

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS
SETIF



MEMOIRE

Présenté par :

HADDAR HOCINE

Pour obtenir le titre de **Magister**
de l'institut d'Electronique

Option
CONTRÔLE

COMPENSATION DES SYSTEMES POUR L'APPLICATION DU CONTROLEUR
ADAPTATIF SIMPLIFIE ET CONTRIBUTION A L'AMELIORATION DU REGIME
TRANSITOIRE DU MRAC STANDARD

Date de soutenance : / /1999

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. K. BENMAHAMMED	Prof.	Université de Sétif
Rapporteurs :	Mr. F. DJAHLI	M.C.	Université de Sétif
	Mr. M. ABDELAZIZ	C.C.	Université de Sétif
Examineurs :	Mr. K. BELARBI	M.C.	Université de Constantine
	Mr. N. KHENFER	M.C.	Université de Sétif

Année 1998/99



A :

Mes Parents.

Toute ma Famille.

Tous mes amis...

Remerciements

Ce travail a été effectué à l'Institut d'Electronique de Sétif, dans le cadre du projet de recherche intitulé "Contrôle adaptatif", dirigé par Dr. F. Djahli.

Je tiens à remercier tout particulièrement Dr. F. Djahli pour m'avoir proposé ce sujet. Je lui suis extrêmement reconnaissant pour l'aide, les encouragements et les conseils qu'il m'a sans cesse prodigués. Qu'il trouve, ici, l'expression de mon profond respect et ma sincère gratitude.

Je tiens aussi à remercier Mr. M. Abdelaziz pour son aide durant la réalisation de ce travail, pour ses conseils, et ses encouragements.

Je remercie également Mr. K. Benmahammed, professeur à l'institut d'électronique de l'université de Sétif, pour avoir accepté de présider le jury de ce Mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs : K. Belarbi, maître de conférence à l'université de Constantine, et N. Khenfer, maître de conférence à l'université de Sétif, pour avoir accepté de juger ce travail.

Enfin, j'associe à ces remerciements tous ceux qui ont contribué à réaliser ce travail et créer une ambiance de recherche amicale.

Résumé

Trois méthodes procédurales de conception du compensateur sont développées. Ce compensateur est utilisé pour augmenter des systèmes intervalles afin d'éviter la condition ASPR requise pour l'application du SAC. La première méthode est une amélioration d'une méthode qui existe déjà dans la littérature. Ceci en utilisant le théorème de Kharitonov. La deuxième utilise la relation entre la positivité des systèmes et la stabilité, elle utilise les minimums des éléments de la première colonne de la table de Routh. Pour la troisième méthode, l'incertitude sur les paramètres est ramenée à une dynamique inconnue, ensuite une procédure qui prend en compte cette dernière est appliquée.

En plus, le régime transitoire du MRAC standard est analysé en utilisant la borne supérieure du signal erreur et son énergie moyenne. Une modification est introduite sur la loi de contrôle du MRAC standard. Le MRAC obtenu donne un régime transitoire meilleur.

Abstract

Three methods for the design of the feedforward compensator are developed. This compensator is used to augment an interval system, in order to avoid the ASPR condition required by the SAC. The first method is an improvement of the one, already, exists in the literature. It uses Kharitonov's theorem dedicated to robustness analysis. The second exploits the relation between positive realness and stability, it uses the minimums of each element of the first column of the Routh table. For the third method, the uncertainty on the parameters is brought back to an unknown dynamics, then a procedure that deals with this case is applied.

In addition, the transient performance of the standard MRAC is analyzed using the L_∞ bound of the tracking error and its mean energy. A modification is introduced on the control law of the standard MRAC. The obtained MRAC gives a better transient performance.

Liste des figures

Fig. (1.1) Système fictif en boucle fermée.....	10
Fig. (1.2) Le système fictif SPR.....	10
Fig. (1.3) Schéma fonctionnel su SAC de base.....	13
Fig. (1.4) Système augmenté ASPR.....	14
Fig. (1.5) Le SAC, avec augmentation du système pour éviter la condition ASPR	15
Fig. (1.6) Sortie du système et sortie du modèle pour l'exemple (I.1)	16
Fig. (1.7) Augmentation du système et du modèle de référence.....	18
Fig. (1.8) La sortie du système et la sortie du modèle de référence avec augmentation du système et du modèle de référence.....	20
Fig. (1.9) Sortie du système et celle du modèle pour $\sigma = 0$	24
Fig. (1.10) Le gain $K_{Ie}(t)$ pour le cas où $\sigma = 0$	25
Fig. (1.11) Sortie du système et sortie du modèle pour $\sigma = 0.1$	25
Fig. (1.12) Le gain $K_{Ie}(t)$ pour le cas où $\sigma = 0.1$	26
Fig. (2.1) Forme générale du MRAC	27
Fig. (2.2) Structure du MRC donné par l'équation (2.15)	32
Fig. (2.3) Structure du MRC décrit par l'équation (2.19).....	33
Fig. (2.4) MRAC en présence de dynamique inconnue et de perturbation bornée à l'entrée ...	41
Fig. (3.1.a) Entrée de référence.....	61
Fig. (2.1.b) Signal de perturbation	61
Fig. (3.2.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 1, exemple (III.1)	63
Fig. (3.2.b) Signal de commande pour le cas n° 1, exemple (III.1).....	63
Fig. (3.2.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 1, exemple (III.1)	63
Fig. (3.3.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 2, exemple (III.1)	64
Fig. (3.3.b) Signal de commande pour le cas n° 2, exemple (III.1).....	64
Fig. (3.3.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 2, exemple (III.1)	64
Fig. (3.4.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 3, exemple (III.1)	65
Fig. (3.4.b) Signal de commande pour le cas n° 3, exemple (III.1).....	65
Fig. (3.4.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 3, exemple (III.1)	65
Fig. (3.5.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 4, exemple (III.1)	66

Fig. (3.5.b) Signal de commande pour le cas n° 4, exemple (III.1)	66
Fig. (3.5.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 4, exemple (III.1)	66
Fig. (3.6.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 1, exemple (III.2)	68
Fig. (3.6.b) Signal de commande pour le cas n° 1, exemple (III.2)	68
Fig. (3.6.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 1, exemple (III.2)	68
Fig. (3.7.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 2, exemple (III.2)	69
Fig. (3.7.b) Signal de commande pour le cas n° 2, exemple (III.2)	69
Fig. (3.7.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 2, exemple (III.2)	69
Fig. (3.8.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 1, exemple (III.3)	72
Fig. (3.8.b) Signal de commande pour le cas n° 1, exemple (III.3)	72
Fig. (3.8.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 1, exemple (III.3)	72
Fig. (3.9.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 2, exemple (III.3)	73
Fig. (3.9.b) Signal de commande pour le cas n° 2, exemple (III.3)	73
Fig. (3.9.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 2, exemple (III.3)	73
Fig. (3.10.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 3, exemple (III.3)	74
Fig. (3.10.b) Signal de commande pour le cas n° 3, exemple (III.3)	74
Fig. (3.10.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 3, exemple (III.3)	74
Fig. (3.11) $ \Delta(j\omega) $ et $ W(j\omega) $ pour 100 valeurs de la fréquence	76
Fig. (3.12.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 1, exemple (III.4)	77
Fig. (3.12.b) Signal de commande pour le cas n° 1, exemple (III.4)	77
Fig. (3.12.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 1, exemple (III.4)	77
Fig. (3.13.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 2, exemple (III.4)	78
Fig. (3.13.b) Signal de commande pour le cas n° 2, exemple (III.4)	78
Fig. (3.13.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 2, exemple (III.4)	78
Fig. (3.14.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 3, exemple (III.4)	79
Fig. (3.14.b) Signal de commande pour le cas n° 3, exemple (III.4)	79
Fig. (3.14.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 3, exemple (III.4)	79
Fig. (3.15.a) Signaux de sorties du système et du modèle pour le cas n° 4, exemple (III.4)	80
Fig. (3.15.b) Signal de commande pour le cas n° 4, exemple (III.4)	80
Fig. (3.15.c) Module de $Kr(t)$ pour le cas n° 4, exemple (III.4)	80
Fig. (4.1.a) Erreur entre la sortie du système et celle du modèle, pour le MRAC standard et le MRAC modifié ($\tau = 0.5$ et $\tau = 0.01$)	94
Fig. (4.1.b) Entrées de contrôle pour le cas idéal	94

Fig. (4.2.a) Erreur entre la sortie du système et celle du modèle, pour le MRAC standard et le MRAC modifié ($\tau = 0.5$)) avec perturbation bornée à l'entrée	95
Fig. (4.2.b) Entrées de contrôle de système avec perturbation bornée à l'entrée.....	95
Fig. (4.3.a) Erreur entre la sortie du système et celle du modèle, pour le MRAC standard et le MRAC modifié ($\tau = 0.5$)) en présence de dynamique inconnue.....	96
Fig. (4.3.b) Entrées de contrôle de système en présence de dynamique inconnue	96
Fig. (4.4) Instabilité obtenue quand $\tau = 0.01$ et $\mu = 0.01$	97
Fig. (4.3.a) Erreur entre la sortie du système et celle du modèle, pour le MRAC standard et le MRAC modifié ($\tau = 0.1$)) en présence de "bursts"	98
Fig. (4.3.b) Entrées de contrôle de système en présence de "bursts"	98

Liste des tableaux

Tab. (1.1) Résumé du SAC de base	12
Tab. (1.2) Résumé du SAC avec augmentation du système	14
Tab. (1.3) Résumé du SAC avec augmentation du système et du modèle.....	19
Tab. (3.1) Table de Routh pour le polynôme décrit par l'équation (3.2)	55
Tab. (3.2) Paramètres nominaux et leurs intervalles de variation pour l'exemple (III.1)	60
Tab. (3.3) Les cas considérés pour la simulation de l'exemple (III.1).....	61
Tab. (3.4) Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres, exemple (III.3).....	70
Tab. (3.5) Les cas considérés pour la simulation de l'exemple (III.3)	71
Tab. (3.6) Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres, exemple (III.4).....	75
Tab. (3.7) Les cas considérés pour la simulation de l'exemple (III.4).....	81

Sommaire

INTRODUCTION	1
---------------------------	---

CHAPITRE I : **CONTRÔLEUR ADAPTATIF SIMPLE (SAC)**

I.1. Introduction	3
I.2. Poursuite de sortie du modèle	3
I.3. Générateur de Commande pour la Poursuite (CGT)	4
I.4. Concepts de stabilité et de positivité	7
I.4.1. Stabilité.....	7
I.4.2. Positivité.....	8
I.5. Contrôleur adaptatif basé sur le CGT :	11
I.5.1. Analyse de la stabilité	12
I.6. Extension du SAC de base pour éviter la contrainte de positivité	13
I.6.1. Augmentation du système par un compensateur en parallèle	13
Exemple (I.1)	16
I.6.2 Augmentation du système et du modèle de référence	17
Exemple (I.2)	20
I.7. Conception du compensateur dans le domaine temporel	21
I.8. Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel	22
I.9. Le SAC Robuste	22
Exemple (I.3) :	24
I.10. Conclusion.....	26

CHAPITRE II : **MRAC BASÉ SUR L'INCORPORATION D'UN ESTIMATEUR**

D'ÉTATS (MRAC STANDARD)

II.1. Introduction.....	27
II.2. Concepts mathématiques	27
II.3. Formulation du MRAC.....	29

II.3.1. MRC pour les systèmes SISO à paramètres connus.....	30
II.3.2. Suppositions sur le système.....	31
II.3.3. Supposition sur le modèle de référence.....	31
II.4. Modèles paramétriques.....	34
II.5. Loi d'adaptation.....	36
II.5.1. Loi d'adaptation basée sur la technique du gradient.....	37
II.5.2. Méthode du gradient avec projection.....	39
II.6. MRAC robuste.....	40
II.7. Performances.....	41
II.8. Conclusion.....	46

CHAPITRE III : PROCÉDURES DE COMPENSATION DES SYSTÈMES POUR

L'APPLICATION DU SAC

III.1. Introduction.....	47
III.2. Conception dans le domaine temporel en utilisant le théorème de Kharitonov.....	48
III.2.1. Analyse de la robustesse par le théorème de Kharitonov.....	49
III.2.2. Conception du compensateur.....	50
III.3. Conception du compensateur en utilisant la première colonne de la table de Routh.....	53
III.4. Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel.....	56
III.5. Résultats de simulations.....	60
Exemple (III.1).....	60
Exemple (III.2).....	67
Exemple (III.3).....	70
Exemple (III.4).....	75
III.6. Conclusion.....	81

CHAPITRE IV : ETUDE ET ANALYSE DU RÉGIME TRANSITOIRE DU MRAC

STANDARD

IV.1. Introduction.....	83
IV.2. Modification du MRAC standard (cas idéal).....	83

IV.3. Performances du MRAC modifié pour le cas idéal	87
IV.4. Performances du MRAC modifié en présence d'une perturbation bornée à l'entrée ...	88
IV.5. Performances en présence de dynamiques inconnues	92
IV.6. Résultats de simulation	92
Exemple (IV.1)	92
Exemple (IV.2)	97
Conclusion.....	99
CONCLUSION	100
ANNEXE A	101
ANNEXE B	103

Introduction

Introduction

Le contrôle adaptatif à modèle de référence, MRAC, représente l'une des principales configurations utilisées dans les systèmes adaptatifs. Depuis que les problèmes de stabilité et de robustesse ont été partiellement résolus [1,2], plusieurs chercheurs ont tracé pour objectif, l'amélioration des performances d'une part, et la simplification de conception et d'implantation d'autre part.

Les MRAC directs qui existent, de nos jours, ont émergé de l'une de trois différentes approches. La première, décrite par Landau [1], est basée sur le principe d'accessibilité complète des états du système. Elle suppose que tous les états du système sont mesurables. Cette supposition est très limitative, car la plupart des systèmes réels ne la vérifient pas. Ce type de MRAC est, donc, très peu utilisé.

La deuxième approche est basée sur l'intégration d'observateur adaptatif des états du système, pour contourner le problème de leur accessibilité. Les MRAC basés sur cette approche sont, pratiquement, les contrôleurs adaptatifs les plus utilisés et les plus traités dans la littérature de contrôle adaptatif, ce qui explique son appellation "MRAC standard". Ils ont fait l'objet de plusieurs modifications, afin d'améliorer leurs performances. Un passage en revue de la littérature concernant ce domaine [3-10] permet de remarquer que ces modifications sont, principalement, dédiées à l'amélioration de la robustesse. En plus, la majeure partie d'entre elles, sinon toutes, ne donne pas une indication sur la façon d'améliorer le régime transitoire, dû à l'erreur initiale sur les paramètres. N'ayant aucune autre alternative, ce problème est, souvent, résolu par des essais, et dans le meilleur des cas on conseille d'utiliser une excitation persistante. Récemment, des tentatives ont été faites, pour améliorer le régime transitoire [64,12], mais une erreur non nulle en régime permanent a été obtenue. Une nouvelle méthode de conception du MRAC, pour l'amélioration du régime transitoire, a été proposée dans [13]. Depuis, le régime transitoire, dû à l'erreur initiale sur les paramètres, reçoit beaucoup d'intérêts [14,15,16]. La méthode proposée dans [13] consiste à augmenter la loi de contrôle par un terme de compensation. Cette idée d'augmenter la loi de contrôle et non la loi d'adaptation constitue une nouvelle issue pour l'amélioration des performances du MRAC.

La dernière approche, introduite par Sobel et al. [17], est basée sur le CGT "Command Generator Tracker" [18]. Le MRAC, basé sur cette approche, présente des caractéristiques très attirantes. Parmi ces caractéristiques la simplicité (ce qui explique son appellation

"Simplified Adaptive Controller" SAC), l'indépendance sur l'ordre du système et la possibilité de contrôler des systèmes qui ne sont pas à phase minimale. Cependant, l'inconvénient majeur de ce MRAC est qu'il exige que le système sous contrôle soit ASPR, c'est à dire qu'il existe un gain de retour constant qui stabilise le système en boucle fermée. Cette condition constitue un obstacle pour l'applicabilité de ce MRAC. Alors, elle a été allégée en utilisant un compensateur en parallèle avec le système, de telle sorte que le système augmenté soit ASPR [19,20]. Cette méthode n'est devenue efficace qu'après les modifications introduites dans [21,22], où le modèle est aussi augmenté et non seulement le système. Cependant, un nouveau problème apparaît, c'est qu'il faut concevoir un compensateur qui rend le système augmenté ASPR. Il faut alors mettre au point des méthodes de conception d'un tel compensateur. Dans ce domaine, les résultats présentés dans [23], qui montrent la relation entre la stricte positivité des systèmes et la possibilité de les rendre stables, constituent la théorie de base pour l'établissement de telles méthodes. Ainsi, nous proposons trois méthodes pour la conception du compensateur. Ces méthodes sont dédiées, principalement, aux systèmes intervalles (leurs paramètres peuvent varier dans des intervalles connus d'avance) [9,24-27]. Alors, le compensateur doit assurer que le système augmenté reste ASPR sur tous les intervalles de variations des paramètres.

Ce travail est organisé en quatre chapitres :

- Le premier chapitre présente la théorie inhérente au MRAC basé sur la troisième approche (SAC) et une analyse de la condition de positivité qu'il impose pour son applicabilité.
- Le deuxième chapitre donne un aperçu sur le MRAC standard, ainsi qu'une analyse de son régime transitoire dû à l'état initial des paramètres, ceci en utilisant la borne supérieure du signal erreur et son énergie moyenne.
- Dans le chapitre III, nous proposons trois méthodes de conceptions du compensateur pour répondre à la condition ASPR imposée par le SAC. Ces méthodes sont appliquées à des exemples.
- Dans le dernier chapitre, nous introduisons une modification sur la loi de contrôle du MRAC standard, ensuite nous effectuons une analyse du régime transitoire, du MRAC obtenu, en utilisant la borne supérieure du signal erreur et son énergie moyenne. Le comportement du MRAC obtenu, en présence de "Bursts" en régime permanent, est aussi examiné.

Chapitre I
Contrôleur adaptatif
simple (SAC)

Contrôleur Adaptatif Simple (SAC)

I.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons analyser le contrôleur adaptatif direct à modèle de référence présenté sous sa forme originelle par Sobel et al. [17]. Ce type de MRAC présente, par rapport aux autres MRAC, les avantages suivants :

1. Les conditions suffisantes, pour assurer la stabilité et une poursuite asymptotique, sont indépendantes de l'ordre du système.
2. Le calcul des entrées de contrôle n'impose ni l'utilisation d'un observateur, ni un retour d'états, en plus le nombre de paramètres, adaptativement ajustés, ne dépend pas de l'ordre du système.
3. Facilité d'implantation par rapport aux autres MRAC.
4. Une validation expérimentale réussie [11,28-31].
5. Applicabilité directe aux systèmes multi-entrées multi-sorties (MIMO).

Ce MRAC est basé sur le principe de poursuite de sortie du modèle, mais pas celle des états, il présente une extension au cas adaptatif du générateur de commande pour la poursuite "Command Generator Tracker CGT" présenté dans [18].

A cause de la simplicité d'implantation qu'il présente et de l'indépendance de nombre de paramètres devant être ajustés sur l'ordre du système, ce contrôleur adaptatif est appelé, "Simplified Adaptive Controller, SAC".

I.2. Poursuite de sortie du modèle

Le problème de contrôle linéaire à modèle de référence est résolu pour l'équation de processus linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Où $x_p(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n \times 1)$, $u_p(t)$ est le vecteur de contrôle de dimension $(m \times 1)$, $y_p(t)$ est le vecteur de sortie de dimension $(q \times 1)$ et A_p et B_p sont des matrices de dimensions appropriées. Le rang de variation des paramètres est supposé borné comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{a}_{ij} \leq a_p(i, j) \leq \bar{a}_{ij}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots n; \\ \underline{b}_{ij} \leq b_p(i, j) \leq \bar{b}_{ij}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m; \end{aligned} \quad (1.2)$$

Où $a_p(i, j)$ et $b_p(i, j)$ sont les i, j ième élément de A_p et B_p , respectivement. Il est aussi supposé que :

1. Toutes les paires possibles A_p, B_p sont contrôlables et stabilisables par un gain de retour de sortie.
2. Toutes les paires possibles A_p, C_p sont observables.
3. B_p est une matrice à rang maximal.

L'objectif est de trouver, sans connaissance explicite de A_p et B_p , le vecteur de contrôle $u_p(t)$ tel que le vecteur de sortie du système $y_p(t)$ serait une approximation raisonnable du vecteur de sortie du modèle de référence défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t), \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Où $x_m(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n_m \times 1)$, $u_m(t)$ est le vecteur de contrôle de dimension $(m \times 1)$, $y_m(t)$ est le vecteur de sortie de dimension $(q \times 1)$, A_m et B_m sont des matrices de dimensions appropriées. Le modèle est supposé "BIBO" Stable. Il est important de noter que la dimension de l'état du modèle peut être inférieure à celle du processus, mais les deux doivent avoir le même nombre de sorties.

1.3. Générateur de Commande pour la Poursuite (CGT)

Le CGT est une loi de contrôle à modèle de référence destinée aux systèmes linéaires invariants dont les paramètres sont connus, cette loi de contrôle est une combinaison entre les états du modèle, l'entrée de référence et l'erreur entre la sortie du modèle et celle du système [18].

Quand une poursuite parfaite de sortie est atteinte (c-à-d $y_p = y_m$ pour $t \geq 0$), les trajectoires de contrôle et d'états correspondants sont dites trajectoires idéales et sont notées $x_p^*(t)$ et $u_p^*(t)$. Par définition, le système idéal est tel qu'il satisfait la même dynamique que celle du système réel. En plus, la sortie du système idéal est identiquement égale à la sortie du modèle de référence. Mathématiquement parlant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p^*(t) &= A_p x_p^* + B_p u_p^* \quad \text{pour tout } t \geq 0 \\ y_p^* &= y_m = C_p x_p^* = C_m x_m \end{aligned} \quad (1.4)$$

Il est supposé [18] que les trajectoires idéales sont des fonctions linéaires des états et des entrées du modèle de référence :

$$\begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Ici u_m est supposée constante, sinon ses dérivées doivent être disponibles, cette supposition peut être allégée. En combinant l'équation (1.5) et l'équation (1.1) on trouve :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

En remplaçant (1.6) dans (1.5) on trouve :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

La dérivation de l'équation (1.5), en considérant que u_m est constante, donne :

$$\dot{x}_p^*(t) = S_{11}\dot{x}_m(t) + S_{12}\dot{u}_m(t) = S_{11}\dot{x}_m(t) \quad (1.8)$$

Si on remplace $\dot{x}_m(t)$ de (1.3) dans (1.8) on trouve :

$$\dot{x}_p^*(t) = S_{11}A_mx_m(t) + S_{11}B_mu_m(t) \quad (1.9)$$

La forme compacte de (1.1) et (1.9) est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}A_m & S_{11}B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

De (1.7) et (1.10), et sachant que $x_m(t)$ et $u_m(t)$ sont arbitraires on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} S_{11}A_m & S_{11}B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

L'équation matricielle (1.11) représente un système d'équations linéaires qui doit être résolu pour les matrices S_{ij} . Il y a $(n+q) \times (n+m)$ équations avec $(nm_m + nm + mn + m^2)$ inconnus. Quand mn , le nombre d'entrée de contrôle, est supérieur à q (le nombre de sortie du système), il y a, au moins, autant d'équations que d'inconnus; alors, la solution CGT existe presque toujours. Dans le cas très rare, où une situation singulière est présente, on peut changer les valeurs des paramètres du modèle de référence pour éliminer la singularité.

Une méthode élégante, mais qui ne donne pas toujours de solution, consiste à définir :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.12)$$

Alors l'équation (1.11) est équivalente au système d'équations suivant :

$$S_{11} = \Omega_{11}S_{11}A_m + \Omega_{12}C_m \quad (1.13)$$

$$S_{12} = \Omega_{11}S_{11}B_m \quad (1.14)$$

$$S_{21} = \Omega_{21}S_{11}A_m + \Omega_{22}C_m \quad (1.15)$$

$$S_{22} = \Omega_{21}S_{11}B_m \quad (1.16)$$

L'existence de la matrice inverse dans (1.12) impose que le nombre d'entrées m soit égal au nombre de sortie q . Si $m > q$, on peut alors utiliser la pseudo-inverse.

Notons que l'équation (1.13) est une équation de Lyapunov [32,33] qui n'a de solution que si aucune valeur propre de Ω_{11} n'est égale à l'inverse d'une valeur propre de A_m .

Pour voir sous quelles conditions une poursuite asymptotique est assurée, écrivons l'équation de l'erreur sous la forme :

$$\dot{e}_x = \dot{x}_p^* - \dot{x}_p = A_p x_p^* + B_p u_p^* - A_p x_p - B_p u_p = A_p e_x + B_p (u_p^* - u_p) \quad (1.17)$$

Si la loi de contrôle à la forme suivante :

$$u_p = u_p^* + K(y_m - y_p) = u_p^* + KC_p e_x \quad (1.18)$$

Alors l'équation de l'erreur devient :

$$\dot{e}_x = (A_p - B_p KC_p) e_x \quad (1.19)$$

Ainsi, l'erreur e_x tend vers zéro quand t tend vers l'infini, s'il existe un gain constant K qui stabilise le système en boucle fermée. Quand e_x tend vers zéro, et en prenant en considération l'équation (1.4), on peut écrire: $y_p(t) = C_p x_p(t) = C_p x_p^*(t) = C_m x_m(t) = y_m(t)$ ce qui est l'objectif du CGT. Si on remplace u_p^* par son équivalent de (1.5) dans (1.18) on aura la forme finale de la loi de contrôle :

$$u_p(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m(t) + K(y_m(t) - y_p(t)) \quad (1.20)$$

Où S_{21} est S_{22} sont des solutions aux équations (1.13) à (1.16), avec :

$$\text{Réelle}[\text{valeurs propres}(A_p - B_p KC_p)] < 0 \quad (1.21)$$

Il est à noter que le CGT, établi pour le cas où u_m est constante (échelon), peut être étendu à une entrée plus générale [18]. Pour les problèmes réels, il est possible qu'un système d'ordre très élevé doive suivre un modèle d'ordre très petit, et avec une entrée de référence arbitraire. Cela est pratiquement impossible à atteindre par un contrôleur à gains fixes. Alors, il est raisonnable et pratiquement suffisant de ne pas imposer une poursuite parfaite du

modèle, mais il suffit, seulement, que l'erreur entre le modèle et le système soit bornée et assez petite. En plus, les gains ne seront pas fixes mais adaptatifs.

1.4. Concepts de stabilité et de positivité

Dans cette section, nous présentons les concepts nécessaires à l'analyse du MRAC développé dans ce chapitre. Ces concepts seront utilisés pour l'analyse de la stabilité du SAC et pour montrer les conditions de son applicabilité.

1.4.1. Stabilité

Quand on traite des contrôleurs adaptatifs ou non linéaires, on ne peut pas utiliser les procédures d'analyse de stabilité dans le domaine fréquentiel, qui sont devenues très intuitives. Par contre, les techniques de Lyapunov [6,32,34] constituent des moyens très utiles et convenables pour la démonstration de la stabilité et de la robustesse du MRAC présenté dans ce chapitre et de celui présenté dans le chapitre 2. Pour illustrer ce concept considérons le système :

$$\dot{x} = f(x,t) \quad (1.22)$$

Pour démontrer la stabilité du système défini par l'équation (1.22) on lui associe une fonction positive définie $V(x,t)$ dite "fonction de Lyapunov", qui doit décroître quand x décroît et croître quand x croît. C'est à dire que sa dérivée :

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} f(x,t) \quad (1.23)$$

est une fonction négative définie.

Ainsi, il est facile de montrer que pour le système linéaire présenté par l'équation (1.1) la fonction :

$$V(x) = x^T(t)Px(t) \quad (1.24)$$

est une fonction de Lyapunov pour ce système seulement si P est positive définie et :

$$\dot{V}(x) = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t) = x^T(t)[PA + A^T P]x(t) \quad (1.25)$$

est négative définie, ceci est vérifié si :

$$PA + A^T P = -Q \quad (1.26)$$

où Q est une matrice positive définie.

Théorème (1.1) [32,34] :

Le système défini par l'équation (1.1) est asymptotiquement stable si pour toute matrice Q positive définie, il existe une matrice P , positive définie, telle que l'équation (1.26) est vérifiée. Si Q est seulement positive semi-définie, alors le système est seulement stable.

Les définitions de la stabilité asymptotique, de la stabilité uniforme, de la stabilité globale et de la stabilité locale sont dans [6,32,34].

I.4.2. Positivité

Nous donnons, ici, des lemmes utiles concernant la positivité des systèmes linéaires invariants dans le temps. Quelques définitions, sur la positivité, sont, d'abords, présentées dans le domaine temporel, ensuite dans le domaine fréquentiel. Les conditions de positivité, difficiles à tester, pour les systèmes réels, sont ramenées à des conditions de stabilité, faciles à tester en utilisant les méthodes conventionnelles.

La fonction de transfert donnée par $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ est propre si $D \neq 0$, elle est dite strictement propre sinon.

Définition (I.4.2.1) : La réalisation minimale (A_p, B_p, C_p, D_p) et propre du système à m entrées et m sorties est dite strictement positive réelle si [23,34-36]:

$$\begin{cases} PA_p + A_p^T P = -Q - L^T L < 0 \\ PB_p = C_p^T - L^T W \\ D_p + D_p^T = W^T W \end{cases} \quad (1.27)$$

Où $A_p \in R^{n \times n}$, $B_p \in R^{n \times m}$, $C_p \in R^{m \times n}$, $D_p \in R^{m \times m}$, $D_p > 0$ et B_p et C_p sont de rang maximal.

Où $L \in R^{m \times n}$, et $W \in R^{m \times m}$, et où $P \in R^{n \times n}$ est positive définie et $Q \in R^{n \times n}$ est strictement positive définie. Si le système est strictement propre, il suffit de mettre $L = W = D_p = 0$.

Définition (I.4.2.2) [61]: Une fonction de transfert $G(s)$ est positive réelle si :

1. $G(s)$ est réelle pour s réel.
2. $Re\{G(s)\}_{Re(s) \geq 0} \geq 0$

On peut montrer [3,36] que la fonction de transfert positive réelle $G(s)$ est stable et à phase minimale.

La stricte positivité est très utile pour la démonstration de la stabilité des systèmes adaptatifs, mais les systèmes réels ne satisfont pas cette condition, alors plusieurs techniques ont été proposées pour palier à ce problème.

Définition (I.4.2.3) [20,63] : Soit $G(s)$ une matrice de transfert de dimension $m \times m$, et supposons qu'il existe une matrice de gain constante, K_c , telle que la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$G_a(s) = [I + G(s)K_c]^{-1}G(s) \quad (1.28)$$

soit SPR. Parce que seulement un gain de retour constant est requis pour satisfaire la stricte positivité, la matrice de transfert $G(s)$ est dite "Presque Positive Réel", "Almost Strictly Positive Real" ASPR.

Lemme (I.1) [23]: Soit $G(s)$ une matrice de transfert strictement à phase minimale, de dimension $m \times m$, et de degré relatif $(n-m)/n$ (pour plus de détail sur les pôles et les zéros et le degré relatif pour les systèmes MIMO voir [37]). Soit (A, B, C) une réalisation minimale de $G(s)$. Si $CB > 0$ (positif défini), Alors $G(s)$ est ASPR.

Lemme (I.2) [23] :

Toute matrice de transfert $G(s)$ de dimension $m \times m$, propre, et strictement à phase minimale est ASPR.

Lemme (I.3) [23,38] : Soit $G(s)$ une matrice de transfert ASPR, et soit K_{emin} une matrice de gain constante qui satisfait la condition (1.58). Alors $G_a(s)$ reste SPR pour toute matrice de gain $K_c > K_{emin}$.

Lemme (I.4) [23] : Soit la matrice de transfert $G(s)$ de dimension $m \times m$, et ayant un degré de McMillan (l'extension du degré relatif des systèmes SISO aux systèmes MIMO [37]) arbitraire, $G(s)$ n'est pas nécessairement stable ou à phase minimale. On supposera que $G(s)$ est strictement propre. Soit K_y une matrice de gain de retour constante et non singulière, telle que le système en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = [I + G(s)K_y]^{-1}G(s) \quad (1.29)$$

soit asymptotiquement stable. Alors la matrice de transfert, augmentée, suivante :

$$G_a(s) = G(s) + K_y^{-1} \quad (1.30)$$

est ASPR.

Lemme (I.5) [23] : Soit $G(s)$ définie comme dans lemme (1.4), et soit :

$$H(s) = K(1 + qs) \quad (1.31)$$

un contrôleur tel que le système en boucle fermée de la figure (1.1) soit stable.

Alors le système augmenté :

$$G_a(s) = G(s) + H^{-1}(s) = G(s) + \frac{K^{-1}}{1 + qs} \quad (1.32)$$

est ASPR.

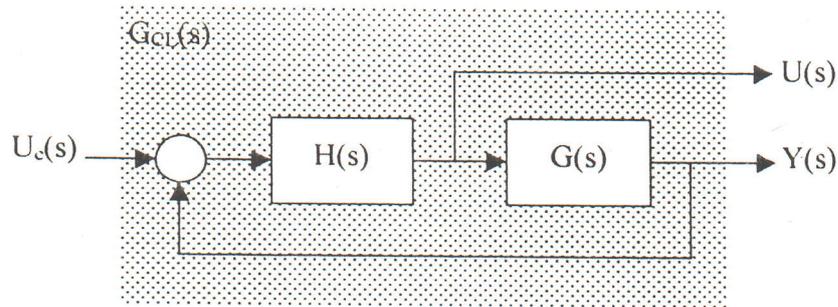


Fig. (I.1) : Système, fictif, en boucle fermée.

Lemme (I.6) [23] : Soit $G(s)$ définie comme dans le lemme (1.4). Soit $H(s)$ une dynamique arbitraire qui stabilise le système de la figure (1.1), alors le système :

$$G_a(s) = G(s) + H^{-1}(s) \quad (1.33)$$

est ASPR si le degré de McMillan de $G_a(s)$ est p/p ou $(p-m)/p$, quel que soit p . Si $G(s)$ et $H(s)$ sont des systèmes SISO, alors pour que le système augmenté $G_a(s)$ soit ASPR, il suffit que son degré relatif soit égal à l'unité et que le système de la figure (1.1) soit stable.

Pour les lemmes (1.5) et (1.6) le système fictif qui sera strictement positif réel (SPR) est celui représenté par la figure (1.2).

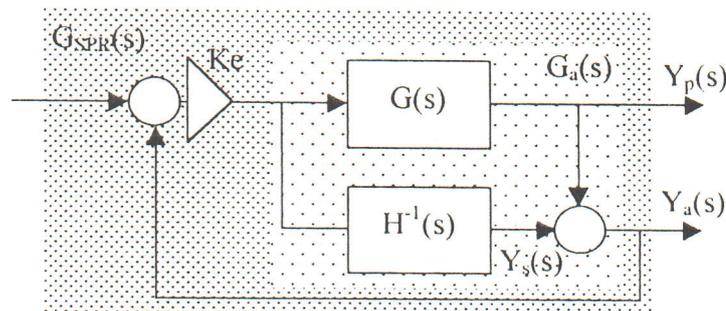


Fig. (I.2) : Le système, fictif, SPR.

Il est à noter que dans la figure (1.2) $H^{-1}(s)$ n'est pas une partie du système réel (dont l'entrée peut être un débit d'un liquide et la sortie une concentration ou une température). $H^{-1}(s)$ est, en réalité, une partie du contrôleur et n'affecte que les valeurs mesurées, comme le fait n'importe quel contrôleur.

1.5. Contrôleur adaptatif basé sur le CGT :

Nous allons voir maintenant l'extension du CGT au cas adaptatif [17]. Pour ce MRAC, seulement les sorties du système sous contrôle et les états du modèle de référence doivent être mesurables. Plus encore, l'ordre du système peut être très grand par rapport à l'ordre du modèle de référence. L'algorithme de base présenté dans cette section suppose que le système sous contrôle est ASPR. Cette restriction sera allégée par la suite.

Rappelons la loi de contrôle du CGT pour les systèmes à paramètres connus, déjà donnée par l'équation (1.20) :

$$u_p(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m(t) + K(y_m(t) - y_p(t))$$

La loi de contrôle du MRAC adaptatif basée sur l'approche CGT est choisie comme ayant la même forme que celle donnée par (1.20) :

$$u_p(t) = K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) + K_e(t)(y_m(t) - y_p(t)) \quad (1.34)$$

En substituant (1.4) dans (1.34) nous obtenons :

$$u_p(t) = K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) + K_e(t)C_p e_x(t) \quad (1.35)$$

Où les gains $K_x(t)$, $K_u(t)$ et $K_e(t)$ sont adaptés progressivement, de telle sorte que l'erreur s'annule. Pour simplifier la présentation, les trois gains précédents sont compactés sous forme d'une seule matrice K_r de dimension $m \times n_r$:

$$K_r(t) = [K_e(t), K_x(t), K_u(t)] \quad (1.36)$$

et de la même manière, on écrit le vecteur :

$$r(t) = \begin{bmatrix} C_p e_x(t) \\ x_m(t) \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_m(t) - y_p(t) \\ x_m(t) \\ u_m \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

de dimension $n_r \times 1$, alors :

$$u_p(t) = K_r(t)r(t) \quad (1.38)$$

Le gain $K_r(t)$ est défini comme étant la somme d'un gain proportionnel et d'un gain intégral. Chacun de ces deux gains est adapté comme suit :

$$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t) \quad (1.39)$$

$$K_p(t) = v(t)r^T(t)T_p \quad (1.40)$$

$$\dot{K}_I(t) = v(t)r^T(t)T_i \quad (1.41)$$

$$K_I(0) = K_{I0} \quad (1.42)$$

Où T_i et T_p sont des matrices de pondération, invariantes dans le temps, de dimension $n_r \times n_r$, K_{i0} est le gain intégral initial et C_p est la matrice de sortie du système de dimension $m \times n$. La sélection des matrices T_i et T_p est limitée par les conditions suffisantes pour la stabilité.

1.5.1. Analyse de la stabilité

La stabilité asymptotique de l'erreur de sortie du SAC peut être examinée en utilisant l'approche de Lyapunov, qui exige :

- L'existence d'une fonction candidate de Lyapunov V , positive définie.
- L'analyse de la stabilité asymptotique du système en boucle fermée en examinant le signe de \dot{V} .

Le théorème (1.2) donne les résultats de stabilité du SAC.

Système	$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t)$ $y_p(t) = C_p x_p(t)$
Modèle	$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t)$, $y_m(t) = C_m x_m(t)$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K(t)r(t)$ où $K_r(t) = [K_e(t), K_x(t), K_u(t)]$, $r^T(t) = [y_m(t) - y_p(t) \quad x_m(t) \quad u_m]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_i$, $T_i > 0$ $\dot{K}_p(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_p$, $T_p \geq 0$
Propriétés	1. $y_p \rightarrow y_m$ si $H(s) = C_p(sI - A_p + B_p \tilde{K}_e C_p)^{-1} B_p$ est SPR est les équations (1.12) à (1.16) ont une solution.

Tableau (I.1) : Résumé du SAC de base.

Théorème (1.2) [17,19,20]:

Supposons qu'il existe une matrice réelle symétrique et positive définie P et des matrices réelles Q et \tilde{K}_e telles que :

$$P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P = -Q \leq 0 \quad (1.43)$$

$$C_p = Q B_p^T P \quad (1.44)$$

et supposons que les matrices T_i et T_p sont respectivement symétrique positive définie et symétrique positive semi-définie. Alors, tous les signaux du système, en boucle fermée, sont bornés. De plus l'erreur, entre la sortie du modèle et celle du système, est asymptotiquement stable.

Les contraintes données par les équations (1.43) et (1.44) impliquent que le système sous contrôle doit être ASPR. La démonstration du théorème (1.2) est dans l'annexe A.

Le résumé du SAC est donné par le tableau (1.1). Le schéma fonctionnel de ce contrôleur est représenté sur la figure (1.3).

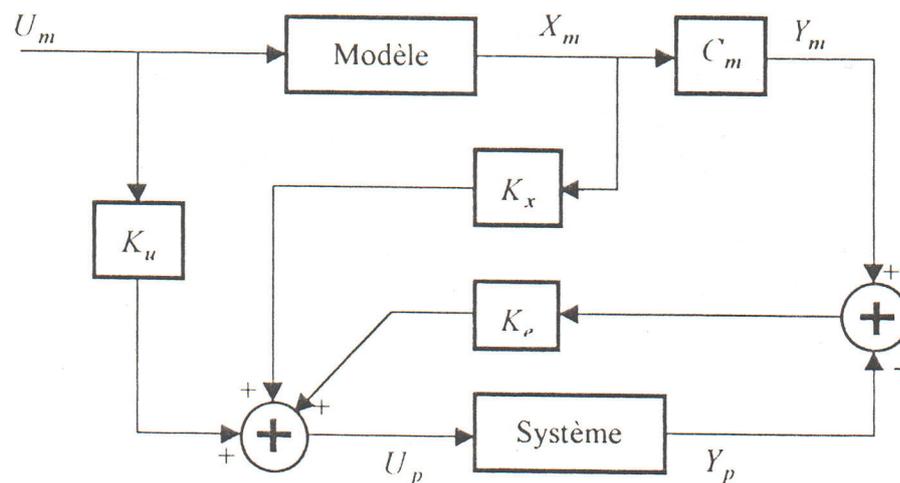


Fig. (I.3) : Schéma Fonctionnel du SAC de Base.

1.6. Extension du SAC de base pour éviter la contrainte de positivité

Vu que le SAC n'est applicable que pour les systèmes qui satisfont les conditions ASPR, plusieurs modifications de base lui ont été introduites [19-22]. Ceci pour étendre la classe des systèmes pouvant être contrôlés par ce MRAC. Ces modifications utilisent les propriétés de base de stabilisabilité des systèmes, pour augmenter soit le système soit l'algorithme d'adaptation, dans le but de satisfaire les conditions ASPR. Dans cette section nous discutons les principales modifications du SAC.

1.6.1. Augmentation du système par un compensateur en parallèle

En utilisant les lemmes (1.4) à (1.6), on peut concevoir un compensateur $H(s)$ de telle sorte que le système augmenté représenté par la figure (1.4) soit ASPR. Il faut aussi veiller à ce que la sortie du système augmenté soit une approximation acceptable de la sortie du

système réel. C'est à dire qu'il faut que la contribution du compensateur soit minimale. L'utilisation d'un compensateur en parallèle avec le processus sous contrôle suppose que le concepteur peut concevoir une dynamique qui stabilise le système, fictif, en boucle fermée de la figure (1.1). Il est, en réalité, raisonnable de supposer que parmi les méthodes de contrôle robuste et avec incertitude, on peut trouver, au moins, une configuration stabilisante.

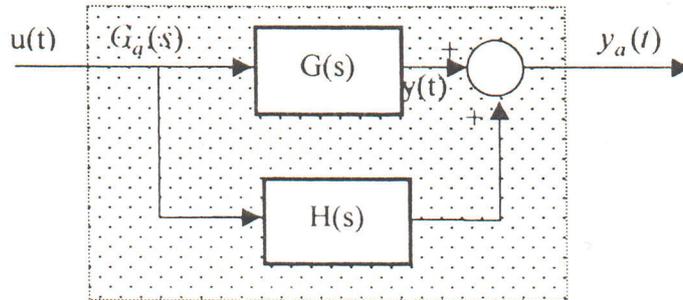
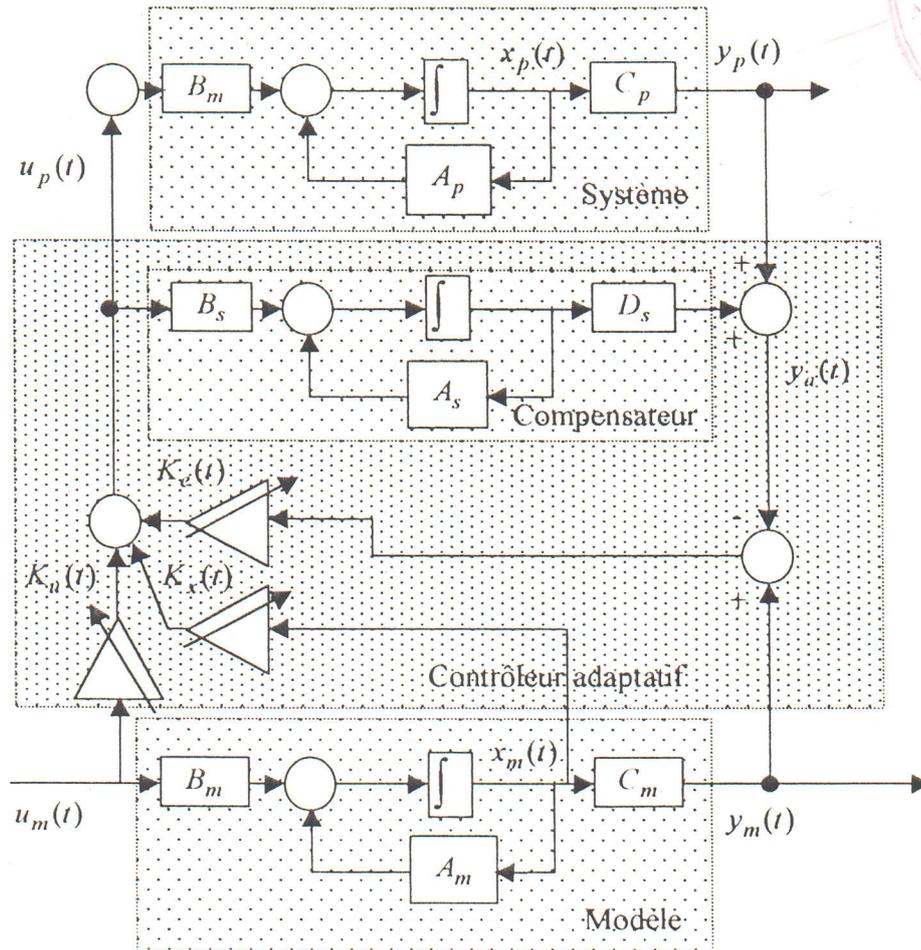


Fig. (I.4) : Système augmenté (ASPR).

Système	$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t)$ $y_p(t) = C_p x_p(t)$
Modèle de référence	$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t),$ $y_m(t) = C_m x_m(t)$
Compensateur	$\dot{s}_p(t) = A_s s_p(t) + B_s u_p(t),$ $r_p(t) = D_s s_p(t)$
Sortie augmentée	$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t)$
Erreur augmentée	$e_{ya}(t) = y_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) - r_p(t)$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K(t)r(t)$ où $K_r(t) = [K_e(t), K_x(t), K_u(t)], r^T(t) = [y_m(t) - z_p(t) \quad x_m(t) \quad u_m]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - z_p(t))r^T(t)T_i, \quad T_i > 0$ $K_p(t) = (y_m(t) - z_p(t))r^T(t)T_p, \quad T_p \geq 0$

Tableau (I.2) : Résumé du SAC, avec augmentation du système.



**Figure (I.5) : Le SAC, avec augmentation du système,
pour éviter la condition ASPR.**

L'idée d'utiliser un compensateur en parallèle a été introduite, pour la première fois, dans [11,20], où un compensateur de type PD a été utilisé.

Ensuite, on a utilisé un compensateur qui contient un zéro à l'origine (dérivé) [21] pour minimiser la contribution du filtre et par conséquent l'erreur en régime permanent. La forme du compensateur est mieux élaborée après les résultats de [39] où on commence à établir des méthodes pour sa conception.

Le nouveau contrôleur est pratiquement le même que celui résumé dans le tableau (1.1). La seule différence est que, cette fois ci, c'est le système présenté par la figure (1.4) qui est adaptativement contrôlé, et non le système réel. Cette approche est susceptible de produire une erreur, en régime permanent, constante et non nulle. Le schéma fonctionnel du nouveau contrôleur ainsi obtenu est représenté par la figure (1.5).

Cette approche n'est utile que si l'objectif de contrôle n'est pas une poursuite parfaite du modèle (l'erreur tend vers zéro à l'infini), mais seulement une poursuite asymptotique (erreur en régime permanent constante mais non nulle).

Exemple (I.1) :

Pour montrer l'inconvénient de cette approche, nous allons l'utiliser pour le contrôle du système suivant, dont les paramètres peuvent varier dans certains intervalles :

$$G(s) = \frac{y_p(s)}{u_p(s)} = \frac{k}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1}$$

Les valeurs nominales des paramètres sont : $k = 1$, $a_3 = 1.75$, $a_2 = 2.15$, $a_1 = 1$.

La variation permise de ces paramètres est $\Delta a_i = 3$, $i = 1, 2, 3$, $\Delta k = 2$. Ce système doit suivre le modèle suivant :

$$G_m(s) = \frac{y_m(s)}{u_m(s)} = \frac{1}{2s + 1}$$

L'entrée de référence $u_m(t)$ est un signal carré de période 60 sec et d'amplitude 1. Notons que pour la simulation nous avons considéré les cas suivant :

$$t \leq 61 \quad k = 1, a_3 = 4.75, a_2 = 5.15, a_1 = 4$$

$$61 \leq t \leq 121 \quad k = 1, a_3 = 1.75, a_2 = 2.15, a_1 = 1$$

$$121 < t \quad k = 3, a_3 = 1.75, a_2 = 2.15, a_1 = 1$$

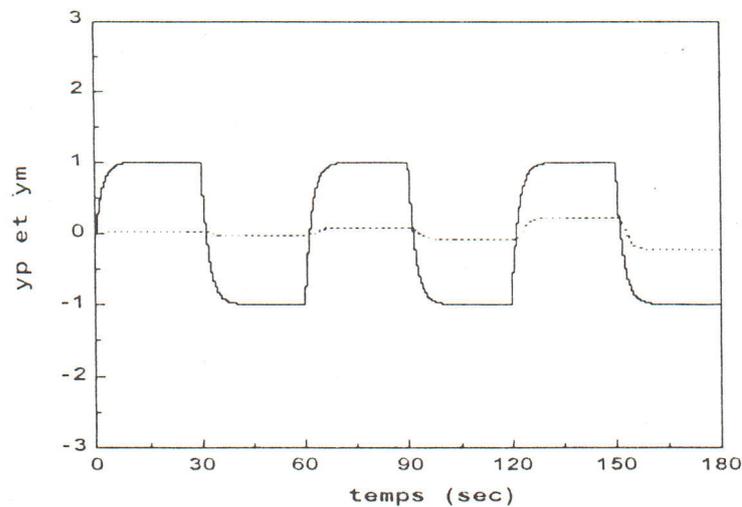


Figure (I.6) : Sortie du système et sortie du modèle pour l'exemple (I.1)

Le plus crucial pour cette méthode est la conception du compensateur pour assurer la condition ASPR à sur tous les intervalles de variation des paramètres. Si on choisit un compensateur de la même forme que celui proposé par Bar-Kana [19] Alors :

$$H(s) = \frac{D}{1 + \tau s}$$

Où D est le gain du compensateur et τ sa constante de temps. La constante de temps du compensateur est choisie très inférieure à celle du modèle de référence, car on veut que le régime transitoire du compensateur s'annule plus vite par rapport à celui du modèle. Ici on a choisi $\tau = 0.2$. Le gain D est choisi de manière à assurer la condition ASPR, sur tout l'intervalle de variation des paramètres du processus. Une analyse de cet exemple, sur tout l'intervalle de variation des paramètres donne comme condition sur D : $D \geq 0.7$.

Les simulations avec les trois cas, montrent qu'un compromis est obtenu pour $D = 10$, quand les matrices T_i et T_p sont des matrices unité. La figure (1.6) représente la sortie du système et celle du modèle pour cet exemple, et pour les trois cas déjà spécifiés.

La figure (1.6) montre l'existence d'une erreur importante, en régime permanent, entre le processus et le modèle, quoique le système augmenté suive parfaitement le modèle. Ceci est dû à la contribution du compensateur qui est importante.

1.6.2 Augmentation du système et du modèle de référence

Pour éviter le problème rencontré en augmentant seulement le système, une autre modification a été introduite sur l'algorithme de base [21,22]. Cette fois ci, en plus de l'augmentation du système, le modèle de référence est aussi augmenté. Ceci de telle sorte que si une poursuite parfaite entre le système augmenté et le modèle augmenté est atteinte, alors une poursuite parfaite entre le système réel et le modèle de référence est aussi atteinte.

Pour généraliser cette approche, nous allons utiliser le compensateur $H(s)$ en parallèle avec le processus de la figure (1.4). Ainsi, la sortie du système modifié sera encore :

$$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t) \quad (1.45)$$

Où $r_p(t)$ est le résultat de l'application de l'opérateur $H(s)$ sur l'entrée de contrôle $u_p(t)$. Il faut noter aussi que le système augmenté de la figure (1.4) doit être ASPR. D'une manière similaire, la sortie du modèle de référence augmenté est définie par :

$$z_m(t) = y_m(t) + r_m(t) \quad (1.46)$$

Où la nouvelle composante $r_m(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \dot{s}_m(t) &= A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))] \\ r_m(t) &= D_p s_m(t) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Notons que $r_m(t) = H[u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))]$.

Où $H[.]$ est l'opérateur qui correspond au compensateur $H(s)$ et $K_e(t)$ le gain adaptatif qui est une fonction de l'erreur augmentée $e_z(t)$ donnée par :

$$e_z(t) = z_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) + r_m(t) - r_p(t) \quad (1.48)$$

Soit enfin :
$$e_z(t) = y_m(t) - y_p(t) - H[K_e(t)e_z(t)] \quad (1.49)$$

Il est évident, de l'équation (1.49), que si $e_z(t) \rightarrow 0$ et $H(s)$ est stable, alors $e_p(t) = y_m(t) - y_p(t) \rightarrow 0$ aussi, ce qui est le résultat désiré. Le schéma fonctionnel du contrôleur adaptatif ainsi obtenu est représenté par la figure (1.7).

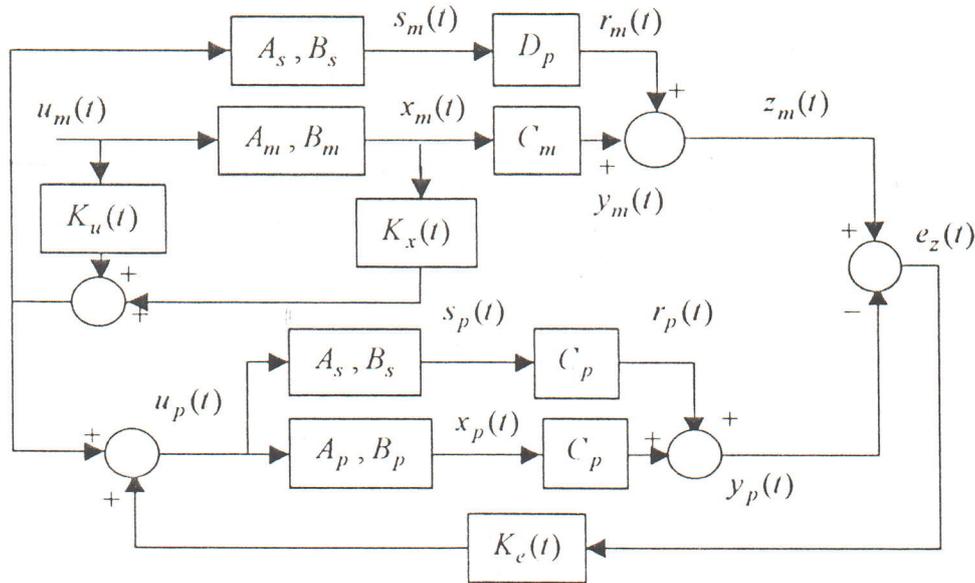


Figure (1.7) : Augmentation du système et du modèle de référence.

Le théorème suivant résume la stabilité de ce MRAC.

Théorème (1.3) :

Considérons le contrôleur adaptatif suivant :

$$u_p(t) = K_e(t)(z_m(t) - z_p(t)) + K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) = K(t)r(t) \quad (1.50)$$

avec :

$$K(t) = [K_e(t), K_x(t), K_u(t)] \quad (1.51)$$

$$r^T(t) = [(z_m(t) - z_p(t))^T, x_m^T, u_m^T] \quad (1.52)$$

Où le gain $K(t)$ est généré par la loi d'adaptation suivante :

$$K(t) = K_I(t) + K_p(t) \tag{1.53}$$

$$\dot{K}_I(t) = (z_m(t) - z_p(t))r^T(t)T_i, \quad K_I(0) = K_{I0}, \quad T_i > 0 \tag{1.54}$$

$$K_p(t) = (z_m(t) - z_p(t))r^T(t)T_p, \quad T_p \geq 0 \tag{1.55}$$

Système	$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t)$ $y_p(t) = C_p x_p(t)$
Modèle de référence	$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t),$ $y_m(t) = C_m x_m(t)$
Compensateurs	$\dot{s}_p(t) = A_s s_p(t) + B_s u_p(t),$ Pour le système. $r_p(t) = D_s s_p(t)$ $\dot{s}_m(t) = A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))]$ Pour le modèle. $r_m(t) = D_p s_m(t)$
Sorties augmentées	$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t)$ Pour la sortie du système. $z_m(t) = y_m(t) + r_m(t)$ Pour la sortie du modèle.
Erreur augmentée	$e_{va}(t) = z_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) + r_m(t) - r_p(t)$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K(t)r(t)$ où $K_r(t) = [K_e(t), K_x(t), K_u(t)], \quad r^T(t) = [z_m(t) - z_p(t) \quad x_m(t) \quad u_m]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (z_m(t) - z_p(t))r^T(t)T_i, \quad T_i > 0$ $K_p(t) = (z_m(t) - z_p(t))r^T(t)T_p, \quad T_p \geq 0$

Tableau (I.3) Résumé du SAC avec augmentation du système et du modèle.

Alors si :

- $G_u(s) = G(s) + H(s)$ est ASPR, où $G_p(s) = B_p(sI - A_p)^{-1}C_p$ est la fonction de transfert du système et $H(s)$ la fonction de transfert de compensateur.
- Une solution existe au système d'équation du CGT, correspondant au modèle augmenté (variable dans le temps) [35].
- Le compensateur $H(s)$ est stable, c'est à dire A_s a toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche.

L'erreur de sortie $y_m - y_p$ s'annule asymptotiquement, et tous les états et les gains seront bornés [21,22].

Le MRAC ainsi obtenu est résumé dans le tableau (1.3).

Exemple (1.2) :

Pour montrer l'avantage du SAC utilisé avec augmentation du système et du modèle de référence, nous allons l'appliquer au système de l'exemple (1.1) en gardant le même modèle de référence, les mêmes cas pour les paramètres du système (trois cas) et le même compensateur :

$$H(s) = \frac{10}{0.2s + 1}$$

Les matrices T_i et T_p sont aussi des matrices unité. La figure (1.8) représente les sorties du système et du modèle réel. On remarque que l'erreur entre la sortie du système et celle du modèle $y_m(t) - y_p(t) \rightarrow 0$. Dans le cas de l'exemple précédent cette erreur tendait vers une constante.

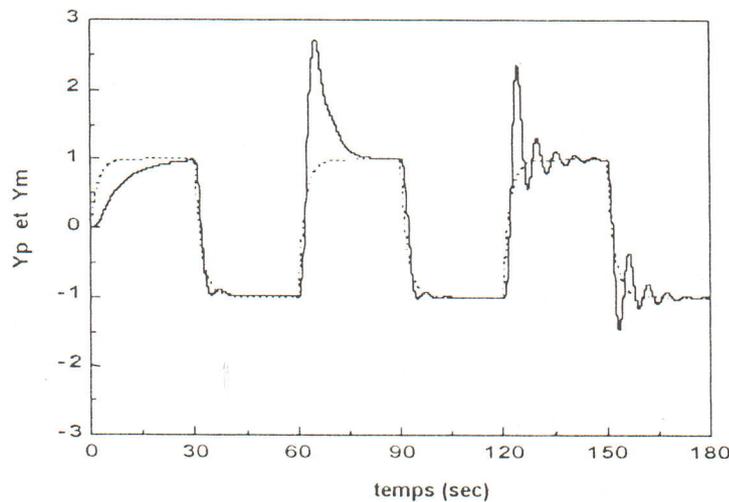


Figure (1.8) : La sortie du système et la sortie du modèle de référence, avec augmentation du système et du modèle de référence.

L'apparition de l'idée qui concerne l'augmentation du système et du modèle de référence, en même temps, a rendu très critique le problème de conception du compensateur. Ainsi plusieurs recherches ont pour objective la mise au point de méthodes assurant ceci. Les principaux résultats dans ce domaine, sont ceux établis dans [39-44]. Dans [39-41], on trouve

une méthode de conception du compensateur dans le domaine temporelle. Tandis que dans [42-44], on trouve une méthode de conception de ce compensateur dans le domaine fréquentiel.

1.7. Conception du compensateur dans le domaine temporel

Cette méthode est une méthode paramétrique, elle concerne les systèmes décrits par :

$$G_{p0}(s) = k_p \frac{B_p(s)}{A_p(s)} \quad k_p \geq 0 \quad (1.56)$$

Où $B_p(s), A_p(s)$ sont des polynômes monics d'ordre m et n respectivement et leurs paramètres varient dans des intervalles prédéfinis. On suppose que :

1. Une borne supérieure γ^* de degré relatif $n^* = n - m$ du système est connue.
2. $B_p(s)$ est un polynôme stable.
3. Des valeurs approximatives de k_p et $|G_{p0}(j0)|$ sont connues.

La procédure de conception du compensateur est donnée par le théorème suivant :

Théorème (1.4) [39-41] :

Considérons le système augmenté suivant :

$$\begin{aligned} G_a(s) &= G_{p0}(s) + F(s) \\ F(s) &= \sum_{i=1}^{\gamma^*-1} F_i(s), \quad \gamma^* \geq 2, \\ F_i(s) &= \frac{f_i}{D_i(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, \gamma^* - 1. \end{aligned}$$

où $D_i(s)$ est un polynôme monic et stable avec $\deg(D_i(s)) = \gamma^* - i$. $F(s)$ est conçue telle que:

1. $k_p \gg f_1 \gg \dots \gg f_{\gamma^*-1} > 0$.
2. $|G_p(j0)| \gg |F(j0)|$.

Alors $G_a(s)$ est ASPR et $\exists \omega_0 > 0$ tel que pour un $\varepsilon > 0$, $\|G_a(j\omega) - G_p(j\omega)\| \leq \varepsilon$ pour tout ω vérifiant $0 \leq \omega \leq \omega_0$.

I.8. Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel

Cette méthode est très utile dans le cas où une dynamique inconnue serait présente.

Ainsi elle concerne les systèmes décrits par :

$$\begin{aligned} G_p(s) &= G_{p0}(s)[1 + \Delta(s)] \quad \text{pour une incertitude multiplicative.} \\ G_p(s) &= G_{p0}(s) + \Delta(s) \quad \text{pour une incertitude additive.} \end{aligned} \quad (1.57)$$

où $\Delta(s)$ est l'erreur de modélisation. On suppose que :

1. Les paramètres du système nominale sont connue, c'est à dire $G_{p0}(s)$ est connu.
2. $\Delta(s)$ est une fonction rationnelle à paramètres réels, en plus elle est stable et, au moins, propre.
3. Il existe une fonction rationnelle et connue $W(s)$ vérifiant, elle aussi, la condition 2 telle que $|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega$.

Théorème (I.5) [42-44] :

Avec les suppositions (1,2,3) le système augmenté $G_a(s) = G_p(s) + H(s)$ serait ASPR si $H(s)$ est conçu selon les conditions suivantes :

1. $H(s)$ est stable et son degré relatif est zéro ou un.
2. Le système nominal en boucle fermée est stable.
3. Les coefficients de la fonction de transfert rationnelle $\tilde{\Delta}(s)$, sont réels. $\tilde{\Delta}(s)$ est propre ou strictement propre et n'a pas de pôles dans le demi-plan droit. Elle est définie par :

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{G_{p0}(s)W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)}, \quad (3.46)$$

pour une incertitude multiplicative et :

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)}, \quad (3.47)$$

pour une incertitude additive.

4. Le gain H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$ est inférieur à l'unité ($\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$).

I.9. Le SAC Robuste

Dans cette section, nous présentons la principale modification introduite sur le SAC, pour assurer sa robustesse en présence de perturbations conduisant à une erreur non nulle.

Ceci car dans les sections précédentes, nous n'avons considéré que le cas idéal (sans perturbations et sans bruits) ce qui constitue une exception dans la réalité.

La modification utilisée dans la loi d'adaptation du SAC est celle introduite dans [45], elle est appelée modification σ . Une analyse de cette modification est donnée dans [5]. L'introduction de la modification σ , dans la loi d'adaptation du SAC et précisément dans le gain intégral [19,35], empêche les gains de croître d'une manière inutile, en présence de perturbations. Quoique les systèmes ASPR puissent être rendus stables par de larges gains, et qu'ils restent stables pour des gains infinis, cette croissance des gains est indésirable. En effet, même si elle ne conduit pas à une divergence du système adaptatif, elle peut donner des gains inutilisables en pratique et inutilement grands.

Dans l'environnement réel, le système, sous contrôle, est représenté par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + d_i(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) + d_o(t) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Où $d_i(t)$, et $d_o(t)$ sont des perturbations, respectivement, aux entrées et aux sorties. Elles sont bornées, inconnues, et non mesurables. Les autres grandeurs sont comme dans l'équation (1.1). Le modèle de référence est donné par l'équation (1.3). La structure simple du SAC est maintenue. La seule modification concerne l'équation donnant le gain $K_I(t)$ qui devient :

$$\dot{K}_I(t) = e_y(t) r^T(t) T_i - \sigma K_I(t) \quad (1.59)$$

Où T_i et T_p sont choisies comme précédemment, mais le gain intégral est cette fois-ci différent de l'algorithme de base.

Sans la modification σ , le gain intégral (1.59) est donné par un intégrateur parfait et peut alors diverger en présence de perturbations, car l'erreur ne peut pas s'annuler. Cependant, avec la modification σ , le gain intégral est donné par un système du premier ordre et ne peut alors diverger que si l'erreur diverge. Il faut noter que pour le SAC, les gains adaptatifs n'ont pas des valeurs optimales dont la loi d'adaptation doit atteindre, et il n'y a pas d'excitations persistantes utilisées aux entrées. Au contraire, les gains adaptatifs augmentent si de très larges gains sont nécessaires (l'erreur augmente) et décroissent dans le cas contraire.

Il faut noter que l'introduction de la modification σ sur les MRAC résumés dans les tableaux (1.1), (1.2) et (1.3) donne un système en boucle fermée globalement stable. Ainsi, tous les signaux de ce système sont bornés, ceci même en présence de perturbation bornée à l'entrée [38].

Exemple (1.3) :

Pour montrer l'effet de la modification σ sur le comportement du gain adaptatif du SAC, nous allons l'appliquer au système suivant :

$$G(s) = \frac{y_p(s)}{u_p(s)} = \frac{200}{(s-1)(s^2+8s+100)}$$

Le modèle de référence est donné par l'équation suivante :

$$G_m(s) = \frac{3}{3+s}$$

l'entrée de référence est donnée par :

$$u_m(t) = \begin{cases} 1 + 0.5 \sin(0.5t), & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ -1 + 0.5 \sin(0.5t), & \text{si } t \geq 20 \end{cases}$$

la perturbation appliquée à la sortie est la suivante :

$$\dot{d} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 18 \\ (1/0.2)(0.25 \sin(6t) - d) & \text{si } t > 18 \end{cases} \quad \text{avec } d(0) = 0$$

La perturbation appliquée à l'entrée est :

$$d_1(t) = 0.5 \cos(2t)$$

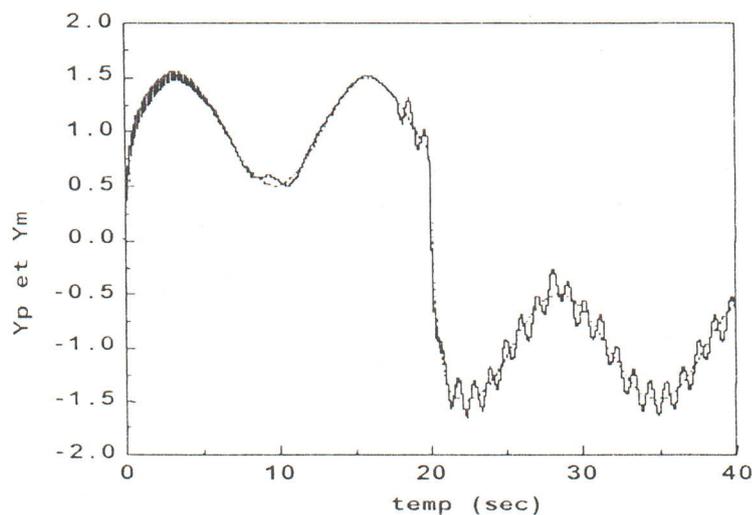


Figure (1.9) : Sortie du système et celle du modèle pour $\sigma = 0$.

Le compensateur utilisé avec le système et le modèle de référence est :

$$H(s) = \frac{2500}{0.3s + 1}$$

On choisit $T_i = T_p = 5000I_3$ où I_3 est la matrice unité de dimension 3.

La simulation est effectuée pour deux cas :

1. $\sigma = 0$.
2. $\sigma = 0.1$.

Les figures (1.9) et (1.10) représentent, respectivement, les sorties du système et du modèle et le gain intégral $K_{Ie}(t)$, pour le premier cas. Les figures (1.11) et (1.12) représentent les mêmes grandeurs pour le deuxième cas.

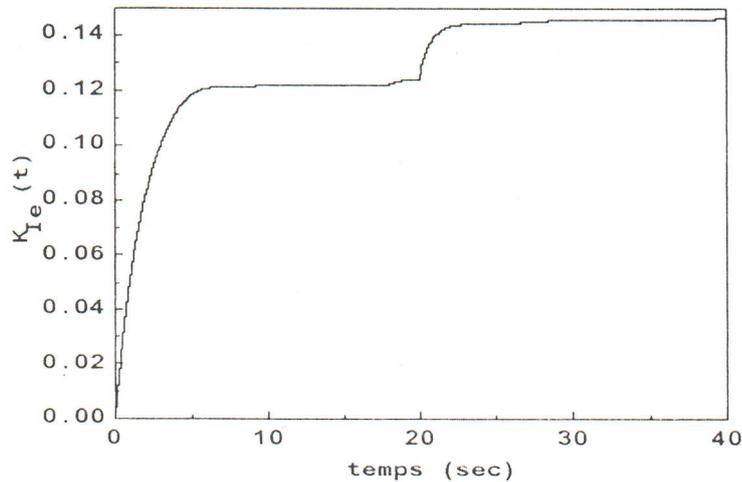


Figure (1.10) : Le gain $K_{Ie}(t)$ pour le cas où $\sigma = 0$.

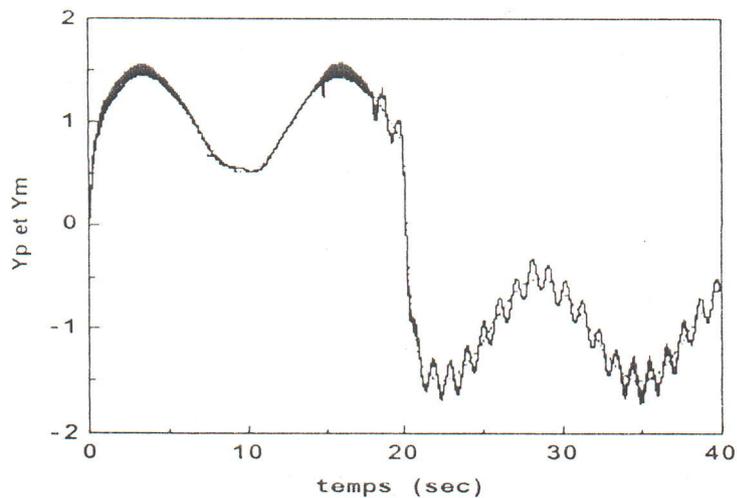


Figure (1.11) : Sortie du système et sortie du modèle pour $\sigma = 0.1$.

A partir des figures (1.9) à (1.12), on remarque qu'il n'y a pas une grande différence concernant l'erreur de poursuite avec ou sans la modification σ . Cependant, il est clair que

l'utilisation du facteur σ donne un gain qui n'augmente pas sans limite même avec une erreur persistante.

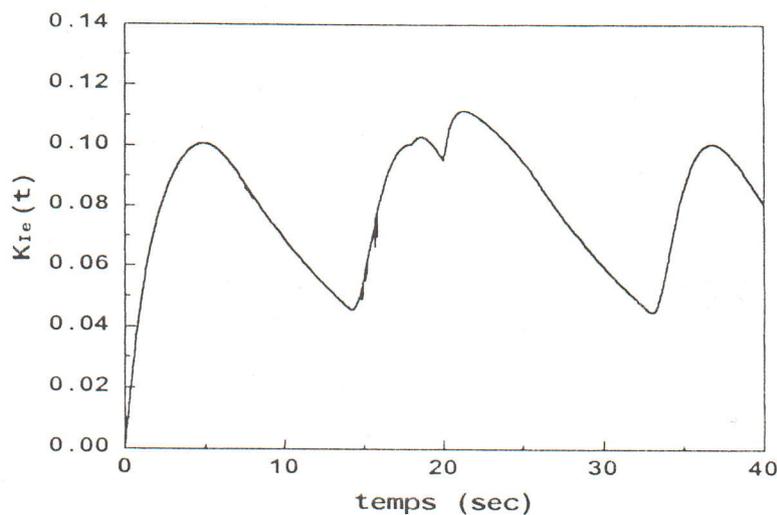


Fig. (I.12) : Le gain intégral $K_{Ie}(t)$ pour le cas où $\sigma = 0.1$.

I.10. Conclusion

Le SAC constitue un contrôleur adaptatif à modèle de référence direct. Il présente de précieux avantages par rapport aux autres MRAC. Parmi ces avantages, la simplicité d'implantation et d'analyse, l'indépendance de l'ordre du système et de ses états et la possibilité de contrôler des systèmes qui ne sont pas à phase minimale. En plus, toutes les modifications, introduites pour l'amélioration de la robustesse du MRAC standard, peuvent être appliquées au SAC pour le même objectif.

Cependant, le SAC, sous sa forme initiale, ne constitue pas une solution générale à un problème général. Ceci du fait qu'il impose que le système sous contrôle soit ASPR ou, au moins, qu'il existe un compensateur pouvant rendre le système augmenté ASPR. Alors, la conception d'un tel compensateur est une tâche qui accompagne, toujours, l'application du SAC aux systèmes réels, qui ne sont pas, généralement, ASPR. Ainsi, des méthodes systématiques pour la conception de ce compensateur s'imposent.

Chapitre II
MRAC Basé sur l'incorporation d'un
astitimateur d'états
(MRAC standard)

MRAC basé sur l'incorporation d'un estimateur d'états (MRAC standard)

II.1. Introduction

Le MRAC traité dans ce chapitre est pratiquement le contrôleur adaptatif le plus utilisé, sa structure de base est représentée sur la figure (2.1). Le modèle de référence est conçu pour générer la trajectoire désirée y_m , que la sortie du système y_p doit suivre. Le système en boucle fermée est formé du système sous contrôle, du contrôleur $C(\theta)$ et du mécanisme d'adaptation qui génère les paramètres θ du contrôleur en ligne. Selon la structure du contrôleur, et la façon dont les paramètres θ sont définis et générés, il existe plusieurs versions de ce MRAC.

Basé sur la génération des états du système et sur le calcul du contrôleur, de telle sorte que le système en boucle fermée ait la même fonction de transfert que le modèle, ce MRAC exige que l'ordre du système sous contrôle soit connu et que celui-ci soit à phase minimale.

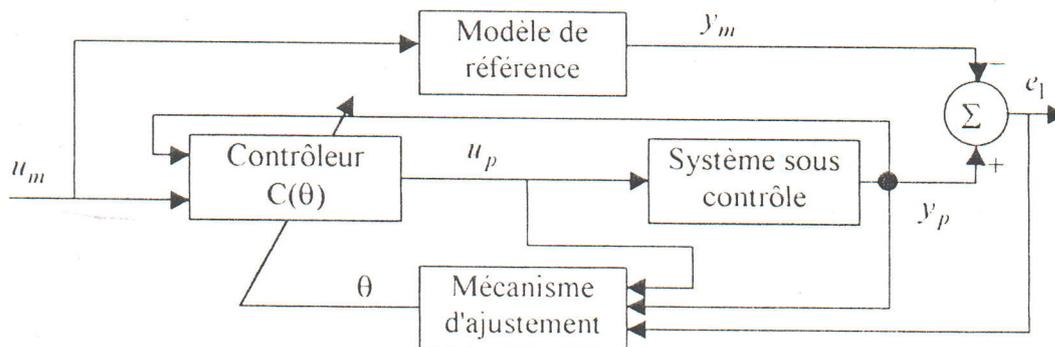


Figure (2.1) : Forme générale du MRAC.

II.2. Concepts mathématiques

Dans cette section, nous allons donner les principaux lemmes et définitions utilisés pour l'analyse du MRAC étudié dans ce chapitre.

Définition (II.2.1) [6,46] : Pour un signal $x : [0, \infty[\rightarrow R^n$, et pour $\delta \geq 0, t \geq 0$, la norme L_2 , exponentiellement pondérée, du signal x tronqué est donnée par :

$$\|x_t\|_2^\delta = \left(\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} [x^T(\tau)x(\tau)] d\tau \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

Quant $t \rightarrow \infty$ et $\delta = 0$, la norme $\|(\cdot)\|_2^\delta$ devient la norme L_2 habituelle et est notée par $\|(\cdot)\|_2$.

Définition (II.2.2) [46] : Soit $H(s)$ une matrice de transfert dont les composantes sont stables et propres. Alors :

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_\omega \left\{ \lambda_{\max} [H^*(j\omega)H(j\omega)] \right\}^{1/2} \quad (2.2)$$

Où $\lambda_{\max}[\cdot]$ est la plus grande valeur propre (réelle) et H^* est la matrice transposée de la matrice conjuguée de H . $\|\cdot\|_\infty$ est la norme H_∞ largement utilisée dans le contrôle robuste.

Définition (II.2.3) [6] : Considérons le signal $x : [0, \infty[\rightarrow R^n$, $y : [0, \infty[\rightarrow R^+$, soit :

$$S(y) = \left\{ x : [0, \infty[\rightarrow R^n / \int_t^{t+T} x^T(\tau)x(\tau) d\tau \leq \int_t^{t+T} y(\tau) d\tau + c \right\} \quad (2.3)$$

Pour un réel $c \geq 0$ et $\forall t, T \geq 0$. On dit que x est y petit si $x \in S(y)$.

Lemme (II.1) [3,6] : Soit :

$$z = H(s)[u_p]$$

Où $H(s)$ est une matrice de transfert dont les composantes sont propres. Si ces composantes sont analytiques dans $Re[s] \leq -\frac{\delta_0}{2}$ pour $\delta \geq 0$ et $u_p \in L_{2e}$. Alors :

$$\|z_t\|_2^\delta \leq \|H(s)\|_s^\delta \|u_{pt}\|_2^\delta \quad (2.4)$$

Où z_t et u_{pt} sont les signaux z et u_p tronqués seulement sur l'intervalle $[0, t]$.

Si en plus les composantes de $H(s)$ sont strictement propres, alors :

$$|z_t| \leq \|H(s)\|_2^\delta \|u_{pt}\|_2^\delta \quad (2.5)$$

Lemme (II.2) (Lemme d'échange) [4,6,47] : Soit $\bar{\theta}, \bar{\omega} : R^+ \rightarrow R^n$. On suppose que $\bar{\theta}$ est dérivable. Soit $W(s)$ une fonction de transfert rationnelle, propre et stable, ayant la réalisation minimale (A, B, C, D) , c'est à dire :

$$W(\bar{\omega}) = C^T (sI - A)^{-1} + D$$

Alors :

$$W(s) \left[\dot{\bar{\theta}}^T \bar{\omega} \right] = \bar{\theta}^T W(s) [\bar{\omega}] + W_c(s) \left[\left(W_b(s) [\bar{\omega}^T] \dot{\bar{\theta}} \right) \right] \quad (2.6)$$

Où $W_c(s) = -C^T (sI - A)^{-1}$, $W_b(s) = (sI - A)^{-1} B$.

Lemme (II.3) [6,47] : Soit $\bar{\theta}, \bar{\omega} : R^+ \rightarrow R^n$ où $\bar{\theta}, \bar{\omega}$ sont dérivables. Soit $W(s)$ une fonction de transfert rationnelle dont les pôles et les zéros sont stables et dont le degré relatif est n^* , alors :

$$\dot{\bar{\theta}}^T \bar{\omega} = \Lambda_1(s, \alpha) \left[\dot{\bar{\theta}}^T \bar{\omega} + \bar{\theta}^T \dot{\bar{\omega}} \right] + \Lambda_0(s, \alpha) W^{-1}(s) \left[\bar{\theta}^T W(s) [\bar{\omega}] + W_c(s) \left[\left(W_b(s) [\bar{\omega}^T] \dot{\bar{\theta}} \right) \right] \right] \quad (2.7)$$

Où les fonctions $W_c(s)$ et $W_b(s)$ sont définies dans le lemme 2.2, et :

$$s\Lambda_1(s, \alpha) = 1 - \Lambda_0(s, \alpha), \quad (2.8)$$

$$\Lambda_0(s, \alpha) = \frac{\alpha^{n^*}}{(s + \alpha)^{n^*}}, \quad \alpha > 0. \quad (2.9)$$

En plus pour α assez grand :

$$\|\Lambda_1(s, \alpha)\|_{\infty}^{\delta} \leq \frac{c}{\alpha}, \quad \|\Lambda_0(s, \alpha) W^{-1}(s)\|_{\infty}^{\delta} \leq c\alpha^{n^*} \quad (2.10)$$

pour $\delta \ll 2\alpha$, et $c \in R^+$.

Lemme (II.4) [4] : Si $u_p \in S(\mu)$ pour $\mu \geq 0$ Alors $\forall \delta > 0 : \|u_p\|_2^{\delta} \in L_x$.

II.3. Formulation du MRAC

Nous allons, en premier lieu, formuler le contrôle à modèle de référence (MRC) pour les systèmes dont les paramètres sont connus. Ensuite, nous donnons l'extension du (MRC),

au cas où les paramètres ne seraient pas connus ou seraient variables dans le temps, en utilisant une loi d'adaptation pour estimer les paramètres du contrôleur.

II.3.1. MRC pour les systèmes SISO à paramètres connus

Dans le cas général, la conception d'une loi de contrôle n'est pas si directe comme elle le paraît. Pour cette raison, nous allons donner le contrôle à modèle de référence pour les systèmes SISO à paramètres connus exactement. L'existence de solution (MRC) a deux significations :

1. Elle montre qu'étant donné un ensemble de suppositions sur le système et le modèle de référence, il y a une flexibilité structurelle pour atteindre l'objectif de contrôle.
2. Elle donne la forme de la loi de contrôle devant être combinée avec une loi d'adaptation pour former le MRAC dans le cas où les paramètres du système seraient inconnus.

Considérons le système SISO strictement propre et LTI suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x + B_p u_p \\ y_p &= C_p^T x \end{aligned} \quad (2.11)$$

Où $x_p \in R^n$ et $u_p, y_p \in R$. A_p, B_p et C_p ont les dimensions appropriées. La fonction de transfert du système est donnée par :

$$y_p = G_p(s)[u_p] = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (2.12)$$

$Z_p(s)$ et $R_p(s)$ sont des polynômes monics, et k_p est le gain en haute fréquence.

Le modèle de référence, choisi par le concepteur, pour décrire les caractéristiques désirées du système, est décrit par l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m u_m \\ y_m &= C_m^T x_m \end{aligned} \quad (2.13)$$

Où $x_m \in R^m$, $y_m, u_m \in R$, u_m est une fonction bornée et continue par morceaux. La fonction de transfert du modèle de référence est donnée par :

$$y_m = W_m(s)[u_m] = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} [u_m] \quad (2.14)$$

Où $Z_m(s)$ et $R_m(s)$ sont des polynômes monics, k_m est une constante.

L'objectif du (MRC) est de déterminer l'entrée de contrôle u_p de telle sorte que tous les signaux du système en boucle fermée soient bornés et que la sortie du système y_p suive la

sortie du modèle d'une manière raisonnable, ceci pour toute entrée bornée et continue par morceaux u_m .

Dans le but de concevoir une loi de contrôle implémentable, c'est à dire qu'elle ne contient pas de dérivées et utilise seulement des grandeurs mesurables, on met les suppositions suivantes pour le système et le modèle de référence [3,6] :

II.3.2. Suppositions sur le système

S1. $Z_p(s)$ est un polynôme monic et Hurwitz de degré m_p .

S2. Une borne supérieure du degré de $R_p(s)$ est connue.

S3. Le degré relatif $n^* = n_p - m_p$ de $G_p(s)$ est connu.

S4. Le gain en haute fréquence k_p est connu, cette supposition peut être allégée à :

S4'. Le signe du gain en haute fréquence k_p est connu.

II.3.3. Suppositions sur le modèle de référence

M1. $Z_m(s)$ et $R_m(s)$ sont monic et Hurwitz et de degré q_m, p_m respectivement, où $p_m \leq n$.

M2. Le degré relatif $n_m^* = p_m - q_m$ de $W_m(s)$ est le même que celui du système ($n^* = n_m^*$).

La supposition S1 (le système est à phase minimale) est la conséquence de l'objectif de contrôle. Cet objectif est atteint par la conception d'une loi de contrôle qui simplifie les zéros du système et les remplace par ceux du modèle de référence. Ceci pour forcer la fonction de transfert du système en boucle fermée à être la même que celle du modèle de référence. Pour une question de stabilité, cette simplification doit se faire seulement dans le demi-plan gauche. Les suppositions S3 et M2 sont faites pour que la loi de contrôle ne contienne pas de dérivées.

L'objectif du MRC est atteint si u_p est choisi tel que la fonction de transfert, de u_m à y_p , ait des pôles stables et soit égale à $W_m(s)$, la fonction de transfert du modèle. Une telle égalisation de fonctions de transfert garantit que pour n'importe quel signal $u_m(t)$, la sortie du système converge exponentiellement vers la sortie du modèle.

Considérons la loi de contrôle suivante [4] :

$$u_p = \theta_1^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_p + \theta_2^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* u_m \quad (2.15)$$

Où $\begin{cases} \alpha(s) = \alpha_{n-2}(s) = [s^{n-2} & s^{n-3} & \dots & s & 0] \text{ pour } n \geq 2 \\ \alpha(s) = 0 & \text{pour } n = 1 \end{cases}$

$c_0^*, \theta_3^* \in R; \theta_1^*, \theta_2^* \in R^{n-1}$ sont des paramètres constants qui doivent être conçus et $\Lambda(s)$ est un polynôme monic et Hurwitz de degré $n - 1$, ayant $Z_m(s)$ comme facteur :

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s) \tag{2.16}$$

C'est à dire que $\Lambda_0(s)$ est un polynôme monic, Hurwitz et de degré $n_0 = n - 1 - q_m$.

Le système en boucle fermée est alors représenté par la figure (1.2).

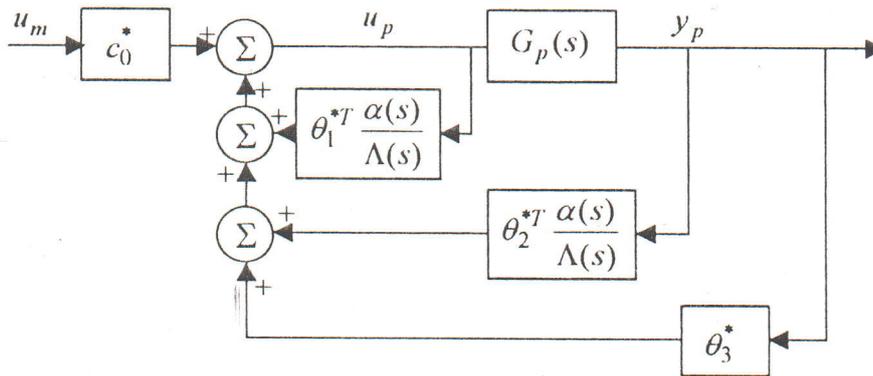


Figure (2.2) : Structure du MRC donné par l'équation (2.15).

Le vecteur des paramètres du contrôleur $\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^*]^T \in R^{2n-1}$ (où $\theta^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^* \quad c_0^*]^T \in R^{2n}$ dans le cas où k_p est inconnu) est à concevoir de telle sorte que la fonction de transfert de u_m à y_p du système, représenté par la figure (1.2), soit égale à $W_m(s)$. C'est à dire qu'on peut atteindre l'objectif de contrôle si on choisit θ^* telle que :

$$G_c(s) = \frac{c_0^* k_p Z_p(s) \Lambda^2(s)}{\Lambda(s) [(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) R_p(s) - k_p Z_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))]} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{2.17}$$

Vu que le degré du dénominateur de $G_c(s)$ est supérieur à $R_m(s)$, alors, pour que l'équation (2.17) soit satisfaite, il faut que des simplifications (zéros-pôles) dans $G_c(s)$ soient possibles. Ceci est vérifié car $Z_p(s)$ est Hurwitz par supposition et $\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s)$ est

conçu pour être Hurwitz. Alors, tous les zéros de $G_c(s)$ sont Hurwitz et toute simplification sera permise. Soit $c_0^* = \frac{k_m}{k_p}$ et en utilisant $\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s)$, l'équation (2.17) devient alors:

$$(\Lambda(s) - \theta_1^* \alpha(s))R_p(s) - k_p Z_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) = Z_p(s) \Lambda_0(s) R_m(s) \quad (2.18)$$

Le système, en boucle fermée de la figure (2.2), peut être représenté par les équations d'états et de sorties suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= F\omega_1 + gu_p & \omega_1(0) &= 0 \\ \dot{\omega}_2 &= F\omega_2 + gy_p & \omega_2(0) &= 0 \\ u_p &= \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0^* u_m = \theta^{*T} \omega \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avec $\omega_1, \omega_2 \in R^{n-1}$, $\bar{\omega} = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p]^T$, $\omega = [\bar{\omega} \ u_m]^T$, $\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^*]^T$ et $\theta^* = [\bar{\theta}^* \ c_0^*]^T$. Les matrices F et g sont données par :

$$F = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \dots & -\lambda_1 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les λ_i sont les coefficients du polynôme $\Lambda(s)$.

$$\Lambda(s) = s^{n-2} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0 = \det(sI - F)$$

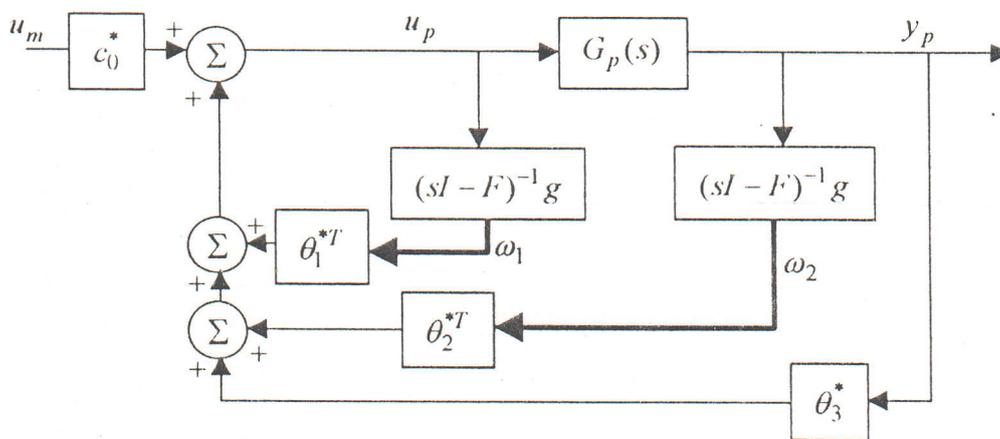


Figure (2.3) : Structure du MRC décrit par (2.19).

Ainsi, (F, g) est la réalisation d'états du système dont la fonction de transfert est $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$.

Le bloc diagramme du système en boucle fermée, avec la loi de contrôle donnée par l'équation (2.19), est donné par la figure (2.3).

Le (MRC) conçu pour contrôler les systèmes dont les paramètres sont connus, sera étendu au cas où les paramètres seraient inconnus. Ceci est effectué en combinant la loi de contrôle du (MRC), déjà établie, avec une loi d'adaptation pour générer une estimation $\bar{\theta}(t)$ de θ^* (resp. $\theta(t)$ de θ^*) en ligne. La conception d'une loi d'adaptation exige le développement d'un modèle paramétrique approprié [4], pour θ^* .

En utilisant $\theta(t)$, vecteur des paramètres estimés à l'instant t , au lieu du vecteur θ^* , la loi de contrôle devient :

$$u_p = \theta_1^T(t) \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} [u_p] + \theta_2^T(t) \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} [y_p] + \theta_2^T(t) y_p + c_0(t) u_m \quad (2.20)$$

Quand k_p est connu, $c_0(t)$ est noté tout simplement c_0 .

Les équations d'états de (2.20) sont, alors :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= F\omega_1 + gu_p, \quad \omega_1(0) = 0 \\ \dot{\omega}_2 &= F\omega_2 + gy_p, \quad \omega_2(0) = 0 \\ u_p &= \theta^T(t)\omega \end{aligned}$$

Où $\theta(t) = [\theta_1^T(t) \quad \theta_2^T(t) \quad \theta_3(t) \quad c_0(t)]^T$ et $\omega = [\omega_1^T \quad \omega_2^T \quad y_p \quad u_m]^T$ avec $\omega_1, \omega_2 \in R^{n-1}$.

II.4. Modèles paramétriques

La représentation paramétrique a été introduite pour être utilisée par les algorithmes d'estimation des paramètres [33,48]. En contrôle adaptatif, elle est nécessaire pour estimer, soit les paramètres du système, soit ceux du contrôleur en ligne. Ce type de représentation peut être classé en deux catégories principales, la première est le modèle paramétrique linéaire et la deuxième, le modèle paramétrique bilinéaire. L'utilisation de l'un ou l'autre des modèles paramétriques influe sur la formulation de la loi d'adaptation.

Dans le modèle paramétrique linéaire, les paramètres à estimer apparaissent sous une forme linéaire. Ce modèle paramétrique est donné par l'équation suivante :

$$z(t) = W(s) [\theta^{*T} \omega + \eta_0] \quad (2.21)$$

où : $W(s)$ est une fonction de transfert propre et stable.

$$z(t) \in R.$$

$\omega \in R^n$ sont des signaux continus par morceaux et pouvant être mesurés ou calculés à chaque instant.

θ^* le vecteur constant et inconnue qui doit être estimé.

η_0 un signal inconnu dû aux erreurs de modélisation ou aux perturbations.

L'équation (2.21) est appelée modèle paramétrique linéaire.

Le modèle paramétrique bilinéaire est donné par l'équation suivante :

$$z(t) = W(s) \left[\rho^* \left[\theta^{*T} \omega + z_0 \right] + \eta_0 \right] \quad (2.22)$$

où $z, W(s), \theta^{*T}, \omega$ et η_0 sont ceux déjà définis pour le modèle paramétrique linéaire, $z_0 \in R$ est un signal continu par morceaux et qui peut être mesuré à chaque instant t et ρ^* est une constante inconnue dont le signe est connu.

Pour le problème du MRAC directe, il faut trouver une représentation paramétrique, dans laquelle les paramètres du contrôleur apparaissent d'une manière linéaire ou bilinéaire. Pour cela, considérons l'équation (2.18) que nous rappelons ici :

$$\left(\Lambda(s) - \theta_1^* \alpha(s) \right) R_p(s) - k_p Z_p(s) \left(\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s) \right) = Z_p(s) \Lambda_0(s) R_m(s)$$

Si on remplace $R_p(s)$ de cette équation dans l'équation du système (2.12) on aura alors :

$$G_p(s) = \frac{k_p (\Lambda(s) - \theta_1^* \alpha(s))}{\Lambda_0(s) R_m(s) + k_p (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))} = \frac{y_p}{u_p}$$

en développant cette équation et sachant que $\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$ nous obtenons:

$$k_p [u_p] = k_m W_m^{-1}(s) [y_p] + k_p \left[\theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} [u_p] + \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} [y_p] + \theta_3^* y_p + c_0^* r - c_0^* r \right]$$

Finalement nous aurons :

$$e = y_p - y_m = W_m(s) \frac{1}{c_0^*} [u_p - \theta^{*T} \omega]$$

soit, en posant $\rho^* = \frac{1}{c_0^*}$:

$$e = W_m(s) \rho^* [u_p - \theta^{*T} \omega] \quad (2.23)$$

Cette équation est la représentation paramétrique bilinéaire, pour les paramètres du contrôleur, du système en boucle fermée.

Une représentation paramétrique linéaire peut être obtenue à partir de la représentation bilinéaire donnée par l'équation (2.23) comme suit :

Puisque $\theta^{*T} \omega = \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0^* r$ où $\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^*]^T$ et $\bar{\omega} = [\omega_1^T \quad \omega_2^T \quad y_p]^T$, on peut écrire l'équation (2.23) comme :

$$W_m(s)[u_p] = c_0^* e_1 + W_m(s) \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0^* W_m(s) r$$

alors :

$$W_m(s)[u_p] = c_0^* y_p + W_m(s) \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega}$$

cette équation peut être écrite sous la forme :

$$z = \bar{\theta}^{*T} \bar{\phi}_p + c_0^* u_m = \theta^{*T} \phi_p \quad (2.24)$$

Où : $z = W_m(s)[u_p]$

$$\bar{\phi}_p = [W_m(s)\omega_1^T \quad W_m(s)\omega_2^T \quad W_m(s)y_p]^T$$

$$\phi_p = [\bar{\phi}_p \quad y_p]$$

$$\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^*]^T$$

$$\theta^* = [\bar{\theta}^{*T} \quad c_0^*]^T$$

II.5. Loi d'adaptation

En considérant la loi de contrôle donnée par l'équation (2.20) et les modèles paramétriques donnés par les équations (2.23) et (2.24), il reste seulement à établir une loi d'adaptation pour estimer les paramètres du vecteur θ^* . Selon la technique utilisée pour estimer θ^* , les lois d'adaptation peuvent être classées en trois principales catégories [6,8,48-50]: Les lois d'adaptation basées sur la technique de Lyapunov, les lois d'adaptation basées sur la technique du gradient et les lois d'adaptation basées sur la technique de Newton.

Pour les lois d'adaptation basées sur la technique de Lyapunov, après avoir choisi un modèle paramétrique, on essaye de trouver une fonction probable de Lyapunov V . Ensuite, on choisit une loi d'adaptation (c'est à dire une fonction $\dot{\theta}(t)$) de telle sorte que \dot{V} (dérivée de V) soit non positive définie.

Pour les deux dernières catégories, on essaye seulement de trouver une loi d'adaptation qui minimise un critère de performance adéquatement choisi.

Vu que seulement la loi d'adaptation basée sur la technique du gradient sera utilisée dans le chapitre 3, alors c'est seulement cette famille qui sera traitée en détail.

II.5.1. Loi d'adaptation basée sur la technique du gradient

Cette loi d'adaptation est basée sur le développement d'une équation algébrique de l'erreur et la minimisation d'une certaine fonction de coût $J(\theta, t)$ selon le vecteur des paramètres $\theta(t)$ à chaque instant t . Le modèle paramétrique utilisé est le modèle linéaire donné par l'équation (2.23).

L'utilisation de la méthode du gradient exige le développement d'une équation de l'erreur d'estimation. Cette erreur sera utilisée pour choisir une fonction coût appropriée $J(\theta)$, convexe sur l'espace de $\theta(t)$ (l'estimée de θ^*) à l'instant t . La fonction coût est alors minimisée par rapport à θ en utilisant la méthode du gradient, décrite en détail dans l'annexe de [6]. L'équation algébrique de l'erreur est développée en utilisant l'équation (2.23), qui donne le modèle paramétrique linéaire, pour générer l'estimée \hat{z} de z à chaque instant t , ceci en utilisant $\theta(t)$ au lieu de θ^* :

$$\hat{z} = \theta^T(t) \phi_p$$

Alors l'erreur d'estimation sera donnée par :

$$e_z = z - \hat{z} = (\theta^{*T} - \theta^T(t)) \phi_p \quad (2.25)$$

Cette erreur ne peut pas être utilisée pour générer la fonction coût, car elle peut ne pas être bornée. La loi d'adaptation doit, alors, garantir que l'erreur soit bornée. Ainsi, nous allons utiliser un signal $m(t)$ pour normaliser cette erreur. Nous parlerons alors de l'erreur d'estimation normalisée, cette erreur sera donnée par :

$$\varepsilon = \frac{z - \hat{z}}{m} = \frac{z - \theta^T \phi_p}{m} \quad (2.26)$$

Où m est un signal de normalisation conçu tel que $\frac{\phi_p}{m} \in L_\infty$. Un choix typique de m est :

$\dot{m}^2 = -\delta_0(m^2 - 1) + u_p^2 + y_p^2$ avec $m(0) = 1$, d'autres choix de m sont possibles. L'erreur d'estimation peut être aussi exprimée en fonction de l'erreur des paramètres comme suit :

$$\varepsilon = \frac{z - \theta^* \phi_p}{m^2} = -\frac{(\theta - \theta^*) \phi_p}{m^2} = -\frac{\tilde{\theta}^T \phi_p}{m^2} \quad (2.27)$$

Nous considérons, maintenant, la fonction du coût quadratique (convexe) suivante :

$$J(\theta) = \frac{\varepsilon^2 m^2}{2} = \frac{(z - \theta^T \phi_p)^2}{2m^2}$$

Cette fonction doit être minimisée selon le vecteur des paramètres θ . Ceci est possible car la fonction J est convexe. En appliquant la méthode du gradient, le vecteur $\theta(t)$ sera ainsi généré par l'équation :

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J(\theta)$$

Où $\Gamma = \Gamma^T > 0$ est le gain d'adaptation, et $\nabla J(\theta)$ est le gradient de $J(\theta)$ par rapport θ .

$$\nabla J(\theta) = \frac{(z - \theta^T \phi_p) \phi_p}{m^2} = \varepsilon \phi_p$$

Alors, la loi d'adaptation qui génère $\theta(t)$ est donnée par :

$$\dot{\theta} = -\Gamma \varepsilon \phi_p \quad (2.28)$$

Théorème (II.1) [4,6,48]:

La loi d'adaptation (2.28) garantit que :

1. $\varepsilon, \varepsilon n_s, \theta, \dot{\theta} \in L_\infty$.
2. $\varepsilon, \varepsilon n_s, \dot{\theta} \in L_2$.

Ceci, indépendamment, du fait que ϕ_p soit bornée ou non.

3. si $n_s, \phi_p \in L_\infty$ et ϕ_p est une excitation persistante alors $\theta(t)$ converge exponentiellement vers θ^* .

Quand k_p est connu, la loi d'adaptation (2.28) garde la même forme et les mêmes caractéristiques. Pour cela il suffit de remplacer θ par $\bar{\theta}$ et ϕ_p par $\bar{\phi}_p$.

Les performances des lois d'adaptation, établies pour le cas idéal, sont discutables dans le cas où des perturbations ou des dynamiques inconnues seraient présentes [4,6,45,48]. Plusieurs modifications ont été introduites pour améliorer la robustesse des lois d'adaptation, comme la modification σ [5,45], la modification e [45] etc.

Pour prendre en considération les informations préalables sur les paramètres du système, on introduit plusieurs modifications sur les lois d'adaptation, selon les informations

disponibles. Pour le cas des systèmes intervalles, où les paramètres peuvent varier dans des intervalles connus d'avance, on introduit la méthode du gradient avec projection [3,48], qui sera traitée dans la prochaine section.

II.5.2. Méthode du gradient avec projection

Pour les problèmes d'estimation où l'on connaît les régions dans lesquelles les valeurs des paramètres peuvent varier, comme pour le cas des systèmes intervalles, la loi d'adaptation peut être modifiée de manière à garantir que l'estimée $\theta(t)$ reste toujours dans un domaine convexe C défini comme suit :

$$M_\theta = \{\theta \in R^n / g(\theta) \leq 0\}$$

Où $g(\theta) : R^n \rightarrow R$, et $M_\theta^0, \delta(M_\theta)$ sont respectivement l'intérieur du domaine M_θ et la surface qui le limite.

La loi d'adaptation (2.28) peut être modifiée de telle sorte que le vecteur $\theta(t)$ reste toujours dans M_θ . L'idée principale dans cette modification est de choisir $\theta(0) = \theta_0 \in M_\theta$ et de projeter la direction d'adaptation ($\dot{\theta}(t)$ dérivée de $\theta(t)$) de telle sorte que $\theta(t)$ reste dans M_θ , dans le cas où $\theta(t) \in \delta(M_\theta)$ et $\theta(t)$ a tendance à sortir de M_θ . Pour cela, il existe plusieurs méthodes. Nous nous contenterons de présenter la méthode du gradient avec projection, car pour cette méthode, les propriétés données par le théorème (2.1) restent satisfaites. Le problème est décrit par :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } J(\theta) \\ & \text{soumise à : } g(\theta) \leq 0 \end{aligned}$$

La solution à ce problème est donnée par l'équation suivante [4,48] :

$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\nabla J(\theta) & \text{si } \theta \in M_\theta^0 \text{ ou } (\theta \in \delta(M_\theta) \text{ et } -\nabla J(\theta) \nabla g(\theta) \leq 0) \\ -\nabla J(\theta) + \frac{\nabla g(\theta) \nabla g(\theta)^T}{\nabla g(\theta)^T \nabla g(\theta)} \nabla J(\theta) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où, en utilisant un gain d'adaptation et en développant $\nabla J(\theta)$:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\gamma \varepsilon \phi_p & \text{si } \theta \in M_\theta^0 \text{ ou } (\theta \in \delta(M_\theta) \text{ et } (\varepsilon \phi_p)^T \nabla g(\theta) \leq 0) \\ -\gamma \varepsilon \phi_p + \frac{\nabla g(\theta) \nabla g(\theta)^T}{\nabla g(\theta)^T \nabla g(\theta)} \gamma \varepsilon \phi_p & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) donne la loi d'adaptation basée sur la méthode du gradient avec projection.

La combinaison de la loi de contrôle (2.20) et la loi d'adaptation (2.29) donne le contrôleur adaptatif à modèle de référence standard.

Théorème (II.2) [4]:

Tous les signaux dans le système en boucle fermée (2.12) (2.20) et (2.29) sont uniformément bornés et l'erreur de poursuite $e = y_p - y_m$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

La démonstration de ce théorème est dans l'annexe B.

II.6. MRAC robuste [6]

Dans la section précédente, nous avons considéré le cas idéal, où ni des perturbations à l'entrée ni des erreurs de modélisation sont présentes. Dans cette section nous allons traiter le cas réel.

Le système sera alors donné par l'équation suivante :

$$y_p = G_0(s)[1 + \Delta_m(s)]u_p + d \quad (2.30)$$

Où $G_0(s)$ décrit la partie modélisée du système (donnée par l'équation (2.12)) et vérifie les suppositions S1 à S4, d est une perturbation bornée appliquée à l'entrée et $\Delta_m(s)$ est l'incertitude multiplicative qui vérifie les suppositions suivantes :

D1. $\Delta_m(s)$ est analytique dans $Re[s] \geq -\frac{\delta_0}{2}$.

D2. Il existe une fonction de transfert $W(s)$ analytique dans $Re[s] \geq -\frac{\delta_0}{2}$ telle que $W(s)\Delta_m(s)$ est strictement propre.

Ces deux suppositions assurent que : $\Delta_\infty = \|W(s)\Delta_m(s)\|_{\infty\delta_0}$ et $\Delta_2 = \|W(s)\Delta_m(s)\|_{2\delta_0}$ soient finis.

Le MRAC utilisé pour ce cas est appelé MRAC robuste. Sa procédure de conception est la même que celle pour le cas idéal (sans perturbation et sans dynamique inconnue). Ainsi, on utilise la même loi de contrôle que pour le cas idéal, mais cette fois-ci les paramètres sont générés par une loi d'adaptation robuste. Cette dernière est basée sur un modèle paramétrique établi pour l'équation (2.30). Puisque les procédures de conception et d'analyse pour ce cas sont similaires à celles du cas idéal, nous ne donnerons que l'expression du modèle paramétrique linéaire pour l'équation (2.30) qui est :



$$W_m(s)[u_p] - c_0^* y_p = \bar{\theta}^{*T} \bar{\phi}_p - \eta_p \tag{2.31}$$

Où $\eta_p = \frac{\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)} W_m(s) [\Delta_m(s)(u_p + d) + d]$ et toutes les autres grandeurs sont comme

définies pour le cas idéal.

La loi d'adaptation reste inchangée, c'est à dire :

$$\dot{\bar{\theta}} = \text{Pr}[-\Gamma \varepsilon \bar{\phi}_p] \tag{2.32}$$

Les équations (2.14), (2.15), (2.30) et (2.32) définissent la version robuste du MRAC standard.

Une représentation intéressante et utile pour l'analyse du MRAC étudié dans ce chapitre est donnée par la figure (2.4). Elle est valable pour le cas idéal en posant $\Delta_m(s) = 0$ et $d = 0$.

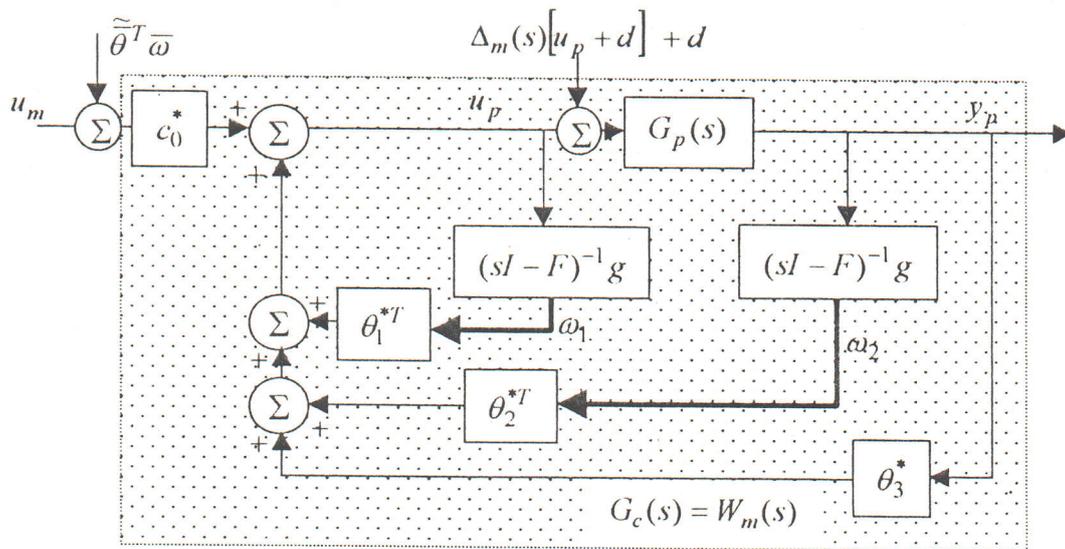


Figure (II.4) : MRAC en présence de dynamique inconnue et de perturbation bornée à l'entrée.

II.7. Performances

D'habitude, les performances exigées des MRAC sont :

1. L'erreur doit tendre vers zéro quand t tend vers l'infini.
2. Tous les signaux, en boucle fermée, doivent être bornés.

Mais ces deux mesures de performances ne donnent pas une information sur le comportement du signal erreur dans le temps. Ainsi, pour pouvoir analyser le comportement, dans le temps, du signal erreur, deux autres mesures de performances sont utilisées [6,47] :

1'. La valeur moyenne du carré de l'erreur (énergie moyenne) donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{t} \int_0^t e^2(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.33)$$

2'. La borne L_∞ du signal erreur donnée par :

$$\bar{E} = \sup_{t \geq 0} |e(t)| \quad (2.34)$$

Le premier critère donne une information sur l'énergie moyenne du signal erreur, tandis que le deuxième caractérise le comportement dans le temps de ce signal. Les résultats obtenus en appliquant ce théorème au MRAC standard, sont donnés par le théorème suivant :

Théorème (II.3) [6]:

Considérons le système en boucle fermée donné par les équations (2.12), (2.20) et (2.2).

Alors, $\forall t > 0$, l'erreur $e(t) = y_p - y_m$ satisfait :

$$\frac{1}{t} \int_0^t e^2(\tau) d\tau \leq c \left[\frac{1}{\alpha^2} (\bar{m}^2 + 1) + \alpha^{2n} \bar{m}^2 \frac{|\bar{\bar{\theta}}(0)|^2}{t} \right] \quad (2.35)$$

Où \bar{m} est une borne supérieure du signal $m(t)$, c'est à dire $m(t) \leq \bar{m}, \forall t \geq 0$.

$\bar{\bar{\theta}}(t) = \theta(t) - \theta^*$ est l'erreur sur les paramètres. $\alpha > 0$ est une constante arbitraire très grande et $c > 0$ est une représentation générique de constantes positives dont la valeur n'est pas intéressante. On a aussi :

$$\sup |e(t)| \leq c \bar{m} \quad (2.36)$$

où c dépend du choix du modèle de référence, des filtres et du domaine M_θ dans lequel varient les paramètres.

Nous donnons, maintenant, la démonstration de ce théorème qui sera utilisée dans le chapitre IV.

Démonstration

De la relation (B.2), de l'annexe B, l'erreur de poursuite $e = y_p - y_m$ satisfait :

$$e = \frac{1}{c_0} W_m(s) \left[\tilde{\theta}^T \omega \right] \quad (2.37)$$

Ainsi

$$\int_0^t e^2(\tau) d\tau \leq c \int_0^t \left(\tilde{\theta}^T \omega \right)^2 d\tau \quad (2.38)$$

Nous allons essayer d'obtenir une expression pour $\int_0^t \left(\tilde{\theta}^T \omega \right)^2 d\tau$. A partir du modèle paramétrique linéaire on peut facilement avoir :

$$W_m(s) [u_p] - \bar{\theta}^{*T} \bar{\phi}_p = c_0 y_p$$

Considérons la fonction positive définie suivante :

$$V = \frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{2\gamma} = \frac{|\tilde{\theta}|^2}{2\gamma} \quad (2.39)$$

Nous savons, d'après l'équation (2.27), que $\varepsilon = \frac{\tilde{\theta}^T \bar{\phi}_p}{m^2}$. En prenant en considération la stabilité de la méthode du gradient projection [6], on peut facilement montrer que, le long de la solution de (2.29) [4]:

$$\dot{V} = \frac{\tilde{\theta}^T}{2\gamma} \dot{\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{\theta}^T}{2\gamma} \text{Pr}[-\gamma \varepsilon \bar{\phi}_p] \leq -\varepsilon^2 m^2 = -\frac{\left(\tilde{\theta}^T \bar{\phi}_p \right)^2}{m^2}$$

ainsi $V, \tilde{\theta} \in L_\infty$ et $\varepsilon m, \frac{\tilde{\theta}^T \bar{\phi}_p}{m} \in L_2$ en plus :

$$\int_0^t \varepsilon^2 m^2 d\tau = \int_0^t \frac{\left(\tilde{\theta}^T \bar{\phi}_p \right)^2}{m^2} d\tau \leq V_0 - V_t \leq V_0 = \frac{|\tilde{\theta}(0)|^2}{2\gamma} \quad \text{car } V_t \geq 0. \quad (2.40)$$

On peut également montrer que [6] :

$$\left| \dot{\tilde{\theta}} \right|^2 \leq \gamma^2 \frac{|\bar{\phi}_p|^2}{m^2} \varepsilon^2 m^2 \quad (2.41)$$

Nous avons aussi :

$$\bar{\phi}_p = W_m(s) H_1(s) \begin{bmatrix} u_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

Où $H_1(s)$ est défini dans (B.6). En utilisant le lemme (2.1) :

$$\frac{|\bar{\phi}_p|^2}{m^2} \leq c \quad (2.42)$$

En remplaçant (2.42) dans (2.41) nous obtenons :

$$\left| \dot{\bar{\theta}} \right|^2 \leq c \varepsilon^2 m^2$$

Ainsi

$$\int_0^t \left| \dot{\bar{\theta}} \right|^2 d\tau \leq c \left| \dot{\bar{\theta}}(0) \right|^2 \quad (2.43)$$

Maintenant, à partir de l'équation (B.5) et en appliquant le lemme (2.1) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\tilde{\bar{\theta}}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2 &\leq \frac{c}{\alpha} \left[\left\| \left(\dot{\tilde{\bar{\theta}}}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2 + \left\| \left(\tilde{\bar{\theta}}^T \dot{\bar{\omega}} \right)_t \right\|_2 \right] + c \alpha^{n^*} \left[\left\| \left(\frac{\tilde{\bar{\theta}}^T \bar{\phi}_p}{m} \right)_t \right\|_2 + \left\| \left(\dot{\tilde{\bar{\theta}}} \right)_t \right\|_2 \right] \\ &\leq \frac{c}{\alpha} \left[\left\| \left(\dot{\tilde{\bar{\theta}}}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2 + \left\| \left(\tilde{\bar{\theta}}^T \dot{\bar{\omega}} \right)_t \right\|_2 \right] + c \alpha^{n^*} \bar{m} \left[\left\| \left(\frac{\tilde{\bar{\theta}}^T \bar{\phi}_p}{m} \right)_t \right\|_2 + \left\| \left(\dot{\tilde{\bar{\theta}}} \right)_t \right\|_2 \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pour $\left| \dot{\tilde{\bar{\theta}}} \right|$ nous avons :

$$\left| \dot{\tilde{\bar{\theta}}} \right| \leq \gamma |\varepsilon m| \frac{|\bar{\phi}_p|}{m} = \gamma \frac{|\tilde{\bar{\theta}}^T \bar{\phi}_p| |\bar{\phi}_p|}{m} \leq c \quad (2.45)$$

Pour $\|\bar{\omega}_t\|_2$ et en prenant en compte l'équation (B.10) nous obtenons :

$$\left(\|\omega_t\|_2 \right)^2 \leq c(\bar{m}^2 + 1) \quad (2.46)$$

Pour $\|\dot{\bar{\omega}}_t\|_2$, nous avons de (B.1) et (B.2) :

$$\|(u_p)_t\|_2 \leq c \|\omega_t\|_2 + c \|r_t\|_2$$

$$\|(y_p)_t\|_2 \leq c \|\omega_t\|_2 + c \|r_t\|_2$$

$$\|(\dot{y}_p)_t\|_2 \leq c \|\omega_t\|_2 + c \|r_t\|_2$$

et vu que $\dot{\bar{\omega}} = sH_1(s) \begin{bmatrix} u_p & y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{y}_p \end{bmatrix}$, alors en utilisant l'équation (2.46) nous aurons :

$$\left(\|\dot{\omega}_t\|_2 \right)^2 \leq c(\bar{m}^2 + 1) \quad (2.47)$$

En combinant (2.44), (2.45), (2.46) et (2.47) nous obtenons :

$$\int_0^t \left(\widetilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)^2 d\tau \leq \frac{c}{\alpha^2} (\bar{m}^2 + 1)t + c\alpha^{2n^*} \bar{m}^2 \left[\int_0^t \frac{\left(\widetilde{\theta}^T \bar{\phi}_p \right)^2}{m^2} d\tau + \int_0^t \left| \dot{\widetilde{\theta}} \right|^2 d\tau \right] \quad (2.48)$$

En combinant, alors, (2.38), (2.40), (2.43) et (2.48) nous aurons :

$$\int_0^t e^2(\tau) d\tau \leq c \left[\frac{1}{\alpha^2} (\bar{m}^2 + 1)t + \alpha^{2n^*} \bar{m}^2 \left| \widetilde{\theta}(0) \right|^2 \right] \quad (2.49)$$

à partir de laquelle l'équation (2.35) est facilement obtenue.

Pour obtenir l'équation (2.38), nous utilisons l'équation (2.37) et le lemme (2.1) :

$$\begin{aligned} |e(t)| &\leq \left\| \frac{1}{c_0} W_m(s) \right\|_2^\delta \left\| \left(\widetilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2^\delta \\ &\leq \left\| \frac{1}{c_0} W_m(s) \right\|_2^\delta c \|\bar{\omega}_t\|_2^\delta \quad (\text{car } \widetilde{\theta} \in L_\infty) \\ &\leq c\bar{m} \quad (\text{ceci en utilisant (B.9)}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Le théorème (2.3) donne une information sur le comportement dans le temps du signal erreur (sa borne L_∞ et son énergie moyenne). On voit de l'équation (2.35) que la valeur moyenne du carré de ce signal est affectée par $\widetilde{\theta}(0)$ (L'erreur initiale sur les paramètres). Alors, une valeur de $\left| \widetilde{\theta}(0) \right|$ très grande donne une énergie moyenne $E(t)$ très grande, surtout durant les premières étapes d'adaptation, car quand t augmente l'effet de $\widetilde{\theta}(0)$ sur l'énergie moyenne du signal erreur diminue. Ceci se manifeste par une mauvaise réponse en régime transitoire (qui est une caractéristique des contrôleurs adaptatifs), observée assez souvent en simulations, quand l'erreur initiale sur les paramètres $\widetilde{\theta}(0)$ est très grande. D'autre part l'équation (2.36) donne une borne uniforme sur l'erreur de poursuite $e(t)$. Puisque $e(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, cette borne peut devenir conservatrice surtout pour t grand. Cependant, elle donne une limite sur les oscillations qui peuvent être rencontrées durant la phase initiale (régime transitoire).

On voit que, ni l'équation (2.35), ni l'équation (2.36), ne donnent une information sur la manière dont le comportement du signal erreur sera amélioré. Si une bonne information préalable sur le vecteur $\bar{\theta}^*$ est disponible, alors on peut choisir $\widetilde{\theta}(0)$ très proche de $\bar{\theta}^*$, telle que $\widetilde{\theta}(0)$ soit assez petite. Ceci donnera une énergie moyenne $E(t)$ petite. Une erreur initiale

petite sur le vecteur des paramètres $\bar{\theta}(0)$ donnera une borne supérieure sur le signal de normalisation \bar{m} petite (voir l'équation (B.14)). Elle donnera, par conséquent, un comportement transitoire meilleur. Cependant, l'intérêt du contrôle adaptatif apparaît, surtout, quand l'incertitude sur les paramètres est très élevée.

Ce comportement de l'erreur de sorties, due à l'erreur initiale sur les paramètres ou tout simplement à l'état initial $\bar{\theta}(0)$ du vecteur des paramètres, est appelé régime transitoire et sera étudié dans le chapitre 4. Il ne faut pas confondre ce régime transitoire avec celui dû aux états initiaux du système, du modèle de référence et des filtres, car celui-ci est un problème de tout le contrôle et non seulement celui du contrôle adaptatif.

II.8. Conclusion

Sous certaines conditions, parmi lesquelles le système doit être à phase minimale, le MRAC standard donne un système en boucle fermée stable et dont la robustesse peut être améliorée, en utilisant les modifications adéquates. Cependant, ce MRAC devient de plus en plus complexe si l'ordre du système augmente. En plus, si l'incertitude initiale $|\bar{\theta}(0) - \bar{\theta}^*|$ sur les paramètres est élevée, les performances de ce MRAC seront médiocres ou même inacceptables. En absence de solution à ce problème, l'ajustement de valeurs initiales des paramètres $\bar{\theta}(0)$, par des essais, est le seul choix disponible pour le concepteur.

Ainsi, et avec ces contraintes, la complexité du MRAC standard sera difficilement justifiée par ses performances. Ce qui le rend non compétitif avec les autres stratégies de contrôle, dont les systèmes experts ou même avec les autres MRAC. D'autres améliorations des performances doivent, alors, être explorées. Par exemple, le régime transitoire dû au choix, de $\bar{\theta}(0)$.

Chapitre III
Procédures de compensation des
systèmes pour l'application du SAC

Procédures de compensation des systèmes

pour l'application du SAC

III.1. Introduction

Nous avons vu dans le premier chapitre que le SAC constitue un contrôleur adaptatif à modèle de référence simple, du point de vue implantation. Il n'exige ni la connaissance de l'ordre de système ni celle de son gain en haute fréquence. Il n'exige pas non plus que le système soit à phase minimale. La seule condition exigée du système, pour garantir une poursuite asymptotique, est qu'il soit ASPR (concept déjà défini dans le chapitre premier). Cette condition peut être contournée en augmentant le système par un compensateur en parallèle, où en augmentant et le système et le modèle de référence comme présenté dans le même chapitre.

Avec cette solution, une tâche supplémentaire apparaît : On doit concevoir un compensateur pour rendre le système, dont les paramètres varient dans certains intervalles connus d'avance, ASPR pour toutes les valeurs permises de ces paramètres. Aussi, pour que la supposition que le système augmenté est une approximation raisonnable du système réel, soit valable, il est préférable que la contribution de ce compensateur soit assez petite.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la conception d'un tel compensateur [22,23,38-44], mais aucune de ces méthodes n'est procédurale, pour le cas des systèmes intervalles. Certaines méthodes [39,40,51] ne prennent pas en considération, d'une manière stricte, la condition de stabilité du système en boucle fermée fictif représenté par la figure (1.1). Ainsi, elles ne garantissent pas que le système augmenté soit ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres du système réel.

Dans ce chapitre, en se basant sur les lemmes cités dans le chapitre premier, nous allons étendre l'application de certaines méthodes de conception du compensateur, et les rendre plus procédurales. Ceci, en prenant en compte les variations des paramètres du système et la robustesse, en présence de dynamique inconnue. Certaines de ces procédures sont propres aux systèmes SISO, d'autres peuvent être étendues aux systèmes MIMO. L'efficacité de ces méthodes est testée en les appliquant à certains exemples.

III.2. Conception dans le domaine temporel en utilisant le théorème de Kharitonov

Dans cette section, nous considérons le théorème (I.4) établi dans [39]. Ce théorème exploite la relation entre la positivité et la stabilité, et ne prend en compte qu'une forme particulière du compensateur. Quoique ce théorème se base sur le lemme (I.6), il ne prend pas en compte d'une manière stricte, en réalité, la stabilité du système fictif en boucle fermée (figure (I.1)), pendant le choix des paramètres du compensateur. Ceci rend le système augmenté, conçu en se basant sur ce théorème, non ASPR pour certaines valeurs permises des paramètres du système réel. Ici, nous utilisons le théorème de Kharitonov (dédié à l'analyse de la robustesse), pour guider le choix des paramètres du compensateur, de telle manière que le système soit ASPR pour toutes les valeurs des paramètres.

Le système sous contrôle est donné par sa fonction de transfert :

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = k_p \frac{N(s)}{D(s)} \quad k_p > 0 \quad (3.1)$$

Où $N(s)$ et $D(s)$ sont des polynômes "monics" d'ordres m et n respectivement.

On suppose que :

1. Une borne supérieure de degré relatif $\gamma_p = n - m$ est connue, et est notée n^* .
2. $N(s)$ est stable (le système est à phase minimale).
3. Des valeurs approximatives de k_p et de $|G_p(j0)|$ sont connues.

Nous utilisons la forme du compensateur donnée par le théorème (I.4). Le système augmenté est donné par sa fonction de transfert :

$$G_a(s) = G_p(s) + H(s) \quad (3.2)$$

Le compensateur est décrit par :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} F_i(s) \quad n^* \geq 2 \quad (3.3)$$

$$\text{Où :} \quad F_i(s) = \frac{f_i}{Q_i(s)} \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad (3.4)$$

$Q_i(s)$ est un polynôme "monic" stable avec $\deg(Q_i(s)) = n^* - i$.

$$k_p \gg f_1 \gg \dots \gg f_{n^*-1} \quad \text{et} \quad |G_p(j0)| \gg |H(j0)| \quad (3.5)$$

$Q_i(s)$ peut être choisi comme étant égal à $(s + \alpha_i)^{n^* - i}$ où $\alpha_i > 0$ [40]. Alors, $H(s)$ prend la forme :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} F_i(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1 \quad (3.6)$$

Où f_i et α_i sont les paramètres à calculer. Le système augmenté s'écrit alors :

$$G_i(s) = G_{i-1}(s) + F_i(s) = G_{i-1}(s) + \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad (3.7)$$

Ici, selon l'estimation de n^* , on obtient deux cas :

1. Si $n^* - i \geq \gamma_p$, le degré relatif de $G_i(s)$ est γ_p .
2. Si $n^* - i \leq \gamma_p - 1$, le degré relatif de $G_i(s)$ est $\gamma_p - 1$ (il diminue d'une unité).

Ainsi, à la fin de la procédure de conception du compensateur, nous aurons un système augmenté dont le degré relatif est 1.

Dans [39], la condition imposée est que si les paramètres f_i sont choisis suffisamment petits, à chaque itération, le système $G_{CL_i}(s) = \frac{G_{i-1}(s)}{1 + G_{i-1}(s)F_i^{-1}(s)}$ sera stable. Alors, le système augmenté à l'étape i ($G_i(s) = G_{i-1}(s) + F_i(s)$) sera à phase minimale.

Ainsi, si ces conditions sont satisfaites pour toutes les itérations, le système augmenté global $G_a(s) = G_p(s) + H(s)$ sera à phase minimale et de degré relatif 1. Ceci remplit les conditions du lemme (I.6) et garantit que le système augmenté soit ASPR. Mais il n'y a pas de méthode, permettant de tester si les paramètres f_i choisis sont suffisamment petits, pour garantir que $G_{CL_i}(s)$ soit stable. Nous proposons, donc, d'utiliser le théorème de Kharitonov [52] pour tester la stabilité de ce système, pour toutes les valeurs des paramètres du processus. Ceci permettra de décider quant à la validité du choix du paramètre f_i .

III.2.1. Analyse de la robustesse par le théorème de Kharitonov

Considérons la famille de polynômes suivante :

$$P(s, a) = \sum_0^n a_k s^k \quad 0 \leq \underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Où les nombres réels \underline{a}_k et \bar{a}_k sont, respectivement, les valeurs minimale et maximale du paramètre a_k . Soit $a = (a_0, \dots, a_n)$, alors on définit la famille de polynôme :

$$A = \left\{ \alpha \in R^{n+1} \mid \underline{a}_k \leq \alpha_k \leq \bar{a}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \right\} \quad (3.9)$$

A est "Hurwitz" si tous les polynômes, appartenant à A , le sont. On définit les quatre polynômes de Kharitonov comme suit [24,27,53]:

$$\begin{aligned} k_{11}(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \\ k_{12}(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \\ k_{21}(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \\ k_{22}(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Théorème (III.1) : (Théorème de Kharitonov [24,27,53])

La famille de polynômes A , définie ci-dessus, est stable si et seulement si les quatre polynômes de Kharitonov sont stables.

III.2.2. Conception du compensateur

Considérons, maintenant, le système non-ASPR à une seule entrée et une seule sortie:

$$G_p(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{C_m s^m + C_{m-1} s^{m-1} + \dots + C_0}{s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_0} \quad (3.11)$$

où les coefficients peuvent varier dans les intervalles définis comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{C}_i &\leq C_i \leq \bar{C}_i & i = 0, 1, \dots, m \\ \underline{B}_j &\leq B_j \leq \bar{B}_j & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

On suppose que :

1. Une valeur maximale de n^* est connue.
2. Le polynôme $N(s)$ est "Hurwitz".

Soit le compensateur déjà cité, de la forme :

$$F_i(s) = \frac{f_i}{Q_i(s)} = \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad (3.13)$$

Où f_i et α_i sont les paramètres de conception. Les paramètres α_i sont initialement choisis de telle sorte que le compensateur soit plus rapide que le modèle de référence. Ceci permet au régime transitoire du compensateur de s'annuler très vite devant celui du modèle de référence,

pour éviter d'autres problèmes au contrôleur. Les autres paramètres f_i peuvent être choisis tels que [39] :

$$\begin{aligned} f_i &\ll f_{i-1} \text{ pour } i = 2, 3, \dots, n^* - 1 \\ f_1 &\ll \min \{ C_j > 0, j = 0, 1, \dots, m \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ainsi, la fonction de transfert du système augmenté, à l'étape i , peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} G_i(s) &= \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = G_{i-1}(s) + F(s) = G_{i-1}(s) + \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \\ &= \frac{N_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i} + f_i D_{i-1}(s)}{D_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n^* - 1. \text{ où } G_0(s) = G_p(s)$$

$$\text{Soit la fonction : } G_i(s) = \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = \frac{C_{m_i}^i s^{m_i} + C_{m_i-1}^i s^{m_i-1} + \dots + C_0^i}{s^{n_i} + B_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + B_{n_i-2}^i s^{n_i-2} + \dots + B_0^i} \quad (3.16)$$

telle que $n_i = \deg(D_i(s))$ et $m_i = \deg(N_i(s))$.

Cette fonction de transfert est strictement définie par le vecteur suivant :

$$V_i = [C_{m_i}^i \quad C_{m_i-1}^i \quad \dots \quad C_0^i \quad B_{n_i-1}^i \quad \dots \quad B_0^i] \quad (3.17)$$

$$\text{Avec : } V_0 = [C_m \quad C_{m-1} \quad \dots \quad C_0 \quad B_n \quad \dots \quad B_0] \quad (3.18)$$

Il faut noter que chaque composante du vecteur V_i est une fonction des composantes du vecteur V_{i-1} et du paramètre f_i , choisi à l'étape i . Ainsi, ces paramètres peuvent varier dans des intervalles qu'on peut calculer connaissant les intervalles donnés par l'équation (3.12).

Les valeurs minimales et maximales de ces paramètres sont écrites comme suit :

$$\bar{V}_i = [\bar{C}_{m_i}^i \quad \bar{C}_{m_i-1}^i \quad \dots \quad \bar{C}_0^i \quad \bar{B}_{n_i-1}^i \quad \dots \quad \bar{B}_0^i] \quad (3.19)$$

$$\underline{V}_i = [\underline{C}_{m_i}^i \quad \underline{C}_{m_i-1}^i \quad \dots \quad \underline{C}_0^i \quad \underline{B}_{n_i-1}^i \quad \dots \quad \underline{B}_0^i] \quad (3.20)$$

Les composantes de ces deux vecteurs sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{C}_l^i &= \min_{V_{i-1}} [C_l^i], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1; \quad l = 0, 1, \dots, m_i \\ \text{Soumise à : } &\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_l^i &= \max_{V_{i-1}} [C_l^i], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1; \quad l = 0, 1, \dots, m_i \\ \text{Soumise à : } &\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_k^i &= \min_{V_{i-1}} [B_k^i], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1; \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1 \\ \text{Soumise à : } &\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_k^i &= \max_{V_{i-1}} [B_k^i], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1; \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1 \\ \text{Soumise à : } &\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \bar{C}_r^{i-1}, & r = 0, 1, 2, \dots, m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \bar{B}_p^{i-1}, & p = 0, 1, 2, \dots, n_{i-1} - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Le polynôme caractéristique du système fictif en boucle fermée, formé de $G_{i-1}(s)$ dans la chaîne directe et de $F_i^{-1}(s)$ dans la chaîne de retour, est :

$$P_i(s) = N_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i} + f_i D_{i-1}(s) = \sum_{j=1}^n q_j^i s^j \quad (3.25)$$

$$i = 1, 2, \dots, n^* - 1 \text{ et } q_j^i = q_j^i(V_i, f_i), \quad j = 0, 1, \dots, p_i$$

Où p_i est le degré de P_i . Les coefficients de $P_i(s)$ dépendent des composantes de V_i et du paramètre choisi, f_i .

Les valeurs maximale et minimale des paramètres du polynôme caractéristique $P_i(s)$ sont déterminées par la procédure d'optimisation des fonctions avec contraintes :

$$\begin{aligned} \underline{q}_j^i &= \min_{V_i} [q_j^i(V_i, f_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p_i \\ \text{soumise à : } &\underline{V}_i(h) \leq V_i(h) \leq \bar{V}_i(h), \quad h = 0, 1, 2, \dots, m_i + n_i + 1; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_j^i &= \max_{V_i} [q_j^i(V_i, f_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p_i \\ \text{soumise à : } &\underline{V}_i(h) \leq V_i(h) \leq \bar{V}_i(h), \quad h = 0, 1, 2, \dots, m_i + n_i + 1; \end{aligned} \quad (3.27)$$

où $X(h)$ est la h ième composante du vecteur X .

Les quatre polynômes de Kharitonov correspondants au polynôme $P_i(s)$ peuvent être formés et la stabilité de $P_i(s)$ peut être testée, sur tout l'intervalle de variation des paramètres du système $G_p(s)$. En effet, les paramètres de $P_i(s)$ sont fonctions des paramètres de $G_p(s)$. Si ces quatre polynômes sont stables, on passe à l'étape $i + 1$. Sinon, il faut changer les valeurs

de α_i et de f_i déjà choisies et refaire le test. Dans ce cas, et conformément à l'inégalité (3.14), une petite diminution de f_i et une petite augmentation de α_i résolvent, généralement, le problème. La procédure est répétée jusqu'à ce que toutes les fonctions $F_i(s)$ soient calculées.

III.3. Conception du compensateur en utilisant la première colonne de la table de Routh

La méthode, proposée dans la section précédente, est utilisée pour guider le choix des paramètres du compensateur ayant la forme particulière donnée dans [39,40]. Dans cette section, nous proposons une autre procédure de conception basée sur le lemme (I.6). Ensuite, nous utilisons des contraintes générées à partir de la première colonne de la table de Routh, pour assurer que le système fictif, en boucle fermée, soit stable, pour toutes les valeurs permises des paramètres du processus. Le système peut ne pas être à phase minimale, dans ce cas. Seulement, son ordre et les valeurs nominales des paramètres, ainsi que leurs intervalles de variation, doivent être connus.

Le système est décrit par la fonction de transfert donnée par l'équation (3.11). Les intervalles de variation des paramètres sont définis par l'équation (3.12). Pour répondre aux conditions du lemme (I.6), il faut que le système augmenté ait un degré relatif égal à l'unité et que le système fictif, en boucle fermée, soit stable. On suppose que :

1. Les valeurs nominales des paramètres du système sont connues, ainsi que les intervalles dans lesquels ces paramètres peuvent varier.
2. L'ordre du système est connu, ceci pour pouvoir répondre à la condition sur le degré relatif du système augmenté.

La condition 2 n'est pas nouvelle en contrôle adaptatif, et peut être satisfaite pour les systèmes linéaires. Une méthode pour l'estimation de l'ordre des systèmes est donnée dans [54].

Le compensateur est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$R_p(s) = \frac{f_{n-1}s^{n-1} + f_{n-2}s^{n-2} + \dots + f_0}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} = \frac{N_R(s)}{D_R(s)} \quad (3.28)$$

Notons que ce compensateur satisfait la condition imposée sur le degré relatif du système augmenté par le lemme (I.6). Le dénominateur de $R_p(s)$ doit être choisi d'avance, de telle sorte que les constantes de temps du compensateur soient plus petites que celles du

modèle de référence. Les coefficients du numérateur sont des paramètres à concevoir. La deuxième condition devant être vérifiée est que $R_p^{-1}(s)$ stabilise le système fictif, en boucle fermée. En d'autres termes, il faut que le polynôme caractéristique de ce système soit stable. Ce polynôme est donné par l'équation suivante :

$$P(s) = a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_0 = N(s)D_R(s) + D(s)N_R(s) \quad (3.29)$$

$$\text{Où} \quad a_k = f(C_i, B_j, \dots, f_l) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 0, 1, \dots, 2n-1 \\ i = 0, 1, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.30)$$

On sait déjà que la contribution du compensateur doit être minimisée, pour garantir que l'erreur en régime permanent soit suffisamment petite. Il faut alors trouver des conditions nécessaires et suffisantes, pour garantir que le système augmenté soit ASPR et que la contribution du filtre soit minimale. Il faut noter que la fonction de transfert du compensateur peut être écrite sous la forme :

$$R_p(s) = \frac{f_{n-1}s^{n-1}}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + \dots + h_0} + \frac{f_{n-2}s^{n-2}}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + \dots + h_0} + \dots + \frac{f_0}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + \dots + h_0} \quad (3.31)$$

Ainsi, pour minimiser la contribution du compensateur, il faut que le gain de chacune de ses composantes soit minimisé, c'est à dire qu'il faut minimiser tous les paramètres f_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Alors, il suffit de minimiser le critère suivant :

$$J = \sum_{i=0}^{i=n-1} f_i^2 \quad (3.32)$$

La minimisation de ce critère est effectuée, pour toutes les valeurs permises des paramètres du processus, en prenant en compte la stabilité du polynôme caractéristique, donné par l'équation (3.29). Ceci est accompli par la procédure de minimisation avec contrainte, suivante :

$$\begin{aligned} & \min |_F \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \right] \\ & \text{soumise à : } \left[\begin{array}{l} \min |_V [R_{1,k}(V, F)] \\ \text{soumise à : } \underline{V} \leq V \leq \bar{V} \end{array} \right] \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Où $F = [f_{n-1} \quad f_{n-2} \quad \dots \quad f_0]$ est un vecteur formé des paramètres du compensateur et les vecteurs V, \bar{V} et \underline{V} ont déjà été définis. $R_{1,k}(V, F)$, $k = 1, 2, \dots, 2n$ sont les éléments de la première colonne de la table de Routh qui correspond au polynôme (3.29).

Il faut noter que le calcul explicite des gradients des éléments de la première colonne de la table de Routh est très bénéfique pour leurs minimisations [55-57]. Nous allons établir une telle procédure de calcul, en se basant sur la récursivité de calcul de la table de Routh [62] elle-même. La table de Routh, correspondant au polynôme donné par l'équation (3.29), est donnée par le tableau (III.4).

R_{11}	R_{12}	R_{13}	...	R_{1n}
R_{21}	R_{22}	R_{23}	...	R_{2n}
R_{31}	R_{32}	R_{33}	...	R_{3n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$R_{2n,1}$	$R_{2n,2}$	$R_{2n,3}$...	$R_{2n,n}$

Tableau (3.1) : Table de Routh pour le polynôme caractéristique de l'équation (3.29).

Les éléments des deux premières lignes sont établis directement des coefficients du polynôme caractéristique de l'équation (3.29) et sont donnés par la convolution suivante :

$$P(s) = N \otimes D_R + D \otimes N_R = a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_0 \quad (3.34)$$

Où : \otimes dénote l'opération de convolution, $N = [C_m \ C_{m-1} \ \dots \ C_0]$, $D = [B_{n-1} \ B_{n-2} \ \dots \ B_0]$, $N_R = [f_{n-1} \ f_{n-2} \ \dots \ f_0]$ et $D_R = [h_{n-1} \ h_{n-2} \ \dots \ h_0]$.

On peut, alors, directement déduire les dérivées partielles $\frac{\partial \alpha_k}{\partial V(i)}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$;

$$i = 1, 2, \dots, n+m+1$$

Les autres éléments sont donnés par :

$$R_{i,j} = R_{i-2,j+1} - \frac{R_{i-2,1}R_{i-1,j+1}}{R_{i-1,1}} \quad (3.35)$$

Alors leurs dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial V(k)} = \frac{\partial R_{i-2,j+1}}{\partial V(k)} - \frac{\left(\frac{\partial R_{i-2,1}}{\partial V(k)} R_{i-1,j+1} + \frac{\partial R_{i-1,j+1}}{\partial V(k)} R_{i-2,1} \right) - \frac{\partial R_{i-1,1}}{\partial V(k)} (R_{i-2,1} R_{i-1,j+1})}{(R_{i-1,1})^2} \quad (3.36)$$

$$i = 3, 4, \dots, 2n; \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n+m+1; \quad \frac{\partial R_{i,n}}{\partial V(k)} = 0.$$

Ainsi, les gradients des fonctions $R_{1,k}(V, F)$, $k = 1, \dots, 2n$ peuvent être calculés et leurs minimisations seront plus rapides.

Il faut noter que f_{n-1} , donné dans l'équation (3.28), doit être non nul pour satisfaire la condition sur le degré relatif. Dans la procédure de l'équation (3.33), pendant que la contrainte assure que le système, fictif, en boucle fermée, reste stable, la minimisation du critère de performance assure que la contribution du compensateur sera minimale. Ainsi, cette procédure réalise un compromis entre ces deux contraintes.

Remarque : Supposons que les éléments $R_{1,k}$, $k = 2, 3, \dots, 2n$ peuvent varier dans leurs intervalles correspondants $[R_{1,k}, \bar{R}_{1,k}]$. Alors l'opération d'optimisation définie par l'équation (3.33) s'arrête au premier intervalle $[R_{1,k}, \bar{R}_{1,k}]$ contenant zéro [25]. Car l'élément $R_{1,k}$, étant un pivot pour la prochaine ligne de la table de Routh, les éléments de cette ligne ne seront pas bornés. Ainsi il faut changer le vecteur F , donné comme valeur initiale à l'opération d'optimisation de l'équation (3.33).

III.4. Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel

Dans cette section, nous allons considérer une méthode de conception du compensateur pour les systèmes contenant une dynamique inconnue. Cette méthode est étendue de manière à être applicable aux systèmes intervalles, déjà donnés par les équations (3.11) et (3.12). L'incertitude sur les paramètres du système est ramenée à une dynamique supplémentaire, sous forme d'une incertitude multiplicative ou additive. Cette dynamique est ajoutée au système nominal, supposé connu, ou multipliée par celui-ci.

L'incertitude de modélisation des systèmes est, généralement, divisée en deux catégories, incertitudes structurées et incertitudes non structurées. Pour l'incertitude structurée, le modèle de l'incertitude et le rang de variation de ses paramètres sont supposés connus. Par exemple, lorsqu'un modèle valide pour la fonction de transfert d'un système est connu, mais l'emplacement exact des pôles, des zéros ou la valeur de son gain ne sont pas connues. Pour l'incertitude non structurée, le système est moins connu. On suppose seulement que la réponse fréquentielle reste toujours entre deux bornes.

L'incertitude structurée peut être modélisée de plusieurs façons, dont l'incertitude additive et l'incertitude multiplicative. Supposons que le système est modélisé par la fonction de transfert $G(s)$, et le système réel est décrit par la fonction de transfert $\tilde{G}(s)$, avec :

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta_a(s)$$

Où l'erreur de modélisation ou incertitude additive est donnée par :

$$\Delta_a(s) = \tilde{G}(s) - G(s)$$

L'incertitude additive est utilisée pour modéliser les erreurs en haute fréquence qui sont négligées, soit par ignorance soit par réduction du modèle.

Dans le cas de l'incertitude multiplicative, on suppose que le système réel est décrit par :

$$\tilde{G}(s) = G(s)(1 + \Delta_m(s))$$

Où l'incertitude multiplicative (l'erreur de modélisation) est donnée par :

$$\Delta_m(s) = \frac{\tilde{G}(s) - G(s)}{G(s)}$$

Ce type d'incertitude peut être utilisé pour modéliser les erreurs dues à la dynamique des actionneurs ou à celle des capteurs.

On remarque que l'incertitude multiplicative représente l'erreur relative de modélisation, tandis que l'incertitude additive représente l'erreur absolue [58].

Considérons maintenant le système intervalle donné par les équations (3.11) et (3.12). Quand les paramètres prennent leurs valeurs nominales, le système est dit nominal et est décrit par :

$$G_{p0}(s) = \frac{C_m^0 s^m + C_{m-1}^0 s^{m-1} + \dots + C_0^0}{s^n + B_{n-1}^0 s^{n-1} + \dots + B_0^0} \quad (3.37)$$

L'incertitude sur les paramètres peut être représentée par une incertitude multiplicative $\Delta_m(s)$ telle que :

$$G_p(s) = G_{p0}(s)[1 + \Delta_m(s)] \quad (3.38)$$

Ainsi :

$$\Delta_m(s) = \frac{G_p(s) - G_{p0}(s)}{G_{p0}(s)} \quad (3.39)$$

On peut aussi la représenter sous forme d'incertitude additive :

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta_a(s) \quad (3.40)$$

Avec :

$$\Delta_a(s) = G_p(s) - G_{p0}(s) \quad (3.41)$$

Les équations (3.39) et (3.41) montrent que les incertitudes multiplicative et additive dépendent des paramètres du système réel. Ces paramètres varient, pour les systèmes intervalles, dans des intervalles connus d'avance. Alors, dans la conception du compensateur, qui assure que le système augmenté (contenant la dynamique inconnue supplémentaire) soit ASPR, on considère le cas le plus défavorable pour cette incertitude. A cet effet, nous introduisons une procédure d'optimisation qui détermine le maximum de l'incertitude pour chaque fréquence (c'est à dire pour un nombre convenable de fréquences).

Considérons le vecteur V déjà défini :

$$V = [C_m \quad C_{m-1} \quad \dots \quad C_0 \quad B_{n-1} \quad \dots \quad B_0]$$

et le vecteur Z contenant les échantillons de fréquence pour lesquelles s'effectue l'optimisation :

$$Z = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_n] \quad (3.42)$$

Alors :

$$\begin{aligned} |\Delta_{\max}(j\omega_k)| &= \max_{i \in \{1, \dots, p\}} | \Delta(j\omega_k) | \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \text{soumise à } &\begin{cases} \underline{C}_i \leq C_i \leq \bar{C}_i & i = 0, 1, \dots, m \\ \underline{B}_j \leq B_j \leq \bar{B}_j & j = 0, 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Il est important de noter que cette optimisation est effectuée pour chaque fréquence du vecteur Z , dont les composantes doivent être choisies de telle manière que Δ_{\max} décrive bien le maximum de $\Delta(j\omega)$, $\forall \omega$. $\Delta(j\omega)$ représente soit l'incertitude multiplicative soit l'incertitude additive, selon la modélisation considérée, avec les paramètres du système variant dans les intervalles prédéfinis.

Pour pouvoir appliquer la méthode de conception du compensateur, dédiée aux systèmes contenant une dynamique inconnue (qui est, dans notre cas, l'incertitude sur les paramètres) [41-44], nous supposons qu'il existe une fonction de transfert rationnelle connue, $W(s)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $W(s)$ est une fonction rationnelle à paramètres réels.
- $W(s)$ est propre ou strictement propre ($|W(j\infty)|$ est fini), et n'a pas de pôles dans le demi-plan droit ($W(s)$ stable). En plus, $W(s)$ vérifie :

$$|W(j\omega)| \geq |\Delta_{\max}(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (3.44)$$

Nous supposons que le système nominal $G_{p0}(s)$, décrit par l'équation (3.37), est connu. Considérons, maintenant, le système augmenté :

$$G_a(s) = G_p(s) + R_p(s) \quad (3.45)$$

Alors le théorème (I.5) peut être appliqué au système intervalle représenté par $G_{p0}(s)$ et $\Delta_{\max}(s)$. Ainsi, pour que le système augmenté $G_a(s) = G_p(s) + R_p(s)$, contenant l'incertitude $\Delta(s)$, soit ASPR, le compensateur $R_p(s)$ doit être conçu selon les conditions suivantes:

1. $R_p(s)$ est stable, avec un degré relatif égal à 1 ou à zero.
2. Le système nominal, fictif, en boucle fermée, est stable.
3. Les coefficients de la fonction de transfert rationnelle $\tilde{\Delta}(s)$, sont réels. $\tilde{\Delta}(s)$ est propre ou strictement propre et n'a pas de pôles dans le demi-plan droit. Elle est définie par :

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{G_{p0}(s)W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)}, \quad (3.46)$$

pour une incertitude multiplicative et :

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)}, \quad (3.47)$$

pour une incertitude additive.

4. Le gain H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$ est inférieur à l'unité ($\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$).

Ainsi, il suffit de choisir $R_p(s)$ de telle sorte que $\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$ et $\tilde{\Delta}(s)$ soit stable. Le compensateur, que nous considérons ici, a la même forme que celui donné par l'équation (3.28).

Les paramètres du dénominateur du compensateur sont, toujours, choisis d'avance, de telle sorte que les constantes de temps du compensateur soient plus petites que celles du modèle de référence. Ensuite, on choisit une combinaison des paramètres f_i qui vérifie, à la fois, que $\tilde{\Delta}(s)$ est stable et que $\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$. Les méthodes classiques, pour la stabilisation des systèmes [58,59], peuvent alors être utilisées.

III.5. Résultats de simulations

Exemple (III.1) :

La méthode proposée dans la section (III.2) a été appliquée au système présenté, comme exemple de test, dans [60].

$$G_p(s) = G_{p0}(s)\Delta(s)$$

Où $G_{p0}(s)$ est la fonction de transfert du système et $\Delta(s)$ une dynamique additionnelle qui peut être due à une erreur de modélisation du système ou à la dynamique des actionneurs. Ces deux fonctions sont données par :

$$G_{p0}(s) = \frac{K}{s^2 + a_1s + a_0}$$

$$\Delta(s) = \frac{\alpha s + 1}{Ts + 1}$$

Où α, T sont des paramètres spécifiques pour la dynamique inconnue.

Les valeurs nominales des paramètres et leurs rangs de variation sont présentés dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur nominale	Rang de variation
K	1	0.5 à 3.0
a₁	1.4	-0.6 à 3.4
a₀	1	-2.0 à 4.0

Tableau (3.2) : Paramètres nominaux et intervalles de variation des paramètres de l'exemple de test [60].

Le modèle de référence est :

$$G_m(s) = \frac{Y_m(s)}{u_m(s)} = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1}$$

où l'entrée de référence est donnée par : $u_m = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \leq 8 \\ -1 & \text{pour } t > 8 \end{cases}$

Pour l'évaluation, nous avons considéré les trois cas présentés dans le tableau (3.3). Dans le troisième cas, nous considérons, en plus, une perturbation $d(t)$ (fig. 3.1.b) à l'entrée. Cette perturbation est une approximation de la réponse d'un système de deuxième ordre avec



un retard. Ce cas, connu sous le nom de "stress testing example", correspond au troisième niveau, donné dans [60]. Il représente le niveau le plus complexe.

Nous utilisons la modification σ , déjà définie dans le chapitre 1. La valeur choisie de σ est 0.3.

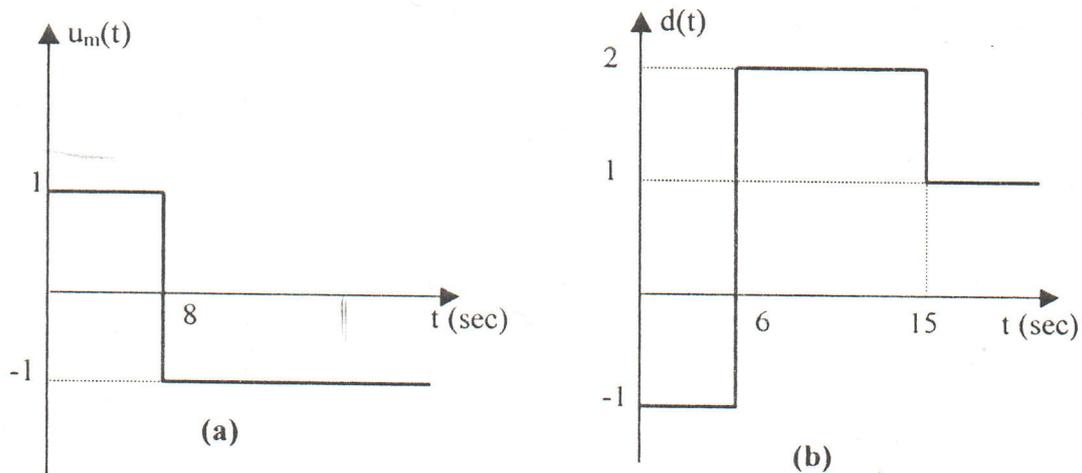


Fig. (3.1): (a) Entrée de référence.
(b) Signal de perturbation.

Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
$K=0.5$	$K=2.0$	$K=0.5$
$a_1=3.4$	$a_1=-0.6$	$a_1=-0.6$
$a_2=4.0$	$a_2=-2$	$a_2=-2$
$T=0$	$T=0$	$T=0.33$
$\alpha=0$	$\alpha=0$	$\alpha=0.3$

Tableau (3.3) : Les cas considérés pendant la simulation.

Dans cette simulation, la valeur maximale, n^* , du degré relatif du système a été prise égale à 3. Alors le compensateur conçu est :

$$H(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{0.5}{(s+5)^2} + \frac{0.025}{s+100}$$

On trouve que les quatre polynômes de Kharitonov sont stables, pour les deux itérations de conception du compensateur.

Dans les deux cas, les matrices de pondération sont :

$$T_i = \text{diag}[1e7 \quad 2e3 \quad 2e3 \quad 1.5e3]$$

$$T_p = \text{diag}[9e9 \quad 2e4 \quad 2e4 \quad 1.8e4]$$

Nous avons considéré que toutes les conditions initiales sont nulles. Pour les trois cas, la réponse du système et le signal de contrôle sont donnés par les figures (3.2,3 et 4). On remarque qu'on obtient une poursuite presque idéale du modèle pour les trois cas. Cependant l'entrée de contrôle est impulsive pour le cas n° 3.

Un autre compensateur, conçu par la même méthode, donne une entrée de contrôle et des gains moins oscillants. Ceci, au prix d'une poursuite qui n'est pas assez idéale que pour le compensateur déjà conçu. Alors, le choix du compensateur joue un rôle déterminant quand aux performances du système en boucle fermée. Ainsi, le développement de différentes méthodes pour sa conception constitue un avantage. La fonction de transfert de ce compensateur est la suivante :

$$H(s) = \frac{0.13}{(s+1)^2} + \frac{0.011}{s+1}$$

Les matrices de pondération qui ont été utilisées avec ce compensateur sont données par les deux équations suivantes :

$$T_i = [1e6 \quad 1e1 \quad 1e1 \quad 9e3]$$

$$T_p = [1e10 \quad 1e3 \quad 1e3 \quad 5e1]$$

Pour ce dernier compensateur, nous ne représentons que les résultats obtenus pour le cas n° 3, voir Fig. (3.5.a,b,c), ceci parce que les résultats obtenus pour les deux autres cas sont similaires.

Ainsi, la conception du compensateur selon la méthode exposée dans la section (III.2), et son utilisation pour augmenter le système et le modèle donne un MRAC robuste. Ce dernier peut, tolérer la présence de perturbation et de dynamique inconnue, en utilisant la modification σ .

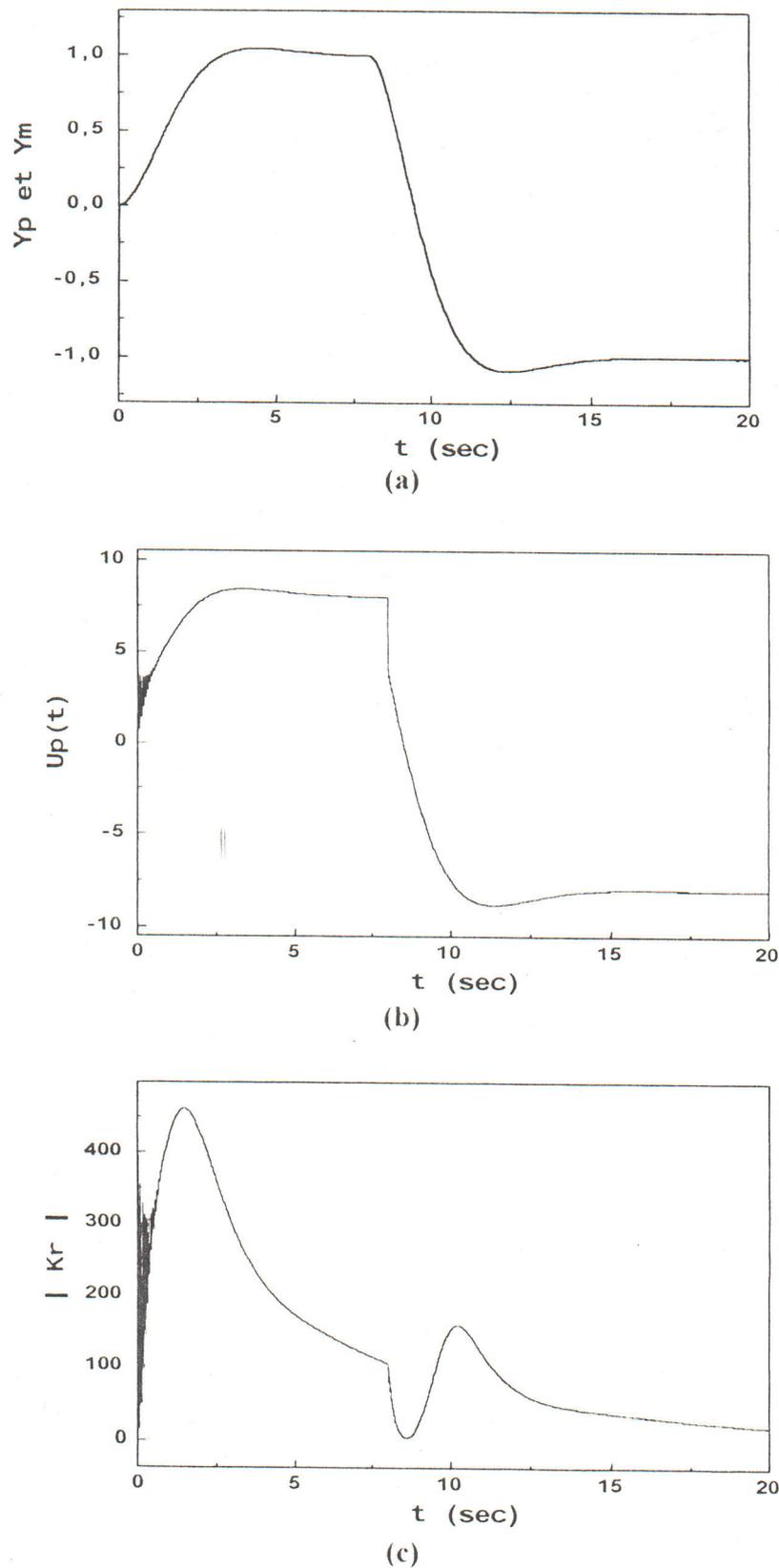
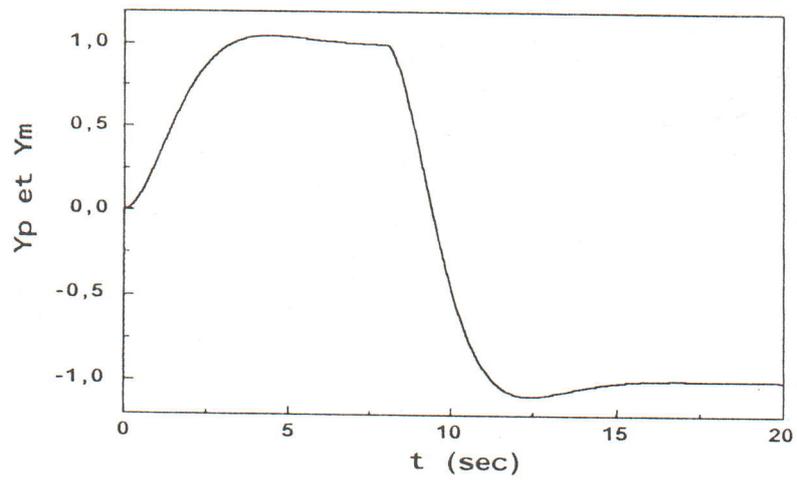
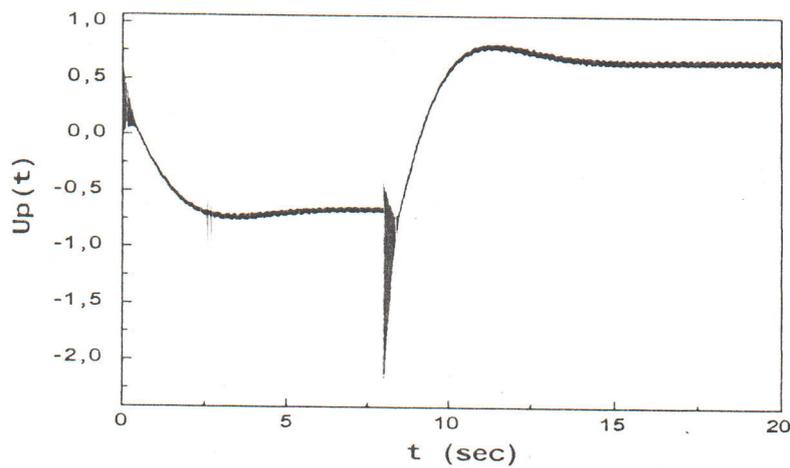


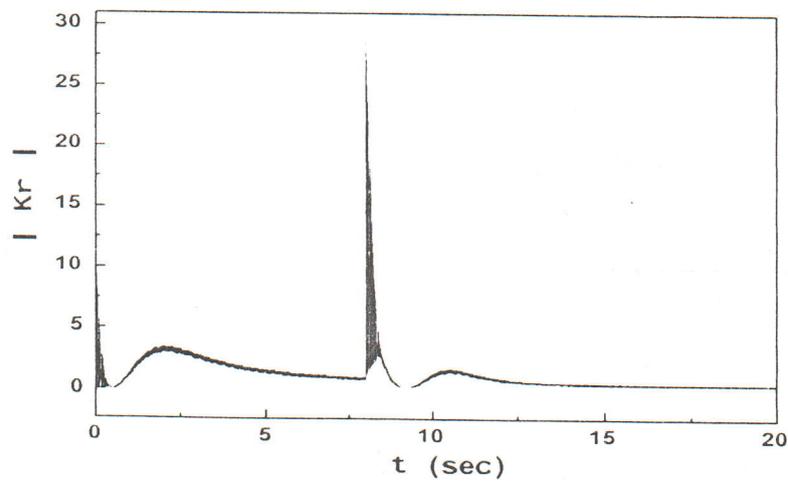
Fig. (3.2) (a) : Signaux des sorties du système et du modèle pour le cas 1.
(b) : Signal de commande pour le cas 1.
(c) : Module de vecteur $K_r(t)$.



(a)



(b)



(c)

Fig. (3.3) (a) : Signaux de sortie du système et du modèle pour le cas n° 2.
 (b) : Entrée de commande pour le cas n° 2.
 (c) : Module de $K_r(t)$ pour le cas n° 2.

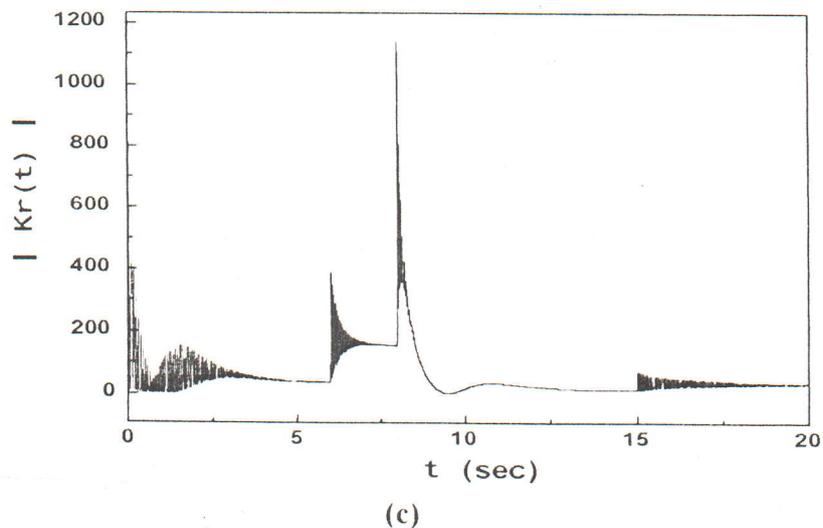
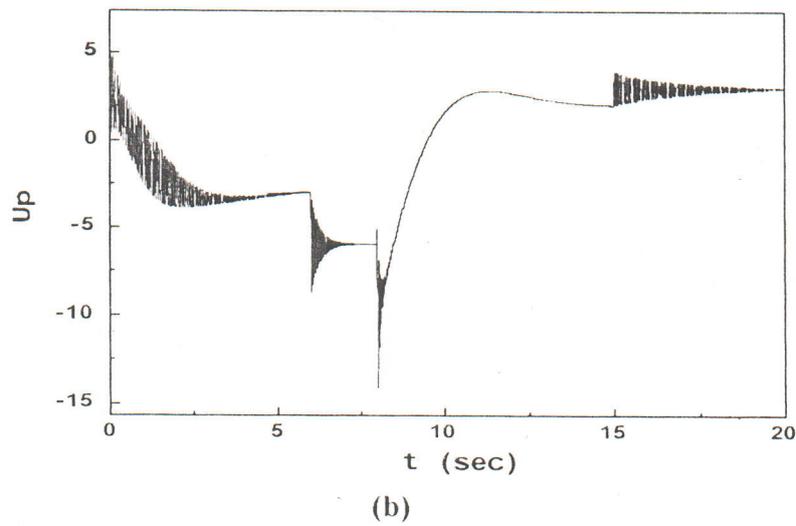
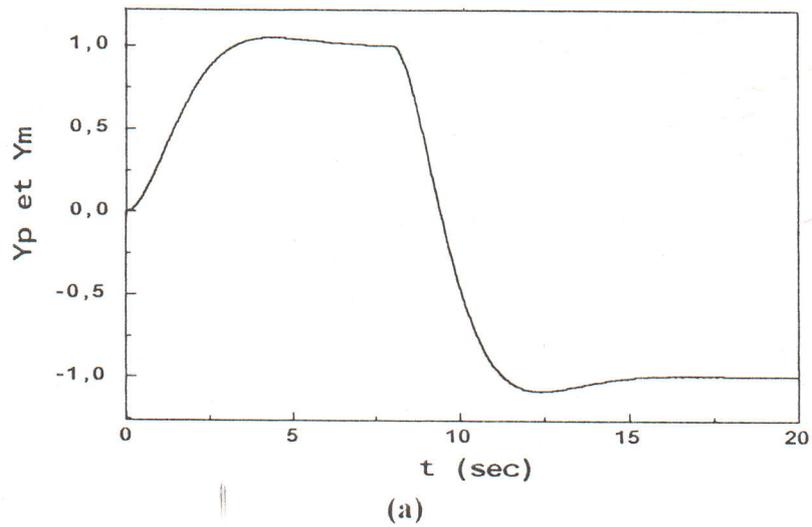
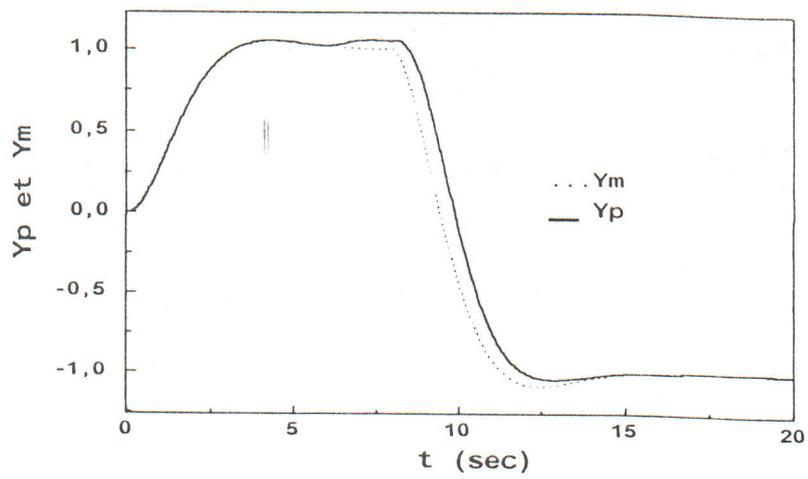


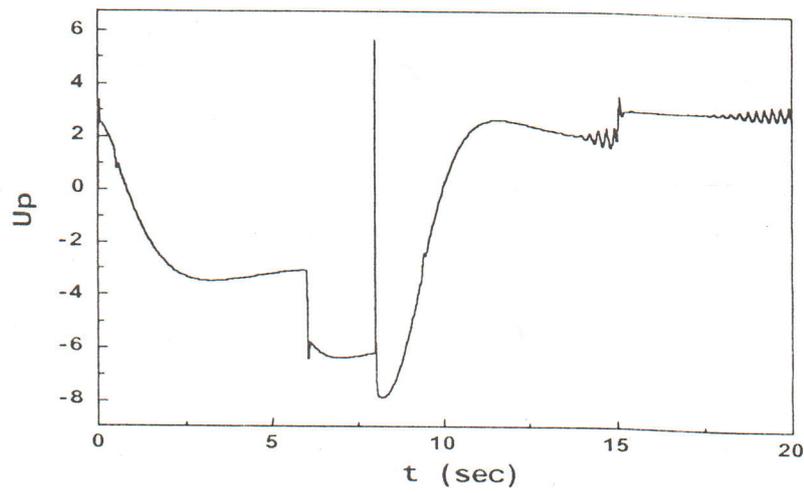
Fig. (3.4) (a) : Signaux de sortie du système et du modèle de référence pour le cas n°3.

(b) : L'entrée de contrôle pour le cas n° 3.

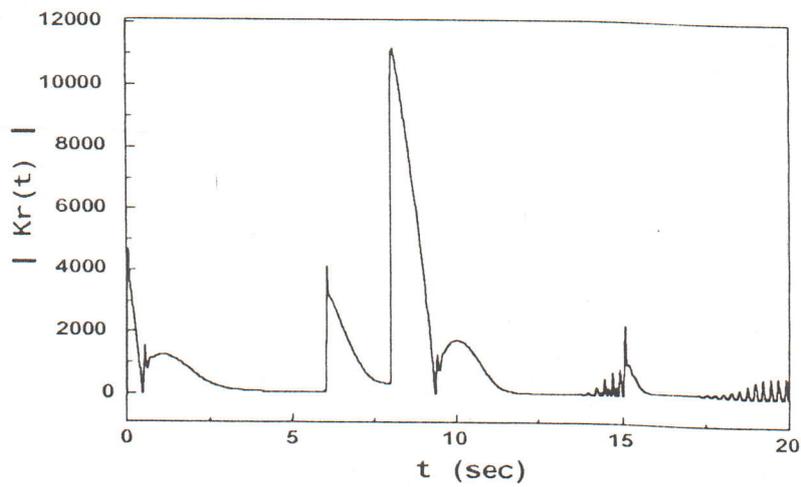
(c) : Module du vecteur de gain $K_r(t)$ pour le cas n° 3.



(a)



(b)



(c)

Fig. (3.5) (a) : Sortie du système et de modèle de référence pour le cas n°3.
 (b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 3, avec le deuxième compensateur.
 (c) : Module du vecteur des paramètres $|K_r(t)|$.

Exemple (III.2):

Le système que nous utilisons pour cet exemple, est le contre-exemple de Rohrs & al. [2], connu sous le nom de l'exemple mal posé en contrôle adaptatif, à cause des contraintes qu'il introduit. Cet exemple a été l'objet de plusieurs discussions dans la communauté du contrôle adaptatif. Sa fonction de transfert est la suivante :

$$G_p(s) = \frac{2}{s+1} \frac{229}{s^2 + as + 229}$$

Ce système est considéré du premier ordre avec une dynamique supplémentaire ayant deux pôles complexes et conjugués. Dans la simulation, nous considérons les deux cas suivants :

1. $a = 30$
2. $a = 30 + 25 \sin(2t)$.

Le modèle de référence est donné par :

$$G_m(s) = \frac{0.3}{s+3}$$

L'entrée de référence est un signal carré de période 20 sec et d'amplitude 0.3 unité.

La valeur maximale, du degré relatif du système, est prise égale à 3.

Le compensateur conçu, en utilisant la méthode présentée dans la section (III.2), est :

$$F(s) = \frac{20}{(s+20)^2} + \frac{5}{s+10}$$

Pour les deux itérations de conception, les quatre polynômes de Kharitonov sont stables. Pour les deux cas considérés, les matrices de pondération sont choisies comme :

$$T_i = \text{diag}[5250 \ 525 \ 100]$$

$$T_p = \text{diag}[5200 \ 520 \ 100]$$

Toutes les conditions initiales sur les états du système, les états modèle et les états du filtre sont prises égales à zéro.

Les résultats, de simulation de cet exemple, montrent que l'utilisation de la méthode de Kharitonov, pour concevoir le compensateur, donne un système adaptatif, en boucle fermée, qui est robuste vis à vis du changement de paramètres. En plus, ces résultats montrent que mise à part la condition ASPR, ce système ne présente pas de problème quand on utilise le SAC pour le contrôler.

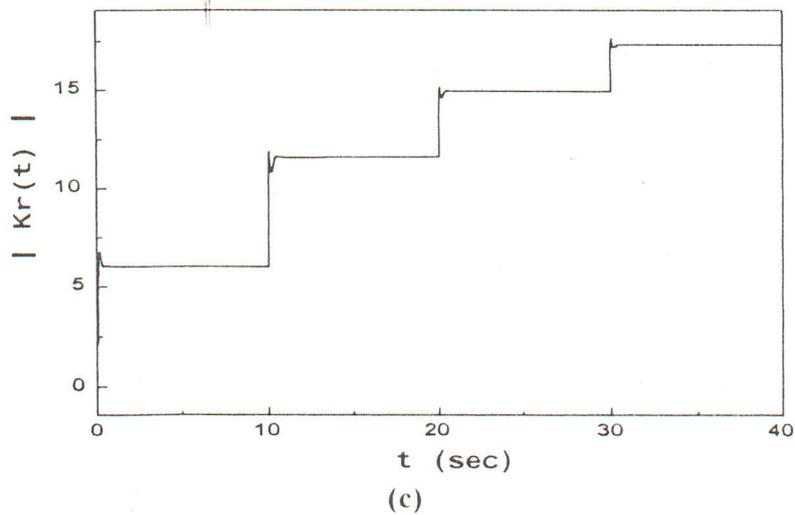
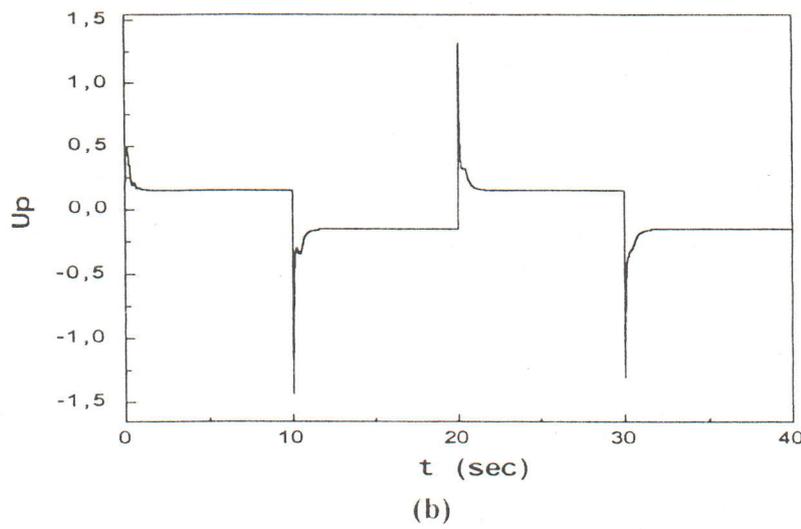
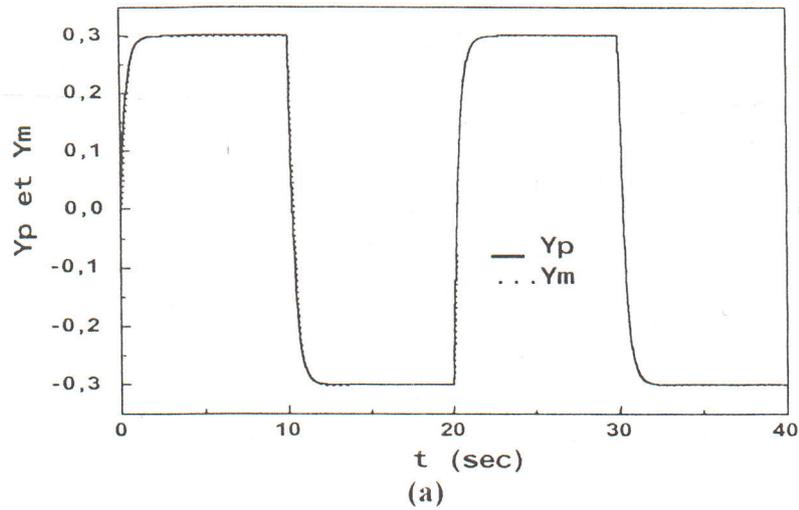
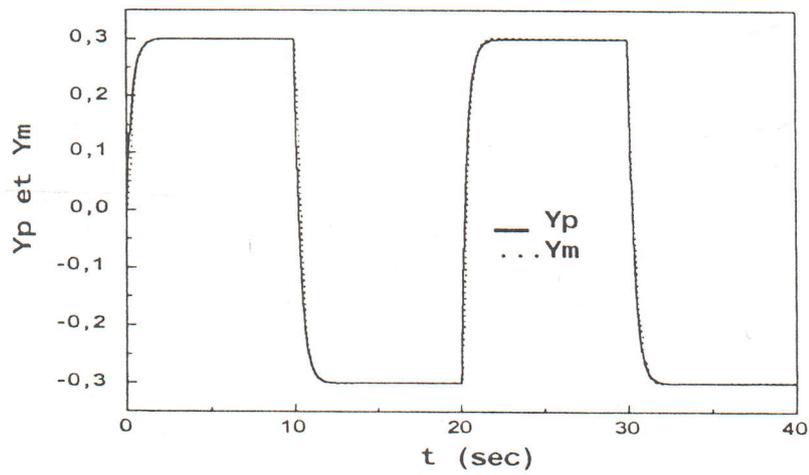
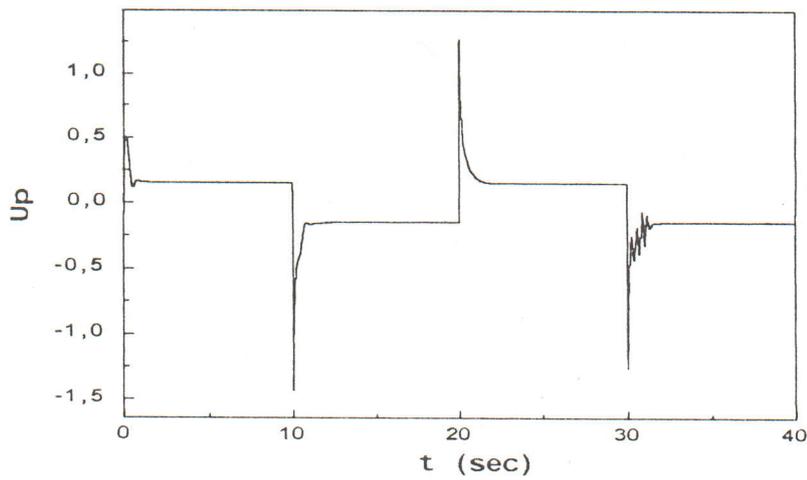


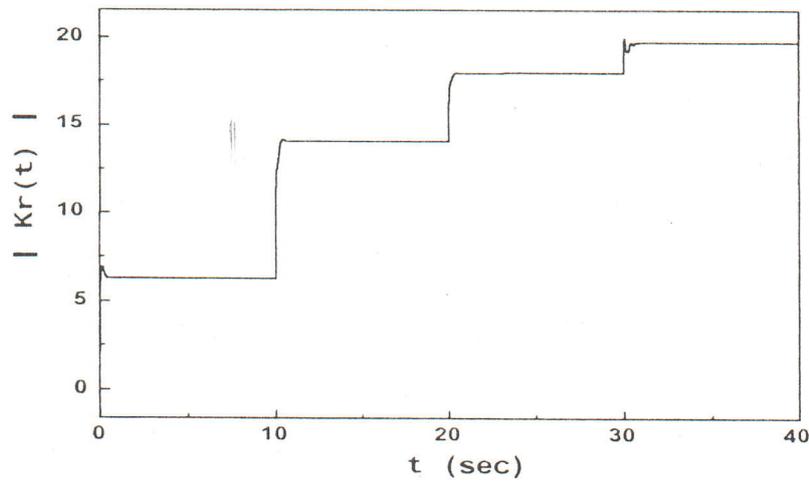
Fig. (3.6) (a) : Signaux de sortie du système et du modèle de référence pour le cas n° 1.
 (b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 1.
 (c) : Norme du vecteur $K_r(t)$ pour le cas n° 1



(a)



(b)



(c)

Fig. (3.7) (a) : Sortie du système et sortie du modèle pour le cas n° 2.

(b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 2.

(c) : Norme du vecteur de gain $K_r(t)$ pour le cas n° 2.

Exemple (III.3)

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur, proposée dans la section (III.3), pour contourner la condition ASPR. Le système à contrôler est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_2s^2 + C_1s + C_0}{s^3 + B_2s^2 + B_1s + B_0}$$

Les paramètres de ce système peuvent varier dans les intervalles du tableau (3.4).

Paramètres	Valeurs nominales	Intervalles de variation
C_2	0	-0.5 à 1
C_1	0	-0.1 à 1.5
C_0	2	1.5 à 2
B_2	3	2 à 3
B_1	4	2 à 4
B_0	3	2 à 3

Tableau (3.4) : Valeurs Nominale et intervalles de variations des paramètres.

Il est important de noter que le degré relatif du système peut changer de 1 à 3, selon les variations des paramètres du système.

Le modèle de référence est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_m(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

L'entrée de référence est un signal carré de période 120 sec et d'amplitude unité.

Le compensateur est choisi comme ayant la forme :

$$R_p(s) = \frac{f_2s^2 + f_1s + f_0}{(s + 3)(s + 4)^2}$$

Ainsi, les constantes de temps du compensateur sont très petites, par rapport à celles du modèle de référence.

Pour le calcul des paramètres f_i du compensateur, l'opération d'optimisation, donnée par l'équation (3.33), a été effectuée par imbrication de la fonction CONSTR du Toolbox

OPTIMIZATION de MATLAB [55]. Il faut noter que le plus intéressant n'est pas de trouver un minimum global exact pour l'équation (3.33), mais c'est qu'il n'y a pas violation de la contrainte. Ainsi pour la définition des paramètres de la fonction CONSTR, il faut prendre ceci en considération [55]. Le compensateur, ainsi conçu, est donnée par :

$$R_p(s) = \frac{119.1s^2 + 142.8s + 11.23}{(s+3)(s+4)^2}$$

Les cas considérés pour les simulations sont donnés par le tableau (3.5).

Les matrices de pondération sont choisies comme :

$$T = \text{diag}[1e2 \quad 0.099 \quad 0.1]$$

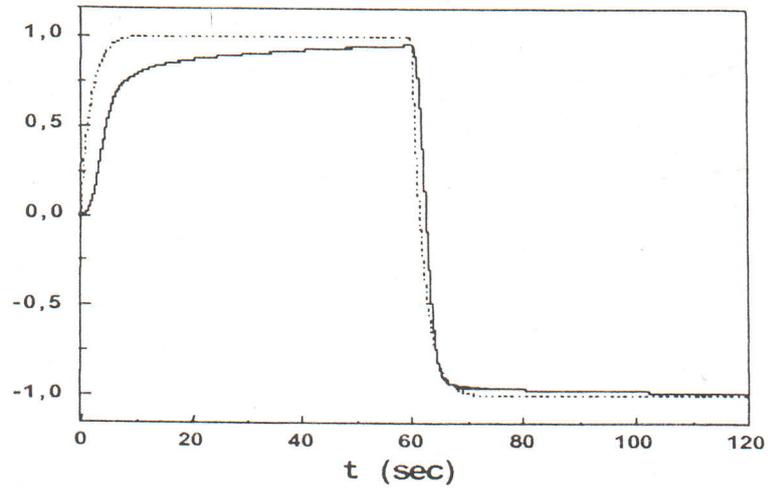
$$T_p = \begin{bmatrix} 1e2 & 3 & 3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tous les états initiaux sont nuls.

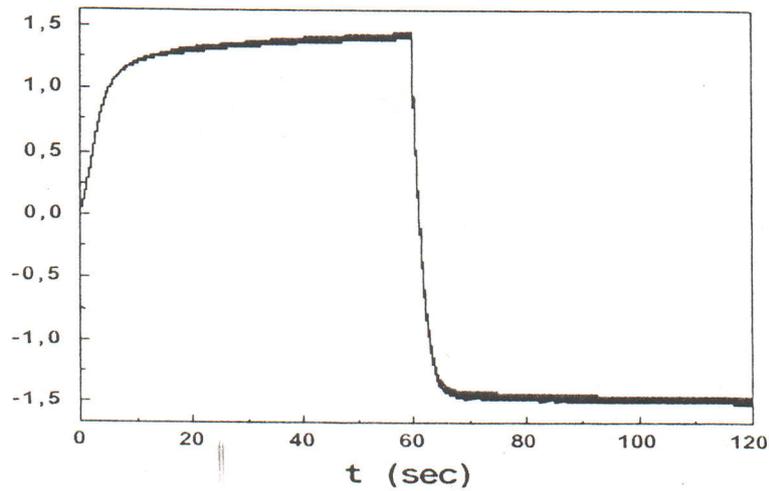
Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
C_2	0	0	1
C_1	0	-0.1	1.5
C_0	2	2	2
B_2	3	3	2
B_1	4	4	2
B_0	3	3	2

Tableau (3.5) : Les cas considérés pour les simulations.

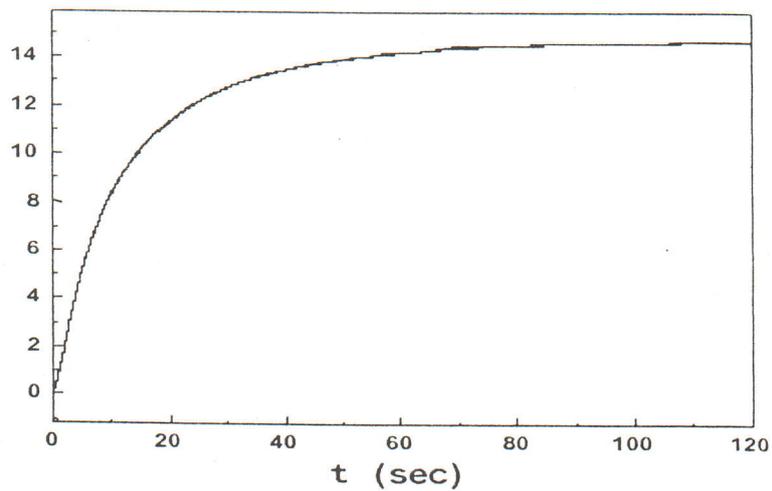
On remarque que pour les cas considérés pour la simulation, le degré relatif du système varie de 1 à 3, en plus, le système n'est pas à phase minimale pour le cas n° 2. Ces contraintes ne constituent aucun problème pour le SAC. Ceci est claire si on regarde les figures (3.8,9,10), le SAC assure une poursuite du modèle malgré ces contraintes.



(a)



(b)

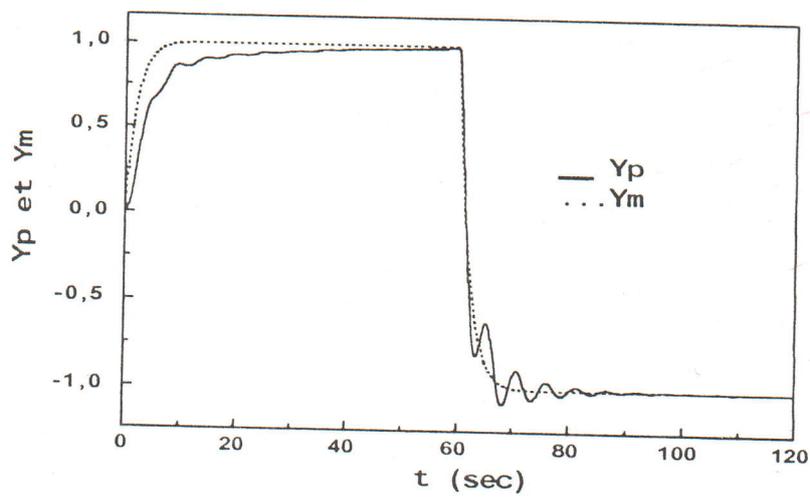


(c)

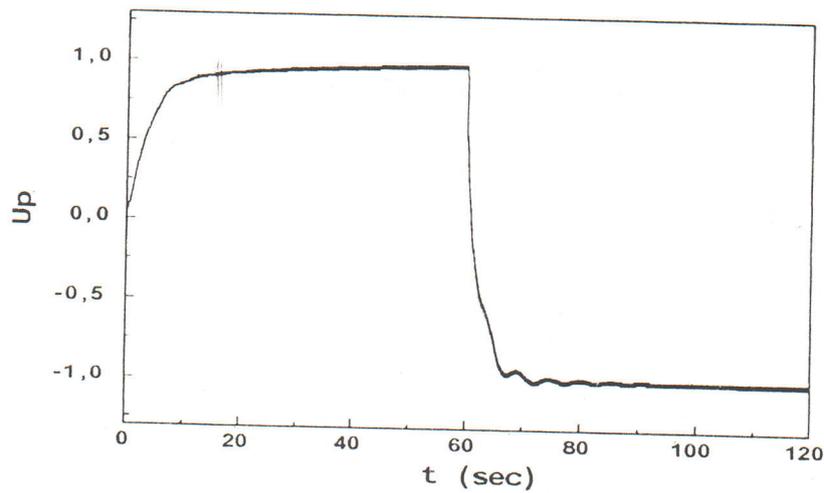
Fig. (3.8) (a) : Sortie du système et sortie du modèle pour le cas n° 1.

(b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 1.

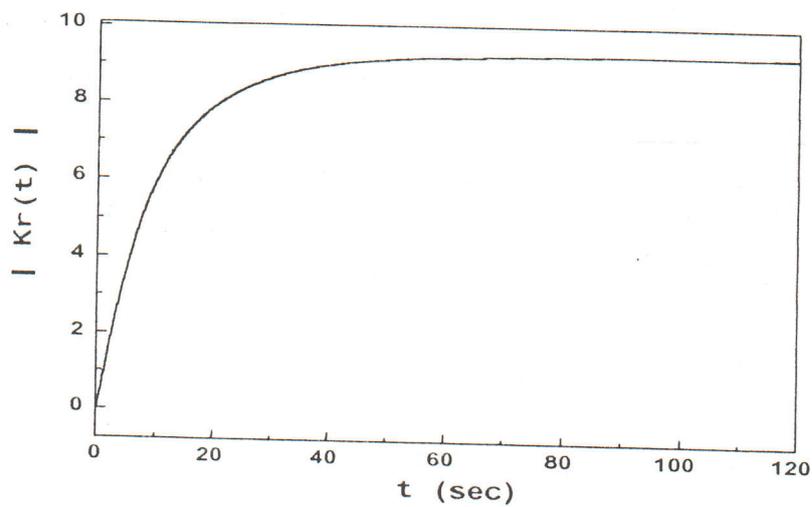
(c) : Norme du vecteur de gain $K_r(t)$ pour le cas n° 1.



(a)



(b)

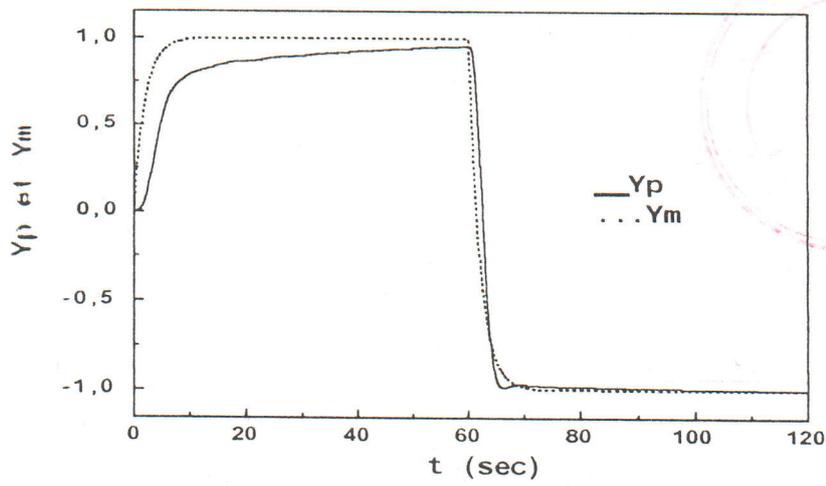


(c)

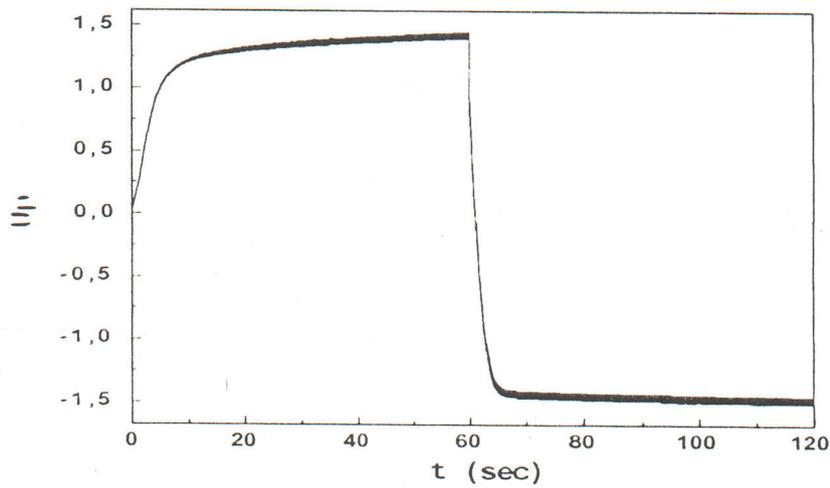
Fig. (3.9) (a) : Sortie du système et sortie du modèle pour le cas n° 2.

(b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 2.

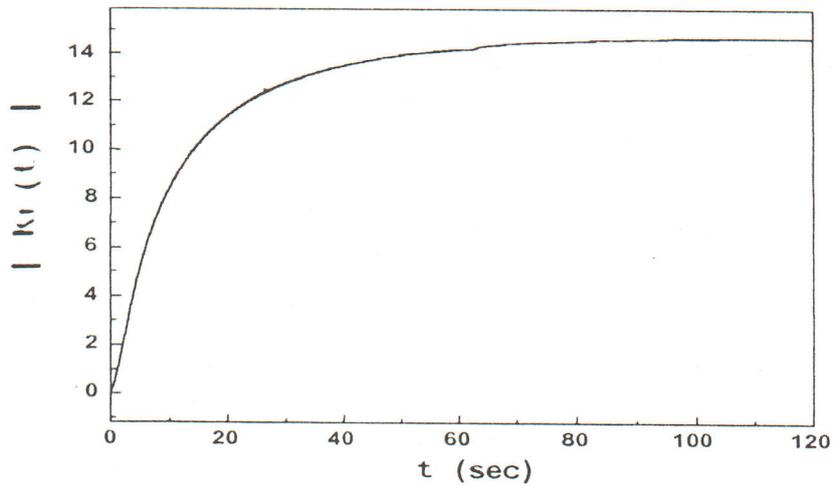
(c) : Norme du vecteur de gain $K_r(t)$ pour le cas n° 2.



(a)



(b)



(c)

Fig. (3-10) (a) : Sortie du système et sortie du modèle pour le cas n° 3.
 (b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 3.
 (c) : Norme du vecteur de gain $K_r(t)$ pour le cas n° 3.

Exemple (III.4)

Le système réel, considéré dans cet exemple, est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_1s + C_2}{B_2s^2 + B_1s + B_0}$$

Les valeurs nominales des paramètres et leurs rangs de variation sont donnés par le tableau (3.6).

Paramètre	Valeur Nominale	Rang de variation
C_1	0	-0.1 à 2
C_0	1	0.8 à 3
B_2	1	0.5 à 5
B_1	1	0.5 à 5
B_0	4	1 à 8

Tableau (3.6) : Valeurs des paramètres du système.

Le modèle de référence est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_m(s) = \frac{1}{s+1}$$

L'entrée de référence est une onde carrée, avec une amplitude égale à l'unité et une période de 20 sec.

Le système est modélisé comme suit :

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta_a(s)$$

Où $\Delta_a(s)$ est donné par :

$$\Delta_a(s) = \frac{C_1s^3 + (C_1 - B_2 + C_0)s^2 + (4C_1 + C_0 - B_1)s + 4C_0 - B_0}{B_2s^4 + (B_1 + B_2)s^3 + (B_0 + B_1 + 4B_2)s + 4B_0}$$

Ainsi $\Delta_a(s)$ dépend des paramètres du système réel.

Le maximum sur l'incertitude additive a été calculé, pour 100 fréquences différentes, par la procédure d'optimisation donnée par les équations (3.43), il est représenté sur la figure (3.11).

La fonction $W(s)$, définie par l'équation (3.44), et choisie comme étant :

$$W(s) = \frac{11s+1}{s^2 + 0.8s + 0.3}$$

Le module de cette fonction est représenté, en dB, sur la figure (3.11). On remarque qu'il vérifie bien l'inégalité (3.44). Les constantes de temps du compensateur sont prises égales à $1/3$.

Pour assurer que le système nominal, fictif, en boucle fermée soit stable, nous avons utilisé le lieu d'Evans correspondant à ce système afin de choisir les paramètres du compensateur. Ceci permet aussi de déterminer le gain du compensateur de telle sorte que la norme H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$, donné par l'équation (3.47), soit inférieure à l'unité.

Le compensateur, conçu, est donné par la fonction de transfert suivante :

$$R_p(s) = \frac{70(s+2)}{s^2 + 6s + 9}$$

La norme H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$ est $\|\tilde{\Delta}(j\omega)\|_\infty = 0.8782 < 1$.

Les matrices de pondérations sont données par les deux équations suivantes :

$$T_i = \text{diag}([5900 \quad 0.001 \quad 180])$$

$$T_p = \text{diag}([5000 \quad 0.001 \quad 180])$$

Les états initiaux sont nuls. Les cas considérés pour les simulations sont donnés par le tableau (3.7). Pour chaque cas, nous représentons la sortie du système, la sortie du modèle de référence, l'entrée de référence et le module du vecteur gain $Kr(t)$.

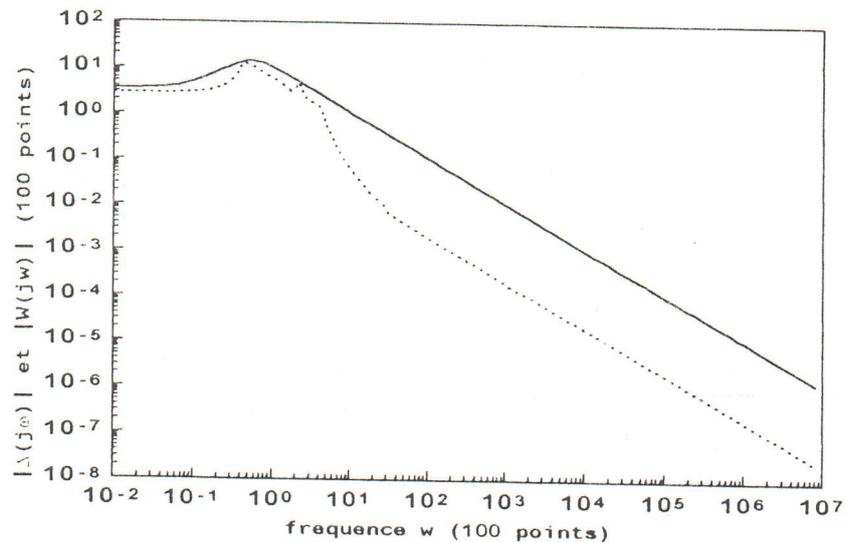
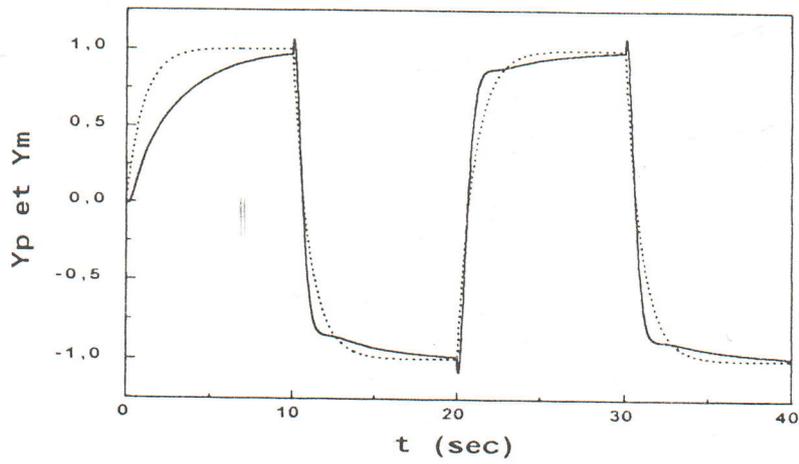
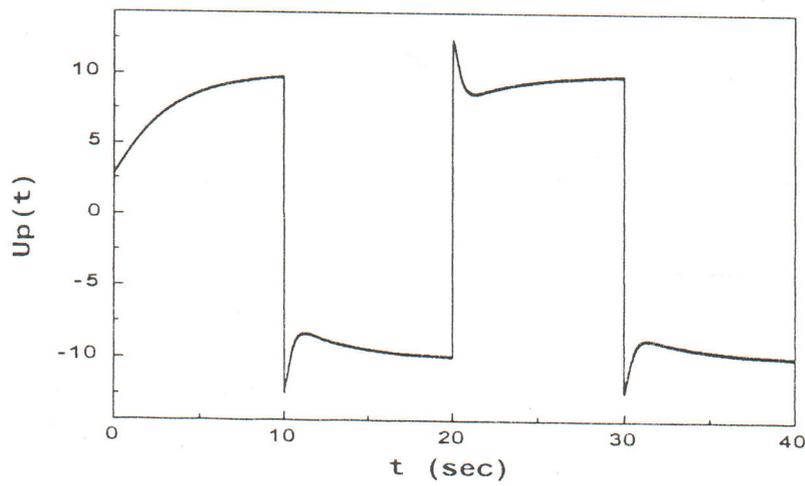


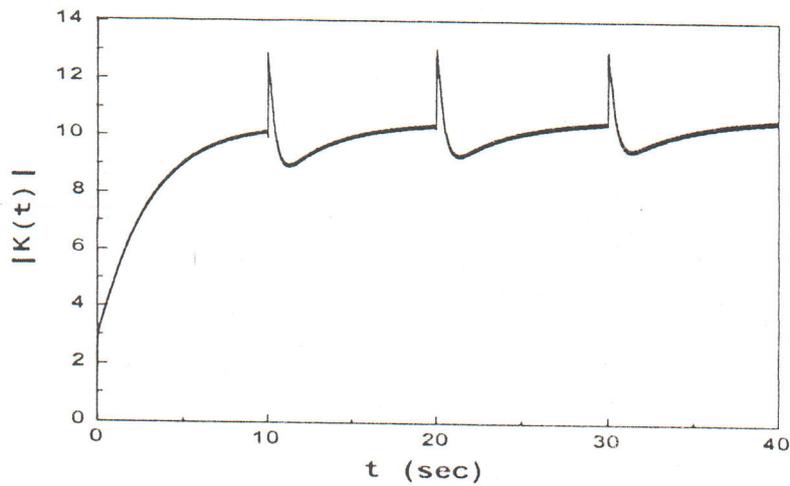
Figure (3.11) $|\Delta_{\max}(j\omega)|$ et $|W(j\omega)|$ pour 100 valeurs de la fréquence.



(a)



(b)



(c)

Fig. (3.12) (a) : Sortie du système et sortie du modèle de référence pour le cas n° 1.

(b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 1.

(c) : Module du vecteur gain $K_r(t)$, pour le cas n° 1.

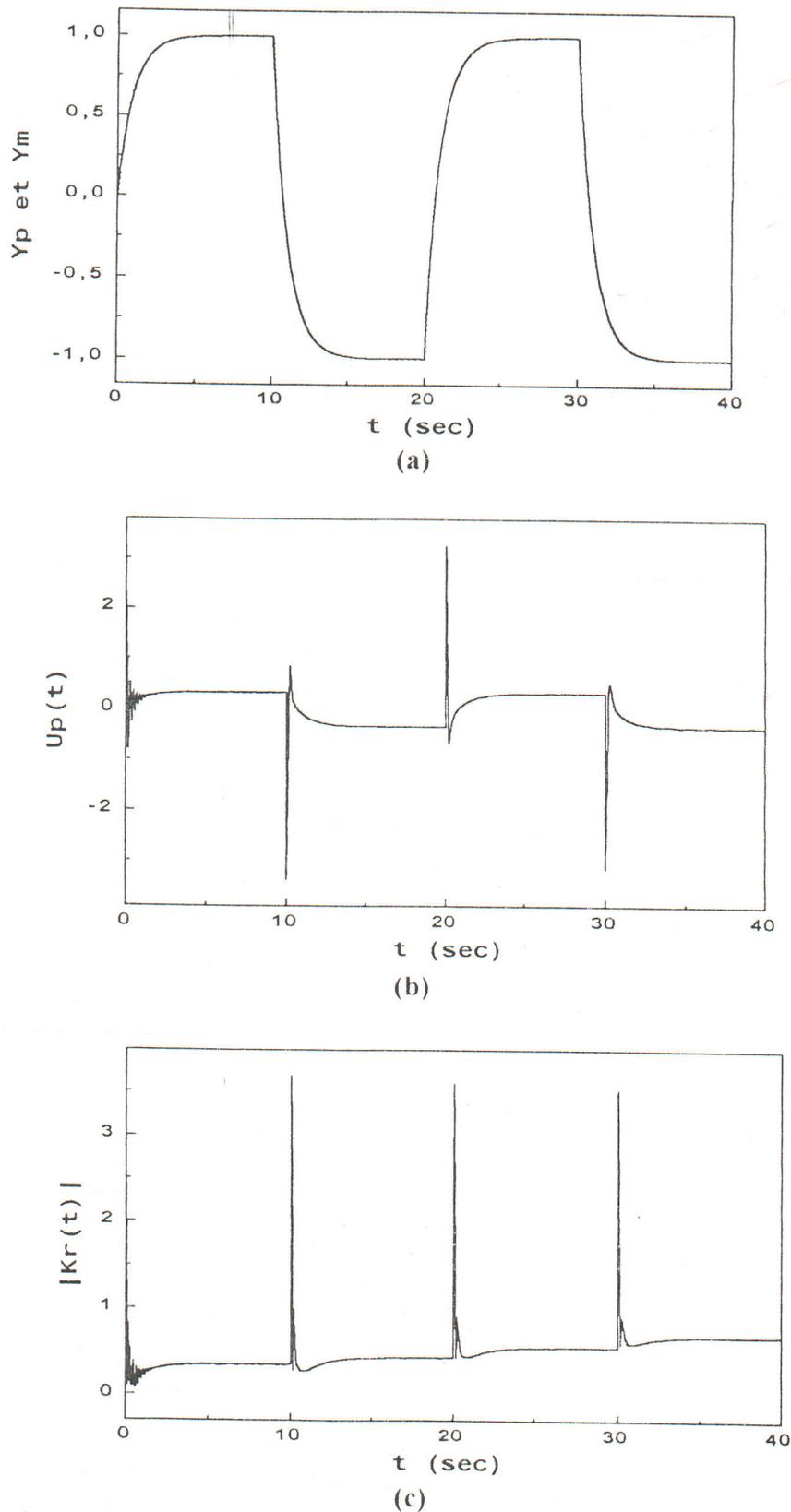


Fig. (3.13) (a): Sortie du modèle et sortie du système pour le cas n° 2.

(b) : Entrée de contrôle pour le cas n° 2.

(c) : Module de $K_r(t)$, pour le cas n° 2.

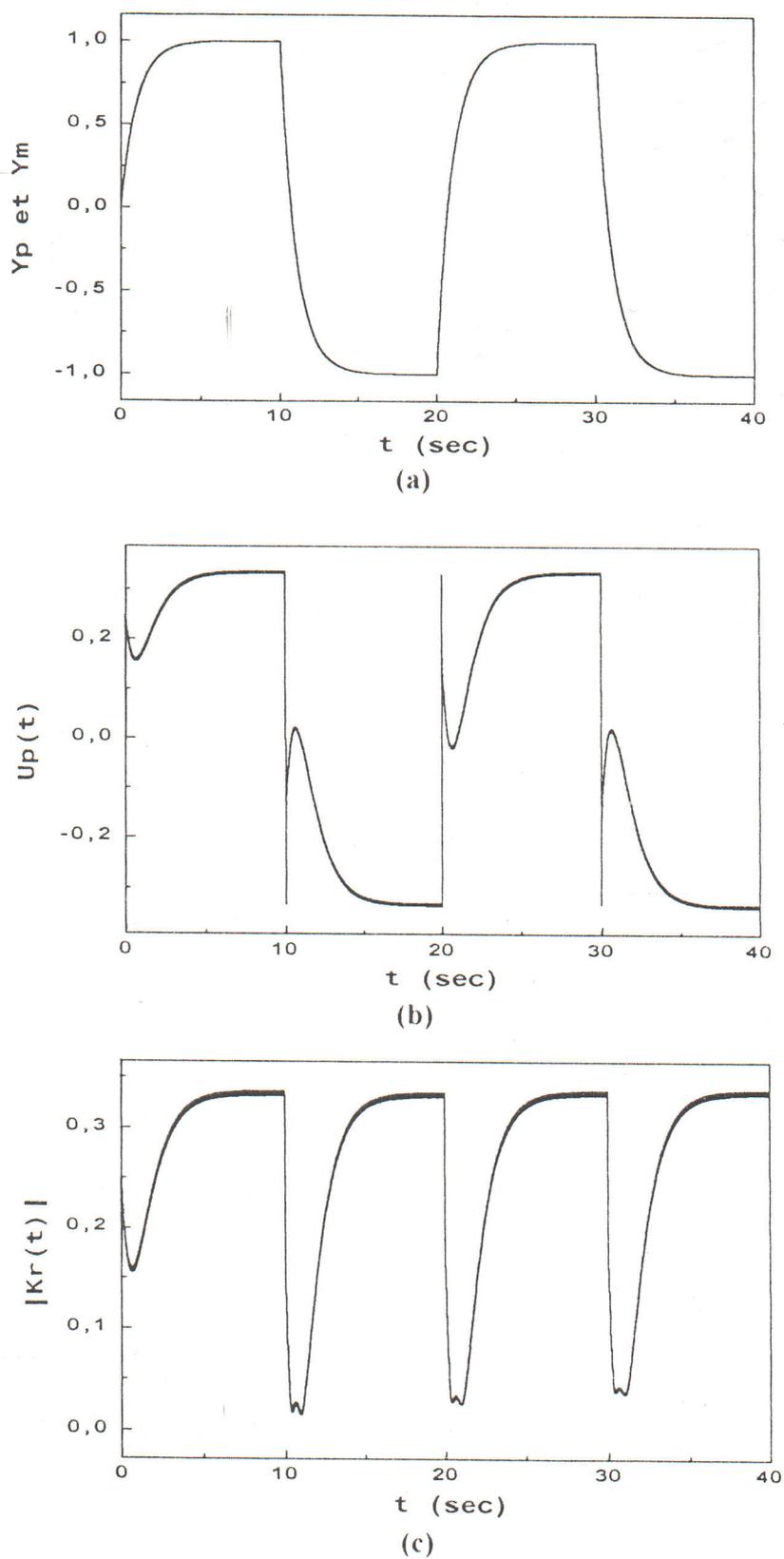
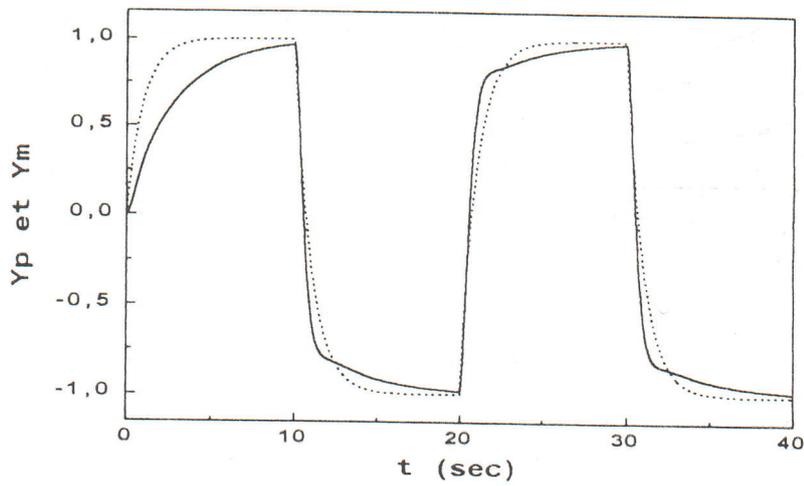


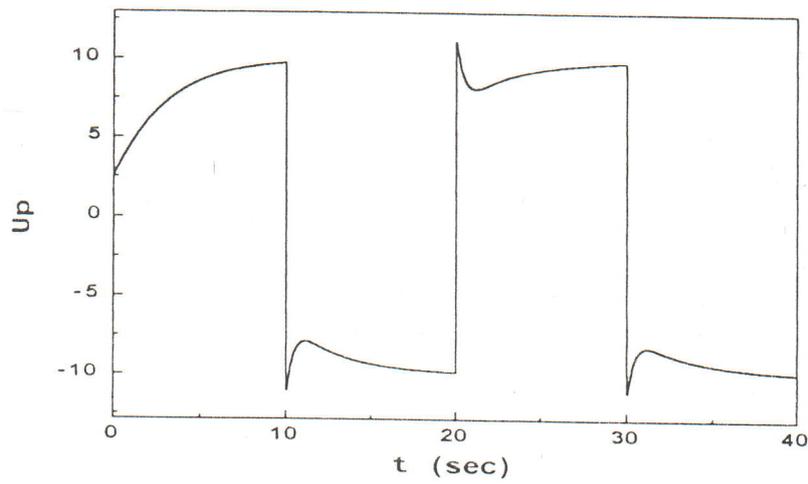
Fig. (3.14) (a) : Sortie du système et sortie du modèle pour le cas n° 3.

(b) : Entrée de contrôle $U_p(t)$, pour le cas n° 3.

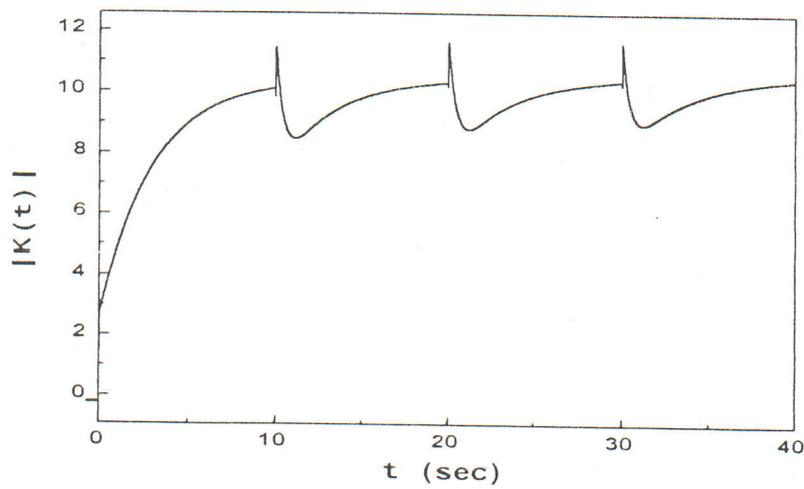
(c) : Module de $K_r(t)$, pour le cas n° 3.



(a)



(b)



(c)

Fig. (3.15) (a) : Sortie du modèle et sortie du système pour le cas n° 4.

(b) : Entrée de contrôle pour le cas n°4.

(c) : Module de $K_r(t)$, pour le cas n° 4.



Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
C_1	-0.1	0	2	0
C_0	0.8	3	3	0.8
B_2	1	0.5	0.5	1
B_1	5	0.5	0.5	5
B_0	8	1	1	8

Tableau (3.8) : Les cas considérés pour les simulations.

Ainsi, nous remarquons que malgré le changement du degré relatif, et même si le système devient instable et n'est pas à phase minimale, le SAC assure de bonnes performances. Ces performances ne sont pratiquement pas altérées par les changements des paramètres du système sous contrôle (figures (3.13) à (3.16)). Alors, la robustesse, que présente le SAC en présence de dynamique inconnue, est vraiment exploitée pour surmonter le problème de variation des paramètres dans des intervalles connus au préalable.

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de contrôle des systèmes intervalles en utilisant le SAC. Nous avons, alors, proposées trois méthodes pour la compensation de ces systèmes afin de contourner la condition ASPR.

La première méthode est basée sur le théorème (I.4). Elle ne considère, alors, que la forme particulière du compensateur proposé par ce théorème et elle exige qu'une borne supérieure du degré relatif du système soit connue. Le choix des paramètres du compensateur est guidé par le théorème de Kharitonov. Cette méthode permet de concevoir une infinité de compensateurs, ceci permet le choix du compensateur le plus adéquat en simulant le système en boucle fermée.

La deuxième méthode utilise le lemme (I.6). La forme du compensateur est plus générale pourvue que le degré relatif du système augmenté soit l'unité. Pour vérifier la condition du lemme (I.6) concernant la stabilité du système, fictif, en boucle fermée, la méthode génère des contraintes à partir de la première colonne de la table de Routh. Ces contraintes seront utilisées pour générer une combinaison optimale des paramètres du compensateur. Cependant, cette méthode n'est pas très robuste, car les éléments de la première

colonne de la table de Routh peuvent ne pas être bornés sur tous les intervalles de variation des paramètres du système.

Pour la troisième méthode, l'incertitude sur les paramètres est ramenée à une dynamique inconnue, pour laquelle nous avons considéré le cas le plus défavorable. Le système intervalle est, alors, représenté par un système nominal, qui doit être connu, et une dynamique inconnue, qui est fonction de l'incertitude sur les paramètres. Ensuite nous appliquons le théorème (I.5) dédié à ce cas.

Les résultats de simulation montrent que ces méthodes constituent des procédures systématiques pour la compensation des systèmes intervalles. Ce qui étend le domaine d'applicabilité du SAC en surmontant la condition ASPR et en bénéficiant de tous les avantages de ce dernier.



Chapitre IV
Etude et analyse du régime
transitoire du MRAC standard

Etude et Analyse du régime transitoire du MRAC standard

IV.1. Introduction

Dans le chapitre II, nous avons présenté la formulation du MRAC standard. Pour analyser les performances de ce MRAC, nous avons utilisé deux autres mesures de performances en plus de celles qui concernent la stabilité et l'annulation de l'erreur en régime permanent. Ces deux mesures de performances concernent le comportement dans le temps du signal erreur (son énergie moyenne et sa borne L_{∞}). Nous avons vu que leur application au MRAC standard donne une information sur le comportement du signal erreur, mais elle ne permet pas l'amélioration de ses performances. Dans ce chapitre, nous allons introduire une modification sur la loi de contrôle du MRAC standard et analyser les performances du MRAC résultant, en utilisant ces deux mesures de performances. Cette modification est du type traité dans [13,16].

Ce type de modification, qui constitue, de nos jours, un axe de recherche principal dans le contrôle adaptatif, est motivé par :

1. Basé sur le principe d'équivalence de certitudes, le MRAC standard a des performances transitoires qui dépendent, inévitablement, de la précision de l'estimation des paramètres. Ainsi, une petite erreur dans la procédure d'estimation affectera les performances du système en boucle fermée.
2. Indépendamment de l'algorithme d'estimation utilisé, il existe toujours une erreur d'estimation pendant la phase transitoire, due essentiellement à l'incertitude sur $\theta(0)$.

Le gain d'adaptation est toujours choisi petit, pour des considérations de robustesse et de stabilité. De ce fait, l'algorithme d'estimation prend du temps pour converger vers de bonnes valeurs des paramètres, et il est souvent très tard pour que le régime transitoire soit satisfaisant.

IV.2. Modification du MRAC standard (cas idéal)

Nous allons, maintenant, considérer le MRAC présenté dans le chapitre II et augmenter sa loi de contrôle de façon qu'elle contienne un terme pour compenser l'effet de

l'erreur sur les paramètres à l'état initial. Cette idée a été présentée en premier dans [14,16]. Depuis l'établissement de ces résultats, toutes les tentatives pour améliorer le régime transitoire ont été fondées sur cette idée. Ensuite, le concepteur cherche une méthode pour générer la partie utilisée pour compenser l'effet de l'erreur initiale sur les paramètres.

Dans cette section nous ne considérons que le cas idéal c'est à dire sans perturbations et sans dynamiques inconnues. Ces deux contraintes seront considérées dans les prochaines sections, car leur analyse est un peu différente.

Considérons le MRAC donné par les équations (2.12), (2.20) et (2.29), et remplaçons sa loi de contrôle par celle donnée par l'équation suivante :

$$u_p = \bar{\theta}^T \bar{\omega} + c_0 u_m + \Delta u \quad (4.1)$$

Où $\bar{\theta}$, $\bar{\omega}$, c_0 et u_m sont définis dans le chapitre II et Δu est la partie utilisée pour compenser l'erreur, due à l'état initial sur les paramètres $\tilde{\theta}(0)$. Δu est alors à concevoir et doit être fonction de l'erreur sur les paramètres $\tilde{\theta}(t)$ à chaque instant t .

Pour le cas idéal, où les paramètres $\bar{\theta}^*$ sont connus, l'entrée de contrôle idéale est donnée par :

$$u_p^* = \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0 u_m \quad (4.2)$$

Ainsi, pour le cas idéal, il faut que l'entrée de contrôle donnée par l'équation (4.1) soit égale à l'entrée de contrôle idéale donnée par l'équation (4.2). Alors de (4.1) et (4.2) nous aurons :

$$\bar{\theta}^T \bar{\omega} + c_0 u_m + \Delta u = \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0 u_m$$

ce qui donne :

$$\Delta u = -(\bar{\theta}^T - \bar{\theta}^{*T}) \bar{\omega} = -\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \quad (4.3)$$

Cette équation donne l'expression de Δu qui compense définitivement l'effet de l'erreur due à l'état initial sur les paramètres. Cependant, cette équation n'est pas implémentable, car elle exige la connaissance de $\tilde{\theta}^T(t)$. Il faut, donc, chercher une approximation de $\tilde{\theta}^T \bar{\omega}$ qui soit implémentable. Dans [13], on montre qu'une approximation de ce terme peut être générée par une fonction $F(s)$, vérifiant certaines conditions, et dont l'entrée est l'erreur d'estimation ε . On montre aussi, dans [16], qu'on peut rendre Δu implémentable, en utilisant un filtre adéquatement conçu. Dans ce qui suit, nous allons considérer un tel filtre et ensuite utiliser le lemme (2.2) pour établir une approximation de ce terme.

Pour pouvoir appliquer le lemme (2.2), nous utilisons la fonction de transfert du modèle de référence $W_m(s)$, qui est stable et à phase minimale. Nous écrivons, alors, Δu sous la forme :

$$\Delta u = -\tilde{\theta}^T \omega = -W_m^{-1}(s) \left[W_m(s) \left[\tilde{\theta}^T \omega \right] \right] \quad (4.4)$$

L'application du lemme (2.2) donne :

$$W_m(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] = \tilde{\theta}^T W_m(s) [\bar{\omega}] + W_c(s) \left[W_b(s) \left[\bar{\omega}^T \right] \dot{\tilde{\theta}} \right] \quad (4.5)$$

D'après les équations (2.29) et (2.26) nous aurons :

$$\tilde{\theta}^T W_m(s) [\bar{\omega}] = \tilde{\theta}^T \bar{\phi}_p = \varepsilon m^2$$

En remplaçant cette équation dans (4.5) nous aurons :

$$W_m(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] = \varepsilon m^2 + W_c(s) \left[W_b(s) \left[\bar{\omega}^T \right] \dot{\tilde{\theta}} \right] \quad (4.6)$$

On sait, d'après les suppositions M1 et M2 du chapitre II, que $W_m(s)$ est strictement propre et de degré relatif n^* , ainsi l'équation (4.4) contiendra n^* dérivées. Pour éviter ces dérivées, nous allons rendre $W_m(s)$ seulement propre, en lui ajoutant un pôle stable de multiplicité n^* , donné par :

$$H(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^{n^*}}$$

Ainsi, Δu sera donné par :

$$\Delta u = -\frac{W_m^{-1}(s)}{(\tau s + 1)^{n^*}} \left[\varepsilon m^2 + W_c(s) \left[W_b(s) \left[\bar{\omega}^T \right] \dot{\tilde{\theta}} \right] \right]$$

La loi, implémentable, de contrôle du MRAC modifié, devient alors :

$$u_p = \bar{\theta}^T \bar{\omega} + c_0 u_m - \frac{W_m^{-1}(s)}{(\tau s + 1)^{n^*}} \left[\varepsilon m^2 + W_c(s) \left[W_b(s) \left[\bar{\omega}^T \right] \dot{\tilde{\theta}} \right] \right] \quad (4.7)$$

τ est un paramètre de conception avec $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$ où τ_{\max} est une constante positive. La loi de contrôle (4.7) sera utilisée avec la loi d'adaptation (2.29) pour former le MRAC modifié. Un MRAC similaire a été proposé dans [13], mais le terme contenant $\dot{\tilde{\theta}}$ n'a pas été pris en considération, car les paramètres du système ont été supposés seulement inconnus et constants. Malgré cette différence, le théorème établi dans [13] pour l'analyse de la stabilité du MRAC obtenu, est valable pour la modification que nous considérons ici.

Le théorème (2.2) est aussi valable pour le nouveau MRAC, c'est à dire que tous les signaux du système en boucle fermée (2.12), (2.29) et (4.7) sont bornés, et que l'erreur $e = y_p - y_m \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. En plus, la borne supérieure de $m(\bar{m})$ est indépendante de τ si $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$. Ceci peut être démontré en suivant la même procédure que dans [13,16] comme suit :

Si on considère le schéma fonctionnel donné par la figure (2.4) et on ajoute à l'entrée le terme $\frac{1}{(\tau s + 1)^{n^*}} \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right]$, on peut établir les relations suivantes :

$$y_p = \frac{W_m(s)}{c_0} \left[W_\tau(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] + c_0 r \right] \quad (4.8)$$

$$u_p = \frac{R_0(s)}{k_p Z_0(s)} \frac{W_m(s)}{c_0} \left[W_\tau(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] + c_0 r \right] \quad (4.9)$$

Où $W_\tau(s) = 1 - \frac{1}{(1 + \tau s)^{n^*}}$. Soient $\delta_1 > 0$ tel que le polynôme $Z_0(s)$ ait toutes ses racines dans

$\text{réel}[s] < \frac{-\delta_1}{2}$, $\delta \in \left[0, \min \left\{ \delta_0, \delta_1, \frac{1}{\tau_{\max}} \right\} \right]$ et le signal fictif $m_f(t) = 1 + \|u_t\|_2^\delta + \|y_t\|_2^\delta$.

Ainsi, pour $\delta < \frac{1}{\tau}$ on a $\left\| \frac{\tau s}{\tau s + 1} \right\|_\infty^\delta = 1$ et $\left\| \frac{1}{\tau s + 1} \right\|_\infty^\delta < 2$, donc :

$$\|W_\tau(s)\|_\infty^\delta = \left\| \frac{(\tau s + 1)^{n^*} - 1}{(\tau s + 1)^{n^*}} \right\|_\infty^\delta = \left\| \frac{\tau s \left[(\tau s + 1)^{n^*-1} + (\tau s + 1)^{n^*-2} + \dots + 1 \right]}{(\tau s + 1)^{n^*}} \right\|_\infty^\delta < 2^{n^*} - 1 \quad (4.10)$$

D'où, en commençant des équations (4.8) et (4.9) au lieu des équations (B.1) et (B.2), on peut répéter les mêmes étapes que celles de l'annexe B pour conclure que tous les signaux sont bornés et que $e(t) \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow \infty$.

La borne supérieure de $m_f(t)$ peut être explicitement obtenue de l'équation (B.14),

qu'on obtient pour ce cas aussi. En utilisant le fait que $\frac{\tilde{\theta}^T \bar{\phi}}{m}, \tilde{\theta} \in L_2$, et que leurs bornes L_2 sont obtenues en exploitant seulement les propriétés de la loi d'adaptation (indépendamment de la loi de contrôle), on peut conclure qu'elles sont indépendantes de τ . Ainsi, la borne supérieure de $m_f(t)$ est indépendante de τ et il en sera de même pour la borne supérieure de $m(t)$, car $m(t) < m_f(t), \forall t$.

IV.3. Performances du MRAC modifié pour le cas idéal

Nous allons, maintenant, utiliser les deux critères de performances déjà discutés dans le chapitre II (énergie moyenne et borne supérieure du signal erreur), pour analyser les performances du MRAC modifié.

En premier, nous allons établir la relation qui concerne l'énergie moyenne du signal erreur :

De l'équation (4.8) et en prenant l'équation (2.14), on peut avoir :

$$y_p - y_m = e = \frac{1}{c_0} W_r(s) W_m(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] \quad (4.11)$$

Mais de l'équation (4.10) nous avons :

$$W_r(s) = \frac{\tau s \left[(\tau s + 1)^{n^*-1} + (\tau s + 1)^{n^*-2} + \dots + 1 \right]}{(\tau s + 1)^{n^*}} = \tau s W_{1r}(s)$$

Telle que $W_{1r}(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} + \frac{1}{(\tau s + 1)^2} + \dots + \frac{1}{(\tau s + 1)^{n^*}}$. Alors de la relation (4.11) nous aurons:

$$e = \frac{1}{c_0} s W_m(s) \tau W_{1r}(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] \quad (4.12)$$

et vu que $\|W_{1r}(s)\|_\infty \leq n^*$ et $W_m(s)$ est strictement propre, nous aurons, en appliquant le lemme (2.1) :

$$\int_0^t e_1^2(z) dz \leq \tau^2 c \int_0^t \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)^2 dz \quad (4.13)$$

Alors, on peut suivre les étapes (2.39) à (2.49) pour trouver une borne supérieure à

$\frac{1}{t} \int_0^t e^2(z) dz$. Nous aurons ainsi :

$$\frac{1}{t} \int_0^t e^2(z) dz \leq \tau^2 c \left[\frac{1}{\alpha^2} (\bar{m}^2 + 1) + \alpha^{2n^*} \bar{m}^2 \frac{|\tilde{\theta}(0)|^2}{t} \right] \quad (4.14)$$

Pour la borne L_∞ de $e(t)$ et en utilisant le lemme (2.1) :

$$\begin{aligned}
|e(t)| &\leq \tau \left\| \frac{1}{c_0} W_m(s) W_{1\tau}(s) \right\|_2^\delta \left[\left\| \left(\frac{\dot{\tilde{\theta}}^T \bar{\omega}}{\tilde{\theta}} \right)_t \right\|_2^\delta + \left\| \left(\frac{\tilde{\theta}^T \dot{\bar{\omega}}}{\tilde{\theta}} \right)_t \right\|_2^\delta \right] \\
&\leq \tau \left\| W_{1\tau}(s) \right\|_2^\delta \left\| \frac{1}{c_0} W_m(s) \right\|_2^\delta [c\bar{m} + c]
\end{aligned}$$

Ceci vu que $\tilde{\theta}, \dot{\tilde{\theta}} \in L_\infty$, $\|\bar{\omega}_t\|_2^\delta \leq cm_f$, et $\|\dot{\bar{\omega}}_t\|_2^\delta \leq cm_f + c$. Ainsi :

$$|e(t)| \leq \tau c(\bar{m} + 1) \quad (4.15)$$

La borne supérieure \bar{m} du signal $m(t)$ est indépendante de $\tau \in [0, \tau_{\max}]$. Il est alors clair de l'équation (4.14), qu'en utilisant la loi de contrôle (4.7), on peut rendre l'énergie moyenne du signal erreur aussi petite qu'on le désire, en choisissant τ assez petit. Ceci n'est pas suffisant pour garantir l'amélioration des performances transitoires du MRAC. Cependant, de l'équation (4.15), il est clair que la borne supérieure du signal erreur peut aussi être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant τ assez petit. Alors on peut, arbitrairement, améliorer le régime transitoire du signal erreur.

IV.4. Performances du MRAC modifié en présence d'une perturbation bornée à l'entrée

Dans cette section, à la place du système décrit par l'équation (2.12), nous considérons le système décrit par l'équation suivante :

$$y_p = G_0(s)[u_p + d] = k_p \frac{Z_0(s)}{R_0(s)} [u_p + d] \quad (4.16)$$

où $d(t)$ est une perturbation bornée à l'entrée. La loi de contrôle (4.7) et la loi d'adaptation (2.29) sont prises sans changement, le seul changement concerne le signal de normalisation $m(t)$, donné par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} m^2 = -\delta_0 \left(m^2 - \frac{1}{\alpha_0^2} \right) + u^2 + y^2, \quad m(0) = \frac{1}{\alpha_0^2}, \quad \alpha_0 > 0 \quad (4.17)$$

Ainsi, on peut remarquer que la seule différence entre le signal m défini pour l'équation (2.26) et l'équation (4.17) est que la borne inférieure de m^2 dans (2.26) vaut 1, tandis que dans le cas de l'équation (4.17) c'est $\frac{1}{\alpha_0^2}$ [4]. Alors, en choisissant α_0 assez petit, nous pourrions augmenter la borne inférieure du signal m^2 , telle que la contribution de la

perturbation $d(t)$, entrant dans la loi d'adaptation (2.29), peut être rendue aussi petite que nous voulons [4,6].

Examinons, alors, les performances du MRAC modifié en présence de la perturbation $d(t)$, en utilisant l'énergie moyenne du signal erreur et sa borne L_∞ . C'est pratiquement les mêmes démarches utilisées pour le cas où $d(t)=0$ qui seront suivies.

En premier et en considérant le diagramme fonctionnel donné par la figure (2.4) avec $d(t) \neq 0$ et en prenant en compte la modification introduite par (2.7), nous pouvons facilement montrer que :

$$y_p = \frac{1}{c_0} W_m(s) W_\tau(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] + \frac{1}{c_0} W_m(s) W_\tau(s) \frac{[\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)]}{\Lambda(s)} [d] + W_m(s) [r] \quad (4.18)$$

$$u_p = \frac{R_0(s)}{c_0 k_p Z_0(s)} W_m(s) W_\tau(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] + \frac{[\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)]}{c_0 \Lambda(s)} W_m(s) [d] \\ - \frac{R_0(s)}{c_0 k_p Z_0(s) (\tau s + 1)^{n^*}} \frac{[\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)]}{\Lambda(s)} W_m(s) [d] + \frac{R_0(s)}{k_p Z_0(s)} W_m(s) [r] \quad (4.19)$$

De l'équation (4.18) on a :

$$e = \frac{1}{c_0} W_m(s) W_\tau(s) \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] + \frac{1}{c_0} W_m(s) W_\tau(s) \frac{[\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)]}{\Lambda(s)} [d] \quad (4.20)$$

d'où, nous pouvons obtenir :

$$\int_0^t e_1^2(z) dz \leq \tau^2 c \left[\int_0^t \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)^2 dz + d_0^2 t \right]$$

Ensuite, nous ferons de même, avec le terme $\int_0^t \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)^2 dz$, que pour le cas où $d(t)=0$

(équations (2.40) à (2.49)).

$$\tilde{\theta}^T \bar{\omega} = \Lambda_1(s, \alpha) \left[\dot{\tilde{\theta}}^T \bar{\omega} + \tilde{\theta}^T \dot{\bar{\omega}} \right] + \Lambda_0(s, \alpha) W_m^{-1}(s) \left[\tilde{\theta}^T \phi + W_c(s) \left[W_b(s) \left[\bar{\omega}^T \right] \dot{\tilde{\theta}} \right] \right]$$

Où $\Lambda_1(s, \alpha)$ et $\Lambda_0(s, \alpha)$ sont définis par l'équation (B.5). Ainsi :

$$\left\| \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right) \right\|_2 \leq \frac{c}{\alpha} \left[\left\| \left(\dot{\tilde{\theta}}^T \bar{\omega} \right) \right\|_2 + \left\| \left(\tilde{\theta}^T \dot{\bar{\omega}} \right) \right\|_2 \right] + c \alpha^{n^*} \left[\left\| \left(\frac{\tilde{\theta}^T \phi}{m} m \right) \right\|_2 + \left\| \left(\dot{\tilde{\theta}} \right) m \right\|_2 \right] \\ \leq \frac{c}{\alpha} \left[\left\| \left(\dot{\tilde{\theta}}^T \bar{\omega} \right) \right\|_2 + \left\| \left(\tilde{\theta}^T \dot{\bar{\omega}} \right) \right\|_2 \right] + c \alpha^{n^*} \bar{m} \left[\left\| \left(\frac{\tilde{\theta}^T \phi}{m} \right) \right\|_2 + \left\| \left(\dot{\tilde{\theta}} \right) \right\|_2 \right] \quad (4.21)$$

Pour $\left| \frac{\dot{\bar{\theta}}}{\bar{\theta}} \right|$ nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{\bar{\theta}}}{\bar{\theta}} \right| &\leq \gamma |\varepsilon m| \frac{|\phi|}{m} = \gamma \frac{|\bar{\theta}^T \phi + \eta|}{m} \frac{|\phi|}{m} \quad (\text{car } \varepsilon = \frac{\bar{\theta}^T \phi + \eta}{m^2}) \\ &\leq c \quad (\text{car } \frac{\phi}{m}, \frac{\eta}{m} \in L_\infty) \end{aligned}$$

Le signal $m_f(t)$ est choisi cette fois-ci comme étant :

$$m_f(t) = \frac{1}{\alpha_0^2} + \|u_t\|_2^\delta + \|y_{pt}\|_2^\delta$$

Et de la même manière que pour le cas où $d(t) \neq 0$, nous pouvons établir pour ω :

$$|\bar{\omega}| \leq c m_f + c \leq c(\bar{m} + 1)$$

Alors :

$$\left(\|\bar{\omega}_t\|_2 \right)^2 \leq c(\bar{m}^2 + 1)t \quad (4.22)$$

Pour $\dot{\omega}$, à partir des équations (4.18) et (4.19), nous avons :

$$\|u_t\|_2 \leq c \|\omega_t\|_2 + c \|r_t\|_2 + c \|d_t\|_2$$

$$\|y_t\|_2 \leq c \|\omega_t\|_2 + c \|r_t\|_2 + c \|d_t\|_2$$

$$\|\dot{y}_t\|_2 \leq c \|\omega_t\|_2 + c \|r_t\|_2 + c \|d_t\|_2$$

Vu que $\dot{\omega} = sH(s) \begin{bmatrix} u_p & y_p \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{y} \end{bmatrix}^T$ et en utilisant l'équation (4.22) nous aurons :

$$\left(\|\dot{\omega}_t\|_2 \right)^2 \leq c(\bar{m}^2 + 1)t \quad (4.23)$$

En combinant les équations (4.21), (4.22) et (4.23) nous obtenons :

$$\int_0^t \left(\frac{\bar{\theta}^T \bar{\omega}}{\bar{\theta}} \right)^2 dz \leq \frac{c}{\alpha^2} [\bar{m}^2 + 1] + c \alpha^{2n^*} \bar{m}^2 \left[\int_0^t \frac{\bar{\theta}^T \phi}{m^2} dz + \int_0^t \left| \frac{\dot{\bar{\theta}}}{\bar{\theta}} \right|^2 dz \right]$$

La combinaison de cette équation avec l'équation (4.21) et le lemme (2.1), nous permet d'aboutir à :

$$\int_0^t e^2(z) dz \leq \tau^2 c \left[\frac{1}{\alpha^2} (\bar{m}^2 + 1) + d_0^2 + \alpha^{2n^*} \bar{m}^2 \left(d_0^2 + \frac{\left| \bar{\theta}(0) \right|^2}{t} \right) \right] \quad (4.24)$$

Nous remarquons ici que $\tilde{\theta}(0)$ garde le même effet sur l'énergie moyenne du signal erreur. Cet effet est très critique pour t petit, c'est à dire pendant la phase transitoire, et diminue avec le temps. Ceci bien que la borne supérieure de cette énergie moyenne se trouve augmentée par la contribution de la perturbation d'entrée $d(t)$.

Pour trouver une borne L_∞ du signal erreur, l'utilisation de l'équation (4.20) et l'application du lemme (2.1) nous donnent :

$$\begin{aligned}
 |e(t)| &\leq \left\| \frac{\tau}{c_0} W_{1r}(s) W_m(s) \right\|_\infty \left\| \dot{\tilde{\theta}}^T \bar{\omega} + \tilde{\theta}^T \dot{\bar{\omega}} + \dot{d} - \frac{s \theta_1^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)} [d] \right\|_2^\delta \\
 &\leq \tau \left\{ \left\| \dot{\tilde{\theta}}^T \bar{\omega} + \tilde{\theta}^T \dot{\bar{\omega}} \right\|_2^\delta + \|\dot{d}\|_2^\delta + c \|d\|_2^\delta \right\} \\
 &\leq \tau \left\{ (\bar{m} + 1) + \|\dot{d}\|_2^\delta + c d_0^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pour que cette borne L_∞ du signal erreur existe, en présence de perturbation, il faut que le dérivée du signal erreur soit bornée, c'est à dire que $\dot{d} \in L_\infty$.

A partir des équations (4.24) et (4.25), on voit qu'on peut atténuer non seulement l'effet de $\tilde{\theta}(0)$ mais aussi celui de la perturbation $d(t)$, en choisissant τ assez petit. De l'équation (4.25), on voit qu'il est possible de réduire la borne supérieure de $e(t)$. Ceci va aussi réduire les oscillations en régime permanent, qui sont dues dans ce cas, à la présence de perturbation. Ainsi, pour ce cas, la diminution de l'effet de perturbation et l'amélioration du régime transitoire peuvent s'effectuer simultanément.

Dans l'analyse précédente, les perturbations dans le système adaptatif sont provoquées par un signal borné, appliqué à l'entrée du système sous contrôle. Une perturbation peut aussi apparaître dans le système adaptatif, lorsqu'un facteur d'oubli (tel que la modification σ) est introduit dans la loi d'adaptation. Ceci est, principalement, effectué pour améliorer la robustesse. Les perturbations, dans ce cas, se présentent sous forme d'erreur de sortie intermittente et soudaine appelée "bursts". Cette erreur est suivie par une longue période pendant laquelle le comportement du système est apparemment acceptable ou par une instabilité complète du système en boucle fermée [65,66].

Quoique nous n'établissions pas, ici, les expressions de l'énergie moyenne et de la borne supérieure du signal erreur, pour le cas où une modification σ est introduite, nous utilisons cette modification avec la loi de contrôle donnée par l'équation (4.7) dans la

simulation. Les résultats obtenus montrent que pour ce cas aussi, les performances du MRAC se trouvent améliorées. Ceci se manifeste par une réduction des "bursts", obtenus en régime permanent avec le MRAC standard, en plus de l'amélioration du régime transitoire dû à $\tilde{\theta}(0)$.

Il faut remarquer que la présence de bruits (de haute fréquence) du capteur, impose une limitation sur la bande passante du compensateur utilisé dans la loi de contrôle. Ainsi, on ne peut pas choisir τ très petit, et on ne peut, donc, pas diminuer la borne supérieure de l'erreur comme on le veut.

IV. 5. Performances en présence de dynamiques inconnues

Dans cette section et pour montrer le compromis à faire entre l'amélioration de la performance et la robustesse, le système sous contrôle sera représenté par l'équation suivante :

$$y_p = G_0(s)[1 + \mu\Delta_m(s)]\left[\mu_p\right] \quad (4.26)$$

$G_0(s)$ est définie par l'équation (2.12) et satisfait les suppositions S1 à S4. $\Delta_m(s)$ est défini par l'équation (2.30) et satisfait les suppositions D1 et D2. μ est une petite constante positive qui caractérise, quantitativement, la contribution de dynamique inconnue.

Pour ce cas, on ne peut établir ni l'expression de l'énergie moyenne du signal erreur, ni celle de sa borne supérieure. On peut remarquer, à partir des résultats de simulation, que le paramètre τ ne peut pas être choisi inférieur à une valeur τ_{\min} , sinon la stabilité du système en boucle fermée se trouve affectée. Puisque la valeur de τ_{\min} augmente quand μ augmente, alors, τ_{\min} dépend de la dynamique inconnue, que le système en boucle fermée doit tolérer. Ceci montre le compromis classique entre l'amélioration des performances d'une part, et de la robustesse et la stabilité d'autre part.

IV.6. Résultats de simulation

Dans cette section, nous appliquons le MRAC modifié à des exemples de simulation, pour montrer la validité des résultats obtenus dans les sections précédentes.

Exemple 1

Dans cet exemple, nous considérons un système instable de premier ordre avec dynamique inconnue et perturbation bornée à l'entrée. Nous allons, alors, le contrôler par le

MRAC standard et puis par le MRAC modifié, pour pouvoir comparer leurs performances. Le système sous contrôle sera décrit par la fonction de transfert suivante :

$$y_p = \frac{1}{s-1} [1 + \Delta_m(s)] [u_p + d]$$

Où, $\Delta_m(s) = -\frac{2\mu s}{\mu s + 1}$, $\mu > 0$ est une incertitude multiplicative et $d(t)$ est une perturbation bornée appliquée à l'entrée. Le modèle de référence sera décrit par la fonction de transfert suivante :

$$y_m = \frac{1}{s+1} [u_m]$$

On obtient, alors, $\bar{\theta}^* = -2.0$. Dans toutes les simulations de cet exemple, le paramètre du contrôleur est supposé appartenir à $M_\theta = [-4, 4]$. Avec $\delta_0 = 0.1$, $\theta(0) = -3.5$, et $c_0 = 1$.

Les conditions initiales sur les états du système et du modèle de référence sont toutes prises égales à zéro.

En premier, nous faisons la simulation du cas idéal où $\mu = d = 0$. Nous choisissons l'entrée $u_m(t)$ comme étant un échelon unitaire ($u_m(t) = 1$, pour $t \geq 0$). Les résultats obtenus, avec le MRAC standard et le MRAC modifié ($\tau = 0.5$ et $\tau = 0.01$), sont représentés sur les figures (4.1 a et b). Ces figures montrent que le MRAC modifié donne de très bons résultats, par rapport à ceux obtenus en utilisant le MRAC standard. En plus, comme il est prédit par les équations (4.14) et (4.15), une diminution de τ produit une amélioration du régime transitoire. Nous voyons, ainsi, d'après la figure (4.1.b), que quoique les performances du MRAC soient améliorées, les entrées de contrôle restent non impulsives. Cependant la situation serait différente si les états initiaux étaient non nuls.

Ensuite, nous considérons le cas où une perturbation $d(t) = 0.1 \sin(0.5t)$ est présente à l'entrée du système. Le paramètre α_0 de l'équation (4.17) est pris égal à l'unité. Avec $u_m(t) = 1$, nous obtenons les résultats représentés sur les figures (4.2, a et b). Pour le MRAC modifié, nous prenons $\tau = 0.5$.

Il est clair, d'après la figure (4.2.a), que par rapport au MRAC standard, le MRAC modifié donne de meilleures performances transitoires. En plus, il réduit l'effet de la perturbation appliquée à l'entrée du système, sur l'erreur entre la sortie du système et celle du modèle de référence. Ceci est prédit par les équations (4.24) et (4.25).

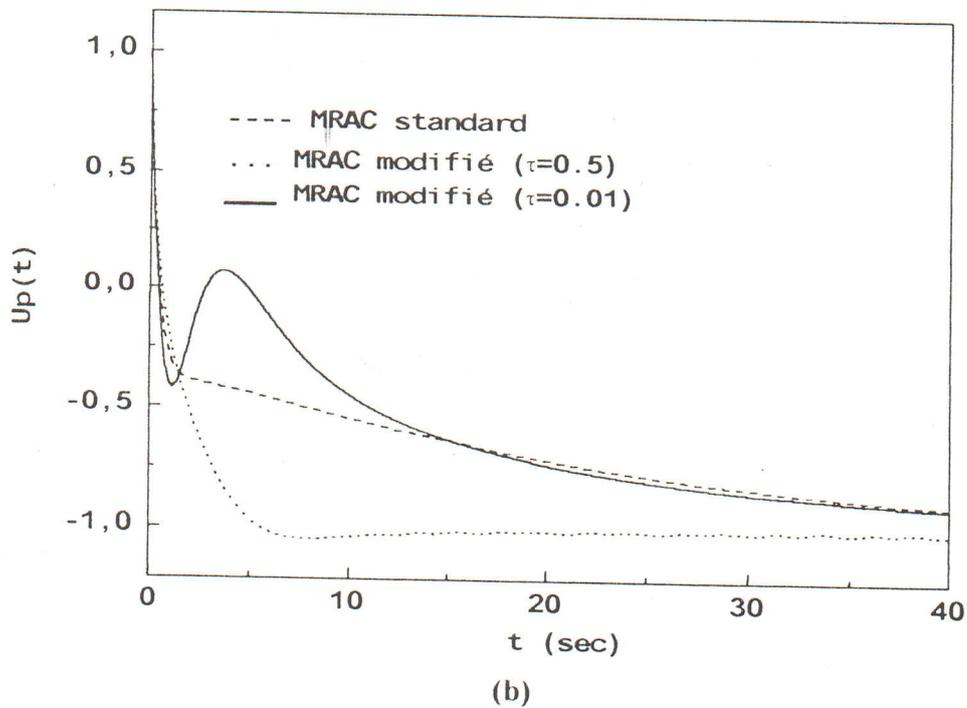
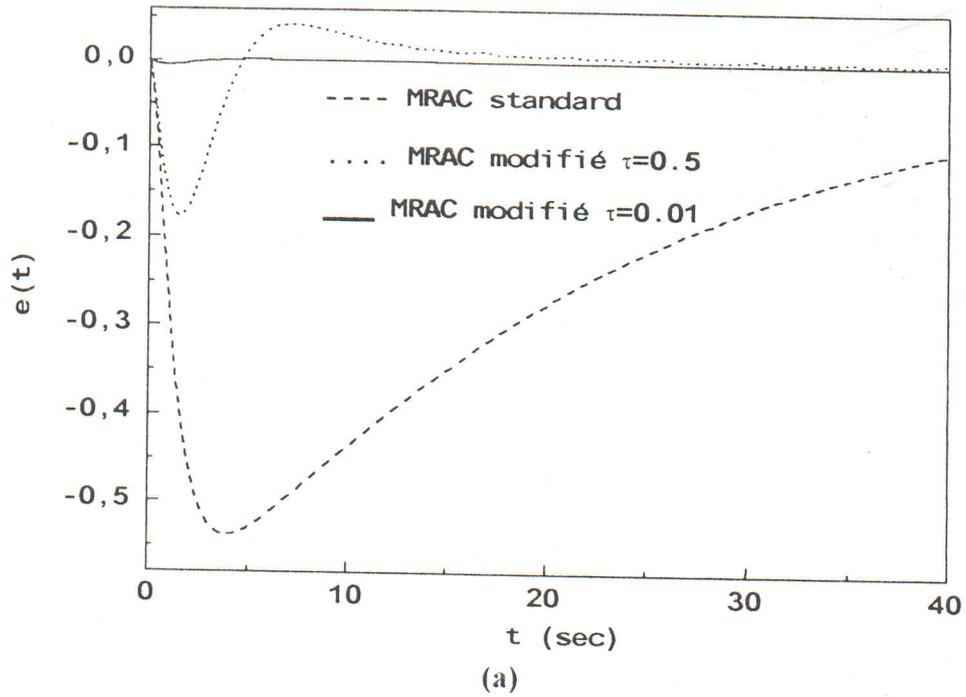
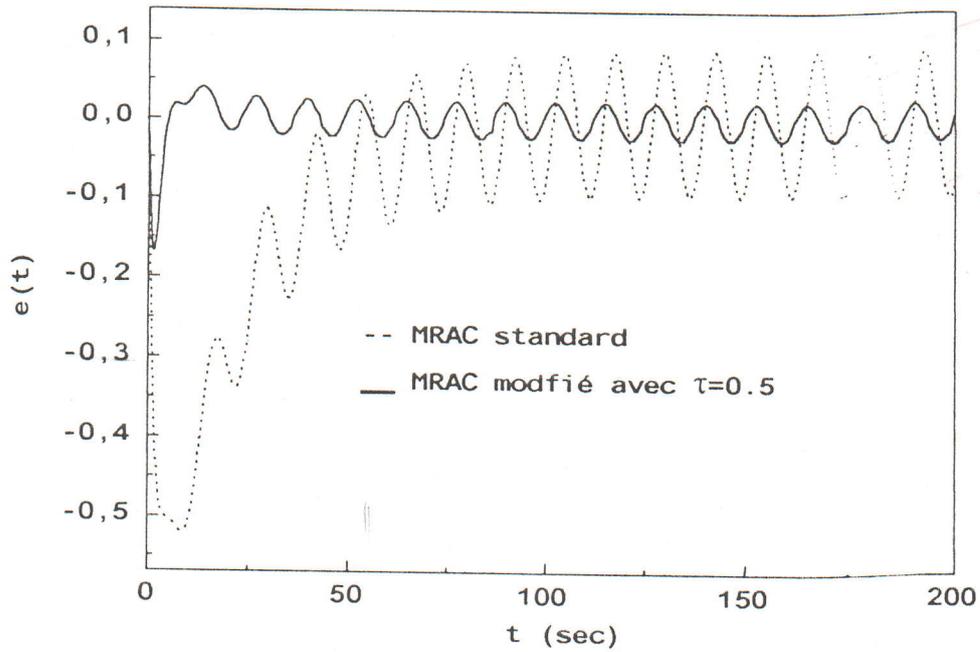
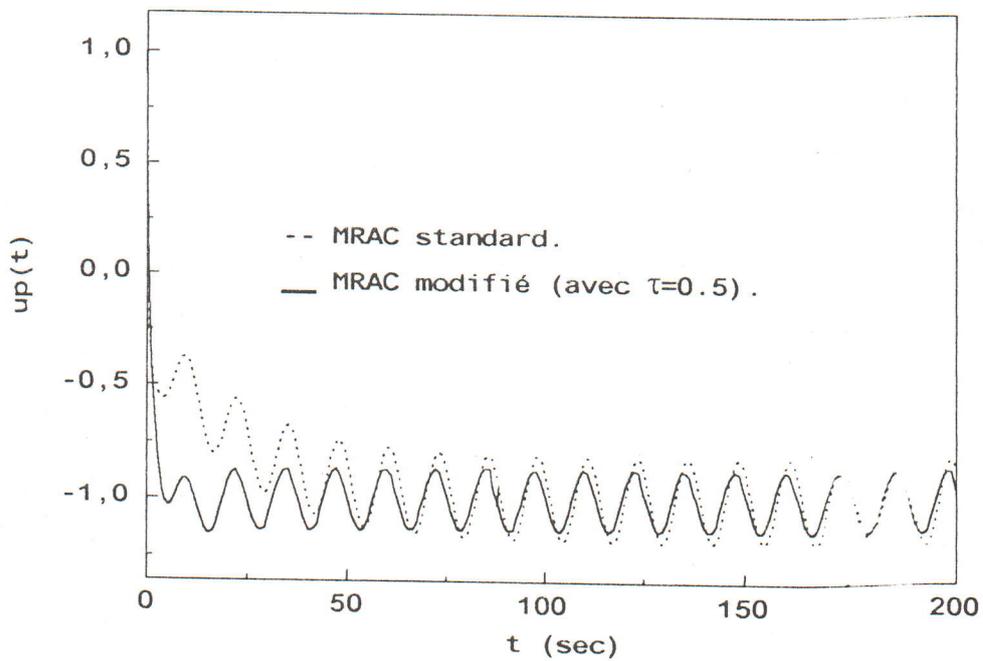


Fig. (4.1) (a) : $e(t)$ pour le MRAC standard et le MRAC modifié ($\tau=0.5$ et $\tau=0.01$), pour le cas idéal.

(b) : Entrée de contrôle du système pour le cas idéal.



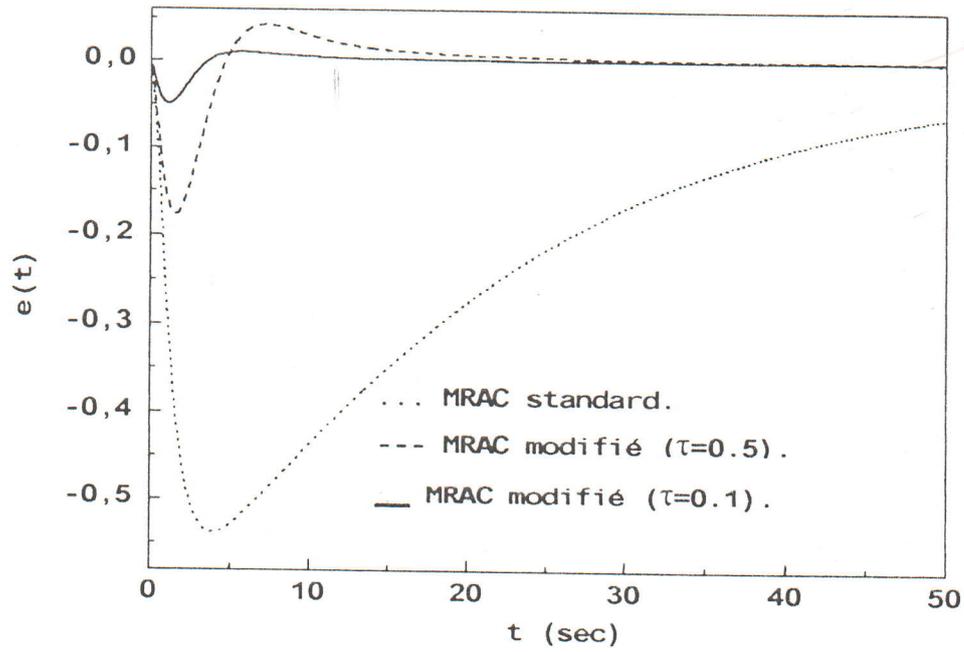
(a)



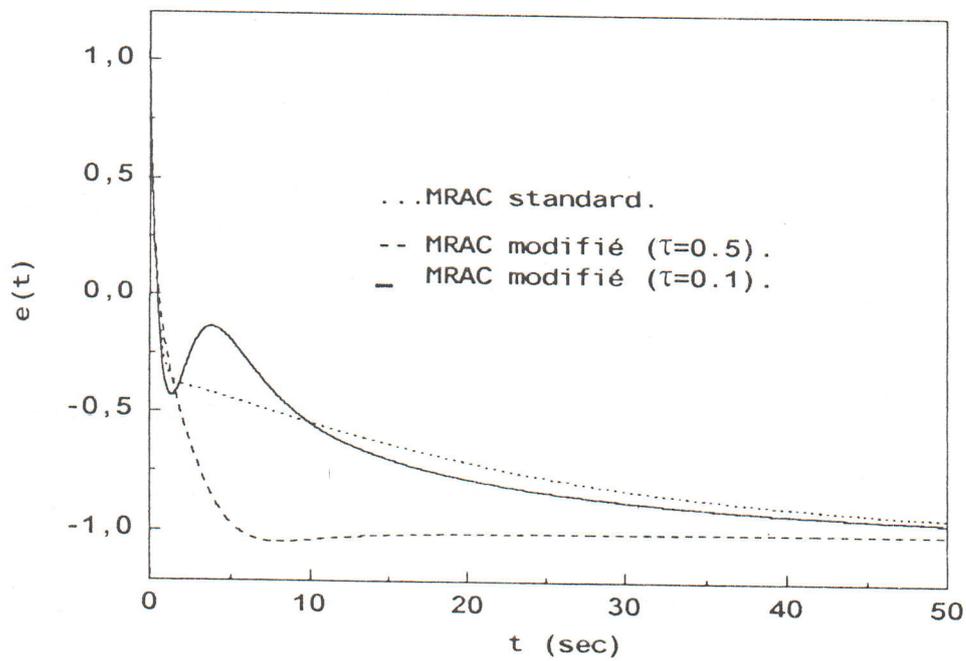
(b)

Fig. (4.2) (a) : Erreurs de sorties, en présence de perturbation bornée à l'entrée, pour le MRAC standard et le MRAC modifié, avec $\tau = 0.5$

(b) : Entrées de contrôle, dans le cas où une perturbation bornée est appliquée à l'entrée.



(a)



(b)

Fig. (4.3) (a) : Erreurs de sorties en présence de dynamiques inconnues.

(b) : Entrées de contrôle, dans le cas où une dynamique inconnue est présente.

Finalement, nous considérons le cas où une dynamique inconnue est présente, avec $\mu = 0.01$, et $u_m = 1.0$. Nous obtenons les résultats des figures (4.3.a et b), d'où, on remarque qu'avec $\tau = 0.5$, le MRAC modifié donne un régime transitoire très bon par rapport à celui du MRAC standard. En réduisant τ ($\tau = 0.1$), le régime transitoire se trouve plus amélioré par rapport au cas précédent. Quand la valeur de τ est minimisée d'avantage ($\tau = 0.01$), cela conduit au phénomène d'instabilité représenté par la figure (4.4).

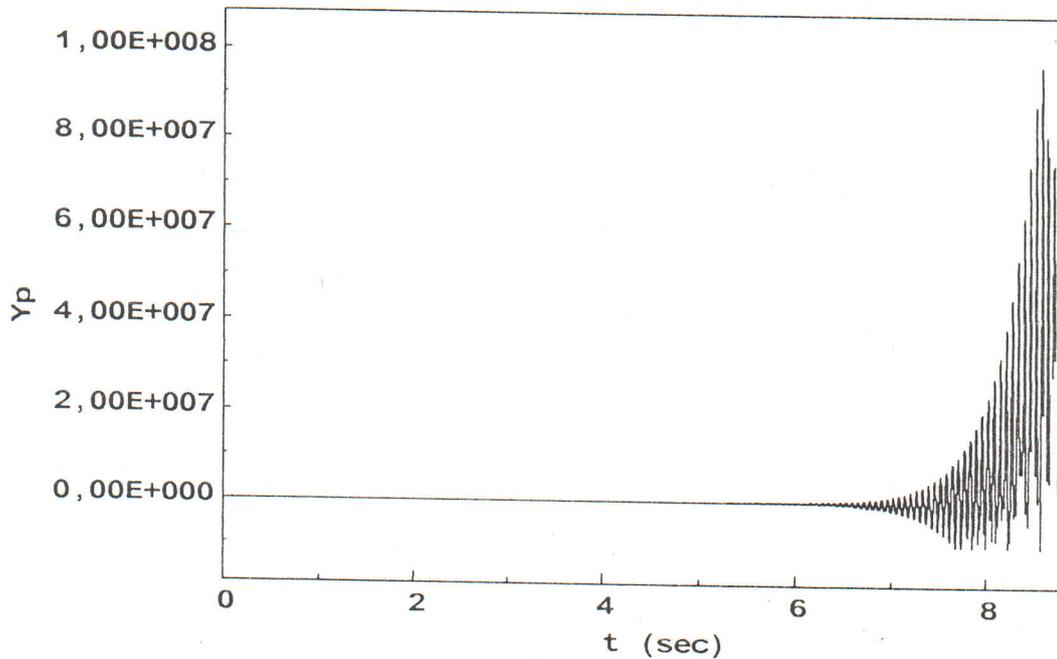


Fig. (4.4) : Instabilité obtenue quand $\tau = 0.01$ et $\mu = 0.01$.

Exemple (IV.2)

Dans cet exemple, nous considérons le système utilisé dans [65,66], pour analyser les phénomènes de "bursts", rencontrés en utilisant le MRAC standard. Nous contrôlons ce système, en utilisant le MRAC standard et le MRAC modifié, pour voir le comportement de ce dernier en présence de "bursts".

Le système sous contrôle et le modèle de référence sont décrits, respectivement, par les fonctions de transfert suivantes :

$$y_p = \frac{s+2}{s^2-s-2} [u_p]$$

$$y_m = \frac{1}{s+1} [u_m]$$

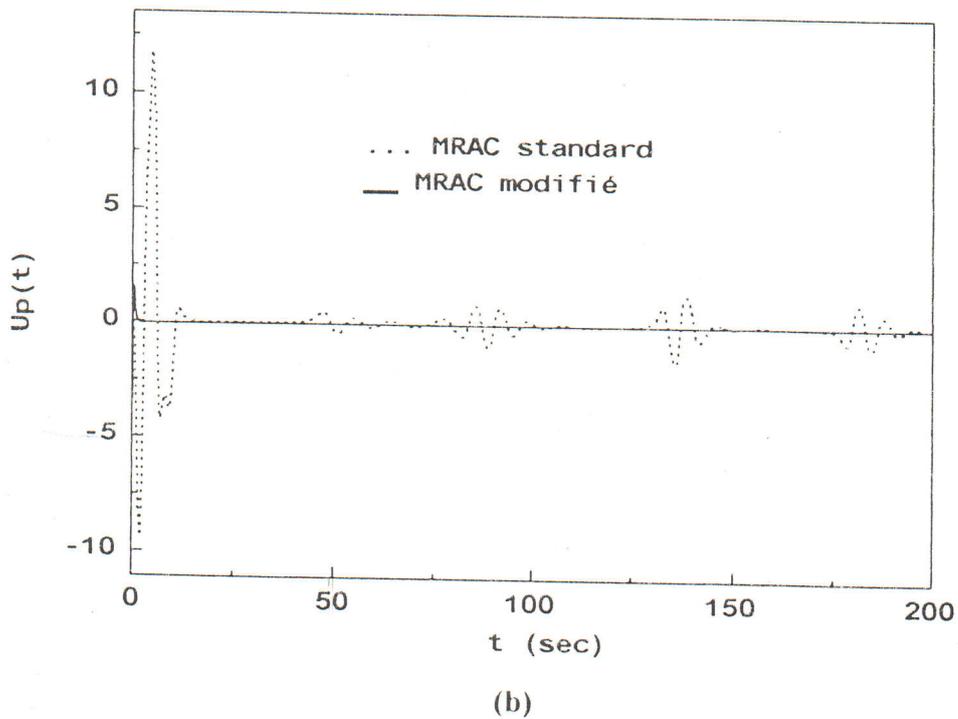
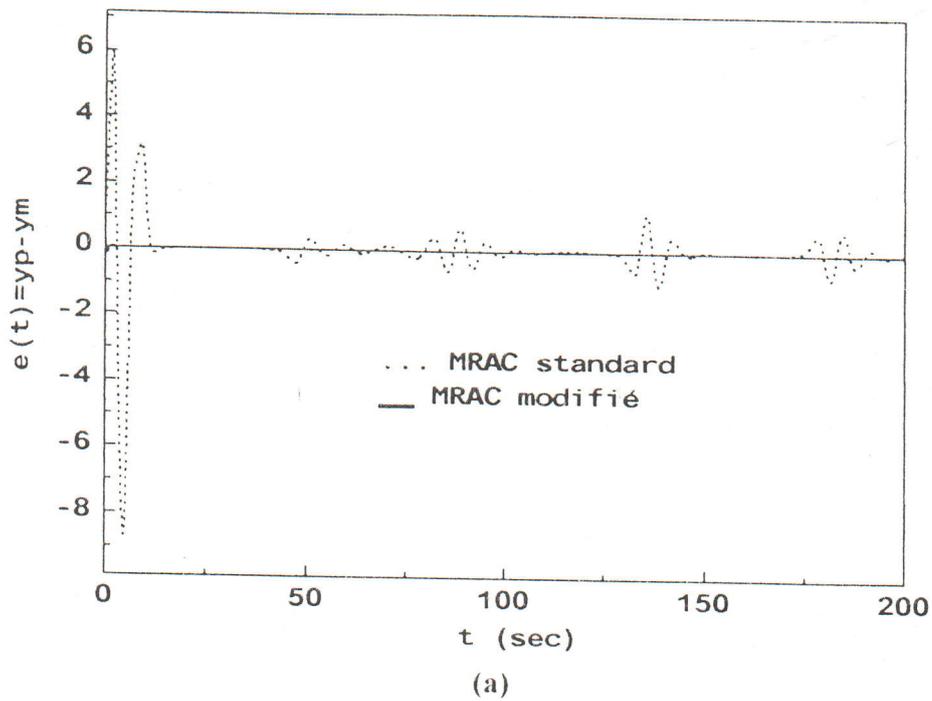


Fig. (4.5) (a) : Erreur de sortie, pour le MRAC standard et le MRAC modifié en présence de "bursts".
(b) : Entrées de contrôle.

Pour le MRAC standard, nous choisissons l'état initial du système comme étant $x(0) = [0, 1.5]$, nous choisissons également $\Lambda(s) = s + 1$, $u_m = 0$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0.02$, $\delta_0 = 1.9$ et $\theta(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. Nous obtenons les "bursts", représentés en pointillé sur la figure (4.5.a). Pour le MRAC modifié, nous gardons tous les paramètres inchangés, et nous choisissons $\tau = 0.1$. Nous obtenons, alors, la réponse représentée, en trait plein, sur la figure (4.5.a). Ainsi, nous remarquons que le MRAC modifié, réduit aussi les "bursts", obtenus en régime permanent par le MRAC standard. Ceci est dû, essentiellement, au fait que la borne supérieure du signal erreur est minimisée.

Remarque :

La réduction des "bursts", rencontrés en utilisant le MRAC standard, exige l'utilisation d'une excitation persistante [65,66]. Tandis que ce problème se trouve facilement résolu en utilisant le SAC (chap. I). Ainsi, pour cet exemple, et vu que la sortie et les états du modèle sont nuls, les gains $K_x(t)$ et $K_u(t)$ seront aussi nuls. Le seul gain qui devra alors être adapté est $K_e(t)$. Ainsi, le système en boucle fermée se trouve ramené à un système avec un gain de retour adaptatif. Il suffit, alors, d'imposer une borne inférieure sur ce gain, pour que les "bursts" soient considérablement réduits, sinon éliminés.

IV.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une modification sur le MRAC standard étudié dans le chapitre II. Cette modification entre dans la famille des modifications introduites par Sun [13], sur la loi de contrôle. Nous avons, ensuite, analysé les performances du MRAC obtenu en utilisant l'énergie moyenne du signal erreur et sa borne supérieure. Nous avons établi explicitement que la minimisation du paramètre τ permet de réduire, arbitrairement, ces deux grandeurs dans le cas idéal et en présence de perturbation à l'entrée. Cependant, dans le cas où un bruit, de haute fréquence, est présent à l'entrée du système, la minimisation de τ est limitée par la bande passante permise. Le MRAC modifié permet, également, de réduire les "bursts" rencontrés en introduisant la modification σ , ceci sans avoir recours à une excitation persistante.

Si une dynamique inconnue est présente, un compromis doit être fait entre l'amélioration du régime transitoire et la stabilité. Ceci dépend, bien sûr, du gain de la dynamique inconnue. Ces compromis entre l'amélioration des performances d'une part, et la robustesse et le bruit du capteur d'autre part, sont bien connus en contrôle.

Conclusion

Conclusion

Nous avons proposé trois méthodes pour la compensation des systèmes intervalles, afin d'éviter la condition ASPR requise pour l'applicabilité du SAC. La première méthode utilise le théorème de Kharitonov et le modèle du compensateur proposé par Iwai & al. [39,40]. L'utilisation du théorème de Kharitonov guide le choix des paramètres du compensateur et assure la presque positivité du système augmenté sur tout l'intervalle de variation des paramètres. La deuxième méthode utilise une forme de compensateur, qui assure que le degré relatif du système augmenté soit l'unité, et tente de minimiser son gain en prenant en compte la stabilité du système, fictif, en boucle fermée. Cette méthode est plus procédurale, mais elle ne garantit pas, toujours, une solution pour les paramètres du compensateur.

La troisième méthode ramène l'incertitude sur les paramètres du système intervalle à une dynamique inconnue et applique, ensuite, la méthode de compensation dédiée à ce cas.

Ces méthodes ont été utilisées afin de concevoir des compensateurs pour des exemples de systèmes intervalles, qui ne sont pas forcément ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres. Ensuite, le SAC a été utilisé pour contrôler le système augmenté résultant. Les simulations ont été effectuées dans l'environnement MATLAB 4.2.C [65]. Les résultats obtenus montrent qu'avec ces méthodes le SAC peut être utilisé pour le contrôle de systèmes non-ASPR ce qui permet de profiter de ses avantages.

Le régime transitoire du MRAC standard a été aussi analysé. Ensuite, sa loi de contrôle a été augmentée par un terme pour la compensation de l'effet de l'erreur initiale sur les paramètres. Le régime transitoire du MRAC obtenu peut être amélioré en diminuant la constante de temps du filtre utilisé pour la compensation. Ceci a été établi explicitement en utilisant la borne supérieure du signal erreur et son énergie moyenne.

Nous proposons l'utilisation de ce type de modification avec d'autres configurations de contrôleurs adaptatifs autres que le MRAC en vue d'améliorer leurs performances.



Annexes

Annexe A

Démonstration du théorème (I.2)

La première étape, dans la démonstration, est de former une fonction quadratique positive définie selon les variables d'états du système adaptatif, $e_x(t)$ et $K_I(t)$. Avant de faire ceci, il est supposé que T_i^{-1} est une matrice positive définie, selon la première condition suffisante. Alors un choix approprié de la fonction de Lyapunov est :

$$V = e_x^T P e_x + T_i r \left[S(K_I - \tilde{K}) T_i^{-1} (K_I - \tilde{K})^T S^T \right] \quad (A.1)$$

et son dérivé dans le temps est :

$$\dot{V} = e_x^T P \dot{e}_x + \dot{e}_x^T P e_x + 2T_i r \left[S(K_I - \tilde{K}) T_i^{-1} \dot{K}_I^T S^T \right] \quad (A.2)$$

Où P est une matrice positive définie de dimension $n \times n$, \tilde{K} est une matrice de dimension $m \times n_r$, et S est une matrice non singulière de dimension $m \times m$.

Puisque la matrice \tilde{K} apparaît seulement dans la fonction V et non dans l'algorithme de contrôle, elle est dite matrice de gain fictif. Elle a la même dimension que $K_r(t)$.

$$\tilde{K} r = \tilde{K}_e C_p e_x + \tilde{K}_u u_m + \tilde{K}_x x_m \quad (A.3)$$

Où les trois gains \tilde{K}_x , \tilde{K}_u et \tilde{K}_e sont, comme \tilde{K} , fictifs.

Ensuite, Nous allons tirer l'équation de l'erreur en utilisant le fait que $e_x = x_p^* - x_p$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_p x_p^* + B_p u_p^* - A_p x_p - B_p u_p \\ &= A_p [x_p^* - x_p] + B_p [u_p^* - u_p] \\ &= A_p e_x + B_p [u_p^* - u_p] \end{aligned} \quad (A.4)$$

En substituant la définition pour u_p^* de (1.5) et u_p de (1.34), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_x x_m - K_u u_m - K_e C_p e_x] \\ &= A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_I r - C_p e_x r^T T_p r] \end{aligned} \quad (A.5)$$

Alors le système adaptatif sera décrit par :

$$\dot{e}_x = A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_I r - C_p e_x r^T T_p r] \quad (A.6)$$

$$\dot{K}_I = C_p e_x r^T T_i \quad (\text{A.7})$$

La substitution de (A.6) et (A.7) dans (A.2) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_x^T P \left[A_p e_x - B_p C_p e_x r^T T_p r - B_p K_I r B_p S_{21} x_m + B_p S_{22} u_m \right] \\ & + \left[A_p e_x - B_p C_p e_x r^T T_p r - B_p K_I r + B_p S_{21} x_m + B_p S_{22} u_m \right]^T P e_x \quad (\text{A.8}) \\ & + 2e_x^T C_p^T S^T S (K_I - \tilde{K}) r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_x^T (P A_p + A_p P) e_x - e_x^T (P B_p C_p + C_p^T B_p^T P) e_x r^T T_p r - 2e_x^T P B_p K_I r \\ & + 2e_x^T P B_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) + 2e_x^T C_p^T S^T S (K_I - \tilde{K}) r \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_x^T (P A_p + A_p P) e_x - e_x^T (P B_p C_p + C_p^T B_p^T P) e_x r^T T_p r \\ & + 2e_x^T \left[C_p^T S^T S - P B_p \right] K_I r - 2e_x^T C_p^T S^T S \tilde{K} r \quad (\text{A.10}) \\ & + 2e_x^T P B_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) \end{aligned}$$

En posant $C_p = Q B_p P$, $\forall A_p, B_p$, où $Q = (S^T S)^{-1}$ la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_x^T (P A_p + A_p P) e_x - 2e_x^T P B_p C_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r \\ & - 2e_x^T C_p^T S^T S \tilde{K} r + 2e_x^T P B_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

En substituant $\tilde{K} r = \tilde{K}_{ex} C_p e_x + \tilde{K}_x x_m + \tilde{K}_u u_m$ dans l'équation précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_x^T \left[P (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P \right] e_x \\ & - 2e_x^T P B_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r \quad (\text{A.12}) \\ & + 2e_x^T P B_p \left[(S_{21} - \tilde{K}_x) x_m + (S_{22} - \tilde{K}_u) u_m \right] \end{aligned}$$

Ainsi si on pose $\tilde{K}_x = S_{21}$ et $\tilde{K}_u = S_{22}$ (aucune d'elles n'est requise pour l'implantation), le dérivée de V devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_x^T \left[P (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P \right] e_x \\ & - 2e_x^T P B_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Cette dérivée consiste en deux termes. Si T_p est une matrice positive semi-définie (la troisième condition suffisante), alors le deuxième terme est négatif semi-défini en $e_x(t)$. La première condition suffisante implique que le premier terme quadratique est négatif défini en $e_x(t)$. Ce qui implique que la dérivée de V est négative définie en $e_x(t)$, c'est à dire que la sortie du système tend asymptotiquement vers la sortie du modèle de référence. De même pour l'état augmenté $[e_x(t), K_I(t)]$, ainsi les gains d'adaptation sont bornés.

Annexe B

Démonstration du théorème (II.2)

A partir de la figure (II.4) on peut écrire :

$$u_p = \frac{R_0(s)}{k_p Z_0(s)} \frac{W_m(s)}{c_0} \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} + c_0 r \right] \quad (\text{B.1})$$

$$y_p = \frac{W_m(s)}{c_0} \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} + c_0 r \right] \quad (\text{B.2})$$

Où $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ est l'erreur sur les paramètres. Soit $\delta_1 > 0$ tel que $Z_0(s)$ ait toutes ses racines dans $Re[s] < -\frac{\delta_1}{2}$. Soit $\delta \in [0, \min(\delta_0, \delta_1)]$ et définissons le signal fictif $m_f(t)$ comme suit :

$$m_f(t) = 1 + \|u_t\|_2^\delta + \|y_t\|_2^\delta \quad (\text{B.3})$$

Il est clair que $m(t) < m_f(t)$, $\forall t \geq 0$. A partir des équations (B.1), (B.2) et le lemme (II.1) on peut montrer que si $m_f(t)$ est borné alors tous les signaux en boucle fermée le seront aussi. Ainsi, il suffit, seulement, de montrer que $m_f(t)$ est borné.

En appliquons le lemme (II.1) à l'équation (B.3) et en utilisons les équations (B.1) et (B.2) nous aurons :

$$m_f(t) \leq c + c \left\| \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2^\delta \quad (\text{B.4})$$

Alors, il faut montrer que le terme $c \left\| \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2^\delta$ est borné. Pour cela nous utilisons, pour

décomposer ce terme, le lemme (II.2), avec $W(s) = W_m(s)$ et $\Lambda_0(s, \alpha) = \frac{\alpha^{n^*}}{(s + \alpha)^{n^*}}$, $\alpha > \frac{\delta}{2}$:

$$\tilde{\theta}^T \bar{\omega} = \Lambda_1(s, \alpha) \left[\dot{\tilde{\theta}}^T \bar{\omega} + \tilde{\theta}^T \dot{\bar{\omega}} \right] + \Lambda_0(s, \alpha) W_m^{-1}(s) \left[\tilde{\theta}^T \phi + W_c(s) \left[W_b(s) \left[\bar{\omega}^T \right] \dot{\tilde{\theta}}^T \right] \right] \quad (\text{B.5})$$

Nous avons :

$$\bar{\omega} = H(s) \begin{bmatrix} u_p & y_p \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_p \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Où } H(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Alors :}$$

$$|\bar{\omega}| \leq cm_f(t) + |y_p(t)| \quad (\text{B.7})$$

De (B.2), il est clair que :

$$|y_p(t)| \leq c \left[\left\| \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2^\delta + c \right] \leq c \left[\|\bar{\omega}_t\|_2^\delta + c \right] \quad (\text{car } \tilde{\theta} \text{ est borné}) \quad (\text{B.8})$$

Aussi de (B.6), nous obtenons :

$$\|\bar{\omega}_t\|_2^\delta \leq cm_f \quad (\text{B.9})$$

La combinaison de (B.7), (B.8) et (B.9) donne :

$$|\bar{\omega}(t)| \leq cm_f(t) + c \quad (\text{B.10})$$

Aussi de (B.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\dot{\bar{\omega}}_t\|_2^\delta &\leq cm_f(t) + \left\| (\dot{y}_p)_t \right\|_2^\delta \\ &\leq cm_f(t) + c \left[\left\| \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2^\delta + c \right], \quad (\text{ceci en utilisant (B.2)}) \\ &\leq cm_f(t) + c[m_f + c], \quad (\text{ceci en utilisant (B.9)}) \\ &\leq cm_f + c \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} \left[W_b(s) \bar{\omega}^T \right] &\leq c \|\bar{\omega}_t\|_2^\delta, \quad (\text{ceci en utilisant le lemme (II.1)}) \\ &\leq cm_f, \quad (\text{ceci en utilisant (B.9)}) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

La combinaison de (B.5), (B.10), (B.11) et (B.12) donne :

$$\left\| \left(\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right)_t \right\|_2^\delta \leq c + \frac{c}{\alpha} m_f(t) + c\alpha^{n^*} \left\| \left(\tilde{\theta}^T \phi \right)_t \right\|_2^\delta + \left(\frac{c}{\alpha} + c\alpha^{n^*} \right) \left\| \left(\dot{\tilde{\theta}} m_f \right)_t \right\|_2^\delta \quad (\text{B.13})$$

En combinant (B.4) et (B.13) nous obtenons :

$$m_f(t) \leq c + \frac{c}{\alpha} m_f(t) + c\alpha^{n^*} \left\| \left(\tilde{\theta}^T \phi \right)_t \right\|_2^\delta + \left(\frac{c}{\alpha} + c\alpha^{n^*} \right) \left\| \left(\dot{\tilde{\theta}} m_f \right)_t \right\|_2^\delta$$

Si on choisit α assez grand telle que $\frac{c}{\alpha} < 1$, alors :

$$m_f(t) \leq c + \frac{c}{\alpha} m_f(t) + c\alpha^{n^*} \left\| \left(\frac{\tilde{\theta}^T \phi}{m} m_f \right) \right\|_t^\delta + \left(\frac{c}{\alpha} + c\alpha^{n^*} \right) \left\| \left(\frac{\dot{\tilde{\theta}}}{\tilde{\theta}} m_f \right) \right\|_t^\delta \quad (\text{B.14})$$

La loi d'adaptation (2.29) garantit que $\frac{\tilde{\theta}^T \phi}{m}, \frac{\dot{\tilde{\theta}}}{\tilde{\theta}} \in L_2$ [6]. En utilisant, alors, le lemme de Gronwall [6] on peut établir que $m_f \in L_\infty$, ainsi $m \in L_\infty$ et tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés.

De l'équation (B.2) on peut écrire :

$$e_1 = \frac{W_m(s)}{c_0} \left[\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \right] \quad (\text{B.15})$$

Sachant que m est borné et en appliquant le lemme d'échange, on peut montrer que $e_1 \in L_2$. Puisque $\tilde{\theta}^T \bar{\omega} \in L_\infty$ et $W_m(s)$ est strictement propre, il s'en suit que $\dot{e}_1 \in L_\infty$ telle que $e_1(t)$ est uniformément continu. D'où, en utilisant le lemme de Barbălat [6], $e_1(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Bibliographie

- [1] I. D. Landau, *"Adaptive control : The model reference approach,"* Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.
- [2] C. E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein, *"Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the Presence of unmodeled dynamics,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 30, n° 9, pp. 881-889, 1985.
- [3] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *"Adaptive control,"* Addison-Wesley, 1989.
- [4] P. A. Ioannou and A. Datta, *"Robust adaptive control: A unified approach,"* Proceedings of the IEEE, vol. 79, n° 12, pp 1736-1768, December 1991.
- [5] G. Feng, *"A robust approach to adaptive control algorithms,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 39, n° 8, pp. 1738-1742, August 1994.
- [6] P. A. Ioannou and J. Sun, *"Robust adaptive control,"* Prentice-Hall, 1996
- [7] I. Bar-Kana, *"Absolute stability and robust discrete adaptive control of multivariable systems,"* Contr. And Dynamic Systems, vol. 31, Part 1, pp. 157-183, 1989.
- [8] S. Boyd and S. S. Sastry, *"Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control,"* Automatica, vol. 22, n°6, pp. 629-639, 1986.
- [9] R. Bakker and A. M. Annaswamy, *"Stability and robustness properties of a simple adaptive controller,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 41, n° 9, pp. 1352-1358, 1996.
- [10] K. Tsakalis and P. Ioannou, *"Adaptive control of linear time varying plants,"* Automatica, vol. 23, n°4, pp. 459-468, 1987.
- [11] I. Barr-Kana and H. Kaufman, *"Robust simplified adaptive control for a class of multivariable continuous time systems,"* Proceedings of The 24th Conference On Decision and Control, Lauderdal, pp. 141-146, 1985.
- [12] B. E. Ydstie, *"Transient performance and robustness of direct adaptive control,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, n° 8, pp. 1091-1105, 1992.
- [13] J. Sun, *"A modified model reference adaptive control scheme for improved transient performance,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 38, n°8, pp. 1255-1259, 1993.

- [14] Romeo Ortega, "On Morse's new adaptive controller: Parameter convergence and transient performance," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, n° 8, pp. 1191-1202, 1993.
- [15] A. Datta, "On the transient behaviour in discrete-time model reference adaptive control: Analysis and possible improvement," *Automatica*, vol. 30, n°3, pp. 527-531, 1994.
- [16] I. N. M. Papadakis and S. C. A. Thomopoulos, "Improved performance model reference adaptive control with parameter mismatch compensation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, n° 2, pp. 224-228, February 1996.
- [17] K. Sobel, H. Kaufman and L. Mabijs, "Implicit adaptive control for a class of MIMO systems," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 18, pp. 576-590, 1982.
- [18] J. R. Broussard and S. J. O'Brien, "Feedforward control to track the output of a forced model," *Proceedings of the 17th Conference on Decision and Control*, pp. 1149-1155, 1979.
- [19] I. Barr-Kana, "Adaptive control — A simplified approach," in C. Leondes (Ed.), "Control and Dynamic Systems — Advances in Theory and Applications," Academic Press, vol. XXXI, pp. 187-236, 1987.
- [20] I. Barr-Kana, H. Kaufman, "Global stability and performance of a simplified adaptive algorithm," *Int. J. Control*, vol. 42, n° 6, pp. 1491-1505, 1985.
- [21] G. W. Neat, H. Kaufman, R. Steinworth, "Comparison and extension of direct model reference adaptive control procedure," *Int. J. Contr.*, vol. 55, n°4, pp. 945-967, 1992.
- [22] H. Kaufman, G. W. Neat, "Asymptotically stable Multi-input Multi-output direct model reference adaptive controller for processes not necessarily satisfying a positive real constraint," *Int. J. Contr.*, vol. 58, n°5, 1011-1031, 1993.
- [23] I. Barr-Kana, "Positive realness in multivariable stationary linear systems," *J. of the Franklin Institute*, vol. 238, n° 4, pp. 403-417, 1991.
- [24] B. R. Barmish, C.V. Hollot, F. J. Kraus and R. Tempo, "Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, n° 6, pp. 707-714, 1992.
- [25] B. Bandyopadhyay, O. Ismail and R. Gorez, "Routh-Pade approximation for interval systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, n° 12, pp. 2454-2456, 1994.
- [26] B. Bandyopadhyay, A. Upadhye and O. Ismail, " $\gamma - \delta$ Routh approximation for interval systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, n° 2, pp. 273-278, 1998.

- [27] S. J. Xu, A. Rachid and M. Darouach, "*Robustness analysis of interval matrices based on Karitonov's theorem*," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 43, n° 2, pp. 273-278, 1998.
- [28] H. Kaufman, R. J. Roy and X. Xu, "*Model reference adaptive control of Drug infusion rate*," Automatica, vol. 20, pp. 205-210, 1984.
- [29] H. Kaufman, C Gulberson, C. Ultiana, "*Model reference and optimal design of digital drives for computerized numerical control machine tools*," Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control, Lauderdal, pp. 1701-1702, 1985.
- [30] I. Bar-Kana, "*Comments on a paper by Kidd*," Int. J. Contr., vol. 48, n° 1, pp. 1011-1023, 1988.
- [31] I. Bar-Kana and A. Guez, "*Simple adaptive control for a class of non-linear systems with application to robotics*," Int. J. Contr., vol. 52, n° 1, pp. 77-99, 1990.
- [32] A. Isidori, "*Nonlinear control systems*," Third edition, Springer-Verlag, 1995.
- [33] W. F. Ramirez, "*Process control and identification*," Academic Press, Harcourt Brace & Company, California, 1994.
- [34] M. Kurstic, I. Kannelakopoulos and P. Kokotovic, "*Nonlinear and adaptive control design*," John Willey & Sons, 1995.
- [35] I. Bar-Kana, "*Almost-passivity and simple adaptive control of non-stationary continuous linear systems*," Int. J. Systems Sci., vol. 21, n° 5, pp. 835-862, 1990.
- [36] S. M. Joshi and S. Gupta, "*On a class of marginally stable positive-real systems*," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 41, n° 1, pp. 152-155, 1996.
- [37] P. Borne, G. Dauphin, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, "*Modelisation et identification de processus*," Tome 1, Editions Technip, 1992.
- [38] I. Barr-Kana and Kulick and Soffa, "*Parallel feedforward and robustness of simple adaptive control*," Drexel University, pp. 1-15, 1996.
- [39] Z. Iwai and I. Mizumoto, "*Robust and Simple Adaptive Control Systems*," Int. J. of Contr., vol. 55, n°6, pp1453-1470, 1992.
- [40] Z. Iwai and I. Mizumoto, "*Realization of simple adaptive control by using a parallel feedforward compensator*," Int. J. of Contr., vol. 59, n° 6, pp.1543-1565, 1994.
- [41] I. Mizumoto, M. Deng and Z. Iwai, "*A parallel feedforward compensator for MIMO plants virtually realizing an almost strictly positive real plant*," 13th IFAC Triennial World Congress, San Fransisco, USA, pp. 355-360, 1996.

- [42] I. Mizumoto, Z. Iwai, "*Adaptive model output following control for plants with unmodeled dynamics*," Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, pp. 1177-1182, 1994.
- [43] I. Mizumoto, Z. Iwai, "*Simplified model output following control for plants with unmodeled dynamics*," Int. J. of Contr., vol. 64, n° 1, pp. 61-80, 1994.
- [44] I. Mizumoto, T. Egashira, and Z. Iwai, "*Simple adaptive control for MIMO plants with unmodeled dynamics and its application to process with higher order lag elements*," ADCHEM, IFAC, pp. 409-414, 1997.
- [45] K. S. Narendra, A. M. Annaswamy, "*A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation*," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, n°2, pp.134-145, 1987.
- [46] J. Bernussou, "*Commande robuste, développements et applications*," Hermes, Paris, 1996.
- [47] K. S. Tsakalis, "*Robustness of model reference adaptive controllers: An Input-Output approach*," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, n° 5, 1992.
- [48] G. C. Goodwin and D. Q. Mayne, "*A parameter estimation perspective of continuous model reference adaptive control*," Automatica, vol. 23, n° 1, pp. 57-70, 1987.
- [49] J. Schoukens, R. Pintelon and V. Hamme, "*Identification of linear dynamic system using piecewise excitations: Use, misuse and alternatives*," Automatica, vol. 30, n°7, pp. 1153-1169, 1994.
- [50] R. Pintelon J. Schoukens, "*Identification of continuous-time systems using arbitrary signals*," Automatica, vol. 33, n° 5, pp 991-994, 1997.
- [51] Z. Iwai, I. Mizumoto, H. Douzono, "*Decentralized simple adaptive control*," 12th World Congress, IFAC, Sydney, vol. 3, pp. 9-16, 1993.
- [52] F. Djahli, H. Haddar et M. Abdelaziz, "*Procédure de compensation des systèmes pour l'application du MRAC*," 1st National Workshop on Signal and Image Processing, NWSIP'98, Sidi Bel Abbes, pp. 108-111, 1998.
- [53] U. Nurges, "*On discrete Kharitonov's theorem and robust controller design*," CESA'98, vol. 1, pp. 495-499, 1998.
- [54] Y. Rolain, J. Schoukens, R. Pintelon, "*Order estimation for linear time-invariant systems using frequency domain identification methods*," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 42, n° 10, pp 1408-1417, 1997.
- [55] Math Works Inc., "*MATLAB Optimization Toolbox*," User's Guide, version 5, 1997.

- [56] W. T. Vatterling, S. A. Teukolsky, W. H. Press and B. P. Flannery, *"Numerical recipes: Example book,"* Combridge University Press, 1988.
- [57] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolesky and W. T. Vetterling, *"Numerical recipes: The art of scientific computing,"* Combridge University Press, 1988.
- [58] S. Baram, M. Hassul, *"Control system design using MATLAB,"* Prentice-Hall, Englwood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [59] E. Zeheb, *"A sufficient condition for output feedback stabilization of uncertain systems,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 31, n° 11, pp. 1055-1057, 1986.
- [60] M. K. Masten and H. E. Cohen, *"An advanced showcase of adaptive controller designs,"* Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, vol. 4, pp. 424-429, 1990.
- [61] P. Ioannou and G. Tao, *"Frequency domain conditions for strictly positive real functions,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, n° 1, pp 53-54, 1987.
- [62] I. J. Nagrath and M. gopal, *"Control systems engineering"* Second Edition, John willey & Sons, New York, 1982.
- [63] W. SUN, P. P. Khargonekar and D. Shim, *"Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 39, n° 10, pp. 2034-2046, 1994.
- [64] D. E. Miller and E. J. Davison, *"An adaptive controller which provides an arbitrary transient and steady state response,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 36, n° 1, pp. 68-81, 1991.
- [65] L. Hsu and R. R. Costa, *"Bursting phenomena in continuous-time adaptive systems with a σ -modification,"* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC 32, n° 1, pp. 84-86, January 1987.
- [66] I. Bar-Kana, *"Reduction of bursting phenomena without external excitation,"* Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems, Princeton New Jersey, 1990.
- [67] MATLAB For Windows, User's Guide, MathWorks Inc., 1991.