij, UVij, VVij$; ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots N$)

9) Remplissage de la matrice $A(i, j)$; ($i = 1 \dots N+1, j = 1 \dots N+1$)

10) Calcul et détermination du vecteur $B(i)$; ($i = 1 \dots N+1$)

11) Résolution du système $A(i, j) * Q(i) = B(i)$, en utilisant la méthode de Gauss-Jordan ;

- Calcul de la nouvelle matrice $A(i, j)$;
- Inversion de la matrice ;
- Multiplication de l'inverse la matrice $A(i, j)$ par $B(i)$;
- Déduire le vecteur du débit massique $Q(i)$;
- Déduire l'intensité tourbillonnaire $\gamma = Q(N + 1)$;

12) Calcul des vecteur vitesses $U(i)$ et $V(i)$ à l'aide des paramètres obtenus ; ($i = 1 \dots N$)

13) Déduire le vecteur des vitesses tangentielles $Vt(i)$ à l'aide des paramètres obtenus ;

14) Calcul du coefficient de portance C_l :

- Calcul de la circulation Γ ;
- Obtenir le coefficient de portance C_l ;

15) Calcul du vecteur des coefficients de pression $Cp(i)$ à l'aide des paramètres obtenus précédemment ; ($i = 1 \dots N$)

16) Affichage des résultats ;

3) 1 Parois :

1) Initialisation des données de calcul par l'utilisateur (C, T, alpha, N) ;

2) Détermination de « H » limite :

- a. Entrer la « Précision » et le « Pas » par l'utilisateur ;
- b. Initialiser la valeur de « H » par zéro ;
- c. Augmentation de « H » en ajoutant « Pas » chaque fois ;
- d. Détermination des nouvelles coordonnées à chaque fois ;

Profil original : ($i = 1 \dots N$)

$$X[i] := X[i] ;$$

$$Y[i] := TYt + H ;$$

$$Xc[i] := Xc[i] ;$$

$$Yc[i] := Yc[i] + H ;$$

Image du profil : ($i = N+1 \dots 2N$)

$$X[i + N] := X[i] ;$$

$$Y[i+N] := (-1) * Y[i] ;$$

$$Xc[i + N] := Xc[i] ;$$

$$Yc[i + N] := (-1) * Yc[i] ;$$

e. Changement de repère suivant chaque panneau de la manière suivante:

Points de contrôles :

$$Xc1[i] := Xc[i] * \cos(\text{Teta}[i]) + Yc[i] * \sin(\text{Teta}[i]) ; (i = 1 \dots N)$$

$$Yc1[i] := (-1) * Xc[i] * \sin(\text{Teta}[i]) + Yc[i] * \cos(\text{Teta}[i]) ; (i = 1 \dots N)$$

Points limites des panneaux :

$$X1[i, j] := X[j] * \cos(\text{Teta}[i]) + Y[j] * \sin(\text{Teta}[i]) ; (i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N)$$

$$Y1[i, j] := -1 * X[j] * \sin(\text{Teta}[i]) + Y[j] * \cos(\text{Teta}[i]) ; (i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N)$$

f. Aide de calcul ; calcul de $R(i, j)$ et $\text{Beta}(i, j)$ pour chaque panneau ; ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N$)

g. Aide de calcul ; calcul de $USij, VSij, UVij, VVij$; ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N$)

h. Calcul des vecteurs vitesses $U1(i)$ et $V1(i)$ à l'aide des paramètres obtenus ; ($i = 1 \dots N$)

i. Calcul de l'erreur relative pour la détermination de « H » limite, en suivant les étapes :

- Initialisation de Eps_max par zéro ;
 - Calcul de « Eps » erreur relative entre $U(i)$ (dans le cas de l'air libre) et $U1(i)$ (dans le cas de la présence d'une paroi) ; ($i = 1 \dots N$)
 - Comparaison de « Eps » avec « Eps_max » l'erreur relative maximale ;
 - Affectation de la valeur maximum à « Eps_max » ;
 - Comparer « Eps_max » avec la précision entrée par l'utilisateur ;
- j. Si la condition « Eps_max > Précision » est vérifiée, alors refaire les étapes (c, d, e, f, g, h, i) ;
- k. Si la condition « Eps_max > Précision » n'est pas vérifiée, alors afficher les résultats ;
- Affichage de « H » limite obtenu ;
 - L'ordre de comparaison ;
 - Le nombre d'itérations ;

3) Vérification de « H » ;

- a. Saisir la « Précision » par l'utilisateur ;
- b. Saisir « H » souhaité vérifié par l'utilisateur ;
- c. Détermination des nouvelles coordonnées à chaque fois ;

Profil original : ($i = 1 \dots N$)

$$X[i] := X[i] ;$$

$$Y[i] := TYt + H ;$$

$$Xc[i] := Xc[i] ;$$

$$Yc[i] := Yc[i] + H ;$$

Image du profil : ($i = N+1 \dots 2N$)

$$X[i + N] := X[i] ;$$

$$Y[i+N] := (-1) * Y[i] ;$$

$$Xc[i + N] := Xc[i] ;$$

$$Yc[i + N] := (-1) * Yc[i] ;$$

- d. Changement de repère suivant chaque panneau comme suit:

Points de contrôles :

$$Xc1[i] := Xc[i] * \cos(Teta[i]) + Yc[i] * \sin(Teta[i]) ; (i = 1 \dots N)$$

$$Yc1[i] := (-1) * Xc[i] * \sin(Teta[i]) + Yc[i] * \cos(Teta[i]) ; (i = 1 \dots N)$$

Points limites des panneaux :

$$X1[i, j] := X[j] * \cos(\text{Teta}[i]) + Y[j] * \sin(\text{Teta}[i]); \quad (i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N)$$

$$Y1[i, j] := -1 * X[j] * \sin(\text{Teta}[i]) + Y[j] * \cos(\text{Teta}[i]); \quad (i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N)$$

- e. Aide de calcul ; calcul de $R(i, j)$ et $\text{Beta}(i, j)$ pour chaque panneau ; $(i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N)$
- f. Aide de calcul ; calcul de $USij, VSij, UVij, VVij$; $(i = 1 \dots N, j = 1 \dots 2N)$
- g. Calcul des vecteurs vitesses $U1(i)$ et $V1(i)$ à l'aide des paramètres obtenus ; $(i = 1 \dots N)$
- h. Calcul de l'erreur relative pour la détermination de « H » limite, en suivant les étapes :
 - Initialisation de Eps_max par zéro ;
 - Calcul de « Eps » erreur relative entre $U(i)$ (dans le cas air libre) et $U1(i)$ (dans le cas de la présence d'une paroi) ; $(i = 1 \dots N)$
 - Comparaison de « Eps » avec « Eps_max » l'erreur relative maximale ;
 - Affectation du la valeur maximum à Eps_max ;
 - Comparer Eps_max avec la précision entrée par l'utilisateur ;
- i. Affichage du message des résultats ;
 - Si la condition « $\text{Eps_max} > \text{Précision}$ » est vérifiée, alors afficher « la hauteur « H » ne vérifie pas l'effet de sol » ;
 - Si la condition « $\text{Eps_max} > \text{Précision}$ » n'est pas vérifiée, alors afficher « la hauteur « H » vérifie l'effet de sol » ;
- j. Calcul de C_l à l'aide des nouveaux paramètres ;
- k. Calcul du vecteur des coefficients de pression $Cp(i)$;
- l. Affichage des résultats de C_l et le vecteur $Cp(i)$;

4) 2 Parois :

- 1) Initialisation des données (C, T, alpha, N) ;
- 2) Saisir les valeurs de « a » et « b » par l'utilisateur ;
- 3) Entrer « Précision », la précision du calcul ;
- 4) La variable « H » sera égale à « a + b » ;
- 5) Initialisation des quatre premières images du profil par rapport aux deux parois ;

Profil original

$$X2[i] := X[i] ; (i = 1 \dots N)$$

$$Y2[i] := Y[i] ; (i = 1 \dots N)$$

$$Xc[i] := Xc[i] ; (i = 1 \dots N)$$

$$Yc[i] := Yc[i] ; (i = 1 \dots N)$$

Images du profil

$$X2[i] := X[i] ;$$

$$Y2[2,k] := (-1) * (2 a + Y[i]) ;$$

$$Y2[3,k] := (2 b - Y[i]) ;$$

$$Y2[4,k] := (-1) * (2 H - Y[i]) ;$$

$$Y2[5,k] := (2 H + Y[i]) ;$$

- 6) Calculs sur les quatre premières images du profil, et obtention des vitesses des deux premiers blocs images :

- Aide de calcul ; par blocs images « z » calcul de US_{ij} , VS_{ij} , UV_{ij} , VV_{ij} ($z = 1..2$, $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N$)
- Calcul des vitesses $U3(z, i)$ et $V(z, i)$; ($z = 1 \dots 2$, $i = 1 \dots N$)

- 7) Calcul des paramètres des autres images ;

- 8) Augmentation du nombre des images par 2 à chaque fois ;

- 9) Calcul des coordonnées de chaque point du profil image ;

$$X2[i] = X[i] ; (i = 1 \dots N)$$

$$Y2[im, i] = Y2[j-4, k] + \text{puis}(-1, j) * 2 H ; (i = 1 \dots N, j = im - 1 \dots im, k = 1 \dots N)$$

- 10) Calcul sur les autres images du profil, et obtention des vitesses de chaque bloc images :

- Aide de calcul ; par blocs images « z » calcul de US_{ij} , VS_{ij} , UV_{ij} , VV_{ij} ($z = 1..im / 2$, $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N$)
- Calcul des vitesses $U3(z, i)$ et $V(z, i)$; ($z = 1 \dots im / 2$, $i = 1 \dots N$)

- 11) Calcul de l'erreur relative, en suivant les étapes :

- Initialisation de Eps_max par zéro ;
- Calcul de « Eps » erreur relative entre $U(z, i)$ et $U(z - 1, i)$; ($i = 1 \dots N$)
- Comparaison de « Eps » avec « Eps_max » l'erreur relative maximale ;
- Affectation du la valeur maximum à Eps_max ;
- Comparer « Eps_max » avec la précision entrée par l'utilisateur ;

- 12) Si la condition « Eps_max > Précision » est vérifiée, alors refaire les étapes (7, 8, 9, 10, 11) ;
- 13) Si la condition « Eps_max > Précision » n'est pas vérifiée, alors afficher les résultats ;
- Affichage de « Nombre des images » ;
 - L'ordre de comparaison ;
 - L'erreur relative maximale « Eps_max » ;
 - Les vitesses $U(z, i)$; ($z = 1 \dots im / 2, i = 1 \dots N$)
- 14) Fin de l'application ;



Chapitre V

*Présentation de
l'Application*

L'outil informatique est d'une importance incontestée, il permet de réaliser les tâches, de les concrétiser, et de leur donner « l'âme d'une réalité », sans lui nul calcul numérique et nul graphique ne seraient aussi précis que s'il est exécuté par un ordinateur. Il permet en outre de gagner en temps et en argent.

Il existe différents types de langages de programmation qui facilitent le contact entre l'homme et la machine, chacun de ces langages a sa propre caractéristique quant à la programmation, la manipulation, la présentation, le domaine d'utilisation et d'application, et surtout, la précision du calcul.

Notre choix s'est porté sur le Delphi qui est un environnement de développement de type RAD (*Rapid Application Development*) basé sur le langage Pascal. Il permet de réaliser rapidement, simplement, et surtout avec précision des applications Windows (*Erreur de calcul jusqu'à 10^{-22}*).

Cette rapidité et cette simplicité de développement sont dues à une conception visuelle de l'application. Delphi propose un ensemble très complet de *composants visuels* prêts à l'emploi incluant la quasi-totalité des composants Windows (boutons, boîtes de dialogue, menus, barres d'outils...) ainsi que des experts permettant de créer facilement divers types d'applications et de bibliothèques.

PRESENTATION DE L'APPLICATION :

Notre application se compose, comme déjà vu, de quatre parties essentielles :

- Géométrie du profil ;
- Air libre ;
- 1 Paroi ;
- 2 Parois ;

Nous allons essayer d'expliquer brièvement ces parties ainsi que chaque paramètre et son rôle dans l'application.

1) GEOMETRIE DU PROFIL : (voir fig.)

Cette partie de l'application est un supplément présenté pour donner une idée sur le commencement de la réalisation de notre projet et les difficultés rencontrées du fait du manque de l'équation des abscisses du profil.

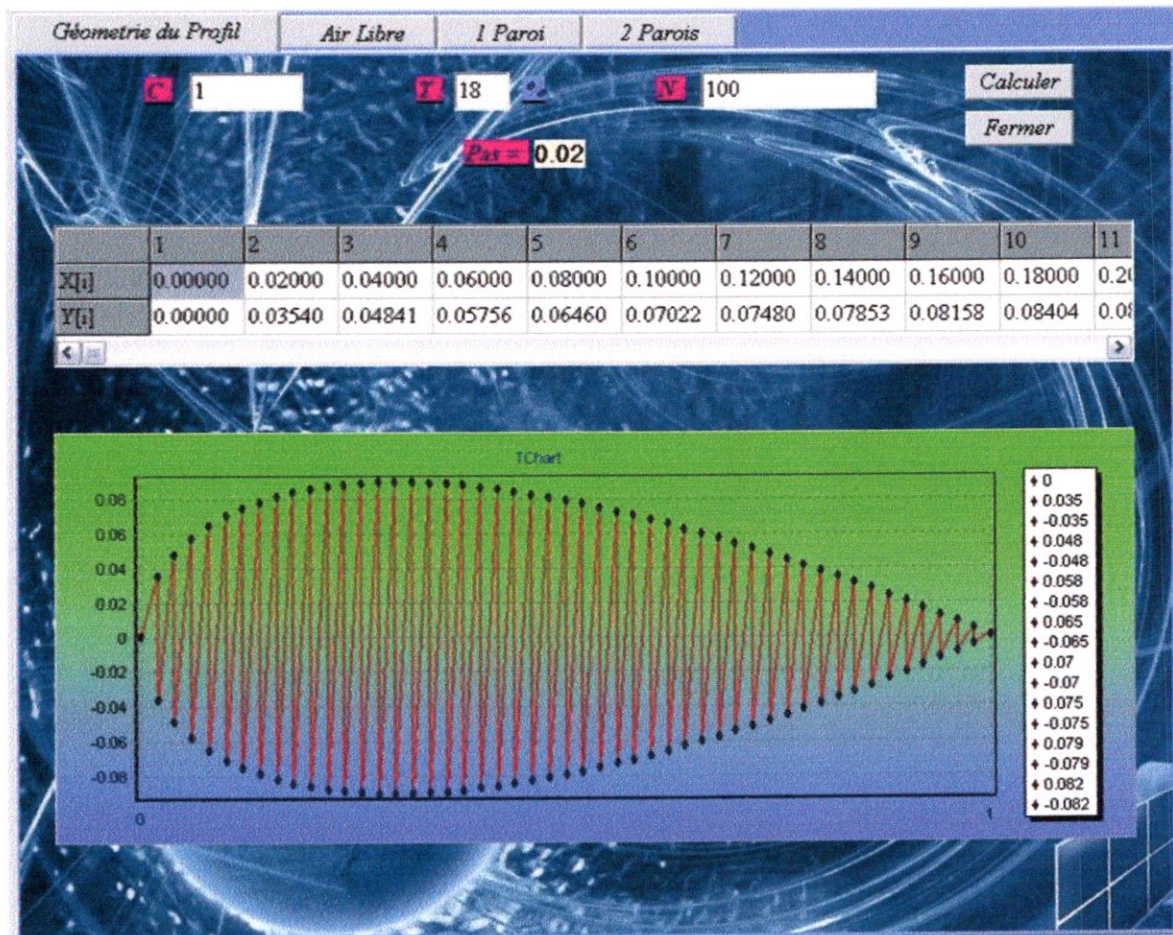


Fig.5.1. Géométrie du profil (cas du $X(i)$ variant suivant le pas).

Les entrées :

C : La corde du profil ;

T : L'épaisseur relative du profil (NACA 0 0 T) ;

N : Le nombre de points du profil ;

Les sorties :

Pas : Le pas de calcul pour les abscisses du profil, limitées par la corde C ;

Tableau : Un tableau représentatif des coordonnées du profil X[i] et Y[i] ;

Graphe : Un graphe représentatif du profil proposé ;

2) AIR LIBRE :

Cette partie de l'application nous aide à déterminer les caractéristiques du profil dans l'air libre par la saisie des paramètres N , α et V_{air} , sachant que C et T sont saisies initialement dans la première partie de l'application (Géométrie du profil).

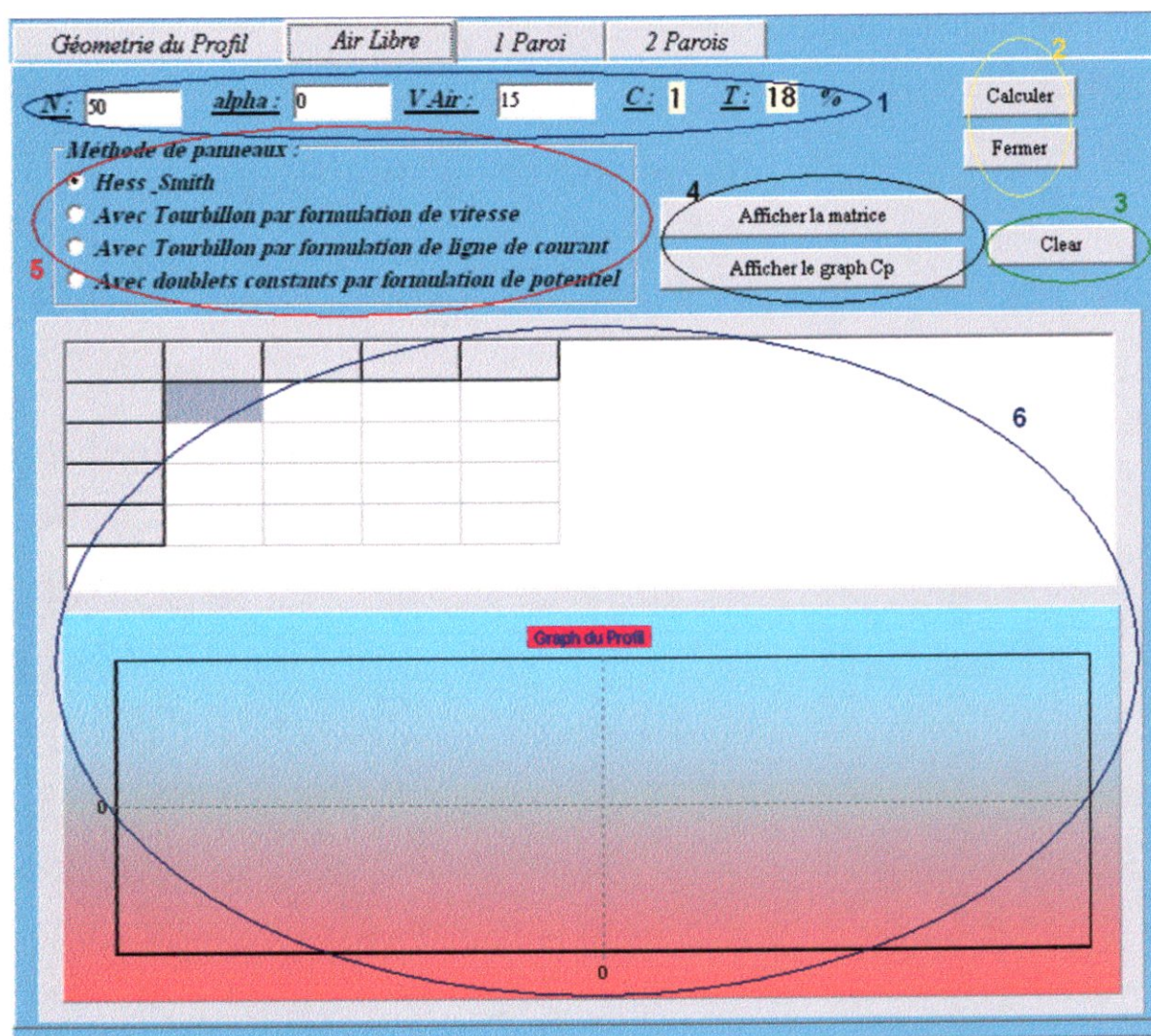


Fig.5.2 les différents éléments de la partie Air libre.

Maintenant, et avant d'entamer l'explication du fonctionnement du sub-menu de l'application, nous allons tenter de présenter chaque élément et son rôle dans l'application.

Afin de simplifier les choses nous avons jugé utile de réunir les éléments par groupes d'éléments ayant chacun un rôle bien spécifique.

Groupe éléments 1) : les paramètres d'entrée : Entrés par l'utilisateur ;

Groupe éléments 2) : les paramètres d'exécution : calculer et fermer ;

Groupe éléments 3) : bouton «Clear» : Permet d'effacer les graphes avant la réinitialisation.

Groupe éléments 4) : les boutons d'affichages : Ces boutons ont les rôles suivants :

Bouton 1 :

- Afficher la matrice : Permet d'afficher le sub-menu des paramètres résultants (les matrices et les vecteur résultants) ;
- Afficher le graphe du profil : Permet d'afficher le sub-menu graphe du profil ;

Bouton 2 :

- Afficher le graphe C_p : Permet d'afficher le sub-menu le graphe du C_p ;
- Afficher le graphe $C_I = F(\alpha)$: Permet d'afficher le sub-menu le graphe C_I ;

Groupe éléments 5) : panneau représentatif : Parmi les différentes méthodes des panneaux existant, l'utilisateur doit choisir l'une d'entre elles (l'application n'est réalisée qu'avec la méthode de *Hess & Smith*).

Groupe éléments 6) : Sub-menu : Ce groupe d'éléments nous permet d'avoir les différents résultats de la partie « Air Libre ». On peut distinguer quatre types de résultats :

- Les coordonnées du profil ainsi que leur graphe ;
- Les matrices et les vecteurs contenant les différents résultats de calcul ;
- Le graphe $C_p = f(X/C)$;
- Le graphe $C_I = f(\alpha)$;

Nous allons à présent donner une explication détaillée pour chacun de ces Sub-menus :

a. Air libre _ Géométrie du profil : (voir fig.)

Dans ce Sub-menu, nous avons présenté le profil, les coordonnées des points limites des panneaux TX[i] et TY[i] ainsi que leurs points de contrôles TXc[i] et TYc[i].

Ce Sub-menu est en relation directe avec les paramètres saisis par l'utilisateur, autrement dit que le graphe change simultanément avec le changement des paramètres.

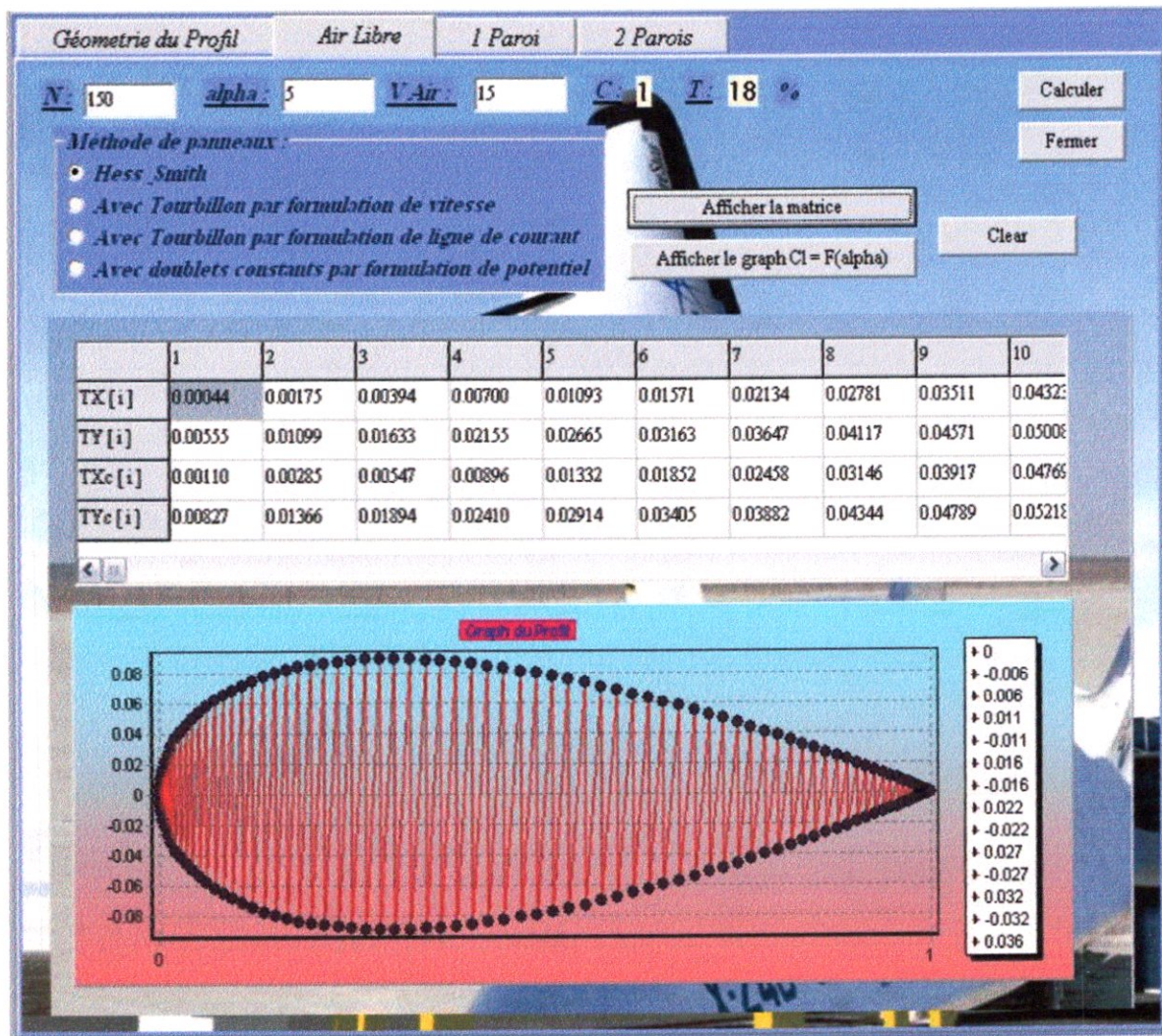


Fig.5.3. Air libre _ Géométrie du profil (cas du $X(i) = C/2 (1 - \cos\theta_i)$).

b. Air libre _ les paramètres résultants : (voir fig.) :

Dans ce Sub-menu, nous avons présenté le coefficient de portance « C_l », l'intensité tourbillonnaire du profil « γ », et les différents vecteurs résultants du calcul, tels que la matrice « $A[i,j]$ », un tableau 2D dont les éléments sont les vecteurs suivants : le débit de masse « $Q[i]$ », les vitesses « $U[i]$ et $V[i]$ », la vitesse tangentielle « $Vt[i]$ », le coefficient de pression « $C_p[i]$ » pour chaque panneau, un autre tableau représentant le vecteur « $Teta[i]$ » ; l'angle que fait chaque panneau avec l'horizontale, et enfin un troisième tableau contenant le vecteur « $L[i]$ » ; longueur de chaque panneau du profil.

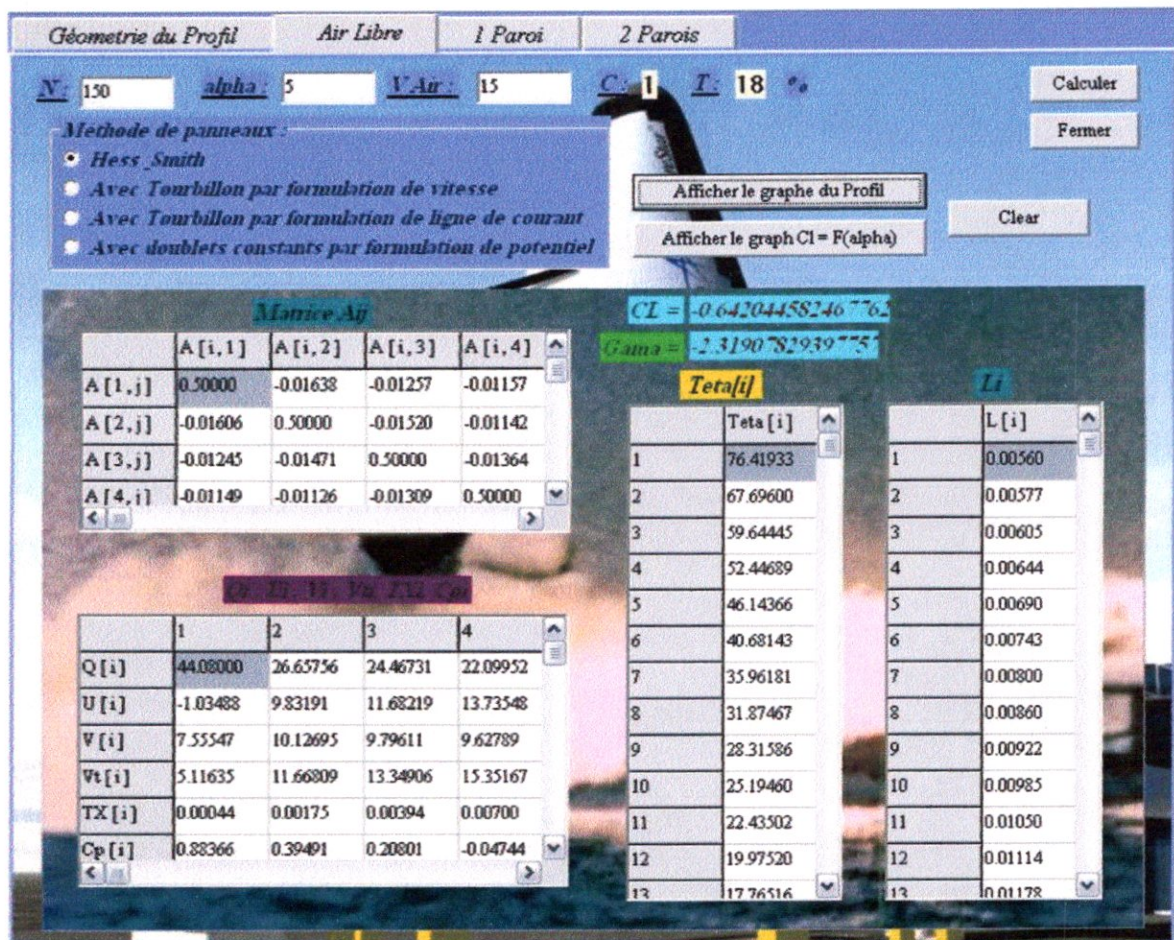


Fig.5.4. Air libre _ les paramètres résultants

($Q[i]$, $U[i]$, $V[i]$, $Vt[i]$, $C_p[i]$, $\theta[i]$, $L[i]$, $A[i,j]$, ainsi que les coefficients C_l et γ).

c. Air libre _ Graphe du $C_p = f(X/C)$:

Dans ce Sub-menu, nous ne présentons qu'un seul graphe « $C_p = f(X/C)$ » et un tableau contenant les différentes valeurs des abscisses « $TX[i]$ » ainsi que les coefficients de pression « $Cp[i]$ » de chaque panneau du profil.

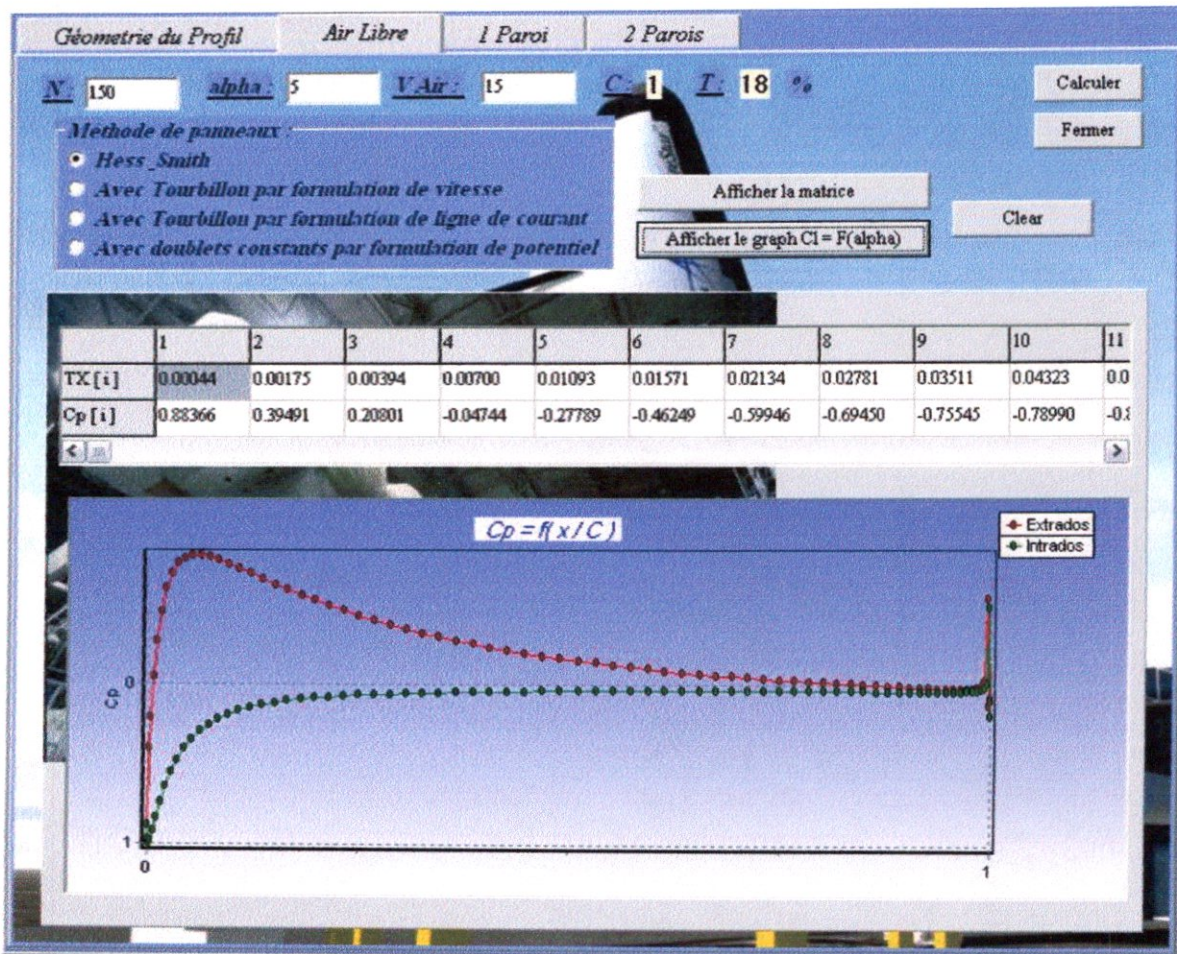


Fig.5.5. Air libre _ Graphe du $C_p = f(X/C)$.

d. Air libre _ Graphe du $C_l = f(\text{Alpha})$:

Dans ce Sub-menu, nous essayons de présenter le C_l en fonction de l'angle α ($C_l = f(\text{Alpha})$). Sachant que l'utilisateur doit entrer la limite de calcul alpha maximum pour qu'il puisse avoir l'allure de la courbe. Cette dernière a une signification pratique en Aérodynamique. (Voir Chapitre : résultats et discussion)

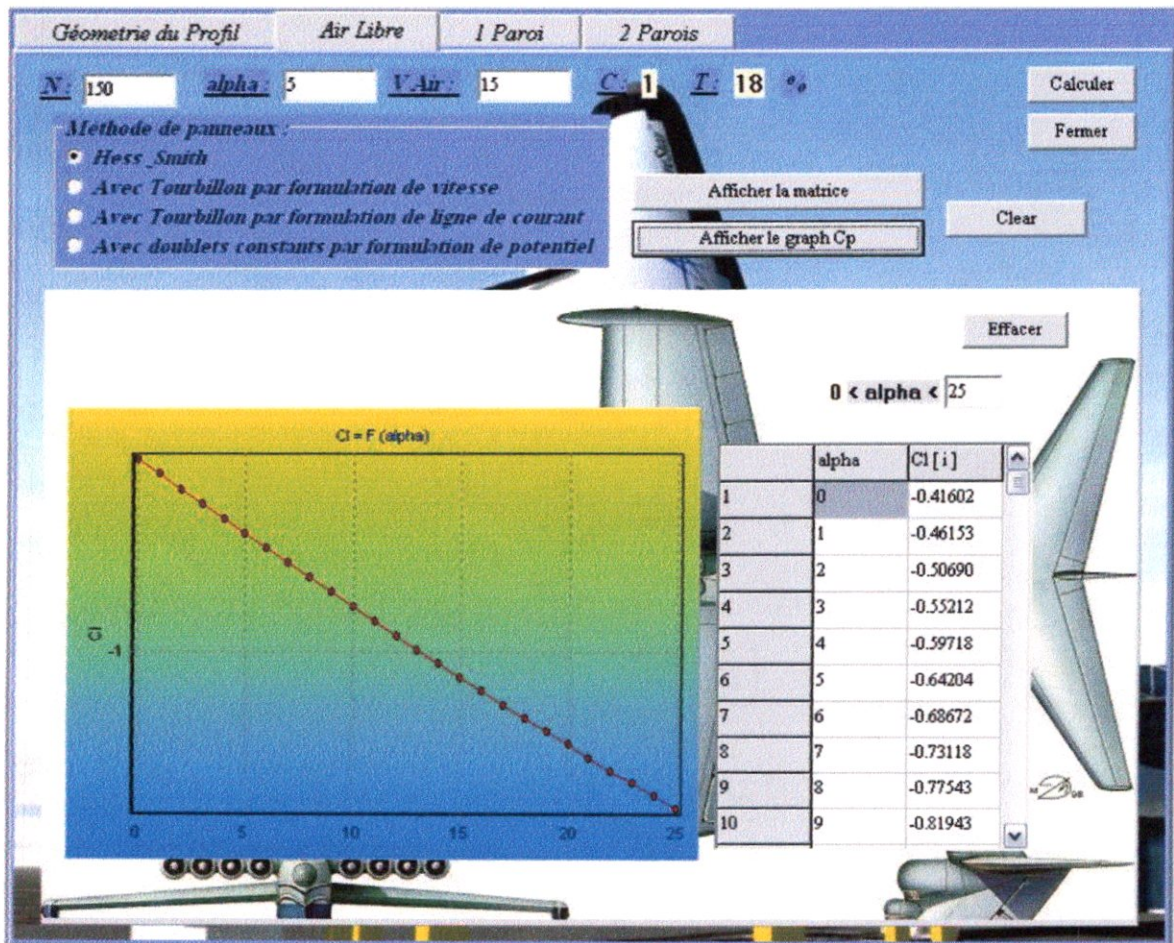


Fig.5.6. Air libre _ Graphe du $C_p = f(\text{Alpha})$.

3) 1 PAROI :

Cette partie de l'application (voir fig.5.7) nous aide à déterminer les caractéristiques du profil quand il est à proximité d'une paroi par la saisie des paramètres « Précision » et « Pas » pour la détermination de « H limite », et les paramètres « Précision » et « H » pour la vérification de « H », sachant que C et T sont saisies initialement dans la première partie de l'application (Géométrie du profil).

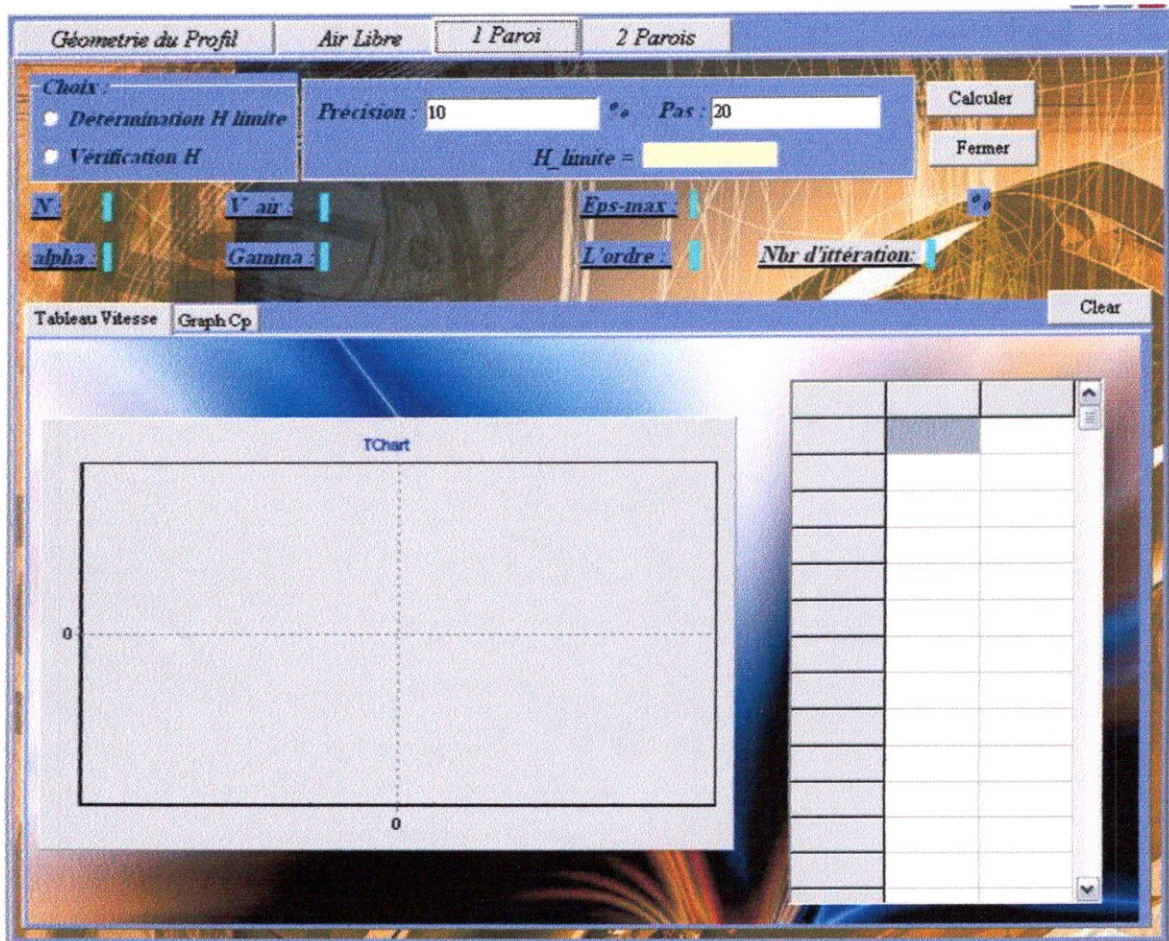


Fig.5.7. Présentation générale de l'application, cas 1 Paroi.

Afin de bien présenter cette partie de l'application, nous établirons d'y faire l'application et la présentation chacune à part.

a. 1 Paroi _ Détermination H limite :

Cette étape du travail « Détermination de H limite » est très importante pour les calculs, car elle nous permet de déterminer la hauteur limite de l'effet de sol.

Dans ce sub-menu, l'utilisateur doit choisir l'étiquette « Détermination de H limite » et entrer les paramètres suivants :

- *Précision* : la précision de calcul en pourcentage, qui est la différence entre la vitesse $U[i]$ dans le cas d'air libre, et $UI[i]$ en cas de présence d'une paroi ;
- *Pas* : le pas d'évolution de « H » dans le calcul, si on augmente le pas, on obtient une valeur de « H » assez précise quand on diminue le « pas », mais cela prend plus de temps ;

Les résultats obtenus sont :

- *Eps_max* : l'erreur relative maximale, par comparaison avec la précision ;
- *L'ordre* : c'est l'ordre de comparaison des résultats ;
- *Nbr d'itérations* : le nombre d'itérations du calcul ;
- *Table représentatif des vitesses* : de la vitesse $U[i]$ air libre et $UI[i]$ en présence d'une paroi ;

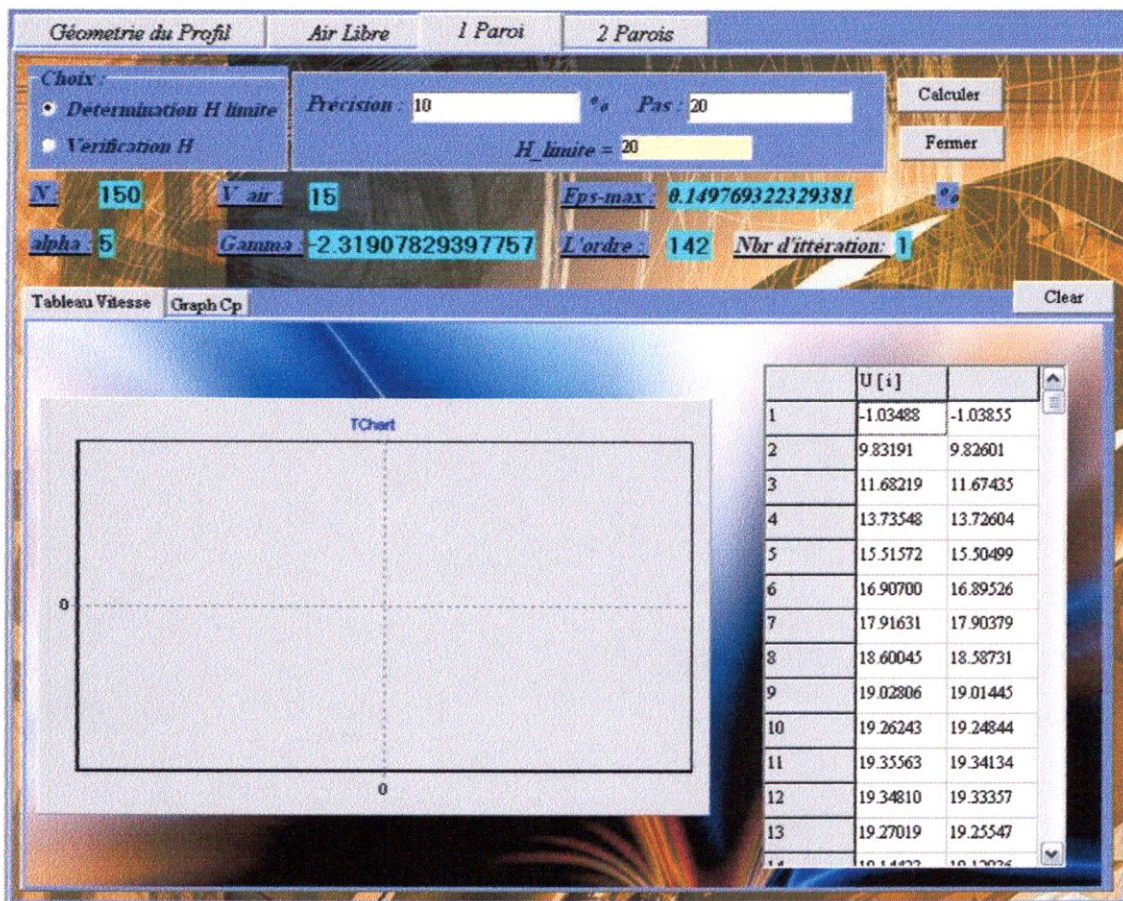


Fig.5.8. 1Paroi _ Détermination de H limite

b. 1 Paroi _ Vérification de « H » :

Cette deuxième étape du travail, « Vérification H limite », est très importante dans les calculs, car elle permet la vérification d'une hauteur donnée de l'effet de sol.

Dans ce sub-menu, l'utilisateur doit choisir l'étiquette « Vérification H limite » et entrer les paramètres suivants :

- *Précision* : la précision de calcul en pourcentage, qui est la différence entre la vitesse $U[i]$ dans le cas d'air libre et $U1[i]$ en cas de présence d'une paroi ;
- *H* : la hauteur qu'on cherche à vérifier ;

Les résultats obtenus sont :

- *Message* : message qui spécifie la vérification de « H » ;
- *Eps_max* : l'erreur relative maximale, par comparaison avec la précision ;
- *Table représentatif des vitesses* : de la vitesse $U[i]$ air libre et $U1[i]$ en présence d'une paroi ;
- *Graph de Cp* : graphe représentatif des valeur de $Cp[i]$ en fonction de X/C

The screenshot shows the software interface for the '1 Paroi _ Vérification de « H »' step. The interface includes a control panel with tabs for 'Géométrie du Profil', 'Air Libre', '1 Paroi', and '2 Parois'. The '1 Paroi' tab is selected. The control panel displays the following parameters: *H* = 20, *Précision* = 0.001 %, *N* = 150, *V air* = 15, *Eps_max* = 0.149769322329381, *alpha* = 5, *Gamma* = -2.31907829397757, and *L'ordre* = 142. There are buttons for 'Calculer' and 'Fermer'. Below the control panel, there are tabs for 'Tableau Vitesse' and 'Graph Cp'. The 'Tableau Vitesse' window is open, displaying a table of wind speeds $U[i]$ and $U1[i]$ for 14 points. A 'Project1' dialog box is also visible, stating 'Cette Hauteur (H) Verifie l'effet de sol'.

	$U[i]$	
1	-1.03488	-1.03855
2	9.83191	9.82601
3	11.68219	11.67435
4	13.73548	13.72604
5	15.51572	15.50499
6	16.90700	16.89526
7	17.91631	17.90379
8	18.60045	18.58731
9	19.02806	19.01445
10	19.26243	19.24844
11	19.35563	19.34134
12	19.34810	19.33357
13	19.27019	19.25547
14	19.14422	19.12026

Fig.5.9. 1 Paroi _ Vérification de « H »

Graphe de $C_p = f(X/C)$:

Dans ce Sub-menu, nous ne présentons qu'un seul graphe « $C_p = f(X/C)$ » et un tableau contenant les différentes valeurs des abscisses « $TX[i]$ » ainsi que les coefficients de pression « $C_p[i]$ » à l'air libre et « $C_{p1}[i]$ » en présence d'une paroi, pour chaque panneau du profil.

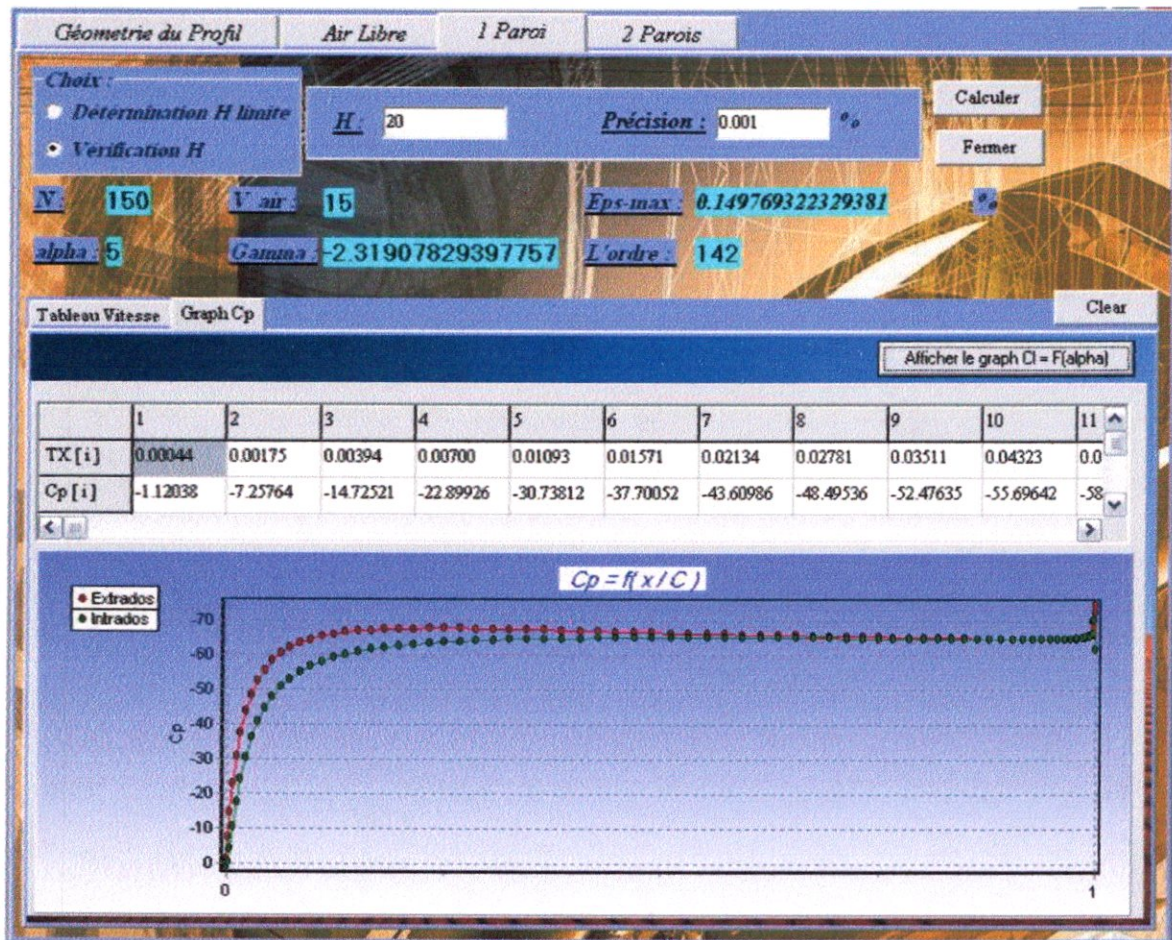


Fig.5.10. 1 Paroi _ Graphe de $C_p = f(X/C)$.

Graphe de $C_l = f(\alpha)$:

Dans ce Sub-menu, nous essayons de présenter le C_l en fonction de l'angle α ($C_l = f(\alpha)$) dans le cas de la présence d'une paroi. Sachant que l'utilisateur doit entrer la limite de calcul alpha maximum pour qu'il puisse avoir l'allure de la courbe. Cette dernière a une signification pratique en Aérodynamique. (Voir Chapitre : résultats et discussion)

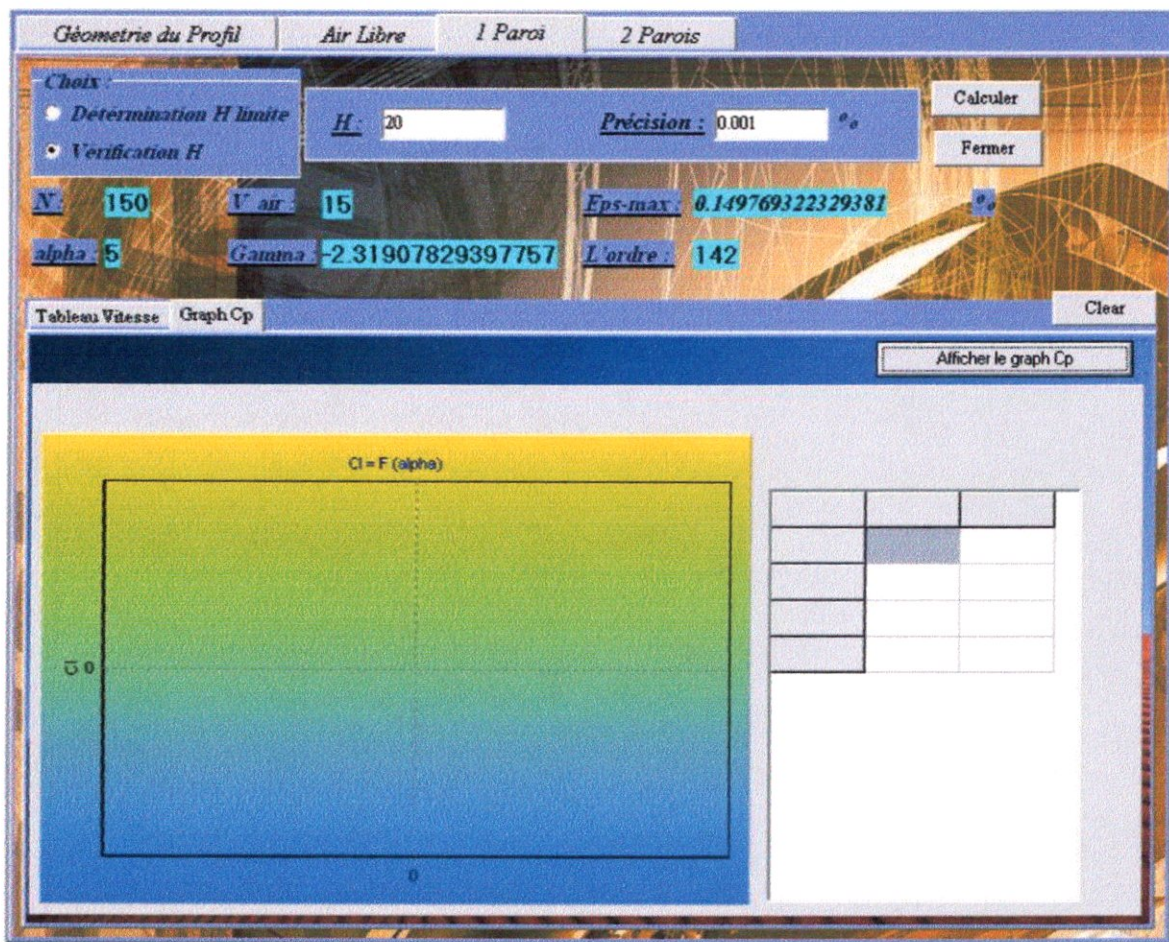


Fig.5.11. 1 Paroi _ Graphe $C_l = f(\alpha)$.

4) 2 PAROIS :

Cette étape de l'application, nous permet d'obtenir le nombre des images calculées ainsi que la vitesse de chaque bloc d'images, lorsque le profil est placé entre deux parois, sachant que l'utilisateur doit entrer les paramètres suivants :

- *a* : la distance du profil par rapport à la première paroi ;
- *b* : la distance du profil par rapport à la deuxième paroi ;
- *précision* : condition d'arrêt, elle mentionne la différence entre les blocs images successifs ;

L'utilisateur aura les résultats suivants :

- *Eps_max* : l'erreur relative maximale, par comparaison avec la précision ;
- *L'ordre* : c'est l'ordre de comparaison des résultats ;
- *Nbr des images* : nombre des images obtenues pendant le calcul ;
- *Table représentatif des vitesses des blocs*

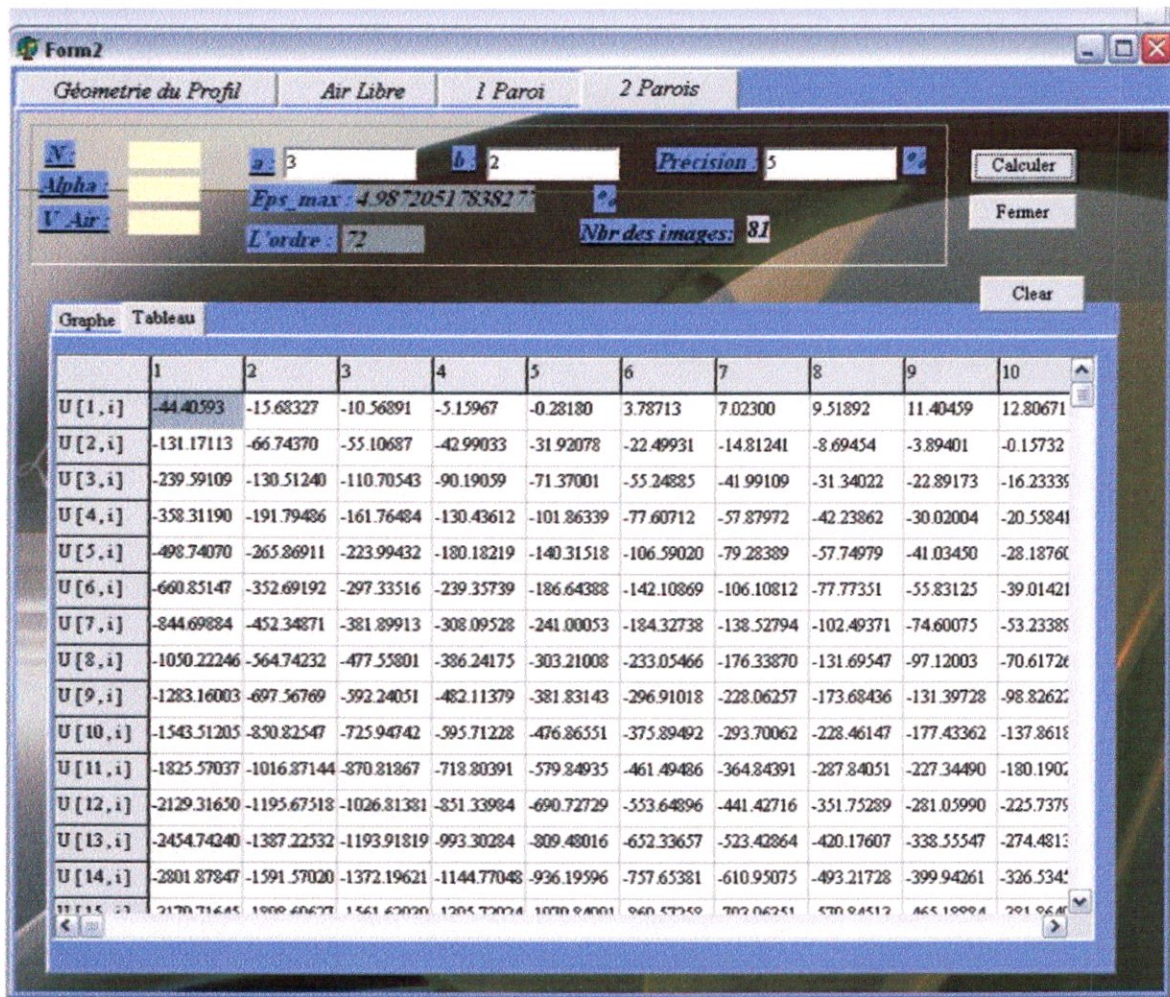


Fig.5.12. 2 Paroi



Chapitre VI

Résultats

et Interprétation

VI.1. VERIFICATION DE LA DISCRETISATION DU PROFIL :

Nous avons utilisé deux méthodes différentes pour la discrétisation du profil, il faut néanmoins choisir la plus avantageuse des deux par rapport à la précision des résultats et ce, en les comparant chacune avec les tables des coordonnées de discrétisation fournies dans l'Annexe B.

Notre choix s'est porté sur le profil symétrique NACA0018, nous en allons étudier les deux cas de figure :

VI.1.1. GEOMETRIE DU PROFIL :

Il s'agit là de tracer la courbe en faisant une répartition des coordonnées des abscisses suivant la corde.

Les entrées :

- $C = 1$: Corde.
- $T = 18$: Epaisseur relative.
- $N = 100$; Nombre de points choisis.

Les sorties :

- Pas = 0.02
- Tables des coordonnées des points du profil.
- Le graphique du profil.

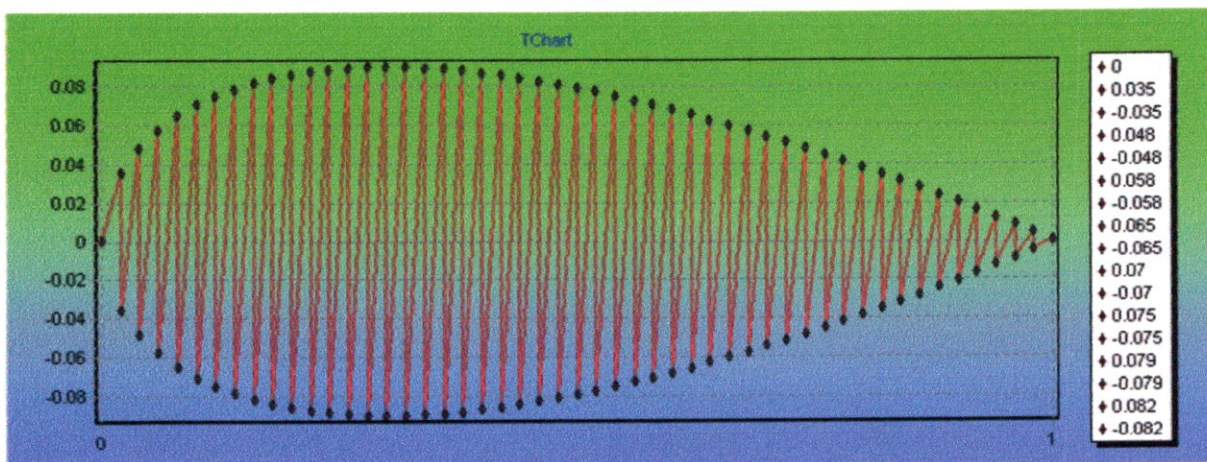


Fig.6.1. Courbe du profil NACA 0018 _ Géométrie du profil ($C = 1$; pas = 0.02)

Résultat :

On remarque que cette méthode manque quant à la précision du fait que les abscisses sont réparties suivant le pas, on aura donc une répartition plus au moins régulière des points du profil, or, ce qui nous intéresse le plus c'est d'avoir une répartition maximale au

bord d'attaque et au bord de fuite, c'est-à-dire aux endroits qui présentent la plus grande cambrure.

Conclusion :

Vue que cette méthode n'est pas vraiment exacte, alors les résultats qui en suivront le seront d'avantage, il faudra alors trouver une autre méthode plus exacte qui tiendra compte de la courbure du profil.

VI.2.1. GEOMETRIE DU PROFIL _ AIR LIBRE :

Il s'agit là de tracer la courbe en faisant une répartition des coordonnées des abscisses suivant la fonction « $x(i) = C/2(1 - \cos\theta_i)$ ».

Les entrées :

- C = 1 ; Corde.
- T = 18 ; Epaisseur relative.
- N = 100 ; Nombre de points limites des panneaux.

Les sorties :

- Tables des coordonnées des points du profil.
- Le graphique du profil.

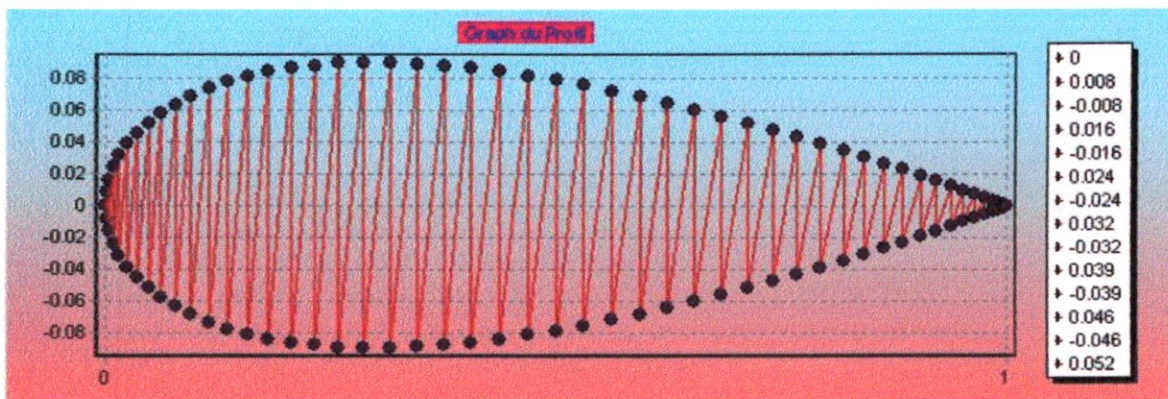


Fig. 6.2. Courbe du profil NACA 0018 _ Air Libre (C = 1; N = 100)

Résultat :

On remarque que cette méthode est très crédible coté précision car les abscisses sont réparties de telle sorte à avoir un maximum de points au niveau du bord d'attaque et du bord de fuite, c'est-à-dire aux endroits qui présentent la plus grande cambrure.

Conclusion :

Du fait de l'exactitude de la méthode, nous allons l'adopter pour toute la suite du travail.

VI.2. AIR LIBRE _ MÉTHODE DES PANNEAUX :

Les entrées :

- $C = 1$; Corde.
- $T = 18$; Epaisseur relative.
- $N = 100$; Nombre de points limites des panneaux.
- $V_{\text{air}} = 15$; Vitesse de l'air à l'infini.
- α ; l'angle d'incidence du profil.

Les sorties :

- Tables des coordonnées des points du profil.
- Tables des coordonnées des points de contrôles du profil.
- La matrice $A [i, j]$.
- Le vecteur résultant $Q[i]$;
- Le vecteur résultant $U[i]$;
- Le vecteur résultant $V[i]$;
- Le vecteur résultant $Vt[i]$;
- Le vecteur résultant $Cp[i]$;
- Le vecteur résultant $Teta[i]$;
- Le vecteur résultant $L[i]$;
- γ ; intensité tourbillonnaire.
- C_l ; Coefficient de portance ;
- Le graphe $Cp = f(X/C)$;
- Le graphe $C_l = f(\alpha)$;

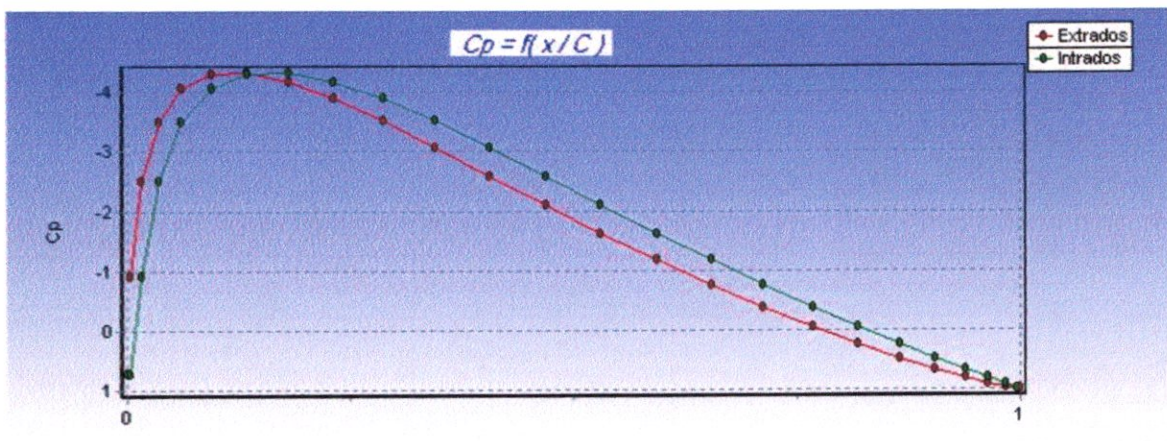


Fig.6.3. $Cp = f(X/C)$ pour une angle d'incidence $\alpha = 0^\circ$ (profil NACA 0018 ; $C = 1$; $N = 50$)

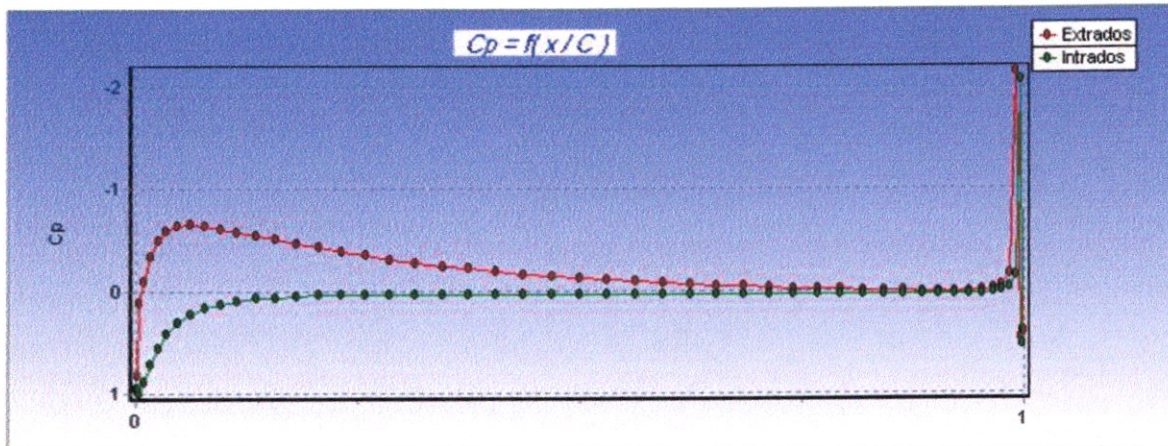


Fig.6.4. $C_p = f(X/C)$ pour une angle d'incidence $\alpha = 5^\circ$ (profil NACA 0018 ; $C = 1$; $N=100$)

VI.1.2. ANALYSE DES RESULTATS :

a. Graphe C_p :

$\alpha = 0^\circ$:

On remarque que pour $\alpha = 0$, les deux courbes de C_p coïncident car il y a une même répartition de pression sur l'extrados et l'intrados, ce qui est logique en soit du fait de la symétrie du profil.

Au voisinage du bord d'attaque, il y a une dépression qui est due à l'accélération des particules d'air à cause du rapprochement des lignes de courant, d'où augmentation de la vitesse tangentielle. Or d'après Bernoulli $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = cte$, il en résulte que P , et par conséquent C_p diminuent, c'est-à-dire qu'il y a dépression. Ensuite, en parcourant le profil, les particules d'air tendent à perdre en énergie donc en vitesse et gagnent parallèlement en pression, autrement dit, il y a surpression au voisinage du bord de fuite c'est-à-dire que C_p augmente.

Au niveau du bord d'attaque lui-même, nous avons un point d'arrêt autrement dit une vitesse tangentielle nulle, comme $C_p = 1 - \left(\frac{v}{V_\infty}\right)^2$, alors C_p sera = 1.

$\alpha \neq 0^\circ$:

Lorsqu'on augmente l'angle d'incidence, on remarque que les courbes de C_p prennent des allures différentes sur l'extrados et l'intrados.

Sur l'extrados, les filets d'air étant fortement déviés vers le haut, il en résulte une dépression plus importante que lorsque le profil est à incidence nulle, sous l'intrados,

la direction imposée vers le bas provoque une surpression moins importante que la dépression de l'extrados à cet angle d'incidence mais qui est cependant plus importante que lorsque le profil est à incidence nulle.

b. Graphe de $C_L = f(\alpha)$:

Ici, nous avons fait varier sur le programme l'angle d'incidence du profil symétrique NACA 0018, afin d'obtenir la portance du profil à diverses incidences. Nous remarquerons que $C_l = f(\alpha)$ suit une loi linéaire de pente « a ». L'équation de C_l est $C_l = a * \alpha$ pour le cas des profils symétriques 0018. C'est une relation simple, et donc aisée à manipuler. Ayant comparé pour plusieurs profils symétriques, nous nous rendons compte que l'équation de C_l sera alors toujours du type « $C_l = a * \alpha$ » où « a » est constant pour le profil. Cette relation nous permettra ainsi de connaître la portance quelle que soit l'incidence du profil symétrique, grâce, soit à l'essai sous une incidence quelconque, soit grâce à des tables qui donneraient directement l'équation de la droite.

VI.3. 1 PAROI _ METHODE DES IMAGES :

VI.1.3. DETERMINATION DE « H » LIMITE :

On varie les paramètres locaux de ce sub-menu N, Précision, alpha, Pas... etc ;

N = variable :

Précision = variable, $\alpha = 0$, pas = 5 :

	Précision (%)	Pas	H limite	Ordre	Nombre d'itérations
N = 50	0.01	5	275	46	55
	0.02	5	140	46	28
	0.03	5	95	47	19
	0.04	5	70	47	14
	0.05	5	55	47	11
	0.06	5	50	47	10
	0.07	5	40	47	8
	0.08	5	35	47	7
	0.09	5	35	47	7
	0.1	5	30	47	6
	0.2	5	15	47	3

N = 70	0.01	5	325	66	65
	0.02	5	165	66	33
	0.03	5	110	66	22
	0.04	5	85	66	17
	0.05	5	70	66	14
	0.06	5	55	66	11
	0.07	5	50	66	10
	0.08	5	45	66	9
	0.09	5	40	66	8
	0.1	5	35	66	7
	0.2	5	20	66	4
N = 90	0.01	5	315	46	63
	0.02	5	160	46	32
	0.03	5	105	46	21
	0.04	5	80	46	16
	0.05	5	65	46	13
	0.06	5	55	46	11
	0.07	5	45	46	9
	0.08	5	40	46	8
	0.09	5	35	46	7
	0.1	5	35	46	7
	0.2	5	20	46	4
N = 100	0.01	5	290	94	58
	0.02	5	145	94	29
	0.03	5	100	94	20
	0.04	5	75	94	15
	0.05	5	60	94	12
	0.06	5	50	94	10
	0.07	5	45	94	9
	0.08	5	40	94	6
	0.09	5	35	94	7
	0.1	5	30	94	6
	0.2	5	20	94	3

N variable :

a variable, Précision = 0.01, Pas = 5 :

	α°	Pas	H limite	Ordre	Nombre d'itérations
N = 50	0	5	275	46	55
	1	5	275	47	55
	2	5	275	47	55
	3	5	280	47	56
	4	5	280	47	56
	5	5	280	47	56
	6	5	280	47	56
	7	5	290	47	58
	8	5	290	47	58
	9	5	295	47	58
	10	5	295	47	59
N = 70	0	5	325	66	65
	1	5	330	66	66
	2	5	335	66	67
	3	5	340	66	68
	4	5	345	66	69
	5	5	350	66	70
	6	5	355	66	71
	7	5	360	66	72
	8	5	365	66	73
	9	5	375	66	75
	10	5	380	66	76
N = 90	0	5	315	46	63
	1	5	330	46	66
	2	5	345	46	69
	3	5	365	46	73
	4	5	385	46	77
	5	5	410	46	82
	6	5	435	46	87
	7	5	465	46	93

	8	5	495	46	99
	9	5	535	46	107
	10	5	575	46	115
N = 100	0	5	290	94	58
	1	5	290	94	58
	2	5	295	94	59
	3	5	300	94	60
	4	5	310	51	62
	5	5	320	51	64
	6	5	330	51	66
	7	5	345	51	69
	8	5	360	51	72
	9	5	375	51	75
10	5	395	51	79	

Précision variable :

$\alpha = 0^\circ, N = 100,$

Précision (%)	Pas	H limite	Ordre	Nombre d'itérations
100	1	1	93	1
10	1	1	93	1
1	1	3	94	3
0.1	1	29	94	29
0.01	1	286	94	286
0.001	10	2840	94	284

Résultats :

On remarque que :

- N fixe, α variable :
 - o plus la précision augmente plus H limite diminue et vérifie l'effet de sol ;
 - o l'effet de sol est vérifié quelque soit $0^\circ < \alpha < 10^\circ$;
- N variable, α variable :
 - o plus la « α » augmente plus H limite augmente et vérifie l'effet de sol ;
 - o l'effet de sol est vérifié quelque soit $0^\circ < \alpha < 10^\circ$;

- précision fixe :
 - plus la « α » augmente plus H limite augmente et vérifie l'effet de sol ;
 - plus la « N » augmente plus H limite augmente et vérifie l'effet de sol ;
- pas variable :
 - pas augmente « H » assez précis ;
 - pas diminue « H » précis, temps augmente ;

Conclusion :

La hauteur limite « H limite » a une relation avec :

- l'angle d'incidence ;
- le nombre des panneaux ;
- la précision de calcul ;

VI.1.1. VERIFICATION DE « H » :

- Voir graph. $C_p = f(H)$;

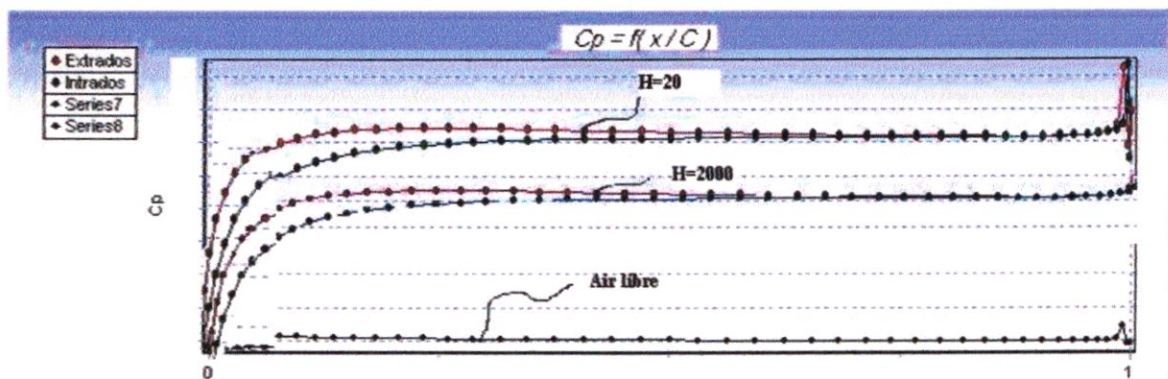


Fig.6.5. Différents graphes du C_p en présence d'une paroi avec H variable
(Profil NACA 0018 ; $C = 1$; $N = 100$ ($H = 20$; $H = 2000$))

On donne à « H » des valeurs différentes en les augmentant à chaque fois, On remarque que plus « H » augmente plus le graphe de C_p diminue.

Résultat :

L'effet de sol augmente le C_p . Ce résultat est parfaitement conforme aux résultats de l'expérience présentée au chapitre I.

- Voir graph. (C_p air libre et C_p effet de sol)

On remarque que les valeurs de C_p dans le cas effet de sol sont plus importantes que dans le cas air libre ;

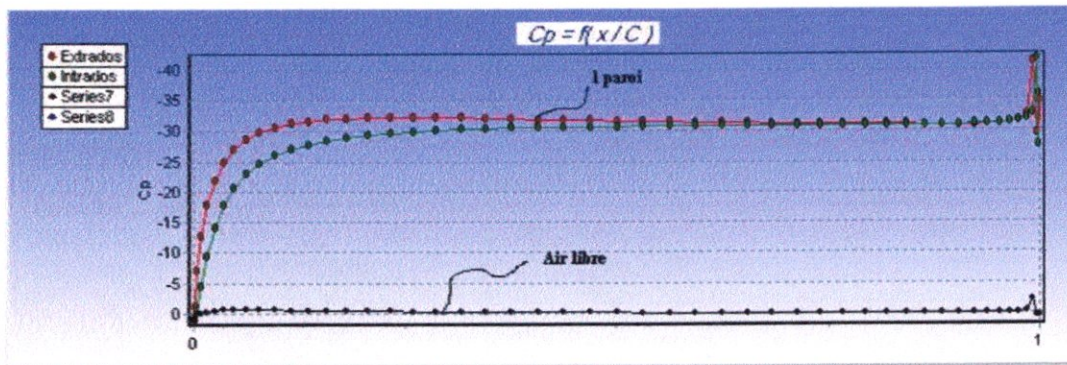


Fig.6.6. Comparaison entre C_p a Air libre et C_p en présence d'une paroi
(Profil NACA 0018 ; $C=1$; $N=100$)

Résultat :

H diminue \rightarrow C_p augmente

VI.4. 2 PAROIS _ METHODE DES IMAGES :

Dans cette partie du travail, nous allons déterminer le nombre des images ainsi que les vitesses de chaque bloc images.

Nous allons à présent faire varier les paramètres locaux de ce sub-menu, qui sont « a », « b » et la « Précision », nous en donnons un exemple afin de bien illustrer le calcul :

$a = 3 ;$

$b = 2 ;$

Précision (%)	Nbr images	ordre
10	45	27
8	55	27
6	67	27
3	133	27
⋮	⋮	⋮
0.1	3997	27

Résultat :

On remarque que le nombre des images et le temps du résultat augmente quand on diminue la précision de calcul



Conclusion

Générale

CONCLUSION GENERALE :

Nous avons essayé à travers notre travail de présenter l'effet de sol, aussi bien sous ses aspects théoriques, pratiques que numériques... nous espérons y être arriver.

Cependant il va sans dire, que nous avons eu énormément de difficulté à « arriver à bon port », le manque d'ouvrages traitant du sujet, les références exposant clairement la méthodologie du travail (surtout pour ce qui est de la méthode de Hess & Smith) faisant défaut, la non disponibilité des livres que nous aurions voulu consulter, sans parler des difficultés liées au travail même : Nous ne pouvons énumérer le nombre de fois ou nous étions contraints de « laisser tomber » une méthodes à cause des nombreuses zones d'ombre qui l'y entourent, ou un raisonnement qui s'était avéré erroné par la suite malgré notre forte conviction que « nous étions sur la bonne voie ».

Nous pouvons dire par conséquent, que nous avons pu avoir le privilège de traiter le phénomène « Effet de sol » dans pratiquement toute son intégrité, sans aller jusqu'à prétendre que notre thèse est « LA BIBLE » de l'effet de sol étant donné que les futurs ingénieurs en phase de préparer leurs PFE, pourront l'agrémenter de leurs précieuses modifications et correction des fautes que nous aurions pu faire, nous espérons cependant qu'elle tiendra place de référence auprès d'eux.



ANNEXE

ANNEXE A

A.1 INTEGRALES SE RAPPORTANT AUX PROFILS

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x-\xi} d\xi = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (\text{A. 1})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi}{x-\xi} d\xi = x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \quad (\text{A. 2})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2}{x-\xi} d\xi = x \left(x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) \quad (\text{A. 3})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3}{x-\xi} d\xi = x^2 \left(x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) - \frac{2}{3} \quad (\text{A. 4})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{x-\xi} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1}}{x-\xi} d\xi - \frac{1-(-1)^n}{n} \quad (\text{A. 5})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = 0 \quad (\text{A. 6})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \quad (\text{A. 7})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \quad (\text{A. 8})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 9})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^4}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 10})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^5}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(x^4 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} \right) \quad (\text{A. 11})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(x^4 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} \right) \quad (\text{A. 12})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi - \frac{\pi}{2} \left[1 - (-1)^n \right] \frac{1(3)\dots(n-2)}{2(4)\dots(n-1)} \quad (\text{A. 13})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi x \quad (\text{A. 14})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 15})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 16})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3 \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi \left(x^4 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} \right) \quad (\text{A. 17})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi}(x-\xi)} d\xi = -\pi \quad (\text{A. 18})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) \quad (\text{A. 19})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) \quad (\text{A. 20})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2 \quad (\text{A. 21})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^3 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2x \quad (\text{A. 22})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^4 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^4 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2x^2 - \frac{4}{3} \quad (\text{A. 23})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi - \frac{2}{n} \left[1 - (-1)^{n-1} \right] \sum_{\nu=0}^{n/2-1} \frac{1}{n-1-2\nu} \quad (\text{A. 24})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+\xi}(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+x}} \quad (\text{A. 25})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+\xi}}{x-\xi} d\xi = \sqrt{1+x} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+x}} - 2\sqrt{2} \quad (\text{A. 26})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\frac{\pi^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A. 27})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A. 28})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A. 29})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A. 30})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^4 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(\frac{5}{3} + 2x^2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A. 31})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi -$$

$$\pi \left[1 - (-1)^{n-1} \binom{n}{2} \right] ! \sum_0^{n/2-1} \frac{(-1)^v (1)(3)\dots(v)}{2^v (2v+1)(v!)^2 \left(\frac{n}{2} - 1 - v \right) !}$$

A.2 METHODE DE PANNEAUX

A.2.1 Identité de green :

Dans cette section, nous allons évaluer les intégrales de surface présentes dans les équations 1.28 et 1.11. La première intégrale à évaluer, après la discrétisation du profil, est la suivante :

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 33})$$

Où

\vec{n}_p = Le vecteur unitaire normal par rapport au panneau en P

Φ_s = Le potentiel créé par une source unitaire en deux dimensions

Puisque :

$$\nabla \ln r = \frac{1}{r} \nabla r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{A. 34})$$

$$\vec{n}_p \cdot \nabla \ln r = \frac{1}{r^2} \vec{n}_p \cdot \vec{r} = \frac{-(x^* - \xi) \sin(\theta_p - \theta_j) + y^* \cos(\theta_p - \theta_j)}{r^2} \quad (\text{A. 35})$$

$$r^2 = (x^* - \xi)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 36})$$

On a :

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = -\sin(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{x^* - \xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \quad (\text{A. 37})$$

$$+ \cos(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{\sin(\theta_p - \theta_j)}{2} (\ln r^2)_0^{l_j} + \cos(\theta_p - \theta_j) \left[\arctg\left(\frac{y^*}{x^* - \xi}\right) \right]_0^{l_j} \quad (\text{A. 38})$$

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(\theta_p - \theta_j) \ln\left(\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}}\right) + \cos(\theta_p - \theta_j) \beta_{p,j} \right] \quad (\text{A. 39})$$

La seconde intégrale à évaluer est la suivante :

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \theta ds \quad (\text{A. 40})$$

Où Φ_v représente le potentiel d'un tourbillon ponctuel unitaire en deux dimensions.

Etant donné que :

$$\nabla \theta = -\frac{1}{r} \vec{\theta} \quad (\text{A. 41})$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{\theta} = \sin \theta_p \sin(\theta_j + \delta) + \cos \theta_p \cos(\theta_j + \delta) \quad (\text{A. 42})$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{\theta} = \sin \theta_p (\sin \theta_j \cos \delta + \cos \theta_j \sin \delta) + \cos \theta_p (\cos \theta_j \cos \delta - \sin \theta_j \sin \delta) \quad (\text{A. 43})$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{\theta} = (\sin \theta_p \sin \theta_j + \cos \theta_p \cos \theta_j) \cos \delta + (\sin \theta_p \cos \theta_j - \cos \theta_p \sin \theta_j) \sin \delta \quad (\text{A. 44})$$

$$r \vec{n}_p \cdot \vec{\theta} = \cos(\theta_p - \theta_j) (x^* - \xi) + \sin(\theta_p - \theta_j) y^* \quad (\text{A. 45})$$

On obtient :

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = -\cos(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{x^* - \xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi - \sin(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \quad (\text{A. 46})$$

$$2\pi \int_0^{I_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{\cos(\theta_p - \theta_j)}{2} (\ln r^2)'_0^{I_j} + \sin(\theta_p - \theta_j) \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{y^*}{x^* - \xi} \right) \right]_0^{I_j} \quad (\text{A. 47})$$

$$\int_0^{I_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{1}{2\pi} \left[\cos(\theta_p - \theta_j) \ln \left(\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}} \right) - \sin(\theta_p - \theta_j) \beta_{p,j} \right] \quad (\text{A. 48})$$

A.2.2 Méthode de panneaux avec tourbillons : formulation de vitesse

Cette annexe décrit l'évaluation de l'intégrale de surface que l'on retrouve dans l'équation A.31. L'intégrale à évaluer est la suivante :

$$\int_0^{I_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_v ds = \int_0^{I_j} \vec{i} \cdot \vec{V}_v ds \quad (\text{A. 49})$$

Où \vec{V}_v est la vitesse induite par un tourbillon, soit :

$$\frac{1}{2} \pi (\sin(\delta + \theta_j) \vec{i} - \cos(\delta + \theta_j) \vec{j})$$

On a :

$$\vec{i} \cdot \vec{V}_v ds = \frac{1}{2\pi} [\cos \theta_p \sin(\delta + \theta_j) - \sin \theta_p \cos(\delta + \theta_j)] \quad (\text{A. 50})$$

Alors :

$$\int_0^{I_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{I_j} \frac{\cos \theta_p \sin(\delta + \theta_j) - \sin \theta_p \cos(\delta + \theta_j)}{r} d\xi \quad (\text{A. 51})$$

$$\int_0^{I_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{1}{2\pi} \left[\cos \theta_p \int_0^{I_j} \frac{\sin(\delta + \theta_j)}{r} d\xi - \sin \theta_p \int_0^{I_j} \frac{\cos(\delta + \theta_j)}{r} d\xi \right] \quad (\text{A. 52})$$

Toutefois, puisqu'on a :

$$\sin(\delta + \theta_j) = \sin \theta_j \cos \delta + \cos \theta_j \sin \delta \quad (\text{A. 53})$$

$$\cos(\delta + \theta_j) = \cos \theta_j \cos \delta - \sin \theta_j \sin \delta \quad (\text{A. 54})$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{I_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_v ds &= (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) \int_0^{I_j} \frac{\cos \delta}{r} d\xi \\ &+ (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \int_0^{I_j} \frac{\sin \delta}{r} d\xi \end{aligned} \quad (\text{A. 55})$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_p ds = (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{x^* - \xi}{r^2} d\xi \quad (\text{A. 56})$$

$$+ (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{y^*}{r^2} d\xi$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_p ds = (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) (\ln r)_0^{l_j} \quad (\text{A. 57})$$

$$+ (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \left[\arctg \left(\frac{y^*}{x^* - \xi} \right) \right]_0^{l_j}$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_p ds = (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) \ln \left(\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}} \right) \quad (\text{A. 58})$$

$$+ (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \beta_{p,j}$$

Cette intégration est valable pour un point p qui n'est pas situé sur le panneau j. Pour un point j situé au centre du panneau, $r_{p,j+1}$ et $r_{p,j}$ sont égaux. Le terme logarithmique devient donc zéro. De plus, on sait que $\beta_{p,j} = -\pi$ et $\theta_p = \theta_j$. L'intégrale devient donc :

$$\int_0^{l_j} \vec{i} \cdot \nabla \Phi_p ds = -\frac{1}{2} \quad (\text{A. 59})$$

D.2.3 Méthode de panneau avec tourbillons : formulation de ligne de courant :

Cette annexe décrit l'évaluation de l'intégrale que l'on retrouve dans l'équation A. 50.

L'intégrale à évaluer est la suivante :

$$\int_0^{l_j} \ln r ds \quad (\text{A. 60})$$

De plus, puisqu'on a :

$$r^2 = (x^* - \xi)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 61})$$

Alors :

$$\int_0^{l_j} \ln r ds = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \ln \left[(\xi - x^*)^2 + y^{*2} \right] d\xi \quad (\text{A. 62})$$

$$\int_0^{l_j} \ln r ds = \frac{1}{2} \left[(\xi - x^*) \ln r^2 - 2\xi + 2y^* \arctg \left(\frac{\xi - x^*}{y^*} \right) \right]_0^{l_j} \quad (\text{A. 63})$$

$$\int_0^{l_j} \ln r ds = l_j (\ln r_{P,j+1} - 1) + x^* \ln \left(\frac{r_{P,j}}{r_{P,j+1}} \right) + y^* \beta_{P,j} \quad (\text{A. 64})$$

D.2.4 Méthode de panneaux avec doublets constants : formulation

potentielle :

Cette annexe décrit l'évaluation des intégrales que l'on retrouve dans l'équation 1.62 .La première intégrale a évaluer est la suivante:

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 65})$$

Etant donné que :

$$\nabla \ln r = \frac{1}{r} \nabla r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{A. 66})$$

$$\vec{n}_j \cdot \nabla \ln r = \frac{1}{r^2} \vec{n}_j \cdot \vec{r} = -\frac{y^*}{r^2} \quad (\text{A. 67})$$

$$r^2 = (\xi - x^*)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 68})$$

Il en résulte que :

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{1}{2\pi_0} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(\xi - x^*)^2 + y^{*2}} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \text{arctg} \left[\frac{y^*}{x^* - \xi} \right]_0^{l_j} \quad (\text{A. 69})$$

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{\beta_{P,j}}{2\pi} \quad (\text{A. 70})$$

La seconde intégrale est :

$$\int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi_c} \int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 71})$$

$$\int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{1}{2\pi_c} \int_c^\infty \frac{y}{(\xi - x^*)^2 + y^2} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \text{arctg} \left[\frac{y}{\xi - x^*} \right]_c^\infty \quad (\text{A. 72})$$

$$\int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{\beta_{P,N+1}}{2\pi} \quad (\text{A. 73})$$

D.2.5 Méthode de panneau avec doublets linéaires : formulation

potentielle :

Cette annexe décrit l'évaluation des intégrales que l'on retrouve dans l'équation

L'intégrale a évaluer est la suivante:

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 74})$$

Puisque :

$$\Phi = \Phi_j + \xi \frac{(\Phi_{j+1} - \Phi_j)}{I_j} \quad (\text{A. 75})$$

$$\nabla \ln r = \frac{1}{r} \nabla r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{A. 76})$$

$$\bar{n}_j \cdot \nabla \ln r = \frac{1}{r^2} \bar{n}_j \cdot \vec{r} = -\frac{y^*}{r^2} \quad (\text{A. 77})$$

$$r^2 = (x^* - \xi)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 78})$$

Alors :

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{\Phi_j}{2\pi} \int_0^{I_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi - \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi I_j} \int_0^{I_j} \frac{y^* \xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \quad (\text{A. 79})$$

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = \int_0^{I_j} \frac{\Phi_j (x^* - I_j) - \Phi_{j+1} x^*}{2\pi I_j} \int_0^{I_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi + \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi I_j} \int_0^{I_j} \frac{y^* (x^* - \xi)}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \quad (\text{A. 80})$$

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{\Phi_j (x^* - I_j) - \Phi_{j+1}}{2\pi I_j} \arctg \left[\frac{y^*}{(x^* - \xi)} \right]_0^{I_j} - \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi} \left[\frac{y^*}{I_j} \ln [(x^* - \xi)^2 + y^{*2}] \right]_0^{I_j} \quad (\text{A. 81})$$

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{1}{2\pi} \left[\Phi_j + \frac{x^*}{I_j} (\theta_{j+1} - \theta_j) \right] \beta_{p,j} - \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi} \frac{y^*}{I_j} \ln \left[\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}} \right] \quad (\text{A. 82})$$

A.3 CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES PROFIL SYMETRIQUE :

NACA 0012 : Coefficient de portance, C_L , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,0	0,0830	0,1057	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100
2,0	0,1534	0,2072	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200
3,0	0,2009	0,3032	0,3376	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300
4,0	0,2003	0,3929	0,4464	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400
5,0	0,0328	0,4781	0,5726	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500
6,0	-0,1413	-0,0298	0,6115	0,6384	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600
7,0	-0,1142	-0,1089	-0,0212	0,7227	0,7460	0,7700	0,7700	0,7700	0,7700	0,7700	0,7700
8,0	-0,0703	-0,0699	-0,0615	0,6930	0,8274	0,8542	0,8800	0,8800	0,8800	0,8800	0,8800
9,0	-0,0215	-0,0198	-0,0160	-0,0010	0,8527	0,9352	0,9598	0,9661	0,9900	0,9900	0,9900
10,0	0,0311	0,0320	0,0344	0,0413	0,1325	0,9811	1,0343	1,0512	1,0727	1,1000	1,1000
11,0	0,0848	0,0856	0,0869	0,0911	0,1095	0,9132	1,0749	1,1097	1,1539	1,1842	1,2100
12,0	0,1387	0,1894	0,1406	0,1430	0,1533	0,4832	1,0390	1,1212	1,2072	1,2673	1,2906
13,0	0,1928	0,1934	0,1945	0,1966	0,2030	0,2759	0,8737	1,0487	1,2169	1,3242	1,3687
14,0	0,2468	0,2474	0,2484	0,2504	0,2546	0,2893	0,6284	0,8846	1,1614	1,3423	1,4171
15,0	0,3008	0,3014	0,3024	0,3043	0,3082	0,3306	0,4907	0,7108	1,0478	1,3093	1,4214
16,0	0,3548	0,3554	0,3563	0,3582	0,3620	0,3792	0,4696	0,6060	0,9221	1,2195	1,2941
17,0	0,4079	0,4089	0,4107	0,4139	0,4200	0,4455	0,5195	0,5906	0,7826	1,0365	1,1200
18,0	0,4606	0,4620	0,4644	0,4689	0,4768	0,5047	0,5584	0,6030	0,7163	0,9054	0,9795
19,0	0,5121	0,5147	0,5178	0,5232	0,5322	0,5591	0,6032	0,6334	0,7091	0,8412	0,8983
20,0	0,5838	0,5663	0,5708	0,5770	0,5870	0,6120	0,6474	0,6716	0,7269	0,8233	0,8668
21,0	0,6161	0,6184	0,6232	0,6305	0,6414	0,6643	0,6949	0,7162	0,7595	0,8327	0,8665
22,0	0,6687	0,6709	0,6755	0,6839	0,6956	0,7179	0,7446	0,7613	0,7981	0,8563	0,8859
23,0	0,7216	0,7238	0,7283	0,7373	0,7497	0,7715	0,7948	0,8097	0,8429	0,8903	0,9151
24,0	0,7744	0,7765	0,7809	0,7902	0,8034	0,8246	0,8462	0,8589	0,8882	0,9295	0,9492
25,0	0,8276	0,8297	0,8340	0,8432	0,8572	0,8780	0,8984	0,9093	0,9352	0,9718	0,9927
26,0	0,8810	0,8831	0,8873	0,8963	0,9109	0,9313	0,9506	0,9618	0,9842	1,0193	1,0371
27,0	0,9345	0,9365	0,9407	0,9496	0,9646	0,9846	1,0029	1,0144	1,0355	1,0680	1,0833
30,0	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150	0,9150
35,0	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200

NACA 0012 (suite): Coefficient de portance, C_L , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
40,0	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750
45,0	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850
50,0	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400	1,0400
55,0	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650	0,9650
60,0	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750
65,0	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650	0,7650
70,0	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500
75,0	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150	0,5150
80,0	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700	0,3700
85,0	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200
90,0	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700	0,0700
95,0	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700	-0,0700
100,0	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200	-0,2200
105,0	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700	-0,3700
110,0	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100	-0,5100
115,0	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250	-0,6250
120,0	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350	-0,7350
125,0	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400	-0,8400
130,0	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100
135,0	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450
140,0	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450	-0,9450
145,0	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100	-0,9100
150,0	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500
155,0	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400	-0,7400
160,0	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600
165,0	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750	-0,6750
170,0	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500
175,0	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900	-0,6900
180,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

NACA 0012 : Coefficient de traînée, C_D , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
0,0	0,0337	0,0245	0,0175	0,0133	0,0103	0,0079	0,0067	0,0065	0,0064	0,0064	0,0064
1,0	0,0338	0,0247	0,0177	0,0134	0,0104	0,0080	0,0068	0,0066	0,0064	0,0064	0,0064
2,0	0,0343	0,0251	0,0181	0,0138	0,0108	0,0084	0,0070	0,0068	0,0066	0,0066	0,0066
3,0	0,0351	0,0259	0,0189	0,0145	0,0114	0,0089	0,0075	0,0071	0,0069	0,0068	0,0068
4,0	0,0359	0,0270	0,0199	0,0155	0,0124	0,0098	0,0083	0,0078	0,0073	0,0072	0,0071
5,0	0,0351	0,0282	0,0218	0,0170	0,0140	0,0113	0,0097	0,0091	0,0081	0,0076	0,0074
6,0	0,0460	0,0460	0,0232	0,0189	0,0152	0,0125	0,0108	0,0101	0,0090	0,0081	0,0078
7,0	0,0580	0,0580	0,0580	0,0204	0,0170	0,0135	0,0118	0,0110	0,0097	0,0086	0,0082
8,0	0,0720	0,0720	0,0720	0,0222	0,0185	0,0153	0,0128	0,0119	0,0105	0,0092	0,0086
9,0	0,0860	0,0860	0,0860	0,0600	0,0203	0,0167	0,0144	0,0134	0,0113	0,0098	0,0091
10,0	0,1010	0,1010	0,1010	0,0600	0,0188	0,0184	0,0159	0,0147	0,0128	0,0106	0,0097
11,0	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170	0,0760	0,0204	0,0175	0,0162	0,0140	0,0118	0,0104
12,0	0,1340	0,1340	0,1340	0,1340	0,1340	0,0217	0,0195	0,0180	0,0155	0,0130	0,0116
13,0	0,1520	0,1520	0,1520	0,1520	0,1520	0,0222	0,0216	0,0200	0,0172	0,0143	0,0127
14,0	0,1710	0,1710	0,1710	0,1710	0,1710	0,1060	0,0236	0,0222	0,0191	0,0159	0,0141
15,0	0,1900	0,1910	0,1900	0,1900	0,1900	0,1900	0,1170	0,0245	0,0213	0,0177	0,0157
16,0	0,2100	0,2100	0,2100	0,2100	0,2100	0,2100	0,2100	0,1280	0,0237	0,0198	0,0182
17,0	0,2310	0,2300	0,2310	0,2310	0,2310	0,2310	0,2300	0,2310	0,1380	0,0229	0,0210
18,0	0,2520	0,2520	0,2520	0,2520	0,2520	0,2520	0,2520	0,2520	0,2520	0,1480	0,0241
19,0	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740	0,2740	0,1610
20,0	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970
21,0	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200
22,0	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440	0,3440
23,0	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690	0,3690
24,0	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940	0,3940
25,0	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200
26,0	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460	0,4460
27,0	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730
30,0	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700
35,0	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450

NACA 0012 : Coefficient de traînée, C_D , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
40,0	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200
45,0	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750
50,0	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150
55,0	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450
60,0	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700
65,0	1,5750	1,5700	1,5700	1,5700	1,5700	1,5700	1,5700	1,5700	1,5700	1,5700	1,5700
70,0	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650
75,0	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350
80,0	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800
85,0	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
90,0	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
95,0	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800
100,0	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500
105,0	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000
110,0	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350
115,0	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550
120,0	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650
125,0	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500
130,0	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250
135,0	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850
140,0	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250
145,0	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550
150,0	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750
155,0	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200
160,0	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200
165,0	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300
170,0	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400
175,0	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550
180,0	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250

NACA 0015 : Coefficient de portance, C_L , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,0	0,0434	0,0891	0,1054	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100
2,0	0,0715	0,1740	0,2099	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200
3,0	0,0725	0,2452	0,3078	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300
4,0	0,0581	0,3041	0,4017	0,4186	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400
5,0	0,0162	0,3359	0,4871	0,5180	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500
6,0	-0,0781	0,3001	0,5551	0,6048	0,6299	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600
7,0	-0,1517	0,0570	0,5730	0,6760	0,7150	0,7390	0,7483	0,7700	0,7700	0,7700	0,7700
8,0	-0,1484	-0,1104	0,4663	0,7189	0,7851	0,8240	0,8442	0,8504	0,8800	0,8800	0,8800
9,0	-0,1194	-0,1050	0,0433	0,6969	0,8311	0,8946	0,9260	0,9387	0,9574	0,9900	0,9900
10,0	-0,0791	-0,0728	-0,0413	0,5122	0,8322	0,9440	0,9937	1,0141	1,0433	1,0685	1,1000
11,0	-0,0348	-0,0300	-0,0144	0,1642	0,7623	0,9572	1,0363	1,0686	1,1138	1,1553	1,1749
12,0	0,0138	0,0173	0,0261	0,0749	0,5936	0,9285	1,0508	1,0971	1,1667	1,2290	1,2591
13,0	0,0649	0,0678	0,0741	0,0967	0,3548	0,8562	1,0302	1,0957	1,1948	1,2847	1,3300
14,0	0,1172	0,1193	0,1244	0,1382	0,2371	0,7483	0,9801	1,0656	1,1962	1,3187	1,3825
15,0	0,1706	0,1721	0,1756	0,1861	0,2376	0,6350	0,9119	1,0145	1,1744	1,3298	1,4136
16,0	0,2242	0,2256	0,2280	0,2364	0,2665	0,5384	0,8401	0,9567	1,1356	1,3186	1,4233
17,0	0,2780	0,2792	0,2815	0,2873	0,3098	0,4851	0,7799	0,8996	1,0921	1,2917	1,4136
18,0	0,3319	0,3331	0,3351	0,3393	0,3567	0,4782	0,7305	0,8566	1,0510	1,2576	1,3897
19,0	0,3859	0,3869	0,3889	0,3927	0,4066	0,4908	0,7041	0,8226	1,0173	1,2242	1,3608
20,0	0,4399	0,4409	0,4427	0,4463	0,4575	0,5247	0,6990	0,8089	0,9954	1,1965	1,3325
21,0	0,4939	0,4949	0,4966	0,5001	0,5087	0,5616	0,7097	0,8063	0,9837	1,1771	1,3077
22,0	0,5479	0,5489	0,5506	0,5539	0,5611	0,6045	0,7298	0,8189	0,9827	1,1647	1,2767
23,0	0,6019	0,6029	0,6045	0,6078	0,6148	0,6528	0,7593	0,8408	0,9910	1,1611	1,1981
24,0	0,6559	0,6569	0,6585	0,6617	0,6685	0,7015	0,7961	0,8668	1,0078	1,1563	1,1538
25,0	0,7099	0,7109	0,7125	0,7156	0,7224	0,7511	0,8353	0,9023	1,0317	1,1322	1,1380
26,0	0,7639	0,7649	0,7666	0,7700	0,7771	0,8055	0,8838	0,9406	1,0591	1,1268	1,1374
27,0	0,8174	0,8191	0,8222	0,8277	0,8382	0,8788	0,9473	0,9912	1,0810	1,1397	1,1519
30,0	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550
35,0	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800

NACA 0015 (suite): Coefficient de portance, C_L , en fonction de l'angle d'incidence, α° ,

pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
40,0	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350
45,0	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500
50,0	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200
55,0	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550
60,0	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750
65,0	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600
70,0	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300
75,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
80,0	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650
85,0	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300
90,0	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900
95,0	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500
100,0	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850
105,0	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200
110,0	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500
115,0	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750
120,0	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700
125,0	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600
130,0	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500
135,0	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300
140,0	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800
145,0	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000
150,0	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700
155,0	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700
160,0	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350
165,0	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800
170,0	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500
175,0	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600
180,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

NACA 0015 : Coefficient de traînée, C_D , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour

différents nombres de Reynolds, $Re (*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
0,0	0,0360	0,0265	0,0196	0,0147	0,0116	0,0091	0,0077	0,0074	0,0070	0,0068	0,0068
1,0	0,0362	0,0267	0,0198	0,0148	0,0117	0,0092	0,0078	0,0075	0,0071	0,0069	0,0068
2,0	0,0366	0,0271	0,0202	0,0151	0,0120	0,0094	0,0080	0,0076	0,0072	0,0070	0,0069
3,0	0,0373	0,0279	0,0209	0,0156	0,0124	0,0098	0,0083	0,0079	0,0075	0,0073	0,0071
4,0	0,0383	0,0290	0,0219	0,0168	0,0132	0,0105	0,0089	0,0083	0,0078	0,0075	0,0074
5,0	0,0393	0,0303	0,0232	0,0181	0,0142	0,0114	0,0098	0,0091	0,0083	0,0080	0,0077
6,0	0,0400	0,0410	0,0249	0,0197	0,0160	0,0126	0,0108	0,0101	0,0090	0,0084	0,0081
7,0	0,0510	0,0510	0,0267	0,0214	0,0176	0,0143	0,0122	0,0111	0,0098	0,0089	0,0086
8,0	0,0640	0,0640	0,0520	0,0234	0,0193	0,0157	0,0135	0,0126	0,0108	0,0095	0,0090
9,0	0,0770	0,0770	0,0770	0,0255	0,0212	0,0173	0,0149	0,0138	0,0121	0,0102	0,0096
10,0	0,0910	0,0910	0,0910	0,0277	0,0233	0,0191	0,0164	0,0152	0,0133	0,0113	0,0103
11,0	0,1070	0,1070	0,1070	0,0760	0,0256	0,0211	0,0182	0,0168	0,0146	0,0124	0,0114
12,0	0,1230	0,1230	0,1230	0,1230	0,0281	0,0233	0,0200	0,0186	0,0161	0,0136	0,0123
13,0	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,0302	0,0257	0,0221	0,0205	0,0177	0,0149	0,0134
14,0	0,1580	0,1580	0,1580	0,1580	0,1040	0,0283	0,0244	0,0225	0,0195	0,0164	0,0147
15,0	0,1770	0,1770	0,1770	0,1770	0,1770	0,0312	0,0269	0,0249	0,0215	0,0180	0,0161
16,0	0,1960	0,1960	0,1960	0,1960	0,1960	0,1240	0,0297	0,0275	0,0237	0,0198	0,0176
17,0	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,1340	0,0303	0,0261	0,0218	0,0194
18,0	0,2380	0,2380	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,2380	0,1450	0,0288	0,0240	0,0213
19,0	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,1550	0,0265	0,0234
20,0	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,1660	0,0257
21,0	0,3050	0,3050	0,3050	0,3050	0,3050	0,3050	0,3050	0,3050	0,3050	0,3050	0,1770
22,0	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290
23,0	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540	0,3540
24,0	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790	0,3790
25,0	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050
26,0	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320	0,4320
27,0	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600
30,0	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700
35,0	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450

NACA 0015 : Coefficient de traînée, C_D , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
40,0	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200
45,0	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750
50,0	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150
55,0	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450
60,0	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700
65,0	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750
70,0	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650
75,0	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350
80,0	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800
85,0	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
90,0	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
95,0	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800
100,0	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500
105,0	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000
110,0	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350
115,0	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550
120,0	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650
125,0	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500
130,0	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250
135,0	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850
140,0	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250
145,0	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550
150,0	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750
155,0	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200
160,0	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200
165,0	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300
170,0	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400
175,0	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550
180,0	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250

NACA 0018 : Coefficient de portance, C_L , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,0	-0,0045	0,0607	0,0936	0,0889	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100
2,0	-0,0154	0,1135	0,1833	0,1935	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200	0,2200
3,0	-0,0233	0,1550	0,2688	0,2924	0,3088	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300	0,3300
4,0	-0,0368	0,1788	0,3495	0,3880	0,4114	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400	0,4400
5,0	-0,0577	0,1788	0,4117	0,4753	0,5068	0,5240	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500	0,5500
6,0	-0,0839	0,1582	0,4573	0,5615	0,5960	0,6228	0,6328	0,6600	0,6600	0,6600	0,6600
7,0	-0,1182	0,1161	0,4758	0,6224	0,6724	0,7100	0,7291	0,7362	0,7449	0,7700	0,7700
8,0	-0,1501	0,0214	0,4428	0,6589	0,7373	0,7879	0,8156	0,8256	0,8439	0,8538	0,8538
9,0	-0,1584	-0,0682	0,3544	0,6606	0,7781	0,8526	0,8904	0,9067	0,9314	0,9525	0,9525
10,0	-0,1423	-0,1003	0,2108	0,6248	0,7949	0,8983	0,9541	0,9751	1,0111	1,0404	1,0404
11,0	-0,1095	-0,0812	0,1124	0,5328	0,7719	0,9131	0,9893	1,0206	1,0704	1,1144	1,1144
12,0	-0,0767	-0,0602	0,0139	0,4408	0,7488	0,9279	1,0245	1,0664	1,1296	1,1884	1,1884
13,0	-0,0341	-0,0202	0,0313	0,3332	0,6863	0,9011	1,0210	1,0729	1,1555	1,2346	1,2346
14,0	0,0085	0,0172	0,0489	0,2256	0,6237	0,8803	1,0175	1,0793	1,1813	1,2808	1,2808
15,0	0,0568	0,0643	0,0888	0,2142	0,5567	0,8405	0,9912	1,0598	1,1754	1,2938	1,2938
16,0	0,1051	0,1114	0,1287	0,2027	0,4896	0,8007	0,9648	1,0402	1,1695	1,3067	1,3067
17,0	0,1561	0,1617	0,1754	0,2315	0,4549	0,7663	0,9399	0,9981	1,1539	1,3014	1,3014
18,0	0,2070	0,2120	0,2228	0,2603	0,4202	0,7319	0,9150	0,9559	1,1383	1,2960	1,2960
19,0	0,2591	0,2636	0,2731	0,3038	0,4292	0,7158	0,9014	0,9633	1,1278	1,2864	1,2864
20,0	0,3111	0,3151	0,3236	0,3472	0,4382	0,6997	0,8877	0,9707	1,1172	1,2768	1,2768
21,0	0,3642	0,3675	0,3751	0,3951	0,4704	0,7024	0,8872	0,9702	1,1150	1,2741	1,2741
22,0	0,4172	0,4198	0,4265	0,4430	0,5026	0,7050	0,8867	0,9696	1,1127	1,2714	1,2714
23,0	0,4706	0,4731	0,4790	0,4941	0,5458	0,7275	0,9020	0,9833	1,1241	1,2784	1,2784
24,0	0,5241	0,5265	0,5315	0,5452	0,5889	0,7499	0,9173	0,9970	1,1354	1,2855	1,2855
25,0	0,5775	0,5798	0,5840	0,5963	0,6321	0,7724	0,9326	1,0107	1,1468	1,2925	1,2925
26,0	0,6330	0,6348	0,6382	0,6480	0,6767	0,7889	0,9171	0,9796	1,0884	1,2050	1,2050
27,0	0,6885	0,6899	0,6924	0,6998	0,7213	0,8054	0,9016	0,9484	1,0301	1,1175	1,1175
30,0	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550	0,8550
35,0	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800	0,9800

NACA 0018 (suite) : Coefficient de portance, C_L , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
40,0	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350
45,0	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500
50,0	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200	1,0200
55,0	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550
60,0	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750
65,0	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600	0,7600
70,0	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300	0,6300
75,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
80,0	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650	0,3650
85,0	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300
90,0	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900
95,0	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500	-0,0500
100,0	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850	-0,1850
105,0	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200	-0,3200
110,0	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500	-0,4500
115,0	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750	-0,5750
120,0	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700
125,0	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600	-0,7600
130,0	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500
135,0	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300	-0,9300
140,0	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800	-0,9800
145,0	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000	-0,9000
150,0	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700	-0,7700
155,0	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700	-0,6700
160,0	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350	-0,6350
165,0	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800	-0,6800
170,0	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500	-0,8500
175,0	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600	-0,6600
180,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

NACA 0018 : Coefficient de traînée, C_D , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour

différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
0,0	0,0385	0,0286	0,0214	0,0162	0,0128	0,0101	0,0085	0,0082	0,0077	0,0073	0,0073
1,0	0,0387	0,0288	0,0215	0,0163	0,0129	0,0102	0,0087	0,0082	0,0077	0,0073	0,0073
2,0	0,0391	0,0292	0,0219	0,0167	0,0131	0,0104	0,0088	0,0083	0,0078	0,0075	0,0075
3,0	0,0399	0,0299	0,0225	0,0172	0,0137	0,0107	0,0091	0,0086	0,0080	0,0077	0,0077
4,0	0,0410	0,0310	0,0235	0,0181	0,0144	0,0112	0,0096	0,0089	0,0084	0,0079	0,0079
5,0	0,0425	0,0323	0,0247	0,0192	0,0153	0,0121	0,0102	0,0095	0,0087	0,0083	0,0083
6,0	0,0443	0,0339	0,0263	0,0206	0,0166	0,0132	0,0112	0,0102	0,0093	0,0087	0,0087
7,0	0,0463	0,0358	0,0282	0,0223	0,0181	0,0145	0,0123	0,0115	0,0101	0,0093	0,0093
8,0	0,0489	0,0376	0,0303	0,0242	0,0198	0,0159	0,0136	0,0126	0,0111	0,0100	0,0100
9,0	0,0525	0,0396	0,0327	0,0264	0,0217	0,0176	0,0150	0,0139	0,0122	0,0108	0,0108
10,0	0,0574	0,0630	0,0620	0,0288	0,0238	0,0194	0,0166	0,0154	0,0134	0,0117	0,0117
11,0	0,0902	0,0930	0,0915	0,0544	0,0263	0,0215	0,0184	0,0171	0,0149	0,0129	0,0129
12,0	0,1230	0,1230	0,1230	0,0800	0,0288	0,0235	0,0202	0,0187	0,0163	0,0140	0,0140
13,0	0,1405	0,1405	0,1395	0,1190	0,0934	0,0588	0,0224	0,0207	0,0180	0,0150	0,0150
14,0	0,1580	0,1580	0,1580	0,1580	0,1580	0,0940	0,0245	0,0227	0,0197	0,0168	0,0168
15,0	0,1770	0,1770	0,1770	0,1770	0,1770	0,1450	0,1103	0,0654	0,0219	0,0182	0,0182
16,0	0,1960	0,1960	0,1960	0,1960	0,1960	0,1960	0,1960	0,1080	0,0240	0,0203	0,0203
17,0	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,2170	0,1730	0,1310	0,0224	0,0224
18,0	0,2380	0,2380	0,2380	0,2380	0,2380	0,2380	0,2380	0,2380	0,2380	0,0244	0,0244
19,0	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,2600	0,1532	0,1532
20,0	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820	0,2820
21,0	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055	0,3055
22,0	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290	0,3290
23,0	0,3543	0,3543	0,3543	0,3543	0,3543	0,3543	0,3543	0,3543	0,3543	0,3543	0,3542
24,0	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797	0,3797
25,0	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050	0,4050
26,0	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380	0,4380
27,0	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710	0,4710
30,0	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700	0,5700
35,0	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450

NACA 0018 (suite): Coefficient de portance, C_D , en fonction de l'angle d'incidence, α° , pour différents nombres de Reynolds, $Re(*10^6)$.

α/Re	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,36	0,70	1,0	2,0	5,0	10,0
40,0	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200	0,9200
45,0	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750	1,0750
50,0	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150	1,2150
55,0	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450	1,3450
60,0	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700	1,4700
65,0	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750	1,5750
70,0	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650	1,6650
75,0	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350	1,7350
80,0	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800
85,0	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
90,0	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
95,0	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800	1,7800
100,0	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500	1,7500
105,0	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000	1,7000
110,0	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350	1,6350
115,0	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550	1,5550
120,0	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650	1,4650
125,0	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500	1,3500
130,0	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250	1,2250
135,0	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850	1,0850
140,0	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250	0,9250
145,0	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550	0,7550
150,0	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750	0,5750
155,0	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200	0,4200
160,0	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200	0,3200
165,0	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300	0,2300
170,0	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400	0,1400
175,0	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550	0,0550
180,0	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250

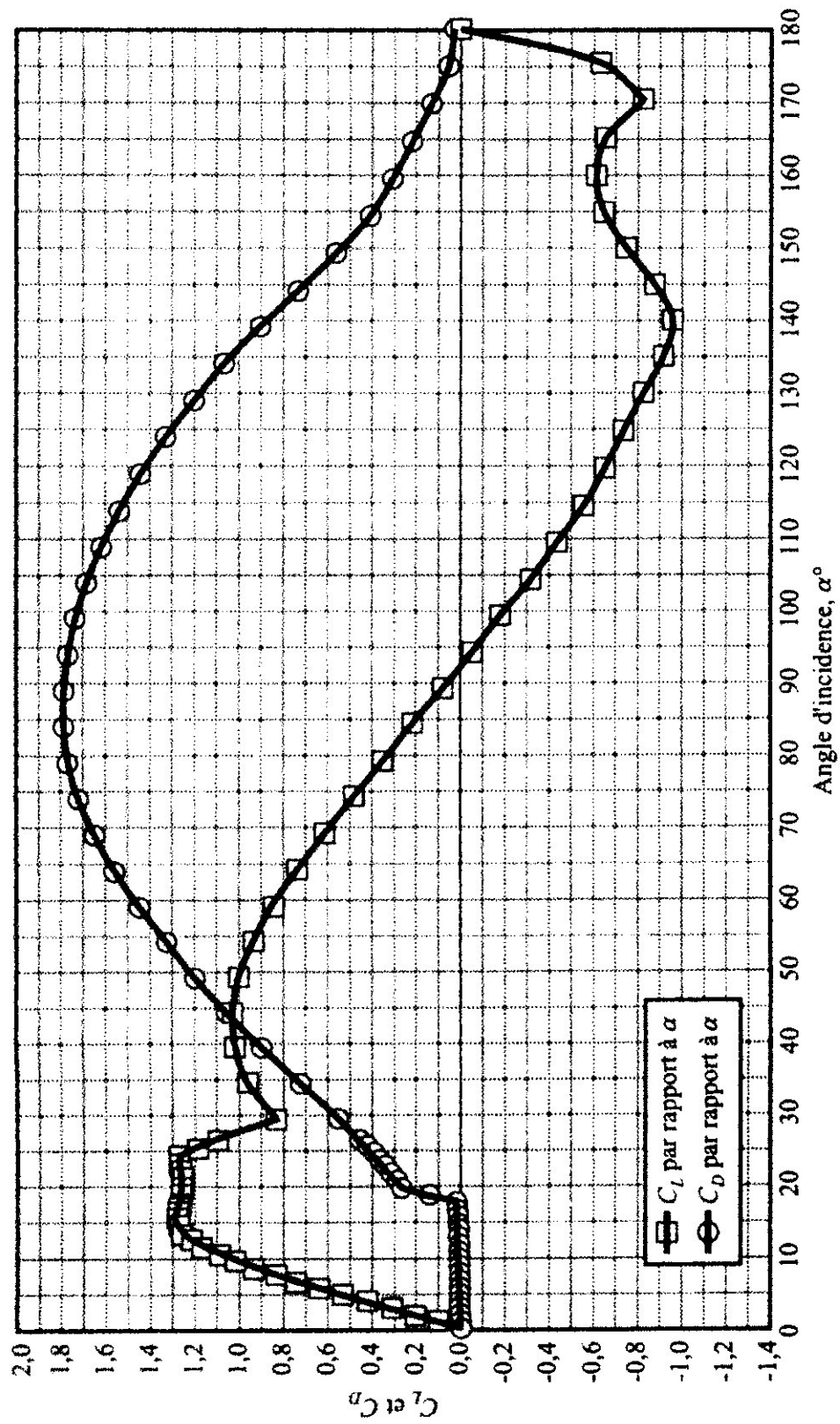


Fig. A.1 Coefficient de portance C_L et coefficient de traînée C_D , pour un profil NACA 0018, $Re(*10^6)$

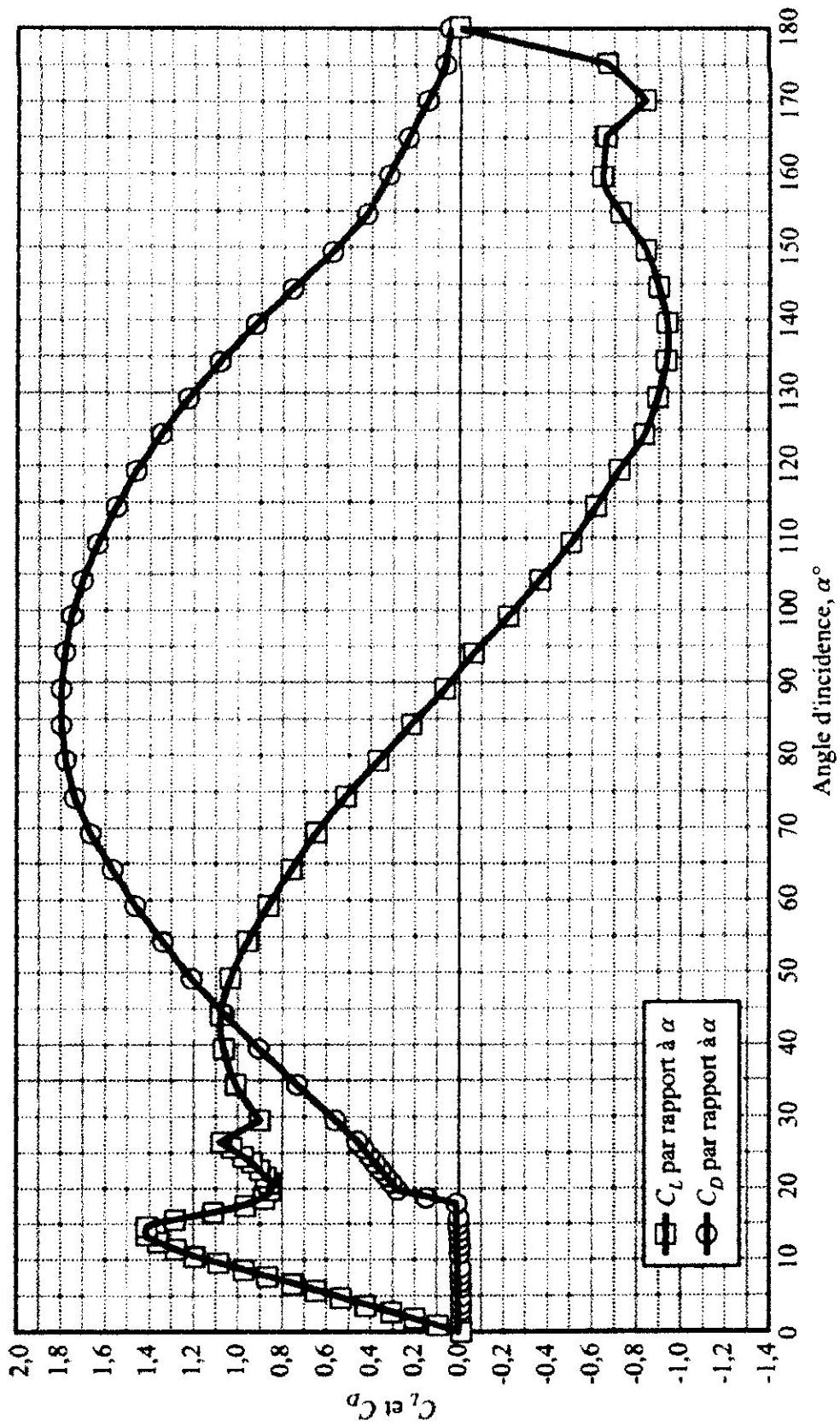


Fig. A.1 Coefficient de portance C_L et coefficient de traînée C_D , pour un profil NACA 0012, $Re(*10^6)$

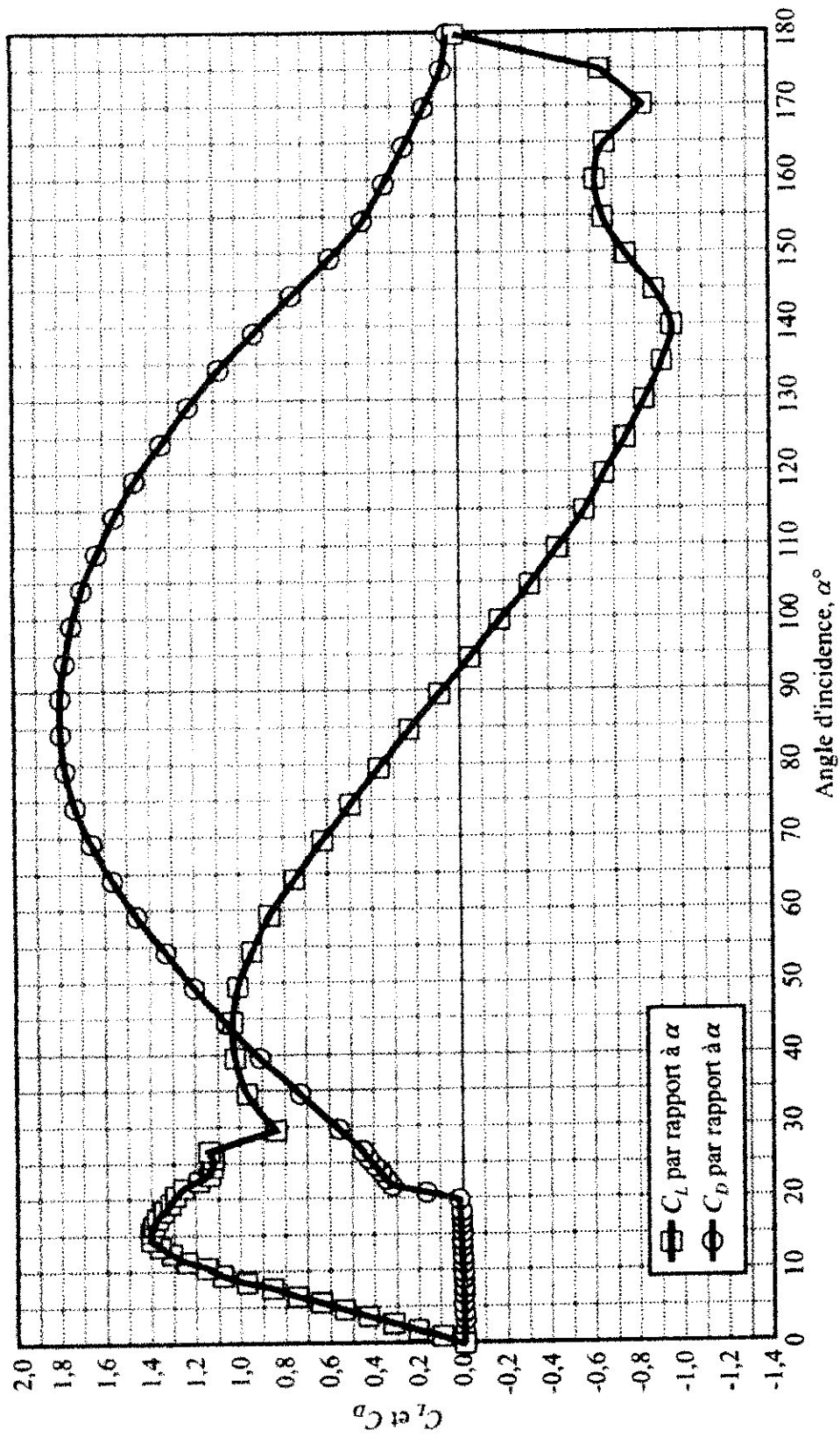


Fig. A.1 Coefficient de portance C_L et coefficient de traînée C_D , pour un profil NACA 0015, $Re(*10^6)$

ANNEXE B

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS

B.1 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES ET DISTRIBU- TION DE LA VITESSE D'UN PROFIL SYMETRIQUE NACA 0012 :

x (% de la corde)	y (% de la corde)	$(v/V_\infty)^2$	v/V_∞	$\Delta v_a/V_\infty$
0	0	0	0	1,988
0,5	0,610	0,800	1,475
1,25	1,894	1,010	1,005	1,199
2,5	2,615	1,241	1,114	0,934
5,0	3,555	1,378	1,174	0,685
7,5	4,200	1,402	1,184	0,558
10	4,683	1,411	1,188	0,479
15	5,345	1,411	1,188	0,381
20	5,737	1,399	1,183	0,319
25	5,941	1,378	1,174	0,273
30	6,002	1,350	1,162	0,239
40	5,803	1,288	1,135	0,187
50	5,294	1,228	1,108	0,149
60	4,563	1,168	1,050	0,118
70	3,664	1,109	1,053	0,092
80	2,623	1,044	1,022	0,068
90	1,148	0,956	0,978	0,044
95	0,807	0,906	0,952	0,029
100	0,126	0	0	0

Rayon au bord d'attaque : 1,58 % de la corde

B.2 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS A QUATRE CHIFFRES* :

NACA 4412				NACA 4415				NACA 4418			
Extrados		Intrados		Extrados		Intrados		Extrados		Intrados	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,25	2,44	1,25	-1,43	1,25	3,07	1,25	-1,79	1,25	3,76	1,25	-2,11
2,5	3,39	2,5	-1,95	2,5	4,17	2,5	-2,48	2,5	5,00	2,5	-2,99
5,0	4,73	5,0	-2,49	5,0	5,74	5,0	-3,27	5,0	6,75	5,0	-4,06
7,5	5,76	7,5	-2,74	7,5	6,91	7,5	-3,71	7,5	8,06	7,5	-4,67
10	6,59	10	-2,86	10	7,84	10	-3,98	10	9,11	10	-5,06
15	7,89	15	-2,88	15	9,27	15	-4,18	15	10,66	15	-5,49
20	8,80	20	-2,74	20	10,25	20	-4,15	20	11,72	20	-5,56
25	9,41	25	-2,50	25	10,92	25	-3,98	25	12,40	25	-5,49
30	9,76	30	-2,26	30	11,25	30	-3,75	30	12,76	30	-5,26
40	9,80	40	-1,80	40	11,25	40	-3,25	40	12,70	40	-4,70
50	9,19	50	-1,40	50	10,53	50	-2,72	50	11,85	50	-4,02
60	8,14	60	-1,00	60	9,30	60	-2,14	60	10,44	60	-3,24
70	6,69	70	-0,65	70	7,63	70	-1,55	70	8,55	70	-2,45
80	4,89	80	-0,39	80	5,55	80	-1,03	80	6,22	80	-1,67
90	2,71	90	-0,22	90	3,08	90	-0,57	90	3,46	90	-0,93
95	1,47	95	-0,16	95	1,67	95	-0,36	95	1,89	95	-0,55
100	(0,13)	100	(-0,13)	100	(0,16)	100	(-0,16)	100	(0,19)	100	(-0,19)
100	100	0	100	100	0	100	100	0

Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 1,58 Pente au (B.A.) : 0,20	Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 2,48 Pente au (B.A.) : 0,20	Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 3,56 Pente au (B.A.) : 0,20
---	---	---

* Valeurs données en pourcentage de la corde.

B.3 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS A CINQ CHIFFRES* :

NACA 23012				NACA 23015				NACA 23018			
Extrados		Intrados		Extrados		Intrados		Extrados		Intrados	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,25	2,67	1,25	-1,23	1,25	3,34	1,25	-1,54	1,25	4,09	1,25	-1,83
2,5	3,61	2,5	-1,71	2,5	4,44	2,5	-2,25	2,5	5,29	2,5	-2,71
5,0	4,91	5,0	-2,26	5,0	5,89	5,0	-3,04	5,0	6,92	5,0	-3,80
7,5	5,80	7,5	-2,61	7,5	6,90	7,5	-3,61	7,5	8,01	7,5	-4,60
10	6,43	10	-2,92	10	7,64	10	-4,09	10	8,83	10	-5,22
15	7,19	15	-3,50	15	8,52	15	-4,84	15	9,86	15	-6,18
20	7,50	20	-3,97	20	8,92	20	-5,41	20	10,36	20	-6,85
25	7,60	25	-4,28	25	9,08	25	-5,78	25	10,56	25	-7,27
30	7,55	30	-4,46	30	9,05	30	-5,96	30	10,55	30	-7,47
40	7,14	40	-4,48	40	8,59	40	-5,92	40	10,04	40	-7,37
50	6,41	50	-4,17	50	7,74	50	-5,50	50	9,05	50	-6,81
60	5,47	60	-3,67	60	6,61	60	-4,81	60	7,75	60	-5,94
70	4,36	70	-3,00	70	5,25	70	-3,91	70	6,18	70	-4,82
80	3,08	80	-2,16	80	3,73	80	-2,83	80	4,40	80	-3,48
90	1,68	90	-1,23	90	2,04	90	-1,59	90	2,39	90	-1,94
95	0,92	95	-0,70	95	1,12	95	-0,90	95	1,32	95	-1,09
100	(0,13)	100	(-0,13)	100	(0,16)	100	(-0,16)	100	(0,19)	100	(-0,19)
100	100	0	100	100	0	100	100	0
Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 1,58 Pente au (B.A.) : 0,305				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 2,48 Pente au (B.A.) : 0,305				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 3,56 Pente au (B.A.) : 0,305			

* Valeurs données en pourcentage de la corde.

B.4 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS LAMINAIRES* :

NACA 66 ₁ -212				NACA 66 ₂ -215			
Extrados		Intrados		Extrados		Intrados	
x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0	0	0
0,424	0,953	0,576	-0,853	0,406	1,168	0,594	-1,068
0,666	1,154	0,834	-1,014	0,646	1,409	0,854	-1,269
1,156	1,462	1,344	-1,248	1,134	1,778	1,366	-1,564
2,395	1,991	2,605	-1,619	2,370	2,417	2,630	-2,045
4,883	2,809	5,117	-2,177	4,855	3,413	5,145	-2,781
7,379	3,459	7,621	-2,611	7,349	4,202	7,651	-3,354
9,878	4,011	10,122	-2,977	9,848	4,872	10,152	-3,838
14,883	4,905	15,117	-3,559	14,854	5,957	15,146	-4,611
19,894	5,596	20,106	-4,004	19,868	6,790	20,132	-5,198
24,908	6,132	25,092	-4,342	24,886	7,437	25,114	-5,647
29,925	6,539	30,075	-4,595	29,906	7,927	30,094	-5,983
34,943	6,833	35,057	-4,773	34,929	8,280	35,071	-6,220
39,962	7,018	40,038	-4,876	39,952	8,501	40,048	-6,359
44,981	7,095	45,019	-4,905	44,976	8,590	45,024	-6,400
50,000	7,068	50,000	-4,862	50,000	8,553	50,000	-6,347
55,019	6,931	54,981	-4,741	55,023	8,378	54,977	-6,188
60,036	6,659	59,964	-4,517	60,045	8,030	59,955	-5,888
65,051	6,169	64,949	-4,109	65,063	7,402	64,937	-5,342
70,061	5,487	69,939	-3,543	70,075	6,547	69,925	-4,603
75,066	4,661	74,934	-2,871	75,081	5,526	74,919	-3,736
80,065	3,739	79,935	-2,147	80,079	4,393	79,921	-2,801
85,057	2,755	84,943	-1,409	85,070	3,202	84,030	-1,856
90,043	1,750	89,957	-0,716	90,052	2,005	89,948	-0,971
95,022	0,789	94,978	-0,157	95,026	0,881	94,974	-0,249
100,000	0	100,000	0	100,000	0	100,000	0
Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 0,952 Pente au (B.A.) : 0,084				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 1,435 Pente au (B.A.) : 0,084			

* Valeurs données en pourcentage de la corde.

ANNEXE C

RAPPELS SUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES - INVERSION DE MATRICES

C.1 POSITION DU PROBLEME :

Considérons le système linéaire suivant de n équations à n inconnues:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3n} \cdot x_n = y_3 \\ a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + \dots + a_{4n} \cdot x_n = y_4 \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = y_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme $A \cdot x = y$:

$$\text{si } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]$$

i : représente le numéro de ligne et j le numéro de colonne.

Une matrice est dite triangulaire si $a_{ij} = 0$ pour $j > i$ ou pour $i > j$. Une matrice bande est une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf sur une bande autour de la diagonale principale. Ces matrices se rencontrent dans la résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies ou dans la méthode des éléments finis.

La résolution du système précédent peut s'effectuer par deux méthodes :

- la méthode directe (dite méthode du pivot) ;
- la méthode itérative ;

La méthode du pivot est commode pour les systèmes denses d'ordre supérieur, ainsi que pour les matrices bandes même d'ordre élevé. La méthode itérative est mieux adaptée aux autres matrices d'ordre élevé et comportant de nombreux éléments nuls.

C.2 METHODE DU PIVOT :

2.1. Méthode de GAUSS-JORDAN

2.1.1. Description de la méthode

C'est la méthode la plus utilisée. Pour la présenter, nous allons prendre l'exemple d'un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

La méthode classique de Cramer qui repose sur les déterminants, donne :

$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ où Δ est le déterminant de la matrice, et Δ_j celui déduit de Δ en y remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne par la colonne second membre.

Pour résoudre le système, cette méthode nécessite n^4 opérations si n est le rang de la matrice.

Dans la méthode du pivot, on choisit successivement chaque ligne comme ligne pivot ; le pivot étant le 1^{er} élément non nul de la ligne.

Ainsi, on divise la ligne n° 1 du système par a_{11} :

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

On annule le 1^{er} terme de chacun des autres lignes : à la 2^{ème} ligne, on retranche la 1^{ère} multipliée par a'_{21} , à la 3^{ème} ligne, on retranche la 1^{ère} multipliée par a'_{31} , à la 4^{ème} ligne, on retranche la 1^{ère} multipliée par a'_{41} .

$$\text{Le système devient : } \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix}$$

a. La 2^{ème} ligne est considérée maintenant comme une ligne pivot, et a'_{22} comme un élément pivot. On répète sur cette 2^{ème} ligne les opérations précédentes, et on obtient après division de cette ligne par a'_{22} :

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y''_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix}$$

On annule les autres termes de la seconde colonne ; c'est à dire : à la 1^{ère} ligne, on retranche la seconde multipliée par a'_{12} , à la 3^{ème} ligne, on retranche la 2^{ème} multipliée par a'_{32} , à la 4^{ème} ligne, on retranche la 2^{ème} multipliée par a'_{42} .

$$\text{On obtient : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & a''_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{pmatrix}$$

b. On considère ensuite la 3^{ème} ligne comme pivot, puis la 4^{ème} ligne ; ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ y_4^{(4)} \end{pmatrix} \text{ soit la solution du système : } \begin{cases} x_1 = y_1^{(4)} \\ x_2 = y_2^{(4)} \\ x_3 = y_3^{(4)} \\ x_4 = y_4^{(4)} \end{cases}$$

D'une manière générale, si on applique cette procédure au système $Ax = y$ où A est une matrice d'ordre n ,

- on remarque qu'à l'issue de la 1^{ère} étape, on obtient la matrice A_1 comportant des 0 et un 1 dans sa 1^{ère} colonne,
- à l'issue de la 2^{ème} étape, on a une matrice A_2 comportant des 0 et des 1 dans ses 2 premières colonnes, etc.
- à l'issue de la k ^{ième} étape, on obtient un système de la forme : $A^{(k)}x = y^{(k)}$ avec $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$ et $y^{(k)} =$ matrice colonne d'éléments $y_i^{(k)}$

Pour les k premiers éléments diagonaux, on a : $a_{ij}^{(k)} = 1$ si $i = j \leq k$

Pour les colonnes 1 à k éléments non diagonaux, on a : $a_{ij}^{(k)} = 0$ si $i \neq j$ et $j \leq k$; $y_i^{(k)}$ étant les composantes du vecteur $y^{(k)}$.

L'étape suivante consiste à prendre $a_{k+1,k+1}^{(k)}$ comme élément pivot.

On divise la $(k+1)$ ième ligne par cet élément, ce qui donne pour $j=k+1$ à n : $a'_{ij} = a_{ij}^{(k)}$ et $y'_{k+1} = y_{k+1}^{(k)}$ si $i = k+1$

$$a'_{k+1,j} = \frac{a_{k+1,j}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}} \quad \text{et} \quad y'_{k+1} = \frac{y_{k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}$$

Pour chaque ligne $i \neq k+1$, la ligne $k+1$ multipliée par $a_{i,k+1}^{(k)}$ est retranchée.

On obtient alors le système $A^{(k+1)}x = y^{(k+1)}$ avec :
$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)} a'_{k+1,j} & (i \neq k+1) \\ y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)} y'_{k+1} \end{cases}$$

RESUME DE LA PROCEDURE :

1. Transformation de la matrice $[A, y]$ en une matrice $[I, y']$: $A^{(0)} = A$ et $\alpha_{i, i+1}^{(0)} = y_i$

Pour k variant de 0 à $n-1$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} i = k+1 \\ j = k+1, \dots, j = n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_{k+1, j}^{(k+1)} = \frac{\alpha_{k+1, j}^{(k)}}{\alpha_{k+1, k+1}^{(k)}}$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 1, \dots, i = n \\ i \neq k+1 \\ j = k+1, \dots, j = n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_{i, j}^{(k+1)} = \alpha_{i, j}^{(k)} - \alpha_{i, k+1}^{(k)} \alpha_{k+1, j}^{(k+1)}$$

2. La solution x_i du système résultant s'écrit alors : $x_i = \alpha_{i, n+1}^{(n)}$; avec $i = 1, 2, \dots, n$

Le nombre d'opérations nécessaires au passage de $[A, y]^{(k)}$ à $[A, y]^{(k+1)}$ est :

$$n. \text{ additions } (= n.a) = n. \text{ multiplications } (= n.m) = (n-1).(n-k+1)$$

$$n. \text{ divisions } (= n.d) = (n-k+1)$$

Le passage de $[A, y]$ à $[A, y]^{(n)}$ nécessite environ $n^3 / 2$ opérations de calculs.

La méthode ainsi exposée, présente un certain nombre de défauts :

- lenteur compte tenu du nombre d'opérations si le rang n de la matrice A est grand,
- difficulté si le pivot est nul puisque la division n'est plus possible (dans ce cas, il faut permuter les colonnes tout en veillant à la cohérence des calculs qui suivent),
- précision si le pivot est faible ($\ll 1$), les erreurs d'arrondi deviennent très importantes et affectent toute la suite des calculs.

2.1.2. Exemple :

$$\text{Soit le système à résoudre : } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

On forme tout d'abord la matrice $[A, y]$:

$K=1$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 11 \end{pmatrix} \quad k=1$$

$K=2$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -6 & 3 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad k=2$$

$K=3$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \quad \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \quad k=3$$

La solution est $x_i = a_{i,n+1}$; d'où : $x^* = (7/2 \quad -5/2 \quad 4/3)$

2.2. Méthode de GAUSS

On diagonalise la matrice A , et on ne fait apparaître les zéros qu'en dessous de la diagonale. La solution x_i du système nécessite 2 étapes :

- Une triangularisation de la matrice A ,
$$\begin{cases} A^{(0)} = A \\ a_{i,n+1}^{(0)} = y_i \\ A^{(n)} = R = \{r_{ij}\} \\ z_i = a_{i,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

Pour k variant de 0 à $n-1$, on a :
$$\left. \begin{matrix} i = k+1 \\ j = k+1, \dots, j = n+1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_{k+1,j}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,j}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}$$

Ainsi, le système décrit par ces $3n$ données peut être résolu par la méthode de triangularisation (méthode de Gauss).

3. Méthodes itératives

Nous allons décrire ces méthodes brièvement sans passer par des calculs ou des démonstrations mathématiques complexes, car cela nous éloignera des objectifs du cours.

3.1. Méthode de JACOBI :

Soit le système suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{cases}$$

On résout le système de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{y_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3)}{a_{22}} \\ x_3 = \frac{y_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)}{a_{33}} \end{cases}$$

On donne aux inconnues les valeurs arbitraires initiales x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

Si ces valeurs sont portées au second membre de la solution précédente, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1 - (a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{y_2 - (a_{21}x_1^0 + a_{23}x_3^0)}{a_{22}} \\ x_3 = \frac{y_3 - (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0)}{a_{33}} \end{cases}$$

Ce nouvel ensemble porté dans le second membre des équations précédentes donne un autre ensemble x_1^1, x_2^1, x_3^1 , et ainsi de suite.

3.2. Méthode de GAUSS-SEIDEL :

On reprend le calcul comme précédemment. Pour le système précédent par exemple, on choisit un ensemble de valeurs x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

On porte x_2^0 et x_3^0 dans la 1^{ère} équation et on obtient : $x_1^1 = \frac{y_1 - (a_{12} \cdot x_2^0 + a_{13} \cdot x_3^0)}{a_{11}}$

C'est cette nouvelle valeur de x_1 , et non pas x_1^0 , qui est portée dans la 2^{ème} équation du système, donnant :

$$x_2^1 = \frac{y_2 - (a_{21} \cdot x_1^1 + a_{23} \cdot x_3^0)}{a_{22}}$$

De même dans la 3^{ème} équation, on porte x_1^1 et x_2^1 , et non x_1^0 et x_2^0 , et on obtient :

$$x_3^1 = \frac{y_3 - (a_{31} \cdot x_1^1 + a_{32} \cdot x_2^1)}{a_{33}}$$

Lorsqu'une inconnue est utilisée, c'est automatiquement la plus récente valeur calculée.

Ceci assure une convergence des calculs bien plus rapide que la méthode de JACOBI.

On arrête les calculs lorsque les valeurs successives de x_j sont suffisamment voisines.

Pour cela, on peut utiliser,

- soit le critère de **Convergence absolue** : $|x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| \leq \varepsilon$
- soit le critère de **Convergence relative** : $\left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right| \leq \varepsilon$

Pour les systèmes où les matrices qui sont de rang élevé, il n'est pas commode de faire le test de convergence sur chaque inconnue x_j .

Dans ce cas, on fait le test soit seulement sur certaines inconnues que l'on choisit, soit les quantités suivantes :

$$\sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| \text{ ou } \left(\sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}|^2 \right)^{1/2} \text{ ou } \sum_{j=1}^n \left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right| \text{ ou } \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right|^2 \right)^{1/2}$$

La convergence du procédé ne dépend pas du choix des valeurs initiales x_j^0 , mais seulement des valeurs des coefficients.

On montre que la convergence est assurée si on a, pour chaque valeur de i (c'est à dire

pour chaque ligne), la relation $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ est vérifiée.

Autrement dit, il y a convergence si chaque élément diagonal est supérieur ou égal, en module, à la somme des modules des autres éléments de sa ligne.

3.3. Facteur de relaxation

Si la convergence existe, sa rapidité dépend du choix de x_j^0 . En effet, plus les valeurs initiales sont proches des valeurs réelles, et plus la convergence est rapide.

L'utilisation d'un facteur de relaxation λ définie par $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda(x_j^{(k)} - x_j^{(0)})$ où $\lambda < 1$ permet d'accélérer la convergence.

λ est appelée "facteur de relaxation" (dans la pratique, il est compris entre 0 et 2).

Pour $\lambda > 2$, le processus diverge.

Pour s'approcher de la valeur recherchée rapidement, on prend $1 < \lambda < 2$ dans un processus itératif déjà convergent et $0 < \lambda < 1$ pour un processus divergent.

Les méthodes itératives jouent un rôle très important dans la résolution numérique de systèmes de grandes tailles et dans les systèmes (ou équations) non linéaires.

4. Inversion des matrices

Selon la méthode de Cramer, une matrice A de rang n n'est inversible que si son déterminant Δ est différent de zéro. Dans ce cas, le produit de A par la matrice inverse A^{-1} donne la matrice unitaire I .

$$A^{-1}A = A.A^{-1} = I \text{ où } AI = A$$

En appliquant la méthode de Cramer sur la matrice A , on peut déterminer A^{-1} .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient en utilisant la méthode de Cramer : $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^{-1}A = A.A^{-1} = I$ que :

L'algorithme de Gauss-Jordan présenté au début de ce cours (méthode du pivot) opère aussi le passage de la matrice $C=[A,y]$ à la matrice $D=[I,X]$ où X est la solution du système linéaire $A.X=y$; Soit $X=A^{-1}.y$.

Après les opérations de l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient :

$$D=A^{-1}.C=A^{-1}.[A,I]=[I,A^{-1}]$$

Cette méthode, de calcul de l'inverse d'une matrice qui est résumée ci-dessous, permet de calculer A^{-1} avec un nombre d'opérations nettement inférieur à celui de la méthode de Cramer.

Transformation $(A, I) \Rightarrow (I, A^{-1})$

Pour $k = 1, \dots, n$, on a :

$$\text{Pour } j = 2n, \dots, k \Rightarrow a_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}$$

$$\text{Pour } \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 2n, \dots, 1 \\ i \neq k \end{array} \right\} \Rightarrow a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} \cdot a_{k,j}$$

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} par la méthode de Jordan. $k=1$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k=2$$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/2 & 1/2 & -7/4 & 1 \end{pmatrix} \quad k=3$$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix} ; \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$$

Finalement, on vérifie que : $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1/2 & -1 \\ 1/3 & -7/6 & 2/3 \end{pmatrix} A = I$

ANNEXE D

GRANDEUR PHYSIQUE ET UNITES DE MESURE

Tableau F.1 Unité et facteurs de conversion :

	Symbole	Pour convertir des	En (unités du SI)	Multiplier par
Accélération	a	$\frac{\text{pi}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$3,048 \times 10^1$
Aire	A, S	pi^2	m^2	$9,290 \times 10^{-2}$
Densité	ρ	$\frac{\text{lbm}}{\text{pi}^3}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$1,602 \times 10$
Énergie	E	BTU $\text{pi} \cdot \text{lb}$	J J	$1,055 \times 10^3$ 1,356
Force	F	lb	N	4,448
Longueur	l	pi po	m m	$3,048 \times 10^{-1}$ $2,540 \times 10^{-2}$
Masse	m	lbm slug	kg kg	$4,536 \times 10^{-1}$ $1,459 \times 10$
Puissance	P	hp $\text{pi} \frac{\text{lb}}{\text{s}}$	W W	$7,457 \times 10^2$ 1,356
Pression	P, p	po Hg (60 °F) $\frac{\text{lb}}{\text{pi}^2}$ (psf) $\frac{\text{lb}}{\text{po}^2}$ (psi)	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$3,377 \times 10^3$ $4,788 \times 10$ $6,895 \times 10^3$
Poids spécifique	γ	$\frac{\text{lb}}{\text{pi}^3}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	$1,571 \times 10^2$

Tableau F.1 (suite)

	Symbole	Pour convertir des	En (unités du SI)	Multiplier par
Température	T	°F	°C	$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$
		°R	°K	$5,556 \times 10^1$
Vitesse	V	$\frac{\text{pi}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3,048 \times 10^1$
		$\frac{\text{mi}}{\text{h}}$ (mph)	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$4,470 \times 10^1$
Viscosité dynamique	μ	$\frac{\text{lbs}}{\text{pi}^2}$	$\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$	$4,788 \times 10$
Viscosité cinématique	ν	$\frac{\text{pi}^2}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$9,290 \times 10^2$
Débit volumique	Q	$\frac{\text{pi}^3}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	$2,832 \times 10^2$
		$\frac{\text{gal}}{\text{min}}$ (gpm)	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	$6,309 \times 10^5$

Tableau F.2 Préfixes des multiples et sous-multiples des unités SI

Préfixe	Symbole	Valeurs
téra	T	10^{12}
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
déca	da	10
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

ANNEXE E

FORMULES UTILISEES EN

AERONAUTIQUE

Unité :

Nom	Définition	Formule - Exemple
Cheval Vapeur	Cette unité de puissance, introduite par James Watt alors qu'il travaillait dans une mine de charbon, correspond au travail que peut fournir un cheval en une minute.	$1 \text{ CV} = 736 \text{ W} = 0,736 \text{ kW}$ (W : Watt, unité SI pour la puissance)
Mille Nautique (NM, Nautical Mile)	Le NM correspond à une minute (un soixantième de degré) d'arc à l'équateur terrestre.	$1 \text{ NM} = 1852 \text{ m}$ $a/ \text{ NM} = \text{ km} \cdot 2 \cdot 10\%$ ex : $150 \text{ km} \cdot 2 \cdot 75 = 7,5 = 82,5 \text{ NM}$ $b/ \text{ km} = \text{ NM} \cdot 2 \cdot 10\%$ ex : $92 \text{ NM} \cdot 2 \cdot 184 = 18 = 166 \text{ km}$
Masse volumique	Rapport de la masse du corps par le volume occupé par celui-ci. La masse volumique de l'air est d'environ 1,204 kilogramme par mètre cube pris à 20° C sous une pression d'une atmosphère	$\rho (\text{rô}) = m : v \text{ en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$: kilogramme par mètre cube
Pression	La pression est la force appliquée à une surface ou répartie sur celle-ci.	$P = F : S$ P : pression en N/m^2 (1 Pa = 1 N/m^2) F : force en Newton S : surface en m^2 La pression est souvent exprimée en bar (1 bar = 10^5 Pa)
Température	La température représente le degré d'agitation des particules	$t/^\circ\text{C} = T \cdot \text{K} - 273,15$ $^\circ\text{C}$: degré Celsius, K : kelvin

Aérodynamique :

Nom	Définition	Formule / Exemple
Résistance de l'air	Forces de frottements	$R = K\rho V^2 S$ R résistance de l'air (Newton) K coefficient qui tient compte de la forme du corps et de son état de surface p masse volumique de l'air (kg.m ⁻³) V vitesse (m.s ⁻¹) S surface alaire (m ²)
Trainée	Résistance à l'avancement	$\vec{R}_x = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x \vec{C}_x$ p masse volumique de l'air (kg m ⁻³) V vitesse de l'avion (ms ⁻¹) S superficie de la voilure (m ²) C _x coefficient sans unité appelée coefficient de trainée
Portance	Composante verticale de la résistance aérodynamique	$\vec{R}_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z \vec{C}_z$ p masse volumique de l'air (kg m ⁻³) V vitesse de l'avion (ms ⁻¹) S superficie de la voilure (m ²) C _z coefficient sans unité appelé coefficient de portance
Finesse	Distance que peut parcourir une aile en fonction de son altitude de départ	Portance : Trainée ou C _z : C _x

Mécanique du vol :

Nom	Définition	Formule / Exemple
Facteur de charge	Rapport du poids apparent sur le poids. Plus le virage est prononcé et plus le facteur de charge augmente. A 45° d'inclinaison, le facteur de charge est égal à 1,4 et la vitesse de décrochage est majorée de 19%. A 60° d'inclinaison le facteur de charge est égal à 2 et la vitesse de décrochage est majorée de 40%	$n = 1 / \cos \text{inclinaison}$ Ex : lors d'un virage à 60° $n = 1 / \cos(60)$ $n = 1 / (1/2) = 2$ d'où $n = 2G$
Charge alaire	La charge alaire est le rapport ou Poids de l'avion / Surface alaire, si la portance est égale au poids de l'avion comme dans le cas du vol horizontal	Portance : Surface alaire ou

		Poids de l'avion (Newton) - Surface alaire (m ²) surface alaire : surface de la projection horizontale du contour des ailes
--	--	--

Navigation :

Nom	Définition - Formule
Route vraie (Rv)	Route vraie mesurée sur la carte par rapport au nord vrai $Rv = Rm + Dm$ $Rv = Cv (\text{cap vrai}) - \text{dérive}$
Route magnétique	Route magnétique = Route vraie - Déclinaison magnétique $Rm = Rv - D$
Temps sans vent	$TSV = \text{distance} \times Fb$ Fb : facteur de base
Temps avec vent	Temps avec vent = distance x Fb ($Fb = 60 / Vs$)
Facteur de base	$Fb = 60 / Vp$
Dérive maxi	Force du vent x Fb
a	angle au vent (angle que fait la route, et non pas le cap, avec le vent)
Vent de travers	Force du vent x Sin a
Vent effectif	Force du vent x Cos a
Cap vrai (Cv)	Cap vrai par rapport au nord vrai ou nord géographique $Rm = \text{Route magnétique} (Rv - D)$
Déclinaison magnétique (D)	Est - Ouest, + - - variation magnétique terrestre
Cap magnétique (Cm)	$Cv - D$

LISTE DES REFERENCES

REFERENCE CHAPITRE I :

- [1.1] Science & Vie Junior, n°161 de Février 2003 : « *L'avion Géant qui vole au ras des flots* »
- [1.2] <http://www.mit.jyu.fi/mweber/consommation/>: Informations sur la consommation en fonction de la vitesse, 27 Septembre 2007.

REFERENCE CHAPITRE II :

- [2.1] LACHNITT, J., *L'aviation d'aujourd'hui*, Paris, Librairie Larousse, 1968, 430 p.
- [2.2] KAFYEKE, F., *Multi-Block Euler Method for the Complete Challenger Configuration*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Montréal, 1993, 245 p.
- [2.3] PARASCHVOIU, I., *Aérodynamique Subsonique*, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1998, 572 p.
- [2.4] http://linpc3.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents_published/doc5/doc5.html : consulté le 25 Avril 2007 à 19:10:46
- [2.5] ABBOTT, IRA H., Von DONHOFF, Albert E. *Teory of Wing Sections*, New York, Dover Publications Inc., 1^{er} édition 1959.

REFERENCE CHAPITRE III :

- [3.1] PARASCHVOIU, I., *Aérodynamique Subsonique*, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1998, 572 p.
- [3.2] http://linpc3.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents_published/doc5/node130.html: consulté le 25 Avril 2007 à 19:10:46

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] PARASCHVOIU, I., *Aérodynamique Subsonique*, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1998, 572 p.
- [2] Th. FAURE., *Aérodynamique Appliquée*, Master Science de l'ingénieur 1^{er} années, Parcours Mécanique et Ingénierie des Systèmes – Module d'option MS 154, Université de Pierre et Marie Curie – Paris 6, Ecole Normale Supérieure de Cachan
- [3] REBUFFET, P., *Aérodynamique expérimentale*, vol. 1, Paris, Dunod, 1969.
- [4] BONNET, A. et LUNEAU, J., *Aérodynamique, Théories de la dynamique des fluides*, Toulouse, Editions CEPADUES, 1989, 544 p.

RYHMING, I. L., *Dynamique des fluides*, Presse polytechniques romandes, 1985, 400 p.
- [6] MARTENSEN, E. *Die Berechnung der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art*, Mitteilungen Aus Der Max-Planck-Institut Für Strömungsforsch, 1959.
- [7] MASSON, C., PARASCHVOIU, I. *Description et comparaison de cinq méthodes de panneaux en deux dimensions*, Rapport technique EPM/RT-90/17, Montréal, Ecole Polytechnique de Montréal, 1990.
- [8] Alexandre de SIEVERS., « *Étude en soufflerie de l'effet de sol* », 1965, « *Détermination de l'effet de sol sur les caractéristiques de l'avion A 320* », 1988.
- [9] ANDERSON, J. D. Jr, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1984, 536 p.
- [10] KIRCHHOFF, Robert H., *Potential Flows*
- [11] ABRAMOWITZ, A. et STEGUN, I., *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover Publications Inc., 1972.
- [12] Science&Vie Junior, n°161 de Février 2003 : « *L'avion Géant qui vole au ras des flots* »
- [13] KATZ, J. et PLOTKIN, A., *Low-speed Aerodynamics, From Wing Theory to Panel methods*, New York, McGraw-Hill, 1991, 632 p.
- [14] LACHNITT, J., *L'aviation d'aujourd'hui*, Paris, Librairie Larousse, 1968, 430 p.

- [15] FÉDIAEVSKI, C., VOÏTKOUNSKI, I et FADÉEV, Y., *Mécanique des fluides*, Moscou, Edition Mir, 1974, 600 p.
- [16] ROY, J.-F., *Fluides parfaits incompressibles*, Edition Marketing, Ellipses, 1988.
- [17] ABBOTT, IRA H., Von DONHOFF, Albert E., et STIVERS, Louis S. *Summary of Airfoil Data*, NACA Rept. No. 824, 1945.
- [18] ABBOTT, A. C. et VON DOENHOFF, A. E., *Théory of Wing Sections*, New York, Dover Publications Inc., 1959, 693 p.

WEBOGRAPHIE :

Nous avons tirés librement des informations des sites web suivants :

- [4.1] http://foxxaero.homestead.com/indrad_043.html: Principale source d'informations sur le projet Pélican, 27 Août 2007.
- [1.2] <http://membres.lycos.fr/dracken/Ekranoplan/Ekranoplan.html>: Le site de référence sur les ekranoplanes, 26 Janvier 2007.
- [1.3] <http://www.mit.jyu.fi/mweber/consommation/>: Informations sur la consommation en fonction de la vitesse, 27 Septembre 2007.
- [1.4] <http://www.se-technology.com/wig>: Autre site en anglais mais très intéressant car il a quasiment tout ce qui concerne l'effet de sol, 30 Août 2007.
- [1.5] <http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89kranoplane>: La page dédiée aux ekranoplanes sur Wikipédia, 28 janvier 2007.
- [1.6] <http://tuxthepenguin.free.fr/>:
- 19 Mars 2007 : version « définitive » de ce document présentée à l'oral a un jury de TPE
 - 23 Avril 2007 : ajout des mentions sur le copyleft et des notes sur les auteurs en vue d'une diffusion plus large du document.
 - 07 Mai 2007 : première diffusion publique de ce document sur la liste PilotList. Le site n'est pas encore pleinement opérationnel.
- [1.7] <http://www.mit.jyu.fi/mweber/consommation/>: Informations sur la consommation en fonction de la vitesse, 27 Septembre 2007.
- [1.8] http://linpc3.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents_published/doc5/doc5.html : consulté le 25 Avril 2007 à 19:10:46
- [1.9] http://linpc3.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents_published/doc5/node130.html: consulté le 25 Avril 2007 à 19:10:46

