

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des sciences de l'ingénieur**

Département d'Aéronautique

# **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Aéronautique

**CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE**

**LIMITE DANS UN ÉCOULEMENT**

**SUPERSONIQUE COMPRESSIBLE DANS UNE**

**TUYÈRE AXISYMETRIQUE DONNANT À LA**

**SORTIE UN ÉCOULEMENT UNIFORME ET**

**PARALLELE**

par

**BECHERI Attia**

Devant le jury composé de

M <sup>r</sup> B.BENAOUDA-ZOUAOUI	M-C	( U.Blida)	Président
M <sup>r</sup> T.REZOUG	M-C	(U.Blida)	Examineur
M <sup>r</sup> S.BOUKRAA	Prof	(U.Blida)	Examineur
M <sup>r</sup> R.HAOUI	M-C	(USTHB)	Rapporteur

Blida, janvier 2005

## RESUME

La détermination de l'épaisseur de la couche limite ainsi que les paramètres de l'écoulement réel à la sortie des tuyères est le but essentiel de cette étude. Pour cela nous avons élaboré un programme permettant le calcul de l'épaisseur de la couche limite, l'épaisseur de déplacement et l'interaction entre la couche limite et l'écoulement extérieur. Il est à noter que le profil de la tuyère supersonique est donné. Pour aboutir à la détermination de l'écoulement réel, une méthode par itérations successives s'avère nécessaire. Notre programme converge avec précision après quelques itérations. On a aussi tenu compte de l'effet des paramètres génératrices sur l'écoulement.

### ملخص

إن معرفة سمك الطبقة المنتهية و مقادير الانسياب الحقيقي عند نهاية الأبواق هو الهدف الرئيسي من الدراسة؛ قمنا بإعداد برنامج عددي يسمح لنا بحساب سمك الطبقة المنتهية، سمكا الانتقال و التفاعل بين الطبقة المنتهية و ذاله الانسياب الخارجي. نذكر أن منحنى شكل البوق فوق الصوتي معروف. من اجل الوصول إلى حساب الانسياب الحقيقي، طريقة التكرار المتتابعة متطلبه بالضرورة. بالاعتبار تأثير المقادير المولدة على الانسياب. ذ البرنامج يتقارب بدقة بعد بضع متتاليات مع الاخذاه

## REMERCIEMENTS

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur **Haoui Rabah**, Maître de conférences à l'USTHB , pour les très précieux conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail dont il a assuré la direction.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **B.BENAOUDA-ZOUAOUI** Maître de conférences à l'Université de Blida , qui m'a fait l'honneur, malgré ses multiples responsabilités, d'assurer la présidence du jury.

J'exprime tous mes remerciements aux messieurs: **T.REZOUG** Maître de conférences à l'Université de Blida, **S.BOUKRAA** Professeur à l'Université de Blida et Président du Conseil Scientifique du Département d'Aéronautique, qui ont bien accepté, malgré leurs nombreuses occupations, de participer au jury.

Je remercie Monsieur **S.BERGHEUL** , Chef de Département d'Aéronautique, ainsi que Monsieur **M.BOUNEDER**, Chef de Département Adjoint de la Poste Graduation et de la Recherche Scientifique pour leur soutien moral et leur encouragements.

Je remercie en fin tout le personnel du Département d'Aéronautique de Blida, enseignants, techniciens, pour l'aide amical.

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1.	Courbe donnant la viscosité de l'air en fonction de la température suivant la loi de SUTHERLAND	16
Figure 1.2.	Tuyère de Laval	19
Figure 2.1.	Couche limite sur une paroi et distances caractéristiques associées	25
Figure 2.2.	Evolution des couches limites dans un convergent	27
Figure 2.3.	Evolution des couches limites dans un divergent	29
Figure 2.4.	Schématisation de l'effet de déplacement de la couche limite	31
Figure 2.5.	Représentation de l'épaisseur de quantité de mouvement	32
Figure 2.6.	Evolution de la couche limite thermique	33
Figure 2.7.	Domaine de calcul de la couche limite	36
Figure 2.8.	Profil des vitesses dans une couche limite	40
Figure 2.9.	Distribution linéaire des vitesses	41
Figure 2.10.	Exemples de distribution de vitesses et de températures pour $p_r > 1$ et $p_r < 1$	43
Figure 2.11.	Décollement de la couche limite laminaire d'une paroi	48
Figure 3.1.	Schématisation de l'effet de déplacement de la couche	49
Figure 3.2.	Représentation de l'effet de couche limite	51
Figure 3.3.	Processus itératif pour le calcul du couplage couche limite fluide parfait	52
Figure 3.4.	Profil engraisé	53
Figure 3.5.	Interaction entre la couche limite et le fluide parfait Domaine de calcul de la perturbation $\Delta u_e$	54
Figure 3.6.	Processus itératif de couplage en mode inverse	55
Figure 3.7.	Prolongement de l'écoulement extérieur dans la couche limite	56
Figure 3.8.	Schématisation de l'effet de la couche limite par vitesse de transpiration à la paroi	59
Figure 4.1.	Domaine physique	61
Figure 4.2.	Domaine mathématique	61

Figure 4.3.	Domaine de calcul discrétisé-----	63
Figure 4.4.	Définition d'une nouvelle grille de calcul-----	63
Figure 4.5.	Segment élémentaire de la paroi de la tuyère-----	65
Figure 4.6.	Domaine de calcul -----	67
Figure 4.7.	Discrétisation de la zone de détente-----	69
Figure 5.1.	Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de----- l'écoulement pour différentes températures génératrices	78
Figure 5.2.	Variation de l'épaisseur de déplacement dans la direction de----- l'écoulement pour différentes températures génératrices	78
Figure 5.3.	Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de----- l'écoulement pour différentes pressions génératrices	79
Figure 5.4.	Variation de l'épaisseur de déplacement dans la direction de----- l'écoulement pour différentes pressions génératrices	79
Figure 5.5.	Variation du rapport $P/P_0$ dans la direction de l'écoulement----- pendant l'interaction	80
Figure 5.6.	Variation du rapport $T/T_0$ dans la direction de l'écoulement----- pendant l'interaction	80
Figure 5.7.	Variation du nombre de Mach dans la direction de l'écoulement----- pendant l'interaction	81
Figure 5.8.	Variation de la vitesse de l'écoulement extérieur dans----- la direction de l'écoulement pendant l'interaction	81
Figure 5.9.	Variation de l'épaisseur de la couche limite dans----- la direction de l'écoulement pendant l'interaction	82
Figure 5.10.	Variation de l'épaisseur de déplacement dans----- la direction de l'écoulement pendant l'interaction	82
Figure 5.11.	Variation de la masse volumique dans la direction de l'écoulement----- pendant l'interaction	83
Figure 5.12.	Variation de H dans la direction de l'écoulement-----	83
Figure 5.13.	Profil des vitesses dans la couche limite-----	84
Figure 5.14.	Profil de la tuyère-----	84
Tableau 5.1 .	Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur ----- déplacement Le long de la paroi de la tuyère pour $P_0=100$ bars et $T_0=300$ K	86

Tableau 5.2 . Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de	87
déplacement Le long de la paroi de la tuyère pour $P_0=100$ bars	
et $T_0=500$ K	
Tableau 5.3. Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de	88
Déplacement Le long de la paroi de la tuyère pour $P_0=100$ bars	
et $T_0=1000$ K	
Tableau 5.4. Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de	89
déplacement Le long de la paroi de la tuyère pour $T_0=1000$ K	
et $P_0=10$ bars	
Tableau 5.5. Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de	90
déplacement Le long de la paroi de la tuyère pour $T_0=1000$ K	
et $P_0=50$ bars	
Tableau 5.6. Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de	91
déplacement Le long de la paroi de la tuyère pour $T_0=1000$ K	
et $P_0=100$ bars	
Tableau 5.7. Variation du nombre de Mach pendant l'interaction	92
Tableau 5.8 . Variation de la pression pendant l'interaction	93
Tableau 5.9 . Variation de la température pendant l'interaction	94
Tableau 5.10. Variation de la viscosité dynamique pendant l'interaction	95
Tableau 5.11. Variation de la masse volumique pendant l'interaction	96
Tableau 5.12. Variation de la vitesse de l'écoulement extérieur pendant	97
l'interaction	
Tableau 5.13. Variation de l'épaisseur de la couche limite pendant	98
l'interaction	
Tableau 5.14. Variation de l'épaisseur de déplacement pendant l'interaction	99

**APPENDICE A**  
**LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS**

A	Section
$C_p$	Chaleur spécifique à pression constante
$C_v$	Chaleur spécifique à volume constant
$C_f$	Coefficient de frottement
H	Facteur de forme
$H_{inc}$	Facteur de forme incompressible
L	Longueur de la tuyère
M	Nombre de Mach
P	Pression statique
$P_0$	Pression génératrice
$P_r$	Nombre de Prandtl
K,G et Q	Constantes
$R_s$	Rapports des sections
R	Constante des gaz parfait
T	Température
$T_p$	Température de la paroi
$T_f$	Température de frottement du fluide avec la paroi
$T_0$	Température génératrice
$T_e$	Température de l'écoulement extérieur
$U_e$	Vitesse de l'écoulement extérieur
$\overline{U_e}$	Vitesse de l'écoulement extérieur prolongé
a	Vitesse locale du son
d	Diamètre
e	Energie interne
h	enthalpie
$q_m$	Débit massique
t	temps

$u, v, w$	Composantes de la vitesse
$\rho$	Masse volumique
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifique
$\theta$	Angle de déviation du vecteur vitesse par rapport à l'axe
$\delta$	Epaisseur de la couche limite
$\delta_1$	Epaisseur de déplacement de la couche limite
$\delta_2$	Epaisseur de quantité de mouvement
$\delta_3$	Epaisseur d'énergie
$\lambda$	Conductibilité
$\nu$	Viscosité cinématique
$\mu$	Viscosité dynamique
$\tau$	Contrainte de cisaillement interne
$\tau_p$	Contrainte de cisaillement à la paroi
$\delta_t$	Epaisseur de la couche limite thermique
$\overline{\rho_e}$	Masse volumique de l'écoulement extérieur prolongé
$\Delta t$	Accroissement du temps

## LES INDICES

*	état critique
s	sortie
0	totale ou génératrice
e	condition à la frontière extérieur de la couche limite
$\infty$	en amont ou à l'infini
p	condition à la paroi
c	condition au col de la tuyère
i	état initial
f	état final

# TABLE DES MATIERES

RESUME -----	1
REMERCIEMENTS-----	2
TABLE DES MATIERES-----	3
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX -----	6
INTRODUCTION-----	9
1. GENERALITES	
1.1. Introduction -----	11
1.2. Propriétés des liquides et des gaz -----	11
1.3. Ecoulements des fluides -----	12
1.3.1 Classification des écoulements-----	12
1.3.2 Etude de la transition laminaire-turbulente -----	12
1.3.3 Fluides visqueux et non visqueux-----	13
1.3.4. Viscosité dynamique des fluides -----	14
1.3.5. Viscosité cinématique -----	15
1.4. Rappel des propriétés de l'air -----	17
1.5. Les équations de base -----	17
1.6. La vitesse du son -----	18
1.7. Etude thermique d'une tuyère mono dimensionnelle -----	18
Convergente-divergente isentropique	
1.7.1. Equation de l'énergie-----	19
1.7.2. Equation de conservation de mass -----	20
1.7.3. Equation de la célérité du son -----	20
1.7.4. Calcul de la température statique T -----	20
1.7.5. Calcul de la pression statique P -----	20
1.7.6. Calcul de la densité $\rho$ -----	20
1.7.7. Calcul du rapport de section en fonction du nombre de Mach -----	20
1.7.8. Calcul des conditions critiques -----	21
1.8. Débit massique-----	22
1.9. Les diverses possibilités d'écoulement au Col -----	23

## 2. ETUDE DE LA COUCHE LIMITE

2.1. Introduction	24
2.2. Concept de la couche limite	25
2.3. Nombre de Reynolds	26
2.4. Cas d'un convergent	27
2.5. Cas d'un divergent	28
2.6. Grandeurs caractéristiques dynamiques de la couche limite	29
2.6.1. L'épaisseur de déplacement ou de refoulement de la couche limite	29
2.6.2. L'épaisseur de perte de quantité de mouvement	29
2.6.3. L'épaisseur de l'énergie	29
2.6.4. Coefficient de frottement	30
2.6.5. Contrainte de cisaillement à la paroi	30
2.6.6. Facteur de forme	30
2.7. Signification physique des épaisseurs caractéristiques	31
2.8. les équations de la couche limite	32
2.8.1. Principe de l'analyse	32
2.9. Equation de la couche limite en compressible	33
2.9.1. Les équations locales de la couche limite (équations de Prandtl)	34
2.9.2. Domaine de calcul de la couche limite	36
2.9.3. Les équations globales de la couche limite	37
2.10. Représentation approchées du profil des vitesses en écoulement incompressible	40
2.10.1. Distribution linéaire	41
2.10.2. Etude d'un cas particulier solution de Pohlhausen	41
2.11. Profil des vitesses en écoulement compressible	42
2.12. Transfert de chaleur dans une couche limite compressible	42
2.13. Solution de l'équation de Van- Karman	44
2.14. Décollement d'une couche limite	47
2.14.1. Décollement de la couche limite laminaire	47

## 3. INTERACTION ENTRE LA COUCHE LIMITE ET L'ÉCOULEMENT EXTERIEUR

3.1. Introduction	49
3.2. Notion de déplacement de l'écoulement extérieur	49
3.3. Notion sur le couplage fluide parfait couche limite visqueux	50
3.3.1. Notion élémentaire de couplage	50
3.4. Couplage entre l'écoulement extérieur et la couche limite	52
3.5. Méthodes inverses	53
3.6. Simulation du problème	54

3.7. Raccord entre l'écoulement extérieur et la couche limite -----	55
3.8. Calcul de la vitesse $v_\delta$ -----	57
<b>4. PROGRAMMATION NUMERIQUE</b>	
4.1. Introduction ---	60
4.2. Schéma explicite- -----	62
4.2.1 Critère de stabilité -----	62
4.3. Principe de la méthode de différence finies -----	62
4.4. Calcul de l'écoulement extérieur-----	64
4.5. Généralisation -----	65
4.6. Formulation du problème discrétisé-----	66
4.7. Discrétisation des équation-----	67
4.7.1. Méthode des différences finies -----	67
4.7.2. Résolution des équations discrétisée -----	68
4.7.3. Conditions aux limite -----	68
4.7.4. Caractère des équations-conditions aux limite----	68
4.8. Discrétisation-----	69
4.8.1. Calcul des nouveaux paramètres géométriques-----	69
4.8.2. Calcul des nouveaux paramètres thermodynamiques-----	70
4.9. Organigramme du programme-----	71
<b>5. RESULTATS ET COMMENTAIRES</b>	
5.1. Introduction-----	75
5.1.1 données thermodynamiques et géométriques-----	75
5.2. Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement-----	75
dans la direction de l'écoulement pour différentes températures génératrices	
5.3. Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement-----	76
dans la direction de l'écoulement pour différentes pressions génératrices.	
5.4. Variations des paramètres thermodynamiques -----	76
5.5. Variation de $\delta$ et $\delta_1$ le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction- -----	77
CONCLUSION-----	85
ANNEXE-----	86
APPENDICE	
REFERENCES	

## INTRODUCTION

Le problème général posé en aérodynamique est celui de la détermination des caractéristiques de l'écoulement d'un fluide, généralement de l'air, autour d'un corps de forme donnée ou le long d'une paroi de profil quelconque.

Les tuyères constituent un des éléments les plus importants dans les turbomachines, les turboréacteurs et surtout dans les banc d'essai des souffleries à choc. Diverses méthodes sont utilisées pour le calcul des profils des tuyères et les caractéristiques de l'écoulement. A savoir :

- Méthode analytique
- Méthode expérimentale
- Méthode numérique

Les tuyères supersoniques dont le but essentiel est d'accélérer les gaz jusqu'à des vitesses supersoniques, doivent être bien calculées de point de vue profil et écoulement. Le maximum de poussée pour une tuyère supersonique est obtenue lorsque l'écoulement à la section de sortie est uniforme et parallèle. Par conséquent, depuis plusieurs années, la conception de la portion divergente d'une tuyère supersonique de propulsion reçoit une attention particulière et fait l'objet d'intenses et nombreuses recherches afin d'atteindre des poussées de plus en plus importantes.

Dans l'étude du mouvement des fluides incompressibles on peut généralement négliger les effets thermiques et traiter les problèmes en n'utilisant que les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement. Par contre dans le cas des fluides compressibles, il faut tenir compte des variations de température et introduire une nouvelle équation.

En réalité l'écoulement à l'intérieur de la tuyère est visqueux. La vitesse de l'écoulement du fluide au niveau de la paroi est nulle. Ce phénomène définit la condition de non glissement.

Le calcul de la couche limite montre que l'épaisseur formée au niveau de la paroi est toujours faible par rapport au diamètre de la tuyère.

Le but de cette étude est de déterminer les grandeurs caractéristiques de la couche limite et leurs variations dans le sens de l'écoulement pour différentes températures et pressions génératrices. L'interaction entre la couche limite et l'écoulement extérieur fait l'objet essentiel de ce travail.

Ce présent mémoire est présenté en cinq chapitres comme suit :

- Le premier chapitre est un exposé général sur la théorie consacré à l'étude de l'approche unidimensionnelle de l'écoulement dans les tuyères.
- Le deuxième chapitre est un exposé général sur la théorie de la couche limite laminaire compressible.
- Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'interaction entre la couche limite et l'écoulement extérieur.
- Le quatrième chapitre sera consacré aux calculs numériques des grandeurs caractéristiques de la couche limite et son interaction avec l'écoulement extérieur.
- Dans le dernier chapitre, on présentera les principaux résultats relatifs au chapitre précédent.

# CHAPITRE 1

## GENERALITES

### 1.1.Introduction

La dynamique des fluides est la branche de la physique qui traite de l'écoulement d'un fluide et des effets mécaniques, thermiques et autres.

La dynamique des fluides englobe tous les phénomènes d'écoulement qui se présentent, par exemple, quotidiennement dans notre environnement immédiat. Dans l'atmosphère et les océans de la terre, dans l'espace, dans de très nombreuses machines comme les turbines.

Dans le cadre de la dynamique des fluides les phénomènes d'écoulement des liquides et des gaz sont en général traités du point de vue macroscopique, en utilisant les lois de la mécanique de Newton. Le fait qu'un fluide soit composé de molécules est négligé en premier lieu et les mouvements des molécules individuelles ne sont pas pris en compte. Dans le cadre de cette étude. Le milieu d'écoulement est donc considéré comme continu.

### 1.2. Propriétés des liquides et des gaz

La différence entre le comportement physique des liquides et des gaz se manifeste principalement dans le phénomène d'expansion.

Les liquides ont une compressibilité très faible. Donc, les forces qui s'opposent à un changement de volume sont très puissantes. Par contre la compressibilité des gaz est très élevée. En d'autres termes, les liquides peuvent être considérés comme hautement incompressibles et les gaz comme hautement compressibles.

Il existe une classe importante d'écoulement pour lesquels, dans une grande partie du champ de vitesse, les forces tangentielles sont pratiquement négligeables par rapport aux forces de pression. Dans ces régions il est possible de considérer l'écoulement comme non visqueux. Ceci permet d'introduire dans la théorie la notion de fluide idéal sans frottement.

### 1.3. Ecoulement des fluides

L'écoulement d'un fluide peut être permanent ou non permanent, uniforme ou non uniforme ; laminaire ou turbulent ; à une dimension, à deux dimensions ou à trois dimensions ; et rotationnel ou irrotationnel .

#### 1.3.1. Classification des écoulements .

Divers régimes d'écoulements peuvent être distingués suivant la valeur du nombre de Mach et du nombre de Reynolds. Outre les distinctions classiques entre écoulement compressible et incompressible, laminaire ou turbulent, ils permettent aussi d'établir la frontière entre milieu continu et milieu raréfié.

L'écoulement étant caractérisé par une échelle de longueur  $D$  ( qui peut être la longueur  $L$  caractéristique de l'obstacle ou l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  ), le fluide est assimilé à un milieu continu si le libre parcours moyen  $l$  est très petit devant  $D$  .

La classification fait intervenir le rapport des échelles de longueur caractéristiques  $L$ ,  $l$  et  $\delta$ , on a en effet :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{R_L^{1/2}} \quad (1.1)$$

$$\frac{l}{L} = \frac{M}{R_L} \quad (1.2)$$

et donc :

$$\frac{\delta}{l} = \frac{R_L^{1/2}}{M} \quad (1.3)$$

#### 1.3.2 .Etude de la transition laminaire-turbulente

L'écoulement dans la couche limite passe de l'état laminaire à l'état turbulent par l'intermédiaire d'une zone de transition, assimilée en général à un point (ou à une ligne) par des raisons de simplification, et dont on caractérise la position par un nombre de Reynolds correspondant:  $R_x$ ,  $R_\delta$  ou  $R_{\delta 1}$  .

La transition peut résulter, soit de l'action des perturbations de grandeur finie, étrangères à la couche limite, soit d'une instabilité de la couche limite laminaire vis-à-vis de perturbations infiniment petites susceptibles de s'amplifier avec le temps. La position et le développement de cette zone dépendent de nombreux facteurs géométriques ou

dynamiques et son étude constitue l'un des problèmes majeurs de la recherche en mécanique des fluides.

Quand on observe le développement de l'écoulement le long de toute forme profilée, on distingue successivement les trois domaines suivants dont l'importance relative dépend de la stabilité de l'écoulement :

Dans le premier l'écoulement est laminaire et permanent, et correspond à la couche limite laminaire. Ce dernier s'étend approximativement jusqu'à :  $R_x=10^5$  ( $R_\delta= 1600$  ou  $R_{\delta 1}= 550$ ) .

Le deuxième constitue la zone de transition dans laquelle l'écoulement n'est plus permanent. Dans sa partie initiale le mouvement est laminaire oscillatoire. Puis la structure de l'écoulement devient de plus en plus complexe pour aboutir à la turbulence établie. Ce domaine se développe dans l'intervalle :  $10^5 < R_x < 3.10^6$  soit ( $550 < R_{\delta 1} < 3000$ ).

Le troisième est le siège d'un écoulement turbulent établi et correspond à la couche limite turbulente. C'est à l'origine de ce domaine qu'on situe habituellement le point de transition. Elle correspond à des valeurs de  $R_x$  comprises entre  $10^5$  et  $3.10^6$  Soit :  $R_{\delta 1}$ , compris entre 550 et 3000.

### 1.3.3 .Fluides visqueux et non visqueux

L'étude du mouvement des fluides se fait souvent par la théorie des fluides parfaits ou non visqueux. Cette théorie suppose essentiellement que les forces de surface ou forces de contact, qui existent à l'intérieur du fluide ou à l'interface solide-fluide sont perpendiculaires à l'élément de surface considéré. La contrainte correspondante, c'est-à-dire la force par unité de surface, s'appelle pression statique. Cette même force existe lorsque le fluide est en repos. Elle est utilisée en thermodynamique ou en statique des fluides.

La théorie des fluides parfaits rend possible l'existence des surfaces de discontinuité de vitesses. Ces surfaces peuvent se rencontrer à l'intérieur même du fluide et plus souvent le long de l'interface solide-fluide.

La théorie des fluides visqueux repose sur l'hypothèse de milieux continus et déformables. Cette hypothèse est justifiée par l'existence de forces intermoléculaires, non seulement à l'intérieur d'un même fluide, mais également entre deux fluides différents et aussi entre un fluide et un solide.

En particulier, au voisinage d'une paroi solide, on aboutit à la notion d'adhérence du fluide à la paroi. Cette condition dite aussi de non-glissement signifie que le long de l'interface entre un fluide et une paroi imperméable, les composantes normale et tangentielle de la vitesse du fluide par rapport à la paroi sont nulles. Il s'agit là d'une différence essentielle entre un fluide parfait et un fluide visqueux.

#### 1.3.4. Viscosité dynamique des fluides

La viscosité est propre à tous les fluides réels et se manifeste dans le mouvement sous forme de frottement interne. Pratiquement, les fluides naturels sont constitués par des molécules présentant quelque adhérence entre elles, ce qui tend à gêner leurs mouvements relatifs, c'est ce qui constitue la viscosité.

Les effets visqueux entraînent une perte de poussée en générale faible par rapport au cas idéal sans couche limite.

La viscosité est une fonction croissante de la température, pour laquelle on a souvent utilisé une loi approche en puissance :

$$\mu = T^\alpha \quad (1.4)$$

Où  $\alpha$  prend selon les auteurs des valeurs différentes (souvent  $\alpha = 0.76$ ).

Une loi plus appropriée est la loi de SUTHERLAND, son expression jusqu'à des température de l'ordre de 3000 K est donnée par la relation suivante, figure(1.1) :

$$\mu = 1.458 \frac{T^{3/2}}{110.4+T} 10^{-6} \quad (1.5)$$

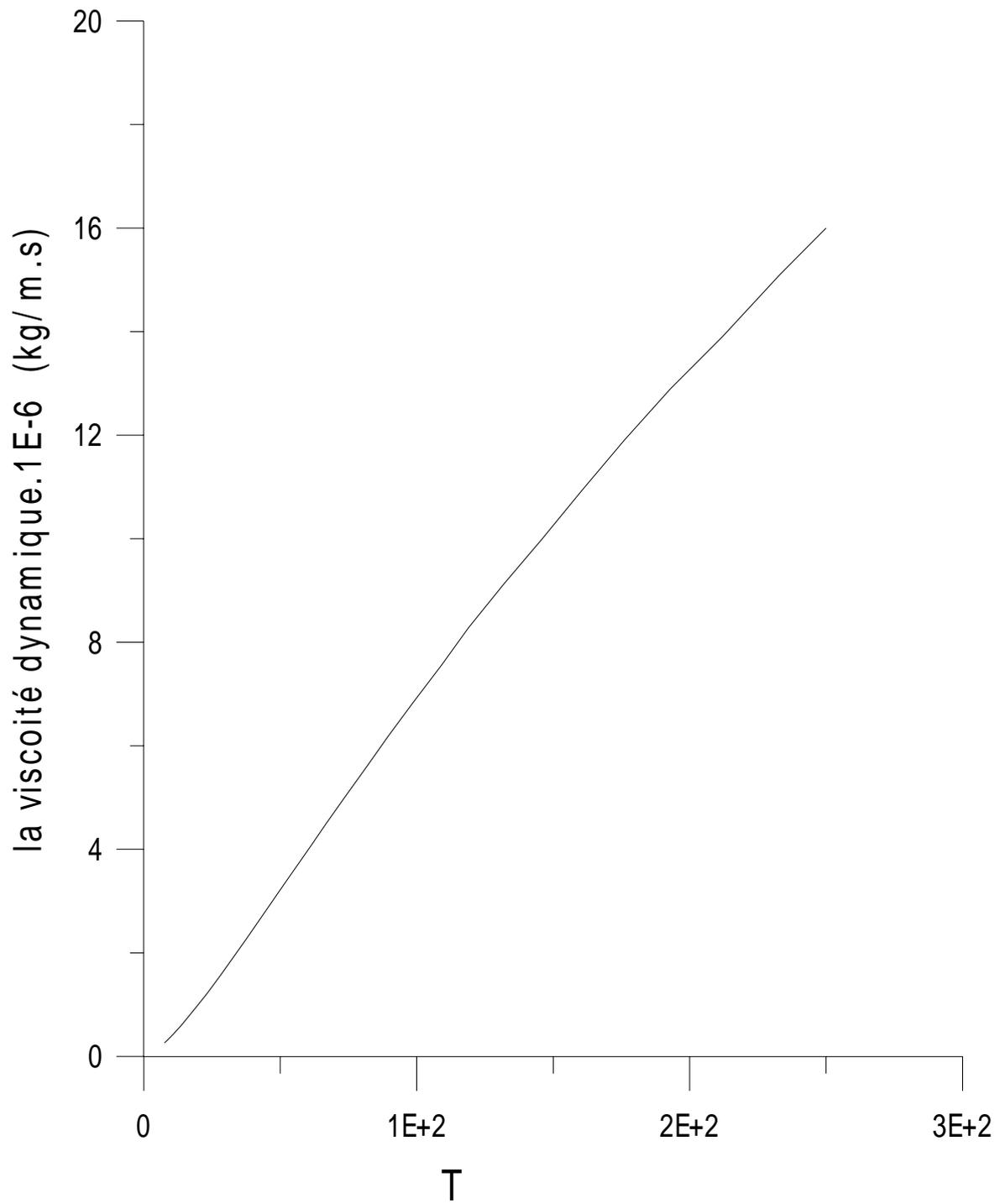
Cette relation influe beaucoup sur les résultats du calcul de la couche limite laminaire.

Remarquons que la viscosité des gaz augmente avec la température. Au contraire, pour les liquides, la viscosité diminue quand la température augmente.

#### 1.3.5. Viscosité cinématique

En dynamique des fluides, il s'introduit en général dans les calculs la quantité, rapport de la viscosité dynamique à la masse volumique du fluide, est appelée viscosité cinématique.

D'une manière générale la viscosité absolue  $\mu$  des liquides est beaucoup plus grande que celle des gaz, mais inversement leur viscosité cinématique  $\nu$  est souvent inférieure.



Figure(1.1) :Variation de la viscosité dynamique du fluide en fonction de la température suivant la loi de SUTHERLAND.

#### 1.4. Rappel des propriétés de l'air

En aérodynamique classique, l'air est considéré comme un gaz parfait. Par définition, il suit la première et la deuxième loi de Joule : son énergie interne et son enthalpie ne dépendent que de la température.

$$h=e+\frac{P}{\rho} \quad (1.6)$$

e : énergie interne      h : l'enthalpie par unité de masse

Or, h et e ne sont fonction que de la température.

#### 1.5. Les équations de base

L'état d'écoulement d'un fluide est donnée par le vecteur vitesse  $V$ , la densité  $\rho$ , la pression  $P$  et la température  $T$ . le vecteur vitesse à les composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un repère en général orthogonal et curviligne. Pourvu que les propriétés internes, à savoir  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $C_v$  et  $C_p$  soient connues, on dispose des équations suivantes pour déterminer les six variables dépendantes inconnues  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $P$ ,  $\rho$  et  $T$  comme fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

- L'équation de continuité qui exige la conservation de la masse de la particule de fluide
- L'équation de la quantité de mouvement qui traduit la loi de Newton appliquée à des particules de fluide et qui est exprimée sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(MV)=\sum F \quad (1.7)$$

En appliquant l'équation (1.7) à un même fluide idéal, on obtient les équations d'Euler.

- L'équation de l'énergie qui exige que l'énergie ne puisse pas être créée ou détruite, exprime la conservation de l'énergie de la particule de fluide.
- L'équation d'état thermodynamique qui donne une relation entre les variables d'état. Dans le cas d'un gaz, ces variables peuvent être  $P$ ,  $\rho$  et  $T$  qui ne sont pas indépendantes. Elles sont liées par l'équation :

$$P=P(\rho, T) \quad (1.8)$$

### 1.6. La vitesse du son

La vitesse du son correspond à la vitesse de propagation d'une perturbation de pression dans un fluide compressible.

Dans un fluide hautement incompressible, par exemple un liquide comme l'eau, une variation relative très faible de la densité est accompagnée d'une variation relative très forte de la pression. Par conséquent, la vitesse du son est grande. Par contre, dans un fluide hautement compressible, par exemple un gaz comme l'air, les variations relatives de la densité et de la pression ont le même ordre de grandeur par conséquent, la vitesse du son est beaucoup plus petite.

La relation entre la pression et la densité dans une onde acoustique et également isentropique.

La vitesse du son est définie par la relation suivante :

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.9)$$

Le degré de compressibilité en un point est donc caractérisé par le rapport de la vitesse  $V$  à la célérité du son au point considéré :

$$M = \frac{V}{a} \quad (1.10)$$

$M$  : étant le nombre de Mach de l'écoulement.

### 1.7. Etude théorique mono dimensionnelle d'une tuyère convergente divergente isentropique

La tuyère est formée d'une partie convergente ( l'aire de la section diminue dans le sens de l'écoulement,  $dA < 0$ ), raccordée, par un col dont l'aire de la section droite  $A_e = A_s$  ( $dA=0$ ), à une partie divergente ( l'aire de la section augmente dans le sens de l'écoulement,  $dA > 0$ ).

La tuyère de Laval, utilisée dans les turbines à vapeur, à été la première tuyère convergente divergente mise en service figure (1.2).

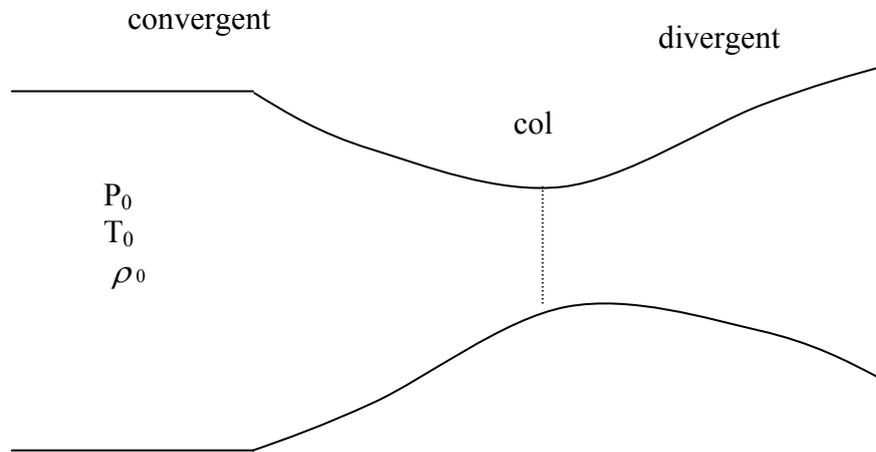


Figure 1.2 : Tuyère de Laval.

Nous admettrons que la section d'entrée est d'aire assez grande pour que l'on puisse supposer qu'il existe encore, dans cette section, les conditions de réservoir  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ , à la section de sortie, d'aire  $A_S$ , la pression est désignée par  $P_S$ .

On considère les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est adiabatique, on néglige les échanges de chaleur à travers les parois durant la détente.
- Les gaz obéissent à la loi des gaz parfaits :

$$P = r \rho T \quad (1.11)$$

- L'écoulement est sans frottements
- L'écoulement est permanent

les équations fondamentales sont :

#### 1.7.1. Equation de l'énergie

$$T_0 = T + \frac{U^2}{2C_p} \quad (1.12)$$

$T_0$ : température totale

### 1.7.2 .Equation de conservation de masse

$$\rho.uA = cte \quad (1.13)$$

### 1.7.3. Equation de la célérité du son

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad \text{ou bien} \quad a^2 = \gamma RT \quad (1.14)$$

### 1.7.4.Calcul de la température statique T

On définit le nombre de Mach comme étant le rapport de la vitesse du fluide à la célérité du son :

$$M = \frac{V}{a}$$

En combinant(1.10) et (1. 12) , on aura :

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (1.15)$$

### 1.7.5. Calcul de la pression statique P

En tenant compte que l'écoulement est isentropique et que les gaz pris en considération vérifient la loi des gaz parfait on obtient :

$$PV^\gamma = cte \quad (1.16)$$

Et on utilisant les équations( 1.11) et (1.16), on aura :

$$P = P_0 \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1.17)$$

### 1.7.6.Calcul de la densité $\rho$

En utilisant le même procédé que pour T et P, on obtient :

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1.18)$$

### 1.7.7.C du rapport de section en fonction du nombre de Mach

En appliquant (1.13) entre deux sections quelconques x et y le long de la tuyère, on en déduit que :

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{\rho_x}{\rho_y} \cdot \frac{u_x}{u_y} \quad (1.19)$$

A partir de (1.19),(1.18) et (1.14) on aura :

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{M_x}{M_y} \left( \frac{T_y}{T_x} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_y}{\rho_x} \right)$$

En combinant les différentes équations, on obtient :

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{M_y}{M_x} \left[ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_y^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (1.20)$$

### 1.7.8. Calcul des conditions critiques

On entend par conditions critiques, le cas où la vitesse du fluide est égale à la célérité du son et est notée par  $V^*$

$$V^* = a = (\gamma \cdot RT^*)^{1/2} \quad (1.21)$$

$$M^* = 1$$

L'équation (1.15) donne :

$$T^* = T_0 \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{-1} \quad (1.22)$$

L'équation (1.17) donne :

$$P^* = P_0 \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (1.23)$$

L'équation (1.18) donne :

$$\rho^* = \rho_0 \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{1}{1-\gamma}} \quad (1.24)$$

Pour  $\gamma = 1.4$  on aura :

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0.833$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 0.528$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0.634$$

L'équation(1.20) s'écrit aussi :

$$\frac{A^*}{A} = M \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (1.25)$$

pour un écoulement isentropique.

L'équation (1.25) implique que :

1.  $M = f\left(\frac{A^*}{A}\right)$  ; le nombre de Mach à une section dépend du rapport de cette section à la section du col
2. La section A doit être supérieur ou égale à  $A^*$  .
3. le rapport  $\frac{A^*}{A} > 1$  donne deux solutions de M pour  $\frac{A^*}{A}$  donné, une valeur subsonique et l'autre supersonique.
4. Pour des valeurs de M subsoniques, si M augmente, le rapport  $\frac{A^*}{A}$  diminue, la tuyère converge jusqu'à  $M = 1$ ,  $\frac{A^*}{A} = 1$
5. Pour des valeurs de M supersoniques, si M augmente, le rapport  $\frac{A^*}{A}$  augmente, la tuyère diverge.

### 1.8. Débit massique

Le débit de la tuyère amorcée se calcul au col (  $M=1$ ) et s'écrit en théorie mono dimensionnelle :

$$q_m = \rho^* . V^* . A^*$$

Si l'on introduit au lieu de  $\rho^*$  et  $V^*$  leurs valeurs en fonction de  $\rho_0$  ,  $V_0$  de l'état initial, et si on remplace  $\rho_0$  par  $\frac{\gamma P_0}{a_0^2}$  on trouve aisément dans le cas du gaz calorifiquement parfait :

$$q_m = \frac{f(\gamma)}{\sqrt{C_p T_0}} P_0 A^* \quad (1.26)$$

Ou  $f(\gamma)$  est une fonction de  $\gamma$ .

$$f(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma+1)}} \quad (1.27)$$

$$q_m = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma+1)}} \frac{1}{\sqrt{C_p T_0}} P_0 A^* \quad (1.28)$$

Pour un écoulement isentropique les valeurs  $P_0$ ,  $T_0$  et  $\rho_0$  restent constantes durant l'écoulement.

### 1.9. Les diverses possibilités d'écoulement au col

Si, à l'amont du col, la vitesse est subsonique, l'alternative suivante se présente :

- Ou la vitesse passe au col par un maximum, inférieur à la célérité du son : l'écoulement est encore subsonique à l'aval du col ou la vitesse diminue ; c'est, en particulier, toujours le cas d'un fluide à masse volumique constante pour lequel la célérité du son est infinie ( $M=0$ ) ;
- Ou la vitesse atteint au col la célérité du son : à partir du col, ou bien la vitesse diminue comme précédemment, l'écoulement étant subsonique dans le divergent (cas frontière de l'écoulement précédent), ou bien la vitesse continue à croître dans le divergent, l'écoulement y étant supersonique.

Si, à l'amont du col, la vitesse est supersonique, la vitesse diminue dans le convergent et l'alternative suivante se présente :

- Ou la vitesse passe au col par un minimum, supérieur à la célérité du son : l'écoulement est encore supersonique à l'aval du col, la vitesse augmente dans le divergent ;
- Ou la vitesse descend jusqu'à la célérité du son, atteinte au col : à partir de celui-ci, ou bien la vitesse augmente comme précédemment, l'écoulement étant supersonique dans le divergent (cas frontière de l'écoulement précédent), ou bien la vitesse continue à diminuer dans le divergent, l'écoulement y étant subsonique.

L'intérêt de cette analyse est de bien nous montrer que, de toute manière, dans un écoulement continu, le passage du subsonique au supersonique, et vice-versa, ne peut se faire qu'au col, bien qu'il n'y ait pas obligation de ce changement de régime au col.

## **CHAPITRE 2**

### **ETUDE DE LA COUCHE LIMITE**

#### 2.1.Introduction

L'aérodynamique en fluide visqueux. S'attache spécialement à l'étude des effets de la viscosité et de la conductibilité thermique lorsque le fluide est en mouvement relatif par rapport à un obstacle. Ce mouvement est déterminé par l'équilibre des forces en présence : Forces d'inertie, de pression et de viscosité. Les forces visqueuses, de la même façon que celles de pression, sont des forces de surface qui agissent à l'intérieur du fluide, mais également entre des milieux de nature différente ; elles agissent en particulier le long de la surface de contact entre le fluide et le solide.

Les effets de la viscosité sont confinés dans une région d'épaisseur faible devant la corde du profil ; cette zone est appelée la couche limite. En aval du profil, les couches limites se développant à l'extrados et à l'intrados se fondent pour former le sillage dans lequel il importe également de prendre en compte les effets visqueux.

L'aérodynamique en fluide parfait et l'aérodynamique en fluide visqueux ne sont que deux aspects d'une même théorie, dont le but et notamment le calcul de l'écoulement autour d'un profil d'aile.

## 2.2. Concept de la couche limite

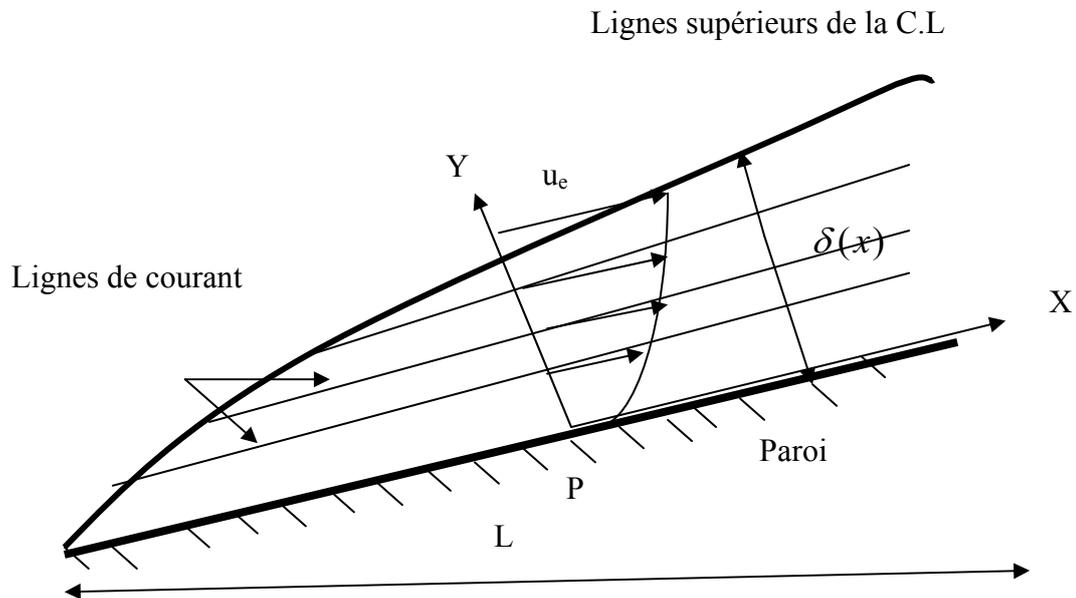


Figure 2.1 :Couche limite sur une paroi et distances caractéristiques associées.

Quand un écoulement frotte sur une paroi , il se forme une couche de fluide ralenti au voisinage de cette paroi, qu'on appelle couche limite et de laquelle dépendent de nombreuses propriétés de l'écoulement ( frottement, transferts thermiques et décollement éventuel de l'écoulement ).

Dans la couche limite la vitesse varie très rapidement d'une valeur nulle au contact de la paroi à la vitesse libre de l'écoulement. Dans ce domaine les frottements internes du fluide sont importantes .

Par contre dans l'écoulement extérieur , les gradients de vitesse étant très faibles, les forces de frottement sont négligeables et le fluide peut être considéré comme parfait .Cet écoulement extérieur est désigné par écoulement potentiel.

Donc l'écoulement d'un fluide parfait est régi par les équations d'Euler qui admettant très souvent des solutions analytiques.

Dans l'écoulement extérieur , la viscosité ne s'annule pas, car c'est une propriété du fluide mais les variations de la vitesse étant très faibles.

L'écoulement dans la couche limite peut se développer de façon laminaire ou turbulente.

Un écoulement laminaire est caractérisé par des trajectoires de particules de fluide stables et régulières produisant des couches de fluide contiguës qui glissent les unes sur les autres et ne se mélangent pas. Par contre, un écoulement turbulent est instationnaire et irrégulier.

Le passage du régime laminaire au régime turbulent, appelé transition s'effectue souvent par un phénomène d'instabilité qui peut prendre différents aspects suivant la nature de l'écoulement.

L'étude du développement de la couche limite a pour objet la détermination en tout point de certaines grandeurs physiques fondamentales, ainsi que leur évolution spectrale et temporelle.

La variation de pression est négligeable lors de la traversée de la couche limite, par suite de sa faible épaisseur et l'on peut dire que :

La pression sur la paroi est la même qu'à la frontière extérieure de la couche limite. On appelle cette valeur commune de la pression, pression locale au point p de la paroi.

L'épaisseur de la couche limite est la distance  $\delta$  de la paroi où la vitesse  $u$  est telle que  $u=0.99u_e$  avec  $u_e$  : la vitesse de l'écoulement potentiel.

On peut aussi définir l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite comme l'épaisseur d'une zone où les forces de frottement s'exerçant sur une particule sont de l'ordre de sa force d'inertie.

La zone d'influence des effets de viscosité augmente avec l'abscisse  $x$ .

### 2.3. Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est le quotient entre les forces d'inertie et les forces de viscosité.

Si  $Re$  est très petit, les forces de viscosité sont très grandes par rapport aux forces d'inertie qui sont négligeables. Les écoulements correspondant sont dits écoulements rampants.

Si  $Re$  est très grand, les forces d'inertie sont très grandes devant les forces de viscosité. On peut alors supposer le fluide parfait.

$Re$  est donné par la relation suivante :

$$R_e = \frac{u \cdot L}{\nu} \quad (2.1)$$

Avec :

$u$  : la vitesse de l'écoulement

$L$  : la longueur caractéristique

$\nu$  : la viscosité cinématique

Dans la plus part des applications aéronautiques, le nombre de Reynolds est suffisamment élevé pour que les effets visqueux restent confinés dans des zones dont l'épaisseur est faible comparée à une dimension caractéristique du dispositif : diamètre de la tuyère ou du fuselage, corde d'un profil d'aile ou d'un aubage de turbomachine, hauteur prise d'air, etc....

#### 2.4.Cas d'un convergent

Dans un convergent, et d'après le théorème d'Hugoniot :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma.M^2} \frac{dp}{p} \quad (2.2)$$

Le gradient de pression est négatif, car la vitesse de l'écoulement augmente à cause de la diminution de la section suivant la loi :

$$\frac{ds}{s} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (2.3)$$

Donc les forces de pression sont dirigées en sens inverse des forces de la viscosité induites par la paroi et favorisent donc l'écoulement. On constate que l'épaisseur de la couche limite diminue. Cette diminution est due à l'augmentation du gradient de vitesse.

A la sortie du convergent le profil des vitesses devient uniforme dans la plus grande partie de la section .Le convergent est donc un organe qui peut être utilisé à homogénéiser les vitesses dans une conduite. Cette particularité est utilisée systématiquement dans les souffleries aérodynamiques, dont la chambre de mesure est toujours précédé d'un convergent.

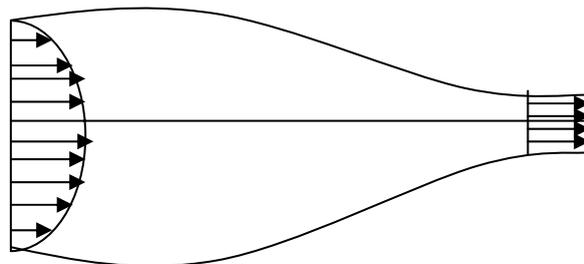


Figure 2.2 :Evolution des couches limites dans un convergent.

### 2.5.Cas d'un divergent

Si l'écoulement est retardé (cas d'un divergent) le gradient de pression est défavorable et les forces de pression sont dirigées, comme les forces de viscosité, en sens inverse de l'écoulement.

Dans le divergent et particulièrement dans le cas d'un écoulement supersonique, le gradient de vitesse est positif, ce qui défavorise l'augmentation de la couche limite.

Dans les écoulements le nombre de Reynolds est proportionnel au nombre de Mach, et d'après la relation :

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{R_e}} \frac{5}{\sqrt{R_{eL}}} \quad \text{pour une plaque plane} \quad \delta \ll L \quad (2.4)$$

Cette relation montre donc que la notion de la couche limite s'applique lorsque le nombre de Reynolds est très grand.

Si le gradient de pression n'est pas trop important on observe le phénomène inverse de Celui déjà décrit pour un convergent : l'épaisseur de la couche limite augmente et la Cission à la paroi diminue.

Pour les nombres de Reynolds élevés, l'épaisseur est donc plus petite par rapport à la longueur caractéristique de l'obstacle. Cette observation sert de base à la description des écoulements à nombre de Reynolds élevé et on introduit alors l'approximation de couche limite. Celle-ci est conçue de la manière suivante : l'écoulement dit extérieur est d'abord calculé selon l'hypothèse d'un fluide idéal.

Dans ce raisonnement on peut considérer qu'il existe sur la surface de l'obstacle une couche limite d'épaisseur nulle. Au travers de cette couche la vitesse de l'écoulement change de manière discontinue pour atteindre la valeur prescrite sur la paroi de l'obstacle, à savoir, la composante normale de la vitesse égale à zéro. C'est la seule condition exigée pour un écoulement externe.

Après avoir calculé l'écoulement extérieur, on aborde le problème dit intérieur. Cela veut dire l'écoulement dans la couche limite avec l'approximation que celle-ci soit mince. Les équations de base peuvent en conséquence être simplifiées.

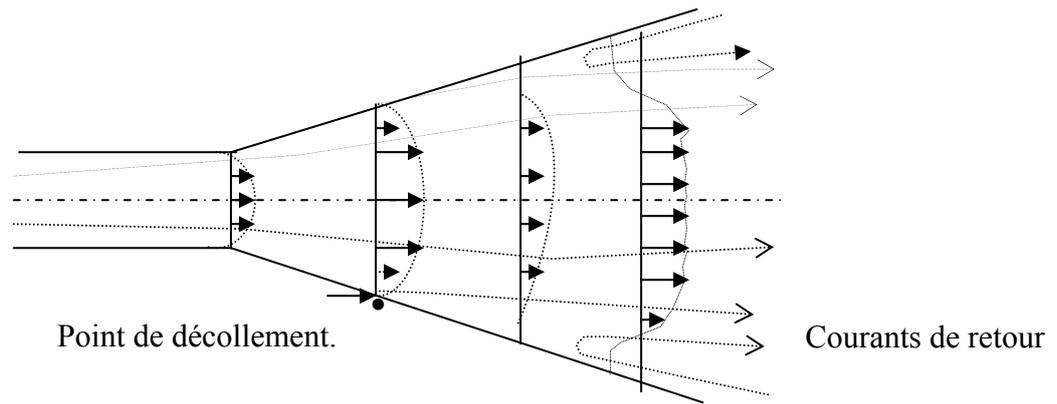


Figure 2.3 : Evolution des couches limites dans un divergent.

## 2.6. Grandeurs caractéristiques dynamiques de la couche limite

Les définitions données ci-dessous sont générales. Elles sont valables aussi bien en écoulement compressible qu'en écoulement incompressible.

### 2.6.1.L'épaisseur de déplacement (ou de refoulement) $\delta_1$ de la couche limite

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy \quad (2.5)$$

$\delta$  : l'épaisseur caractéristique de la couche limite

$u_e$  : la vitesse de l'écoulement extérieur

$\rho_e$  : la masse volumique à l'extérieur de la couche limite

### 2.6.2.L'épaisseur de perte de quantité de mouvement

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (2.6)$$

### 2.6.3.L'épaisseur d'énergie.

$$\delta_3 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) dy \quad (2.7)$$

### 2.6.4.L'épaisseur d'enthalpie

$$\delta_h = \int_0^{\delta} \frac{\rho \cdot u}{\rho_e u_e} \left( \frac{h_i}{h_{ie}} - 1 \right) dy \quad (2.8)$$

ou  $h_{ie}$  est l'enthalpie d'arrêt de l'écoulement extérieur.

### 2.6.5.Coefficient de frottement

On appelle coefficient de frottement pariétal, la contrainte rendu sans dimension par la pression dynamique.

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_e u_e^2} \quad (2.9)$$

### 2.6.6.La Contrainte de cisaillement à la paroi

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.10)$$

La contrainte tangentielle à la paroi est proportionnelle à la viscosité et à la vitesse de débit ; elle est inversement proportionnelle au diamètre de la tuyère.

Il est important de remarquer que, comme chute de pression linéique, la contrainte  $\tau_p$  est indépendante de la masse volumique du fluide. En écoulement laminaire, seuls interviennent, dans le frottement et dans la chute de pression, les forces de viscosité ; les forces d'inertie ne jouent aucun rôle.

### 2.6.7.Facteur de forme

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.11)$$

Il est lié à la loi de distribution de vitesses dans la couche limite.

En écoulement incompressible le facteur de forme ne dépend effectivement que de la forme du profil des vitesses, et les épaisseurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont respectivement notées  $\delta_{1i}$  et  $\delta_{2i}$ .

En fluide compressible, la variation de la masse volumique dans l'épaisseur de la couche limite modifie les valeurs de  $\frac{\delta_1}{\delta}$ ,  $\frac{\delta_2}{\delta}$  et du facteur de forme H dont la valeur varie de ce fait avec le nombre de Mach. La diminution de la masse volumique dans les parties bases de la couche limite conduit à une augmentation de l'épaisseur de déplacement. Une réduction du coefficient de frottement est par contre généralement observée.

## 2.7. Signification physique des épaisseurs caractéristiques

Le débit-masse de couche limite suivant la direction longitudinale:

$$q_m = \int_0^{\delta} \rho u \, dy \quad (2.12)$$

Imaginons maintenant que la couche limite n'existe pas et qu'à sa place ait lieu un écoulement de fluide parfait dont la vitesse  $u_e$  et la masse volumique  $\rho_e$ .

Le débit masse serait:

$$Q = \int_0^{\delta} \rho_e u_e \, dy \quad (2.13)$$

Donc la présence de la couche limite induit une perte de débit - masse :

$$Q - q_m = \int_0^{\delta} (\rho_e u_e - \rho u) \, dy$$

$$Q - q_m = \rho_e u_e \delta_1 \quad (2.14)$$

L'épaisseur de déplacement est donc la hauteur dont il faudrait déplacer en chaque point la paroi pour maintenir le débit inchangé en fluide parfait.

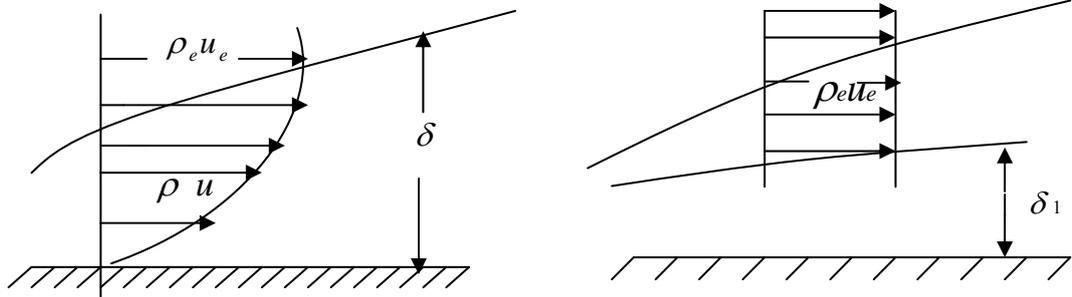


Figure 2.4 : Schématisation de l'effet de déplacement de la couche limite.

### ▪ L'épaisseur de perte de quantité de mouvement

Dans l'épaisseur de la couche limite, le débit de quantité de mouvement, par unité d'envergure est :

$$m = \int_0^{\delta} \rho \cdot u^2 \, dy \quad (2.15)$$

Supposons qu'à la place de l'écoulement de la couche limite, il y ait un écoulement à vitesse  $u_e$  et de même débit  $q_m$  que celui de la couche limite. Le débit de quantité de mouvement est :

$$M = u_e \cdot q_m = u_e \int_0^{\delta} \rho \cdot u \cdot dy = \int_0^{\delta} \rho \cdot u \cdot u_e \cdot dy \quad (2.16)$$

La perte de quantité de mouvement est donc reliée à l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$M - m = \rho_e u_e^2 \delta_2 \quad (2.17)$$

Pour maintenir le débit de quantité de mouvement, il faudrait déplacer en chaque point la surface de déplacement de la hauteur  $\delta_2$ .

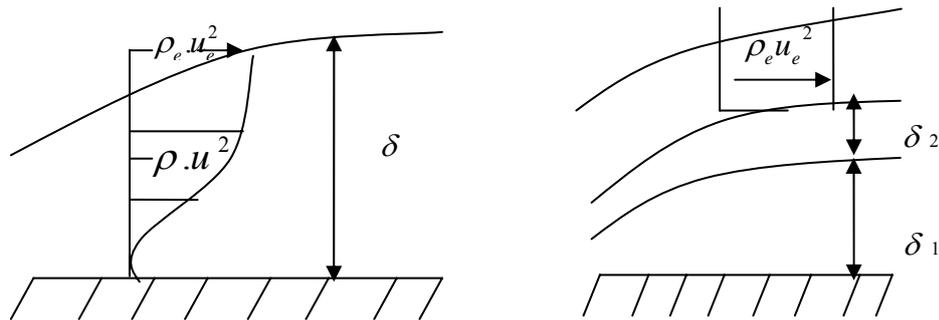


Figure 2.5 : Représentation de l'épaisseur de quantité de mouvement.

On vérifie en effet que :

$$\int_0^{\delta} \rho \cdot u^2 \cdot dy = \int_{\delta_1 + \delta_2}^{\delta} \rho_e u_e^2 \cdot dy \quad (2.18)$$

L'épaisseur de perte de quantité de mouvement  $\delta_2$  représente le déplacement que devrait subir chaque point de la paroi pour qu'un écoulement fictif à vitesse constante  $u_e$  Entre  $y = \delta_2$  et l'infini donne la même quantité de mouvement que l'écoulement réel entre  $y = 0$  et l'infini.

## 2.8. Les équations de la couche limite

### 2.8.1. Principe de l'analyse

La complexité des équations de Navier-Stokes et l'impossibilité, hormis dans des cas particuliers, de trouver des solutions simples nous conduit à rechercher des solutions approchées.

En aérodynamique en fluide visqueux, un paramètre essentiel est le nombre de Reynolds. L'analyse est effectuée en supposant qu'il est très grand et même qu'il tend vers

l'infini. Notons que certaines études sont menées en supposant que le nombre de Reynolds tend vers zéro. Ces dernières n'ont pratiquement pas d'applications en aérodynamique et ne seront donc pas exposées.

### 2.9. Equations de la couche limite en compressible

Les écoulements compressibles sont caractérisés par l'existence d'échange de chaleur à l'intérieur du fluide et éventuellement entre le fluide et les parois qui sont à son contact. Dès que le nombre de Mach n'est plus faible, il convient aussi de tenir compte des variations des propriétés du fluide, telles que la masse volumique  $\rho$ , le coefficient de viscosité  $\mu$  ou le coefficient de conductibilité  $\lambda$ .

Dans un écoulement compressible,  $M$  peut varier d'un point à l'autre et que cette variation dépend non seulement de la variation de la vitesse mais aussi de la célérité du son, laquelle est régie par l'état thermodynamique du gaz.

Lorsque les conditions d'écoulement incompressible ne sont plus remplies, ce qui se produit dans l'air si le nombre de Mach augmente ou si les écarts de température imposés sont significatifs, il est nécessaire de faire appel à l'équation de l'énergie pour calculer la température. Dans cette équation, le coefficient de diffusivité thermique joue un rôle analogue à celui de la viscosité cinématique dans l'équation du mouvement. De la même façon que les variations importantes de vitesse sont confinées dans une couche limite d'épaisseur  $\delta$  donnée par :

$$\delta = \frac{L}{R_l^{1/2}} \quad \text{avec :} \quad R_l = \frac{u_\infty L}{\nu}$$

Les variations importantes de température se produisent dans une couche limite thermique figure( 2.6 ) d'épaisseur  $\delta_t$ .

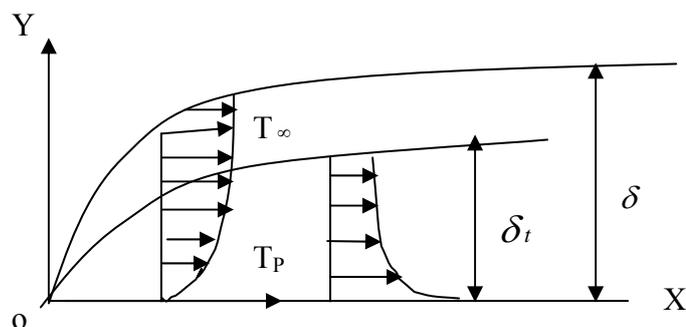


Figure 2.6 : Evolution de la couche limite thermique.

Il y a formation d'une couche limite thermique s'il existe un gradient de température entre le solide et le fluide extérieur.

$P_r = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda}$  représente un nombre adimensionnel dit nombre de Prandtl du fluide étudié et joue un rôle important dans un écoulement visqueux ou il faut tenir compte du transfert de chaleur.

Dans le cas de l'air, le nombre  $P_r$  est voisin de 1. Les couches limites dynamiques et thermiques ont donc des épaisseurs du même ordre de grandeur.

### 2.9.1 .Les équations locales de la couche limite (équations de Prandtl)

Pour étudier le comportement d'un fluide compressible dans la couche limite, on admet les hypothèses suivantes :

- Fluide compressible ( $\rho \neq \text{constante}$ )
- Fluide visqueux ( $\mu \neq 0$ )
- Ecoulement permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )
- Ecoulement bidimensionnel (2-D)
- Les forces à distance, telles que l'effet de la pesanteur, et les forces extérieures sont absentes
- Le gaz est thermiquement parfait. cependant, la variation ou l'augmentation de la température ne permet pas la dissociation des molécules.
- Les gaz est calorifiquement parfait, ce qui donne que  $C_p$  et  $\gamma$  restent constantes durant la détente du gaz et ne dépendent pas de la température.
- l'écoulement est irrotationnel. Cette hypothèse est vérifiée tant que l'entropie est invariable.
- l'écoulement est entièrement isentropique. Cette propriété est expliquée par l'absence de dissipation causée par la naissance des ondes de choc.
- Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) = 0 \quad (2.19)$$

u : composante axiale de la vitesse

v : composante radiale de la vitesse

- Equation de conservation de quantité de mouvement

$$\rho.u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho.v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

L'hypothèse de la couche limite conduit toujours à une dérivée transversale nulle de la pression. Par conséquent la variation de pression dans la direction axial est imposée par l'écoulement non visqueux à l'extérieur de la couche limite.

La pression est une fonction donnée de x, reliée à la vitesse extérieur par :

$$\frac{dp}{dx} = - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx}$$

Et le champ des vitesses satisfait les conditions aux limites :

$$u = u_e \quad (\text{à la frontière extérieure})$$

$$u = v = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{paroi imperméable})$$

- Equation de l' énergie

$$\rho.u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho.v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.22)$$

- Equation d'état

$$P = \rho.R.T \quad (2.23)$$

On a donc un système d'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables dépendantes u et v.

Le problème qui se pose consiste à déterminer comment le profil de vitesse dans la couche limite ( la solution interne) va se rapprocher de la vitesse à l'extérieur de la couche limite (solution externe).

D'après l'équation d'état , les masses volumiques varient le long d'une normale à la paroi comme l'inverse des températures puisque la pression est constante suivant y.

Si la paroi est très froide, la masse volumique peut être supérieure à sa valeur extérieure dans une grande partie de la couche limite et l'épaisseur de déplacement peut être alors négative.

Les équations de Navier-Stokes se simplifient suivant les équations de Prandtl si le nombre de Reynolds est grand et si l'épaisseur de couche limite est petite devant le rayon de courbure de la paroi.

Les équations simplifiées par les hypothèses de couche limite sont appelées équations de Prandtl.

### 2.9.2. Domaine de calcul de la couche limite

Dans quelques cas particuliers, les équations de couche limite possèdent des solutions analytiques mais, en général, la solution est obtenue à l'aide de méthodes numériques.

En, particulier, le sens de propagation des perturbations nécessite la donnée de conditions initiales puisque la solution en un point dépend de la solution en amont. Le même raisonnement montre qu'il n'y a pas de conditions à imposer le long d'une frontière aval : le domaine de calcul est donc ouvert de ce côté.

En pratique, on cherche à calculer la couche limite dans un domaine tel que celui représenté figure ( 2.7 ) : il est limité par les lignes DA , AB et BC. Au delà de la frontière BC, l'écoulement est calculable par la théorie du fluide parfait.

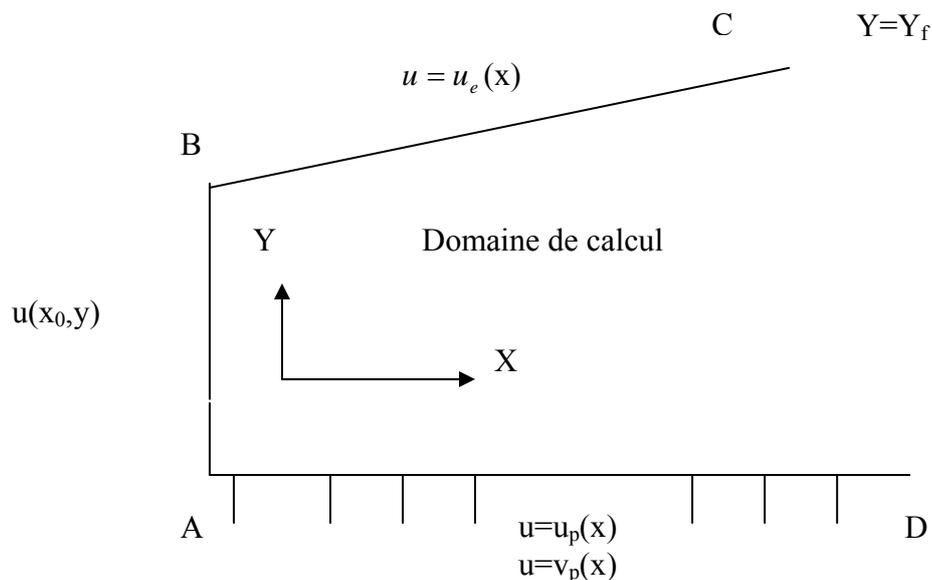


Figure 2.7 : Domaine de calcul de la couche limite.

Le problème consiste à déterminer les fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  compte tenu de conditions aux limites et initiales convenablement choisies.

Ce calcul est effectué en supposant connu la répartition de la pression  $P(x)$ . Celle-ci est liée à la vitesse de l'écoulement extérieur.

La frontière AB est une normale à la paroi suivant laquelle les conditions initiales doivent être imposées. Ces conditions sont formées par la donnée de la distribution  $u(y)$  et il s'agit là d'un problème non trivial.

La frontière AD ( $y = 0$ ) est la paroi le long de laquelle les distributions de vitesse  $u$  et  $v$  sont imposées. Dans le cas d'une paroi imperméable et immobile, on a :

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0$$

La frontière BC doit en principe être rejetée à l'infini. En pratique, elle est à une distance finie, mais suffisamment grande, de la paroi. Une estimation de cette distance peut être obtenue.

Le long de la frontière BC, aucune condition sur la vitesse verticale n'est à imposer ; seule la condition sur la vitesse longitudinale est prescrite :

$$u(x, y_f) = u_e(x)$$

La ligne AB est choisie comme perpendiculaire à la paroi. De cette façon, seul le profil  $u(x_0, y)$  est imposé.

### 2.9.3. Les équations globales de la couche limite

On appelle équations globales de la couche limite la forme intégrée des équations ( 2.19 ), ( 2.20 ) et ( 2.22 ), l'intégration étant effectuée par rapport à  $y$  entre la paroi et la frontière extérieure de la couche limite. Ces équations établissent les bilans globaux de débit-masse, de quantité de mouvement, d'énergie, et elles permettent de cerner les paramètres essentielles qui régissent par exemple l'évolution des forces de frottement pariétales.

Les équations globales, en particulier, l'équation intégrale de quantité de mouvement ( équation de Von- Karman ), sont largement utilisées dans les méthodes d'approximation de calcul de couche limite, aussi bien laminaire que turbulente /11/.

▪ Equation globale de continuité

$$\frac{\partial \rho.u}{\partial x} + \frac{\partial \rho.v}{\partial y} = 0 \quad (2.24)$$

sa forme intégrée est :

$$\int_0^{\delta} \left( \frac{\partial \rho.u}{\partial x} + \frac{\partial \rho.v}{\partial y} \right) dy = 0 \quad (2.25)$$

Comme les conditions aux limites sont :

$$u = v = 0 \quad y = 0$$

$$u = u_{\delta} \quad y = \delta$$

La condition intégrale s'écrit :

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial \rho.u}{\partial x} dy + \rho_e v_{\delta} = 0 \quad (2.26)$$

Comme  $\delta$  varie avec  $x$ , le premier terme équivaut à :

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho.u) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho.u dy - \rho_e u_e \frac{d\delta}{dx} \quad (2.27)$$

On a :

$$\int_0^{\delta} \rho.u dy = \int_{\delta_1}^{\delta} \rho_e u_e dy \quad (2.28)$$

$$\frac{d}{dx} \rho_e u_e (\delta - \delta_1) = \rho_e u_e \frac{d\delta}{dx} - \rho_e v_{\delta}$$

$$\frac{d}{dx} \rho_e u_e (\delta - \delta_1) = \rho_e u_e \left( \frac{d\delta}{dx} - \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) \quad (2.29)$$

$$C_e = \frac{d\delta}{dx} - \frac{v_{\delta}}{u_e} \quad (2.30)$$

$C_e$  : est appelée coefficient d'entraînement

Ou  $v_{\delta}$  représente la valeur prise par la vitesse verticale à la frontière  $y = \delta$  de la couche limite.

▪ Equation globale de quantité de mouvement ou équation de Von-Karman

l'équation globale de quantité de mouvement ou équation de Von-Karman est obtenue en intégrant l'équation :

$$\rho \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2.31)$$

Avec :

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}$$

Aux conditions aux limites déjà énoncées s'ajoutent

$$\tau = 0 \quad y = \delta$$

$$\tau = \tau_p \quad y = 0$$

D'après l'équation de continuité on a :

$$\rho v = - \int_0^y \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy' \quad (2.32)$$

L'équation globale de quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_0^\delta \rho \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^\delta \left( \int_0^y \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy' \right) \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^\delta \left( \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} dy \right) + [\tau]_0^\delta \quad (2.33)$$

L'équation intégrale devient alors :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u (u - u_e) dy - \frac{U_e}{dx} \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dy = -\tau_p \quad (2.34)$$

Ou, compte tenu des définitions des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement, on trouve après quelques calculs, la condition intégrale des quantités de mouvement.

$$\frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left[ \frac{H+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \right] \quad (2.35)$$

Avec :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Ou encore :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left[ \frac{H+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \right] \quad (2.36)$$

Ou l'on a posé H , facteur de forme du profil des vitesses et des températures dans la couche limite,  $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$

L'équation (2.36) c'est une équation différentielle ordinaire peut s'intégrer le long de la paroi si l'on connaît :

L'écoulement extérieur

Le facteur de forme

Le coefficient de frottement :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho u_e^2}$$

L'équation de Von-Karman relie le coefficient de frottement à la paroi aux épaisseurs de quantité de mouvement et de déplacement à l'écoulement extérieur ( $\rho_e$ ,  $u_e$ ).

Dans cette équation on voit que l'augmentation de la quantité  $\delta_2$  résulte d'une part de la contrainte de cisaillement à la paroi, et d'autre part de la variation de la vitesse à l'extérieur de l'écoulement. Pour un écoulement supersonique dans le divergent  $\frac{du_e}{dx}$  est toujours positif, et par conséquent l'augmentation forte de  $\delta_2$  est défavorisée.

Le facteur de forme H se déduit des distributions de  $\frac{\rho_e}{\rho}$  et de  $\frac{\tau_p}{\tau_p}$ .

## 2.10. Représentation approchées du profil des vitesses en écoulement incompressible

Nous définirons par profil des vitesses la courbe représentative de la fonction  $\frac{u}{u_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ ,  $u$  : désignant la vitesse suivant  $(0, x)$  au sein de la couche limite en un point d'ordonnée  $y$ ,  $u_e$  : la vitesse de l'écoulement potentiel.

L'équation de Von-Karman permet de déterminer le développement de la couche limite pourvu qu'une fonction propre soit trouvée pour la forme du profil de vitesse. Pour sélectionner un tel profil, il faut tenir compte des conditions aux limites suivantes figure (2.7).

$$\begin{aligned} u = v = 0 & & y=0 \\ u = u_\delta & & y = \delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & & y=\delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & & y = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

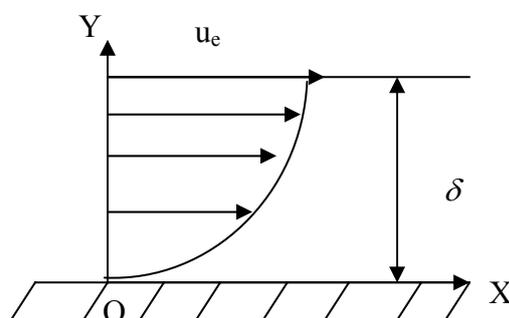


Figure 2.8 : Profil des vitesses dans une couche limite.

### 2.10.1. Distribution linéaire (profil linéaire)

L'équation du profil est :

$$\frac{u}{u_e} = \frac{y}{\delta} \quad (2.38)$$

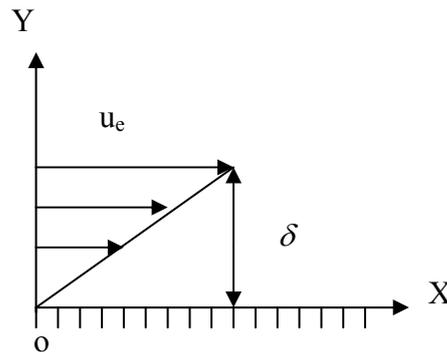


Figure 2.9 : Distribution linéaire des vitesses.

Les expressions (2.6) et (2.7) donnent après calcul :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1}{6} \quad (2.39)$$

Et le facteur de forme sera :

$$H_f = 3 \quad (2.40)$$

On peut déduire la contrainte tangentielle et le coefficient de frottement :

$$\tau_p = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu \cdot u_e}{\delta} \quad (2.41)$$

$$C_f = \frac{\tau \cdot u}{u \cdot \rho_e \cdot \delta} \quad (2.42)$$

### 2.10.2. Etude d'un cas particulier- solution de Pohlhausen

Pohlhausen suppose que le profil des vitesses est donné par un polynôme du quatrième degré :

$$\frac{u}{u_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = a\left(\frac{y}{\delta}\right) + b\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + e \quad (2.43)$$

En déterminant a, b, c, d et e par les conditions aux limites :

$$\frac{y}{\delta} = 0, f(0) = 0, f'(0) = 0 \quad (\text{paroi})$$

$$\frac{y}{\delta} = 1, f(1) = 1, f'(1) = f''(1) = 0 \quad (\text{frontière})$$

On trouve : a = 2 ; b = 0 ; c = -2 ; d = 1 ; e = 0

Ce qui donne :

$$\frac{u}{u_e} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \quad (2.44)$$

Et par suite :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10}, \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{37}{315} \quad (2.45)$$

Et le rapport des quantités  $\frac{\delta_1}{\delta}$  et  $\frac{\delta_2}{\delta}$  donne la valeur des facteurs de forme :

$$H = \frac{945}{370} = 2.554 \quad (2.46)$$

La contrainte tangentielle est :

$$\tau_p = \frac{2 \cdot \mu \cdot u_e}{\delta} \quad (2.47)$$

### 11. Profil des vitesses en écoulement compressible.

En fluide compressible, en faisant intervenir la répartition des masses volumiques, les rapports  $\frac{\delta_1}{\delta}$ ,  $\frac{\delta_2}{\delta}$  et  $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$  ne dépendent plus seulement de la forme du profil des vitesses, et ne sont donc plus ( paramètres de formes).

L'expérience montre que le rapport  $H_i$  est toujours paramètre de forme, et que les profils des vitesses sont, jusqu'à des nombres de Mach élevés, voisins des profils en incompressible, le profil des vitesses de Pohlhausen peut être conservé en fluide compressible.

### 2.12. Transfert de chaleur dans une couche limite compressible

Dans le cas d'un écoulement compressible le phénomène de transfert de chaleur au sein de la couche limite se révèle d'une grande importance pour les applications techniques.

Le nombre de Prandtl exprime une valeur relative entre les coefficients de transports de quantité de mouvement et de chaleur au sein de l'écoulement. Ainsi pour  $Pr > 1$  sous l'action de la diffusion à la proximité d'une paroi, l'influence de la viscosité est ressentie

plus loin que l'influence de la conduction. Par conséquent, la couche limite associée au champ de vitesse devient plus épaisse que celle associée au champ de température figure( 2.10). pour  $Pr < 1$  l'effet est inverse.

$Pr$  est donc le paramètre déterminant de la relation entre les champs de vitesse et de températures.

Quand  $Pr \neq 1$  la température  $T_f$  d'une paroi isolée s'exprime par la relation suivante :

$$T_r = T_e + \frac{u_e^2}{2C_p}$$

Où,  $r$  dénommé facteur de récupération thermique pariétal, est défini par :

$$r = \frac{T_f - T_e}{T_0 - T_e} \quad (2.48)$$

$T_e$  : température de l'écoulement extérieur

$T_f$  : température de frottement et  $T_r$  : température de récupération

La différence entre  $T_0$  et  $T_f$  s'exprime alors par ce facteur  $r$ . C'est-à-dire par le degré de récupération de l'énergie cinétique présenté par le terme :  $u_e^2/2C_p$ .

La théorie indique que pour une couche limite laminaire :  $r = Pr^{1/2} = 0,82$  pour l'air ( $Pr = 0.71$ ) et pour la couche limite turbulente  $r = Pr^{1/3}$ . Ainsi l'influence de  $Pr$  est explicable par le faite que pour  $Pr < 1$  on a :  $T_r < T_0$ , tandis que pour  $Pr > 1$  on a :  $T_r > T_0$ .

$\delta$ , Dans le premier cas l'effet de la conduction est plus grand que celui de la dissipation. Dans le deuxième cas la situation est inverse.

Si  $Pr > 1$  : la couche limite hydrodynamique se développe beaucoup plus vite que la couche limite thermique.

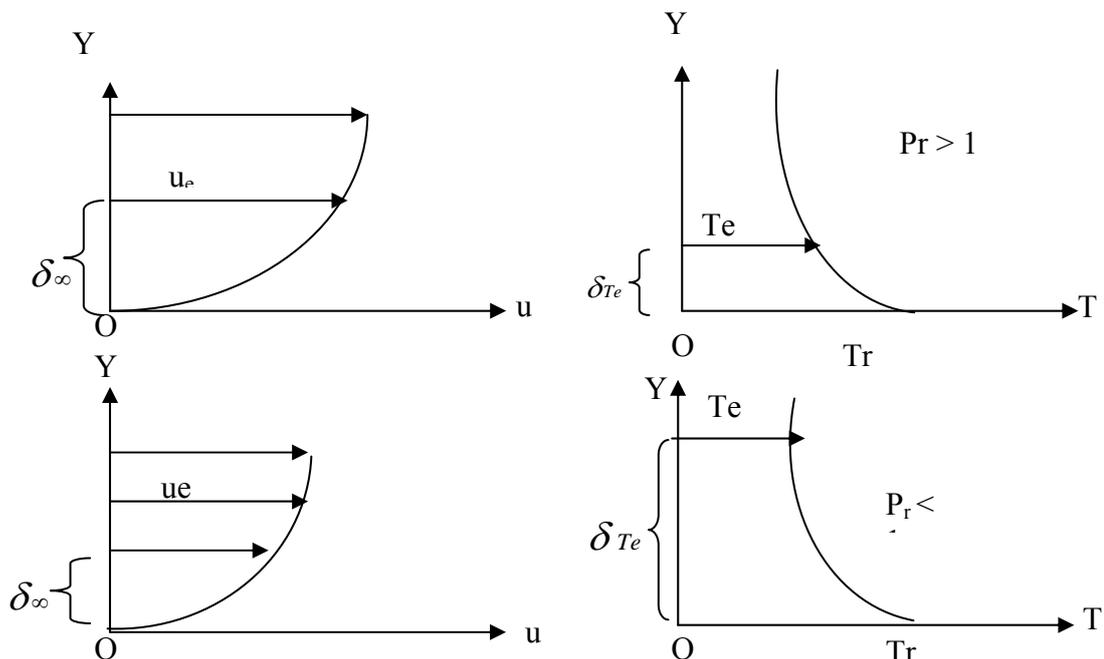


Figure 2.10 : Exemples de distribution de vitesse et de températures pour  $P_r > 1$  et  $P_r < 1$ .

### 2.13. Solution de l'équation de Von-Karman

$$\frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \left[ \frac{H+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \right] \quad (2.49)$$

Le paramètre de forme est donné par la formule :

$$H = H_i + 0,667M_e^2 + 2,9 \frac{T_p - T_f}{T_e} \quad (2.50)$$

Le rapport  $\frac{\delta_1}{\delta}$  se déduit de H par la formule :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = 1 + \frac{5}{2} \frac{H_i}{H} \quad (2.51)$$

La présence du terme en  $M_e^2$  dans la formule (2.50) montre que H augmente rapidement avec le nombre de Mach il augmente également lorsque la paroi est chaude ( $T_p > T_f$ ).

D'autre part, lorsque le flux de chaleur est négatif ( $T_p < T_f$ ), le facteur de forme diminue ; il peut devenir négatif si la paroi est très froide.

Si la température de la paroi est supérieure à la température de frottement, on dit que la paroi est chaude ; la paroi cède de la chaleur au fluide et le flux de chaleur est positif

$\left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right) < 0$ . Lorsque la paroi est froide, elle absorbe la chaleur cédée par le fluide.

En utilisant la relation :

$$T_0 = T_e \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)$$

On obtient

$$T_f = T_e \left( 1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)$$

En pratique, on prend généralement  $r = 0.85$  : / 2 /

D'ou :

$$T_e = T_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{-1} \quad (2.52)$$

$$T_f = T_e \left( 1 + 0.17 M_e^2 \right) \quad (2.53)$$

Il faut exprimer aussi l'épaisseur  $\delta$  en fonction de  $\delta_1$  pour ce faire, en utilisant l'équation ( 2.51 ) et le facteur de forme , on aura :

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1 + \frac{5}{2} \frac{H_i}{H} = \frac{\delta}{\delta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\delta}{\delta_2} \cdot \frac{1}{H}$$

Qui donne finalement :

$$\delta = \delta_2 \left( H + \frac{5}{2} H_i \right) \quad (2.54)$$

Dans le cas d'un profil linéaire :

$$\tau_p = \frac{\mu \cdot u_e}{\delta}$$

Et dans le cas d'un profil du quatrième degré :

$$\tau_p = \frac{2\mu \cdot u_e}{\delta}$$

Soit :

$$\tau_p = \frac{K\mu \cdot u_e}{\delta} \quad (2.55)$$

Avec :

K=1 pour le profil linéaire

K=2 pour le profil du quatrième degré

Donc l'équation (2.49) prend la forme :

$$\frac{k\mu_e}{\rho_e u_e \delta} = \frac{d\delta_2}{dx} + \left[ \frac{H+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \right] \delta_2 \quad (2.56)$$

Utilisant( 2.54) l'équation ( 2.56) devient :

$$\frac{k\mu_e}{\rho_e u_e \left( H + \frac{5}{2} H_i \right)} = \delta_2 \frac{d\delta_2}{dx} + \left[ \frac{H+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \right] \delta_2^2 \quad (2.57)$$

Posons  $Y = \delta_2^2$  ; l'équation ( 2.57) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dh}{dx} + G \cdot h = Q \quad (2.58)$$

$$G = 2 \left( \frac{H+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \right) \quad (2.59)$$

$$Q = \frac{2kH_e}{\rho_e u_e \left( H + \frac{5}{2} H_i \right)} \quad (2.60)$$

Pour le profil linéaire on prend

$$H_i = 3 \quad (2.61)$$

$$K = 1$$

Et pour le profil de Pohlhausen on prend

$$H_i = 2.554 \quad (2.62)$$

$$K = 2$$

La solution de l'équation ( 2.58) est :

$$h = \frac{Q}{G} [1 - \exp(-G.x)] \quad (2.63)$$

Dans le cas ou  $G=0$ , la solution devient :

$$h = Q.x \quad (2.64)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement est telle que :

$$\delta_2 = \sqrt{h} \quad (2.65)$$

Pour le calcul de l'épaisseur de la couche limite on utilise les équations ( 2.54 ) et ( 2.50), celles-ci permettent d'écrire :

$$\frac{\delta}{\delta_2} - \frac{5}{2} H_i = H_i + 0.667 M_e^2 + 2.9 \frac{T_p - T_f}{T_e} \quad (2.66)$$

qui donne

$$\delta = \delta_2 \left[ \frac{7}{2} H_i + 0.667 M_e^2 + 2.9 \frac{T_p - T_f}{T_e} \right] \quad (2.67)$$

On remarque que les épaisseurs caractéristiques sont nulles au bord d'attaque et évoluent paraboliquement suivant  $x$ .

L'épaisseur de la couche limite augmente quand la distance au bord d'attaque augmente. De ce fait, la vitesse longitudinale dépend à la fois de  $y$  et de  $x$  et, d'après l'équation de continuité, la vitesse verticale n'est pas nulle. Les lignes de courant ne sont donc pas parallèles à la paroi.

L'aspiration ou le soufflage vertical à la paroi modifie l'épaississement de la couche limite. Un soufflage a tendance à accroître l'épaississement et une aspiration à

l'effet contraire. Ces procédés sont utilisés pour réaliser le contrôle de la couche limite. Par exemple, une aspiration peut permettre d'éviter le décollement.

#### 2.14. Décollement d'une couche limite

Dans la couche limite la décélération du fluide près de la paroi produit le phénomène du décollement ou de la séparation de la couche limite. Ce qui entraîne un décollement de l'écoulement en général. Ce phénomène est très compliqué ; il peut se produire dans la couche limite laminaire ou turbulente, ou même dans la zone transitoire.

Le phénomène de décollement d'une couche limite laminaire sur une paroi se développe comme indiqué sur la figure (2.11). Le point de décollement est déterminé par la condition  $\tau_p = 0$ . Cette condition traduisant le comportement du profil de vitesse décollement.

##### 2.14.1. Décollement de la couche limite laminaire

Dans la théorie des écoulements des fluides parfaits, les parois solides constituent des surfaces limites pour l'écoulement, le fluide suivant toujours les parois en glissant sur elles. Quand on observe les écoulements réels il n'en est pas toujours ainsi et il peut se former des régions où la couche limite n'adhère plus à la paroi : un point (ou une ligne) de décollement apparaît, suivie d'une zone décollée. La zone décollée est souvent le siège d'un mouvement tourbillonnaire, très complexe à analyser, désignée dans certains cas par un nom particulier : bulle de décollement, sillage... figure (2.11).

Si la théorie des écoulements parfaits ne prévoit pas le décollement sans introduction d'hypothèse supplémentaire, elle permet tout de même de donner des indications précieuses sur les régions où, en fluide réel, le décollement peut apparaître :

Ce sont essentiellement celles pour lesquelles, le long de la paroi  $\frac{\partial p}{\partial x}$  est positif (pratiquement les régions où les lignes de courant s'écartent des parois).

Quand la couche limite est laminaire, on sait définir la position du point de décollement, c'est celui pour lequel le profil des vitesses part normalement à la paroi . En ce point la contrainte tangentielle visqueuse est nulle :

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

La couche limite laminaire supporte seulement un très faible gradient de pression adverse. Par, contre, une couche limite turbulente résiste à une forte augmentation de la pression avant que ne produisent le décollement.

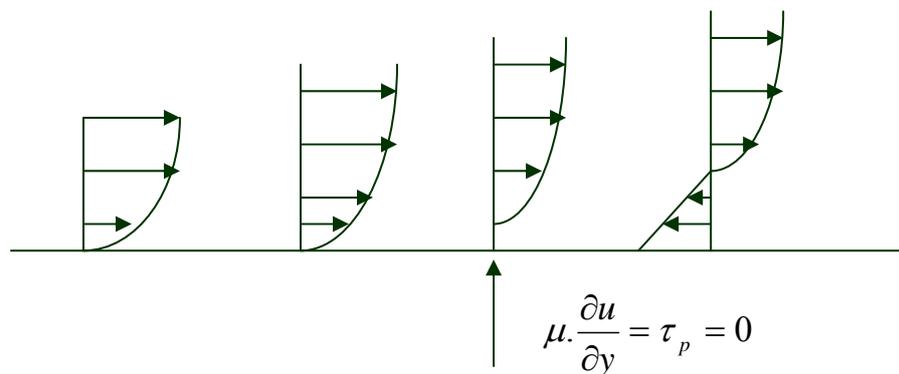


Figure 2.11 : Décollement d'une couche limite laminaire d'une paroi.



## CHAPITRE 3

### ETUDE DE L'INTERACTION ENTRE LA COUCHE LIMITE ET LE FLUIDE PARFAIT

#### 3.1. Introduction

Le problème posé par les équations de la couche limite représente ainsi un problème de perturbation singulier. En utilisant le principe de raccordement entre les solutions internes et externes esquissé ici, il est possible de développer une théorie systématique en fonction de  $\frac{\delta}{L}$  caractérisée par son niveau élevée.

Les équations de la couche limite bidimensionnelle sont ainsi paraboliques, tandis que les équations de Navier Stokes sont elliptiques.

#### 3.2. Notion de déplacement de l'écoulement extérieur

La notion de perte de débit due à la présence de la couche limite introduit un schéma permettant de prendre en compte la modification de l'écoulement extérieur induite par la couche limite. figure (3.1)

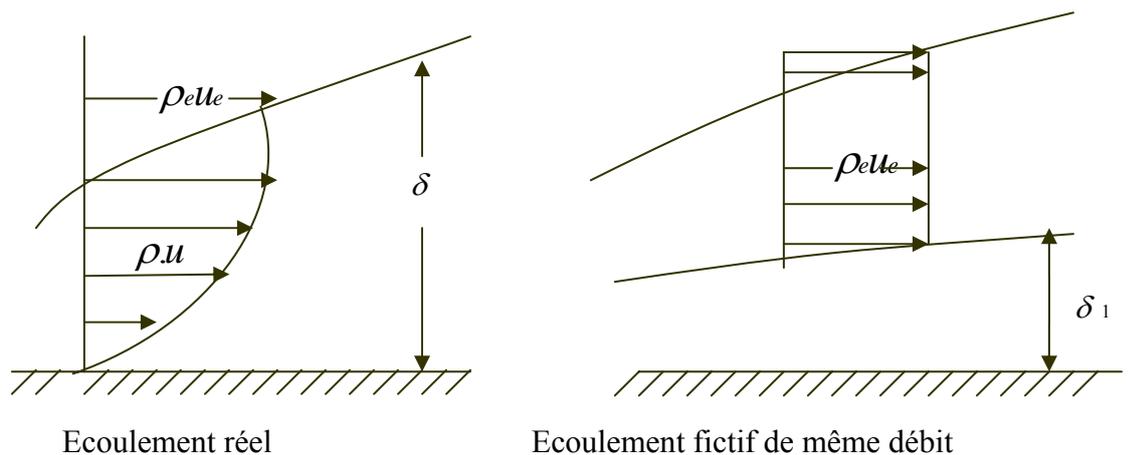


Figure 3.1 : Schématisation de l'effet de déplacement de la couche limite.

L'écoulement de la couche limite est remplacé par un écoulement de fluide parfait entre  $y = \delta_1$  et  $y = \delta$  ; entre  $y=0$  et  $y = \delta_1$  , il n'y a pas d'écoulement.

L'écoulement extérieur existant réellement doit être calculé comme celui d'un fluide parfait s'écoulant autour d'un profil fictif constitué d'un profil réel engraisé de l'épaisseur de déplacement.

Dans la couche d'épaisseur  $\delta_1$ , la vitesse est nulle et entre  $\delta_1$  et  $\delta$ ,  $\rho_e$  et  $u_e$  sont constants. De cette façon, Le débit est le même, puisque :

$$\int_0^{\delta} \rho \cdot u \cdot dy = \int_{\delta_1}^{\delta} \rho_e u_e dy \quad (3.1)$$

Cette intégrale représente le flux du défaut de vitesse, c'est-à-dire du défaut de débit-masse, conséquence de la croissance de la vitesse dans la couche limite.

En particulier le produit  $\rho \cdot u_e \delta_1$  représente la perte de débit-masse due à la présence de la couche limite ; l'épaisseur de déplacement représente le déplacement que devrait subir chaque point de la paroi pour qu'un écoulement fictif à vitesse constante (fluide parfait) donne le même débit.

### 3.3. Notions sur le couplage fluide parfait- couches visqueuses

#### 3.3.1 Notion élémentaire de couplage

En aérodynamique, à grand nombre de Reynolds, on s'attache à conserver l'approximation de fluide parfait dans l'ensemble de l'écoulement sauf au voisinage des parois et dans le sillage où la notion de couche limite s'applique.

La technique la plus simple pour résoudre ce problème est conforme à la théorie des développements asymptotiques raccordés. Elle consiste à calculer d'abord le fluide parfait en faisant abstraction de l'existence des couches visqueuses. Connaissant la répartition des vitesses tangentielles au profil ainsi que celle de la vitesse le long de la ligne de courant issue du bord de fuite, on calcule en suite la couche limite et le sillage. Cette méthode tombe en défaut dès que la couche limite présente un point de décollement, puisque le calcul ne peut pas être poursuivi au-delà. Dans ces conditions, il est clair qu'une partie importante de la traînée n'est pas prise en compte et, de plus, il faut s'attendre à une

modification non négligeable de la répartition des pressions et donc éventuellement de la portance.

Les deux étapes décrites plus haut (calcul de fluide parfait et de couche limite) sont en générale insuffisantes car la couche limite induit, par son effet de déplacement, une perturbation du fluide parfait, notamment au voisinage du bord de fuite. Cette perturbation est calculée à l'aide de la notion d'épaisseur de déplacement ou de vitesse de transpiration à la paroi.

Suivant le concept d'épaisseur de déplacement, le profil réel est remplacé par une forme fictive obtenue en engraisant la profil de  $\delta_1$ , c'est-à-dire en déplaçant chaque point suivant une normale au profil d'une distance  $\delta_1$ . figure(3.4).

Autour de cette nouvelle forme un second calcul de fluide parfait est réalisé et aboutit à un champ de pression corrigé.

De façon équivalente, ce calcul peut être effectué à l'aide de la notion de vitesse de transpiration qui s'applique à la paroi.

Le sillage est schématisé par une ligne représentant une coupure dans le champ du fluide parfait figure( 3.2 ).

En fait, la correction ainsi définie est l'amorce d'un processus itératif dans lequel s'enchaînent les calculs de fluide parfait et de couche limite comme il est indiqué figure(3.3 ).

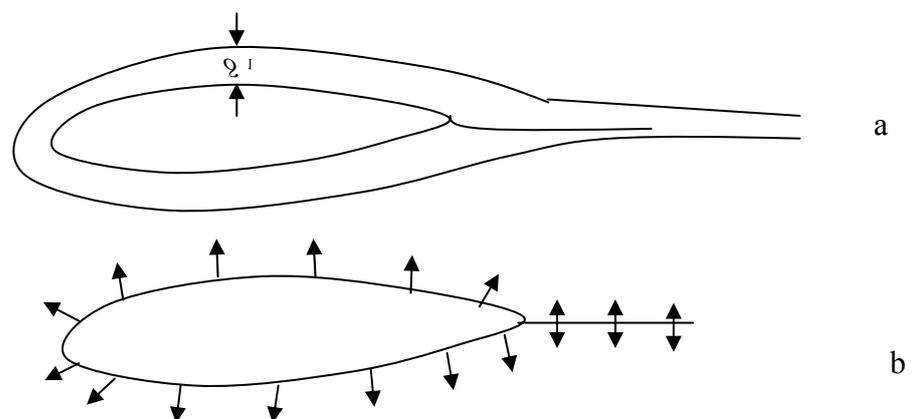


Figure 3.2 : Représentation de l'effet de couche limite.  
a-Epaisseur de déplacement  
b-Vitesse de transpiration

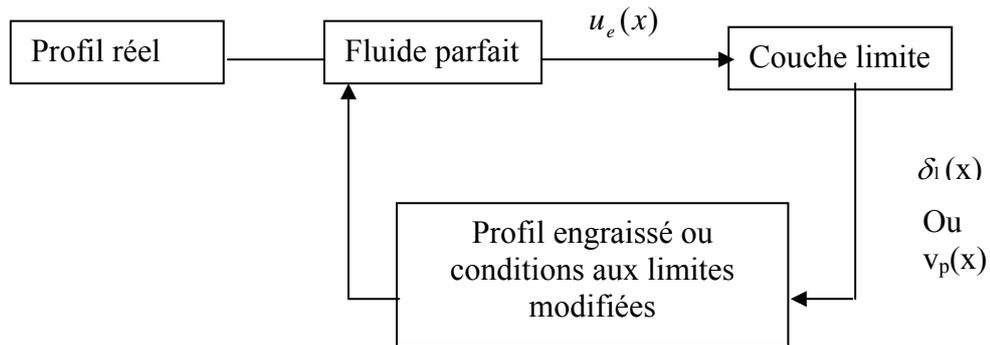


Figure3.3 : Processus itératif pour le calcul du couplage  
Couche limite-fluide parfait.

### 3.4. Couplage entre l'écoulement extérieur et la couche limite

Le déroulement des différentes étapes de calcul est le suivant :

1. Calculer en première approximation l'écoulement non visqueux dans la tuyère, ce qui donne en particulier la variation de  $P(x)$  nécessaire au calcul de la couche limite.
2. Calculer le développement de cette couche limite, associé à la variation de  $P(x)$  ce calcul donne en particulier les épaisseurs  $\delta(x)$ ,  $\delta_1(x)$  et  $\delta_2(x)$
3. Une correction de l'écoulement extérieur peut être réalisée par un calcul de fluide parfait autour du profil engraisé de l'épaisseur de déplacement. (reprenre le calcul de 1 après avoir déplacé la paroi réelle de l'épaisseur  $\delta_1$ ).

La répartition du pression autour du profil n'est donc plus la même. Ceci explique les modifications importantes au voisinage du bord de fuite et explique aussi l'existence d'une traînée de pression.

Pour calculer le champ des vitesses et de pression autour d'un profil, les trois étapes décrites précédemment sont théoriquement suffisantes si le concept de couche limite est strictement appliqué puisque, par définition, l'effet de couche limite sur la répartition de pression doit être faible. Néanmoins, les calculs de fluide parfait et de couche limite peuvent être enchaînés les uns après les autres un plus grand nombre de fois. En pratique, un nombre limité (trois ou quatre) de ces opérations suffit pour atteindre une solution convergée suivant laquelle les résultats entre deux calculs successifs de fluide parfait (ou de couche limite) sont très voisins.

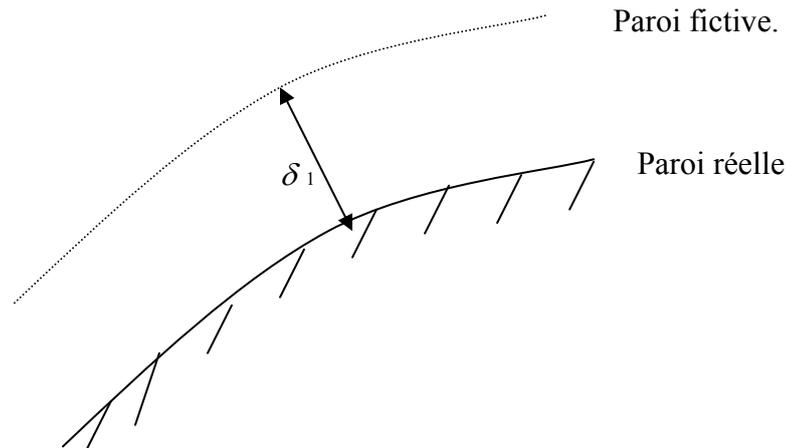


Figure 3.4 : Profil engraisé.

Le couplage peut être vu comme un cycle d'interaction ou d'échanges entre plusieurs systèmes physiques .

Dans le cas qui nous intéresse, les échanges de quantité de mouvement et d'énergie entre le fluide parfait et la couche limite ont lieu à chaque instant.

### 3.5. Méthodes inverses

Il existe une hiérarchie entre les zones visqueuses et les non visqueuses, puisque l'écoulement de couche limite est régi par l'évolution de la pression calculée en fluide parfait. Cette hiérarchie détermine aussi la méthode (inverse ou directe) qui doit être appliquée au voisinage du point  $x = 0$ , la méthode inverse est bien adaptée, alors que la méthode directe doit être employée pour déterminer la solution quand  $x \rightarrow \pm \infty$  [2].

Dans une méthode inverse, la pression n'est plus une donnée du calcul de couche limite, elle en est un résultat. la donnée de la pression est remplacée par celle d'une caractéristique de la couche limite, par exemple l'épaisseur de déplacement ou le coefficient de frottement.

Les équations de la couche limite possèdent des propriétés analogues. Classiquement, elles sont résolues en supposant que la distribution de vitesse extérieure  $u_e(x)$  est une donnée. Dans ces conditions, nous avons vu que la solution ne peut pas être prolongée, en générale, au-delà du point ( $C_f = 0$ ). Cependant, les équations de couche limite peuvent être

utilisées d'une autre manière en considérant que  $u_e(x)$  est une fonction inconnue. dans ce cas bien sur, le système des équations de couche limite doit être complété par la donnée d'une autre fonction, par exemple l'évolution de l'une des caractéristiques de la couche limite. on dit alors que les équations de couche limite sont résolues en mode inverse.

Ce mode de résolution possède la propriété remarquable de ne poser aucune difficulté au point de décollement. Ces méthodes ont ainsi connu un grand développement car, associées au calcul du fluide parfait, elles permettent de résoudre le calcul de l'écoulement autour d'un profil avec décollement, tout au moins si celui-ci n'est pas trop étendu.

Analysons d'abord une méthode inverse où  $\delta_1(x)$  est une fonction donnée et considérons la méthode avec équation d'entraînement. Les fonctions inconnues sont la vitesse extérieure  $u_e(x)$  et, par exemple, l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$ . Les méthodes inverses trouvent des applications dans d'autres domaines.

Il n'est pas possible d'analyser toutes les méthodes inverses possibles puisqu'elles existent en nombre illimité. Nous présenterons celles dans lesquelles les évolutions de l'épaisseur de déplacement ou de vitesse de transpiration sont imposées.

### 3.6. Simulation du problème

Nous supposons que l'effet de la couche limite représentée à la paroi une correction  $\Delta u_e$  à une vitesse de base  $u_{e0}$  connue. La vitesse extérieure corrigée

$$u_e = u_{e0} + \Delta u_e \quad (3.2)$$

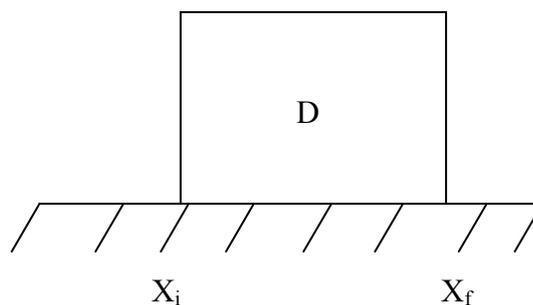


Figure 3.5 : Interaction entre la couche limite et le fluide parfait  
Domaine de calcul de la perturbation  $\Delta u_e$ .

$(X_i, X_f)$  : la zone où la couche limite et sensible (le domaine d'interaction)

Les calculs de couche limite et de fluide parfait s'enchaînent jusqu'à convergence éventuelle.

Le calcul se déroule de la façon suivante :

$$\delta_1^{(1)}(x) \rightarrow u_{e1}^{(1)}(x) \rightarrow \delta_1^{(2)}(x) \cdots \cdots \delta_1^{(n)}(x) \rightarrow u_{e1}^{(n)}(x) \rightarrow \delta_1^{n+1}(x)$$

N : l'indice d'itération

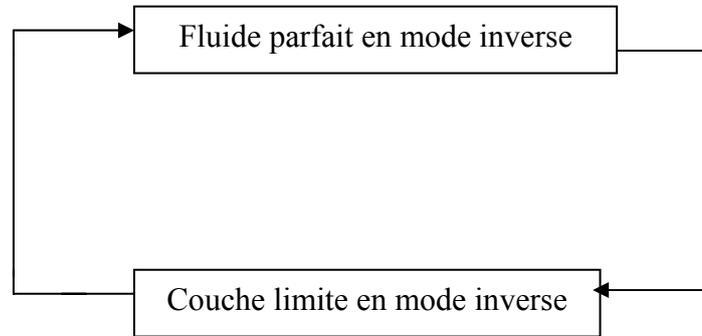


Figure 3.6 : Processus itératif de couplage en mode inverse.

La différence entre la vitesse corrigée  $u_e$  et la vitesse en fluide parfait  $u_{e0}$  résulte de l'effet de couplage entre le fluide visqueux et le fluide non visqueux.

### 3.7. Raccord entre l'écoulement extérieur et la couche limite

Les conditions aux limites à la frontière de la couche limite portent uniquement sur l'égalité des vitesses longitudinales calculées dans la couche limite d'une part et dans l'écoulement extérieur d'autre part.

La vitesse verticale à la frontière de la couche limite ne peut pas être imposé et n'est donc pas nécessairement égale à celle de l'écoulement extérieur [2].

On définit un prolongement en fluide parfait de l'écoulement extérieur dans la couche limite figure( 3.7 ).

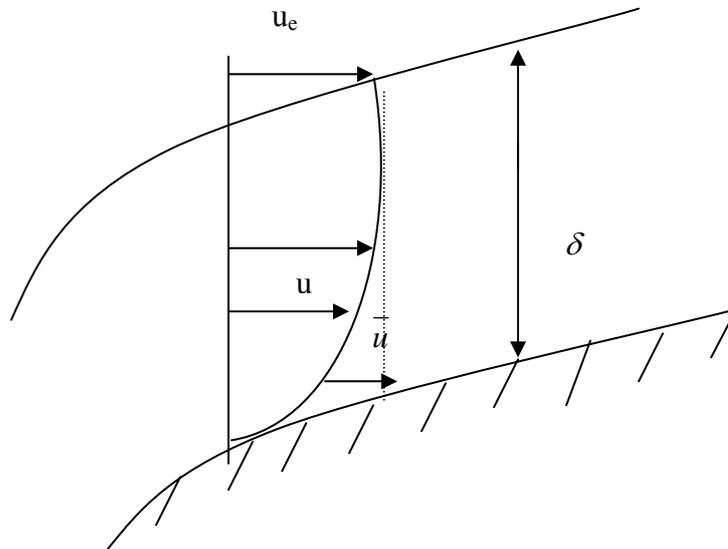


Figure 3.7 : Prolongement de l'écoulement extérieur dans la couche limite.

A la frontière de la couche limite, on note :

$\rho_{\delta}, u_{\delta}, v_{\delta}$  : les propriétés de l'écoulement de la couche limite

$\rho_e, u_e, v_e$  : les propriétés de l'écoulement extérieur

$\overline{\rho_e}, \overline{u_e}, \overline{v_e}$  : les propriétés de l'écoulement extérieur prolongé

On impose les conditions :

$$\rho_e = \overline{\rho}, u_e = \overline{u_e}, v_e = \overline{v_e} \quad (3.3)$$

Les conditions aux limites appliquées à l'écoulement de couche limite sont :

$$\rho_{\delta} = \rho_e, u_{\delta} = u_e \quad (3.4)$$

L'égalité  $v_{\delta} = v_e$  n'est pas nécessairement réalisée.

On définit la vitesse verticale de l'écoulement prolongé par un développement de Taylor autour de  $y = \delta$ .

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \left( \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \right)_{y=\delta} (y - \delta) \quad (3.5)$$

L'équation de continuité en fluide parfait s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho_e u_e)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_e v_e)}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

( 3.3 ) et ( 3.6 ) donne :

$$\frac{\partial \rho_e u_e}{\partial x} + \left( \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0 \quad (3.7)$$

En combinant avec l'équation (3.5), on obtient :

$$\overline{\rho v} = \overline{\rho_e v_\delta} - \frac{d \rho_e u_e}{dx} (y - \delta) \quad (3.8)$$

Imposons maintenant que l'écoulement extérieur est l'écoulement de la couche limite se raccordent le long de la frontière c'est à dire :

$$v_\delta = v_e$$

L'équation ( 3.8 ) devient :

$$\overline{\rho v} = \rho_e v_\delta - \frac{d \rho_e u_e}{dx} (y - \delta) \quad (3.9)$$

### 3.8. Calcul de la vitesse $V_\delta$

Intégrons l'équation de continuité :

$$\int_0^\delta \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) dy = 0$$

Comme les conditions aux limites sont :

$$u = v = 0 \quad , y = 0$$

$$u = u_e, v = v_e \quad , y = \delta$$

La condition intégrale s'écrit:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy + \rho_e v_e = 0$$

Comme  $\delta$  varie avec  $x$  , le premier terme équivaut a :

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy - \rho_e u_e \frac{d\delta}{dx}$$

Et si l'on tient compte de la définition de  $\delta_1$  pour exprimer l'intégrale, on trouve aisément la condition (  $y$  étant suppose constant pour(  $0 < y < \delta$  )

on trouve :

$$\frac{d}{dx} \rho_e u_e (\delta - \delta_1) = \rho_e u_e \left( \frac{d\delta}{dx} - \frac{v_\delta}{u_e} \right)$$

Donc :

$$\rho_e v_\delta = \rho_e u_e \frac{d\delta}{dx} - \frac{d}{dx} [\rho_e u_e (\delta - \delta_1)] \quad (3.10)$$

On utilisant les équations ( 3.8) et ( 3.9 ) on aura:

$$\overline{\overline{\rho v}} = \rho_e u_e \frac{ds}{dx} - \frac{d}{dx} [\rho_e u_e (\delta - \delta_1)] - \frac{d\rho_e u_e}{dx} (y - \delta) \quad (3.11)$$

Soit :

$$\overline{\overline{\rho v}} = \frac{d}{dx} (\rho_e u_e \delta_1) - y \frac{d\rho_e u_e}{dx} \quad (3.12)$$

On suppose que  $\overline{\rho}$  et  $\overline{u}$  sont constants dans l'épaisseur de la couche limite et égaux à  $\rho_e$  et  $u_e$ . Cette hypothèse est cohérente avec celle de rayon de courbure de paroi très grand devant l'épaisseur de la couche limite.

La définition de l'écoulement prolongé est elle établit .les conditions aux limites qui doivent êtres imposées au fluide extérieur pour tenir compte de la couche limite.

Si  $y = \delta_1$  :

L'équation ( 3.11 ) devient :

$$\frac{\overline{v}_{y=\delta_1}}{u_e} = \frac{d\delta_1}{dx} \quad (3.13)$$

Si nous connaissons  $\delta(x)$ ,  $\delta_1(x)$  et  $\rho_e u_e$  l'équation ( 3.9 ) donne la condition que doit satisfaire l'écoulement non visqueux sur la ligne frontière  $\delta$  pour satisfaire à la condition de conservation de débit : autrement dit, dans un calcul exact de l'écoulement non visqueux, il faudra remplacer la condition habituelle  $v=0$  écrite à la paroi, par la condition précédente écrite soit sur la ligne  $\delta$ , soit, plus simplement sur  $y = \delta_1$ .

Si  $y = 0$  on trouve :

$$\frac{\overline{v}_{y=0}}{u_e} = \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{d}{dx} (\rho_e u_e \delta_1) \quad (3.14)$$

$\frac{v_{y=0}}{u_e}$  :Représente la pente de l'écoulement extérieur par rapport à la paroi, à la

frontière ( $\delta$ ) de la couche limite ( Représente l'angle de déviation de l'écoulement extérieur sous l'effet de déplacement).

Pour réaliser l'équivalence entre l'écoulement réel et un écoulement de fluide parfait fictif autour du profil, il faut imposer à ce dernier écoulement une condition de vitesse de transpiration donnée par la formule ( 3.13 ) figure ( 3.8 ).

En principe , la distance  $y$  peut être une valeur quelconque comprise entre  $y = 0$  et  $y = \delta$  . en particulier, la condition limite est appliquée à l'écoulement extérieur soit le long de la surface de déplacement, soit à la paroi.

L'équation ( 3.11) donne la condition limite qui doit être imposée à la direction de ce fluide parfait par rapport à la paroi.

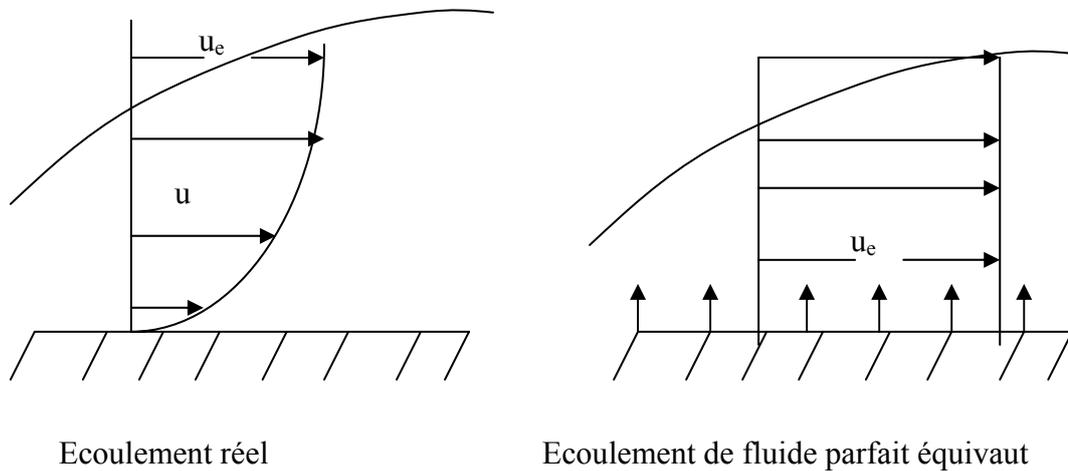


Figure 3.8 : Schématisation de l'effet de la couche limite par vitesse de transpiration à la paroi.



## CHAPITRE 4

### PROGRAMMATION NUMERIQUE

#### 4.1. Introduction

Aujourd'hui, la simulation numérique des écoulements est utilisée par les concepteurs d'avion pour prévoir les performances de profils d'aile et de configurations complètes. Des écoulements mettent en jeu des phénomènes physiques complexes (transition vers la turbulence, turbulence, décollements...), l'aérodynamique numérique se heurte à un double problème :

L'utilisation de modèles mathématiques généraux (tels que les équations de Navier-Stokes moyennées) se traduit par des coûts de calcul prohibitifs d'un point de vue industriel ;

La précision de simulation dans les zones transitionnelles ou décollées est extrêmement sensible à la qualité de la solution numérique et des modèles physiques utilisées.

La résolution numérique des problèmes en gazodynamique ou mécanique des fluides sont devenues ces dernières années, aussi importantes que l'étude analytique ou les essais expérimentaux.

Grâce au progrès réalisé dans le développement des méthodes numériques et la disponibilité des moyens de calcul très puissants, des problèmes assez complexes en mécanique des fluides et en gazodynamique ont été résolus.

Par contre, les méthodes analytiques sont limitées à la résolution des modèles mathématiques simples et ne pouvant certainement représenter que très peu de phénomènes physiques réels. Cependant si une telle solution est disponible, elle peut être utilisée comme test de comparaison pour la validation des algorithmes numériques.

En ce qui concerne les méthodes expérimentales, on est limité par les techniques de mesures, le coût élevé, la fiabilité.

Le calcul des caractéristiques aérodynamiques des tuyères est devenu primordial. Celles-ci sont très importantes dans la conception et l'analyse du régime de

fonctionnement de tout turbomachines ou turboréacteurs. Diverses méthodes sont utilisées pour le calcul de ces caractéristiques aérodynamiques :

1. Méthode analytique
2. Méthode expérimentale
3. Méthode numérique

Les deux premiers méthodes sont limitées soit par les conditions aux limites, les techniques de mesures, le coût élevé, la fiabilité ou bien la non conformité du phénomène physique et du modèle mathématique appliqué.

La méthode numérique consiste à intervenir le temps. Ceci s'appelle une approche d'évolution numérique, c'est-à-dire un calcul itératif qui va converger vers la solution numérique du régime permanent.

Des artifices de calcul seront utilisées afin d'accélérer la convergence de cette méthode.

Pour simplifier le traitement numérique au niveau des conditions aux limites, des transformations mathématiques ont été utilisées, qui permettent de modifier le domaine physique en un domaine de calcul plus simple figure 4. 1 et 4. 2:

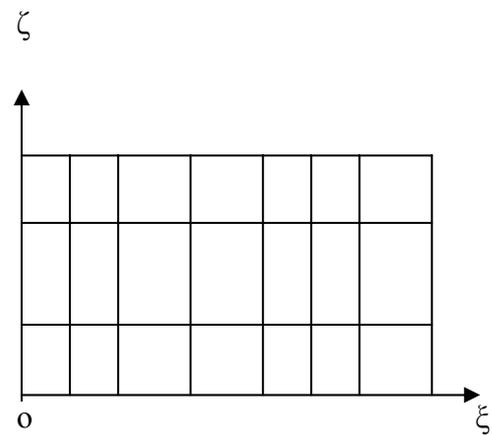
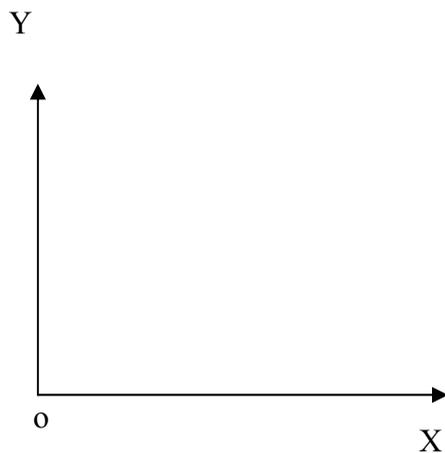


Figure 4.1 :Domaine physique.

Figure 4.2 : Domaine mathématique.

La résolution numérique peut se faire par différentes méthodes telles que :

- Méthode des différences finie
- Méthode des volume finis
- Méthode des éléments finis
- Méthode intégrale

La méthode d'intégration numérique choisie est celle de Mac Cormack il s'agit d'une méthode de différences finies explicite.

#### 4.2. Schéma explicite

Une méthode est dite explicite lorsqu'elle fait intervenir seulement les valeurs au temps précédent pour calculer celles du futur la résolution numérique explicite est simple et directe. Cependant elle est conditionnellement stable, le temps de calcul est alors beaucoup plus long.

Un schéma explicite typique est le schéma de second ordre (prédiction et correction) de Mac Cormack. Il s'agit en définitive de remplacer les équations au dérivées partielles par des équations algébriques aux différences finies.

##### 4.2.1. Critère de stabilité

On dit qu'un processus de calcul itératif est stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent.

#### 4.3 . Principe de la méthode de différences finies

Le principe de la méthode de différences finies consiste à remplacer le domaine de variation continue des variables par un ensemble fini de points (nœuds) appelé réseau, au lieu des fonctions à variable continue on étudie des fonctions à variable discrète, définies aux nœud du réseau, que nous appellerons fonctions discrètes.

Les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites sont remplacées par des formules discrètes.

Avant de décrire quelque-unes des méthodes de calcul existantes, nous rappellerons les conditions dans les quelles s'effectue un calcul de couche limite ( domaine de calcul, conditions initiales et conditions aux limite).

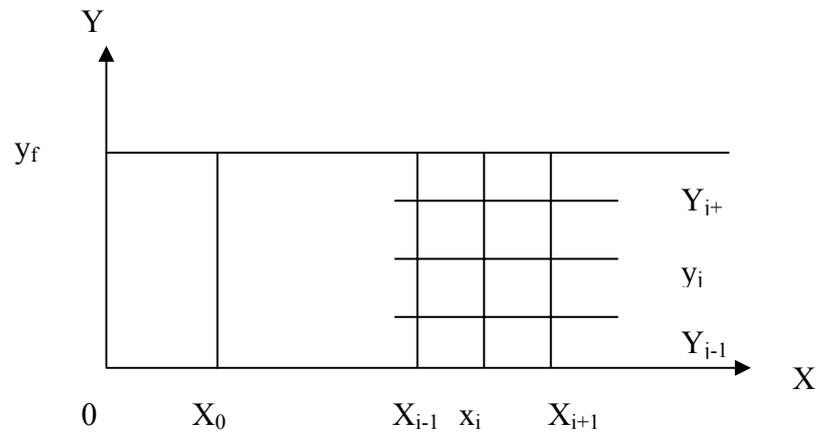


Figure 4.3 :Domaine de calcul discrétisé.

En variables physiques le domaine de calcul est limité à une certaine valeur  $T$  de  $t$  qui est atteinte lorsque l'épaisseur de couche limite est voisine de  $y_f$  cette situation peut être rectifiée en cours de calcul en définissant une nouvelle grille de calcul.

$y_f$  : la frontière extérieur

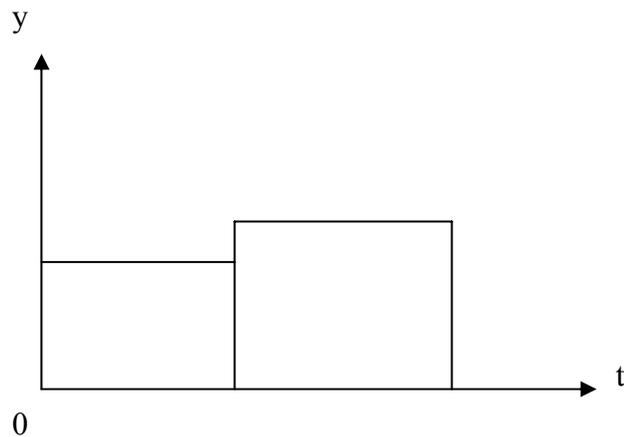


Figure 4.4 : Définition d'une nouvelle grille de calcul.

Dans cette nouvelle grille, les données initiales du calcul sont les valeurs de  $u$  calculées le long de la dernière ligne  $t = \text{constante}$  de l'ancienne grille.

Le découpage des lignes  $y = \text{constante}$  en pas  $\Delta t$  constants n'est pas du tout nécessaire puisque le schéma ne fait appel qu'à deux points à  $t$ .

La formulation est indépendante de la répartition des pas  $\Delta t$ . Il n'en est pas de même pour le maillage suivant les lignes  $y = \text{constante}$ , car les expressions des dérivées premières et secondes sont plus compliquées si on désire conserver le même ordre d'approximation. Ces expressions sont encore déterminées à partir de développements en série de Taylor.

L'opérateur Laplacien est approché dans un domaine du réseau rectangulaire  $(x, y)$  de pas  $h_1$  et  $h_2$  constitué de cinq points comme l'indique le schéma figure (4.3) Ou  $u = f(x, y)$  est une fonction de deux variables  $x$  et  $y$  parcourant le plan  $(x, y)$ .

Les écoulements de couche limite se prêtant à une résolution analytique exacte sont extrêmement rares et constituent souvent une idéalisation très poussée d'écoulements réels.

Les solutions de Blasius et de Falkner-Skan ne permettent déjà plus d'obtenir des solutions analytiques. leur intérêt est d'aboutir à une équation différentielle ordinaire théoriquement plus simple à résoudre que les équations originales qui sont des équations aux dérivées partielles non linéaires ces solutions sont exactes dans le sens où l'équation qui les représente est un résultat rigoureux des équations de la couche limite. cependant, la résolution de l'équation faisant appel à des techniques numériques est approchée.

La résolution des équations de couche limite est effectuée à l'aide de techniques numériques qui ont été et sont encore abondamment développées. Ces méthodes sont très puissantes, mais une trop grande confiance en elles pourrait pousser à croire qu'elles peuvent tout faire. Ce serait oublier que leur efficacité est intimement liée à une connaissance profonde des phénomènes physiques et des propriétés mathématiques des équations les régissant.

#### 4.4. Calcul de l'écoulement extérieur

En ce qui nous concerne, Suivant la paroi de la tuyère, les caractéristiques de tous les points sont connues, à savoir  $M$ ,  $P$ ,  $T$  et  $\rho$ . Prenons un segment élémentaire de longueur

$\Delta x$  situé entre deux points A et B indicés respectivement par ( i ) et (i+1) dont les nombres de Mach et les inclinaisons sont connus.

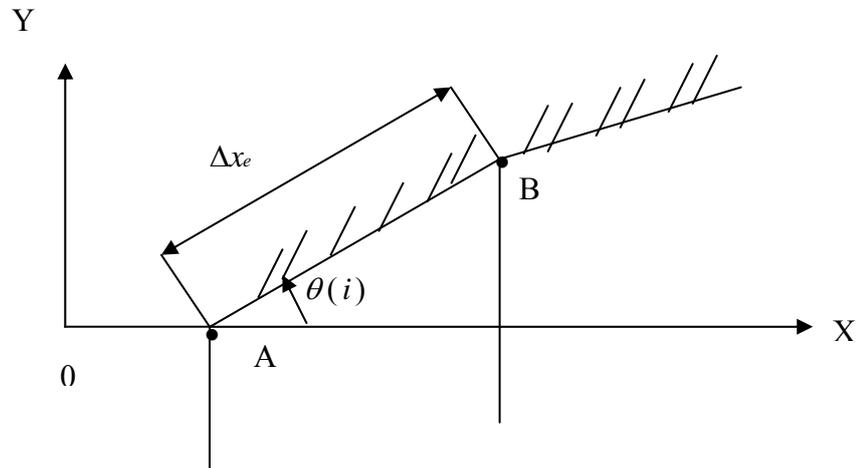


Figure 4.5 : Segment élémentaire de la paroi de la tuyère.

On définit ainsi :

$$\Delta u_e = u_e(i+1) - u_e(i) \quad (4.1)$$

$$u_e = (u_e(i+1) + u_e(i)) / 2 \quad (4.2)$$

$$M_e = (M_e(i) + M_e(i+1)) / 2 \quad (4.3)$$

$$T_e = (T_e(i) + T_e(i+1)) / 2 \quad (4.4)$$

$$\rho_e = (\rho_e(i) + \rho_e(i+1)) / 2 \quad (4.5)$$

$$\Delta \rho_e = \rho_e(i+1) - \rho_e(i) \quad (4.6)$$

$$\Delta x_e = (y(i+1) - y(i)) / \sin \theta(i) \quad (4.7)$$

$$X_e(i+1) = X_e(i) + \frac{\Delta X_e}{2} \quad (4.8)$$

$$\sin \theta(i) = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (4.9)$$

#### 4.5 . Généralisation

D'une façon plus générale, en conservant la séparation de l'écoulement en une zone de fluide parfait et une zone de couche limite et en supposant connue la forme du contour duquel on cherche à déterminer l'écoulement, le calcul du fluide parfait et celui de la couche limite sont représentés symboliquement par deux opérateurs FP et CL reliant la

vitesse extérieure et l'épaisseur de déplacement. Le calcul de l'écoulement est alors équivalent à la résolution du système :

$$u_e = \text{FP}(\delta_1) \quad (4.10)$$

$$u_e = \text{CL}(\delta_1) \quad (4.11)$$

La méthode de résolution classique et schématisée par le processus itératif suivant :

$$u_e^n = \text{FP}(\delta_1^{n-1}) \quad (4.12)$$

$$\delta_1^n = \text{CL}^{-1}(u_e^n) \quad (4.13)$$

Où  $n$  est l'ordre d'itération et  $\text{CL}^{-1}$  est l'opérateur inverse de  $\text{CL}$ .

La difficulté rencontrée est que  $\text{CL}^{-1}$  devient singulier au point de décollement notamment. Pour contourner ce problème, on peut utiliser les méthodes inverses, c'est-à-dire résoudre le système :

$$\delta_1^n = \text{FP}^{-1}(u_e^{n-1}) \quad (4.14)$$

$$u_e^n = \text{CL}(\delta_1^n) \quad (4.15)$$

L'approche la plus directe est de chercher à résoudre les équations (4.10) et (4.11) simultanément et ne pas de manière découplée.

Cette résolution simultanée est envisageable dès que l'un ou l'autre des opérateurs,  $\text{FP}$  ou  $\text{CL}$ , est simple. par exemple lorsque la couche limite est calculée avec une méthode intégrale, l'opérateur  $\text{CL}$  devient pratiquement une condition aux limites de l'opérateur  $\text{FP}$  : une telle méthode a ainsi été développée en prenant pour  $\text{FP}$  l'équation du potentiel.

Les opérateurs  $\text{FP}$  et  $\text{CL}$  sont compliqués ; par exemple,  $\text{FP}$  est la résolution des équations d'Euler et couche limite est la résolution des équations locales de couche limite.

#### 4.6 . Formulation du problème discrétisé

Le domaine de calcul  $(X_i, X_f)$  est décomposé en  $N-1$  intervalles égaux

L'estimation de  $\delta_1$  à l'itération  $N+1$  est définie par :

$$\delta_1^{n+1}(x) = \delta_1^n(x) \frac{u_{ecl}}{u_{eff}} \quad (4.16)$$

Un calcul itératif est quand même nécessaire pour au moins deux raisons : d'une part, les équations de couche limite ne sont pas linéaires ; d'autre part, le caractère fortement

elliptique de l'équation de fluide parfait conduit à un système qui est pratiquement impossible à résoudre directement dès que sa taille (liée au nombre de points de discrétisation suivant  $x$ ) devient un peu grande.

La méthode de résolution employée est une méthode itérative : à chaque itération, le calcul progresse pas à pas suivant les valeurs croissantes de  $x$  et toutes les variables inconnues situées à l'aval de l'abscisse de calcul sont évaluées à l'itération précédente.

Vu la forme convergente-divergente de la tuyère, un maillage uniforme dans le système de coordonnées  $(x, y, t)$  n'est pas possible. Une transformation mathématique est proposée pour passer d'un domaine physique  $(x, y, t)$  complexe à un domaine beaucoup plus simple  $(\zeta, \xi)$ .

#### 4.7 . Discrétisation des équations

##### 4.7.1 .Méthodes de différences finies

Leur principe est de rechercher une solution non pas en tout point de l'espace, mais en des points discrets définis par l'intersection de deux ensembles de lignes formant la grille de calcul.

Pour simplifier, on suppose que ce maillage est rectangulaire et que les lignes qui le forment sont parallèles aux axes  $y$  et  $t$

On suppose aussi que les pas  $\Delta y$  suivant  $y$  sont constants figure (4.6) :

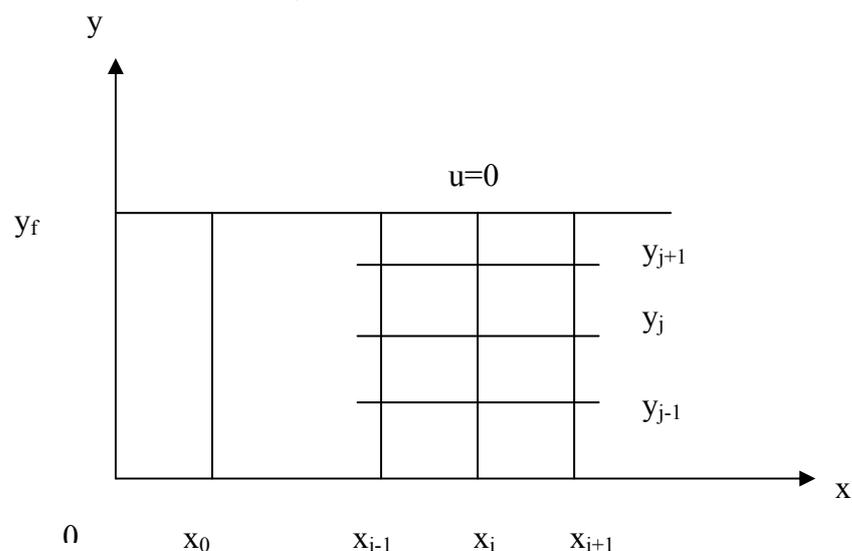


Figure 4.6 : Domaine de calcul.

Le domaine de calcul figure : 4.6 est limité par la paroi , la frontière extérieure  $y=y_f$  et la ligne de départ  $x = x_0$ , le long de laquelle sont fixées les conditions initiales .

Nous supposons que les pas  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont constants. Les inconnues sont les valeurs de  $u$  et  $v$  aux nœuds du maillage ; elles sont notées  $u_j^n$  et  $v_j^n$ .

Nous supposons aussi que l'ordonnée de la frontière  $y_f$  est constante ou quelle varie en escalier figure (4.4) de façon à éviter la limitation du domaine de calcul quand la couche limite est trop épaisse.

#### 4.7.2 . Résolution des équations discrétisées

Le principe de calcul est d'avancer pas à pas suivant les valeurs de  $t$  croissantes. Le long de la première ligne de la grille de calcul ( $t = t_0$ ), on connaît les valeurs de  $u$  en tout point : Ce sont les conditions initiales.

On cherche alors à calculer les valeurs de  $u$  aux points de la ligne suivante ( $t = t_1$ ) et le calcul progresse en suite de  $t_1$  à  $t_2$ , de  $t_2$  à  $t_3$ , etc. supposons donc que la solution soit déterminée le long de la ligne  $t = t_n$  et essayons de la déterminer en  $t_{n+1}$

#### 4.7.3 .Conditions aux limites

$$u_0^{n+1} = u_p, u_p = u_e = 0 \quad \text{avec } u_p : \text{ la vitesse à la paroi}$$

Les valeurs de  $u$  en  $y_0$  et  $y_j$  sont connues ; ce sont les conditions aux limites.

Les équations de la couche limite possède des solutions analytiques mais, en générale, la solution est obtenue à l'aide de méthodes numériques.

En particulier, le sens de propagation des perturbations nécessite la donné des conditions initiales puisque la solution en un point dépend de la solution en amont.

#### 4.7.4.Caractères des équations- conditions aux limites

Le calcul de couche limite à l'aide des équations locales est connue : la pression provient soit d'un calcul de fluide parfait, soit d'une expérience. Notons qu'il suffit de connaître la pression à la paroi puisque, suivant une normale à la paroi, la pression est constante .les inconnues du point sont donc les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse.

#### 4.8 Discrétisation

On va partager la zone de détente en  $N_p$  points y compris les deux extrémités on obtient le schéma suivant :

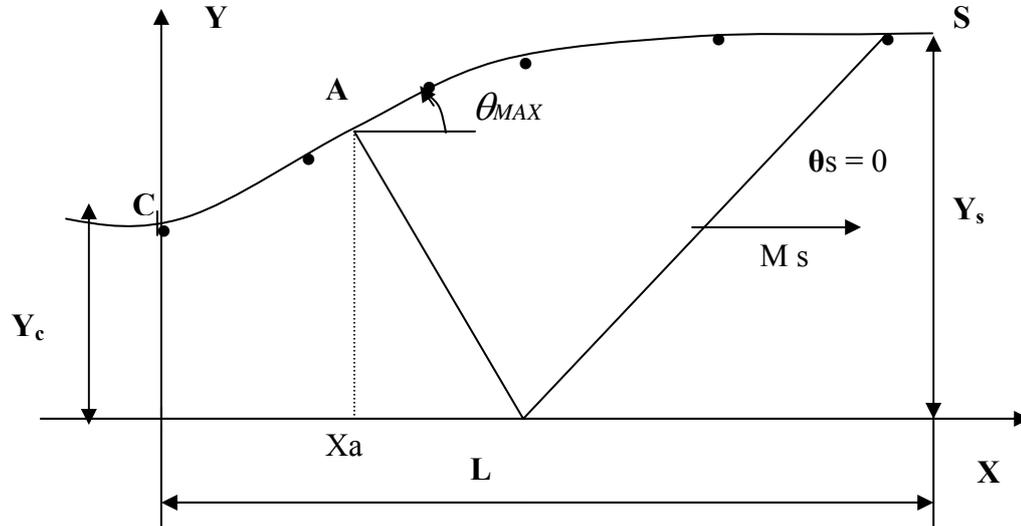


Figure 4.7 : Discrétisation de la zone de détente.

Comme il y a une symétrie de la tuyère on va considéré uniquement le calcul sur une partie de la tuyère.

Si la paroi de la tuyère contient  $N_p$  points y compris les deux points de l'extrémités, on obtient par conséquent  $(N_p - 1)$  segments de droite.

A  $t = 0$  on a :

$$q_m = \rho_e \cdot u_e \cdot S = \rho_e \cdot u_e \cdot S(x) \quad (4.17)$$

A l'instant  $t^{n+1}$  :

La section  $S(x)$  est de diamètre :

$$d^{n+1}(x) = d(x) - 2 \cdot \delta_1^{n+1} \quad (4.18)$$

Où  $\delta_1$  et l'épaisseur de déplacement.

##### 4.8.1. Calcul des nouveaux paramètres géométriques

La correction de déplacement fournit alors un nouveau profil fictif décalé de  $\delta_1$  par rapport au profil réel figure (3.4), par conséquent le nouveau diamètre de la section de la tuyère est :

$$d(i) = d_1 - 2 \cdot \delta_1(i)$$

C'est-à-dire il y a une diminution de la section.

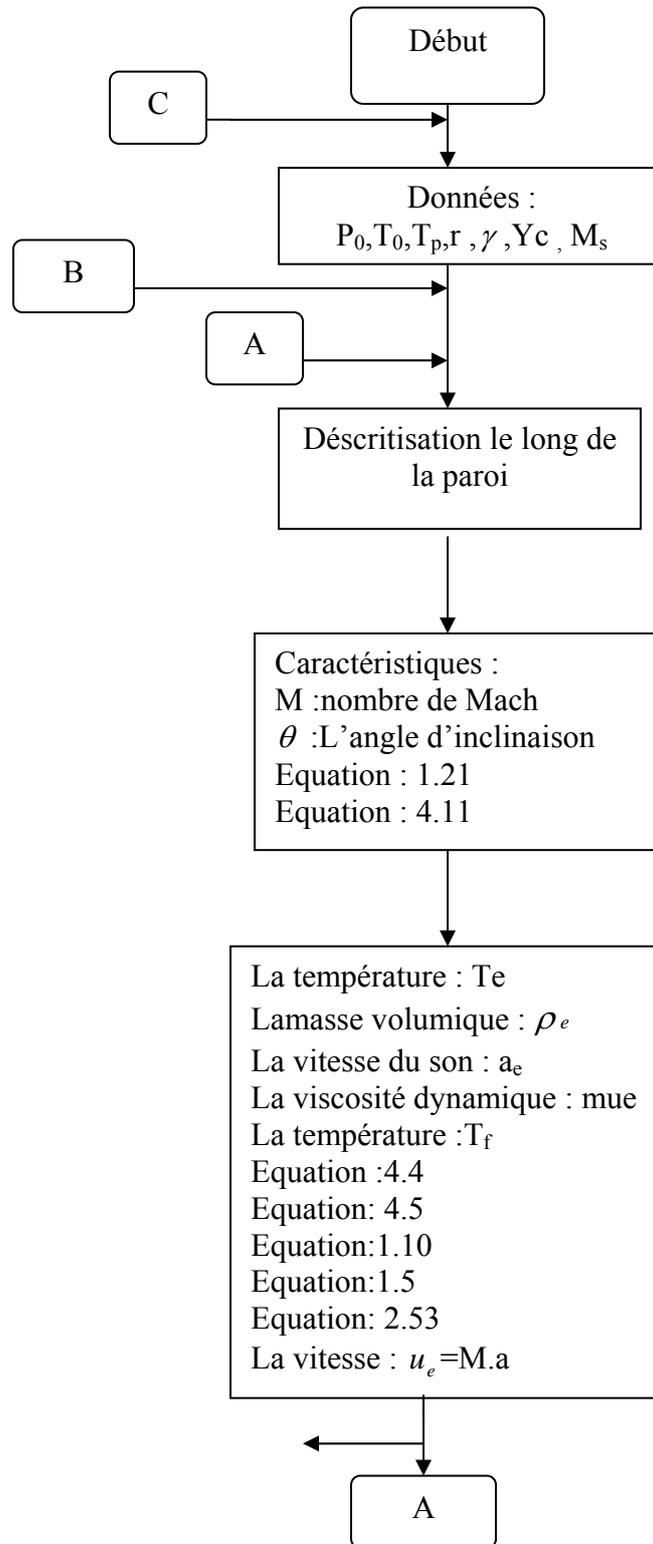
#### 4.8.2 .Calcul des nouveaux paramètres thermodynamiques

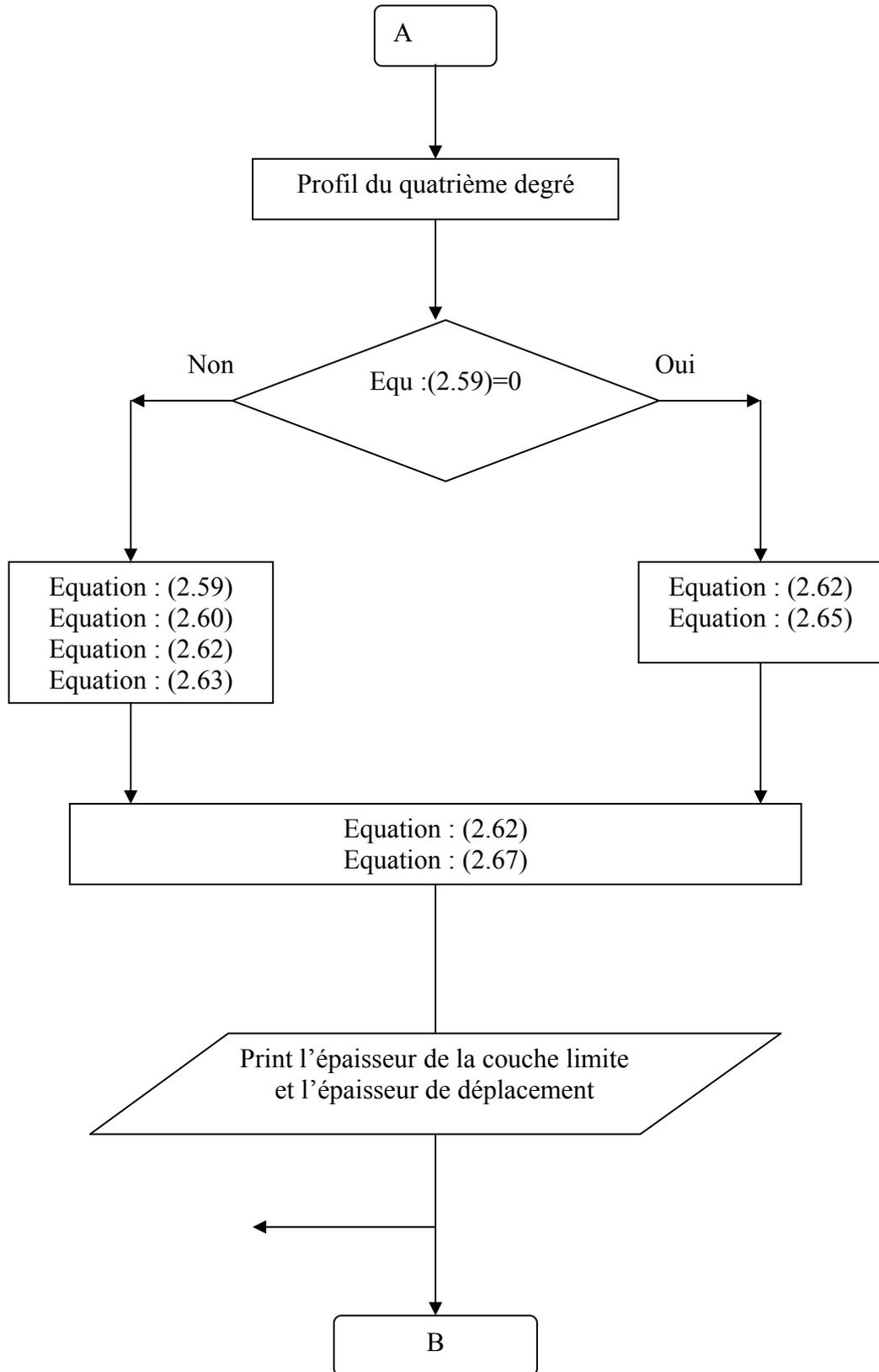
La connaissance du rapport des sections permet la détermination du nombre de Mach en chaque point de la paroi de la tuyère.

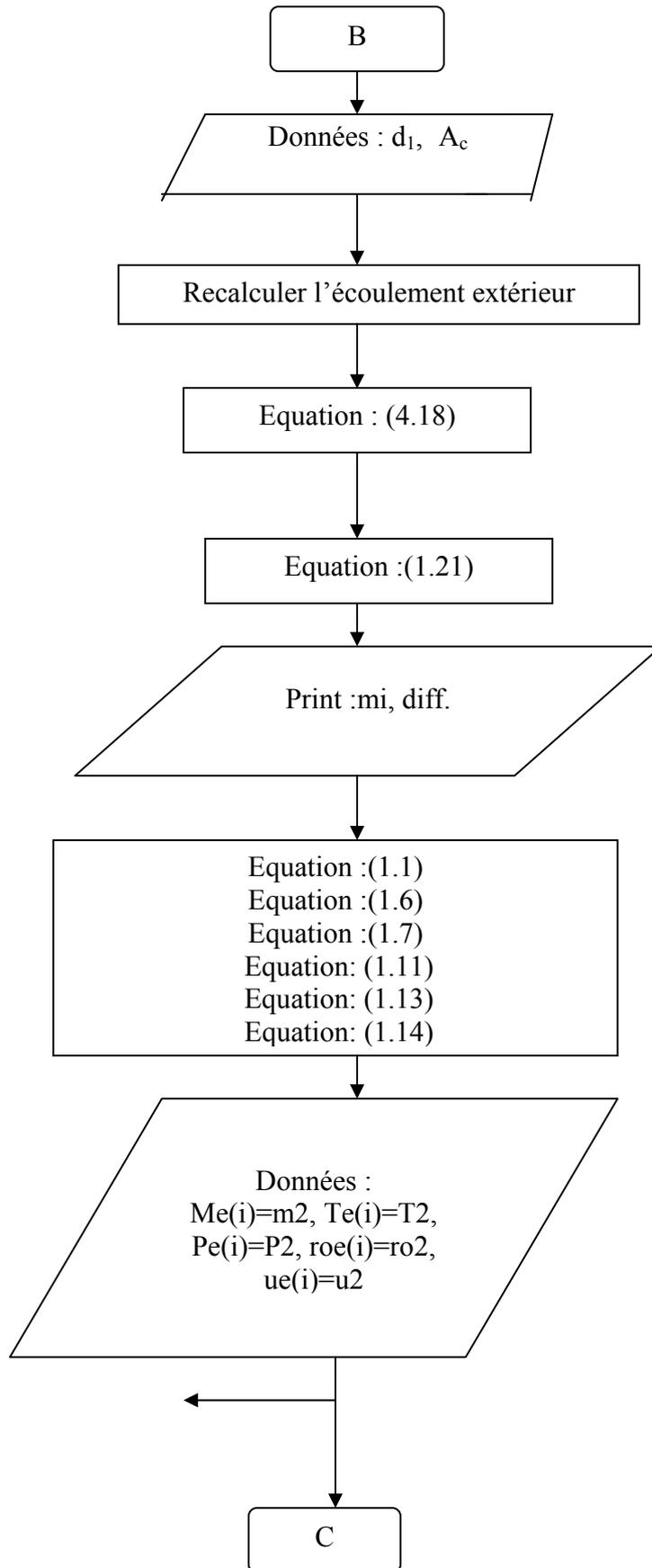
A partir des équations (1.5), (1.11), (1.14), (1.15), (1.17) et (1.18) on obtient les nouveaux paramètres de l'écoulement extérieur.

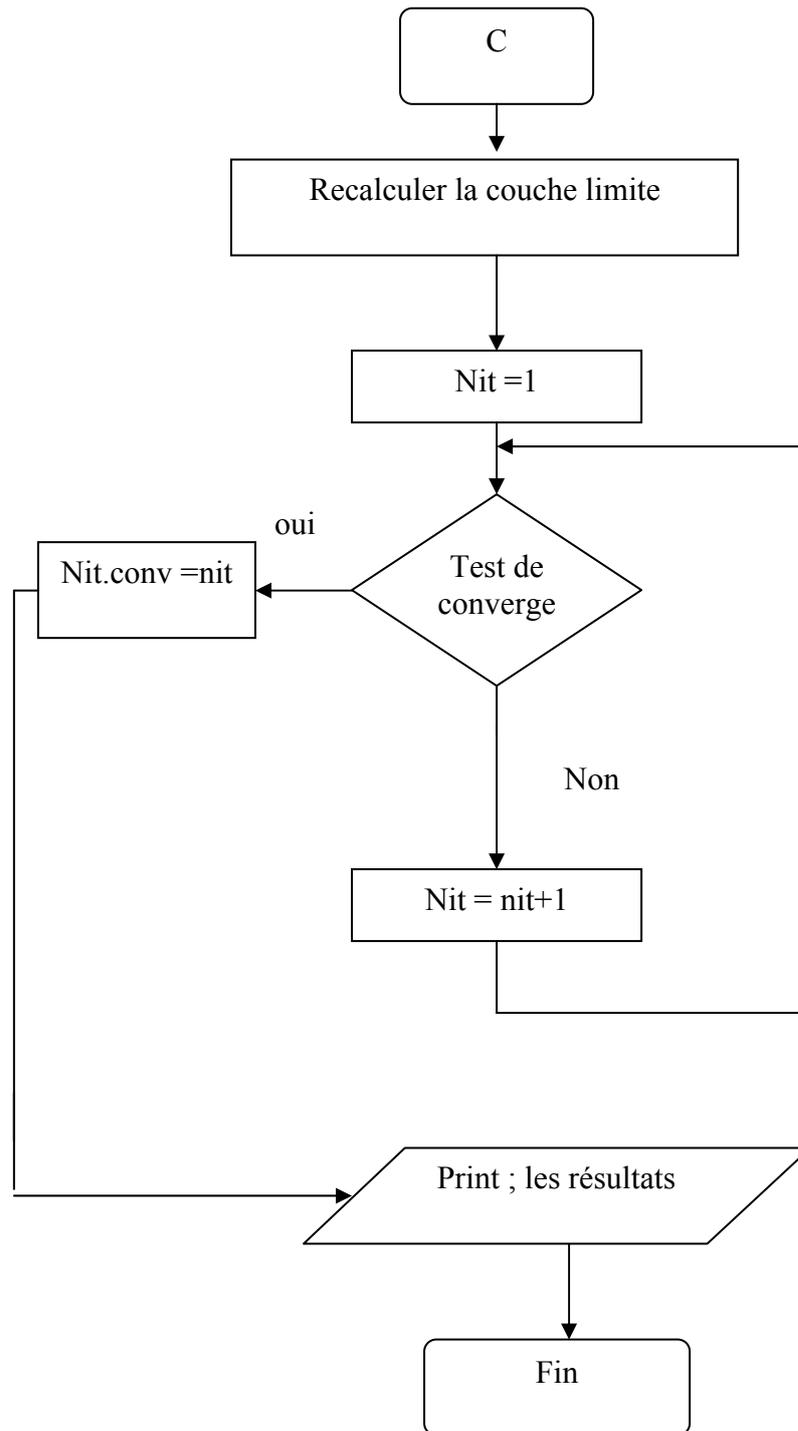
A partir de ces paramètres thermodynamiques, on calcul de nouveau l'écoulement extérieur dans la tuyère, ce qui donne en particulier la variation de  $P(x)$  nécessaire au calcul de la couche limite.

## ORGANIGRAMME DU PROGRAMME











## CHAPITRE 5

### RESULTATS ET COMMENTAIRES

#### 5.1. Introduction

Dans ce chapitre on présentera les principaux résultats concernant la variation des grandeurs caractéristiques de la couche limite à savoir l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement dans la direction de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère pour différentes températures et pressions génératrices. Et l'interaction entre la couche limite et le fluide parfait.

##### 5.1.1. Données thermodynamiques et géométriques

Les données nécessaires au lancement du programme sont représentées par les valeurs des paramètres thermodynamiques génératrices suivantes :

$$P_0=100 \text{ bars } T_0=300 \text{ K}$$

Rayon au col :  $Y_c=10\text{mm}$

Mach de sortie :  $M_s=5.77$

Gaz est de l'air :  $r = 287 \text{ J/kg}$  et  $\gamma = 1.4$

L'application du programme du calcul à permis d'atteindre les résultats présentés ci-après.

#### 5.2.Variation de $\delta$ et $\delta_i$ dans la direction de l'écoulement pour différentes températures génératrices.

D'après les figures 5.1 et 5.2 , on constate que l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement sont plus élevées lorsqu'on fait augmenter la température génératrice  $T_0$  et le nombre de Mach  $M_s$ , ce phénomène peut être expliquer par l'accroissement de l'agitation des particules du fluide à hautes températures qui fait augmenter encore plus le frottement et par conséquent l'épaisseur de la couche limite ou ceci se vérifié par l'équation 1.5 ( la viscosité augmente avec la température).

### 5.3. Variation de $\delta$ et $\delta_i$ dans la direction de l'écoulement pour différentes pressions génératrices.

D'après les figure 5.3 et 5.4 on remarque que l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement sont plus grandes si la pression génératrice est faible.

Lorsque la pression  $P_0$  passe de la valeur 100 bars à la valeur 10 bars, l'épaisseur de la couche limite augmente de 6.9 mm à 22.1mm.

Donc on peut dire que l'épaisseur  $\delta$  dépend beaucoup plus de la pression génératrice.

### 5.4 .Variation des paramètres thermodynamiques

La figure 5.5 représente la variation du rapport  $P/P_0$  le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction. La détente des gaz se réalise d'une manière rapide près du col, le reste de la partie divergente ne servant qu'à redresser l'écoulement afin de le rendre axial et obtenir ainsi une valeur maximale pour la poussée.

On constate qu'il y a une augmentation de la pression pendant l'interaction puisque la création de l'énergie cinétique a provoqué une perte d'énergie de pression.

La figure 5.6 représente la variation du rapport  $T/T_0$  le long de la paroi de la tuyère. On remarque que les sections aux voisinage du col sont chaudes à raison du rapport élevé de  $T/T_0$  au niveau de ces régions, en suite un changement considérable dans une courte région et diminution jusqu'à la section de sortie de la tuyère. C'est-à-dire le gaz à la sortie est froid par rapport à la région du col.

L'augmentation de la température pendant l'interaction est due à la transformation d'une grande partie de l'énergie mécanique en chaleur.

La figure 5.7 représente la variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction. Le profil montre une faible variation de  $M$  avec la coordonnée  $x_e$  au voisinage du col. Ce qui explique l'existence d'une zone uniforme.

On constate une diminution du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction , cette diminution est traduit par l'augmentation de la pression.

La figure 5.8 montre la variation de la vitesse de l'écoulement extérieur le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction , on constate bien qu'il existe une augmentation du

vecteur vitesse suivant la paroi, ce qui explique l'accélération des gaz. La composante verticale  $v$  diminue jusqu'à ce qu'elle devienne nulle à la section de sortie de la tuyère ce qui explique le fait que l'écoulement devient uniforme et parallèle dans la section de sortie (puisque  $\delta \ll L$  on a  $v_\delta \ll u_e$  et par suite l'écoulement est presque parallèle à la paroi).

On remarque qu'il y a une diminution de la vitesse pendant l'interaction. Cette décroissance se traduit par une diminution de forces de frottement.

(puisque l'énergie mécanique perdue est égale à l'énergie cinétique de la vitesse perdue).

La figure 5.11 traduit la variation de la masse volumique du fluide le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction. on observe une augmentation de la masse volumique.

### 5.5 .Variation de l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement le long de la paroi pendant l'interaction

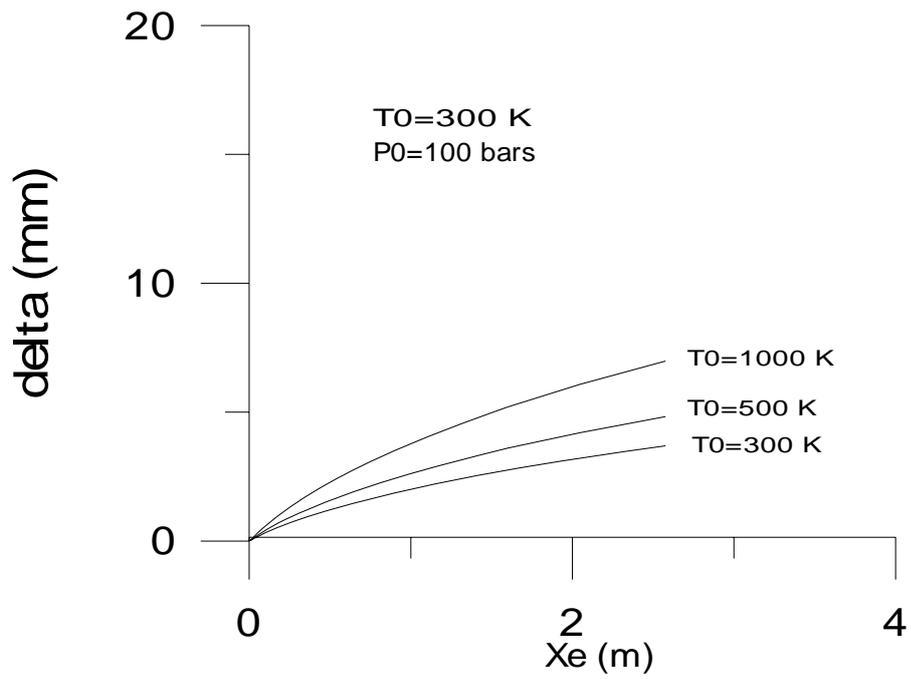
Les figures 5.9 et 5.10 représentent respectivement la variation de l'épaisseur de la couche limite et la variation de l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction. On constate qu'il y a une diminution de  $\delta$  et  $\delta_i$ , cette diminution est due à l'augmentation de la pression du fluide et la diminution de la vitesse de l'écoulement extérieur. ce qui traduit la quasi stabilité de l'écoulement.

Les différences de vitesse entraînent un transfert d'énergie mécanique des couche extérieurs vers les couches proches de la paroi, inversement, les différences des températures engendrent un transfert d'énergie thermique de la paroi vers les couches externes.

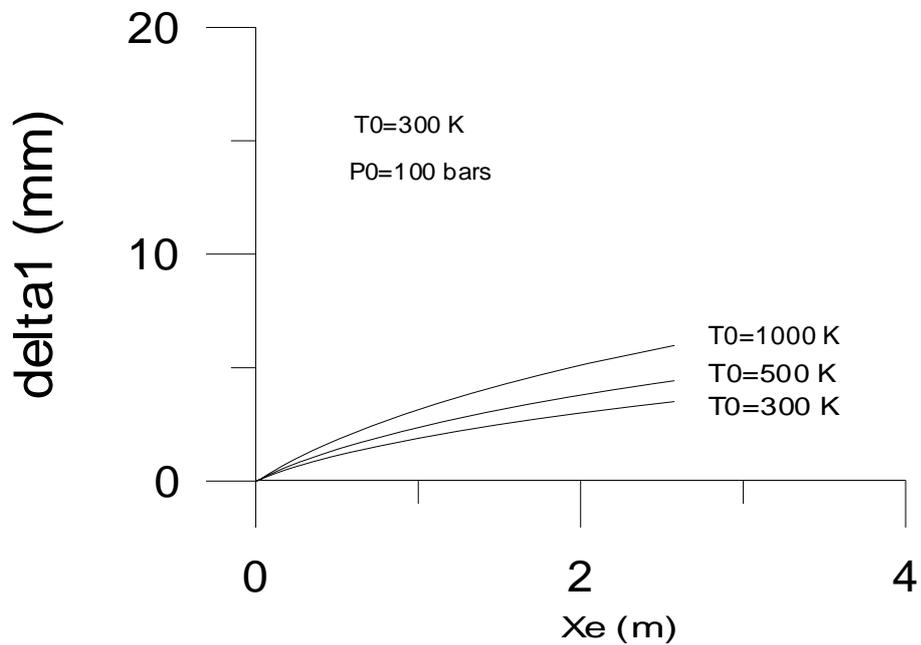
La figure 5.12 représente la variation du facteur de forme le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction. Le profil montre une diminution de  $H$ , cette décroissance est due à la diminution de l'épaisseur de déplacement.

La figure 5.13 représente le profil des vitesses dans la couche limite.

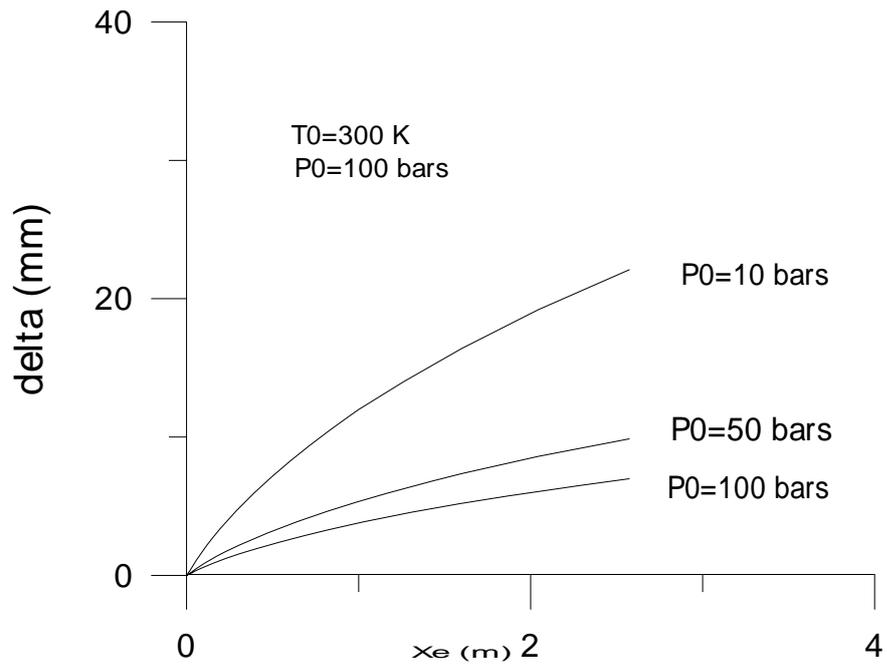
La figure 5.14 représente le profil de la tuyère calculé par la méthode des caractéristiques.



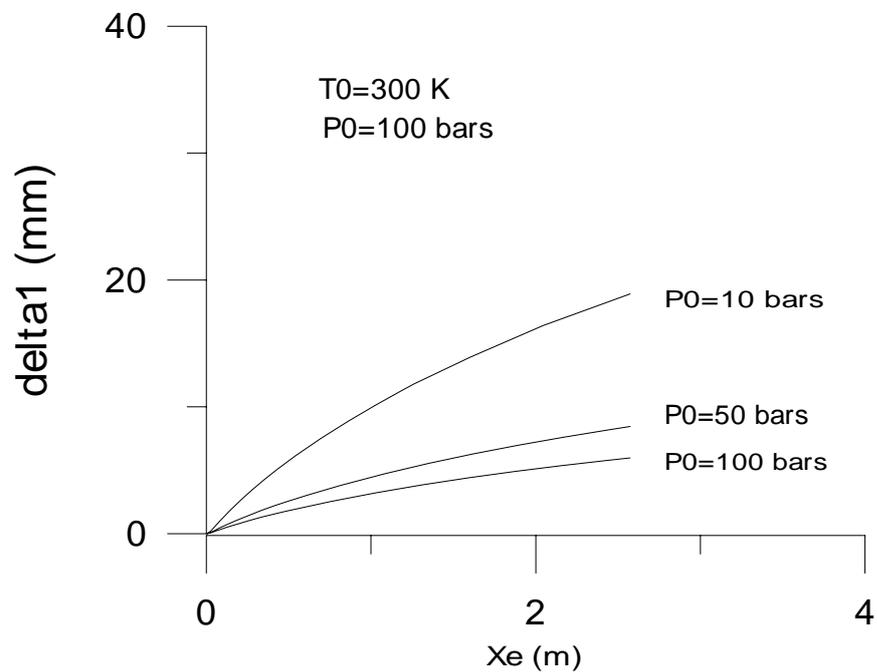
Figure(5.1) :Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de l'écoulement pour différentes températures génératrices.



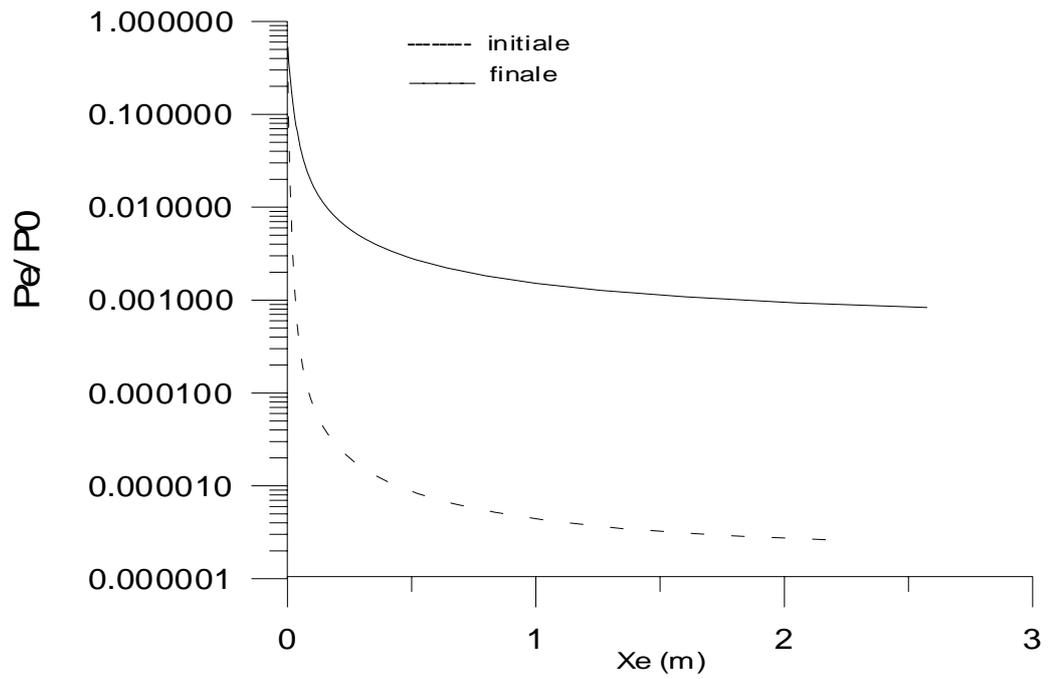
Figure(5.2) :Variation de l'épaisseur de déplacement dans la direction de l'écoulement pour différentes températures génératrices



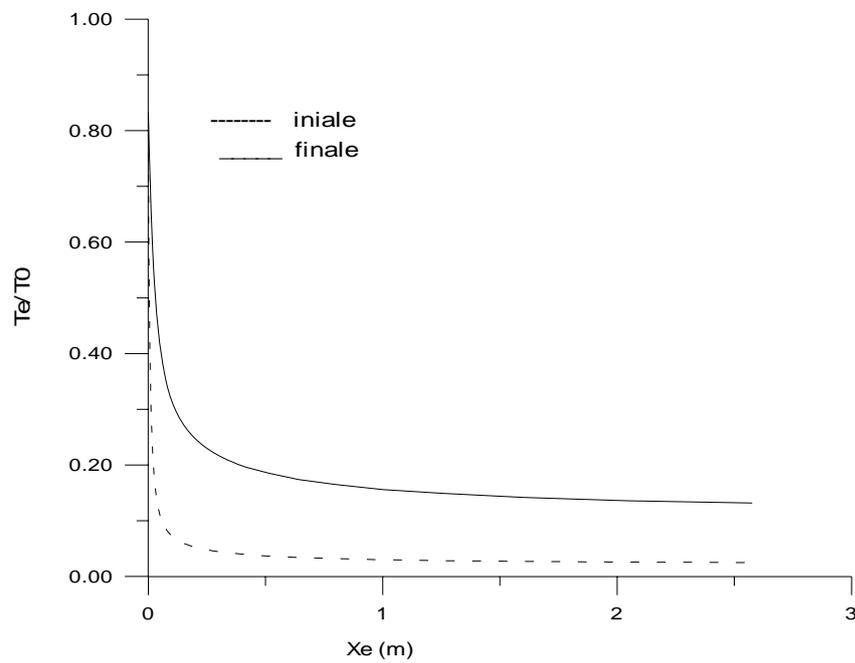
Figure(5.3) : Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de l'écoulement pour différentes pressions génératrices



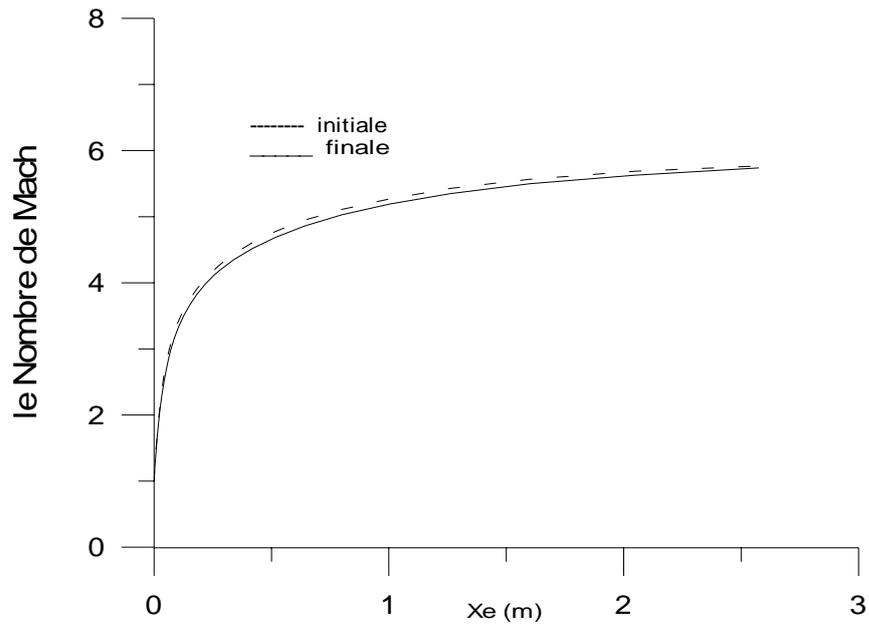
Figure(5.4) : Variation de l'épaisseur de déplacement dans la direction de l'écoulement pour différentes pressions génératrices



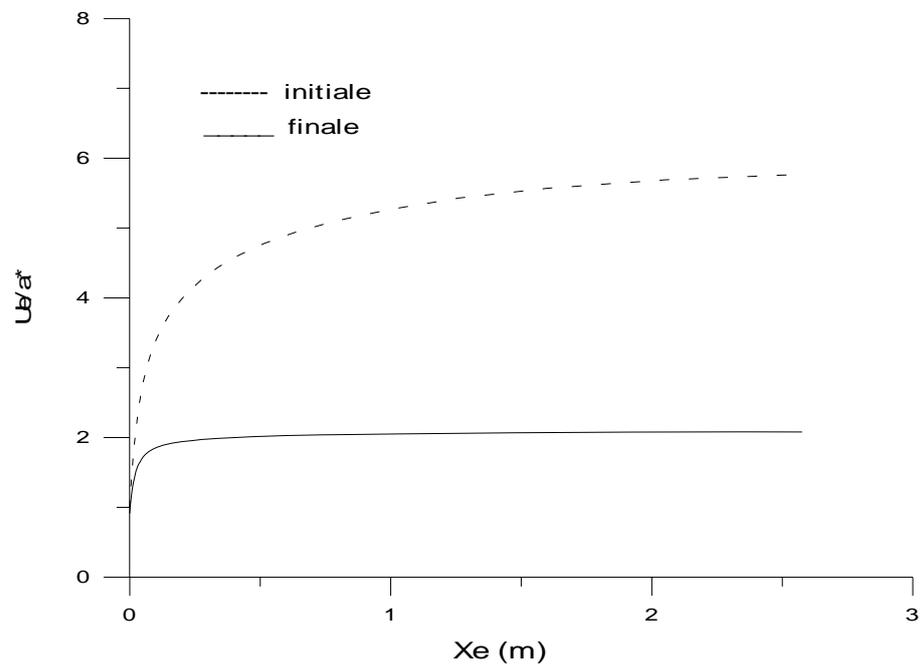
Figure(5.5) :Variation du rapport  $Pe/P_0$  dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



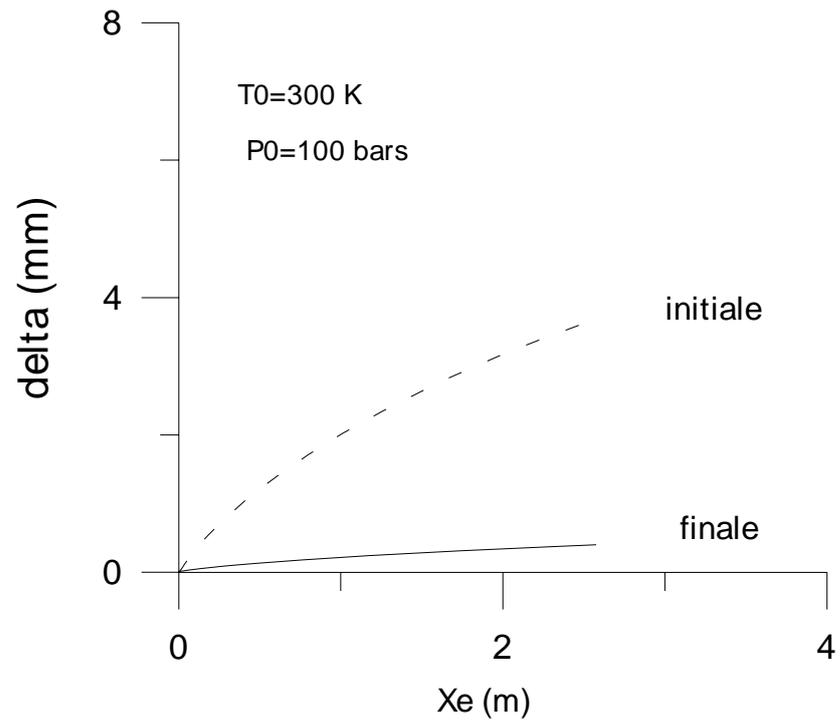
Figure(5.6) :Variation du rapport  $Te/T_0$  dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



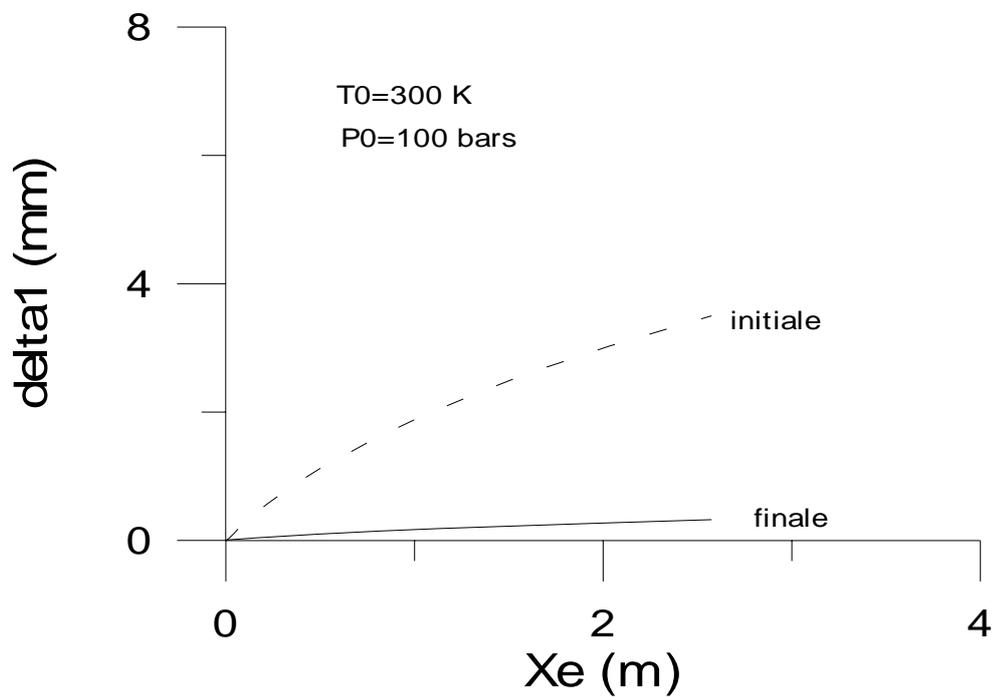
Figure(5.7) :Variation du Nombre de Mach dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



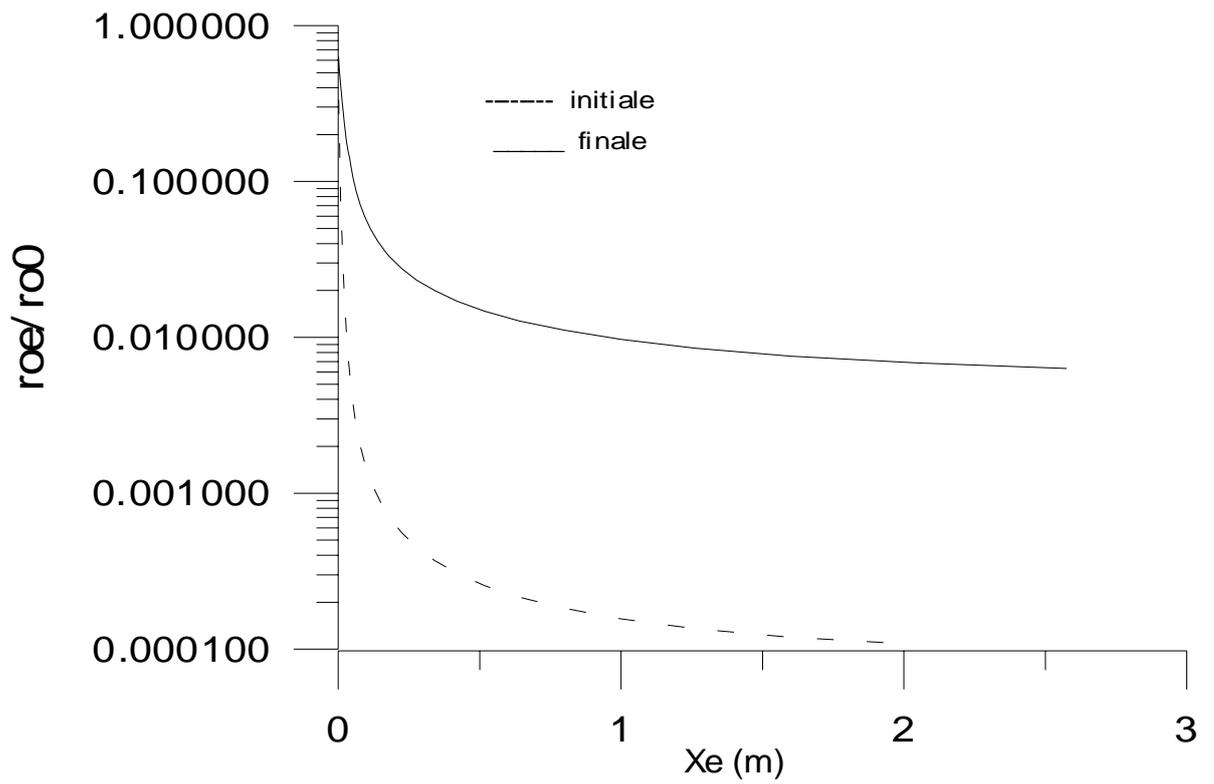
Figure(5.8) :Variation du rapport  $U_e/a^*$  dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



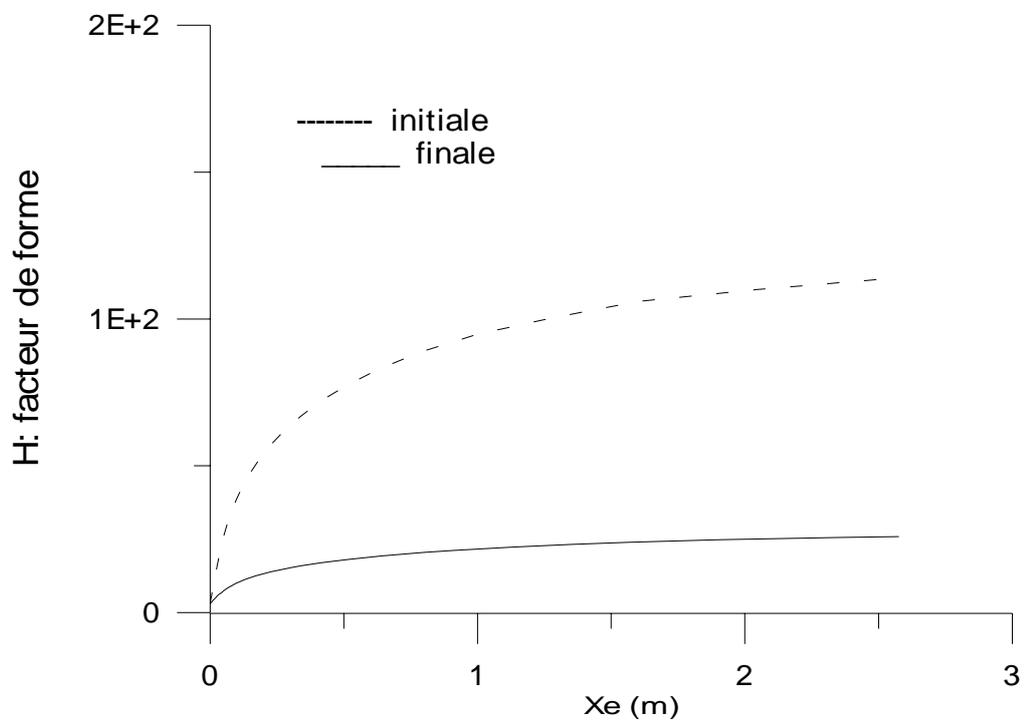
Figure(5.9) :Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



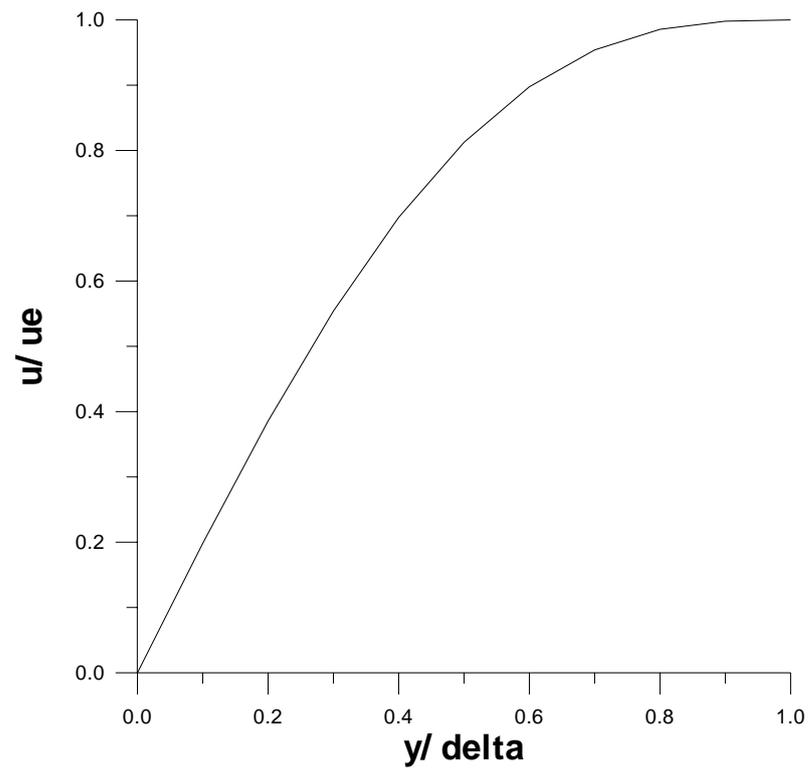
Figure(5.10) :Variation de l'épaisseur de déplacement dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



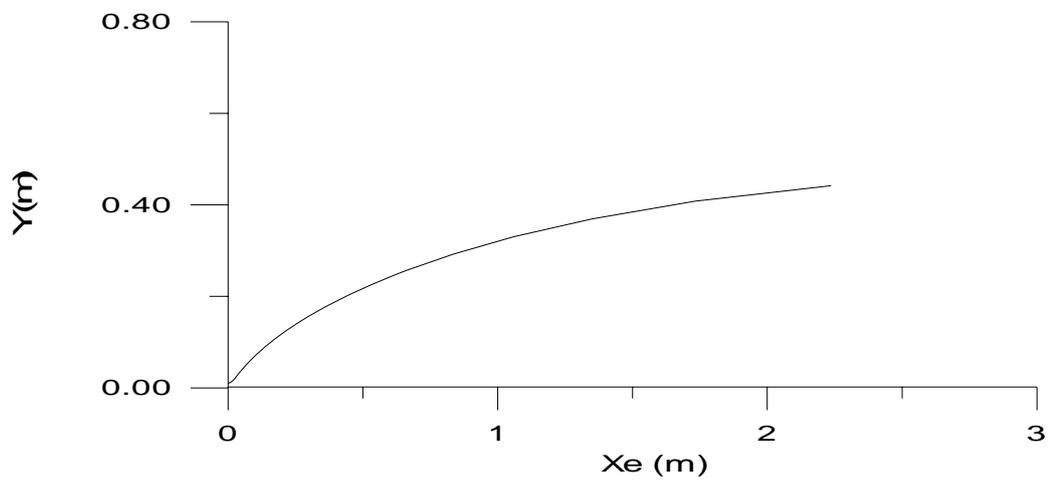
Figure(5.11) :Variation du rapport  $\rho_e/\rho_0$  dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



Figure(5.12) :Variation de  $H$  de dans la direction de l'écoulement pendant l'interaction.



Figure(5.13) :Profil des vitesses dans la couche limite.



Figure(5.14) :Profil de la tuyère.

## CONCLUSION

Dans cette thèse, on a fait l'étude de la couche limite laminaire s'établissant le long de la paroi d'une tuyère supersonique, et l'interaction entre la couche limite et l'écoulement extérieur dans le cas parfait.

L'effet de la couche limite sur l'écoulement est souvent négligeable pour des nombres de Mach modérés, l'épaisseur de la couche limite est en moyenne 5mm /mètre. Dans le cas où l'épaisseur de la couche limite est très importante, pour des nombres de Mach élevés, il faut une correction du profil, c'est-à-dire en calculant l'épaisseur de déplacement pour enfin obtenir le profil engraisé. Cette correction est nécessaire lorsqu'on veut avoir le même nombre de Mach imposé à la section de sortie de la tuyère.

Dans notre cas le profil de la tuyère est le même. Par conséquent on doit rechercher les nouveaux paramètres de l'écoulement extérieur. Cette correction peut se faire par itérations successives.

Les résultats obtenus sont représentés sous forme de courbes donnant les paramètres réels de l'écoulement à la sortie de la tuyère ainsi que l'épaisseur de la couche limite. Le même travail peut se faire pour différentes températures et pressions génératrices. Nous savons déjà que l'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement sont proportionnelles à la température génératrice et inversement proportionnelles à l'augmentation de la pression génératrice.

Les résultats sont aussi représentés en annexe sous forme de tableaux montrant les variations des paramètres thermodynamiques du fluide, et les grandeurs caractéristiques de la couche limite pendant les itérations.

On rappelle que les calculs ont été faits numériquement en utilisant les différences finies et en calculant à la fois la couche limite et l'écoulement extérieur dans le cas parfait jusqu'à la convergence du programme.

Une étude plus exacte doit se faire en Navier-Stokes en volumes finies pour le même profil de la tuyère qui a été calculé par la méthode des caractéristiques.

## APPENDICE B

Tableau 5.1 :L'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère pour :  $P_0=100$  bars  $T_0=300$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$   $M_s=5.77$  pour l'air

i	$X_e$ (m)	$Me$	Delta (m)	Delta1(m)
1	.00006	1.00	.114E-05	.372E-06
2	.00024	1.02	.242E-05	.807E-06
3	.00062	1.06	.417E-05	.148E-05
4	.00123	1.11	.634E-05	.240E-05
5	.00200	1.17	.870E-05	.350E-05
6	.00290	1.22	.113E-04	.481E-05
7	.00393	1.28	.141E-04	.638E-05
8	.00508	1.34	.173E-04	.825E-05
9	.00637	1.41	.209E-04	.105E-04
10	.00780	1.48	.250E-04	.132E-04
11	.00937	1.55	.295E-04	.163E-04
12	.01110	1.63	.346E-04	.200E-04
13	.01299	1.71	.404E-04	.244E-04
14	.01508	1.80	.470E-04	.295E-04
15	.01737	1.89	.544E-04	.353E-04
16	.01989	1.98	.627E-04	.421E-04
17	.02265	2.08	.720E-04	.499E-04
18	.02570	2.17	.825E-04	.588E-04
19	.02907	2.28	.942E-04	.689E-04
20	.03280	2.38	.107E-03	.804E-04
21	.03983	2.56	.131E-03	.101E-03
22	.05056	2.78	.168E-03	.135E-03
23	.06330	2.98	.210E-03	.173E-03
24	.07891	3.18	.260E-03	.219E-03
25	.09779	3.37	.316E-03	.271E-03
26	.12068	3.56	.381E-03	.332E-03
27	.14852	3.74	.457E-03	.402E-03
28	.18246	3.91	.543E-03	.484E-03
29	.22404	4.09	.644E-03	.579E-03
30	.27526	4.26	.761E-03	.689E-03
31	.33869	4.44	.897E-03	.819E-03
32	.41763	4.61	.106E-02	.970E-03
33	.51649	4.78	.124E-02	.115E-02
34	.64109	4.78	.146E-02	.135E-02
35	.79923	5.11	.171E-02	.160E-02
36	1.00143	5.27	.201E-02	.188E-02
37	1.26205	5.43	.235E-02	.221E-02
38	1.60087	5.57	.276E-02	.260E-02
39	2.04551	5.69	.322E-02	.304E-02
40	2.57622	5.77	.369E-02	.350E-02

Tableau 5.2 :L'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère pour : P0=100 bars T0=500 K D.sortie=921.06 Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	M	Delta (m)	Delta1 (m)
1	.00006	1.00	.146E-05	.319E-06
2	.00024	1.02	.310E-05	.696E-06
3	.00062	1.06	.534E-05	.129E-05
4	.00123	1.11	.811E-05	.213E-05
5	.00200	1.17	.111E-04	.316E-05
6	.00290	1.22	.144E-04	.441E-05
7	.00393	1.28	.181E-04	.595E-05
8	.00508	1.34	.221E-04	.781E-05
9	.00637	1.41	.268E-04	.101E-04
10	.00780	1.48	.320E-04	.129E-04
11	.00937	1.55	.378E-04	.162E-04
12	.01110	1.63	.444E-04	.201E-04
13	.01299	1.71	.518E-04	.248E-04
14	.01508	1.80	.603E-04	.304E-04
15	.01737	1.89	.698E-04	.370E-04
16	.01989	1.98	.805E-04	.447E-04
17	.02265	2.08	.925E-04	.536E-04
18	.02570	2.17	.106E-03	.639E-04
19	.02907	2.28	.121E-03	.758E-04
20	.03280	2.38	.138E-03	.894E-04
21	.03983	2.56	.168E-03	.114E-03
22	.05056	2.78	.217E-03	.155E-03
23	.06330	2.98	.272E-03	.202E-03
24	.07891	3.18	.336E-03	.258E-03
25	.09779	3.37	.409E-03	.323E-03
26	.12068	3.56	.494E-03	.398E-03
27	.14852	3.74	.592E-03	.486E-03
28	.18246	3.91	.706E-03	.589E-03
29	.22404	4.09	.837E-03	.708E-03
30	.27526	4.26	.989E-03	.848E-03
31	.33869	4.44	.117E-02	.101E-02
32	.41763	4.61	.137E-02	.120E-02
33	.51649	4.78	.162E-02	.143E-02
34	.64109	4.95	.190E-02	.169E-02
35	.79923	5.11	.223E-02	.200E-02
36	1.00143	5.27	.262E-02	.236E-02
37	1.26205	5.43	.307E-02	.278E-02
38	1.60087	5.57	.360E-02	.328E-02
39	2.04551	5.69	.420E-02	.384E-02
40	2.57622	5.77	.482E-02	.442E-02

Tableau 5.3 :L'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère pour :  $P_0=100$  bars  $T_0=1000$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$  Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	Me	Delta (m)	Delta1 (m)
1	.00006	1.00	.205E-05	.229E-06
2	.00024	1.02	.435E-05	.506E-06
3	.00062	1.06	.749E-05	.965E-06
4	.00123	1.11	.114E-04	.164E-05
5	.00200	1.17	.156E-04	.249E-05
6	.00290	1.22	.202E-04	.355E-05
7	.00393	1.28	.253E-04	.491E-05
8	.00508	1.34	.310E-04	.659E-05
9	.00637	1.41	.375E-04	.873E-05
10	.00780	1.48	.448E-04	.114E-04
11	.00937	1.55	.529E-04	.145E-04
12	.01110	1.63	.622E-04	.185E-04
13	.01299	1.71	.726E-04	.233E-04
14	.01508	1.80	.845E-04	.292E-04
15	.01737	1.89	.979E-04	.361E-04
16	.01989	1.98	.113E-03	.445E-04
17	.02265	2.08	.130E-03	.544E-04
18	.02570	2.17	.149E-03	.660E-04
19	.02907	2.28	.171E-03	.797E-04
20	.03280	2.38	.195E-03	.957E-04
21	.03983	2.56	.237E-03	.125E-03
22	.05056	2.78	.307E-03	.175E-03
23	.06330	2.98	.385E-03	.234E-03
24	.07891	3.18	.477E-03	.304E-03
25	.09779	3.37	.583E-03	.388E-03
26	.12068	3.56	.705E-03	.486E-03
27	.14852	3.74	.846E-03	.601E-03
28	.18246	3.91	.101E-02	.737E-03
29	.22404	4.09	.120E-02	.895E-03
30	.27526	4.26	.142E-02	.108E-02
31	.33869	4.44	.168E-02	.130E-02
32	.41763	4.61	.198E-02	.156E-02
33	.51649	4.78	.233E-02	.187E-02
34	.64109	4.95	.274E-02	.222E-02
35	.79923	5.11	.322E-02	.265E-02
36	1.00143	5.27	.378E-02	.314E-02
37	1.26205	5.43	.444E-02	.373E-02
38	1.60087	5.57	.520E-02	.440E-02
39	2.04551	5.69	.608E-02	.518E-02
40	2.57622	5.77	.698E-02	.597E-02

Tableau 5.4 :L'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère pour : $T_0=1000$  K  $P_0=10$  bars  $D_{\text{sortie}}=921.06$  Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	Me	Delta (m)	Delta1(m)
1	.00006	1.00	.649E-05	.725E-06
2	.00024	1.02	.137E-04	.160E-05
3	.00062	1.06	.237E-04	.305E-05
4	.00123	1.11	.359E-04	.518E-05
5	.00200	1.17	.493E-04	.786E-05
6	.00290	1.22	.639E-04	.112E-04
7	.00290	1.28	.801E-04	.155E-04
8	.00508	1.34	.981E-04	.208E-04
9	.00637	1.41	.119E-03	.276E-04
10	.00780	1.48	.142E-03	.359E-04
11	.00937	1.55	.167E-03	.460E-04
12	.01110	1.63	.197E-03	.585E-04
13	.01299	1.71	.230E-03	.737E-04
14	.01508	1.80	.267E-03	.922E-04
15	.01737	1.89	.310E-03	.114E-03
16	.01989	2.98	.357E-03	.141E-03
17	.02265	2.08	.411E-03	.172E-03
18	.02570	2.17	.471E-03	.209E-03
19	.02907	2.28	.539E-03	.252E-03
20	.03280	2.38	.616E-03	.302E-03
21	.03983	2.56	.750E-03	.395E-03
22	.05056	2.78	.972E-03	.555E-03
23	.06330	3.98	.122E-02	.739E-03
24	.07891	3.18	.151E-02	.962E-03
25	.09779	3.37	.184E-02	.123E-02
26	.12068	3.56	.223E-02	.154E-02
27	.14852	3.74	.268E-02	.190E-02
28	.18246	4.91	.319E-02	.233E-02
29	.22404	4.09	.379E-02	.283E-02
30	.27526	4.26	.449E-02	.342E-02
31	.33869	4.44	.530E-02	.412E-02
32	.41763	4.61	.625E-02	.494E-02
33	.51649	4.78	.736E-02	.590E-02
34	.64109	5.95	.865E-02	.703E-02
35	.79923	5.11	.102E-01	.837E-02
36	1.00143	5.27	.120E-01	.994E-02
37	1.26205	5.43	.140E-01	.118E-01
38	1.60087	5.57	.164E-01	.139E-01
39	2.04551	5.57	.192E-01	.164E-01
40	2.57622	5.77	.221E-01	.189E-01

Tableau 5.5 :L'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère pour :  $T_0=1000$  K  $P_0=50$  bars  $D_{\text{sortie}}=921.06$  Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	Me	Delta (m)	Delta1 (m)
1	.00006	1.00	.290E-05	.324E-06
2	.00024	1.02	.615E-05	.716E-06
3	.00062	1.06	.106E-04	.136E-05
4	.00123	1.11	.161E-04	.231E-05
5	.00200	1.17	.220E-04	.351E-05
6	.00290	1.22	.220E-04	.503E-05
7	.00393	1.28	.358E-04	.694E-05
8	.00508	1.34	.439E-04	.932E-05
9	.00637	1.41	.530E-04	.123E-04
10	.00780	1.48	.633E-04	.161E-04
11	.00937	1.55	.748E-04	.206E-04
12	.01110	1.63	.879E-04	.262E-04
13	.01299	1.71	.103E-03	.330E-04
14	.01508	1.80	.120E-03	.412E-04
15	.01737	1.89	.138E-03	.511E-04
16	.01989	1.98	.160E-03	.629E-04
17	.02265	2.08	.184E-03	.769E-04
18	.02570	2.17	.211E-03	.934E-04
19	.02907	2.28	.241E-03	.113E-03
20	.03280	2.38	.275E-03	.135E-03
21	.03983	2.56	.336E-03	.177E-03
22	.05056	2.78	.435E-03	.248E-03
23	.06330	2.98	.545E-03	.331E-03
24	.07891	3.18	.675E-03	.430E-03
25	.09779	3.37	.824E-03	.548E-03
26	.12068	3.56	.997E-03	.687E-03
27	.14852	3.74	.120E-02	.850E-03
28	.18246	3.91	.143E-02	.104E-02
29	.22404	4.09	.170E-02	.127E-02
30	.27526	4.26	.201E-02	.153E-02
31	.33869	4.44	.237E-02	.184E-02
32	.41763	4.61	.279E-02	.221E-02
33	.51649	4.78	.329E-02	.264E-02
34	.64109	4.95	.387E-02	.315E-02
35	.79923	5.11	.455E-02	.374E-02
36	1.00143	5.27	.534E-02	.445E-02
37	1.26205	5.43	.627E-02	.527E-02
38	1.60087	5.57	.735E-02	.623E-02
39	2.04551	5.69	.860E-02	.732E-02
40	2.57622	5.77	.987E-02	.845E-02

Tableau 5.6 :L'épaisseur de la couche limite et l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère pour : P0=100 bars T0=1000 K D.sortie=921.06 Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	Me	Delta (m)	Delta1 (m)
1	.00006	1.00	.205E-05	.229E-06
2	.00024	1.02	.435E-05	.506E-06
3	.00062	1.06	.749E-05	.965E-06
4	.00123	1.11	.114E-04	.164E-05
5	.00200	1.17	.156E-04	.249E-05
6	.00290	1.22	.202E-04	.355E-05
7	.00393	1.28	.253E-04	.491E-05
8	.00508	1.34	.310E-04	.659E-05
9	.00637	1.41	.375E-04	.873E-05
10	.00780	1.48	.448E-04	.114E-04
11	.00937	1.55	.529E-04	.145E-04
12	.01110	1.63	.622E-04	.185E-04
13	.01299	1.71	.726E-04	.233E-04
14	.01508	1.80	.726E-04	.292E-04
15	.01737	1.89	.979E-04	.361E-04
16	.01989	1.98	.113E-03	.445E-04
17	.02265	2.08	.130E-03	.544E-04
18	.02570	2.17	.149E-03	.660E-04
19	.02907	2.28	.171E-03	.797E-04
20	.03280	2.38	.195E-03	.957E-04
21	.03983	2.58	.237E-03	.125E-03
22	.05056	2.78	.307E-03	.175E-03
23	.06330	2.98	.385E-03	.234E-03
24	.07891	3.18	.477E-03	.304E-03
25	.09779	3.37	.583E-03	.388E-03
26	.12068	3.56	.705E-03	.486E-03
27	.14852	3.74	.846E-03	.601E-03
28	.18246	3.91	.101E-02	.737E-03
29	.22404	4.09	.120E-02	.895E-03
30	.27526	4.26	.142E-02	.108E-02
31	.33869	4.44	.168E-02	.130E-02
32	.41763	4.61	.198E-02	.156E-02
33	.51649	4.78	.233E-02	.187E-02
34	.64109	4.95	.274E-02	.222E-02
35	.79923	5.11	.322E-02	.265E-02
36	1.00143	5.27	.378E-02	.314E-02
37	1.26205	5.43	.444E-02	.373E-02
38	1.60087	5.57	.520E-02	.440E-02
39	2.04551	5.69	.608E-02	.518E-02
40	2.57622	5.77	.698E-02	.597E-02

Tableau 5.7 :Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction pour :  $P_0=100$  bars  $T_0=300$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$   $M_s=5.77$  pour l'air

i	Xe (m)	$M_i$	$M_f$
1	.00006	1.00	1.00
2	.00024	1.02	1.00
3	.00062	1.06	1.03
4	.00123	1.11	1.09
5	.00200	1.17	1.14
6	.00290	1.22	1.19
7	.00393	1.28	1.25
8	.00508	1.34	1.31
9	.00637	1.41	1.37
10	.00780	1.48	1.45
11	.00937	1.55	1.51
12	.01110	1.63	1.59
13	.01299	1.71	1.67
14	.01508	1.80	1.75
15	.01737	1.89	1.84
16	.01989	1.98	1.93
17	.02265	2.08	2.03
18	.02570	2.17	2.12
19	.02907	2.28	2.22
20	.03280	2.38	2.33
21	.03983	2.56	2.44
22	.05056	2.78	2.68
23	.06330	2.98	2.88
24	.07891	3.18	3.08
25	.09779	3.37	3.28
26	.12068	3.56	3.46
27	.14852	3.74	3.65
28	.18246	3.91	3.83
29	.22404	4.09	4.00
30	.27526	4.26	4.18
31	.33869	4.44	4.35
32	.41763	4.61	4.52
33	.51649	4.78	4.69
34	.64109	4.95	4.86
35	.79923	5.11	5.03
36	1.00143	5.27	5.19
37	1.26205	5.43	5.35
38	1.60087	5.57	5.50
39	2.04551	5.69	5.63
40	2.57622	5.77	5.74

Tableau 5.8: Variation de la pression le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction  
pour :  $P_0=100$  bars  $T_0=300$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$   $M_s=5.77$  pour l'air

i	Xe(m)	$P_i$ (pa)	$P_f$ (pa)
1	.00006	.528E+07	.528E+07
2	.00024	.528E+07	.528E+07
3	.00062	.415E+07	.508E+07
4	.00123	.295E+07	.477E+07
5	.00200	.213E+07	.447E+07
6	.00290	.155E+07	.418E+07
7	.00393	.110E+07	.386E+07
8	.00508	.795E+06	.356E+07
9	.00637	.567E+06	.325E+07
10	.00780	.398E+06	.294E+07
11	.00937	.288E+06	.267E+07
12	.01110	.204E+06	.238E+07
13	.01299	.145E+06	.212E+07
14	.01508	.103E+06	.187E+07
15	.01737	.735E+05	.163E+07
16	.01989	.525E+05	.142E+07
17	.02265	.376E+05	.123E+07
18	.02570	.271E+05	.105E+07
19	.02907	.196E+05	.901E+06
20	.03280	.142E+05	.765E+06
21	.03983	.104E+05	.647E+06
22	.05056	.536E+04	.445E+06
23	.06330	.319E+04	.325E+06
24	.07891	.199E+04	.240E+06
25	.09779	.130E+04	.181E+06
26	.12068	.881E+03	.138E+06
27	.14852	.616E+03	.107E+06
28	.18246	.439E+03	.832E+05
29	.22404	.322E+03	.658E+05
30	.27526	.238E+03	.522E+05
31	.33869	.179E+03	.418E+05
32	.41763	.136E+03	.336E+05
33	.51649	.105E+03	.272E+05
34	.64109	.820E+02	.222E+05
35	.79923	.647E+02	.182E+05
36	1.00143	.517E+02	.151E+05
37	1.26205	.419E+02	.126E+05
38	1.60087	.346E+02	.107E+05
39	2.04551	.293E+02	.931E+04
40	2.57622	.257E+02	.829E+04

Tableau 5.9: Variation de la température le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction pour:  $P_0=100$  bars  $T_0=300$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$  Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	$T_i$ (K)	$T_f$ (K)
1	.00006	.250E+03	.250E+03
2	.00024	.242E+03	.250E+03
3	.00062	.223E+03	.247E+03
4	.00123	.202E+03	.243E+03
5	.00200	.184E+03	.238E+03
6	.00290	.168E+03	.234E+03
7	.00393	.153E+03	.229E+03
8	.00508	.139E+03	.223E+03
9	.00637	.126E+03	.218E+03
10	.00780	.114E+03	.212E+03
11	.00937	.104E+03	.206E+03
12	.01110	.941E+02	.199E+03
13	.01299	.854E+02	.193E+03
14	.01508	.774E+02	.186E+03
15	.01737	.703E+02	.179E+03
16	.01989	.639E+02	.172E+03
17	.02265	.582E+02	.165E+03
18	.02570	.530E+02	.158E+03
19	.02907	.483E+02	.151E+03
20	.03280	.441E+02	.144E+03
21	.03983	.385E+02	.137E+03
22	.05056	.325E+02	.123E+03
23	.06330	.282E+02	.113E+03
24	.07891	.248E+02	.103E+03
25	.09779	.220E+02	.953E+02
26	.12068	.198E+02	.882E+02
27	.14852	.179E+02	.820E+02
28	.18246	.163E+02	.764E+02
29	.22404	.150E+02	.714E+02
30	.27526	.138E+02	.668E+02
31	.33869	.127E+02	.627E+02
32	.41763	.118E+02	.589E+02
33	.51649	.110E+02	.555E+02
34	.64109	.102E+02	.523E+02
35	.79923	.957E+01	.495E+02
36	1.00143	.899E+01	.469E+02
37	1.26205	.849E+01	.446E+02
38	1.60087	.807E+01	.425E+02
39	2.04551	.773E+01	.408E+02
40	2.57622	.751E+01	.395E+02

Tableau 5.10 :Variation de la masse volumique le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction pour : P0=100 bars T0=300 K D.sortie=921.06 Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	Me	$\rho_e$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_e$ (kg/m <sup>3</sup> )
1	.00006	1.00	.736E+02	.736E+02
2	.00024	1.02	.678E+02	.736E+02
3	.00062	1.06	.553E+02	.716E+02
4	.00123	1.11	.435E+02	.684E+02
5	.00200	1.17	.346E+02	.653E+02
6	.00290	1.22	.274E+02	.622E+02
7	.00393	1.28	.215E+02	.589E+02
8	.00508	1.34	.170E+02	.555E+02
9	.00637	1.41	.133E+02	.521E+02
10	.00780	1.48	.104E+02	.485E+02
11	.00937	1.55	.820E+01	.452E+02
12	.01110	1.63	.643E+01	.417E+02
13	.01299	1.71	.504E+01	.383E+02
14	.01508	1.80	.395E+01	.350E+02
15	.01737	1.89	.310E+01	.318E+02
16	.01989	1.98	.244E+01	.288E+02
17	.02265	2.08	.193E+01	.260E+02
18	.02570	2.17	.153E+01	.233E+02
19	.02907	2.28	.121E+01	.208E+02
20	.03280	2.38	.967E+00	.185E+02
21	.03983	2.56	.697E+00	.164E+02
22	.05056	2.78	.453E+00	.126E+02
23	.06330	2.98	.317E+00	.101E+02
24	.07891	3.18	.229E+00	.809E+01
25	.09779	3.37	.171E+00	.661E+01
26	.12068	3.56	.131E+00	.545E+01
27	.14852	3.74	.102E+00	.454E+01
28	.18246	3.91	.807E-01	.380E+01
29	.22404	4.09	.648E-01	.321E+01
30	.27526	4.26	.526E-01	.272E+01
31	.33869	4.44	.431E-01	.232E+01
32	.41763	4.61	.356E-01	.199E+01
33	.51649	4.78	.297E-01	.171E+01
34	.64109	4.95	.249E-01	.148E+01
35	.79923	5.11	.211E-01	.128E+01
36	1.00143	5.27	.181E-01	.112E+01
37	1.26205	5.43	.157E-01	.989E+00
38	1.60087	5.57	.138E-01	.880E+00
39	2.04551	5.69	.124E-01	.794E+00
40	2.57622	5.77	.115E-01	.731E+00

Tableau 5.11 :Variation de la viscosité dynamique le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction pour : P0=100 bars T0=300 K D.sortie=921.06 Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	$\mu_i$ (kg/m.s)	$\mu_f$ (kg/m.s)
1	.00006	.833E+03	.372E-04
2	.00024	.806E+03	.372E-04
3	.00062	.742E+03	.356E-04
4	.00123	.674E+03	.335E-04
5	.00200	.615E+03	.315E-04
6	.00290	.560E+03	.297E-04
7	.00393	.509E+03	.279E-04
8	.00508	.463E+03	.262E-04
9	.00637	.419E+03	.245E-04
10	.00780	.381E+03	.228E-04
11	.00937	.346E+03	.213E-04
12	.01110	.314E+03	.198E-04
13	.01299	.285E+03	.184E-04
14	.01508	.258E+03	.170E-04
15	.01737	.234E+03	.158E-04
16	.01989	.213E+03	.146E-04
17	.02265	.194E+03	.135E-04
18	.02570	.177E+03	.124E-04
19	.02907	.161E+03	.114E-04
20	.03280	.147E+03	.105E-04
21	.03983	.128E+03	.968E-05
22	.05056	.108E+03	.807E-05
23	.06330	.939E+02	.695E-05
24	.07891	.826E+02	.603E-05
25	.09779	.735E+02	.530E-05
26	.12068	.660E+02	.469E-05
27	.14852	.598E+02	.418E-05
28	.18246	.545E+02	.374E-05
29	.22404	.499E+02	.337E-05
30	.27526	.459E+02	.304E-05
31	.33869	.424E+02	.276E-05
32	.41763	.393E+02	.251E-05
33	.51649	.365E+02	.229E-05
34	.64109	.341E+02	.209E-05
35	.79923	.319E+02	.192E-05
36	1.00143	.300E+02	.177E-05
37	1.26205	.283E+02	.164E-05
38	1.60087	.269E+02	.153E-05
39	2.04551	.258E+02	.144E-05
40	2.57622	.250E+02	.137E-05

Tableau 5.12 :Variation de la vitesse de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction pour : $P_0=100$  bars  $T_0=300$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$  Ms= $5.77$  pour l'air

i	Xe (m)	$V_i$ (m/s)	$V_f$ (m/s)
1	.00006	.317E+03	.317E+03
2	.00024	.317E+03	.317E+03
3	.00062	.317E+03	.326E+03
4	.00123	.317E+03	.339E+03
5	.00200	.317E+03	.352E+03
6	.00290	.317E+03	.365E+03
7	.00393	.317E+03	.379E+03
8	.00508	.317E+03	.392E+03
9	.00637	.317E+03	.407E+03
10	.00780	.317E+03	.422E+03
11	.00937	.317E+03	.435E+03
12	.01110	.317E+03	.450E+03
13	.01299	.317E+03	.465E+03
14	.01508	.317E+03	.479E+03
15	.01737	.317E+03	.493E+03
16	.01989	.317E+03	.508E+03
17	.02265	.317E+03	.521E+03
18	.02570	.317E+03	.535E+03
19	.02907	.317E+03	.547E+03
20	.03280	.317E+03	.560E+03
21	.03983	.317E+03	.572E+03
22	.05056	.317E+03	.596E+03
23	.06330	.317E+03	.613E+03
24	.07891	.317E+03	.629E+03
25	.09779	.317E+03	.641E+03
26	.12068	.317E+03	.652E+03
27	.14852	.317E+03	.662E+03
28	.18246	.317E+03	.670E+03
29	.22404	.317E+03	.678E+03
30	.27526	.317E+03	.684E+03
31	.33869	.317E+03	.690E+03
32	.41763	.317E+03	.696E+03
33	.51649	.317E+03	.701E+03
34	.64109	.317E+03	.705E+03
35	.79923	.317E+03	.709E+03
36	1.00143	.317E+03	.713E+03
37	1.26205	.317E+03	.716E+03
38	1.60087	.317E+03	.719E+03
39	2.23651	.317E+03	.722E+03
40	2.79182	.317E+03	.723E+03

Tableau 5.13: Variation de L'épaisseur de la couche limite le long de la paroi de la tuyère pendant l'interaction pour :  $P_0=100$  bars  $T_0=300$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$  Ms=5.77 pour l'air

i	Xe (m)	Delta <sub>i</sub> (m)	Delta <sub>f</sub> (m)
1	.00006	.114E-05	.120E-05
2	.00024	.242E-05	.244E-05
3	.00062	.417E-05	.382E-05
4	.00123	.634E-05	.521E-05
5	.00200	.870E-05	.645E-05
6	.00290	.113E-04	.754E-05
7	.00393	.141E-04	.853E-05
8	.00508	.173E-04	.943E-05
9	.00637	.209E-04	.103E-04
10	.00780	.250E-04	.111E-04
11	.00937	.295E-04	.119E-04
12	.01110	.346E-04	.127E-04
13	.01299	.404E-04	.136E-04
14	.01508	.470E-04	.144E-04
15	.01737	.544E-04	.153E-04
16	.01989	.627E-04	.163E-04
17	.02265	.720E-04	.173E-04
18	.02570	.825E-04	.173E-04
19	.02907	.942E-04	.197E-04
20	.03280	.107E-03	.210E-04
21	.03983	.131E-03	.227E-04
22	.05056	.168E-03	.266E-04
23	.06330	.210E-03	.308E-04
24	.07891	.260E-03	.358E-04
25	.09779	.316E-03	.416E-04
26	.12068	.381E-03	.482E-04
27	.14852	.457E-03	.558E-04
28	.18246	.543E-03	.647E-04
29	.22404	.644E-03	.749E-04
30	.27526	.761E-03	.868E-04
31	.33869	.897E-03	.101E-03
32	.41763	.106E-02	.117E-03
33	.51649	.124E-02	.136E-03
34	.64109	.146E-02	.158E-03
35	.79923	.171E-02	.184E-03
36	1.00143	.201E-02	.215E-03
37	1.26205	.235E-02	.252E-03
38	1.60087	.276E-02	.295E-03
39	2.04551	.322E-02	.345E-03
40	2.57622	.369E-02	.400E-03

Tableau 5.14: Variation de l'épaisseur de déplacement le long de la paroi de la tuyère  
pour :  $P_0=100$  bars  $T_0=300$  K  $D_{\text{sortie}}=921.06$   $M_s=5.77$  pour l'air

i	$X_e$ (m)	$\Delta l_i$ (m)	$\Delta l_f$ (m)
1	.00006	.372E-06	.389E-06
2	.00024	.807E-06	.793E-06
3	.00062	.148E-05	.126E-05
4	.00123	.240E-05	.174E-05
5	.00200	.350E-05	.219E-05
6	.00290	.481E-05	.261E-05
7	.00393	.638E-05	.301E-05
8	.00508	.825E-05	.339E-05
9	.00637	.105E-04	.378E-05
10	.00780	.132E-04	.419E-05
11	.00937	.163E-04	.460E-05
12	.01110	.200E-04	.504E-05
13	.01299	.244E-04	.550E-05
14	.01508	.295E-04	.601E-05
15	.01737	.353E-04	.657E-05
16	.01989	.421E-04	.718E-05
17	.02265	.499E-04	.785E-05
18	.02570	.588E-04	.861E-05
19	.02907	.689E-04	.944E-05
20	.03280	.804E-04	.104E-04
21	.03983	.101E-03	.115E-04
22	.05056	.135E-03	.144E-04
23	.06330	.173E-03	.174E-04
24	.07891	.219E-03	.211E-04
25	.09779	.271E-03	.254E-04
26	.12068	.332E-03	.305E-04
27	.14852	.402E-03	.363E-04
28	.18246	.484E-03	.432E-04
29	.22404	.579E-03	.512E-04
30	.27526	.689E-03	.607E-04
31	.33869	.819E-03	.718E-04
32	.41763	.970E-03	.849E-04
33	.51649	.115E-02	.100E-03
34	.64109	.135E-02	.119E-03
35	.79923	.160E-02	.140E-03
36	1.00143	.188E-02	.166E-03
37	1.26205	.221E-02	.197E-03
38	1.60087	.260E-02	.233E-03
39	2.04551	.304E-02	.275E-03
40	2.57622	.350E-02	.321E-03

## REFERENCES

1. SCHLICHTING. "Boundary layer theory". Mc Graw.Hill Book COMPANY.1968.
2. J-Cousteix : "couche limite laminaire", Editions CEPADUES , décembre 1988.
3. Rabah Haoui : "programme expert pour tuyères supersoniques et conception de la Souffleries a choc": Thèse de Magister. Ecole national polytechnique Alger,1982.
4. Inge L.RYHMING "Dynamique des fluides" Presses polytechniques Romondes,1984.
5. Edmond A. BRUN . André Martinot. Lagarde "Mécanique des fluides" DUNOD 1960.
6. John D.Anderson, Jr "Modern compressible Flow :With Historical perspective", Mc Graw-Hill Book company New York,1982.
7. John D Anderson, Jr , "Fundamentals of aerodynamic", Mc Craw-Hill Book Company, New York, 1988.
8. Dale A. Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher" Computational fluid Mechanics And Heat Transfer " Editions Hemisphere Publishing Corporation 1984.
9. Boujema Omar : " Etude de la couche limite turbulente sur plaque plane en présence d'obstacle à arête vives" : thèse de Magister l'U.S.T.H.B 1983.
10. P G Hill et CR Peterson, "Mechanics and thermodynamics of propulsion" Wesley pub. C .o Inc. 1965.
11. R-Comolet: " Mécanique expérimentale de fluides ", Tome II ,Edition Masson, 1982.
12. BEKKA. N. "Approche numérique des couches limites hypersoniques", Thèse de Magister , département d'Aéronautique ,2000.
13. Mac CORMACK .R. W. " Numerical solution to the integration of a shock wave with a laminar using Gauss-Seidel Line relaxation", Comput & fluids.Vol.17N<sup>o</sup> 1, pp.135-150,1989.

