

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue d'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Modélisation Stochastique et Statistique

**Analyse d'un système M/M/1 avec rappels,
serveur non fiable et clients impatientes**

Présenté par :

- M^{elle} BELMADI Kenza
- M^{elle} DIOUANE Amel Aicha

Devant le jury composé de :

Président :	M ^r TAMI Omar	MAA USDB 1
Examineur :	M ^r ELMOSSAOUI Hichem	MAA USDB 1
Encadreur :	M ^{me} OUKID Nadia	MCA USDB 1

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Avant tout, on remercie le bon Dieu qui a illuminé notre chemin et qui nous a armés le courage et de bonne volonté pour réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer nos plus profonds remerciements à nos chers parents et toute la famille pour leur amour, leur aide et leur présence au quotidien.

Nous tenons à remercier vivement M^{me} OUKID Nadia, pour nous avoir proposé le sujet de ce mémoire, pour nous avoir honoré par son encadrement, pour sa disponibilité, ses orientations, ses conseils, ses encouragements tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous tenus également à exprimer notre gratitude au président du jury M^r TAMI Omar pour nous avoir consacré de son temps en nous faisons l'honneur d'accepter de présider le jury.

Nous remercions très chaleureusement M^r ELMOSSAOUI Hichem d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Dédicaces

Avec ma gratitude et tout mon amour je dédie ce modeste travail :

À l'être la plus chère de ma vie ma mère, tu trouves toujours les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient à aller de l'avant, quoi que je fasse ou je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

À mon très cher père, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé.

J'espère que par ce modeste travail, je vous rends un peu de ce sentiment de fierté que j'éprouve d'être votre fille. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À ma grande mère de m'encourager et de prier pour moi.

À mes chères belles sœurs : Amira, Ichrek que j'aime beaucoup.

À tous les membres de ma famille, et tous mes amis(es).

Pour tous les instants passés, les fous-rires et le désespoir, la colère et la joie qui ont accompagné ce travail, et même pour sa simple présence,

je dédie ce mémoire à mon binôme Amel.

Belmadi Kenza

Dédicaces

Avec ma gratitude et tout mon amour je dédie ce modeste travail :

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien morale et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à mon cher père.

À mon frère Aimene et ma petite sœur Farah qui me sont très chères.

À toute ma famille.

À toute mes proches.

À Kenza, chère amie avant d'être binôme.

Diouane Amel Aicha

Résumé

Dans ce Mémoire, nous traitons le système d'attente M/M/1 avec rappels, serveur non fiable et clients impatients, nous avons utilisé la méthode de fonction génératrice pour étudier ce système, nous avons obtenus la fonction génératrice du nombre moyen de clients dans le système et quelques mesures de performance, importantes et intéressantes du système. Des exemples numériques sont donnés pour illustrer les résultats théoriques obtenus.

Abstract

In this master thesis, we treat the M/M/1 retail queueing with interruptions of service and impatient clients, we used generating function method to study this system, we have obtained the generating function of the number of customers in the system and some important and interesting performance measures of the system. Numerical illustrations are provided.

ملخص

في هذه المذكرة نتعامل مع نظام قائمة الانتظار $M/M/1$ ذات نداء متكرر، خادم غير الموثوق به وزبائن غير صبورين، استخدمنا طريقة الدالة المولدة لدراسة هذا النظام، حصلنا على الدالة المولدة لمتوسط عدد الزبائن في النظام، وبعض مقاييس أداء النظام المهمة والمثيرة للاهتمام. يتم إعطاء أمثلة عددية لتوضيح النتائج النظرية التي تم الحصول عليها.

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Outils préliminaires

1.1	Introduction.....	4
1.2	Notions de probabilité	4
1.2.1	Ensemble fondamental et évènement d'une expérience aléatoire :	4
1.2.2	Probabilité	4
1.3	Variables aléatoires réelles discrètes	5
1.4	Caractéristiques des variables aléatoires discrètes	5
1.4.1	L'espérance mathématique.....	5
1.4.2	Variance.....	5
1.4.3	Fonction génératrice	5
1.5	Processus stochastique	6
1.5.1	Processus de comptage « poisson »	6
1.5.2	Loi « exponentiel »	7
1.6	Notions de fiabilité	8
1.6.1	Généralités	8
1.6.2	Caractéristiques des fiabilités	9
1.7	Quelques lois des probabilités usuelles en fiabilité des systèmes	12
1.7.1	La loi exponentielle.....	12
1.7.2	Loi de Weibull	14
1.7.3	La loi normale	15
1.7.4	La loi log-normale	16
1.7.5	La loi Gamma	17
1.8	Conclusion	19
Systemes de files d'attente classiques		20
2.1	Introduction.....	20
2.2	Description d'un phénomène d'attente classique	20
2.3	Analyse mathématique de phénomène d'attente	21
2.3.1	Processus de naissance et de mort	21

2.4	Une modélisation simple de la file d'attente	23
2.4.1	Structure de file d'attente.....	23
2.4.2	Notation de Kendall (1953)	24
2.4.3	Mesures de performance.....	24
2.5	Types de Modèles	25
2.5.1	Modèles Markoviens	25
2.5.2	Modèles non markoviens	25
2.6	Quelques Modèles de files d'attente classiques.....	26
2.6.1	La File M/M/1.....	26
2.6.2	Modèle d'attente M/G/1.....	29
2.7	Conclusion	32
Systemes d'attente avec rappels		33
3.1	Introduction.....	33
3.2	Description du Modèle	33
3.3	Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite.....	35
3.4	Quelques exemples modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels.....	36
3.5	Modèles markoviens.....	37
3.5.1	Modèle M/M /1 avec rappels	37
3.5.2	Modèle M/M/2 avec rappels.....	39
3.6	Modèle M/G/1 avec rappels	40
3.6.1	Description du modèle	40
3.6.2	Chaîne de Markov induite	41
3.6.3	Distribution stationnaire de l'état du système	44
3.6.4	Les mesures de performance.....	47
3.7	Autres Modèles	48
3.7.1	Modèles d'attente avec rappels et pannes.....	48
3.7.2	Modèles d'attente avec des clients impatientes	51
3.8	Conclusion	53
Modèle d'attente avec rappels, serveur non fiable et clients impatientes		54
4.1	Introduction.....	54
4.2	Description du modèle	54
4.3	Distribution stationnaire de l'état du système	56
4.4	Mesures de performance	63
4.5	Indice de fiabilité	65
4.6	Illustration numérique	66
4.6.1	L'effet du taux d'arrivée λ sur le modèle :	66
4.6.2	L'effet du taux d'impatience γ sur le modèle :	69

4.6.3	L'effet du taux de réparation β sur le modèle :	71
4.6.4	L'effet de variations de α et γ sur le nombre moyen de clients en orbite :.....	74
4.7	Conclusion	75
Conclusion générale et perspectives		76
Annexes		77
Bibliographie		85

Liste des figures

<i>Figure 1.1</i> – Évolution temporelle de l'état d'un système.	8
<i>Figure 1.2</i> – Représentation graphique des fonctions de défaillance $F(t)$ et de fiabilité $R(t)$	10
<i>Figure 1.3</i> – La courbe en baignoire.....	11
<i>Figure 1.4</i> – Densité de probabilité de la loi exponentielle.	12
<i>Figure 1.5</i> – Propriété sans mémoire de la loi exponentielle.	13
<i>Figure 1.6</i> – Densité de probabilité de la loi de Weibull.....	14
<i>Figure 1.7</i> – Densité de probabilité de la loi normale.	16
<i>Figure 1.8</i> – Densité de probabilité de la loi log-Normale.....	17
<i>Figure 1.9</i> – Densité de probabilité de la loi Gamma.....	18
<i>Figure 2.1</i> – Représentation schématique de file d'attente simple.	21
<i>Figure 2.2</i> – Graphe de transition d'un processus de naissance et de mort.	22
<i>Figure 2.3</i> – Évaluation d'état dans la file M/M/1.....	27
<i>Figure 3.1</i> – Schéma descriptif d'une file d'attente avec rappel.	34
<i>Figure 3.2</i> – Graphe des taux de transition du système M/M/1 avec rappels.....	38
<i>Figure 4.1</i> – Modèle de files d'attente avec rappels, à serveur non fiable et clients impatients.	55
<i>Figure 4.2</i> – Graphe de transition de modèle avec rappels, serveur non fiable et clients impatients.	56
<i>Figure 4.3</i> – Effet de λ sur les probabilités de l'état du serveur.	67
<i>Figure 4.4</i> – Effet de λ sur le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite.	67
<i>Figure 4.5</i> – Effet de λ sur le temps moyen de séjour des clients dans le système et dans l'orbite.	68
<i>Figure 4.6</i> – Effet de λ sur le nombre moyen de rappels par client.	68
<i>Figure 4.7</i> – Effet de γ sur les probabilités de l'état du serveur.	69
<i>Figure 4.8</i> – Effet de γ sur le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite.	70
<i>Figure 4.9</i> – Effet de γ sur le temps moyen de séjour des clients dans le système et dans l'orbite.	70
<i>Figure 4.10</i> – Effet de γ sur le nombre moyen de rappels par client.	71
<i>Figure 4.11</i> – Effet de β sur les probabilités de l'état du serveur.	72
<i>Figure 4.12</i> – Effet de β sur le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite.	72
<i>Figure 4.13</i> – Effet de β sur le temps moyen de séjour des clients dans le système et dans l'orbite.	73
<i>Figure 4.14</i> – Effet de β sur le nombre moyen de rappels par client.	73
<i>Figure 4.15</i> – Effet de γ et α sur le nombre moyen de clients dans l'orbite.	74

Liste des tableaux

Table 4.1 – Variation des mesures de performance dans le système en fonction de λ	66
Table 4.2 – Variation des mesures de performance dans le système en fonction de γ	69
Table 4.3 – Variation des mesures de performance dans le système en fonction de β	71
Table 4.4 – Variation du nombre moyen de clients dans l’orbite en fonction de γ et α	74

Introduction générale

Les files d'attente jouent un rôle important dans la modélisation des problèmes de la vie réelle. Elles étaient intégrées dans la modélisation de divers domaines d'activité à l'évaluation des performances des systèmes informatiques, aux réseaux de communication et aux secteurs de la santé et sciences médicale etc. grâce à tous ces développements, la théorie des files d'attente est aujourd'hui largement utilisée et ses applications sont multiples.

Ce domaine de recherche né, en 1917, des travaux de l'ingénieur Danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague entre 1909 et 1920, étudie notamment les processus d'arrivés dans une file, les différentes priorités de chaque nouvel arrivant, ainsi que la modélisation statistique des temps d'exécution. C'est grâce aux apports des mathématiciens Khintchine, Palm, Kendall, Pollaczek et Kolmogorov que ce domaine de recherche s'est vraiment développé.

La théorie analytique des systèmes d'attente a une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, plusieurs formules analytiques (complexes) sont difficilement exploitables en pratique. C'est pour cela que, lors de l'étude des systèmes concrets on est souvent amené à remplacer le système réel (généralement complexe), par un système plus simple et pour lequel il existe des résultats analytiques exploitables, ce qui a poussé les auteurs à tenter de développer des méthodes approximatives d'analyse des phénomènes d'attente.

Cette théorie classique s'est très vite montrée inefficace face à des systèmes réels de plus en plus complexes. Dès la fin des années 1940, des chercheurs tels que Kosten et Wilkinson [33] ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente qui ne permettait pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes

téléphoniques où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication [21].

Ce phénomène de répétition de demandes du service a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit avec rappels. Les systèmes d'attente avec rappels peuvent être appliqués pour résoudre les problèmes pratiques, tels que l'analyse du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques, l'analyse du temps d'attente pour accéder à la mémoire sur les disques magnétiques. La définition du protocole de rappels est en effet un sujet de controverse où chaque client bloqué génère une source de demande répétées de service indépendamment du reste de clients dans l'orbite, cette discipline est appelée politique de rappels.

Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèse de Falin en 1990 [15], Aissani en 1994 [3], Kulkarni et Liang en 1997 [18], Templeton en 1999 [30] et dans les monographies de Falin et Templeton en 1997 [29], et Artalejo et Gòmez en 2008 [5].

Habituellement, lors de l'étude des problèmes de la théorie des files d'attente classique ou celle avec rappels, on supposait que le service s'effectue d'une manière continue et bien déterminée (sans interruption). Cependant en pratique, on rencontre des cas où les serveurs sont sujets à des pannes aléatoires (serveurs non fiables). La théorie de fiabilité est une branche de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique. C'est la discipline scientifique qui étudie les méthodes générales et les procédés à suivre lors de la réception, le transport, le stockage et /ou l'exploitation du système pour garantir une efficacité maximale. L'objet principal des études de la fiabilité est de choisir des méthodes de décision, techniques de fabrication, ... qui assurent l'incidence la plus faible de l'intervention humaine sur la fiabilité intrinsèque du système. Les modèles de fiabilité servent à comprendre comment, pourquoi et quand un système tombe en panne.

Les systèmes de file d'attente avec rappels, serveurs non fiables ont été étudiés par Aissani [3] en 1988 et par Kulkarni et Choi [11] en 1990,

Dans certains systèmes d'attente, on est amené à imposer le phénomène de l'impatience des clients qui a un impact très négatif sur ces systèmes.

Dans divers domaines, les clients impatients, découragés par la longueur de la file, sont devenus le but de plusieurs études. Ces systèmes qui contiennent des clients

impatiens ont fait des pertes considérables à l'économie de plusieurs firmes. Cette impatience est due à plusieurs facteurs, soit par insuffisance de nombre de serveurs, soit par une qualité de service médiocre, ou encore une mauvaise gestion du système. Ces systèmes ont été étudiés par Artalejo [6] et Martin et Artalejo [20] et dans [9].

Dans ce mémoire, nous considérons une étude analytique du modèle de file d'attente M/M/1 avec rappels, serveur non fiable et clients impatients. Nous obtenons la fonction génératrice du nombre moyen de clients dans le système, et celle du nombre moyen de clients en orbite, ainsi que plusieurs mesures de performance du modèle étudié. Enfin, nous avons développé un programme dans le logiciel R pour illustrer les résultats obtenus et étudier l'impact des différents paramètres sur les mesures de performance de notre modèle.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons les outils préliminaires que nous allons utiliser tout au long de ce travail. Nous présentons les notions de probabilité et les fonctions génératrices, qui joueront un rôle très important par la suite. Nous présentons aussi les processus stochastiques et quelques notions de fiabilité qui nous permettront de décrire le comportement de notre modèle.

Le deuxième chapitre est un rappel des résultats sur les systèmes de file d'attente classiques, qui permettra d'introduire les chapitres suivants.

Le troisième chapitre comprend une étude des systèmes de file d'attente avec rappels, une attention particulière est consacrée aux modèles M/M1 et M/G/1.

Notre contribution fait objet du quatrième chapitre. Nous présentons une analyse mathématique d'un système de file d'attente M/M/1 avec rappels, serveur non fiable et clients impatients. Les résultats obtenus sont soutenus par des illustrations numériques.

Le travail s'achève par une conclusion mettant l'accent sur les perspectives et les directions de recherche induites par les résultats obtenus et une bibliographie.

Dans l'annexe, nous présentons les programmes développés dans le logiciel R permettant de réaliser les illustrations numériques fournis dans cette étude.

Chapitre 1

Outils préliminaires

1.1 Introduction

Les systèmes de files d'attente décrivent un aspect de la vie moderne que nous rencontrons à chaque étape de nos activités quotidiennes. Qu'il se produise devant un guichet d'une banque ou en accédant à l'internet, le phénomène de base des files d'attente surgit chaque fois qu'un serveur (guichet, routeur, ...) est consulté par un grand nombre de tâches ou clients.

Dans ce chapitre, nous présentons les outils préliminaires que nous allons utiliser tout au long de ce travail. Nous présentons tout d'abord, (probabilité et espérance). Nous présentons aussi (les fonctions génératrices), qui joueront un rôle très important par la suite. Nous évoquons enfin les processus stochastiques et quelques notions de fiabilité qui nous permettront de décrire le comportement de notre modèle.

1.2 Notions de probabilité

1.2.1 Ensemble fondamental et événement d'une expérience aléatoire :

L'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience, cet ensemble est en général noté Ω .

Un événement d'une expérience aléatoire est une combinaison de résultats possibles.

1.2.2 Probabilité

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et soit \mathcal{A} l'ensemble des parties de Ω . Une probabilité \mathbb{P} sur l'espace (Ω, \mathcal{A}) est une application de \mathcal{A} dans $[0,1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une famille d'événements de \mathcal{A} 2 à 2 incompatibles alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité.

1.3 Variables aléatoires réelles discrètes

Une v.a.r X à valeurs dans un ensemble \mathcal{X} fini ou dénombrable est appelée v.a.r discrète. Dans ce cas la loi de X est déterminée par l'ensemble de probabilités :

$$\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \mathcal{X}. \quad (1.1)$$

Ainsi, pour toute partie A de \mathcal{X} , on a alors :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_X(\mathcal{X}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

1.4 Caractéristiques des variables aléatoires discrètes

1.4.1 L'espérance mathématique

Soit X est une variable aléatoire discrète prend une infinité dénombrable de valeurs x_1, x_2, x_3, \dots , avec les probabilités p_1, p_2, p_3, \dots , où chacun des p_i correspond à une probabilité associée à un évènement, l'espérance de X est définie comme :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \quad (1.2)$$

1.4.2 Variance

La variance d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique.

Soit X est une variable aléatoire dont l'espérance $E(X)$ existe, on appelle variance de X le réel :

$$V(X) = E([E(X) - X]^2) = E(X^2) - E(X)^2. \quad (1.3)$$

1.4.3 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On appelle fonction génératrice de X la fonction $G_X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$G_X(z) = E(z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p(\{X = k\}) \quad , \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Proposition 1 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} dont la fonction génératrice $G_X(z)$ admet un rayon de convergence strictement supérieur à 1 alors on a :

$$E(X) = G'_X(1), \quad (1.5)$$

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) + G'_X(1)^2. \quad (1.6)$$

Où

$$G'_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(\{X = k\}).$$

$$G''_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p(\{X = k\}).$$

1.5 Processus stochastique

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $X_t, t \in T$ ou chaque variable aléatoire X_t est indexé par le paramètre $t \in T$, si T est un ensemble de \mathbb{R}_+ , alors T signifie le temps.

Généralement X_t représente l'état de processus stochastique au temps t .

- Si T est dénombrable i.e. $T \in \mathbb{N}$ alors nous disons que $X_t, t \in T$ est un processus à temps discret.
- Si T est un intervalle de $[0, +\infty[$, alors le processus stochastique est dit un processus à temps continu.

L'ensemble des valeurs de X_t est appelé l'espace d'états, qui peut également être soit discret ou continu, donc nous écrivons $(X_n)_{n \geq 0}$ pour le processus à temps discret et $(X_t)_{t \geq 0}$ pour le processus à temps continu, on classe les processus stochastiques de la façon suivante :

- Processus à temps discret et à espace d'état discret.
- Processus à temps continu et à espace d'état discret.
- Processus à temps discret et à espace d'état continu.
- Processus à temps continu et à espace d'état continu.

1.5.1 Processus de comptage « poisson »

Un processus stochastique $[N(t); t \in \mathbb{R}^+]$ est un processus de comptage si $N(t)$ représente le nombre total d'événements qui se sont produits entre 0 et t , il doit donc satisfaire

$$- N(t) \geq 0, \text{ pour } t \in \mathbb{R},$$

- $N(t)$ a des valeurs entières uniquement,
- pour $s < t$ alors $N(s) \leq N(t)$ peu importe $\{s, t \in \mathbb{R}\}$.

On dit d'un processus de comptage qu'il a des incréments indépendants si le nombre d'évènements de toute paire d'intervalles de temps disjoints sont statistiquement indépendants, on dit d'un processus de comptage qu'il a des incréments stationnaires si le nombre d'évènements dans un intervalle de temps ne dépend que de la longueur de l'intervalle, pour tout nombre Δt suffisamment petit :

$$\begin{cases} p(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) = 1 - \lambda\Delta t, \\ p(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda\Delta t, \\ p(N(t + \Delta t) - N(t) > 1) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Nous notons $N(t)$ le nombre d'arrivées de clients survenues dans l'intervalle de temps $[0; t]$, pour $t \geq 0$. La quantité $N(a + t) - N(a)$ représente alors le nombre d'arrivées enregistrées entre les instants a et $a + t$,

Le processus d'arrivée peut bien sûr présenter des caractéristiques variées en fonction de la situation modélisée. Mais il est fréquent dans la pratique, que ce processus soit un processus de Poisson, ce qui signifie qu'il existe un paramètre $\lambda > 0$ (appelé taux du processus) tel que :

- Le nombre d'arrivées dans tout intervalle $[a; a + t]$ de longueur t suit une loi de Poisson de moyenne λt , c'est-à-dire : pour $a; t \geq 0$ et $n = 0, 1, 2, \dots$

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (1.8)$$

- Si $[a; b]$ et $[c; d]$ sont des intervalles de temps disjoints, alors le nombre d'arrivées dans $[a; b]$ est indépendant du nombre d'arrivées dans $[c; d]$.
- $N(0) = 0$.

1.5.2 Loi « exponentielle »

La distribution exponentielle est une loi continue dont les fonctions de densité et de répartition sont :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad (1.9)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad (1.10)$$

En particulier, si x suit une loi exponentielle et que $N(t)$ est un processus de Poisson, alors :

$$p(X \geq t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} = p(N(t) = 0). \quad (1.11)$$

On en conclut donc que les temps entre les arrivées suivent des lois exponentielles indépendantes de moyenne $\frac{1}{\lambda}$.

1.6 Notions de fiabilité

Depuis longtemps, la fiabilité d'un système représente un enjeu économique important où des grandes entreprises ont montré un grand intérêt pour la fiabilité comme : Général motors, depuis 1940, Airbus, Airfore et laboratoires Bell téléphone, depuis 1960, Philips, Kodak, Citroën, Depuis les années 1970. [32]

1.6.1 Généralités

- **Fiabilité R (Reliability)** : la fiabilité caractérise l'aptitude d'une entité (peut-être un élément, un système, un réseau, ...) à accomplir une fonction requise pendant un intervalle de temps donnés, la fiabilité est donc la probabilité qu'un élément (un système) soit succès pendant un intervalle de temps.
- **Défaillance (Failure)** : une défaillance est le passage d'un état de fonctionnement à un état de non fonctionnement (panne), on peut voir ça dans (Figure 3.1). Ces défaillances peuvent être de type progressive, soudaine.

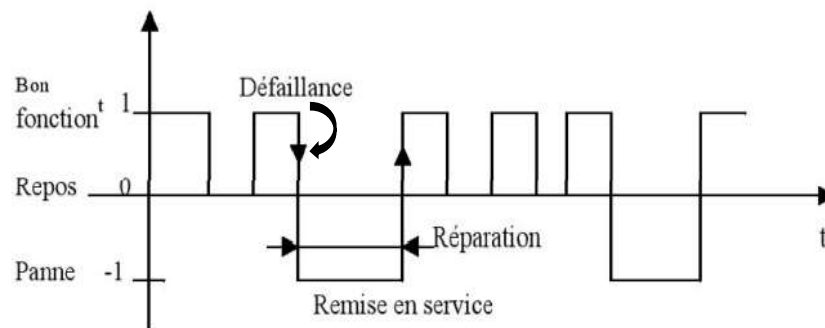


Figure 1.1 – Évolution temporelle de l'état d'un système.

- **Disponibilité (Availability)** : la disponibilité est une notion voisine de la fiabilité, C'est l'aptitude du système à être en état de bon fonctionnement lorsqu'il est sollicité

dans des conditions données, pendant un intervalle (instant) donné. Elle est définie par la probabilité $A(t)$ que le système S soit en bon état à l'instant t , dans des conditions données.

La probabilité associée $A(t)$ à l'instant t s'exprime par :

$$A(t) = p[S \text{ soit en bon état à l'instant } t].$$

- **Maintenabilité (Mantenability) :** la maintenabilité est la mesure de l'aptitude d'un système à être réparé (maintenu) ou remis dans des conditions spécifiées lorsque la maintenance de celui-ci est réalisée par des agents ayant les niveaux spécifiés de compétence, utilisant les procédures et les ressources prescrites, à tous les niveaux prescrits de maintenance et de réparation. Elle est caractérisée par la probabilité $M(t)$ que la maintenance d'un système S accompli dans des conditions données avec des procédures prescrites, soit achevée au temps t , sachant que S est défaillante au temps $t=0$.

$$M(t) = p[S \text{ est achevée au temps } t] = 1 - p[S \text{ non réparée sur } [0, t].$$

1.6.2 Caractéristiques des fiabilités

Soit la variable aléatoire T représente la durée de vie d'un système (la durée de bon fonctionnement jusqu'à sa première panne). On note $f(t)$ sa densité et $F(t)$ sa fonction de répartition (distribution). Une variable aléatoire est donc une application qui associe à chaque événement d'une expérience aléatoire un nombre réel, elle peut être :

- **Continue :** Intervalle de temps entre deux défaillances consécutives.
- **Discrète :** Nombre de défaillance sur un intervalle de temps.

Fonction de défaillance :

On appelle fonction de défaillance, la fonction « F » définie pour tout $t \geq 0$ par :

$$F(t) = p(T \leq t) = \int_0^t f(t)dt, \text{ pour } t \geq 0.$$

$F(t)$ représente la probabilité que le système soit défaillance avant l'instant t .

Fonction de fiabilité

On appelle fonction de fiabilité, la fonction « R », telle que R est l'initiale du mot fiabilité en anglais « Reliability ». Mathématiquement est définie par :

$$R(t) = p(T > t) = 1 - F(t), \text{ pour } t \geq 0.$$

R(t) représente la probabilité que le système soit non défaillance pendant $[0, t]$.

Remarques :

- Les deux notions R(t) et A(t) sont liées par l'inégalité $A(t) \geq R(t)$.
- R(t) et une fonction continue et décroissante, leurs valeurs sont comprises entre 0 et 1.
- R(t) est la fonction complémentaire de F(t) (Figure 1.2).

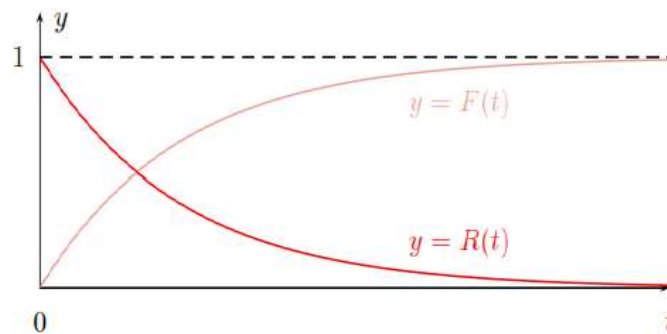


Figure 1.2 – Représentation graphique des fonctions de défaillance F(t) et de fiabilité R(t).

Taux de défaillance

Le taux de défaillance (panne) est une expression relative à la fiabilité d'un système non réparable. Il est défini par :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p(T \leq t + \Delta t / T > t), \text{ pour } t \geq 0.$$

$\lambda(t)$ représente la probabilité d'avoir une défaillance entre $[t, t + dt]$, sachant qu'il n'y a pas un défaillance entre $[0, t]$.

Il est facile d'établir les liens entre le taux de défaillance et la fiabilité :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p\left(T \leq t + \frac{\Delta t}{T} > t\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{p(T \leq t + \Delta t \cap T > t)}{p(T > t)} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \frac{p(t < T \leq t + \Delta t)}{p(T > t)} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}
\end{aligned}$$

Alors $\lambda(t)$ devient :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)}$$

L'évolution de défaillance d'un système pendant toute sa durée de vie est indiquée par une courbe à la forme donnée par (Figure 1.3), Elle est appelée « courbe en baignoire ».

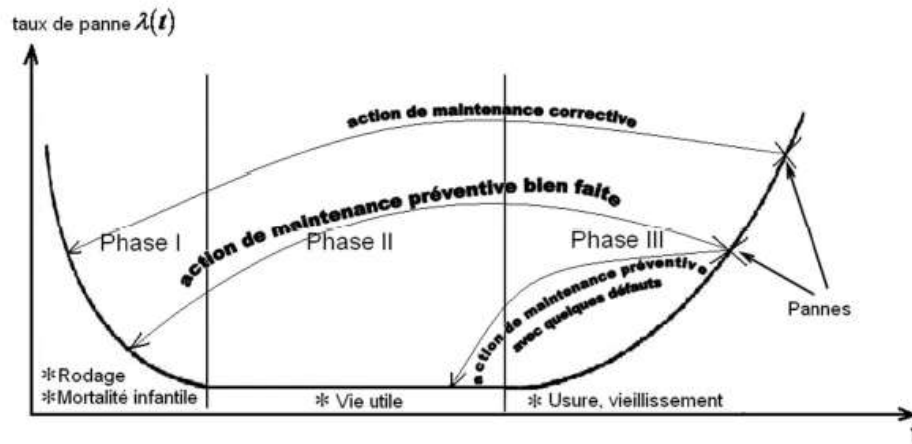


Figure 1.3 – La courbe en baignoire.

Elle est donc composée de trois phases :

- La première phase est la période de jeunesse (mortalité infantile, de pannes précoces), se caractérise par un taux de défaillance décroissant. Les pannes de jeunesse sont dues à des défauts de fabrication ou de conception.
- La deuxième phase définie par la période de maturité (période de vie utiles, de

défaillance aléatoire) généralement très longue, se caractérise par un taux de panne faible et approximativement constant. Les pannes paraissent dues au hasard.

– La troisième phase est la période d'assurer (vieillesse), se caractérise par un Taux de défaillance croissant, les pannes de vieillesse sont dues à l'usure des matériels (pannes mécaniques, corrosion, ...).

MTTF (mean time to first failure)

On le traduit comme étant, le temps moyen de bon fonctionnement jusqu'à la première panne, noté par M.T.T.F "Mean Time To First Faillure". C'est l'espérance mathématique de variable aléatoire T :

$$MTTF = E(t) = \int_0^{\infty} R(t)dt. \text{ avec } t \geq 0.$$

1.7 Quelques lois des probabilités usuelles en fiabilité des systèmes

Dans cette section, nous présentons quelques distributions de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse des données de survie et de fiabilité qui sont communes à plusieurs disciplines. Nous énonçons les principales caractéristiques de ces lois (densité de probabilité, fonction fiabilité et taux de défaillance) ainsi que leur application en fiabilité [10,19]

1.7.1 La loi exponentielle

C'est une loi simple, très utilisée en fiabilité dont le taux de défaillance est constant $\lambda > 0$. Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance. Cette loi a des nombreuses applications dans plusieurs domaines, elle est définie en fonction du taux de défaillance λ . [23]

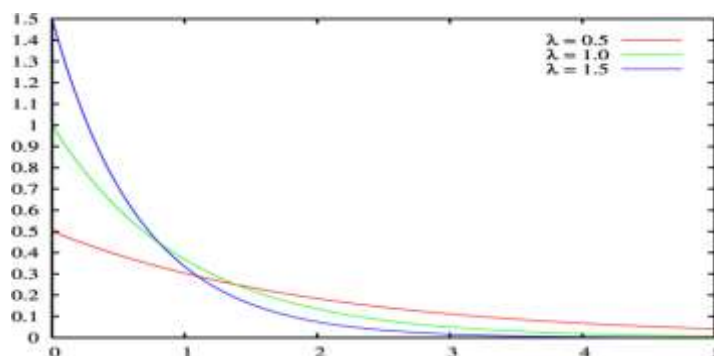


Figure 1.4 – Densité de probabilité de la loi exponentielle.

- Densité de probabilité :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \lambda > 0.$$

- **Fonction de répartition :**

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0.$$

- **Fonction de fiabilité :**

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \lambda > 0.$$

- **Taux de défaillance :**

$$\lambda(t) = \lambda = cste \quad \forall t > 0.$$

- **Le temps moyen de bon fonctionnement :**

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}.$$

Proposition 2 : une propriété importante de la distribution exponentielle est la perte de mémoire ou l'absence de mémoire. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'équation suivante :

$$P(T > s + t \mid T > t) = P(T > s) \quad \forall s > 0, t > 0.$$

Comme l'indique la figure 2, ce résultat montre que la loi conditionnelle de la durée de vie d'un dispositif qui est fonctionnée sans tomber en panne jusqu'à l'instant t est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau dispositif. Ceci signifie qu'à l'instant t , le dispositif est considéré comme neuf, de durée de vie exponentielle de paramètre λ .

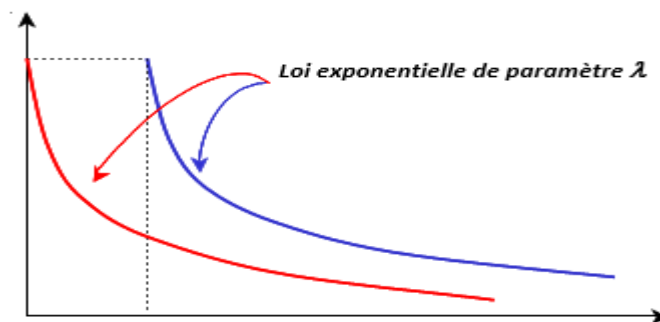


Figure 1.5 – Propriété sans mémoire de la loi exponentielle.

1.7.2 Loi de Weibull

C'est la plus populaire des lois utilisées dans plusieurs domaines (électronique, mécanique, ...). Elle permet de modéliser en particulier de nombreuses situations d'usure de matériel. Elle caractérise le comportement du système dans les trois phases de vie : période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure ou vieillissement. Dans sa forme la plus générale, la distribution de Weibull dépend des trois paramètres suivants : γ , η et β [17]

- **Le paramètre de position γ** : Il représente le décalage existant entre le début de l'observation et le début du processus que l'on observe.
- **Le paramètre d'échelle $\eta, \eta \geq 0$** : Ce paramètre nous renseigne sur l'étendue de la distribution.
- **Le paramètre de forme $\beta, \beta \geq 0$** : Il représente la vitesse du processus étudié.
 - Si $\beta < 1$: Le taux de défaillance est décroissant, ce qui correspond à la période de jeunesse.
 - Si $\beta = 1$: Le taux de défaillance est constant, ce qui correspond à la période vie utile.
 - Si $\beta > 1$: Le taux de défaillance est croissant, ce qui correspond à la période de vieillesse.

Remarque 1 : Pour $\beta > 3$, la loi de Weibull se rapproche de la loi normale.

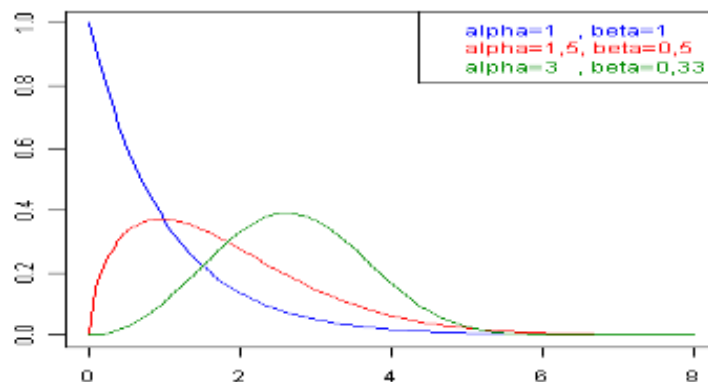


Figure 1.6 – Densité de probabilité de la loi de Weibull.

- **Densité de probabilité :**

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right] \quad t \geq \gamma.$$

- **Fonction de répartition :**

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right] \quad t \geq \gamma.$$

- **Fonction de fiabilité :**

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right] \quad t \geq \gamma.$$

- **Taux de défaillance :**

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad t > 0.$$

- **Le temps moyen de bon fonctionnement :**

$$MTTF = \gamma + \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right).$$

Où $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

1.7.3 La loi normale

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique de nombreux phénomènes. En fiabilité la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) car le taux de défaillance est toujours croissant. [22]

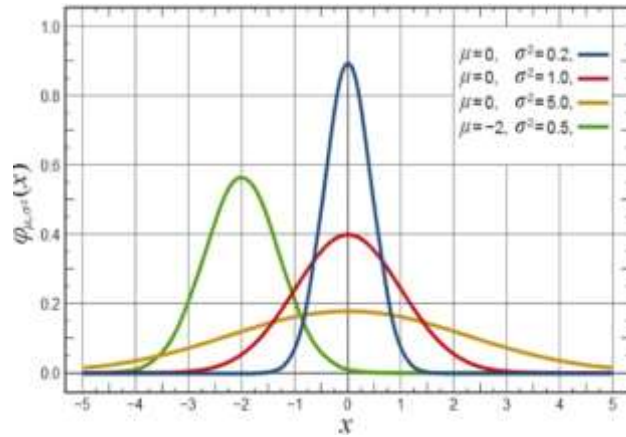


Figure 1.7 – Densité de probabilité de la loi normale.

- **Densité de probabilité :**

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < t < +\infty.$$

- **Fonction de répartition :**

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad -\infty < t < +\infty.$$

- **Fonction de fiabilité :**

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{(t - \mu)}{\sigma}\right) \quad t > 0.$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centré ($\mu = 0$) réduite ($\sigma = 1$).

- **Le temps moyen de bon fonctionnement :**

$$MTTF = \mu.$$

1.7.4 La loi log-normale

Une variable aléatoire continue et positive T est distribuée selon une loi log-normale de paramètre μ et σ^2 si $\log T$ suit une loi normale (μ, σ^2) [22,17]. Cette loi est utilisée en fiabilité pour modéliser les défaillances par (figure 1.8).

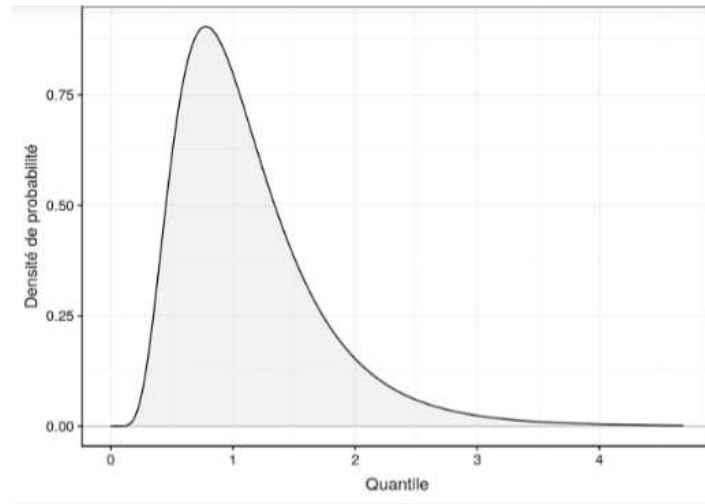


Figure 1.8 – Densité de probabilité de la loi log-Normale.

- **Densité de probabilité :**

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad t \geq 0.$$

- **Fonction de fiabilité :**

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right) \quad t \geq 0.$$

- **Taux de défaillance :**

$$\lambda(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{t \int_0^\infty \sigma\sqrt{2\pi}f(t)dt}.$$

- **Le temps moyen de bon fonctionnement :**

$$MTTF = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

1.7.5 La loi Gamma

La loi gamma est définie par un paramètre de forme $\alpha > 0$ est un paramètre d'échelle $\beta > 0$. Elle est utilisée pour modéliser le temps de défaillance d'un élément. [28]

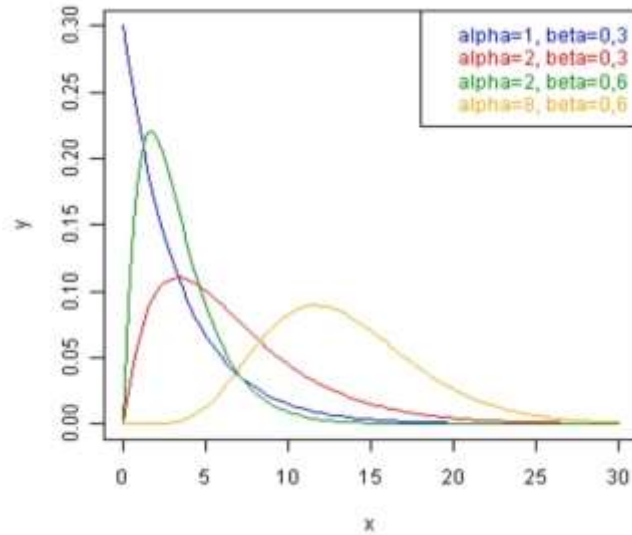


Figure 1.9 – Densité de probabilité de la loi Gamma.

- **Densité de probabilité :**

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}.$$

- **Taux de défaillance :**

$$\lambda(t) = \frac{t^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)}{\beta^{\alpha} \int_t^{\infty} \Gamma(\alpha) f(\mu) d\mu} \quad t > 0.$$

- **Le temps moyen de bon fonctionnement :**

$$MTTF = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Remarques 2 :

- La fonction de répartition de la loi de Gamma n'a pas d'expression explicite, ce qui est de même pour la fiabilité.
- si X suit la loi Gamma pour $(\alpha = 1 \text{ et } \beta = \frac{1}{\lambda})$ on obtient la loi exponentielle $\exp(-\lambda t)$.

1.8 Conclusion

Les systèmes des files d'attente sont des outils de la modélisation stochastique, c'est pour quoi dans ce chapitre On s'est intéressé aux notions de probabilité, les caractéristiques des variables aléatoires et les processus stochastiques, dans le prochain chapitre nous présentons les systèmes de files d'attente classiques.

Chapitre 2

Systemes de files d'attente classiques

2.1 Introduction

La théorie des files d'attente est une technique de la recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et déterminer ses caractéristiques pour aider les praticiens dans leurs prises de décisions. [1]

L'objet de ce chapitre est la modélisation des files d'attente par des processus aléatoires. Nous introduisons les concepts généraux et quelques résultats classiques concernant les systèmes de files d'attente (markoviens et non markoviens). Nous accordons une attention particulière à la présentation des modèles M/M/1 et M/G/1.

2.2 Description d'un phénomène d'attente classique

Un phénomène d'attente peut être décrit comme un système stochastique composé d'un certain nombre (fini ou non) de places d'attente, d'un ou plusieurs stations de service monté en parallèle, le serveur peut être un serveur humain, un central téléphonique, un serveur informatique, un péage autoroutier, une compagnie d'assurance, la météorologie nationale.... Les clients arrivent de l'extérieur (la source) à des instants aléatoires., ils attendent, se font servir selon des règles spécifiées et quittent le système. Quand les serveurs sont tous occupés, les clients doivent alors patienter dans un espace d'attente (file d'attente) jusqu'à ce qu'un serveur soit disponible. Comme illustré par la figure (2.1).

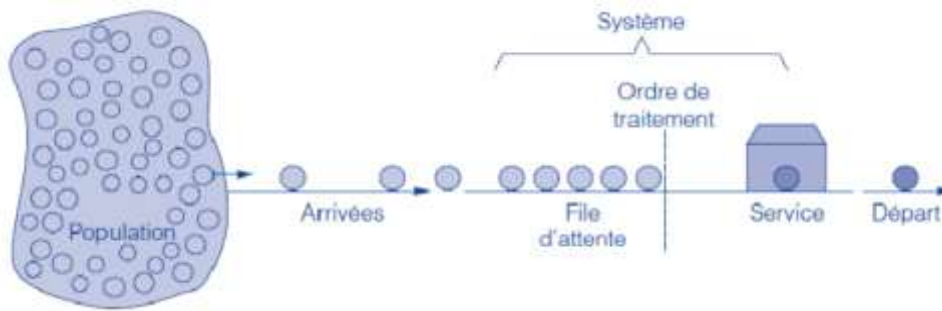


Figure 2.1 – Représentation schématique de file d'attente simple.

2.3 Analyse mathématique de phénomène d'attente

La description mathématique d'une file d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $N(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état $p_n(t) = P(N(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$.
- Le régime stationnaire du processus stochastique qui est défini par :

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p(N(\infty) = n) = p(N = n), (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$\{p_n\}_{n \geq 0}$ est appelé distribution stationnaire du processus $\{N(t), t \geq 0\}$.

Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire

2.3.1 Processus de naissance et de mort

Un processus de naissance et de mort est un processus qui consiste à faire évoluer un système entre une infinité dénombrable ou non dénombrable (processus continu) d'états le système étant à chaque instant dans un état est un seul. À titre d'exemple : une file d'attente devant un carrefour à feux, les états du système étant le nombre de voitures dans le lieu de service. L'arrivée des voitures peut être considérée comme une naissance et le départ des voitures peut être considéré comme une mort.

À un instant t l'état d'un système de file d'attente, noté $N(t)$ est le nombre de clients présents dans le système, l'ensemble des variables aléatoires décrit un processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$, on considère alors un système dans lequel on ne prend en compte que les processus d'arrivée et de sortie, sans tenir compte des autres caractéristiques (nombre de serveurs, capacité de système, ... etc.).

Définition 1 : Le processus d'état stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort si pour chaque $n=0,1,\dots$, il existe des paramètres avec ($\mu_0 = 0$) tels que, lorsque le système est dans l'état n , le processus d'arrivée est poissonnier de taux λ_n et le processus de sortie est poissonnier de taux μ_n .

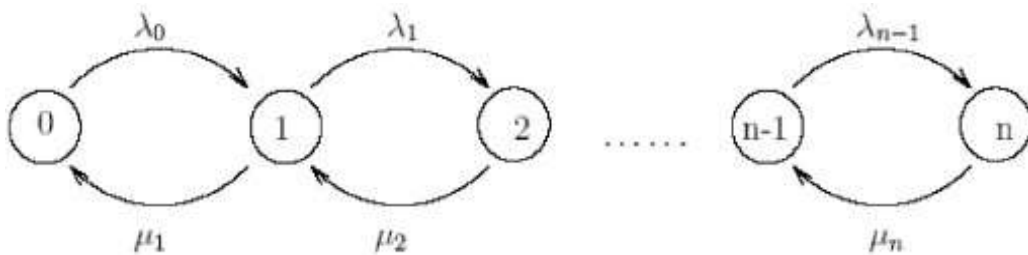


Figure 2.2 – Graphe de transition d'un processus de naissance et de mort.

Remarque 1 : D'après la définition 1, Si les processus d'arrivée et de sortie sont de poisson, et si nous supposons que les taux d'arrivée et de service sont les paramètres λ_n et μ_n , alors on peut dire que $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort.

Définition 2 : Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discret $n=0, 1, \dots$, ils sont caractérisés par deux conditions importantes : ils sont sans mémoire, et à partir d'un état donné n des transitions ne sont possibles que vers l'un ou l'autre des états voisins $(n+1)$ et $(n-1)$ pour $n \geq 1$.

Soit $p_{ij} = p(N(t + \Delta t) = j / N(t) = i)$, c'est la probabilité pour que le processus passe de l'état i vers l'état j pendant la durée Δt .

D'après la définition 2, le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort si :

$$P_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i (\Delta t) + o(\Delta t) \quad i \geq 0 \quad (2.1)$$

$$P_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i (\Delta t) + o(\Delta t) \quad i \geq 1 \quad (2.2)$$

$$P_{i,i}(\Delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) (\Delta t) + o(\Delta t) \quad i \geq 0 \quad (2.3)$$

$$P_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda_0 (\Delta t) + o(\Delta t) \quad (2.4)$$

$$P_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad |i-j| \geq 2 \quad (2.5)$$

$$P_{i,j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.6)$$

λ_i : taux de naissance.

μ_i : taux de mort.

2.4 Une modélisation simple de la file d'attente

2.4.1 Structure de file d'attente

Pour identifier un système de files d'attente, on doit spécifier :

- Le processus d'arrivée : pour le processus d'arrivé on s'intéresse aux instants d'arrivés des clients dans la file. Ils sont en général aléatoires.
- Le processus de service : qui compris le nombre de serveurs et la loi probabiliste décrivant la durée des services.
- Capacité du système : c'est le nombre de places dans le système en d'autre terme c'est le nombre maximal de clients permis dans le système t compris ceux en service.

La discipline de service :

C'est la façon dont les clients sont ordonnés pour être servi. Les principales disciplines du service sont :

- *FIFO (First in, First out)* : cette discipline est la plus usuelle. Les clients quittent le système dans l'ordre suivant lequel ils sont entrés (le premier arrivé le premier servi).
- *LIFO (Last In, First out)* : le dernier client dans la file est le premier à être servi.
- *Radom (aléatoire)* : les clients accèdent au serveur de manière aléatoire, indépendamment de l'ordre d'arrivée.

- *Prioritaires* : les clients sont servis selon leur priorité. Tous les clients de la plus haute priorité sont servis premiers, puis les clients de priorité inférieure sont servis, et ainsi de suite.

2.4.2 Notation de Kendall (1953)

Une notation symbolique a été développée par Kendall pour représenter les files d'attente de manière succincte, comprenant six symboles rangés dans l'ordre :

$$A/B/C/D/E/F$$

- A : décrit la nature du processus d'arrivée, les codes utilisés sont :
 - M : loi exponentielle (processus de poisson).
 - G : loi général.
 - GI : loi général et indépendant.
 - D : loi déterministe ; si la suite est déterministe et constante.
 - E_k : loi d'Erlang d'ordre K.
- B : décrit la nature du processus de service (les codes sont les même que A).
- C : le nombre de serveurs (montés en parallèle).
- D : le nombre maximum de clients dans système (capacité du système).
- E : population des usagers (taille de la source).
- F : discipline de la file.

Remarque 2 : Dans sa version courte, seuls les trois premiers symboles A/B/C sont mentionnés dans un tel cas, on suppose que la file est régie par une discipline FIFO et que le nombre de places d'attente ainsi que celui des clients susceptibles d'accéder au système sont illimités.

2.4.3 Mesures de performance

Terminologie et notations

On note λ le taux d'arrivée des clients, Cela signifie que l'espérance mathématique de la durée séparant deux arrivées successives est $\frac{1}{\lambda}$.

On note μ le taux de service des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est $\frac{1}{\mu}$.

L'intensité du trafic s'exprime de la manière suivante $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

L'étude d'une file d'attente a pour but de calculer ou estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données. La distribution stationnaire du processus stochastique introduit permet d'obtenir les caractéristiques d'exploitation du système, telles que :

- $L = E(X)$: Nombre moyen de clients dans le système.
- L_q : Le nombre moyen de clients dans la file d'attente.
- W : Temps moyen de séjour d'un client dans le système.
- W_q : Temps moyen d'attente d'un client dans la file.

2.5 Types de Modèles

2.5.1 Modèles Markoviens

Les files d'attente du modèle markovien, sont des systèmes où les deux quantités principales les durées de services et les temps des inters arrivés sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées, leur notation de Kendall sera de la forme **M/M/...**

La propriété "d'absence de mémoire" de la loi exponentielle facilite l'analyse de modèle.

2.5.2 Modèles non markoviens

En éliminant l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques les temps des arrivées et des durées de service où en introduisant des paramètres supplémentaires spécifiques au modèle étudié, n'aura jamais de processus markovien.

Ce qui rend l'opération d'analyse du modèle très difficile, voire impossible. Grâce aux nombreuses méthodes d'analytique, on se ramène à choisir un processus markovien particulier.

1) Méthode des étapes d'Erlang

Cette méthode est proposée par E. Erlang et généralisée par D.R. Cox. Son principe est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étapes.

2) Méthode de la chaîne de Markov induite

Cette méthode élaborée par Kendall, est largement utilisée, a pour principe de choisir une séquence d'instantanés t_1, t_2, \dots, t_n de nature déterministe ou aléatoires tel que le processus induit $\{X_n, n \geq 0\}$, avec $X_n = X(t_n)$ est une chaîne de Markov homogène.

3) Méthode d'approximation

On caractérise l'état du système étudié, par :

- Des méthodes asymptotiques d'écrivant l'état du système (chargé, non chargé, ...).
- L'estimation par bornes de certaines de ses caractéristiques.

4) Méthode des événements fictifs

Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de la place et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

5) Simulation

La simulation est une technique de modélisation. Elle permet de représenter le fonctionnement d'un système composé de différents centres d'activité, de mettre en évidence les caractéristiques de ceux-ci et les interactions entre eux, de décrire la circulation des différents objets traités par ces processus et enfin d'observer le comportement du système.

2.6 Quelques Modèles de files d'attente classiques

2.6.1 La File M/M/1

La file M/M/1 est la file d'attente markovienne la plus simple. Elle permet en effet d'illustrer les concepts fondamentaux liés à l'attente devant un serveur, le flot des arrivées est poissonien de taux λ et le temps qu'occupe le serveur pour satisfaire le client est une loi exponentielle du paramètre μ .

La file M/M/1 est un cas particulier du processus de naissance et de mort, où chaque arrivée d'un client est considérée comme une naissance (taux de naissance est égale à λ), et chaque départ est assimilé à une mort (taux de mort égale à μ).

En résumé, le processus aléatoire introduit est un processus de naissance et de mort avec des taux

$$\left(\begin{array}{l} \lambda_n = \lambda, \quad \forall n \geq 0 \\ \mu_n = \begin{cases} \mu, & \forall n \geq 1 \\ 0, & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{array} \right) \quad (2.7)$$

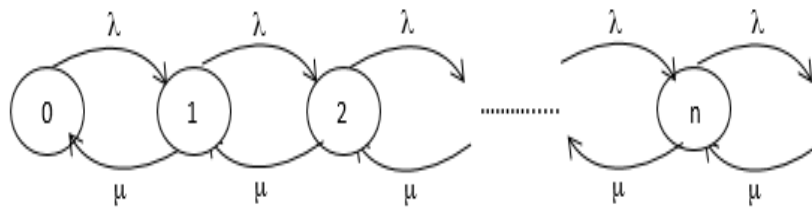


Figure 2.3 – Évaluation d'état dans la file M/M/1.

Régime transitoire

$X(t)$ est le nombre de clients présents dans le système à l'instant t ($t \geq 0$). Grâce aux propriétés fondamentales du processus de poisson et de la loi exponentielle, $X(t)$ est un processus markovien homogène.

Les probabilités d'états $p_n(t) = p[X(t) = n]$ peuvent être calculés par les équations différentielle de Kolmogorov ci-dessous connaissant les conditions initiales du processus.

$$\begin{cases} p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) & n \in N \\ p'_0(t) = \lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

Régime stationnaire

On à la probabilité limites, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = p_n$ l'état des équation de balance :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)p_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \\ \lambda p_0(t) &= \mu p_1(t) \end{aligned} \quad n \in N$$

Sous la condition d'ergodicité du système $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ pour laquelle le régime stationnaire existe, il est aisé d'obtenir les probabilités stationnaires.

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

$p = \{p_n\}_{n \geq 0}$, est appelé distribution stationnaire, elle suit une loi géométrique.

Caractéristique du système

Les mesures de performances sont liées par les relations suivantes appelées "*formules de Little*":

- $L = \lambda W$;
- $L_q = \lambda W_q$;
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$;
- $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$;

La seule condition d'application des formules de *Little* est que le système soit stable. De manière générale, une file d'attente est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté λ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter μ clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est S , alors, le nombre λ doit donc être plus petit que le nombre $s\mu$: $\lambda < s\mu \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$.

Remarque 3 : *Les formules de Little s'appliquent à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file M/M/1).*

Les mesures de ce système sont :

- Le nombre moyen de clients dans le système

$$L = E(X) = \sum_{n \geq 0} n p_n = (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n .$$

D'où :

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (2.10)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file

Soit

X_q : le nombre de clients dans la file d'attente.

Alors :

$$X_q = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 0 \\ X - 1 & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

Donc Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$L_q = E(X_q) = \sum_{n \geq 1} (n - 1) p_n = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \quad (2.11)$$

En appliquant *la formule de Little*, nous obtenons les temps moyen de séjour dans le système W et le temps moyenne d'attente dans la file W_q

- Le temps moyen de séjour dans le système

$$W = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}. \quad (2.12)$$

- Le temps moyen d'attente dans la file

$$W_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \quad (2.13)$$

2.6.2 Modèle d'attente M/G/1

Les clients arrivant dans le système selon un processus de poisson de taux λ , et ils sont servi par un seul serveur. Les durées de service de ces clients sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi générale G dont la fonction de répartition $B(x)$, et la transformé de la place de la densité de probabilité du temps de service $B^{\sim}(s)$. Soient l'espérance de la durée de service $\frac{1}{\mu}$.

Chaîne de Markov induite :

Nous introduisons le processus stochastiques $\{X(t), t \geq 0\}$ qui n'est pas un processus de Markov. Pour le rendre markovien, nous utiliserons la méthode de chaîne de Markov induite.

Soit le processus à temps discret $\{X_n = X(t_n), n \in N\}$ où t_n est l'instant de départ du $n^{\text{ème}}$ clients. Vérifions que cette suite de variable définit bien une chaîne de Markov.

Soient $n \in \mathbb{N}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

A_n est le nombre de clients arrivants pendant le $n^{\text{ème}}$ service avec la distribution

$$p(A_n = k) = a_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t). \quad (2.14)$$

Où $a_k > 0$ et $k > 0$. Déterminons l'équation fondamentale de la chaîne :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1}, & \text{si } X_n \geq 1 \\ A_{n+1}, & \text{si } X_n = 0 \end{cases}, n \geq 1.$$

Soit la variable aléatoire

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n \geq 1 \\ 0, & \text{si } X_n = 0 \end{cases},$$

Alors l'équation fondamentale de la chaîne devient :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + A_{n+1}.$$

Il est évident que X_{n+1} dépend de X_n et A_{n+1} seulement et non pas de X_{n-1}, X_{n-2}, \dots . D'où la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est une chaîne de Markov induite de processus $\{X(t), t \geq 0\}$ avec

la probabilité de transition $p(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}$ qui s'exprime de manière suivante :

$$\begin{cases} p_{0j} = a_j, & \text{si } j \geq 0 \\ p_{ij} = a_{j-1+i}, & \text{si } 0 \leq i \leq j+1 \\ p_{ij} = 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La matrice de transition M est donné par

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Puisque nous pouvons passer d'un état à n'importe quel autre, alors la chaîne de Markov est irréductible. On outre la matrice n'est pas décomposable (elle est pas aperiodique) donc la chaîne est ergodique.

Soit $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ désigne l'intensité de trafic. La distribution de la chaîne de Markov induite $\{X_n, n \geq 1\}$ possède la fonction génératrice suivante

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n = \frac{(1-\rho)B^{\sim}(\lambda-\lambda z)(1-z)}{B^{\sim}(\lambda-\lambda z)-z}. \quad (2.15)$$

Caractéristique du système

- Le nombre moyen de clients dans le système

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{var}(s)}{2(1-\rho)}. \quad (2.16)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file

$$L_q = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{var}(s)}{2(1-\rho)}. \quad (2.17)$$

En appliquant *la formule de Little*, nous obtenons

- Le temps moyen de séjour dans système

$$W = E(s) + \lambda \left(\frac{E(s^2)}{2(1-\rho)} \right). \quad (2.18)$$

- Le temps moyen d'attente dans la file

$$W_q = \lambda \left(\frac{E(s^2)}{2(1-\rho)} \right). \quad (2.19)$$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressées à quelques notions de base sur la théorie de file d'attente. Ce chapitre est consacré à la présentation des systèmes d'attente classiques répartis en deux sections différentes à savoir, les systèmes Markoviens et les systèmes non Markoviens ainsi que leurs caractéristiques.

Les modèles d'attente développés ces dernières décennies tentent de prendre en considération des phénomènes de répétition de demande de service (systèmes informatiques et les réseaux télécommunications) c'est pour cela on va présenter dans le chapitre suivant les files d'attente avec rappels.

Chapitre 3

Systemes d'attente avec rappels

3.1 Introduction

Les systemes de files d'attente avec rappels sont caracterises par la propriete qu'un client qui trouve a son arrivee tous les serveurs occupes quitte l'espace de service et rappelle ulterieurement a des instants aleatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit « en orbite ».

L'etude d'un systeme de file d'attente classique se fait avec ses elements principaux (le processus d'arrivee, le mecanisme de service et la discipline d'attente). Pour un systeme avec rappels on doit ajouter un element decrivant la loi des repetitions d'appels.

Dans ce chapitre nous definissons de maniere generale un systeme de files d'attente avec rappels et nous donnons quelques exemples modelises par ces genres de systemes, puis nous decrivons en particulier les systemes de files d'attente $M/M/1$, $M/M/2$ et $M/G/1$ avec rappels.

3.2 Description du Modele

En general, un systeme de files d'attente avec repetition d'appels peut etre decrit comme suit : Le systeme contient un espace de service compose de S ($S \geq 1$) serveurs identiques et independants, d'un espace d'attente ayant $N-S$ ($N \geq S$) positions d'attente.

Les clients arrivent dans le systeme selon un processus aleatoire avec une loi de probabilite donnee, et forment un flux d'appels primaires. A l'arrivee d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres et en bon etat, le client sera servi immediatement. Sinon, s'il y a des positions d'attente libre, le client rejoint la file selon la discipline de service adapte dans le systeme.

Lorsque tous les serveurs et toutes les positions d'attente du buffer sont occupes, le client quitte le systeme avec une probabilite $1 - H_0$ ou bien entre en « orbite » avec la probabilite H_0 et devient source « d'appels repetes » ou « d'appels secondaires ». La

capacité O peut être finie ou infini, Dans le cas où O est finie et si l'orbite est pleine, le client quitte le système pour toujours. Chaque client de l'orbite forme un processus « d'arrivées secondaires » de taux θ et il est traité de la même manière qu'un « *client primaire* » qui arrive de l'extérieur du système, trouve un serveur ou une position libre dans la file, ou quitte le système avec probabilité $1 - H_k$ (s'il s'agit de la $K^{\text{ème}}$ tentative _échouée) ou bien entre en orbite avec une probabilité H_k si l'orbite n'est pas plein. Le schéma général d'un système d'attente avec rappels est donné dans la Figure (3.1).

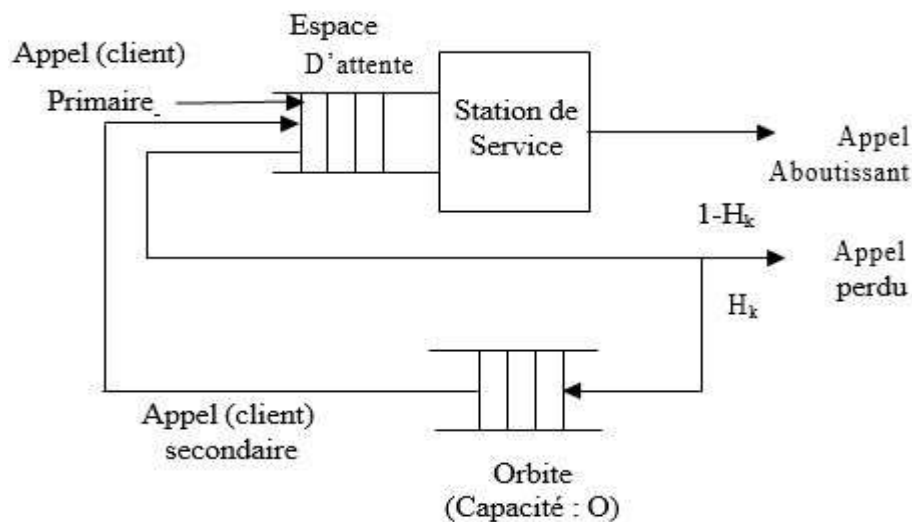


Figure 3.1 – Schéma descriptif d'une file d'attente avec rappel.

Remarques 1 :

- Le modèle de files d'attente avec rappels décrit ci-dessus est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels, peuvent être considérés comme des cas particuliers tels que : les systèmes sans buffer, les systèmes à un seul serveur,
- Les clients primaires ou secondaires qui arrivent durant un temps de service, entrent en orbite sans aucune influence sur le processus de service.

Terminologie et notation

En utilisant la notation de Kendall établie pour la file d'attente classique, Celle du modèle de file d'attente avec rappels s'écrit en ajoutant deux autres symboles aux six symboles précédemment définis.

A/B/C/D/E/F/O/H

Avec :

- O : Capacité de l'orbite.
- H : La probabilité de persévérance qui permet de définir le comportement du client devant une situation de blocage (serveurs occupés).

Remarques 2 :

- O peut être supprimé si elle est infinie. H peut être également supprimé dans le cas d'un système sans perte (c à d $H=1$).
- Le temps de rappel est défini comme l'intervalle du temps entre deux rappels consécutifs du même client secondaire.
- La distribution de temps de rappels est supposée généralement exponentielle de taux θ . $\frac{1}{\theta}$ étant durée moyenne des intervalles de rappels. C'est la raison pour laquelle elle est omise dans la notation.
- Lorsque $\theta \rightarrow \infty$ le système d'attente avec rappels se rapporte à un système classique.
- Lorsque $\theta \rightarrow 0$ le système d'attente avec rappels est un système d'Erlang avec perte.

3.3 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite

La définition du protocole de rappels est en effet un sujet de controverses, et concerne l'aspect de modélisation du système sous étude. [16]

- **Politique de rappels classiques** : Le protocole le plus décrit dans la théorie des files d'attente avec rappels est la politique de rappels classiques dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre θ . Donc il y a une probabilité $n\theta dt + o(dt)$ d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle $(t; t + dt)$, sachant que n clients sont en orbite à l'instant t . Une telle politique a été motivée naturellement par des applications dans la modélisation du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques depuis les années 1940.
- **Politique de rappels constants** : Durant les dernières années, les technologies ont considérablement évolué. La littérature des files d'attente avec rappels décrit différents protocoles de rappels spécifiques à certains réseaux informatiques et de communications modernes. Dans les protocoles en question, le temps inter rappelle peut-être contrôler par un dispositif électronique et par conséquent, est indépendant du nombre d'unités demandant le service. Ici, la probabilité d'un rappel durant $(t; t + dt)$, sachant que l'orbite n'est pas vide, est $\beta dt + o(dt)$. Ce type de discipline de rappels est appelé politique de rappels constants. Le premier travail dans cette direction, considère

une file d'attente M/M/1, où uniquement le client en tête de la file d'attente en orbite peut demander un service après un temps de rappels exponentiellement distribué avec un taux constant.

Cette sorte de politique de contrôle de rappels est bien connue pour protocole ALOHA dans le système de communication.

- **Politique de rappels linéaires** : Artalejo et Gomez-Corral [7] traitent les deux cas d'une manière unifiée en définissant une politique de rappels linéaires pour laquelle la probabilité d'un rappel durant $(t; t+dt)$, sachant que n clients sont en orbite à l'instant t , est $(\beta(1-\delta_{0n}) + n\theta) + o(dt)$. On mentionne aussi l'existence d'une autre politique dite politique de rappels quadratique.

3.4 Quelques exemples modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels

Il existe aujourd'hui de plusieurs publications du système avec rappels où des exemples concrets ont été cités par [15] et [2,4]

Dans cette section, nous présentons quelques exemples de problème simples [30].
Pouvant être modélisé par les systèmes avec rappels

1) Problème de réservation

C'est le plus simple exemple, soit un client qui veut prendre une réservation par téléphone dans un restaurant, il y a une seule ligne qui est employée à répondre aux réservations des clients. Ainsi, si un client appelle et trouve la ligne téléphonique occupée il rappellera après une certaine période de temps aléatoire avec la probabilité $H_k (H_k < 1)$ car le client ne peut rappeler indéfiniment.

Cet exemple peut être modélisé par une file d'attente M/G/1 avec rappel et avec perte en considérant que le processus d'arrivée des appels est poissonnien

2) Réseaux de communication par paquet

Considérons un réseau de communications d'ordinateurs dans lequel on trouve un ensemble d'interfaces « Interface Message Processors : IMP » (C'est le nœud de commutation de paquets utilisé pour connecter les ordinateurs à l'ARPANET) reliées entre elles par des câbles. Un ordinateur principal est connecté à l'une de ces interfaces. Si l'ordinateur envoyer un message à un autre ordinateur il doit en premier lieu envoyer

le message avec l'adresse de destination à l'interface à laquelle il est connecté. L'interface à son tour envoie le message à l'ordinateur destinataire directement si elle y est connectée, ou indirectement via d'autres interfaces. Considérons une interface à laquelle un ordinateur principal est connecté. Les messages arrivent de l'extérieur selon un processus aléatoire. Après la réception du message, l'ordinateur l'envoie immédiatement à son interface. S'il y a un tampon libre, le message est accepté. Dans le cas contraire, le message est rejeté et l'ordinateur doit réessayer une autre fois après une période de temps. S'il existe des tampons libres, le message rejeté sera stocké dans un tampon de l'ordinateur principal. Dans le cas contraire, le message est considéré comme perdu.

Ce problème peut être modéliser comme un système de file d'attente avec rappels à serveur unique (interface IMP) possédant des tampons (positions d'attente). Le nombre de tampons de l'ordinateur principal constitue la capacité de l'orbite.

3.5 Modèles markoviens

3.5.1 Modèle M/M /1 avec rappels

On considère un système de files d'attente à un seul serveur dont lequel les clients primaires arrivent suivant un processus de poisson de taux λ , si le client arrive et trouve le serveur inoccupé il l'occupe immédiatement, et après l'achèvement de son service il quitte le système.

Autrement si le serveur est occupé, il rejoint l'orbite et rappelle ultérieurement jusqu'à ce qu'il trouve le serveur disponible, la durée entre deux rappels successifs est exponentielle de paramètre θ , les temps de service sont exponentiellement distribués de paramètre μ . On suppose que les temps entre les inters-arrivées des clients primaires, les temps des inter-rappels et les temps de service sont mutuellement indépendants.

On note par $C(t)$ l'état de serveur à l'instant t . Les événements $C(t) = 0$ ou 1 correspondent respectivement à l'état de serveur (libre ou occupé), et on note par $N(t)$ le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t . supposons que le régime stationnaire existe ($\rho = \lambda/\mu < 1$), Il est clair que le processus

$$\{(C(t), N(t)), t \geq 0\} \quad (3.1)$$

Est markovien bidimensionnel, à espace d'état $\{0,1\} \times \mathbb{N}$. Les taux de transition qui sont différents de zéro sont donnés par [34]

$$q_{(0,j)(1,j)} = \lambda \quad ; j \in \mathbb{N}$$

$$q_{(1,j)(0,j)} = \mu \quad ; j \in \mathbb{N}$$

$$q_{(1,j)(1,j+1)} = \lambda \quad ; j \in \mathbb{N}$$

$$q_{(0,j)(1,j-1)} = j\theta \quad ; j \in \mathbb{N}$$

Le graphe de transition correspondant est comme suivi :

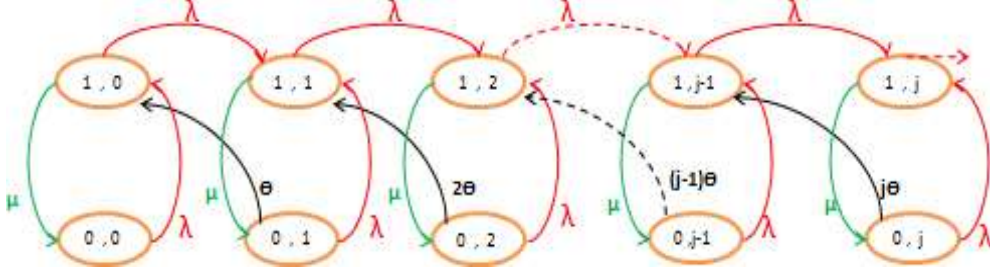


Figure 3.2 – Graphe des taux de transition du système M/M/1 avec rappels.

Les équations d'équilibre sont :

$$(j\theta + \lambda)P_{0j} = \mu P_{1j} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

$$(\lambda + \mu)P_{1j} = \lambda P_{0j} + (j+1)\theta P_{0,j+1} + \lambda P_{1,j-1} \quad \forall j \geq 1 \quad (3.3)$$

Avec $P_{ij} = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(C(t) = i, N(t) = j)$, $i = 0,1$ et $j \geq 0$, représente la distribution stationnaire conjointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite. Introduisons les fonctions génératrices suivantes :

$$p_0(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \pi_{0j} ; \quad (3.4)$$

$$p_1(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \pi_{1j} ; \quad (3.5)$$

À partir des équations (2.2) et (2.3), on obtient :

$$p_0(z) = (1 - \rho)(1 - \rho/1 - z\rho)^{\lambda/\theta} \quad (3.6)$$

$$p_1(z) = \rho(1 - \rho/1 - z\rho)^{\lambda/\theta+1} \quad (3.7)$$

Les transformées inverses de ses fonctions nous donnent les formules suivantes :

$$P_{0j} = \frac{\rho}{j!\theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} (1 + k\theta)(1 - \rho)^{\lambda/\theta+1} \quad (3.8)$$

$$P_{1j} = \frac{\rho^{j+1}}{j! \theta^j} \prod_{k=1}^j (\lambda + k\theta)(1 - \rho)^{\lambda/\theta+1} \quad (3.9)$$

Les caractéristiques du système M/M/1 avec rappels

- Le nombre moyen de clients dans l'orbite :

La fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans l'orbite $q_n = \mathbb{P}(N(t) = n)$ est [29]

$$\pi(Z) = \pi_0(Z) + \pi_1(Z) = (1 + \rho - \rho Z) \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho Z} \right)^{\frac{\lambda}{\theta+1}}$$

Le nombre moyen de clients dans l'orbite est :

$$L_0 = E(N(t)) = \frac{\rho(\lambda + \rho\mu)}{\mu(1 - \rho)} \quad (3.10)$$

- Le nombre moyen de clients dans le système :

La fonction génératrice du nombre de clients dans le système au régime stationnaire $Q_n = \mathbb{P}(K(t) = n)$ est donnée par :

$$Q(Z) = \pi_0(Z) + Z \pi_1(Z) = \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho Z} \right)^{\frac{\lambda}{\theta+1}} \quad (3.11)$$

Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$L = E(K(t)) = \frac{\rho(\lambda + \mu)}{(1 - \frac{\rho}{\mu})} \quad (3.12)$$

L'état de serveur :

On peut aussi trouver la distribution du l'état de serveur :

Serveur libre

$$S_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C(t) = \mathbf{0}) = \pi_0(1) = 1 - \rho \quad (3.13)$$

Serveur occupé

$$S_O = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C(t) = \mathbf{1}) = \pi_1(1) = \rho \quad (3.14)$$

3.5.2 Modèle M/M/2 avec rappels

Nous considérons un système de files d'attente avec rappels où l'espace de service comprend $S=2$ serveurs. Les clients primaires arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Si un client primaire trouve au moins un serveur libre, il commence son service. Sinon, il entre en orbite. Les durées de service et les durées entre deux rappels consécutifs sont exponentiellement distribuées de moyennes finies,

respectivement $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{\theta}$ nous supposons que toutes les variables aléatoires introduites sont mutuellement indépendantes.

L'état du système à la date t peut décrire par le processus (3.1), dont l'espace d'état est $S = \{0,1,2\} \times \mathbb{N}$. Les probabilités d'état sont

$$P_{ij} = P(C(t) = i, N(t) = j), \quad (i, j) \in S$$

La condition d'existence d'un régime stationnaire est $\lambda < 2\mu$.

Supposons que $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} < 1$ et $\mu = 1$. À partir du graphe des transitions, il est possible d'obtenir les équations d'équilibres statistiques, telles que :

$$(j\theta + \lambda)P_{0j} = P_{1j} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.15)$$

$$(\lambda + 1 + j\theta)P_{1j} = \lambda P_{0j} + (j + 1)\theta P_{0j+1} + 2P_{2j} \quad \forall j \geq 1 \quad (3.16)$$

$$(\lambda + 2)P_{2j} = \lambda P_{1j} + (j + 1)\theta P_{1j+1} + \lambda P_{2j-1} \quad (3.17)$$

Ainsi que l'équation de normalisation :

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j} + \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j} + \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j} = 1$$

Pour $P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$

La résolution des équations (3.15), (3.16) et (3.17) nous donne

$$P_{0j} = \frac{\lambda^j}{j!\theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda+k\theta)^2+k\theta}{2+3\lambda+2\theta+2k\theta} P_{00} \quad (3.18)$$

$$P_{2j} = (\lambda + j\theta) \frac{\lambda^j}{j!\theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda+k\theta)^2+k\theta}{2+3\lambda+2\theta+2k\theta} P_{00} \quad (3.19)$$

$$P_{2j} = [1 + \lambda + (j + 1)\theta] \frac{\lambda^j}{j!\theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda+k\theta)^2+k\theta}{2+3\lambda+2\theta+2k\theta} P_{00} \quad (3.20)$$

3.6 Modèle M/G/1 avec rappels

3.6.1 Description du modèle

Considérons un système à un seul serveur, les arrivées des clients dans le système forment un processus de poisson de taux λ , si un client primaire trouve le serveur libre il est immédiatement pris en charge. Sinon, c'est-à-dire, s'il trouve le serveur occupé, il rejoint l'orbite et rappelle ultérieurement jusqu'à ce qu'il trouve le serveur de nouveau libre. La durée de service est de loi générale de distribution $B(x)$ et de transformée de

Laplace-Stieltjes β . La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de taux θ . La description du système est la suivante :

On suppose que le $(i - 1)^{ème}$ client termine son service à l'instant η_{i-1} (les clients sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre. Même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent occuper le service immédiatement. Donc le $i^{ème}$ client n'entre en service qu'après un intervalle de temps R_i durant lequel le serveur est libre, bien qu'en général il y a des clients qui attendent. A l'instant $\varepsilon_i = \eta_{i-1} + R_i$ le $i^{ème}$ client débute son service durant un temps S_i . Tous les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'influent pas sur le processus. Alors à l'instant $\eta_i = \varepsilon_i + S_i$, le $i^{ème}$ client achève son service et le serveur devient encore libre et ainsi de suite.

Soit $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$ la transformée de Laplace de la distribution du temps de service de fonction $B(x)$, $b_k = (-1)^k \beta^{(k)}(0)$ est le moment d'ordre k du temps de service et l'intensité de trafic est $\rho = \lambda b_1$, $k(z) = \beta(\lambda - \lambda z) = \sum_{n=0}^\infty k_n z^n$

Où

$$k_n = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dB(x)$$

Est la distribution du nombre de clients primaires qui arrivent pendant une durée de service

Soit $N(t)$ le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t , et

$$C(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le serveur est occupé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que le processus $\{(C(t), N(t)), t \geq 0\}$ n'est pas markovien. Ce système a été étudié par plusieurs méthodes parmi ces méthodes on trouve

3.6.2 Chaîne de Markov induite

La méthode de la chaîne de Markov induite a été utilisée pour la 1^{ère} fois par Choo et Conolly (1979) [12]

On se propose de déterminer la distribution stationnaire et les caractéristiques usuelles de processus $N(\eta)$, $\eta \geq 0$

Où $N(\eta)$: « le nombre de clients en orbite à l'instant η »,

Considérons le processus $\{N(\eta)\}$ aux instants de départ η_1, η_2, \dots , où les clients terminent leurs service et quittent le système.

On définit ainsi $N_i = N(\eta_i)$, $i = 1, 2, \dots$, Où η_i : instant de départ de $i^{ème}$ client.

Soit μ_i : « le nombre de clients primaires durant le service de $i^{\text{ème}}$ client », les variables aléatoires μ_i sont indépendantes leurs distribution commune est :

$$k_n = \mathbb{P}(\mu_i = n) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dB(x), \quad (3.21)$$

Avec la fonction génératrice :

$$k(z) = \sum_0^\infty k_n z^n = \beta(\lambda - \lambda z)$$

Soit

$$N_i = N_{i-1} - B_i + \mu_i \quad (3.22)$$

Avec

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ client provient de l'orbite} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable aléatoire de Bernoulli B_i dépend de l'instant η_{i-1} seulement par N_{i-1} et sa distribution conditionnelle est donnée par :

$$\mathbb{P}\{B_i = 0 \mid N_{i-1} = n\} = \frac{\lambda}{\lambda + n\theta}, \quad \mathbb{P}\{B_i = 1 \mid N_{i-1} = n\} = \frac{n\theta}{\lambda + n\theta}$$

La suite des variables aléatoires N_i forment une chaîne de Markov induite, ses probabilités de transition en un pas :

$$\begin{aligned} r_{mn} &= \mathbb{P}\{N_i = n \mid N_{i-1} = m\} \\ &= \mathbb{P}\{N_{i-1} - B_i + \mu_i = n \mid N_{i-1} = m\} \\ &= \mathbb{P}\{\mu_i = n - m \mid N_{i-1} = m, B_i = 0\} \times \mathbb{P}\{B_i = 0 \mid N_{i-1} = m\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{\mu_i = n - m + 1 \mid N_{i-1} = m, B_i = 1\} \times \mathbb{P}\{B_i = 1 \mid N_{i-1} = m\} \\ &= \mathbb{P}\{\mu_i = n - m\} \times \mathbb{P}\{B_i = 0 \mid N_{i-1} = m\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{\mu_i = n - m + 1\} \times \mathbb{P}\{B_i = 1 \mid N_{i-1} = m\} \end{aligned}$$

$$r_{mn} = \frac{\lambda}{\lambda + m\theta} k_{n-m} + \frac{m\theta}{\lambda + m\theta} k_{n-m+1}$$

Avec $r_{mn} \neq 0$ pour $m=0,1,\dots, n+1$.

La condition d'existence du régime stationnaire peut être obtenue comme suit :

L'accroissement moyen de la chaîne vaut

$$E[N_{i+1} - N_i \mid N_i = j] = E[\mu_{i+1}] - E[B_{i+1} = 1 \mid N_i = j] = \rho - \frac{j\theta}{\lambda + j\theta}$$

Si $\rho < 1$, alors :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} E[N_{i+1} - N_i \mid N_i = j] = \rho - 1 < 0$$

Et la chaîne est donc ergodique. Par contre, si $\rho \geq 1$ alors :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} E[N_{i+1} - N_i \mid N_i = j] = \rho - \frac{j\theta}{\lambda + j\theta} > 0$$

Puisque la chaîne est bornée inférieurement par la chaîne induite du système M/G/1 classique donc la chaîne n'est pas ergodique (elle est transitoire).

Soit $\mathbb{P}_n = \lim(N(\eta_i)) = n$. Les équations de Kolmogorov se présentent de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_n = \sum_{m=0}^n \mathbb{P}_m \frac{\lambda}{\lambda + m\theta} k_{n-m} + \sum_{m=1}^{n+1} \mathbb{P}_m \frac{m\theta}{\lambda + m\theta} k_{n-m+1} ; \quad n = 0, 1, \dots$$

Vu la présence de convolution, cette équation peut être transformée, à l'aide des fonctions génératrices[8] :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}_n \\ \psi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\mathbb{P}_n}{\lambda + n\theta} \end{aligned}$$

En

$$\varphi(z) = k(z)(\lambda\varphi(z) + \theta\psi'(z))$$

Comme

$$\varphi(z) = \lambda\psi(z) + \theta\psi'(z) \tag{3.23}$$

On obtient l'équation de la fonction génératrice $\psi(z)$ suivante :

$$\theta[k(z) - z]\psi'(z) = \lambda[1 - k(z)]\psi(z)$$

Lemme 1 :

La fonction analytique $f(Z) = k(Z) - z$ est positive, décroissante et pour $z \in [0,1]$ et $\rho < 1 : z < k(z) < 1$

Démonstration 1 :

Soit $f(z) = \mathcal{B}(\lambda - \lambda z) - z, f(1) = \mathcal{B}(0) - 1 = 0$

En plus $f'(z) = -\lambda\mathcal{B}'(\lambda - \lambda z) - 1$ et $f'(1) = \rho - 1 < 0$

Alors 1 est le seul zéro de f . En outre

$$f''(z) = -\lambda\mathcal{B}'(\lambda - \lambda z) + \lambda^2\mathcal{B}''(\lambda - \lambda z) \geq 0$$

Alors $f(z)$ est décroissante, positive pour $\rho < 1$ et pour $z \in [0,1]$:

$$Z < f(z) < 1$$

En plus :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - B(\lambda - z\lambda)}{B(\lambda - z\lambda) - z} = \frac{\rho - 1}{1 - \rho} < \infty \quad (3.24)$$

Théorème 1 :

Soit $\rho < 1$. La distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite possède la fonction génératrice suivante [14]

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}_n = \frac{(1 - \rho)(1 - z)k(z)}{k(z) - z} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - k(\mu)}{k(\mu) - \mu} d\mu \right\} \quad (3.25)$$

Où $k(z) = B(\lambda - \lambda z)$

3.6.3 Distribution stationnaire de l'état du système

Supposons que $\rho < 1$. La méthode des variables supplémentaires permet de trouver la distribution stationnaire du système à partir de l'état du serveur et la taille de l'orbite.

Elle consiste à décrire le processus des arrivées comme processus de Markov avec dépendance de l'état de paramètre λ_{in} quand $\{C(t), N(t)\}$ est dans l'état (i, n) et à appliquer les schémas récurrents. L'état du système peut être décrit par le processus [24]

$$X(t) = \begin{cases} N(t) & \text{si } C(t) = 0 \\ \{C(t), N(t), \varepsilon(t)\} & \text{si } C(t) = 1 \end{cases}$$

Où $\varepsilon(t)$ est une variable aléatoire supplémentaire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et désignant la durée de service écoulé à la date t . notons par

$$P_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C(t) = 0, N(t) = n)$$

$$P_{1n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \mathbb{P}(C(t) = 1, \varepsilon(t) \leq x, N(t) = n)$$

Les probabilités P_{0n} et $P_{1n}(x)$ vérifient le système d'équations de balance :

$$(\lambda + n\theta)P_{0n} = \int_0^{\infty} P_{1n}(x)b(x)dx$$

$$P'_{1n}(x) = -(\lambda + b(x))P_{1n}(x) + \lambda P_{1n-1}(x)$$

$$P_{1n}(0) = -\lambda P_{0n} + (n + 1)\theta P_{0n+1}$$

Où $b(x) = B'(x)/(1 - B(x))$ est l'intensité instantanée du service étant donné que la durée écoulée est égale à x .

Soient les fonctions génératrices, $P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{0,n}$ et $P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1,n}$, le système d'équations de balance devient :

$$\begin{cases} \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{0n} + \theta \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{0n} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n}(x) dx; \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n}'(x) = -(\lambda + b(x)) \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n}(x) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n-1}(x); \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n}(0) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{0n} + \theta \sum_{n=0}^{\infty} z^n (n+1) P_{0n+1}; \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \lambda P_0(z) + \theta z \lambda P_0'(z) = \int_0^{\infty} P_1(z, x) b(x) dx \\ P_1'(z, x) = (\lambda z - \lambda - b(x)) P_1(z, x) \\ P_1(z, 0) = \lambda P_0(z) \end{cases} \quad (3.26)$$

De la deuxième équation de (3.26), on a :

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0) [1 - B(x)] \exp(-(\lambda - \lambda z)x)$$

Donc, la première équation de (3.26) devient

$$\begin{aligned} \lambda P_0(z) + \theta z \lambda P_0'(z) &= \int_0^{\infty} P_1(z, 0) [1 - B(x)] \exp(-(\lambda - \lambda z)x) b(x) dx \\ &= P_1(z, 0) \beta(\lambda - \lambda z) \\ &= P_1(z, 0) k(z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

À partir des équations (3.26) et (3.27), on a

$$P_1(z, 0) f(z) = \lambda P_0(z) + \theta z \left(\frac{P_1(z, 0)}{\theta} - \frac{\lambda}{\theta} P_0(z) \right) \quad (3.28)$$

$$P_1(z, 0) = \frac{\lambda - \lambda z}{k(z) - z} P_0(z) [1 - B(x)] \exp(-(\lambda - \lambda z)x) \quad (3.29)$$

En intégrant cette équation, et en utilisant la formule suivante :

$$\int_0^{\infty} \exp(-sx) [1 - B(x)] dx = \frac{(1 - \beta(s))}{s}$$

On obtient :

$$P_1(z) = \int_0^{\infty} P_1(z, x) dx = P_0(z) \frac{1 - k(z)}{k(z) - z} \quad (3.30)$$

De (3.26) et (3.27), on peut obtenir $P_0(z)$

$$\begin{aligned}\lambda P_0(z) + \theta z \lambda P_0'(z) &= k(z) \lambda P_0(z) + \theta P_0'(z) \\ \theta [k(z) - z] P_0'(z) &= \lambda [1 - k(z)] P_0(z)\end{aligned}\quad (3.31)$$

Considérons $f(z) = k(z) - z$ du lemme 1, $f(z)$ est une fonction décroissante sur $[0,1]$, positive et pour $\rho < 1$ et $z \in [0,1] : z < k(z) < 1$. En plus :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - k(z)}{k(z) - z} = \frac{\rho - 1}{1 - \rho} < \infty$$

De ce fait, pour $z=1$, la fonction $1 - k(z)/k(z) - z = \rho - 1/1 - \rho < \infty$.

Théorème 2 :

Si $\rho = \lambda b_1 < 1$, le système est en régime stationnaire et les fonctions génératrices de la distribution conjointe de l'état du serveur et de taille de l'orbite sont donnée par [14]:

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{0,n} = (1 - \rho) \exp \left[\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - k(\mu)}{k(\mu) - \mu} d\mu \right] \quad (3.32)$$

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1,n} = \frac{1 - k(z)}{k(z) - z} P_0(z) \quad (3.33)$$

Démonstration 2 :

L'équation (3.31) devient

$$P_0'(z) = \frac{\lambda}{\theta} \left[\frac{1 - k(z)}{k(z) - z} \right] P_0(z)$$

La résolution de cette équation nous donne

$$\begin{aligned}P_0(z) &= (1 - \rho) \exp \left[\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - k(\mu)}{k(\mu) - \mu} d\mu \right] \\ P_1(z) &= \frac{1 - k(z)}{k(z) - z} P_0(z)\end{aligned}$$

De plus $P_1(1) = \frac{\rho}{1 - \rho} P_0(1)$. Et vu que $P_0(1) + P_1(1) = 1$ on obtient $P_1(1) = \rho$ et $P_0(1) = 1 - \rho$.

D'où

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p(C(t) = 0) = 1 - \rho \quad , \quad P_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} p(C(t) = 1) = \rho$$

La fonction génératrice de la distribution marginale de la taille de l'orbite est définie par :

$$P(z) = P_0(z) + P_1(z) = \frac{(1-z)(1-\rho)}{k(z)-z} \exp \left[\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-k(\mu)}{k(\mu)-\mu} d\mu \right] \quad (3.34)$$

Et la fonction génératrice de la distribution de l'état stationnaire du nombre de clients dans le système est :

$$Q(z) = P_0(z) + zP_1(z) = \frac{(1-z)(1-\rho)k(z)}{k(z)-z} \exp \left[\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-k(\mu)}{k(\mu)-\mu} d\mu \right] \quad (3.35)$$

3.6.4 Les mesures de performance

Les caractéristiques du modèle M/G/1 avec rappels sont [31] :

- Nombre moyen de clients dans le système :

$$L = Q'(1) = \rho + \frac{\lambda^2 b_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1-\rho)} \quad (3.36)$$

- Nombre moyen de clients en orbite :

$$N = P'(1) = L - \rho = \frac{\lambda^2 b_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1-\rho)} \quad (3.37)$$

- Temps moyen d'attente d'un client dans le système :

$$W = \frac{N}{\lambda} = \frac{\lambda b_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)} \quad (3.38)$$

- Nombre moyen de rappels par client :

$$R = W\theta = \frac{\lambda \theta b_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{(1-\rho)} \quad (3.39)$$

3.7 Autres Modèles

3.7.1 Modèles d'attente avec rappels et pannes

Les systèmes de file d'attente avec rappels peuvent être sujet à des défaillances et à des réparations ont été étudiés par Aissani [3] en 1988 et par Kulkarni et Choi [11] en 1989, se sont avérés utiles. Ces modèles ont les mêmes caractéristiques que les modèles précédemment étudiés dans la section 5, ce qui les distingue est le risque des pannes, ces pannes peuvent être actives ou passives selon les défaillances se produisent pendant une période de fonctionnement ou d'inactivité de serveur respectivement concernant la nature de ces pannes, on distingue les plus rencontrés en littérature sont Artalejo [6] :

- **Panne de nature conservatrice** : Dès que la panne se produit, le client reste au près du serveur jusqu'à ce que la réparation soit faite, le client en question reprend son service à partir de point d'interruption.
- **Pannes de natures non conservatrices** : Dans ce cas, le client attend que la réparation soit terminée, mais le service doit être repris à zéro.
- **Pannes avec perte définitives de client** : Dès que la panne se produit, le client quitte le système définitivement.
- **Pannes avec perte momentanée du client** : Dès que la panne se produit, le client quitte le serveur et entre en orbite par la suite, son comportement ne diffère en rien de celui des clients qui se trouvent déjà en orbite.

Modèle M/G1 avec rappels et pannes

Description du modèle

Considérons un système de file d'attente M/G/1 avec rappels et pannes. Le flux des arrivées primaires est poisson de paramètre λ . Le service est assuré par un seul serveur sujet à des pannes aléatoires (active ou passive) qui surviennent à des taux exponentiels ($\alpha_1 > 0$ et $\alpha_0 > 0$, resp), les temps de réparation sont des variables aléatoires d_0 de fonction de répartition $\mathcal{R}_0(x)$ et de transformée de Laplace-Stieltjes $\widetilde{\mathcal{R}}_0(s)$ dans le cas d'une panne passive et des variables aléatoires d_1 de fonction de répartition $\mathcal{R}_1(x)$ et de transformée de Laplace-Stieltjes $\widetilde{\mathcal{R}}_1(s)$ dans le cas d'une panne active. La durée de service suivant une loi générale, de fonction t de répartition $\mathcal{B}(x)$ de transformer de la place $\widetilde{\mathcal{B}}(s)$, $\mathcal{R}(e) > 0$.

Nous supposons qu'il n'a pas d'espace d'attente et donc si le serveur est libre ou en bon état le client primaire sera pris en charge immédiatement. Sinon il entre en orbite, les clients en orbite répètent les appels jusqu'à ce que le serveur soit libre et ceci avec taux de rappel θ , les durées inter rappels sont exponentielle distribuées. Un client dont le service a été interrompu par une panne active, doivent décider soit de rejoint l'orbite avec probabilité p_a ou d'abandonner définitivement le système avec probabilité $(1 - p_a)$ Nous admettons que les variables définies précédemment soient mutuellement indépendantes. L'état du système est décrit par le processus stochastique $\{C(t), N(t); t \geq 0\}$ Où $N(t)$ représente le nombre de clients en l'orbite à l'instant t $C(t)$ (l'état de serveur à la date t) est défini comme suit :

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est libre et en bon état à l'instant } t, \\ 1 & \text{si le serveur est occupé et en bon état à l'instant } t, \\ 2 & \text{si le serveur est en panne à l'instant } t. \end{cases}$$

Ce processus n'est pas un processus de Markov. Pour le rendre markovien, on introduit une variable supplémentaire $\xi(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ avec

$$\xi(t) = \begin{cases} \text{est la durée de réparation écoulée si } C(t) = 1 \\ \text{est la durée de réparation écoulée si } C(t) = 2 \end{cases}$$

On étudie sa chaîne de Markov induite $\{N_n(t); n \geq 0\}$, $N_n = N_0(\xi_n)$ est le nombre de clients en orbite à la date ξ_n lorsque le serveur devient libre et opérationnel pour la $n^{\text{ème}}$ fois ($C(\xi_n) = 0, n \geq 0$). La fonction génératrice de la distribution stationnaire da la chaîne de Markov induite donnée par

$$\phi(z) = k \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \int_1^z \frac{1}{\mu} \frac{(\alpha_0 + \lambda)\beta(u) - \alpha(u)}{\beta(u)} du \right\}$$

Où

$$\beta(z) = 1 - \tilde{\beta}(z),$$

$$\alpha(z) = \tilde{\alpha}(z) - (\alpha_0 + \lambda)\tilde{\beta}(z),$$

Avec

$$\tilde{\alpha}(z) = \alpha_0 \tilde{\mathcal{R}}_0(\lambda - \lambda z) + \lambda \alpha_1 \frac{1 - \tilde{\mathcal{B}}(\lambda z + \alpha_1) \tilde{\mathcal{R}}_1(\lambda - \lambda z)(1 - p_a(1 - z))}{\lambda - \lambda z + \alpha_1}$$

$$+\lambda\tilde{B}(\lambda - \lambda z + \alpha_1),$$

$$\tilde{\beta}(z) = \alpha_1 \frac{(1 - \lambda\tilde{B}(\lambda - \lambda z + \alpha_1))\tilde{\mathcal{R}}_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \alpha_1} \left(p_a + \frac{1 - p_a}{z} \right) + \frac{1}{z} \tilde{B}(\lambda - \lambda z + \alpha_1),$$

$$k = \frac{1 - \rho}{\lambda(1 + \alpha_0 E(d_0)) + \alpha_0(1 - \rho)},$$

$$\rho = \lambda \frac{1 - \tilde{\beta}(\alpha_1)}{\alpha_1} \left[1 + \alpha_1(E(d_1) + \frac{p_a}{\lambda}) \right].$$

Distributions stationnaires

Soit $N_t; t \geq 0$ un processus stochastique, qui représente le nombre de clients en orbite à la date t . La fonction génératrice de la distribution stationnaire de $N_t, t \rightarrow \infty$ est donné par

$$p(z) = p_0(z) + p_1(z) + p_2(z)$$

$$p_0(z) = \frac{1}{A} M(z),$$

$$p_1(z) = \frac{1}{A} \left(\frac{1 - \tilde{\beta}(\lambda - \lambda z + \alpha_1)}{\lambda - \lambda z + \alpha_1} \right) (\lambda M(z) + \theta M'(z)),$$

$$p_2(z) = \frac{1}{A} \left[\frac{1 - \tilde{\mathcal{R}}_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \alpha_0 M(z) + M(z) N(z) (\lambda(1 - p_a) + \lambda z p_a) \right. \\ \left. + M'(z) N(z) (\theta(1 - p_a) + \theta z p_a) \right].$$

$$N(z) = \alpha_1 \frac{\tilde{\beta}(\lambda - \lambda z + \alpha_1)}{\lambda - \lambda z + \alpha_1} \frac{1 - \tilde{\mathcal{R}}_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z},$$

$$M(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j \pi_j}{\lambda + j\theta + \alpha_1},$$

$$A = k(1 - \alpha_0 E(d_0)) + 1 - \tilde{\beta}(\alpha_1)(1 - \alpha_0 k) \left(E(d_1) + \frac{1}{\alpha_1} \right),$$

Donc

$$p(z) = \frac{1}{A} \left[M(z) + \frac{1 - \tilde{\beta}(\lambda - \lambda z + \alpha_1)}{\lambda - \lambda z + \alpha_1} \left(\lambda M(z) + \theta M'(z) \right) \right. \\ \left. + \frac{1 - \tilde{\mathcal{R}}_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \alpha_0 M(z) + M(z)N(z)(\lambda(1 - p_a) + \lambda z p_a) \right. \\ \left. + M'(z)N(z)(\theta(1 - p_a) + \theta z p_a) \right]$$

3.7.2 Modèles d'attente avec des clients impatientes

Les systèmes de file d'attente avec clients impatientes sont des modèles d'attente contenant une contrainte au système en spécifiant que les clients manifestent un comportement d'impatience, et quittent le système (clients perdus) quand les temps d'attente dans le système dépassent leur propre délai (patience). Ces systèmes ont été étudiés par Artalejo [25] et Martin et Artalejo [20]. et dans [9], L'impatience est une caractéristique intéressante dans une grande variété de situations, peut être rencontrée dans les applications de soins de santé, les centres d'appel, etc.

Domenech-Benlloch et al [13] ont considéré une file d'attente avec le phénomène d'impatience des clients qui attendent dans l'orbite, ils ont possédé deux méthodes tronquées généralisées différents (appelées HM1 et HM2) basées sur l'homogénéisation de l'espace étatique au-delà d'un nombre d'utilisateurs dans l'orbite.

Modèle M/G/1 avec rappels et clients impatientes

Description du modèle

Soit un système de file d'attente M/G/1 avec rappels et clients impatientes les clients primaires arrivent selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Les durées de service suivent une loi générale, de fonction de répartition $\mathcal{B}(x)$ de transformée de Laplace $\tilde{\mathcal{B}}(s)$, $\mathcal{R}(e) > 0$. À l'arrivée d'un client, si le serveur est occupé ce client entre l'orbite avec une probabilité $H_1 < 1$ ou quitte le système avec une probabilité $1 - H_1$. Dans la même situation un client secondaire avec une probabilité $H_2 \leq 1$ revient en orbite, ou avec une probabilité $1 - H_2$ abandonne le système. La durée entre deux rappels consécutifs suit une loi exponentielle de taux $\theta > 0$. Nous supposons l'indépendance mutuelle de toutes les variables aléatoires définies précédemment pour décrire le modèle. Une méthode indirecte (la méthode des moments) est appliquée pour résoudre les équations de base et les expressions pour les moments factoriels connexes, Soient les moments.

$$\beta_k = (-1)^k \tilde{\mathcal{B}}^k(0) \text{ et } \gamma = \frac{1}{\beta_1}. \text{ L'intensité de trafic } \rho = \lambda \beta_1 H_1$$

Cependant, les cas $H_2 < 1$ et $H_2 = 1$ nous donnent des résultats différents du problème

a) Le cas ou $H_2 = 1$

Les auteurs Falin et Templeton [29] ont étudié le régime non stationnaire du système, réalisé les investigations sur la chaîne de Markov induite et obtenu la distribution stationnaire conjointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite. Si $\rho H_1 < 1$ et la file est dans son état stable, alors selon Lubacz et Roberts [27], on a le nombre moyen de client en orbite :

$$\tilde{n}_o = \frac{\lambda^2 H_1}{1 - \rho} \left(\frac{\beta_1}{\theta} + \frac{\beta_2}{2(1 + \lambda\beta_1 - \rho)} \right).$$

a) Cas $H_2 < 1$:

Ce cas est très compliqué et on ne dispose la distribution stationnaire de l'état du système (exprimée en termes des séries hypergéométriques) que pour des cas particuliers où la distribution des temps de service est exponentielle. Dans le régime stationnaire (qui pour le cas $H_2 < 1$ existe toujours), le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\tilde{n}_o = \frac{\lambda H_2 + \left(\lambda H_1 - \frac{H_2}{\beta_1} \right)}{\theta(1 - H_2)(1 + \Lambda)} \Lambda.$$

Où

$$\Lambda = \frac{\lambda\beta_1 \Phi(a + 1, c, \xi)}{\Phi(a, c, \xi)}$$

Et

$$\Phi(a, c, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{a+i}{c+i}$$

est la fonction hypergéométrique à trois paramètres :

$$a = \frac{\lambda}{\theta}, \quad c = \frac{1}{\beta_1} + \frac{(1 - H_2)(\lambda + \theta)}{\theta(1 - H_2)}, \quad \xi = \frac{\lambda H_1}{\theta(1 - H_2)}.$$

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous sommes intéressés aux systèmes d'attente du type M/M/1, M/M/2 et M/G/1 avec rappels. Une étude poussée de ce genre de systèmes est nécessaire pour améliorer et mieux évaluer les performances des systèmes informatiques, des réseaux de communications et systèmes complexes dans nombreux domaines. Cette technique est devenue inconcevable pour construire un système quelconque sans avoir fait une analyse des performances préalable. Les modèles d'attente développés ces dernières décennies tentent de prendre en considération les variantes et les généralisations des principales files d'attente avec rappels. Parmi ces variantes, on a les systèmes que nous étudierons dans le prochain chapitre qui sont les files d'attente avec rappels, serveur non fiable et clients impatientes.

Chapitre 4

Modèle d'attente avec rappels, serveur non fiable et clients impatientes

4.1 Introduction

Il existe un grand nombre de variantes et de généralisations des principales files d'attente avec rappels. Parmi ces variantes, on a des files d'attente avec rappels, clients impatientes et interruptions de service. Un client en orbite peut éventuellement renoncer après une période aléatoire de patience dans ce cas le client est dit « impatient », les systèmes qui contiennent ce type de client ont fait des pertes considérables à l'économie de plusieurs firmes, en pratique le serveur n'est pas disponible en permanence pour servir les clients et il est sujet à des pannes qui peuvent être actives ou passives selon que les défaillances se produisent pendant une période de fonctionnement ou d'inactivité du serveur. D'après les articles de Aissani (1988) [3] et Kulkarni et Choi (1990) [11], de nombreuses études sur les files d'attente avec rappels non fiables ont été effectuées.

Dans ce chapitre on s'intéresse au système M/M/1 avec rappels, serveur non fiable et clients impatientes. Nous présentons tout d'abord une description de ce système. Nous présentons aussi sa distribution stationnaire et ses mesures de performance qui peuvent être utiles pour les praticiens. Nous proposons enfin plusieurs résultats numériques pour étudier l'effet de certains paramètres clés sur les caractéristiques du modèle.

4.2 Description du modèle

Nous considérons un système de files d'attente M/M/1 avec rappels non fiables tels que le serveur sujet à des pannes actives, de type de clients impatientes, dont lequel les clients primaires arrivant selon un processus de poisson de taux λ ($\lambda > 0$), les temps de service sont exponentielle de la moyenne $\frac{1}{\mu}$. À l'arrivée d'un client primaire, si le serveur est libre et en bon état, il l'occupe immédiatement et quittera le système à la fin de son service, autrement si le serveur est occupé ou en panne le client primaire rejoint l'orbite

et devient une source secondaire et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire, les temps entre deux rappels consécutifs sont exponentiels de paramètre θ .

Les clients secondaires deviennent impatients après une durée de patience limitée lorsque cette durée expire, ils quittent le système pour toujours sans avoir atteint leur service, la durée d'impatience suit une distribution exponentielle de taux $\gamma > 0$.

Dans ce système, nous considérons les pannes avec pertes momentanées du client (c'est la nature de panne du serveur), ces pannes de serveur via un processus de poisson de taux α . La maintenance corrective (réparation) est lancée immédiatement après un échec, sa durée de réparation est une variable aléatoire de distribution exponentielle avec un taux β . Nous supposons que si le serveur est en panne et il y a un seul client dans l'orbite, ce dernier devrait patient. Toutes les variables aléatoires définies précédemment sont supposées mutuellement indépendantes.

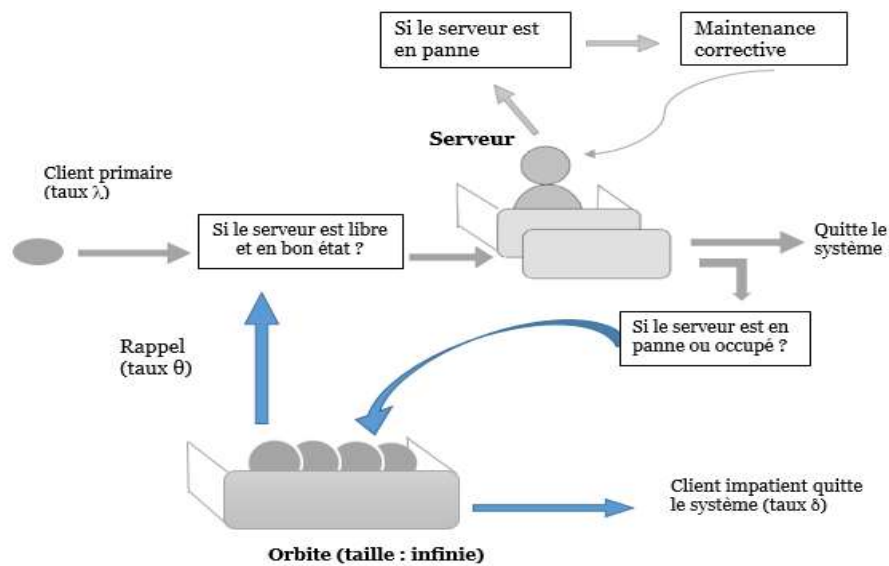


Figure 4.1 – Modèle de files d’attente avec rappels, à serveur non fiable et clients impatients.

L’état du système à l’instant t peut être décrit par le processus :

$$X(t) = \{C(t), N(t); t \geq 0\} \tag{4.1}$$

Où

$N(t)$: Le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t .

$C(t)$: l'état de serveur à l'instant t .

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est libre et en bon état,} \\ 1 & \text{si le serveur est occupé,} \\ 2 & \text{si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

Il est clair que le processus (4.1) est Markovien bidimensionnel à espace d'état $s = \{0,1,2\} \times \mathbb{N}$, supposons que le système est stable c'est-à-dire que le régime stationnaire existe $\rho < 1$ (ρ est l'intensité de trafic).

4.3 Distribution stationnaire de l'état du système

La distribution stationnaire conjointe de l'état du serveur de la taille de l'orbite associée aux variables concernées converge vers un équilibre stochastique unique pour $t \rightarrow \infty$, on a

$$p_{i,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} p(C(t) = i, N(t) = n), i = 0,1,2 \text{ et } n = 0,1,2, \dots$$

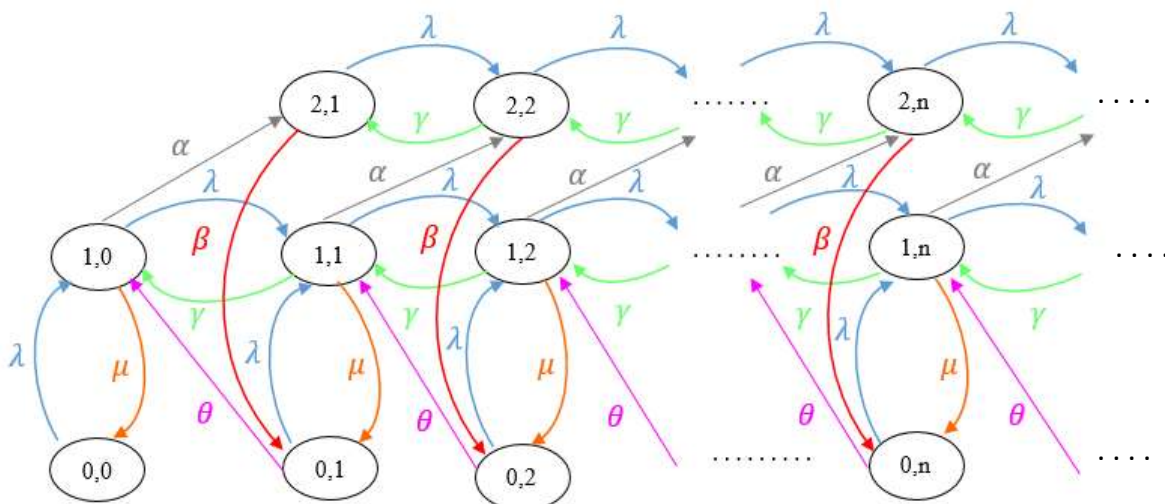


Figure 4.2 – Graphe de transition de modèle avec rappels, serveur non fiable et clients impatientes.

Les taux de transition de l'état sont donnés sous la forme :

$$q_{(0,n)(1,n)} = q_{(1,n)(1,n+1)} = q_{(2,n)(2,n+1)} = \lambda, n = 0,1,2, \dots,$$

$$q_{(1,n)(1,n-1)} = \gamma, n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$q_{(2,n)(2,n-1)} = \gamma, n = 2, 3, 4, \dots,$$

$$q_{(1,n)(0,n)} = \mu, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$q_{(0,n)(1,n-1)} = \theta, n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$q_{(1,n)(2,n+1)} = \alpha, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$q_{(2,n)(0,n)} = \beta, n = 1, 2, 3, \dots,$$

À partir du graphe de transition (4.2) et les taux de transition, les probabilités $p_{i,n}$ vérifient le système d'équations de balance :

$$\lambda p_{0,0} = \mu p_{1,0} \quad (4.2)$$

$$(\mu + \lambda + \alpha) p_{1,0} = \theta p_{0,1} + \lambda p_{0,0} + \delta p_{1,1}. \quad (4.3)$$

$$(\lambda + \beta) p_{2,1} = \alpha p_{1,0} + \gamma p_{2,2}. \quad (4.4)$$

$$(\lambda + \theta) p_{0,n} = \mu p_{1,n} + \beta p_{2,n} \quad n \geq 1, \quad (4.5)$$

$$(\gamma + \mu + \lambda + \alpha) p_{1,n} = \lambda p_{0,n} + \lambda p_{1,n-1} + \gamma p_{1,n+1} + \theta \quad n \geq 1, \quad (4.6)$$

$$(\gamma + \beta + \lambda) p_{2,n} = \lambda p_{2,n-1} + \gamma p_{2,n+1} + \alpha p_{1,n-1} \quad n \geq 2, \quad (4.7)$$

Ainsi que l'équation de normalisation donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (p_{0,n} + p_{1,n} + p_{2,n}) = 1. \quad (4.8)$$

On suppose que $p_{2,0} = 0$. La résolution de ce système de manière récursive est très compliquée. Une autre façon de calculer les probabilités d'état stationnaire est la méthode des fonctions génératrices. Soit $p_i(z)$ la fonction génératrice de $p_{i,n}$ tels que :

$$p_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,n} z^n, p_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,n} z^n, p_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2,n} z^n, \text{ avec } z \in \mathbb{C}.$$

Le système d'équations de balance devient :

$$(\lambda + \theta) p_0(z) = \beta p_2(z) + \mu p_1(z) + \theta p_{0,0}, \quad (4.9)$$

$$\left(\alpha + \mu + \lambda(1 - z) + \gamma \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right) p_1(z) = \left(\lambda + \frac{\theta}{z} \right) p_0(z) + \frac{\gamma}{z} (z - 1) p_{1,0} - \frac{\theta}{z} p_{0,0}, \quad (4.10)$$

$$\left(\beta + \lambda(1 - z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right)p_2(z) = \alpha zp_1(z) + \gamma(z - 1)p_{2,1}, \quad (4.11)$$

$$\sum_{j=0}^2 p_j(1) = 1. \quad (4.12)$$

De l'équation (4.11), on a :

$$p_2(z) = \frac{\alpha zp_1(z) + \gamma(z - 1)p_{2,1}}{\beta + \lambda(1 - z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right)} \quad (4.13)$$

À l'aide de l'équation (4.10), on peut écrire :

$$p_0(z) = \frac{\left(\alpha + \mu + \lambda(1 - z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right)p_1(z) - \frac{\gamma}{z}(z - 1)p_{1,0} + \frac{\theta}{z}p_{0,0}}{\lambda + \frac{\theta}{z}} \quad (4.14)$$

Ainsi, on remplace (4.13) et (4.14) dans (4.9), et on aura :

$$p_1(z) = \frac{\gamma(z-1)(\lambda+\theta)(\lambda z+\theta)^{-1}p_{1,0}+\theta(1-(\lambda+\theta)(\lambda z+\theta)^{-1})p_{0,0}+\gamma\beta(z-1)(\beta+\lambda(1-z)+\gamma(1-\frac{1}{z}))^{-1}p_{2,1}}{(\alpha+\mu+\lambda(1-z)+\gamma(1-\frac{1}{z}))(\lambda+\frac{\theta}{z})^{-1}-\beta\alpha z(\beta+\lambda(1-z)+\gamma(1-\frac{1}{z}))^{-1}-\mu} \quad (4.15)$$

Avec

$$p_{1,0} = \frac{\lambda}{\mu}p_{0,0}.$$

Par conséquent, pour déterminer $p_{0,0}$ il suffit d'évaluer les fonctions génératrices partielles telles que $z \rightarrow 1$:

$$p_0(1) = \lim_{z \rightarrow 1} p_0(z) = \frac{(\alpha + \mu)}{(\lambda + \theta)} p_1(1) + \frac{\theta}{(\lambda + \theta)} p_{0,0}.$$

$$p_2(1) = \lim_{z \rightarrow 1} p_2(z) = \frac{\alpha}{\beta} p_1(1).$$

D'après la fonction génératrice (4.15), elle s'exprime en fonction du $f(z)$ et $g(z)$ sous la forme

$$p_1(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Où

$$f(z) = \gamma(z-1) \frac{(\lambda + \theta)}{(\lambda z + \theta)} p_{1,0} + \theta \left(1 - \frac{(\lambda + \theta)}{(\lambda z + \theta)}\right) p_{0,0} \\ + \frac{\gamma\beta(z-1)}{(\beta + \lambda(1-z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right))} p_{2,1}$$

$$g(z) = \left(\alpha + \mu + \lambda(1-z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{(\lambda + \theta)}{\left(\lambda + \frac{\theta}{z}\right)} - \beta\alpha z \left(\beta + \lambda(1-z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right)^{-1} - \mu$$

À ce stade si nous remplaçons par $z=1$, nous observons que $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow 1} g(z) = 0$ alors on obtient une forme indéterminée pour la formule de $p_1(1)$.

Nous appliquons donc « la règle de L'Hôpital », cela nous donne :

$$f'(z) = \frac{\gamma\lambda(\lambda + \theta)}{(\lambda z + \theta)^2} \left(\frac{(\lambda z + \theta) - (z-1)\lambda}{\mu} + \theta \right) p_{0,0} \\ + \gamma\beta \frac{(\beta + \gamma\left(1 + \frac{1}{z^2}\right))}{(\beta + \lambda(1-z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right))^2} p_{2,1}$$

$$g'(z) = \frac{(\lambda + \theta)}{(\lambda z + \theta)^2} \left((\alpha + \gamma + \mu + \lambda(1-2z))(\lambda z + \theta) - \lambda z(\alpha + \gamma + \mu + \lambda(1-z)) \right. \\ \left. - \gamma\lambda \right) - \beta\alpha \frac{(\gamma + \lambda + \beta)}{(\beta + \lambda(1-z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right))^2}$$

De plus on a

$$\lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = \frac{\gamma\lambda}{(\lambda + \theta)} \left(\frac{(\lambda + \theta)}{\mu} + \theta \right) p_{0,0} + \gamma \frac{(\beta + 2\gamma)}{\beta} p_{2,1}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} g'(z) = \frac{(\lambda + \theta)}{(\lambda + \theta)^2} \left((\alpha + \gamma + \mu - \lambda)(\lambda + \theta) - \lambda(\alpha + \mu + \lambda - 2\gamma) \right) \\ - \alpha \frac{(\gamma + \lambda + \beta)}{\beta}$$

Donc on peut déterminer l'expression de $p_1(1)$.

Après réarranger les termes et simplifier, on trouve :

$$p_1(z) = \frac{\left(\frac{\gamma\lambda}{\mu}(\lambda+\theta)+\lambda\theta\right)(\lambda+\theta)p_{0,0}+\gamma\beta\left(\beta+\gamma\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\right)(\beta+\lambda(1-z)+\gamma\left(1-\frac{1}{z}\right))^{-2}(\lambda z+\theta)^2 p_{2,1}}{(\lambda+\theta)\left(\theta(\alpha+\gamma+\mu+\lambda(1-2z))-\lambda(\lambda z^2-\gamma)\right)-\beta\alpha\left(\gamma\left(1-\frac{2}{z}\right)+\lambda+\beta\right)(\lambda z+\theta)^2\left(\beta+\lambda(1-z)+\gamma\left(1-\frac{1}{z}\right)\right)^{-2}}.$$

(4.16)

Et lorsque $z=1$, on aura :

$$p_1(1) = \frac{\left(\frac{\gamma\lambda}{\mu}(\lambda+\theta)+\lambda\theta\right)p_{0,0}+\frac{\gamma}{\beta}(\lambda+\theta)(2\gamma+\beta)p_{2,1}}{\theta(\alpha+\gamma+\mu-\lambda)-\lambda(\lambda-\gamma)-\frac{\alpha}{\beta}(\lambda+\beta-\gamma)(\lambda+\theta)}.$$

D'autres part, et comme les probabilités somment à 1 :

$$\begin{aligned} G(1) &= p_0(1) + p_1(1) + p_2(1), \\ &= \frac{(\alpha+\mu)}{(\lambda+\theta)}p_1(1) + \frac{\theta}{(\lambda+\theta)}p_{0,0} + p_1(1) + \frac{\alpha}{\beta}p_1(1), \\ &= \frac{\theta}{(\lambda+\theta)}p_{0,0} + p_1(1)\left(\frac{(\alpha+\mu)}{(\lambda+\theta)} + \frac{\alpha}{\beta} + 1\right), \\ &= 1. \end{aligned}$$

Alors, on déduit que :

$$p_{0,0} = \frac{\beta(\lambda+\theta)\left(\theta(\alpha+\gamma+\mu-\lambda)-\lambda(\lambda-\gamma)-\frac{\alpha}{\beta}(\lambda+\beta-\gamma)(\lambda+\theta)\right)-\frac{\gamma}{\beta}(\lambda+\theta)(2\gamma+\beta)((\alpha+\beta)(\lambda+\theta)+\beta(\alpha+\mu))p_{2,1}}{\left(\frac{\gamma\lambda}{\mu}(\lambda+\theta)+\lambda\theta\right)((\alpha+\beta)(\lambda+\theta)+\beta(\alpha+\mu))+\theta\beta\left(\theta(\alpha+\gamma+\mu-\lambda)-\lambda(\lambda-\gamma)-\frac{\alpha}{\beta}(\lambda+\beta-\gamma)(\lambda+\theta)\right)}.$$

(4.17)

$\forall p_{2,1} \in [0,1]$,

Comme $p_{0,0} \in [0,1]$, on aura les conditions suivantes :

- $\theta(\alpha+\mu-\lambda+\gamma) > \lambda(\lambda-\gamma) + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(\lambda+\beta-\gamma)(\lambda+\theta)$
- $\beta^2\left(\theta(\alpha+\mu-\lambda+\gamma)-\lambda(\lambda-\gamma)-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(\lambda+\beta+\gamma)(\lambda+\theta)\right) \geq P_{21}\gamma(2\gamma+\beta)((\alpha+\beta)(\lambda+\theta)+\beta(\alpha+\mu))$

A présent, il est possible de calculer la fonction génératrice de la distribution stationnaire marginale du nombre moyen de clients en orbite

$$\begin{aligned}
G(z) &= p_0(z) + p_1(z) + p_2(z) \\
&= p_1(z) \left[1 + \frac{\alpha z}{\beta + \lambda(1-z) + \gamma(1-\frac{1}{z})} + \frac{\alpha + \mu + \lambda(1-z) + \gamma(1-\frac{1}{z})}{(\lambda + \frac{\theta}{z})} \right] \\
&\quad + \frac{\gamma(z-1)p_{2,1}}{(\beta + \lambda(1-z) + \gamma(1-\frac{1}{z}))} + \frac{\left(\theta - \frac{\lambda\gamma}{\mu}(z-1)\right)p_{0,0}}{(\lambda z + \theta)}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
G'(z) &= p_1'(z) \left[1 + \frac{\alpha z}{\beta + \lambda(1-z) + \gamma(1-\frac{1}{z})} + \frac{\alpha + \mu + \lambda(1-z) + \gamma(1-\frac{1}{z})}{(\lambda + \frac{\theta}{z})} \right] \\
&+ p_1(z) \left[\frac{\alpha(\gamma + \lambda + \beta - \frac{2\gamma}{z})}{(\beta + \lambda(1-z) + \gamma(1-\frac{1}{z}))^2} + \frac{\theta(\alpha + \mu + \gamma + \lambda(1-2z) - \lambda(\lambda z^2 - \gamma))}{(\lambda z + \theta)^2} \right] \\
&\quad + \gamma p_{2,1} \frac{\left((\gamma + \lambda + \beta - \lambda z - \frac{\gamma}{z}) - (\frac{\gamma}{z^2} - \lambda)(z-1) \right)}{\left(\gamma + \lambda + \beta - \lambda z - \frac{\gamma}{z} \right)^2} \\
&\quad - \lambda p_{0,0} \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}(\lambda z + \theta) + \left(\theta - \frac{\lambda\gamma}{\mu}(z-1) \right) \right)}{(\lambda z + \theta)^2}.
\end{aligned}$$

Tel que la formule de $p_1(z)$ et $p_1'(z)$ est donné par :

$$p_1(z) = \frac{a + A(z)}{B(z) - C(z)} ;$$

$$p_1'(z) = \frac{A'(z)(B(z) - C(z)) - (B'(z) - C'(z))(a + A(z))}{(B(z) - C(z))^2}. \tag{4.19}$$

Où

$$a = \left(\frac{\gamma\lambda}{\mu}(\lambda + \theta) + \lambda\theta \right) (\lambda + \theta)p_{0,0}.$$

$$A(z) = \gamma\beta \frac{(\beta + \gamma(1 + \frac{1}{z^2}))(\lambda z + \theta)^2 p_{2,1}}{(\beta + \lambda(1-z) + \gamma(1-\frac{1}{z}))^2}.$$

$$B(z) = (\lambda + \theta)(\theta(\alpha + \mu + \lambda(1 - 2z) + \gamma) - \lambda(\lambda z - \gamma)).$$

$$C(z) = \frac{\beta\alpha\gamma\left(1 - \frac{2}{z}\right) + \lambda(1 - z) + \beta(\lambda z + \theta)^2}{(\beta + \lambda(1 - z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right))^3}.$$

$$A'(z) = 2\gamma\beta(\lambda z + \theta)p_{2.1} \frac{\left(\lambda\left(\gamma + \beta + \frac{\gamma}{z^2}\right) - \frac{\gamma}{z^3}(\lambda z + \theta)\right)\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda(1 - z) + \beta\right) - \left(\gamma + \beta + \frac{\gamma}{z^2}\right)(\lambda z + \theta)\left(\frac{\gamma}{z^2} - \lambda\right)}{\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda(1 - z) + \beta\right)^3}.$$

$$B'(z) = -\lambda(\lambda + \theta)(2\theta + \lambda).$$

$$C'(z) = \frac{2\alpha\beta(\lambda z + \theta)\left(\left(\frac{\gamma}{z^2}(\lambda z + \theta) + \lambda\left(\gamma + \beta - \frac{2\gamma}{z}\right)\right)\left(\gamma + \lambda + \beta - \lambda z - \frac{\gamma}{z}\right) - \left(\frac{\gamma}{z^2} - \lambda\right)\left(\gamma + \lambda + \beta - \frac{2\gamma}{z}\right)(\lambda z + \theta)\right)}{\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda(1 - z) + \beta\right]^3}.$$

On note que :

$$A'(1) = \frac{2\gamma}{\beta^2}(\lambda + \theta)\left[(2\gamma + \beta)(\lambda\beta - (\lambda + \theta)(\gamma - \lambda)) - \gamma\beta(\lambda + \theta)\right]p_{2.1}.$$

$$B'(1) = -\lambda(\lambda + \theta)(2\theta + \lambda).$$

$$C'(1) = \frac{2\alpha}{\beta^2}(\lambda + \theta)\left[(\lambda + \beta - \gamma)(\lambda\beta - (\gamma - \lambda)(\lambda + \theta)) + \gamma\beta(\lambda + \theta)\right].$$

et la fonction génératrice de la distribution de l'état stationnaire du nombre de clients dans le système est

$$Q(z) = p_0(z) + zp_1(z) + zp_2(z)$$

$$= p_1(z) \left[z + \frac{\alpha z^2}{\gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda(1 - z) + \beta} + \frac{\alpha + \mu + \lambda(1 - z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right)}{\lambda + \frac{\theta}{z}} \right] \\ + \frac{z\gamma(z - 1)}{\gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda(1 - z) + \beta} p_{2.1} + \frac{\left(\frac{\theta}{z} - \frac{\gamma\lambda}{\mu z}(z - 1)\right)}{\lambda z + \theta} p_{0.0}$$

Avec

$$Q'(z) = p_1'(z) \left[z + \frac{\alpha z^2}{\gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda(1 - z) + \beta} + \frac{\alpha + \mu + \lambda(1 - z) + \gamma\left(1 - \frac{1}{z}\right)}{\lambda + \frac{\theta}{z}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + p_1(z) \left[1 + \frac{2z(\gamma(1 - \frac{1}{z}) + \lambda(1 - z) + \beta + (\lambda z^2 - \gamma))}{(\gamma(1 - \frac{1}{z}) + \lambda(1 - z) + \beta)^2} \right. \\
& \left. + \frac{(\alpha + \gamma + \mu + \lambda(1 - 2z))(\lambda z + \theta) - \lambda(z(\alpha + \mu + \lambda + \gamma) - \lambda z^2 - \gamma)}{(\lambda z + \theta)^2} \right] \\
& + \frac{(2z\gamma - 1) \left(\gamma \left(1 - \frac{1}{z} \right) + \lambda(1 - z) + \beta \right) + (\lambda z - \frac{\gamma}{z})\gamma(z - 1)}{(\gamma(1 - \frac{1}{z}) + \lambda(1 - z) + \beta)^2} p_{2,1} \\
& - \lambda \frac{(\frac{\gamma}{\mu}(\lambda z + \theta) + \theta - \frac{\lambda\gamma}{\mu}(z - 1))}{(\lambda z + \theta)^2} p_{0,0}
\end{aligned}$$

4.4 Mesures de performance

À l'aide des fonctions génératrices obtenues, nous pouvons calculer plusieurs mesures de performance du système, telles que [26] :

- La probabilité que le serveur est occupé :

$$p_1 = p_1(1) = \frac{\left(\frac{\gamma\lambda}{\mu}(\lambda + \theta) + \lambda\theta \right) p_{0,0} + \frac{\gamma}{\beta}(\lambda + \theta)(2\gamma + \beta)p_{2,1}}{\theta(\alpha + \gamma + \mu - \lambda) - \lambda(\lambda - \gamma) - \frac{\alpha}{\beta}(\lambda + \beta - \gamma)(\lambda + \theta)}. \quad (4.20)$$

- La probabilité que le serveur tombe en panne :

$$p_2 = p_2(1) = \frac{\left(\frac{\gamma\lambda}{\mu} + \lambda\theta \right) (\lambda + \theta)p_{0,0} + \frac{\gamma}{\beta}(\lambda + \theta)(2\gamma + \beta)p_{2,1}}{\frac{\beta\theta}{\alpha}(\alpha + \gamma + \mu - \lambda) - \lambda(\lambda - \gamma) - (\lambda + \beta - \gamma)(\lambda + \theta)}. \quad (4.21)$$

- Nombre moyen de clients en orbite \bar{n}_o

$$\begin{aligned}
\bar{n}_o &= G'(1) \\
&= p_1'(1) \left[\frac{(\theta + \lambda)(\beta + \alpha) + \beta(\alpha + \mu)}{\beta(\lambda + \theta)} \right] \\
&+ p_1(1) \left[\frac{\alpha(\lambda + \beta - \gamma)(\lambda + \theta)^2 + \beta^2((\gamma - \lambda)(\lambda + \theta) + \theta(\alpha + \mu - 2\gamma))}{\beta^2(\lambda + \theta)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma}{\beta} p_{2.1} - \lambda p_{0.0} \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}(\lambda + \theta) + \theta\right)}{(\lambda + \theta)^2}. \quad (4.22)$$

– Nombre moyen de clients dans le système \bar{n}_s

$$\begin{aligned} \bar{n}_s &= Q'(1) \\ &= p_1'(1) \left[\frac{(\theta + \lambda)(\beta + \alpha) + \beta(\alpha + \mu)}{\beta(\lambda + \theta)} \right] \\ &+ p_1(1) \left[1 + \frac{2\beta + \lambda - \gamma}{\beta^2} + \frac{(\alpha + \mu + \gamma - \lambda)(\lambda + \theta) - \lambda(\alpha + \mu)}{(\lambda + \theta)^2} \right] \\ &+ \frac{2\gamma - 1}{\beta} p_{2.1} - \lambda p_{0.0} \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}(\lambda + \theta) + \theta\right)}{(\lambda + \theta)^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

– Le temps moyen de séjour des clients dans le système W

$$\begin{aligned} W &= \frac{\bar{n}_s}{\lambda} \\ &= p_1'(1) \left[\frac{(\theta + \lambda)(\beta + \alpha) + \beta(\alpha + \mu)}{\lambda\beta(\lambda + \theta)} \right] \\ &+ p_1(1) \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{2\beta + \lambda - \gamma}{\lambda\beta^2} + \frac{(\alpha + \mu + \gamma - \lambda)(\lambda + \theta) - \lambda(\alpha + \mu)}{\lambda(\lambda + \theta)^2} \right] \\ &+ \frac{2\gamma - 1}{\lambda\beta} p_{2.1} - p_{0.0} \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}(\lambda + \theta) + \theta\right)}{(\lambda + \theta)^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

– Le temps moyen d'attente d'un client W_q

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{\bar{n}_0}{\lambda} \\ &= p_1'(1) \left[\frac{(\theta + \lambda)(\beta + \alpha) + \beta(\alpha + \mu)}{\lambda\beta(\lambda + \theta)} \right] \\ &+ p_1(1) \left[\frac{\alpha(\lambda + \beta - \gamma)(\lambda + \theta)^2 + \beta^2((\gamma - \lambda)(\lambda + \theta) + \theta(\alpha + \mu - 2\gamma))}{\lambda\beta^2(\lambda + \theta)^2} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma}{\lambda\beta} p_{2,1} - p_{0,0} \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}(\lambda + \theta) + \theta\right)}{(\lambda + \theta)^2}. \quad (4.25)$$

– Nombre moyen de rappels par client (d'après *la formule de Little*)

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \theta W_q \\ &= p_1'(1) \left[\frac{\theta((\theta + \lambda)(\beta + \alpha) + \beta(\alpha + \mu))}{\lambda\beta(\lambda + \theta)} \right] \\ &+ p_1(1) \left[\theta \frac{\alpha(\lambda + \beta - \gamma)(\lambda + \theta)^2 + \beta^2((\gamma - \lambda)(\lambda + \theta) + \theta(\alpha + \mu - 2\gamma))}{\lambda\beta^2(\lambda + \theta)^2} \right] \\ &+ \frac{\theta\gamma}{\lambda\beta} p_{2,1} - \theta p_{0,0} \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}(\lambda + \theta) + \theta\right)}{(\lambda + \theta)^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.5 Indice de fiabilité

Dans cette section, nous fournissons la disponibilité du serveur. Soit $A(t)$ la probabilité que le serveur soit disponible à l'instant t et définissons la disponibilité (libre ou en bon état) du serveur comme [26] :

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t).$$

A est obtenue en considérant l'équation suivante

$$\begin{aligned} A &= p_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,n} = \lim_{z \rightarrow 1} p_0(z) \\ &= p_{0,0} \left[\frac{(\alpha + \mu) \left(\frac{\gamma\lambda}{\mu} + \lambda\theta\right) (\lambda + \theta)}{(\lambda + \theta) (\theta(\alpha + \gamma + \mu - \lambda) - \lambda(\lambda - \gamma) - \frac{\alpha}{\beta}(\lambda + \beta - \gamma)(\lambda + \theta))} + \frac{\theta}{\lambda + \theta} p_{0,0} \right] \\ &+ \frac{\frac{\gamma}{\beta}(\alpha + \mu)(\lambda + \theta)(2\gamma + \beta)p_{2,1}}{(\lambda + \theta) (\theta(\alpha + \gamma + \mu - \lambda) - \lambda(\lambda - \gamma) - \frac{\alpha}{\beta}(\lambda + \beta - \gamma)(\lambda + \theta))}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.6 Illustration numérique

Notre objectif est d'étudier le comportement des mesures de performance de ce système par rapport à quelques paramètres. Le calcul numérique est réalisé à l'aide du logiciel R.

Dans tout ce qui suit, nous fixerons la valeur de $p_{2,1}$ à 0,1.

4.6.1 L'effet du taux d'arrivée λ sur le modèle :

On fait varier le taux d'arrivée λ sur les mesures de performance pour $\beta=7$, $\mu=3$, $\gamma=2$, $\alpha=1.3$, $\theta=4$.

λ	p_0	p_1	p_2	\bar{n}_0	\bar{n}_s	W_q	W	\bar{R}
1	0,6401365	0,3034993	0,05636416	2,878749	3,001613	2,878749	3,001613	11,51499
1,1	0,6167547	0,3232189	0,06002637	3,490886	3,600002	3,173533	3,272729	12,69413
1,2	0,594263	0,3421879	0,06354917	4,153981	4,257107	3,46165	3,547589	13,8466
1,3	0,5726276	0,3604345	0,06693784	4,863564	4,971881	3,741203	3,824523	14,96481
1,4	0,551816	0,3779865	0,07019749	5,613711	5,742123	4,009794	4,101517	16,03918
1,5	0,5317962	0,3948707	0,07333312	6,396575	6,564086	4,264383	4,376057	17,05753
1,6	0,5125373	0,4111132	0,07634959	7,201711	7,4319	4,50107	4,644937	18,00428
1,7	0,4940091	0,4267393	0,07925159	8,015112	8,336759	4,714772	4,903976	18,85909
1,8	0,4761827	0,4417736	0,08204368	8,817734	9,265684	4,898741	5,147602	19,59496
1,9	0,4590299	0,4562399	0,08473026	9,583225	10,199612	5,043803	5,368217	20,17521
2	0,4425235	0,4701609	0,08731559	10,274261	11,110328	5,13713	5,555164	20,54852

Table 4.1 – Variation des mesures de performance dans le système en fonction de λ .

Commentaire :

Pour ce premier tableau (4.1), on remarque que la croissance de λ (taux d'arrivées) implique une croissance de toutes les mesures de performances sauf la probabilité p_0 (que le serveur soit disponible) cela est dû au nombre important de clients qui arrivent au système.

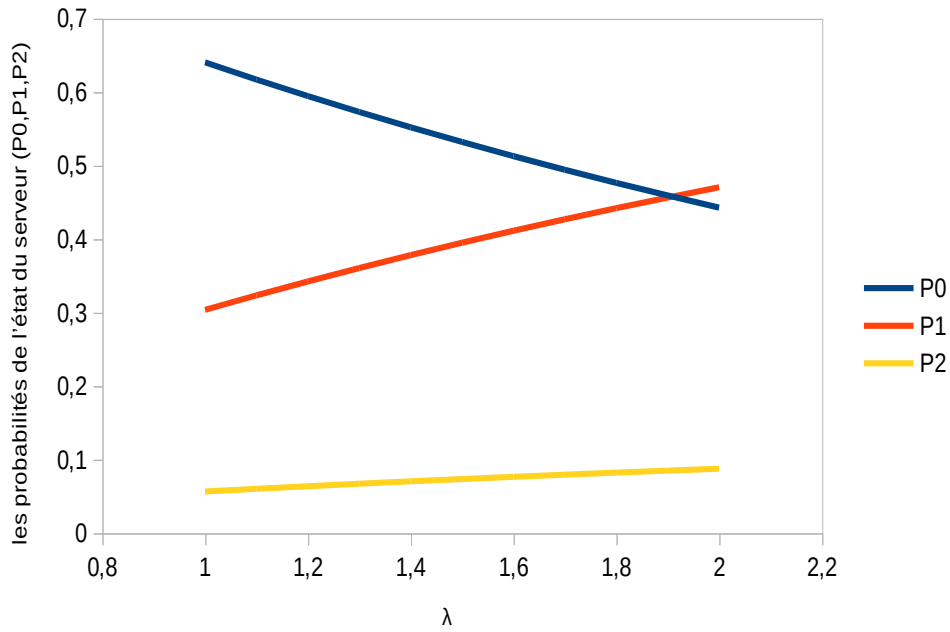


Figure 4.3 – Effet de λ sur les probabilités de l'état du serveur.

✚ la croissance de λ implique une croissance de p_1 et une décroissance de p_0 .

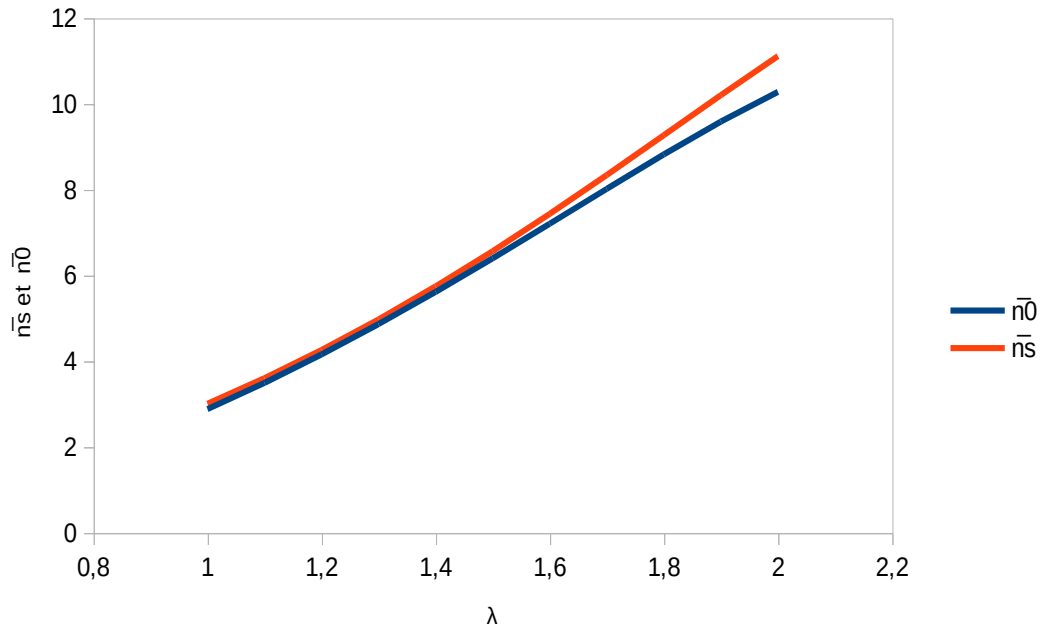


Figure 4.4 – Effet de λ sur le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite.

✚ Avec la croissance de λ , nous constatons que \bar{n}_0 et \bar{n}_s croissent aussi.

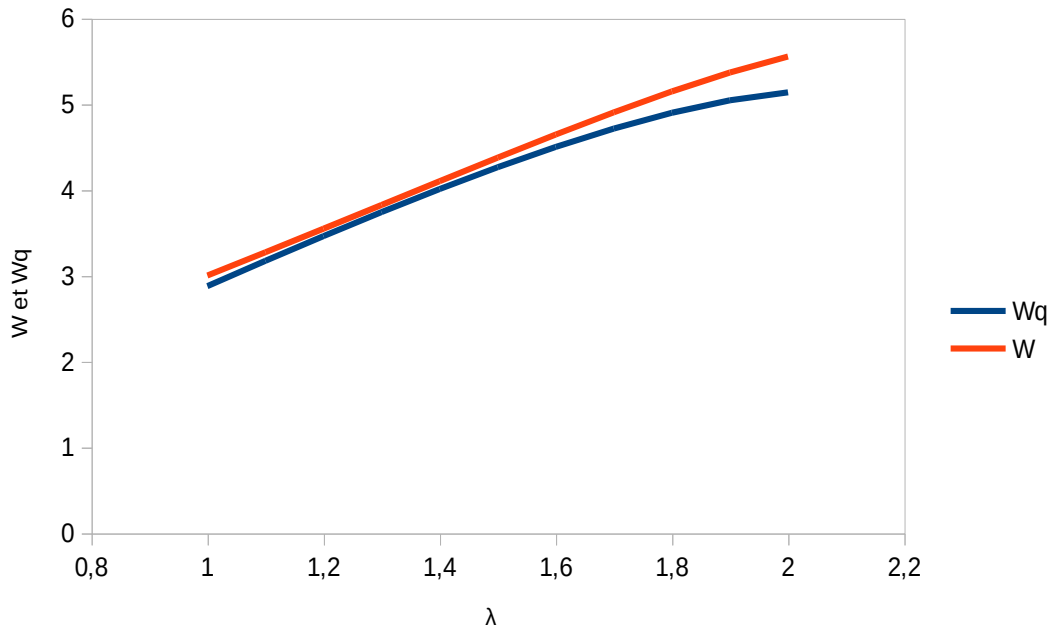


Figure 4.5 – Effet de λ sur le temps moyen de séjour des clients dans le système et dans l’orbite.

✚ le temps moyen de séjour dans le système et dans l’orbite croît avec la croissance de λ .

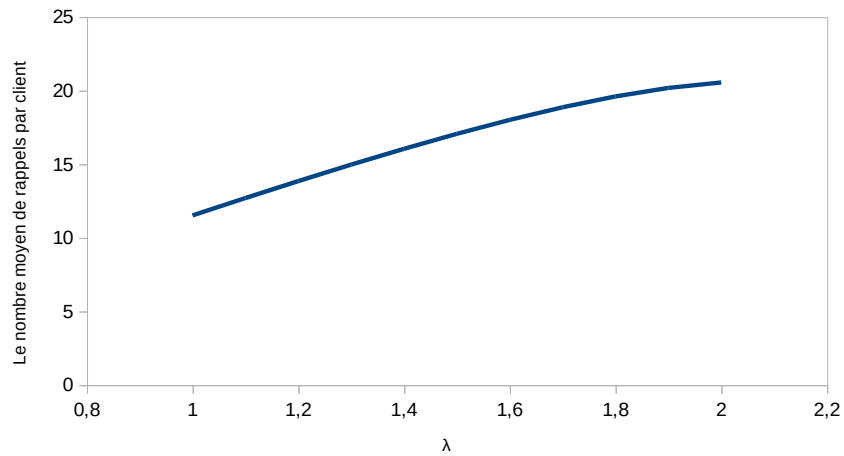


Figure 4.6 – Effet de λ sur le nombre moyen de rappels par client.

✚ le nombre moyen de rappels par client croît avec la croissance de λ .

4.6.2 L'effet du taux d'impatience γ sur le modèle :

On fait varier le taux d'impatience γ sur les mesures de performance pour $\beta=7$, $\mu=3$, $\lambda=2$, $\alpha=1.3$, $\theta=4$.

γ	p_0	p_1	p_2	\bar{n}_0	\bar{n}_s	W_q	W	\bar{R}
2	0,4425235	0,4701609	0,08731559	10,274261	11,110328	5,13713	5,555164	20,548521
2,5	0,4548743	0,4597446	0,08538114	9,547934	10,058349	4,773967	5,029175	19,095868
3	0,462734	0,4531159	0,0841501	8,915523	9,227048	4,457762	4,613524	17,831046
3,5	0,4676093	0,4490042	0,0833865	8,284267	8,477291	4,142134	4,238645	16,568534
4	0,4704006	0,4466501	0,08294931	7,610173	7,741431	3,805087	3,870715	15,220347
4,5	0,4716792	0,4455718	0,08274904	6,871022	6,982548	3,435511	3,491274	13,742045
5	0,4718251	0,4454487	0,08272618	6,056438	6,179734	3,028219	3,089867	12,112876
5,5	0,4711009	0,4460595	0,08283961	5,163492	5,321673	2,581746	2,660837	10,326985
6	0,4696938	0,4472462	0,08306001	4,194514	4,403469	2,097257	2,201734	8,389028
6,5	0,4677409	0,4488932	0,08336589	3,155896	3,424936	1,577948	1,712468	6,311791
7	0,4653448	0,450914	0,08374117	2,057408	2,389618	1,028704	1,194809	4,114817

Table 4.2 – Variation des mesures de performance dans le système en fonction de γ .

Commentaire :

Le tableau (4.2) montre que le long de la croissance de γ (le taux d'impatience) le nombre moyen de client dans le système et dans l'orbite ainsi que le temps de séjour dans le système et dans l'orbite décroissent, cela est dû à l'abandon des clients qui croît par la croissance de γ . Et comme l'abandon des clients croît le nombre moyen de rappels par client diminue.

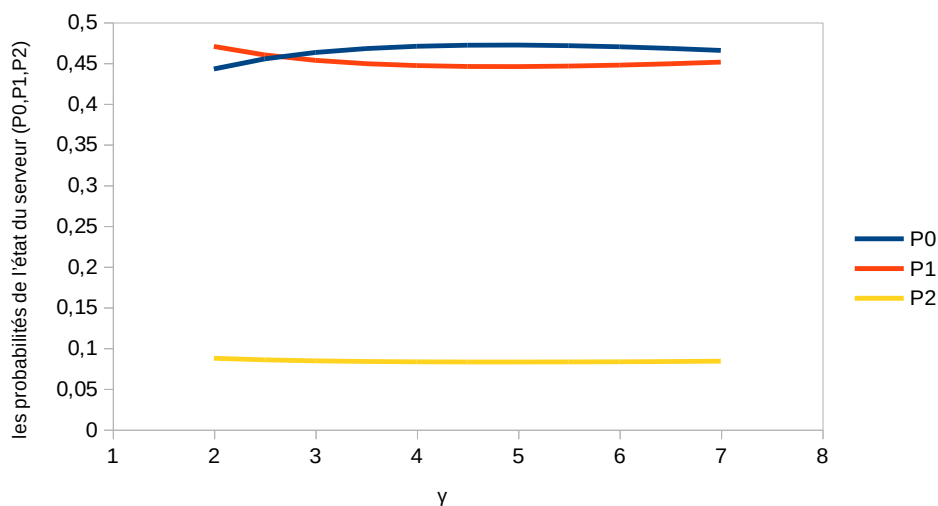


Figure 4.7 – Effet de γ sur les probabilités de l'état du serveur.

✚ La croissance de γ implique une croissance de p_0 et une décroissance de p_1

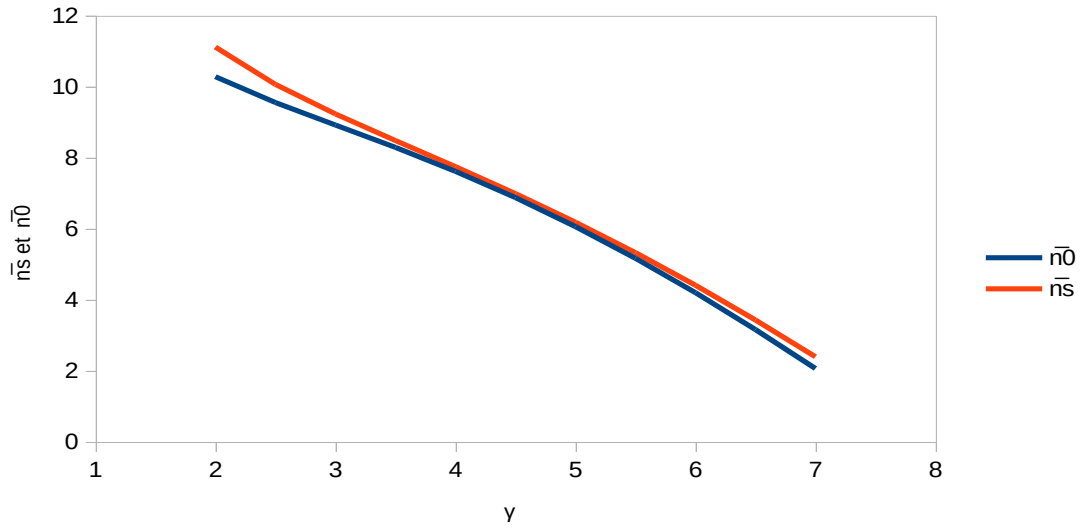


Figure 4.8 – Effet de γ sur le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite.

✚ La croissance de γ , entraîne une décroissance de \bar{n}_0 et \bar{n}_s .

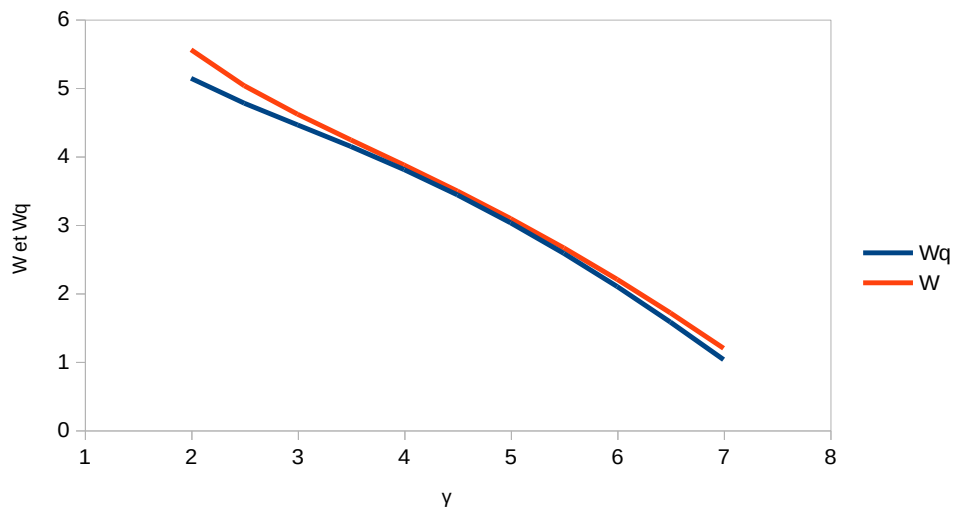


Figure 4.9 – Effet de γ sur le temps moyen de séjour des clients dans le système et dans l'orbite.

✚ Le temps moyen de séjour dans le système et dans l'orbite décroît avec la croissance de γ .

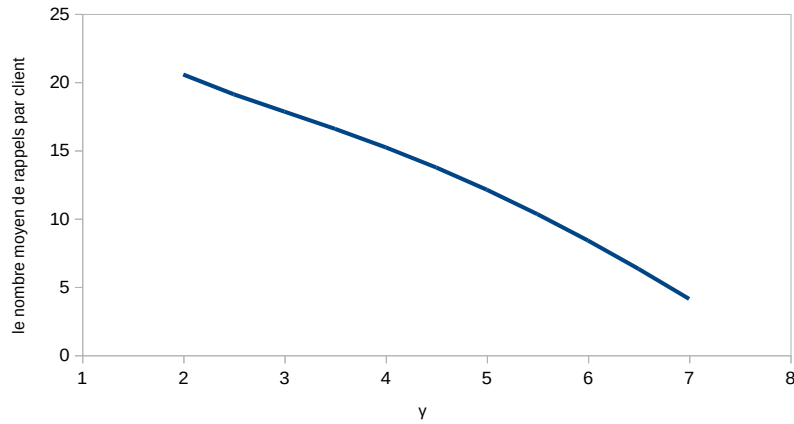


Figure 4.10 – Effet de γ sur le nombre moyen de rappels par client.

✚ Le nombre moyen de rappels par client décroît par la croissance de γ .

4.6.3 L'effet du taux de réparation β sur le modèle :

On fait varier le taux de réparation β sur les mesures de performance pour $\gamma = 1$, $\mu = 5$, $\lambda = 2$, $\alpha = 0.3$, $\theta = 2$.

β	p_0	p_1	p_2	\bar{n}_0	\bar{n}_s	W_q	W	\bar{R}
2	0,5756458	0,3690037	0,05535055	8,478846	9,096963	4,239423	4,548482	8,478846
2,5	0,5867261	0,3689946	0,04427935	7,549585	8,158196	3,774792	4,079098	7,549585
3	0,5941128	0,3689884	0,03689884	6,891537	7,521986	3,445768	3,760993	6,891537
3,5	0,5993888	0,368984	0,0316272	6,410086	7,067676	3,205043	3,533838	6,410086
4	0,6033458	0,3689806	0,02767355	6,045221	6,728618	3,022611	3,364309	6,045221
4,5	0,6064235	0,368978	0,02459853	5,760167	6,46649	2,880083	3,233245	5,760167
5	0,6088855	0,3689759	0,02213855	5,531754	6,258033	2,765877	3,129017	5,531754
5,5	0,6109	0,3689742	0,02012586	5,344838	6,088416	2,672419	3,044208	5,344838
6	0,6125786	0,3689727	0,01844864	5,189163	5,947771	2,594582	2,973885	5,189163
6,5	0,613999	0,3689715	0,01702946	5,057564	5,829293	2,528782	2,914647	5,057564
7	0,6152165	0,3689705	0,01581302	4,944893	5,728145	2,472446	2,864072	4,944893

Table 4.3 – Variation des mesures de performance dans le système en fonction de β .

Commentaire :

Pour ce tableau(4.3), on remarque que la croissance de β (taux de réparation) provoque une décroissance de p_2 et une croissance de p_0 ce qui est logique, on remarque aussi que le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite diminue ainsi que les temps d'attente dans le système et dans l'orbite. Cela est interprété par la croissance du taux de réparation (le service est réparé rapidement)

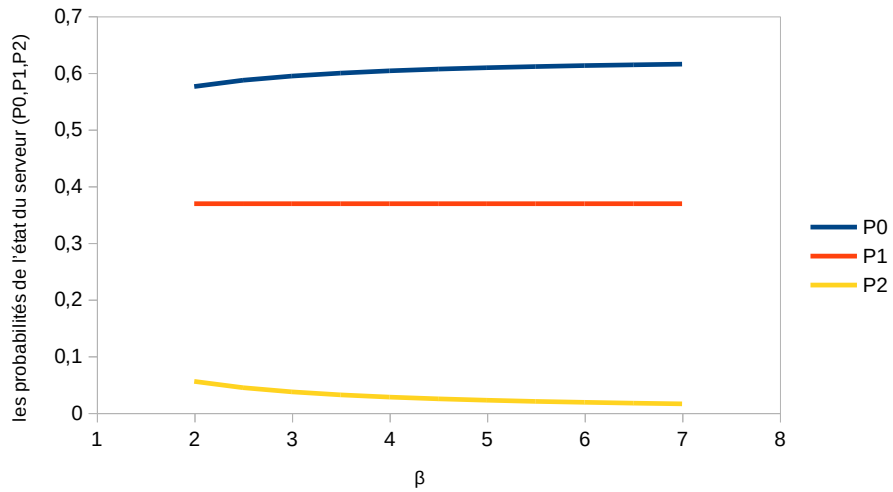


Figure 4.11 – Effet de β sur les probabilités de l'état du serveur.

✚ La croissance de β implique une croissance de p_0 et une décroissance de p_2 .

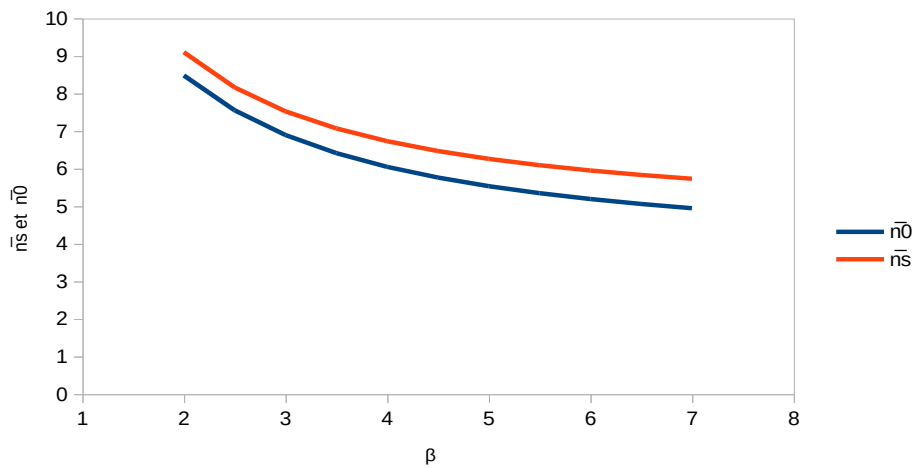


Figure 4.12 – Effet de β sur le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite.

✚ \bar{n}_0 et \bar{n}_s décroissent lorsque β croît.

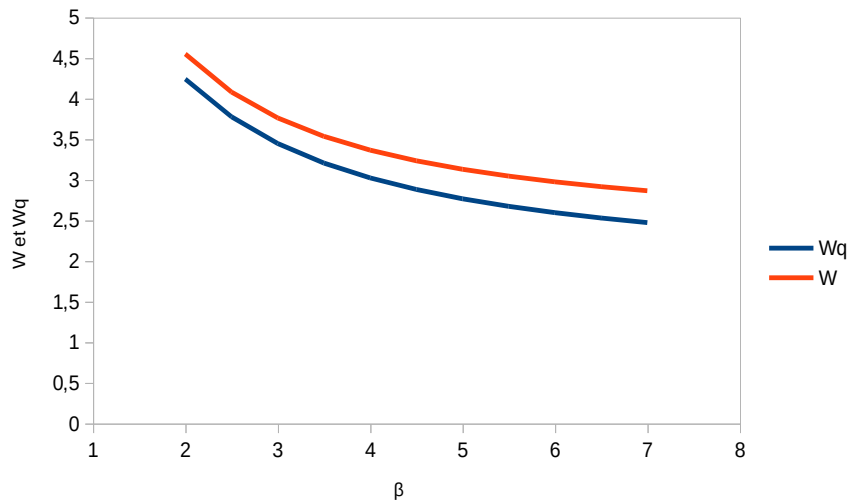


Figure 4.13 – Effet de β sur le temps moyen de séjour des clients dans le système et dans l’orbite.

- ✚ Le temps moyen de séjour dans le système et dans l’orbite décroît avec la croissance de β .

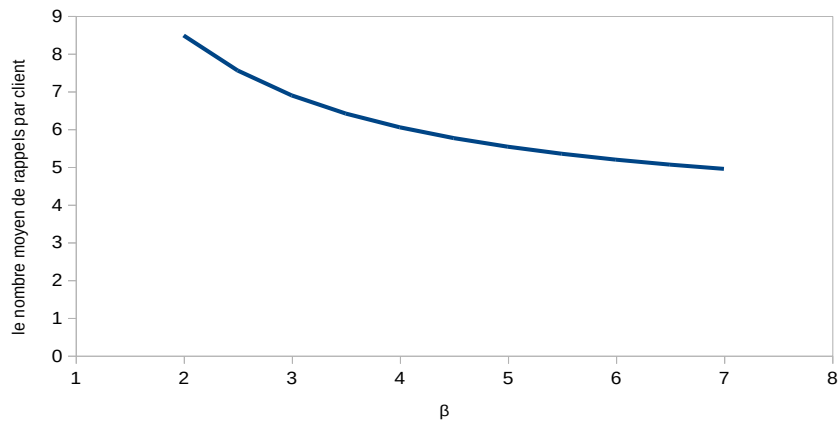


Figure 4.14 – Effet de β sur le nombre moyen de rappels par client.

- ✚ Le nombre moyen de rappels par client décroît avec la croissance de β .

4.6.4 L'effet de variations de α et γ sur le nombre moyen de clients en orbite :

On fait varier α et γ sur le nombre moyen de clients en orbite pour $\mu=7.2$, $\lambda=2$, $\beta=7$, $\theta=4$.

Le nombre moyen de clients en orbite									
	$\gamma=0,5$	$\gamma=1$	$\gamma=1,5$	$\gamma=2$	$\gamma=2,5$	$\gamma=3$	$\gamma=3,5$	$\gamma=4$	$\gamma=5$
$\alpha=1$	6,813374	6,38338	6,023883	5,677026	5,311198	4,908694	4,460141	3,961729	2,819602
$\alpha=1,5$	7,30645	6,633644	6,12576	5,684577	5,259823	4,824082	4,362424	3,867563	2,773583
$\alpha=2$	7,832525	6,875337	6,209395	5,674053	5,193277	4,727294	4,254526	3,763743	2,713921
$\alpha=2,5$	8,410561	7,110908	6,275359	5,646325	5,112866	4,619941	4,138307	3,652434	2,643866
$\alpha=3$	9,071785	7,343355	6,323905	5,601972	5,019628	4,503349	4,015297	3,53539	2,566003

Table 4.4 – Variation du nombre moyen de clients dans l'orbite en fonction de γ et α .

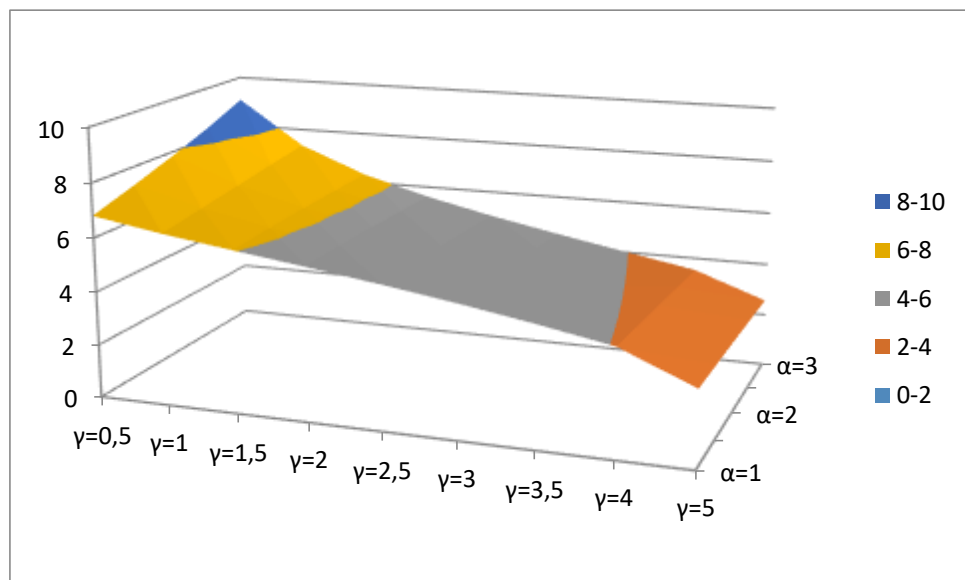


Figure 4.15 – Effet de γ et α sur le nombre moyen de clients dans l'orbite.

Commentaire :

Pour les petites valeurs de γ on remarque que le nombre moyen de clients en orbite croit avec la croissance de α , et il devient décroissant quand γ augmente ce qui est logique (l'interruption du service entraîne une augmentation du nombre de clients en orbite par contre l'impatience des clients le réduit).

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un système M/M/1 avec rappels, serveur non fiable et clients impatients. On a déterminé les fonctions génératrices partielles de la distribution stationnaire de l'état du système. Diverses mesures de performance et indice de fiabilité sont obtenus en utilisant les probabilités d'état. Ces études théoriques sont soutenues par des illustrations numériques.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressées à un modèle de files d'attente avec rappels, serveur non fiable et clients impatients. Vu la complexité du modèle nous avons eu recours aux fonctions génératrices, obtenues à partir du graphe de transition du processus associé et des équations de KOLMOGOROV. À l'aide de ces fonctions génératrices, nous avons obtenu plusieurs mesures de performance de notre modèle, telles que le nombre moyen de clients dans le système et dans l'orbite, la probabilité que le serveur soit occupé, libre ou en panne ainsi que la durée moyenne d'attente et le nombre moyen de rappels par client. Les résultats obtenus sont appuyés par des illustrations numériques permettant de déterminer l'impact des paramètres sur certaines mesures de performance.

Les résultats obtenus dans ce travail, permettent d'envisager de nouvelles perspectives de recherche, on peut citer :

- Entreprendre la même démarche pour généraliser cette étude aux modèles d'attente avec rappels plus complexes.
- Extension du modèle étudié au cas où :
 - Les pannes sont passives.
 - La maintenance est préventive.
- Application des résultats obtenus pour évaluer les performances des systèmes réels.

Annexes

Code R :

L'effet du taux d'arrivée

#les paramètres

#l (lambda) taux d'arrivées

#u (mu) taux de service

#t (thêta) taux de rappels

#a (alpha) taux de pannes

#b (beta) taux de réparation

#g (gamma) taux d'impatience

#####

b=7

u= 3

l= seq(1,2,by=0.1)

g=2

a=1.3

t=4

P21=0.1

$t*(a+u-l+g) > l*(l-g) + (a/b)*(l+b-g)*(l+t)$

$(b^2)*(t*(a+u-l+g)-l*(l-g)-$
 $(a/b)*(l+b-g)*(l+t)) \geq P21*g*(2*g+b)*((a+b)*(l+t)+b*(a+u))$

#calcul de P00

$s1 = ((b+a)*(l+t) + b*(a+u))$

$s2 = b*(t*(a+u+g-l) - l*(l-g) - (a/b)*(l+b-g)*(l+t))$

$f = (((g*(l/u)*(l+t) + (l*t))*s1) + (t*s2))$

$s = ((l+t)*s2) - ((g/b)*(b+2*g)*(l+t)*P21*s1)$

$p00 = s/f$

p00

#calcul de P1

$$P1N=(g*(l/u)*(l+t)+l*t)*p00+(g/b)*(l+t)*(2*g+b)*P21$$

$$P1D=t*(a+u-l+g)-l*(l-g)-(a/b)*(l+b-g)*(l+t)$$

$$P1=P1N/P1D$$

P1

#calcul de P2

$$P2=(a/b)*P1$$

P2

#calcul de P0

$$P0=((a+u)/(l+t))*P1+(t/(l+t))*p00$$

P0

#calcul du nombre moyen de clients dans le système

$$Aprim=((2*g)/(b^2))*(l+t)*((2*g+b)*(l*b-(l+t)*(g-l))-g*b*(l+t))*P21$$

$$Bprim=(-l)*(l+t)*(2*t+1)$$

$$Cprim=((2*a)/(b^2))*(l+t)*((l+b-g)*(l*b-(g-l)*(l+t))+g*b*(l+t))$$

$$A=(g/b)*(2*g+b)*((l+t)^2)*P21$$

$$B=(l+t)*(t*(a+u+g-l)-l*(l-g))$$

$$C=(a/b)*(l+b-g)*(l+t)^2$$

$$k=(((g*l)/u)*(l+t)^2+l*t*(l+t))*p00$$

$$P1prim=(Aprim*(B-C)-(Bprim-Cprim)*(k+A))/((B-C)^2)$$

$$L=((P1prim*(((t+l)*(b+a)+b*(a+u))/(b*(l+t))))+(P1*(1+(((2*b)+l-g)/(b^2))+((a+u+g-l)*(l+t)-l*(a+u))/((l+t)^2))))+(((2*g-1)/b)*P21)-((l*p00*((g/u)*(l+t)+t))/((l+t)^2)))$$

L

#calcul de nombre moyen de clients en orbite

$$L0=(P1prim*(((l+t)*(b+a)+b*(a+u-2*g))/(b*(l+t))))+P1*(((a/b^2)*(b-(g-l))+((g-l)*(l+t)+t*(a+u-2*g))/((l+t)^2)))+(g/b)*P21-(((l*p00*((g/u)*(l+t)+t))/((l+t)^2)))$$

L0

#calcul de temps moyen de séjour des clients dans le système

$$W=L/l$$

W

#calcul de temps moyen d'attente d'un client en orbite

$$Wq=L0/l$$

Wq

#calcul de nombre moyen de rappels par client

$$d=t*Wq$$

d

L'effet du taux d'impatience

$$b=7$$

$$u=3$$

$$l=2$$

$$g= \text{seq}(2,7,\text{by}=0.5)$$

$$a=1.3$$

$$t=4$$

$$P21=0.1$$

$$t*(a+u-l+g)>l*(l-g)+(a/b)*(l+b-g)*(l+t)$$

$$(b^2)*(t*(a+u-l+g)-l*(l-g)-$$
$$(a/b)*(l+b+g)*(l+t))>=P21*g*(2*g+b)*((a+b)*(l+t)+b*(a+u))$$

#calcul de P00

$$s1=((b+a)*(l+t)+b*(a+u))$$

$$s2=b*(t*(a+u+g-l)-l*(l-g)-(a/b)*(l+b-g)*(l+t))$$

$$f=(((g*(l/u)*(l+t)+(l*t))*s1)+(t*s2))$$

$$s=((l+t)*s2)-((g/b)*(b+2*g)*(l+t)*P21*s1)$$

$$p00=s/f$$

p00

#calcul de P1

$$P1N=(g*(l/u)*(l+t)+l*t)*p00+(g/b)*(l+t)*(2*g+b)*P21$$

$$P1D=t*(a+u-l+g)-l*(l-g)-(a/b)*(l+b-g)*(l+t)$$

$$P1=P1N/P1D$$

P1

#calcul de P2

$$P2=(a/b)*P1$$

P2

#calcul de P0

$$P0=((a+u)/(l+t))*P1+(t/(l+t))*p00$$

P0

#calcul du nombre moyen de clients dans le système

$$Aprim=((2*g)/(b^2))*(l+t)*((2*g+b)*(l*b-(l+t)*(g-l))-g*b*(l+t))*P21$$

$$Bprim=(-l)*(l+t)*(2*t+1)$$

$$Cprim=((2*a)/(b^2))*(l+t)*((l+b-g)*(l*b-(g-l)*(l+t))+g*b*(l+t))$$

$$A=(g/b)*(2*g+b)*((l+t)^2)*P21$$

$$B=(l+t)*(t*(a+u+g-l)-l*(l-g))$$

$$C=(a/b)*(l+b-g)*(l+t)^2$$

$$k=(((g*l)/u)*(l+t)^2+l*t*(l+t))*p00$$

$$P1prim=(Aprim*(B-C)-(Bprim-Cprim)*(k+A))/((B-C)^2)$$

$$L=((P1prim*(((t+l)*(b+a)+b*(a+u))/(b*(l+t))))+(P1*(1+(((2*b)+l-g)/(b^2))+((a+u+g-l)*(l+t)-l*(a+u))/((l+t)^2))))+(((2*g-1)/b)*P21)-((l*p00*((g/u)*(l+t)+t))/((l+t)^2)))$$

L

#calcul de nombre moyen de clients en orbite

$$L0=(P1prim*(((l+t)*(b+a)+b*(a+u-2*g))/(b*(l+t)))+P1*((a/b^2)*(b-(g-l))+((g-l)*(l+t)+t*(a+u-2*g))/((l+t)^2)))+(g/b)*P21-((l*p00*((g/u)*(l+t)+t))/((l+t)^2)))$$

L0

#calcul de temps moyen de séjour des clients dans le système

$$W=L/l$$

W

#calcul de temps moyen d'attente d'un client en orbite

$$Wq=L0/l$$

Wq

#calcul de nombre moyen de rappels par client

$$d=t*Wq$$

d

L'effet du taux de réparation :

$b = \text{seq}(2,7, \text{by}=0.5)$

$u = 5$

$l = 2$

$g = 1$

$a = 0.3$

$t = 2$

$P_{21} = 0.1$

$t*(a+u-l+g) > l*(1-g) + (a/b)*(l+b-g)*(l+t)$

$(b^2)^*(t*(a+u-l+g) - l*(1-g) - (a/b)*(l+b-g)*(l+t)) \geq P_{21}*g*(2*g+b)*((a+b)*(l+t) + b*(a+u))$

#calcul de P00

$s1 = ((b+a)*(l+t) + b*(a+u))$

$s2 = b*(t*(a+u+g-l) - l*(1-g) - (a/b)*(l+b-g)*(l+t))$

$f = (((g*(l/u)*(l+t) + l*t)*s1) + (t*s2))$

$s = ((l+t)*s2) - ((g/b)*(b+2*g)*(l+t)*P_{21}*s1)$

$p00 = s/f$

$p00$

#calcul de P1

$P_{1N} = (g*(l/u)*(l+t) + l*t)*p00 + (g/b)*(l+t)*(2*g+b)*P_{21}$

$P_{1D} = t*(a+u-l+g) - l*(1-g) - (a/b)*(l+b-g)*(l+t)$

$P1 = P_{1N}/P_{1D}$

$P1$

#calcul de P2

$P2 = (a/b)*P1$

$P2$

#calcul de P0

$P0 = ((a+u)/(l+t))*P1 + (t/(l+t))*p00$

$P0$

#calcul du nombre moyen de clients dans le système

$$A_{\text{prim}} = ((2 * g) / (b^2)) * (1 + t) * ((2 * g + b) * (1 * b - (1 + t) * (g - l)) - g * b * (1 + t)) * P21$$

$$B_{\text{prim}} = (-l) * (1 + t) * (2 * t + 1)$$

$$C_{\text{prim}} = ((2 * a) / (b^2)) * (1 + t) * ((1 + b - g) * (1 * b - (g - l) * (1 + t)) + g * b * (1 + t))$$

$$A = (g/b) * (2 * g + b) * ((1 + t)^2) * P21$$

$$B = (1 + t) * (t * (a + u + g - l) - l * (1 - g))$$

$$C = (a/b) * (1 + b - g) * (1 + t)^2$$

$$k = (((g * l) / u) * (1 + t)^2 + l * t * (1 + t)) * p00$$

$$P1_{\text{prim}} = (A_{\text{prim}} * (B - C) - (B_{\text{prim}} - C_{\text{prim}}) * (k + A)) / ((B - C)^2)$$

$$L = ((P1_{\text{prim}} * (((t + 1) * (b + a) + b * (a + u)) / (b * (1 + t)))) + (P1 * (1 + (((2 * b) + l - g) / (b^2)) + (((a + u + g - l) * (1 + t) - l * (a + u)) / ((1 + t)^2)))) + ((2 * g - 1) / b) * P21 - ((l * p00 * ((g / u) * (1 + t) + t)) / ((1 + t)^2)))$$

L

#calcul de nombre moyen de clients en orbite

$$L0 = (P1_{\text{prim}} * (((1 + t) * (b + a) + b * (a + u - 2 * g)) / (b * (1 + t)))) + P1 * ((a / b^2) * (b - (g - l)) + ((g - l) * (1 + t) + (t * (a + u - 2 * g))) / ((1 + t)^2)) + (g / b) * P21 - ((l * p00 * ((g / u) * (1 + t) + t)) / ((1 + t)^2))$$

L0

#calcul de temps moyen de séjour des clients dans le système

$$W = L / l$$

W

#calcul de temps moyen d'attente d'un client en orbite

$$Wq = L0 / l$$

Wq

#calcul de nombre moyen de rappels par client

$$d = t * Wq$$

d

L'effet de variations de α et γ sur le nombre moyen de clients en orbite :

$b=7$

$u= 7.2$

$l=2$

$\text{gamma}=\text{list}(0.5,1,1.5,2,3.5,4,4.5,5)$

$\text{alpha}=\text{list}(1,1.5,2,2.5,3)$

$t=4$

$P21=0.1$

for(g in gamma){

for(a in alpha){

$t*(a+u-l+g)>l*(l-g)+(a/b)*(l+b-g)*(l+t)$

$(b^2)*(t*(a+u-l+g)-l*(l-g)-$
 $(a/b)*(l+b-g)*(l+t))>=P21*g*(2*g+b)*((a+b)*(l+t)+b*(a+u))$

$s1=((b+a)*(l+t)+b*(a+u))$

$s2=b*(t*(a+u+g-l)-l*(l-g)-(a/b)*(l+b-g)*(l+t))$

$f=(((g*(l/u)*(l+t)+(l*t))*s1)+(t*s2))$

$s=((l+t)*s2)-((g/b)*(b+2*g)*(l+t)*P21*s1)$

$p00=s/f$

$P1N=(g*(l/u)*(l+t)+l*t)*p00+(g/b)*(l+t)*(2*g+b)*P21$

$P1D=t*(a+u-l+g)-l*(l-g)-(a/b)*(l+b-g)*(l+t)$

$P1=P1N/P1D$

$\text{Aprim}=((2*g)/(b^2))*(l+t)*((2*g+b)*(l*b-(l+t)*(g-l))-g*b*(l+t))*P21$

$\text{Bprim}=(-l)*(l+t)*(2*t+1)$

$\text{Cprim}(((2*a)/(b^2))*(l+t)*((l+b-g)*(l*b-(g-l)*(l+t))+g*b*(l+t)))$

$A=(g/b)*(2*g+b)*((l+t)^2)*P21$

$B=(l+t)*(t*(a+u+g-l)-l*(l-g))$

$C=(a/b)*(l+b-g)*(l+t)^2$

$k=(((g*l)/u)*(l+t)^2+l*t*(l+t))*p00$

$\text{P1prim}=(\text{Aprim}*(B-C)-(\text{Bprim}-\text{Cprim})*(k+A))/((B-C)^2)$

#calcul de nombre moyen de clients en orbite

```

L0=(P1prim*(((1+t)*(b+a)+b*(a+u-2*g))/(b*(1+t)))+P1*((a/b^2)*(b-(g-l))+((g-
l)*(1+t)+(t*(a+u-2*g)))/((1+t)^2)))+(g/b)*P21-((l*p00*((g/u)*(1+t)+t))/((1+t)^2))
print(L0)
}
}

```


Bibliographie

- [1] W. A, A short introduction to queueing theory., *Telecommunication Networks Group*, 1999.
- [2] A. Aissani, A survey on retrial queueing models, *Journées de statistiques appliquées*, p. 1-11, Avril 1994.
- [3] A. Aissani, On the M/G/1/1 queueing system with repeated orders and unreliable server, *Journal of Technology*, 6, p. 98–123, 1988.
- [4] A. Aissani, Propriétés de second ordre des modèles d'attente, application à la conception des systèmes de production, *4ème Rencontre de Recherche Opérationnelle*, p. 5-10, 06-08 Octobre 1996.
- [5] J. R. Artalejo and A. Gomez-Corral, Retrial queueing System : A computation approach, 2008.
- [6] J. R. Artalejo, New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers., *Statistica Neerlandica*, 48, p. 23– 36, 1994.
- [7] J. R. a. C. G. Artalejo, Steady state analysis of an M/G/1 queue with repeated attempts and two phase service, *Quality Technology and Quantitative Management*, 1(2) , p. 189-199, 2004.
- [8] L. BOUTARFA, Modèles d'attente avec rappels et priorité et leurs applications, Thèse de Doctorat en Mathématiques, ANNABA, 2015
- [9] G. F. a. M. Brun, On a system with impatience and repeated calls, *Queueing theory and applications*., p. 283-305, 1988.
- [10] E. L. J. C. Marcovici, Utilisation des techniques de fiabilité en mécanique, *Technique et documentation*, 1974.
- [11] V. G. K. a. B. D. Choi., Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs, *Queueing Systems*, 7(2), p. 191-208, 1990.
- [12] Q. C. a. B. Conolly, New results in the theory of repeated orders queueing systems, *Journale Application Probability*, 16, p. 631-640, 1979.
- [13] M. J. G.-G. J. M. P. V. M.-B. a. C.-G. V. Domenech-Benlloch, Generalized truncated methods for an efficient solution of retrial systems., *Mathematical Problems in Engineering*, 2008.

- [14] G. I. Falin, Single-line repeated orders queueing systems., *Engineering Cybernetics Review*, 21 (6) , p. 21-25, 1983.
- [15] G. Falin, Une enquête sur les files d'attente pour un nouveau procès., *Queueing Systems*, 7, p. 127–167, 1990.
- [16] L. Ferhat, Approximation dans le système de files d'attente avec rappels, à serveur non fiable et clients impatient., Thèse de Doctorat L.M.D, Tizi-ouzou, 2019.
- [17] F. Guerin, Estimation de la Fiabilité par les essais, Université d'Angers, Thèse de Doctorat, 2005.
- [18] V. G. K. a. H. Liang, Retrial queues revisited., *Frontiers in Queueing*, p. 19-34, 1997.
- [19] P. T. M. Tahan clement, Fiabilité et maintenance industrielle., Université de Québec, école de technologie supérieur, Département de génie mécanique., 2003.
- [20] J. R. A. a. M. Martin, Analysis of an M/G/1 queue with two types of impatient units, *Advances in Applied Probability*, 27, p. 840-861, 1995.
- [21] K. R. e. M. Massissilia, Numérique de la file d'attente M/G/1/N, Mémoire de licence en Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, 2010.
- [22] A. G. Mihalache, Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes Mécatroniques : application sur système embarqué, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2005.
- [23] M. Mounias, Estimation de la Fiabilité d'un système et de ces composants, Mémoire de fin d'étude, Université Mentouri, Constantine, 2009.
- [24] N.K.Arrar, Problèmes de convergence, Optimisation d'algorithmes et Analyse stochastique de systèmes de file d'attente avec rappels, Université Badji Mokhtar, Thèse de Doctorat, Annaba, 2012.
- [25] J. R. A. a. V. Pla, On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems, *Computers & Mathematics with Applications*, 57, p. 217-229.
- [26] L. RAIAH, Modèles d'attente avec rappels à interruptions de service, Université Saad Dahlab, Thèse de Doctorat, Blida, 2017.
- [27] J. L. e. J. Roberts, A new approach to the single server repeat attempts system with balking". Proc. 3rd Int., *Seminar on Teletraffic Theory*, pp. 290-293, 1984.
- [28] L. Rémi, Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables, Application à un système photovoltaïque, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2011, 2011.

- [29] G. F. a. J. Templeton, *Retrial Queues*, *Chapman and Hall*, 1997.
- [30] T. Y. e. J. G. C. Templeton, A survey on retrial queues, *Queueing Systems*. 2,201-233, 1987.
- [31] T. Y. a. J. Templeton., The Ca/M/s/m retrial queue: a computational approach., *ORSA Journal on Computing*, 4(2), p. 182–191, 1992.
- [32] A. Villemeur, *Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels : Fiabilité*,1988.
- [33] R. Wilkinson, Theory for toll trac engineering in the ASA, *Bell systems Thechnical journal*, 35, (12), p. 421-514, 1956.
- [34] J. W. e. F. Zhang, Strategic joining in M/M/1 retrial queues, *European Journal of Operational Research*, 203, p. 76-87, 2013.